Au Nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

Livre d'algèbre et d'al-muqābala de Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī

Ce livre a été composé par Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī.
Il l'a commencé en disant :

Grâces soient rendues à Dieu pour ses bienfaits, de ses grâces dont il est digne. Rendre ces grâces — devoir pour celui, entre ses créatures, qui l'adore — prend le nom de remerciement, demande à être accru et préserve de la déchéance : en reconnaissant Sa Divinité, en s'inclinant devant Sa Toute-Puissance et en se prosternant devant Sa Majesté.

Il a envoyé Muḥammad — que la Bénédiction et le Salut soient sur lui — avec pour mission la Prophétie, après tout un temps où il n'y avait pas eu de Messagers, de négation de la vérité et d'effacement de la voie de la rectitude. Par lui il a libéré[1] de l'aveuglement ; par lui il a sauvé de la déchéance ; par lui il a multiplié ce qui n'était qu'en petit nombre ; par lui il a rallié ce qui était dispersé. Que le Nom de Dieu, notre Seigneur, soit béni ; que sa Gloire soit exaltée ; que ses Noms soient sanctifiés — il n'y a de Dieu que Lui ; que Dieu bénisse Muḥammad, le Prophète, et les siens, et que le salut soit sur eux.

Les savants du temps passé et des nations d'antan continuaient d'écrire les livres qu'ils composaient dans les diverses sortes de la science et les divers aspects de la sagesse, en vue de ceux qui leur succéderaient et en prévision d'une récompense, dans la mesure de leur capacité [H-2r] et en espérant en retirer récompense, richesse et renommée, et garder la langue

[1] Litt. : « fait voir ».

de la vérité devant laquelle s'amenuisent la plupart des ressources engagées et la difficulté qu'ils ont endurée pour élucider les secrets de la science et ce qu'elle renferme d'obscur. Ou bien c'est un homme qui est parvenu le premier à <découvrir> ce qui n'était pas découvert avant lui et l'a légué après lui ; ou bien un homme qui a expliqué ce que ses prédécesseurs avaient laissé inaccessible, pour en éclairer la méthode, en aplanir la voie et en rapprocher l'accès ; ou bien un homme qui a trouvé une faille dans certains livres, et qui alors a rassemblé ce qui était éparpillé, a redressé sa stature en ayant bonne opinion de son auteur, sans renchérir sur lui et sans s'enorgueillir de ce que lui-même a réalisé.

La faveur que Dieu a accordée à l'Imām al-Ma'mūn, Prince des Croyants, outre le Khalifa dont il lui a consenti l'héritage, l'a investi de l'habit et l'a orné du lustre ; en plus de cela, le désir des belles-lettres de s'attirer ceux qui s'y adonnent, de se les approcher, de répandre sur eux sa protection [B-61r] et de les aider à éclaircir ce qui était impénétrable et à faciliter ce qui était difficile, m'ont exhorté à [I-16] composer dans le calcul de l'algèbre et d'*al-muqābala* un livre concis ; j'ai voulu qu'il enferme ce qui est subtil dans le calcul et ce qui en lui est le plus noble, ce dont les gens ont nécessairement besoin dans leurs héritages, leurs legs, leurs partages, leurs arbitrages, leurs commerces, et dans tout ce qu'ils traitent [O-2r] les uns avec les autres lorsqu'il s'agit de l'arpentage des terres, de la percée des canaux, [A-2r] de la mensuration, et d'autres choses relevant du calcul [H-2v] et de ses sortes — en y mettant avant tout la bonne volonté et en espérant que les hommes de lettres lui consentent la place qui est la sienne, grâce aux bienfaits de Dieu très haut, à ses dons majestueux, à la beauté de ses mises à l'épreuve, dont ils sont les dépositaires. C'est de Dieu que me vient le succès en cela et en toutes autres choses. C'est à Lui que je m'en remets, Lui le Seigneur du Trône Sublime. La Bénédiction de Dieu soit sur tous les prophètes et tous les messagers.

Quand j'ai examiné ce dont les gens ont besoin en calcul, j'ai trouvé que tout cela se ramène[2] au nombre et j'ai trouvé que tous les nombres sont composés à partir de l'unité, et que l'unité est incluse dans tous les nombres. J'ai trouvé que tous les nombres que l'on exprime sont ceux qui surpassent l'unité jusqu'à dix. Ainsi, on double et on triple l'unité, et on forme, à partir d'elle, l'unité, le deux, le trois, jusqu'au dix complet. Le dix tient lieu d'unité ; ensuite on le double et on le triple, comme on l'a fait pour l'unité, et on forme à partir de lui le vingt, le trente, jusqu'au cent complet. On double ensuite le cent, et on le triple, comme on l'a fait pour l'unité et pour le dix, jusqu'au mille. De même on répète ensuite le mille pour chaque rang, jusqu'à la fin de ce qu'on saisit dans le nombre.

J'ai trouvé les nombres dont on a besoin dans le calcul d'*al-jabr* et d'*al-muqābala*, selon trois modes qui sont : les racines, les *carrés*, et le nombre simple, [I-17] qui n'est rapporté ni à une racine, ni à un *carré*.

La racine, parmi ces modes, est toute chose multipliée par elle-même, à partir de l'unité, les nombres qui sont au-dessus d'elle, et les fractions qui sont au-dessous d'elle.

Le *carré* est ce qu'on obtient [H-3r] lorsqu'on multiplie la racine par elle-même.

Le nombre simple est un nombre qu'on exprime sans qu'il soit rapporté ni à une racine, ni à un *carré*.

<*Les équations simples*>

Parmi ces trois modes, [B-61v] certains sont égaux aux autres ; par exemple lorsqu'on dit : des *carrés* sont égaux à des racines, des *carrés* sont égaux à un nombre et des racines sont égales à un nombre[3].

Les *carrés* égaux à des racines, c'est par exemple lorsque tu dis : un *carré* est égal à cinq racines[4], la racine du *carré* est donc cinq et le *carré* vingt-cinq, égal à cinq racines ; et lorsque tu dis : un tiers du *carré* est égal à quatre racines, le *carré* tout entier est donc égal à douze racines ; c'est

[2] Litt. : est.

[3] $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$.

[4] Litt. : cinq de ses racines. On optera désormais, sans le signaler, pour cette traduction des expressions équivalentes.

cent quarante-quatre, et sa racine est douze ; et par exemple lorsque tu dis : cinq *carrés* sont égaux à dix racines, un seul *carré* est donc égal à deux racines, la racine du *carré* est deux et le *carré* est quatre. De même pour les *carrés*, qu'ils soient nombreux ou moindres <qu'un *carré*> : on les ramène à un seul *carré*[5].

On procède de même pour les racines qui leur sont égales : elles seront ramenées à ce à quoi a été ramené le *carré*. [I-18]

Les *carrés* égaux à un nombre, c'est par exemple lorsque tu dis : un *carré* est égal [O-2v] à neuf ; c'est le *carré*, et sa racine est trois ; et lorsque tu dis : cinq *carrés* sont égaux à quatre-vingts, un seul *carré* est donc le cinquième de quatre-vingts, c'est-à-dire seize ; et lorsque tu dis : [A-2v] la moitié d'un *carré* est égale à dix-huit, le *carré* est donc égal à trente-six, et sa racine est six.

De même pour tous les *carrés*, [H-3v] ceux qui excèdent <le *carré*> et ceux qui sont moindres <que lui> sont ramenés à un seul *carré*. S'ils sont moindres qu'un *carré*, on les augmente jusqu'à compléter un *carré* entier. On procède de même pour les nombres qui leur sont égaux[6].

Les racines égales à un nombre, c'est par exemple lorsque tu dis : une racine est égale à trois, en nombre ; la racine est donc trois, et le *carré* formé à partir d'elle est neuf ; et lorsque tu dis : quatre racines sont égales à vingt ; une seule racine est donc égale à cinq, et le *carré* formé à partir d'elle est vingt-cinq ; et lorsque tu dis : la moitié d'une racine est égale à dix, la racine est égale à vingt, et le *carré* formé à partir d'elle est quatre cents[7].

[5] Exemples de la première équation : $x^2 = 5x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$; $\frac{1}{3}x^2 = 4\,x \Rightarrow x^2 = 12\,x \Rightarrow x = 12 \Rightarrow x^2 = 144$; $5x^2 = 10x \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$;

en général : $$ax^2 = bx \Rightarrow x^2 = \frac{b}{a}x \Rightarrow x = \frac{b}{a} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Remarque : Les nombres donnés et l'inconnue sont strictement positifs. Les équations sont à résoudre dans $\mathbf{Q}^+(\sqrt{a}) - \{0\}$. Le nombre zéro n'est donc pas considéré comme solution des équations.

[6] Exemples de la deuxième équation : $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$, $5x^2 = 80 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$, $\frac{1}{2}x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$;

en général : $$ax^2 = c \Rightarrow x^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

[7] Exemple de la troisième équation : $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$, $4x = 20 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$, $\frac{1}{2}x = 10 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow x^2 = 400$.

<Les équations combinées>

J'ai trouvé que ces trois modes — les racines, les *carrés* et le nombre — se combinent, et on aura les trois genres combinés, qui sont : des *carrés* plus des racines [B-62r] sont égaux à un nombre ; des *carrés* plus un nombre sont égaux à des racines ; des racines plus un nombre sont égaux à des *carrés*[8].

Les *carrés* plus les racines égaux à un nombre, c'est par exemple lorsque tu dis : un *carré* plus dix racines sont égaux à trente-neuf dirhams, c'est-à-dire que si on ajoute à un *carré* quelconque <une quantité> égale à dix racines, le tout sera trente-neuf.

Procédé : partage en deux moitiés le nombre[9] des racines ; il vient, dans [I-19] ce problème, cinq, que tu multiplies par lui-même ; on a vingt-cinq ; tu l'ajoutes à trente-neuf, on aura soixante-quatre ; tu prends la racine qui est huit, de laquelle tu soustrais la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois, qui est la racine du *carré* que tu veux, et le *carré* est neuf[10].

De même, si [H-4r] on considère deux *carrés*, ou trois, ou plus, ou moins, ramène-les à un seul *carré*, et ramène les racines et les nombres qui sont avec eux à ce à quoi tu as ramené le *carré*.

Par exemple lorsque tu dis : deux *carrés* plus dix racines sont égaux à quarante-huit dirhams ; c'est-à-dire que, si on additionne deux *carrés* quelconques et si on leur ajoute dix fois la racine de l'un d'eux, on parvient à quarante-huit dirhams. Il faut donc ramener les deux *carrés* à un seul *carré* ; or tu sais qu'un *carré* par rapport à deux *carrés* est leur moitié ; ainsi ramène toute chose dans le problème à sa moitié. Comme si on avait

[8] $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $bx + c = ax^2$.

[9] Nous traduisons *al-ajdhār* par « le nombre des racines ».

[10] Exemples de la première équation : $x^2 + 10\,x = 39$.

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + bx \qquad \text{avec } \frac{b}{2} = 5\ ;$$

on a

$$(x + 5)^2 = x^2 + 25 + 10x = 39 + 25 = 64,$$

donc $x + 5 = 8$, d'où $x = 3$ et $x^2 = 9$.

Al-Khwārizmī ne considère que la racine positive.

dit : un *carré* plus cinq racines sont égaux à vingt-quatre dirhams, c'est-à-dire que, si on ajoute à un *carré* quelconque cinq de ses racines, on parvient à vingt-quatre.

Partage en deux moitiés le nombre des racines, on aura deux plus un demi ; multiplie-le par lui-même, [O-3r] on aura six plus un quart ; ajoute-le à vingt-quatre, on a trente dirhams plus un quart ; prends [A-3r] sa racine qui est cinq plus un demi ; retranches-en la moitié du nombre des racines, qui est deux plus un demi, il reste trois, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est neuf[11].

Ou encore si on dit : la moitié d'un *carré* [B-62v] plus cinq racines sont égaux à vingt-huit dirhams, c'est-à-dire que, pour un *carré* quelconque, si on ajoute à sa moitié cinq fois sa racine, on parvient à vingt-huit dirhams.

Tu veux donc compléter ton *carré*, pour qu'il devienne un *carré* entier, et ceci en le doublant. Double-le, et double tout ce que tu as de ce qui lui est égal ; on aura un *carré* plus dix de ses racines [H-4v] égaux à cinquante-six dirhams. Partage en deux moitiés le nombre des racines ; on a [I-20] cinq ; multiplie-le par lui-même ; on a vingt-cinq, que tu ajoutes à cinquante-six ; on a quatre-vingt-un. Prends sa racine, qui est neuf, de laquelle tu retranches la moitié du nombre des racines, qui est cinq ; il reste quatre, qui est la racine du *carré* que tu veux. Le *carré* est seize, et sa moitié est huit[12].

[11] Autre exemple de la première équation :

$$ax^2 + bx = c \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a} \ ;$$

pour $a = 2$, $b = 10$ et $c = 48$: $2x^2 + 10x = 48 \Rightarrow x^2 + 5x = 24$; soit

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 24 + \frac{25}{4} = \frac{121}{4}, \quad x + \frac{5}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ et } x^2 = 9.$$

[12] Autre exemple de la première équation : $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$.

On normalise et on obtient : $x^2 + 10x = 56$

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25 = 56 + 25 = 81,$$

$$x + 5 = 9 \Rightarrow x = 4,\ x^2 = 16 \text{ et } \frac{1}{2}x^2 = 8 \ ;$$

en général : $ax^2 + bx = c$; on a $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$; on considère

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac + b^2}{4a^2},$$

d'où

$$x = \sqrt{b^2 + 4ac} - b, \qquad \text{avec } a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Al-Khwārizmī ne mentionne que la racine positive.

Procède de même en tout ce qui se présente, des *carrés*, des racines et du nombre qui leur est égal. Tu tomberas juste, si Dieu le veut.

Les *carrés* et le nombre égaux à des racines, c'est par exemple lorsque tu dis : un *carré* et vingt et un dirhams sont égaux à dix racines, c'est-à-dire que, si tu ajoutes à un *carré* quelconque vingt et un dirhams, ce que tu obtiens sera égal à dix racines de ce *carré*.

Procédé : partage en deux moitiés le nombre des racines ; on aura cinq ; multiplie-le par lui-même, on aura vingt-cinq, dont tu retranches vingt et un, ce qu'on a dit être avec le *carré* ; il reste quatre ; prends sa racine, qui est deux ; retranche-la de la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois, qui est la racine du *carré* que tu veux. Et le *carré* est neuf.

Si tu veux, ajoute la racine à la moitié du nombre des racines ; on aura sept, qui est la racine du *carré* cherché, et le *carré* est quarante-neuf.

Si tu rencontres un problème qui te mène à cette sorte, vérifie son exactitude, soit en ajoutant, sinon en retranchant nécessairement. Ce procédé se fait à la fois en ajoutant [H-5r] et en retranchant, ce qui ne se fait dans aucune des trois sortes, dans lesquelles on a besoin de partager en deux moitiés le nombre [B-63r] des racines[13].

[13] $ax^2 + c = bx.$

Exemple de la deuxième équation : $x^2 + 21 = 10x$

$$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25 = x^2 - x^2 - 21 + 25 = 4, \quad x - 5 = 2 \text{ et } x = 7.$$

On peut aussi considérer

$$(5 - x)^2 = 25 - 10x + x^2 = 25 - x^2 - 21 + x^2 = 4, \; 5 - x = 2 \text{ et } x = 3.$$

Dans cet exemple, les deux racines sont positives ; al-Khwārizmī les calcule toutes les deux. Il discute ensuite du cas général de cette deuxième équation :

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.$$

Si $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$, l'équation a deux racines positives : $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.

Si $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$, l'équation a une racine : $x = \frac{b}{2}$.

Si $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$, le problème est impossible.

Sache que, si tu partages le nombre des racines dans cette sorte en deux moitiés, et que tu multiplies <une moitié> par [I-21] elle-même de sorte que le produit soit moins que les dirhams [O-3v] qui sont avec les *carrés*, le problème devient alors impossible ; et si le résultat est égal aux dirhams eux-mêmes, la racine du *carré* est alors égale à la moitié du nombre des racines exactement, sans excédent ni diminution.

Tout ce qui te parvient de deux *carrés*, ou plus, ou moins, ramène-le à un seul *carré*, comme nous te l'avons montré dans la première sorte.

Les racines [A-3v] **plus le nombre égaux aux *carrés***, c'est par exemple lorsque tu dis : trois racines et quatre en nombre sont égaux à un *carré*.

Procédé : partage le nombre des racines en deux moitiés, on a un plus un demi ; multiplie-le par lui-même, on a deux plus un quart ; ajoute-le à quatre, on a six plus un quart ; prends sa racine qui est deux plus un demi, ajoute-la à la moitié du nombre des racines, qui est un plus un demi, on a quatre, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est seize[14].

Tout ce qui est plus qu'un *carré*, ou moins, ramène-le à un seul *carré*.

Ce sont les six modes que j'ai mentionnés dans l'introduction de mon livre que voici ; j'ai achevé leur explication, et j'ai affirmé que dans trois de ces modes on ne partage pas en deux moitiés le nombre des racines ; j'ai montré leur mode d'inférence et leur nécessité.

Quant aux trois sortes qui restent, dans lesquelles on a besoin de partager en deux moitiés le nombre des racines, je les ai décrites au moyen de procédés [H-5v] véritables, et j'ai façonné pour chacun de ces procédés une figure par laquelle on décèle la cause de cette partition en deux moitiés.

[14] Exemple de la troisième équation : $3x + 4 = x^2 \Leftrightarrow 4 = x^2 - 3x$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3x + 4 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4},\ x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2},\ x = 4.$$

La cause de « un *carré* plus dix racines égaux à trente-neuf dirhams » :

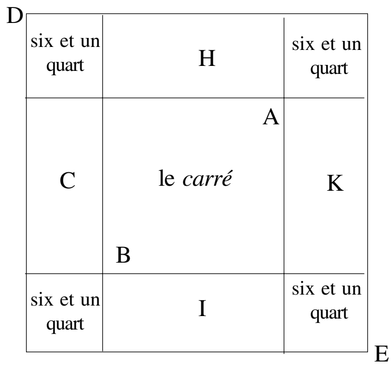
La figure relative à cela est la surface [I-22] d'un carré dont les côtés sont inconnus, qui est le *carré* que tu cherches à connaître, ainsi que connaître sa racine ; soit la surface *AB* ; chacun de ses côtés est sa racine, et si tu multiplies chacun de ses côtés par un nombre quelconque, les nombres que tu obtiens sont les nombres des racines. Toute racine est égale à la racine de cette surface.

Ainsi, quand on dit : il y a avec [B-63v] le *carré* dix racines ; nous prenons le quart de dix, qui est deux plus un demi, et nous faisons chacun de ces quarts avec l'un des côtés de la surface. Il vient ainsi, avec la première surface, qui est la surface *AB*, quatre surfaces égales, dont la longueur de chacune est égale à la racine de la surface *AB*, et la largeur est deux plus un demi. Soient les surfaces *H*, *I*, *K*, *C*. On a ainsi engendré une surface de côtés égaux, également inconnue, diminuée de deux et demi par deux et demi dans chacun de ses quatre angles. Ainsi, pour achever de carrer la surface, il sera nécessaire d'ajouter deux et un demi par [O-4r] lui-même quatre fois, et la somme de tout cela est vingt-cinq.

Or nous savons que la première surface, qui est la surface du *carré* et les quatre surfaces qui l'entourent, qui sont dix racines, est trente-neuf en nombre. Si donc nous leur ajoutons les vingt-cinq, qui [H-6r] sont les quatre carrés et qui sont sur les angles de la surface *AB*, on achève alors de carrer la plus grande surface, soit la surface *DE*. Or nous savons que tout cela est soixante-quatre, et que l'un de ses côtés est sa racine, qui est huit. [A-4r] Si donc nous retranchons de huit deux fois le quart de dix, à partir des deux extrémités du côté de la plus grande surface, qui est la surface

DE, soit cinq, il reste [I-23] de son côté trois, qui est égal au côté de la première surface — qui est la surface *AB* — qui est la racine de ce *carré*.

Nous avons en effet partagé les dix racines en deux moitiés, et nous avons multiplié la moitié de dix par elle-même ; nous avons ajouté <le résultat> au nombre qui est trente-neuf, pour qu'il nous soit possible de compléter la construction de la plus grande surface par ce qui manquait à ses quatre angles ; en effet, si on multiplie le quart d'un nombre par lui-même, et ensuite par quatre, ce produit sera égal au produit de sa moitié [B-64r] par elle-même. Ainsi, nous nous sommes contenté de la multiplication de la moitié du nombre des racines par elle-même, au lieu du quart par lui-même, et ensuite par quatre[15]. Voici la figure :



Il y a aussi une autre figure qui mène à cela. Soit la surface *AB*, qui est le *carré*. Nous cherchons à lui ajouter dix de ses racines. Nous partageons dix en deux moitiés ; on aura cinq, dont nous faisons deux surfaces de part et d'autre de la surface *AB* ; soit les deux surfaces *C* et *N*. La longueur de chacune des deux surfaces sera cinq coudées, qui est la moitié des dix racines[16], et sa largeur est égale au côté de la surface *AB*. Il nous reste un carré à partir <de l'un> des angles de la surface *AB*, qui est cinq par cinq,

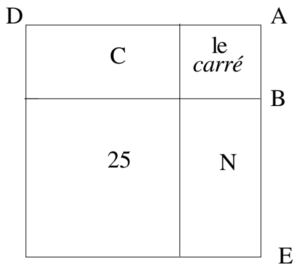
[15] La construction géométrique donnée par al-Khwārizmī met en évidence la transformation :

$$x^2 + bx = c \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\,.$$

D'autre part, al-Khwārizmī a recours à l'identité $\left(\frac{a}{4}\right)^2 \times 4 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ pour montrer la correspondance entre le procédé géométrique et le calcul algorithmique.

[16] Il est clair qu'il s'agit de dix coudées, dix étant le nombre des racines.

[H-6v] et cinq est la moitié des dix racines[17] que nous avons ajoutées de part et d'autre de la première surface. Nous savons alors que la première surface est le *carré*, que les deux surfaces qui sont de part et d'autre de celle-ci sont dix racines ; que tout cela est donc trente-neuf et qu'il reste pour compléter la plus grande surface [O-4v] le carré de cinq par cinq — ceci est vingt-cinq que nous ajoutons à trente-neuf pour compléter la plus grande surface, qui est la surface *DE*. On obtient de tout cela soixante-quatre ; nous prenons sa racine, qui est huit, et qui est l'un des côtés de la plus grande surface ; si nous en retranchons une quantité égale à ce que nous lui avons ajouté, qui est cinq, il reste trois, qui est le côté de la surface *AB* — qui est le *carré* — et qui est sa racine ; le *carré* est neuf[18]. Voici la figure :



Un *carré* plus vingt et un dirhams sont égaux à dix racines.

Posons le *carré* une surface [I-24] carrée de côtés inconnus ; soit la surface *AD*. Joignons-lui ensuite un rectangle dont la largeur [A-4v] est égale à l'un des côtés de la surface *AD* — soit le côté *EN* — et dont la surface est *EB*. La longueur de deux surfaces réunies est le côté *CE*. Nous savons que

[17] Voir note précédente.

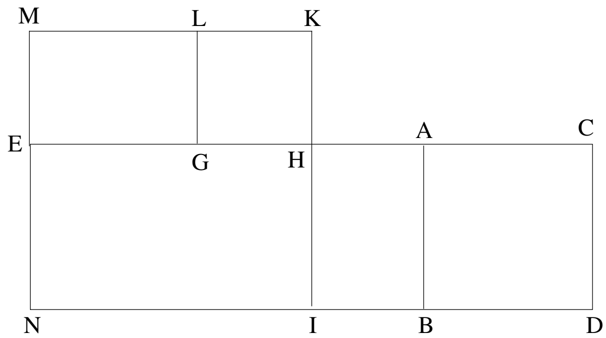
[18] Al-Khwārizmī utilise ici la transformation précédente :

$$x^2 + bx = c \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\,.$$

sa longueur est dix en nombre, car, pour toute surface carrée [B-64v] dont les côtés et les angles sont égaux, l'un de ses côtés multiplié par l'unité est la racine de cette surface ; et par deux, deux de ses racines. Ainsi, lorsqu'on dit : un *carré* plus vingt et un sont égaux à dix racines, nous savons que la longueur du côté [H-7r] *EC* est dix en nombre, car le côté *CD* est la racine du *carré*. Nous partageons le côté *CE* en deux moitiés au point *H*, et nous le prolongeons jusqu'au point *I* ; il est clair que la droite *EH* est égale à la droite *HC*, et il est clair que la droite *HI* est égale à la droite *CD*. Nous ajoutons à la droite *HI* sur son prolongement <une droite> égale à l'excédent de *CH* sur *HI* pour que la surface devienne carrée ; soit la droite *HK* ; la droite *IK* sera alors égale à la droite *KM* ; on engendre donc une surface carrée, de côtés et d'angles égaux ; soit la surface *MI*. Mais il était clair que la droite *IK* est cinq ; les côtés de *MI* lui sont égaux ; sa surface est par conséquent vingt-cinq, ce qui est le produit de la moitié du nombre des racines par elle-même, c'est-à-dire cinq par cinq ; on a vingt-cinq.

Mais il était clair que la surface *EB* est le vingt et un que l'on avait ajouté au *carré* ; nous coupons de la surface *EB* par la droite *IK*, qui est l'un des côtés de la surface *MI*, la surface *EI* ; il reste la surface *IA* ; nous prenons sur la droite *KM* la droite *KL* qui est égale à la droite *HK* ; il sera clair que la droite *IH* est égale à la droite *ML* ; il reste de la droite *MK* la droite *LK* qui est égale à la droite *KH*. La surface *MG* sera donc égale à la surface *IA* ; [H-7v] il sera donc clair que la surface *EI* à laquelle on ajoute la surface *MG* est égale à la surface *EB*, qui est vingt et un. [O-5r] Mais la

surface *MI* était vingt-cinq ; puisque nous avons retranché de la surface *MI* la surface *EI* et la surface *MG*, qui sont vingt et un, il nous reste une petite surface qui est la surface *GK* et qui est la différence entre vingt-cinq et vingt et un, c'est-à-dire quatre, dont la racine est la droite *GH* qui est égale à la droite *HA*, et qui est deux. Si donc tu retranches celui-ci de la droite *HC*, qui est la moitié du nombre des racines, il reste la droite *AC*, qui [I-25] est trois, et qui est la racine [B-65r] du premier *carré* ; si tu l'ajoutes à la droite *CH*, qui est la moitié du nombre des racines, tu obtiens sept, qui est la droite *GC* ; elle sera une racine d'un *carré* plus grand que ce *carré* qui, si tu lui ajoutes vingt et un, est égal à dix racines. Voici la figure :



Ce qu'il fallait démontrer. [A-5r]

Trois racines plus quatre en nombre sont égaux à un *carré*.

Posons le *carré* une surface carrée de côtés inconnus, de côtés et d'angles égaux ; [H-8r] soit la surface *AD*. Cette surface [I-26] tout entière réunit les trois racines et le quatre que nous avons mentionnés. Mais, pour toute surface carrée, l'un de ses côtés par un est sa racine. Nous coupons

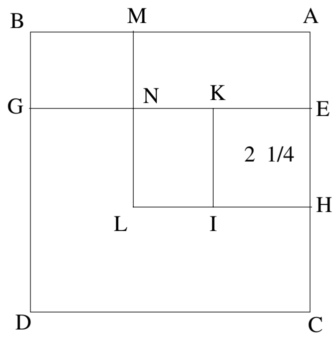
donc de la surface *AD* la surface *ED* dont nous posons l'un des côtés, qui est *EC*, trois — qui est le nombre des racines — et qui est égal à *GD*. Il est clair que la surface *EB* est le quatre ajouté aux racines. Nous coupons le côté *EC* — qui est trois[19] — en deux moitiés au point *H*. Nous formons ensuite à partir d'elle[20] une surface carrée ; soit la surface *EI*, qui est le produit de la moitié du nombre des racines — qui est un et un demi — par elle-même, c'est-à-dire deux plus un quart. Nous ajoutons ensuite à la droite *HI* une droite égale à la droite *AE* ; soit la droite *IL*. La droite *HL* sera donc égale à la droite *AH*, et la droite *KN* sera égale à la droite *IL*. On engendre une surface carrée, dont les côtés et les angles sont égaux, qui est la surface [O-5v] *HM*. Mais il était clair que la droite *AC* est égale à la droite *EG*, et que la droite *AH* est égale à la droite *EN* ; il reste la droite *HC* égale à la droite *NG*, et la droite *MN* égale à la droite *IL*. Il reste de la surface *EB* une surface égale à la surface *KL*. Mais nous savions que la surface *AG* est le quatre [B-65v] qui est ajouté aux trois racines. La surface *AN* plus la surface *KL* seront donc égales à la surface *AG* qui est le quatre en nombre. Il est alors clair que la surface *HM* est la moitié du nombre des racines — qui est un plus un demi — par elle-même, c'est-à-dire deux plus un quart, auquel on ajoute le quatre qui est la surface *AN* plus la surface

[19] Litt. : trois racines.

[20] C'est-à-dire : à partir de la moitié *EH*.

KL. Il nous reste du côté du premier carré qui est la surface *AD*, c'est-à-dire le *carré* tout entier, la moitié du nombre des racines — qui est un plus un demi — et qui est la droite *HC*. Si nous l'ajoutons à la droite *AH*, qui est la racine de la surface *HM* — c'est-à-dire deux [I-27] plus un demi — <c'est-à-dire> si nous lui ajoutons la droite *HC* qui est la moitié du nombre des trois racines — c'est-à-dire un plus un demi —, on obtient de tout cela quatre, qui est la droite *AC*, c'est-à-dire la racine du *carré* qui est la surface *AD*. Ce qu'il fallait démontrer[21].

Voici la figure :



Nous avons trouvé que tout ce qui est fait par le calcul d'*al-jabr* et d'*al-muqābala* te mène nécessairement à l'un de ces six procédés que j'ai décrits dans l'introduction de mon livre que voici. J'ai achevé leur commentaire, sache-le.

[21] Pour cette équation qui admet dans tous les cas une racine positive et une seule, la construction géométrique donnée par al-Khwārizmī met en évidence la transformation :

$$x^2 = bx + c \Leftrightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Chapitre sur la multiplication

Je t'enseigne comment multiplier les unes par les autres les choses [A-5v] qui sont les racines, si elles sont seules, si elles sont avec un nombre, si elles sont diminuées d'un nombre ou si elles sont retranchées d'un nombre ; et comment les additionner les unes aux autres et comment les retrancher les unes des autres[22].

Sache que, pour tout nombre [O-6r] multiplié par un autre nombre, il est nécessaire [B-66r] d'additionner[23] l'un des nombres autant de fois que l'autre contient d'unités.

Si on a des dizaines auxquelles on a ajouté des unités, ou dont on a retranché [H-9r] des unités, il est nécessaire de les multiplier quatre fois : les dizaines par les dizaines, les dizaines par les unités, les unités par les dizaines et les unités par les unités. Ainsi, si les unités qui sont avec les dizaines sont toutes ajoutées, la quatrième multiplication est additive ; et si elles sont toutes retranchées, la quatrième multiplication est aussi additive. Mais si les unes sont ajoutées et les autres retranchées, la quatrième multiplication est soustractive. Par exemple : dix plus un par dix plus deux : dix par dix est cent ; un par dix est dix additif ; deux par dix est vingt additif ; un par deux est deux additif. Et tout cela est cent trente-deux. Si on a dix moins un par dix moins un : dix par dix est cent ; un [I-28] soustrait par dix est dix soustractif, et un soustrait aussi par dix est dix soustractif. Ceci est quatre-vingts ; et un soustrait par un soustrait est un additif ; ceci est donc quatre-vingt-un. Si on a dix plus deux par dix moins un : dix par

[22] Le but de ce chapitre et des suivants est l'étude des opérations de l'arithmétique élémentaire sur les expressions binomiales, $(ax \pm b)$ $(dx \pm c)$, et trinomiales. On a successivement les exemples suivants.

Multiplication :

$$(10a + b)\,(10c + d)\ ;\ (10 + 1)(10 + 2)\ ;\ (10 - 1)(10 - 1)\ ;$$

$$(10 + 2)\,(10 - 1)\ ;\ (10 - x) \times 10\ ;\ (10 + x) \times 10\ ;\ (10 + x)(10 + x)\ ;$$

$$(10 - x)(10 - x)\ ;\ (1 - \frac{1}{6})\,(1 - \frac{1}{6})\ ;\ (10 + x)\,(10 - x)\ ;\ (10 - x)x\ ;$$

$$(10 + x)(x - 10)\ ;\ (10 + \frac{1}{2}x)\,(\frac{1}{2} - 5x)\ ;\ (10 + x)\,(x - 10).$$

[23] Litt. : doubler.

dix est cent ; un soustrait par dix est dix soustractif ; deux additif par dix est vingt additif. Ceci est cent dix. Deux additif par un soustrait est deux soustractif. Tout cela est donc cent huit.

[H-9v] Je t'ai montré cela pour t'indiquer comment multiplier les choses les unes par les autres, si elles sont ajoutées à un nombre, ou retranchées d'un nombre, ou diminuées d'un nombre.

Si on te dit : dix moins une chose — le sens de la chose est la racine — par dix, alors multiplie dix par dix ; on a cent ; et moins une chose par dix, on a dix racines soustractives. Nous disons cent moins dix choses.

Si on dit : [B-66v] dix plus une chose par dix ; tu multiplies dix par dix, on a cent ; et une chose par dix ; [O-6v] on a dix choses additives. On a donc cent plus dix choses.

Si on dit : dix plus une chose par elle-même ; tu dis : dix par dix est cent, dix par une chose est dix choses, dix par une chose est aussi dix choses et une chose par une chose est un *carré* additif. On a donc [A-6r] cent dirhams plus vingt choses, plus un *carré* additif.

Si on dit : dix moins une chose par dix moins une chose. Tu dis : dix par dix est cent et moins une chose par dix est dix choses soustractives ; moins une chose par dix est dix choses soustractives ; moins une chose par moins une chose est un *carré* additif. On a donc cent plus un *carré* moins vingt choses.

De même [I-29] si on te dit : un dirham moins un sixième par un dirham moins un sixième. On a cinq sixièmes par lui-même, c'est-à-dire vingt-cinq parties de trente-six parties de dirham, qui est deux tiers plus un sixième d'un sixième. On l'infère ainsi : tu multiplies un dirham par un dirham, on a un dirham. [H-10r] Moins un sixième par un dirham vaut un sixième soustractif, et moins un sixième par un dirham vaut un sixième soustractif. Il reste deux tiers d'un dirham. Moins un sixième par moins un sixième vaut un sixième d'un sixième additif. C'est donc deux tiers plus un sixième d'un sixième.

Si on dit : dix moins une chose par dix plus une chose. Tu dis : dix par dix est cent ; et moins une chose par dix est dix choses soustractives ; une chose par dix est dix choses additives, et moins une chose par une chose est un *carré* soustractif, et cela est cent dirhams moins un *carré*.

Si on dit : dix moins une chose par une chose. Tu dis : dix par une chose est dix choses, et moins une chose par une chose est un *carré* soustractif. On a donc dix choses moins un *carré*.

Si on dit : dix plus une chose par une chose moins dix. Tu dis : une chose par dix est dix choses additives ; une chose par une chose est un *carré* additif ; moins dix par dix est cent dirhams soustractifs ; moins dix par une chose est dix choses soustractives. Nous disons alors : un *carré*

moins cent dirhams, après avoir réduit, et cela en éliminant dix choses additives par dix choses soustractives. [O-7r] Il restera alors un *carré* moins cent dirhams.

Si on dit : [B-67r] dix dirhams plus une demi-chose par un demi-dirham moins cinq choses. Tu dis : un demi-dirham par dix vaut cinq dirhams additifs ; un demi-dirham par une demi-chose vaut un quart de chose additive, et moins cinq choses par dix dirhams est cinquante racines soustractives. [H-10v] La somme de tout cela sera donc cinq dirhams moins quarante-neuf racines [I-30] plus trois quarts de racine. Tu multiplies ensuite cinq racines soustractives par la moitié d'une racine additive. On a donc deux *carrés* et demi soustractifs. Cela est donc cinq dirhams moins deux *carrés* et demi moins quarante-neuf racines et trois quarts de racine.

Si on dit : dix plus une chose par une chose moins dix. C'est comme si on avait dit : une chose plus dix [A-6v] par une chose moins dix. Tu dis : une chose par une chose est un *carré* additif ; dix par une chose est dix choses additives ; moins dix par une chose est dix choses soustractives. L'additif est annulé par le soustractif et il reste le *carré* ; moins dix par dix est cent soustrait du *carré*. La somme de cela est donc un *carré* moins cent dirhams.

Et pour tout ce qu'on obtient par la multiplication d'additif et de soustractif, comme les choses par l'excédent d'une chose, le dernier produit est toujours soustractif.

Chapitre sur l'addition et la soustraction

Sache que la racine de deux cents, moins dix, additionnée à vingt moins la racine de deux cents, est égale à dix.

La racine de deux cents, moins dix, soustraite de vingt moins la racine de deux cents, est trente moins deux racines de deux cents, et deux racines de deux cents est la racine de huit cents.

Cent plus un *carré* moins vingt racines, à quoi on additionne cinquante plus dix racines moins deux *carrés*, est cent cinquante moins un *carré* moins dix racines.

Cent plus un *carré* moins vingt racines, dont on soustrait cinquante plus dix racines moins deux *carrés*, est cinquante dirhams plus trois *carrés*, moins trente racines.

Je t'en montre la cause sous une forme qui te mène [H-11r] à ce qu'on recherche, si Dieu le Très-Haut le veut.

Sache que si tu veux doubler la racine de tout *carré*, connue ou irrationnelle — « tu la doubles » signifie que tu la multiplies par deux —, il faut [I-31] que tu multiplies deux par deux, et ensuite par le *carré*. La racine du produit sera égale à deux fois la racine de ce *carré*.

Et si tu veux [B-67v] son triple, multiplie alors trois par trois et ensuite par le *carré* ; on aura la racine du produit triple de la racine de ce [O-7v] premier *carré*. De même pour les multiples plus grands ou plus petits, c'est selon cet exemple, conforme-toi à cela[24].

[24] Addition et soustraction d'expressions composées de termes rationnels ou irrationnels. Exemples :

$$\left(\sqrt{200}-10\right)+\left(20-\sqrt{200}\right)\ ;\ \left(20-\sqrt{200}\right)-\left(\sqrt{200}-10\right)\ ;$$

$$\left(100+x^2-20x\right)+\left(50+10x-2x^2\right)\ ;\ \left(100+x^2-20x\right)-\left(50+10x-2x^2\right)\ ;$$

$$nx=n\sqrt{x^2}=\sqrt{n^2x^2}\ ;\ 2\sqrt{a}=\sqrt{2\times2\times a}=\sqrt{2^2\times a}\ ;\ 3\sqrt{a}=\sqrt{3\times3\times a}=\sqrt{3^2\times a}\ ;\ n\sqrt{a}=\sqrt{n^2a}\ ;$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times a}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2a}\ ;\ \frac{p}{q}\sqrt{a}=\sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2a}\ ;\ 2\sqrt{9}=\sqrt{4\times9}=\sqrt{36}=6\ ;$$

$$3\sqrt{9}=\sqrt{9\times9}=\sqrt{81}=9\ ;\ \frac{1}{2}\sqrt{9}=\sqrt{\frac{1}{4}\times9}=\sqrt{2+\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{2}.$$

Si tu veux prendre la moitié de la racine d'un *carré*, il faut que tu multiplies un demi par un demi — on a un quart ; ensuite par le *carré*, la racine du produit sera égale à la moitié de la racine de ce *carré*.

De même pour son tiers ou son quart, ou moins que cela, ou plus que cela, aussi loin que l'on aille en diminuant ou en augmentant.

Exemple : Si tu veux doubler la racine de neuf, tu multiplies deux par deux, et ensuite par neuf ; ceci atteint trente-six ; prends sa racine, elle est six, et elle est égale au double de la racine de neuf. De même, si tu veux tripler la racine de neuf, tu multiplies trois par trois, et ensuite par neuf. On a quatre-vingt-un, sa racine est neuf. C'est le triple de la racine de neuf. [A-7r]

Si tu veux prendre la moitié de la racine de neuf, tu [H-11v] multiplies un demi par un demi, on a un quart ; tu multiplies ensuite un quart par neuf, on a deux et un quart ; tu prends sa racine, qui est un et un demi, et qui est la moitié de la racine de neuf.

De même ceci est la voie pour tout ce qui augmente ou diminue <une racine> connue ou irrationnelle.

La division <et la multiplication de racines>

Si tu veux diviser la racine de neuf par la racine de quatre, tu divises neuf par quatre. On a deux et un quart. Sa racine est ce qu'on cherche à atteindre, [I-32] qui est un plus un demi.

Si tu veux diviser la racine de quatre par la racine de neuf, tu divises quatre par neuf, et on a quatre neuvièmes d'unité. Sa racine est ce qu'on cherche à atteindre, qui est deux tiers d'unité.

Si tu veux diviser deux racines de neuf par la racine de quatre ou par la racine d'un autre *carré*, double la racine de neuf comme je t'ai fait voir lors de l'opération du multiple. Ce qu'on atteint, divise-le par quatre ou par ce par quoi tu veux diviser, et procède comme tu avais procédé.

De même si tu veux diviser trois racines de neuf, ou plus, [B-68r] ou une demi-racine de neuf, ou moins, ou la racine de l'un quelconque des *carrés*, procède selon cet exemple[25], tu parviendras à la vérité, si Dieu le Très-Haut le veut.

Si tu veux multiplier la racine [H-12r] de neuf par la racine de quatre, multiplie neuf par quatre ; on a trente-six. Prends sa racine, qui est six. C'est la racine de neuf multipliée [O-8r] par la racine de quatre.

[25] Division d'expressions composées de termes rationnels et irrationnels. Exemples :

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{2+\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{2} \;;$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \;;$$

$$\frac{2\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4\times 9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{4\times 9}{4}} = \sqrt{9} \;;$$

$$\frac{2\sqrt{9}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{4\times 9}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{4\times 9}{a}} \;;$$

$$\frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{n^2 a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{n^2 a}{b}} \;;$$

$$\frac{\frac{p}{q}\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 \times a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^2 \times a}{b}} \,.$$

De même si tu veux multiplier la racine de cinq par la racine de dix, multiplie cinq par dix. La racine du produit est la chose que tu veux.

Si tu veux multiplier la racine d'un tiers par la racine d'un demi, multiplie un tiers par un demi ; on a un sixième. La racine du sixième est la racine du tiers multipliée par la racine d'un demi.

Si tu veux multiplier deux racines de neuf par trois racines de quatre, détermine les deux racines de neuf comme je te l'ai décrit, jusqu'à ce que tu saches de quel *carré* elles sont la racine. Fais de même pour trois racines de quatre, jusqu'à ce que tu saches de quel *carré* elles sont la racine. Multiplie ensuite les deux *carrés* l'un par l'autre ; la racine du produit est <le produit> des deux racines de neuf par les trois racines de quatre[26].

De même pour plus de racines, ou pour moins, c'est selon cet exemple. Procède donc en le suivant.

Quant à la cause de « la racine de deux cents, moins dix, additionnée à vingt moins la racine de deux cents », voici [H-12v] la figure :

La droite *AB* est la racine de deux cents ; de *A* au point *C* c'est le dix ; ce qui reste de la racine de deux cents [A-7v] est le reste de la droite *AB*, c'est-à-dire la droite *CB*. Mène ensuite du point *B* une droite au point *D*, la droite vingt, qui est [I-33] le double de la droite *AC*, qui est dix ; du point *B* au point *E* <une droite> égale à la droite *AB* ; c'est la racine de deux cents également. Le reste de vingt est du point *E* au point *D*. Puisque nous voulons additionner ce qui reste de la racine de deux cents, une fois enlevé [B-68v] le dix, qui est la droite *CB*, à la droite *ED*, qui est vingt moins la racine de deux cents, nous coupons de la droite *BE* une droite égale à la

[26] Multiplication :

$$\sqrt{9}\times\sqrt{4}=\sqrt{9\times 4}=\sqrt{36}=6\ ;$$

$$\sqrt{5}\times\sqrt{10}=\sqrt{5\times 10}=\sqrt{50}\,;$$

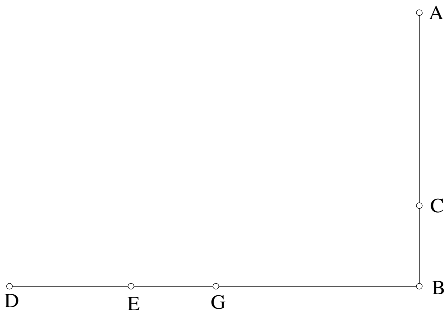
$$\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{6}}\,;$$

$$2\sqrt{9}\times 3\sqrt{4}=\sqrt{4\times 9}\times\sqrt{4\times 9}=\sqrt{(36)^2}\ ;$$

$$n\sqrt{a}\times p\sqrt{b}=\sqrt{n^2a}\times\sqrt{p^2b}=\sqrt{n^2\times a\times p^2\times b}\ .$$

droite *CB*, soit la droite *GE*. Or, il est clair que la droite *AB*, qui est la racine de deux cents, est égale à la droite *BE*, que la droite *AC*, qui est le dix, est égale à la droite *BG*, et que le reste de la droite *AB*, qui est *CB*, est égal au reste de la droite [O-8v] *BE*, qui est *GE*. Nous ajoutons à la droite *ED* la droite *GE* ; il sera clair qu'on a soustrait de la droite *BD*, qui est vingt, une droite égale à la droite *AC*, qui est dix, c'est-à-dire la droite *BG*, et qu'il nous reste la droite *GD*, qui est dix. Ce qu'il fallait démontrer[27].

Voici la figure :



Quant à la cause de « la racine de deux cents moins dix, soustraite de vingt moins racine de deux cents », voici la figure :

La droite *AB* est la racine de deux cents ; de *A* [H-13r] au point *C*, c'est le dix connu. Menons du point *B* au point *D* une droite, et posons-la vingt. Posons du <point> *B* au point *E* une <droite> égale à la droite racine de deux cents, qui est égale à la droite *AB*. Or il est clair que la droite *CB* est ce qui reste de la racine de deux cents, une fois ôté le dix, et que la droite *ED* est ce qui reste de vingt une fois ôtée la racine de deux cents. Nous voulons soustraire la droite *CB* de la droite *ED*. Menons du point *B* une droite au point *G*, qui est égale à la droite *AC* qui est dix. La droite *GD* tout entière sera donc égale à la droite *GB* plus la droite *BD*. Or il est clair que

[27] Démonstration géométrique de l'égalité :

1) $$\left(\sqrt{200}-10\right)+\left(20-\sqrt{200}\right)=10$$
$$(BA - AC) + (DB - BE) = EG + ED = DG.$$

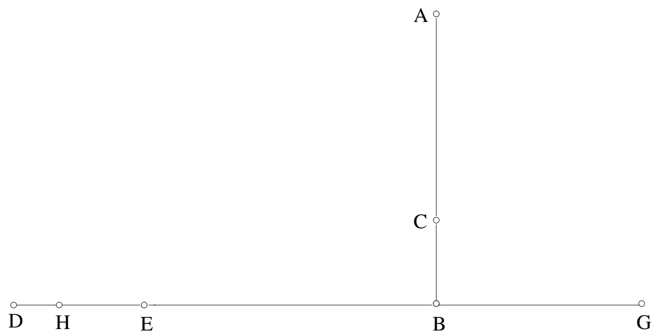
2) $$\left(20-\sqrt{200}\right)-\left(\sqrt{200}-10\right)=30-2\sqrt{200}$$
$$\begin{aligned} ED - CB = ED - EH = HD &= DG - (GB + BE + EH) \\ &= DG - (AC + BC + BE) \\ &= (DB + BG) - (AC + BC + BE) \ ; \end{aligned}$$

donc

$$DH = 30-\left(\sqrt{200}+\sqrt{200}\right)=30-2\sqrt{200}\,.$$

tout cela est trente. Coupons de la droite *ED* [B-69r] <une droite> égale à la droite *CB* ; soit la droite *EH*. Il est clair que la droite *HD* est ce qui reste de toute la droite *GD* qui [I-34] est trente. Il est clair que la droite *BE* est la racine de deux cents, et que la droite *GB* plus *BC* est également la racine de deux cents. Puisque la droite *EH* est devenue égale à la droite *CB*, il sera clair que ce qui a été soustrait de la droite *GD*, qui est trente, est deux racines de deux cents. Mais deux racines de deux cents est la racine de huit cents. Ce qu'il fallait démontrer.

Voici la figure :



Quant à « cent plus un *carré* moins vingt racines, [H-13v] auxquels on additionne cinquante plus dix racines moins deux *carrés* »[28], il ne lui convient pas de figure, car cela est composé de trois [O-9r] genres différents, [A-8r] des *carrés*, des racines et du nombre, et il n'y a pas avec eux ce qui leur est égal pour que cela puisse être représenté par une figure. Nous pouvons en avoir une figure, <mais> non sensible. Quant à sa nécessité, elle est évidente par l'expression. Tu sais en effet que tu as cent plus un *carré* moins vingt racines. Puisque tu lui as ajouté cinquante plus dix racines, il vient cent cinquante plus un *carré* moins dix racines, car ces

28 $(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2) = 150 - 10x - x^2.$

À $(100 + x^2 - 20x)$ on ajoute $50 + 10x$; on a $150 + x^2 - 10x$. Mais $100 + x^2 - 2x^2 = 100 - x^2$. En substituant, on a $150 - x^2 - 10x$.

dix racines ajoutées ont restauré les vingt racines soustraites à dix racines. Il reste donc cent cinquante plus un *carré* moins dix racines ; il y avait un *carré* avec le cent ; ainsi, lorsque tu as soustrait de cent plus un *carré* les deux *carrés* retranchés de cinquante, un *carré* s'annule avec un *carré*, et il te reste un *carré*. Il vient donc cent cinquante moins un *carré*, moins dix racines. Ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre sur les six problèmes

J'ai présenté auparavant les procédés de calcul, et ses modes sont six problèmes que j'ai faits comme exemples pour les six procédés présentés précédemment dans l'introduction de mon livre, et j'ai mentionné que le calcul d'*al-jabr* et d'*al-muqābala* doit t'amener à l'un de ces procédés. J'ai fait suivre cela de problèmes accessibles à la compréhension, légers à l'effort et aisément significatifs, si Dieu le Très-Haut le veut[29].

Premier des six problèmes

C'est par exemple quand tu dis : tu as divisé dix en deux parties ; [B-69v] tu as multiplié l'une [H-14r] des deux parties par l'autre ; tu as multiplié ensuite l'une par elle-même, de sorte que celle multipliée par elle-même est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre[30]. [I-35]

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose ; tu multiplies une chose par dix moins une chose ; on a dix choses moins un *carré* ; tu les multiplies ensuite par quatre, puisque tu as dit quadruple ; on a donc le quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre, ce qui sera quarante choses moins quatre *carrés*. Tu multiplies ensuite une chose par une chose, c'est-à-dire l'une des deux parties par elle-même. On a donc un *carré* égal à quarante choses moins quatre *carrés*. Restaure-les par les quatre *carrés* et ajoute-les au *carré* ; on

[29] Dans ce chapitre, al-Khwārizmī donne six exemples qui, après une transformation, se ramènent aux six équations. Des six exemples, quatre portent sur le partage du nombre 10 en deux parties, soit x et y, telles que

$$y = 10 - x, 0 < x < 10, 0 < y < 10.$$

On notera que les démonstrations sont purement algébriques.

[30] Type : $ax^2 = bx$.

Exemple : $x^2 = 4x(10 - x) \Rightarrow x^2 = 8x \Rightarrow x = 8$ et $(10 - x) = 2$.

a donc quarante choses égales à cinq *carrés*, et un seul *carré* égal à huit [O-9v] racines ; c'est soixante-quatre, dont la racine est huit. C'est l'une des deux parties multipliée par elle-même, et le reste de dix est deux, qui est la seconde partie.

Ce problème t'a donc mené à l'un des six procédés, qui est : « des *carrés* sont égaux à des racines » ; sache cela.

Deuxième problème

Tu as divisé dix en deux parties et tu as multiplié chaque partie par elle-même ; [A-8v] tu as ensuite multiplié le dix par lui-même, de sorte que le produit de dix par lui-même est égal à deux fois plus sept neuvièmes le produit de l'une des deux parties par elle-même, ou est égal à six fois plus un quart le produit de l'autre par elle-même[31].

On l'infère ainsi : [H-14v] tu poses l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose ; tu multiplies une chose par elle-même ; on a un *carré* ; ensuite par deux plus sept neuvièmes ; on a deux *carrés* plus sept neuvièmes de *carré* ; tu multiplies ensuite le dix par lui-même ; on a cent égaux à deux *carrés* plus sept neuvièmes de *carré*. Ramène-les à un seul *carré*, [I-36] qui est neuf parties de vingt-cinq parties, c'est-à-dire un cinquième et quatre cinquièmes du cinquième. Prends le cinquième de cent

[31] Type : $ax^2 = c$.

$$10^2 = \left(2 + \frac{7}{9}\right)x^2 \text{ ou } 10^2 = \left(6 + \frac{1}{4}\right)(10 - x)^2.$$

On a

a) $10^2 = \frac{25}{9}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{25} \times 100$, d'où $x = 6$ et $(10 - x) = 4$;

b) $10^2 = \frac{25}{4}(10 - x)^2 \Leftrightarrow 16 = (10 - x)^2$, d'où $(10 - x) = 4$ et $x = 6$.

Al-Khwārizmī ne traite pas le problème b) ; mais a) et b) sont équivalents.

et les quatre cinquièmes de son cinquième, ce qui est trente-six, égal à un *carré*. Prends sa racine, six, qui est l'une des deux parties ; l'autre est quatre, nécessairement.

Ce problème t'a mené [B-70r] à l'un des six procédés, qui est : « des *carrés* sont égaux à un nombre ».

Troisième problème

Tu as divisé dix en deux parties, puis tu as divisé l'une par l'autre ; le quotient obtenu est quatre.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose ; l'autre est dix moins une chose. Tu divises ensuite dix moins une chose par une chose pour avoir quatre. Or tu sais que, lorsque tu multiplies le quotient par le diviseur, tu retrouves le bien que tu as divisé ; le quotient dans ce problème est quatre et le diviseur est une chose. Multiplie quatre par une chose ; on a quatre choses égales au bien que tu as divisé, qui est dix moins une chose. Restaure le dix par la chose, et ajoute-la aux quatre choses ; on a cinq choses égales à dix ; une chose est deux, qui est l'une des deux parties.

Ce problème t'a mené à l'un des six procédés, [H-15r] qui est : « des racines sont égales à un nombre »[32].

[32] Type : $bx = c$.

$$\frac{10 - x}{x} = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ et } 10 - x = 8.$$

Quatrième problème

Tu as multiplié le tiers d'un bien plus un dirham par son quart [O-10r] plus un dirham. On a vingt.

On l'infère ainsi : tu multiplies le tiers d'une chose par le quart d'une chose ; on a la moitié d'un sixième d'un *carré*. Tu multiplies un dirham par le tiers d'une chose, on a le tiers d'une chose ; et un dirham par le quart d'une chose vaut le quart d'une chose ; et un dirham par un dirham vaut un dirham. Tout cela est la moitié d'un sixième d'un *carré*, plus le tiers d'une chose, [I-37] plus le quart d'une chose, plus un dirham, et est égal à vingt dirhams. Ôte de vingt un dirham valant <l'autre> dirham, il reste dix-neuf dirhams égaux à la moitié du sixième d'un *carré*, plus un tiers d'une chose plus un quart d'une chose. Complète ton *carré* ; pour le compléter, tu multiplies tout ce que tu as par douze ; ce que tu as sera un *carré* plus sept racines, qui sont égaux à deux cent vingt-huit dirhams. Partage en deux moitiés le nombre[33] des racines ; multiplie la moitié par elle-même ; [A-9r] le produit sera douze plus un quart, que tu ajoutes au nombre[34] qui est deux cent vingt-huit ; on a deux cent quarante plus un quart. Prends sa racine, quinze plus un demi ; soustrais-en la moitié du nombre des racines, qui est trois plus un demi ; il reste douze, [B-70v] qui est le bien.

Ce problème t'a mené à l'un des six procédés, qui est : « des *carrés* plus des racines sont égaux à un nombre »[35].

[33] Désormais, nous ajoutons « le nombre », sans le signaler.

[34] Litt. : aux nombres.

[35] Type : $ax^2 + bx = c$.

$$\left(\frac{1}{3}x+1\right)\left(\frac{1}{4}x+1\right)=20 \Leftrightarrow x^2+7x=228 \Leftrightarrow \left(x+\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2+228=\left(15+\frac{1}{2}\right)^2,$$

d'où

$$x+\frac{7}{2}=15+\frac{1}{2} \text{ et } x=12.$$

Cinquième problème

Tu divises dix en deux parties, tu multiplies chaque partie par elle-même et tu additionnes les produits. On a cinquante-huit dirhams[36].

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose, et l'autre dix moins une chose. Tu multiplies dix moins une chose par lui-même ; on a cent plus un *carré* moins vingt choses. [H-15v] Tu multiplies ensuite une chose par une chose ; on a un *carré*. Tu les additionnes ensuite ; cela sera cent plus deux *carrés* moins vingt choses, égaux à cinquante-huit dirhams. Restaure le cent et les deux *carrés* par les vingt choses soustraites, et ajoute-les aux cinquante-huit. On a cent plus deux *carrés* égaux à cinquante-huit dirhams plus vingt choses. Ramène cela à un seul *carré* en prenant la moitié de ce que tu as. On a cinquante dirhams plus un *carré* égaux à vingt-neuf dirhams plus dix choses. Réduis, et ceci en ôtant vingt-neuf des cinquante ; il reste vingt et un plus un *carré* égaux à dix choses. Partage en deux moitiés le nombre des racines, qui est cinq, et multiplie-le par lui-même. [I-38] On a vingt-cinq, [O-10v] desquels tu ôtes les vingt et un qui sont avec le *carré* ; il reste quatre. Prends sa racine, qui est deux, et

[36] Type : $ax^2 + c = bx$.

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58 \Leftrightarrow x^2 + 21 = 10x \Leftrightarrow \left(x - \frac{10}{2}\right)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21 = 4 \ ;$$

d'où les deux racines positives $x = 5 - 2$ ou $x = 5 + 2$.

Remarque : Dans ce problème, les deux nombres cherchés x et $y = 10 - x$ sont les solutions d'un système symétrique en x et y

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 21. \end{cases}$$

soustrais-la de la moitié du nombre des racines, qui est cinq ; il reste trois, qui est l'une des deux parties ; et l'autre est sept.

Ce problème t'a mené à l'un des six procédés, qui est : « des *carrés* plus un nombre sont égaux à des racines ».

Sixième problème

Tu multiplies le tiers d'un bien par son quart pour retrouver le bien plus vingt-quatre dirhams[37].

On l'infère ainsi : tu poses ton bien, une chose. Tu multiplies ensuite le tiers d'une chose par le quart d'une chose ; on a un demi-sixième d'un *carré* égal à une chose plus vingt-quatre dirhams. Tu multiplies ensuite un demi-sixième du *carré* par douze pour compléter ton *carré* ; tu multiplies une chose par douze ; on a douze choses ; et tu multiplies vingt-quatre [H-16r] par douze ; tu obtiendras deux cent quatre-vingt-huit dirhams plus douze racines égaux [B-71r] à un *carré*. Partage en deux moitiés le nombre des racines ; on a six, que tu multiplies par lui-même ; ajoute <le produit>

[37] Type : $ax^2 = bx + c$.

$$\frac{1}{3}x \times \frac{1}{4}x = x + 24 \Leftrightarrow \frac{1}{12}x^2 = x + 24 \Leftrightarrow x^2 = 12x + 288 \Leftrightarrow (x-6)^2 = 36 + 228 = 324,$$

d'où

$$x - 6 = 18 \text{ et } x = 24.$$

à deux cent quatre-vingt-huit, la somme de tout cela est trois cent vingt-quatre. Prends ensuite sa racine, qui est dix-huit, que tu ajoutes à la moitié du nombre des racines, qui est six. On a vingt-quatre, qui est le bien.

Ce problème t'a mené à l'un des six procédés, qui est : « des racines plus un nombre sont égaux à des *carrés* ». [A-9v]

Chapitre sur des problèmes divers[38]

<1> Si quelqu'un interroge en disant : tu divises dix en deux parties et tu multiplies ensuite l'une par l'autre ; on a vingt et un dirhams[39].

Tu sais que l'une des deux parties [I-39] de dix est une chose et l'autre dix moins une chose. Multiplie une chose par dix moins une chose ; on a dix choses moins un *carré* égaux à vingt et un. Restaure les dix choses par le *carré* et ajoute-le à vingt et un ; on a dix choses égales à vingt et un dirhams plus un *carré*. Ôte la moitié du nombre des racines, il reste cinq ; multiplie-le par lui-même, on a vingt-cinq. [O-11r] Ôte de celui-ci le vingt et un qui est avec le *carré*, il reste quatre. Prends sa racine, qui est deux, et soustrais-la de la moitié du nombre des racines, qui est cinq ; il reste trois, ce qui est l'une des deux parties.

[38] Dans ce chapitre al-Khwārizmī traite divers problèmes en les ramenant à l'une ou l'autre des six équations canoniques. Les six premiers problèmes ainsi que les onzième et douzième problèmes portent encore sur le partage du nombre 10 en deux parties x et $y = 10 - x$ vérifiant une équation du second degré. On suppose donc $x < 10$.

[39] $$x(10 - x) = 21 \Leftrightarrow 10x = 21 + x^2 \;;$$
on retrouve le cinquième problème du précédent chapitre.

Si tu veux, tu ajoutes la racine de quatre à la moitié du nombre des racines ; on a sept, qui est l'une des parties.

Ce problème est de ceux qui se font par l'addition et la soustraction.

Problème <2> — Si on dit : tu divises dix en deux parties ; tu multiplies chaque [H-16v] partie par elle-même et tu ôtes le plus petit <produit> du plus grand ; il reste quarante.

On l'infère ainsi : tu multiplies dix moins une chose par lui-même, on a cent plus un *carré* moins vingt choses ; tu multiplies une chose par une chose ; on a un *carré*, que tu soustrais de cent plus un *carré* moins vingt choses ; il reste cent moins vingt choses égaux à quarante dirhams. Restaure le cent par les vingt choses et ajoute-les à quarante ; on a cent égal à vingt choses plus quarante dirhams. Ôte les quarante de cent ; il reste soixante dirhams égaux à vingt choses. Une seule chose est donc trois, ce qui est l'une des deux parties[40].

Problème <3> — Si on dit : [B-71v] tu partages dix en deux parties ; tu multiplies chaque partie par elle-même ; tu additionnes <les produits> et tu leur ajoutes la différence entre les deux parties avant de les multiplier, pour que cela atteigne cinquante-quatre dirhams.

[40] On suppose $10 - x > x$, donc $x < 5$.

$$(10 - x)^2 - x^2 = 40 \Leftrightarrow 100 - 20x = 40 \Leftrightarrow x = 3.$$

On l'infère ainsi : tu multiplies dix moins une chose par lui-même ; on a cent plus un *carré* moins vingt choses. Tu multiplies la chose qui reste de dix par elle-même ; [I-40] on a un *carré*. Tu additionnes cela ; on a cent plus deux *carrés* moins vingt choses. Mais il a dit : tu leur ajoutes la différence entre les deux parties avant de les multiplier. Tu dis : la différence entre elles est dix moins deux choses. La somme de cela est donc cent dix plus deux *carrés* moins vingt-deux choses, égale à cinquante-quatre dirhams. Si tu restaures et réduis, tu dis : cent dix dirhams plus deux *carrés* sont égaux à cinquante quatre dirhams plus vingt-deux choses. Ramène [H-17r] les deux *carrés* à un seul *carré*, et ceci en prenant la moitié de ce que tu as ; on a cinquante-cinq [A-10r] dirhams plus un *carré* égaux à vingt-sept dirhams plus onze choses. Ôte vingt-sept de cinquante-cinq ; il reste un *carré* plus vingt-huit dirhams égaux à onze choses. Partage en deux moitiés le nombre des choses ; [O-11v] on a cinq plus un demi. Multiplie-le par lui-même ; on a trente plus un quart. Soustrais-en les vingt-huit qui sont avec le *carré* ; il reste deux plus un quart. Prends sa racine, qui est un plus un demi. Soustrais-la de la moitié du nombre des racines. Il reste quatre, qui est l'une des deux parties[41].

41 $$x^2 + (10 - x)^2 + [(10 - x) - x] = 54$$

avec $x < 5$ pour que $(10 - x) - x > 0$; on a

$$2x^2 + 100 - 20x + 10 - 2x = 54 \Leftrightarrow x^2 + 55 = 27 + 11x \Leftrightarrow x^2 + 28 = 11x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 28 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x - \frac{11}{2} = \pm\frac{3}{2} \text{ et } x = 7 \text{ ou } x = 4.$$

Al-Khwārizmī détermine $x = 4 < 5$.

Problème <4> — Si on dit : tu divises dix en deux parties, tu divises l'une par l'autre et l'autre par l'une ; <la somme des quotients> atteint deux dirhams plus un sixième[42].

On l'infère ainsi : si tu multiplies chaque partie par elle-même, puis que tu additionnes <les produits>, la somme sera égale au produit des deux parties l'une par l'autre, multiplié par ce que les deux quotients ont atteint, c'est-à-dire deux plus un sixième. Multiplie dix moins une chose par lui-même, on a cent plus un *carré* moins vingt choses. [B-72r] Multiplie une chose par une chose, on a un *carré*. Additionne cela ; on a cent [I-41] plus deux *carrés* moins vingt choses égaux à une chose multipliée par dix moins une chose — ce qui est dix choses moins un *carré* — multiplié par ce qu'on obtient des deux quotients, qui est deux plus un sixième, ce qui sera vingt et une choses plus deux tiers de chose moins deux *carrés* [H-17v] plus un sixième, égaux à cent plus deux *carrés* moins vingt choses. Restaure cela et ajoute deux *carrés* plus un sixième à cent plus deux *carrés* moins vingt choses ; ajoute les vingt choses soustraites de cent plus les deux *carrés* aux vingt et une choses plus les deux tiers d'une chose ; tu auras alors cent plus quatre *carrés* et un sixième de *carré* égaux à quarante et une choses et deux tiers d'une chose. Ramène cela à un seul *carré*. Mais tu sais que un seul *carré* de quatre *carrés* et un sixième est son cinquième et le cinquième de son cinquième. Prends de tout ce que tu as le cinquième et le cinquième du cinquième, tu auras alors vingt-quatre dirhams plus un

42 $$x + y = 10, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 + \frac{1}{6}.$$

On a donc

$$x^2 + y^2 = \left(2 + \frac{1}{6}\right)xy \Leftrightarrow x^2 + (10 - x)^2 = \frac{13}{6}x(10 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100 + 2x^2 + \frac{13}{6}x^2 = \frac{65}{3}x + 20x \Leftrightarrow 100 + \left(4 + \frac{1}{6}\right)x^2 = \frac{125}{3}x.$$

On multiplie par $\frac{6}{25}$, on obtient

$$24 + x^2 = 10x \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 25 - 24 = 1,$$

d'où $x = 4$.

Al-Khwārizmī avait donc supposé que x est la plus petite des deux parties. Il remarque que

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1.$$

carré égaux à dix racines, car le dix de quarante et une choses plus deux tiers d'une chose est son cinquième et le cinquième de son cinquième. Partage en deux moitiés le nombre des racines, qui est cinq. Multiplie-le par lui-même ; on a vingt-cinq. Soustrais-en les vingt-quatre qui sont avec le *carré* ; il reste un. Prends sa racine, qui est un. Soustrais-le de la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste quatre, [O-12r] qui est l'une des deux parties.

Sache que pour deux choses, si tu divises l'une par l'autre et l'autre par l'une et si tu multiplies ce que tu obtiens de l'une par ce que tu obtiens de l'autre, on a toujours un. [A-10v]

Problème <5> — Si on dit : tu divises dix en deux parties, tu multiplies l'une des deux parties par cinq, tu divises le produit par l'autre ; tu ôtes ensuite la moitié du résultat obtenu et tu l'ajoutes au produit par cinq [H-18r] pour avoir cinquante dirhams[43].

On l'infère ainsi : tu prends une chose de dix que tu multiplies par cinq ; [I-42] on a cinq choses divisées par le reste de dix, qui est dix moins une chose ; on prend la moitié. On sait que si tu divises les cinq choses par dix moins une chose, et si tu prends la moitié du quotient, ceci sera comme si tu divises la moitié de cinq choses par dix moins une chose. [B-72v] Si donc tu prends la moitié des cinq choses, il vient deux choses et demie. C'est ce que tu veux diviser par dix moins une chose ; cela est deux choses et demie, divisé par dix moins une chose, ce qui est égal à cinquante moins cinq choses, car on a dit : joins à celui-ci l'une des deux parties multipliée

43 $\frac{5x}{2(10-x)}+5x=50$, avec $x<10$. On a

$$\frac{5}{2}x=(10-x)(50-5x)\Leftrightarrow\frac{1}{2}x=100+x^2-20x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(20+\frac{1}{2}\right)x=100+x^2\Leftrightarrow\left(x-\frac{41}{4}\right)^2=\left(\frac{41}{4}\right)^2-100=\frac{81}{16},$$

d'où

$$\frac{41}{4}-x=\frac{9}{4}\text{ et }x=8.$$

La seconde racine est $x=\frac{25}{2}$. Seule la première racine est calculée par al-Khwārizmī ; celle-ci vérifie la condition $x<10$.

par cinq, pour que tout cela soit cinquante. Mais tu sais que, lorsque tu multiplies le quotient par le diviseur, on retrouve le bien ; or ton bien est deux choses et demie. Multiplie donc dix moins une chose par cinquante moins cinq choses ; ceci sera cinq cents dirhams plus cinq *carrés* moins cent choses, égaux à deux choses et demie. Ramène ceci à un seul *carré* ; on a cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses, égaux à une demi-chose. Restaure le cent, et ajoute les vingt choses à la demi-chose ; tu auras cent dirhams plus un *carré* égaux à vingt choses plus une demi-chose. Partage en deux moitiés le nombre des choses ; multiplie <la moitié> par elle-même ; soustrais-en le cent ; prends la racine de ce qui reste et soustrais-la de la moitié du nombre des racines, ce qui est dix plus un quart. Il reste huit, qui est l'une des deux parties.

Problème <*6*> — Si on dit : tu divises dix en deux parties, tu multiplies l'une des parties par elle-même [H-18v] pour qu'elle soit quatre-vingt-une fois l'autre.

On l'infère ainsi : tu dis : dix moins une chose par lui-même est cent plus un *carré* moins vingt choses, ce qui est égal à quatre-vingt-une choses. Restaure le cent et le *carré* [O-12v] par les vingt choses et ajoute-les aux quatre-vingt-une choses ; on a cent plus un *carré* égaux à cent racines plus une racine. Partage en deux moitiés le nombre des racines, on a cinquante plus un demi ; multiplie-le par lui-même, on a deux mille cinq cent cinquante [I-43] et un quart ; soustrais-en le cent, il reste deux mille quatre cent cinquante et un quart ; prends sa racine, qui est quarante-neuf et un demi, soustrais-la de la moitié du nombre des racines, qui est cinquante et un demi ; [B-73r] il reste un, qui est l'une des deux parties[44].

[44] $$(10 - x)^2 = 81\, x \Leftrightarrow x^2 + 100 = 101\, x.$$

Cette équation admet deux racines positives, qui sont 1 et 100. Seule la racine $x = 1$ qui vérifie la condition $x < 10$ est calculée par al-Khwārizmī.

Problème <7> — Si on dit : soit dix mesures de blé [A-11r] ou d'orge ; tu as vendu chacune d'elles pour un prix, puis tu as additionné leur prix. La somme sera alors égale à la différence des deux prix plus la différence des deux mesures.

Prends ce que tu veux, cela est permis, comme si tu prends quatre ou six. Alors tu dis : j'ai vendu chacune des quatre pour une chose ; tu multiplies quatre par une chose, il vient quatre choses ; et j'ai vendu les six ; chacune pour la moitié de la chose pour laquelle j'ai vendu les quatre, ou, si tu veux, pour son tiers ; ou, si tu veux, pour son quart, ou pour ce que tu veux, cela est permis.

Si ta vente de l'autre est pour une demi-chose, multiplie alors une demi-chose par six, on a trois choses ; additionne-les aux quatre choses, on a sept choses égales à la différence entre les deux évaluations, qui est deux mesures, [H-19r] plus la différence entre les deux prix, qui est une demi-chose ; on a donc sept choses, égales à deux plus une demi-chose. Ôte une demi-chose des sept choses ; il reste six choses et une demi-chose, égales à deux dirhams. Une seule chose est donc quatre parties de treize. Tu dis alors : il a vendu les quatre, [I-44] chacune pour quatre parties de treize parties de dirham, et il a vendu les six, chacune pour deux parties de treize parties de dirham ; ceci atteint vingt-huit parties de treize parties de dirham, et c'est égal à la différence entre les deux évaluations, qui est deux mesures, dont le taux est vingt-six parties, plus la différence entre les deux prix, qui est deux parties ; et cela est vingt-huit parties[45].

[45] $$4x + 6\frac{x}{p} = (6-4) + \left(x - \frac{x}{p}\right), \text{ avec } p \text{ entier.}$$

Al-Khwārizmī prend $p = 2$; on a $4x + 3x = 2 + \frac{x}{2}$, d'où $\left(6 + \frac{1}{2}\right)x = 2$ et $x = \frac{4}{13}$.

Al-Khwārizmī fait une vérification :

$$4 \times \frac{4}{13} + 6 \times \frac{2}{13} = 2 + \frac{2}{13}.$$

Remarque : Le problème est d'abord posé avec plusieurs inconnues : n et $10 - n$ mesures, deux prix x et y ; l'équation du problème s'écrirait

$$nx + (10 - n)y = |10 - 2n| + |x - y|.$$

Al-Khwārizmī précise ensuite $n = 4$ et $y = \frac{x}{2}$. Rappelons que ce problème est absent des manuscrits [B, O, L]. Il n'appartient pas au groupe des problèmes traités ici ; son authenticité nous semble incertaine.

Problème <8> — Si on dit : soit deux biens entre lesquels il y a deux dirhams ; tu divises le petit par le grand ; le quotient revient à un demi-dirham.

Pose l'un des deux biens une chose, et l'autre une chose plus deux dirhams. Puisque tu as divisé une chose par une chose plus deux dirhams, le quotient est un demi-dirham. Mais tu sais que quand tu multiplies le quotient par le diviseur, on retrouve le bien que tu as divisé, qui est une chose. Dis donc : une chose et deux dirhams par le demi qui est le quotient, cela donne une demi-chose et un dirham égal à une chose. Ôte une demi-chose pour une demi-chose, il reste un dirham égal à une demi-chose ; double-le, la chose sera égale à deux dirhams et l'autre à quatre[46].

Problème <9> — Si on dit : tu divises dix en deux parties, et tu multiplies l'une d'elles par dix et la deuxième partie par elle-même pour qu'elles s'égalisent[47].

On l'infère ainsi : tu multiplies une chose par dix, on a dix choses ; tu multiplies dix moins une chose par lui-même, on a cent plus un *carré* moins vingt choses égaux aux dix racines. Réduis par cela, comme je te l'avais décrit.

[46] L'énoncé du problème conduit à un système $y - x = 2$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.
Al-Khwārizmī procède ainsi : $y = x + 2$, d'où

$$\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2} \ ;$$

on en déduit

$$\frac{1}{2}(x+2) = x, \ x = 2 \text{ et } y = 4.$$

Voir aussi problème 27.

[47] $$10x = (10 - x)^2, \qquad \text{avec } x < 10.$$

On a donc

$$30x = x^2 + 100.$$

Al-Khwārizmī commence le calcul et laisse au lecteur le soin de l'achever ; on aura alors deux racines irrationnelles et positives, $x = 15 \pm 5\sqrt{5}$.

Seule la racine $x = 15 - 5\sqrt{5}$ vérifie la condition $x < 10$. Le problème a donc une solution unique.

<*Problème 10*> — De même, si on dit : tu divises dix en deux parties, tu multiplies ensuite l'une par l'autre, puis tu divises le produit [A-11v] par la différence entre les deux parties — avant que tu les aies multipliées l'une par l'autre — pour obtenir cinq plus un quart. [I-45]

On l'infère ainsi : tu prends une chose du dix, il reste dix moins une chose. Multiplie l'une par l'autre, on a dix racines moins un *carré* ; c'est le produit de l'une des parties par l'autre. Tu divises ensuite cela par la différence entre les deux parties, c'est-à-dire dix moins deux choses ; le quotient est cinq plus un quart. Mais lorsque tu multiplies cinq plus un quart par dix moins deux choses, tu auras le bien, qui était un produit, qui est dix choses moins un *carré*. [O-13r] Multiplie cinq plus un quart par dix [H-20r] moins deux choses, on a cinquante-deux dirhams plus un demi moins dix racines moins une demi-racine égaux à dix racines moins un *carré*. Restaure les cinquante-deux plus un demi par les dix racines plus une demie, et ajoute-les aux dix racines moins un *carré* ; restaure-les ensuite par le *carré* et ajoute le *carré* aux cinquante-deux dirhams plus un demi ; tu auras vingt racines plus une demi-racine égales à cinquante-deux dirhams [B-73v] plus un demi plus un *carré*. Réduis par cela comme nous l'avons expliqué au début du livre[48].

[48] $$\frac{x(10-x)}{10-2x} = 5+\frac{1}{4} \Leftrightarrow 10x - x^2 = \left(5+\frac{1}{4}\right)(10-2x) \Leftrightarrow \left(20+\frac{1}{2}\right)x = x^2 + 52 + \frac{1}{2}.$$

Ici encore al-Khwārizmī laisse à son lecteur le soin d'achever le calcul. On a

$$2x^2 + 105 = 41x\,.$$

On a deux racines : $x = 3 < 5$ acceptable et $x = \frac{35}{2}$ à rejeter.

Problème <11> — Si on dit : soit un *carré* dont les deux tiers du cinquième sont égaux au septième de la racine, alors le *carré* tout entier est égal à une racine plus un demi-septième de racine ; la racine est donc quatorze parties de quinze du *carré*.

On l'infère ainsi : tu multiplies deux tiers du cinquième du *carré* par sept et un demi pour compléter le *carré* ; multiplie ce que tu as, qui est un septième de racine, par cela ; alors le *carré* sera égal à une racine plus un demi-septième de racine, et sa racine sera égale à un plus un demi septième. Le carré est donc un plus vingt-neuf parties de cent quatre-vingt-seize de dirham. Les deux tiers de son cinquième sont trente parties de cent quatre-vingt-seize, et le septième de sa racine est aussi trente parties de cent quatre-vingt-seize[49].

Problème <12> — Si on dit : soit un *carré* dont les trois quarts du cinquième sont égaux aux quatre cinquièmes de la racine[50].

On l'infère ainsi : tu ajoutes aux trois quarts de son cinquième leur quart pour que la racine [H-20v] soit complète ; ceci est trois plus trois quarts de vingt. Transforme-les tous en quarts, on a quinze de quatre-vingts.

49 $$\frac{2}{3}\times\frac{x^2}{5}=\frac{x}{7}\Leftrightarrow x^2=\frac{15}{14}x \text{ et } x=1+\frac{1}{14}.$$

Al-Khwārizmī vérifie ensuite le calcul

$$x^2=\left(1+\frac{1}{14}\right)^2=1+\frac{29}{196},$$

donc

$$\frac{2}{3}\times\frac{x^2}{5}=\frac{30}{196} \text{ et } \frac{x}{7}=\frac{15}{14\times 7}=\frac{15}{98}=\frac{30}{196}.$$

50 $$\frac{3}{4}\times\frac{x^2}{5}=\frac{4}{5}x\Leftrightarrow\frac{3}{4}\times x^2=4x\Leftrightarrow x=\frac{16}{3}.$$

Al-Khwārizmī procède ainsi : $\frac{3}{20}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{20}=\frac{3}{20}\times\frac{5}{4}=\frac{15}{4}\times\frac{1}{20}=\left(3+\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{20}.$

L'opération indiquée revient à la multiplication des deux membres par $\frac{5}{4}$, d'où

$$\frac{15}{80}x^2=x \text{ et } x=\frac{80}{15}=5+\frac{1}{3}, \text{ d'où } x^2=28+\frac{4}{9}.$$

Divise le quatre-vingts [I-46] par quinze, on a cinq et un tiers ; ceci est la racine du *carré* et le *carré* est vingt-huit et quatre neuvièmes.

Problème <13> — Si on dit : tu multiplies un bien par quatre fois lui-même ; on a vingt.

On l'infère ainsi : si tu le multiplies par lui-même, on a cinq ; c'est la racine de cinq[51].

Problème <14> — Si on dit : [O-13v] tu multiplies un bien par son tiers ; on a dix.

On l'infère ainsi : si tu le multiplies par lui-même, on a trente. Tu dis : le bien est la racine de trente[52].

Problème <15> — Si on dit : tu multiplies un bien par quatre fois lui-même ; on retrouve le tiers du premier bien.

On l'infère ainsi : si [A-12r] tu le multiplies par douze fois lui-même, on retrouve le bien, [B-74r] qui est un demi-sixième ; et le tiers du premier bien est un demi-sixième par un tiers[53].

Problème <16> — Si on dit : tu multiplies un *carré* par sa racine, on retrouve trois fois le premier *carré*.

On l'infère ainsi : si tu multiplies la racine par le tiers du *carré*, on retrouve le *carré*. Tu diras : ceci est un *carré* dont le tiers est la racine, qui est neuf[54].

Problème <17> – Si on dit : tu multiplies quatre des racines d'un *carré* par trois de ses racines, on retrouve le *carré* plus quarante-quatre dirhams.

51 $4x^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 = 5$ et $x = \sqrt{5}$.

52 $\frac{1}{3}x^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 30$ et $x = \sqrt{30}$.

53 $4x^2 = \frac{1}{3}x \Leftrightarrow 12x^2 = x$ et $x = \frac{1}{12}$.

54 $x^2 \times x = 3x^2$.

Voici comment al-Khwārizmī procède : $x \times \frac{1}{3}x^2 = x^2 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 1$, d'où $x = 3$ et $x^2 = 9$.

Il introduit ici le cube et une équation cubique – notions qu'il n'avait pas définies.

On l'infère ainsi : tu multiplies quatre racines par trois racines ; on a douze *carrés* égaux à un *carré* plus quarante-quatre dirhams. Élimine des douze *carrés* un *carré* par un *carré*, il reste onze *carrés* égaux à quarante-quatre dirhams. Divise celui-ci par celui-là, on a quatre, qui est le *carré*[55].

Problème <18> — [H-21r] Si on dit : tu multiplies quatre des racines d'un *carré* par cinq de ses racines, on retrouve le double du *carré* plus trente-six dirhams.

On l'infère ainsi : tu multiplies quatre racines par cinq racines, on a vingt *carrés* égaux à deux *carrés* plus trente-six dirhams. Élimine de vingt *carrés* deux *carrés* pour les deux *carrés* ; il reste dix-huit *carrés* égaux à trente-six dirhams ; tu divises trente-six dirhams par dix-huit ; le quotient est deux, qui est le *carré*[56].

Problème <19> — De même si on dit : tu multiplies la racine d'un *carré* par quatre de ses racines ; on retrouve le triple du *carré* plus cinquante [I-47] dirhams.

On l'infère ainsi : tu multiplies une racine par quatre racines ; on a quatre *carrés* égaux à trois *carrés* plus cinquante dirhams. Ôte trois *carrés* de quatre *carrés* ; il reste un seul *carré* égal à cinquante dirhams, ce qui est le *carré*. Mais la racine de cinquante multipliée par quatre racines de cinquante est deux cents, égaux au triple du *carré* plus cinquante dirhams[57].

[55] $3x \times 4x = x^2 + 44 \Leftrightarrow 11x^2 = 44 \Leftrightarrow x^2 = 4.$

[56] $4x \times 5x = 2x^2 + 36 \Leftrightarrow 18x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 2.$

[57] $x \times 4x = 3x^2 + 50 \Leftrightarrow x^2 = 50.$

Problème <20> — Si on dit : tu ajoutes vingt dirhams à un *carré*, on a douze fois la racine du *carré*.

On l'infère ainsi : tu dis : un *carré* plus vingt dirhams sont égaux à douze racines. Partage en deux moitiés le nombre des racines, et multiplie <la moitié> par elle-même ; on a trente-six. Soustrais-en les vingt dirhams et prends la racine du reste ; soustrais-la [O-14r] de la moitié du nombre des racines, [H-21v] qui est six. Ce qui reste est la racine du *carré*, qui est deux dirhams ; et le *carré* est quatre[58].

Problème <21> – Si on dit : d'un bien, tu écartes le tiers et trois dirhams, et tu multiplies ce qui reste [B-74v] par lui-même ; on retrouve le bien[59].

On l'infère ainsi : si tu retranches son tiers et trois dirhams, il reste ses deux tiers moins trois dirhams, ce qui est une racine. Multiplie donc deux tiers d'une chose moins trois dirhams par lui-même. Tu dis : deux tiers par deux tiers sont quatre neuvièmes du *carré*, et moins trois dirhams par deux tiers d'une chose sont deux racines, et moins trois dirhams par moins trois dirhams sont neuf dirhams. Tu auras donc [A-12v] quatre neuvièmes du *carré* plus neuf dirhams moins quatre racines égaux à une racine. Ajoute les quatre racines à la racine ; on a cinq racines égales à quatre neuvièmes du *carré* plus neuf dirhams. Complète ton *carré*, ceci en multipliant les quatre neuvièmes par deux et un quart ; on a un *carré*. Multiplie neuf dirhams par deux et un quart ; on a vingt plus un quart. Multiplie ensuite les cinq racines [I-48] par deux et un quart ; on a onze choses et un

58 $x^2 + 20 = 12x \Leftrightarrow (x-6)^2 = 36 - 20 \Leftrightarrow (6-x) = 4 \Leftrightarrow x = 2$ et $x^2 = 4$.

Al-Khwārizmī ne donne pas la seconde racine $x = 10$.

59 $\left[x - \left(\frac{1}{3}x + 3\right)\right]^2 = x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 = x \Leftrightarrow \frac{4}{9}x^2 + 9 = 5x \Leftrightarrow x^2 + \frac{81}{4} = \frac{45}{4}x.$

Al-Khwārizmī laisse son lecteur effectuer le reste du calcul. On a

$$x = \frac{45 \pm 27}{8},$$

d'où

$$x = 9 \text{ ou } x = \frac{9}{4}.$$

quart. Tu auras donc un *carré* plus vingt dirhams plus un quart égaux à onze racines et un quart. Restaure par cela de la manière que je t'ai décrite dans la partition des racines, si Dieu le veut.

Problème <22> – Si on dit : tu multiplies le tiers d'un bien par son quart ; on retrouve le bien.

On l'infère ainsi : tu multiplies le tiers d'une chose par le quart d'une chose ; on a la moitié d'un sixième de *carré* égale à une chose. Le *carré* est égal à douze choses, et la chose est la racine de cent quarante-quatre[60].

Problème <23> – Si on dit : d'un bien, tu multiplies [H-22r] le tiers plus un dirham par le quart plus deux dirhams ; on retrouve le bien plus treize dirhams[61].

On l'infère ainsi : tu multiplies le tiers d'une chose par le quart d'une chose, on a un demi-sixième de *carré* ; tu multiplies deux dirhams par le tiers d'une chose, on a deux tiers de racine ; et un dirham par le quart d'une chose, on a le quart d'une chose ; et deux dirhams par un dirham est deux dirhams ; cela est un demi-sixième de *carré* plus deux dirhams plus onze parties de douze parties de racine, égaux à une racine plus treize dirhams. Élimine deux dirhams de treize dirhams par deux dirhams, il reste onze dirhams. Ôte onze [O-14v] parties de racine, il reste un demi-sixième de

60 $$\frac{1}{3}x \times \frac{1}{4}x = x \Leftrightarrow \frac{1}{12}x^2 = x \Leftrightarrow x^2 = 12x,$$

d'où

$$x = 12 = \sqrt{144}.$$

61 $$\left(\frac{x}{3}+1\right)\left(\frac{x}{4}+2\right) = x+13 \Leftrightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{11}{12}x + 2 = x + 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{12} = 11 + \frac{x}{12} \Leftrightarrow x^2 = x + 132.$$

Al-Khwārizmī laisse son lecteur effectuer le calcul des racines. L'équation admet deux racines de signes contraires, $x = 12$ et $x = -11$.

racine plus onze dirhams égaux à un demi-sixième de *carré* ; complète celui-ci en le multipliant par douze, et multiplie tout ce que tu as par douze ; on a [B-75r] un *carré* égal à cent trente-deux dirhams plus une racine. Réduis par cela, tu parviens à la vérité, si Dieu le Très-Haut le veut, comme je te l'avais décrit.

Problème <24> – Si on dit : un dirham et demi est partagé entre un homme et quelques hommes, et ce qui revient à l'homme est le double du nombre des quelques hommes.

On l'infère ainsi : [I-49] tu dis : l'homme et les quelques hommes sont un et une chose ; c'est comme si on avait dit : un dirham et demi à partager entre un et une chose, de sorte que deux choses reviennent à l'un. Multiplie les deux choses par l'un et la chose, on a deux *carrés* plus deux choses égaux à un dirham plus un demi. Ramène-les à un seul *carré* en prenant la moitié de tout ce que tu as ; tu dis alors : un *carré* plus une chose sont égaux à trois quarts de dirham. [H-22v] Réduis par cela de la manière que je t'ai décrite dans l'introduction du livre[62].

Problème <25> – Si on dit : tu écartes le tiers et le quart d'un bien et quatre dirhams, et tu multiplies ce qui reste par lui-même, on retrouve le bien plus douze dirhams.

On l'infère ainsi : tu prends une chose ; tu écartes son tiers et son quart ; il reste cinq parties de douze parties d'une chose. Tu en écartes quatre dirhams également ; il reste cinq parties de [A-13r] douze parties d'une chose moins quatre dirhams. Tu multiplies <le reste> par lui-même. Les

[62] Partager 1,5 dirham entre $(x + 1)$ personnes de façon que chaque part soit égale à $2x$.

$$\frac{\frac{3}{2}}{x+1} = 2x \Leftrightarrow 2x + 2x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x + x^2 = \frac{3}{4} \text{ et } x = \frac{1}{2}.$$

cinq parties donnent vingt-cinq parties. Tu multiplies le douze par lui-même, on a cent quarante-quatre, et ceci donne vingt-cinq de cent quarante-quatre du *carré*. Tu multiplies ensuite les quatre dirhams par le double de cinq parties de douze d'une chose, on a quarante parties dont chaque douzaine est une chose ; et les quatre dirhams par les quatre dirhams sont seize dirhams additifs. Les quarante parties deviendront trois racines plus un tiers de racine soustractifs. Tu obtiens vingt-cinq parties de cent quarante-quatre parties du *carré*, plus seize dirhams moins trois racines et un tiers de racine, [O-15r] égaux au premier bien, qui est une chose, plus douze dirhams. Restaure-le, et ajoute les trois racines et un tiers à la chose plus les douze dirhams ; il vient quatre racines et un tiers de racine et douze dirhams. Réduis par cela, et ôte le douze de seize ; il reste quatre dirhams et vingt-cinq parties de cent quarante-quatre du *carré* égaux à quatre racines [I-50] et un tiers. Tu auras alors besoin de compléter ton *carré*, et pour le compléter tu multiplies tout ce que tu as par cinq plus dix-neuf parties des parties de vingt-cinq. Tu multiplies alors vingt-cinq parties de cent quarante-quatre parties du *carré* par cinq plus dix-neuf parties de vingt-cinq. On a un *carré* ; et tu multiplies [B-75v] les quatre dirhams par cinq plus dix-neuf parties de vingt-cinq ; on a vingt-trois dirhams et une

partie de vingt-cinq ; tu multiplies quatre racines et un tiers par cinq plus dix-neuf parties de vingt-cinq ; on a vingt-quatre racines et vingt-quatre parties de vingt-cinq de racine.

Partage en deux moitiés les racines ; on a douze racines plus douze parties de vingt-cinq <parties> de racine ; multiplie leur nombre par lui-même ; on a cent cinquante-cinq dirhams plus quatre cent soixante-neuf parties de six cent vingt-cinq. Retranches-en les vingt-trois dirhams plus une partie de vingt-cinq qui étaient avec le *carré* ; il reste cent trente-deux plus quatre cent quarante-quatre parties de six cent vingt-cinq. Tu prends la racine de cela qui est onze dirhams plus treize parties de vingt-cinq, que tu ajoutes à la moitié du nombre des racines, qui est douze dirhams plus douze parties de vingt-cinq, ce qui sera [O-15v] vingt-quatre, qui est le bien que tu as cherché. Tu écartes son tiers et son quart et quatre [A-13v] dirhams, et tu multiplies ensuite ce qui reste par lui-même ; on retrouve le bien plus douze dirhams[63].

Problème <26> – Si on dit : [I-51] un bien que tu multiplies par ses deux tiers atteint cinq.

On l'infère ainsi : tu multiplies une chose par les deux tiers [H-23v] d'une chose ; on a deux tiers de *carré* égaux à cinq. Complète le *carré* par sa moitié, et ajoute au cinq sa moitié ; tu auras un *carré* égal à sept et demi. Sa racine est la chose que tu multiplies par ses deux tiers pour avoir cinq[64].

63
$$\left(\frac{5}{12}x-4\right)^2 = x+12 \Leftrightarrow \frac{25}{144}x^2 - \frac{40}{12}x + 16 = x+12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{25}{144}x^2 + 4 = \left(4+\frac{1}{3}\right)x \Leftrightarrow x^2 + 23 + \frac{1}{25} =$$
$$= \left(24+\frac{24}{25}\right)x \quad \text{(équation de type 5),} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\left(12+\frac{12}{25}\right)\right)^2 = \left(12+\frac{12}{25}\right)^2 - \left(23+\frac{1}{25}\right) = 132 + \frac{444}{625} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 24 \text{ et } x = \frac{24}{25}.$$

Al-Khwārizmī calcule la racine $x = 24$ et vérifie ensuite qu'elle est bien racine de l'équation. Cf. aussi le problème 29.

64
$$x \times \frac{2}{3}x = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{15}{2}.$$

Problème <27> – Si on dit : de deux biens entre lesquels il y a deux dirhams, tu divises le petit par le grand ; le quotient parvient à un demi-dirham.

On l'infère ainsi : tu multiplies une chose plus deux dirhams par le quotient, qui est un demi ; on a une demi-chose plus un dirham égaux à une chose. Élimine une demi-chose par une demi-chose, il reste un dirham égal à une demi-chose ; double-le, tu auras une chose égale à deux dirhams ; c'est l'un des deux biens, et l'autre bien est quatre[65].

Problème <28> – Si on dit : tu partages un dirham entre des hommes, alors une chose leur revient ; tu leur ajoutes un homme, et tu partages ensuite entre eux un dirham ; il leur revient un sixième de dirham de moins que le premier quotient[66].

On l'infère ainsi : tu multiplies le nombre des premiers hommes, qui est une chose, par [B-76r] la différence entre leurs parts[67] ; tu multiplies ensuite ce que tu obtiens par le nombre des autres hommes ; tu divises ce que tu obtiens par la différence entre le <nombre> des premiers hommes et <celui> des autres ; on a alors ton bien que tu as partagé. Multiplie le nombre des premiers hommes, qui est une chose, par le sixième, qui est entre les parts[68] ; on a un sixième de racine. Multiplie ensuite celui-ci par le nombre des autres hommes, qui est une chose plus un ; on a un sixième de *carré* et un sixième de racine, divisés par un dirham, égaux à un dirham. Complète ton *carré*, qui est un sixième. Multiplie-le donc par six ; on a [H-24r] un *carré* plus une racine. Multiplie le dirham par six pour avoir six dirhams ; on a un *carré* plus une racine égaux à six dirhams. Partage la racine[69] en deux moitiés ; multiplie <la moitié> par elle-même, on a un

65 $$\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x+1=x, \text{ d'où } x=2.$$

66 Soit x le nombre de personnes, on a :

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow x^2+x=6\ \Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+6=\frac{25}{4},$$

d'où $x=2$; cf. problème 8.

67 Litt. : entre eux.

68 Litt. : entre eux.

69 Il s'agit du nombre 1, qui est ici le nombre des racines.

quart ; ajoute-le au [I-52] six, et prends la racine de la somme ; soustrais-en la moitié de la racine que tu avais multipliée par elle-même, ce qui est un demi. Ce qui reste est le nombre des premiers hommes, [O-16r] qui, dans ce problème, sont deux hommes.

Problème <29> – Si on dit : tu multiplies un bien par ses deux tiers, on a cinq.

On l'infère ainsi : si tu le multiplies par lui-même, on a sept et un demi. Tu dis : il est la racine de sept et un demi ; multiplie-le par les deux tiers de la racine de sept et un demi. Multiplie deux tiers par deux tiers, on a quatre neuvièmes ; et quatre neuvièmes par sept et un demi sont trois plus un tiers ; la racine de trois plus un tiers est donc les deux tiers de la racine de sept [A-14r] et un demi. Multiplie donc trois plus un tiers par sept et un demi ; on a vingt-cinq, dont la racine est cinq[70].

Problème <30> – Si on dit : on multiplie un *carré* par trois de ses racines, on a cinq fois le premier *carré*. C'est comme si on avait dit : si tu multiplies un *carré* par sa racine, on a le premier *carré* plus ses deux tiers. La racine du *carré* est un dirham plus deux tiers, et le *carré* est deux dirhams plus sept neuvièmes[71].

Problème <31> – Si on dit : d'un *carré* tu ôtes le tiers et tu multiplies ensuite le reste par trois fois la racine du premier *carré*, on retrouve le premier *carré*.

On l'infère ainsi : si tu [B-76v] multiplies le premier *carré* tout entier, avant que tu ôtes son tiers, par le triple de sa racine, on a un *carré* plus un demi, [H-24v] car ses deux tiers par le triple de sa racine sont un *carré* ; lui-même tout entier par le triple de sa racine est un *carré* plus un demi ; et lui-même tout entier par une seule racine est la moitié d'un *carré*. Donc la

[70] Al-Khwārizmī traite le même problème dans 26. Ici, il procède par un calcul différent et plus explicite : $x \times \frac{2}{3}x = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{15}{2}$.

Il commence par exprimer $\frac{2}{3}x$ comme racine de $\frac{4}{9}x^2 = \frac{4}{9} \times \frac{15}{2} = \frac{30}{9}$, d'où

$$\left(x \times \frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{15}{2} \times \frac{30}{9} = 25 \text{ et } x \times \frac{2}{3}x = 5.$$

[71] $$x^2 \times 3x = 5x^2 \Leftrightarrow x^2 \times x = \frac{5}{3}x^2.$$

C'est la seconde équation cubique rencontrée dans ce livre ; mais al-Khwārizmī évite manifestement de nommer le cube qu'il n'avait pas défini, pour donner directement la valeur $x = \frac{5}{3}$ et $x^2 = 2 + \frac{7}{9}$.

racine du *carré* est un demi, et le *carré* est un quart. Les deux tiers du *carré* sont un sixième, et le triple de la racine du *carré* est un dirham plus un demi. Quand tu multiplies un sixième par un dirham et un demi, on obtient un quart, qui est le *carré*[72].

Problème <32> – Si on dit : soit un *carré* dont tu écartes quatre fois la racine ; tu prends ensuite le tiers de ce qui reste ; on a quatre fois la racine. Le *carré* est deux cent cinquante-six.

On l'infère ainsi : tu sais que le tiers de ce qui reste est égal à quatre fois la racine, et que ce qui reste est égal à douze racines. Ajoute-lui les quatre racines ; on a seize racines, et seize est la racine du *carré*[73].

Problème <33> – Si on dit : soit un *carré* dont tu écartes la racine, si tu ajoutes à sa racine la racine [I-53] du reste, on a deux dirhams. Ceci est la racine d'un *carré* plus la racine d'un *carré* moins une racine égale à deux dirhams. Retranches-en la racine du *carré*, et retranche de deux dirhams la racine du *carré*. On a deux dirhams moins une racine par lui-même — quatre dirhams plus un *carré* moins quatre racines — égaux à un *carré* moins une racine. Réduis par cela ; on a un *carré* [O-16v] plus quatre dirhams égaux à un *carré* plus trois racines. Élimine un *carré* par un *carré*, il reste trois racines égales à quatre dirhams. La racine est égale à un dirham plus un tiers, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est un dirham plus sept neuvièmes de dirham[74].

Problème <34> – Si on dit : soit un *carré* dont tu écartes [H-25r] trois racines, si tu multiplies ensuite le reste par lui-même, on retrouve le *carré*.

Tu sais que ce qui reste est aussi une racine, et que le *carré* est quatre racines, ce qui est seize dirhams[75].

72 $\frac{2}{3}x^2 \times 3x = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 \times x = x^2$, d'où $x = \frac{1}{2}$ et $x^2 = \frac{1}{4}$.

C'est la troisième équation cubique. On peut faire la même remarque que pour le problème précédent.

73 $\frac{x^2 - 4x}{3} = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 12x \Leftrightarrow x^2 = 16x \Leftrightarrow x = 16$ et $x^2 = 256$.

74 $\sqrt{x^2 - x} + x = 2$, avec $x^2 > x$ et $x < 2$, c'est-à-dire $1 < x < 2$. On a

$$x^2 - x = x^2 + 4 - 4x \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ et } x^2 = \frac{16}{9},$$

c'est la racine qui convient.

75 $\left(x^2 - 3x\right)^2 = x^2$. On a $x^2 - 3x = x$ et $x = 4$, $x^2 = 16$. On note ici qu'il s'agit d'une équation biquadratique, mais al-Khwārizmī évite de développer pour ne traiter qu'une équation quadratique. En effet, il n'avait pas défini le carré-carré.

Chapitre sur les transactions

Sache que toutes les transactions entre les gens, de vente, d'achat, de change <de monnaies>, de salaire, et toutes les autres, ont lieu selon deux modes, et d'après quatre [B-77r] nombres prononcés par le demandeur, qui sont : quantité d'évaluation, taux, prix, quantité évaluée[76].

Le nombre qui est la quantité d'évaluation n'est pas proportionnel [A-14v] à celui qui est le prix. Le nombre qui est le taux n'est pas proportionnel au nombre de la quantité évaluée, et, parmi ces quatre nombres, trois sont toujours évidents et connus, et l'un d'eux est inconnu, qui, dans les termes de celui qui parle, est « combien », et qui est l'objet du demandeur.

On l'infère ainsi : tu examines les trois nombres évidents ; il est nécessaire que, parmi eux, il y en ait deux, dont chacun n'est pas proportionnel à son associé. Tu multiplies les deux nombres évidents non proportionnels l'un par l'autre ; tu divises le produit par l'autre nombre évident, dont <l'associé> non proportionnel est inconnu ; ce que tu obtiens est le nombre inconnu cherché par le demandeur, et qui n'est pas proportionnel au nombre par lequel tu as divisé.

[76] Dans ce chapitre al-Khwārizmī traite des problèmes où intervient la proportion suivante :

$$\frac{\text{quantité d' évaluation}}{\text{taux}} = \frac{\text{quantité évaluée}}{\text{prix}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c\,.$$

Exemple pour le premier mode — [I-54] Si on te dit : dix pour six, combien auras-tu pour quatre ? Dix, dans ses termes, est le nombre de la quantité d'évaluation ; [H-25v] six, dans ses termes, est le taux ; et dans ses termes : combien auras-tu ? est le nombre inconnu qui est la quantité évaluée ; et quatre, dans ses termes, est le nombre qui est le prix. Ainsi, le nombre de la quantité d'évaluation, qui est dix, n'est pas proportionnel au nombre qui est le prix, quatre. Multiplie dix par quatre — ce sont les deux non proportionnels évidents ; on a quarante. Divise par l'autre nombre évident, qui est le taux, c'est-à-dire six ; on a six, plus deux tiers, qui est le nombre inconnu, et qui, dans les termes de celui qui parle, [O-17r] est « combien ? », et qui est la quantité évaluée ; et celui qui ne lui est pas proportionnel est le six, qui est le taux[77].

Le deuxième mode – Ce sont les termes de celui qui parle : dix pour huit, quel est le prix de quatre ? Peut-être a-t-il dit : pour quatre de ceux-ci, quel est le prix ? Dix est le nombre de la quantité d'évaluation qui n'est pas proportionnel au nombre [B-77v] qui est le prix inconnu, qui est « combien ? », dans ses termes. Huit est le nombre qui est le taux, et il n'est pas proportionnel au nombre évident, qui est la quantité évaluée, c'est-à-dire quatre. Multiplie les deux nombres évidents non proportionnels l'un par l'autre, c'est-à-dire quatre par huit, on a trente-deux. Divise-le par l'autre nombre évident qui est la quantité d'évaluation, c'est-à-dire dix, on a trois et un cinquième, c'est-à-dire le nombre qui est le prix, et qui n'est pas proportionnel au dix par lequel tu as divisé[78].

77 $\frac{10}{6}=\frac{x}{4}$, d'où $x=6+\frac{2}{3}$.

78 $\frac{10}{8}=\frac{4}{x}$, d'où $x=3+\frac{1}{5}$.

Ainsi sont toutes les transactions entre les gens, et leurs modes d'inférence, si Dieu le Très-Haut le veut.

Si quelqu'un interroge et dit : on engage un travailleur pour dix dirhams par mois, il a travaillé pendant six [H-26r] jours, combien lui revient-il ? Tu sais que six jours est le cinquième du mois, et que ce qui lui revient en dirhams [A-15r] est en rapport avec la partie du mois pendant laquelle il a travaillé[79].

On l'infère ainsi : son terme « en un mois », c'est-à-dire trente jours, c'est la quantité d'évaluation ; son terme « dix dirhams », c'est le taux ; son terme « six jours », c'est la quantité évaluée ; et son terme « combien lui revient », c'est le prix. Multiplie le taux, qui est dix, par la quantité évaluée qui ne lui est pas proportionnelle, et qui est six ; on a soixante, qu'on divise par trente, qui est le nombre évident qui est la quantité d'évaluation. Cela sera deux dirhams, qui est le prix.

Il en est de même pour toutes les transactions des gens entre eux, de change, de mesure, de poids, si Dieu le Très-Haut le veut[80].

[79] Cette remarque permet de conclure sans utiliser la méthode donnée ensuite.

[80] $\frac{30}{10} = \frac{6}{x}$, d'où $x = 2$.

Chapitre sur la mensuration

Sache que la notion de un par un est une mensuration, et que son sens est une coudée par une coudée. Ainsi toute surface[81], de côtés et d'angles égaux, telle que chacun de ses côtés [I-55] est un, est, tout entière, un. Si chacun de ses côtés est deux et qu'elle est de côtés et d'angles égaux, alors la surface tout entière est quatre fois la surface qui est une coudée [B-78r] par une coudée. De même, trois par trois, ou plus, ou moins ; de même pour un demi par un demi, ou pour toute autre [O-17v] fraction, c'est ainsi[82].

Toute surface carrée, dont chacun des côtés est une demi-coudée, est égale au quart de celle dont chacun des côtés est une coudée. De même un tiers [H-26v] par un tiers, un quart par un quart, un cinquième par un cinquième, deux tiers par un demi, ou moins que cela, ou plus, on les calcule ainsi.

Pour toute surface carrée de côtés égaux, l'un de ses côtés par un est sa racine, et par deux, ses deux racines, que cette surface soit petite ou grande.

Et pour toute surface à angles droits, la multiplication de sa longueur par sa largeur est son aire.

Pour tout triangle équilatéral ou non équilatéral, la multiplication de sa hauteur par la moitié de sa base, sur laquelle tombe la perpendiculaire, est l'aire de ce triangle.

Pour tout losange à côtés égaux, la multiplication de l'une des diagonales par la moitié de l'autre est son aire[83].

[81] Il s'agit d'un quadrilatère ayant des côtés et des angles égaux, c'est-à-dire d'un carré.

[82] Al-Khwārizmī commence ce chapitre en introduisant la notion d'unité de surface : si un carré a pour côté une coudée, sa surface sera mesurée par le nombre 1 et il sera pris comme unité de surface. Si le côté du carré est 2, sa surface s est quatre fois celle du carré unité dont le côté est 1. Il en est de même pour tout côté de nombre entier ou de fraction. Ainsi si le côté est $\frac{1}{2}$, on a $s=\frac{1}{4}$.

[83] Aire du rectangle : produit de deux dimensions ; aire du triangle : demi-produit de la base par la hauteur et aire du losange : demi-produit des diagonales.

Pour tout cercle, la multiplication du diamètre par trois et un septième est la circonférence [I-56] qui l'entoure ; ceci est une convention entre les gens, sans nécessité. Les Indiens ont pour cela deux autres propositions : l'une, que tu multiplies le diamètre par lui-même, et ensuite par dix ; tu prends la racine du produit ; ce qu'on a est la circonférence. La deuxième proposition revient à ceux d'entre eux qui sont astronomes : tu multiplies le diamètre par soixante-deux mille huit cent trente-deux, et tu divises ensuite cela par vingt mille ; ce que tu obtiens est la circonférence. Toutes celles-là sont proches les unes des autres[84].

Si tu divises la circonférence par trois plus un septième, on a le diamètre.

Pour tout cercle, le demi-diamètre par [A-15v] la demi-circonférence est l'aire, car pour toute figure ayant des côtés et des angles égaux — triangles, carrés, pentagones, et ce qui [H-27r] est au-dessus de cela — la multiplication de la moitié de son périmètre [B-78v] par la moitié du diamètre du plus grand cercle inscrit est son aire.

Pour tout cercle, son diamètre multiplié par lui-même, duquel on retranche son septième et la moitié de son septième, est son aire, et ceci est en accord avec le premier procédé[85].

Toute portion de cercle semblable[86] à un arc est nécessairement égale à un demi-cercle, ou plus petite, ou plus grande. La preuve en est que, si la flèche de l'arc est égale à la demi-corde, [O-18r] alors la portion est égale à un demi-cercle ; si elle est inférieure à la demi-corde, alors la portion est inférieure à un demi-cercle ; [M-17] et si la flèche est supérieure à la demi-corde, alors la portion est supérieure à un demi-cercle.

[84] Cercle de diamètre d ; le périmètre est
$$p = d \times \left(3 + \frac{1}{7}\right) = \sqrt{10d^2} = d\sqrt{10} \quad = d \times \frac{62\,832}{20\,000} = (d \times 3{,}1416).$$

[85] Aire du cercle : $s = \frac{1}{2} d \times \frac{1}{2} p$. Ce résultat est déduit de l'aire d'un polygone régulier de périmètre p et d'apothème $\frac{d}{2}$. En remplaçant p par $\left(3 + \frac{1}{7}\right)d$, on trouve
$$s = \frac{d^2}{4}\left(3 + \frac{1}{7}\right) = d^2\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) = d^2\left(1 - \frac{3}{14}\right) = d^2\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right).$$

[86] Segment de cercle : L'arc ACB définit un segment de cercle dont la base est la corde AB et la flèche CH. À toute corde AB sont associés deux segments, de flèches respectives CH et $C'H$. Al-Khwārizmī donne les résultats suivants : 1) Relation entre corde, flèche et diamètre : $\frac{AH^2}{CH} + CH = 2R$ (R rayon du cercle).

En effet, dans le triangle CAC', on a $AH^2 = CH \cdot HC'$,

d'où $\frac{AH^2}{CH} + CH = HC' + CH = CC' = 2R$.

2) Connaissant la corde et la flèche, on en déduit le diamètre.

Si tu veux connaître à quel cercle elle appartient, multiplie la demi-corde par elle-même, tu divises ce produit par la flèche, et ajoute ce que tu obtiens à la flèche ; ce qu'on atteint alors est le diamètre du cercle [I-57] dont l'arc est une partie.

Si tu veux connaître l'aire de la <portion limitée par> l'arc, multiplie le demi-diamètre du cercle par la moitié de l'arc, et retiens le résultat ; soustrais ensuite la flèche de l'arc du demi-diamètre du cercle, si l'arc est inférieur à un demi-cercle ; mais s'il est supérieur à un demi-cercle, soustrais le demi-diamètre du cercle de la flèche de l'arc, multiplie ce qui reste par la demi-corde de l'arc, et soustrais le produit de ce que tu as retenu si l'arc est inférieur à un demi-cercle, ou ajoute-le au retenu si l'arc est supérieur à un demi-cercle. Ce que l'on atteint après l'addition ou la soustraction [H-27v] est la mesure de <la portion limitée par> l'arc, si Dieu le Très-Haut le veut[87].

Pour tout solide carré[88], si tu multiplies la longueur par la largeur, et ensuite par la profondeur, tu obtiens sa mesure. Et, s'il n'était pas carré, mais circulaire ou triangulaire ou autre, et que sa profondeur soit toutefois selon la rectitude et le parallélisme[89], pour le mesurer, tu mesures sa surface (de base) pour connaître son aire. Ce que tu obtiens, tu le multiplies par la profondeur ; c'est la mesure[90].

Quant au cône à partir du triangle [B-79r] ou du cercle ou du carré, le produit du tiers de l'aire de sa base par sa perpendiculaire est sa mesure[91].

Et sache que, pour tout triangle rectangle, la somme des produits de chacun des deux petits côtés par lui-même est égale au produit du plus long côté par lui-même[92].

87 Aire d'un segment de cercle : un segment de cercle peut être égal, inférieur ou supérieur à un demi-cercle.
Aire du segment ACB inférieur à un demi-cercle : $\text{seg.}(ACB) = \text{sect.}(AOBC) - \text{tr.}(AOB)$.

Si on pose $A\hat{O}B = 2\alpha$ radians, on a

$$\text{seg.}(ACB) = R \cdot \alpha R - OH \cdot AH = [\alpha R^2 - R^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha].$$

88 Sous-entendu : dont tous les angles sont droits – prisme droit à base rectangulaire.

89 Il s'agit d'un prisme ou d'un cylindre droit. Al-Khwārizmī veut dire que sa hauteur est une droite parallèle aux arêtes, donc perpendiculaire aux bases.

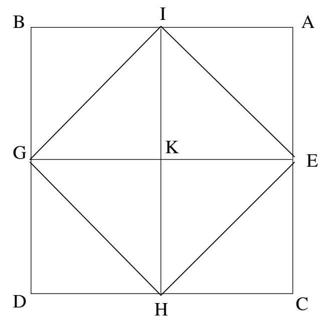
90 Prisme droit à base rectangulaire : le volume est mesuré par le produit des trois dimensions.
Prisme droit à base polygonale ou cylindre droit : v = aire de la base × hauteur.

91 Il s'agit soit d'une pyramide à base triangulaire ou carrée, soit d'un cône à base circulaire. Volume d'une pyramide ou d'un cône à base circulaire :

$$v = \frac{1}{3} \text{ aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

92 Énoncé général du théorème de Pythagore. La démonstration est cependant faite pour un triangle rectangle isocèle.

Démonstration : Posons une surface carrée [A-16r] de côtés et d'angles égaux *ABCD*. Coupons *AC* en deux moitiés au point *E*. Menons une droite[93] jusqu'à *G*. Coupons ensuite le côté *AB* en deux moitiés au point *I*, et menons une droite[94] jusqu'à *H*. [I-58] La surface *ABCD* sera alors quatre [O-18v] surfaces de côtés et d'angles égaux, et d'aires égales, qui sont la surface *AK*, la surface *CK*, la surface *BK* et la surface *DK*. Menons ensuite du point *E* jusqu'au point *I* une droite qui coupe la surface *AK* en deux moitiés. À partir de cette surface on engendre deux triangles, qui sont les triangles *AIE* et *EKI* : [H-28r] il est donc clair que *AI* est la moitié de *AB* et que *AE* lui est égale — elle est la moitié de *AC* — et tous les deux ont, d'après un angle droit, l'hypoténuse *IE*. De même, menons des droites de *I* à *G*, de *G* à *H*, et de *H* à *E*. [M-18] De tous les carrés sont engendrés huit triangles égaux. Or il était clair que quatre d'entre eux sont la moitié de la plus grande surface, qui est *AD*. Mais il est clair que le côté *AI* par lui-même est l'aire de deux triangles, et que le côté *AE* par lui-même est également l'aire de deux triangles qui leur sont égaux. La somme de cela est l'aire de quatre triangles, et le côté *EI* par lui-même est aussi l'aire de quatre autres triangles. Il est alors clair [B-79v] que la somme des produits de *AI* par lui-même et de *AE* par lui-même est égale au produit de *IE* par lui-même. Ce qu'il fallait montrer[95]. Voici la figure :



[93] Il s'agit de la parallèle à *AB*.

[94] Il s'agit de la parallèle à *AC*.

[95] Voici la démonstration :

ABDC un carré, les points *E*, *I*, *G*, *H*, milieux respectifs de *CA*, *AB*, *BD*, *DC*. Les droites $EG \perp IH$ partagent le carré en quatre carrés égaux, dont chacun est formé de deux triangles rectangles isocèles égaux, d'aire $s = \frac{1}{8}$ aire $(ABCD)$; on a donc

$$AI^2 = AE^2 = 2 \text{ aire } (AIE) = 2s$$
$$EI^2 = \text{aire } (EIGH) = 4s,$$

d'où

$$EI^2 = AI^2 + AE^2.$$

Cette démonstration est valable seulement dans le cas du triangle isocèle.

Problèmes de mensuration

[I-59] Sache que les quadrilatères sont de cinq genres :

<Les premiers> sont de côtés égaux et d'angles droits.

Les seconds sont d'angles droits et de côtés inégaux, et les longueurs sont supérieures aux largeurs.

Les troisièmes sont appelés les losanges ; ce sont ceux dont les côtés sont égaux et les angles inégaux.

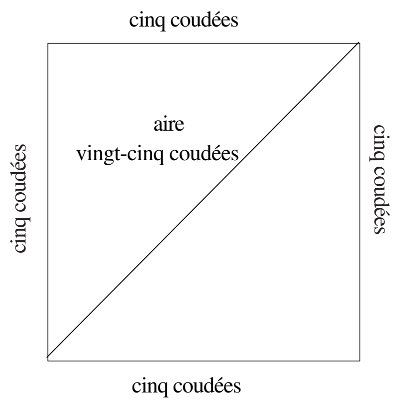
Les quatrièmes sont semblables aux losanges ; ce sont ceux dont les longueurs et les largeurs sont inégales et les angles inégaux. Toutefois les deux longueurs sont égales et les deux largeurs sont aussi égales.

Les cinquièmes sont ceux dont les côtés [O-19r] et les angles [H-28v] sont inégaux.

Pour ceux de ces quadrilatères qui ont les côtés égaux et les angles droits, ou les côtés inégaux et les angles droits, tu multiplies leur longueur par leur largeur pour avoir leur aire. Ce qu'on atteint est l'aire.

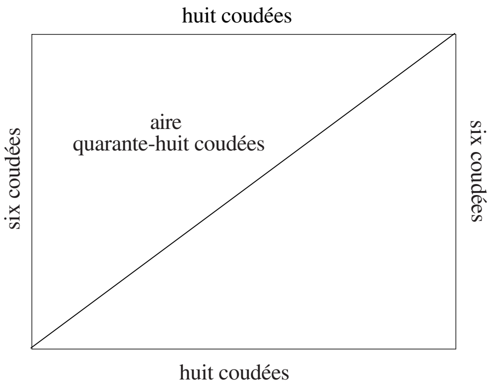
Exemple : Chaque côté d'un terrain carré est cinq coudées. Son aire est vingt-cinq coudées.

Voici sa figure : [A-16v]



Le second. Un terrain rectangulaire de longueurs huit coudées et huit coudées, et de largeurs six coudées et six coudées. Tu multiplies huit coudées par six coudées pour avoir son aire ; on a quarante-huit coudées. C'est son aire.

Voici sa figure :

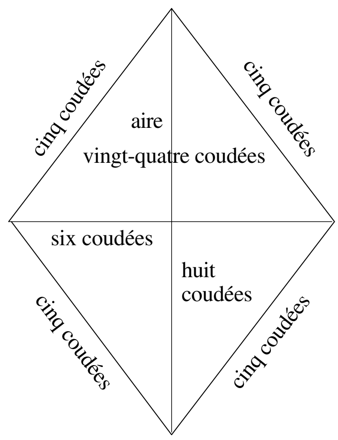


Quant au losange de côtés égaux, dont chacun est [I-60] cinq coudées, dont l'une des diagonales est huit coudées et l'autre six coudées, [B-80r] sache que pour avoir son aire, il faut connaître les deux diagonales ou l'une d'elles. Si tu connais les deux diagonales, alors le produit de l'une par [M-19] la moitié de l'autre est son aire — tu multiplies en effet huit par trois, ou quatre par six ; on a vingt-quatre coudées, qui est son aire.

Si tu connais une seule diagonale, alors tu sais qu'il y a deux triangles, dont chacun a deux côtés, cinq coudées et cinq coudées, [H-29r] et le

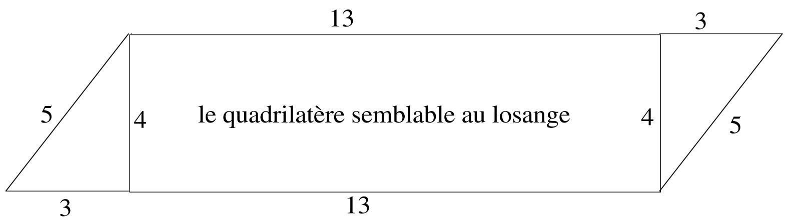
troisième côté est la diagonale. Calcule-les par le calcul des triangles, nous avons montré cela dans le chapitre des triangles.

Voici la figure :



Quant au semblable au losange, c'est selon l'exemple du losange.

Voici sa figure :



Pour les autres quadrilatères, on connaît leur aire à partir de la diagonale, ce qui ramène au calcul des triangles, si Dieu le Très-Haut le veut, sache cela[96]. [O-19v]

Les triangles sont de trois espèces : rectangles, aigus et obtus.

[96] Al-Khwārizmī ne donne pas l'expression de l'aire du parallélogramme. La figure est cependant décomposée en un rectangle et deux triangles rectangles. Il rappelle qu'on obtient l'aire d'un quadrilatère quelconque en le décomposant en deux triangles par une de ses diagonales.

Est rectangle tout triangle tel que, si tu multiplies chacun des deux petits côtés par lui-même et que tu additionnes, cela sera égal au plus long côté multiplié par lui-même.

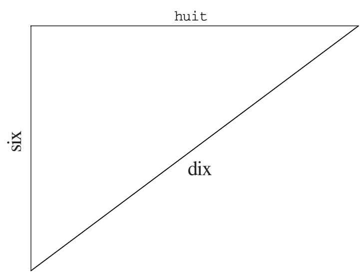
Est aigu tout triangle tel que, si tu multiplies chacun des deux petits côtés par lui-même et que tu additionnes, le résultat sera plus grand que le plus long côté multiplié par lui-même.

Est obtus [I-61] tout triangle tel que, si tu multiplies chacun des deux petits côtés par lui-même et que tu additionnes, le résultat sera plus petit que le plus grand côté multiplié par lui-même.

Le rectangle, c'est celui qui a [A-17r] deux <côtés> perpendiculaires et une hypoténuse et qui est égal à un demi-rectangle. Pour connaître son aire, [B-80v] tu multiplies l'un des côtés qui entourent l'angle droit par la moitié de l'autre. Ce qu'on atteint est son aire[97].

Exemple : Un triangle rectangle dont l'un des côtés est six coudées, un autre côté huit coudées et la diagonale [H-29v] dix coudées. Pour calculer cela, tu multiplies six par quatre ; on a vingt-quatre coudées, qui est son aire.

Si tu désires la calculer à partir de la perpendiculaire — sa perpendiculaire ne tombe en effet que sur le grand côté, car les deux petits côtés sont perpendiculaires ; si donc tu veux cela, multiplie sa perpendiculaire par la moitié de la base. Ce que tu obtiens est son aire. Voici sa figure :



[97] Soit ABC un triangle avec les côtés a, b, c tels que $a > b > c$; on a

$\hat{A}$ = 1 Droit $\Leftrightarrow$ $b^2 + c^2 = a^2$

$\hat{A}$ < 1 Droit $\Leftrightarrow$ $b^2 + c^2 > a^2$

$\hat{A}$ > 1 Droit $\Leftrightarrow$ $b^2 + c^2 < a^2$.

Aire du triangle rectangle : $s = \frac{1}{2}b \cdot c = \frac{1}{2}a \cdot h$ (si h est la hauteur relative à l'hypoténuse).

Aire du triangle « aigu » : $s = \frac{1}{2}\, b \cdot h$ (si b est le côté pris comme base et h la hauteur correspondante).

Si le triangle est isocèle ou équilatéral, le pied de la hauteur est le milieu de la base.

Cas du triangle équilatéral de côté 10. On calcule la hauteur h : $h^2 = 10^2 - 5^2 = 75$, d'où $s = \frac{1}{2}b \cdot h = 5\sqrt{75} = 25\sqrt{3}$.

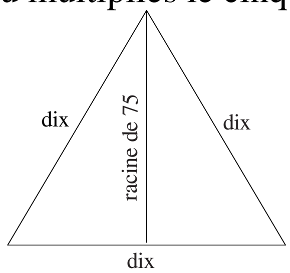
Remarque : al- Khwārizmī calcule $s^2 = 25 \times 75 = 1\,875$, d'où $s = \sqrt{1\,875}$.

Quant à la seconde espèce, le triangle équilatéral à angles aigus, dont chaque côté est dix coudées, on connaît son aire à l'aide de sa perpendiculaire et du pied de celle-ci. [M-20]

Sache que si, entre deux côtés égaux d'un triangle, on mène une perpendiculaire à la base, le pied de la perpendiculaire tombe alors suivant un angle droit, et tombe exactement au milieu de la base, si les deux côtés sont égaux. Mais s'ils sont inégaux, le pied est distinct du milieu de la base. Mais on sait que, dans ce triangle, le pied, quel que soit le côté sur lequel tu le poses, ne tombe que sur son milieu, et que sa moitié est cinq coudées. [O-20r] Pour connaître la perpendiculaire, multiplie le cinq par lui-même, et multiplie l'un des deux côtés par lui-même, c'est-à-dire dix. On a alors cent. Soustrais-en le produit de cinq par lui-même, c'est-à-dire vingt-cinq. Il reste alors soixante-quinze. Prends la racine de cela, c'est la perpendiculaire ; elle sera un côté pour les deux triangles à [H-30r] angles droits.

Si tu veux l'aire, multiplie la racine de soixante-quinze [B-81r] par la moitié de la base, qui est cinq. C'est-à-dire [I-62] que tu multiplies le cinq par lui-même pour avoir la racine de soixante-quinze par la racine de vingt-cinq. Multiplie alors soixante-quinze par vingt-cinq. On a mille huit cent soixante-quinze. Prends la racine de cela ; c'est son aire, qui est quarante-trois et une petite chose.

Voici sa figure :



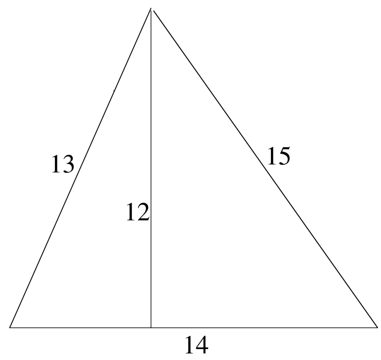
Il se peut qu'à partir de ces angles aigus on ait des côtés inégaux. Sache alors qu'on connaît leur aire d'après leur pied et leur perpendiculaire. Que ce soit un triangle de quinze coudées d'un côté, de quatorze coudées d'un côté et de treize [A-17v] coudées d'un côté. Si tu veux connaître son pied, pose comme base celui des côtés que tu veux. Posons-la quatorze ; c'est le pied. Son pied sépare donc, sur la base, une chose[98], du côté de l'un des deux côtés que tu veux. Nous posons la chose du côté de treize et nous la multiplions par elle-même. On a un *carré* que nous soustrayons de treize par lui-même, ce qui est cent soixante-neuf. Ceci sera cent soixante-neuf moins un *carré*. Nous savons donc que sa racine est la perpendiculaire, et il nous reste de la base quatorze moins une chose, que nous multiplions par elle-même. Il vient cent quatre-vingt-seize plus un *carré* moins vingt-huit choses, que nous soustrayons de quinze [H-30v] par lui-même. Il reste vingt-neuf dirhams et vingt-huit choses moins un *carré*. Sa racine est la perpendiculaire. Puisque sa racine est la perpendiculaire et que la racine de cent soixante-neuf moins un *carré* est aussi la perpendiculaire, nous savons qu'elles sont égales. Réduis par elles, [I-63] ceci en éliminant un *carré* pour un *carré*, [O-20v] car les deux *carrés* sont soustractifs. Il reste cent soixante-neuf [B-81v] égal à vingt-neuf coudées plus vingt-huit choses. Retranche vingt-neuf de cent soixante-neuf, [M-21] il reste cent quarante, égal à vingt-huit choses. Une seule chose est égale à cinq, qui est le pied[99] du côté de treize, et le complément sur la base, dans la direction de l'autre

[98] C'est-à-dire un segment inconnu. « Chose » désigne ici l'inconnue algébrique.

[99] Le mot « pied » a deux sens : soit le point, soit l'un ou l'autre des segments séparés par ce point.

côté, est neuf. Si donc tu veux connaître la perpendiculaire, multiplie ce cinq par lui-même et soustrais <le résultat> du côté le plus proche par lui-même, ce qui est treize par treize. Il reste cent quarante-quatre, dont la racine est la perpendiculaire, qui est douze. La perpendiculaire tombe sur la base toujours suivant deux angles droits ; c'est pourquoi on l'a nommée perpendiculaire*, car elle est droite. Multiplie la perpendiculaire par la moitié de la base, qui est sept, on a quarante-huit, ce qui est l'aire du triangle[100].

Voici sa figure :



Troisième genre. Les obtus, ce sont ceux qui ont un angle obtus. Il s'agit d'un triangle ayant des nombres différents pour chaque côté, qui sont six d'un côté, cinq d'un côté et neuf d'un côté. [H-31r] On connaît son aire à partir de sa perpendiculaire et de son pied, et le pied ne tombe à l'intérieur du triangle que sur son plus grand côté. Pose-le comme base. Si tu poses

* Le mot « perpendiculaire » contient lui aussi l'idée d'une ligne droite (*perpendiculum* : fil à plomb).

[100] Triangle « aigu » quelconque : $a = 15$, $b = 14$, $c = 13$; on veut calculer la hauteur BH relative au côté $b = 14$.

On pose $h = BH$, $x = AH$, on a

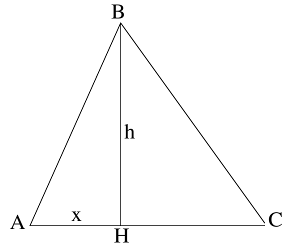
$$h^2 + x^2 = 169 \text{ et } h^2 + (14 - x)^2 = 225,$$

d'où

$$169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2,$$

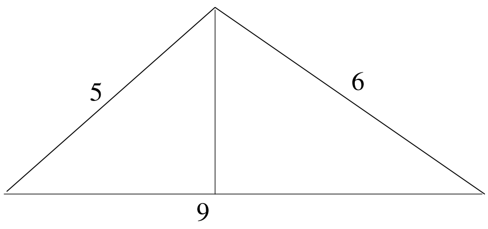
d'où $169 = 29 + 28x$ et $x = 5$, $h = 12$. On a alors

$$s = 7 \times 12 = 84.$$



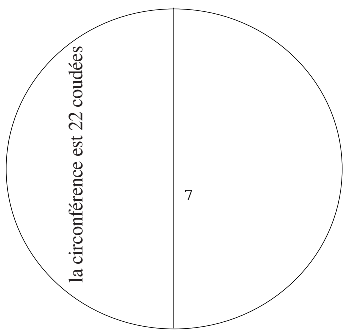
l'un des deux petits côtés comme base, son pied tombe alors en dehors de lui. Pour connaître son pied et sa perpendiculaire, c'est selon l'exemple que je t'ai exposé dans le cas de l'aigu, et selon ce [A-18r] mode d'inférence[101].

Voici la figure :



Quant aux cercles dont nous avons achevé la description et l'aire dans [I-64] l'introduction [B-82r] du livre, on a parmi eux un cercle de diamètre sept coudées, entouré par vingt-deux coudées. Alors, pour avoir son aire, tu multiplies le demi-diamètre, qui est trois et demi, par la moitié de la circonférence qui l'entoure, qui est onze coudées. On a trente-huit coudées et une demie, ce qui est son aire. [O-21r]

Si tu le désires, multiplie le diamètre, qui est sept, par lui-même. On a quarante-neuf. Soustrais-en son septième et la moitié de son septième, ce qui est dix et demi. Il reste trente-huit et un demi, ce qui est son aire[102].



Voici sa figure :

[101] Triangle obtusangle. La hauteur issue du sommet de l'angle obtus tombe en un point du côté opposé, qui est le plus grand côté. Le pied de chacune des deux autres hauteurs se trouve sur le prolongement de la base correspondante.

Exemple : $a = 9$, $b = 6$, $c = 5$; le calcul de la hauteur h relative à la base a se ferait comme dans l'exemple précédent.

[102] Aire du cercle : si le diamètre est 7 coudées, le périmètre est 22 coudées, alors l'aire est

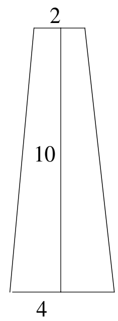
$$s = \frac{7}{2} \times \frac{22}{2} = 38,5$$

ou encore

$$s = d^2\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) = 49\left(1 - \frac{3}{14}\right) = 49 - \frac{21}{2} = 38,5 .$$

Si quelqu'un dit : soit un tronc de pyramide[103] dont la base inférieure [H-31v] est quatre coudées par quatre coudées, [M-22] la hauteur est dix coudées et le sommet[104] est deux coudées par deux coudées.

Nous avons montré que, pour toute pyramide de sommet déterminé, le tiers de l'aire de sa base inférieure multiplié par sa perpendiculaire est son aire. Mais puisque celle-ci n'est pas déterminée, nous voulons savoir de combien elle s'élève, jusqu'à ce que son sommet disparaisse et qu'elle soit sans sommet. Nous savons que ce dix, par rapport à la longueur entière, est égal au rapport de deux à quatre. Mais le deux est la moitié de quatre. S'il en est ainsi, le dix est la moitié de la longueur, [I-65] et la longueur tout entière est vingt coudées. Mais puisque nous connaissons la longueur, nous prenons le tiers de l'aire de la base inférieure, qui est cinq et un tiers, que nous multiplions par la longueur, qui est vingt coudées. Cela atteint cent six coudées et deux tiers de coudée. Nous voulons en ôter ce que nous lui avons ajouté pour qu'il devienne une pyramide, c'est-à-dire un plus un tiers, qui est le tiers du produit de deux par deux, multiplié par dix, ce qui est treize plus un tiers ; ceci est la mesure de ce que nous avons ajouté pour qu'il devienne une pyramide. Si nous enlevons cela de cent six coudées et deux tiers de coudée, [B-82v] il reste quatre-vingt-treize coudées et un tiers, ce qui est la mesure du tronc de pyramide[105]. Voici la figure :

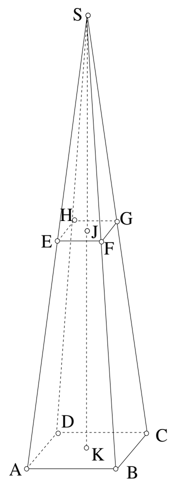


Si le cône est circulaire, alors ôte du produit de son diamètre par lui-même son septième et la moitié de son septième. Ce qui reste est son aire[106].

[103] Litt. : cône.

[104] Le terme « sommet » désigne la petite base du tronc de pyramide.

[105] Volume d'un tronc de pyramide, dont on connaît les bases carrées de côtés respectifs 4 et 2 et la hauteur égale à 10 :



$$V = \text{Vol.}(S, ABCD) - \text{Vol.}(S, EFGH),$$

on a

$$\frac{SJ}{SK} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2},$$

mais $JK = 10$, d'où $SK = 20$ et $SJ = 10$,

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4 \times 4 \times 20 - \frac{1}{3}\, 2 \times 2 \times 10 = 106 + \frac{2}{3} - (13 + \frac{1}{3}) = 93 + \frac{1}{3}.$$

Remarque : Dans le cas du cône à base circulaire, al-Khwārizmī rappelle seulement le calcul de l'aire du cercle de base.

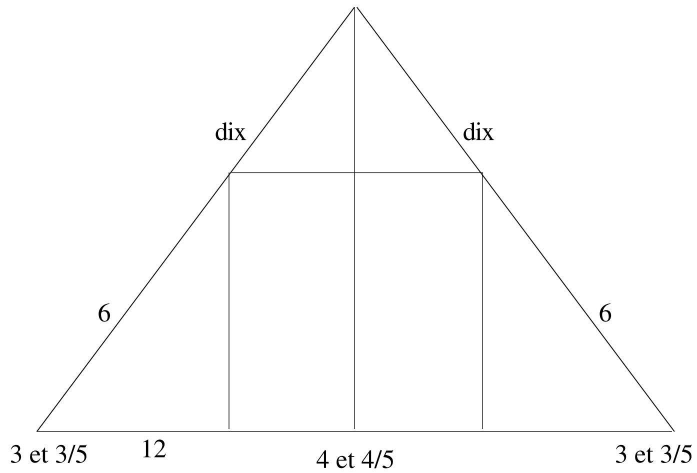
[106] C'est-à-dire l'aire de la base circulaire.

[H-32r] Si on dit : soit un terrain triangulaire, dont deux des côtés sont dix coudées, dix coudées, et la base douze coudées, à l'intérieur duquel se trouve un terrain carré, combien est le côté de ce terrain carré ?

On l'infère ainsi : [A-18v] que tu connaisses la perpendiculaire du terrain triangulaire, c'est-à-dire que tu multiplies la moitié de la base, qui est six, par elle-même. On a trente-six. Soustrais-le de l'un des deux petits côtés multiplié par lui-même, ce qui est cent, il reste soixante-quatre. Prends sa racine, qui est huit, qui est la perpendiculaire. L'aire du terrain triangulaire est quarante-huit coudées, [O-21v] c'est-à-dire le produit de la perpendiculaire par la moitié de la base, qui est six. Posons l'un des côtés du carré une chose. Multiplions-le par lui-même. Il vient un *carré* que nous retenons. Mais nous savons ensuite qu'il nous reste deux triangles, de part et d'autre du carré, et un triangle au-dessous de lui. Les deux triangles de part et d'autre [M-23] du carré sont égaux, et leurs deux perpendiculaires sont les mêmes et sont suivant un angle droit. Pour avoir leur aire, tu multiplies une chose par six moins [I-66] une demi-chose. On a six choses moins un demi-*carré*, ce qui est l'aire des deux triangles réunis, qui sont de part et d'autre du carré.

Pour avoir l'aire du triangle supérieur, tu multiplies huit moins une chose, qui est la perpendiculaire, par une demi-chose. On a quatre choses moins un demi-*carré*. Ceci est l'aire du carré et l'aire des trois [H-32v]

triangles, c'est-à-dire dix choses égales à quarante-huit, ce qui est l'aire du grand triangle. Une seule chose est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée, ce qui est chacun des côtés du carré[107]. Voici la figure : [I-67, B-83r]



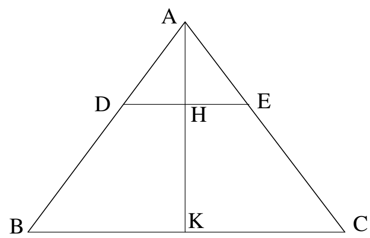
[107] La méthode est la suivante : le triangle donné est isocèle, le calcul de la hauteur est donc immédiat, $h = 8$ et l'aire du triangle est $s = 48$. Soit x le côté du carré cherché, son aire est x^2 ; l'aire du triangle initial est la somme des aires du carré et des trois triangles

$$48 = x^2 + \frac{x}{2}(12 - x) + \frac{x}{2}(8 - x) = 10x \;;$$

d'où $x = 4{,}8$.

Notons qu'al-Khwārizmī procède par décomposition de la figure. Il aurait pu obtenir le résultat directement s'il avait procédé à l'aide de la similitude $\frac{AH}{AK} = \frac{DE}{BC}$, donc

$$\frac{8 - x}{8} = \frac{x}{12} \Leftrightarrow 20x = 96 \text{ et } x = 4{,}8.$$



Livre des testaments

Chapitre sur l'avoir et la dette

Un homme meurt et laisse deux fils ; il a légué un tiers de son bien à un homme étranger et laisse un avoir de dix dirhams et une somme de dix dirhams que lui doit un de ses deux fils.

On l'infère ainsi : pose ce qui s'enlève[108] de la dette une chose, ajoute-la à l'avoir qui est dix dirhams ; on a dix plus une chose.

Sépare ensuite son tiers, car il a légué un tiers de son bien, soit trois dirhams plus un tiers de dirham plus un tiers d'une chose ; il reste six dirhams plus deux tiers de dirham plus deux tiers d'une chose. Partage cela entre les deux fils, il revient donc à chacun des fils trois dirhams plus un tiers de dirham plus un tiers de chose, ce qui est égal à la chose enlevée. Réduis donc par celle-ci ; tu retranches un tiers de chose pour un tiers de chose, il reste deux tiers de chose égaux à trois dirhams plus un tiers. Tu auras alors besoin de compléter la chose, tu ajoutes aux deux tiers de chose leur moitié et tu ajoutes aux trois plus un tiers leur moitié, on a alors cinq dirhams, c'est-à-dire la valeur de la chose enlevée de la dette[109].

[108] La part de l'héritage qui revient au fils endetté.

[109] La différence entre la somme due par le fils et sa part d'héritage (ici $10 - x$) sera gardée par le fils comme don du père.

La part léguée étant un tiers de l'héritage, celle de chacun des deux fils sera aussi un tiers de l'héritage. Pour le calcul des parts, celle du fils endetté s'ajoute au capital ; sa dette sera donc diminuée de cette part.

Soit x la part de chacun, le capital devient $10 + x$; on a donc

$$x = \frac{10+x}{3}, \text{ d'où } x = 5.$$

L'étranger reçoit 5 dirhams, un des fils 5 dirhams également, le fils endetté ne reçoit rien, sa dette devient $10 - 5 = 5$.

Remarque : une part est nécessairement inférieure à 10, car si on tient compte de la dette, le maximum à partager est 20. Le calcul d'al-Khwārizmī peut s'écrire :

$3+\frac{1}{3}+\frac{x}{3}=x \Leftrightarrow \frac{2x}{3}=3+\frac{1}{3}$. Pour trouver x, au lieu de multiplier par $\frac{3}{2}$, il ajoute à chaque membre de l'équation sa moitié :

$$x = 3+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}, \text{ d'où } x = 5.$$

Problème : S'il laisse deux fils et dix dirhams comme avoir et une somme de dix dirhams que lui doit un des deux fils et qu'il a légué à un homme un cinquième de son bien plus un dirham, on l'infère ainsi : [A-19r] tu poses ce qui s'enlève de la dette [H-33r] une chose que tu ajoutes aux dix dirhams, on a une chose plus dix dirhams. Tu en sépares [O-22r] le cinquième, car il a légué un cinquième de son bien, c'est-à-dire deux dirhams plus un cinquième de chose ; il reste huit dirhams [I-68] et quatre cinquièmes de chose. Tu sépares ensuite le dirham dont il a fait donation, il reste sept dirhams et quatre cinquièmes de chose. Tu partages cela entre les deux, alors chacun aura trois dirhams et la moitié d'un dirham et deux cinquièmes de chose égaux à une chose. Ôte les deux cinquièmes de chose d'une chose, il restera trois cinquièmes de chose égaux à trois dirhams et un demi. [B-83v] Complète la chose, c'est-à-dire en ajoutant aux trois cinquièmes de chose leurs deux tiers, et ajoute aux trois plus un demi leurs deux tiers, c'est-à-dire deux dirhams plus un tiers ; on a alors cinq dirhams et cinq sixièmes, ce qui est la chose enlevée de la dette[110].

Problème : S'il laisse trois fils et a légué un cinquième de son bien moins un dirham et s'il laisse un avoir de dix dirhams et une somme de dix dirhams que lui doit un des deux fils, on l'infère ainsi : tu poses ce qui a été enlevé de la dette une chose que tu ajoutes à dix, on a dix plus une chose. Tu en sépares le cinquième pour le legs, c'est-à-dire deux dirhams et un cinquième de chose, il reste donc huit dirhams et quatre cinquièmes de chose. Tu retranches ensuite un dirham, car il a dit moins un dirham, on a donc neuf dirhams et quatre cinquièmes de chose. Tu partages cela entre trois fils, chacun des fils aura donc trois dirhams et un cinquième de chose

[110] La part x qui revient au fils endetté s'ajoute au capital, qui devient $10 + x$. La part léguée est alors $\frac{10+x}{5}+1$ et il reste

(*) $\quad \frac{4}{5}(10+x)-1=7+\frac{4}{5}x,$

d'où

(1) $\quad 2x=7+\frac{4}{5}x,$

donc $6x = 35$ et $x = 5 + \frac{5}{6}$, ce qui est la part d'un fils. La part léguée est alors $4 + \frac{1}{6}$. Le fils endetté ne reçoit rien, sa dette est ramenée à $10-\left(5+\frac{5}{6}\right)=4+\frac{1}{6}$.

Remarque : Al-Khwārizmī déduit de (1) $x=3+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}x$, d'où $\frac{3}{5}x=3+\frac{1}{2}$. Au lieu de multiplier par $\frac{5}{3}$, il ajoute à chaque membre de l'équation ses deux tiers, d'où $x=3+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=5+\frac{5}{6}$.

et un tiers d'un cinquième [H-33v] de chose, ce qui est égal à une chose. Tu retranches un cinquième de chose et le tiers d'un cinquième de chose d'une chose, il reste onze parties de quinze parties de chose égaux à trois dirhams. Tu as donc besoin de compléter la chose ; tu lui ajoutes quatre parties de onze parties de chose[111] et tu ajoutes une somme égale à cela à trois dirhams, c'est-à-dire un dirham et une partie de onze parties ; on a donc quatre dirhams plus une partie de onze parties de dirham égaux à une chose, c'est-à-dire ce qui a été enlevé de la dette[112].

Autre chapitre sur les testaments[113]

Un homme meurt et laisse sa mère, sa femme, son frère et ses deux sœurs [I-69] du même père et de la même mère ; il a légué à un homme un neuvième de son bien.

On l'infère ainsi : tu établis leurs droits[114], tu trouves quarante-huit parts. Tu sais [O-22v] que si tu sépares d'un bien son neuvième, il reste huit neuvièmes, et que ce que tu as séparé est égal au huitième de ce qui reste. Tu ajoutes aux huit neuvièmes leur huitième et aux quarante-huit leur huitième, c'est-à-dire six, pour que ton bien soit entier ; on a cinquante-quatre ; [B-84r] et pour celui qui a un legs égal au neuvième de cela, six, qui est le neuvième de tout le bien ; ce qui reste est quarante-huit à partager entre les héritiers selon leurs parts[115].

[111] Il faut ajouter $\frac{4}{11}$ de $\left(\frac{11}{15}\right)x$ et non $\frac{4}{11}x$.

[112] Soit x la part de chacun des fils. Les legs étant de $\frac{10+x}{5}-1$, il reste $\frac{4(10+x)}{5}+1=9+\frac{4x}{5}$, à partager entre les trois fils ; d'où : $3+\frac{x}{5}+\frac{x}{15}=x \Leftrightarrow \frac{11}{15}x=3$. Au lieu de multiplier par $\frac{15}{11}$, al-Khwārizmī ajoute à chaque membre ses $\frac{4}{11}$; d'où $x=4+\frac{1}{11}$.

[113] Dans les chapitres suivants, al-Khwārizmī ne donne pas de valeur numérique pour le bien laissé en héritage. Si l'on désigne par C ce bien ou le capital laissé en héritage et par x le montant d'un legs, ou d'une part d'héritage, le problème se ramène à une équation homogène de la forme (1) $aC = bx$, avec a et b entiers connus. On peut donc, soit exprimer les legs et les parts par des fractions de C ; soit poser $\begin{cases} C = bt, \\ x = at \end{cases}$ et exprimer les legs et les parts en fonction du même paramètre t. C'est en général la démarche d'al-Khwārizmī qui choisit t pour que les résultats cherchés soient des entiers.

[114] Au singulier dans le texte. C'est-à-dire ce qui leur revient d'après la loi islamique d'héritage : 1/4 à la femme, 1/6 à la mère, 1/2 du reste au frère, 1/4 du reste à chaque sœur.

[115] Voir Note complémentaire [6].

Problème – Si on dit : une femme [A-19v] meurt et laisse un mari, un fils et trois filles ; elle lègue à un homme un huitième plus un septième de son bien, alors établis les parts selon le droit, tu en trouves vingt. Prends un bien qui est d'un huitième et un septième, ceci est cinquante-six. Retranche de celui-ci son huitième et son septième, il reste un bien moins un huitième et un septième. Complète [H-34r] ton bien et ceci en ajoutant à ce que tu as quinze parties de quarante et une parties. Multiplie les parts selon le droit qui sont au nombre de vingt par quarante et un, on a huit cent vingt. Ajoute à cela quinze parties de quarante et un, c'est-à-dire trois cents parties de huit cent vingt ; tout cela sera mille cent vingt parts dont un septième et un huitième, c'est-à-dire trois cents, [I-70] pour celui à qui revient le legs ; le septième est cent soixante et le huitième cent quarante, et il reste huit cent vingt parts à partager entre les héritiers selon leurs parts[116].

Autre chapitre sur les testaments

Si certains des héritiers n'acceptent pas et que les autres acceptent lorsque le legs est plus grand que le tiers, sache que le jugement en cela est que, parmi les héritiers, ceux qui acceptent qu'un legs soit plus grand que le tiers acceptent que celui-ci empiète sur leurs parts, alors que pour celui qui n'accepte pas, le tiers lui est imposé en tous les cas.

[116] Le legs est ici $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{7}\right)C$, soit $\frac{15}{56}C$. Le reste, soit $\frac{41}{56}C$, est à partager : $\frac{1}{4}$ du reste pour le mari, $\frac{3}{20}$ pour chaque fille et $\frac{6}{20}$ pour le fils, c'est-à-dire respectivement $\frac{5}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{6}{20}$ de $\frac{41}{56}C$. Les $\frac{41}{56}C$ correspondent donc à 20 parts. Si on représente une part par x, on a (1) $20x=\frac{41}{56}C$. Al-Khwārizmī ajoute aux deux membres les $\frac{15}{41}$, d'où $C=20x+\frac{15}{41}\times 20x=\frac{1120}{41}x$ et $x=\frac{41}{1120}C$. La part du légataire est $\frac{300}{41}x$ et il reste $\frac{820}{41}x$ à partager entre les héritiers.

Remarque : L'équation $aC = bx$ donne $41\ C = 1120\ x$; posons $C = 1120t$, on a $x = 41t$; la part du légataire est $300t$ et il reste $820t$, à partager entre les héritiers.

Exemple : Une femme meurt et laisse son mari, sa mère et son fils ; elle lègue à un homme les deux cinquièmes de son bien et à un autre le quart de son bien. Le fils a accepté les deux legs entièrement, et la mère en a accepté la moitié, alors que le mari n'en a accepté que le tiers[117].

On l'infère ainsi : tu établis les parts selon le droit, tu trouves douze parts, dont sept parts pour le fils, trois parts pour le mari et deux parts pour la mère. Tu sais que le mari accepte [H-34v] le tiers ; il faut donc qu'il entre en possession [B-84v] du double de ce qui est enlevé de son héritage pour les legs ; mais il a en possession trois, une part pour les legs [I-71] et deux parts pour lui.

Le fils a accepté les deux legs dans leur totalité ; il faut donc lui prendre [O-23r] deux cinquièmes et un quart de tout ce qui lui revient ; il lui reste sept parts de vingt parts, si tout ce qu'il a est vingt parts.

Quant à la mère, il faut que ce qui lui reste soit égal à ce qui est enlevé, c'est-à-dire un, car tout ce qui lui revenait était deux.

Prends donc un bien tel que son quart ait un tiers et que son sixième ait une moitié et que le reste soit divisible par vingt, ceci est deux cent quarante. La mère a le sixième de cela, c'est-à-dire quarante, vingt pour le legs et vingt pour elle. Le mari a le quart de cela — ce qui est soixante — vingt pour le legs et quarante pour lui. Il reste cent quarante pour le fils, le

[117] Cas où les héritiers n'acceptent pas tous les legs indiqués dans le testament. Dans ce problème, le legs devrait s'élever à $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{13}{20}$ de l'héritage. Le fils accepte de donner les $\frac{13}{20}$ de sa part ; la mère donnera la moitié de la sienne et le mari donnera le tiers de la sienne. Les parts de l'héritage sont $\frac{1}{4}$ pour le mari, $\frac{1}{6}$ pour la mère et $\frac{7}{12}$ pour le fils. Si le capital est divisé en 12 parts, le mari en aura 3, il en donnera une et en gardera 2 ; la mère en aura 2, elle en donnera une et gardera l'autre ; le fils en aura 7, il en donnera les $\frac{13}{20}$.

Supposons le capital $C = 12 \times 20t = 240t$. Le mari aura $60t$, il en donnera $20t$ pour les legs ; la mère aura $40t$, elle en donnera $20t$ pour les legs ; le fils aura $140t$, il en donnera $91t$ pour les legs. Le total des legs est alors $131t$; les parts des légataires sont respectivement $\frac{8}{13} \times 131t$ et $\frac{5}{13} \times 131t$. Pour que ces deux legs soient des nombres entiers, il faut prendre $t = 13$ (ou multiple de 13) ; pour $t = 13$, on a $C = 3120$.

legs en est les deux cinquièmes plus le quart, c'est-à-dire quatre-vingt-onze, et il reste quarante-neuf pour le fils. Le legs tout entier est cent trente et un [A-20r] entre les deux légataires, huit parties de treize parties pour celui à qui reviennent les deux cinquièmes et cinq parties de treize parties pour celui à qui revient le quart. Si tu veux rendre entières les parts des deux légataires, alors multiplie les parts selon le droit par treize pour qu'elles soient entières à partir de trois mille cent vingt.

Si le fils accepte les deux cinquièmes pour celui à qui reviennent les deux cinquièmes et n'accepte rien pour l'autre ; si la mère accepte le quart pour celui à qui revient le quart et n'accepte rien pour l'autre et si le mari n'accepte que le tiers pour les deux, sache que [H-35r] le tiers qui revient aux deux hommes est imposé à tous les héritiers. Ce tiers sera multiplié par huit parties de treize parties pour celui qui a les deux cinquièmes et multiplié par cinq parties de treize parties pour celui qui a le quart. Établis les parts selon le droit d'après ce que je t'ai mentionné : on a douze parts, un quart pour le mari, un sixième pour la mère et le reste pour le fils[118].

On l'infère ainsi : sache que le mari doit abandonner le tiers de son lot dans tous les cas, il faut donc qu'il [B-85r] possède trois parts ; et que la mère doit abandonner le tiers, à chacun selon son lot[119] — or elle a accepté pour celui à qui revient le quart de son propre lot[120] la différence entre le quart et son lot de son héritage, c'est-à-dire dix-neuf [I-72] parties de cent cinquante-six de son héritage tout entier. Il faut donc que son héritage

[118] Le testament étant le même, le fils accepte les $\frac{2}{5}$ pour le premier légataire, mais rien pour l'autre ; la mère accepte le quart pour le second, mais rien pour le premier, et le mari le tiers pour les deux ; alors un legs d'un tiers est imposé aux trois.

Si C est le capital, $\frac{1}{3}C$ sera obligatoirement prélevé pour les legs et sera partagé suivant l'indication du testament, c'est-à-dire dans le rapport de 8 à 5 ; les legs seront donc $\frac{8}{39}C$ et $\frac{5}{39}C$. Ceci correspond à ce que voulait le père. Mais la mère voulait donner un quart de son héritage au second légataire, elle doit donc verser $\frac{1}{4}-\frac{5}{39}=\frac{19}{156}$ de sa part. Si la mère a pour héritage 156, le légataire a déjà perçu 20 et elle doit lui donner 19 pour atteindre le quart qui est 39. Le fils voulait donner $\frac{2}{5}$ de sa part au premier légataire, il doit donc lui verser $\frac{2}{5}-\frac{8}{39}=\frac{38}{195}$ de sa part. Si l'héritage du fils est 195, le premier légataire a déjà perçu 40, le fils lui versera encore 38 pour atteindre $\frac{2}{5}$ de sa part, soit 78.

[119] Le tiers est partagé en deux parties dans le rapport correspondant au testament.

[120] La part revenant à ce légataire.

soit cent cinquante-six, le lot de celui qui avait le tiers de son héritage est alors vingt parts et ce qu'elle a accepté pour lui est le quart de son lot, c'est-à-dire trente-neuf. On prend donc le tiers de ce qu'elle possède pour les deux et dix-neuf parts en propre pour celui pour qui elle a accepté le legs.

Le fils a ensuite accepté pour celui qui a les deux cinquièmes la différence entre les deux cinquièmes de son héritage [O-23v] et sa part d'un tiers, c'est-à-dire trente-huit de cent quatre-vingt-quinze de l'héritage du fils, après avoir soustrait le tiers pour eux, puisque ce qu'il[121] a en propre du tiers est huit parties [H-35v] de treize du tiers, c'est-à-dire quarante. Mais il avait accepté pour lui trente-huit comme partie des deux cinquièmes de son héritage, ce qui est donc soixante-dix-huit. On prend donc soixante-cinq pour le tiers de son bien pour les deux <legs> et trente-huit pour celui qu'il a accepté en propre[122].

Si tu veux rendre entières les parts selon le droit, tu les rends entières, elles seront <des parts> de deux cent [I-73] dix-sept mille six cent vingt.

[121] Il : c'est-à-dire le légataire des deux cinquièmes.

[122] *Remarque* : les deux-tiers du capital sont partagés entre les héritiers. Les parts respectives sont :

$\frac{2}{3}C\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}C$, pour le mari ;

$\frac{2}{3}C\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}C$, pour la mère ;

$\frac{2}{3}C\times\frac{7}{12}=\frac{7}{18}C$, pour le fils ;

$\frac{8}{39}C$, pour le premier légataire ;

$\frac{5}{39}C$, pour le second légataire.

La mère verse en plus au second légataire $\frac{19}{156}\times\frac{1}{9}C$; le fils verse en plus au premier légataire $\frac{38}{195}\times\frac{7}{18}C=\frac{19}{195}\times\frac{7}{9}C$.

Pour que tous les lots soient représentés par des entiers, il faut exprimer C par un multiple de 156×9 et de 195×9 ; il faut donc prendre $C = 5\times 2^2\times 3^3\times 13 = 7\,020$, ou plus généralement $C = 7\,020t$. Le mari reçoit $1170t$, la mère $780t$, le fils $2730t$ et les légataires reçoivent d'abord $1440t$ et $900t$. La mère verse ensuite $95t$ au second légataire et le fils verse $532t$ au premier légataire. Si on prend $t = 31$, on trouve $C = 217\,620$; c'est le chiffre trouvé par al-Khwārizmī.

Sur une autre sorte de testament

Un homme meurt et laisse quatre fils et une femme ; il lègue à un homme une quantité égale à la part de l'un des fils moins la part de la femme.

Établis les parts selon le droit ; ce sont [B-86r] trente-deux parts, un huitième pour la femme, soit quatre, et sept parts pour chaque fils. Tu sais donc qu'il a légué à l'homme trois septièmes de la part [A-20v] d'un fils ; ajoute aux parts, selon le droit, une quantité égale à trois septièmes de la part d'héritage d'un fils, ce qui est le legs[123], ce qui sera trente-cinq, dont trois parts des trente-cinq parts pour le légataire ; il reste trente-deux parts à partager entre les héritiers selon leurs parts, si Dieu le veut[124].

Problème : S'il laisse deux fils et une fille et s'il lègue à un homme une quantité égale à la part d'héritage d'un troisième fils, s'il existait, alors pour cela le moyen est d'examiner combien il y aurait de parts, s'il y avait trois fils. Tu trouves sept, et pour un fils deux septièmes. Examine ensuite combien il y a de parts, tu en trouves cinq ; multiplie-les par sept, pour qu'elles aient un septième ; [H-36r] cela sera donc trente-cinq parts. Ajoute à celles-ci leurs deux septièmes, c'est-à-dire dix, et on aura quarante-cinq, dont dix reviennent au légataire, quatorze pour chaque fils et sept pour la fille[125].

[123] Il s'agit du nombre total de parts dans l'héritage.

[124] Le nombre des parts est ici 32 dont un huitième pour l'épouse, soit 4, et le reste pour les quatre fils, soit 7 pour chacun.

Si on désigne le bien par C et une part légale par x, le montant du legs sera $7x - 4x = 3x$. On a donc $C = 35x$ ou $x = \frac{C}{35}$. Les parts seront donc $3x = \frac{3C}{35}$ pour le légataire, $4x = \frac{4C}{35}$ pour l'épouse et $7x = \frac{C}{5}$ pour chaque fils.

[125] Pour deux fils et une fille, le nombre des parts est 5. S'il y avait un troisième fils, le nombre des parts serait 7, dont 2 pour le fils.

Si le bien est C et le legs x, on a $\frac{2}{7}(C-x) = x$; d'où $\frac{2}{7}C = \frac{9}{7}x$ et $x = \frac{2}{9}C$. Il reste $\frac{7}{9}C$ à partager entre les deux fils et la fille. Chaque fils recevra $\frac{2}{5} \times \frac{7}{9}C = \frac{14}{45}C$ et la fille recevra $\frac{1}{5} \times \frac{7}{9}C = \frac{7}{45}C$.

Si $C = 45\,t$, le légataire reçoit $10\,t$, chaque fils $14\,t$ et la fille $7\,t$.

Problème : S'il laisse une mère, trois fils et une fille, et s'il lègue à un homme une quantité égale à l'héritage de l'un des fils moins l'héritage d'une autre fille, si elle existait, alors établis les parts selon le droit et pose-les une chose qui se partage entre ces héritiers et qui se partage entre eux s'il y avait avec eux une autre fille ; tu la trouves trois cent trente-six.

Si l'héritage d'une fille était trente-cinq et l'héritage d'un fils quatre-vingts, il y aurait entre eux quarante-cinq, ce qui est le legs ; ajoute-le à trois cent trente-six, on a alors trois cent quatre-vingt-un ; ce sont les parts du bien[126].

Problème : S'il laisse trois fils et s'il lègue à un homme une quantité égale [I-74] à la part d'héritage de l'un de ses fils moins une quantité égale à la part d'héritage d'une fille, si elle existait, plus le tiers de ce qui reste du tiers, on l'infère ainsi : tu établis les parts selon le droit, en les supposant une chose qui se partage [B-27v] entre ces héritiers et qui se partage entre eux s'il y avait en plus une [autre] fille ; on a vingt et un. S'il y avait avec eux une [autre] fille, il [O-24v] lui reviendrait trois et la part d'héritage d'un fils serait sept ; [H-36v] il a donc légué à l'homme les quatre septièmes de la part d'héritage d'un fils et le tiers de ce qui reste du tiers. Prends un tiers et soustrais-en quatre septièmes de la part d'héritage d'un fils, il reste un tiers du bien moins quatre septièmes de la part de l'héritage du fils ; retranche ensuite le tiers de ce qui reste du tiers, c'est-à-dire un neuvième du bien moins un septième et un tiers d'un septième de la part d'héritage ; il reste un neuvième du bien moins deux septièmes et deux tiers du septième de la part d'héritage. Ajoute cela aux deux tiers du bien, on a huit neuvièmes du bien moins deux septièmes et deux tiers d'un

[126] Si les héritiers sont la mère, trois fils et une fille, les parts d'héritage seront $\frac{1}{6}$ pour la mère, $\frac{5}{42}$ pour la fille et $\frac{10}{42}$ pour chaque fils. S'il y avait une fille de plus, les parts d'héritage seraient $\frac{1}{6}$ pour la mère, $\frac{5}{48}$ pour chaque fille et $\frac{10}{48}$ pour chaque fils.

Soit x le legs, on a

$$(C-x)\left(\frac{10}{42}-\frac{5}{48}\right)=x \text{ ou } x=\frac{45}{336}(C-x),$$

d'où $381x = 45C$ et $x=\frac{45C}{381}$. On a alors $C-x=\frac{336}{381}C$.

La part de la mère est $\frac{1}{6}(C-x)=\frac{56}{381}C$; celle de la fille $\frac{5}{42}(C-x)=\frac{40}{381}C$; celle de chacun des fils $\frac{10}{42}(C-x)=\frac{80}{381}C$.

septième de la part d'héritage — c'est-à-dire huit parties de vingt et une parties d'une part d'héritage — et ceci est égal à trois parts d'héritage. Restaure cela, on a huit neuvièmes du bien égaux à trois parts d'héritage plus huit parties de vingt et une parties d'une part d'héritage. Rends entier ton bien en ajoutant aux huit neuvièmes leur huitième et aux parts d'héritage leur huitième, tu auras donc un bien égal à trois parts d'héritage et quarante cinq parties de cinquante-six parties d'une part d'héritage, [A-21r] ; la part d'héritage est cinquante-six et le bien est deux cent treize parts ; le premier legs est trente-deux parts, le second est treize parts et il reste cent soixante-huit parts dont cinquante-six parts pour chaque fils[127].

Sur une autre sorte de testament[128]

Une femme meurt et laisse ses deux filles, sa mère et son mari ; elle lègue à un homme une quantité égale à la part d'héritage de la mère et à un autre un neuvième du bien tout entier.

On l'infère ainsi : [H-37r] établis les parts selon le droit ; on a treize parts dont deux pour la mère. Mais tu sais que le legs est deux parts et un neuvième du bien tout entier ; il reste huit neuvièmes du bien moins deux parts à partager [I-75] entre les héritiers. Rends entier ton bien et ceci en faisant des huit neuvièmes moins deux parts, treize parts. Tu ajoutes à cela deux parts, on a quinze parts égales à huit neuvièmes du bien. Tu ajoutes à cela ensuite son huitième et à quinze son huitième, c'est-à-dire une part et sept huitièmes de part. [B-87r] Le neuvième de cela est pour celui à qui revient le neuvième, c'est-à-dire une part et sept huitièmes de part, et pour

[127] S'il y a trois fils, le nombre des parts est 3 ; s'il y a 3 fils et une fille, le nombre des parts est 7. Soit x la part d'un fils dans le premier cas, celle de la fille dans le second cas est alors $\frac{3}{7}x$ et le legs est $\frac{4}{7}x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}C-\frac{4}{7}x\right)=\frac{C}{9}+\frac{8}{21}x$; d'où l'équation

$$C-\left(\frac{C}{9}+\frac{8}{21}x\right)=3x,$$

d'où (1) $\frac{8}{9}C=3x+\frac{8}{21}x$ et $C=\frac{213}{56}x=3x+\frac{45}{56}x$.

Si $C = 213t$, $x = 56t$, la partie $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}C-\frac{4}{7}x\right)$ du legs sera égale à $13t$ et le legs est donc $45t$; il reste $168t$ pour les trois fils. Pour C quelconque la part de chaque fils est $\frac{56}{213}C$ et le legs total est $\frac{45}{213}C$.

Remarque : al-Khwārizmī ajoute à chacun des membres de (1) son huitième.

[128] Dans les trois problèmes suivants, une femme laisse son mari, sa mère et deux filles. Le texte indique que l'héritage se divise en 13 parts. Le premier énoncé donne 2 parts pour la mère, mais ne précise pas les autres parts. Celles-ci sont données dans le second problème : 3 parts pour le mari et 4 pour chacune des deux filles.

l'autre, dont le legs est égal à la part d'héritage de la mère, deux parts ; il reste treize parts à partager entre les héritiers, selon leurs parts <de droit>, qui deviennent entières à partir de cent trente-cinq parts[129].

Si elle lègue une quantité égale à la part d'héritage du mari et au huitième plus un dixième du bien, établis les parts selon le droit ; on a treize parts ; ajoute ensuite à celles-ci une quantité égale à la part d'héritage du mari, c'est-à-dire trois ; on a seize, c'est ce qui reste du bien après le huitième et le dixième, c'est-à-dire neuf parties de quarante parts. Mais ce qui reste du bien après le huitième et le dixième [O-25r] est trente et une parties de quarante parties du bien, ce qui est égal à seize parts. Complète ton bien en lui ajoutant neuf parties de trente et une parties, multiplie donc seize par trente et un, on a alors quatre cent quatre-vingt-seize; ajoute-leur neuf parties de trente et une [H-37v] parts, c'est-à-dire cent quarante-quatre parties, on aura six cent quarante; retranche donc son huitième et son dixième, c'est-à-dire cent quarante-quatre et une quantité égale à la part d'héritage du mari, c'est-à-dire quatre-vingt-treize ; il restera donc quatre cent trois, dont quatre-vingt-treize au mari, soixante-deux à la mère et cent vingt-quatre pour chaque fille[130].

Si le partage selon le droit est le même et si elle lègue à un homme une quantité égale à la part d'héritage du mari moins un neuvième et un dixième de ce qui reste du bien une fois enlevée cette part, on l'infère ainsi : que tu établisses les parts selon le droit ; tu les trouves à partir de treize parts. Le legs est donc à partir du bien tout entier, trois parts ; il reste un bien moins trois parts ; [A-21v] enlève ensuite le neuvième et le dixième de ce qui reste du bien, c'est-à-dire le neuvième du bien et son dixième moins le neuvième de trois parts et leur dixième, ce qui est dix-neuf parties de

[129] Soit C le bien et x la part. Les legs sont $2x$ et $\frac{1}{9}C$. On a donc $\frac{8}{9}C-2x=13x$, d'où (1) $\frac{8}{9}C=15x$. Al-Khwārizmī ajoute à chaque membre de (1) son huitième, d'où $C=15x+x+\frac{7}{8}x=\frac{135}{8}x$. Le premier legs est $\frac{1}{9}C=\frac{15}{8}x$; l'autre legs est $2x=2\times\frac{8}{135}C$; c'est aussi la part de la mère. Les parts du père et des filles ne sont pas calculées. Pour avoir des résultats exprimés par des entiers, on pose $C = 135t$; on a $x = 8t$; le premier legs est $16t$, comme la part de la mère, et le deuxième legs est $15t$.

[130] Les héritiers sont les mêmes que dans le cas précédent et les parts sont donc au nombre de 13, dont 3 reviennent au mari. Soit x une part, le legs est donc $3x+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)C$; d'où l'équation $C=13x+3x+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)C$, donc $\frac{31C}{40}=16x$. Al-Khwārizmī ajoute à chaque membre de l'équation ses $\frac{9}{31}$, il vient $C=\frac{640}{31}x$. Si on pose $C = 640t$, on a $x = 31t$ et $3x = 93t$. On a $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)C=\frac{9}{40}C=144t$. Il reste $640t - (144 + 93)t = 403t$ à partager : $93t$ pour le mari, $62t$ pour la mère et $124t$ pour chaque fille.

trente parties d'une part ; cela sera donc un bien plus un neuvième, plus un dixième [B-28v] moins trois parts et dix-neuf parties de trente parties d'une part, ce qui est égal à treize parts. Restaure ton bien par trois parts et dix-neuf parties de trente [I-76] parties d'une part et ajoute-le aux treize ; on a donc un bien plus un neuvième plus un dixième égaux à seize parts plus dix-neuf parties de trente parties de part. Ramène cela à un seul bien en en soustrayant dix-neuf parties de cent neuf parties ; il reste un seul bien égal à treize parts plus quatre-vingts parties de cent neuf parties d'une part. Tu poses la part [H-38r] cent neuf parties, tu multiplies le treize par cent neuf parties et tu ajoutes cela à quatre-vingts parties, on aura mille quatre cent quatre-vingt-dix-sept et la part d'héritage du mari, trois cent vingt-sept[131].

Problème : S'il laisse deux sœurs et une femme et lègue à un homme une quantité égale à la part d'héritage d'une sœur [O-25v] moins un huitième de ce qui reste du bien une fois enlevé le legs, on l'infère ainsi : tu établis les parts selon le droit à partir de douze parts et pour chaque sœur un tiers de ce qui reste du bien une fois enlevé le legs ; ceci est donc un bien moins un legs. Mais tu sais que le huitième de ce qui reste plus le legs est égal à la part d'héritage d'une sœur, et que le huitième de ce qui reste est le huitième du bien moins le huitième du legs. Un huitième du bien moins un huitième du legs plus le legs sont donc égaux à la part d'héritage d'une sœur, ce qui est un huitième du bien plus sept huitièmes du legs. Le bien tout entier est donc égal à trois huitièmes du bien plus trois legs plus cinq huitièmes du legs. Retranche du bien ses trois huitièmes, il reste cinq huitièmes du bien égaux à trois legs plus cinq huitièmes du legs. Le bien tout entier est donc égal à cinq legs et quatre cinquièmes de legs ; le bien est donc vingt-neuf, le legs est cinq et la part d'héritage est huit[132].

131 Soit x une part ; le legs est cette fois $3x-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)(C-3x)$. L'équation du problème est donc:

$C-3x+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)(C-3x)=13x$, d'où $C+\frac{19}{90}C-\frac{19}{90}\times 3x=16x$, d'où $\frac{109}{90}C=16x+\frac{19}{30}x$.

Al-Khwārizmī retranche de chaque membre de l'équation ses $\frac{19}{109}$, d'où $C=13x+\frac{80}{109}x=\frac{1497}{109}x$. Si on pose $x=109t$, on a $C = 1497t$ et la part du mari est $327t$.

132 Un homme a laissé son épouse et deux sœurs. Les parts d'héritage sont égales ; posons chacune d'elles égale à x. Soit y le legs ; on a $y=x-\frac{1}{8}(C-y)$, d'où $x=y+\frac{1}{8}(C-y)=\frac{1}{8}C+\frac{7}{8}y$. Mais $C = 3x + y$, donc $C=\frac{3}{8}C+3y+\frac{5}{8}y$, d'où $\frac{5}{8}C=3y+\frac{5}{8}y$ et $C=\frac{29}{5}y$. Si on pose $C = 29t$, on a $y = 5t$ et $x = 8t$. Al-Khwārizmī considère ici y comme donnée paramétrique et le problème est déterminé.

Sur une autre sorte de testament

Un homme meurt et laisse quatre fils ; il lègue [B-29r] à un homme une quantité égale à la part d'héritage de l'un de ses fils et à un autre le quart de ce qui reste du tiers.

Sache que le legs dans cette espèce est à partir du tiers du bien. [H-38v]

On l'infère ainsi : prends le tiers du bien, duquel tu ôtes la part d'héritage ; il reste un tiers du bien [I-77] moins une part d'héritage. Tu retranches ensuite de cela le quart de ce qui reste du tiers, c'est-à-dire un quart du tiers moins un quart d'une part d'héritage ; il reste un quart du bien moins trois quarts d'une part d'héritage ; ajoute à cela les deux tiers du bien, on a onze parties de douze parties du bien moins trois quarts d'une part d'héritage égaux à quatre parts d'héritage. Restaure cela par trois quarts [A-22r] d'une part d'héritage et ajoute les trois quarts aux quatre parts d'héritage. Tu auras donc onze parties de douze parties du bien égales à quatre parts d'héritage plus trois parts d'une part d'héritage. Complète ton bien en ajoutant aux quatre parts d'héritage plus les trois quarts d'une part d'héritage une partie de onze parties de cela ; il vient de cela cinq parts d'héritage et deux parties de onze parties d'une part d'héritage égales à un bien. Pose donc une part d'héritage, onze, le bien cinquante-sept et le tiers dix-neuf ; enlève ensuite de cette part d'héritage, onze, il en reste huit ; deux de celles qui restent sont pour le légataire du quart et il reste six qu'on ramène aux deux tiers, qui sont trente-huit ; on a donc quarante-quatre à partager entre quatre fils, [O-26r] pour chacun onze parts[133].

[133] On considère ici quatre héritiers, quatre fils, avec des parts égales. Soit x l'une de ces parts. On a : premier legs x, deuxième legs $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}C-x\right)=\frac{1}{12}C-\frac{1}{4}x$; il reste alors du premier tiers $\frac{1}{3}C-x-\left(\frac{1}{12}C-\frac{1}{4}x\right)=\frac{1}{4}C-\frac{3}{4}x$. L'équation du problème est : $\frac{2}{3}C+\frac{1}{4}C-\frac{3}{4}x=4x$, d'où $\frac{11}{12}C=4x+\frac{3}{4}x$ et $C=\frac{57}{11}x$. Al-Khwārizmī ajoute à chacun des membres son onzième.

Si on pose $C = 57t$, on a $x = 11t$. On vérifie : $\frac{1}{3}C=19t$ et $\frac{1}{3}C-x=8t$. Le premier legs est $11t$, le deuxième $2t$; il reste $44t$ pour 4 parts d'héritage, soit $11t$ pour chacune.

Problème : S'il laisse quatre fils et lègue à un homme une quantité égale à la part d'héritage d'un fils moins le cinquième de ce qui reste du tiers une fois enlevée une part d'héritage, le legs est alors à partir du tiers. Prends donc un tiers et retranches-en [H-39r] une part d'héritage ; il reste un tiers moins une part d'héritage. Rends ensuite à celui-ci ce qui en était retranché, ce qui est un cinquième du tiers moins un cinquième d'une part d'héritage ; on a donc un tiers et un cinquième du tiers — ce qui est deux cinquièmes — moins une part d'héritage et un cinquième d'une part d'héritage. Ajoute cela ensuite aux deux tiers du bien ; on a un bien et un cinquième d'un tiers du bien moins une part d'héritage et un cinquième d'une part d'héritage égaux à quatre parts d'héritage. [B-88v] Restaure le bien par une part d'héritage et un cinquième d'une part d'héritage et ajoute-les aux quatre parts ; on a donc un bien et un cinquième d'un tiers du bien égaux à cinq parts d'héritage plus un cinquième d'une part d'héritage. Ramène cela à un seul bien, et ceci en retranchant de ce que tu as la moitié de son huitième, c'est-à-dire une partie de seize ; tu auras donc un bien égal à quatre parts d'héritage et sept huitièmes d'une part d'héritage. Pose le bien trente-neuf, le tiers treize et la part d'héritage huit, il restera du tiers, cinq, dont le cinquième est un ; ajoute au reste le un qui a été soustrait du legs, alors le legs reste sept et du tiers il reste six. Ajoute-lui les deux tiers du bien, c'est-à-dire vingt-six [I-78] parts, on a donc trente-deux à partager entre quatre fils, huit pour chacun[134].

Problème : S'il laisse trois fils et une fille et lègue à un homme, à partir des deux septièmes de son bien, une quantité égale à la part d'héritage de sa fille et à un autre un cinquième et un sixième de ce qui reste des deux septièmes, alors le legs dans cette sorte est à partir des deux septièmes du bien. Prends les deux septièmes du bien et retranches-en la part d'héritage d'une fille, il reste deux septièmes du bien moins la part d'héritage d'une fille ; retranches-en l'autre legs [H-39v] qui est un cinquième plus un sixième ; il reste un septième et quatre parties de quinze parties d'un

[134] Soit x la part d'héritage d'un fils, le legs est $x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}C-x\right)$. Du tiers il reste $\frac{1}{3}C-x+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}C-x\right)=\frac{2}{5}C-\frac{6}{5}x$, d'où l'équation $\frac{2}{3}C+\frac{2}{5}C-\frac{6}{5}x=4x$, d'où

(1) $\frac{16}{15}C=\frac{26}{5}x$ et $C=\frac{39}{8}x$.

Pour obtenir C en partant de (1), al-Khwārizmī retranche de chaque membre son $\frac{1}{16}$. Si on pose $C = 39t$, on a $x = 8t$ et le legs est $7t$.

septième moins dix-neuf parties de trente parties d'une part d'héritage <de la fille>. Ajoute à cela les cinq septièmes qui restent du bien ; on a six septièmes du bien plus quatre parties de quinze parties d'un septième de bien [A-22v] moins dix-neuf parties de trente parties d'une part d'héritage égaux à sept parts d'héritage. Restaure-le par dix-neuf parties [O-26v] et ajoute-les aux sept parts d'héritage ; on a six septièmes du bien plus quatre parties de quinze parties d'un septième du bien égaux à sept parts d'héritage plus dix-neuf parties de trente parties d'une part d'héritage. Complète ton bien, ceci en ajoutant à tout ce que tu as onze parties de quatre-vingt-quatorze parties ; tu auras donc un bien égal à huit parts d'héritage plus quatre-vingt-dix-neuf parties de cent quatre-vingt-huit [B-89r] parties d'une part d'héritage. Pose le bien tout entier mille six cent trois <parts> et la part d'héritage cent quatre-vingt-huit <parts>. Prends ensuite les deux septièmes du bien, c'est-à-dire quatre cent cinquante-huit <parts> ; retranches-en la part d'héritage qui est cent quatre-vingt-huit <parts> ; il reste deux cent soixante-dix <parts> ; retranches-en le cinquième et son sixième, soit quatre-vingt-dix-neuf parts ; il reste cent soixante et onze [I-79] parts. Ajoute à cela cinq septièmes du bien, c'est-à-dire mille cent quarante-cinq <parts> ; on a mille trois cent seize [H-40r] parts à partager en sept parts <de droit> ; pour chaque part <de droit>, cent quatre-vingt-huit parts, qui est la part d'héritage de la fille et le fils en a le double[135].

Si les parts de droit sont selon le même état et s'il lègue à partir des deux cinquièmes de son bien une quantité égale à la part d'héritage de la fille et à un autre le quart et un cinquième de ce qui reste des deux cinquièmes une fois enlevée la part d'héritage, on l'infère ainsi : le legs est à partir des deux cinquièmes. Tu prends donc deux cinquièmes du bien, tu en ôtes la part d'héritage ; il reste deux cinquièmes du bien moins une part d'héritage. Tu ôtes ensuite de cela un quart et un cinquième de ce qui reste, c'est-à-dire neuf parties de vingt parties des deux cinquièmes moins une quantité

[135] Soit C le capital et x la part d'héritage d'une fille. Le premier legs est x ; le deuxième legs est $\left(\frac{2}{7}C-x\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{11}{30}\left(\frac{2}{7}C-x\right)$. La part de chaque fils est $2x$; d'où l'équation du problème $\frac{5}{7}C+\left(\frac{2}{7}C-x\right)-\frac{11}{30}\left(\frac{2}{7}C-x\right)=7x$, d'où $\frac{5}{7}C+\left(\frac{2}{7}C-x\right)\times\frac{19}{30}=7x$ et $\frac{5}{7}C+\frac{19}{7\times 15}C=7x+\frac{19}{30}x$, d'où (1) $\frac{94}{105}C=\frac{229}{30}x$ et $C=\frac{7\times 229}{2\times 94}x=\frac{1603}{188}x$.

Remarque : Partant de (1), al-Khwārizmī ajoute à chaque membre ses $\frac{11}{94}$, d'où $\frac{94}{105}C\left(1+\frac{11}{94}\right)=\frac{229}{30}x\left(1+\frac{11}{94}\right)$, d'où $C=\frac{1603}{188}x$.

Posons $C = 1603t$ et $x = 188t$; on a la part d'héritage d'une fille $188t$, la part d'un fils $376t$, le premier legs $188t$ et le deuxième legs $99t$.

égale à la part d'héritage, il reste un cinquième et un dixième du cinquième moins onze parties de vingt parties d'une part d'héritage. Ajoute à cela trois cinquièmes du bien ; on a donc quatre cinquièmes plus un dixième d'un cinquième du bien moins onze parties de vingt parties d'une part d'héritage égaux à sept parts d'héritage. Restaure cela par onze parties de vingt parties d'une part d'héritage et ajoute-les aux sept ; cela sera égal à sept parts d'héritage plus onze parties de vingt parties d'une part d'héritage. Complète ton bien, ceci en ajoutant à tout ce que tu as neuf parties de quarante et une parties ; tu auras alors un bien égal à neuf parts d'héritage plus dix sept parties de quatre-vingt-deux parties d'une part d'héritage. Pose la part d'héritage quatre-vingt-deux parties, [B-89v] alors les parts sont sept cent cinquante-cinq. [I-80] Les deux cinquièmes [O-27r] de cela sont trois cent deux. Enlève ensuite de cela une part d'héritage, [H-40v] c'est-à-dire [A-23r] quatre-vingt-deux ; il reste donc deux cent vingt ; enlève ensuite de cela le quart plus le cinquième — quatre-vingt-dix-neuf parts —, il reste cent vingt et un. Ajoute à ceci trois cinquièmes du bien, c'est-à-dire quatre cent cinquante-trois ; on a cinq cent soixante-quatorze à partager en sept parts d'héritage, quatre-vingt-deux pour chaque part d'héritage, ce qui est la part d'héritage de la fille et le fils en a le double[136].

Si les parts de droit sont selon le même état et s'il lègue à un homme une quantité égale à une part d'héritage du fils moins un quart et un cinquième de ce qui reste des deux cinquièmes une fois enlevée la part d'héritage, alors le legs est à partir des deux cinquièmes. Tu enlèves de cela deux parts d'héritage <de la fille>, car le fils a deux parts ; il reste donc deux cinquièmes du bien moins deux parts d'héritage. Ajoute à cela ce qui était soustrait, c'est-à-dire le quart des deux cinquièmes et leur cinquième moins neuf dixièmes de part d'héritage ; on a deux cinquièmes du bien plus neuf dixièmes du cinquième du bien moins deux parts d'héritage plus neuf

[136] Soit x la part d'héritage de la fille. Les legs sont $x+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}C-x\right)=\frac{9}{50}C+\frac{11}{20}x$, d'où l'équation $C-\frac{9}{50}C-\frac{11}{20}x=7x$, d'où

$$(1)\qquad \frac{41}{50}C=7x+\frac{11}{20}x,$$

d'où $\frac{41}{50}C=\frac{151}{20}x$ et $C=\frac{755}{82}x$. On pose $x = 82t$, alors $C = 755t$, et on a $\frac{2}{5}C-x=302t-82t=220t$ et $\frac{2}{5}C-x-\frac{9}{20}\left(\frac{2}{5}C-x\right)=220t-99t=121t$. Mais $\frac{3}{5}C=453t$, d'où $574t = 7x$ et $x = 82t$ la part de la fille ; celle d'un fils est $164t$.

dixièmes d'une part d'héritage. Ajoute à cela trois cinquièmes du bien ; on a un bien et neuf dixièmes d'un cinquième du bien moins deux parts d'héritage [I-81] et neuf dixièmes d'une part d'héritage égaux à sept parts d'héritage. Restaure cela par deux parts d'héritage et neuf dixièmes d'une part d'héritage et ajoute-les aux parts d'héritage ; tu auras un bien plus neuf dixièmes d'un cinquième du bien égaux à neuf parts d'héritage plus neuf dixièmes d'une part d'héritage. Ramène cela à un bien entier et ceci en retranchant de ce que tu as neuf parties de cinquante-neuf [H-41r] parties ; il reste un bien égal à huit parts d'héritage, plus vingt-trois parties de cinquante-neuf parties d'une part d'héritage. Une part d'héritage est cinquante neuf parts, les parts selon le droit sont quatre cent quatre-vingt-quinze parts, et les deux cinquièmes de cela, cent quatre-vingt-dix-huit parts. Enlèves-en [B-90r] les deux parts d'héritage, cent dix-huit parts ; il reste quatre-vingts parts, auxquelles on rend ce qui a été soustrait, qui est le quart des quatre-vingts plus leur cinquième, trente-six parts ; il reste au légataire quatre-vingt-deux parts, qu'on enlève des parts de droit, ce qui est quatre cent quatre-vingt-quinze parts ; il reste donc quatre cent treize parts à partager en sept parts d'héritage, cinquante-neuf pour chaque fille et le double pour le fils[137].

Problème : S'il laisse deux fils et deux filles et lègue à un homme une quantité égale à une part d'héritage d'une fille moins le cinquième de ce qui reste du tiers, une fois cette part d'héritage enlevée, et à un autre une quantité égale à une part d'héritage d'une autre fille [O-27v] moins le tiers de ce qui reste du tiers, tout cela étant enlevé, et s'il lègue à un autre homme la moitié du sixième de tout le bien, [I-82] alors tous ces legs sont à partir du tiers.

Tu prends le tiers du bien, tu en ôtes la part d'héritage d'une fille, il reste un tiers du bien moins une part d'héritage ; tu ajoutes ensuite à cela ce qui a été soustrait, c'est-à-dire le cinquième du tiers moins le cinquième d'une part d'héritage ; [A-23v] cela sera alors un tiers et un cinquième d'un tiers

[137] Soit x la part de la fille et $2x$ celle de chaque fils ; le legs sera

$$2x-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}C-2x\right)=2x-\frac{9}{50}C+\frac{9}{10}x \ ;$$

d'où l'équation $C+\frac{9}{50}C-2x-\frac{9}{10}x=7x$, d'où $\frac{59}{50}C=\frac{99}{10}x$.

Pour trouver C, al-Khwārizmī retranche les $\frac{9}{59}$ de chaque membre ; d'où $C=\frac{495}{59}x$. Si on suppose $x = 59t$, on a $C = 495t$. On en déduit $\frac{2}{5}C=198t$; $\frac{2}{5}C-2x=80t$; $\frac{9}{20}\left(\frac{2}{5}C-2x\right)=36t$; le legs est $118t - 36t = 82t$ et il reste $495t - 82t = 413t$ pour $7x$; la part d'une fille est donc $59t$, celle d'un fils est $118t$.

moins une part d'héritage et un cinquième d'une part d'héritage. Tu en ôtes ensuite une part d'héritage d'une autre fille et il reste un tiers et le cinquième d'un tiers moins deux parts d'héritage et un cinquième de part d'héritage. Tu ajoutes ensuite à cela ce qui a été soustrait ; [H-41v] on a un tiers plus trois cinquièmes d'un tiers moins deux parts d'héritage et quatorze parties de quinze parties d'une part d'héritage. Tu ôtes ensuite de cela la moitié d'un sixième du bien tout entier ; il reste vingt-sept parties de soixante <parties> d'un bien moins les parts d'héritage que tu soustrais. Ajoute à cela les deux tiers du bien, restaure-les par les parts d'héritage qui ont été soustraites et ajoute-les aux parts d'héritage ; tu auras un bien et sept parties de soixante parties du bien égaux à huit parts d'héritage et quatorze parties de quinze parties d'une part d'héritage. Ramène tout cela à un seul bien, ceci en retranchant de ce que tu as ses sept parties de soixante-sept parties ; [B-90v] une part d'héritage sera donc deux cent un et le bien tout entier sera mille six cent huit[138].

Si les parts de droit sont selon le même état et s'il lègue une quantité égale à la part d'héritage d'une fille, plus un cinquième de ce qui reste du tiers une fois enlevée cette part d'héritage, et une quantité égale à la part d'héritage d'une autre fille, plus un tiers de ce qui reste du quart une fois enlevée une seule part d'héritage, on l'infère ainsi : les deux legs sont à partir du quart et du tiers. Tu prends le tiers du bien, tu en ôtes une part d'héritage, il reste un tiers du bien moins une part d'héritage ; tu en ôtes ensuite un cinquième de ce qui reste, c'est-à-dire un cinquième d'un tiers moins un cinquième d'une part d'héritage. Il reste donc quatre cinquièmes d'un tiers moins quatre cinquièmes d'une part d'héritage. Tu prends ensuite également le quart du bien duquel tu ôtes une part d'héritage ; il te restera un quart du bien [I-83] moins une part d'héritage. [H-42r] Tu ôtes ensuite un tiers de ce qui en reste, il restera alors deux tiers d'un quart moins deux tiers d'une part d'héritage. Tu ajoutes cela à ce qui reste du tiers, on a alors vingt-six parties de soixante parties du bien moins une part

[138] Soit x la part de chaque fille, $2x$ celle de chaque fils. Il reste de $\frac{1}{3}C$ après le premier legs : $\frac{1}{3}C - x + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}C - x\right) = \frac{6}{15}C - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}C - \frac{6}{5}x$. Il reste après le deuxième legs : $\frac{2}{5}C - \frac{6}{5}x - x + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}C - \frac{6}{5}x - x\right) = \frac{8}{15}C - 2x - \frac{14}{15}x$. Il reste après le troisième legs : $\frac{8}{15}C - \frac{1}{12}C - 2x - \frac{14}{15}x = \frac{27}{60}C - 2x - \frac{14}{15}x$, d'où l'équation $C + \frac{7}{60}C = 8x + \frac{14}{15}x$.

Al-Khwārizmī retranche les $\frac{7}{60}$ de chaque membre, d'où $C = \frac{536}{67}x$.

Si on pose $x = 201t = 67 \times 3t$, alors $C = 1608t$.

On note qu'al-Khwārizmī prend $x = 201$ au lieu de 67, pour que le tiers de C s'exprime sous une forme entière.

d'héritage et vingt-huit parties de soixante parties d'une part d'héritage. Ajoute à cela ensuite ce qui reste du bien, une fois que tu en as pris le tiers et le quart, ce qui est un quart et un sixième ; cela sera dix-sept parties de vingt parties du bien moins une part d'héritage et vingt-huit parties de soixante parties d'une part d'héritage égaux à six parts d'héritage. Restaure cela par ce qui est soustrait et ajoute-le aux parts d'héritage ; il vient dix-sept parties de vingt parties du bien égales à sept parts d'héritage et sept parties de quinze parties d'une part d'héritage. Complète ton bien, ceci en ajoutant à ce que tu as de parts d'héritage trois parties [O-28r] de dix-sept parties ; tu auras donc un bien égal à huit parts d'héritage et cent vingt parties de cent cinquante-trois parties d'une part d'héritage. Pose une part d'héritage cent cinquante-trois ; on a donc le bien mille trois cent quarante-quatre, le legs à partir du tiers une fois enlevée une part d'héritage est cinquante-neuf et le legs à partir du quart une fois enlevée une part d'héritage est soixante et un[139].

Problème : S'il laisse six fils et lègue à un homme [A-24r] une quantité égale à la part d'héritage d'un fils plus un cinquième de ce qui reste du quart et à un autre homme une quantité égale à la part d'héritage [H-42v] d'un autre fils moins le quart de ce qui reste du tiers une fois enlevés les deux premiers legs[140] et une autre part d'héritage, on l'infère ainsi : tu ôtes [B-91r] d'un quart du bien une part d'héritage ; il reste un quart moins une part d'héritage ; tu ôtes ensuite le cinquième de ce qui reste du quart, c'est-à-dire la moitié d'un dixième du bien moins un cinquième d'une part d'héritage. Tu reviens ensuite au tiers, tu en ôtes la moitié du dixième du bien, quatre cinquièmes d'une part d'héritage et une autre part d'héritage ; il reste donc un tiers moins la moitié du dixième du bien moins une part d'héritage et quatre cinquièmes d'une part d'héritage. Ajoute à cela le

[139] On pose encore x la part d'héritage d'une fille. Il reste de $\frac{1}{3}C$ après le premier legs : $\frac{1}{3}C-x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}C-x\right)=\frac{4}{15}C-\frac{4}{5}x$; il reste de $\frac{1}{4}C$ après le deuxième legs : $\frac{1}{4}C-x-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}C-x\right)=\frac{1}{6}C-\frac{2}{3}x$. On a $C-\frac{1}{3}C-\frac{1}{4}C=\frac{5}{12}C$, d'où l'équation $\frac{5}{12}C+\frac{4}{15}C+\frac{1}{6}C-\frac{4}{5}x-\frac{2}{3}x=6x$, d'où $\frac{17}{20}C=7x+\frac{7}{15}x$. On ajoute à chaque membre ses $\frac{3}{17}$, d'où $C=\frac{448}{51}x$. Si $x=153t = 51\times 3t$, alors $C = 1344t$. Le premier legs est : $153t+\frac{1}{5}(448t-153t)=153t+59t$. Le deuxième legs est : $153t+\frac{1}{3}(336t-153t)=153t+61t$. On note que le choix $x = 153t$ est fait pour que le tiers et le quart de C s'expriment sous forme entière, respectivement $448t$ et $336t$.

[140] Le premier legs qui comprend deux parties.

quart [I-84] de ce qui reste — ce que nous avons soustrait — et pose le tiers quatre-vingts. Si tu enlèves la moitié du dixième du bien, il en reste soixante-huit moins une part d'héritage et quatre cinquièmes d'une part d'héritage. Ajoute à cela son quart, c'est-à-dire dix-sept parts moins le quart des parts d'héritage soustraites ; on a donc quatre-vingt-cinq moins deux parts d'héritage et un quart de part d'héritage. Ajoute cela aux deux tiers du bien qui est cent soixante ; tu auras donc un bien plus un sixième d'un huitième de bien moins deux parts d'héritage et un quart égaux à six parts d'héritage. Restaure cela par ce qui était retranché et ajoute-le aux parts d'héritage ; on a un bien plus un sixième d'un huitième du bien égaux à huit parts d'héritage plus un quart d'une part d'héritage. Ramène tout cela à un seul bien, et ceci en retranchant des parts d'héritage une partie de quarante-neuf parties de leur totalité ; tu auras un bien égal à huit parts d'héritage et quatre parties de quarante-neuf parties [H-43r] d'une part d'héritage. Pose la part d'héritage quarante-neuf, le bien sera trois cent quatre-vingt-seize et la part d'héritage quarante-neuf. Le legs à partir du quart est dix et ce qui est soustrait du deuxième legs est six ; comprends-le[141].

Chapitre sur le testament avec des dirhams

Problème : Un homme meurt et laisse quatre fils ; il lègue à un homme une quantité égale à la part d'héritage de l'un d'eux plus le quart de ce qui reste du tiers plus un dirham.

On l'infère ainsi : tu prends le tiers du bien, dont tu ôtes une part d'héritage, il reste un tiers moins une part d'héritage ; tu ôtes ensuite le quart de ce qui te reste, c'est-à-dire le quart du tiers moins le quart d'une

[141] Soit C le capital, x la part d'héritage de chacun des 6 fils. On a : premier legs $x+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}C-x\right)=\frac{1}{20}C+\frac{4}{5}x$; deuxième legs $x-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}C-\frac{1}{20}C-\frac{4}{5}x-x\right)$. Il reste du premier tiers de l'héritage : $\frac{1}{3}C-\frac{1}{20}C-\frac{4}{5}x-x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}C-\frac{1}{20}C-\frac{4}{5}x-x\right)$, soit $\frac{5}{4}\left(\frac{1}{3}C-\frac{1}{20}C-\frac{9}{5}x\right)=$ $=\frac{17}{48}C-\frac{9}{4}x$, d'où l'équation $\frac{2}{3}C+\frac{17}{48}C-\frac{9}{4}x=6x \Leftrightarrow C+\frac{1}{48}C=\frac{33}{4}x$; d'où $\frac{49}{12}C=33x$ et $C=\frac{396}{49}x$. Si $C = 396t$, on aura $x = 49t$. Le premier legs sera $49t + 10t$ et le second sera $49t - 6t$.

Remarque : Al-Khwārizmī introduit $\frac{1}{3}C=80$ dans une partie des calculs. Il revient ensuite à C quelconque. $\frac{1}{3}C=80 \Rightarrow \frac{1}{3}C-\frac{1}{20}C=68$, $\frac{5}{4}\left[\frac{1}{3}C-\frac{1}{20}C-\frac{9}{5}x\right]=85-\frac{9}{4}x$ et $\frac{2}{3}C=160$; l'équation est alors $(160+85)-\frac{9}{4}x=6x$. Al-Khwārizmī remplace ensuite $160 + 85$ par $C+\frac{1}{48}C$ et on retrouve l'équation initiale.

part d'héritage ; tu ôtes aussi un dirham ; il te reste alors trois quarts d'un tiers du bien, qui est un quart du bien, moins trois quarts d'une part d'héritage moins un dirham ; [B-91v] tu ajoutes à cela deux tiers du bien ; tu auras onze parties de douze parties du bien moins trois quarts d'une part d'héritage moins un dirham égaux à quatre parts d'héritage. [O-28v] Restaure cela par trois quarts d'une part d'héritage et un dirham, on a onze parties de douze parties du bien égaux à quatre parts d'héritage plus trois quarts d'une part d'héritage [I-85] plus un dirham. Complète ton bien, ceci en ajoutant [H-43v] aux parts d'héritage plus le dirham une partie de onze parties de leur somme ; tu auras donc [A-24v] un bien égal à cinq parts d'héritage plus deux parties de onze parties d'une part d'héritage plus un dirham plus une partie de onze parties de dirham[142].

Si tu veux avoir le dirham entier, ne complète donc pas ton bien, mais retranche un de onze en dirhams[143], et divise les dix qui restent entre les parts d'héritage qui sont quatre et trois quarts d'une part d'héritage ; le quotient sera deux plus deux parties de dix-neuf parties d'un dirham. Pose alors le bien douze et la part d'héritage deux parts plus deux parties de dix-neuf parties. Et si tu veux avoir la part d'héritage entière, alors complète ton bien et restaure-le, le dirham sera onze parties du bien.

Problème : S'il laisse cinq fils et lègue à un homme une quantité égale à la part d'héritage de l'un d'eux, plus un tiers de ce qui reste du tiers plus un dirham, et à un autre un quart de ce qui reste après cela du tiers plus un dirham, alors prends un tiers et ôtes-en une part d'héritage ; il reste un tiers moins une part d'héritage. Ôte ensuite un tiers de ce qui te reste, c'est-à-

[142] Soit C le capital, x la part d'héritage de chacun des quatre fils. Le legs est $x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}C-x\right)+d=\frac{1}{12}C+\frac{3}{4}x+d$; il reste du tiers du capital $\frac{1}{4}C-\frac{3}{4}x-d$. On ajoute les deux tiers : $\frac{2}{3}C+\frac{1}{4}C-\frac{3}{4}x-d=4x$, d'où l'équation du problème

(1) $\frac{11}{12}C=4x+\frac{3}{4}x+d$, $11C = 57x + 12d$ et $x=\frac{11C-12d}{57}$ $(11C > 12d)$.

Remarque : Pour avoir C entier, al-Khwārizmī part de (1) et ajoute à chaque membre son onzième. $C=\frac{57}{11}x+\frac{12}{11}d=5x+\frac{2}{11}x+d+\frac{1}{11}d$. Si on prend d comme paramètre, on repart de (1) en posant $C = 12d$ et on a $10d=\frac{19}{4}x \Leftrightarrow x=2d+\frac{2}{19}d$. Pour $d = 1$, $C = 12$, on a $x=\frac{40}{19}=2+\frac{2}{19}$. Ainsi, pour se ramener à un seul paramètre, al-Khwārizmī impose une condition supplémentaire.

[143] Cette expression veut dire qu'on transforme le bien en dirhams en le posant égal à douze dirhams.

dire un tiers du tiers moins un tiers d'une part d'héritage, puis ôte de ce qui reste un dirham ; il te reste les deux tiers du tiers moins les deux tiers d'une part d'héritage moins un dirham. Ôte ensuite de ce qui te reste son quart, c'est-à-dire une part de six parts du tiers moins un sixième d'une part d'héritage moins un quart de dirham, puis ôte un autre dirham ; il te reste la moitié du tiers moins la moitié d'une part d'héritage moins un dirham et trois quarts de dirham. Ajoute cela aux deux tiers du bien ; on a cinq sixièmes du bien moins la moitié [B-92r] d'une part d'héritage moins un dirham [H-44r] et trois quarts de dirham égaux à cinq parts d'héritage. Restaure cela par la moitié d'une part d'héritage et d'un dirham [I-86] et de trois quarts de dirham et ajoute-les aux parts d'héritage. Tu auras cinq sixièmes du bien égaux à cinq parts d'héritage plus une demi-part d'héritage, plus un dirham, plus trois quarts de dirham. Complète ton bien en ajoutant aux parts d'héritage, au dirham et aux trois quarts une quantité égale à leur cinquième ; tu auras un bien égal à six parts d'héritage plus trois cinquièmes d'une part d'héritage plus deux dirhams et un dixième de dirham. Pose la part d'héritage dix et le dirham dix, le bien sera quatre-vingt-sept parts.

Si tu veux avoir pour le dirham, un dirham entier, prends le tiers et soustrais-en une part d'héritage ; tu as un tiers moins une part d'héritage. Pose le tiers, sept plus un demi, ôte ensuite le tiers de ce que tu as, c'est-à-dire le tiers d'un tiers moins le tiers d'une part d'héritage ; il te restera les deux tiers d'un tiers moins les deux tiers d'une part d'héritage, c'est-à-dire cinq dirhams moins les deux tiers de part d'héritage. [O-29r] Ôte un pour un dirham ; il te reste quatre dirhams moins deux tiers de part d'héritage ; ôte ensuite le quart de ce que tu as, c'est-à-dire une part[144] moins un sixième d'une part d'héritage ; il te reste trois parts[145] moins la moitié d'une part d'héritage. Ôte une part[146] pour le dirham ; il te reste deux parts[147] moins la moitié d'une part d'héritage. Ajoute [A-25r] cela [H-44v] aux deux tiers du bien qui sont quinze ; on aura dix-sept moins la moitié d'une part d'héritage égaux à cinq parts d'héritage. Restaure cela par la moitié d'une part d'héritage que tu ajoutes aux cinq ; on a dix-sept parts égales à cinq parts d'héritage et une demi-<part>. Divise dix-sept par cinq

[144] Lire dirham.
[145] Lire dirhams.
[146] Lire dirham.
[147] Lire dirhams.

parts d'héritage et une demi-part d'héritage ; le quotient que l'on obtient est la part d'héritage qui est trois et une partie de onze d'une part[148]; et le tiers <du bien> est sept et un demi[149].

Problème : S'il laisse quatre fils et lègue à un homme une quantité égale à la part d'héritage de l'un des fils moins le quart de ce qui reste du tiers une fois enlevée la part d'héritage plus un dirham, et à un autre le tiers de ce qui [B-92v] reste du tiers et un dirham, alors le legs est à partir du tiers. Prends le tiers du bien, ôtes-en une part d'héritage, il reste un tiers moins une part d'héritage. Ajoute ensuite [I-87] à ce que tu as son quart ; on a un tiers plus un quart du tiers moins une part d'héritage et un quart de part d'héritage. Ôtes-en un dirham ; il reste un tiers plus un quart du tiers moins un dirham moins une part d'héritage et un quart d'une part d'héritage. Ôtes-en ensuite le tiers de ce qui te reste pour avoir le second legs ; il te reste, à partir du tiers, cinq parts de six parts du tiers du bien moins deux tiers de dirham moins cinq sixièmes d'une part d'héritage. Ôtes-en un autre dirham ; il te reste, à partir du tiers, cinq parts de dix-huit parts du bien moins un dirham et deux tiers de dirham, moins cinq sixièmes d'une part d'héritage. Ajoute à cela les deux tiers du bien ; tu auras dix-sept parts de dix-huit parts du bien moins un dirham et deux tiers de dirham moins cinq sixièmes d'une part d'héritage égaux à quatre parts d'héritage. Restaure cela par ce qui a été soustrait et ajoute [H-45r] une quantité égale aux parts d'héritage ; on aura dix-sept parts de dix-huit <parts> du bien égaux à quatre parts d'héritage plus cinq sixièmes d'une part d'héritage plus un dirham plus deux tiers de dirham.

[148] Lire dirham.

[149] Soit C le capital, x la part de chacun des cinq fils. Le premier legs est $x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}C-x\right)+d$; il reste du tiers $\frac{2}{9}C-\frac{2}{3}x-d$. Le deuxième legs est $\frac{1}{18}C-\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}d+d$; il reste du tiers $\frac{1}{6}C-\frac{1}{2}x-d-\frac{3}{4}d$, d'où l'équation $\frac{5}{6}C-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}d=5x$, d'où $\frac{5}{6}C=\left(5+\frac{1}{2}\right)x+\left(1+\frac{3}{4}\right)d$. Al-Khwārizmī ajoute à chacun des membres son cinquième ; d'où (1) $C=\left(6+\frac{3}{5}\right)x+\left(2+\frac{1}{10}\right)d$. Si $x = 10t$, $d = 10t$, alors $C = 87t$. Si on prend d comme unité ou comme paramètre en posant $\frac{1}{3}C=\left(7+\frac{1}{2}\right)d$, on a $\frac{2}{9}C=5d$ et le premier reste est $4d-\frac{2}{3}x$. Le deuxième legs est $\frac{1}{4}\left(4d-\frac{2}{3}x\right)+d=2d-\frac{1}{6}x$; il reste du tiers $2d-\frac{1}{2}x$. Mais $\frac{2}{3}C=15d$, d'où l'équation $17d-\frac{1}{2}x=5x \Leftrightarrow 17d=\frac{11}{2}x$ et $x=\frac{34}{11}d=3d+\frac{1}{11}d$.

Remarque : Al-Khwārizmī n'explique pas le choix $\frac{1}{3}C=\left(7+\frac{1}{2}\right)d$. Il s'agit, peut-être, de prendre d comme paramètre.

Complète ton bien, ceci en ajoutant aux quatre parts d'héritage, aux cinq sixièmes, au dirham et aux deux tiers de dirham une partie de dix-sept parties de chaque genre ; tu auras donc un bien égal à cinq parts d'héritage plus deux parties de dix-sept parties d'une part d'héritage plus un dirham plus treize parties de dix-sept parties de dirham. Pose la part d'héritage dix-sept parts et le dirham dix-sept, le bien sera donc cent dix-sept.

Si tu veux avoir le dirham entier, alors procède comme je te l'ai décrit, si Dieu le veut[150].

Problème : S'il laisse trois fils et deux filles et lègue à un homme une quantité égale à une part d'héritage d'une fille [B-93r] plus un dirham, à un autre un cinquième de ce qui reste du quart [O-29v] plus un dirham, à un autre un quart de ce qui reste du tiers une fois enlevé tout cela plus un dirham et à un autre un huitième du bien tout entier, et si les héritiers l'ont accepté, on l'infère ainsi : pour [I-88] avoir les dirhams entiers — ce qui est mieux dans ce cas — tu prends un quart du bien ; tu le nommes ; pose-le alors six et le bien vingt-quatre. Ôte du quart une part d'héritage, il reste six moins une part d'héritage ; [A-25v] ôte ensuite un dirham, il reste cinq moins une part d'héritage. Ôte le cinquième de ce qui reste, il reste quatre moins quatre cinquièmes d'une part d'héritage ; ôte ensuite un autre dirham, il te reste trois moins quatre cinquièmes d'une part d'héritage. Or tu sais déjà que le legs à partir du quart est trois et quatre cinquièmes [H-45v] d'une part d'héritage. Reviens ensuite au tiers qui est huit, ôtes-en trois et quatre cinquièmes d'une part d'héritage, il reste cinq moins quatre

[150] Soit C le capital, x la part de chacun des quatre fils. Le premier legs est : $x-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}C-x\right)+d$; le premier reste est $\frac{5}{12}C-\frac{5}{4}x-d$.

Le deuxième legs est : $\frac{5}{36}C-\frac{5}{12}x+\frac{2}{3}d$; et il reste du tiers : $\frac{5}{18}C-\frac{5}{6}x-\frac{5}{3}d$; d'où l'équation du problème

$$\frac{17}{18}C-\frac{5}{6}x-\frac{5}{3}d=4x,$$

soit

$$\frac{17}{18}C=\left(4+\frac{5}{6}\right)x+\frac{5}{3}d.$$

Al-Khwārizmī ajoute à chacun des membres son dix-septième, d'où

$$C=\left(5+\frac{2}{17}\right)x+\left(1+\frac{13}{17}\right)d.$$

Si $x = 17t$ et $d = 17t$; on a $C = 117t$.

On note qu'al-Khwārizmī choisit de chasser le dénominateur en prenant pour x et d le même multiple de 17.

cinquièmes d'une part d'héritage. Ôte le quart de cela aussi, en raison du legs, et un dirham ; il te reste deux parts[151] et trois quarts d'une part* moins trois cinquièmes d'une part d'héritage. Ôte ensuite le huitième du bien, c'est-à-dire trois ; il te manquera, à partir de ce qui reste du tiers, un quart de part* et trois cinquièmes d'une part d'héritage. Reviens alors aux deux tiers qui sont seize et ôtes-en un quart d'unité[152] et trois cinquièmes d'une part d'héritage ; il reste alors du bien quinze parts* plus trois quarts de part* moins trois cinquièmes d'une part d'héritage. Restaure cela par trois cinquièmes d'une part d'héritage et ajoute-les aux parts d'héritage qui sont huit. On a donc quinze parts* plus trois quarts de part* égaux à huit parts d'héritage plus trois cinquièmes d'une part d'héritage. Divise celles-là par celles-ci ; ce que tu obtiens est le quotient, c'est-à-dire une part d'héritage. Mais le bien est vingt-quatre, alors chaque fille aura une part* plus cent quarante-trois parties de cent soixante-douze parties d'une part*.

Si tu veux [B-93v] avoir les parts entières, prends le quart du bien et ôtes-en une part d'héritage. Il reste un quart du bien moins une part d'héritage. Ôtes-en ensuite un dirham et puis ôte le cinquième de ce qui reste du quart, c'est-à-dire un cinquième d'un quart du bien moins un cinquième d'une part d'héritage moins un cinquième de dirham. Ôtes-en un second dirham ; [H-46r] il reste quatre cinquièmes du quart <du bien> moins quatre cinquièmes d'une part d'héritage moins un dirham et quatre cinquièmes de dirham. Le legs à partir du quart est douze parts de deux cent quarante parts du bien plus quatre cinquièmes d'une part d'héritage plus un dirham plus quatre cinquièmes d'un dirham. Prends le tiers qui est quatre-vingts, ôtes-en douze et quatre cinquièmes d'une part d'héritage et un dirham et quatre cinquièmes d'un dirham ; ôtes-en ensuite un quart de ce qui te reste et un dirham ; il te reste à partir du tiers cinquante et un moins trois cinquièmes d'une part d'héritage, moins [I-89] deux dirhams et sept parties [O-30r] de vingt parties de dirham ; ôtes-en ensuite le huitième

[151] Lire dirham (nous le faisons suivre d'un astérisque dans la suite du texte).
[152] Lire dirham.

du bien tout entier, c'est-à-dire trente ; il reste vingt et un moins trois cinquièmes d'une part d'héritage moins deux dirhams et sept parties de vingt parties de dirham plus les deux tiers du bien égaux à huit parts d'héritage. Restaure cela par ce qui manque et ajoute-le aux huit parts d'héritage ; on a cent quatre-vingt et une [A-26r] parts de deux cent quarante parts du bien égales à huit parts d'héritage plus trois cinquièmes d'une part d'héritage plus deux dirhams et sept parties de vingt parties de dirham. Complète ton bien et ceci en ajoutant à ce que tu as cinquante-neuf de cent quatre-vingt et un ; la part est donc trois cent soixante-deux, le dirham est trois cent soixante-deux, [H-46v] le bien est cinq mille deux cent cinquante-six, [B-94r] les legs à partir du quart[153] mille deux cent quatre et à partir du tiers quatre cent quatre vingt-dix-neuf et le huitième six cent cinquante-sept[154].

Chapitre sur le complément

Une femme meurt et laisse huit filles, sa mère et son mari ; elle lègue à un homme le complément de la part d'héritage d'une fille par rapport au cinquième du bien, et à un autre le complément de la part d'héritage de la mère par rapport au quart du bien.

On l'infère ainsi : établis les parts selon le droit, on a treize parts. Tu prends un bien, tu en ôtes un cinquième moins une part, la part d'héritage d'une fille, ce qui est le premier legs. Puis tu en ôtes son quart moins deux parts, la part d'héritage de la mère, ce qui est le deuxième legs ; il reste onze parties de vingt parties du bien plus trois parts égales à treize parts. Ôte de treize parts trois parts pour les trois parts, il te reste onze parties de vingt du bien égales à dix parts. Complète ton bien et ceci en ajoutant aux

[153] C'est-à-dire la somme des deux premiers legs.
[154] Voir Note complémentaire [7].

dix parts neuf parties de onze parties de celles-ci ; tu auras donc un bien égal à dix-huit parts et deux parties de onze parties d'une part. Pose une seule part onze, le bien sera deux cents, une part d'héritage onze, le premier legs vingt-neuf et le second vingt-huit[155].

Si les parts selon le droit [O-30v] sont les mêmes, et si elle lègue à un homme le complément [H-47r] de la part d'héritage du mari par rapport au tiers, à un autre le complément de la part d'héritage de la mère par rapport au quart et à un autre le complément de la part d'héritage d'une fille par rapport au cinquième, et si les héritiers acceptent cela, alors établis [I-90] les parts selon le droit ; tu les trouves à partir de treize. Prends ensuite un bien, ôte son tiers moins trois parts, la part d'héritage du mari ; ôte ensuite son quart moins deux parts, la part d'héritage de la mère ; ôte ensuite son cinquième moins une part, la part d'héritage d'une fille ; il reste du bien treize parties de soixante parties plus six parts égales à treize parts. Ôte les six des treize parts ; il reste treize parties de soixante parties du bien égales à sept parts. Complète ton bien en multipliant les sept parts par quatre plus huit parties de treize parties ; tu auras un bien égal à trente-deux parts plus quatre parties [A-26v] de treize parties d'une part. Le bien sera quatre cent vingt[156].

Si les parts selon le droit sont les mêmes, et si elle lègue à un homme le complément de la part d'héritage de la mère par rapport au quart et à un autre le complément de la part d'héritage d'une fille par rapport à un cinquième de ce qui reste du bien une fois enlevé le premier legs, alors établis les parts selon le droit ; tu les trouves à partir de treize. Prends ensuite un bien, ôte son quart moins deux parts, ôte ensuite [B-35v] un cinquième de ce qui te reste du bien moins une part, examine ensuite ce qui reste du bien

[155] On a 13 parts : une pour chacune des huit filles, deux pour la mère et trois pour l'époux. Soit C le bien et x la part ; le premier legs est $\frac{1}{5}C-x$; le second legs $\frac{1}{4}C-2x$. Le reste est alors $\frac{11}{20}C+3x$ et l'équation du problème s'écrit $\frac{11}{20}C+3x=13x$; d'où $\frac{11}{20}C=10x$ et $C=\frac{200}{11}x=18x+\frac{2}{11}x$. Si on pose $x = 11$, on a $C = 200$, le premier legs 29 et le second 28. Plus généralement, si on pose $x = 11t$, on a $C = 200t$ et les legs $29t$ et $28t$ respectivement.

[156] Soit C le bien et x la part. Le premier legs est $\frac{1}{3}C-3x$, le second $\frac{1}{4}C-2x$ et le troisième $\frac{1}{5}C-x$. La somme en est $\frac{47}{60}C-6x$. L'équation du problème s'écrit (1) $\frac{13}{60}C+6x=13x \Leftrightarrow \frac{13}{60}C=7x$. On en déduit $C=\frac{420}{13}x=32x+\frac{4}{13}x$. Si on pose $x = 13$, on a $C = 420$. Plus généralement $x = 13t$, $C = 420t$. Notons qu'ici al-Khwārizmī multiplie les deux membres de l'équation (1) par $\frac{60}{13}$.

une fois les parts enlevées ; tu trouves cela trois cinquièmes du bien plus deux parts plus trois cinquièmes d'une part égaux à treize [H-47v] parts. Ôte deux parts plus trois cinquièmes d'une part de treize parts ; il reste dix parts et deux cinquièmes d'une part égaux à trois cinquièmes du bien. Complète ton bien en ajoutant à ce que tu as en parts leurs deux tiers ; tu auras un bien égal à dix-sept parts et un tiers d'une part. Pose la part trois, on a le bien, cinquante-deux, la part trois, le premier legs sept et le second legs six[157].

Si les parts selon le droit sont les mêmes, et si elle lègue à un homme le complément de la part d'héritage de la mère par rapport au cinquième du bien et à un autre le sixième de ce qui reste du bien, alors les parts sont treize.

Prends donc un bien, ôtes-en son cinquième moins deux parts, ôtes-en ensuite le sixième de ce qui te reste ; il restera deux tiers du bien et une part et deux tiers d'une part égaux à treize parts. Ôte des treize parts une part et deux tiers d'une part ; il restera deux tiers du bien égaux à onze parts et un tiers. Complète ton bien en ajoutant aux parts leur moitié ; tu auras un bien égal à dix-sept parts. Pose le bien quatre-vingt-cinq et la part cinq ; le premier legs est sept, le deuxième treize et il reste soixante-cinq [I-91] parts pour les héritiers[158].

Si les parts selon le droit sont les mêmes, et si elle lègue à un homme le complément de la part d'héritage de la mère par rapport au tiers du bien moins le complément de la part d'héritage d'une fille par rapport au quart de ce qui reste du bien une fois enlevé le <premier> complément, alors les parts sont treize.

Prends un bien, retranche son tiers moins deux parts, ajoute ensuite à [H-48r] ce qui te reste son quart moins une part. Tu auras cinq sixièmes du

[157] Soit C le bien, x la part ; on a toujours 13 parts. Le premier legs est $\frac{1}{4}C-2x$ et le second $\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}C+2x\right)-x=\frac{3}{20}C-\frac{3}{5}x$. L'équation du problème s'écrit $\frac{3}{5}C+2x+\frac{3}{5}x=13x$, soit $3C = 52x$ et $C=\frac{52}{3}x$. Si $x = 3$, on a $C = 52$; et si $x = 3t$, on a $C = 52t$. Le premier legs est alors $7t$ et le second $6t$.

[158] Soit C le bien, x la part ; on a toujours 13 parts. Le premier legs est $\frac{1}{5}C-2x$; le second est $\frac{1}{6}\left[C-\left(\frac{1}{5}C-2x\right)\right]$ et la somme en est $\frac{1}{6}C+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}C-2x\right)=\frac{1}{3}C-\frac{5}{3}x$; il reste donc $\frac{2}{3}C+\frac{5}{3}x$. L'équation du problème s'écrit : $\frac{2}{3}C+\frac{5}{3}x=13x$, d'où $C = 17x$. Si l'on pose $x = t$, on a $C = 17t$; le premier legs est $\frac{7}{5}t$ et le second $\frac{13}{5}t$. Al-Khwārizmī prend $t = 5$, d'où $x = 5$ et $C = 85$; le premier legs est alors 7 et le second 13 ; il reste 65 pour les héritiers.

bien plus une part et une demi-part égaux à treize [B-95r] parts. Ôte des treize parts une part et une demi-part ; il reste onze [O-31r] parts et une demi-part égales à cinq sixièmes du bien. Complète ton bien en ajoutant aux parts leur cinquième ; on a un bien égal à treize parts et quatre cinquièmes d'une part. Pose la part cinq ; on a le bien soixante-neuf et le legs quatre[159].

Problème : Un homme meurt [A-27r] et laisse un fils et cinq filles ; il lègue à un homme le complément de la part d'héritage du fils par rapport à un cinquième plus un sixième <du bien> moins le quart de ce qui reste du tiers une fois enlevé le complément.

Prends un tiers du bien, ôte le cinquième du bien et son sixième moins deux parts ; il te reste deux parts moins quatre parties de cent vingt parties du bien. Ajoute-leur ensuite ce qui est à soustraire, c'est-à-dire une demi-part moins une partie de cent vingt parties du bien ; il te reste donc deux parts plus une demi-part moins cinq parties de cent vingt parties du bien. Ajoute cela aux deux tiers du bien ; on a soixante-quinze parties de cent vingt parties du bien plus deux parts et demie égales à sept parts, ôte deux parts et demie de sept ; il te reste soixante-quinze de cent vingt égaux à quatre parts et demie. Complète ton bien en ajoutant aux parts leurs trois cinquièmes ; on a un bien égal à sept parts et un cinquième d'une part. Une seule part est cinq, alors le bien est trente-six, la part d'héritage [H-48v] est cinq et le legs est un[160].

[159] Soit C le bien, x la part ; on a toujours 13 parts. Le legs est

$$\frac{1}{3}C-2x-\left[\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}C+2x\right)-x\right]=\frac{1}{6}C-x-\frac{1}{2}x.$$

L'équation du problème s'écrit : $\frac{5}{6}C+x+\frac{1}{2}x=13x$, d'où $\frac{5}{6}C=11x+\frac{1}{2}x$; on en déduit $C=\frac{69}{5}x$. Si $x = 5t$, on a $C = 69t$ et le legs est $4t$.

[160] Les héritiers sont : un fils et cinq filles ; le nombre de parts est donc 7. Le legs est

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)C-2x-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}C-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)C+2x\right]=\frac{3}{8}C-\frac{5}{2}x \;;$$

l'équation du problème s'écrit :

$$\frac{5}{8}C=7x-\frac{5}{2}x,\text{ d'où } C=\frac{36}{5}x.$$

Si $x = 5t$, on a $C = 36t$ et le legs est t. On note qu'al-Khwārizmī écrit $\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{120}$ et garde le dénominateur 120 dans une partie de ses calculs.

Problème : S'il laisse sa mère, sa femme et quatre sœurs et lègue à un homme le complément de la part d'héritage de sa femme et de sa sœur par rapport à la moitié moins les deux septièmes de ce qui reste du tiers une fois le complément enlevé, on l'infère ainsi : si tu retranches la moitié d'un tiers, il te restera un sixième ; ceci [B-95v] est ce qu'on a soustrait, soit la part d'héritage de la femme et d'une sœur, ce qui est cinq parts. Ce qui reste du tiers est cinq parts moins un sixième du bien. Les deux septièmes qui ont été soustraits [I-92] sont les deux septièmes de cinq parts moins les deux septièmes du sixième du bien. Tu auras donc six parts plus trois septièmes d'une part moins un sixième du bien et deux septièmes d'un sixième du bien. Tu ajoutes à cela deux tiers du bien ; tu auras dix-neuf parties de quarante-deux parties du bien plus six parts plus trois septièmes d'une part égales à treize parts. [O-31v] Ôtes-en ces parts ; il reste alors dix-neuf parties de quarante-deux parties du bien égales à six parts et quatre septièmes d'une part. Complète ton bien en ajoutant à ce qui reste son double et quatre parties de dix-neuf parties ; tu auras un bien égal à quatorze parts plus soixante-dix parties de cent trente-trois parties, d'une part. Pose la part cent trente-trois, alors les parts selon le droit[161] seront mille neuf cent trente-deux parts et une seule part sera cent trente-trois. Le complément est trois cent un, et de ce qui a été soustrait du tiers il y a quatre-vingt-dix-huit ; le legs reste donc deux cent trois, il reste pour les héritiers mille sept cent vingt-neuf[162]. [fin B, O]

[161] C'est-à-dire le bien tout entier.

[162] Les héritiers sont la mère, l'épouse et quatre sœurs. Selon le droit, cela fait 13 parts. Le texte précise que l'épouse et une sœur en prennent 5, sans déterminer les parts respectives. Le legs est

$$\frac{1}{2}C-5x-\frac{2}{7}\left[\frac{1}{3}C-\left(\frac{1}{2}C-5x\right)\right]=\frac{1}{2}C-5x-\frac{2}{7}\left(5x-\frac{1}{6}C\right)=\frac{23}{42}C-5x-\frac{10}{7}x.$$

L'équation du problème est $\frac{19}{42}C+5x+\frac{10}{7}x=13x$, d'où $\frac{19}{42}C=6x+\frac{4}{7}x$; soit

(1) $\frac{19}{42}C=\frac{46}{7}x$ et $C=\frac{276}{19}x$.

Si $x = 19t$, on a $C = 276t$. Al-Khwārizmī choisit ici $t = 7$ et pose $x = 133$, d'où $C = 1932$. On trouve alors pour le legs $301 - 98 = 203$. Il est vraisemblable qu'al-Khwārizmī avait choisi $t = 7$ pour que, dans le calcul du legs, les termes $5x$ et $\frac{1}{6}C$ soient tous deux divisibles par 7. Remarquons qu'avec $t = 1$, on a $x = 19$ et $C = 276$. Ces nombres ne sont pas divisibles par 7, mais leur différence est $5x-\frac{1}{6}C=49$, qui est divisible par 7 ; on trouve alors pour le legs $43 - 14 = 29$. Remarquons aussi qu'al-Khwārizmī souligne que dans le calcul de $\left[\frac{1}{3}C-\frac{1}{2}C+5x\right]$ apparaît une différence « négative », $\frac{1}{3}C-\frac{1}{2}C=-\frac{1}{6}C$; le calcul s'écrit alors $5x-\frac{1}{6}C$.

Calcul de retour <légal> [A-27v]

Un chapitre de ce calcul : le mariage en état de maladie

Au cours de sa dernière maladie un homme épouse une femme ; il possède cent dirhams et n'a aucun autre bien. La dot d'une femme du même statut[163] est dix dirhams. La femme meurt ensuite après avoir légué le tiers de son bien, puis l'homme meurt.

On l'infère ainsi : enlève de cent la dot qui revient à la femme, c'est-à-dire dix dirhams, il reste quatre-vingt-dix dirhams, dont une partie lui est léguée. Pose ce legs une chose ; il reste quatre-vingt-dix dirhams moins une chose ; elle possède donc dix dirhams plus une chose. Elle lègue le tiers de son bien, c'est-à-dire trois dirhams plus un tiers de dirham plus le tiers d'une chose ; [H-49v] il reste six dirhams plus deux tiers, plus deux tiers d'une chose. Il revient au mari, en héritage, la moitié, c'est-à-dire trois dirhams plus un tiers de dirham plus un tiers de chose. Les héritiers du mari possèderont donc quatre-vingt-treize dirhams plus un tiers de dirham moins deux tiers de chose, ce qui est deux fois le legs de la femme, qui est une chose, car la femme peut avoir, par legs, le tiers de tout ce que laisse le mari ; le double de son legs est donc deux choses. Restaure les quatre-vingt-treize et un tiers par deux tiers d'une chose et ajoute-les aux deux choses. On a quatre-vingt-treize dirhams plus un tiers de dirham égaux à deux choses plus deux tiers d'une chose. Une seule chose en est les trois huitièmes et est égale aux trois huitièmes de quatre-vingt-treize plus un tiers, [I-93] c'est-à-dire à trente-cinq dirhams[164].

Si le problème reste le même, mais que la femme a une dette de dix dirhams et qu'elle lègue le tiers de son bien, on l'infère ainsi : que la femme reçoive dix dirhams, sa dot ; il reste quatre-vingt-dix dont une partie lui est léguée. Pose son legs une chose, il reste quatre-vingt-dix moins une chose et la femme possédera dix dirhams plus une chose. De cela on

[163] Litt. : comme elle.

[164] Le bien de l'homme est 100 dirhams, la dot est dix dirhams. Soit x la somme, évaluée en dirhams, léguée par l'épouse ; il reste à l'époux $90 - x$ et l'épouse possède $x + 10$. L'héritage après la mort de l'époux est

$$(90 - x) + \left(3 + \frac{1}{3} + \frac{x}{3}\right),$$

d'où l'équation du problème

$$93 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x = 2x, \text{ d'où } x = \frac{280}{8} = 35.$$

rend sa dette, dix dirhams, il reste une chose. Mais elle en a légué le tiers, qui est un tiers de chose ; il lui reste donc deux tiers de chose dont la moitié revient au mari par héritage, c'est-à-dire un tiers d'une chose. Les héritiers du mari auront donc quatre-vingt-dix dirhams moins deux tiers de chose ; mais ceci est égal à deux fois le legs qui est une chose, [H-50r] c'est-à-dire deux choses. Restaure les quatre-vingt-dix par deux tiers d'une chose et ajoute-les aux deux choses ; on a quatre-vingt-dix dirhams égaux à deux choses plus deux tiers d'une chose. Une seule chose en est les trois huitièmes, c'est-à-dire trente-trois dirhams et trois quarts de dirham, ce qui est le legs[165].

Problème : S'il l'épouse et s'il possède cent dirhams, la dot d'une femme du même statut étant dix dirhams, et s'il lègue à un homme le tiers de son bien, on l'infère ainsi : que tu donnes à la femme la dot d'une femme comme elle, c'est-à-dire dix dirhams, il reste donc quatre-vingt-dix dirhams ; tu lui donnes ensuite son legs, soit une chose. Tu donnes ensuite au légataire du tiers [A-28r] également une chose, car le tiers est à partager entre eux en deux moitiés ; la femme ne prend rien sans que la même chose soit prise par celui qui a le tiers. Tu donnes également une chose à celui qui a le tiers, tu rends ensuite aux héritiers du mari ce qu'il a hérité de la femme, cinq dirhams plus une demi-chose ; il reste entre les mains des héritiers du mari quatre-vingt-quinze moins une chose et une demi-chose et ceci est égal à quatre choses. Restaure cela par une chose et une demi-chose ; il reste quatre-vingt-quinze égaux à cinq choses plus une demi-chose. Transforme-les en moitiés ; on a onze moitiés et les dirhams sont des moitiés. On a cent quatre-vingt-dix moitiés égales à onze moitiés de chose ; une seule chose est donc égale à dix-sept dirhams plus trois parties de onze parties de dirham, ce qui est le legs[166].

165 Les conditions sont les mêmes, mais cette fois l'épouse avait contracté une dette égale à sa dot. L'équation du problème s'écrit immédiatement

$$90 - x + \frac{x}{3} = 2x, \text{ d'où } x = 33 + \frac{3}{4}.$$

Rappelons que le mari, au décès de son épouse, doit rembourser sa dette ainsi que son legs ; et qu'il hérite la moitié du bien de son épouse.

166 Comme précédemment le legs est x ; il reste à l'époux $90 - x$ et à l'épouse $10 + x$, dont la moitié revient en héritage au mari ; soit $5 + \frac{x}{2}$. Le mari avait fait un legs égal au premier. La somme des deux legs, soit $2x$, doit être le tiers du bien du mari, donc ce qui reste pour les héritiers est égal à $4x$, d'où $(90 - x) + \left(5 + \frac{x}{2}\right) - x = 4x$, d'où $11x = 190$ et $x = 17 + \frac{3}{11}$.

Problème : S'il l'épouse et s'il possède cent dirhams, la dot d'une femme du même statut étant dix dirhams ; si elle meurt ensuite avant le mari, laisse dix dirhams et lègue le tiers de son bien ; [H- 50v] si le mari meurt ensuite et laisse cent vingt dirhams et lègue à un homme le tiers de son bien, on l'infère ainsi : tu donnes à la femme la dot d'une femme comme elle, dix dirhams, il reste entre les mains des héritiers [I-94] du mari cent dirhams plus dix dirhams et le legs de la femme est une chose de cela. Il reste donc cent dirhams plus dix dirhams moins une chose et les héritiers de la femme posséderont alors vingt dirhams plus une chose. Mais elle a légué le tiers de cela, c'est-à-dire six dirhams plus deux tiers plus un tiers de chose et il revient aux héritiers du mari, par héritage, la moitié de ce qui reste, c'est-à-dire six dirhams plus deux tiers plus un tiers de chose, et les héritiers du mari posséderont alors cent seize dirhams et deux tiers moins deux tiers de chose. Mais il a légué le tiers de cela, qui est une chose ; il reste donc cent dirhams et seize dirhams et deux tiers moins une chose et deux tiers de chose égaux au double des deux legs, ce qui est quatre choses. Restaure cela, on a cent seize dirhams plus deux tiers de dirham égaux à cinq choses plus deux tiers de chose ; une seule chose est égale à vingt dirhams plus dix parties de dix-sept parties de dirham, ce qui est le legs ; sache-le[167].

Chapitre sur l'affranchissement au cours de la maladie

Un homme, <le maître>, affranchit deux esclaves au cours de sa maladie. Le maître meurt et laisse un fils et une fille ; puis un des deux esclaves meurt, laisse un bien plus grand que son prix et laisse une fille.

Si l'esclave meurt avant le maître, partage les deux tiers de son prix, ce que l'autre esclave a encore à rembourser pour son affranchissement et l'héritage du maître[168] entre [H-51r] le fils et la fille, le fils ayant le lot de deux filles. Si l'esclave meurt après le maître, partage les deux tiers de son prix et ce que l'autre esclave a encore à rembourser pour son

[167] La dot, 10 dirhams, et le legs x, un tiers du bien de l'épouse, sont prélevés sur le bien du mari qui est 120 dirhams. Il reste alors $110 - x$. Le bien de l'épouse est $10 + 10 + x$. Elle a légué un tiers ; un autre tiers revient à ses héritiers et le dernier tiers aux héritiers de son époux. Mais celui-ci avait fait un autre legs qui, comme dans le problème précédent, est égal à celui fait par son épouse ; la somme des legs est donc $2x$. L'équation du problème s'écrit : $110 - x + \frac{1}{3}(20 + x) - x = 4x$, d'où $116 + \frac{2}{3} = 5x + \frac{2}{3}x$ et $x = 20 + \frac{10}{17}$.

[168] Ce qu'il a hérité de l'esclave décédé.

affranchissement entre le fils et la fille — le fils ayant le lot de deux filles — et ce qui reste[169] est pour le fils [A-28v] et non pour la fille car la moitié de l'héritage de l'esclave est pour la fille de l'esclave et l'autre moitié est par convention pour le fils du maître[170], et rien pour la fille[171].

Problème : De même, si un homme, <le maître>[172], affranchit son esclave au cours de sa dernière maladie, s'il n'a aucun autre bien que lui et si ensuite l'esclave meurt avant le maître, alors, si l'homme affranchit un esclave au cours de sa maladie et n'a d'autre bien que lui, l'esclave doit rembourser pour son affranchissement les deux tiers de son prix. Si le maître avait pris comme avance les deux tiers de son prix, s'il les a consommés et si le maître meurt ensuite, alors l'esclave doit rembourser pour son affranchissement les deux tiers de ce qui reste.

Mais s'il avait remboursé tout son prix et que le maître l'avait consommé, alors l'esclave ne doit plus rien car il a remboursé tout son prix[173].

Problème : Si, au cours de sa dernière maladie, il affranchit son esclave dont le prix est trois cent dirhams ; s'il n'a pas d'autre bien que lui, si ensuite l'esclave meurt, laisse trois cent dirhams et laisse une fille, on l'infère ainsi : tu poses le legs[174] de l'esclave une chose, ce qui reste de son prix pour s'affranchir, trois cents moins une chose. Le maître aura donc entre les mains ce qui reste du prix de l'affranchissement, c'est-à-dire trois cents moins une chose. [I-95, H-51v] L'esclave meurt ensuite, laisse une chose et laisse une fille, qui a la moitié de cela, c'est-à-dire une demi-chose, et le maître a la même quantité. Ainsi, aux mains des héritiers du maître, il y a trois cents moins une demi-chose qui est le double du legs — qui est une chose —, c'est-à-dire deux choses[175]. Tu restaures les trois cents par une demi-chose, tu ajoutes cela aux deux choses, on a trois cents égaux à deux choses et une demi-chose. Une chose est donc les deux cinquièmes de cela, c'est-à-dire cent vingt qui est le legs ; et ce qui reste du prix de l'affranchissement est cent quatre-vingts[176].

[169] Ce qui reste du bien de l'esclave décédé.

[170] Il s'agit d'une convention entre l'affranchi et le maître qui, lorsque le maître meurt avant l'esclave, donne un droit au fils du maître.

[171] Voir Note complémentaire [8].

[172] Dans les problèmes qui suivent, nous ne préciserons plus que « l'homme » et « le maître » sont une seule et même personne.

[173] Voir Note complémentaire [9].

[174] Somme dont le maître accepte de diminuer la rançon.

[175] Voir Note complémentaire [10].

[176] Voir Note complémentaire [11].

Problème : S'il l'affranchit au cours de sa maladie, le prix de l'esclave étant trois cents dirhams ; si celui-ci meurt, laisse quatre cents dirhams et une dette de dix dirhams, laisse deux filles et lègue à un homme le tiers de son bien, et si le maître avait une dette de vingt dirhams, on l'infère ainsi : pose le legs de l'esclave une chose et ce qui reste du prix de son affranchissement trois cents moins une chose. L'esclave meurt et laisse quatre cents dirhams ; on rend au maître ce qui reste du prix de son affranchissement, c'est-à-dire trois cents moins une chose ; il reste alors aux mains des héritiers de l'esclave cent dirhams plus une chose. De cela on rembourse la dette, c'est-à-dire dix dirhams ; il reste quatre-vingt-dix dirhams plus une chose. Mais il a légué le tiers de cela, c'est-à-dire trente dirhams plus un tiers d'une chose ; il reste après cela pour ses héritiers soixante dirhams plus deux tiers d'une chose ; les deux tiers de cela, quarante dirhams et quatre neuvièmes d'une chose pour les deux filles et vingt dirhams plus deux neuvièmes d'une chose pour le maître. Ainsi il y a entre les mains des héritiers du maître trois cent vingt moins sept neuvièmes d'une chose. On rembourse de cela la dette du maître, qui est vingt dirhams ; [H-52r] il reste trois cents moins sept neuvièmes d'une chose, ce qui est égal à deux fois le legs de l'esclave, [A-29r] qui est une chose ; ceci est donc deux choses. Tu restaures les trois cents par sept neuvièmes d'une chose et on ajoute ceci aux deux choses ; il reste trois cents égaux à deux choses et sept neuvièmes d'une chose ; une chose de cela est neuf parties de vingt-cinq parties, ce qui sera cent huit, ce dont l'esclave disposait[177].

Problème : S'il affranchit deux esclaves au cours de sa maladie, sans avoir d'autre bien qu'eux, le prix de chacun d'eux étant trois cents dirhams, le maître ayant pris comme avance les deux tiers du prix de l'un d'eux et les ayant consommés, si le maître meurt ensuite, alors il lui revient encore le tiers du prix dont il a pris <les deux tiers> par anticipation. Le bien du maître est donc le prix tout entier de l'esclave dont il n'a rien pris par anticipation et le tiers du prix de l'esclave dont il a pris <les deux tiers> par anticipation, c'est-à-dire cent dirhams, et cela est quatre cents dirhams. Le tiers de cela est à partager entre eux en deux moitiés, c'est-à-dire cent

[177] Sous-entendu : en tant que legs. Voir Note complémentaire [12].

dirhams plus trente-trois [I-96] dirhams plus un tiers de dirham, et pour chacun soixante-six dirhams plus deux tiers de dirham. Celui à qui le maître a pris par anticipation les deux tiers de son prix paye pour son affranchissement trente-trois dirhams plus un tiers, car il lui revient comme legs sur les cent soixante-six dirhams plus deux tiers de dirham, et paye ce qui reste de cent, alors que l'autre paye pour son affranchissement deux cent trente-trois dirhams plus un tiers[178].

Problème : S'il affranchit deux esclaves au cours de sa maladie, le prix de l'un étant trois cents dirhams et le prix de l'autre cinq cents dirhams ; si celui dont le prix est trois cents dirhams meurt et laisse une fille, si le maître laisse un fils et si l'esclave laisse [H-52v] quatre cents dirhams, combien chacun d'eux doit-il payer pour son affranchissement ? On l'infère ainsi : pose le legs de l'esclave dont le prix est trois cents dirhams, une chose, ce qui reste pour son affranchissement trois cents moins une chose ; pose le legs de l'esclave dont le prix est cinq cents dirhams une chose plus deux tiers d'une chose et ce qui reste pour son affranchissement cinq cents dirhams moins une chose et deux tiers d'une chose, car son prix est égal au prix du premier plus ses deux tiers ; en effet, si celui-là a une chose, alors celui-ci a la même plus ses deux tiers. Celui dont le prix est trois cents dirhams meurt et laisse quatre cents dirhams sur lesquels on rembourse ce qui reste pour son affranchissement, trois cents moins une chose ; il reste aux mains de ses héritiers cent dirhams plus une chose, la moitié pour sa fille, c'est-à-dire cinquante dirhams plus une demi-chose, et ce qui reste est pour les héritiers du maître, c'est-à-dire cinquante dirhams plus une demi-chose, lesquels sont ajoutés à trois cents moins une chose ; on a alors trois cent cinquante moins une demi-chose. Ils prennent de l'autre ce qui reste pour son affranchissement, c'est-à-dire cinq cents dirhams moins une chose moins deux tiers d'une chose ; ils auront alors entre leurs mains huit cent cinquante dirhams moins deux choses et un sixième de chose, ce qui est égal à deux fois la somme des deux legs, qui est deux choses plus deux tiers de chose. Restaure cela ; on a huit cent cinquante dirhams égaux à sept choses et une demi-chose. Réduis par cela, on a une seule chose égale à [A-29v] cent treize dirhams plus un tiers de

[178] Voir Note complémentaire [13].

dirham, ce qui est le legs de l'esclave dont le prix est trois cents dirhams. Le legs de l'autre esclave est égal à cela plus ses deux tiers, ce qui est cent quatre-vingt-huit dirhams plus huit neuvièmes de dirham et ce qui reste pour son affranchissement est trois cent onze [H-53r] dirhams plus un neuvième de dirham[179].

Problème : S'il affranchit deux esclaves au cours de sa maladie, le prix de chacun étant trois cents dirhams ; si l'un d'eux meurt ensuite et laisse cinq cents dirhams et laisse une fille, et si le maître laisse un fils, on l'infère ainsi : pose le legs de chacun d'eux une chose et ce qui reste pour son affranchissement [I-97] trois cents moins une chose. Pose la succession de celui des deux qui est mort cinq cents dirhams, ce qui reste pour son affranchissement étant trois cents moins une chose, alors il reste de ce qu'il a laissé deux cents plus une chose, dont cent dirhams plus une demi-chose sont rendus à son maître par héritage ; ainsi les héritiers de son maître posséderont quatre cents dirhams moins une demi-chose. Ils prennent de l'autre esclave ce qui reste pour son affranchissement, trois cents dirhams moins une chose ; ils posséderont sept cents dirhams moins une chose et une demi-chose ; or ceci est le double de leur legs, qui sont deux choses, et ceci est quatre choses. Restaure cela par une chose et une demi-chose, on a sept cents dirhams égaux à cinq choses et une demi-chose ; réduis par cela, on a une seule chose égale à cent vingt-sept dirhams plus trois parties de onze parties de dirham[180].

Problème : S'il affranchit, au cours de sa maladie, un esclave dont le prix est trois cents dirhams et à qui il a pris une avance de deux cents dirhams qu'il a consommés, si l'esclave meurt ensuite avant le maître, laisse une fille et laisse trois cents dirhams, on l'infère ainsi : pose la succession de l'esclave les trois cents plus les deux cents [H-53v] consommés par le maître, ce qui est cinq cents dirhams. Tu en sépares ce qui reste pour son affranchissement, c'est-à-dire trois cents moins une chose, car son legs est une chose ; il reste deux cents dirhams plus une chose dont une

[179] Voir Note complémentaire [14].

[180] Le prix des deux esclaves est le même : 300 dirhams ; les legs sont alors les mêmes, soit x. Le premier esclave meurt et laisse un bien de 500 dirhams. Le montant de son affranchissement est $500 - (300 - x) = 200 + x$; une moitié pour sa fille et une moitié pour le maître. L'équation du problème est donc

$$(300-x)+(300-x)+100+\frac{x}{2}=4x,$$

d'où $x=\frac{1400}{11}=127+\frac{3}{11}$.

moitié, cent dirhams plus une demi-chose, est pour la fille et une moitié revient aux héritiers du maître par héritage, c'est-à-dire cent dirhams plus une demi-chose ; il y a entre leurs mains, à partir des trois cents dirhams moins une chose, cent dirhams moins une chose, car les deux cents ont été consommés ; il reste entre leurs mains, les deux cents dirhams ayant été consommés, deux cents dirhams moins une demi-chose, ce qui est égal à deux fois le legs de l'esclave ; donc leur moitié, cent moins un quart d'une chose, est égale au legs de l'esclave, qui est une chose. Tu restaures cela par le quart d'une chose, on a donc cent dirhams égaux à une chose plus le quart d'une chose. La chose en est les quatre cinquièmes, c'est-à-dire quatre-vingts dirhams qui est le legs, et ce qui reste pour son affranchissement est deux cent [A-30r] vingt dirhams.

Tu additionnes la succession de l'esclave, qui est trois cents plus deux cents consommés par le maître, c'est-à-dire cinq cents dirhams ; tu donnes au maître ce qui reste pour l'affranchissement qui est deux cent vingt dirhams ; il reste deux cent quatre-vingts dirhams, la moitié de cela, cent quarante dirhams pour la fille, que tu ôtes de la succession de l'esclave, c'est-à-dire trois cents ; il reste aux mains des héritiers cent soixante dirhams, ce qui est le double du legs de l'esclave, qui est une chose[181].

Problème : S'il affranchit au cours de sa maladie un esclave dont le prix est trois cents dirhams, le maître lui ayant pris d'avance [I-98] cinq cents dirhams ; si l'esclave meurt ensuite avant le maître, laisse mille dirhams et laisse une fille et si le maître laisse une dette de deux cents dirhams, on l'infère ainsi : [H-54r] pose la succession[182] de l'esclave mille dirhams plus les cinq cents dirhams consommés par le maître et ce qui reste à partir de cela, pour son affranchissement, trois cents dirhams moins une chose ; il reste donc mille deux cents plus une chose dont la moitié est pour la fille

[181] Le maître a un esclave dont le prix est 300 dirhams ; il a reçu un acompte de 200 dirhams pour l'affranchir. Le legs est x ; il reste à s'acquitter pour s'affranchir de $(300 - x) - 200 = 100 - x$. Le montant du bien de l'esclave à sa mort est $300 - (100 - x)$, puisqu'il a laissé en plus 300 dirhams. Cette somme est à partager par moitié entre sa propre fille et le maître. L'équation du problème est donc $100 - x + 100 + \frac{x}{2} = 2x$, d'où $x = 80$.

Le prix de l'affranchissement est donc 220 dirhams.

Al-Khwārizmī vérifie ensuite le calcul : le montant théorique de l'héritage de l'esclave est son bien (300) + l'acompte payé au maître (200) – le coût de l'affranchissement, soit $300 + 200 - 220 = 280$, dont la moitié est prélevée pour la fille (140) ; il reste donc 160, deux fois le legs.

[182] Pour le calcul du montant de la succession des parts d'héritage, on ajoute la somme avancée au maître à l'avoir réel de l'esclave.

de l'esclave, c'est-à-dire six cents dirhams plus une demi-chose que tu ôtes de la succession[183] de l'esclave, qui est mille dirhams. Il reste donc quatre cents dirhams moins une demi-chose à partir desquels on rembourse la dette du maître qui est deux cents dirhams ; il reste alors deux cents dirhams moins une demi-chose égaux au double du legs qui est une chose, et ceci est deux choses. Restaure cela par une demi-chose, on a deux cents dirhams égaux à deux choses et demie ; réduis par cela, une chose est donc égale à quatre-vingts dirhams, ce qui est le legs.

Tu additionnes la succession de l'esclave et ce que le maître a pris en avance, on a mille cinq cents dirhams ; tu enlèves de cela ce qui reste pour son affranchissement, deux cent vingt dirhams ; il reste mille deux cent quatre-vingts dirhams, la moitié pour la fille, six cent quarante dirhams, que tu ôtes de la succession de l'esclave, qui est mille dirhams ; il reste trois cent soixante dirhams ; on rembourse de cela la dette du maître, deux cents dirhams, il reste aux mains des héritiers cent soixante dirhams, ce qui est le double du legs[184].

Problème : S'il affranchit au cours de sa maladie un esclave dont le prix est cinq cents dirhams, lui ayant pris d'avance six cents dirhams qu'il a consommés ; et le maître ayant une dette de trois cents dirhams, si l'esclave meurt ensuite et laisse sa mère et son maître ; [H-54v] si l'esclave laisse mille sept cent cinquante dirhams et une dette de deux cents dirhams, on l'infère ainsi : pose la succession de l'esclave mille sept cent cinquante dirhams plus ce qui a été avancé au maître, c'est-à-dire six cents dirhams — tout cela est deux mille trois cent cinquante dirhams ; tu en sépares la dette qui est deux cents dirhams et tu en sépares ce qui reste pour son affranchissement, cinq cents dirhams moins une chose, le legs étant une chose ; il reste mille six cent cinquante dirhams plus une chose, [A-30v] desquels le tiers est pour la mère, cinq cent cinquante plus le tiers d'une chose, que tu ôtes ainsi que la dette de deux cents dirhams de la succession

[183] Il s'agit ici de l'avoir réel.

[184] Soit 300 dirhams le prix de l'esclave. Ce dernier possède 1000 dirhams ; il avait avancé 500 dirhams au maître, son bien est donc 1500 dirhams. On retire le legs x du prix de l'affranchissement ; on a $300 - x$. Son héritage est donc $1200 + x$, soit $600 + \frac{x}{2}$ pour sa fille ; il reste $400 - \frac{x}{2}$ qui revient au maître. Sur cette somme on paie sa dette, 200 dirhams. Le reste revient aux héritiers ; soit $200 - \frac{x}{2}$. L'équation du problème est donc $200 - \frac{x}{2} = 2x$ et $x = 80$. Al-Khwārizmī vérifie ensuite le calcul.

réelle de l'esclave, c'est-à-dire mille sept cent cinquante ; il reste alors mille dirhams moins un tiers de chose. Tu rembourses de cela la dette du maître, c'est-à-dire trois cents dirhams ; il reste donc sept cents dirhams moins un tiers de chose, qui est le double du legs de l'esclave, c'est-à-dire une chose, ce qui est deux choses. La moitié de cela est trois cent cinquante [I-99] moins un sixième de chose égale à une chose. Restaure cela d'un sixième de chose ; on a donc trois cent cinquante égaux à une chose plus un sixième de chose. Une chose est donc égale à six septièmes de trois cent cinquante, c'est-à-dire trois cents dirhams, et ceci est le legs.

Tu additionnes la succession de l'esclave et ce que le maître a consommé, ce qui est deux mille trois cent cinquante dirhams ; tu en sépares la dette des deux cents dirhams, tu en sépares ensuite ce qui reste pour l'affranchissement et qui est le prix de l'esclave moins le legs, <soit> deux cents dirhams, il reste donc mille neuf cent cinquante dirhams, [H-55r] le tiers, six cent cinquante dirhams pour la mère ; ôte-le, et ôte la dette qui est deux cents dirhams, de la succession réelle de l'esclave, qui est mille sept cent cinquante dirhams ; il reste neuf cents dirhams desquels on rembourse la dette du maître, trois cents ; il reste six cents dirhams, ce qui est le double du legs[185].

Problème : S'il affranchit au cours de sa maladie un esclave dont le prix est trois cents dirhams, si l'esclave meurt ensuite, laisse une fille et laisse trois cents dirhams, si la fille meurt ensuite, laisse un mari et laisse trois cents dirhams, et si le maître meurt ensuite, on l'infère ainsi : pose la succession de l'esclave trois cents dirhams, pose ce qui reste pour son affranchissement trois cents moins une chose, il reste donc une chose dont une moitié est pour la fille et une moitié pour le maître. Ajoute le lot de la fille, une demi-chose, à sa succession qui est trois cents ; on a trois cents dirhams et une demi-chose ; une moitié de cela est pour le mari et une

[185] Soit 500 dirhams le prix de l'esclave. Celui-ci laisse avant de mourir 1750 dirhams et une dette de 200 dirhams. Il avait avancé à son maître 600 dirhams. Le prix de l'affranchissement est $500 - x$. L'héritage est donc

$$1750 - 200 + 600 - (500 - x) = 1650 + x,$$

à partager entre sa mère et son maître dans la proportion $\frac{1}{3}$ pour la mère et $\frac{2}{3}$ pour le maître. Il revient à celle-là $550 + \frac{x}{3}$ et il reste $700 - \frac{x}{3}$. L'équation du problème est donc

$$700 - \frac{x}{3} = 2x \text{ et } x = 300.$$

Al-Khwārizmī vérifie ensuite le calcul.

moitié revient au maître, c'est-à-dire cent cinquante dirhams plus un quart de chose. La somme qui est entre les mains du maître est quatre cent cinquante dirhams moins un quart de chose, et ceci est égal au double du legs. Sa moitié est donc égale au legs, c'est-à-dire deux cent vingt-cinq dirhams moins un huitième de chose qui sont égaux à une chose. Restaure cela d'un huitième de chose et ajoute-le à une chose ; on a alors deux cent vingt-cinq dirhams égaux à une chose et un huitième de chose. Réduis cela ; [H-55v] une seule chose est égale aux huit neuvièmes de deux cent vingt-cinq, ce qui est deux cents dirhams[186].

Problème : S'il affranchit au cours de sa maladie un esclave dont le prix est trois cents dirhams, si l'esclave meurt, laisse cinq cents dirhams [A-31r], laisse une fille et lègue le tiers de son bien ; si la fille meurt ensuite, laisse sa mère, lègue le tiers de son bien et laisse trois cents dirhams, on l'infère ainsi : tu enlèves de la succession de l'esclave ce qui reste pour son affranchissement, c'est-à-dire trois cents dirhams moins une chose ; il reste deux cents dirhams plus une chose. Mais il a légué le tiers de son bien, ce qui est soixante-six dirhams [I-100] et deux tiers plus un tiers d'une chose ; il revient au maître par son héritage soixante-six dirhams et deux tiers plus un tiers d'une chose, et à la fille de l'esclave une quantité égale que tu joins à ce qu'elle a laissé et qui est trois cents dirhams ; on a donc trois cent soixante-six dirhams et deux tiers de dirham plus un tiers d'une chose. Mais elle a légué le tiers de son bien, c'est-à-dire cent vingt-deux dirhams et deux neuvièmes de dirham et un neuvième d'une chose, il reste donc deux cent quarante-quatre et quatre neuvièmes de dirhams et deux neuvièmes de chose ; un tiers de cela, quatre-vingts et un dirhams et quatre neuvièmes et un tiers d'un neuvième de dirham et deux tiers d'un neuvième de chose, est pour la mère ; et le reste revient au maître, c'est-à-dire cent soixante-deux dirhams et huit neuvièmes et deux tiers d'un neuvième de dirham et un neuvième d'une chose et un tiers [H-56r] du neuvième d'une chose ; c'est son héritage, étant donné qu'il est le parent

[186] Sur le bien de l'esclave, on prélève le prix de l'affranchissement ; il reste alors $300 - (300 - x) = x$. Soit $\frac{x}{2}$ pour sa fille et $\frac{x}{2}$ pour le maître. La fille meurt, son bien est $300 + \frac{x}{2}$ dont la moitié, $150+\frac{x}{4}$, revient à son mari et l'autre moitié au maître. Le bien du maître est alors $300-x+\frac{x}{2}+150+\frac{x}{4}=450-\frac{x}{4}$. L'équation du problème est donc $450-\frac{x}{4}=2x$ et $x = 200$.

mâle ; ceci s'ajoute à ce qui reste pour l'affranchissement, c'est-à-dire trois cents moins une chose et à ce qu'il hérite de l'esclave, qui est soixante-six dirhams et deux tiers plus un tiers d'une chose. Il vient donc aux mains des héritiers du maître cinq cent vingt-neuf dirhams plus dix-sept parties de vingt-sept parties de dirham moins quatre neuvièmes d'une chose et deux tiers d'un neuvième d'une chose, ce qui est égal au double du legs qui est une chose. La moitié de cela est deux cent soixante-quatre dirhams plus vingt-deux parties de vingt-sept parties de dirham moins sept parties de vingt-sept parties d'une chose. Tu restaures cela par les sept parties et tu lui ajoutes la chose ; on a deux cent soixante-quatre dirhams et vingt-deux parties de vingt-sept parties de dirham égaux à une chose plus sept parties de vingt-sept parties d'une chose. Réduis cela et ramène-le à une seule chose en en soustrayant sept parties de trente-quatre [H-56v] parties ; une seule chose est donc égale à deux cent dix dirhams et cinq parties de dix-sept parties de dirham, ce qui est le legs[187].

Problème : Il affranchit, au cours de sa maladie, un esclave dont le prix est cent dirhams et fait don à un homme d'une esclave dont le prix est cinq cents dirhams et dont la dot[188] est cent dirhams ; et le donataire a cohabité avec elle.

D'après Abū Ḥanīfa, l'affranchissement est prioritaire ; que l'on commence par lui.

On l'infère ainsi : pose le prix de la femme esclave cinq cents dirhams comme il a été dit et le prix de l'esclave cent dirhams ; et pose le legs du propriétaire de la femme-esclave une chose autre. [A-31v] Il a déjà procédé à l'affranchissement de l'esclave dont le prix est cent dirhams. Mais il a légué au donataire une chose et a réduit la dot à cent dirhams moins un cinquième de chose ; les héritiers posséderont alors six cents dirhams

[187] Voir Note complémentaire [15].

[188] « Faire don » signifie alors, dans ce problème et dans les suivants, céder l'esclave à quelqu'un d'autre pour une somme inférieure à son prix ; la dot est alors diminuée dans la même proportion.

moins une chose moins un cinquième de chose, ce qui est [I-101] égal au double de cent dirhams et d'une chose. La moitié de cela est égale aux deux legs — c'est-à-dire trois cents moins trois cinquièmes de chose ; restaure les trois cents par trois cinquièmes de chose et ajoute à la chose une quantité égale ; on a trois cents dirhams égaux à une chose plus trois cinquièmes de chose plus cent dirhams. Retranche, pour le cent, cent de trois cents ; il reste deux cents dirhams égaux à une chose plus trois cinquièmes de chose. Réduis cela, tu trouves la chose cinq huitièmes de cela ; tu prends alors cinq huitièmes de deux cents, c'est-à-dire cent vingt-cinq ; c'est la chose et c'est le legs fait à celui à qui est léguée [H-57r] la femme-esclave[189].

Problème : Il affranchit un esclave dont le prix est cent dirhams, il a fait don d'une esclave dont le prix est cinq cents dirhams et dont la dot est cent dirhams à un homme qui a cohabité avec elle et le donateur a légué à un <autre> homme le tiers de son bien.

On l'infère ainsi : d'après Abū Ḥanīfa la règle est qu'on ne peut imposer au propriétaire de l'esclave-femme plus que le tiers, et le tiers par conséquent sera partagé entre eux[190] en deux moitiés.

On l'infère ainsi : pose le prix de l'esclave-femme cinq cents dirhams et le legs à partir de cela une chose ; il vient alors entre les mains des héritiers cinq cents dirhams moins une seule chose ; la dot est cent dirhams moins un cinquième de chose et ils posséderont alors six cents dirhams moins une chose et un cinquième de chose. Mais il a légué à un homme le tiers de son bien, ce qui est égal au legs de celui qui a la femme-esclave, c'est-à-dire une chose ; il reste aux mains des héritiers six cents moins deux choses moins un cinquième de chose, ce qui est égal au double de tous les legs, le prix de l'esclave et les deux choses léguées. La moitié de cela est égale aux legs, c'est-à-dire trois cents moins une chose moins un dixième de chose. Restaure cela par une chose et un dixième de chose ; on a trois cents égaux à trois choses et un dixième de chose et cent dirhams. Retranche cent pour le cent, il reste deux cents égaux à trois choses et un dixième de chose.

[189] Voir Note complémentaire [16].
[190] Entre les deux légataires.

Réduis par cela ; alors la chose à partir de cela est dix parties de trente et une parties de deux cents dirhams et le legs à partir des deux cents est selon cette grandeur, c'est-à-dire soixante-quatre [H-57v] dirhams plus seize parties de trente et une parties de dirham[191].

Problème : Il affranchit une femme-esclave dont le prix est cent dirhams ; il a fait don d'une femme-esclave dont le prix est cinq cents dirhams à un homme qui a cohabité avec elle ; la dot de celle-là est cent dirhams et le donateur a légué à un homme le quart de son bien. D'après Abū Ḥanīfa, on ne peut imposer au propriétaire de la femme-esclave plus du tiers [A-32r] et, à celui qui a le quart, on impose le quart.

On l'infère ainsi : la valeur de la femme-esclave est cinq cents dirhams et le legs à partir de cela [I-102] est une chose ; il reste cinq cents dirhams moins une chose. Or ils ont pris la dot, cent dirhams moins un cinquième de chose. Les héritiers posséderont alors six cents dirhams moins une chose et un cinquième de chose. Tu sépares ensuite le legs de celui qui a le quart, trois quarts [H-58r] d'une chose, car si le tiers est une chose, alors le quart en est les trois quarts ; il reste donc six cents dirhams moins une chose et trente-huit parties de quarante parties d'une chose, et ceci est égal à deux fois les legs. La moitié de cela est égale aux legs, c'est-à-dire trois cents dirhams moins trente-neuf parties de quarante parties d'une chose. Restaure cela par ces parties, on a trois cents dirhams égaux à cent dirhams plus deux choses et vingt-neuf parties de quarante parties d'une chose. Retranche cent pour le cent ; il reste deux cents dirhams égaux à deux choses plus vingt-neuf parties de quarante parties d'une chose. Réduis par cela, la chose sera égale à soixante-treize dirhams et quarante-trois parties de cent neuf parties de dirham[192].

[191] Comme dans le problème précédent, le prix de l'homme esclave est un legs. Les deux autres legs sont égaux. La somme des legs est donc $100 + x + x$. L'équation du problème s'écrit donc :

$$(500 - x) + \left(100 - \frac{x}{5}\right) - x = 2(100 + 2x) \text{ et } x = \frac{2000}{31} = 64 + \frac{16}{31}.$$

[192] Soit x le legs sur la valeur de la femme esclave ; le deuxième legs est alors $\frac{3}{4}x$. L'équation du problème s'écrit donc :

$$(500 - x) + \left(100 - \frac{x}{5}\right) - \frac{3}{4}x = 2\left(100 + x + \frac{3}{4}x\right),$$

d'où

$$300 - \frac{39}{40}x = 100 + \frac{7}{4}x \text{ et } x = 73 + \frac{43}{109}.$$

Chapitre sur la dot <d’une esclave> lors du retour <légal>

Un homme au cours de sa dernière maladie fait don d’une esclave à un autre homme, il n’a pas d’autre bien, il meurt ensuite ; le prix de la femme-esclave est trois cents dirhams et sa dot est cent dirhams ; le donataire cohabite avec elle.

On l’infère ainsi : pose le legs au donataire de la femme-esclave une chose, soustrais-la du don[193] ; il reste trois cents moins une chose. Il revient aux héritiers du donateur le tiers de cette différence[194] pour la dot — car la dot était le tiers du prix — ce qui est cent dirhams moins un tiers de chose. Les héritiers du donateur posséderont alors quatre cents moins une chose moins un tiers de chose, ce qui est égal au double du legs, qui est une chose, et ceci [H-58v] est deux choses. Restaure les quatre cents par une chose et un tiers de chose et ajoute-les aux deux choses ; on a donc quatre cents égaux à trois choses et un tiers d’une chose. La chose en est les trois dixièmes, c’est-à-dire cent vingt dirhams qui est le legs[195].

Problème : Si on dit qu’au cours de sa maladie il a fait don d’une femme-esclave dont le prix est trois cents et la dot est cent, qu’il a cohabité avec elle et qu’il meurt ensuite, on l’infère ainsi : pose le legs une chose et ce qui reste après soustraction trois cents moins une chose. Le donateur a cohabité avec elle, c’est donc de lui qu’est exigée la dot qui est le tiers du legs — car la dot est le tiers du prix —, c’est-à-dire un tiers d’une chose. Les héritiers du donateur posséderont alors trois cents moins une chose et un tiers, ce qui est le double du legs, qui est une chose, c’est-à-dire deux choses. [I-103] Restaure cela par une chose et un tiers de chose et ajoute-les aux deux choses ; on a trois cents [A-32v] égaux à trois choses plus un tiers de chose. La chose en est les trois dixièmes, c’est-à-dire quatre-vingt-dix dirhams ; c’est le legs[196].

[193] Bien que le mot soit « don », il s’agit en fait du prix de l’esclave.

[194] Litt. : ce qui reste de la soustraction.

[195] Soit x le legs fait sur le prix d’une femme esclave, 300 dirhams le prix et 100 dirhams la dot. Il revient aux héritiers $300 - x + 100 - \frac{x}{3}$, ce qui correspond au double du legs. L’équation du problème s’écrit donc : $400 - \frac{4}{3}x = 2x$, d’où $x = 120$.

Selon la loi, $\frac{x}{3}$ est la dot car le donataire a cohabité avec la femme esclave.

[196] Comme dans le problème précédent, le donataire paie $300 - x$ pour la femme esclave ; mais le donateur, ayant cohabité avec elle, doit verser pour la dot le tiers du legs. Soit x le legs ; l’équation du problème s’écrit : $300 - x - \frac{x}{3} = 2x$, d’où $x = 90$.

Si le problème reste le même et si la femme esclave a cohabité avec le donateur et le donataire, on l'infère ainsi : tu poses le legs une chose et la différence trois cents moins une chose ; il est exigé que le donateur [H-59r] donne au donataire un tiers d'une chose comme dot pour cohabitation et il est exigé du donataire le tiers de la différence[197], c'est-à-dire cent moins un tiers d'une chose ; alors les héritiers du donateur posséderont quatre cents moins une chose et deux tiers d'une chose, ce qui est égal au double du legs. Restaure les quatre cents par une chose et deux tiers d'une chose et ajoute-les aux deux choses ; on a quatre cents égaux à trois choses et deux tiers d'une chose. La chose en est trois parties de onze parties de quatre cents, c'est-à-dire cent neuf dirhams et une partie de onze parties de dirham ; c'est le legs. La différence est cent quatre-vingt-dix dirhams et dix parties de onze parties de dirham.

D'après Abū Ḥanīfa, on pose la chose un legs, et ce qui lui[198] revient par la dot aussi un legs[199].

Si le problème reste le même et si le donateur cohabite avec elle et lègue le tiers de son bien, alors, d'après Abū Ḥanīfa, le tiers sera partagé en deux moitiés entre eux[200].

On l'infère ainsi : pose le legs au donataire de la femme-esclave une chose, il reste trois cents moins une chose. Il a ensuite rendu la dot, c'est-à-dire un tiers de chose. Il reste donc au donateur trois cents moins une chose moins un tiers de chose. Son legs d'après Abū Ḥanīfa est donc une chose plus un tiers de chose, et dans le propos de l'autre[201], une chose. Tu donnes ensuite au légataire du tiers une quantité égale au legs du premier, c'est-à-dire une chose plus un tiers de chose ; il lui reste entre les mains trois cents moins deux choses et deux tiers de chose égaux au double des deux legs, qui sont deux choses et deux tiers de choses. La moitié de cela est égale aux deux legs, c'est-à-dire cent cinquante moins une chose et un tiers de chose. Restaure cela par une chose et un tiers de chose et ajoute-les aux deux legs ; il vient donc cent cinquante égaux à quatre choses, la chose en est le quart et elle est trente-sept et demie[202].

[197] Litt. : la soustraction.

[198] Il s'agit du donataire, comme le confirme le problème qui suit ; le legs tout entier est alors une chose plus un tiers de chose.

[199] Voir Note complémentaire [17].

[200] Entre celui qui reçoit l'esclave et le légataire.

[201] D'après le contexte, il s'agit vraisemblablement de l'avis d'Abū Yūsuf, disciple d'Abū Ḥanīfa.

[202] Voir Note complémentaire [18].

Problème : Si on dit qu'elle a cohabité avec le donataire et avec le donateur qui a légué le tiers de son bien, la règle d'après Abū Ḥanīfa est que tu poses le legs une chose ; il reste trois cents moins une chose ; la dot étant cent moins un tiers de chose, il lui vient entre les mains quatre cents dirhams moins une chose et un tiers de chose. Il a rendu [I-104] la dot, un tiers de chose, et a donné au légataire du tiers une quantité égale au legs du premier, une chose et un tiers de chose ; il reste quatre cents dirhams moins trois choses égaux au double des legs, qui sont deux choses [A-33r] et deux tiers de chose. Restaure cela par trois choses ; on a quatre cents égaux à huit choses et un tiers de chose. Réduis par cela, on a une seule chose égale à quarante-huit dirhams[203].

Problème : Si on dit que, au cours de sa dernière maladie, un homme fait don à un autre homme, d'une esclave dont le prix est trois cents dirhams et dont la dot est cent dirhams, si le donataire cohabite avec elle et si ensuite le donataire, au cours de sa maladie, [H-60r] fait don aussi de l'esclave au donateur qui cohabite avec elle, combien obtient-il pour elle et combien doit-il déduire ?

On l'infère ainsi : pose son prix trois cents dirhams et le legs une chose de cela ; il reste aux mains des héritiers du donateur trois cents moins une chose, et il vient aux mains du donataire une chose ; le donataire donne au donateur une partie d'une chose et il lui reste entre les mains une chose moins une partie d'une chose ; il lui a rendu cent moins un tiers de chose et a pris de la dot un tiers d'une chose moins un tiers d'une partie de chose. Il possédera une chose et deux tiers de chose moins cent dirhams moins une partie de chose moins un tiers d'une partie de chose, ce qui est égal au double d'une partie de chose et sa moitié est égale à une partie de chose, c'est-à-dire cinq sixièmes de chose moins cinquante dirhams moins deux

[203] Le donataire doit retourner $(300-x)+\left(100-\frac{x}{3}\right)$. Mais le donateur a cohabité avec la femme esclave ; il doit donc verser $\frac{x}{3}$. Le legs est donc $x+\frac{x}{3}$. Il reste pour les héritiers :

$$\left(400-x-\frac{x}{3}\right)-\frac{x}{3}-\left(x+\frac{x}{3}\right)=400-3x.$$

L'équation du problème s'écrit : $400-3x=2\left(2x+\frac{2}{3}x\right)$ et $x = 48$.

tiers d'une partie de chose. Restaure cela par deux tiers d'une partie de chose et par cinquante dirhams ; on a donc cinq sixièmes de chose égaux à une partie de chose plus deux tiers d'une partie de chose plus cinquante dirhams. Ramène cela à une partie de chose pour que tu la connaisses en prenant ses trois cinquièmes ; on a une partie de chose plus trente dirhams égaux à une demi-chose ; on a donc une demi-chose moins trente égaux à une partie de chose qui est le legs du donataire au donateur ; sache-le.

Reviens ensuite à ce qui reste aux mains du donateur, qui est trois cents moins une chose. Or il lui vient une partie de chose, c'est-à-dire une demi-chose moins trente dirhams ; il reste [H-60v] entre ses mains deux cent soixante-dix moins une demi-chose. Mais il a pris la dot, c'est-à-dire cent dirhams moins un tiers de chose et il a rendu la dot[204], c'est-à-dire le tiers de ce qui reste de la chose une fois enlevée la partie de chose, c'est-à-dire un sixième de chose plus dix dirhams. Il lui vient entre les mains trois cent soixante moins une chose, ce qui est égal au double de la chose plus la dot qu'il a rendue[205] ; la moitié de cela est cent quatre-vingts moins une demi-chose, qui sont égaux à la chose, [I-105] et la dot. Restaure cela par la moitié d'une chose et ajoute-la à la chose et à la dot ; on a cent quatre-vingts dirhams égaux à une chose plus une demi-chose plus la dot[206] qu'il a rendue, c'est-à-dire un sixième de chose plus dix dirhams. Tu négliges dix pour le dix, il reste cent soixante-dix dirhams égaux à une chose plus deux tiers de chose. Ramène-le à une seule chose pour que tu connaisses la chose en prenant ses trois cinquièmes ; on a cent deux égaux [A-33v] à la chose, qui est le legs du donateur au donataire.

Quant au legs du donataire au donateur, il est la moitié de cela moins trente dirhams, c'est-à-dire vingt et un dirhams[207]. Dieu le sait.

[204] Il s'agit d'une partie de la dot.

[205] *Id.*

[206] *Id.*

[207] Soit A le donateur et B le donataire. A fait à B un legs x sur les 300 dirhams, prix de la femme esclave. La dot de cette dernière est 100 dirhams. B doit donc retourner aux héritiers de A la somme $300 - x$, et aussi une « partie » de x, soit y. B possède donc $x - y$, mais il doit encore verser $100 - \frac{x}{3}$, somme sur laquelle il prélève $\frac{1}{3}(x - y)$. On a donc une première équation : $x - y - 100 + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}(x - y) = 2y$; d'où $y = \frac{x}{2} - 30$.

Il revient donc aux héritiers de A : $300 - x + y + \left(100 - \frac{x}{3}\right) - \frac{1}{3}(x - y)$, soit $360 - x$. Cette somme est égale à $2\left[x + \frac{1}{3}(x - y)\right] = 2\left(\frac{7}{6}x + 10\right)$. L'équation du problème s'écrit donc

$$180 - \frac{x}{2} = \frac{7}{6}x + 10 \text{ et } x = 102,\ y = 21.$$

Chapitre sur l'avance <du prix> au cours de la maladie

Si, au cours de sa maladie, un homme délivre trente dirhams pour une mesure de victuailles qui vaut dix dirhams, s'il meurt ensuite au cours de sa maladie, alors on rend[208] la mesure et on rend aux héritiers dix dirhams.

On l'infère ainsi : on rend* la mesure dont le prix est dix dirhams, alors [H-61r] il l'aurait favorisé de vingt dirhams. Le legs <à prendre> sur la faveur est une chose et les héritiers posséderont vingt moins une chose et la mesure, et tout cela est trente dirhams moins une chose égaux à deux choses, c'est-à-dire le double du legs. Restaure les trente par la chose et ajoute-la aux deux choses ; on a trente égaux à trois choses et la chose en est le tiers, c'est-à-dire dix dirhams, ce qu'il a obtenu de la faveur[209].

Problème : Si, au cours de sa maladie, il livre à un homme vingt dirhams pour une mesure qui vaut cinquante dirhams, s'il s'en dédit ensuite au cours de sa maladie et puis meurt, alors on rend quatre neuvièmes de la mesure et onze dirhams et un neuvième de dirham.

On l'infère ainsi : tu sais que le prix de la mesure est égal à deux fois et demie l'argent livré ; si donc il rend du capital une chose, il rend deux fois et demie celle-ci de la mesure. Tu poses la chose rendue de la mesure deux choses et demie que tu ajoutes à ce qui reste des vingts, c'est-à-dire vingt moins une chose ; les héritiers du défunt posséderont donc vingt dirhams plus une chose et une demi-chose dont la moitié est égale au legs, c'est-à-

[208] Il s'agit ici de rendre aux héritiers.

[209] A malade verse à B 30 dirhams pour une mesure d'aliments valant 10 dirhams. A meurt. Combien B doit-il rendre aux héritiers ? ou, autrement, combien A aurait-il dû céder à B?

Si B a donné la mesure, il reste 20 dirhams ; s'il les rend aux héritiers, ceux-ci lui doivent un legs x, tel que $10 + 20 - x = 2x$ et $x = 10$. En réalité, B aura rendu $20 - x = 10$.

dire dix dirhams plus trois quarts de chose. Mais ceci est égal au tiers du capital qui est seize dirhams plus deux tiers de dirham. Ôtes-en dix pour le dix, il reste six dirhams et deux tiers égaux à trois quarts de chose. Complète la chose en lui ajoutant son tiers et ajoute aux six [H-61v] et deux tiers, leur tiers, ce qui est deux dirhams et deux neuvièmes de dirham ; on a donc huit dirhams et huit [I-106] neuvièmes de dirham égaux à une chose. Examine donc combien les huit dirhams plus les huit neuvièmes sont du capital, c'est-à-dire vingt dirhams, tu trouves qu'ils en sont les quatre neuvièmes. Rends donc de la mesure ses quatre neuvièmes et rends cinq neuvièmes de vingt ; on a le prix de quatre neuvièmes de la mesure, vingt-deux dirhams et deux neuvièmes de dirham et les cinq neuvièmes de vingt, onze dirhams et un neuvième de dirham ; les héritiers posséderont alors trente-trois dirhams et un tiers de dirham, c'est-à-dire les deux tiers de cinquante [A-34r] dirhams[210]. Dieu le sait.

[210] A verse 20 dirhams à B pour une mesure valant 50 dirhams ; il se dédit au cours de sa maladie et meurt. B doit rembourser aux héritiers $\frac{4}{9}$ de la mesure et $\frac{5}{9}$ de 20 qui est l'avance faite, et ceci doit être les deux tiers de 50.

Si un legs x est fait sur 20 dirhams avancés à A, une somme $\left(2x+\frac{x}{2}\right)$ doit être prélevée sur le capital et versée aux héritiers. Il vient aux héritiers

$$20-x+\left(2x+\frac{x}{2}\right)=20+\frac{3x}{2},$$

dont la moitié est égale au tiers du capital :

$$10+\frac{3}{4}x=\frac{1}{3}\times 50 \text{ et } x=8+\frac{8}{9}.$$

On a alors $\frac{x}{20}=\frac{4}{9}$, d'où $20-x=20\times\frac{5}{9}=11+\frac{1}{9}$ et $2x+\frac{x}{2}=50+\frac{4}{9}=22+\frac{2}{9}$.

La somme rendue aux héritiers est $33+\frac{1}{3}$, qui est les deux tiers de 50 dirhams. B aurait donc remboursé beaucoup plus que l'avance reçue.