This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google books

https://books.google.com

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

No 10

Digitized by Google

epitet.
2 tomes en 1

Digitized by Google

Digitized by Google

AF 6/57

ARITHMÉTIQUE
UNIVERSELLE
DE NEWTON.

Institut Supérieur
de Philosophie
BIBLIOTHÈQUE
LES FONTAINES
par CHANTILLY (Oise)

Digitized by Google

Digitized by Google

ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE DE NEWTON,

TRADUITE

DU LATIN EN FRANÇAIS;

AVEC

DES NOTES EXPLICATIVES,

PAR NOEL BEAUDEUX.

COLLÈGE ST MICHEL ST ETIENNE IHS

TOME PREMIER.

Institut Supérieur de Philosophie BIBLIOTHÈQUE LES FONTAINES par CHANTILLY (Oise)

BIBLIOTHÈQUE S. J. Les Fontaines 60 - CHANTILLY

IHS SAINT MICHEL

A PARIS,

Chez BERNARD, Libraire, quai des Augustins, N°. 31.

An X. — 1802.

Institut Supérieur de Philosophie BIBLIOTHÈQUE LES FONTAINES par CHANTILLY (Oise)

Digitized by Google

Digitized by Google

DISCOURS
PRÉLIMINAIRE.

IL serait superflu de vanter le mérite d'un Ouvrage de Mathématiques sorti des mains du grand Newton. Son nom respectable suffit seul pour persuader que son livre renferme tous les trésors du génie. L'éloge de l'auteur, qui est dans toutes les bouches, n'est-il pas en même temps celui de tous ses ouvrages? Plus on l'étudie, plus on est frappé d'admiration pour ses inépuisables ressources. Quelle multitude, quelle variété de questions! Que d'élégance, que de profondeur dans ses moyens de les résoudre! on croirait qu'il se joue avec les difficultés. Tantôt il traite un même sujet de dix manières différentes; tantôt il fait des applications neuves et inattendues des principes les plus simples et les mieux connus; tantôt se créant de nouvelles méthodes, il s'avance par des sentiers où jamais on n'avait pénétré avant lui. Il sème par-tout l'instruction sur ses pas; mais moins prodigue de lumières, il dérobe souvent, à dessein, le flambeau qui le guide: alors ceux qui le suivent, ne tardent pas à le perdre de vue, et ce n'est qu'après l'avoir cherchée longtemps qu'on peut retrouver sa trace. Il n'appartenait sans doute qu'aux savans de l'admirer; mais leurs acclamations ont été si unanimes, que la multitude enfin les a entendues, et la France, aussi bien que l'Angleterre, ne le

Digitized by Google

nomme plus aujourd'hui que le Grand Newton. Son nom est devenu le symbole du génie des hautes sciences, comme ceux de Cicéron et de Démosthènes le sont de celui de l'éloquence. Les Anglais sont fiers, et avec raison, d'avoir vu naître parmi eux un si grand homme; ils lui ont prodigué les éloges les plus pompeux; et les Français, malgré leur rivalité, n'en ont point été jaloux. Newton, au contraire, a été loué et admiré parmi nous, plus peut-être que s'il eût été notre concitoyen. Au reste, jamais éloges n'eurent un plus digne objet; Newton doit être regardé comme un bienfaiteur de l'humanité entière, puisqu'il l'a éclairée. Sa main est parvenue à soulever un petit coin du voile, et nos yeux ont pu entrevoir quelques-unes de ces loix admirables qui régissent l'univers. Ce grand homme devait être frappé plus qu'un autre de ce magnifique spectacle; aussi ne prononçait-on jamais, en sa présence, le nom de la Divinité, sans qu'il se découvrît et s'inclinât profondément.

Il est probable que la Nature, toujours la même, a produit dans tous les temps des hommes de génie capables des plus grandes choses; mais les circonstances où ils sont nés, ne leur ont pas toujours permis de se développer; mille accidens ont pu les arrêter au milieu de leur course. Quelques gondoliers de Venise, trois ou quatre matelots Hollandais n'ont-ils pas été sur le point de ravir aux sciences, les immortelles découvertes de Descartes et de Leibnitz (1)? Et parmi ceux même

(1) Descartes avait pris à Embden un bateau pour le conduire lui et son domestique en Hollande; les mariniers formèrent le complot de le tuer pour

Digitized by Google

qui peuvent se livrer aux travaux où leur penchant les entraîne, combien en est-il qui, ne trouvant pas les circonstances préparées, ne font rien de ce qu'ils auraient pu faire? Il faut des hommes aux circonstances, mais il est encore plus vrai peut-être qu'il faut des circonstances aux hommes. Combien aujourd'hui cette vérité est frappante! Sans la terrible révolution qui vient d'ébranler le monde, verrions-nous dans le Héros, pacificateur de l'univers, la grande ame, et la fortune d'Alexandre, le génie réparateur de Charlemagne, de Henri IV et de Sully? La nature n'a rien fait en créant un grand homme, si elle ne l'entoure en même temps des circonstances propres à manifester ses talens. La conception la plus heureuse est condamnée à la stérilité, si les idées qui doivent la rendre féconde, ne sont pas nées encore. Sans la mesure exacte d'un degré de la terre, donnée antérieurement par Picard, Newton eût abandonné ses spéculations comme inexactes; et qui sait combien de temps nous aurions été privés de la sublime théorie de l'attraction! Il est probable du moins que la gloire de cette découverte

---

s'emparer de ses dépouilles : heureusement, ne le soupçonnant pas d'entendre le hollandais, ils tinrent leur conseil en sa présence. Aussitôt Descartes mettant l'épée à la main d'un air fier, menaça de percer le premier qui oserait s'approcher de lui, et cette fermeté le sauva.

Leibnitz allant de Venise à Mesola, fut surpris par une tempête; les matelots persuadés qu'un Allemand ne pouvait être qu'un hérétique, résolurent de le jeter à la mer, croyant par-là calmer la colère céleste. Leibnitz qui les entendit, tira sans affectation un chapelet de sa poche, et se mit à le réciter; son action désarma ces fanatiques.

Digitized by Google

eût été réservée à un autre. Les connaissances humaines sont liées les unes aux autres par une chaîne invisible, dont chaque anneau a sa place marquée; si un seul manque, ou est dérangé, tout l'ordre est détruit. Ce fut donc un bonheur singulier pour Newton, d'être né au milieu des circonstances les plus propres à développer tout son génie, d'avoir été précédé par une foule de grands hommes dont les travaux, pendant deux cents années, avaient créé ou ressuscité tous les genres de sciences.

Depuis le milieu du quinzième siècle, une grande fermentation agitait tous les esprits; toutes les nations de l'Europe paraissaient se réveiller à-la-fois d'un long engourdissement. Avant cette mémorable époque, on sait dans quelle stupide ignorance croupissaient tant de peuples, devenus aujourd'hui si célèbres par la culture des sciences et des lettres. L'astronomie alors n'était que l'art de deviner les événemens futurs; la géométrie, négligée ou méprisée, n'offrait plus qu'un enfantillage digne tout au plus d'amuser des esprits oisifs (2). La physique, entièrement fondée sur des qualités occultes, ou sur des hypothèses chimériques, avait oublié depuis long-temps, ou peut-être n'avait jamais bien su, que son seul, son véritable guide est l'expérience; la chimie ne cherchait que le grand-œuvre; la botanique n'existait pas; l'anatomie était presque regardée comme un crime (3); qu'on juge de ce que devait être la

(2) Les quarrés magiques et d'autres spéculations aussi stériles occupaient alors beaucoup les mathématiciens.

(3) Il faut pourtant convenir que cette prévention de la multitude, contre

Digitized by Google

médecine! La jurisprudence consistait à faire combattre l'accusé contre son accusateur; la géographie n'était qu'un assemblage de souvenirs confus ou de notions incertaines; les nations voisines, sans communications entre elles, étaient plus inconnues les unes aux autres que ne le sont aujourd'hui les peuples séparés par un diamètre de la terre (4); les Arabes, soumis à l'empire des Califes, étaient, à la vérité, un peu moins barbares; ils cultivaient avec quelques succès les mathématiques et l'astronomie; le Calife Almamon avait envoyé, dans les plaines de Sennaar, deux astronomes-géomètres pour y mesurer un degré du méridien terrestre; mais toutes leurs autres études se réduisaient à commenter les ouvrages de quelques philosophes grecs, et principalement ceux d'Aristote; et c'est d'eux enfin que nous avons hérité cette scholastique barbare, mille fois plus détestable qu'une ignorance absolue, puisqu'elle étouffa si long-temps la vraie philosophie.

---

les premiers restaurateurs de l'anatomie, pouvait paraître excusable. Les plus célèbres anatomistes de l'antiquité, Hérophile et Erasistrate disséquaient tout-vifs des criminels qu'on leur livrait; et lorsque Berenger de Carpi voulut recommencer les expériences anatomiques, ses envieux ne manquèrent pas de publier, qu'il imitait ces anciens anatomistes, en disséquant des hommes vivans. Malheureusement Vesale qui le suivit de près, donna une apparence de vérité à ces calomnies; il ouvrit le corps d'un gendarme espagnol qu'il croyait mort et qui ne l'était pas. Il fut condamné par l'Inquisition, à faire le voyage de la Terre-Sainte, et à son retour, il mourut de misère dans l'île de Zante.

(4) Jusques vers le milieu du quinzième siècle, on connaissait très-mal l'étendue de la Méditerranée. Gemma-le-Frison qui passait pour habile astronome, dans un livre qu'il publia en 1530, donne 53 degrés pour la différence en longitude entre Tolède et le Grand-Caire : c'est-à-dire 18 degrés de trop.

Digitized by Google

Arrivèrent enfin ces trois grandes découvertes qui devaient changer la face de la terre, je veux dire celles de l'imprimerie, de la poudre à canon, et d'une quatrième partie du globe. Esquissons rapidement la révolution qui s'opéra dans l'esprit humain par rapport aux sciences mathématiques. C'est l'immortel Copernic qui donne le signal. Après un demi-siècle de méditations, il parvient à découvrir le véritable systême du monde, et à l'établir sur les bases les plus solides; il sent le besoin de quelques preuves nouvelles, mais le temps seul peut les révéler, et il ose se les promettre. S'il était vrai, lui objectait-on, que toutes les planètes tournent autour du Soleil, Vénus aurait des phases que nous devrions appercevoir; *aussi les appercevrez-vous*, répondait-il, *lorsque vous aurez trouvé l'art de perfectionner vos yeux.* Les savantes et nombreuses observations de Tico-Brahé procurent bientôt à son disciple, le savant et ingénieux Képler, le bonheur de rencontrer les loix fondamentales de l'astronomie, ces loix que la plus profonde géométrie, et deux siècles d'observations ont mises aujourd'hui au-dessus des atteintes même du doute (5).

---

(5) Il est bien étonnant que la même tête qui a pu découvrir ces sublimes loix, ait pu également enfanter les plus singulières chimères. Képler voulait savoir pourquoi les planètes sont au nombre de sept; pourquoi leurs orbites avaient les dimensions que Copernic leur avait assignées par ses observations; et quelle était enfin la cause de leurs révolutions. Euclide avait démontré qu'il n'y a que cinq corps réguliers; c'en fut assez pour que Képler imaginât une analogie mystérieuse entre ces cinq corps et les sphères des planètes. Il crut qu'un cube inscrit dans la sphère de Saturne, toucherait par ses six pans la sphère de Jupiter; et que les quatre autres corps réguliers avaient de semblables rapports avec les sphères des autres planètes. Il crut trouver une ressemblance entre les distances

Digitized by Google

Le grand Galilée découvre les loix de l'accélération des corps graves, les quatre satellites de Jupiter, et confirme par une nouvelle preuve le systême de Copernic, en appercevant le premier les phases de Vénus; il reconnaît aussi la pesanteur de l'air, qu'il tâche de comparer à celle de l'eau; mais une connaissance plus approfondie de ce phénomène était réservée à son disciple Toricelli et à Pascal (6). François Bacon, sans faire lui-même aucune découverte importante, trace, d'une main guidée par le plus pénétrant génie, la route

---

moyennes des planètes au soleil et les intervalles des sept tons de la musique. Pour expliquer le mouvement des planètes autour du soleil, il suppose dans ces corps célestes une vertu semblable à celle de l'aimant; et comme deux aimans s'attirent par les pôles opposés et se repoussent par les pôles semblables, Képler explique par ce principe le mouvement des planètes vers le périhélie, et leur retour à l'aphélie, en supposant que, dans le premier cas, la planète présente au soleil son côté ami, et dans le second, son côté ennemi. Cette dernière idée ne ressemble point aux précédentes, elle est certainement très-ingénieuse, et j'ignore pourquoi Voltaire, *dans ses Élémens de la Philosophie de Newton*, la trouve si ridicule. Je sais bien que la géométrie fait voir sa fausseté, en démontrant que, si la planète parvenue en périhélie était repoussée par le soleil, elle s'en éloignerait par une courbe dont la convexité serait tournée vers cet astre, ce qui rendrait impossible son mouvement périodique; mais du temps de Képler on ne savait pas calculer le mouvement dans les courbes, et il n'est pas étonnant qu'il n'ait pu deviner de si loin, la seule objection raisonnable qu'on pût faire à son hypothèse. Pour moi, si j'osais dire ma pensée, je serais porté à croire que cette idée de Képler n'a pas été inutile à Newton.

(6) Galilée déduisit encore de sa théorie de la chûte des corps graves ce beau théorême : *Que dans un cercle vertical, le temps de la chûte par une corde inclinée à l'horizon, est plus grand que le temps de la chûte par l'arc de cette corde;* mais il eut tort d'en conclure, qu'entre deux points donnés dans une ligne non-verticale, la brachystochrone, ou la ligne de plus vîte descente est un arc de cercle; car Jean Bernouilli a démontré depuis, que c'est un arc de cycloïde.

Digitized by Google

de toutes les découvertes. Descartes, qui eût été peut-être le plus grand philosophe de la terre, s'il se fût moins abandonné à son imagination, Descartes, fatigué de voir les hommes courbés depuis si long-temps sous le poids de l'autorité, secoue avec violence toutes leurs chaînes, les brise, et donne à leur raison une direction différente. Dans les circonstances où il se trouve, il croit qu'il faut étonner, par des coups d'audace, des esprits façonnés au joug d'un ancien esclavage; il détruit les vieux systêmes, il en crée un nouveau, et si le sien n'est plus regardé aujourd'hui que comme une chimère, on ne lui en a pas moins l'obligation très-réelle d'avoir donné une grande et salutaire impulsion. Mais il a laissé, dans les mathématiques, des monumens plus durables de sa gloire. Le premier, il imagina de déterminer la nature des courbes à double courbure par deux équations variables: que ne doit pas la haute géométrie à son ingénieux artifice des indéterminées? Sa *dioptrique* est la première et une des plus brillantes applications de l'analyse à la physique; mais sa plus importante découverte est l'application de l'algèbre à la géométrie des courbes; idée, dit d'Alembert, la plus vaste, la plus féconde qu'ait jamais conçue l'esprit humain. Enfin, le célèbre Huygens découvre l'anneau de Saturne, et un satellite de cette planète. Digne rival des anciens, il parvient par la synthèse à sa profonde théorie des forces centrales, à celle des développées (7),

(7) Huygens a découvert la loi des forces centrales dans le cercle, ainsi que celles des développées, et c'est en réunissant ces deux théories, que Newton

et

Digitized by Google

et Newton paraît sur la scène des sciences. Il était alors âgé de ving-un ans (8). Parcourir les Élémens d'Euclide et les comprendre ne furent pour lui qu'une même chose. Il crut que la Géométrie de Descartes lui présenterait des objets plus dignes de fixer son attention; il l'étudia soigneusement. Les ouvrages de Wallis, l'optique de Képler partagèrent aussi ses momens. Mais en étudiant les pensées des autres, son génie inventeur

---

est parvenu à en déduire la loi générale des forces centrales dans une courbe quelconque. Au reste, quoiqu'il n'y eût plus, en apparence, qu'un pas pour arriver des théorêmes particuliers de Huygens au théorême général que Newton a trouvé, qu'on n'imagine pas qu'il fût aisé de le faire. Une conséquence nouvelle tirée d'un principe connu, est l'œuvre d'un grand génie. Que Snellius ait connu la loi de la réfraction des rayons solaires, lorsqu'ils passent d'un milieu dans un autre, d'une densité différente, cette observation aurait pu rester stérile pendant des siècles; Descartes s'en empara, et bientôt elle devint la base d'une science nouvelle et intéressante. Qu'on ne croie pas cependant, que je partage en aucune manière l'opinion de ceux qui prétendent, que Descartes est redevable à Snellius de cette découverte, qui n'était au fond qu'une belle expérience : cette opinion n'est fondée que sur des ouï-dire; mais le fût-elle sur la vérité, cela ôterait bien peu de chose à la gloire de Descartes. Le hasard peut offrir à des yeux vulgaires un fait important, l'homme de génie seul peut en tirer un parti avantageux, et jusqu'à ce qu'il se présente, le domaine des sciences n'est enrichi que d'un fait nouveau. La propriété qu'a l'aimant d'attirer le fer, était connue des anciens : long-temps après on s'apperçut de sa tendance vers le Nord; mais combien s'est-il écoulé de siècles, avant qu'on imaginât d'en faire un des plus précieux instrumens de la navigation? De tout temps les hommes ont vu la fumée s'élever dans l'air : toujours ils ont desiré de s'y élever eux-mêmes; la fable de Dédale et d'Icare, mille tentatives infructueuses faites à différentes époques, en sont un assez bon témoignage; et pourtant ce n'est que de nos jours, et avec le seul secours de la fumée, que Mongolfier leur a révélé l'art de traverser l'athmosphère.

(8) Il naquit le 15 décembre 1642, à Volstrope, dans la province de Lincoln. Il avait étudié à Grantham et à Cambridge.

Digitized by Google

répandait par-tout des vues nouvelles. Il ne recevait en quelque sorte de Descartes, de Képler ou de Wallis, que le texte de ses méditations. C'est ainsi, qu'en cherchant à perfectionner la Méthode d'Interpolation de ce dernier, il trouva celle des séries par l'extraction des racines, et par la division.

La Géométrie de Descartes lui fournit l'idée de son *Arithmétique Universelle*. Dans cet ouvrage il perfectionne plusieurs règles inventées par Descartes, et en imagine beaucoup d'autres. Descartes avait enseigné que les racines commensurables d'une équation se trouvent parmi les diviseurs de son dernier terme; mais il fallait en essayer un grand nombre, et c'est un travail fastidieux. Newton apprit à réduire considérablement les essais, et donna une belle règle pour trouver les diviseurs commensurables de deux dimensions. Descartes avait reconnu par les signes d'une équation, le nombre de ses racines positives et celui de ses racines négatives, mais il limite lui-même sa règle aux équations qui ne contiennent point d'imaginaires. Newton fit voir qu'elle est générale, en démontrant que parmi les imaginaires il en est qui doivent être classées parmi les racines positives, et d'autres parmi les négatives; et il donna en même temps une méthode pour reconnaître le nombre des racines imaginaires qu'une équation peut contenir. Sa règle échoue dans plusieurs cas; mais elle mit du moins sur la voie le célèbre Mac-Laurin, qui en a trouvé une qui réussit bien plus souvent. Descartes avait donné la méthode de déterminer les limites des racines des équations qu'on peut résoudre exactement; Newton en donna une pour

Digitized by Google

trouver les limites des racines d'une équation quelconque. Enfin, Descartes avait construit, par le moyen des sections coniques, les équations du troisième et du quatrième degrés; Newton suivit son exemple, simplifia sa méthode en plusieurs points, et imagina lui-même de construire ces équations de la manière la plus élégante par la combinaison de la conchoïde avec la ligne droite et le cercle. Je ne finirais pas, si je voulais faire le détail de toutes les choses neuves et intéressantes qu'il a répandues dans son *Arithmétique Universelle*. On pensera peut-être que j'en ai déjà trop dit sur cet article; mais on voudra bien considérer que c'est le traducteur de cet ouvrage qui parle, et on ne trouvera plus étrange qu'il en ait fait une mention un peu détaillée.

Suivons, s'il est possible, Newton dans ses progrès. L'optique de Képler et celle de Barrow lui donnèrent les premiers élémens de cette science; mais bientôt elle changea de forme dans ses mains. Il ne tarda pas à s'appercevoir que les différens rayons de la lumière sont doués d'une réfrangibilité différente; et cette découverte importante fit une révolution dans la science (9). L'arc-en-ciel, ce phénomène si ravissant, et qui

(9) Si l'on fait passer un rayon de lumière à travers un petit trou fait à la fenêtre d'une chambre obscure, et qu'on le reçoive sur un prisme, il peindra toutes les couleurs de l'arc-en-ciel dans toute leur vivacité, sur un papier blanc, savoir le rouge, l'orangé, le jaune, le verd, le bleu, l'indigo et le violet. Chacun de ces rayons colorés conserve toutes les propriétés de la lumière, il se propage en ligne droite, il se réfléchit sur la surface d'un miroir, il se rompt en passant à travers une lentille, mais il conserve toujours sa même couleur, et ne se décompose plus. Si on rassemble ensuite tous ces rayons au foyer d'un verre convexe, leur réunion compose une lumière blanche fort éclatante; mais comme

Digitized by Google

exciterait bien plus notre admiration s'il frappait moins souvent nos yeux, était pour les anciens un problême inexplicable; *Antonio de Dominis* en avait ébauché la théorie, Descartes l'avait considérablement perfectionnée; mais Newton, par ses nouvelles expériences, fut le premier en état d'en donner une explication complète et satisfaisante. Il fut même conduit bientôt à une idée plus utile encore, je veux dire celle du télescope de réflexion. Je sais bien que la première conception de cet instrument ne lui appartient pas, elle est due au P. Mersenne; et le savant Grégori d'Abeerden eut aussi avant lui la même idée. Mais ni Mersenne, ni Grégori ne l'exécutèrent; l'un n'en fit pas même la tentative, parce qu'il en fut détourné par les vives objections de Descartes; l'autre n'étant pas secondé par d'habiles artistes, eut le malheur

---

ils se séparent de nouveau au-delà du foyer, ils reprennent leur première couleur. Telle est l'expérience de Newton, la plus admirable, je crois qu'on ait jamais faite sur la lumière. Quelques auteurs ont prétendu réduire à quatre les sept couleurs qu'il attribue à la lumière; ils se fondaient sur des expériences où l'on n'apperçoit réellement que quatre couleurs, et ils en concluaient que le verd, l'orangé et l'indigo ne sont point des couleurs primitives, mais accidentelles, produites par le mélange de deux couleurs voisines. Mais ces expériences sont trompeuses. En effet, si on reçoit sur un prisme une lumière très-faible, et que l'image soit peu étendue, on n'appercevra réellement que quatre couleurs; qu'on suppose l'image encore plus resserrée, ou la lumière plus faible, et on n'en distinguera plus aucune, on ne verra plus qu'un spectre d'un blanc sale ou rougeâtre. C'est ainsi que le C^n. Rochon en recevant sur un prisme armé d'une forte lunette, la lumière d'une étoile, montre distinctement quatre couleurs, le rouge, le jaune, le bleu et le violet, et qu'en employant une lunette plus faible, il fait disparaître le jaune et le bleu qui sont remplacés par le verd. Cette belle expérience en confirmant la théorie de Newton, nous révèle en même temps une vérité bien intéressante, c'est que la lumière des étoiles est de même nature que celle du soleil.

Digitized by Google

d'échouer; tous deux ne concevaient que confusément l'utilité de ce télescope; tous deux ils n'avaient en vue que de remédier à la perte que fait la lumière en traversant le verre d'un télescope dioptrique. Newton avait appris par ses propres découvertes, que quelque forme, ou sphérique, ou hyperbolique, qu'on donnât aux lentilles, on ne pourrait détruire les iris, puisqu'il était impossible de réunir dans un même foyer des rayons différemment réfrangibles (10). Il sentait donc que le seul moyen de parer à ces inconvéniens, était le télescope de réflexion; et malgré les difficultés d'une première exécution, l'instrument fut construit par ses soins, et répondit aux vues de son auteur. Lorsque Mercator publia, en 1668, sa Méthode

(10) Newton a prouvé que la dispersion des rayons, provenant de la forme sphérique de la lentille, est à la dispersion de ces mêmes rayons, causée par la différence de leur réfrangibilité, comme 1 est à 1200; ensorte que dans deux lunettes, l'une à lentille sphérique, l'autre à lentille hyperbolique, les dispersions des rayons seraient représentées respectivement par les nombres 1200 et 1199. On voit donc que l'on gagnerait bien peu de chose, en donnant aux lentilles une forme hyperbolique, tant qu'on laisserait subsister l'erreur bien plus considérable causée par la différence de réfrangibilité. Cette erreur est si grande, que dans une lunette de vingt-sept pieds, les rayons rouges se réunissent à un foyer éloigné de près d'un pied du foyer des rayons verds. Enfin les efforts réunis de quelques grands géomètres et des plus habiles artistes du dix-huitième siècle, à la tête desquels on doit mettre Euler et Dolon, sont parvenus, par l'invention des lunettes achromatiques, à faire disparaître ce défaut capital. On a fait encore quelques nouveaux progrès dans la théorie de la lumière. Madame Duchâtelet conjectura la première, que les couleurs différentes des rayons, devaient être les indices de différens degrés de chaleur; et cette opinion a été confirmée depuis, par les expériences du C^n. Rochon. Enfin Herschell vient de prouver que le foyer de la chaleur se trouve hors du spectre coloré, un peu au-delà du rayon rouge, ce qui le porte à affirmer, qu'il existe un rayon sans couleur, et par conséquent invisible, mais doué d'un degré de chaleur plus considérable qu'aucun de ceux qu'on apperçoit.

Digitized by Google

de quarrer l'espace hyperbolique par le moyen des logarithmes, il y avait déjà long-temps que Newton s'étoit créé une théorie générale pour quarrer, soit rigoureusement, soit au moins par approximation, toute espèce de courbes, les rectifier, trouver leurs centres de gravité, leurs solides de révolution, et les surfaces de ces solides (11). Enfin, ce fut dans l'année 1676

---

(11) Voici ce qu'on trouve dans une lettre de Barrow à Collins, sous la date du 20 Juillet 1669.

A friend of mine hire, that hath an excellent genius to these things, brought me the other day, some papers, wherein he hath set down methods of calulating the dimensions of magnitudes, like that of M. Mercator, but very general, as also of resolving equations, wich, I suppose, will please you, and I shall send you them the next.

Un de mes amis (*et cet ami, c'était Newton*) qui demeure ici, et qui a un génie merveilleux pour toutes ces choses, m'a envoyé dernièrement quelques papiers dans lesquels se trouve une méthode de calculer les dimensions des grandeurs, qui ressemble à celle de Mr Mercator, mais de la plus grande généralité; il y a également des méthodes de résoudre les équations; je vous enverrai le tout incessamment, et j'espère que cela vous fera plaisir.

L'ouvrage célèbre dont il est principalement question ici, est connu sous ce titre : *Methodus fluxionum et serierum infinitarum.* Newton y enseigne d'abord l'art d'approcher aussi près que l'on veut de la valeur des racines des équations; moyen précieux, et qui supplée si heureusement à une méthode générale de résoudre rigoureusement les équations des degrés supérieurs; ensuite il y développe avec assez d'étendue, les premiers principes de sa théorie des fluxions, et l'applique à la géométrie des courbes. Cette découverte immortelle, et qui forme un des plus beaux titres de la gloire de ce grand géomètre, se trouve encore mieux expliquée dans son Traité *de quadraturâ curvarum.* Et comme il n'est rien de tout ce qui peut l'avoir conduit à une si belle invention, qui ne doive exciter le plus grand intérêt, je vais citer les paroles où Newton rend compte lui-même de ses premières pensées : *Considerando igitur quod quantitates æqualibus temporibus crescentes, et crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores,*

Digitized by Google

qu'il parvint à démontrer ce beau théorême de Képler : *Que les planètes décrivent des ellipses autour du Soleil qui est à un de leurs foyers, et que leurs rayons vecteurs parcourent des aires proportionnelles au temps.* Il fit voir, que si on suppose une planète attirée vers un centre, en raison réciproque du quarré de sa distance, elle décrira autour de ce centre, comme foyer, une ellipse, et que son rayon vecteur parcourra des aires proportionnelles au temps. Cette sublime hypothèse, si heureusement appliquée, devint la base du livre *des Principes.* Mais je dois entrer dans quelques détails sur une époque si importante à la gloire de Newton et aux sciences. Nulle part je n'en trouve une histoire qui porte un plus grand caractère de vérité, que dans Pemberton; j'en traduirai ici tout ce qu'il en rapporte (12). « Newton avait abandonné Cam-
» bridge, désolée par la peste en 1666, et il s'était retiré à la
» campagne. Un jour qu'il était assis dans un jardin, il tomba
» dans la rêverie sur le pouvoir de la gravité; il considéra
» que cette force n'éprouve aucune diminution sensible ni sur
» le haut des édifices, ni sur le sommet des plus hautes mon-
» tagnes; et de là il lui parut raisonnable de conclure, que sa
» puissance s'étendait beaucoup plus loin qu'on ne l'imaginait

---

methodum quærebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum quibus generantur, et has motuum vel incrementorum velocitates nominando fluxiones, et quantitates genitas nominando fluentes, incidi paulatim annis 1665 *et* 1666 *in methodum fluxionum quâ hic usus sum in quadraturâ curvarum.*

(12) Voyez la préface de son ouvrage intitulé : *A view of sir Isaac Newton's philosophy.*

Digitized by Google

» communément; eh! pourquoi, se dit-il en lui-même, ne
» s'étendrait-elle pas jusqu'à la lune? Et si cela est ainsi, le
» mouvement de cette planète doit en ressentir l'influence;
» peut-être est-ce par ce pouvoir qu'elle est retenue dans son
» orbite; et quoiqu'il ne paraisse pas diminuer à quelque dis-
» tance que nous le considérions, par rapport au centre de la
» terre, il est probable qu'à un éloignement tel que celui de
» la lune, il doit être considérablement affaibli. Pour estimer
» le degré de cet affaiblissement, il imagina que si la lune est
» retenue dans son orbite par la force de la gravité, cette
» même force devait aussi retenir les planètes principales autour
» du soleil; et en comparant leurs révolutions périodiques
» avec leurs distances à cet astre, il trouva que la gravité
» devait diminuer en raison doublée de l'accroissement de la
» distance, en supposant que les planètes se meuvent dans des
» cercles concentriques au soleil. En effet, la plus grande
» partie des orbites diffère peu du cercle. Il chercha donc, si
» la gravité agissant selon la même loi sur la lune, ne serait
» pas suffisante pour la retenir dans son orbite. Mais étant
» privé de livres, il prit pour base de ses calculs l'estimation
» qui était en usage parmi les géographes et les marins Anglais,
» avant que Norvood eût donné une mesure plus exacte de la
» terre, c'est-à-dire qu'il donna 60 milles anglais à un degré
» terrestre, au lieu de 69 $\frac{1}{2}$ milles. Une erreur si considérable
» dans les bases de son calcul, lui fit conclure que la lune
» n'était pas soumise à la seule action de la gravité; et dès-
» lors il abandonna ses spéculations sur ce sujet. Quelques
» années après il reçut du docteur Hook une lettre qui
» l'engageait

Digitized by Google

» l'engageait à rechercher quelle ligne décrit un corps qui tombe
» d'un lieu élevé. Or, un tel corps partageant nécessairement
» le mouvement de la terre autour de son axe, doit être con-
» sidéré comme projeté dans un sens, tandis qu'il est précipité
» dans un autre vers le centre de ce globe. Ces recherches le
» ramenèrent à ses premières pensées sur la lune. Et Picard,
» en France, ayant tout récemment mésuré un degré du mé-
» ridien terrestre, Newton se servit de cette mesure, et vit
» que la gravité seule agissait sur la lune, qu'elle suffisait
» seule pour la retenir dans son orbite, et que par conséquent
» la puissance de la gravité allait en diminuant selon la loi
» qu'il lui avait d'abord soupçonnée. Sur ce principe, il trouva
» que la ligne que décrit un corps en tombant, est une ellipse
» qui a un de ses foyers au centre de la terre; et comme les
» orbites des planètes principales sont aussi des ellipses, il eut
» la satisfaction de voir qu'une spéculation de pure curiosité
» pouvait s'appliquer à des objets plus importans. Il se contenta
» pourtant de composer quelques propositions relatives au mou-
» vement des planètes autour du soleil; et ce ne fut qu'une
» douzaine d'années après, que le docteur Halley, dans une
» visite qu'il fit à Newton, l'excita à reprendre de nouveau
» ce sujet. Alors il commença à travailler à son livre *des*
» *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle.*
» Cet ouvrage, si plein de profondes découvertes, fut achevé
» dans l'espace de dix-huit mois, sans autres matériaux que
» le peu de propositions dont nous avons parlé ».

Après avoir tracé le tableau raccourci des immenses travaux de ce grand philosophe, je ne dois pas omettre ses opinions

Digitized by Google

sur quelques géomètres et sur leurs ouvrages. Il n'approuvait pas qu'on traitât les sujets géométriques par les calculs de l'algèbre; il regrettait d'avoir souvent lui-même résolu des questions purement géométriques, par les méthodes de l'analyse, et il ne donna le titre d'*Arithmétique Universelle* à son *Traité d'Algèbre*, que par opposition au titre peu réfléchi de *Géométrie* que Descartes avait donné au sien. Il ne cessait de recommander le style et la manière de Huygens; il le regardait comme le meilleur modèle dans l'art d'écrire sur les mathématiques, et comme le plus judicieux imitateur des anciens; il ne tarissait pas sur les éloges qu'il donnait au goût de ceux-ci, à la forme heureuse de leurs démonstrations; il faisait le plus grand cas du livre d'Apollonius *de sectionis ratione*, où l'on peut puiser l'idée la plus claire de leur analyse; il se reprochait de ne les avoir pas suivis plus scrupuleusement, et il ne parlait qu'avec regret, de la fausse route qu'il avait prise au commencement de sa carrière mathématique, en s'appliquant à l'étude des ouvrages de Descartes, avant d'avoir donné aux *Élémens* d'Euclide toute l'attention que mérite un si excellent écrivain (13). Son admiration pour les anciens allait si loin, qu'il lui arrivait souvent de dire, que, si tous leurs ouvrages nous étaient parvenus, il ne serait resté aux modernes aucunes découvertes à faire, dans aucune branche des mathé-

(13) C'est Pemberton qui prête à Newton toutes ces opinions et ces jugemens; et quoiqu'on ne puisse guère douter de sa véracité, il est bon pourtant de faire observer, que le seul géomètre moderne qui soit cité dans l'*Arithmétique universelle*, est Descartes, qu'il l'est plusieurs fois, et toujours d'une manière honorable.

Digitized by Google

matiques (14). Un tel langage a bien de quoi surprendre dans la bouche de Newton. Il fallait que son extrême modestie l'aveuglât, ou il devait sentir intérieurement que personne n'y aurait perdu plus que lui (15). Plus de trente ans avant sa

(14) Voyez la préface de Coste à la tête de sa traduction de la *Chronologie de Newton*.

(16) Je ne dois pas dissimuler que ce sentiment de préférence que Newton accorde par-tout aux anciens sur les modernes, a trouvé d'illustres adversaires, et a été combattu par de grands exemples. Je vais rapporter les raisons qu'allègue pour la défense de l'analyse mathématique, un de nos plus célèbres géomètres, d'Alembert. Voici comment il s'exprime dans ses *Élémens de Philosophie*.

La géométrie des courbes, dit-il, demande nécessairement l'usage de l'algèbre. Ainsi le premier pas qu'on doit faire dans cette science, est l'explication des principes sur lesquels est appuyée l'application de l'algèbre à la géométrie, c'est par où l'on doit commencer au sortir des élémens, parce que c'est alors que l'algèbre commence à rendre les démonstrations et les solutions plus faciles. Nous n'ignorons pas néanmoins, qu'il y a plusieurs recherches dans la géométrie des courbes, où l'on peut absolument se passer de l'analyse algébrique; nous n'ignorons pas avec combien d'éloges, de très-grands géomètres ont parlé de l'utilité qu'on peut tirer de la méthode des anciens, dans ces recherches, pour donner plus d'exercice à l'esprit, et plus de rigueur aux démonstrations. Mais leurs raisons ne nous paraissent pas fort solides. En premier lieu, n'y a-t-il pas en géométrie, assez de difficultés naturelles à vaincre, pour ne pas en faire naître d'inutiles? A quoi bon user toutes les forces de son esprit sur des connaissances qu'on peut acquérir avec moins de peines? Les propriétés de la spirale que de très-grands mathématiciens n'ont pu suivre dans Archimède, se démontrent d'un trait de plume par l'analyse; serait-il raisonnable de consumer un temps précieux, à suivre avec fatigue dans Archimède, ce qu'il est si facile d'apprendre ailleurs? A l'égard de l'avantage qu'on veut donner aux démonstrations faites à la manière des anciens, d'être plus rigoureuses que les démonstrations algébriques, cette prétention ne nous paraît guère mieux établie. La démonstration algébrique, il est vrai, a cela de particulier, que quand on aura désigné toutes les lignes des figures par des lettres, on pourra faire, au moyen de ces lettres, beaucoup d'opérations et de combinaisons, sans songer à la figure, sans même l'avoir devant les yeux; mais ces opérations, même toutes machinales qu'elles sont, ou plutôt parce qu'elles sont purement machinales, ont

Digitized by Google

mort il avait entièrement renoncé aux mathématiques; il se contentait de jouir en paix de la considération universelle, méritée par tant de grands travaux. Un silence d'une si longue durée avait produit sur l'envie le même effet que le tombeau; il avait cessé de travailler, c'était pour elle comme s'il eût cessé de vivre; aussi goûta-t-il, sur la fin de sa longue carrière, le bonheur bien rare de ne compter plus, parmi ses compatriotes, que des admirateurs ou des disciples. Jusqu'à l'âge de quatre-vingts ans il conserva une santé parfaite, et ce ne fut qu'à cette époque de sa vie qu'il ressentit les premières atteintes d'un mal qui tourmenta ses dernières années. Pendant les cinq

---

l'avantage de soulager l'esprit dans des recherches souvent très-pénibles, et pour lesquelles il a besoin de tous ses efforts. L'analyse lui ménage, autant qu'il est possible, des instans nécessaires de délassement et de repos; il suffit de savoir que les principes du calcul sont certains; la main calcule en toute sûreté, et parvient enfin à un résultat auquel, sans ce secours, on ne serait point parvenu, ou auquel on ne serait arrivé qu'avec beaucoup de peines. Mais il ne tiendra qu'à l'analyste de donner ensuite à sa démonstration, ou à sa solution, la rigueur prétendue qu'on croit lui manquer; il lui suffira pour cela de traduire cette démonstration dans le langage des anciens. Nous conviendrons sans peine que l'usage mécanique et trop fréquent d'une analyse facile et peu nécessaire, rendra l'esprit paresseux, prompt à se rebuter par les obstacles, et par-là moins propre aux découvertes; mais nous ne conviendrons jamais que l'analyse rende les démonstrations moins rigoureuses. On peut regarder la méthode des anciens comme une route tortueuse, difficile et embarrassée, dans laquelle le géomètre exerce et fatigue ses lecteurs; l'analyste, placé à un point de vue plus élevé, voit cette route d'un coup-d'œil; il ne tient qu'à lui d'en parcourir tous les sentiers, d'y conduire les autres, et de les y arrêter aussi long-temps qu'il veut. Enfin (et c'est ici le plus grand avantage de la méthode analytique) combien de questions en géométrie, auxquelles cette méthode seule peut atteindre? Qu'on essaie d'employer à des recherches sur l'astronomie physique, la méthode des anciens, on sentira bientôt l'impossibilité d'y réussir.

Digitized by Google

ans qu'il vécut encore, il jouit pourtant d'assez longs intervalles de tranquillité, qu'il dut sans doute en grande partie, à un régime extrêmement modéré. Il ne souffrit jamais de grandes douleurs, excepté les vingt-quatre derniers jours de sa vie. On s'apperçut alors qu'il était travaillé par les douleurs de la pierre, et on ne se flatta plus de pouvoir le conserver long-temps (16). Lorsque les accès étaient si violens que son visage en était baigné de sueur, jamais il ne laissa échapper une plainte, jamais il ne montra la moindre impatience; s'il survenait le moindre relâche, le sourire reparaissait sur ses lèvres, et il se livrait au commerce de ses amis, avec son calme accoutumé. Le dix-huit de mars 1727, après avoir conversé long-temps avec le docteur Mead, son ami et son médecin, il perdit tout-à-coup la connaissance, et ne la recouvra plus. Deux jours après, s'éteignit ce flambeau divin qui avait répandu sur toutes les sciences la lumière la plus vive qui les éclaira jamais. Ce fut pour l'Angleterre un deuil public; on plaça son corps sur un lit de parade, dans la salle de Westminster, où sont exposés les grands du royaume, et quelquefois les rois eux-mêmes. Lorsqu'il fut porté au tombeau, le grand chancelier d'Angleterre, les ducs de Montrose, de Roxburg, les comtes de Pembrok, de Sussex, et de Maclesfield soutenaient le poële; la première noblesse suivait le convoi. Il fut déposé dans l'église de Westminster, à la porte du chœur. C'est en rendant de

(16) Cette cruelle maladie paraît être le fléau particulier des hommes de cabinet; c'est elle qui nous a enlevé presque en même temps d'*Alembert*, *Buffon*, et qui vient de conduire au tombeau le savant et respectable *Cousin*.

Digitized by Google

tels honneurs aux restes de ce grand homme, que le peuple Anglais se montra digne de l'avoir vu naître dans son sein.

Newton était d'une stature médiocre, et d'une figure gracieuse; mais dans sa vieillesse sa personne avait quelque chose de vénérable. Son caractère était si doux, si ami de la paix, qu'il eût mieux aimé se condamner à une éternelle obscurité, que de livrer des combats pour soutenir ses opinions. Il était sur le point de publier *ses Leçons d'Optique*, et *sa Méthode des Fluxions et des Séries infinies*, lorsqu'il apprit, par diverses lettres, qu'on lui préparait des objections; c'en fut assez pour le faire changer de dessein. *Je n'aurai pas*, dit-il, *l'imprudence de perdre une chose aussi substancielle que mon repos, pour courir après une ombre.* Il étoit d'une telle modestie, que malgré sa célébrité si justement, si universellement reconnue, il ne montrait aucun entêtement pour ses sentimens. La plus touchante des vertus, la bienfaisance, pouvait-elle être étrangère à une ame si noble? Non, sans doute; aussi Newton en donna-t-il des preuves multipliées envers les malheureux. Il ne voulait point faire de testament, parce qu'il ne croyait pas qu'on pût donner ce qu'on ne possédait plus; mais il faisait souvent des libéralités considérables à ses parens. Les jeunes gens sans fortune, qui montraient d'heureuses dispositions pour les sciences, étaient aussi les objets de ses bienfaits. *Inscrivez-moi pour une somme de vingt livres sterling par an*, mandait-il aux administrateurs du collège d'Edimbourg; *cette somme servira de supplément aux honoraires de M. Mac-Laurin; elle sera un témoignage de mon amitié pour sa personne, et de mon estime pour ses talens.*

Digitized by Google

C'est ainsi que ce grand homme réunissait tout ce que le génie a de plus sublime, avec ce que les qualités sociales ont de plus aimable (17).

Newton a cessé d'appartenir à l'Angleterre, il est devenu l'homme de toutes les nations, de tous les temps; tous les peuples civilisés le reconnaissent pour leur législateur dans les sciences; tous les savans, d'un bout à l'autre de l'Europe, sont ses disciples; et si, depuis sa mort, on a fait des pas considérables, si l'on s'est avancé plus loin que lui, c'est toujours en s'appuyant sur ses immortelles découvertes. Horace promettait à ses vers une durée aussi longue que celle du temple de Jupiter au Capitole; les siècles ont détruit jusqu'aux ruines de ce temple fameux, et le nom d'Horace est plus illustre qu'il ne fut jamais. L'Angleterre changerait de face, serait bouleversée, engloutie même sous l'Océan, que la gloire de Newton n'en recevrait aucune atteinte. Son nom est gravé profondément

(17) Il est bien rare que la fortune marche de pair avec le génie; mais lorsque cela arrive, on voit par le respectable usage que les hommes supérieurs savent faire des richesses, combien ils sont dignes de les posséder. Boileau achète la bibliothèque de Patru un tiers de plus qu'elle ne vaut, et met pour condition, que ce célèbre avocat en conservera la jouissance jusqu'à sa mort. Voltaire élève et dote la petite-nièce du grand Corneille; il fait de Ferney l'asyle des artistes indigens, et donne pour jouet aux enfans d'un malheureux débiteur, le billet de leur père. Buffon consacre une partie de son bien à agrandir, à décorer ce Jardin des Plantes devenu, par ses soins, un des plus beaux ornemens de Paris. Avec quel soin Montesquieu cache la main qui brise les fers d'un infortuné Français tombé dans l'esclavage? La chimie et la physique sont-elles moins redevables aux richesses de Lavoisier qu'à son génie? Et au moment où j'écris, Lalande ne dépose-t-il pas entre les mains de l'Institut, une somme de dix mille francs, destinée à l'encouragement des sciences? Pourquoi de pareils traits n'inspirent-ils qu'une admiration stérile, à ceux qui pourraient les imiter?

Digitized by Google

sur chacune des branches de l'arbre des sciences, leur destinée désormais est de croître ou de périr ensemble.

Après avoir parlé de *Newton*, me sera-t-il permis de dire un mot de ma *traduction?* J'ai fait tous mes efforts pour être toujours clair et fidèle; et dans les notes qui l'accompagnent, j'ai tâché d'éviter une concision trop rigoureuse qui touche à l'obscurité, ou une prolixité qui fatigue et dégoûte. Je ne dissimulerai pas que j'ai été souvent arrêté par de très-grandes difficultés; que j'avais même renoncé à une entreprise qui me paraissait au-dessus de mes faibles moyens, lorsqu'un ami intime, le plus aimable, le meilleur des hommes (18), sut ranimer mon ardeur, et m'exciter à continuer; il m'envoya même de Hollande les *Commentaires de Castillon*, que je n'avais pu me procurer à Paris; ainsi soutenu par ses encouragemens, j'arrivais aux dernières pages de mon travail, lorsqu'un coup mortel vint m'arracher l'ami le plus tendre, ôter à son pays un officier aussi distingué par ses talens que par sa valeur; à sa famille inconsolable, un fils, un frère, un époux, un père, également digne, sous tous ces rapports, d'un éternel regret.

---

(18) Jean-Nicolas Bontemps, chef de bataillon dans l'arme du génie, mort à Wertheim, près de Wurtzbourg, des suites d'une blessure, le 13 nivôse an 9, à l'âge de 27 ans.

ARITHMÉTIQUE

Digitized by Google

ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE, OU DE LA COMPOSITION ET DE LA DÉCOMPOSITION ARITHMÉTIQUES.

Les calculs se font, ou par le moyen des nombres, comme dans l'Arithmétique vulgaire, ou avec des lettres comme dans l'analyse. Ces deux procédés sont fondés sur les mêmes principes, et conduisent au même résultat; l'Arithmétique, d'une manière définie et particulière; l'Algèbre, d'une manière indéfinie et universelle. Mais dans cette dernière méthode, presque tous les énoncés, et sur-tout les conclusions, sont de véritables théorêmes.

L'Arithmétique ne marche jamais que du connu à l'inconnu; l'Algèbre, au contraire, marche souvent de l'inconnu au connu, de sorte que, de quelque manière qu'elle arrive à une conclusion ou équation, elle peut toujours parvenir à la connaissance de la quantité inconnue. C'est par ce moyen qu'on résout des Problêmes très-difficiles, dont on eût vainement cherché la solution par l'Arithmétique seule.

Digitized by Google

Cependant l'Arithmétique est tellement indispensable dans toutes les opérations de l'Algèbre, que leur réunion seule forme la science complette du calcul.

C'est pour cette raison que je traiterai de toutes les deux en même temps. Lorsqu'on veut se livrer à l'étude de cette science, il faut d'abord se familiariser avec les termes et les signes qu'elle emploie, apprendre les opérations fondamentales, telles que l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, l'Extraction des racines, la Réduction des fractions, et des Quantités radicales, la Méthode d'ordonner les termes des équations, d'en éliminer les inconnues, lorsqu'il y en a plusieurs; ensuite s'exercer à la pratique de toutes ces opérations, en mettant des Problêmes en équation; et enfin, étudier la nature et la résolution des équations.

Notation; signification de quelques termes; emploi des signes.

On entend par nombre, moins une collection de plusieurs unités, qu'un rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre de même espèce, qu'on regarde comme l'unité. Le *nombre* est de trois espèces, l'*entier*, le *fractionnaire* et le *sourd*. L'*entier* est mesuré par l'unité; le *fractionnaire* par un sous-multiple de l'unité; le *sourd* est incommensurable avec l'unité.

Les signes des nombres entiers sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Tout le monde connaît ces caractères; tout le monde sait la manière dont on les combine pour exprimer tous les nombres entiers possibles : mais de même qu'un nombre, à la première place à gauche de l'unité, désigne des dixaines d'unités, à la seconde, des centaines, à la troisième, des mille, etc. de même un nombre, à la première place à droite de

Digitized by Google

l'unité, désigne des dixièmes de cette unité; à la seconde place, des centièmes; à la troisième, des millièmes, etc. Nous appelons ces derniers nombres des *fractions décimales*, parce qu'elles décroissent en raison décuple; et pour distinguer les entiers des décimales, on les sépare par une virgule, ou par un point, ou par une petite ligne. Ainsi 732,569 ou 732 . 569, ou bien 732 | 569 ne sont que trois manières différentes d'exprimer le même nombre, qui est sept cents trente-deux unités, cinq dixièmes, six centièmes, neuf millièmes. Ainsi le nombre 57104,2083 désigne cinquante-sept mille cent quatre unités, deux dixièmes, huit millièmes, et trois dix-millièmes parties de l'unité. Le nombre 0,064 désigne six centièmes et quatre millièmes.

Nous parlerons ailleurs des nombres sourds et des autres fractions.

Lorsqu'on veut traiter les quantités, soit connues, soit inconnues, comme des indéterminées, il n'est pas possible de les exprimer par des nombres, et on les désigne par des lettres de l'alphabet. On emploie les premières, a, b, c, d, etc. pour les connues, et les dernières, z, y, x, etc. pour les inconnues. Il y a quelques auteurs qui expriment les connues par les consonnes, et les inconnues par les voyelles.

On appelle *quantités positives* celles qui sont plus grandes que zéro, et *négatives*, celles qui sont moindres que zéro. Ainsi, dans la vie civile, on pourrait dire qu'un bien est une quantité positive, et une dette une quantité négative. C'est ainsi encore, que le mouvement d'un corps en avant, pourrait s'appeler *positif*, et le mouvement en arrière, négatif; parce que l'un augmente le chemin que le corps a fait, et que l'autre le diminue. De même encore, dans la Géométrie, si on appelle positives les lignes qui iront dans un sens, les négatives seront celles qui iront dans le sens directement opposé.

Par exemple, (*Pl.* I, *Fig.* 1) si AB est menée vers la droite et BC

Digitized by Google

vers la gauche, et que AB soit prise pour une ligne positive, BC sera négative, parce qu'elle tend à diminuer AB qui se trouve réduite à AC, ou même à zéro, si le point C tombe sur le point A, ou à une valeur moindre que zéro, si BC était plus grande que AB dont il faut la soustraire. On a coutume de faire précéder les quantités négatives du signe —, et les positives du signe +. Les signes $\mp$ et $\pm$ sont arbitraires, mais le premier est toujours le contraire du second.

Dans l'assemblage de plusieurs quantités, le signe + devant l'une d'elles, marque qu'il faut l'ajouter, et le signe —, qu'il faut la soustraire. De ces deux signes, le premier s'exprime par *plus*, et le second par *moins*. Ainsi $2 + 3$ ou 2 plus 3, marquent également qu'il faut ajouter 3 à 2, ce qui fait 5; et $5 - 3$ ou 5 moins 3, qu'il faut retrancher 3 de 5, ce qui donne 2; et $-5 + 3$ est la différence qui provient en soustrayant 5 de 3, et qui est égale à -2; et $6 - 1 + 3$ vaut 8; enfin $a + b$ est la somme des quantités a et b; et $a - b$ est la différence qui provient en soustrayant b de a; et $a - b + c$ est la somme de cette différence et de la quantité c. Par exemple, si a vaut 5, b, 2, et c, 8, alors $a + b$ vaut 7, $a - b$ vaut 3, et $a - b + c$ vaut 11; enfin $2a + 3a$ vaut $5a$, et $3b - 2a - b + 3a$ vaut $2b + a$; car $3b - b$ vaut $2b$, et $-2a + 3a$ vaut a, donc la somme égale $2b + a$, et ainsi du reste. Ces caractères + et — s'appellent signes. Lorsqu'une quantité n'est précédée d'aucun signe, elle est censée précédée du signe +.

LA MULTIPLICATION proprement dite, ne peut se faire qu'avec des nombres entiers. C'est une opération par laquelle on cherche une nouvelle quantité qui contienne le multiplicande, autant de fois que le multiplicateur lui-même contient l'unité. Mais, faute d'une expression plus juste, on est aussi convenu d'appeler multiplication, une

Digitized by Google

opération semblable qui se fait avec les nombres incommensurables ou fractionnaires, et par laquelle on cherche une nouvelle quantité, qui soit au multiplicande, dans le même rapport quelconque qui existe entre le multiplicateur et l'unité. La multiplication ne se fait pas seulement avec des nombres abstraits, mais aussi avec des quantités concrètes, telles que des lignes, des superficies, des mouvemens, des poids, etc. En effet, toutes ces quantités ont avec une quantité connue de leur espèce, prise pour unité, des rapports qu'on peut exprimer par des nombres. Par exemple, qu'il s'agisse de multiplier *A* par une ligne de douze pieds, en prenant pour unité la ligne de deux pieds, le produit sera *6A;* c'est-à-dire, le même qu'on obtiendrait en multipliant *A* par le nombre abstrait 6. Effectivement *6A* est à *A* dans le même rapport que la ligne de 12 pieds est à la ligne de 2 pieds, qui est prise pour unité. Ainsi, lorsqu'il faut multiplier l'une par l'autre, deux lignes, telles que *AC* et *AD* (*Pl.* I, *Fig.* 3), on prendra *AB* pour unité; on unira les points *B* et *C* par la droite *BC;* on menera *DE* parallèle à *BC*, et *AE* sera le produit de cette multiplication, parce que *AE* est à *AD* dans le même rapport que *AC* est à l'unité *AB*. De plus, l'usage a voulu que la génération d'une surface par le mouvement à angle droit, d'une ligne le long d'une autre, s'appelât *multiplication de ces lignes;* car quoiqu'une ligne multipliée comme on voudra, ne puisse jamais produire une surface, et qu'ainsi cette génération de la surface par les lignes, soit fort différente d'une multiplication, voici cependant en quoi elles se ressemblent : c'est que si on multiplie le nombre d'unités linéaires contenues dans une des lignes, par le nombre d'unités linéaires contenues dans l'autre ligne, le produit sera un nombre abstrait qui contiendra autant de fois l'unité abstraite, que la surface engendrée par les deux lignes,

Digitized by Google

contiendra de fois l'unité de surface, pourvu qu'on entende par unité de surface, ce qu'on a coutume d'entendre; un quarré dont chaque côté est égal à l'unité linéaire. Par exemple, si la droite AB a quatre unités et AC trois, le rectangle AD contiendra quatre fois trois ou douze unités quarrées, comme on peut le voir en jetant les yeux sur la seconde Figure de la première planche. On suit la même analogie pour les solides, que l'on regarde comme les produits de la surface par la ligne. Réciproquement, les termes *contenu*, *rectangle*, *quarré*, *cube*, *dimension*, et autres qui appartiennent proprement à la Géométrie, sont fréquemment employés dans l'Arithmétique; car on n'entend pas toujours par quarré ou rectangle ou quantité de deux dimensions, une surface, mais très-souvent une quantité qui est le produit de deux autres, ou une ligne qui est le produit de deux autres lignes. Nous entendons de même par *cube* ou *parallélipipède* ou *quantité de trois dimensions*, le produit de deux multiplications successives.

Un nombre placé immédiatement devant une lettre, marque combien de fois il faut ajouter cette lettre à elle-même. Ainsi $2a$ marque deux a; $3b$, trois b; $15x$, quinze x.

Deux ou un plus grand nombre de lettres de suite, sans interposition de signe, caractérisent un produit résultant de la multiplication de toutes ces lettres entre elles. Ainsi ab désigne le produit de a par b, et abx, celui de a par b et par x. Par exemple, si a est 2; b, 3; et x, 5; ab sera 6, et abx, 30.

Quelquefois on place entre les quantités le signe $\times$, ce qui marque que les quantités qui sont d'un côté de ce signe, doivent être multipliées par celles qui sont de l'autre. Ainsi 3×5 ou 3 multipliant 5 signifient la même chose, et sont tous deux égaux à 15. Mais le principal usage de ce dernier signe, a lieu pour indiquer la

Digitized by Google

multiplication entre des quantités complexes. Ainsi, qu'il s'agisse de multiplier $y - 2b$ par $y + b$, on tire sur les termes de chaque facteur une petite ligne, et on écrit $\overline{y - 2b} \times \overline{y + b}$, ou bien $\overline{y - 2b}$ multipliant $\overline{y + b}$.

La division proprement dite, n'a lieu que pour les nombres entiers. C'est une opération, par laquelle on cherche une nouvelle quantité plus petite que le dividende, autant de fois que l'unité est elle-même plus petite que le diviseur. Mais, par analogie, on a coutume aussi d'appeler division, toute opération par laquelle on cherche une nouvelle quantité qui soit au dividende dans un rapport quelconque, pourvu qu'il soit le même que celui de l'unité au diviseur, ce diviseur pouvant être un nombre fractionnaire, ou sourd, ou une quantité d'une espèce quelconque. Ainsi (*Pl.* I, *Fig.* 3) s'il s'agit de diviser la ligne AE par la ligne AC, AB étant prise pour unité, il faut mener ED parallèlement à CB, et AD sera le quotient. Si on a un rectangle d'une surface connue, et qu'on veuille lui donner pour base une ligne arbitraire, on trouvera, par une opération semblable, la hauteur qu'il faudrait lui donner, et cette opération s'appelle encore une division.

Si une quantité est placée au-dessous d'une autre, et séparée d'elle par une petite ligne, l'assemblage de ces deux quantités désigne un quotient, ou le résultat de la division de la quantité supérieure par l'inférieure. Ainsi $\frac{6}{2}$ marque le quotient de 6 par 2 qui est 3, et $\frac{5}{8}$ marque le résultat de la division de 5 par 8, c'est-à-dire, la huitième partie de 5; $\frac{a}{b}$ est le résultat de la division de a par b. Par exemple si a vaut 15, et b, 3, $\frac{a}{b}$ vaudra 5. De même $\frac{ab - b^2}{a + x}$ désigne la quantité qui provient de la division de $ab - b^2$ par $a + x$, et ainsi du

Digitized by Google

reste. Les quantités de cette espèce s'appellent *fractions*, le nombre supérieur s'appelle *numérateur*, et l'inférieur *dénominateur*.

Quoique des quantités placées immédiatement à la suite les unes des autres, annoncent une multiplication, cependant si un nombre entier précède un nombre fractionnaire, sans interposition de signe, cela ne désigne plus qu'une addition de ces deux nombres, ainsi $3\frac{1}{2}$ marque trois plus une demie.

Lorsqu'une quantité se multiplie elle-même, on a coutume, pour abréger, d'écrire au-dessus un nombre qui désigne combien de fois elle est facteur. Ainsi au lieu de aaa, on écrit a^3; au lieu de $aaaa$, on écrit a^4; au lieu de $aaaaa$, on écrit a^5; au lieu de $aaabb$, on écrit a^3bb ou a^3b^2. Par exemple, si a vaut 5 et b, 2, a^3 sera $5 \times 5 \times 5$ ou 125; a^4 sera $5 \times 5 \times 5 \times 5$ ou 625, et a^3b^2 sera $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2$ ou 500. Remarquez ici, qu'un nombre écrit entre deux lettres appartient toujours à la première; ainsi 3 dans a^3bb ne marque pas qu'il faut prendre bb trois fois, mais qu'il faut multiplier a deux fois par lui-même. Remarquez encore que dans une quantité, le nombre des facteurs qui se multiplient les uns les autres, annonce toujours le nombre des dimensions, ou le degré de puissance de cette quantité, et le nombre qui s'écrit au-dessus de cette quantité, s'appelle *indicateur*, ou exposant de la puissance ou des dimensions. Ainsi aa est de deux dimensions, a^3 de trois dimensions, comme l'indique le nombre 3 écrit au-dessus; aa s'appelle aussi un quarré; a^3 un cube; a^4 un quarré-quarré; a^5 un quarré-cube; a^6 un cube-cube; a^7 un quarré-quarré-cube; et ainsi du reste. Et la quantité a dont les multiplications successives ont produit ces différentes puissances, s'appelle *racine* de ces puissances. Par exemple, a est la racine quarrée de aa et la racine cubique de a^3, etc.

Une

Digitized by Google

Une racine multipliée par elle-même produit un quarré; le quarré multiplié par la racine produit un cube, etc. Ainsi, d'après la définition qui a été donnée de la multiplication, on voit qu'il y a même rapport de l'unité à la racine, que de la racine au quarré, que du quarré au cube, etc. Donc la racine quarrée d'une quantité quelconque, est toujours moyenne proportionnelle entre l'unité et la quantité elle-même; et la racine cubique est la première de deux moyennes proportionnelles entre l'unité et cette même quantité; et la racine quatrième est la première de trois moyennes proportionnelles, et ainsi du reste. On pourra donc reconnaître les racines à deux caractères; en tant que se multipliant elles-mêmes, elles produisent les puissances; et en tant qu'elles sont des termes moyens entre ces puissances et l'unité. Ainsi on reconnaît, par exemple, que la racine quarrée de 64 est 8, et sa racine cubique 4, soit, parce que 8 . 8 vaut 64, ou que 4 . 4 . 4 vaut 64, ou bien, que 1 est à 8 comme 8 est à 64; ou bien, pour la racine cubique, parce que 1 est à 4 comme 4 est à 16 comme 16 est à 64. Il suit de-là, que s'il s'agit de tirer la racine quarrée d'une ligne, telle que *AB* (*Pl.* I, *Fig.* 4), il faut prolonger la ligne *AB* d'une quantité *BC* qu'on prendra pour unité, et sur *AC* comme diamètre ayant décrit un demi-cercle, on élevera au point *B*, la perpendiculaire *BD*, jusqu'à ce qu'elle rencontre en *D* la demi-circonférence, et la ligne *BD* sera la racine cherchée, parce qu'elle est moyenne proportionnelle entre *AB* et l'unité *BC*.

Pour désigner la racine d'une quantité quelconque, on a coutume de faire précéder cette quantité de la marque $\sqrt{}$, quand il s'agit de la racine quarrée; de $\sqrt[3]{}$, s'il s'agit d'une racine cubique; de $\sqrt[4]{}$, s'il s'agit d'une racine quatrième, etc. Ainsi, $\sqrt{64}$ est la

Digitized by Google

même chose que 8; et $\sqrt[3]{64}$ est la même chose que 4; $\sqrt{aa}$ vaut a; $\sqrt{ax}$ annonce la racine quarrée de ax; et $\sqrt[3]{4ax^2}$ la racine cubique de $4ax^2$; de manière que si a vaut 3 et x, 12; $\sqrt{ax}$ sera la même chose que $\sqrt{36}$ ou 6, et $\sqrt[3]{4ax^2}$ sera $\sqrt[3]{1728}$ ou 12. Lorsqu'il n'est pas possible d'extraire ces racines, on les appelle quantités sourdes, telle est $\sqrt{ax}$; ou nombres sourds; tel est $\sqrt{12}$.

Il y a quelques auteurs qui, pour désigner un quarré, emploient le caractère q; pour un cube c; pour un quarré-quarré qq; pour le quarré-cube cq. Ainsi, pour exprimer le quarréde A, ils écriraient Aq; pour son cube Ac; pour sa quatrième puissance Aqq; et pour exprimer la racine cubique de $ab^2 - x^3$, ils écriraient $\sqrt[c]{ab^2 - x^3}$. On a encore employé d'autres symboles, mais que l'usage a déjà presque abandonnés.

La marque $=$ signifie, que les quantités qu'elle sépare sont égales. Ainsi $x = b$ désigne que x est égal à b. La marque $::$ signifie, que les quantités de part et d'autre sont proportionnelles. Ainsi $a : b :: c : d$ signifie que a est à b comme c est à d. Et $a : b : e :: c : d : f$ signifie que a, b et e sont entre eux respectivement comme c, d et f, ou que les quantités a, b, e, et c, d, f sont entre elles dans les mêmes rapports.

Il n'est pas difficile de connaître par analogie, la valeur de quelques autres signes qui se composent de ceux qu'on vient de voir. Ainsi $\frac{3}{4}a^3bb$ marque qu'il faut prendre les trois quarts de a^3bb; et $3\frac{a}{c}$, qu'il faut prendre trois fois $\frac{a}{c}$; et $7\sqrt{ax}$, qu'il faut prendre sept fois la racine de ax; enfin $\frac{a}{b}x$, annonce qu'il faut multiplier $\frac{a}{b}$

Digitized by Google

par x; et $\frac{5ee}{4a+9e} \cdot z^3$ marque la multiplication de z^3 par $\frac{5ee}{4a+9e}$, c'est-à-dire, par le quotient provenant de la division de $5ee$ par $4a+9e$, et $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$, qu'il faut multiplier $\sqrt{ax}$ par $\frac{2a^3}{9c}$; et $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ n'est autre chose que le quotient provenant de la division de $7\sqrt{ax}$ par c; et $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ est le quotient provenant de la division de $8a\sqrt{cx}$ par la somme des quantités $2a+\sqrt{cx}$. De même $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ est le quotient, provenant de la division de la différence $3axx-x^3$ par la somme $a+x$; et $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ est la racine de ce même quotient. Et $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ est la racine de ce même quotient multipliée par $2a+3c$. De même encore $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ marque, qu'il faut prendre la racine de la somme des quantités $\frac{1}{4}a^2$ et b^2; et $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}$ désigne la racine de la somme des quantités $\frac{1}{2}a$ et $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$; $\frac{2a^3}{a^2-z^2} \times \sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}$ est la même racine multipliée par le quotient provenant de la division de $2a^3$ par la différence a^2-z^2; et ainsi du reste.

Remarquez que dans des quantités complexes de cette espèce, il n'est pas nécessaire de s'arrêter toujours à la valeur particulière de chaque lettre; il suffit de savoir en général, par exemple, que $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}$ est la racine de la somme $\frac{1}{2}a$ et $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$, quelle que puisse être la valeur de cette somme, lorsqu'on substituera des nombres ou des lignes à la place des lettres. De même dans cet exemple-ci, $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}}{a-\sqrt{ab}}$, on voit qu'il faut prendre le

Digitized by Google

quotient provenant de la division de la quantité $\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}}$ par la quantité $a - \sqrt{ab}$, comme si ces quantités étaient simples et connues. Dans le cas où quelques-unes des quantités ou même toutes seraient inconnues, il ne faut pas s'en embarrasser, il ne faut voir dans l'exemple cité qu'un quotient, quelle qu'en soit la valeur. J'ai cru devoir donner cet avertissement aux commençans, de peur qu'effrayés par la multiplicité des termes d'une quantité, ils ne s'arrêtassent dès l'entrée de la carrière.

De l'Addition.

LORSQUE les nombres ne sont pas trop compliqués, l'addition est une opération qui n'a pas besoin de règles. En effet, quelle règle faut-il pour voir que 7 et 9 ou 7 + 9 font 16? ou que 11 + 15 font 26? Mais lorsque les nombres à ajouter sont plus composés, il faut les écrire les uns au-dessous des autres, et faire la somme de chacune des colonnes en particulier. Par exemple, s'il faut faire la somme des nombres 1357 et 172, il faut écrire 172 au-dessus ou au-dessous de 1357, de manière que les unités 2 de 172 se trouvent dans la même colonne que les unités 7 de 1357; ses dixaines 7 dans la même colonne que les dixaines 5; ses centaines 1 dans la même colonne que les centaines 3. Je place ici l'arrangement figuré des deux nombres.

1357
172
1529

Alors commençant par la droite, je dirai 7 et 2 font 9, et je l'écris au-dessous. Ensuite 5 et 7 font 12. J'écris au-dessous de cette seconde colonne le dernier nombre 2, et je garde le premier qui est 1 pour l'ajouter avec les nombres 3 et 1 de la colonne suivante. Je

Digitized by Google

dis ensuite, 1 et 3 font 4 et 1 font 5; et j'écris 5 au-dessous de cette troisième colonne; il ne reste plus que 1 qui est la première figure du nombre supérieur. Je l'écris encore au-dessous, et la somme des deux nombres 1357 et 172 est 1529.

Ainsi, pour faire la somme des nombres 87899 + 13403 + 885 + 1920, écrivez tous ces nombres les uns au-dessous des autres, de manière que leurs unités se trouvent toutes dans la même colonne, les dixaines dans une autre, les centaines dans la troisième, les mille dans la quatrième, et ainsi du reste.

87899
13403
885
1920
104107

Dites ensuite : 9 + 3 font 12, et 12 + 5 font 17. Écrivez 7 au-dessous, et ajoutez 1 aux nombres de la colonne suivante, en disant : 1 + 9 font 10, et 10 + 8 font 18, et 18 + 2 font 20; écrivez 0 au-dessous, et dites comme toute-à-l'heure : 2 + 8 font 10, et 10 + 4 font 14, et 14 + 8 font 22, et 22 + 9 font 31. Ainsi en gardant 3, écrivez 1 au-dessous, et dites comme précédemment : 3 + 7 font 10, et 10 + 3 font 13, et 13 + 1 font 14; écrivez 4 au-dessous de la colonne, et gardez 1 pour l'ajouter à la colonne suivante, en disant encore : 1 + 8 font 9, et 9 + 1 font 10. Écrivez 10, et vous aurez pour somme de tous les nombres qu'il falloit ajouter 104107.

630,953
51,0807
305,37
987,4037

L'addition des nombres décimaux se fait comme celle des nombres entiers, comme on peut le voir dans l'exemple ci-à-côté.

L'addition des quantités algébriques se fait en liant par des signes convenables les quantités qui doivent être ajoutées, et de plus, en réunissant celles qui doivent

Digitized by Google

être réunies. Ainsi a et b font $a+b$, et a et $-b$ font $a-b$. $7a$ et $9a$ font $7a+9a$; $-a\sqrt{ac}$ et $b\sqrt{ac}$ font $-a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$, ou bien $b\sqrt{ac}-a\sqrt{ac}$; car l'ordre dans lequel sont écrites les quantités est fort indifférent.

Lorsqu'il s'agit d'additionner des quantités algébriques positives et exprimées par la même lettre, il suffit d'écrire une seule fois cette lettre, en lui donnant pour coëfficient la somme des coëfficiens de chacune des parties qu'il faut additionner. Ainsi $9a+7a$ font $16a$; et $11bc+15bc$ font $26bc$. De même $3\frac{a}{c}+5\frac{a}{c}$ font $8\frac{a}{c}$ et $2\sqrt{ac}+7\sqrt{ac}$ font $9\sqrt{ac}$. Et $6\sqrt{ab-x^2}+7\sqrt{ab-x^2}$ font $13\sqrt{ab-x^2}$. De même encore $6\sqrt{3}+7\sqrt{3}$ font $13\sqrt{3}$. Et $a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}$ font $(a+b)\sqrt{ab}$, en ajoutant a et b, comme s'ils étaient des nombres multiplicateurs de $\sqrt{ab}$. C'est ainsi que $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3ax^2-x^3}{a+x}}+3a\sqrt{\frac{3ax^2-x^3}{a+x}}$ font $\overline{5a+3c}\sqrt{\frac{3ax^2-x^3}{a+x}}$ par la raison que $2a+3c+3a$ font $5a+3c$.

On réunit les fractions positives qui ont le même dénominateur, en additionnant leurs numérateurs. Ainsi $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ font $\frac{3}{5}$. Et $\frac{2ax}{b}+\frac{3ax}{b}$ font $\frac{5ax}{b}$. Et $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}+\frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ font $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ et $\frac{a^2}{c}+\frac{bx}{c}$ font $\frac{a^2+bx}{c}$.

L'addition des quantités négatives n'est pas différente de celle des quantités positives. Ainsi -2 et -3 font -5. Et $-\frac{4ax}{b}$ et $-\frac{11ax}{b}$ font $-\frac{15ax}{b}$. $-a\sqrt{ax}$ et $-b\sqrt{ax}$ font $\overline{-a-b}\sqrt{ax}$.

Digitized by Google

Mais lorsqu'on doit ajouter une quantité négative avec une positive, il faut diminuer la positive de toute la valeur de la négative. Ainsi 3 et — 2 font 1. $\frac{11ax}{b}$ et — $\frac{4ax}{b}$ font $\frac{7ax}{b}$. — $a\sqrt{ac}$ et $b\sqrt{ac}$ font $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. Et remarquez que lorsque la quantité négative l'emporte sur la positive, le résultat de l'opération est négatif. Ainsi 2 et — 3 font — 1. — $\frac{11ax}{b}$ et $\frac{4ax}{b}$ font — $\frac{7ax}{b}$. et $2\sqrt{ac}$ et $-7\sqrt{ac}$ font $-5\sqrt{ac}$.

Lorsqu'il s'agit d'additionner un plus grand nombre de quantités, où des quantités plus composées, il est nécessaire de suivre une marche réglée, comme on a fait plus haut pour l'addition des nombres. Ainsi $17ax - 14a + 3$ et $4a + 2 - 8ax$ et $7a - 9ax$ étant des quantités qu'il faut ajouter, je les écris les unes au-dessous des autres, de manière que les termes qui ont le plus d'affinité entre eux, se trouvent dans les mêmes colonnes.

Par exemple, les nombres 3 et 2 dans une colonne; les lettres $14a$, $4a$ et $7a$ dans une autre colonne; enfin les lettres $17ax$, $9ax$ et $8ax$ dans une troisième, comme on peut le voir par l'exemple placé ici à côté. Ensuite j'additionne chaque colonne en particulier,

$$\begin{array}{rrr} 17ax & -14a & +3 \\ -8ax & +4a & +2 \\ -9ax & +7a & \\ \hline 0 & -3a & +5 \end{array}$$

en disant 2 et 3 font 5, que j'écris au-dessous. Ensuite $7a + 4a$ font $11a$ et — $14a$ font $-3a$, que j'écris encore. Enfin $-9ax$ et — $8ax$ font — $17ax$ et + $17ax$ font 0, ainsi la somme est $-3a + 5$.

Digitized by Google

Je joins ici plusieurs exemples où on opère en suivant la même marche.

1er. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 12x + 7a \\ 7x + 9a \\ \hline 19x + 16a \end{array}$$

2e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 11bc - 7\sqrt{ac} \\ 15bc + 2\sqrt{ac} \\ \hline 26bc - 5\sqrt{ac} \end{array}$$

3e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} -\frac{4ax}{b} + 6\sqrt{3} + \frac{1}{3} \\ +\frac{11ax}{b} - 7\sqrt{3} + \frac{2}{3} \\ \hline \frac{7ax}{b} - \sqrt{3} + 1 \end{array}$$

4e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{rrrr} & & + a^2y + 2a^3 - \frac{a^4}{2y} \\ & -2ay^2 - 4a^2y + a^3 & \\ y^3 + 2ay^2 - \frac{1}{2}a^2y & & \\ \hline y^3 \quad 0 & -3\frac{1}{2}a^2y + 3a^3 - \frac{a^4}{2y} & \end{array}$$

5e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} -6x^2 + \frac{3}{7}x \\ +5x^3 \qquad + \frac{1}{7}x \\ \hline 5x^3 - 6x^2 + \frac{8}{7}x \end{array}$$

6e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 2ax^3 \\ -3x^4 - 2ax^3 + 8\frac{1}{4}a^3\sqrt{a^2+x^2} \\ -2x^4 + 5bx^3 - 20a^3\sqrt{a^2-x^2} \\ -4bx^3 - 7\frac{1}{4}a^3\sqrt{a^2+x^2} \\ \hline 0 + bx^3 + a^3\sqrt{a^2+x^2} - 20a^3\sqrt{a^2-x^2}. \end{array}$$

De la Soustraction.

LORSQUE les nombres sont peu composés, rien n'est plus facile que d'en trouver la différence. En effet, s'il s'agit de soustraire

Digitized by Google

9 de 17, qui n'apperçoit au premier coup-d'œil que le reste est 8? Mais lorsque les quantités sont plus composées, la soustraction se fait en écrivant le nombre à soustraire au-dessous de celui dont il faut le retrancher, ensuite on retranche chaque figure inférieure de la supérieure correspondante. Ainsi, pour soustraire 63543 de 782579, écrivez 63543 au-dessous de 782579, comme on le voit ici à côté. Et dites : 3 de 9 reste 6, et écrivez 6 au-dessous. Ensuite 4 de 7 reste 3, que vous écrirez pareillement. Ensuite 5 de 5 reste 0 qu'il faut aussi écrire. Il s'agit maintenant de retrancher 3 de 2; mais comme 3 est plus grand que 2, j'emprunte une unité sur le plus prochain chiffre à gauche 8 : cette unité ajoutée avec 2 vaut 12, dont on peut retrancher 3, le reste est 9, qu'il faut encore écrire au-dessous. Maintenant ce n'est plus 6 seulement qu'il faut retrancher de 8, mais 6 augmenté de l'unité empruntée; c'est donc 7 qui, ôté de 8, laisse 1 pour reste que j'écris encore au-dessous. Ensuite comme il n'y a plus de chiffre inférieur qui réponde au supérieur 7, je l'écris encore au-dessous, et la différence des deux nombres est 719036.

$$\begin{array}{r} 782579 \\ 63543 \\ \hline 719036 \end{array}$$

Au reste, en ordonnant les deux nombres pour faire l'opération, il faut bien prendre garde que les figures de l'un répondent aux figures homogènes de l'autre; c'est-à-dire, que les unités soient placées sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les dixièmes sous les dixièmes, etc. comme il a été dit pour l'addition. Ainsi, pour retrancher la quantité décimale 0,63 du nombre entier 547, vous vous garderez bien de disposer ces deux nombres en cette manière : $\begin{array}{r} 547 \\ 0,63 \end{array}$. Mais il faut les disposer ainsi, $\begin{array}{r} 547 \\ 0,63 \end{array}$, en sorte que le zéro qui, dans les décimales, occupe la place des unités, réponde au-dessous

Digitized by Google

des unités de l'autre nombre; les places vides du nombre supérieur, qui répondent à 6 et à 3 du nombre inférieur, étant censées occupées par des zéros. Dites donc; de 0 ôtez 3, cela est impossible; mais en empruntant une unité à gauche, 0 deviendra 10; d'où retranchant 3, le reste est 7 qu'il faut écrire au-dessous. Ensuite ajoutant 1 qui a été emprunté avec 6, cela fait 7 qu'il faut retrancher du 0 supérieur; et comme cela est impossible, j'emprunte encore 1 à gauche, afin que 0 devienne 10; d'où retranchant 7, le reste est 3 que j'écris au-dessous, et cet 1 emprunté étant ajouté avec 0, et retranché de 7, laisse 6 pour reste qu'il faut encore écrire au-dessous; enfin descendez aussi les Figures 54, puisqu'on n'en doit rien retrancher, et vous aurez pour différence des deux nombres.... 546,37. Nous allons placer ici plusieurs exemples pour exercer les commençans.

547	
0,63	
546,37	

1673	1673	458074	35,72	46,5003	308,7
1541	1580	9205	14,32	3,078	25,74
132	93	448869	21,40	43,4223	282,96

Lorsqu'on a un nombre plus grand à retrancher d'un plus petit, il faut retrancher le plus petit du plus grand, et donner au reste le signe négatif. Par exemple, s'il fallait ôter 1673 de 1541, j'ôterais 1541 de 1673, et je mettrais le signe — devant le reste 132.

La soustraction algébrique se fait en liant toutes les quantités par des signes, après avoir changé ceux des quantités à soustraire; et il faut en outre réunir tout ce qui peut être réuni, comme on l'a fait pour l'addition. Ainsi $+7a$ retranché de $9a$, s'écrit ainsi : $9a - 7a$

Digitized by Google

ou $2a$; et $-7a$ de $+9a$, reste $+9a+7a$ ou $16a$; $+7a$ de $-9a$, reste $-9a-7a$ ou $-16a$; et $-7a$ de $-9a$, reste $-9a+7a$ ou $-2a$. Ainsi $3\frac{a}{c}$ de $5\frac{a}{c}$, reste $5\frac{a}{c}-3\frac{a}{c}$ ou $2\frac{a}{c}$. $7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$, reste $2\sqrt{ac}-7\sqrt{ac}$ ou bien $-5\sqrt{ac}$. $\frac{2}{9}$ de $\frac{5}{9}$, reste $\frac{3}{9}$. $-\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{7}$, reste $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}$ ou $\frac{7}{7}$. $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$, reste $\frac{3ax}{b}+\frac{2ax}{b}$ ou $\frac{5ax}{b}$. $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ de $-\frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$, reste $-\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{a^2}{c}$ de $\frac{bx}{c}$, reste $\frac{bx}{c}-\frac{a^2}{c}$ ou $\frac{bx-a^2}{c}$; $a-b$ de $2a+b$, reste $a+2b$; $3az-z^2+ac$ de $3az$, reste z^2-ac; $\frac{2a^2-ab}{c}$ de $\frac{a^2+ab}{c}$, reste $\frac{2ab-a^2}{c}$; et $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ de $\overline{a+x}\sqrt{ax}$, reste $\overline{a+x-a+x}\sqrt{ax}$, ou bien $2x\sqrt{ax}$, et ainsi de suite.

Au reste, lorsque les quantités sont composées de plusieurs termes, on doit ordonner l'opération comme pour les nombres, ainsi qu'on peut le voir dans les exemples suivans :

$$\begin{array}{r} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 5x-2a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15bc+12\sqrt{ac} \\ -11bc+7\sqrt{ac} \\ \hline 26bc+5\sqrt{ac} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^3+\frac{5}{7}x \\ 6x^2-\frac{3}{7}x \\ \hline 5x^3-6x^2+\frac{8}{7}x \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{5} \\ \frac{4ax}{b}-6\sqrt{3}-\frac{1}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{5} \end{array}$$

Digitized by Google

De la Multiplication.

Il faut apprendre de mémoire tous les nombres qui proviennent de la multiplication de deux nombres quelconques qui ne sont pas plus grands que 9, tels que ceux-ci, par exemple, 5 multipliant 7 donne 35; ou 8 multipliant 9, donne 72, etc. La multiplication des nombres plus grands se fera à l'aide de ceux-ci. S'il s'agit de multiplier 795 par 4, écrivez 4 au-dessous de 795, comme on le voit ici à côté. Ensuite dites: 4 par 5 donne 20, écrivez la dernière Figure 0 du produit 20 sous le nombre 4, et gardez la première 2 pour l'opération suivante. Dites ensuite : 4 par 9 donne 36; à quoi ajoutant 2 que vous aviez gardé, le total est 38. Écrivez encore au bas la dernière Figure 8 de ce produit, et retenez la première 3. Enfin dites : 4 par 7 donne 28, à quoi ajoutant 3 que vous aviez gardé, le total est 31. Écrivant encore 31 au bas, le produit total de la multiplication de 795 par 4 est 3180.

```
 795
   4
----
3180
```

Enfin s'il fallait multiplier 9043 par 2305, écrivez le second de ces deux nombres au-dessous du premier, comme auparavant, et multipliez le nombre supérieur 9043 d'abord par 5, comme il a été enseigné plus haut, et vous trouverez pour produit 45215. Multipliez ensuite par 0, ce qui donnera 0000, continuez la multiplication par 3, et le produit sera 27129; et enfin par 2, et le produit sera 18086. Distribuez tous ces produits partiels les uns au-dessous des autres, de manière que la dernière Figure du nombre inférieur soit plus reculée d'une place vers la gauche, que la dernière

```
  9043
  2305
-------
 45215
 0000
27129
18086
--------
20844115
```

Digitized by Google

Figure du nombre immédiatement supérieur. Enfin faites la somme de tous ces produits partiels, et vous trouverez 20,844,115 pour le produit total de 9095 par 2305.

L'opération est absolument la même pour multiplier des nombres décimaux par des nombres entiers, ou par d'autres nombres décimaux, comme on peut le voir dans les exemples suivans :

72,4	50,18	3,9025
29	2,75	0,0132
651 6	25 090	7 8050
1448	3 5126	117 075
2099,6	10 036	390 25
	137,9950	0,05151300

Mais observez qu'il faut marquer dans le produit autant de Figures décimales sur la droite, qu'il y en a dans le multiplicande et dans le multiplicateur. Et si, par hazard, il n'y avait pas pour cela assez de Figures dans le produit, il faudrait y suppléer par des zéros ajoutés à gauche, comme on a fait ci-dessus pour l'exemple troisième.

La multiplication des quantités algébriques simples se fait en écrivant à côté l'un de l'autre sans interposition de signe, le multiplicande et le multiplicateur, et en donnant au produit le signe +, si les facteurs ont tous deux le signe positif, ou tous deux le signe négatif; ou bien en lui donnant le signe négatif, si les facteurs sont de signes différens.

Ainsi $2a$ par $3b$, ou $-2a$ par $-3b$, donne $+6ba$ ou $+6ab$, car l'ordre des lettres est indifférent. Ainsi $-2a$ par $+3b$, ou bien $2a$ par $-3b$, donne $-6ab$. Et $2ac$ par $8bcc$, donne

Digitized by Google

$16\,abccc$ ou $16\,abc^3$. Et $7\,ax^2$ par $-\,12\,a^2x^2$ donne $-\,84\,a^3x^4$. Et $-\,16\,cy$ par $31\,ay^3$ donne $-\,496\,acy^4$. Et $-\,4z$ par $-\,3\sqrt{az}$ donne $12z\sqrt{az}$. De même 3 par $-\,4$ donne $-\,12$; et $-\,3$ par $-\,4$ donne 12.

La multiplication des fractions se fait en multipliant numérateurs par numérateurs, et dénominateurs par dénominateurs. Ainsi $\frac{2}{5}$ par $\frac{5}{7}$ donne $\frac{10}{35}$; et $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ donne $\frac{ac}{bd}$; et $2\frac{a}{b}$ par $3\frac{c}{d}$ donne $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, ou bien $6\,\frac{ac}{bd}$; et $\frac{3\,acy}{2\,bb}$ par $-\,\frac{7\,cy^2}{4\,b^3}$ donne $-\,\frac{21\,ac^2y^3}{8\,b^5}$; et $-\,\frac{4z}{c}$ par $-\,\frac{3\sqrt{az}}{c}$ donne $\frac{12z\sqrt{az}}{c^2}$; $\frac{a}{b}\cdot x$ par $\frac{c}{d}\cdot x^2$ donne $\frac{ac}{bd}\cdot x^3$. Enfin 3 par $\frac{2}{5}$ donne $\frac{6}{5}$, comme on peut s'en convaincre en mettant 3 sous la forme d'une fraction qui aurait l'unité pour dénominateur, telle que $\frac{3}{1}$. Ainsi $\frac{15\,a^2z}{c^2}$ par $2a$ donne $\frac{30\,a^3z}{c^2}$. D'où l'on peut remarquer en passant, que $\frac{ab}{c}$ et $\frac{a}{c}\cdot b$ ont la même valeur. Il en est de même de $\frac{abx}{c}$ et de $\frac{ab}{c}\cdot x$ ou $\frac{a}{c}\cdot bx$. Ces trois quantités ne sont que la même, sous des formes différentes. Dites-en autant de $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ et de $\frac{a+b}{a}\cdot\sqrt{cx}$. Ainsi du reste.

Lorsque les quantités radicales ont la même dénomination, c'est-à-dire, qu'elles sont toutes des racines quarrées, ou toutes des racines cubiques, ou des racines quatrièmes; la multiplication s'en fait en multipliant les termes, comme s'il n'y avait point de signe radical, et en donnant au produit le radical commun. Ainsi $\sqrt{3}$ par $\sqrt{5}$ donne $\sqrt{15}$; et $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{cd}$ donne $\sqrt{abcd}$. Et $\sqrt[3]{5\,ay^2}$ par $\sqrt[3]{7\,ayz}$ donne $\sqrt[3]{35\,a^2y^3z}$; et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ par $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$ donne.....

Digitized by Google

$\sqrt{\frac{a^4 b^2}{c^2}}$ qui se réduit à $\frac{a^2 b}{c}$; et $2a\sqrt{az}$ par $3b\sqrt{az}$ donne $6ab\sqrt{a^2 z^2}$, ou bien $6a^2 bz$; et $\frac{3x^2}{\sqrt{ac}}$ par $-\frac{2x}{\sqrt{ac}}$ donne.... $-\frac{6x^3}{\sqrt{a^2 c^2}}$, ou bien $-\frac{6x^3}{ac}$; et $-\frac{4x\sqrt{ab}}{7a}$ par $-\frac{3d^2\sqrt{5cx}}{10c^2}$ donne $\frac{12d^2x\sqrt{5abcx}}{70ac^2}$.

Lorsque les quantités sont complexes, la multiplication s'en fait, en multipliant chaque partie du multiplicande par chaque partie du multiplicateur, comme on l'a enseigné pour la multiplication des nombres. Ainsi en multipliant $c - x$ par a, on obtient $ac - ax$; et $a^2 + 2ac - bc$ par $a - b$ donne $a^3 + 2a^2c - a^2b - 3abc + b^2c$. Car $a^2 + 2ac - bc$ par $-b$ donne $-a^2b - 2abc + b^2c$, et $a^2 + 2ac - bc$ par a donne $a^3 + 2a^2c - abc$, et la somme de ces deux produits est $a^3 + 2a^2c - a^2b - 3abc + b^2c$.

Je place ici cet exemple de multiplication avec quelques autres.

$$\begin{array}{rrrr}
 & a^2 & +2ac & -bc \\
 & & a & -b \\
\hline
 & -a^2b & -2abc & +b^2c \\
+a^3 & +2a^2c & -abc & \\
\hline
a^3 & +2a^2c & -a^2b & -3abc+b^2c
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
a & +b \\
a & +b \\
\hline
a^2 & +ab+ab+b^2 \\
\hline
a^2 & +2ab+b^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
a & +b \\
a & -b \\
\hline
a^2 & +ab \\
 & -ab-b^2 \\
\hline
a^2 & -b^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & y^2 & +2ay-\frac{1}{2}a^2 \\
 & & & y^2 & -2ay+a^2 \\
\hline
 & & & +a^2y^2 & +2a^3y-\frac{1}{2}a^4 \\
 & & -2ay^3 & -4a^2y^2 & +a^3y \\
+y^4 & +2ay^3 & -\frac{1}{2}a^2y^2 & & \\
\hline
y^4 & 0 & -3\frac{1}{2}a^2y^2 & +3a^3y & -\frac{1}{2}a^4
\end{array}$$

Digitized by Google

$$\frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$3a + \sqrt{\frac{ab^2}{c}}$$

$$\frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{ab^2}{c}} - \sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}}$$

$$\frac{6a^2x}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$\frac{6a^2x}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} + \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{ab^2}{c}} - \frac{a^2b}{c}$$

De la Division.

LA division dans les nombres se fait en cherchant combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, et en écrivant au quotient un chiffre qui indique ce nombre de fois. On réitère cette opération autant de fois qu'il est possible de soustraire le diviseur du dividende.

Ainsi pour diviser 63 par 7, cherchez combien de fois 7 est contenu dans 63, et vous trouverez qu'il y est contenu exactement neuf fois. Par conséquent $\frac{63}{7}$ vaut 9. S'agit-il de diviser 371 par 7? Ecrivez 7 à la suite du nombre 371, comme vous pouvez le voir dans l'exemple ci-à-côté. Et commençant l'opération par les premières figures à gauche du dividende, dites: en 37 combien de fois 7? Réponse, 5. Alors écrivez 5 au quotient; multipliez 5 par 7, et ôtez le produit 35 de 37, il restera 2, à côté duquel descendez la dernière figure du dividende, et le reste sera 21, sur lequel il faut encore recommencer l'opération. Dites donc comme auparavant

371	7
35	53
21	
21	
0	

Digitized by Google

auparavant; combien de fois 7 est-il contenu dans 21? Réponse, 3. Ainsi écrivez 3 au quotient, et ôtez le produit 3 × 7 ou 21 de 21, et il restera 0. D'où il résulte que 53 est le quotient ou le nombre exact qui provient de la division de 371 par 7.

Pour diviser 4798 par 23, commencez par les premières figures 47, et dites: combien de fois 23 est-il contenu dans 47? Réponse, 2. Ecrivez 2 au quotient, et de 47 ôtez 2 × 23, ou 46, et le reste est 1, à côté duquel descendez la figure suivante du dividende, c'est-à-dire 9; et alors votre nouveau dividende est 19. Dites donc, en 19 combien de fois 23? Réponse, 0. Ecrivez 0 au quotient, et descendez à côté de 19 la dernière Figure 8, ce qui forme 198, qu'il faut encore diviser. Dites donc combien de fois 23 est-il contenu dans 198 (chose qu'on peut facilement conjecturer en considérant les premiers nombres, et en estimant le nombre de fois que 2 peut être contenu dans 19). Réponse, 8. Ainsi écrivez 8 au quotient, et de 198 retranchez 8 × 23, ou 184, et le reste sera 14, qu'il faudra encore diviser par 23. Ainsi le quotient sera 208 $\frac{14}{23}$. Mais si l'on ne veut pas de la fraction $\frac{14}{23}$, on peut, au moyen des nombres décimaux, pousser la division aussi loin qu'on voudra, en mettant toujours un 0 à côté du reste. Ainsi à côté du reste 14 je mets 0, et il devient 140. Alors dites: en 140 combien de fois 23? Réponse, 6. Ecrivez 6 au quotient, et de 140 retranchez 6 × 23, ou 138, et il restera 2. Ajoutez-y un 0 comme auparavant; et après avoir poussé l'opération aussi loin que vous voudrez, vous aurez enfin pour quotient 208,6086, etc.

```
4798 | 23
46   |-------
     | 208,608, etc.
 198 |
 184 |
 140
 138
  200
  184
   160
```


Digitized by Google

On divisera de la même manière la fraction décimale 3,5218 par une autre fraction décimale 46,1, et le quotient sera 0,07639. On doit remarquer ici qu'il faut qu'il y ait dans le quotient autant de décimales qu'il y en a dans le dernier dividende de plus que dans le diviseur. Ainsi, dans cet exemple, le diviseur en contient une, le dernier dividende 0,004370 en contient six; il doit donc y en avoir cinq au quotient.

```
3,5218 | 46,1
3 227  |-------
-------| 0,07639
0,2948 |
0,2766 |
-------
0,01820
0,01383
-------
0,004370
```

Nous plaçons ici plusieurs exemples pour servir d'éclaircissemens.

```
20844115 | 9043
18086    |-----
-------  | 2305
 27581   |
 27129   |
-------
  45215
  45215
-------
      0
```

```
2099,6 | 72,4
1448   |-----
------ | 29
  6516 |
  6516 |
------
     0
```

```
137,995 | 50,18
10036   |------
------  | 2,75
 37635  |
 35126  |
------
  25090
  25090
------
      0
```

```
0,051513 | 0,0132
   396   |-------
-------  | 3,9025
0,01191  |
   1188  |
-------
0,0000330
      264
---------
0,00000660
       660
---------
        0
```

Digitized by Google

La division des quantités algébriques se fait en décomposant tout ce qui s'est fait par voie de multiplication. Ainsi ab divisé par a, donne b au quotient. $6ab$ divisé par $2a$, donne $3b$, et divisé par $-2a$, donne $-3b$. $-6ab$ divisé par $2a$, donne $-3b$, et divisé par $-2a$, donne $3b$. $16abc^3$ divisé par $2ac$, donne $8bc^2$. Et $-84a^3x^4$ divisé par $-12a^2x^2$, donne $7ax^2$. Enfin $\frac{6}{35}$ divisé par $\frac{2}{5}$, donne $\frac{3}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ divisé par $\frac{a}{b}$, donne $\frac{c}{d}$. $-\frac{21ac^2y^3}{8b^5}$ divisé par $\frac{3acy}{2b^2}$, donne $-\frac{7cy^2}{2b^3}$. $\frac{6}{5}$ divisé par 3, donne $\frac{6}{15}$ ou $\frac{2}{5}$. Et $\frac{6}{5}$ divisé par $\frac{2}{5}$, donne $\frac{3}{1}$ ou 3. $\frac{30a^3z}{c^2}$ divisé par $2a$, donne $\frac{15a^2z}{c^2}$. Et $\frac{15a^2z}{c^2}$ divisé par $2a$, donne $\frac{15az}{2c^2}$. $\sqrt{15}$ divisé par $\sqrt{3}$, donne $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ divisé par $\sqrt{cd}$, donne $\sqrt{ab}$; et par $\sqrt{ab}$, donne $\sqrt{cd}$. $\sqrt{a^3c}$ par $\sqrt{ac}$, donne $\sqrt{a^2}$ ou a..... $\sqrt[3]{35a^2y^3z}$ divisé par $\sqrt[3]{5ay^2}$, donne $\sqrt[3]{7ayz}$. $\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}}$ divisé par $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$, donne $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$. $\frac{12d^2x\sqrt{5abcx}}{70ac^2}$ divisé par —..... $\frac{3d^2\sqrt{5cx}}{10c^2}$, donne $-\frac{4x\sqrt{ab}}{7a}$. De même $\overline{a+b}\sqrt{ax}$ divisé par $a+b$, donne $\sqrt{ax}$. Et réciproquement divisé par $\sqrt{ax}$, donne $a+b$. Et $\frac{a}{a+b}\cdot\sqrt{ax}$ divisé par $\frac{1}{a+b}$, donne $a\sqrt{ax}$. Ou divisé par a, donne $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$. Et réciproquement $\frac{a}{a+b}\cdot\sqrt{ax}$ divisé par $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$, donne a. Au reste, dans ces sortes de divisions, il faut prendre garde à ne diviser les unes par les autres que des quantités de même espèce; c'est-à-dire, des nombres par des nombres, des

Digitized by Google

lettres par des lettres; des quantités radicales par d'autres quantités radicales; les numérateurs des fractions par des numérateurs; les dénominateurs par des dénominateurs, etc. Et de plus, dans les numérateurs, les dominateurs et les radicaux, il ne faut diviser les quantités d'une espèce quelconque que par leurs homogènes.

Si la quantité à diviser ne peut pas être décomposée par le diviseur, il suffit, lorsque les deux quantités sont entières, d'écrire le diviseur au-dessous du dividende, en les séparant par une petite ligne. Ainsi pour diviser ab par c, on écrit $\frac{ab}{c}$; et pour diviser..... $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ par a, on écrit $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ ou $\frac{a+b}{a}\cdot\sqrt{cx}$. De même $\sqrt{ax-x^2}$ divisé par $\sqrt{cx}$, donne $\frac{\sqrt{ax-x^2}}{\sqrt{cx}}$ ou $\sqrt{\frac{ax-x^2}{cx}}$. Et $\overline{a^2+ab}\sqrt{a^2-2x^2}$ divisé par $\overline{a-b}\sqrt{a^2-x^2}$, donne..... $\frac{a^2+ab}{a-b}\sqrt{\frac{a^2-2x^2}{a^2-x^2}}$. Et $12\sqrt{5}$ divisé par $4\sqrt{7}$ donne $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Lorsqu'il faut diviser l'une par l'autre des fractions, multipliez le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, et le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur, le premier produit sera le numérateur du quotient, et le second le dénominateur de ce même quotient. Ainsi, pour diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, il faut écrire $\frac{ad}{bc}$, en multipliant a par d et b par c. Par la même raison, $\frac{3}{7}$ divisé par $\frac{5}{4}$, donne $\frac{12}{35}$. Et $\frac{3a}{4c}\cdot\sqrt{ax}$ divisé par $\frac{2c}{5a}$, donne $\frac{15a^2}{8c^2}\sqrt{ax}$; mais divisé par $\frac{2c\sqrt{a^2-x^2}}{5a\sqrt{ax}}$, donne.... $\frac{15a^3x}{8c^2\sqrt{a^2-x^2}}$. De même $\frac{ab}{d}$ divisé par c, donne $\frac{ab}{cd}$. Et c ou

Digitized by Google

$\frac{c}{1}$ divisé par $\frac{ab}{d}$, donne $\frac{cd}{ab}$. Et $\frac{3}{7}$ divisé par 5, donne $\frac{3}{35}$. Et 3 divisé par $\frac{5}{4}$, donne $\frac{12}{5}$. Et $\frac{a+b}{c} \cdot \sqrt{cx}$ divisé par a, donne... $\frac{a+b}{ac}\sqrt{cx}$. Et $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ divisé par $\frac{a}{c}$, donne $\frac{ac+bc}{a}\sqrt{cx}$. Et $2\sqrt{\frac{ax^2}{c}}$ divisé par $3\sqrt{cd}$, donne $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^2}{c^2d}}$. Et $2\sqrt{\frac{ax^2}{c}}$ divisé par $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$, donne $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{c^2d}}$. Et $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$ divisé par..... $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, donne $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$. Ainsi du reste.

Lorsque le dividende est complexe, il faut diviser chacun de ses termes par le diviseur. Ainsi $a^2 + 3ax - x^2$ divisé par a, donne pour quotient $a + 3x - \frac{x^2}{a}$. Mais lorsque le diviseur est aussi lui-même complexe, il faut ordonner l'opération comme pour la division des nombres. Ainsi, pour diviser $a^3 + 2a^2c - a^2b - 3abc + b^2c$ par $a - b$, dites: combien de fois a est-il contenu dans a^3, c'est-à-dire, le premier terme du diviseur dans le premier terme du dividende? Réponse, a^2. Ecrivez donc a^2 au quotient. Et après avoir retranché du dividende le produit du quotient a^2 par le diviseur $a - b$, ou $a^3 - a^2b$, le reste sera $2a^2c - 3abc + b^2c$, qu'il faut encore diviser. Dites donc de nouveau: combien de fois a est-il contenu dans $2a^2c$? Réponse, $2ac$. Ecrivez $2ac$ au quotient, et retranchez le produit de $2ac$ par $a - b$, ou $2a^2c - 2abc$, le reste sera $-abc + b^2c$. Dites encore: combien de fois a est-il contenu dans $-abc$? Réponse, $-bc$. Ecrivez $-bc$ au quotient, et retranchant son produit par $a - b$, ou $-abc + b^2c$ du dernier dividende, il ne restera rien. Ce qui marque que la division se fait exactement, et que le quotient est $a^2 + 2ac - bc$.

Au reste pour ramener des opérations de cette espèce à la forme

Digitized by Google

que nous avons employée pour la division des nombres, il faut ordonner les termes, tant du dividende que du diviseur, par rapport aux puissances d'une même lettre; de manière qu'on placera au premier rang le terme où cette lettre a le plus grand nombre de dimensions; au second rang, celui où les dimensions de cette même lettre approchent le plus de celles qu'elle a dans le premier terme, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à des termes où cette lettre n'est plus facteur, et qu'on placera pour cette raison au dernier rang. Ainsi dans la division que nous avons faite plus haut, qu'on ordonne tous les termes par rapport aux dimensions de la lettre a, et l'exemple que nous allons mettre sous les yeux donnera une idée de la forme que nous demandons.

On peut voir dans cet exemple que le terme a^3, où a est de trois dimensions, occupe la première place du dividende, et que les termes $2a^2c$ et $-a^2b$, où a est de deux dimensions, occupent la seconde, et ainsi du reste. On aurait pu écrire le dividende encore ainsi:

$$\begin{array}{l|l} a^3 + 2a^2c - 3abc + b^2c & a - b \\ \quad - a^2b & \overline{a^2 + 2ac - bc} \\ \hline a^3 - a^2b & \\ \hline 0 + 2a^2c - 3abc + b^2c & \\ \quad + 2a^2c - 2abc & \\ \hline \quad 0 \quad - abc + b^2c & \\ \qquad\quad - abc + b^2c & \\ \hline \qquad\qquad 0 \quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} a^3 \begin{array}{l} + 2c \\ - b \end{array} & a^2 - 3bca + b^2c, \end{array}$$

où l'on n'a écrit qu'une seule fois au second rang la lettre par rapport à laquelle toute l'opération a été ordonnée. Si l'on voulait ordonner l'opération par rapport à la lettre b, il faudrait disposer les termes comme on le

Digitized by Google

voit dans l'exemple suivant, auquel on a cru à propos de joindre une explication.

Dites : combien de fois $-b$ est-il contenu dans cb^2? Réponse, $-cb$. Ecrivez donc $-cb$ au quotient, et retranchez du dividende le produit de $-cb$ par le diviseur $-b+a$, ou $cb^2 - abc$, et il restera au second rang $\begin{matrix}-2ac\\-a^2\end{matrix}\Big|\, b$. Ajoutez à ce reste, si vous voulez, les quantités qui occupent le dernier rang, c'est-à-dire $\begin{matrix}a^3\\+2a^2c\end{matrix}$, et dites encore combien de fois $-b$ est-il contenu dans $\begin{matrix}-2ac\\-a^2\end{matrix}\Big|\, b$? Réponse, $\begin{matrix}+2ac\\+a^2\end{matrix}$. Ecrivez ces quantités au quotient, et les multipliant par le diviseur, retranchez du reste du dividende leur produit, ou ..... $\begin{matrix}-2ac\\-a^2\end{matrix}\Big|\, b\begin{matrix}+a^3\\+2a^2c\end{matrix}$, et il ne restera rien. D'où on peut conclure que la division est achevée, et que le quotient est comme auparavant $-bc+2ac+a^2$.

$$
\begin{array}{l|l|l}
cb^2 \begin{matrix}-3ac\\-a^2\end{matrix} & b\begin{matrix}+a^3\\+2a^2c\end{matrix} & -b+a \\
\hline
cb^2 - abc & & -bc+2ac \\
 & & \quad +a^2 \\
\hline
0 \begin{matrix}-2ac\\-a^2\end{matrix} & b\begin{matrix}+a^3\\+2a^2c\end{matrix} & \\
\begin{matrix}-2ac\\-a^2\end{matrix} & b\begin{matrix}+2a^2c\\+a^3\end{matrix} & \\
\hline
0 \qquad 0 & &
\end{array}
$$

Digitized by Google

S'il faut diviser $a^2y^4 - a^2c^4 + y^2c^4 + y^6 - 2y^4c^2 - a^6 - 2a^4c^2 - a^4y^2$ par $y^2 - a^2 - c^2$; ordonnez les quantités par rapport à la lettre y en cette manière. . . . . .

$$\begin{array}{l|l|l|l}
y^6 \begin{array}{l} +a^2 \\ -2c^2 \end{array} & y^4 \begin{array}{l} +c^4 \\ -a^4 \end{array} & y^2 \begin{array}{l} -a^2c^4 \\ -a^6 \\ -2a^4c^2 \end{array} & y^2 \begin{array}{l} -a^2 \\ -c^2 \end{array} \\ \hline
 & & & y^4 \begin{array}{l} +2a^2 \\ -c^2 \end{array} \quad y^2 \begin{array}{l} +a^4 \\ +a^2c^2 \end{array}
\end{array}$$

Ensuite faites la division comme dans l'exemple ci-à-côté.

$$\begin{array}{l|l}
y^6 \begin{array}{l} -a^2 \\ -c^2 \end{array} & y^4 \\ \hline
0 \begin{array}{l} +2a^2 \\ -c^2 \end{array} & y^4
\end{array}$$

On propose aussi d'autres exemples de division sur lesquels il est bon d'observer, que lorsque les termes sont ordonnés par rapport à une lettre, et que toutes les dimensions de cette lettre ne se suivent pas selon la même progression arithmétique, mais qu'il se fait dans quelques endroits des sauts d'un terme à l'autre, il faut marquer les places vacantes par une astérisque *.

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l} +2a^2 \\ -c^2 \end{array} & y^4 \begin{array}{l} -2a^4 \\ -a^2c^2 \\ +c^4 \end{array} \quad y^2 \\ \hline
0 & \\
 & \begin{array}{l} +a^4 \\ +a^2c^2 \end{array} \quad y^2 \\
 & \begin{array}{l} +a^4 \\ +a^2c^2 \end{array} \quad y^2 \begin{array}{l} -a^6 \\ -2a^4c^2 \\ -a^2c^4 \end{array} \\ \hline
 & 0 \qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
a^2 \quad * \quad -b^2 & \begin{array}{l} a+b \\ \hline a-b \end{array} \\ \hline
a^2 + ab & \\ \hline
0 - ab & \\
\quad -ab - b^2 & \\ \hline
\quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

y^4

Digitized by Google

$$
\begin{array}{l|l}
y^4 \quad * \quad -3\tfrac{1}{2}a^2y^2 + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 & y^2 - 2ay + a^2 \\
\hline
y^4 - 2ay^3 + a^2y^2 & y^2 + 2ay - \tfrac{1}{2}a^2 \\
\hline
0 + 2ay^3 - 4\tfrac{1}{2}a^2y^2 & \\
\quad + 2ay^3 - 4a^2y^2 + 2a^3y & \\
\hline
\qquad 0 - \tfrac{1}{2}a^2y^2 + a^3y & \\
\qquad\quad - \tfrac{1}{2}a^2y^2 + a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
a^4 \quad * \quad * \quad * \quad + \quad b^4 & a^2 + ab\sqrt{2} + b^2 \\
\hline
a^4 + a^3b\sqrt{2} + a^2b^2 & a^2 - ab\sqrt{2} + b^2 \\
\hline
\quad - a^3b\sqrt{2} - a^2b^2 & \\
\quad - a^3b\sqrt{2} - 2a^2b^2 - ab^3\sqrt{2} & \\
\hline
\qquad + a^2b^2 + ab^3\sqrt{2} & \\
\qquad + a^2b^2 + ab^3\sqrt{2} + b^4 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

Quelques auteurs commencent la division par les derniers termes; mais on arrive aux mêmes résultats si, en renversant l'ordre des termes, on commence par les premiers.

Il y a encore d'autres méthodes de faire la division; mais il suffit de connaître la plus facile et la plus commode.

Digitized by Google

DE L'EXTRACTION DES RACINES.

Lorsqu'on veut extraire la racine quarrée d'un nombre, il faut partager ce nombre en tranches de deux chiffres chacune, par une petite virgule, en partant de l'unité; ensuite il faut écrire au quotient ou à la racine la Figure dont le quarré est égal aux Figures qui précèdent la première virgule, ou du moins la Figure dont le quarré approche le plus des Figures ou de la Figure précédant la première virgule. Et après avoir retranché ce quarré, on trouvera successivement les autres chiffres de la racine, en divisant le reste par le double de la partie trouvée de la racine, ayant soin chaque fois qu'on trouve une nouvelle Figure à la racine de la multiplier par elle-même, et par le double des Figures déjà trouvées, et de retrancher ce produit du reste.

Ainsi pour extraire la racine de 99856, séparez par des virgules de cette manière. . . . 9,98,56 | 316
Ensuite cherchez le nombre dont le quarré égale la première Figure 9, c'est 3. Ecrivez-le au quotient; et de 9 ôtez 3 × 3 ou 9, le reste sera 0, à côté duquel vous descendrez la tranche suivante 98; et négligeant la dernière Figure 8, dites : combien de fois le double de 3, ou 6, est-il contenu dans la première 9? Rép. 1. Ecrivez donc 1 au quotient, et ôtez 1 × 61, ou 61 de 98, et il restera 37, à côté duquel descendez les dernières Figures 56, et il viendra 3756; nombre sur lequel il faut recommencer l'opération. Ainsi négligeant la dernière Figure 6, dites : combien de fois le double de 31, ou 62,

9
0 98
61
3756
3756
0

Digitized by Google

est-il contenu dans 375 ? (On peut facilement conjecturer la réponse en voyant combien la première Figure 6 du diviseur est contenue de fois dans les deux premières 37 du dividende.) Rép. 6. Ecrivez 6 au quotient, et retranchez 6 × 626, ou 3756, et il ne restera rien; ce qui prouve que l'opération est achevée, et que la racine est 316.

Si on demande la racine de 22178791, commencez par le séparer en tranches de deux chiffres en allant de droite à gauche, et opérant sur les deux Figures qui précèdent la première virgule, cherchez quel est le nombre dont le quarré approche le plus de 22 (je dis, approche le plus, car il n'est aucun nombre dont le quarré soit exactement égal à 22), vous trouverez que c'est 4; car 5 × 5, ou 25, est plus grand que 22, et 4 × 4 est plus petit; donc 4 sera la première Figure de la racine. Ecrivez donc 4 à la racine, et de 22 ôtez 4 × 4, ou 16, et il restera 6. A côté de ce reste, descendez la tranche suivante 17, et vous aurez 617 qui, étant divisé par le double de 4, vous donnera la seconde Figure de la racine. Négligez donc la dernière Figure 7, et dites: combien de fois 8 est-il contenu dans 61 ? Rép. 7. Ecrivez 7 au quotient, et de 617 ôtez le produit de 7 par 87, ou 609, et il restera 8. A côté de ce reste descendez les deux Figures suivantes 87, et vous aurez 887,

```
22,17,87,91 | 4709,43637, etc.
16          |
----
 617
 609
-----
   88791
   84681
  -------
    4110,00
    3767 36
   --------
     3426400
     2825649
    ---------
      60075100
      56513196
     ----------
       356190400
       282566169
      ----------
        73624231
```


Digitized by Google

qui, étant divisé par le double de 47, ou 94, vous donnera la troisième Figure de la racine. Dites par conséquent : combien de fois 94 est-il contenu dans 88? Rép. 0. Ecrivez donc 0 au quotient, et descendez encore à côté de votre nombre les deux dernières Figures 91, et vous aurez 88791, qui, étant divisé par le double de 470, ou 940, donnera la dernière Figure de la racine. Dites donc : combien de fois 940 est-il contenu dans 8879? Rép. 9. Ecrivez 9 au quotient, et vous aurez pour racine 4709.

Mais ayant fait le produit de 9 par 9409, ou 84681, et l'ayant retranché de 88791, il reste 4110, ce qui annonce que 4709 n'est pas la racine exacte du nombre 22178791, mais qu'elle est un peu plus petite. Alors dans ce cas, et dans tous ceux qui lui ressemblent, si on veut approcher plus près de la véritable racine, il faut continuer l'opération par les décimales, en ajoutant, pour chaque nouvelle opération, deux zéros à côté du reste. Ainsi au dernier reste 4110 ajoutant deux zéros, il devient 411000; et si on divise ce nombre par le double de 4709, ou 9418, on obtiendra la première Figure décimale, c'est-à-dire 4. Ecrivez donc 4 au quotient, et retranchez son produit par 94184, ou 4 × 94184, ou 376736 du nombre 411000, et il restera 34264. Placez encore deux zéros à la droite de ce nombre, et poussez de cette manière l'opération aussi loin que vous jugerez à-propos, vous aurez enfin pour racine 4709,43637, etc.

Lorsqu'on est parvenu par la méthode que nous venons d'enseigner, à obtenir la moitié ou plus des chiffres qu'on se propose d'avoir à la racine, on peut obtenir les autres par la seule division. Ainsi dans l'exemple actuel, si nous voulons extraire la racine jusqu'à la neuvième Figure; après avoir trouvé les cinq premières 4709,4,

Digitized by Google

on peut obtenir les quatre dernières 3637 en divisant le reste 34264 par le double de 4709,4.

Par exemple, si on demande la racine de 32976 poussée jusqu'à cinq Figures : après avoir partagé ce nombre en tranches, comme à l'ordinaire, écrivez 1 au quotient, parce que 1 × 1, ou le quarré de 1 est le plus grand quarré contenu dans 3 qui précède la première virgule; retranchez 1 de 3, et il restera 2, à côté duquel descendez la tranche suivante 29, ce qui fera 229. Négligez la dernière Figure 9, et divisez 22 par le double de 1, ou 2, et vous trouverez qu'il y est plus de dix fois; mais il n'est jamais permis de prendre le diviseur dix fois, ici même on ne peut pas le prendre neuf fois, parce que 9 × 29, ou 261, est plus grand que 229, d'où il faudrait le retrancher; ainsi écrivez seulement 8 au quotient, et ôtant 8 × 28, ou 224 de 229, il restera 5, à côté duquel descendant les deux dernières Figures 76, vous aurez 576. Cherchez combien le double de 18, ou 36, est contenu de fois dans 57, et vous trouverez qu'il y est 1. Ecrivez 1 au quotient, et retranchant le produit 1 × 361, ou 361, de 576, il restera 215. Enfin, pour obtenir les autres Figures, divisez le reste 215 par le double de 181, ou 362, et vous trouverez les deux Figures 59 que vous écrirez au quotient, et la racine sera 181,59.

```
3,29,76 | 181,59
1       |
-------
229
224
-----
  576
  361
  ---
  215
```

On tire, par la même méthode, la racine des nombres décimaux. Ainsi la racine de 329,76 est 18,159; et celle de 3,2976 est 1,8159; et celle de 0,032976 est 0,18159, et ainsi du reste. Mais celle de

Digitized by Google

3297,6 est 57,4247; et celle de 32,976 est 5,74247. De même la racine de 9,9856 est 3,16; mais celle de 0,99856 est 0,999279, etc. On peut se convaincre de la vérité de ces résultats par les exemples que nous plaçons ci-dessous. Un point avec une virgule sépare les décimales d'avec les entiers.

32,97;6	57,4247	0;99,85,6	0,999279, etc.
25		81	
797		1885	
749		1701	
4860		18460	
4576		17901	
284	1148	559	1998
	247		279

Je comprendrai dans une règle générale l'extraction de la racine cubique et de toutes les autres : la méthode en est facile à comprendre, quoique la pratique en soit assez longue; mais pour ne pas retarder la marche des commençans, je glisserai légèrement sur des calculs d'un usage très-peu commun.

Il faut partager toute la quantité en tranches de trois chiffres à compter des unités, si on cherche une racine cubique, et en tranches de cinq chiffres, si c'est une racine cinquième, etc.; ensuite écrire au quotient une Figure dont le cube ou la cinquième puissance (selon qu'on cherche une racine cubique ou une racine cinquième) égale la Figure ou les Figures qui précèdent la première virgule, ou du moins qui en approche le plus en moins; et ayant retranché cette puissance, vous obtiendrez le second chiffre de la racine en divisant le reste auquel vous aurez joint le premier chiffre de la tranche

Digitized by Google

suivante, par le quotient élevé à une puissance immédiatement inférieure, et multiplié par un chiffre qui soit l'exposant de la puissance supérieure; c'est-à-dire, en divisant par le triple du quarré du quotient pour une racine cubique, et par le quintuple de la quatrième puissance du quotient pour une racine cinquième, etc.; ensuite élevant le quotient trouvé à la puissance dont on cherche la racine, et le retranchant du nombre donné, on trouvera le troisième chiffre de la racine, en divisant ce reste augmenté du premier chiffre de la tranche suivante, par le quotient élevé à la puissance immédiatement inférieure, et multiplié par l'exposant de la puissance supérieure; et ainsi jusqu'à l'infini.

Ainsi, pour extraire la racine cubique de 13312053, il faut commencer par partager ce nombre par des virgules en cette manière 13,312,053; ensuite il faut écrire au quotient le nombre 2, dont le cube est 8, cube qui approche le plus en moins de la valeur de 13, et dont il faut se contenter, puisqu'il n'y a point de cube qui égale 13. Retranchez-le, et le reste est 5, à côté duquel descendez la première Figure de la tranche suivante, vous aurez 53, qui, étant divisé par le triple du quarré de 2, ou 12, donne pour seconde Figure de la racine, 4. Mais comme la racine 24 élevée au cube donnerait 13824, nombre trop grand pour pouvoir être retranché de 13312 qui précède la seconde virgule, il faut seulement écrire 3 au quotient. Alors, sur un papier à part, faites le produit de 23 par 23, et vous aurez 529, qui, étant de nouveau multiplié par 23, donnera 12167 pour le cube de 23. Retranchez-le de 13312, le reste sera 1145;

13,312,053	237
8	4×3
53	
$\frac{53}{12}$ donne 4 ou 3	
12167	
11450	
13312053	
0	

Digitized by Google

à côté de ce reste descendez 0, premier chiffre de la dernière tranche, ce qui donne 11450; divisez ce nombre par le triple du quarré de 23, ou par 3×529, ou par 1587, vous aurez 7 au quotient, et c'est le troisième chiffre de la racine. Alors 237 élevé au quarré, donne 56169, et ce quarré multiplié de nouveau par 237, donne le cube 13312053, et ce dernier nombre retranché du nombre donné, il ne reste rien, ce qui fait voir que la racine est exactement 237.

Ainsi, pour trouver la racine cinquième 36430820, séparez par une virgule cinq Figures vers la droite, et 3, dont la cinquième puissance 243 approche le plus en moins du nombre 364, qui est à la gauche de la virgule, est bon pour le premier chiffre de la racine; retranchez sa cinquième puissance 243 de 364, il restera 121, à côté duquel descendant 3, premier chiffre de la seconde tranche, vous aurez 1213,

364,30820	32,5
243	405
1213	
33554432	5242880
28763880	

qui, étant divisé par le quintuple de la quatrième puissance de 3, ou par 5×81, ou par 405, donnera au quotient 2 pour la seconde Figure de la racine. Le quotient 32, multiplié trois fois par lui-même, sera élevé à sa quatrième puissance 1048576, et ce dernier produit, multiplié de nouveau par 32, formera la cinquième puissance de 32, ou bien 33554432, qui, retranché du nombre donné, laisse pour reste 2876388. Ainsi 32 est en nombres entiers la seule racine qu'on doive espérer, mais elle n'est pas exacte. Si donc l'on veut continuer l'opération par les décimales, il faut placer un 0 à côté du dernier reste, et diviser le nombre qui en proviendra par le quintuple de la quatrième puissance du quotient déja trouvé, en cherchant, par exemple, combien de fois 5 × 1048576, ou 5242880,

est

Digitized by Google

est contenu dans 28763880, et il viendra au quotient 5, troisième Figure de la racine et la première décimale; et en ôtant du nombre donné la cinquième puissance de 32,5, et divisant le reste par le quintuple de sa quatrième puissance, on pourra obtenir le quatrième chiffre de la racine; et ainsi du reste jusqu'à l'infini.

Lorsqu'il faut extraire une racine quarrée-quarrée, on y parvient en extrayant deux fois la racine quarrée, parce que $\sqrt[4]{}$ vaut $\sqrt[2\times 2]{}$. Et lorsqu'il s'agit d'une racine cubo-cubique, il faut d'abord tirer la racine cubique, et ensuite la racine quarrée, parce que $\sqrt[6]{}$ vaut $\sqrt[3\times 2]{}$. C'est de-là, que quelques-uns ont cru qu'il ne fallait pas appeler cette espèce de racine cubo-cubique, mais quarrée-cubique. Il faut étendre cette observation à toutes les racines dont les exposans ne sont point des nombres premiers.

Lorsqu'il s'agit d'extraire les racines de quantités algébriques simples, l'opération n'a aucune difficulté. Il est clair, par exemple, que $\sqrt{aa}$ est a, et que $\sqrt{aacc}$ est ac, et que $\sqrt{9aacc}$ est $3ac$. Que.... $\sqrt{49a^4xx}$ est $7aax$. Et de même $\sqrt{\frac{a^4}{c^2}}$ ou $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{c^2}}$ est $\frac{a^2}{c}$. Et.. $\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}}$ est $\frac{a^2b}{c}$. $\sqrt{\frac{9a^2z^2}{25b^2}}$ est $\frac{3az}{5b}$. Et encore $\sqrt{\frac{4}{9}}$ est $\frac{2}{3}$..... $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{27a^3}}$ est $\frac{2b^2}{3a}$. Et $\sqrt[4]{a^2b^2}$ est $\sqrt{ab}$. Il n'est pas moins évident que $b\sqrt{a^2c^2}$ ou b multipliant $\sqrt{a^2c^2}$, vaut b multipliant ac, ou abc. Et que $3c\sqrt{\frac{9a^2z^2}{25b^2}}$ vaut $3c.\frac{3az}{5b}$ ou $\frac{9acz}{5b}$. Et que... $\frac{a+3x}{c}\sqrt{\frac{4b^2x^4}{81a^2}}$ vaut $\frac{a+3x}{c}.\frac{2bx^2}{9a}$, ou bien..... $\frac{2abx^2}{9ac}+\frac{6bx^3}{9ac}$.

Digitized by Google

J'ai dit que toutes ces opérations étaient fort claires; qui ne voit effectivement du premier coup-d'œil que les racines que nous avons trouvées étant multipliées par elles-mêmes, reproduiront les puissances dont nous avons dit qu'elles étaient les racines? Ainsi a par a donne a^2; ac par ac donne a^2c^2; $3ac$ par $3ac$ donne $9a^2c^2$, etc. Mais lorsque les quantités sont complexes, il faut ordonner l'opération comme pour les nombres. Ainsi, pour extraire la racine quarrée de $a^2 + 2ab + b^2$, il faut d'abord tirer la racine quarrée du premier terme, qui est a, et l'écrire au quotient; ensuite retrancher son quarré a^2, et il restera $2ab + b^2$, qui nous fournira l'autre partie de la racine. Dites donc: combien de fois le double du quotient, ou $2a$, est-il contenu dans le premier terme du reste, c'est-à-dire dans $2ab$? Rép. b. Ecrivez b au quotient, et retranchez son produit par $2a + b$, ou $2ab + b^2$, il ne restera rien, ce qui indique que l'opération est terminée, et que la racine est $a + b$.

$$\begin{array}{l|l}
a^2 + 2ab + b^2 & a + b \\
a^2 & \\
\hline
0 + 2ab + b^2 & \\
\quad 2ab + b^2 & \\
\hline
\quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Ainsi pour extraire la racine $a^4 + 6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$, commencez d'abord par écrire au quotient la racine du premier terme a^4, c'est-à-dire a^2, et retranchant son quarré $a^2 \times a^2$, ou bien a^4, il restera $6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$. Pour en tirer le reste de la racine, dites: combien de fois $2a^2$

$$\begin{array}{l|l}
a^4 + 6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4 & a^2 + 3ab - 2b^2 \\
a^4 & \\
\hline
0 & \\
\quad 6a^3b + 9a^2b^2 & \\
\hline
\quad 0 \quad - 4a^2b^2 & \\
\qquad - 4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4 & \\
\hline
\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

Digitized by Google

est-il contenu dans $6a^3b$? Rép. $3ab$. Ecrivez donc $3ab$ à la racine, et retranchant son produit par $2a^2 + 3ab$, ou $6a^3b + 9a^2b^2$, il restera encore $-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$. Dites de nouveau : combien de fois le double du quotient, ou $2a^2 + 6ab$, est-il contenu dans le reste; ou, ce qui revient au même, combien de fois le double du premier terme du quotient $2a$, est-il contenu dans $-4a^2b^2$, premier terme du reste? Rép. $-2b^2$. Ecrivez $-2b^2$ au quotient, et retranchant le produit de $-2b^2$ par $\overline{2a^2 + 6ab - 2b^2}$, ou $-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$, il ne reste rien; ce qui annonce que la racine est $a^2 + 3ab - 2b^2$.

De même la racine de $x^2 - ax + \frac{a^2}{4}$ est $x - \frac{a}{2}$. La racine de $y^4 + 4y^3 - 8y + 4$ est $y^2 + 2y - 2$; et enfin la racine de $16a^4 - 24a^2x^2 + 9x^4 + 12b^2x^2 - 16a^2b^2 + 4b^4$ est $3x^2 - 4a^2 + 2b^2$. On pourra suivre la marche de toutes ces opérations dans les exemples suivans.

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 - ax + \frac{a^2}{4} & x - \frac{1}{2}a \\
\underline{x^2} & \\
0 & \\
\quad -ax + \frac{a^2}{4} & \\
\quad \underline{-ax + \frac{a^2}{4}} & \\
\qquad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l|l}
9x^4 - 24a^2 + 12b^2 & x^2 + 16a^4 - 16a^2b^2 + 4^4b & 3x^2 - 4a^2 + 2b^2 \\
\underline{9x^4} & & \\
0 & & \\
\quad -24a^2 + 12b^2 & x^2 + 16a^4 - 16a^2b^2 + 4b^4 & \\
\quad \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} & & \\
\qquad 0 & \qquad 0 &
\end{array}
$$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{l|l}
y^4 + 4y^3 \quad * \quad -8y + 4 & y^2 + 2y - 2 \\
\underline{y^4} & \\
\quad 0 & \\
\quad \underline{+4y^3 + 4y^2} & \\
\qquad 0 \quad -4y^2 & \\
\qquad\quad \underline{-4y^2 - 8y + 4} & \\
\qquad\qquad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Si on veut la racine cubique de $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, l'opération se fait de la manière suivante. Tirez la racine du premier terme a^3 qui est a. Ecrivez a au quotient, et retranchant son cube a^3, dites : combien de fois le triple de son quarré $3a^2$ est-il contenu dans le premier terme du reste ? Rép. b. Ecrivez b au quotient, et ôtant le cube du quotient $a + b$, il ne restera rien. La racine est donc $a + b$.

$$
\begin{array}{l|l}
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & a + b \\
\underline{a^3} & \overline{3a^2} \\
0 & \\
\quad \underline{+3a^2b + 3ab^2 + b^3} & \\
\qquad 0 \quad 0 \quad 0 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

De même, si on voulait extraire la racine cubique de $z^6 + 6z^5 - 40z^3 + 96z - 64$, on trouverait $z^2 + 2z - 4$. On s'y prendrait d'une manière analogue pour les racines plus élevées.

De la réduction des Fractions et des quantités radicales.

La réduction des quantités fractionnaires et radicales soit à leurs moindres termes, soit à la même dénomination, est très-utile pour les opérations précédentes.

Digitized by Google

De la réduction des Fractions à leurs moindres termes.

On réduit les fractions à leurs moindres termes, en divisant leurs numérateurs et leurs dénominateurs par leur plus grand commun diviseur. Ainsi $\frac{a^2 c}{b c}$ se réduit à la fraction plus simple $\frac{a^2}{b}$, en divisant son numérateur et son dénominateur par c. $\frac{203}{667}$ peut se réduire à la fraction plus simple $\frac{7}{23}$, en divisant 203 et 667 par 29. Et $\frac{203 a^2 c}{667 b c}$ se réduit à $\frac{7 a^2}{23 b}$, en divisant haut et bas par $29c$. De même $\frac{6 a^3 - 9 a c^2}{6 a^2 + 3 a c}$ devient $\frac{2 a^2 - 3 c^2}{2 a + c}$, en divisant par $3a$. Et $\frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a^2 - a b}$ devient $\frac{a^2 + b^2}{a}$, en divisant par $a - b$.

Il arrive souvent qu'on peut réduire par cette méthode les résultats d'une multiplication ou d'une division. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de multiplier la fraction $\frac{2 a b^3}{3 c^2 d}$ par $\frac{9 a c^2}{b d^2}$, ou de la diviser par $\frac{b d^2}{9 a c^2}$, dans l'un et l'autre cas, on obtiendrait $\frac{18 a^2 b^3 c^2}{3 b c^2 d^3}$ qui peut se réduire à $\frac{6 a^2 b^2}{d^3}$. Mais dans des cas semblables, il vaut bien mieux réduire les quantités avant l'opération, en divisant par le plus grand commun diviseur.

Ainsi, dans l'exemple cité plus haut, je diviserai $2 a b^3$ et $b d^2$ par leur commun diviseur b; et $3 c^2 d$ et $9 a c^2$ par leur commun diviseur $3 c^2$. Par-là, on aura $\frac{2 a b^2}{d}$ à multiplier par $\frac{3 a}{d^2}$, ou à diviser par $\frac{d^2}{3 a}$, ce qui donnera la quantité toute réduite $\frac{6 a^2 b^2}{d^3}$, comme ci-dessus. Ainsi $\frac{a^2}{c}$ multipliée par $\frac{c}{b}$, devient $\frac{a^2}{1}$ multipliée par $\frac{1}{b}$ ou $\frac{a^2}{b}$. Et $\frac{a^2}{c}$ divisée par $\frac{b}{c}$, devient a^2 divisée par b, ou $\frac{a^2}{b}$. Et $\frac{a^3 - a x^2}{x^2}$ multipliée par $\frac{c x}{a^2 + a x}$, devient $\frac{a - x}{x}$ multipliée par $\frac{c}{1}$, ou bien $\frac{a c}{x} - c$. Et 28 divisé par $\frac{7}{3}$, devient 4 divisé par $\frac{1}{3}$ ou bien 12.

Digitized by Google

De la manière de trouver les Diviseurs.

C'EST ici que doit naturellement se placer la méthode de trouver les diviseurs.

Si la quantité est incomplexe, divisez-la par son moindre diviseur; divisez ensuite le quotient par son moindre diviseur, et continuez de la même manière, jusqu'à ce que vous parveniez à un quotient indivisible; alors vous aurez tous les premiers diviseurs de la quantité. Multipliez tous ces diviseurs deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., et vous aurez tous les diviseurs composés de la quantité.

S'il s'agit, par exemple, de trouver tous les diviseurs du nombre 60, divisez-le par 2, et le quotient 30 par 2, ensuite le quotient 15 par 3, il restera le quotient indivisible 5. Ainsi les diviseurs premiers sont : 1, 2, 2, 3, 5. Si on les combine en les multipliant deux à deux, on aura 4, 6, 10, 15; trois à trois, 12, 20, 30; et tous ensemble, 60.

Si on demandait tous les diviseurs de $21ab^2$; on n'a qu'à diviser cette quantité par 3; et son quotient par 7, et le second quotient par a; et le troisième par b; et il restera le quotient indivisible b. Ainsi les diviseurs premiers sont : 1, 3, 7, a, b, b. Les diviseurs composés deux à deux sont : 21, $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, bb; composés trois à trois, $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, abb; quatre à quatre, $21ab$, $21bb$, $3abb$, $7abb$; cinq à cinq $21abb$. On trouverait de la même manière tous les diviseurs de $2ab^2 - 6a^2c$; ils sont : 1, 2, a, $b^2 - 3ac$, $2a$, $2b^2 - 6ac$, $ab^2 - 3a^2c$, $2ab^2 - 6a^2c$.

Digitized by Google

Si la quantité, après avoir été divisée par tous les diviseurs simples, demeure encore composée, et qu'on soupçonne qu'elle contienne quelque diviseur composé; disposez-la selon les dimensions de quelqu'une de ses lettres, et substituez successivement à la place de cette lettre, trois ou un plus grand nombre de termes de la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, — 1, — 2. *Et il en résultera autant de valeurs différentes, que vous écrirez avec leurs diviseurs à côté des termes de la progression qui les auront produites; ayant soin d'écrire aussi chaque diviseur avec un signe positif et un signe négatif. Comparez les diviseurs qui se trouvent dans une ligne avec ceux des autres lignes, pour voir s'ils ne formeraient pas une progression arithmétique. Et pour cela, commencez par les plus forts, pour descendre aux plus faibles, en suivant la même marche que la progression arithmétique* 3, 2, 1, 0, — 1, — 2. *Si cette recherche vous fournit quelque progression dont les termes ne diffèrent que d'une unité, ou de quelque nombre qui divise la plus haute puissance de la quantité proposée, écrivez cette progression dans le même ordre que la première, plaçant chacun de ses termes à côté de la ligne des diviseurs qui l'a produit; et le terme qui, dans cette progression, répondra au terme* 0 *de la progression primitive, étant divisé par la différence des termes, et joint à la lettre à laquelle il avait été substitué, formera une quantité avec laquelle il faudra tenter la division* (1).

Si, par exemple, la quantité proposée est $x^3 - x^2 - 10x + 6$, à la place de x je substitue successivement les termes de la progression arithmétique 1, 0, − 1, il en naîtra les nombres − 4, + 6, + 14. Je place chacun d'eux avec tous ses diviseurs dans la ligne du terme de la progression 1, 0, − 1, qui l'a produit, comme on peut le voir dans l'exemple suivant.

1	4	1, 2, 4	+ 4
0	6	1, 2, 3, 6	+ 3
− 1	14	1, 2, 7, 14	+ 2

Digitized by Google

Ensuite comme le terme le plus élevé x^3 n'a de diviseur que l'unité, je cherche parmi les diviseurs quelque progression dont les termes ne diffèrent que d'une unité, et qui, en descendant des plus forts aux plus faibles, décroissent comme ceux de la progression $1, 0, -1$. Je ne trouve qu'une progression de cette espèce, c'est $4, 3, 2$. Je prends donc le terme $+3$ qui se trouve dans la même ligne que 0 de la première progression $1, 0, -1$, je le joins à x, et je tente la division par $x+3$; elle réussit, et j'obtiens pour quotient $x^2 - 4x + 2$ (2).

Si la quantité proposée est $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20$; à la place de y je substitue successivement $2, 1, 0, -1, -2$, et il en résulte les nombres $30, 7, 20, 3, 34$. Je les place avec tous leurs diviseurs comme dans l'exemple suivant; et je vois que dans tous les diviseurs il n'existe qu'une seule progression arithmétique décroissante $+10, +7, +4, +1, -2$. La différence de ses termes est 3, qui divise exactement le terme le plus élevé $6y^4$ de la quantité proposée. Je prends donc le terme $+4$ qui se trouve dans la même ligne que 0 de la première progression, et le divisant par la différence des termes 3, je le joins à la lettre y, et je tente la division par $y + \frac{4}{3}$, ou ce qui revient au même, par $3y + 4$. La division réussit, et j'ai pour quotient $2y^3 - 3y^2 - 3y + 5$ (3).

2	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.	+ 10
1	7	1, 7.	+ 7
0	20	1, 2, 4, 5, 10, 20.	+ 4
− 1	3	1, 3.	+ 1
− 2	34	1, 2, 17, 34.	− 2

Si la quantité proposée est $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140a^2 + 64a + 30$, on en fera l'opération comme il suit.

Digitized by Google

2	42	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.	+ 3	+ 3	+ 7
1	23	1, 23.	+ 1	− 1	+ 1
0	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.	− 1	− 5	− 5
− 1	297	1, 3, 9, 11, 27, 33, 99, 297.	− 3	− 9	− 11

On trouve ici trois progressions dont les termes $-1, -5, -5$, correspondans au terme 0 de la première progression, étant divisés par les différences respectives de leurs progressions, donnent trois diviseurs qu'il faut essayer, savoir; $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{5}{4}$, et $a - \frac{5}{6}$; et la division par le dernier $a - \frac{5}{6}$, ou $6a - 5$, réussit, et donne pour quotient $4a^4 - 5a^3 + 4a^2 - 20a - 6$ (4).

Si on ne trouve par cette méthode aucune quantité qui divise la proposée, il faudra conclure qu'elle n'a aucun diviseur d'une dimension. Cependant lorsque la proposée est de plus de trois dimensions, il est possible qu'elle ait un diviseur de deux; si elle en avoit un, voici de quelle manière on le trouverait.

Substituez dans la proposée, à la place de la lettre, quatre ou un plus grand nombre de termes de la progression 3, 2, 1, 0, − 1, − 2, − 3. *Placez tous les diviseurs des nombres qui en résulteront dans les mêmes lignes que les termes de la progression; élevez les termes de la progression au quarré; multipliez ces quarrés par quelque diviseur numérique du terme le plus élevé de la quantité proposée; ajoutez successivement à ces produits les diviseurs des nombres qui ont résulté de vos suppositions; retranchez-les ensuite, et écrivez ces sommes et ces différences dans le même ordre que les termes de la première progression; cherchez toutes les progressions qui peuvent se rencontrer dans ces sommes et ces différences, en allant des termes d'une ligne à ceux de la ligne suivante. Soit, par exemple,* $\mp C$ *le terme d'une progression de cette espèce qui se trouve dans la même ligne que le terme* 0 *de la première progression; soit* $\mp B$ *la différence qu'on obtient en retranchant*

Digitized by Google

$\mp C$ du terme immédiatement supérieur qui se trouve dans la même ligne que le terme 1 de la première progression ; soit enfin A un diviseur numérique du terme le plus élevé, et l la lettre de la quantité proposée ; alors $Allll \pm Bl \pm C$ sera un diviseur qu'il faudra essayer (5).

Soit, par exemple, la proposée $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6$; à la place de x j'écris successivement 3, 2, 1, 0, — 1, — 2. Les nombres qui en résulteront, seront 39, 6, 1, — 6, — 21, — 26. J'écris chacun d'eux, avec tous ses diviseurs, dans la ligne du terme de la première progression qui l'a produit.

J'élève chacun des termes de la première progression au quarré, et j'écris tous ces quarrés dans une colonne ; je les multiplie par un diviseur numérique du terme le plus élevé de la proposée ; j'ajoute successivement à ces produits tous les diviseurs pris en plus et en moins, ce qui me donne des sommes et des différences que j'écris dans leurs lignes respectives. Ensuite parcourant ces nouvelles quantités en comparant chaque terme d'une ligne à ceux des autres lignes, j'écris dans de nouvelles colonnes toutes les progressions que cet examen me procure. Toutes ces opérations peuvent se voir dans l'exemple suivant.

3	39	1, 3, 13, 39.	9	— 30, — 4, 6, 8, 10, 12, 22, 48.	— 4	6
2	6	1, 2, 3, 6.	4	— 2, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10.	— 2	3
1	1	1.	1	0, 1.	0	0
0	6	1, 2, 3, 6.	0	— 6, — 3, — 2, — 1, 1, 2, 3, 6.	2	— 3
— 1	21	1, 3, 7, 21.	1	— 20, — 6, — 2, 0, 2, 4, 8, 22.	4	— 6
— 2	26	1, 2, 13, 26.	4	— 22, — 9, 2, 3, 5, 6, 17, 30.	6	— 9

Je prends successivement 2 et — 3 qui se trouvent dans la même ligne que le 0 de la première progression, je les prends, dis-je, successivement pour $\mp C$, et je prends respectivement pour $\mp B$ les

Digitized by Google

différences $+3$ et -2 qui naissent en soustrayant -3 et $+2$ des termes supérieurs 0 et 0; enfin, je prends l'unité pour A, et x pour l; ainsi, au lieu de l'équation $All \pm Bl \pm C$, j'ai à essayer les deux diviseurs $x^2 + 2x - 2$, et $x^2 - 3x + 3$, l'une et l'autre réussissent.

Si la quantité proposée était $3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8y^2 - 14y + 14$, l'opération s'en ferait comme il suit. D'abord je l'essaie en ajoutant aux quarrés des termes de la progression 2, 1, 0, — 1, les diviseurs pris en plus et en moins, et employant 1 qui est un des diviseurs numériques du terme $3y^5$ à la place de A, et l'opération ne réussit pas. Je mets à la place de A le nombre 3 qui est un autre diviseur numérique du terme le plus élevé $3y^5$; et les quarrés des termes de la progression étant multipliés par 3, et ajoutés à tous les diviseurs pris successivement en plus et en moins, parmi les nouveaux nombres qui en résulteront, je trouve ces deux progressions, — 7, — 7, — 7, — 7, et 11, 5, — 1, — 7. Pour abréger, j'avais négligé les diviseurs des deux derniers nombres 170 et 190 qui sont dans la seconde colonne.

3	170		27		−7	17
2	38	1, 2, 19, 38.	12	−26, −7, 10, 11, 13, 14, 31, 50.	−7	11
1	10	1, 2, 5, 10.	3	− 7, −2, 1, 2, 4, 5, 8, 13.	−7	5
0	14	1, 2, 7, 14.	0	−14, −7, −2, −1, 1, 2, 7, 14.	−7	− 1
−1	10	1, 2, 5, 10.	3	− 7, −2, 1, 2, 4, 5, 8, 13.	−7	− 7
−2	190		12		−7	−13

Je continue donc les deux progressions en ajoutant à chacune un terme en haut et un terme en bas, c'est-à-dire — 7 et 17, et — 7 et — 13, et j'essaie si, en soustrayant ces nombres de 27 et de 12 qui se trouvent dans la quatrième colonne sur mêmes lignes que 170

Digitized by Google

et 190 qui sont dans la seconde colonne, leurs différences ne pourraient pas diviser ces mêmes nombres 170 et 190. Et en effet la différence entre 27 et — 7, qui est 34, divise 170; et la différence de 12 et — 7, qui est 19, divise aussi 190. Enfin la différence entre 27 et 17, qui est 10, divise aussi 170; mais la différence entre 12 et — 13, qui est 25, ne divise pas 190, c'est pourquoi je rejette la dernière progression. La première me donne pour $\mp C$, — 7, et 0 pour $\mp B$, parce que les termes de la progression n'ont aucune différence. Ainsi le diviseur qu'il faut essayer est $All \pm Bl \pm C$, qui devient $3y^2 + 7$. La division réussit, et le quotient est $y^3 - 2y^2 - 2y + 2$.

Si on ne peut trouver par cette méthode aucun diviseur qui réussisse, il en faut conclure que la quantité proposée n'a aucun diviseur de deux dimensions.

La même méthode pourrait s'étendre à la recherche de diviseurs de dimensions plus élevées, en cherchant dans les sommes et les différences, non des progressions arithmétiques, mais d'autres progressions quelconques, dont les différences premières, secondes, troisièmes, etc., seraient en progression arithmétique; mais il ne faut pas y arrêter les commençans.

Lorsqu'une quantité proposée contient deux lettres, et que tous ses termes contiennent le même nombre de dimensions, mettez à la place d'une de ces lettres l'unité; ensuite, par les règles précédentes, cherchez le diviseur de cette quantité, et complettez les dimensions du diviseur, en remettant à la place de l'unité la lettre que vous aviez supprimée.

Par exemple, si la quantité était $6y^4 - cy^3 - 21c^2y^2 + 3c^3y + 20c^4$, dans laquelle tous les termes sont de quatre dimensions; à la place de c mettez 1, et la quantité deviendra $6y^4 - y^3 - 21y^2$

Digitized by Google

$+ 3y + 20$, dont on trouvera, comme ci-dessus, que le diviseur est $3y + 4$, et complettant la dimension qui manque au dernier terme en remettant c, le diviseur cherché sera $3y + 4c$. Si la quantité était $x^4 - bx^3 - 5b^2x^2 + 12b^3x - 6b^4$, mettez 1 pour b, vous aurez pour résultat $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6$, dont le diviseur est $x^2 + 2x - 2$. Je complette les dimensions qui lui manquent en remettant b, et le diviseur trouvé devient $x^2 + 2bx - 2b^2$.

Lorsqu'il y a trois ou un plus grand nombre de lettres dans la quantité proposée, et que tous ses termes ont le même nombre de dimensions, on en peut trouver le diviseur par les règles précédentes; mais on pourrait abréger l'opération en cette manière: *Cherchez tous les diviseurs de tous les termes dans lesquels une des lettres ne se trouve pas; cherchez pareillement tous les diviseurs de tous les termes dans lesquels une seconde lettre ne se trouve pas; cherchez de nouveau tous les diviseurs de tous les termes dans lesquels une troisième, une quatrième, une cinquième lettres ne se trouvent pas. Parcourez de cette manière toutes les lettres. Ecrivez respectivement tous ces diviseurs sur la même ligne horizontale que les lettres; examinez ensuite si dans quelque série des diviseurs dont les termes sont pris d'une ligne horizontale à l'autre, examinez, dis-je, si les parties de ces diviseurs, composées d'une seule lettre, se répètent autant de fois moins une qu'il y a de lettres dans la quantité proposée, et si les parties des diviseurs, composées de deux lettres, se répètent autant de fois moins deux qu'il y a de lettres dans la quantité proposée. S'il en est ainsi, toutes ces parties prises une seule fois avec leur signe formeront le diviseur cherché* (6).

Soit la quantité proposée $12x^3 - 14bx^2 + 9cx^2 - 12b^2x - 6bcx + 8c^2x + 8b^3 - 12b^2c - 4bc^2 + 6c^3$; en cherchant par les règles

Digitized by Google

précédentes les diviseurs d'une dimension des termes $8b^3 - 12b^2c - 4bc^2 + 6c^3$, dans lesquels il n'y a point d'x, on trouvera que ces diviseurs sont $2b - 3c$ et $4b - 6c$. L'unique diviseur de $12x^3 + 9cx^2 + 8c^2x + 6c^3$, où b ne se trouve pas, est $4x + 3c$; et les diviseurs des termes $12x^3 - 14bx^2 - 12b^2x + 8b^3$, dans lesquels c ne se trouve pas, sont $2x - b$ et $4x - 2b$. Je dispose ces diviseurs dans les lignes des lettres, comme vous pouvez le voir dans l'exemple à côté, c'est-à-dire que je place les diviseurs des termes où il n'y a point d'x, sur la ligne des x; les diviseurs des termes où il n'y a point de c, sur la ligne des c; et ceux des termes où il n'y a point de b, sur la ligne des b. Comme il y a trois lettres dans la quantité proposée, et que chaque partie des diviseurs n'en contient qu'une, il faut que dans la série des diviseurs ces parties se trouvent répétées deux fois; mais dans les diviseurs $4b - 6c$ et $2x - b$, les parties $4b$, $6c$, $2x$, b, ne se rencontrent qu'une fois, on ne les trouve plus hors du diviseur dont elles font partie; en conséquence je néglige ces diviseurs, et il ne m'en reste plus que trois, qui sont $2b - 3c$, $4x + 3c$, et $4x - 2b$. Ces diviseurs forment une série qui se continue par toutes les lettres x, b, c, et chacune de leurs parties $2b$, $4x$, $3c$ se trouve deux fois répétée dans la série, comme il fallait qu'elle le fût, et avec les mêmes signes, pourvu qu'on change ceux du diviseur $2b - 3c$, et qu'on l'écrive ainsi $-2b + 3c$, ce qui est toujours permis; car lorsqu'une quantité est le diviseur d'une autre, elle le sera encore si on change ses signes. Je prends donc une seule fois chacune des parties de ces diviseurs avec son signe, et la somme $-2b + 3c + 4x$ sera

x	$2b - 3c$, $4b - 6c$.
b	$4x + 3c$.
c	$2x - b$, $4x - 2b$.

Digitized by Google

le diviseur qu'il fallait trouver. En effet, si on l'emploie pour diviser la quantité proposée, on obtient pour quotient $3x^2 - 2bx + 2c^2 - 4b^2$.

Si la quantité proposée est $12x^5 - 10ax^4 - 9bx^4 - 26a^2x^3 + 12abx^3 + 6b^2x^3 + 24a^3x^2 - 8a^2bx^2 - 8ab^2x^2 - 24b^3x^2 - 4a^3bx + 6a^2b^2x - 12ab^3x + 18b^4x + 12a^4b + 32a^2b^3 - 12b^5$; je place les diviseurs des termes où il n'y a point d'x, sur la ligne des x; ceux des termes où il n'y a point d'a, sur la ligne des a; et ceux des termes où il n'y a point de b, sur la ligne des b, comme vous pouvez le voir dans l'exemple.

x	$b, 2b, 4b, a^2 + 3b^2, 2a^2 + 6b^2, 4a^2 + 12b^2, b^2 - 3a^2, 2b^2 - 6a^2, 4b^2 - 12a^2.$
a	$4x^2 - 3bx + 2b^2, 12x^2 - 9bx + 6b^2.$
b	$x, 2x, 3x - 4a, 6x - 8a, 3x^2 - 4ax, 6x^2 - 8ax, 2x^2 + ax - 3a^2, 4x^2 + 2ax - 6a^2.$

Ensuite il est manifeste qu'il faut rejeter tous les diviseurs d'une dimension, car les simples, tels que b, $2b$, $4b$, x, $2x$, etc., et les parties des composés $3x - 4a$, $6x - 8a$ ne se trouvent qu'une seule fois parmi les diviseurs; or il y a trois lettres dans la quantité proposée, et les diviseurs simples d'une seule dimension, et les parties d'une seule dimension des diviseurs composés, telles que $3x - 4a$ ne contenant qu'une seule lettre, devraient s'y trouver deux fois.

Il faut également rejeter les diviseurs de deux dimensions, tels que $a^2 + 3b^2$, $2a^2 + 6b^2$, $4a^2 + 12b^2$, $b^2 - 3a^2$, et $4b^2 - 12a^2$, parce que les parties de ces diviseurs, telles que a^2, $2a^2$, $4a^2$, b^2 et $4b^2$ ne contiennent chacune qu'une lettre unique, soit a, soit b, et ne se trouvent qu'une seule fois parmi les diviseurs. Mais le

Digitized by Google

diviseur $2b^2 - 6a^2$ qui reste seul dans la ligne des x, a deux parties, qui ne contiennent chacune également qu'une seule lettre, mais ces parties se trouvent répétées dans d'autres diviseurs; la partie $2b^2$, par exemple, se retrouve dans le diviseur $4x^2 - 3bx + 2b^2$, et la partie $6a^2$ se retrouve dans le diviseur $4x^2 + 2ax - 6a^2$. Il y a plus, ces trois diviseurs $2b^2 - 6a^2$, $4x^2 - 3bx + 2b^2$, et $4x^2 + 2ax - 6a^2$ forment une série qui parcourt les lignes des trois lettres x, a, b; et toutes leurs parties $2b^2$, $6a^2$, $4x^2$, qui ne renferment qu'une seule lettre, ou b, ou a, ou x, se retrouvent deux fois et avec les mêmes signes; les autres parties de ces mêmes diviseurs $3bx$, $2ax$ ne se trouvent à la vérité qu'une seule fois; mais comme elles sont composées chacune de deux lettres, elles doivent être admises. Ainsi rassemblant les parties différentes de ces trois diviseurs $2b^2$, $6a^2$, $4x^2$, $3bx$, $2ax$ avec leurs propres signes, elles formeront le diviseur cherché $2b^2 - 6a^2 + 4x^2 - 3bx + 2ax$. Divisez donc la quantité proposée par ce diviseur, et vous aurez pour quotient $3x^3 - 4ax^2 - 2a^2b - 6b^3$.

Si tous les termes de la quantité proposée n'ont pas le même nombre de dimensions, il faut les y ramener en multipliant les termes les moins élevés par les dimensions d'une lettre quelconque; ensuite, ayant trouvé le diviseur par les règles précédentes, il faut effacer la lettre introduite.

Soit, par exemple, la quantité proposée $12x^3 - 14bx^2 + 9x^2 - 12b^2x - 6bx + 8x + 8b^3 - 12b^2 - 4b + 6$. Prenez la lettre quelconque c, et par ses dimensions complettez celles de la quantité proposée en cette manière: $12x^3 - 14bx^2 + 9cx^2 - 12b^2x - 6bcx + 8c^2x + 8b^3 - 12b^2c - 4bc^2 + 6c^3$. Ensuite ayant trouvé le diviseur $4x - 2b + 3c$ de cette nouvelle quantité, effacez c, et le diviseur de la quantité proposée est $4x - 2b + 3$.

Quelquefois

Digitized by Google

Quelquefois on trouve les diviseurs plus facilement que par les règles précédentes. Par exemple, lorsque dans la quantité proposée une lettre ne se trouve que d'une seule dimension, il faut chercher le plus grand commun diviseur des termes dans lesquels cette lettre se trouve, et des termes dans lesquels elle ne se trouve pas, et ce diviseur commun divisera toute la quantité proposée; et si on ne trouve aucun diviseur commun, on peut être sûr que la proposée n'a point de diviseur. Par exemple, soit la quantité proposée $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x + cx^3 - acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c - 8a^4$; cherchez le diviseur commun des termes $+ cx^3 - acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c$, où c n'est que d'une dimension, et des autres termes $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$, et ce diviseur commun $x^2 + 2ax - 2a^2$ divisera la quantité toute entière.

Lorsque la seule inspection de deux quantités ne suffit pas pour faire découvrir leur diviseur commun, on parvient à le trouver en retranchant continuellement la plus petite des deux quantités de la plus grande, et ensuite le reste, de la plus petite; et le diviseur cherché sera enfin celui qui ne laissera aucun reste. Ainsi pour trouver le plus grand commun diviseur des nombres 203 et 667, ôtez trois fois 203 de 667, ôtez ensuite trois fois le reste 58 de 203, et deux fois le reste 29 de 58, et il ne restera rien. Ce qui marque que 29 est le diviseur cherché.

La manière de trouver le diviseur commun des quantités littérales n'est pas différente de celle des nombres. Lorsqu'elles sont composées, on y parvient en retranchant la plus petite, ou ses multiples, de la plus grande; mais il faut pour cela ordonner les deux quantités et le reste, par rapport à une même lettre, comme on l'a fait pour la division; et à chaque soustraction, réduire les quantités en les divisant par leurs diviseurs simples, ou par quelque quantité qui divise tous leurs termes, comme feraient des diviseurs

Digitized by Google

simples. Ainsi pour trouver le diviseur commun du numérateur et du dénominateur de la fraction $\frac{x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - ax^2 - 8a^2x + 6a^3}$, multipliez le dénominateur par x, afin que son premier terme devienne égal au premier terme du numérateur; faites ensuite la soustraction, et il restera $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$; quantité qu'on peut réduire en la divisant par $-2a$, et qui devient $x^3 - 6a^2x + 4a^3$. Retranchez-la du dénominateur, et il restera $-ax^2 - 2a^2x + 2a^3$. Divisez encore cette dernière quantité par $-a$, et elle deviendra $x^2 + 2ax - 2a^2$. Multipliez-la par x, afin que son premier terme devienne égal au premier terme de la dernière quantité soustraite $x^3 - 6a^2x + 4a^3$, et de laquelle maintenant il faut soustraire; et l'opération faite, il restera $-2ax^2 - 4a^2x + 4a^3$, qui, étant divisé par $-2a$, devient $x^2 + 2ax - 2a^2$, et comme cette dernière quantité est absolument la même que le reste précédent, si on l'en retranche, il ne restera rien : il est par conséquent le diviseur cherché. Divisez maintenant le numérateur et le dénominateur de la fraction donnée par ce diviseur, et elle sera réduite à la fraction plus simple $\frac{x^2 - 5ax + 4a^2}{x - 3a}$.

De même si on avait la fraction $\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2}{9a^3b - 27a^2bc - 6abc^2 + 18bc^3}$, il faudrait commencer par réduire ses termes en divisant le numérateur par a^2, et le dénominateur par $3b$; ensuite retranchant le double de $3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3$ de $6a^3 + 15a^2b - 4ac^2 - 10bc^2$, il restera $\begin{matrix} 15b \\ +18c \end{matrix} \Big| \begin{matrix} a^2 - 10bc^2 \\ -12c^3 \end{matrix}$; quantité qui peut être réduite en divisant chacun de ses deux termes par $5b + 6c$ (comme si $5b + 6c$ était un diviseur simple) et elle devient $3a^2 - 2c^2$. Multipliez-la par a, et la retranchez de $3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3$, et le

Digitized by Google

second reste sera $-9a^2c+6c^3$, qu'on peut simplifier de même en le divisant par $-3c$, et il devient $3a^2-2c^2$ comme le précédent; c'est pourquoi $3a^2-2c^2$ est le commun diviseur cherché. Divisez donc le numérateur et le dénominateur de la fraction proposée par ce diviseur, et elle se trouvera réduite à $\frac{2a^3+5a^2b}{3ab-9bc}$.

Lorsqu'on n'a pu trouver par cette méthode de diviseur commun, on peut être sûr qu'il n'y en a point, à moins qu'il ne vienne des quantités qui ont servi à réduire le numérateur et le dénominateur, comme, par exemple, dans la fraction $\frac{a^2d^2-c^2d^2-a^2c^2+c^4}{4a^2d-4acd-2ac^2+2c^3}$, si on dispose tous les termes selon les dimensions de la lettre d, le numérateur deviendra $\begin{matrix} a^2 \\ -c^2 \end{matrix} \Big| \, d^2 \begin{matrix} -a^2c^2 \\ +c^4 \end{matrix}$, et le dénominateur . . . . $\begin{matrix} 4a^2 \\ -4ac \end{matrix} \Big| \, d \begin{matrix} -2ac^2 \\ +2c^3 \end{matrix}$. Il faut commencer par les réduire en divisant chaque terme du numérateur par a^2-c^2, et chaque terme du dénominateur par $2a-2c$, comme si a^2-c^2, et $2a-2c$ étaient des quantités simples. Alors le numérateur sera réduit à d^2-c^2, et le dénominateur à $2ad-c^2$, et ces deux quantités ainsi préparées n'ont plus aucun diviseur commun; mais les termes a^2-c^2 et $2a-2c$, qui ont servi à réduire le numérateur et le dénominateur, ont le diviseur commun $a-c$, par le moyen duquel on peut réduire la fraction proposée à celle-ci : $\frac{ad^2+cd^2-ac^2-c^3}{4ad-2c^3}$. Mais si les termes a^2-c^2 et $2a-2c$ n'avaient eu aucun diviseur commun, la fraction aurait été irréductible.

Telle est la méthode générale de trouver les diviseurs communs. Mais on les trouve presque toujours d'une manière plus courte en cherchant tous les diviseurs premiers de l'un des deux termes de la

Digitized by Google

fraction, et en essayant si, parmi ces diviseurs premiers, il ne s'en trouverait pas quelqu'un qui divisât l'autre terme sans reste. Ainsi, pour réduire la fraction $\frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a^2 - a b}$ à ses moindres termes, il faut trouver les diviseurs de la quantité $a^2 - a b$, qui sont a et $a - b$; il faut essayer ensuite si a ou $a - b$ peut diviser sans reste $a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3$: $a - b$ le divise, et le quotient est $a^2 + b^2$. De sorte que la fraction proposée se réduit à $\frac{a^2 + b^2}{a}$.

Digitized by Google

De la réduction des Fractions à un dénominateur commun.

Les fractions se réduisent à un dénominateur commun, en multipliant chaque terme de l'une par le dénominateur de l'autre, et réciproquement.

Supposons qu'on ait les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ qu'il faille réduire au même dénominateur. Multipliez les deux termes de $\frac{a}{b}$ par d, et les deux termes de $\frac{c}{d}$ par b, et elles deviendront $\frac{ad}{bd}$ et $\frac{bc}{bd}$. Or ces deux fractions ont le dénominateur commun bd. De même a ou $\frac{a}{1}$ et $\frac{ab}{c}$ deviennent $\frac{ac}{c}$ et $\frac{ab}{c}$. Mais lorsque les dénominateurs ont un diviseur commun, il suffira de multiplier réciproquement par les quotiens. Ainsi les fractions $\frac{a^3}{bc}$ et $\frac{a^3}{bd}$ peuvent être ramenées à celles-ci, $\frac{a^3d}{bcd}$ et $\frac{a^3c}{bcd}$, en multipliant alternativement, par les quotiens qu'on obtient, en divisant les dénominateurs par leur commun diviseur b.

Cette réduction à un dénominateur commun est sur-tout utile dans l'addition et la soustraction des fractions. Car lorsque deux fractions ont des dénominateurs différens, elles ne peuvent être réunies, avant d'avoir été réduites à la même dénomination. Ainsi $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ devient, par la réduction, $\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$ ou $\frac{ad+bc}{bd}$. Et $a + \frac{ab}{c}$ devient $\frac{ac+ab}{c}$. Et $\frac{a^3}{bc} - \frac{a^3}{bd}$ devient $\frac{a^3d - a^3c}{bcd}$ ou $\frac{\overline{d-c}.a^3}{bcd}$. Et $\frac{c^4+x^4}{c^2-x^2} - c^2 - x^2$, devient.....

Digitized by Google

$\frac{c^4 + x^4 - c^4 - c^2 x^2 + c^2 x^2 + x^4}{c^2 - x^2}$ qui se réduit à $\frac{2 x^4}{c^2 - x^2}$. De même... $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ devient $\frac{14}{21} + \frac{15}{21}$ ou $\frac{14 + 15}{21}$ qui est la même chose que $\frac{29}{21}$. Et $\frac{11}{6} - \frac{3}{4}$ devient $\frac{22}{12} - \frac{9}{12}$ ou $\frac{13}{12}$. Et $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$ devient $\frac{9}{12} - \frac{5}{12}$ ou $\frac{4}{12}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{3}$. Et $3\frac{4}{7}$ ou $\frac{3}{1} + \frac{4}{7}$ devient $\frac{21}{7} + \frac{4}{7}$ ou $\frac{25}{7}$. Et $25\frac{1}{2}$ devient $\frac{51}{2}$.

Lorsque les fractions sont en plus grand nombre, il faut les réduire par parties. Si vous avez, par exemple, $\frac{a^2}{x} - a + \frac{2x^2}{3a} - \frac{ax}{a-x}$, commencez par retrancher a de $\frac{a^2}{x}$, le reste sera $\frac{a^2 - ax}{x}$; ajoutez à cette quantité $\frac{2x^2}{3a}$, et vous aurez $\frac{3a^3 - 3a^2x + 2x^3}{3ax}$. Retranchez enfin de cette dernière quantité $\frac{ax}{a-x}$, et le reste sera..... $\frac{3a^4 - 6a^3x + 2ax^3 - 2x^4}{3a^2x - 3ax^2}$. De même si on avait $3\frac{4}{7} - \frac{2}{3}$, il faut commencer par trouver la somme de $3\frac{4}{7}$ qui est $\frac{25}{7}$, et ensuite de ce dernier nombre retrancher $\frac{2}{3}$, et le reste sera $\frac{61}{21}$.

De la réduction des Radicaux à leurs moindres termes.

Lorsqu'il est impossible de tirer la racine de toute une quantité radicale, on peut souvent la réduire en tirant celle d'un de ses diviseurs.

C'est ainsi que $\sqrt{a^2bc}$ devient $a\sqrt{bc}$, en tirant la racine du diviseur a^2. Et $\sqrt{48}$ ou $\sqrt{16.3}$ devient $4\sqrt{3}$, en tirant la racine du diviseur 16. Et $\sqrt{48a^2bc}$ devient $4a\sqrt{3bc}$, en tirant la racine du diviseur $16a^2$. Et $\sqrt{\frac{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3}{c^2}}$ ou..... $\sqrt{\frac{(a^2 - 4ab + 4b^2)ab}{c^2}}$ devient $\frac{a - 2b}{c}\sqrt{ab}$, en tirant la racine du diviseur $\frac{a^2 - 4ab + 4b^2}{c^2}$. Et $\sqrt{\frac{a^2o^2m^2}{p^2q^2} + \frac{4a^2m^2}{pq^2}}$, ou en réduisant

Digitized by Google

les deux termes au même dénominateur... $\sqrt{\frac{a^2 o^2 m^2 + 4 a^2 p m^2}{p^2 r^2}}$ devient en extrayant la racine du diviseur, $\frac{a^2 m^2}{p^2 r^2}$ commun aux deux termes.... devient, dis-je, $\frac{a m}{p r} \sqrt{o^2 + 4 p}$. Et $6 \sqrt{\frac{75}{98}}$ ou $6 \sqrt{\frac{25}{49} \cdot \frac{3}{2}}$ devient.. $6 \cdot \frac{5}{7} \sqrt{\frac{3}{2}}$ (en extrayant la racine du diviseur $\frac{25}{49}$) ou bien $\frac{30}{7} \sqrt{\frac{3}{2}}$, ou bien $\frac{30}{7} \sqrt{\frac{6}{4}}$, et en extrayant encore la racine du dénominateur 4... $\frac{15}{7} \sqrt{6}$. C'est ainsi que $a \sqrt{\frac{b}{a}}$, ou ce qui est la même chose, $a \sqrt{\frac{a b}{a^2}}$ devient $\frac{a}{a} \sqrt{a b}$ (en extrayant la racine du dénominateur a^2), ou enfin $\sqrt{a b}$. Et $\sqrt[3]{8 a^3 b + 16 a^4}$, ou ce qui revient au même, $\sqrt[3]{8 a^3 (b + 2 a)}$ devient $2 a \sqrt[3]{b + 2 a}$, en extrayant la racine cubique du diviseur $8 a^3$. De même si on a $\sqrt[4]{a^3 x}$, on peut tirer la racine quatrième de son facteur a^2 qui devient alors $\sqrt{a}$, et le multipliant par $\sqrt[4]{a x}$, on a $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a x}$, ou bien en extrayant la racine quatrième du facteur a^4, elle devient $a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}$. De même $\sqrt[6]{a^7 x^5}$ peut être changé en $a \sqrt[6]{a x^5}$, ou bien en $x a \sqrt[6]{\frac{a}{x}}$, ou même encore en $\sqrt{a x} \sqrt[3]{a^2 x}$. (7).

Au reste, cette réduction ne sert pas seulement à abréger les expressions des quantités radicales, mais encore à les additionner et à les soustraire, lorsqu'elles sont réduites à leurs plus simples termes, pourvu toutefois que leurs signes radicaux soient de même degré; car autrement l'addition et la soustraction seraient impossibles : c'est ainsi que $\sqrt{48} + \sqrt{75}$; ou ce qui est la même chose..... $\sqrt{16 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3}$ deviennent, par la réduction, $4 \sqrt{3} + 5 \sqrt{3}$ ou

Digitized by Google

$9\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{16}{27}}$ devient $4\sqrt{3} - \frac{4}{9}\sqrt{3}$ ou $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. De même $\sqrt{\frac{4ab^3}{c^2}} + \sqrt{\frac{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3}{c^2}}$, ou bien..... $\sqrt{\frac{4b^2 . ab}{c^2}} + \sqrt{\frac{(a^2 - 4ab + 4b^2)ab}{c^2}}$ devient, en tirant hors du radical tout ce que cette quantité contient de rationnel..... $\frac{2b}{c}\sqrt{ab} + \frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$, qui se réduit à $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. Et..... $\sqrt[3]{8a^3b + 16a^4} - \sqrt[3]{b^4 + 2ab^3}$, ou ce qui revient au même... $\sqrt[3]{8a^3(b+2a)} - \sqrt[3]{b^3(b+2a)}$, et en tirant de cette quantité tout ce qu'elle contient de rationnel, elle devient..... $2a\sqrt[3]{b+2a} - b\sqrt[3]{b+2a}$ qui se réduit à $\overline{2a - b}\sqrt[3]{b+2a}$.

De la réduction des Radicaux à la même dénomination.

Lorsqu'on a des quantités radicales de différentes dénominations à multiplier ou à diviser, il faut d'abord les ramener à la même dénomination; ce qui se fait, en donnant pour exposant à leur radical commun le plus petit nombre qui puisse être divisé sans reste par les autres exposans; et en multipliant les exposans des quantités sous le signe par le nombre même qui a servi à multiplier l'exposant du signe. Ainsi $\sqrt{ax}$ à multiplier par $\sqrt[3]{a^2x}$, devient d'abord $\sqrt[6]{a^3x^3}$ qu'il faut multiplier par $\sqrt[6]{a^4x^2}$, ce qui donne $\sqrt[6]{a^7x^5}$. Et $\sqrt{a}$ par..... $\sqrt[4]{ax}$, devient $\sqrt[4]{a^2}$ à multiplier par $\sqrt[4]{ax}$, ce qui donne $\sqrt[4]{a^3x}$. Et $\sqrt{6}$ par $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$, devient $\sqrt[4]{36}$ à multiplier par $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$, ce qui donne $\sqrt[4]{\frac{180}{6}}$ ou $\sqrt[4]{30}$. Par la même raison, $a\sqrt{bc}$ devient $\sqrt{a^2}$ multipliant

Digitized by Google

multipliant $\sqrt{bc}$ ou $\sqrt{a^2bc}$. Et $4a\sqrt{3bc}$ devient $\sqrt{16a^2}$, multipliant $\sqrt{3bc}$ ou $\sqrt{48a^2bc}$. Et $2a\sqrt[3]{b+2a}$ devient $\sqrt[3]{8a^3}$, multipliant $\sqrt[3]{b+2a}$ ou $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$. De même encore $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ devient.. $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{b^2}}$ ou bien $\sqrt{\frac{ac}{b^2}}$. Et $\frac{6ab^2}{\sqrt{18ab^3}}$ devient $\frac{\sqrt{36a^2b^4}}{\sqrt{18ab^3}}$ ou bien.. $\sqrt{2ab}$. Et ainsi du reste.

De la réduction des Radicaux à leurs expressions radicales les plus simples par l'extraction des Racines.

Lorsque les racines sont composées d'une partie rationnelle et d'une partie radicale quarrée, il faut en extraire la racine de la manière suivante :

A désignera la partie la plus considérable d'une quantité quelconque proposée et B la moindre ; $\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ sera le quarré de la plus grande partie de la racine, et $\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ sera le quarré de la plus petite qu'il faudra joindre à la plus grande avec le signe de B. (8).

Si la quantité proposée est, par exemple, $3+\sqrt{8}$, en écrivant 3 pour A et $\sqrt{8}$ pour B; $\sqrt{A^2-B^2}$ sera 1, et le quarré de la plus grande partie de la racine sera $\frac{3+1}{2}$ ou 2, et le quarré de la plus petite sera $\frac{3-1}{2}$ ou 1 : donc la racine de la quantité proposée est $\sqrt{1}+\sqrt{2}$ ou bien $1+\sqrt{2}$.

S'il s'agit de trouver la racine de $\sqrt{32}-\sqrt{24}$, je fais $A=\sqrt{32}$ et $B=\sqrt{24}$, alors $\sqrt{A^2-B^2}$ devient $\sqrt{32-24}=\sqrt{8}$, et....

Digitized by Google

$\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ devient $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{8}}{2}$ ou bien $3\sqrt{2}$; et $\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ devient $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$ ou bien $\sqrt{2}$. C'est-à-dire, que le quarré de la plus grande partie de la racine est $3\sqrt{2}$, et le quarré de la plus petite est $\sqrt{2}$. Par conséquent la racine quarrée de la proposée est $\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$.

De même si on a $a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}$ dont il faille extraire la racine quarrée, faites $A=a^2$, et $B=2x\sqrt{a^2-x^2}$, et vous aurez $A^2-B^2=a^4-4x^2(a^2-x^2)$ ou bien $a^4-4a^2x^2+4x^4$ dont la racine est a^2-2x^2. Le quarré de la plus grande partie sera donc $\frac{2a^2-2x^2}{2}$ ou a^2-x^2; et le quarré de la plus petite $\frac{a^2-(a^2-2x^2)}{2}$, ou x^2, et par conséquent la racine de la proposée est $\sqrt{x^2}+\sqrt{a^2-x^2}$ ou bien $x+\sqrt{a^2-x^2}$. Qu'on ait encore la quantité $a^2+5ax-2a\sqrt{ax+4x^2}$ dont il faille extraire la racine quarrée; faites $a^2+5ax=A$, et $2a\sqrt{ax+4x^2}=B$; alors A^2-B^2 deviendra $a^4+10a^3x+25a^2x^2-4a^3x-16a^2x^2$, ce qui se réduit à $a^4+6a^3x+9a^2x^2$, dont la racine quarrée est a^2+3ax, valeur de $\sqrt{A^2-B^2}$. Maintenant le quarré de la plus grande partie de la racine ou $\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}=\frac{a^2+5ax+a^2+3ax}{2}=a^2+4ax$; et le quarré de la plus petite partie, ou.....
$\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}=\frac{a^2+5ax-(a^2+3ax)}{2}=ax$. Donc la racine quarrée de la quantité proposée est $\sqrt{a^2+4ax}-\sqrt{ax}$.

Enfin qu'on demande la racine de $6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$. Je fais $6+\sqrt{8}=A$ et $B=-\sqrt{12}-\sqrt{24}$; alors $A^2-B^2=8$.

Digitized by Google

Donc la plus grande partie de la racine est $\sqrt{3+\sqrt{8}} = 1+\sqrt{2}$, comme ci-dessus; et la plus petite partie de la racine est $\sqrt{3}$. Donc enfin la racine de la proposée est $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Au reste, lorsqu'on a plusieurs radicaux de cette espèce, on peut trouver les parties de la racine beaucoup plus promptement, en divisant le produit de deux quelconques de ces quantités radicales par une autre quantité radicale qui donne pour quotient un nombre rationnel et entier; car la racine du double de ce quotient sera le double de la partie de la racine cherchée. Prenons le dernier exemple où nous avions $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{24}$, et faisons d'abord $\frac{\sqrt{8}.\sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2$; ensuite.... $\frac{\sqrt{8}.\sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4$, et enfin $\frac{\sqrt{12}.\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6$; donc les parties de la racine sont 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, comme ci-dessus. (9).

Il y a aussi des règles pour trouver les racines plus élevées des quantités numériques, composées de deux parties, qui, étant élevées au quarré, deviennent commensurables.

Soit une quantité composée des deux parties $A \pm B$; que A soit la plus grande; et que le degré de la racine soit indiqué par c. Cherchez le plus petit nombre n dont la puissance n^c soit divisible sans reste par $A^2 - B^2$, et soit le quotient Q; prenez en nombres entiers la valeur la plus approchée de $\sqrt[c]{A+B.\sqrt{Q}}$, et que le résultat en soit r. Divisez $A\sqrt{Q}$ par son plus grand diviseur rationnel, et que le quotient soit s. Prenez la valeur la plus approchée en nombres entiers de $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$; et soit cette valeur t; et

Digitized by Google

$\frac{ts \pm \sqrt{t^2 s^2 - n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *sera la racine cherchée, si elle est susceptible d'extraction.* (10).

Qu'on ait, par exemple, à extraire la racine cubique de $\sqrt{968} + 25$; on aura $A^2 - B^2 = 343$, dont les diviseurs sont 7, 7, 7. Donc $n = 7$ et $Q = 1$. Ensuite $\overline{A + B}\sqrt{Q}$ ou $\sqrt{968} + 25$, a une valeur un peu plus grande que 56; car, en tirant la racine approchée du premier terme, on trouve 31, qui, étant ajouté à 25, donne 56, dont la racine cubique la plus approchée est 4. Donc $r = 4$. De plus, $A\sqrt{Q}$ ou $\sqrt{968}$ devient, en extrayant tout ce qu'il y a de rationnel, $\sqrt{4 . 121 . 2}$ ou $22\sqrt{2}$. Ainsi en divisant $22\sqrt{2}$ par toute sa partie rationnelle, le quotient est $\sqrt{2}$. Donc $s = \sqrt{2}$, et $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ devient $\frac{4 + \frac{7}{4}}{2\sqrt{2}}$ ou $\frac{\frac{16+7}{4}}{2\sqrt{2}}$ ou $\frac{\frac{23}{4}}{2\sqrt{2}}$, ou, en se contentant de prendre en nombres entiers sa partie la plus approchée, $\frac{5}{2\sqrt{2}}$. Et en prenant encore dans cette dernière quantité la valeur la plus approchée en nombres entiers, elle devient 2. On a donc $t = 2$ et $ts = 2\sqrt{2}$, et $\sqrt{t^2 s^2 - n} = \sqrt{8 - 7} = 1$, et $\sqrt[2c]{Q} = 1$. Donc $2\sqrt{2} + 1$ est la racine cherchée, si pourtant la racine de la proposée est susceptible d'extraction. Je l'essaye donc en élevant $2\sqrt{2} + 1$ au cube, et il me vient $\sqrt{968} + 25$. Donc la racine est exacte.

Soit encore $68 - \sqrt{4374}$, dont il faille extraire la racine cubique. On aura $A^2 - B^2 = 250$. Ses diviseurs sont : 5, 5, 5, 2. Faisons $n = 2 \times 5 = 10$. Et $n^c = 10^3 = 1000$ qui se divise sans reste par

Digitized by Google

250, et donne pour quotient 4. Donc $Q = 4$. Et $\sqrt[c]{A+B}.\sqrt{Q}$, ou bien $\sqrt[3]{(68+\sqrt{4374}).\sqrt{4}}$ étant pris en nombres entiers les plus près de sa valeur, donne $7 = r$. De plus $A\sqrt{Q}$ ou $68\sqrt{4}$, en extrayant tout ce qui est rationnel, est $136\sqrt{1}$. Donc $s = 1$ et $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ou $\frac{7+\frac{10}{7}}{2}$ ou $\frac{59}{14} = 4$. Donc $t = 4$, en se bornant aux nombres entiers les plus approchés. Donc $ts = 4$ et..... $\sqrt{t^2 s^2 - n} = \sqrt{16-10} = \sqrt{6}$ et $\sqrt[2c]{Q}$ ou $\sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$. Par conséquent la racine qu'il faut essayer est $\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Si on demandait la racine quarrée-cubique (*) de $29\sqrt{6}+41\sqrt{3}$, on aurait $A^2 - B^2 = 3$, on aurait aussi $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$, $ts = \sqrt{6}$ et $\sqrt{t^2 s^2 - n} = \sqrt{6-3} = \sqrt{3}$; et $\sqrt[2c]{Q} = \sqrt[10]{81}$ ou $\sqrt[5]{9}$. Ainsi la racine qu'il faut essayer est... $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

Au reste, dans des opérations de cette espèce, si la quantité contient une fraction, il faut réduire tout au même dénominateur, et prendre séparément la racine du numérateur et du dénominateur. Si les termes de la quantité avaient un commun diviseur, il faudrait prendre séparément la racine de chacun des facteurs. Si on demandait, par exemple, la racine cubique de $\sqrt{242} - 12\frac{1}{2}$, il faudrait

(*) C'est ce qu'on appelle plus communément la racine cinquième.

Digitized by Google

d'abord tout réduire au dénominateur commun, et on aurait $\frac{\sqrt{968}-25}{2}$, et en tirant séparément la racine cubique du numérateur et du dénominateur, on trouverait $\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt[3]{2}}$, parce que nous avons déjà vu que la racine cubique de $\sqrt{968}-25$ était $2\sqrt{2}-1$.

S'il s'agit d'extraire la racine quelconque de $\sqrt[3]{3993}+\sqrt[6]{17578125}$, les deux parties ont le diviseur commun $\sqrt[3]{3}$, et l'autre facteur est $11+\sqrt{125}$, ainsi la quantité proposée est $(11+\sqrt{125})\times\sqrt[3]{3}$. Et on en obtiendra la racine, en tirant séparément la racine de chacun de ses facteurs $\sqrt[3]{3}$ et $11+\sqrt{125}$.

Digitized by Google

DE LA FORME DE L'ÉQUATION.

Les équations sont un assemblage de plusieurs quantités ou égales entre elles, ou égales à zéro. On considère les équations sous deux rapports différens; ou comme les dernières conclusions auxquelles on arrive dans la résolution des problêmes, ou comme les moyens par lesquels on parvient aux équations finales.

De la première espèce sont les équations uniques qui ne renferment qu'une seule inconnue mêlée avec des connues, pourvu toutefois que le problême soit déterminé, et qu'il demande une chose possible.

De la seconde espèce sont les équations qui renferment plusieurs inconnues qu'il faut comparer et combiner entre elles, de manière qu'il en résulte une équation nouvelle qui ne contienne plus qu'une seule inconnue mêlée avec des connues. Pour obtenir plus facilement la valeur de cette inconnue, il est presque toujours nécessaire de donner à l'équation résultante différentes formes, jusqu'à ce qu'on l'ait réduite à sa plus grande simplicité possible, et qu'elle se rapporte, suivant son degré, à quelques-unes des formules suivantes, dans lesquelles tous les termes sont ordonnés par rapport aux dimensions de x, qui désigne l'inconnue. p, q, r, s, sont des quantités déterminées et connues, au moyen desquelles on parvient à trouver la valeur de x par des méthodes que nous expliquerons.

Digitized by Google

$x = p$		$x - p = 0.$
$x^2 = px + q.$	ou bien	$x^2 - px - q = 0.$
$x^3 = px^2 + qx + r.$		$x^3 - px^2 - qx - r = 0.$
$x^4 = px^3 + qx^2 + rx + s.$		$x^4 - px^3 - qx^2 - rx - s = 0.$
etc.		etc.

C'est sur le modèle de ces formules qu'il faut toujours ordonner les termes des équations, selon le nombre des dimensions de l'inconnue, en plaçant au premier rang le terme où l'inconnue est le plus élevée, au second rang le terme où elle est d'une dimension moindre, et ainsi de suite. Quels que soient les signes des différens termes, ils ne doivent rien changer à cet arrangement; en supposant même qu'il manque quelques termes intermédiaires, il doit subsister encore. Ainsi $x^3 * - b^2x + b^3 = 0$, ou $x^3 = b^2x - b^3$ est une équation du troisième degré; $z^4 \begin{smallmatrix} + a \\ - b \end{smallmatrix} \Big| z^3 * \begin{smallmatrix} + ab^3 \\ - b^4 \end{smallmatrix} = 0$, est une équation du quatrième; car le degré d'une équation s'estime par la plus haute dimension de l'inconnue, sans aucun égard aux quantités connues, non plus qu'aux termes intermédiaires. Cependant l'absence de quelques termes intermédiaires rend très-souvent l'équation plus simple, et sert même quelquefois à la faire descendre à des degrés plus bas. C'est ainsi que $x^4 = qx^2 + s$ peut être regardée comme une équation du second degré, parce qu'elle est décomposable en deux équations du second degré; car en supposant $x^2 = y$ et en substituant y à la place de x^2 dans l'équation, on aura la nouvelle équation $y^2 = qy + s$, qui est visiblement une équation du second degré; et lorsque, par son moyen, on aura déterminé la valeur de y, l'autre équation du second degré $x^2 = y$ servira à faire trouver celle de x.

Tels

Digitized by Google

Tels sont les résultats auxquels les problêmes doivent être ramenés. Mais avant d'entreprendre leur résolution, il est nécessaire d'enseigner la méthode de transformer les équations, de les réduire, et d'arriver par les équations moyennes aux équations finales. Je renfermerai dans les règles suivantes tous les moyens de réduire une équation unique.

De la manière de réduire une Équation unique.

RÈGLE PREMIÈRE. *Lorsqu'il y a dans une équation des quantités qui se détruisent mutuellement, ou qui peuvent se réunir soit par addition, soit par soustraction, il faut effectuer ces destructions ou ces réunions; cela diminue le nombre des termes.*

Si on a, par exemple, $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$; qu'on retranche de part et d'autre $2x$, et qu'on ajoute $3a$, et on aura $5b - 3a + 2x + 3a - 2x = 5a + 3x - 2x + 3a$, qui se réduit à $5b = 8a + x$. De même soit $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$. Multiplions tous les termes par a, l'équation deviendra $2ab + bx - ab = a^2 + ab$, qui se réduit, en effaçant les quantités qui se détruisent, qui se réduit, dis-je, à $bx = a^2$.

On doit rapporter à cette règle l'arrangement des termes d'une équation, qui consiste à les transporter d'un côté à l'autre du signe d'égalité avec un signe contraire. Par exemple, dans l'équation $5b = 8a + x$, si on veut avoir la valeur de x, il faut ôter de part et d'autre $8a$, ou, ce qui revient au même, transporter $8a$ du côté opposé, en changeant son signe, et on aura $5b - 8a = x$. De même si on avait $a^2 - 3ay = ab - b^2 + by$, et qu'on voulût avoir y, il faudrait transporter $-3ay$ et $ab - b^2$ de manière que

Digitized by Google

tous les termes affectés de y se trouvassent dans un seul membre, et tout le reste dans l'autre, et on aurait $a^2 - ab + b^2 = 3ay + by$; et en dégageant y, comme on l'enseignera dans la règle cinquième, c'est-à-dire en divisant chaque membre de l'équation par $3a + b$, elle deviendrait $\frac{a^2 - ab + b^2}{3a + b} = y$. De même l'équation $abx + a^3 - a^2x = ab^2 - 2abx - x^3$, devient, en transposant et en ordonnant, $x^3 = \begin{matrix} a^2 \\ -3ab \end{matrix} \Big| \begin{matrix} x - a^3 \\ + ab^2 \end{matrix}$, ou bien $x^3 \begin{matrix} - a^2 \\ + 3ab \end{matrix} \Big| \begin{matrix} x + a^3 \\ - ab^2 \end{matrix} = 0$.

RÈGLE II. *Si tous les termes d'une équation sont multipliés par une même quantité, divisez-les tous par cette quantité; et réciproquement s'ils sont tous divisés par une même quantité, multipliez-les tous par cette quantité.*

Ainsi dans l'équation $15b^2 = 24ab + 3bx$, divisez tous ses termes par b, et elle deviendra $15b = 24a + 3x$; ensuite divisez tout par 3, et elle sera réduite à $5b = 8a + x$. Soit encore l'équation $\frac{b^3}{ac} - \frac{b^2x}{c^2} = \frac{x^2}{c}$; multipliez tout par c, et vous aurez $\frac{b^3}{a} - \frac{b^2x}{c} = x^2$.

RÈGLE III. *S'il se trouve une fraction irréductible, dont le dénominateur contienne la lettre même par rapport à laquelle l'équation doit être ordonnée, il faut multiplier tous les termes par ce dénominateur ou par quelqu'un de ses diviseurs.*

Soit l'équation $\frac{ax}{a-x} + b = x$, et qu'il faille ordonner par rapport à la lettre x; multipliez tous ses termes par $a - x$, dénominateur de la fraction $\frac{ax}{a-x}$, puisque x se trouve dans ce dénominateur; et l'équation deviendra $ax + ab - bx = ax - x^2$, ou $ab - bx = -x^2$, ou bien, en transposant chaque membre avec des signes contraires, $x^2 = bx - ab$. Qu'on ait encore l'équation $\frac{a^3 - ab^2}{2cy - c^2}$

Digitized by Google

$= y - c$, qu'il faille ordonner par rapport à y; multipliez tous ses termes par $2cy - c^2$, ou du moins par un de ses facteurs $2y - c$, afin de faire disparaître y du dénominateur, et vous aurez $\frac{a^3 - ab^2}{c} = 2y^2 - 3cy + c^2$. C'est ainsi que $\frac{a^2}{x} - a = x$ étant multipliée toute entière par x, devient $a^2 - ax = x^2$, et que $\frac{a^2 b^2}{c x^2} = \frac{x^2}{a + b - x}$ étant d'abord multipliée par x^2, et ensuite par $a + b - x$, devient $\frac{a^3 b^2 + a^2 b^3 - a^2 b^2 x}{c} = x^4$.

RÈGLE IV. *Si la lettre par rapport à laquelle l'équation doit être ordonnée, se trouve unie avec une quantité sourde, il faut transporter tous les autres termes non affectés de la quantité sourde dans l'autre membre de l'équation, avec des signes contraires, et multiplier chaque membre de l'équation une fois par lui-même, si la quantité sourde est une racine quarrée; deux fois, si c'est une racine cubique, et ainsi du reste.*

Ainsi pour ordonner l'équation $\sqrt{a^2 - ax} + a = x$, par rapport à x, il faut transporter a dans l'autre membre, et on a $\sqrt{a^2 - ax} = x - a$, et en élevant chaque membre au quarré, on a $a^2 - ax = x^2 - 2ax + a^2$, ou bien $0 = x^2 - ax$, qui donne $x = a$. Soit encore $\sqrt[3]{a^2 x + 2ax^2 - x^3} - a + x = 0$, en transposant $-a + x$, cette équation devient, $\sqrt[3]{a^2 x + 2ax^2 - x^3} = a - x$, et en élevant chaque membre au cube, on a, $a^2 x + 2ax^2 - x^3 = a^3 - 3a^2 x + 3ax^2 - x^3$, ou bien en effaçant tout ce qui se détruit, $x^2 = 4ax - a^2$.

Soit de même $y = \sqrt{ay + y^2 - a\sqrt{ay - y^2}}$; si on élève chacun de ses membres au quarré, on aura.....

Digitized by Google

$y^2 = ay + y^2 - a\sqrt{ay - y^2}$; faisant ensuite les transpositions nécessaires, après avoir effacé y^2 de part et d'autre, l'équation devient $ay = a\sqrt{ay - y^2}$, ou bien $y = \sqrt{ay - y^2}$, et en élevant de nouveau tout au quarré, $y^2 = ay - y^2$, et en transposant encore, $2y^2 = ay$, ou $2y = a$.

RÈGLE V. *Lorsqu'on a ordonné tous les termes d'une équation par rapport aux dimensions d'une même lettre, comme il a été enseigné par les règles précédentes; si la plus haute dimension de cette lettre est multipliée par une quantité connue, il faut diviser toute l'équation par cette même quantité.*

Soit $2y = a$, en divisant tout par 2, on a $y = \frac{a}{2}$; et $\frac{bx}{a} = a$ devient $bx = a^2$, ou $x = \frac{a^2}{b}$, en divisant tout par $\frac{b}{a}$.....

Et $\begin{matrix} 2ac \\ -c^2 \end{matrix} \Big| x^3 \begin{matrix} +a^3 \\ +a^2c \end{matrix} \Big| x^2 \begin{matrix} -2a^3c \\ +a^2c^2 \end{matrix} \Big| x - a^3c^2 = 0$, devient, en divisant tout par $2ac - c^2$, $x^3 \begin{matrix} +a^3 \\ +a^2c \end{matrix} \Big| x^2 \begin{matrix} -2a^3c \\ +a^2c^2 \end{matrix} \Big| x - a^3c^2 = 0$, $\overline{2ac - c^2}$

ou bien $x^3 + \frac{a^3 + a^2c}{2ac - c^2} \cdot x^2 - a^2x \frac{-a^3c}{2a - c} = 0$.

RÈGLE VI. *On peut quelquefois opérer une réduction en divisant l'équation par une quantité composée.*

C'est ainsi que $y^3 = \begin{matrix} -2c \\ +b \end{matrix} \Big| y^2 + 3bcy - b^2c$ peut se réduire à $y^2 = -2cy + bc$ en transportant d'abord tous les termes d'un même côté en cette manière, $y^3 \begin{matrix} +2c \\ -b \end{matrix} \Big| y^2 - 3bcy + b^2c = 0$, et ensuite en divisant par $y - b$, comme il a été enseigné au chapitre

Digitized by Google

de la division. Mais il est difficile de trouver ces sortes de diviseurs; au reste nous en avons précédemment indiqué la méthode (*).

RÈGLE VII. *On peut quelquefois réduire une équation en extrayant la racine de chacun de ses membres.*

En effet, soit $x^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$, en tirant la racine quarrée de chaque membre on a, $x = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. De même, si on a $x^2 + a^2 = 2ax + b^2$, il faut transporter $2ax$, et l'équation devient $x^2 - 2ax + a^2 = b^2$, et en tirant la racine quarrée de chaque membre, on a, $x - a = +$ ou $- b$, ou bien $x = a \pm b$.

Si vous avez $x^2 = ax - b^2$, ajoutez à chaque membre $- ax + \frac{1}{4}a^2$, et l'équation deviendra $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$; et en tirant la racine quarrée de part et d'autre, $x - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, ou $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.

Prenons pour exemple général $x^2 = px + q$. La valeur de x sera, $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, où l'on voit que $\frac{p}{2}$ et q ont les mêmes signes que dans la première équation, mais $\frac{p^2}{4}$ doit toujours être affecté du signe $+$. Cet exemple est une formule à laquelle on peut rapporter toutes les équations du second degré. Par exemple, qu'on propose l'équation $y^2 = \frac{2x^2y}{a} + x^2$, et qu'on demande la racine y; il faut égaler $\frac{2x^2}{a}$ à p, et x^2 à q. Par conséquent $\frac{x^2}{a} = \frac{p}{2}$, et $\frac{x^4}{a^2} + x^2 = \frac{p^2}{4} + q$, et on aura $y = \frac{x^2}{a} \pm \sqrt{\frac{x^4}{a^2} + x^2}$. De même dans l'équation $y^2 = ay - 2cy + a^2 - c^2$, faites $a - 2c = p$, et $a^2 - c^2 = q$, et la valeur de y sera, $y = \frac{1}{2}a - c \pm ..$

(*) Page 46 et suivantes.

Digitized by Google

$\sqrt{\frac{5a^2}{4} - ac}$. Il y a plus; c'est qu'on peut même, par cette règle, obtenir la valeur de x dans l'équation du quatrième degré $x^4 = - a^2x^2 + ab^3$, où les termes impairs manquent; car on aura d'abord, par la règle que nous venons d'établir, $x^2 = -\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} + ab^3}$, et en tirant de nouveau la racine quarrée, $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sqrt{-\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} + ab^3}}$; et ainsi du reste.

Telles sont les règles pour réduire une équation unique. Lorsqu'on se sera familiarisé assez avec leur usage pour pouvoir ordonner une équation quelconque par rapport aux dimensions d'une de ses lettres, et tirer la valeur de cette lettre, dans le cas où elle n'a qu'une dimension, ou bien la valeur de sa plus haute puissance, lorsqu'elle en a plusieurs, il sera facile de comparer entre elles plusieurs équations; et c'est de cette comparaison que je vais enseigner la méthode.

Méthode pour réduire deux ou un plus grand nombre d'Équations à une seule, afin d'en dégager les inconnues.

Lorsque dans la solution d'un problême on a plusieurs équations qui renferment l'état de la question, et dont chacune contient plusieurs inconnues, il faut comparer deux à deux ces équations (si on en a plus de deux), et répéter ces comparaisons autant de fois qu'il est nécessaire, et à chaque opération il naîtra une nouvelle équation, qui contiendra une inconnue de moins que la précédente. Si on a, par exemple, $2x = y + 5$, et $x = y + 2$, il est clair que par la première on a, $2x - 5 = y$, et que par la seconde on a, $x - 2$

Digitized by Google

$= y$; d'où, en retranchant de part et d'autre des quantités égales, on tire $x = 3$.

C'est une règle générale, que par le moyen de chaque équation on peut éliminer une inconnue. Donc, lorsqu'on a autant d'équations que d'inconnues, toutes les équations peuvent se réduire à une équation unique qui ne renferme plus qu'une seule inconnue. S'il y avait une inconnue de plus qu'il n'y a d'équations, il se trouverait encore deux inconnues dans l'équation résultante; il s'en trouverait trois, si le nombre des inconnues surpassait de deux le nombre des équations, et ainsi de suite.

Il n'est pas quelquefois impossible d'éliminer deux, ou même un plus grand nombre d'inconnues par le moyen de deux équations. Si on a, par exemple, $ax - by = ab - az$, et $bx + by = b^2 + az$. La première donne $az = ab - ax + by$, et la seconde, $az = bx + by - b^2$; donc $ab - ax + by = bx + by - b^2$, d'où on tire, en effaçant ce qui se détruit, et transposant, $bx + ax = ab + b^2$, où l'on voit que y et z sont éliminés. Mais des cas de cette espèce annoncent ou un vice caché dans l'état de la question, ou une erreur, ou un défaut d'adresse dans le calcul. Nous allons enseigner la méthode d'éliminer une inconnue par le moyen de chaque équation.

De l'élimination d'une inconnue par l'égalité de ses valeurs.

Lorsque la quantité qu'on veut éliminer n'est que d'une dimension dans chacune des équations, on en trouvera la valeur par les règles que nous avons déjà données; et alors on comparera ces valeurs entre elles.

Soient les deux équations $a + x = b + y$, et $2x + y = 3b$. Si

Digitized by Google

c'est y que nous voulons éliminer, la première équation nous donnera, $a + x - b = y$, et la seconde, $3b - 2x = y$; par conséquent $a + x - b = 3b - 2x$, ou, en dégageant x, $x = \frac{4b - a}{3}$.

C'est ainsi que les deux équations $2x = y$, et $5 + x = y$ donnent, $2x = 5 + x$, ou $x = 5$. Et les équations $ax - 2by = ab$, et $xy = b^2$ donnent, la première, $\frac{ax - ab}{2b} = y$, et la seconde, $y = \frac{b^2}{x}$. Donc $\frac{b^2}{x} = \frac{ax - ab}{2b}$, ou, en ordonnant, $x^2 - bx - \frac{2b^3}{a} = 0$.

Si on a encore les deux équations $\frac{b^2x - aby}{a} = ab + xy$, et $bx + \frac{ay^2}{c} = 2a^2$; en dégageant x, la première donne $x = \frac{a^2b + aby}{b^2 - ay}$, et la seconde, $x = \frac{2a^2c - ay^2}{bc}$, on a donc $\frac{a^2b + aby}{b^2 - ay} = \frac{2a^2c - ay^2}{bc}$; et en réduisant, $y^3 - \frac{b^2}{a}y^2 - \left(\frac{2a^2c - b^2c}{a}\right)y + b^2c = 0$.

Enfin si on a, $x + y - z = 0$, et $ay = xz$; en dégageant z, la première devient $x + y = z$, et la seconde, $\frac{ay}{x} = z$. Donc $\frac{ay}{x} = x + y$, ou bien $x^2 + xy = ay$, en multipliant tout par x. On arrive aux mêmes résultats en soustrayant une des valeurs de l'inconnue de l'autre, et en égalant le reste à zéro. Ainsi, dans le premier exemple, retranchez $3b - 2x$ de $a + x - b$, et il viendra $a + x - b - 3b + 2x = 0$, ou $a + 3x - 4b = 0$, et enfin $x = \frac{4b - a}{3}$.

De

Digitized by Google

De l'élimination d'une inconnue par la substitution de sa valeur.

Lorsque, dans l'une des équations, l'inconnue qu'on veut éliminer n'est que d'une dimension, c'est dans cette équation qu'il faut prendre la valeur de l'inconnue, et la substituer à la place de l'inconnue même dans l'autre équation. Si on a les deux équations $xy^2 = b^3$, et $x^2 + y^2 = by - ax$, en éliminant x, la première donnera $x = \frac{b^3}{y^2}$; à la place de x substituez sa valeur dans la seconde, et vous aurez $\frac{b^6}{y^4} + y^2 = by - \frac{ab^3}{y^2}$, ou bien $\frac{b^6 + y^6}{y^4} = \frac{by^3 - ab^3}{y^2}$ ou bien $b^6 + y^6 = by^5 - ab^3y^2$, et en ordonnant, $y^6 - by^5 + ab^3y^2 + b^6 = 0$.

Si on a, $ay^2 + a^2y = z^3$, et $yz - ay = az$, et qu'on veuille éliminer y, il faudra prendre sa valeur dans la seconde équation qui donne, $y = \frac{az}{z - a}$, et en substituant cette valeur à la place de y dans la première, on a, $\frac{a^3z^2}{(z-a)^2} + \frac{a^3z}{z-a} = z^3$, et en réduisant, $z^4 - 2az^3 + a^2z^2 - 2a^3z + a^4 = 0$.

De même, si on a, $\frac{xy}{c} = z$, et $cy + zx = c^2$, et qu'on veuille éliminer z, il faut substituer dans la seconde équation, sa valeur $\frac{xy}{c}$, ce qui donne, $cy + \frac{x^2y}{c} = c^2$.

Au reste, quand on est exercé dans ces sortes de calculs, on apperçoit souvent des moyens plus expéditifs de chasser une inconnue.

Digitized by Google

Soient données les équations $ax = \frac{b^2 x - b^3}{z}$ et $x = \frac{az}{x-b}$, en multipliant la première par z, elle devient $azx = b^2(x-b)$, et en multipliant la seconde d'abord par x, elle devient $x^2 = \frac{axz}{x-b}$, et ensuite par $x-b$, elle devient enfin $x^2(x-b) = axz$; par conséquent $\frac{b^2(x-b)}{x^2(x-b)} = 1$, donc $x = b$.

Mais j'abandonne des cas particuliers de cette espèce à la sagacité des hommes studieux.

De l'élimination d'une inconnue qui est de plusieurs dimensions dans chaque équation.

Lorsque la quantité qu'on veut éliminer est de plus d'une dimension dans chaque équation, déterminez dans chacune la valeur de sa plus haute puissance; et si les équations ne sont pas de même degré, multipliez celle qui est la moins élevée par l'inconnue que vous voulez éliminer, ou par son quarré, ou par son cube, afin qu'elle devienne d'une puissance égale à celle de l'autre équation. Alors égalez entre elles ces plus hautes puissances, et il en résultera une nouvelle équation, où cette plus haute puissance ne se trouvera plus. Et en réitérant l'opération autant de fois qu'il sera nécessaire, vous finirez par faire évanouir cette inconnue.

Par exemple, si on avait $x^2 + 5x = 3y^2$, et $2xy = 3x^2 + 4$, je tire de la première de ces deux équations, $x^2 = 3y^2 - 5x$, et de la seconde, $\frac{2xy-4}{3} = x^2$; et en comparant ensemble les deux valeurs de x^2, j'ai, $3y^2 - 5x = \frac{2xy-4}{3}$, où x ne se trouve plus qu'à la première puissance; ainsi on peut l'éliminer par les règles

Digitized by Google

données plus haut. En effet, en réduisant la dernière équation, elle devient $9y^2 - 15x = 2xy - 4$. D'où, $x = \frac{9y^2+4}{2y+15}$; et en mettant cette valeur de x dans l'une quelconque des deux équations proposées, dans $x^2 + 5x = 3y^2$, par exemple, il viendra..... $\frac{81y^4+72y^2+16}{4y^2+60y+225} + \frac{45y^2+20}{2y+15} = 3y^2$; et en multipliant tout par $4y^2 + 60y + 225$, et ordonnant, il vient, $81y^4 + 72y^2 + 16 + 90y^3 + 40y + 675y^2 + 300 = 12y^4 + 180y^3 + 675y^2$, ou bien $69y^4 - 90y^3 + 72y^2 + 40y + 316 = 0$.

Qu'on ait encore les deux équations, $y^3 = xy^2 + 3x$ et $y^2 = x^2 - xy - 3$. Si c'est y qu'on veut faire évanouir, il faut multiplier la seconde par y, et elle devient $y^3 = x^2y - xy^2 - 3y$, qui est du même nombre de dimensions que la première; et en égalant entre elles les valeurs de y^3, on a $xy^2 + 3x = x^2y - xy^2 - 3y$, où y est descendu d'une dimension. Par le moyen de cette nouvelle équation, et de la plus simple des deux premières, de $y^2 = x^2 - xy - 3$, par exemple, on peut éliminer y, en répétant l'opération que nous venons de faire.

On a encore d'autres moyens de parvenir aux mêmes résultats, et souvent d'une manière plus courte. Veut-on faire disparaître y des équations $y^2 = \frac{2x^2y}{a} + x^2$, et $y^2 = 2xy + \frac{x^4}{a^2}$? qu'on prenne dans chaque équation la valeur de y, par la méthode de la règle 7 (page 77) et on aura $y = \frac{x^2}{a} \pm \sqrt{\frac{x^4}{a^2} + x^2}$ et $y = x \pm \ldots\ldots \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{a^2}}$, et en comparant ces deux valeurs de y, on a.... $\frac{x^2}{a} \pm \sqrt{\frac{x^4}{a^2} + x^2} = x \pm \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{a^2}}$, et en effaçant de part

Digitized by Google

et d'autre ce qui se détruit, on obtient enfin $\frac{x^2}{a} = x$, ou bien $x^2 = ax$ et $x = a$.

Pour faire disparaître x des équations, $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$, et $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$, retranchez y de chaque membre de la première, et il restera $x + \frac{y^2}{x} = 20 - y$, et en quarrant, $x^2 + 2y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 400 - 40y + y^2$, et en effaçant y^2 de part et d'autre, il restera $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 400 - 40y$. Or $400 - 40y$ et 140 étant égales aux mêmes quantités, il s'en suit qu'elles sont égales entre elles; donc $400 - 40y = 140$, ou $40y = 260$, ou enfin $y = 6\frac{1}{2}$. C'est ainsi que dans presque toutes les équations on trouvera des moyens d'abréger le travail.

Au reste, lorsque la quantité qu'il faut éliminer a beaucoup de dimensions, le calcul qu'on est obligé de faire pour y parvenir, est quelquefois très-pénible. Les exemples suivans, considérés comme des règles, pourront donner des moyens de le faciliter.

RÈGLE PREMIÈRE.

Soient, $ax^2 + bx + c = 0$, et $fx^2 + gx + h = 0$,

x étant éliminé, on a

$$(ah - bg - 2cf)\,ah + (bh - cg)\,bf + (ag^2 + cf^2)\,c = 0. \quad (12).$$

Digitized by Google

RÈGLE DEUXIÈME.

Soient, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, et $fx^2 + gx + h = 0$.

En éliminant x, on a

$$(ah - bg - 2cf)\,ah^2 + (bh - cg - 2df)\,bfh + (ch - dg)\ldots\ldots$$
$$(ag^2 + cf^2) + (3agh + bg^2 + df^2)\,df = 0. \quad (13).$$

RÈGLE TROISIÈME.

Soient, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, et $fx^2 + gx + h = 0$.

En éliminant x, on a

$$(ah - bg - 2cf)\,ah^3 + (bh - cg - 2df)\,bfh^2 + (ag^2 + cf^2)\ldots$$
$$(ch^2 - dgh + eg^2 - 2efh) + (3agh + bg^2 + df^2)\,dfh + \ldots\ldots$$
$$(2ah^2 + 3bgh - dfg + ef^2)\,ef^2 + (-bg - 2ah)\,efg^2 = 0.$$

RÈGLE QUATRIÈME.

Soient, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, et $fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$.

En éliminant x, on a

$$(ah - bg - 2cf)(adh^2 - achk) + (ak + bh - cg - 2df)\,bdfh$$
$$+ (-ak + bh + 2cg + 3df)\,a^2k^2 + (cdh - d^2g - c^2k + 2bdk)$$
$$(ag^2 + cf^2) + (3agh + bg^2 + df^2 - 3afk)\,d^2f + (-3ak$$
$$- bh + cg + df)\,bcfk + (bk - 2dg)\,b^2fk + (-b^2k - 3adh$$
$$- cdf)\,agk = 0.$$

Par exemple, si on veut faire disparaître x des équations $x^2 +$

Digitized by Google

$5x - 3y^2 = 0$, et $3x^2 - 2xy + 4 = 0$; qu'on emploie la formule de la première règle, et qu'on mette, au lieu de $a, b, c; f, g, h$, leurs valeurs respectives $1, 5, -3y^2; 3, -2y, 4$: et on aura $(4 + 10y + 18y^2)\,4 + (20 - 6y^3)\,15 + (4y^2 - 27y^2) \times -3y^2 = 0$, qui se réduit à, $16 + 40y + 72y^2 + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$, équation où il n'y a plus d'x.

De même, pour faire disparaître y des équations $y^3 - xy^2 - 3x = 0$, et $y^2 + xy - x^2 + 3 = 0$, employez la formule de la seconde règle, en mettant pour $a, b, c, d; f, g, h, x$, les valeurs respectives $1, -x, 0, -3x; 1, x, -x^2 + 3, y$; et vous aurez..... $(-x^2 + 3 + x^2)(x^4 - 6x^2 + 9) + (x^3 - 3x + 6x)(x^3 - 3x) + 3x^2 \times x^2 + (-3x^3 + 9x - 3x - x^3) \times -3x = 0$; et en effaçant ce qui se détruit, et faisant les multiplications indiquées, il viendra, $3x^4 - 18x^2 + 27 + x^6 - 9x^2 + 3x^4 + 12x^4 - 18x^2 = 0$, et en réduisant et ordonnant, $x^6 + 18x^4 - 45x^2 + 27 = 0$.

Jusqu'ici nous n'avons eu à éliminer qu'une seule inconnue au moyen de deux équations; si on avait plusieurs inconnues à chasser d'un plus grand nombre d'équations, on y parviendrait par des opérations successives. Par exemple, si vous voulez tirer la valeur de y des équations, $ax = yz$, $x + y = z$, et $5x = y + 3z$; commencez par faire évanouir une des deux inconnues x ou z; x (je suppose) en substituant sa valeur $\frac{yz}{a}$ tirée de la première, dans la seconde et la troisième, ce qui vous donnera, $\frac{yz}{a} + y = z$, et $\frac{5yz}{a} = y + 3z$. Faites disparaître z de ces deux équations, comme ci-dessus, et vous n'aurez plus qu'une seule équation qui ne contiendra que la seule inconnue y.

Digitized by Google

Méthode d'éliminer toutes les quantités sourdes des équations.

C'est ici qu'il convient de placer la méthode d'éliminer les quantités sourdes ou incommensurables, en les supposant égales à des lettres quelconques. Par exemple, si on a l'équation $\sqrt{ay} - \sqrt{a^2 - ay} = 2a + \sqrt[3]{ay^2}$; en faisant $t = \sqrt{ay}$, $v = \sqrt{a^2 - ay}$, et $x = \sqrt[3]{ay^2}$, l'équation proposée devient, $t - v = 2a + x$. Mais d'ailleurs, puisque $x = \sqrt[3]{ay^2}$, il s'en suit que $x^3 = ay^2$; et par la même raison, $t^2 = ay$; et $v^2 = a^2 - ay$. Si, au moyen de ces quatre équations, on élimine successivement t, v et x, il en résultera une nouvelle équation entièrement délivrée d'incommensurables. (14).

Digitized by Google

Méthode pour mettre une question en équation.

LORSQU'ON se sera suffisamment exercé à transformer et à réduire des équations, il faut essayer ses forces, en mettant des questions en équation. Une question étant proposée, une partie importante de l'art du calculateur consiste à exprimer par des équations chacune des conditions du problême. Pour y parvenir, il examinera d'abord si toutes ces conditions peuvent être exprimées par des caractères algébriques, de la même manière que nous peignons nos pensées par le moyen des lettres de l'alphabet. Si la chose est possible (comme elle l'est toujours, lorsque la question roule sur des nombres ou sur des quantités abstraites), alors il donnera des noms aux quantités connues, de même qu'aux quantités inconnues; et le sens de la question sera exprimé, si on peut parler ainsi, par un discours analytique. Et les conditions ainsi traduites en langage algébrique, donneront autant d'équations qu'il en faut pour résoudre la question.

Par exemple, qu'on demande trois nombres en proportion continue, dont la somme soit 20, et la somme des quarrés 140, j'appellerai ces trois nombres inconnus x, y, z; et la question sera traduite du langage ordinaire en langage algébrique, en cette manière :

Question

Digitized by Google

Question énoncée en langage ordinaire.	*La même en langage algébrique.*
On cherche trois nombres qui aient ces conditions :	$x, y, z,$
1°. Qu'ils soient en proportion continue.	$x : y :: y : z$, ou bien $xz = y^2$.
2°. Que leur somme fasse 20.	$x + y + z = 20.$
3°. Que la somme de leurs quarrés fasse 140.	$x^2 + y^2 + z^2 = 140.$

Ainsi la question est réduite aux équations $xz = y^2$, $x + y + z = 20$, $x^2 + y^2 + z^2 = 140$. A l'aide de ces équations et des règles données précédemment, on trouvera les valeurs de x, de y et de z.

Au reste, il faut observer que la résolution des problêmes est d'autant plus facile et plus élégante, qu'on emploie moins d'inconnues. Ainsi dans le problême dont il s'agit, en mettant x pour la première inconnue, y pour la seconde, la troisième sera $\frac{y^2}{x}$, qui est en proportion continue avec les deux autres. J'énonce donc la question en cette manière :

En langage ordinaire.	*En langage algébrique.*
Chercher trois nombres en proportion continue,	$\div\div\ x : y :: \frac{y^2}{x}.$
dont la somme soit 20,	$x + y + \frac{y^2}{x} = 20.$
et la somme des quarrés 140.	$x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140.$

Les deux équations $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$, et $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$ étant réduites, on en tirera les valeurs de x et de y.

Digitized by Google

Voici un autre exemple. Un marchand augmente son argent d'un tiers chaque année, moins cent livres (*) qu'il dépense dans le même espace de temps pour les besoins de sa famille ; au bout de trois ans ses richesses sont doublées ; on demande combien il avait d'argent. Voici toutes les propositions qui sont renfermées implicitement dans cette question, et qui doivent être exprimées, pour parvenir à la résolution du problême.

Question exprimée en langage ordinaire.	*La même en langage algébrique.*
Un marchand a un certain nombre d'écus, sur lesquels il dépense cent livres la première année ;	x.
Il augmente ce qui lui reste d'un tiers.	$x - 100$.
	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$, ou bien $\frac{4x - 400}{3}$.
La seconde année il dépense encore cent livres, et il augmente ce qui lui reste d'un tiers.	$\frac{4x - 400}{3} - 100$, ou bien $\frac{4x - 700}{3}$.
	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$, ou bien $\frac{16x - 2800}{9}$.
La troisième année il dépense encore cent livres, et il augmente ce qui lui reste d'un tiers,	$\frac{16x - 2800}{9} - 100$, ou bien $\frac{16x - 3700}{9}$.
	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$, ou bien $\frac{64x - 14800}{27}$.
et il se trouve deux fois plus riche qu'au commencement de la première année.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$.

(*) Il s'agit ici, comme on pense bien, de livres sterlings, ainsi cent livres font environ 2200 francs.

Digitized by Google

Ainsi la question est exprimée par l'équation $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$, et en la résolvant, on en tirera la valeur de x. Multipliez-la par 27, et vous aurez $64x - 14800 = 54x$; retranchez de chaque membre $54x$, et le reste sera $10x - 14800 = 0$; ou bien $10x = 14800$, et en divisant par 10, il viendra $x = 1480$. Ainsi 1480 est le nombre de livres qu'il avait au commencement de la première année.

Vous voyez que, dans les problêmes qui ne renferment que des nombres, ou des quantités abstraites, il n'y a, pour ainsi dire, rien autre chose à faire qu'à traduire la question du langage ordinaire en langage algébrique; c'est-à-dire, à exprimer ses conditions par des caractères propres à peindre nos idées sur les rapports des quantités. Il arrive assez souvent que le discours par lequel l'état d'une question est exprimé, ne paraît pas pouvoir être traduit en langage algébrique; mais on l'y disposera facilement, en opérant quelques changemens, et sur-tout en s'attachant plus aux sens des paroles qu'aux paroles elles-mêmes.

C'est ainsi que toutes les langues ayant leur idiôme particulier, lorsqu'il faut faire passer un ouvrage de l'une dans une autre, ce ne sont pas les mots, mais les pensées qu'il faut traduire. Au reste, comme les arts s'apprennent bien plus facilement par des exemples que par des préceptes, je vais donner ici la solution de plusieurs problêmes.

PROBLÊME Ier.

La somme de deux nombres égale a; la différence de leur quarré est b; on demande quels sont ces deux nombres?

Soit x le plus petit, l'autre sera $a - x$; leurs quarrés seront

Digitized by Google

respectivement x^2, et $a^2 - 2ax + x^2$; la différence de ces quarrés est $a^2 - 2ax$, qu'on suppose égale à b. On a, par conséquent, l'équation $a^2 - 2ax = b$, donc en réduisant, $a^2 - b = 2ax$, ou bien $\frac{a^2 - b}{2a} = x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2a}$.

EXEMPLE. Si la somme des deux nombres que nous avons supposée a, est 8, et la différence b de leurs quarrés, 16, on aura..... $x = \frac{64 - 16}{16}$, ou $x = 3$, et $a - x = 5$; les deux nombres seraient donc 3 et 5.

PROBLÊME II.

On a trois quantités x, y, z. On connaît les sommes de ces quantités prises deux à deux, on demande la valeur de chacune en particulier?

Soit a la somme des deux quantités x et y; et b, celle de x et z; enfin c, celle de y et z. Pour déterminer les trois quantités x, y et z, on a donc les trois équations $x + y = a$; $x + z = b$; et $y + z = c$. Maintenant pour éliminer deux des trois inconnues y et z, par exemple, retranchez x dans la première et dans la seconde équation, et vous aurez $y = a - x$; et $z = b - x$, substituez ces valeurs de y et z, dans la troisième $y + z = c$, elle deviendra, $a - x + b - x = c$; et en réduisant et dégageant x, vous aurez, $x = \frac{a + b - c}{2}$. x étant trouvé, on substituera sa valeur dans les deux équations $y = a - x$ et $z = b - x$, et on aura les valeurs de y et de z.

Par exemple, si la somme de y et x est 9; celle de x et z, 10; et celle de y et z, 13; alors susbtituez dans les équations, 9 au lieu de a; 10 au lieu de b, et 13 au lieu de c; et $a + b - c$ sera égal à 6. Et $x = \frac{a + b - c}{2} = 3$; $y = a - x = 6$; et $z = b - x = 7$.

Digitized by Google

PROBLÊME III.

Il s'agit de partager un nombre donné en parties telles, que chacune des plus grandes surpasse la plus petite d'une quantité donnée.

Soit a la quantité qu'il faut partager en quatre parties, et x la première et la plus petite de ces parties; b l'excès de la seconde sur la première; c l'excès de la troisième; et d l'excès de la quatrième. La seconde partie sera donc $x+b$, la troisième $x+c$, et la quatrième $x+d$. La somme de toutes ces parties sera $4x+b+c+d$ qui doit être égale à a. Donc $4x+b+c+d=a$. Retranchez de part et d'autre, $b+c+d$, et le reste sera $4x=a-b-c-d$, ou $x=\frac{a-b-c-d}{4}$.

Par exemple, qu'il s'agisse de partager une ligne de 20 pieds en quatre parties, de manière que l'excès de la seconde sur la première soit de deux pieds; celui de la troisième sur la première de 3 pieds, et enfin celui de la quatrième de 7 pieds. La valeur de x sera.... $x=\frac{a-b-c-d}{4}$, ou $x=\frac{20-2-3-7}{4}=2$. $x+b=4$, $x+c=5$, $x+d=9$.

On suivra la même marche pour diviser une autre quantité quelconque, en un nombre de parties telles qu'on voudra.

PROBLÊME IV.

Un homme veut distribuer de l'argent à des pauvres. S'il avait huit deniers de plus, il pourrait en donner trois à chacun; il ne leur en donne donc que deux, et il lui en reste trois. On demande le nombre des pauvres?

Soit x le nombre des pauvres. Il s'en faut de huit deniers que

Digitized by Google

l'homme ne puisse distribuer $3x$. Son argent peut donc être représenté par $3x - 8$. Il distribue sur cet argent $2x$ de deniers : par conséquent, ce qui lui reste après la distribution sera représenté par $3x - 8 - 2x$, ou $x - 8$; mais nous avons dit que ce reste était égal à trois deniers; par conséquent, $x - 8 = 3$, ou $x = 11$.

PROBLÊME V.

Deux messagers A et B sont éloignés l'un de l'autre de 59 milles; ils partent le matin pour aller à leur rencontre mutuelle. A fait 7 milles en deux heures, et B en fait 8 en trois heures, mais A est parti une heure avant B. On demande combien A fera de milles avant de rencontrer B.

Appelez ce nombre de milles x. Alors $59 - x$ sera le chemin qu'aura fait *B*. Et comme *A* fait 7 milles en deux heures, il fera x de milles en $\frac{2x}{7}$ d'heures; ce qu'on trouve en faisant cette proportion, 7 milles : 2 heures :: x milles : $\frac{2x}{7}$ heures. De même, comme *B* fait 8 milles en 3 heures, il fera $59 - x$ milles en $\frac{177 - 3x}{8}$ d'heures. Maintenant, comme la différence de ces temps est 1 heure, ils deviendront égaux, en ajoutant 1 au plus petit, c'est-à-dire à $\frac{177 - 3x}{8}$; et on aura l'équation $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$. Et en réduisant, on trouve $x = 35$. En effet, si on multiplie l'équation $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$ par 8, elle devient, $8 + 177 - 3x = \frac{16x}{7}$, ou $185 - 3x = \frac{16x}{7}$, et en multipliant de nouveau tout par 7, on a enfin, $1295 - 21x = 16x$, ou, $1295 = 37x$; et en divisant par 37, on a, $x = 35$. Ainsi *A* fera 35 milles avant de rencontrer *B*.

Digitized by Google

Le même problême d'une manière plus générale.

On donne les vîtesses de deux mobiles A et B; on donne aussi la différence des temps et des lieux de départ; on demande de déterminer le lieu où ils se rencontreront.

Supposez que la vîtesse de A soit telle, qu'il parcoure l'espace c pendant le temps f; et celle du mobile B telle, qu'il parcoure l'espace d dans le temps g; supposez encore que la différence des points de départ soit e, et la différence des instans de départ h.

PREMIER CAS.

Si les deux mobiles vont dans le même sens, et que A poursuive B, le chemin de A sera égal à celui de B, plus à l'intervalle qui séparait les deux mobiles au commencement du mouvement: appelez x le chemin de A; retranchez e de x, et le reste $x - e$ sera le chemin de B. Et comme A parcourt l'espace c dans le temps f, on trouvera le temps qu'il emploie pour parcourir x par cette proportion, l'espace c : au temps f :: l'espace x : au temps $\frac{fx}{c}$. Et comme B parcourt l'espace d dans le temps g, il parcourra l'espace $x - e$ dans le temps $\frac{gx - ge}{d}$. Et comme on suppose la différence des temps égale à h, il suffira d'ajouter h au plus petit pour les rendre égaux; par exemple à $\frac{fx}{c}$ si c'est B qui a commencé à se mouvoir le premier, et on aura l'équation $\frac{fx}{c} + h = \frac{gx - ge}{d}$; et en réduisant il vient, $\frac{cge + cdh}{cg - df} = x$. Si au contraire c'est A qui est entré le premier en mouvement, alors il faut ajouter h à $\frac{gx - ge}{d}$,

Digitized by Google

et on aura $\frac{fx}{c} = h + \frac{gx - ge}{d}$, et en réduisant, il vient $x = \frac{cge - cdh}{cg - df}$.

SECOND CAS.

Si les deux mobiles vont à la rencontre l'un de l'autre, et qu'on suppose, comme auparavant, que la distance initiale de A, au point de rencontre, soit x, la distance initiale de B, au même point sera, $e - x$; le temps employé par A, pour parcourir l'espace x, sera $\frac{fx}{c}$, et $\frac{ge - gx}{d}$ sera le temps employé par le mobile B, pour parcourir l'espace $e - x$. Au plus petit de ces deux temps ajoutez, comme ci-dessus, la différence h, c'est-à-dire à $\frac{fx}{c}$ si c'est B qui a commencé le premier à se mouvoir, et vous aurez $\frac{fx}{c} + h = \frac{ge - gx}{d}$, et en réduisant, $x = \frac{cge - cdh}{cg + df}$; mais si c'est A qui est entré le premier en mouvement, ajoutez h au temps $\frac{ge - gx}{d}$, et votre équation sera, $\frac{fx}{c} = h + \frac{ge - gx}{d}$, et en réduisant, $x = \frac{cge + cdh}{cg + df}$.

EXEMPLE Ier. Si chaque jour le soleil parcourt un degré, et la lune 13; qu'à une certaine époque, le soleil se trouve au commencement du cancer, et trois jours après, la lune au commencement du bélier, on demande où se fera leur première conjonction? Rép. à 10° 45′ du cancer. En effet, les deux corps marchent dans le même sens; mais comme le mouvement de la lune ne se compte qu'après que le soleil a déjà marché trois jours, qu'elle est aussi plus loin du point d'arrivée que le soleil, il faut la désigner par A, et

Digitized by Google

et le soleil le sera par B, et $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ sera la longueur du chemin que fera la lune. Et si on substitue dans la formule, 13 au lieu de c; 1 au lieu de f, d et g; 90 au lieu de e; et 3 au lieu de h, elle deviendra $\frac{13\times1\times90+13\times1\times3}{13\times1-1\times1}=\frac{1209}{12}=100\frac{3}{4}$. Comptez donc ces cent degrés trois quarts depuis le commencement du bélier, et vous arriverez à $10°\frac{3}{4}$, ou 10° 45′ du cancer.

EXEMPLE II. Si deux messagers, A et B, éloignés l'un de l'autre de 59 milles, partent le matin pour aller à leur rencontre mutuelle; que A fasse 7 milles en deux heures, et B, 8 milles en trois heures; que B se mette en route une heure plus tard que A, on demande le chemin que fera A avant de rencontrer B? Rép. 35 milles. En effet, puisqu'ils vont à la rencontre l'un de l'autre, et que c'est A qui s'est mis le premier en route, ce sera la formule $\frac{cge+cdh}{cg+df}$ qui désignera le chemin qu'aura fait A avant de rencontrer B. Et si on substitue dans cette formule 7 pour c, 2 pour f, 8 pour d, 3 pour g, 59 pour e, et 1 pour h, elle deviendra... $\frac{7\times3\times59+7\times8\times1}{7\times3+8\times2}=\frac{1295}{37}=35$.

PROBLÊME VI.

Étant donnée la puissance d'un agent quelconque, trouver combien il faudrait d'agens de cette espèce pour produire, dans un temps donné b, un effet demandé a.

Soit la puissance de cet agent telle, que dans un temps donné d, elle produise un effet c, il faut chercher combien cette même puissance produira d'effet dans le temps b; ce qu'on trouvera par cette proportion $d : c :: b : \frac{bc}{d}$. Voilà l'effet d'un seul agent pendant

Digitized by Google

le temps b. Pour trouver combien il faut d'agens de cette espèce pour produire l'effet demandé a, faites cette proportion..... $\frac{bc}{d} : 1 :: a : \frac{ad}{bc}$, qui signifie, en langage ordinaire, $\frac{bc}{d}$ (l'effet d'un agent unique) est à 1 (cet agent unique) comme a (l'effet de tous les agens) est à $\frac{ad}{bc}$ (tous ces agens).

EXEMPLE. Si un écrivain peut, en 8 jours, écrire 15 feuilles, combien faudra-t-il d'écrivains pour en écrire 405 en 9 jours? Rép. 24. Car si on met 8 à la place de d, 15 au lieu de c, 405 au lieu de a, et 9 au lieu de b, le nombre d'écrivains $\frac{ad}{bc}$ deviendra $\frac{405 \times 8}{9 \times 15}$, c'est-à-dire $\frac{3240}{135}$ ou 24.

PROBLÊME VII.

Les forces de plusieurs agens étant données, déterminer le temps x dans lequel, toutes ensemble, elles peuvent produire un effet demandé d.

Soient les agens A, B, C tels, que dans les temps e, f, g, ils produisent respectivement les effets a, b, c; ces agens produiront aussi respectivement dans le temps x les effets $\frac{ax}{e}$; $\frac{bx}{f}$; $\frac{cx}{g}$, ainsi la somme de tous ces effets partiels sera, $\frac{ax}{e} + \frac{bx}{f} + \frac{cx}{g} = d$, et en dégageant x, on a, $x = \frac{d}{\frac{a}{e} + \frac{b}{f} + \frac{c}{g}}$.

EXEMPLE. Trois ouvriers peuvent faire un ouvrage quelconque dans un certain temps; A, je suppose, peut le faire une fois dans trois semaines; B, trois fois dans huit semaines; et C, cinq fois dans douze semaines. On demande en combien de temps, tous

Digitized by Google

ensemble, ils pourront faire ce même ouvrage? Or, puisque les agens A, B, C produisent respectivement les effets 1, 3, 5 dans les temps 3, 8, 12, et qu'on cherche dans quel temps leurs efforts réunis produiront l'effet 1, qu'on écrive dans la formule trouvée plus haut, les nombres 1, 3, 5; 1; 3, 8, 12, au lieu des lettres a, b, c; d; e, f, g, et il viendra $x = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}}$, ou $\frac{8}{9}$ d'une semaine, c'est-à-dire 6 jours et $5\frac{1}{3}$ heures, temps dans lequel leurs efforts réunis feront l'ouvrage. (15).

PROBLÊME VIII.

On a différens mélanges de plusieurs substances, on veut en former un nouveau, de manière que ces différentes substances s'y trouvent dans une proportion donnée.

Soit un de ces mélanges $dA + eB + fC$; un second, $gA + hB + kC$; et un troisième, $lA + mB + nC$. Dans ces expressions, les lettres A, B, C désignent les substances mélangées; et d, e, f, g, h, etc. les proportions dans lesquelles ces substances se trouvent dans chaque mélange. Soit $pA + qB + rC$ le nouveau mélange qu'on veut composer en prenant des parties des autres. Supposez que x, y, z soient les nombres par lesquels il faut multiplier respectivement les trois premiers mélanges, pour que leur somme devienne $pA + qB + rC$,

On aura donc $\left\{\begin{array}{l} dxA + exB + fxC \\ +gyA + hyB + kyC \\ +lzA + mzB + nzC \end{array}\right\} = pA + qB + rC.$

Ainsi les lettres A, B, C étant les mêmes dans les deux membres

Digitized by Google

de l'équation, il faut que leurs coefficiens soient égaux; on a donc $dx + gy + lz = p$; $ex + hy + mz = q$; et $fx + ky + nz = r$. Et en dégageant x dans ces trois équations, on a $x = \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - hy - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}$. Et en réduisant de nouveau, on trouve $y = \frac{ep - dq + dmz - elz}{eg - dh} = \frac{fq - er + enz - fmz}{fh - ek}$. Faisons, pour abréger, $\alpha = ep - dq$; $\beta = dm - el$; $\gamma = eg - dh$; $\delta = fq - er$; $\zeta = en - fm$, et $\theta = fh - ek$. Alors la première valeur de y deviendra, $y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma}$, et la seconde, $y = \frac{\delta + \zeta z}{\theta}$. Donc $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{\delta + \zeta z}{\theta}$; et en dégageant z de cette dernière équation, il vient $z = \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta}$. La valeur de z étant trouvée, substituez-la dans l'équation $y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma}$, la valeur de y sera alors donnée en quantités toutes connues: il ne s'agira plus que de substituer les valeurs de z et de y dans l'équation $x = \frac{p - gy - lz}{d}$ pour avoir aussi la valeur de x en quantités toutes connues.

Exemple. On a trois mélanges de métaux en fusion: une livre du premier mélange contient 12 onces d'argent, une once de cuivre, et 3 d'étain; une livre du second contient une once d'argent, 12 onces de cuivre, et 3 d'étain; une livre du troisième contient 14 onces de cuivre, 2 d'étain, et ne contient point d'argent. Il s'agit, avec ces trois mélanges, d'en former un nouveau qui, sur chaque livre, contienne 4 onces d'argent, 9 onces de cuivre, et 3 d'étain. Au lieu des lettres d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r, écrivez respectivement leurs valeurs 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3; alors $\alpha = ep - dq = 1 \times 4 - 12 \times 9 = -104$, $\beta = dm - el = 12 \times 14 - 1 \times 0 = 168$. On trouvera de même

Digitized by Google

que $\gamma = -143$, $\delta = 24$; $\zeta = -40$, et $\theta = 33$. Ainsi l'équation $z = \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544} = 0$; $y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-104 + 0}{-143} = \frac{8}{11}$, et $x = \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{4 - \frac{8}{11}}{12} = \frac{3}{11}$. Par conséquent si on prend, pour chaque livre, $\frac{8}{11}$ du second mélange, et $\frac{3}{11}$ du premier, sans rien prendre du troisième, chaque livre du nouveau mélange contiendra quatre onces d'argent, neuf de cuivre, et trois d'étain.

PROBLÊME IX.

On connaît les prix de différens mélanges et les proportions de chacune des choses qui les composent; il s'agit de déterminer le prix de chacune des choses composantes en particulier.

Les objets qui entrent dans le premier mélange sont désignés respectivement par A, B, C; leurs proportions par d, g, l, et le prix de ce mélange par p. Ce mélange et son prix seront exprimés par l'équation $dA + gB + lC = p$. Un second mélange, $eA + hB + mC$, a pour prix q; et un troisième, $fA + kB + nC$, a pour prix r. On demande les prix de A, B, et C. Soient respectivement ces prix x, y, z. Il est évident qu'on aura ces trois équations $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, et $fx + ky + nz = r$; et en traitant ces trois équations comme nous avons fait celles du problême précédent, on trouvera $z = \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta}$, $y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma}$ et $x = \frac{p - gy - lz}{d}$.

Exemple. Un homme achète 40 boisseaux de froment, 24 d'orge, et 20 d'avoine, pour le prix de 15 liv. 12 s. (*). Il fait

(*) On doit bien voir que par-tout où Newton fait des évaluations en argent, il s'agit de livres et de sols sterlings.

Digitized by Google

un second achat de 26 boisseaux de froment, 30 boisseaux d'orge, et 50 d'avoine, pour le prix de 16 liv. Enfin il fait un troisième achat de 24 boisseaux de froment, 120 d'orge, et 100 d'avoine, pour le prix de 34 liv. On demande le prix du boisseau de chaque espèce de grain? Rép. le boisseau de froment lui a coûté 5 s., celui d'orge 3 s., et celui d'avoine 2 s. Car au lieu de d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, et r, substituez respectivement dans les équations, 40, 24, 20; 26; 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, et 34, et vous aurez $\alpha = ep - dq = 26 \times 15\frac{3}{5} - 40 \times 16 = -234\frac{2}{5}$. $\beta = dm - el = 40 \times 50 - 26 \times 20 = 1480$. De même $\gamma = -576$, $\delta = -500$, $\zeta = 1400$, et $\theta = -2400$. Ainsi, $\xi = \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{562560 - 288000}{-806400 + 3552000} = \frac{274560}{2745600} = \frac{1}{10}$. $y = \frac{\alpha + \beta\xi}{\gamma} = \frac{-234\frac{2}{5} + 148}{-576} = \frac{3}{20}$. $x = \frac{p - gy - l\xi}{d} = \frac{15\frac{3}{5} - \frac{18}{5} - 2}{40} = \frac{1}{4}$. Donc le boisseau de froment a coûté $\frac{1}{4}$ de livre ou 5 sous, le boisseau d'orge $\frac{3}{20}$ ou 3 sous, et le boisseau d'avoine $\frac{1}{10}$ ou 2 sous.

PROBLÊME X.

Connaissant la pesanteur spécifique d'un composé, et celle de chacun de ses composans, déterminer dans quelle proportion ces derniers s'y trouvent.

Soit e la pesanteur spécifique du composé, dont les parties composantes sont $A + B$; soit de plus a la pesanteur spécifique de la partie composante A, et b la pesanteur spécifique de la partie composante B. On sait que la pesanteur absolue d'un corps est égale à son volume multiplié par sa pesanteur spécifique; ainsi aA est la pesanteur absolue ou le poids de la partie composante A, et bB la pesanteur absolue de B. D'un autre côté $eA + eB$ est le

Digitized by Google

poids du composé; ainsi $aA + bB = eA + eB$, ou bien $aA - eA = eB - bB$, ou bien enfin $e - b : a - e :: A : B$.

EXEMPLE. Soit la pesanteur spécifique de l'or comme 19; celle de l'argent comme $10\frac{1}{3}$ ou $\frac{31}{3}$, et celle de la couronne d'Hiéron comme 17. On trouvera que la proportion du volume d'or à celui de l'argent dans la couronne, sera $:: 10 : 3 :: e - b : a - e :: A : B$. Et la proportion du poids de l'or au poids de l'argent dans cette même couronne $:: 190 : 31 :: 19 \times 10 : \frac{31}{3} \times 3 :: a(e - b) : b(a - e)$. Et le poids de la couronne est au poids de l'argent qu'elle contient $:: 221 : 31$. (16).

PROBLÊME XI.

On a trois prés d'une qualité égale, et dans lesquels on suppose que l'herbe croît uniformément. Le premier b peut nourrir un nombre de bœufs a pendant le temps c; le second e peut nourrir un nombre de bœufs d pendant le temps f; on demande combien le troisième g peut en nourrir pendant le temps h?

Si les bœufs a dans le temps c mangent le pré b, on voit que par proportion il faudra les bœufs $\frac{ae}{b}$ pour manger le pré e pendant le même temps, ou les bœufs $\frac{ace}{bf}$ pour le manger pendant f, ou les bœufs $\frac{ace}{bh}$ pour le manger pendant le temps h, en supposant que les herbes cessent de croître après le temps c. Mais à cause de la crue uniforme des herbes, il faut un troupeau d pour manger le pré e dans le temps f. Il s'en suit que l'herbe qui aura cru dans ce pré pendant le temps $f - c$, suffira pour nourrir pendant le temps f, un nombre de bœufs exprimé par $d - \frac{cea}{bf}$; ou pour nourrir pendant le temps h un nombre de

Digitized by Google

bœufs exprimé par $\frac{df}{h} - \frac{ace}{bh}$. Et par proportion, l'herbe qui aura crû dans ce pré pendant le temps $h - c$, sera suffisante pour nourrir pendant le temps h un nombre de bœufs exprimé par $\left(\frac{h-c}{f-c}\right)\left(\frac{df}{h} - \frac{ace}{bh}\right) = \frac{bdfh - aceh - bdcf + acc^2}{bfh - bch}$. Ajoutez ce troupeau de bœufs à celui qui est exprimé par $\frac{ace}{bh}$, et il viendra.... $\frac{bdfh - aceh - bcdf + acef}{bfh - bch}$, nombre de bœufs suffisant pour manger le pré e pendant le temps h. Maintenant une proportion va nous faire connaître le nombre de bœufs qu'il faut pour manger le pré g pendant le même temps h, et ce nombre est..... $\frac{bdfgh - acegh - bcdgf + acefg}{befh - bceh}$. (*).

EXEMPLE. 12 bœufs paissent l'herbe de $3\frac{1}{3}$ arpens en 4 semaines; 21 bœufs paissent celle de 10 arpens en 9 semaines; on demande combien il faudra de bœufs pour manger l'herbe de 24 arpens en 18 semaines? Rép. 36. Remarquez qu'on suppose les prés d'une même bonté. On trouvera la réponse à cette question en substituant respectivement les nombres 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24 et 18, à la place des lettres a, b, c, d, e, f, g et h dans la formule $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$. Mais l'opération ne serait peut-être pas moins courte, si on la reprenait dès son origine, en la modelant sur celle que nous avons faite en lettres. En effet, si 12

(*) La meilleure explication qu'on puisse donner de ce problême, se trouve dans l'exemple qui le suit. Le Cn. Bossut a traité le même problême dans son Algèbre, et il me semble que la marche qu'il a suivie est plus facile que celle de Newton.

bœufs

Digitized by Google

bœufs ont pu paître en 4 semaines l'herbe de 3 arpens et $\frac{1}{3}$, il faudra par proportion, ou 36 bœufs en 4 semaines, ou 16 bœufs en 9 semaines, ou 8 bœufs en 18 semaines, pour paître l'herbe de 10 arpens, en supposant, bien entendu, que l'herbe cesserait de croître après les quatre semaines. Mais comme l'herbe ne cesse pas de croître, 21 bœufs en 9 semaines ne peuvent paître que 10 arpens; il faut donc que l'herbe qui a cru dans ces 10 arpens pendant l'excès de 9 semaines sur quatre semaines, ou pendant 5 semaines, soit suffisante pour nourrir, pendant 9 semaines, l'excès de 21 bœufs sur 16 bœufs, ou 5 bœufs, ou bien $\frac{5}{2}$ bœufs pendant 18 semaines. De même, l'herbe qui aura cru pendant 14 semaines (excès de 18 semaines sur 4) doit nourrir 7 bœufs pendant 18 semaines, comme on le voit en faisant cette proportion, 5 (semaines) : 14 (semaines) :: $\frac{5}{2}$ (bœufs) : un quatrième terme 7 bœufs. Ainsi, 10 arpens ont suffi à la nourriture de 8 bœufs pendant 18 semaines, dans la supposition que l'herbe aurait cessé d'y croître après les quatre premières semaines; or, nous venons de voir que l'herbe qui a cru pendant ces 14 semaines de surplus, était suffisante pour nourrir 7 bœufs pendant 18 semaines. Donc ces 10 arpens ont pu nourrir 15 bœufs pendant les 18 semaines. Et enfin, si 10 arpens peuvent nourrir 15 bœufs pendant 18 semaines, combien 24 arpens pourront-ils en nourrir pendant le même temps? On trouvera, en faisant la proportion, qu'ils peuvent en nourrir 36.

Digitized by Google

PROBLÊME XII.

Etant données les grandeurs et les quantités respectives de mouvement de deux corps sphériques qui se meuvent sur la même ligne droite et se choquent; déterminer leurs quantités respectives de mouvement après le choc.

La résolution de ce problême dépend des deux propositions suivantes: 1°. C'est que chaque corps éprouve une réaction égale à l'action qu'il a eue sur l'autre. 2°. C'est que la vîtesse relative pour s'éloigner après le choc, est égale à celle qu'ils avaient avant, pour s'approcher. Cela posé, soient les deux corps A et B, et leurs vîtesses respectives a et b; leurs quantités de mouvement seront aA et bB (parce que la quantité de mouvement d'un corps est égale au produit de sa masse par sa vîtesse). Supposons que les deux corps marchent du même côté, mais que la vîtesse de A soit la plus considérable, et qu'il tende par conséquent à atteindre B; supposons de plus, que x soit la quantité de mouvement que aA perdra par le choc, par conséquent x sera aussi la quantité de mouvement qu'aura gagnée bB. Ainsi, après la réflexion, les quantités respectives de mouvement seront, $aA - x$ et $bB + x$; et les vîtesses seront, $\frac{aA - x}{A}$, et $\frac{bB + x}{B}$. (*). Or la différence des vîtesses

(*) Newton vient de dire plus haut, que la quantité de mouvement d'un corps était égale au produit de sa masse par sa vîtesse. Donc, si on divise ce produit par la masse, le quotient sera la vîtesse. Or, $aA - x$ est la quantité de mouvement de A après la réflexion; donc $\frac{aA - x}{A}$ sera sa vîtesse après la réflexion : de même $bB + x$ est la quantité de mouvement de B après le choc; donc $\frac{bB + x}{B}$ sera la vîtesse de B après le choc.

Digitized by Google

après le choc doit être égale à $a - b$, différence des vîtesses avant le choc. Nous aurons donc, $\frac{bB + x}{B} - \left(\frac{aA - x}{A}\right) = a - b$. Et en réduisant, on a, $x = \frac{2aAB - 2bAB}{A + B}$. Et en substituant cette valeur de x dans l'expression des vîtesses $\frac{aA - x}{A}$ et $\frac{bB + x}{B}$, la vîtesse de A devient, après le choc, $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$, et celle de B, $\frac{2aA - bA + bB}{A + B}$. Si les deux mobiles allaient en sens directement opposés, il faudrait changer par-tout le signe de b; et les vîtesses respectives de A et de B, après la réflexion, seraient $\frac{aA - aB - 2bB}{A + B}$, et $\frac{2aA + bA - bB}{A + B}$. Si l'une ou l'autre de ces vîtesses est négative, c'est une preuve que le mobile auquel elle appartient est poussé dans une direction contraire à celle qu'avait A avant le choc. On doit entendre la même chose du mouvement de A dans le cas précédent.

Exemple. Soient deux mobiles de matière homogène qui aient, le premier A, 3 livres de masse, et 8 degrés de vîtesse; le second B, 9 livres de masse, et 2 degrés de vîtesse, et supposons que ces deux corps marchent dans le même sens. Alors à la place de A, a, B, b, substituez respectivement dans les formules les nombres, 3, 8, 9, 2, et $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$ devient $= -1$, et $\frac{2aA - bA + bB}{A + B} = 5$. Ainsi, après la réflexion, A retournera en sens contraire avec un degré de vîtesse, et B continuera son mouvement dans sa première direction avec 5 degrés de vîtesse.

Digitized by Google

PROBLÊME XIII.

Trouver trois nombres en proportion continue, dont la somme soit 20, *et dont la somme des quarrés soit* 140.

Soit le premier de ces nombres x, et le second y, le troisième sera $\frac{y^2}{x}$. On aura donc $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$. Et $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$. Et en réduisant, la première équation devient, $x^2 + (y - 20)x + y^2 = 0$. Et la seconde $x^4 + (y^2 - 140)x^2 + y^4 = 0$. Pour faire disparaître x de ces deux équations, employez la méthode de la règle troisième sur l'élimination, et substituez dans la formule à la place des lettres a, b, c, d, e, f, g et h, leurs valeurs respectives 1, 0, $y^2 - 140$, 0, y^4; 1, $y - 20$, et y^2, il viendra..... $(-y^2 + 280) \times y^6 + (2y^2 - 40y + 260) \times (260y^4 - 40y^5) + 3y^4 \times y^4 - 2y^2 (y^6 - 40y^5 + 400y^4) = 0$, et en faisant les multiplications indiquées, on a, $1600y^6 - 20800y^5 - 67600y^4 = 0$, qui se réduit à, $4y^2 - 52y + 169 = 0$, ou bien, en résolvant, $2y - 13 = 0$, ou bien $y = 6\frac{1}{2}$. C'est le même nombre que nous avons trouvé ci-devant, par une méthode beaucoup plus courte, mais moins directe. Enfin pour trouver x, substituez $6\frac{1}{2}$ au lieu de y dans l'équation $x^2 + (y - 20)x + y^2 = 0$, et vous aurez, $x^2 - 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4} = 0$, il en résultera cette équation $x = 6\frac{3}{4} \pm \sqrt{3\frac{5}{16}}$. C'est-à-dire, que $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$ est le plus grand des trois nombres cherchés, et que $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ en est le plus petit; car x peut être indifféremment l'un ou l'autre des extrêmes de la proportion : de-là il résulte pour x deux valeurs; et lorsqu'une de ces valeurs est le premier extrême, $\frac{y^2}{x}$ est le second, et réciproquement.

Digitized by Google

Le même problême d'une autre manière.

Nous supposerons, comme auparavant, que les nombres cherchés sont x, y et $\frac{y^2}{x}$. Par conséquent on aura, $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$, ou bien $x^2 + (y - 20)x + y^2 = 0$, et en résolvant cette équation on trouve, $x = 10 - \frac{y}{2} \pm \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}y^2}$. Si nous retranchons y, et la valeur que nous venons de trouver pour x, du nombre 20, la différence sera la valeur du troisième terme $\frac{y^2}{x}$. Nous aurons donc $\frac{y^2}{x} = 10 - \frac{1}{2}y \mp \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}y^2}$. Faisons maintenant les quarrés de ces trois nombres, leur somme doit être égale à 140. Nous aurons donc $\left(10 - \frac{y}{2} \pm \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}y^2}\right)^2 + y^2 + \left(10 - \frac{1}{2}y \mp \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}y^2}\right)^2 = 140$: quantité qui se réduit, toutes opérations faites, à $400 - 40y = 140$, ou bien à $y = 6\frac{1}{2}$, comme nous l'avons trouvé auparavant. Substituons cette valeur de y, dans l'équation qui donne la valeur de x, et le premier nombre sera, $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$, et le dernier $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ comme ci-devant.

PROBLÊME XIV.

On veut trouver quatre nombres en proportion continue, dont la somme des deux moyens fasse 12, *et celle des deux extrêmes* 20.

Soit x le second de ces nombres, alors $12 - x$, sera le troisième; et en faisant la proportion, $12 - x : x :: x :$ un quatrième terme $\frac{x^2}{12 - x}$, qui sera notre premier nombre. Nous trouverons le quatrième par cette autre

Digitized by Google

proportion; x (le second nombre) : $12-x$ (le troisième) :: $12-x$: $\frac{144-24x+x^2}{x}$ qui sera enfin le quatrième nombre cherché. Or une des conditions du problême est que la somme du premier et du quatrième doit être égale à 20, il faut donc que $\frac{x^2}{12-x}+\frac{144-24x+x^2}{x}=20$, ou bien en réduisant $x^2-12x=-30\frac{6}{7}$, et en résolvant..... $x=6\pm\sqrt{5\frac{1}{7}}$. Ce nombre une fois trouvé, on obtiendra successivement tous les autres, en substituant sa valeur dans les équations précédentes.

PROBLÊME XV.

Trouver quatre nombres en proportion continue, dont la somme soit a, et la somme des quarrés b.

Quoique notre coutume ait été jusqu'ici de chercher, de la manière la plus directe, les quantités inconnues, cependant lorsqu'il se trouve deux de ces quantités tellement équivoques, que les mêmes conditions puissent leur convenir (comme sont ici les deux extrêmes ou les deux moyens de notre proportion continue), dans ce cas, il ne faut chercher ni l'une ni l'autre; il en faut chercher une nouvelle qui puisse servir à les déterminer également, comme serait, par exemple, ou leur somme, ou leur différence, ou leur produit. Supposons donc que la somme de nos moyens soit s, et que leur produit soit r, il est évident que la somme des extrêmes est $a-s$, et que leur produit est aussi r, le même que celui des moyens. C'est maintenant de ces quantités qu'il faut tirer les quatre termes de notre proportion. Soit donc x le premier et y le second, alors $s-y$ sera le troisième, et $a-s-x$ le quatrième. Le produit des moyens sera $sy-y^2=r$. Par conséquent la valeur du premier moyen y sera, $y=\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}s^2-r}$,

Digitized by Google

et celle du second moyen sera, $s-y=\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}s^2-r}$. Enfin le produit des extrêmes est, $ax-sx-x^2=r$. On voit par-là, que la valeur du premier extrême est, $x=\frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{s^2-2as+a^2}{4}-r}$; celle du second extrême est, $a-s-x=\frac{a-s}{2}-\sqrt{\frac{s^2-2as+a^2}{4}-r}$.

La somme des quarrés de ces quatre nombres est, $2s^2-2as+a^2-4r$ qui est égale à b. En tirant de cette équation la valeur de r, on a, $r=\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}as+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b$; et en mettant à la place de r sa valeur dans nos quatre équations, voici celles qui nous viendront pour nos nombres.

$$\text{Les deux moyens}\quad\begin{cases}\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}a^2}.\\ \frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}a^2}.\end{cases}$$

$$\text{Les deux extrêmes}\quad\begin{cases}\frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2}.\\ \frac{a-s}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2}.\end{cases}$$

Il nous reste maintenant à déterminer la valeur de s. Afin d'y parvenir, faisons pour abréger, $\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}a^2}=p$, et $\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2}=q$, de sorte que l'expression des moyens sera $\frac{1}{2}s+p$, et $\frac{1}{2}s-p$. L'expression des extrêmes sera $\frac{a-s}{2}+q$, et $\frac{a-s}{2}-q$. Faisons usage actuellement des deux conditions renfermées dans l'énoncé du problême : la première est, que le produit du second et du quatrième termes est égal au quarré du troisième; et la seconde, que le produit du premier et du troisième est égal au quarré du second. La première condition nous donne, $\frac{as-s^2}{4}-\frac{1}{2}qs+\frac{pa-ps}{2}-pq=$

Digitized by Google

$\frac{1}{4}s^2 - ps + p^2$; et la seconde condition donne, $\frac{as - s^2}{4} + \frac{1}{2}qs - \left(\frac{pa - ps}{2}\right) - pq = \frac{1}{4}s^2 + ps + p^2$. Retranchant la première de ces équations de la seconde, il restera $qs - pa + ps = 2ps$, ou bien $qs = pa + ps$. Remettons maintenant, au lieu de p, sa valeur.... $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}a^2}$, et à la place de q, sa valeur..... $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2}$, ce qui nous donnera, $s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2} = (a + s)\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}a^2}$. Et en quarrant chaque membre..... $s^2 = -\frac{b}{a} \cdot s + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b$, ou $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b}$. La quantité s une fois déterminée, toutes les autres se déduisent des équations trouvées ci-dessus.

PROBLÊME XVI.

Une pension d'une somme a *chaque année, doit être payée pendant cinq ans; quelqu'un achète cette pension pour une somme* c *d'argent comptant. On demande à combien pour cent se monte, dans ce marché, l'intérêt des intérêts de chaque année.*

Soit $1 - x$ l'intérêt des intérêts de la somme x par an. C'est-à-dire que si on devait acquitter, après l'année révolue, une somme $= 1$, on acquitterait la même dette en payant seulement au commencement de l'année une somme x, plus petite que 1. Donc, par analogie, si on avait à payer à la fin de l'année une somme a, cette même somme payée au commencement ne vaudrait qu'une somme ax. a payable après deux ans, ne vaudrait, argent comptant, que ax^2; après 3 ans, que ax^3; après 4 ans, que ax^4; et après 5 ans, que ax^5. Ajoutez ces cinq sommes, et vous aurez $ax^5 + ax^4 + ax^3 + ax^2 + ax = c$; ou bien $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = \frac{c}{a}$,

équation

Digitized by Google

équation du cinquième degré. Lorsque, par les règles qui seront enseignées dans la suite, on aura déterminé la valeur de x (*), on fera cette proportion, $x : 1 :: 100 : y$. On aura donc $y - 100$ pour l'intérêt des intérêts par an. (17).

Nous croyons avoir assez multiplié les exemples de problêmes où on ne cherche que les rapports des quantités, il est temps de nous occuper de ceux où on cherche en outre les positions des lignes, c'est-à-dire des problêmes géométriques.

(*) C'est-à-dire qu'on trouvera, par une construction mécanique quelconque, les premiers chiffres de la racine, et qu'ensuite on obtiendra les autres par la méthode de Viette.

Digitized by Google

De la manière de mettre les questions de Géométrie en équation.

IL est quelquefois aussi aisé de mettre en équation une question de géométrie qu'une question purement numérique. Au reste les règles sont les mêmes dans l'un et l'autre cas. Par exemple (*Pl.* I, *Fig.* 5.) s'il s'agit de couper en C une droite AB en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire de la partager de manière que le quarré BE de la plus grande partie soit égal au rectangle BD de la ligne totale par la plus petite; faites $AB = a$, et $BC = x$, AC égalera $a - x$, et $x^2 = a(a - x)$. Et en résolvant cette équation, il vient $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$.

Mais les positions des lignes, leurs rapports, compliquent le plus souvent les questions de géométrie à un point, qu'on a besoin de méthodes et d'artifices particuliers pour les ramener à la forme de simples quantités algébriques. Et quoiqu'il soit fort difficile de donner des préceptes généraux dans une semblable matière, où chacun doit compter principalement sur son adresse, je tâcherai pourtant d'indiquer la route aux commençans. Il faut donc savoir que les mêmes lignes pouvant être comparées entre elles sous différens rapports, il en peut naître autant de questions différentes, selon que l'on prendra tantôt les unes, tantôt les autres pour inconnues, et qu'on cherchera la valeur de ces inconnues par le moyen de celles qu'on aura regardées comme connues. Au reste, quelles que soient, dans

Digitized by Google

chaque question, les connues et les inconnues, la résolution s'achève toujours par les mêmes moyens analytiques qui servent à résoudre des questions purement numériques; la seule différence, c'est que les lettres qui, dans les questions algébriques, désignent des quantités abstraites, représentent ici des lignes connues ou inconnues.

(*Pl.* I, *Fig.* 6.) Par exemple, s'il s'agit du triangle isocèle CBD inscrit dans un cercle, et qu'on veuille comparer ses côtés BC et BD, et sa base CD avec le diamètre du cercle AB, la question pourrait être de chercher le diamètre par le moyen des côtés et de la base, ou bien de chercher la base par le moyen des côtés et du diamètre, ou bien enfin, de chercher les côtés par le moyen de la base et du diamètre. Mais quelle que soit celle de toutes ces questions que l'on veuille choisir, on la mettra en équation par les mêmes méthodes analytiques.

Si c'est le diamètre que l'on cherche, on fait $AB = x$, $CD = a$, et BC ou $BD = b$. Alors si on mène la corde AC, on aura, à cause des triangles semblables ABC et CBE, $AB : BC :: BC : BE$, ou en mettant les valeurs analytiques, $x : b :: b : BE = \frac{b^2}{x}$. D'un autre côté, $CE = \frac{a}{2}$, et dans le triangle CEB, à cause de l'angle droit, on a, $\overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2$, ou bien $\frac{1}{4} a^2 + \frac{b^4}{x^2} = b^2$, équation qu'il est facile de résoudre, et qui nous donnera la valeur de x. (18).

Si c'est la base que l'on cherche, alors il faut faire $AB = c$, $CD = x$, et BC ou $BD = b$, et tirant AC, on a, à cause des triangles semblables, ABC et CBE, $AB : BC :: BC : BE$, ou $c : b :: b : BE = \frac{b^2}{c}$. D'un autre côté, $CE = \frac{1}{2} CD = \frac{x}{2}$. Et à

Digitized by Google

cause du triangle rectangle CEB, on a $\overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2$, ou bien $\frac{x^2}{4} + \frac{b^4}{c^2} = b^2$, équation qui, étant résolue, nous donnera la valeur de x. (19).

Si on cherche le côté BC ou BD, il faut faire $AB = c$, $CD = a$, et BC ou $BD = x$, et tirer AC. A cause des triangles semblables ABC, CBE, on a, $AB : BC :: BC : BE$, ou bien $c : x :: x : BE$. Ainsi $BE = \frac{x^2}{c}$. Et comme $CE = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} a$, et que le triangle rectangle CEB donne $\overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2$, il s'en suit qu'on a, $\frac{1}{4} a^2 + \frac{x^4}{c^2} = x^2$, équation qui, étant résolue, nous donnera la valeur de x. (20).

Vous voyez donc que dans chaque cas le calcul par lequel on parvient à l'équation est en tout semblable; que l'équation qu'il produit est toujours la même, avec la seule différence que la même ligne est désignée tantôt par une lettre, tantôt par une autre, selon qu'elle est considérée comme connue, ou comme inconnue. Il est vrai que, selon qu'on prendra la même ligne pour connue ou pour inconnue, il naîtra une différence dans la manière de réduire l'équation. En effet, l'équation $\frac{1}{4} a^2 + \frac{b^4}{x^2} = b^2$ donne, par réduction, $x = \frac{-2b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$, valeur de AB; l'équation $\frac{1}{4} x^2 + \frac{b^4}{c^2} = b^2$ donne $x = \frac{2b}{c} \sqrt{c^2 - b^2}$, valeur de CD, et l'équation..... $\frac{1}{4} a^2 + \frac{x^4}{c^2} = x^2$ donne $x = \sqrt{\frac{1}{2} c^2 \pm \sqrt{\frac{c^4 - a^2 c^2}{4}}}$, valeur de BC ou de BD; et pour chacune de ces équations on est parvenu

Digitized by Google

à la valeur de x par des voies différentes (en effet, dans l'équation $\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^4}{c^2} = b^2$, il est bien évident qu'il faudrait s'y prendre de différentes manières, selon qu'on voudrait dégager ou c, ou a, ou b); mais toutes ces équations ont été trouvées de la même manière.

De-là vient la maxime des géomètres, qu'il ne faut mettre aucune différence entre les connues et les inconnues. Maxime très-vraie, puisque si, dans une même question, on regardait successivement chacune des quantités comme l'inconnue, on arriverait toujours à la même équation. (*). Il faut donc considérer toutes les quantités sans aucune différence entre les connues et les inconnues, afin de mieux juger de leurs rapports, et des moyens les plus propres à les calculer; ou mieux encore, qu'on imagine qu'un problême quelconque ne consiste que dans l'art de classer ses quantités en connues et en inconnues, de manière à arriver le plus facilement possible à l'équation.

Lors donc qu'un problême vous est proposé, comparez entre elles toutes les quantités qu'il renferme; estimez comment quelques-unes de ces quantités vous étant connues, vous pourriez, par un procédé synthétique, parvenir à trouver les autres. Pour cela, il n'est pas nécessaire de reconnaître du premier coup-d'œil par quelle marche le calcul algébrique conduira de l'une à l'autre, il suffit de sentir en général que les unes peuvent être déduites des autres par un moyen quelconque.

(*) C'est ce que nous venons de voir dans les deux paragraphes précédens.

Digitized by Google

(*Pl.* I, *Fig.* 7). Par exemple, si on proposait une question qui eût pour objet le diamètre *AD*, et les trois lignes *AB*, *BC* et *CD* inscrites dans un demi-cercle, et que toutes les autres étant données, on cherchât *BC*; au premier apperçu, on voit que le diamètre *AD* détermine nécessairement le demi-cercle, et qu'ensuite les lignes *AB* et *CD*, par leur inscription, déterminent aussi les points *B* et *C*, et par conséquent la ligne *BC* qu'on cherche, et cela par le moyen le plus direct. Mais on ne découvre pas avec la même facilité, par quel chemin l'analyse conduit des quantités données à la ligne cherchée *BC*. Ce serait la même chose s'il fallait chercher ou *AB*, ou *CD*, tout le reste étant donné.

Mais si *AB*, *BC* et *CD* étaient donnés, et qu'il fallût chercher le diamètre *AD*, on apperçoit à l'instant que le problême n'est pas possible par la synthèse, parce que la distance des points *A* et *D* dépend de l'ouverture des angles *B* et *C*; que ces angles dépendent du cercle dans lequel les lignes données doivent être inscrites, et que ce cercle n'est point donné, puisque son diamètre est supposé inconnu.

La nature du problême ne permet donc pas de trouver synthétiquement le diamètre *AD*. Alors il faut le traiter comme s'il était connu, pour remonter aux quantités données.

Lorsque vous aurez bien saisi les différens moyens par lesquels chaque terme d'une question peut être déterminé, alors, parmi toutes les lignes qui doivent entrer dans l'état de cette question, regardez comme connues, celles qui vous présenteront la route la plus facile pour arriver à la connaissance des autres, et dont la route inverse serait en même temps la plus difficile. C'est toujours par ces lignes que le calcul doit commencer, quoique dans le cours de l'opération, on

Digitized by Google

puisse en introduire d'autres. Le moyen le plus court d'arriver au but, est de mettre, pour un moment, de côté la question qu'on veut résoudre, et de s'imaginer qu'il ne s'agit uniquement que de choisir, parmi toutes les quantités qui doivent entrer dans le problême, celles qui, étant supposées connues, meneraient plus facilement à la connaissance des autres.

Ainsi, dans l'exemple déjà cité, si c'est le diamètre *AD* que l'on cherche, il est aisé de voir qu'on ne peut pas le trouver par un moyen synthétique; mais on s'apperçoit bien vîte, que, si ce diamètre était connu, on arriverait aux autres quantités par la route la plus directe. Je regarde donc *AD* comme connu, et j'établis mon calcul comme s'il l'était véritablement, et qu'il fût question de trouver quelqu'une des lignes données *AB*, *BC*, ou *CD*. Par ce moyen, on obtient les rapports qui existent entre les quantités qu'on traite comme connues et les autres, et on arrive toujours à une équation entre deux valeurs d'une même quantité, soit que l'une des valeurs résulte du nom donné à cette quantité au commencement de l'opération, et que l'autre ait été trouvée par le calcul, soit que toutes deux aient été trouvées par des opérations différentes d'analyse.

Au reste, le plus difficile n'est pas de concevoir les relations générales des termes d'une question, mais bien de saisir certaines liaisons des lignes entre elles, certains rapports plus propres que d'autres à être soumis au calcul. Car il arrive fréquemment, que des relations qui paraissent immédiates au premier coup-d'œil, vous entraînent dans de longs circuits, lorsque vous les traitez analytiquement, et souvent vous forcent à recommencer l'opération par de nouveaux moyens. Il ne faut donc employer que les propositions, ou les énoncés les plus propres à être exprimés par les calculs de l'Algèbre.

Digitized by Google

Premièrement, le calcul s'opère ou par l'addition des lignes, afin que, de la valeur des parties, on obtienne la valeur du tout; ou par la soustraction, afin que de la valeur du tout et d'une partie, on obtienne la valeur de l'autre partie.

Secondement, le calcul s'opère par la proportion des lignes. Car c'est aussi un principe qui a lieu en Géométrie, que, dans une proportion, si on divise le produit des moyens par un des extrêmes, le quotient donne l'autre extrême; ou, ce qui est une suite du même principe, si on a les valeurs de quatre quantités proportionnelles, il y a toujours égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens. La proportion des lignes se tire sur-tout de la similitude des triangles; et cette similitude se reconnaît à l'égalité des angles. L'analyste doit donc être très-exercé dans l'art de comparer les angles entre eux; et pour cela, il faut qu'il soit bien instruit de toutes les propositions élémentaires qui ont rapport à cette partie.

Troisièmement, le calcul s'opère par l'addition ou la soustraction des quarrés. C'est-à-dire que, dans les triangles rectangles, on ajoute les quarrés des deux petits côtés, ce qui donne le quarré du grand; ou bien du quarré du grand on retranche le quarré d'un des petits, et le reste est le quarré de l'autre petit.

C'est sur ce petit nombre de principes que repose tout l'art d'appliquer l'analyse à la géométrie des lignes droites; il suffira d'y ajouter quelques propositions puisées dans les élémens, pour les cas où il s'agirait des surfaces et des solides. Bien plus, les problêmes les plus difficiles pourraient être résolus par ces deux théorêmes : la composition des lignes par le moyen de leurs parties, et la similitude des triangles. Ainsi il n'y aurait pas de nécessité d'en employer d'autres, puisque ceux-ci suffisent à tout. Pour en donner une preuve, j'ai résolu,

Digitized by Google

résolu, sans le secours de la 47e proposition du premier livre des Élémens (*), le problême qui consiste à abaisser une perpendiculaire sur la base d'un triangle obliquangle. Mais quoiqu'il soit infiniment utile de connaître les principes les plus simples d'où dépendent les solutions des problêmes, puisqu'avec ces principes il n'en est aucun qu'on ne puisse résoudre; cependant il est plus expéditif d'employer la 47e proposition du premier livre des Élémens, dont l'usage est presque continuel, et même d'autres théorêmes.

Par exemple, si on abaisse une perpendiculaire sur la base d'un triangle obliquangle, et qu'on veuille faire entrer les segmens de la base dans le calcul, il est bon de savoir que la différence des quarrés des côtés est égale au double produit de la base, par la distance du milieu de la base à la perpendiculaire.

Il sera aussi fort utile, dans ces sortes d'opérations, de savoir, que si on coupe l'angle du sommet d'un triangle en deux parties égales, non seulement la base sera coupée en parties proportionnelles aux côtés, mais encore que l'excès du rectangle des côtés, sur le rectangle des segmens de la base est égal au quarré de la ligne qui partage l'angle.

Lorsqu'il s'agit de figures inscrites dans le cercle, on voit revenir souvent le théorême par lequel on démontre que, dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

L'analyste doit avoir en réserve ces moyens et d'autres semblables pour les cas de besoin; mais il ne doit en user qu'avec économie, et leur préférer, autant qu'il pourra, des principes plus simples,

(*) Les Élémens qui sont cités dans tout le cours de l'Ouvrage, sont ceux d'Euclide.

Digitized by Google

dussent-ils rendre le calcul un peu plus difficile. En conséquence, il doit graver dans sa mémoire les trois premiers principes que nous avons posés, et s'efforcer de les appliquer à tous les cas, comme étant les plus simples, les plus connus, les plus généraux; qu'il est difficile de les réduire à un plus petit nombre, et que cependant ils suffisent à tout.

Mais, pour que des théorêmes de cette espèce puissent servir à la résolution des problêmes, il est très-souvent nécessaire d'y ajouter des constructions particulières, comme de prolonger certaines lignes jusqu'à ce qu'elles en coupent d'autres; ce qui détermine leur longueur; ou de mener, de quelque point remarquable, des lignes parallèles ou perpendiculaires à d'autres; ou d'unir ces points remarquables; ou enfin de faire toute autre espèce de construction, selon que l'exige l'état du problême, et les théorêmes qu'on emploie à sa solution : comme, par exemple, si deux lignes qui ne se rencontrent pas, forment avec une troisième, des angles connus; en les prolongeant, leur rencontre formera un triangle, dont les angles, et par conséquent aussi les rapports des côtés, seront connus. Qu'un angle nous soit donné, ou qu'il soit égal à un autre, cela nous suffit souvent, en prolongeant quelques lignes, pour en conclure l'espèce du triangle, ou sa similitude avec un autre.

Si le triangle est obliquangle, on le décompose souvent en deux triangles rectangles, en menant une perpendiculaire d'un des angles sur le côté opposé. S'il s'agit de figures qui aient un plus grand nombre de côtés, on les décompose en triangles, en menant des diagonales; et ainsi du reste : faisant en sorte de ramener tout à ces principes simples : *que toute figure peut toujours se décomposer en triangles donnés, ou semblables, ou rectangles.*

(*Pl.* I, *Fig.* 8). Ainsi, dans l'exemple proposé je mène la

Digitized by Google

diagonale BD, et le trapèze $ABCD$ se trouve décomposé en deux triangles; l'un, ABD, rectangle, et l'autre, BCD, obliquangle. Ensuite je décompose le triangle obliquangle en deux rectangles, en abaissant une perpendiculaire d'un quelconque de ses angles B, C, ou D, sur le côté opposé; par exemple, de l'angle B sur le côté CD prolongé jusqu'en E, afin qu'il rencontre la perpendiculaire BE. Or, on sait que la somme des angles BAD et BCD est égale à deux droits (*), (par la 22e. prop. du 3e. liv. des Elém.); et que la somme des deux angles BCE et BCD égale aussi deux angles droits, il ne m'est donc pas difficile d'appercevoir que les angles BAD et BCE sont égaux, et que par conséquent les triangles BCE et BAD sont semblables. Ainsi, en regardant AD, AB et BC comme connues, et DC comme l'inconnue que l'on cherche, voici de quelle manière le calcul peut s'établir. Au moyen des lignes connues AD et AB, et à cause du triangle rectangle ABD, il sera facile de tirer la valeur de BD. Et au moyen des deux triangles semblables ABD et BCE, et des lignes connues AD, AB, BD et BC, on trouvera les lignes BE et CE. Et au moyen des lignes BD et BE, et du triangle rectangle BED, on déterminera ED, et alors $ED - EC$, différence de deux lignes connues, nous donne CD, ligne que nous cherchions. On obtiendra par ce moyen une équation entre la valeur de CD trouvée de cette manière, et la lettre par laquelle on l'a désignée. On peut aussi en faire le calcul en employant des principes différens, ce qui donne d'une même quantité deux valeurs, entre lesquelles on établit une

(*) Remarquez bien que la somme des deux angles opposés d'un quadrilatère ne peut être égale à deux droits, qu'autant que le quadrilatère est inscrit ou inscriptible dans un cercle.

Digitized by Google

équation. Ainsi AB, AD et BC nous donnent BD, BE et CE comme auparavant, ensuite $CD + CE$ donne ED, et enfin BD et ED donnent BE (à cause du triangle rectangle BED).

Ainsi en cherchant des valeurs différemment exprimées d'une même quantité, par le moyen de ses relations avec d'autres quantités, on pourra former des équations entre ses valeurs. C'est ainsi que la relation entre les lignes BD, DC, BC et CE (relation fondée sur la 12e. prop. du 2e. liv. des Elém.) étant exprimée de cette manière, $\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2CD \times CE$, nous pourrons trouver $\overline{BD}^2$ par le moyen de AD et de AB, et CE par le moyen des connues (*) AD, AB et BC. Alors il n'y a plus dans l'équation $\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2CD \times CE$, que CD et son quarré $\overline{CD}^2$ d'inconnu. Mais il sera très-facile d'en avoir la valeur en résolvant l'équation. L'analyste, conduit par cette méthode et d'autres semblables, fera marcher de front son calcul et sa figure, et lira dans son analyse toute sa construction géométrique.

Je crois que par tout ce qui précède, on doit parfaitement comprendre ce que disent les géomètres : *Qu'il faut regarder ce que l'on cherche comme s'il était trouvé.* Ainsi, sans mettre aucune différence entre les quantités connues et les inconnues, vous pouvez prendre celle qu'il vous plaira pour commencer le calcul, comme si tout était déja connu par une résolution précédente, et qu'il ne fût plus question de résoudre le problême, mais seulement de le vérifier. C'est ainsi que dans la première des trois méthodes de calcul, quoique ce soit peut-être véritablement AD que l'on cherche, on feint cependant que c'est CD, comme si on voulait seulement s'assurer

(*) Ou du moins considérées comme telles.

Digitized by Google

si cette valeur de CD, obtenue par le moyen de AD, quadre avec une autre valeur du même CD précédemment trouvée. De même encore dans les deux dernières méthodes de calcul, mon but n'est pas de découvrir une quantité, mais de trouver une équation par le moyen des relations quelconques des lignes. En conséquence regardant AD, AB, BC et CD comme des lignes connues, j'agis comme si la question avait déja été résolue, et qu'il n'y eût plus qu'à examiner si ces quantités satisfont exactement aux conditions du problême, et quadrent avec les équations que leurs rapports nous ont données. C'est ainsi que je commence toujours mon opération, et que je la poursuis jusqu'à ce que je sois arrivé à l'équation; alors changeant de marche, c'est de l'inconnue seule que je m'occupe dans la réduction et la résolution de cette équation. C'est ainsi enfin que nous employons souvent, comme connues, plus de quantités qu'il n'y en a réellement dans l'état de la question. On pourra voir un exemple remarquable de ce que je viens de dire, dans le 55e. des problêmes suivans, où, pour déterminer une section conique, j'ai introduit, comme connues, dans l'équation $a^2 + bx + cx^2 = y^2$, non seulement les lignes a, b et c, mais encore les lignes r, s, t, v, dont le problême, tel qu'il est proposé, ne fait aucune mention; car il est permis d'introduire toute quantité par le moyen de laquelle on peut parvenir à l'équation. On doit seulement observer qu'il faut pouvoir en tirer autant d'équations qu'on a réellement introduit d'inconnues.

Dès qu'on a établi sa méthode de calcul, que la figure contient toutes les lignes qui doivent y entrer (c'est-à-dire toutes celles qui doivent donner la valeur des autres, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'équation), alors il faut leur imposer des noms, en choisissant

Digitized by Google

celles qui contiennent toutes les conditions du problême (sans en contenir pourtant plus qu'il n'est besoin) et qui paraissent plus propres que d'autres à rendre, autant qu'on peut le conjecturer d'avance, la conclusion plus simple. Il faut rarement donner des noms aux quantités qui peuvent se déduire d'autres quantités déja nommées. C'est ainsi qu'il suffit de nommer deux côtés d'un triangle rectangle, et deux ou trois termes d'une proportion; parce que le troisième côté du triangle, le troisième ou le quatrième terme de la proportion peuvent se déduire des autres. De même si on a une ligne et trois de ses parties, il suffira de nommer la ligne et deux de ses parties, la troisième pouvant en être déduite. Par exemple, (*Pl.* I, *Fig.* 8). si j'appelle AD, x et AB, a, je ne donnerai point de nom à BD, parce qu'étant le troisième côté d'un triangle rectangle ABD, sa valeur sera $\sqrt{x^2 - a^2}$. Ensuite, dans la même Figure, si je fais $BC = b$, comme les deux triangles DAB, BCE sont semblables, j'ai la proportion $AD : AB :: BC : CE$, dont les trois premiers termes sont nommés; ainsi je laisse sans nom le quatrième, parce que je puis déduire sa valeur $\frac{ab}{x}$ de la proportion. Enfin si on appelle DC, c, il ne faut pas donner de nom à DE, parce que connaissant chacune de ses parties, CE et CD, la ligne totale sera $DE = c + \frac{ab}{x}$.

Par tout ce que nous venons de dire, on voit que le problême est déja presque réduit en équation; car une fois que l'on a désigné par des lettres les lignes principales, il n'y a plus qu'à tirer d'elles, par la méthode indiquée ci-devant, les valeurs des autres lignes, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'équation. Et pour ne pas sortir de l'exemple qui nous a toujours occupés, il ne nous reste plus qu'à

Digitized by Google

trouver une double valeur de BE, par le moyen des deux triangles rectangles BCE et BDE. C'est-à-dire $\overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$, ou..... $b^2 - \frac{a^2b^2}{x^2} = \overline{BE}^2$; voilà la première. La seconde sera $\overline{BD}^2 - \overline{DE}^2$, ou $x^2 - a^2 - c^2 - \frac{2abc}{x} - \frac{a^2b^2}{x^2} = \overline{BE}^2$. Comparant ces deux valeurs de $\overline{BE}^2$, et effaçant de part et d'autre $- \frac{a^2b^2}{x^2}$, le reste sera $b^2 = x^2 - a^2 - c^2 - \frac{2abc}{x}$. Cette équation étant réduite, devient, $x^3 = \left.\begin{matrix} + a^2 \\ + b^2 \\ + c^2 \end{matrix}\right\} x + 2abc.$

Comme j'ai déja donné, pour résoudre ce problême, plusieurs moyens qui ne diffèrent que très-peu, et que cependant celui qui est fondé sur la 12e. prop. du 2e. liv. des Elém. me paraît le plus simple, c'est lui que j'employerai ici. Soit donc $AD = x$, $AB = a$, $BC = b$, et $CD = c$. Alors $\overline{BD}^2 = x^2 - a^2$, et $CE = \frac{ab}{x}$, comme ci-dessus. Faites entrer ces valeurs dans le théorême $\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2CD \times CE$, et vous aurez $x^2 - a^2 - b^2 - c^2 = \frac{2abc}{x}$, et en réduisant, $x^3 = \left.\begin{matrix} + a^2 \\ + b^2 \\ + c^2 \end{matrix}\right\} x + 2abc$, comme auparavant.

Mais pour faire voir combien les solutions d'une question peuvent être variées, et combien il est aisé à un géomètre exercé d'en trouver au moins une, je veux encore en placer ici plusieurs du même problême. Pour cela, je tire la diagonale BD, et si au lieu de mener, comme ci-dessus, la perpendiculaire BE du point B sur le côté DC prolongé, on la mène du point D sur BC, ou du

Digitized by Google

point C sur BD, de manière que le triangle BCD soit résolu en deux triangles rectangles, on pourra parvenir, pour chacun de ces cas, à l'équation, et par des moyens très-peu différens de ceux que j'ai déja indiqués; mais il y en a d'autres aussi qui ne laissent pas de différer beaucoup. Par exemple (*Pl.* I, *Fig.* 9) si on tire les deux diagonales AC et BD, en regardant AD et AB comme connues, on en déduira BD; de même qu'on déduirait AC des lignes AD et CD prises comme connues. Ensuite, par le théorême des figures quadrilatères inscrites dans le cercle, on a l'équation $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$. Laissant donc aux lignes AD, AB, BC, CD les noms x, a, b, c, que nous leur avons donnés ci-devant, nous aurons $BD = \sqrt{x^2 - a^2}$, et..... $AC = \sqrt{x^2 - c^2}$ (par la 47e. prop. du 1er. liv. des Elém.) et en substituant dans l'équation que nous a donnée le théorême les valeurs de ces lignes, nous aurons, $bx + ac = \sqrt{x^2 - a^2} \times \sqrt{x^2 - c^2}$, et en quarrant chaque membre, et réduisant, on obtiendra.....

$$x^3 = \left.\begin{matrix} +a^2 \\ +b^2 \\ +c^2 \end{matrix}\right\} x + 2abc.$$

Au reste, il est très-facile de faire voir que les solutions que nous avons obtenues par le moyen du théorême, pouvaient se tirer de la seule similitude des triangles. En effet, qu'on mène BH perpendiculairement à BC, et qui rencontre AC en H; alors les triangles BCH et BDA seront semblables, puisqu'ils ont chacun un angle droit en B, et les angles C et D égaux. Pareillement les triangles BCD et BHA sont aussi semblables, car d'abord les angles inscrits BAC et BDC sont égaux; et ensuite les angles ABH et CBD le sont aussi; car, en retranchant des deux angles droits CBH et

DBA,

Digitized by Google

DBA, la partie commune HBD, il est clair que les restes seront égaux. Des deux premiers on tire la proportion, $BD : AD :: BC : CH$, et des deux derniers la proportion, $BD : CD :: AB : AH$. Or $AH + HC = AC$. Et si on met dans les deux proportions, à la place des lignes, leurs valeurs analytiques, on trouvera que $CH = \frac{bx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ et $AH = \frac{ac}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, par conséquent $CH + AH$ ou $AC = \frac{bx + ac}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. Mais d'ailleurs $AC = \sqrt{x^2 - c^2}$. Donc on aura, $\frac{bx + ac}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - c^2}$; et en multipliant tout par $\sqrt{x^2 - a^2}$, et quarrant, on arrivera à une équation absolument pareille à celle que nous avons déjà trouvée plusieurs fois.

Pour montrer encore avec plus d'évidence la multitude de moyens qu'il y a de mettre une question en équation, prolongez BC et AD (*Pl.* I, *Fig.* 10) jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point F, et vous aurez les triangles semblables ABF et CDF; car ils ont chacun un angle commun en F, et les angles ABF et CDF sont égaux, comme étant l'un et l'autre supplément du même angle CDA (par la 13e prop. du premier livre et la 22e du troisième livre des Élémens). Maintenant, il est de toute évidence que si, outre les quatre quantités sur lesquelles roule la question, la ligne AF nous était encore donnée, nous trouverions CF par cette proportion, $AB : AF :: CD : CF$; mais $AF - AD$ donne DF, et la proportion $CD : DF :: AB : BF$, donne BF, d'où l'on tirerait l'équation $BF - CF = BC$. Mais ayant traité comme connues deux quantités inconnues AD et DF, il faut encore trouver une nouvelle équation. Pour cela, j'abaisse du point B sur la base AF la perpendiculaire

Digitized by Google

BG, ce qui me donne $AD : AB :: AB : AG$; mais, par un théorême de la treizième proposition du deuxième livre des Élémens, j'ai aussi $\overline{BF}^2 + 2AF \times AG = \overline{AB}^2 + \overline{AF}^2$. Nos premières lignes conservant les noms qu'elles avaient ci-devant, a, b, c, x, je fais de plus $AF = y$. Nous avons donc, par la première proportion trouvée plus haut, $CF = \frac{cy}{a}$, et par la seconde..... $BF = \frac{a(y-x)}{c}$. D'où il suit que $\frac{a(y-x)}{c} - \frac{cy}{a} = b$, première équation trouvée; et comme d'un autre côté, $AG = \frac{a^2}{x}$, nous aurons, $\frac{a^2y^2 - 2a^2xy + a^2x^2}{c^2} + \frac{2a^2y}{x} = a^2 + y^2$, seconde équation; et en les réduisant, elles nous donneront enfin l'équation cherchée. Car la première équation donne $y = \frac{abc + a^2x}{a^2 - c^2}$, cette valeur de y étant substituée dans la seconde, donne après avoir réduit et ordonné, $x^3 = \left.\begin{matrix} +a^2 \\ +b^2 \\ +c^2 \end{matrix}\right\} x + 2abc$, comme auparavant.

Et si on prolonge AB et CD jusqu'à ce qu'elles se rencontrent, la solution n'aura de différence qu'en ce qu'elle sera peut-être un peu plus facile; ainsi j'aime mieux mettre sous les yeux du lecteur une nouvelle solution déduite d'un principe tout-à-fait différent, par exemple, en cherchant une double valeur de la surface du quadrilatère. Je mène d'abord la diagonale BD, afin que le quadrilatère soit décomposé en deux triangles. Ensuite conservant aux lignes les mêmes noms x, a, b, c, qu'elles avaient auparavant, je vois d'abord que $BD = \sqrt{x^2 - a^2}$, et par conséquent $\frac{1}{2}a \times \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{1}{2}AB \times BD$, surface du triangle ABD. Ensuite ayant abaissé BE perpendiculairement sur CD, on a la proportion $AD : BD :: BC : BE$, à

Digitized by Google

cause des deux triangles semblables ABD et BCE; par conséquent $BE = \frac{b}{x}\sqrt{x^2 - a^2}$, et $\frac{bc}{2x}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} CD \times BE$, surface du triangle BCD. Et en ajoutant ces deux surfaces, on aura, $\frac{ax + bc}{2x}\sqrt{x^2 - a^2}$, surface totale du quadrilatère. Et en menant de la même manière, la diagonale AC, cherchant les surfaces des deux triangles ACD et ABC, et les ajoutant, on aura une nouvelle valeur de la surface du quadrilatère $\frac{cx + ba}{2x}\sqrt{x^2 - c^2}$. En égalant ces deux valeurs, et les multipliant par $2x$, il viendra..... $(ax + bc)\sqrt{x^2 - a^2} = (cx + ab)\sqrt{x^2 - c^2}$, et en élevant tout au quarré, et divisant par $a^2 x - c^2 x$, on arrivera enfin à cette forme déjà trouvée tant de fois, $x^3 = \left.\begin{matrix} + a^2 \\ + b^2 \\ + c^2 \end{matrix}\right\} x + 2abc.$

On peut remarquer par tous ces exemples, quelle variété de moyens on a pour résoudre une question; mais on doit remarquer en même temps que, parmi tous ces moyens, il en est de bien plus expéditifs que d'autres. C'est par cette raison, que, lorsqu'on a pris une mauvaise route pour arriver à la solution d'un problême, il faut revenir sur ses pas, et faire de nouvelles tentatives, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un chemin plus facile. Car les moyens qui viennent s'offrir les premiers à la pensée, conduisent souvent à des opérations très-laborieuses lorsqu'on les met en usage. Par exemple, dans le problême dont il s'agit, il eût été tout aussi facile de trouver le moyen suivant que ceux que nous avons employés jusqu'ici : c'eût été d'abaisser (*Pl.* I, *Fig.* 11) les perpendiculaires BR et CS sur AD, de même que la perpendiculaire CT sur BR, alors la figure serait décomposée en triangles rectangles; et on voit aisément que AD et

Digitized by Google

AB donnent *AR*; que *AD* et *CD* donnent *DS*; que *AD* — *AR* — *DS* donne *RS* ou *TC*. En outre, *AB* et *AR* donnent *BR*; *CD* et *DS* donnent *CS* ou *TR*; et *RB* – *RT* donne *BT*; et *BT* et *TC* donnent *BC*. De tout cela on obtiendrait une équation. Mais si, par cette méthode, quelqu'un tentait la résolution, il verrait, plus que dans aucune des précédentes, les termes algébriques se multiplier, ce qui les rendrait par conséquent plus difficiles à réduire à l'équation finale.

Voilà ce que l'on peut dire sur la résolution des problêmes rectilignes. Il serait peut-être à propos d'observer encore que, lorsque les angles, ou les positions des lignes données par les angles, entrent dans l'état d'une question, il faut, au lieu des angles, prendre les lignes, ou tels de leurs rapports qui peuvent se déduire de la connaissance des angles, par le moyen du calcul trigonométrique, ou dont la connaissance peut réciproquement faire trouver les angles par le même calcul. On en verra plusieurs exemples dans la suite.

Quant aux lignes courbes, on a coutume de les regarder comme étant engendrées, soit par le mouvement local des lignes droites, soit par des équations indéfinies qui expriment la relation de lignes droites disposées entre elles d'une manière invariable et venant se terminer à la courbe. Les anciens, par la section des solides, sont arrivés au même but, mais cette marche était beaucoup moins facile. Le calcul des courbes décrites par le premier moyen, s'exécute absolument par les mêmes règles que nous avons enseignées ci-devant. Par exemple, si on a une courbe *AKC* (*Pl.* I, *Fig.* 12) décrite par le sommet d'un angle droit *AKφ*, dont un des côtés *AK* glisse librement sur le point *A* donné de position, tandis que l'autre côté *Kφ*, d'une longueur donnée, glisse sur la droite *AD* aussi donnée de position;

Digitized by Google

si on a, dis-je, une telle courbe, et qu'on veuille trouver un point C, dans lequel une droite quelconque CD, d'une position donnée, coupe la courbe, il faudra tirer du point C (qui est censé trouvé) les droites AC, CF, formant un angle droit en C, et qui représentent les deux génératrices, lorsqu'elles ont décrit le point C de la courbe: alors considérant les relations des lignes, sans égard à leur rapport avec la courbe, sans mettre de différence entre ce qui est donné ou ce qui est cherché, j'apperçois sans peine que tout dépend de CF, et de l'une des quatre lignes BC, BF, AF, AC. Je prends donc $CF = a$ (*), $CB = x$; et partant de-là pour commencer mon calcul, j'en déduis aussi-tôt $BF = \sqrt{a^2 - x^2}$; et à cause des deux angles droits ACF et FBC, on a la proportion $BF : BC :: BC : AB$. D'où $AB = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. D'un autre côté, la position de CD étant donnée, la grandeur de AD est connue. J'appelle donc AD, b, et comme le rapport de BC à BD est connu (je le suppose comme celui de d à e), j'ai $BD = \frac{ex}{d}$ et $AB = b - \frac{ex}{d}$, d'où je tire

(*) Newton considère le point C comme s'il était connu; mais il ne l'est pourtant pas, puisque c'est ce point qu'il cherche; donc les lignes AC et CF sont inconnues: pourquoi donc désigne-t-il CF par a? c'est que, en quelque lieu de la courbe que soit situé le point C, si par ce point et par le pôle A, on imagine une droite AC, et une autre droite CF qui lui soit perpendiculaire, cette dernière sera toujours une ligne connue égale à $K\varphi$, puisque, par la nature de la courbe, ces deux droites représentent la situation de l'équerre dans le moment qu'elle a décrit le point C, et que $K\varphi$ ne fait que varier de position, sans varier de longueur.

Digitized by Google

l'équation $b - \frac{ex}{d} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Et en quarrant chaque membre, et multipliant tout par $a^2 - x^2$, on la réduira sous la forme.....

$$x^4 = \frac{2bdex^3 \begin{matrix} - b^2d^2 \\ + a^2e^2 \end{matrix} \left\{ x^2 - 2a^2bdex + a^2b^2d^2 \right.}{d^2 + e^2},$$

d'où enfin, par le moyen des lettres connues a, b, d, e, et des règles qui seront enseignées dans la suite, on déterminera la valeur de x. Cette valeur trouvée, on élevera x ou BC perpendiculairement sur AD, de son extrémité on tirera une parallèle à AD, et le point C où cette parallèle coupera la courbe, sera le point cherché.

Si, au lieu de descriptions géométriques, l'on donne des équations pour exprimer la nature d'une courbe, alors le calcul en sera d'autant plus facile et plus court, qu'on aura ces équations de moins à trouver. Par exemple, si l'on cherchait le point d'intersection C d'une ellipse donnée ACE (*Pl.* I, *Fig.* 13) avec une ligne droite CD donnée de position; pour désigner l'ellipse, je prends quelque équation qui lui soit propre, comme $rx - \frac{r}{q}x^2 = y^2$, où x est pris indéfiniment pour une partie quelconque de l'axe, telle que Ab ou AB, et y pour la perpendiculaire bc ou BC terminée à la courbe. C'est l'espèce de l'ellipse qui détermine r et q. Puisque CD est donnée de position, AD sera donnée de longueur. Soit donc $AD = a$, alors BD sera $a - x$. L'angle ADC est aussi donné, et par conséquent le rapport de BD à BC que je suppose être :: 1 : e. Donc on aura aussi y ou $BC = ea - ex$, et en quarrant, $\overline{BC}^2 (y^2) = e^2a^2 - 2e^2ax + e^2x$, quantité qu'il faut égaler à $rx - \frac{r}{q}x^2$, et par la réduction, on obtiendra.....

$$x^2 = \frac{2ae^2x + rx - a^2e^2}{e^2 + \frac{r}{q}}, \text{ ou } x = \frac{ae^2 + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{r^2}{4e^2} - \frac{a^2r}{q}}}{e^2 + \frac{r}{q}}.$$

Digitized by Google

Si l'on a une courbe obtenue par une description géométrique, ou par la section d'un solide, on pourra toujours exprimer sa nature par une équation. C'est donc à ce point unique, c'est-à-dire à trouver leur équation, que l'on doit rapporter toutes les difficultés des problêmes qu'on propose sur les courbes.

C'est ainsi que dans le premier exemple (*Pl.* I, *Fig.* 12) si on appelle AB, x, et BC, y, la troisième proportionnelle BF sera $\frac{y^2}{x}$, et son quarré, ajouté à celui de BC, donnera celui de CF, c'est-à-dire $\frac{y^4}{x^2} + y^2 = a^2$, ou bien $y^4 + x^2y^2 = a^2x^2$. Telle est l'équation par laquelle, pour chaque longueur déterminée AB de la base, chaque point C de la courbe AKC est déterminé, et par conséquent la courbe elle-même l'est aussi. Et c'est de cette équation qu'on doit attendre la solution de tous les problêmes qu'on peut proposer sur cette courbe.

Si une courbe n'est pas donnée d'espèce, mais qu'on demande de la déterminer, il faut prendre arbitrairement une équation qu'on supposera exprimer d'une manière générale, la nature de cette courbe. Et traitant cette équation comme si elle était donnée, on obtiendra par son moyen d'autres équations qui détermineront les quantités qu'on avait d'abord regardées comme connues; et par ces quantités enfin, la nature de la courbe sera elle-même déterminée. On en verra des exemples dans quelques-uns des problêmes suivans, que j'ai multipliés dans le dessein de les faire servir d'exercice pour ceux qui étudient, et de mettre dans un plus grand jour la doctrine que je viens d'exposer.

Digitized by Google

PROBLÊME Ier.

Étant donnée une droite BC d'une longueur connue, sur les extrémités de laquelle deux autres droites BA, CA font des angles donnés ABC, ACB, trouver la hauteur AD du point de concours A, au-dessus de la droite donnée BC.

(*Pl.* I, *Fig.* 14). Soit $BC = a$, et $AD = y$. Puisque l'angle ABD est donné, la table des sinus et des tangentes nous donnera le rapport entre les lignes AD et BD que je suppose être comme de d à e. Soit donc $d : e :: AD\,(y) : BD = \frac{ey}{d}$. Pareillement, à cause de l'angle donné ACD, on aura le rapport entre les droites AD et CD, que je suppose celui de d à f, ainsi $DC = \frac{fy}{d}$. Mais $BD + DC = BC$, c'est-à-dire $\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Cette équation étant réduite, en multipliant chaque membre par d, et divisant par $e + f$, on a $y = \frac{ad}{e+f}$.

PROBLÊME II.

Si les côtés AB, AC et la base BC d'un triangle quelconque ABC sont donnés, et qu'une perpendiculaire AD soit abaissé du sommet de l'angle A sur la base, on demande de trouver les deux segmens BD et DC.

(*Pl.* I, *Fig.* 15). Soit $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, et $BD = x$; DC sera $c - x$. Maintenant comme $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$, et que $\overline{AC}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2$. En mettant les valeurs analytiques dans chacune de ces équations, la première devient $a^2 - x^2 = \overline{AD}^2$; et la seconde

Digitized by Google

seconde, $b^2 - (c - x)^2 = \overline{AD}^2$. Ou $b^2 - (c - x)^2 = a^2 - x^2$, ou $b^2 - c^2 + 2cx - x^2 = a^2 - x^2$, qui donne, après la réduction, $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$.

Au reste, pour faire voir que sans le secours de la 47e. prop. du premier liv. des Elém. et par la seule propriété des lignes proportionnelles, on peut résoudre toutes les difficultés de tous les problêmes (ce qui, à la vérité, se fait d'une manière moins directe) j'ai jugé à propos de placer ici une seconde solution du même problême.

Du point D abaissez la perpendiculaire DE sur le côté BA, et conservant aux lignes les noms qu'elles ont déja, vous aurez $AB : BD :: BD : BE$, ou bien, $a : x :: x : BE = \frac{x^2}{a}$, et..... $BA - BE \left(a - \frac{x^2}{a}\right) = EA$. On peut encore faire la proportion $EA : AD :: AD : AB$, d'où l'on tire, $EA \times AB = \overline{AD}^2$, ou $a^2 - x^2 = \overline{AD}^2$. Et en raisonnant de la même manière pour le triangle ACD, on trouvera de nouveau $\overline{AD}^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$, d'où on obtiendra encore, comme auparavant, $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$.

PROBLÊME III.

Etant donnés le périmètre et la surface d'un triangle rectangle ABC, trouver son hypothénuse BC.

(*Pl.* II, *Fig.* 1). Soient, le périmètre a, la surface b^2, $BC = x$, et $AC = y$, on aura $AB = \sqrt{x^2 - y^2}$, ce qui nous donnera une seconde valeur du périmètre, $BC + AC + AB = x + y + \sqrt{x^2 - y^2}$.

Digitized by Google

La surface est $\frac{1}{2} AC \times AB = \frac{1}{2} y \sqrt{x^2 - y^2}$. Nous avons donc maintenant deux équations, $x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = a$, et..... $\frac{1}{2} y \sqrt{x^2 - y^2} = b^2$. Cette dernière donne, $\sqrt{x^2 - y^2} = \frac{2b^2}{y}$. Je substitue dans la première, $\frac{2b^2}{y}$ au lieu de $\sqrt{x^2 - y^2}$, et elle devient, $x + y + \frac{2b^2}{y} = a$, ou, en multipliant tout par y, $xy + y^2 + 2b^2 = ay$, ce qui donne, $y^2 = ay - xy - 2b^2$. Ensuite je retranche de chaque membre de la première équation, $x + y$, ce qui la réduit à $\sqrt{x^2 - y^2} = a - x - y$. J'élève tout au quarré pour faire disparaître le radical, et j'ai, $x^2 - y^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy + y^2$, qui, après avoir ordonné et divisé tout par 2, devient, $y^2 = ay + ax - xy - \frac{a^2}{2}$. Égalons cette seconde valeur de y^2 à la première, il viendra, $ay + ax - xy - \frac{a^2}{2} = ay - xy - 2b^2$, qui se réduit à $ax - \frac{a^2}{2} = -2b^2$, ou bien à $x = \frac{a}{2} - \frac{2b^2}{a}$.

Seconde manière.

Soient, la moitié du périmètre a, la surface b^2, et BC, x. Nous aurons $AC + AB = 2a - x$, et $\overline{BC}^2 (x^2) = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, et..... $\frac{AB \times AC}{2} = b^2$, ou bien, $AB \times AC = 2b^2$, ou bien, $2AB \times AC = 4b^2$. Donc $x^2 + 4b^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AC = (AB + AC)^2 = (2a - x)^2$. Par conséquent, $x^2 + 4b^2 = 4a^2 - 4ax + x^2$, ou bien, $x = a - \frac{b^2}{a}$.

Digitized by Google

PROBLÊME IV.

Étant donnés le périmètre et la hauteur d'un triangle rectangle, trouver ce triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Soient, C l'angle droit du triangle ABC, et CD la perpendiculaire sur la base AB. Soient $AB + AC + BC = a$, et $CD = b$. Faites la base $AB = x$, la somme des côtés $AC + CB$ sera $a - x$. Supposez que la différence de ces mêmes côtés soit y, alors le plus grand côté AC sera, $\frac{a - x + y}{2}$, et le plus petit BC sera, $\frac{a - x - y}{2}$. Maintenant, par la nature du triangle rectangle, on a, $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, c'est-à-dire..... $\frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{2} = x^2$. On a encore la proportion $AB : AC :: BC : DC$ (*), ainsi $AB \times DC = AC \times BC$, ce qui donne..... $bx = \frac{a^2 - 2ax + x^2 - y^2}{4}$. Or de la première équation l'on tire, $y^2 = x^2 + 2ax - a^2$, et de la seconde, $y^2 = x^2 - 2ax + a^2 - 4bx$; donc $x^2 + 2ax - a^2 = x^2 - 2ax + a^2 - 4bx$, qui se réduit à $4ax + 4bx = 2a^2$, ou bien, $x = \frac{a^2}{2a + 2b}$.

Ce résultat peut s'énoncer ainsi en langage géométrique : *Dans tout triangle rectangle, la somme faite du périmètre et de la perpendiculaire est au périmètre, comme la moitié du périmètre est à la base.*

Retranchez $2x$ de a, et le reste sera $\frac{ab}{a + b}$, excès des côtés sur

(*) Cette proportion a lieu à cause de la similitude des deux triangles rectangles ACB, CBD.

Digitized by Google

la base. (21). Ce qui nous montre que dans tout triangle rectangle, *la somme faite du périmètre et de la perpendiculaire est au périmètre, comme la perpendiculaire est à l'excès des côtés sur la base.*

PROBLÊME V.

Étant données la base AB d'un triangle rectangle, ainsi que la somme faite de la perpendiculaire et des côtés $CA + CB + CD$, trouver le triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Soient, $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, $CD = x$, alors $AC + CB = a - x$. Faites $AC - CB = y$, vous aurez $AC = \frac{a - x + y}{2}$, et $CB = \frac{a - x - y}{2}$. De plus, $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, ou bien, $\frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{2} = b^2$. On a encore, $AC \times CB = AB \times CD$, ou $\frac{a^2 - 2ax + x^2 - y^2}{4} = bx$, et en tirant de ces deux équations les valeurs de y^2 et les comparant, on a, $2b^2 - a^2 + 2ax - x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4bx$, et en réduisant, $x^2 = 2ax + 2bx - a^2 + b^2$, d'où l'on tire, $x = a + b - \sqrt{2ab + 2b^2}$.

De cette dernière équation on tire l'énoncé géométrique suivant: *De la somme faite du périmètre et de la perpendiculaire, retranchez une moyenne proportionnelle entre cette même somme et le double de la base, et le reste sera la perpendiculaire.*

Le même d'une autre manière.

Soient, $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, et $AC = x$, et on aura, $BC = \sqrt{b^2 - x^2}$, $CD = \frac{x\sqrt{b^2 - x^2}}{b}$, et $x + CB + CD = a$, ou

Digitized by Google

$CB + CD = a - x$. Par conséquent, $\frac{b+x}{b}\sqrt{b^2 - x^2} = a - x$. Et en élevant chaque membre au quarré, et multipliant tout par b^2, on aura, $-x^4 - 2bx^3 + 2b^3x + b^4 = a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2$. (22). Et en transposant et ordonnant.....

$$x^4 + 2bx^3 \left.\begin{matrix} + 3b^2 \\ + 2ab \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} + 2b^3 \\ + 2ab^2 \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} + b^4 \\ + 2ab^3 \\ + a^2b^2 \end{matrix}\right. = \left.\begin{matrix} 2b^2 \\ + 2ab \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} + 4b^3 \\ + 4ab^2 \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} + 2b^4 \\ + 2ab^3 \end{matrix}\right.$$

Et en tirant la racine de part et d'autre, on aura, $x^2 + bx + b^2 + ab = (x + b)\sqrt{2ab + 2b^2}$. Et en résolvant cette équation, on a, $x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}$.

Construction Géométrique.

(*Pl.* II, *Fig.* 2). Faites $AB = \frac{1}{2}b$, $CB = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}AB$. Prenez AE moyenne proportionnelle entre b et AC. Prenez de plus EF moyenne proportionnelle entre b et DE, et portez EF de part et d'autre du point E, et les deux lignes BF, BF seront les deux côtés du triangle. (23).

PROBLÊME VI.

Étant données dans un triangle rectangle ABC, la somme des côtés $AC + BC$, et la perpendiculaire CD, trouver le triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Soient, $AC + BC = a$, $CD = b$, $AC = x$, on aura, $BC = a - x$, et $AB = \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}$. On a de plus la proportion $CD : AC :: CB : AB$, ce qui donne..... $AB = \frac{ax - x^2}{b}$. Par conséquent, $ax - x^2 = b\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}$, et en quarrant chaque membre et ordonnant.....

Digitized by Google

$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} + a^2 \\ - 2b^2 \end{matrix} \Big\{ x^2 + 2ab^2x - a^2b^2 = 0$. Ajoutez à chaque membre $a^2b^2 + b^4$, et vous aurez, $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} + a^2 \\ - 2b^2 \end{matrix} \Big\{ x^2 + 2ab^2x + b^4 = a^2b^2 + b^4$, et en tirant la racine de chaque côté..... $x^2 - ax - b^2 = -b\sqrt{a^2 + b^2}$. Et en résolvant cette équation, $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Construction Géométrique.

(*Pl.* II, *Fig.* 3). Faites $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Élevez en C la perpendiculaire $CD = b$; prolongez CD jusqu'en E, afin que $DE = DA$; prenez une moyenne proportionnelle CF entre CD et CE, et du point F comme centre, et avec un rayon égal à BC, décrivez l'arc de cercle GH, qui coupera la droite BC en G et en H, et les lignes BG et BH seront les deux côtés du triangle. (24).

Le même d'une autre manière.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Soient, $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$, et $DC = b$, on aura $AC = \frac{a+y}{2}$, $BC = \frac{a-y}{2}$, $\frac{a^2+y^2}{2} = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 = x^2$. $\frac{a^2-y^2}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC} = AB = x$. Donc $2x^2 - a^2 = y^2 = a^2 - 4bx$, et $x^2 + 2bx = a^2$; équation qui étant résolue donne, $x = -b + \sqrt{b^2 + a^2}$. Ce qui, dans la construction ci-dessus, nous donne CE pour hypothénuse du triangle cherché. Or une fois que la base et la perpendiculaire sont connues, tant dans le problême précédent que dans celui-ci, voici de quelle

Digitized by Google

manière on construit le triangle. Faites un parallèlogramme CG (*Pl.* II, *Fig.* 4) dont le grand côté CE soit la base du triangle, et le petit côté CF la perpendiculaire; sur CE, comme diamètre, décrivez un demi-cercle qui coupera le côté opposé FG en H; tirez du point H, aux extrémités du diamètre, les droites CH et EH, et CEH sera le triangle cherché.

PROBLÊME VII.

Étant données dans un triangle rectangle, la somme des côtés, et la somme faite de la perpendiculaire et de la base, trouver le triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Soient, la somme des côtés $AC + CB = a$, la somme de la base et de la perpendiculaire $AB + CD = b$, le côté $AC = x$, la base $AB = y$; et on aura $BC = a - x$, $CD = b - y$, $a^2 - 2ax + 2x^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 = y^2$, $ax - x^2 = AC \times BC = AB \times CD = by - y^2 = by - a^2 + 2ax - 2x^2$, et $by = a^2 - ax + x^2$, et en quarrant chaque membre, $b^2y^2 = a^4 - 2a^3x + 3a^2x^2 - 2ax^3 + x^4$. Et en substituant dans le premier membre, à la place de y^2 sa valeur, $a^2 - 2ax + 2x^2$, transposant et ordonnant, on aura, $x^4 - 2ax^3 \begin{cases} +3a^2 \\ -2b^2 \end{cases} x^2 \begin{cases} -2a^3 \\ +2ab^2 \end{cases} x \begin{cases} +a^4 \\ -a^2b^2 \end{cases} = 0.$ Et en ajoutant à chaque membre, $b^4 - a^2b^2$ (*), elle deviendra,

(*) Pour connaître la quantité qu'il faut ajouter à chaque membre d'une équation, afin de rendre le premier un quarré parfait, consultez le chapitre *de la Réduction des équations par les diviseurs incommensurables*, ainsi que la note 74e qui s'y rapporte, et principalement le deuxième exemple de cette note 74e qui s'applique au problême actuel.

Digitized by Google

$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +3a^2 \\ -2b^2 \end{matrix} \left\{ x^2 \begin{matrix} -2a^3 \\ +2ab^2 \end{matrix} \right\{ x \begin{matrix} +a^4 \\ -2a^2b^2 \\ +b^4 \end{matrix} = b^4 - a^2b^2$. Et en tirant la racine quarrée de chaque membre, $x^2 - ax + a^2 - b^2 = -b\sqrt{b^2 - a^2}$, et en résolvant cette dernière équation, on aura enfin, $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2 - b\sqrt{b^2 - a^2}}$.

Construction Géométrique.

Prenez une moyenne proportionnelle R entre $b + a$ et $b - a$; une autre moyenne proportionnelle S entre R et $b - R$; enfin une moyenne proportionnelle T entre $\frac{1}{2}a + S$ et $\frac{1}{2}a - S$; et les côtés du triangle cherché seront, $\frac{1}{2}a + T$ et $\frac{1}{2}a - T$. (25).

PROBLÊME VIII.

Étant donnés la surface, le périmètre et l'angle A d'un triangle quelconque ABC, déterminer tout le reste.

(*Pl.* II, *Fig.* 5). Soient, le périmètre $= a$, la surface $= b^2$; et de l'un ou de l'autre des deux angles inconnus, par exemple de C, abaissez une perpendiculaire CD sur le côté opposé AB. A cause de l'angle donné A, on connaîtra le rapport de AC à CD, que je suppose celui de d à e. Faites donc $AC = x$, et vous aurez $CD = \frac{ex}{d}$. Or comme vous connaissez la surface du triangle, et que vous venez de trouver l'expression de la perpendiculaire, divisez la surface par la moitié de la perpendiculaire, le quotient donnera la base AB, ainsi $\frac{2b^2d}{ex} = AB$. A cette base ajoutez AD,

c'est-à-dire,

Digitized by Google

c'est-à-dire, $\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2}$, ou bien, $\frac{x}{d}\sqrt{d^2 - e^2}$, et vous aurez, $BD = \frac{2b^2d}{ex} + \frac{x}{d}\sqrt{d^2 - e^2}$. Au quarré de chaque membre ajoutez $\overline{CD}^2$, il viendra $\overline{BC}^2 = \frac{4b^4d^2}{e^2x^2} + x^2 + \frac{4b^2}{e} \times \sqrt{d^2 - e^2}$. Otez maintenant du périmètre AC et AB, le reste sera, $a - x - \frac{2b^2d}{ex} = BC$, dont le quarré est, $a^2 - 2ax + x^2 - \frac{4ab^2d}{ex} + \frac{4b^2d}{e} + \frac{4b^4d^2}{e^2x^2} = \overline{BC}^2$. En égalant les deux valeurs de $\overline{BC}^2$, et effaçant ce qui se détruit, il viendra, $\frac{4b^2}{e}\sqrt{d^2 - e^2} = a^2 - 2ax - \frac{4ab^2d}{ex} + \frac{4b^2d}{e}$. Qu'on fasse, $a^2 + \frac{4b^2d}{e} - \frac{4b^2}{e}\sqrt{d^2 - e^2} = 4af$, on aura, en substituant et en réduisant, $x^2 = 2fx - \frac{2b^2d}{e}$. D'où l'on tire, $x = f \pm \sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}$.

On aurait encore trouvé la même équation en cherchant le côté AB; car les côtés AB et AC ont absolument les mêmes conditions dans le problême. Ainsi en supposant que la valeur de AC soit, $f - \sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}$, celle de AB sera, $f + \sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}$, et réciproquement. Et en soustrayant la somme des deux côtés $2f$ du périmètre a, la différence sera, $a - 2f = BC =$ le troisième côté.

PROBLÊME IX.

Etant données la hauteur, la base et la somme des côtés, trouver le triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 5). Soient, la hauteur $CD = a$, la demi-base

Digitized by Google

$\frac{1}{2} AB = b$, la moitié de la somme des côtés $= c$, et leur demi-différence $= z$. Le plus grand côté, par exemple BC, sera $c + z$, et le plus petit AC, $c - z$. Retranchez $\overline{CD}^2$ de $\overline{BC}^2$, et vous aurez $\overline{BD}^2$. D'où $BD = \sqrt{c^2 + 2cz + z^2 - a^2}$. Maintenant $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$. Donc $AD = \sqrt{c^2 - 2cz + z^2 - a^2}$. Retranchez encore AB de BD, et vous aurez, $AD = \sqrt{c^2 + 2cz + z^2 - a^2} - 2b$. Égalez cette seconde valeur de AD à la première, quarrez et ordonnez, et il viendra, $b^2 + cz = b\sqrt{c^2 + 2cz + z^2 - a^2}$. Enfin, quarrant de nouveau et ordonnant, vous obtiendrez, $c^2 z^2 - b^2 z^2 = b^2 c^2 - b^2 a^2 - b^4$. D'où $z = b\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2 - b^2}}$. De la valeur de z vous déduirez facilement celle des côtés.

PROBLÊME X.

Étant donnés la base AB, la somme des côtés $AC + BC$, et l'angle C, trouver le reste du triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 6). Soient, la base $= a$, la demi-somme des côtés $= b$, et leur demi-différence $= x$. Le grand côté BC sera $b + x$, et le petit AC, $b - x$. De l'un ou de l'autre des deux angles inconnus, de A, par exemple, menez la perpendiculaire AD sur le côté opposé BC. Et puisque l'angle C est donné, on connaîtra le rapport de AC à CD; supposons-le comme celui de d à e; il en résultera $CD = \frac{eb - ex}{d}$. Mais on a aussi, par la 13e. prop. du deuxième liv. des Élém. $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{2BC}$, ou bien.....

Digitized by Google

$\frac{2b^2+2x^2-a^2}{2b+2x} = CD$. Nous aurons donc une équation entre les deux valeurs de CD; et cette équation étant résolue, nous donnera, $x = \sqrt{\frac{da^2+2eb^2-2db^2}{2d+2e}}$. La demi-différence x des côtés étant connue, comme on connaît d'ailleurs leur demi-somme b, il est clair que les côtés sont connus.

Si on cherchait les angles sur la base, la résolution serait plus courte. En effet, qu'on partage l'angle donné C en deux parties égales, par une droite CE qui rencontrera la base en un point E, et on aura $AB : AC+BC :: AE : AC ::$ sin. de l'angle ACE : sin. de l'angle CEA (26). L'angle CEA étant ainsi connu, son supplément BEC sera également connu. Pour avoir l'angle A, il faudra retrancher la moitié de l'angle donné C de l'angle trouvé BEC. Et la moitié de C retranchée de AEC, donnera l'angle B. (27).

PROBLÊME XI.

Étant donnés les côtés d'un triangle, trouver les angles.

(*Pl.* II, *Fig.* 7). Soient les côtés du triangle $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, et supposons que l'on cherche l'angle A. Abaissez sur le côté AB la perpendiculaire CD opposée à l'angle A. Cela fait, on a d'abord, $b^2 - c^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$ (28) $= (AD+BD) \times (AD-BD) = AB \times (2AD-AB) = 2AD \times a - a^2$. Ainsi $b^2 - c^2 = 2AD \times a - a^2$. D'où l'on tire, $AD = \frac{1}{2}a + \frac{b^2-c^2}{2a}$, ce qui fournit un premier théorême énoncé comme il suit :

THÉORÊME Ier. $AB : AC+BC :: AC-BC$: une quatrième proportionnelle N. Ce qui donne $AD = \frac{AB+N}{2}$; ensuite $AC : AD ::$ le rayon : au cos. de l'ang. A.

Digitized by Google

En outre, $\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2} =$ $\frac{(a+b+c)\times(a+b-c)\times(a-b+c)\times(-a+b+c)}{4a^2}$ (29). Et en multipliant le numérateur et le dénominateur de la racine du second membre de cette équation par b, on en déduira le second théorême :

THÉORÊME IIe. $2ab$: une moyenne proportionnelle entre $(a+b+c)\times(a+b-c)$ et $(a-b+c)\times(-a+b+c)$ :: le rayon : au sinus de l'ang. A.

Prenez sur AB la droite $AE = AC$, et tirez CE, l'angle ECD sera égal à la moitié de l'angle A (30). Retranchez AD de AE, et il restera, $DE = b - \frac{1}{2}a - \frac{(b^2-c^2)}{2a} = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}$ ..... $= \frac{(c+a-b)\times(c-a+b)}{2a}$, par conséquent..... $\overline{DE}^2 = \frac{(c+a-b)\times(c+a-b)\times(c-a+b)\times(c-a+b)}{4a^2}$. De-là se déduisent le IIIe et le IVe théorêmes :

THÉORÊME IIIe. $2ab$: $(c+a-b)\times(c-a+b)$ :: AC : DE :: le rayon : au sinus verse de l'angle A.

THÉORÊME IVe. Une moyenne proportionnelle entre $a+b+c$ et $a+b-c$: une moyenne proportionnelle entre $c+a-b$ et $c-a+b$ :: CD : DE :: le rayon : à la tangente de la moitié de l'angle A (31), ou bien :: cot. $\frac{1}{2}A$: au rayon.

De plus, comme on a $\overline{CE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{2ab^2 + bc^2 - ba^2 - b^3}{a}$, il s'en suit que $\overline{CE}^2 = \frac{b}{a}(c+a-b)\times(c-a+b)$. D'où l'on tire le Ve et le VIe théorêmes.

THÉORÊME V^e. Une moyenne proportionnelle entre $2a$ et $2b$: à une moyenne proportionnelle entre $c+a-b$ et $c-a+b$, :: le rayon : au sinus de la moitié de l'angle A. (32).

Digitized by Google

Ou bien 1 : à une moyenne proportionnelle entre $\frac{c+a-b}{2a}$ et $\frac{c-a+b}{2b}$ :: CE : DE :: le rayon : au sinus de la moitié de l'angle A. (33).

THÉORÊME VIe. Une moyenne proportionnelle entre $2a$ et $2b$: une moyenne proportionnelle entre $a+b+c$ et $a+b-c$ :: CE :: CD :: le rayon : au cos. $\frac{1}{2}A$. (34).

Si outre les angles, on veut trouver la surface du triangle, il n'y a qu'à multiplier $\overline{CD}^2$ par $\frac{\overline{AB}^2}{4}$, et la racine quarrée du produit, ou $\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\times(a+b-c)\times(a-b+c)\times(-a+b+c)}$ sera la surface cherchée.

PROBLÊME XII.

Les côtés et la base d'un triangle rectiligne quelconque étant donnés, trouver les segmens de la base, la perpendiculaire, la surface et les angles.

(*Pl.* II, *Fig.* 8). Soient AC et BC les côtés du triangle ABC, et AB sa base, coupez AB en deux parties égales en I, et sur chacune de ces parties prolongées, prenez AF et AE égales chacune à AC, et BG et BH égales chacune à BC; tirez les lignes CE et CF, et du point C, abaissez une perpendiculaire CD sur la base. Vous aurez $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = (AD+BD)\times(AD-BD) = AB\times 2DI$. Donc..... $DI = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2AB}$. Et $2AB : AC+BC :: AC-BC : DI$. Tel est le théorême par lequel on détermine les segmens de la base. De

Digitized by Google

IE, c'est-à-dire, de $AC - \frac{1}{2}AB$ retranchez DI, et le reste sera, $DE = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 + 2AC \times AB - \overline{AB}^2}{2AB}$ qui est la même chose que... $\frac{(BC + AC - AB) \times (BC - AC + AB)}{2AB}$, ou bien $\frac{EH \times EG}{2AB}$ (35). Retranchez DE de FE, ou de $2AC$, et il restera..... $FD = \frac{\overline{AC}^2 + 2AC \times AB + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2AB}$, quantité qu'on peut décomposer ainsi, $\frac{(AC + AB + BC)\ (AC + AB - BC)}{2AB}$, ou bien $\frac{FG \times FH}{2AB}$. Et comme CD est moyenne proportionnelle entre DE et DF (36); et CE moyenne proportionnelle entre DE et EF, et CF moyenne proportionnelle en FD et FE, on aura $CD = \frac{\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}}{2AB}$. $CE = \sqrt{\frac{AC \times HE \times EG}{AB}}$, et $CF = \sqrt{\frac{AC \times FG \times FH}{AB}}$. Multipliez $\frac{AB}{2}$ par CD, et vous aurez la surface $= \frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. Quant à la détermination de l'angle A, on a pour cela une foule de théorêmes.

THÉORÊME Ier. $2AB \times AC : HE \times EG :: AC : DE ::$ le rayon : sin. verse de l'angle A.

THÉORÊME II. $2AB \times AC : FG \times FH :: AC : FD ::$ le rayon : au cos. verse de l'angle A.

THÉORÊME III. $2AB \times AC : \sqrt{FG \times FH \times HE \times EG} :: AC : CD ::$ le rayon : au sin. de l'angle A.

THÉORÊME IV. $\sqrt{FG \times FH} : \sqrt{HE \times EG} :: CF : CE ::$ le rayon : la tang. de la moitié de l'angle A.

THÉORÊME V. $\sqrt{HE \times EG} : \sqrt{FG \times FH} :: CE : CF ::$ le rayon : à la cot. de la moitié de l'angle A.

Digitized by Google

THÉORÊME VI. $2\sqrt{AB \times AC} : \sqrt{HE \times EG} :: FE : CE ::$ le rayon : au sin. de la moitié de l'angle A.

THÉORÊME VII. $2\sqrt{AB \times AC} : \sqrt{FG \times FH} :: FE : FC ::$ le rayon : au cos. de la moitié de l'angle A.

PROBLÊME XIII.

L'angle CBD étant donné, ainsi que la droite CD, il s'agit de placer cette droite dans l'angle CBD, de manière que, si de son extrémité D on tire en un point A donné sur la droite CB prolongée, la droite DA, l'angle ADC soit égal à l'angle ABD.

(*Pl.* II, *Fig.* 9). Faites $CD = a$, $AB = b$, $BD = x$, et vous aurez $BD : CD :: BA : AD = \frac{ab}{x}$. Abaissez la perpendiculaire DE, et vous aurez $BE = \frac{\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{BA}^2}{2BA} = \frac{x^2 - \frac{a^2 b^2}{x^2} + b^2}{2b}$. Et comme l'angle DBA est donné, faites la proportion $BD : BE :: b : e$, ce qui donne une seconde valeur de $BE = \frac{ex}{b}$. Donc $\frac{x^2 - \frac{a^2 b^2}{x^2} + b^2}{2b} = \frac{ex}{b}$, d'où $x^4 - 2ex^3 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$.

PROBLÊME XIV.

Trouver le triangle ABC dont les trois côtés AB, AC, BC, et la perpendiculaire CD sont en progression arithmétique.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Par l'énoncé du problême on a donc cette proportion $\div\ AB . AC . BC . DC$. Faites $AC = a$, $BC = x$, vous aurez $DC = 2x - a$ et $AB = 2a - x$; vous aurez aussi.....

Digitized by Google

$AD = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{4ax - 4x^2}$; et $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$. Nous aurons donc une seconde valeur de... $AB = \sqrt{4ax - 4x^2} + \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$. Ainsi..... $2a - x = \sqrt{4ax - 4x^2} + \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$; ou bien..... $2a - x - \sqrt{4ax - 4x^2} = \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$. Et en quarrant chaque membre, $4a^2 - 3x^2 - (4a - 2x) \times \sqrt{4ax - 4x^2} = 4ax - 3x^2 - a^2$; ou bien $5a^2 - 4ax = (4a - 2x)\sqrt{4ax - 4x^2}$. Élevant de nouveau chaque membre au quarré et ordonnant, on a $16x^4 - 80ax^3 + 144a^2x^2 - 104a^3x + 25a^4 = 0$, équation qui, étant divisée par $2x - a$, devient, $8x^3 - 36ax^2 + 54a^2x - 25a^3 = 0$. Et en la résolvant, on trouvera x pour une valeur arbitraire de a. a et x étant déterminées, construisez le triangle dont les côtés seront $2a - x$, a, et x; et la perpendiculaire abaissée sur le côté $2a - x$ sera égale à $2x - a$.

Si j'avais fait la différence des côtés $= d$, et la perpendiculaire $= x$, l'opération aurait été plus courte, et l'équation finale un peu plus simple, j'aurais eu, $x^3 = 24d^2x + 48d^3$.

PROBLÊME XV.

Trouver le triangle ABC dont les trois côtés AB, AC, BC et la perpendiculaire CD sont en progression géométrique.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Par l'énoncé du problême on a la progression $AB : AC :: AC : BC :: BC : CD$. Et en faisant $AC = x$, et $BC = a$, on aura, $AB = \frac{x^2}{a}$; et $CD = \frac{a^2}{x}$. On a aussi.....

AD

Digitized by Google

$AD = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{x^2}}$; et $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2}$ $= \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}}$. Donc $\frac{x^2}{a} = (AB) = \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{x^2}} + \ldots\ldots$ $\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}}$. Ou bien $\frac{x^2}{a} - \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}} = \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{x^2}}$; et en quarrant chaque membre, il vient, $\frac{x^4}{a^2} - \frac{2x^2}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}} + a^2 - \frac{a^4}{x^2} =$ $x^2 - \frac{a^4}{x^2}$, qui se réduit à, $x^4 - a^2x^2 + a^4 = 2a^2x\sqrt{x^2 - a^2}$. Et en quarrant de nouveau chaque membre, on a, $x^8 - 2a^2x^6 + 3a^4x^4 -$ $2a^6x^2 + a^8 = 4a^4x^4 - 4a^6x^2$, ou bien, $x^8 - 2a^2x^6 - a^4x^4 +$ $2a^6x^2 + a^8 = 0$. Divisez cette équation par $x^4 - a^2x^2 - a^4$, et il viendra, $x^4 - a^2x^2 - a^4$. Par conséquent, $x^4 = a^2x^2 + a^4$. Et en résolvant cette équation, on a, $x^2 = \frac{1}{2}a^2 + \sqrt{\frac{5}{4}a^4}$. Ou bien, $x = a\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Prenez donc a, ou BC à volonté., et faites cette proportion, $BC : AC :: AC : AB :: 1 : \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Le triangle ABC étant construit par le moyen de ses côtés ainsi trouvés, la perpendiculaire DC, abaissée sur BC, sera dans la même raison que les côtés.

Le même d'une autre manière.

(*Pl.* II, *Fig.* 11). Puisqu'on a $AB : AC :: BC : CD$, je dis que l'angle ACB est droit. Si on doutait qu'il le fût, il n'y a qu'à tirer la droite CE de manière que l'angle ECB soit droit; alors, par la 8e. prop. du sixième liv. des Elém. BCE et DBC sont deux triangles semblables, par conséquent, $BE : EC :: BC : CD$.

Digitized by Google

Donc $BE : EC :: AB : AC$. Tirez AF perpendiculaire sur CF, et à cause des parallèles AF et CB, on aura, $BE : EC :: AE : EF :: AB : FC$. (37). Donc, par la 9e. prop. du cinquième liv. des Élém. $AC = FC$, c'est-à-dire que l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égale à un côté de ce même triangle; ce qui est impossible, par la 19e. prop. du premier liv. des Elém. L'angle ECB ne peut donc pas être droit, il faut par conséquent que l'angle ACB le soit. Donc $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$. Or, $\overline{AC}^2 = AB \times BC$ (*). Donc $AB \times BC + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, et en résolvant cette équation pour en tirer la valeur de AB, on aura, $AB = \frac{BC}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}\overline{BC}^2}$. En conséquence, faites $BC : AB :: 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et prenez AC moyenne proportionnelle entre BC et AB, et le triangle étant construit avec les côtés trouvés de cette manière, les lignes AB, AC, BC, DC seront en proportion continue.

PROBLÊME XVI.

Sur une base donnée AB, construire le triangle ABC, dont le sommet C est à une droite CE donnée de position, et dont la base est moyenne proportionnelle arithmétique entre les côtés.

(*Pl.* II, *Fig.* 12). Il faut couper la base en deux parties égales en F, et prolonger cette base jusqu'à ce qu'elle rencontre en un

(*) Newton tire cette équation de l'énoncé du problême, qui veut que les côtés AB, AC, BC soient en proportion continue.

Digitized by Google

point E la droite EC donnée de position, ensuite abaisser sur la base une perpendiculaire CD. On fera $AB = a$, $FE = b$, et $BC - AB = x$ (38); ce qui donnera $BC = a + x$, et $AC = a - x$. Mais par la 13e. prop. du second liv. des Élém..... $BD = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2AB} = 2x + \frac{a}{2}$. Par conséquent, $FD = 2x$, $DE = b + 2x$, et $CD = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{DB}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2}$. Mais comme les positions des droites CE et AB sont données, l'angle CED est aussi donné. Ainsi on connaît le rapport de DE à CD. Supposons qu'il soit comme celui de d à e, on aura la proportion $d : e :: b + 2x : \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2}$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on a l'équation, $eb + 2ex = d\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2}$, et en quarrant chaque membre et arrangeant convenablement les termes, on a, $x^2 = \frac{\frac{3}{4}d^2a^2 - e^2b^2 - 4e^2bx}{4e^2 + 3d^2}$, et en résolvant l'équation, il vient, $x = \frac{-2e^2b + d\sqrt{3e^2a^2 - 3e^2b^2 + \frac{9}{4}d^2a^2}}{4e^2 + 3d^2}$ (39). x une fois connue, $BC = a + x$, et $AC = a - x$, le sont aussi.

PROBLÊME XVII.

Étant donnés les côtés AB, BD, DC et AC, et une diagonale BC d'un parallélogramme quelconque, trouver l'autre diagonale AD.

(*Pl.* II, *Fig.* 13). Soit E le point de concours des deux diagonales; abaissez la perpendiculaire AF sur la diagonale BC, et, par la 13e. prop. du second liv. des Elém. vous aurez.... $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{2BC} = CF$. Vous aurez également, $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2}{2EC} = CF$.

Digitized by Google

Or, comme $EC = \frac{1}{2} BC$, et que $AE = \frac{1}{2} AD$, on aura,..... $\frac{\overline{AC}^2 - \frac{1}{4}\overline{AD}^2 + \frac{1}{4}\overline{BC}^2}{BC} = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{2BC}$, et en faisant la réduction et dégageant AD, il vient, $AD = \sqrt{2\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}$.

D'où l'on peut voir en passant que dans un parallélogramme quelconque, la somme des quarrés des côtés est égale à la somme des quarrés des diagonales. (40).

PROBLÊME XVIII.

Étant donnés les angles, la surface et le périmètre d'un trapèze ABCD, trouver ses côtés.

(*Pl.* II, *Fig.* 14). Prolongez deux des côtés quelconques AB et DC jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point E. Soient $AB = x$, et $BC = y$; et puisque tous les angles sont donnés, on connaît les rapports de BC à CE et à BE; supposez qu'ils soient comme ceux de d à e et à f, vous aurez $CE = \frac{ey}{d}$, et $BE = \frac{fy}{d}$; par conséquent, $AE = x + \frac{fy}{d}$. Par la même raison que l'on connaît les angles, on connaît encore les rapports de AE à AD et à DE; supposez qu'ils soient ceux de g à d et à h, et vous aurez, $AD = \frac{dx+fy}{g}$, et $ED = \frac{dx+fy}{h}$. Ainsi..... $CD = DE - CE = \frac{dx+fy}{h} - \frac{ey}{d}$. Donc la somme de tous les côtés est, $x + y + \frac{dx+fy}{g} + \frac{dx+fy}{h} - \frac{ey}{d}$. Et puisque cette somme est donnée, appelons-la a. Et pour abréger, au lieu des quantités données, $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h}$, substituez $\frac{p}{r}$; et au lieu des

Digitized by Google

quantités données, $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$, substituez $\frac{q}{r}$, et l'équation deviendra $\frac{px + qy}{r} = a$.

En outre, à cause des angles donnés, on connaît le rapport de $\overline{BC}^2$ à la surface du triangle BCE, que je suppose le même que celui de m à n. On aura donc le triangle $BCE = \frac{ny^2}{m}$. Soit aussi le rapport de $\overline{AE}^2$ au triangle ADE égal à celui de m à d, et on aura le triangle $ADE = \frac{d^2x^2 + 2dfxy + f^2y^2}{dm}$. Par conséquent, comme la surface AC, qui est la différence des surfaces de ces deux triangles, est donnée, supposons-la égale à b^2, et nous aurons, $\frac{d^2x^2 + 2dfxy + f^2y^2 - dny^2}{dm} = b^2$. Nous avons donc deux équations, au moyen desquelles nous pouvons tout déterminer. Car si de la première, $\frac{px + qy}{r} = a$, nous dégageons x, nous aurons..... $x = \frac{ra - qy}{p}$, et cette valeur de x étant substituée dans la seconde, elle deviendra, $\frac{dr^2a^2 - 2dqray + dq^2y^2}{p^2m} + \frac{2afry - 2fqy^2}{pm} + \ldots\ldots\ldots$ $\frac{f^2y^2 - dny^2}{dm} = b^2$. Et mettant, pour abréger, s, au lieu de la quantité connue $\frac{dq^2}{p^2} - \frac{2fq}{p} - \frac{f^2}{d} - n$, et st, au lieu de la quantité connue $\frac{adqr}{p^2} - \frac{afr}{p}$, et enfin stv, au lieu de la quantité connue $b^2m - \frac{dr^2a^2}{p^2}$, on aura, $y^2 = 2ty + tv$, ou..... $y = t + \sqrt{t^2 + tv}$.

Digitized by Google

PROBLÊME XIX.

On veut entourer un réservoir ABCD, d'un trottoir ABCDEFGH d'une surface donnée, et ayant par-tout la même largeur.

(*Pl.* II, *Fig.* 15). Soit la largeur du trottoir x, et sa surface a^2. De tous les angles A, B, C, D, menez aux lignes EF, FG, GH, HE, les perpendiculaires AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI. Le trottoir sera divisé en quatre trapèzes, KI, LM, NO, PQ, et en quatre parallélogrammes, AL, BN, CP, DI, ayant tous x de largeur, et d'une longueur égale à celle des côtés du trapèze donné. Soit donc la somme des côtés de ce trapèze $AB + BC + CD + DA = b$, et la somme des parallélogrammes sera bx.

Ensuite je mène les lignes AE, BF, CG, DH, et puisque $AI = AK$, j'aurai l'angle AEI = l'angle $AEK = \frac{1}{2} IEK = \frac{1}{2} DAB$. Ainsi l'angle AEI est connu, puisqu'il est la moitié d'un angle connu DAB; par conséquent on connaît la raison de AI à EI, qu'elle soit celle de d à e, on aura, $IE = \frac{ex}{d}$. Multipliez IE par $\frac{1}{2} AI$, ou $\frac{1}{2} x$, et la surface du triangle AEI sera, $\frac{ex^2}{2d}$. Mais à cause de l'égalité des angles et des côtés, les deux triangles AEK et AEI sont égaux; ainsi le trapèze $IK = 2$ triangles $AEI = \frac{ex^2}{d}$. Par la même méthode, en faisant, $BL : LF :: d : f$; et $CN : NG :: d : g$; et $DP : PH :: d : h$ (car tous ces rapports sont donnés, parce que les angles A, B, C, D sont donnés) on aura les trapèzes, $LM = \frac{fx^2}{d}$; $NO = \frac{gx^2}{d}$; et $PQ = \frac{hx^2}{d}$. Ainsi

Digitized by Google

$\frac{ex^2}{d} + \frac{fx^2}{d} + \frac{gx^2}{d} + \frac{hx^2}{d}$ égale la somme des quatre trapèzes, $IK + LM + NO + PQ$. On peut encore abréger cette expression en faisant, $e + f + g + h = p$, ce qui donne $\frac{px^2}{d}$ pour la somme des surfaces de ces mêmes trapèzes. Et en y ajoutant bx, somme des surfaces des quatre parallélogrammes, on aura, $\frac{px^2}{d} + bx = a^2$, surface totale du trottoir. Cette équation étant résolue, donnera, $x = \frac{-db + \sqrt{b^2d^2 + 4a^2pd}}{2p}$. La largeur du trottoir étant ainsi trouvée, il est facile de le décrire.

PROBLÊME XX.

Mener d'un point donné C, une droite CF, qui renferme, avec deux autres droites AE, AF données de position, un triangle AEF d'une grandeur donnée.

(*Pl.* III, *Fig.* 1). Menez CD parallèle à AE, et CB et EG perpendiculaires sur AF. Soient, $AD = a$, $CB = b$, $AF = x$, et la surface du triangle $AEF = c^2$; et à cause des lignes proportionnelles, $DF : AF :: (DC : AE) :: CB : EG$, ou bien, $a + x : x :: b : \frac{bx}{a+x}$, on aura, $EG = \frac{bx}{a+x}$. Multipliez cette perpendiculaire par la moitié de la base AF, et vous aurez pour l'expression de la surface du triangle AEF, $\frac{bx^2}{2a+2x} = c^2$, ou bien, $x^2 - \frac{2c^2x}{b} - \frac{2ac^2}{b} = 0$, équation qui, étant résolue, donne $x = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 2abc^2}}{b}$.

On suivrait absolument la même méthode s'il s'agissait, par un

Digitized by Google

point donné, de mener une droite qui partageât un triangle ou un trapèze en raison donnée.

PROBLÊME XXI.

Déterminer sur la droite DF un point C, tel que si de ce point on mène deux droites AC et BC aux points donnés A et B, la différence de ces deux droites soit égale à une ligne donnée.

(*Pl.* III, *Fig.* 2). Des deux points donnés abaissez les perpendiculaires AD et BF. Faites $AD = a$, $BF = b$, $DF = c$, $DC = x$, et vous aurez $AC = \sqrt{a^2 + x^2}$, $FC = x - c$, et $BC = \sqrt{b^2 + x^2 - 2cx + c^2}$. Supposons que AC soit la plus grande des deux droites, et BC la plus petite, et que leur différence $= d$; on aura donc $\sqrt{a^2 + x^2} - d = \sqrt{b^2 + x^2 - 2cx + c^2}$. Et en quarrant chaque membre, $a^2 + x^2 + d^2 - 2d\sqrt{a^2 + x^2} = b^2 + x^2 - 2cx + c^2$. Et en effaçant ce qui se détruit, et faisant, pour abréger, $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2e^2$, on aura..... $e^2 + cx = d\sqrt{a^2 + x^2}$, et en élevant de nouveau chaque membre au quarré, $e^4 + 2ce^2x + c^2x^2 = d^2a^2 + d^2x^2$. Et en résolvant cette équation, il viendra, $x = \frac{e^2c + \sqrt{e^4d^2 - a^2d^4 + a^2d^2c^2}}{d^2 - c^2}$.

Le problême se résoudrait d'une manière analogue si, au lieu de la différence des lignes AC et BC, on donnait leur somme, ou la somme, ou la différence de leurs quarrés, ou leur rapport, ou leur produit, ou l'angle qu'elles comprennent; il en serait encore de même si, au

lieu

Digitized by Google

lieu de la droite DC, on donnait ou une circonférence de cercle, ou une autre courbe quelconque, pourvu que dans ce dernier cas le calcul se rapportât à une droite qui unirait les points A et B.

PROBLÊME XXII.

Trois droites, AD, AE, BF, étant données de position, il en faut mener une quatrième, DF, de manière que ses parties DE, EF, interceptées par les premières droites, soient de longueurs données.

(*Pl.* III, *Fig.* 3). Menez sur BF la perpendiculaire EG, et CE parallèle à AD. Les trois droites données de position se rencontreront en A, B et H. Faites $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$, $EF = e$, et $HE = x$. Maintenant, à cause des triangles semblables ABH, ECH, on a..... $AH : AB :: HE : CE = \frac{ax}{c}$, et $AH : HB :: HE : HC = \frac{bx}{c}$. Ajoutez ensemble HB et HC, et vous aurez, $BC = b + \frac{bx}{c} = \frac{bc + bx}{c}$. De même, les triangles semblables FEC et FDB donnent, $ED : CB :: FE : FC = \frac{ebx + ebc}{dc}$. Et enfin par les prop. 12 et 13 du second liv. des Elém. on a, $\frac{\overline{EC}^2 - \overline{EF}^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC = CG$; et..... $CG = \frac{\overline{HE}^2 - \overline{EC}^2}{2CH} - \frac{1}{2}CH$. Donc $\frac{\overline{EC}^2 - \overline{EF}^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC = \frac{\overline{HE}^2 - \overline{EC}^2}{2CH} - \frac{1}{2}CH$. Et en mettant les valeurs analytiques.....

$$\frac{\frac{a^2x^2}{c^2} - e^2}{\frac{2ebx + 2ebc}{dc}} + \frac{ebx + ebc}{2dc} = \frac{x^2 - \frac{a^2x^2}{c^2}}{\frac{2bx}{c}} - \frac{bx}{2c},$$ ou bien.....

Digitized by Google

$\frac{a^2 d x^2 - e^2 d c^2}{e b x + e b c} + \frac{e b x}{d} + \frac{e b c}{d} = \frac{c^2 x - a^2 x - b^2 x}{b}$. Faites, pour abréger, $\frac{c^2 - a^2 - b^2}{b} - \frac{e b}{d} = m$, et vous aurez..... $\frac{a^2 d x^2 - e^2 d c^2}{e b x + e b c} + \frac{e b c}{d} = m x$. Et multipliant tout par $c + x$, il viendra, $\frac{a^2 d x^2 - e^2 d c^2}{e b} + \frac{e b c x + e b c^2}{d} = m x^2 + m c x$. Mettez encore p au lieu de $\frac{a^2 d}{e b} - m$, et $2pq$ au lieu de $mc - \frac{e b c}{d}$, et enfin pr^2 au lieu de $- \frac{e b c^2}{d} + \frac{e^2 d c^2}{e b}$, et l'équation sera réduite à $x^2 = 2qx + r^2$. Ce qui donne $x = q \pm \sqrt{q^2 + r^2}$. x ou HE étant trouvée, menez de son extrémité E la droite EC parallèle à AB. Faites ensuite la proportion $d : e :: BC : FC$. FC étant determinée, par le point F et le point E menez la droite FED, elle satisfera aux conditions du problême.

PROBLÊME XXIII.

Il faut déterminer un point Z tel que, si de ce point on mène, sous des angles donnés, quatre droites, ZA, ZB, ZC et ZD, à quatre autres droites données de position FA, EB, FC, GD, le rectangle des deux droites ZA et ZB soit donné; et que la somme des deux autres droites ZC et ZD soit aussi donnée.

(*Pl.* III, *Fig.* 4). Parmi les lignes données de position, choisissez FA, et parmi celles qui ne sont pas données de position ZA qui tombe sur FA. La longueur de ces droites étant déterminée, la position du point Z le sera aussi. Prolongez, s'il est nécessaire, les droites données de position jusqu'à ce qu'elles rencontrent celles-ci. Faites $EA = x$, et $AZ = y$. Comme les angles du triangle

Digitized by Google

AEH sont donnés, la raison de AE à AH est connue; supposons qu'elle soit comme celle de p à q, on aura, $AH = \frac{qx}{p}$. Ajoutez AZ à AH, et il viendra, $ZH = y + \frac{qx}{p}$. ZH étant calculée, et les angles du triangle HZB étant donnés, la raison de HZ à ZB est aussi donnée; supposons qu'elle soit celle de n à p, on aura, $ZB = \frac{py + qx}{n}$.

En outre, si on appelle EF, a, AF sera $a - x$; et comme les angles du triangle AFI sont donnés, on supposera que le rapport connu de AF à AI est comme celui de p à r, ce qui donnera, $AI = \frac{ra - rx}{p}$. Retranchez AI de AZ, et le reste sera..... $IZ = y - \frac{(ra - rx)}{p}$. Et comme les angles du triangle ICZ sont connus, on supposera le rapport de IZ à ZC, comme celui de m à p, et on aura, $ZC = \frac{py - ra + rx}{m}$.

En suivant toujours la même méthode, si on fait $EG = b$, et $AG : AK :: l : s$, et $ZK : ZD :: p : l$, on trouvera..... $ZD = \frac{sb - sx - ly}{p}$.

Maintenant, par les conditions du problême, la somme des droites ZC et ZD doit être égale à une quantité donnée; soit f cette quantité. On aura donc $\frac{py - ra + rx}{m} + \frac{sb - sx - ly}{p} = f$. Et le rectangle des deux autres droites AZ et ZB doit être aussi égal à une quantité donnée. Soit g^2 cette quantité. Nous aurons donc une seconde équation $\frac{py^2 + qxy}{n} = g^2$. Au moyen de ces deux équations on déterminera les valeurs de x et de y. De la dernière on

Digitized by Google

tire $x = \frac{ng^2 - py^2}{qy}$, et en substituant cette valeur de x dans la première, elle deviendra.....

$\frac{py - ra}{m} + \frac{rng^2 - rpy^2}{mqy} + \frac{bs - ly}{p} - \frac{(sng^2 - spy^2)}{pqy} = f$, ou bien,

$y^2 = \frac{apqry - bmqsy + fmpqy + g^2mns - g^2npr}{p^2q - p^2r - mlq + mps}$. Et en faisant, pour abréger, $\frac{apqr - bmqs + fmpq}{p^2q - p^2r - mlq + mps} = 2h$. Et $\frac{g^2mns - g^2npr}{p^2q - p^2r - mlq + mps} = k^2$, on aura $y^2 = 2hy + k^2$, ou bien $y = h \pm \sqrt{h^2 + k^2}$. Connaissant y par le moyen de cette équation, on trouvera la valeur de x par le moyen de l'équation $x = \frac{ng^2 - py^2}{qy}$. La valeur de ces deux inconnues étant déterminée, la position du point Z sera connue.

On suivrait à-peu-près la même méthode, s'il s'agissait de déterminer la position d'un point, duquel on voulût mener à un plus ou moins grand nombre de droites données de position, autant de droites, avec ces conditions : que la somme, ou la différence, ou le produit de quelques-unes de ces droites, égalât ou la somme, ou la différence, ou le produit des autres; ou enfin que ces droites eussent des conditions données quelconques à remplir.

PROBLÊME XXIV.

Il faut placer dans l'angle droit EAF une droite donnée EF, de manière que cette droite prolongée passe par un point donné C, également éloigné des des deux droites qui comprennent l'angle droit.

(*Pl.* III, *Fig.* 5). Il faut achever le quarré $ABCD$, et couper la droite donnée EF en deux parties égales par le point G. Alors faites CB ou $CD = a$, EG ou $FG = b$, et $CG = x$; vous aurez $CE = x - b$, et $CF = x + b$. Ensuite comme $\overline{CF}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{BF}^2$,

Digitized by Google

il viendra, $BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$. Et à cause des triangles semblables CDE et FBC, on a, $CE : CD :: CF : BF$, ou $x - b : a :: x + b : \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$. D'où l'on tire, $ax + ab = (x - b)\sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$. Et en quarrant chaque membre de cette équation et ordonnant, on a.....

$x^4 = \begin{matrix} 2a^2 \\ +2b^2 \end{matrix} \left\{ x^2 \begin{matrix} +2a^2b^2 \\ -b^4 \end{matrix} \right.$. Équation qui, étant résolue par la méthode de celles du second degré, donne $x^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}$, et enfin $x = \sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}}$. La valeur de x ou CG étant ainsi connue sert à déterminer CE ou CF, et par le moyen de l'une ou de l'autre de ces deux droites, on détermine le point E ou le point F, et le problême est résolu.

Le même d'une autre manière.

(*Même Fig.*). Faites $CE = x$, $CD = a$ et $EF = b$, vous aurez $CF = x + b$, et $BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$, et la proportion $CE : CD :: CF : BF$, ou $x : a :: x + b : \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$; ce qui donne.....

$ax + ab = x\sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$, et en quarrant chaque membre et ordonnant les termes, il vient.....

$x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} +b^2 \\ -2a^2 \end{matrix} \left\{ x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0 \right.$. Équation du 4e degré dont les racines sont plus difficiles à trouver que celles du cas précédent. Voici cependant comme on peut les trouver. Ajoutez de part et d'autre $a^2b^2 + a^4$, afin de faire du premier membre un quarré parfait, et vous aurez.....

$x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} +b^2 \\ -2a^2 \end{matrix} \left\{ x^2 - 2a^2bx + a^4 = a^2b^2 + a^4 \right.$; et en tirant

Digitized by Google

la racine de chaque membre, il viendra $x^2 + bx - a^2 = \pm a\sqrt{a^2 + b^2}$.

C'est ici l'occasion de donner une règle sur le choix des termes propres à commencer le calcul. *Lorsque deux termes ont une telle ressemblance de rapport avec les autres termes de la question, qu'en prenant l'un ou l'autre on arrive à des équations entièrement semblables; ou qu'en les prenant tous deux en même temps, ils aient dans l'équation finale le même nombre de dimensions, et la même forme, et ne diffèrent peut-être que par les signes + et —, il faut les rejetter tous deux également, et prendre à leur place un troisième terme qui ait un même rapport avec l'un et l'autre, par exemple leur demi-somme, ou leur demi-différence, ou une moyenne proportionnelle, ou enfin telle autre quantité qu'on voudra qui ait avec eux une même relation, pourvu que cette quantité soit la seule qui jouisse de cette propriété.*

C'est ainsi que dans le problême précédent, en voyant que la ligne EF avait une même relation avec AB et AD, comme on peut s'en assurer en menant EF dans l'angle BAH, et que par conséquent aucune raison de préférence ne pouvait me déterminer à prendre pour l'inconnue qu'il fallait chercher, ED plutôt que BF, ou AE plutôt que AF, ou CE plutôt que CF; au lieu donc des points E et F qui causaient toute mon incertitude, j'ai pris, dans la première solution, le point G qui coupe EF en deux parties égales; et comme CG a la même relation avec AB et AD, et qu'il n'y a pas une seconde quantité qui ait avec ces deux lignes la même relation que CG; je me suis déterminé à prendre CG pour l'inconnue qu'il fallait chercher, et j'ai obtenu une équation du 4e degré, où il ne s'est trouvé aucun terme affecté des puissances impaires de l'inconnue. On voit bien que je serais retombé dans ma première incertitude, si, ayant pris le point G, j'avais voulu

Digitized by Google

chercher une inconnue au moyen d'une perpendiculaire abaissée de ce point sur AF, parce que j'aurois pu également en abaisser une sur AD; par la même raison, je n'en ai abaissé ni sur CB ni sur CD.

J'aurais pu encore, en remarquant que le point G est à la circonférence d'un cercle décrit du point A comme centre et avec GE comme rayon, j'aurais pu, dis-je, abaisser la perpendiculaire GK sur la diagonale AC, et chercher AK ou CK, qui ont le même rapport avec AB ou AD, et arriver à l'équation du second degré $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$, en appelant AK, y; AC, e; et EG, b. AK étant ainsi trouvé, on eût élevé la perpendiculaire KG, et son point de rencontre G, avec la circonférence décrite du centre A, eût servi avec le point C, à diriger la droite CF, et le problême eût été résolu (41).

C'est en suivant l'esprit de cette règle, que dans les problêmes IX et X, où il fallait déterminer les deux côtés AC et BC d'un triangle, au lieu de chercher l'un ou l'autre de ces côtés, j'ai cherché leur demi-différence. Mais on verra encore mieux dans le problême XXVIIIe, le grand usage de cette règle.

PROBLÊME XXV.

Un cercle étant décrit d'un centre C et avec un rayon CD, mener à ce cercle une tangente BD, de manière que la partie DB de cette tangente interceptée par les droites AP et AB données de position, soit égale à une droite d'une longueur donnée.

(*Pl.* III, *Fig.* 6). Du centre C, menez à une des deux droites données de position, à AB par exemple, la perpendiculaire CE que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente en un

Digitized by Google

point H. Abaissez encore sur AB la perpendiculaire PG, et faites $EA = a$, $EC = b$, $CD = c$, $BP = d$, et $PG = x$, vous aurez à cause des triangles semblables, PGB, CDH, $GB : PB :: CD : CH$. D'où $CH = \frac{cd}{\sqrt{d^2 - x^2}}$. Ajoutez CE à CH, et vous aurez $EH = b + \frac{cd}{\sqrt{d^2 - x^2}}$. Ensuite on a la proportion $PG : GB :: EH : BE = \frac{b}{x}\sqrt{d^2 - x^2} + \frac{cd}{x}$. En outre, l'angle PAG étant donné, le rapport de PG à AG est aussi donné. Supposons qu'il soit celui de e à f, on aura, $AG = \frac{fx}{e}$. Or $EA + AG + BG = EB$. Donc en mettant les valeurs analytiques, nous aurons une seconde valeur de EB, qui, étant égalée à la première, nous donnera, $a + \frac{fx}{e} + \sqrt{d^2 - x^2} = \frac{b}{x}\sqrt{d^2 - x^2} + \frac{cd}{x}$. Et en transposant, $a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b - x}{x}\sqrt{d^2 - x^2}$. Ensuite quarrant chaque membre, $a^2 + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{f^2x^2}{e^2} - \frac{2cdf}{e} + \frac{c^2d^2}{x^2} = \frac{b^2d^2}{x^2} - b^2 - \frac{2bd^2}{x} + 2bx + d^2 - x^2$, et en réduisant et ordonnant.....

$$x^4 \quad \frac{\left.\begin{matrix}+2aef\\-2be^2\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+a^2e^2\\+b^2e^2\\-d^2e^2\\-2cdef\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+2bd^2e^2\\-2acde^2\end{matrix}\right\} x \begin{matrix}+c^2d^2e^2\\-b^2d^2e^2\end{matrix}}{e^2 + f^2} = 0.$$

PROBLÊME XXVI.

Digitized by Google

PROBLÊME XXVI.

Étant données trois droites AE, BF, CF, trouver un point D tel que, si de ce point on abaisse sur chacune des droites, des perpendiculaires DA, DB, DC, ces perpendiculaires soient entre elles dans un rapport donné.

(*Pl.* III, *Fig.* 7). Prolongez une des droites données de position, ainsi que la perpendiculaire qui tombe sur elle, BF par exemple, et sa perpendiculaire BD, jusqu'à ce qu'elles rencontrent les deux autres droites AE et FC, la droite BF les rencontrera aux points E et F, et la perpendiculaire aux points G et H. Faites maintenant $EB = x$, et $EF = a$, et vous aurez $BF = a - x$. Et comme les droites EF, EA et FC sont données de position, les angles E et F, et les rapports des côtés des triangles EBH et FBG sont aussi donnés. Soit donc le rapport de EB à BH, comme celui de d à e, et on aura, $BH = \frac{ex}{d}$; et..... $EH = \sqrt{\overline{EB}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{x^2 + \frac{e^2x^2}{d^2}} = \frac{x}{d}\sqrt{d^2 + e^2}$. Supposons encore que BF soit à BG comme d est à f, et nous aurons, $BG = \frac{fa - fx}{d}$, et $FG = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2} =$..... $\sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + \frac{f^2a^2 - 2f^2ax + f^2x^2}{d^2}}$, ce qui se réduit à... $FG = \frac{a - x}{d}\sqrt{d^2 + f^2}$. Ensuite appelons BD, y; et il nous viendra, $HD = \frac{ex}{d} - y$; et $GD = \frac{fa - fx}{d} - y$. Et comme on a les proportions $AD : HD :: BE : HE :: d : \sqrt{d^2 + e^2}$; et

Digitized by Google

$DC : GD :: BF : FG :: d : \sqrt{d^2 + e^2}$. De la première on tire, $AD = \frac{ex - dy}{\sqrt{d^2 + e^2}}$, et de la seconde, $DC = \frac{fa - fx - dy}{\sqrt{d^2 + f^2}}$. De plus, comme les rapports des lignes BD, AD, DC, sont donnés, supposons que $BD : AD :: \sqrt{d^2 + e^2} : h - d$, et il viendra, $\frac{hy - dy}{\sqrt{d^2 + e^2}} = AD = \frac{ex - dy}{\sqrt{d^2 + e^2}}$; ce qui donne $hy = ex$. Soit encore $BD : DC :: \sqrt{d^2 + f^2} : k - d$, et on aura, $\frac{ky - dy}{\sqrt{d^2 + f^2}} = DC = \frac{fa - fx - dy}{\sqrt{d^2 + f^2}}$, ce qui donne $ky = fa - fx$, d'où l'on tire,... $y = \frac{fa - fx}{k}$. Mais l'équation $hy = ex$, donne aussi $y = \frac{ex}{h}$, donc $\frac{ex}{h} = \frac{fa - fx}{k}$, ou bien, $x = \frac{afh}{ek + fh}$. Faites donc cette proportion, $\frac{ek}{f} + h : h :: EF : EB$, et EB, ou x, étant ainsi déterminée, substituez sa valeur dans l'équation $hy = ex$, et vous aurez la valeur de y par cette proportion, $h : e :: BE : BD$; ainsi le point D sera déterminé.

PROBLÊME XXVII.

Trouver un point D tel, que si de ce point on tire trois droites DA, DB, DC, à trois points donnés A, B, C, ces droites soient entre elles dans un rapport donné.

(*Pl.* III, *Fig.* 8). Des trois points donnés, joignez-en deux, par exemple A et C, par une droite AC, et du troisième point B, ainsi que du point cherché D, abaissez des perpendiculaires BE et DF sur la droite AC. Faites $AE = a$, $AC = b$, $EB = c$, $AF = x$, et $FD = y$. Et vous aurez, $\overline{AD}^2 = x^2 + y^2$; $FC = b - x$;

Digitized by Google

$\overline{CD}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{FD}^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$. $EF = x - a$, et $\overline{BD}^2 = \overline{EF}^2 + (EB + FD)^2$. (*) $= x^2 - 2ax + a^2 + c^2 + 2cy + y^2$. Maintenant comme AD et CD sont en raison donnée, soit cette raison, celle de d à e, et on aura, $CD = \frac{e}{d}\sqrt{x^2 + y^2}$. Et puisque AD est aussi à BD en raison donnée, soit cette raison, celle de d à f, et on aura, $BD = \frac{f}{d}\sqrt{x^2 + y^2}$. Par conséquent $\frac{e^2x^2 + e^2y^2}{d^2} = \overline{CD}^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$; et $\frac{f^2x^2 + f^2y^2}{d^2} = \overline{BD}^2 = x^2 - 2ax + a^2 + c^2 + 2cy + y^2$. Si, pour abréger, on met dans ces équations p au lieu de $\frac{d^2 - e^2}{d}$; et q au lieu de $\frac{d^2 - f^2}{d}$, on aura, $b^2 - 2bx + \frac{px^2}{d} + \frac{p}{d}y^2 = 0$, et..... $a^2 + c^2 - 2ax + 2cy + \frac{q}{d}x^2 + \frac{q}{d}y^2 = 0$. De la première on tire, $\frac{2bqx - b^2q}{p} = \frac{q}{d}x^2 + \frac{q}{d}y^2$. Ainsi, en substituant dans la seconde, au lieu de $\frac{q}{d}x^2 + \frac{q}{d}y^2$ sa valeur $\frac{2bqx - b^2q}{p}$, elle deviendra, $\frac{2bqx - b^2q}{p} + a^2 + c^2 - 2ax + 2cy = 0$. Si, pour abréger, on fait encore, $m = a - \frac{bq}{p}$; et $2cn = \frac{b^2q}{p} - a^2 - c^2$, il viendra, $2mx + 2cn = 2cy$. Et en divisant tout par $2c$, l'équation se réduit à $\frac{mx}{c} + n = y$. Substituez donc dans l'équation.....

(*) Il sera très-facile de voir que $\overline{BD}^2 = \overline{EF}^2 + (EB + FD)^2$, si dans la figure on imagine par le point B une parallèle à AC, et qu'on prolonge la perpendiculaire DF jusqu'à la rencontre de cette parallèle; car le prolongement de DF sera égal à BE, et la partie de la parallèle interceptée entre BD et DF prolongée, sera égale à EF.

Digitized by Google

$b^2 - 2bx + \frac{p}{d}x^2 + \frac{p}{d}y^2 = 0$, à la place de y^2, le quarré de $\frac{mx}{c} + n$, et vous aurez, $b^2 - 2bx + \frac{p}{d}x^2 + \frac{pm^2}{dc^2} \cdot x^2 + \frac{2pmn}{dc}x + \frac{pn^2}{d} = 0$. Si, pour abréger encore, on écrit dans cette équation $\frac{b}{r}$ au lieu de $\frac{p}{d} + \frac{pm^2}{dc^2}$; $\frac{sb}{r}$ au lieu de $b - \frac{pmn}{dc}$, et $\frac{tb^2}{r}$ au lieu de $b^2 + \frac{pn^2}{d}$, on aura, $x^2 = 2sx - tb$. Cette équation étant résolue, donne $x = s \pm \sqrt{s^2 - tb}$. Lorsque x est trouvée, l'équation $\frac{mx}{c} + n = y$, donnera la valeur de y. Et x et y, ou AF et FD étant déterminées, le point cherché D l'est aussi.

PROBLÊME XXVIII.

On veut inscrire une droite DC, d'une longueur donnée, dans une section conique donnée DAC, de manière que cette droite passe par le point G donné de position.

(*Pl.* III, *Fig.* 9). Soit AF l'axe de la courbe. Des points D, G et C abaissez sur cet axe les perpendiculaires DH, GE et CB. Maintenant, pour déterminer la position de la droite DC, on pourrait indifféremment chercher les points C ou D; mais ces deux points ont des rapports si semblables, que l'opération sera toujours la même, soit qu'on veuille les déterminer par le moyen de lignes CG, CB ou AB; soit par le moyen des lignes DG, DH ou AH. En conséquence je ne chercherai ni l'un ni l'autre, mais un troisième point qui ait la même relation avec les deux premiers, et qui les détermine tous les deux à la fois. Et je vois que le point F remplit ces conditions.

Soit donc $AE = a$, $EG = b$, $DC = c$, $FE = z$. Et comme on

Digitized by Google

a d'ailleurs le rapport entre AB et BC par l'équation de la courbe qui est donnée, nous appellerons AB, x; et BC, y; alors FB sera $x - a + z$. On a encore la proportion $GE : EF :: CB : BF$, d'où l'on tire $BF = \frac{yz}{b}$. Cette seconde valeur de BF étant égalée à la première, donne l'équation $x - a + z = \frac{yz}{b}$.

Cette préparation faite, chassez x par le moyen de l'équation de la courbe. Par exemple, si la section conique est une parabole, dont l'équation est $rx = y^2$, vous aurez, $x = \frac{y^2}{r}$. Cette valeur de x étant substituée dans l'équation précédemment trouvée, nous donnera, $\frac{y^2}{r} - a + z = \frac{yz}{b}$; et en résolvant.....

$y = \frac{rz}{2b} \pm \sqrt{\frac{r^2z^2}{4b^2} + ar - rz}$, d'où l'on voit que.....

$\sqrt{\frac{r^2z^2}{b^2} + 4ar - 4rz}$ est la différence des deux valeurs de y, (42), c'est-à-dire des lignes $+BC$ et $-DH$. Donc si du point D on mène sur CB la perpendiculaire DK, la ligne CK sera cette différence. Or on a la proportion, $FG : GE :: DC : CK$. Et en mettant les valeurs analytiques, $\sqrt{b^2 + z^2} : b :: c : \sqrt{\frac{r^2z^2}{b^2} + 4ar - 4rz}$. Et en élevant tous les termes de cette proportion au quarré, et égalant ensuite le produit des extrêmes à celui des moyens, et ordonnant, on aura, $z^4 = \frac{4b^2rz^3 \begin{matrix} -4ab^2r \\ -b^2r^2 \end{matrix} \left\{ z^2 + 4b^4rz \begin{matrix} -4ab^4r \\ +b^4c^2 \end{matrix} \right.}{r^2}$ (*).

(*) Nous donnerons à la fin des notes, une méthode générale et facile de construire les équations des 3e et 4e degrés, par le moyen d'une parabole donnée et d'un cercle, et de cette manière, nous éviterons une des principales objections

Digitized by Google

Cette équation n'est que du quatrième degré; elle aurait été du huitième, si on eût cherché CG, ou CB, ou AB.

PROBLÊME XXIX.

Il faut multiplier ou diviser un angle donné par un nombre donné.

(*Pl.* III, *Fig.* 10). Dans un angle quelconque FAG, inscrivez les lignes AB, BC, CD, DE, etc. toutes d'une même longueur quelconque, et les triangles ABC, BCD, CDE, DEF, etc. seront tous isocèles. Ainsi, par la 32e prop. du 1er liv. des Élém., on aura l'angle CBD = ang. A + ang. ACB = 2 ang. A, et ang. DCE = ang. A + ang. ADC = 3 ang. A. Et ang. EDF = ang. A + ang. AED = 4 ang. A. Et ang. FEG = ang. A + ang. AFE = 5 ang. A, et ainsi de suite. Maintenant, en regardant les droites AB, BC, CD, etc. comme les rayons de cercles égaux, les perpendiculaires BK, CL, DM, etc. abaissées sur AC, BD, CE, etc. seront les sinus de ces angles, et AK, BL, CM, DN en seront les cossinus; ou bien en regardant AB comme le diamètre, les droites AK, BL, CM, etc. seront les cordes (43). Soient donc $AB = 2r$ et $AK = x$, le reste de l'opération se fait comme il suit :

---

que Newton fait aux constructions de cette espèce, c'est-à-dire, la difficulté de tracer la parabole: car puisque la même parabole peut servir à la construction de toutes les équations du 3e et du 4e degrés, il est clair qu'alors on peut bien prendre la peine de la tracer avec exactitude.

Digitized by Google

$AB : AK :: AC : AL,$

$2r : x :: 2x : \frac{x^2}{r}$. Donc $AL - AB$, ou $\frac{x^2}{r} - 2r = BL$, cossinus du double de l'angle A.

$AB : AK :: AD\,(2AL - AB) : AM,$

$2r : x :: \frac{2x^2}{r} - 2r : \frac{x^3}{r^2} - x$. Donc $AM - AC$, ou $\frac{x^3}{r^2} - 3x = CM$, cossinus du triple de l'ang. A.

$AB : AK :: AE\,(2AM - AC) : AN,$

$2r : x :: \frac{2x^3}{r^2} - 4x : \frac{x^4}{r^3} - \frac{2x^2}{r}$. Donc..... $AN - AD$, ou $\frac{x^4}{r^3} - \frac{4x^2}{r} + 2r = DN$, cossinus du quadruple de l'ang. A.

$AB : AK :: AF\,(2AN - AD) : AO,$

$2r : x :: \frac{2x^4}{r^3} - \frac{6x^2}{r} + 2r : \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{r^2} + x$. Donc $AO - AE$, ou $\frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{r^2} + 5x = EO$, cossinus du quintuple de l'ang. A.

Et ainsi de suite. Si, au contraire, vous voulez diviser un angle donné en un nombre quelconque de parties, mettez q à la place de BL, CM, DN, etc. et vous aurez $x^2 - 2r^2 = qr$ pour la bisection; $x^3 - 3r^2x = qr^2$ pour la trisection; $x^4 - 4r^2x^2 + 2r^4 = qr^3$ pour la quatrisection; et enfin $x^5 - 5r^2x^3 + 5r^4x = qr^4$ pour la quintisection (44).

Digitized by Google

PROBLÊME XXX.

Une comète ayant une marche uniforme sur une ligne droite B D, déterminer la position de sa route par trois observations.

(*Pl.* III, *Fig.* 11). Soit l'œil du spectateur placé au point A; soit B le lieu de la comète dans la première observation; C le même lieu dans la seconde, et D dans la troisième : il faudra chercher l'inclinaison de la droite BD sur la droite AB. D'abord les angles BAD, BAC sont connus par les observations, par conséquent si on mène perpendiculairement sur AB la droite BH qui rencontre AC et AD en E et en F, en prenant la droite quelconque AB pour rayon, les lignes BE et BF seront connues, en tant qu'elles sont par rapport au rayon AB, les tangentes des angles connus BAC et BAD. Soit donc $AB = a$, $BE = b$ et $BF = c$. D'ailleurs, par les intervalles des observations, on connaît le rapport de BC à BD; supposons qu'il soit le même que celui de b à e. Menons DG parallèlement à AC, il est clair que BE et BG seront encore dans le même rapport; et que si l'on fait $BE = b$, on aura $BG = e$, ainsi $GF = e - c$. En outre, si on mène DH perpendiculaire à BG, les triangles semblables ABF et DHF semblablement coupés par les droites AE et DG, nous donnent la proportion $FE : AB :: FG : HD$, ou bien $c - b : a :: e - c : \frac{ae - ac}{c - b} = HD$. On a aussi la proportion $FE : FB :: FG : FH$, ou bien..... $e - b : c :: e - c : \frac{ce - c^2}{c - b} = FH$. Ajoutez BF ou c à FH, et vous aurez $BH = \frac{ce - cb}{c - b}$. Ainsi en considérant HD comme le rayon, BH sera la tangente de l'angle HDB, et on aura.....

HD

Digitized by Google

$HD : HB :: 1 :$ tang. HDB, ou $\frac{ae-ac}{c-b} : \frac{ce-cb}{c-b} :: 1 :$ tang. HDB, ou bien $ae-ac : ce-cb :: 1 :$ tang. HDB, d'où..... $a : \frac{c(e-b)}{e-c} :: 1 :$ tang. HDB, ou ABK. Or comme nous avons supposé que a était le rayon, on aura $e-c : e-b :: c :$ tang. ABK, ou bien $GF : GE :: BF$ (tang. de l'ang. BAF) : tang. de l'ang. ABK.

Résumé. La proportion $BC : BD :: BE : BG$ nous fournit cet énoncé : que le temps écoulé entre la première et la seconde observation, est au temps écoulé entre la première et la troisième, comme la tangente de l'angle BAE est à une quatrième proportionnelle BG. Et la proportion, $GF : GE :: BF$ (tang. de l'ang. BAF) : tang. de l'ang. ABK, nous fournit le second énoncé : GF, excès de la quatrième proportionnelle BG sur BF tang. de l'ang. BAF est à GE, excès de cette même quatrième proportionnelle BG sur BE tang. de l'ang. BAE, comme la tangente de l'angle BAF est à la tangente de l'angle ABK.

PROBLÊME XXXI.

Étant donné un point lumineux d'où partent des rayons divergens qui viennent frapper une surface sphérique réfringente, trouver le point de concours de chaque rayon réfracté avec l'axe de la sphère qui passe par le point lumineux.

(*Pl.* III, *Fig.* 12). Soit A le point lumineux, et BV la sphère, dont l'axe passant par le point lumineux, est AD, son centre C, et son sommet V. Soit AB le rayon incident, et BD son réfracté ; soient abaissées les perpendiculaires CE, CF sur ces rayons, et la

Digitized by Google

perpendiculaire BG sur AD; soit encore mené le rayon BC, et faites $AC = a$, VC ou $BC = r$, $CG = x$ (*) et $CD = z$, et vous aurez $AG = a - x$, $BG = \sqrt{r^2 - x^2}$, $AB = \sqrt{a^2 - 2ax + r^2}$. Et à cause des triangles semblables ABG et ACE, on a..... $CE = \frac{a\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - 2ax + r^2}}$. De plus $GD = z + x$; $BD = \sqrt{z^2 + 2zx + r^2}$. Et à cause des triangles semblables DBG et DCF, on a..... $CF = \frac{z\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{z^2 + 2zx + r^2}}$. Et comme on connaît le rapport des sinus d'incidence aux sinus de réfraction, et par conséquent, celui de CE à CF, supposons qu'il soit comme celui de a à f, on aura donc... $\frac{fa\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - 2ax + r^2}} = \frac{az\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{z^2 + 2zx + r^2}}$, et en multipliant en sautoir et divisant par $a\sqrt{r^2 - x^2}$, il viendra $f\sqrt{z^2 + 2zx + r^2} = \ldots$ $z\sqrt{a^2 - 2ax + r^2}$, et en quarrant et ordonnant..... $z^2 = \frac{2f^2xz + f^2r^2}{a^2 - 2ax + r^2 - f^2}$; enfin, au lieu de $\frac{f^2}{a}$, mettez p, et au lieu de $a + \frac{r^2}{a} - p$, mettez q, et vous aurez $z^2 = \frac{2pxz + pr^2}{q - 2x}$, et en résolvant cette équation, $z = \frac{px + \sqrt{p^2x^2 - 2pr^2x + pqr^2}}{q - 2x}$. Ainsi z est connu; c'est-à-dire que l'on connaît CD, et par conséquent, le point D de concours du rayon réfracté BD avec l'axe ACD.

J'ai supposé ici que les rayons incidens étaient divergens, et

(*) Il est bien important de remarquer que x désigne ici une quantité indéterminée, mais nullement une inconnue, et que du moment où la position du point B sera fixée, x ou CG sera déterminé, il n'y a donc de véritablement inconnue que z ou CD.

Digitized by Google

passaient dans un milieu plus dense; si au contraire ils étaient convergens et passaient d'un milieu plus dense dans un plus rare, la marche serait encore la même, en ayant égard toutefois à la différence des conditions.

PROBLÊME XXXII.

Un cône étant coupé par un plan quelconque, trouver la figure de la section.

(*Pl.* IV, *Fig.* 1 et 2). Soient, le cône ABC appuyé sur une base circulaire BC; IEM la section cherchée; $KILM$ une autre section quelconque parallèle à la base, et qui rencontre la première section en IH; et ABC une troisième section perpendiculaire aux deux premières, et qui les rencontre, l'une en EH, l'autre en KL, et coupe le cône selon le triangle ABC. Prolongez EH jusqu'à ce qu'elle rencontre AK en un point D, et ayant mené EF et DG parallèles à KL, jusqu'à ce qu'elles rencontrent AB et AC en F et en G, faites $EF = a$, $DG = b$, $ED = c$, $EH = x$, et $HI = y$. A cause des triangles semblables EHL, EDG, on a la proportion, $ED : DG :: EH : HL = \frac{bx}{c}$. Et à cause des triangles semblables DEF et DHK, on a encore $DE : EF :: DH(c-x)$ pour la première Fig. et ($c+x$ pour la seconde) : $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$. Maintenant, comme la section KIL a été faite parallèle à la base, elle est nécessairement un cercle, et on a, $HK \times HL = \overline{HI}^2$; c'est-à-dire, $\frac{ab}{c} \cdot x \mp \frac{ab}{c^2} \cdot x^2 = y^2$. Cette équation exprime la

Digitized by Google

relation entre EH (x) et HI (y); c'est-à-dire entre l'axe et l'ordonnée de la section $EIDM$; et comme l'équation est celle de l'ellipse pour la première Figure, et celle de l'hyperbole pour la seconde, il s'en suit que la section est une ellipse ou une hyperbole.

Si ED ne peut jamais rencontrer AK, ce qui arrive dans le cas où elle lui est parallèle, alors $HK = EF$ (a), et par conséquent $HK \times HL \left(\frac{ab}{c} \cdot x\right) = y^2$, équation à la parabole.

PROBLÊME XXXIII.

Si une droite XY, éloignée de l'axe AB de la quantité CD, et ayant une inclinaison connue sur le plan DCB, fait une révolution autour de l'axe AB, et que le solide $PQRVTS$ qu'elle engendrera par cette révolution, soit coupé par un plan quelconque $INQLK$; on demande quelle sera la figure de la section.

(*Pl.* IV, *Fig.* 3). Soit BHQ, ou GHO l'inclinaison de l'axe AB sur le plan de la section, et L un point quelconque de rencontre de la droite XY avec ce même plan. Menez DF parallèlement à AB, et du point L abaissez sur AB la perpendiculaire LG; et sur DF la perpendiculaire LF; et sur HO la perpendiculaire LM. Ensuite tirez MG et FG. Faites $CD = a$, $CH = b$, $MH = x$, et $ML = y$. Actuellement, comme l'angle GHO est donné, supposons que $MH : HG :: d : e$, on aura, $HG = \frac{ex}{d}$, et..... $b + \frac{ex}{d} = GC$ ou FD. En outre, à cause de l'angle connu LDF, (l'angle LDF est connu, parce que l'inclinaison de la droite XY sur le plan $GCDF$ est donnée). Supposons que $FD : FL :: g : h$, on aura, $FL = \frac{hb}{g} + \frac{hex}{dg}$. Au quarré de FL ajoutez le quarré

Digitized by Google

de FG, ou celui de DC, ou a^2, et il viendra, $\overline{GL}^2 = a^2 + \frac{b^2h^2}{g^2} + \frac{2beh^2x}{dg^2} + \frac{e^2h^2x^2}{d^2g^2}$. De $\overline{GL}^2$ retranchez $\overline{MG}^2$ ($\overline{MH}^2 - \overline{GH}^2$), ou $x^2 - \frac{e^2x^2}{d^2}$, et il restera, $\frac{a^2g^2 + b^2h^2}{g^2} + \frac{2beh^2}{dg^2} . x + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\left(\frac{h^2e^2 - d^2g^2 + e^2g^2}{d^2g^2}\right) x^2 = \overline{ML}^2 = y^2$. Équation qui exprime le rapport de x à y, c'est-à-dire, le rapport de l'axe MH de la section à l'ordonnée ML. Et comme x et y ne montent pas dans cette équation au-delà de deux dimensions, il s'en suit que $INQLK$ est une section conique. Ce sera une ellipse, si l'angle MHG est plus grand que l'angle LDF; si au contraire il est plus petit, ce sera une hyperbole; et s'il lui est égal, ce sera une parabole; et si les deux points C et H se confondent, la section sera un parallélogramme. (45).

PROBLÊME XXXIV.

Si on élève sur une droite AF une perpendiculaire AD d'une longueur donnée, et qu'une jambe ED de l'équerre DEF passe sans cesse par le point D, tandis que l'autre jambe EF, égale à AD, glisse sur AF, il s'agit de trouver la courbe HIC que décrira pendant ce mouvement le point C, milieu de la droite EF.

(*Pl.* IV, *Fig.* 4). Soient, EC ou $CF = a$, la perpendiculaire $CB = y$, et $AB = x$. A cause des triangles semblables FBC, FEG, on aura, $BF(\sqrt{a^2 - y^2}) : BC + CF(y + a) :: EF(2a) : EG + GF(AG + GF)$ ou AF. Ainsi, $\frac{2ay + 2a^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} = AF = AB +$

Digitized by Google

$BF = x + \sqrt{a^2 - y^2}$. Et en multipliant chaque membre par $\sqrt{a^2 - y^2}$, on a, $2ay + 2a^2 = a^2 - y^2 + x\sqrt{a^2 - y^2}$, ou bien, $2ay + a^2 + y^2 = x\sqrt{a^2 - y^2}$. Et en divisant chaque membre par $\sqrt{a + y}$, ensuite quarrant et ordonnant, on a, (46).....

$$y^3 + 3ay^2 \begin{matrix} + 3a^2 \\ + x^2 \end{matrix} \left\{ y \begin{matrix} + a^3 \\ - ax^2 \end{matrix} \right. = 0.$$

Le même d'une autre manière.

(*Pl.* IV, *Fig.* 5). Prolongez BC de part et d'autre, en faisant BI et CK égales à CF, et menez KF, HI, HC et DF. Les droites HC et DF rencontreront AF et KI en M et en N. Ensuite du point I abaissez sur HC la perpendiculaire IL, et vous aurez l'angle $K = \frac{1}{2} BCF = \frac{1}{2} FGE = GFD = AMH = MHI = CIL$. (47). Ainsi les triangles rectangles KBF, FBN, HLI et ILC sont semblables. Faites donc $FC = a$, $HI = x$, et $IC = y$, et vous aurez, $BN(2a - y) : BK(y) :: LC : LH :: \overline{CI}^2(y^2) : \overline{HI}^2(x^2)$. (48). Par conséquent $2ax^2 - yx^2 = y^3$. On voit facilement par cette équation, que la courbe dont il s'agit est la cissoïde des anciens; que le cercle dont elle dépend a pour centre le point A, et pour rayon AH. (49).

Digitized by Google

PROBLÊME XXXV.

Si une droite ED, d'une longueur connue, et soutendant un angle donné EAD, se meut dans cet angle de manière que ses extrémités D et E touchent sans cesse les côtés AD et AE de l'angle; on demande de déterminer l'espèce de courbe FCG que décrit le point C de la droite DE pendant ce mouvement.

(*Pl.* IV, *Fig.* 6). Du point donné C menez à EA la parallèle CB; et faites $AB = x$, $BC = y$, $CE = a$, $CD = b$; et à cause des triangles semblables DCB, DEA, on a, $EC : AB :: CD : DB$, c'est-à-dire, $a : x :: b : BD = \frac{bx}{a}$. Qu'on abaisse ensuite la perpendiculaire CH, et à cause de l'angle donné DAE ou DBC, on connaîtra le rapport des côtés du triangle rectangle BCH. Soit donc $BC : BH :: a : e$, d'où $BH = \frac{ey}{a}$. Et en retranchant BH de BD, le reste est $DH = \frac{bx - ey}{a}$. Maintenant, dans le triangle rectangle BCH, on a, $\overline{BC}^2 - \overline{BH}^2 = \overline{CH}^2$, ou bien..... $y^2 - \frac{e^2y^2}{a^2} = \overline{CH}^2$. De même dans le triangle rectangle CHD, on a, $\overline{CD}^2 - \overline{CH}^2 = \overline{HD}^2$, ou bien, $b^2 - y^2 + \frac{e^2y^2}{a^2} = \overline{DH}^2 = \ldots$ $\left(\frac{bx - ey}{a}\right)^2 = \frac{b^2x^2 - 2bexy + e^2y^2}{a^2}$, et en réduisant..... $y^2 = \frac{2be}{a^2} . yx + \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$; et comme dans cette équation les inconnues sont seulement de deux dimensions, il est évident que la courbe ne peut être qu'une section conique. Si on dégage la valeur de y, on a, $y = \frac{bex \pm b\sqrt{ex^2 - a^2x^2 + a^4}}{a^2}$. On voit que le

Digitized by Google

coëfficient de x^2 sous le radical est $e^2 - a^2$, et comme on a, $a : e :: BC : BH$, et que BC est nécessairement plus grande que BH, puisqu'elle est hypothénuse d'un triangle rectangle dont BH est un côté, il s'en suit que a est plus grand que e, et que par conséquent $e^2 - a^2$ est une quantité négative; donc la courbe est une ellipse. (50).

PROBLÊME XXXVI.

Si une équerre EBD se meut de manière qu'une de ses jambes EB ne cesse pas d'être la soutendante de l'angle droit EAB, tandis que l'extrémité D de l'autre jambe BD décrit une courbe FDG, on demande de déterminer cette courbe.

(*Pl.* IV, *Fig.* 7). Du point D abaissez la perpendiculaire DC sur le côté AC; et ayant fait $AC = x$, $DC = y$, $EB = a$, et $BD = b$, vous aurez, à cause du triangle BDC rectangle en C, $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2 = b^2 - y^2$. Donc $BC = \sqrt{b^2 - y^2}$, et..... $AB = x - \sqrt{b^2 - y^2}$. En outre, à cause des triangles rectangles semblables BEA, DBC, on a, $BD : DC :: BE : AB$, ou bien, $b : y :: a : x - \sqrt{b^2 - y^2}$. Donc, $bx - b\sqrt{b^2 - y^2} = ay$, ou bien, $bx - ay = b\sqrt{b^2 - y^2}$, et en élevant chaque membre au quarré, et réduisant, $y^2 = \frac{2abxy + b^4 - b^2x^2}{a^2 + b^2}$, et en résolvant cette dernière équation, on a enfin, $y = \frac{abx \pm b^2\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}{a^2 + b^2}$. Par où l'on voit que la courbe est encore une ellipse. (*).

(*) J'ai déjà indiqué dans la note 50e sur le problême précédent les

(*Pl.* IV,

Digitized by Google

(*Pl.* IV, *Fig.* 8). On vient de voir comment se détermine la nature de la courbe lorsque EBD et EAB sont droits. Mais si ces angles sont d'une grandeur quelconque, pourvu qu'ils soient égaux, voici comment il faut procéder. Abaissez, comme auparavant, sur AC la perpendiculaire DC, et menez DH de manière qu'elle fasse un angle DHA égal à l'angle HAE, c'est-à-dire obtus. Et continuant à appeler EB, a; BD, b; AH, x; faites $HD = y$. Et à cause des triangles semblables EAB, BHD, vous aurez, $BD : DH :: BE : AB$, ou, $b : y :: a : AB = \frac{ay}{b}$; retranchez AB de AH, et le reste sera, $BH = x - \frac{ay}{b}$. Maintenant, comme tous les angles sont connus dans le triangle DHC,

---

caractères auxquels on reconnaît qu'une équation du second degré appartient à l'ellipse. En général une équation du second degré à deux variables x et y représentant toujours l'une quelconque des sections coniques, si vous voulez savoir à laquelle elle appartient, examinez si le quarré du coëfficient du terme xy moins le quadruple du produit des coëfficiens des deux quarrés x^2 et y^2, donne un résultat égal à zéro, ou à une quantité négative, ou à une quantité positive; dans le premier cas, l'équation appartient à une parabole; dans le second, à une ellipse; dans le troisième, à une hyperbole. Consultez là-dessus l'application de l'Algèbre à la Géométrie de Bezout, ou celle du Cⁿ Bossut, *ou l'exposition d'une méthode de construire les équations indéterminées du second degré*, du Cⁿ Prony (je cite les Ouvrages qui me paraissent les meilleurs et les plus répandus). Ainsi, pour savoir à quelle section appartient l'équation..... $y^2 = \frac{2abxy + b^4 - b^2x^2}{a^2 + b^2}$, je l'écris sous cette forme..... $(a^2 + b^2)y^2 - 2ab.xy + b^2x^2 - b^4 = 0$, et je fais $(2ab)^2 - 4b^2(a^2 + b^2)$, ce qui donne $4a^2b^2 - 4a^2b^2 - 4b^4$, quantité qui se réduit à $-4b^4$, donc l'équation appartient à l'ellipse.

Digitized by Google

le rapport des côtés est aussi connu. Supposez donc que HD est à HC dans une raison connue quelconque, par exemple, comme b est à e, et à cause de $DH = y$, vous aurez, $HC = \frac{ey}{b}$, et..... $HB \times HC = \frac{exy}{b} - \frac{aey^2}{b^2}$. Ensuite, par la 12e prop. du deuxième liv. des Elémens, le triangle BHD donne, $\overline{BD}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{DH}^2 + 2BH \times HC$, ou bien, $b^2 = x^2 - \frac{2axy}{b} + \frac{a^2y^2}{b^2} + y^2 + \frac{2exy}{b} - \frac{2aey^2}{b^2}$, et en tirant de cette équation la valeur de x, il vient, $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{e^2y^2 - b^2y^2 + b^4}}{b}$, et comme b est plus grand que e, $e^2 - b^2$ est une quantité négative; il est donc évident que la courbe est encore une ellipse.

PROBLÊME XXXVII.

Les droites PD et BD dont la raison est donnée, étant menées, comme on voudra, dans l'angle connu PAB, avec la condition que BD soit toujours parallèle à AP, et que PD se termine toujours au point P donné de position sur la droite AP; on demande de trouver le lieu du point D, intersection des deux droites.

(*Pl.* IV, *Fig.* 9). Menez CD parallèlement à AB, et DE perpendiculairement à AP; ensuite faites $AP = a$, $CP = x$, et $CD = y$; soit de plus le rapport de BD à DP, comme celui de d à e, et vous aurez, AC ou $BD = a - x$, et $PD = \frac{ea - ex}{d}$. Soit en outre, à cause de l'angle donné DCE, le rapport de CD à CE, comme celui de d à f, ce qui donnera, $CE = \frac{fy}{d}$, d'où

Digitized by Google

$EP = x - \frac{fy}{d}$. Et comme les angles en E sont droits.....

$\overline{CD}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{DE}^2 = \overline{DP}^2 - \overline{EP}^2$. Ou en mettant les valeurs analytiques, $y^2 - \frac{f^2y^2}{d^2} = \frac{e^2a^2 - 2ae^2x + e^2x^2}{d^2} - x^2 + \frac{2fxy}{d} - \frac{f^2y^2}{d^2}$. Et en effaçant de part et d'autre, $-\frac{f^2y^2}{d^2}$, et ordonnant, il vient, $y^2 = \frac{2fxy}{d} + \frac{e^2a^2 - 2e^2ax + e^2x^2 - d^2x^2}{d^2}$, et en résolvant l'équation pour avoir la valeur de y, $y = \frac{fx \pm \sqrt{e^2a^2 - 2e^2ax \left\{ \begin{matrix} + e^2 \\ - d^2 \\ + f^2 \end{matrix} \right\} x^2}}{d}$. Or comme dans l'avant-dernière équation les inconnues x et y ne s'élèvent pas au-delà de deux dimensions, il s'en suit que le lieu du point D est à une section conique, et que cette section est une hyperbole, ou une ellipse, ou une parabole, selon que $e^2 - d^2 + f^2$, coëfficient de x^2 dans la dernière équation, est plus grand ou plus petit que zéro, ou lui est égal.

PROBLÊME XXXVIII.

Si les deux droites VE et VC données de position, sont coupées d'une manière quelconque en C et en E, par une droite PE tournant sur le point P donné de position, et si la portion interceptée CE de cette droite est coupée en deux parties CD et DE en raison donnée; on demande de trouver le lieu du point D.

(*Pl.* V, *Fig.* 1). Tirez VP, et parallèlement à cette droite menez DA et EB, qui rencontreront VC en A et en B. Faites $VP = a$, $VA = x$ et $AD = y$, et comme le rapport de CD à DE est donné, il s'en suit que le rapport de CD à CE est aussi connu,

Digitized by Google

et par conséquent celui de DA à EB. Soit donc ce rapport comme celui de d à e, et on aura, $EB = \frac{ey}{d}$. En outre, comme l'angle EVB est donné, la raison de EB à VB l'est aussi. Soit cette raison comme celle de e à f, et on aura, $VB = \frac{fy}{d}$. Enfin, à cause des triangles semblables CEB, CDA, CPV, on a cette suite de rapports égaux, $EB : CB :: DA : CA :: VP : VC$; et en ajoutant, $EB + VP : CB + VC :: DA + VP : CA + VC$, c'est-à-dire, $\frac{ey}{d} + a : \frac{fy}{d} :: y + a : x$; et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on aura, $exy + adx = fy^2 + fay$. Equation où les quantités inconnues x et y ne s'élèvent qu'à deux dimensions. Il s'en suit donc que la courbe VD, dans laquelle se trouve le point D, est une section conique; et c'est une hyperbole, parce que l'une des deux indéfinies x n'est que d'une dimension, et que dans le terme exy elle se trouve multipliée par l'autre indéfinie y (*).

(*) On voit par ce qui a été dit dans la note qui est au bas de la page 184[c], que l'équation $exy + adx = fy^2 + fay$, appartient à l'hyperbole. En effet, écrivons-la ainsi : $fy^2 - exy + fay - adx = 0$. Comme x^2 ne se trouve pas dans cette équation, il est censé multiplié par zéro ; la formule, pour reconnaître le caractère de la courbe, devient donc, $e^2 - 4f \times 0$, qui se réduit à e^2, quantité toujours positive : donc la section est une hyperbole.

Digitized by Google

PROBLÊME XXXIX.

Si de deux points donnés de position A et B, on mène à un troisième point quelconque C deux droites AC, BC qui soient entre elles dans un rapport quelconque, on demande de trouver le lieu du point de concours C.

(*Pl.* V, *Fig.* 2). Joignez les points A et B, et sur la droite AB, abaissez la perpendiculaire CD; faites $AB = a$, $DC = y$ et $AD = x$, vous aurez $AC = \sqrt{x^2 + y^2}$; $BD = a - x$, et..... $BC = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2}$. Maintenant, le rapport de AC à BC étant donné, supposons qu'il soit comme celui de d à e; la proportion étant faite, et ensuite le produit des extrêmes et celui des moyens, nous aurons, $e\sqrt{x^2 + y^2} = d\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2}$, ce qui donne en résolvant, $y = \sqrt{\frac{d^2 a^2 - 2 d^2 a x}{e^2 - d^2} - x^2}$, équation où l'on voit que x^2 est négative, et n'a de coëfficient que l'unité, et comme de plus l'angle ADC est droit, il s'en suit que la courbe où sont les lieux du point C est un cercle; et si l'on prend sur la droite AB les points E et F, de manière qu'on ait la proportion $d : e :: AE : BE :: AF : BF$, la droite EF sera le diamètre du cercle (51).

Il est facile de voir par la converse de ce théorême, que si l'on prolonge jusqu'à l'infini le diamètre EF d'un cercle quelconque, et que sur ce diamètre ainsi prolongé, on prenne deux points A et B tels, qu'on ait toujours $AE : AF :: BE : BF$, et que de ces deux points on mène à un même point C de la circonférence du

Digitized by Google

cercle les droites AC, BC, elles seront dans le même rapport que AE et BE.

PROBLÊME XL.

Si un point lumineux A envoie des rayons vers une surface plane réfringente CD, on demande de trouver le rayon AC, dont le réfracté CB, irait frapper le point B.

(*Pl.* V, *Fig.* 3). Du point lumineux menez une perpendiculaire AD sur la surface réfringente : cette perpendiculaire étant prolongée de part et d'autre, rencontrera en E le rayon réfracté BC, et en F la perpendiculaire abaissée du point B. Tirez BC, et faites $AD = a$, $DB = b$, $DC = x$ et $BF = c$; supposez de plus le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, ou ce qui est la même chose, du sinus de l'angle CAD, au sinus de l'angle CED, comme $d : e$; mais EC et AC sont aussi dans le même rapport; et de plus, AC étant égal à $\sqrt{a^2 + x^2}$, il en résulte que $EC = \frac{d}{e}\sqrt{a^2 + x^2}$. Outre cela, $ED = \sqrt{\overline{EC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{\frac{d^2a^2 + d^2x^2}{e^2} - x^2}$; et..... $DF = \sqrt{b^2 - c^2}$; par conséquent, $EF = \sqrt{b^2 - c^2} + \sqrt{\frac{d^2a^2 + d^2x^2}{e^2} - x^2}$. Enfin à cause des triangles semblables ECD, EBF, on a, $ED : DC :: EF : FB$, et en substituant à la place de ces quantités leurs valeurs analytiques, et faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on a, $c\sqrt{\frac{d^2a^2 + d^2x^2}{e^2} - x^2} = x\sqrt{b^2 - c^2} + x\sqrt{\frac{d^2a^2 + d^2x^2}{e^2} - x^2}$, ou bien $(c - x)\sqrt{\frac{d^2a^2 + d^2x^2}{e^2} - x^2} = x\sqrt{b^2 - c^2}$, et en quarrant

Digitized by Google

chaque membre et ordonnant.....

$$x^4 - 2cx^3 + \frac{\left.\begin{matrix} d^2c^2 \\ +d^2a^2 \\ -c^2b^2 \end{matrix}\right\} x^2 - 2d^2a^2cx + d^2a^2c^2}{d^2 - c^2} = 0 \text{ (*)}.$$

PROBLÊME XLI.

Trouver le lieu du sommet D d'un triangle dont la base AB est donnée, et dont les deux angles DAB, DBA sur cette base, ont une différence donnée.

(*Pl.* V, *Fig.* 4). Lorsque l'angle du sommet est donné, ou ce qui est la même chose, lorsque la somme des deux angles sur la base est donnée, Euclide a démontré (liv. III, prop. 29) que l'angle du sommet était dans une circonférence de cercle. Nous demandons ici, de trouver le lieu de l'angle du sommet, lorsque la différence des angles sur la base est donnée. Soit l'angle DBA plus grand que l'angle DAB, et soit l'angle ABF leur différence; la droite BF rencontrant AD en F. De plus, du point D soient abaissées sur BF et AB les perpendiculaires DE et DC; cette dernière rencontrera BF en un point G. Je fais $AB = a$, $AC = x$, $CD = y$, ainsi j'aurai $BC = a - x$. Actuellement dans le triangle BCG tous les angles étant connus, on a le rapport des côtés BC et CG; soit ce rapport comme celui de d à a, et il viendra $CG = \frac{a^2 - ax}{d}$. De DC ou y retranchez CG, le reste sera $DC - CG$ ou.....

(*) Le lecteur trouvera au dernier chapitre de cet Ouvrage une méthode générale de construire les équations du troisième et du quatrième degrés; il pourra aussi consulter le supplément qui se trouve à la fin des notes.

Digitized by Google

$DG = \frac{dy - a^2 + ax}{d}$. En outre, à cause des triangles semblables BGC, DGE, on a, $BG : BC :: DG : DE$. Or, dans le triangle BGC, on a, $a : d :: GC : BC$. Donc $a^2 : d^2 :: \overline{GC}^2 : \overline{BC}^2$, et en composant, $a^2 + d^2 : d^2 :: \overline{BG}^2 : \overline{BC}^2$, et en tirant les racines, $\sqrt{a^2 + d^2} : d :: BG : BC :: DG : DE$. Donc $DE = \frac{d.DG}{\sqrt{a^2 + d^2}}$, ou en mettant pour DG sa valeur trouvée plus haut, on a..... $DE = \frac{dy - a^2 + ax}{\sqrt{a^2 + d^2}}$. D'un autre côté, comme l'angle ABF est la différence des angles BAD et ABD, et que par conséquent, BAD et FBD sont égaux, il en résulte que les triangles rectangles DCA, DBE sont semblables, et leurs côtés proportionnels. Donc $DA : DC :: DB : DE$; mais $DC = y$, $DA = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{DC}^2} =$..... $\sqrt{x^2 + y^2}$, $DB = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}$, et nous avons trouvé plus haut que la valeur de DE était..... $\frac{dy - a^2 + ax}{\sqrt{a^2 + d^2}}$; ainsi notre proportion devient..... $\sqrt{x^2 + y^2} : y :: \sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2} : \frac{dy - a^2 + ax}{\sqrt{a^2 + d^2}}$, et en faisant le produit des extrêmes, et celui des moyens, et quarrant chaque membre de l'équation, on aura, $a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 + y^4 =$

$$\frac{d^2x^2y^2 + d^2y^4 - 2a^2dx^2y - 2a^2dy^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4x^2 + a^4y^2 - 2a^3x^3 - 2a^3xy^2 + a^2x^4 + a^2x^2y^2}{a^2 + d^2}.$$

Multipliez chaque membre par $a^2 + d^2$, ordonnez les produits selon les puissances de x, et il viendra.....

$$x^4 \begin{matrix} -2a \\ +\frac{2dy}{a} \end{matrix} \left\{ x^3 \begin{matrix} -2dy \\ +a^2 \end{matrix} \left\{ x^2 \begin{matrix} +\frac{2dy^3}{a} \\ +\frac{2d^2y^2}{a} \end{matrix} \right\} x \begin{matrix} -d^2y^2 \\ -2dy^3 \\ -y^4 \end{matrix} \right. = 0.$$ Cette équation

est

est divisible par $x^2 - ax \begin{smallmatrix} + dy \\ + y^2 \end{smallmatrix} = 0$, et donne pour quotient...

$x^2 \begin{smallmatrix} - a \\ + \frac{2dy}{a} \end{smallmatrix} \left\{ x \begin{smallmatrix} - y^2 \\ - dy \end{smallmatrix} \right. = 0$. Ainsi nous avons trouvé pour la solution de ce problême deux équations : la première, $x^2 - ax \begin{smallmatrix} + dy \\ + y^2 \end{smallmatrix} = 0$, nous fait voir que le lieu du point D est dans la circonférence d'un cercle, lorsque l'angle DBF est situé d'une autre manière qu'il ne l'est dans notre figure. Par exemple, lorsque l'angle ABF, au lieu d'être comme dans le problême, égal à la différence des angles sur la base, est égal à leur somme. Il est clair que dans ce cas l'angle D est donné (52). La deuxième équation $x^2 \begin{smallmatrix} - a \\ + \frac{2dy}{a} \end{smallmatrix} \left\{ x \begin{smallmatrix} - y^2 \\ - dy \end{smallmatrix} \right. = 0$ appartient à l'hyperbole. C'est l'équation qui a lieu dans le cas de notre Figure; c'est-à-dire, que dans le cas où l'angle FBD est situé comme nous l'avons supposé, et que l'angle ABF est la différence des angles sur la base, le lieu du point D est dans une hyperbole. Et voici de quelle manière on déterminera cette courbe : coupez AB en deux parties égales en P, menez PQ de manière qu'elle fasse un angle BPQ égal à la moitié de l'angle ABF; par le point P, menez PR perpendiculairement à PQ, et les deux droites PQ et PR seront les asymptotes, et le point B un des points de l'hyperbole (53). De-là on tire ce théorême :

Si dans une hyperbole rectangulaire on mène un diamètre quelconque AB, et que des extrémités de ce diamètre on tire à deux points quelconques D et H de la courbe, des droites AD, BD;

Digitized by Google

AH, BH, ces droites formeront, aux extrémités du diamètre, des angles DAH, DBH égaux.

Le même d'une manière plus courte.

J'ai donné, dans le problême XXIV, une règle sur la manière de choisir les termes les plus propres à commencer le calcul, toutes les fois qu'il y a ambigüité. Par exemple, dans le problême actuel la différence des angles sur la base n'est pas une condition assez distincte. En effet, je l'ai retranchée du plus grand, mais je pouvais également l'ajouter au plus petit, en menant par le point A une droite parallèlement à BF. Cette différence se comporte donc de la même manière à l'égard des deux angles. Je ne l'emploierai donc ni par addition, ni par soustraction; mais prenant sa moitié, je l'ajouterai à l'un et la retrancherai de l'autre. Ensuite, comme on trouve encore ambigüité en prenant pour abscisse soit BC, soit AC, je n'emploierai ni l'une ni l'autre; mais coupant BA en deux parties égales en P, je prendrai pour abscisse PC; ou plutôt menant MPQ (*Pl. V, Fig.* 5) qui fera de part et d'autre les angles APQ, BPM égaux chacun à la moitié de la différence des angles sur la base, cette droite MPQ fera de plus, avec les droites DA, DM, les angles DQP, DMP égaux. (54). Je mène sur MQ les perpendiculaires AR, BN, DO. Je prends DO pour l'ordonnée, et PO pour l'abscisse. Je fais donc $PO = x$, $DO = y$, AR ou $BN = b$, et PR ou $PN = c$, et à cause des triangles semblables BNM, DOM, on aura, $BN : DO :: MN : MO$. Et en retranchant, $DO - BN (y - b) : DO (y) :: MO - MN$ ou..... $ON (c - x) : MO = \frac{cy - xy}{y - b}$. De même, à cause des triangles

Digitized by Google

semblables ARQ, DOQ, on a, $AR : DO :: RQ : QO$, et en ajoutant, $DO + AR\ (y + b) : DO\ (y) :: QO + QR\ (OR$ ou $x + c) : QO = \frac{cy + xy}{y + b}$. Enfin, à cause des angles égaux DMQ, DQM, on a, $MO = QO$, et par conséquent, $\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}$; divisant tout par y, et multipliant par les dénominateurs, il viendra, $cy + cb - xy - bx = cy - cb + xy - bx$. Ou bien, $cb = xy$, équation très-connue de l'hyperbole rapportée aux asymptotes.

Il eût été même facile de déterminer le lieu du point D sans aucun calcul algébrique. En effet nous avons trouvé plus haut $DO - BN : ON :: DO : MO\ (OQ) :: DO + AR : OR$. C'est-à-dire, $DO - BN : DO + BN :: ON : OR$. Et en ajoutant, et retranchant les termes de chaque rapport..... $DO : BN :: \frac{ON + OR}{2}\ (NP) : \frac{OR - ON}{2}\ (OP)$. D'où l'on tire, $DO \times OP = BN \times NP$. (55).

PROBLÊME XLII.

Trouver le lieu du sommet d'un triangle dont la base est donnée, et dont les deux angles sur cette base sont tels, que l'un est plus grand que le double de l'autre, d'un angle donné.

(*Pl.* V, *Fig.* 5). Soient, ABD ce triangle, AB sa base coupée en deux parties égales au point P, APQ ou BPM le tiers de l'angle donné, c'est-à-dire le tiers de l'angle qui est égal à l'excès de DBA sur le double de DAB; et l'angle DMQ sera double de DQM. (56). Menez à MQ les perpendiculaires AR, BN, DO;

Digitized by Google

coupez en deux parties égales l'angle DMQ, par la droite MS qui rencontrera DO en S, et les triangles rectangles DOQ, SOM seront semblables; ainsi vous aurez, $OQ : OM :: DO : OS$. Et en soustrayant, $OQ - OM : OM :: DO - OS : OS :: DS : OS :: DM : OM$. (57). Donc $OQ - OM : OM :: DM : OM$, donc $OQ - OM = DM$. Actuellement, faites $PO = x$, $OD = y$, AR ou $BN = b$, et PR ou $PN = c$, et vous aurez, comme dans le problême précédent, $OM = \frac{cy - xy}{y - b}$, et $OQ = \frac{cy + xy}{y + b}$. Par conséquent, $OQ - OM = \frac{-2bcy + 2xy^2}{y^2 - b^2}$. D'un autre côté, $\overline{DO}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{DM}^2$, ou bien, $y^2 + \frac{c^2y^2 - 2cxy^2 + x^2y^2}{y^2 - 2by + b^2} = \ldots\ldots$ $\frac{4b^2c^2y^2 - 8bcxy^3 + 4x^2y^4}{y^4 - 2b^2y^2 + b^4}$. (*). Et en réduisant et ordonnant, par rapport à y, on aura, $y^4 * \begin{matrix} + c^2 \\ - 2b^2 \\ - 2cx \\ - 3x^2 \end{matrix} \Bigg\{ y^2 \begin{matrix} + 2bx^2 \\ + 4bcx \\ + 2bc^2 \end{matrix} \Bigg\{ y \begin{matrix} + b^4 \\ - 3b^2c^2 \\ - 2b^2cx \\ + b^2x^2 \end{matrix} = 0$. Et en divisant toute l'équation par $y - b$, elle deviendra, $\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y^3 + by^2 \begin{matrix} - b^2 \\ + c^2 \\ - 2cx \\ - 3x^2 \end{matrix} \Bigg\{ y \begin{matrix} - b^3 \\ + 3bc^2 \\ + 2bcx \\ - bx^2 \end{matrix} = 0$. Ainsi le point D est à une courbe de trois dimensions, qui devient cependant une hyperbole, lorsque

(*) Le premier membre de cette équation provient de la substitution des valeurs analytiques dans l'équat. $\overline{DO}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{DM}^2$. Quant au second membre, nous avons vu plus haut que $OQ - OM = DM$. Donc $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(OQ - OM)^2 = \left(\frac{-2bcy + 2xy^2}{y^2 - b^2}\right)^2 = \overline{DM}^2$, et c'est-là le second membre de l'équation.

Digitized by Google

l'angle BPM est nul, c'est-à-dire lorsque l'un des deux angles sur la base DBA, par exemple, est simplement double de l'autre DAB. (58). Car alors BN ou b s'évanouit, et l'équation se réduit à $y^2 = 3x^2 + 2cx - c^2$.

De la construction de cette équation, on déduit le théorême suivant.

(*Pl.* V, *Fig.* 6). Si on prend C pour centre, et pour asymptotes les droites CS, CT, qui forment un angle SCT de 120°, et qu'on décrive une hyperbole DV dont les demi-axes soient CV, CA; qu'on prolonge CV jusqu'en B, de manière que $VB = VC$; et que des points A et B on tire les droites BD, AD qui aillent concourir en un point D quelconque de l'hyperbole, on aura l'angle $BAD = \frac{1}{2} ABD$; et $BAD = \frac{1}{3} ADE$. C'est-à-dire que BAD égale le tiers de l'angle formé par AD, et par le prolongement de BD. Ce résultat n'a lieu que pour les points D de l'hyperbole qui passe par le point V; car si des points A et B on mène à l'hyperbole conjuguée qui passe par A, les droites Bd, Ad, alors des deux angles extérieurs au triangle sur la base, celui qui est en B est double de celui qui est en A (59).

PROBLÊME XLIII.

Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et touche une droite donnée de position.

(*Pl.* V, *Fig.* 7). Soient A et B les points donnés, et EF la droite donnée de position. On demande de faire passer un cercle ABE par ces points, et qui touche en même temps la droite EF. Joignez A et B par une droite AB que vous couperez en deux parties

Digitized by Google

égales au point D; par ce point élevez sur AB la perpendiculaire DF, qui rencontrera la droite EF en un point F, et le centre du cercle se trouvera sur quelque point de DF, supposons qu'il soit en C. Joignez C et B par une droite; du point C abaissez sur FE la perpendiculaire CE, et E sera le point de tangence de la droite EF et du cercle, et les droites CB, CE seront égales entre elles, comme étant chacune un rayon du cercle cherché. Maintenant les points A, B, D et F étant donnés ou connus, faites $DB = a$, $DF = b$; et pour déterminer le centre du cercle, cherchez DC que vous appellerez x. Dans le triangle CDB, à cause de l'angle droit en D, vous aurez, $\sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{CD}^2}$, ou $\sqrt{a^2 + x^2} = CB$. De plus, $DF - DC$, ou $b - x = CF$. Et dans le triangle rectangle CFE, tous les angles étant connus, le rapport des côtés CF et CE est aussi connu. Soit ce rapport celui de d à e, on aura, $CE = \frac{e}{d} \times CF$, ou $CE = \frac{be - ex}{d}$. Et en égalant entre elles les droites CB et CE, comme étant chacune le rayon du cercle cherché, il viendra l'équation $\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{be - ex}{d}$. Quarrant chaque membre, et multipliant par d^2, on aura, $a^2 d^2 + d^2 x^2 = b^2 e^2 - 2be^2 x + e^2 x^2$, ou, en résolvant cette équation,..... $x = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2 e^2 + a^2 e^2 - a^2 d^2}}{d^2 - e^2}$. (60). On connaît donc la longueur de DC, et par conséquent le centre C; ainsi, que du point C, et avec une ouverture de compas égale à CB, on décrive un cercle, il passera par les points A et B, et touchera la droite FE.

Digitized by Google

PROBLÊME XLIV.

Décrire un cercle qui passe par un point donné, et touche deux droites données de position.

(*Pl.* V, *Fig.* 8). Soient, A le point donné, EF, FG les deux droites données de position, et AEG le cercle cherché qui touche les deux droites, et passe par le point donné A. Partagez par la moitié l'angle EFG, par la droite FC; le centre du cercle se trouvera sur cette droite. Soit le point C ce centre, duquel vous abaisserez sur EF et FG les perpendiculaires CE, CG, et les points E et G seront les points de contingence. Actuellement comme les triangles CEF, CGF ont leurs angles en E et en G droits, et que leurs angles en F sont chacun la moitié de l'angle total EFG, il s'en suit que tous les angles de ces deux triangles sont connus, et par conséquent aussi le rapport des côtés CF et CE ou CG. Soit ce rapport, celui de d à e. Alors, si pour déterminer le centre du cercle, on fait $CF = x$, on aura, CE, ou $CG = \frac{ex}{d}$. En outre, du point A menez sur la droite FC la perpendiculaire AH; et puisque le point A est donné, les droites AH et FH seront aussi données. Appelez respectivement ces deux droites a et b; et de FH, ou b, si vous retranchez FC, ou x, il restera $CH = b - x$; et si au quarré de ce reste $b^2 - 2bx + x^2$, vous ajoutez le quarré de AH, ou a^2, vous aurez, par la quarante-septième proposition du premier livre des Élémens, $\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$, ou $a^2 + b^2 - 2bx + x^2 = \overline{AC}^2$, puisque par hypothèse l'angle AHC est droit. Egalez maintenant entre elles les valeurs des deux rayons AC et CG,

Digitized by Google

ou les quarrés de ces mêmes valeurs, et vous aurez l'équation, $a^2 + b^2 - 2bx + x^2 = \frac{e^2 x^2}{d^2}$. Retranchez de part et d'autre x^2, et changez tous les signes, il viendra, $-a^2 - b^2 + 2bx = x^2 - \frac{e^2 x^2}{d^2}$. Multipliez tout par d^2, ensuite divisez tout par $d^2 - e^2$, et vous obtiendrez, $x^2 - \frac{2bd^2x}{d^2 - e^2} = -\frac{d^2(a^2 + b^2)}{d^2 - e^2}$, et en résolvant..... $x = \frac{bd^2 - d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$. On connaît donc maintenant la longueur de FC, et par conséquent la position du point C qui est le centre du cercle cherché. Si on retranche la valeur de x, ou FC de b, ou HF, il restera, $HC = \frac{-e^2b + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$. Equation absolument la même que celle que nous avons trouvée dans le problême précédent pour déterminer la longueur de DC.

PROBLÊME XLV.

Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et touche un autre cercle donné de position.

(*Pl.* VI, *Fig.* 1). Soient A, B, les deux points donnés; EK le cercle donné de grandeur et de position; F son centre; AEB le cercle cherché, passant par les points A et B, et touchant l'autre cercle; et enfin C le centre du cercle cherché. Ayant tiré par les points A et B une droite indéfinie, des centres C et F abaissez sur cette droite les perpendiculaires CD, FG; ensuite unissez les centres par une droite CF qui passera par le point de contact E des deux cercles. Tirez encore FH parallèlement à DG, et qui rencontrera

CD

Digitized by Google

CD en H. Toutes ces constructions étant faites, appelez AD, ou DB, a; DG, ou HF, b; FG, c; et EF (rayon du cercle donné) d; faites aussi $DC = x$, et vous aurez $CH = CD - FG = x - c$, et $\overline{CF}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{FH}^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2$; et $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = x^2 + a^2$. Ainsi CB, ou $CE = \sqrt{x^2 + a^2}$. A CE ajoutez EF, et vous aurez, $CF = d + \sqrt{x^2 + a^2}$, dont le quarré est..... $d^2 + 2d\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 + x^2$. Égalez cette valeur de $\overline{CF}^2$ à celle qui a déja été trouvée, c'est-à-dire à $x^2 - 2cx + c^2 + b^2$, et ôtant x^2 qui se trouve dans les deux membres, le reste sera, $d^2 + a^2 + 2d\sqrt{x^2 + a^2} = c^2 + b^2 - 2cx$. Transportez dans le second membre, avec un signe contraire, $a^2 + d^2$, et l'équation deviendra, $2d\sqrt{a^2 + x^2} = c^2 + b^2 - a^2 - d^2 - 2cx$. Faites, pour abréger, $c^2 + b^2 - d^2 - a^2 = 2g^2$, et l'équation sera réduite à..... $2d\sqrt{a^2 + x^2} = 2g^2 - 2cx$, ou, en divisant tout par 2, à.... $d\sqrt{a^2 + x^2} = g^2 - cx$, ce qui donne, en quarrant chaque membre, $d^2a^2 + d^2x^2 = g^4 - 2g^2cx + c^2x^2$. Cette équation étant résolue, donne, $x = \frac{-g^2c + \sqrt{g^4d^2 - d^4a^2 + d^2a^2c^2}}{d^2 - c^2}$.

Connaissant x, ou DC de cette manière, coupez la droite AB en deux parties égales au point D, et par ce point élevez sur AB une perpendiculaire $DC = \frac{-g^2c + d\sqrt{g^4 - a^2d^2 + a^2c^2}}{d^2 - c^2}$; ensuite du centre C, avec la distance CA ou CB, décrivez le cercle ABE, il touchera le cercle EK, et passera par les points A et B. C. Q. F. T.

Digitized by Google

PROBLÊME XLVI.

Décrire un cercle qui passe par un point donné, touche un cercle donné, et une droite donnée de position.

(*Pl.* VI, *Fig.* 2). Soient, le cercle cherché BD, son centre C, le point par lequel il doit passer B, la droite qu'il doit toucher AD, le point de contact avec cette droite D, le cercle qu'il doit toucher GEM, le centre de ce dernier cercle F, et le point de contact des deux cercles E. Joignez par des droites les points C, B; C, D; C, F; la droite CD sera perpendiculaire à AD, et CF coupera les deux cercles au point de contact E. Prolongez CD jusqu'en Q, de manière à avoir $DQ = EF$; par le point Q menez à AD la parallèle QN. Enfin des points B et F abaissez sur AD et QN les perpendiculaires BA, FN, et du point C abaissez sur AB et FN les perpendiculaires CK, CL. Les lignes BC, CD et AK étant égales, on a aussi, $BK = BA - AK = BA - BC$; Ainsi $\overline{BK}^2 = \overline{BA}^2 - 2BA \times BC + \overline{BC}^2$. Si l'on retranche $\overline{BK}^2$, ou sa valeur, de $\overline{BC}^2$, il est clair que le reste sera la valeur de $\overline{CK}^2$, par conséquent, $\overline{BC}^2 - \overline{BK}^2$, ou $\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2 + 2BA \times BC - \overline{BC}^2 = \overline{CK}^2$, ou bien, $2BA \times BC - \overline{BA}^2 = \overline{CK}^2$. On trouvera de la même manière que $FN \times (2FC - FN) = \overline{CL}^2$. De la première de ces deux équations on tire, $2BC = \frac{\overline{CK}^2}{AB} + AB$, et de la seconde, $2FC = \frac{\overline{CL}^2}{FN} + FN$. Ainsi appelant AB, a; CK, y; FN, b; KL, c;

Digitized by Google

et CL, $c-y$, nos deux équations deviendront respectivement, $2BC = \frac{y^2}{a} + a$, ou $BC = \frac{y^2}{2a} + \frac{1}{2}a$, et $FC = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b$. De FC si on retranche BC, le reste sera, $FE = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{2}a$. Maintenant qu'on appelle G, H et M les points où FN coupe la droite AD prolongée et le cercle GEM; que l'on prolonge HG de manière que $HR = AB$, alors (à cause de $HN = DQ = EF = GF$) on a, $HN = GF$, et en ajoutant à chaque membre FH, on aura, $FN = GH$. Ainsi $AB - FN = HR - GH = GR$; et $AB - FN + 2EF = a - b + 2EF = RM$, et $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + EF = \frac{1}{2}RM$. Or nous avons trouvé plus haut, $EF = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{2}a$; substituons pour EF sa valeur dans l'équation précédente, elle deviendra $\frac{1}{2}RM = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} - \frac{y^2}{2a}$. Appelez RM, d, et vous aurez..... $d = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{b} - \frac{y^2}{a}$. Multipliez tout par a et b, et il viendra, $abd = ac^2 - 2acy + ay^2 - by^2$; que vous écrirez ainsi, $(a-b)y^2 - 2acy = abd - ac^2$, qui devient, en divisant tout par $a-b$, $y^2 - \frac{2acy}{a-b} = \frac{abd - ac^2}{a-b}$. Cette équation étant résolue, donne, $y = \frac{ac}{a-b} \pm \frac{\sqrt{a^2bd - ab^2d + abc^2}}{a-b}$. Si, pour abréger, on fait, $c : b :: d : e$, et $a - b : a :: c : f$, on aura, $y^2 = fe - fc + 2fy$, ou $y = f \pm \sqrt{f^2 + fe - fc}$. y, ou KC, ou AD étant connu, portez de A vers D une quantité $AD = f \pm \sqrt{f^2 + fe - fc}$; au point D élevez la perpendiculaire $DC = BC = \frac{\overline{CK}^2}{2AB} + \frac{1}{2}AB$, et du point C, comme centre, avec CB ou CD, comme rayon,

Digitized by Google

décrivez le cercle BDE, il passera par le point donné B, touchera la droite AD en D, et le cercle GEM en E. C. Q. F. T.

A l'aide de ce problême, il serait facile d'en résoudre un autre où il s'agirait de décrire un cercle qui touchât deux autres cercles donnés, et une droite donnée de position (*Pl.* VI, *Fig.* 3).

En effet, soient les deux cercles donnés RT, SV; leurs centres B, F; et la droite donnée de position PQ. Du centre F, et d'un rayon égal à $FS - BR$, décrivez le cercle EM. Du point B menez à la droite PQ la perpendiculaire PB que vous prolongerez vers A, de manière à avoir $PA = BR$. Par le point A menez AH parallèlement à PQ. Maintenant décrivez, par le problême précédent, un cercle qui, passant par le point B, touche la droite AH, et le cercle EM. Soit C le centre du cercle que nous venons de décrire; tirez la droite BC qui rencontrera TR en R, et du même centre C avec un rayon égal à CR, décrivez le cercle RS, il touchera les cercles RT, SV et la droite PQ, comme il est évident par la construction.

PROBLÊME XLVII.

Décrire un cercle qui passe par un point donné, et touche deux autres cercles donnés de grandeur et de position.

(*Pl.* VI, *Fig.* 4). Soient, le point donné A; les deux cercles donnés de grandeur et de position TIV, RHS; C et B leurs centres; AIH le cercle cherché; D son centre; et enfin I et H les points de contact des trois cercles. Unissez par des droites les points A, B; A, C; A, D; et D, B. La droite AB prolongée coupera le cercle RHS, en R et en S, et la droite AC prolongée coupera le cercle TIV en T et en V. Du point D abaissez sur AB la perpendiculaire DE; et du même point sur AC la perpendiculaire

Digitized by Google

DF, qui rencontrera en G la droite AB. Menez aussi du point C sur AB la perpendiculaire CK. Le triangle ADB donne $\overline{AD}^2 - \overline{DB}^2 + \overline{AB}^2 = 2AE \,.\, AB$ (par la 13e prop. du 2e. liv. des Élém.). Mais $DB = AD + BR$, par conséquent, $\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 + 2AD \times BR + \overline{BR}^2$. Substituez cette valeur de $\overline{DB}^2$ dans l'équation précédente, et vous aurez $\overline{AB}^2 - 2AD \,.\, BR - \overline{BR}^2 = 2AE \,.\, AB$. Mais $\overline{AB}^2 - \overline{BR}^2 = (AB + BR) \times (AB - BR) = AR \times AS$. Donc $AR \,.\, AS - 2AD \,.\, BR = 2AE \,.\, AB$. Et..... $\frac{AR \,.\, AS - 2AE \,.\, AB}{BR} = 2AD$.

Par un semblable raisonnement, on tirera du triangle ADC une seconde valeur de $2AD$, et on aura, $2AD = \frac{AT \,.\, AV - 2AC \,.\, AF}{TC}$. Par conséquent, $\frac{AR \,.\, AS - 2AB \,.\, AE}{BR} = \frac{AT \,.\, AV - 2AC \,.\, AF}{TC}$; et encore, $\frac{2AC \,.\, AF}{TC} = \frac{AT \,.\, AV}{TC} - \frac{AR \,.\, AS}{BR} + \frac{2AB \,.\, AE}{BR}$; et enfin, $AF = \frac{CT}{2AC}\left(\frac{AT \,.\, AV}{TC} - \frac{AR \,.\, AS}{BR} + \frac{2AB \,.\, AE}{BR}\right)$. Or comme on a la proportion $AK : AC :: AF : AG$, on aura aussi, $AG = \frac{CT}{2AK}\left(\frac{AT \,.\, AV}{TC} - \frac{AR \,.\, AS}{BR} + \frac{2AB \,.\, AE}{BR}\right)$. Si on retranche maintenant AG, ou sa valeur de AE, ou ce qui est la même chose, de $\frac{AE \,.\, 2AK}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, le reste sera..... $GE = \frac{CT}{2AK}\left(\frac{AE \,.\, 2AK}{CT} + \frac{AR \,.\, AS}{BR} - \frac{AT \,.\, AV}{TC} - \frac{2AB \,.\, AE}{BR}\right)$. Et comme on a la proportion $CK : AK :: GE : DE$, on aura, $DE = \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AE \,.\, 2AK}{CT} + \frac{AR \,.\, AS}{BR} - \frac{AT \,.\, AV}{TC} + \frac{2AB \,.\, AE}{BR}\right)$. Sur la droite AB prenez une partie AP que vous déterminerez par cette proportion, $BR : CT :: AB : AP$, d'où vous tirerez.....

Digitized by Google

$\frac{2AP.AE}{CT} = \frac{2AB.AE}{BR}$. Or, $\frac{2AP.AE}{CT} = \frac{(2AK+2KP).AE}{CT}$; donc $\frac{2PK.AE}{CT} = \frac{2AB.AE}{BR} - \frac{2AK.AE}{CT}$, ou bien..... $-\frac{2PK.AE}{CT} = \frac{2AK.AE}{CT} - \frac{2AB.AE}{BR}$. Le premier membre de cette équation étant substitué à la place du second dans l'expression de la valeur de DE, on aura..... $DE = \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AR.AS}{BR} - \frac{AT.AV}{TC} - \frac{2PK.AE}{CT}\right)$. Sur AB, et par le point A, élevez une perpendiculaire, dont la valeur soit, $AQ = \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AR.AS}{BR} - \frac{AT.AV}{TC}\right)$. Sur cette perpendiculaire prenez $QO = \frac{PK.AE}{CK}$, et vous aurez $AO = DE$. Unissez par des droites, les points O, D; D, Q; et C, P; et les triangles DOQ, CKP seront semblables; car ils ont chacun un angle droit, et les côtés autour de cet angle, proportionnels, puisqu'on a fait $QO = \frac{PK.AE}{CK}$, ce qui donne la proportion $CK : PK :: AE$ ou $DO : QO$. Donc les angles OQD, KPC sont égaux, par conséquent, QD a une direction perpendiculaire à PC. Si on mène donc à CP la parallèle AN, la rencontre de cette droite avec QD au point N, y formera un angle droit ANQ, et les triangles AQN, PCK seront semblables. On aura donc $PC : CK :: AQ : AN$. Et à cause de $AQ = \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AR.AS}{BR} - \frac{AT.AV}{TC}\right)$, on aura... $AN = \frac{CT}{2PC}\left(\frac{AR.AS}{BR} - \frac{AT.AV}{CT}\right)$. Prolongez AN jusqu'en M, de manière que $AD = DM$, alors le cercle cherché passera par le point M. Un point M du cercle étant trouvé de cette manière, voici comment on parviendra, sans aucune analyse ultérieure, à la

Digitized by Google

résolution du problême. Prenez sur AB une ligne AP dont vous déterminerez la longueur par cette proportion, $BR : CT :: AB : AP$, tirez la droite CP, menez à CP la parallèle AM, et faites, $AM : \frac{AR.AS}{BR} - \frac{AT.AV}{TC} :: CT : PC$; et par le moyen du problême XLV, faites passer par les points A et M le cercle $AIHM$, de manière qu'il touche un des cercles HRS, TIV, et il les touchera tous les deux. C. Q. F. T.

Par ce même problême on pourrait décrire un cercle qui en touchât trois autres donnés de grandeur et de position. Soient A, B, C les rayons des trois cercles donnés, D, E, F leurs centres; des centres E et F, avec des rayons respectivement égaux à $B \pm A$, $C \pm A$ décrivez deux cercles, et un troisième qui passe par le point D. Soit G le rayon de ce troisième cercle, et H son centre. Du point H avec un rayon égal à $G \pm A$, décrivez un quatrième cercle, et il touchera les trois autres, comme on le demandait.

PROBLÊME XLVIII.

Si aux deux extrémités d'un fil DAE, qui peut glisser autour d'un point fixe A, on attache deux poids D et E; que l'un des deux, par exemple E, ne puisse glisser que selon la ligne oblique BG; on demande le lieu du poids E, lorsque ces deux poids se font équilibre.

(*Pl.* VI, *Fig.* 5). Supposons que l'équilibre ait lieu. Par le point E, menez à AD la parallèle EF, et faites en sorte que EF soit à AE comme le poids E est au poids D; et des points A et F menez à la droite BG les perpendiculaires AB, FG; et comme vous avez par hypothèse $D : E :: AE : EF$, vous pourrez prendre à la place des poids, les lignes qui expriment leur

Digitized by Google

rapport, c'est-à-dire AE à la place du poids D, et EF à la place du poids E. Il est évident que si le corps E était libre, son propre poids le ferait tomber vers F, mais qu'étant forcé par un obstacle quelconque de glisser suivant l'oblique EG, il s'avancera vers le point G. On voit encore que le même corps, par l'action directe que l'autre corps D exerce sur lui selon AE, devrait s'avancer vers le point A; mais nous avons dit que le corps E ne pouvait suivre d'autre route que la droite GEB, donc il sera entraîné par une force oblique vers le point B. Or comme nous avons supposé que les deux poids se faisaient équilibre, la force qui tire le poids E vers B doit être égale et directement opposée à celle qui le porte vers G. Ainsi BE doit être égale à EG. Actuellement nous avons par hypothèse le rapport de AE à EF, et à cause de l'angle connu FEG, nous avons aussi le rapport de FE à EG ou à BE (car $BE = FG$). On a donc le rapport de AE à BE, et la longueur de AB est aussi donnée; ainsi dans le triangle rectangle ABE tout est connu, et par conséquent le point E sera facilement déterminé. En effet, soit $AB = a$, $BE = x$, vous aurez, $AE = \sqrt{a^2 + x^2}$. Supposez de plus que $AE : BE :: d : e$, vous obtiendrez, $e\sqrt{a^2 + x^2} = dx$, et en quarrant chaque membre et transposant d'un même côté toutes les quantités affectées de x, il viendra, $a^2e^2 = d^2x^2 - e^2x^2$, d'où l'on tire facilement..... $x = \frac{ae}{\sqrt{d^2 - e^2}}$. On connaît donc maintenant la longueur de BE qui détermine le lieu du poids E. C.Q.F.T. (61).

(*Pl.* VI, *Fig.* 6). Si chaque poids est obligé de descendre par une ligne oblique, voici de quelle manière on pourra faire le calcul. Soient CD et BE les obliques sur lesquelles les deux corps sont obligés

Digitized by Google

obligés de descendre. Du point fixe A, menez à ces obliques les perpendiculaires AC, AB, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elles rencontrent en G et en H les droites EG et DH, élevées de chacun des deux corps D et E perpendiculairement à l'horizon. Maintenant la force qui tend à faire descendre le corps E selon la verticale GE, ou ce qui revient au même, la gravité du corps E est à la force qui le fait descendre selon l'oblique BE, comme GE est à BE, et la force avec laquelle il tend à descendre selon la ligne oblique BE, et à la force avec laquelle il tend le fil AE comme BE est à AE. Ainsi la gravité du corps E est à la tension du fil AE comme GE est à AE. Par la même raison la gravité du corps D est à la tension du fil DA comme HD est à AD. Soit donc la longueur totale du fil $DA + AE = c$, soit la partie $AE = x$, l'autre partie DA sera $c - x$; et on aura d'abord, $\overline{AE}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BE}^2$, et $\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{DC}^2$. Soit de plus $AB = a$, et $AC = b$, d'où $BE = \sqrt{x^2 - a^2}$, et $CD = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 - b^2}$. En outre, comme les triangles BEG, CDH sont donnés d'espèce, supposons que $BE : EG :: f : E$, et que $CD : DH :: f : g$, on aura, $EG = \frac{E}{f}\sqrt{x^2 - a^2}$, et $DH = \frac{g}{f}\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 - b^2}$. Par conséquent, comme l'on a, $GE : AE ::$ le poids E : la tension AE, et $HD : AD ::$ le poids D : la tension AD, et que ces tensions sont égales, puisqu'il y a équilibre, on en conclura que.....

$$\frac{Ex}{\frac{E}{f}\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{tension } AE = \text{tension } AD = \frac{Dc - Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 - b^2}}.$$

Digitized by Google

Et en réduisant cette équation, elle devient.....

$gx\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 - b^2} = (Dc - Dx)\sqrt{x^2 - a^2}$, ou bien...

$$\begin{matrix} g^2 \\ -D^2 \end{matrix}\left\{ x^4 \begin{matrix} -2g^2c \\ +2D^2c \end{matrix}\left\{ x^3 \begin{matrix} +g^2c^2 \\ -g^2b^2 \\ -D^2c^2 \\ +D^2a^2 \end{matrix}\right\} x^2 - 2D^2ca^2x + D^2c^2a^2 = 0.\right.$$

Si l'on desire savoir dans quel cas le problême pourrait être construit avec le seul secours de la règle et du compas, il n'y a qu'à supposer que le poids D : au poids E :: $\frac{BE}{EG}$: $\frac{CD}{DH}$, alors on aura, $g = D$. Ainsi l'équation précédente se réduira à celle-ci, $\begin{matrix} a^2 \\ -b^2 \end{matrix}\left\{ x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = 0\right.$, ou bien, $x = \frac{ac}{a+b}$.

PROBLÊME XLIX.

Si au fil DACBF, qui peut glisser sur deux points fixes A et B, on suspend trois poids D, E et F; D et F aux extrémités du fil, et E à son milieu, qui est en C entre les deux points fixes; il s'agit, connaissant les poids et la situation des deux points fixes, de déterminer la position du point C, milieu du fil, lorsque tout le systême est en équilibre.

(*Pl.* VI, *Fig.* 7). D'abord on voit que la tension du fil AC égale la tension du fil AD, et que la tension du fil BC égale la tension du fil BF; par conséquent les tensions des fils AC, CB, CE sont proportionnelles aux poids D, F, E. Prenez dans le rapport des mêmes poids les parties des fils CG, CH, CI, et en unissant par des droites les trois points G, H, I, vous aurez le triangle GHI. Prolongez IC jusqu'à ce qu'elle rencontre GH en K,

Digitized by Google

et vous aurez, $GK = KH$, et $CK = \frac{1}{2} CI$, par conséquent C sera le centre de gravité du triangle GHI. Car par le point C, menez à CE la perpendiculaire PQ, et des points G et H abaissez sur PQ les perpendiculaires GP, HQ; alors si la force avec laquelle le fil AC, en vertu du poids D, tire le point C vers A, est exprimée par GC, la force avec laquelle le même fil tirera le même point C vers P, sera exprimée par PC; et la force avec laquelle il le tire vers K, sera exprimée par GP. De même les forces par lesquelles le fil BC, en vertu du poids F, tire le point C vers les points B, Q, K, seront respectivement représentées par les lignes CH, CQ, QH; et la force avec laquelle le fil CE, en vertu du poids E, tire le point C vers E, sera exprimée par la ligne CI. Maintenant comme le point C est sollicité en même temps par plusieurs forces qui se font équilibre, il faut que la somme de celles avec lesquelles les fils AC, BC tendent à amener le point C vers K, soit égale et directement opposée à la force avec laquelle le fil CE le tire vers E, c'est-à-dire qu'il faut que $GP + HQ = CI$, et que la force avec laquelle le fil AC tire le point C vers P, soit égale et directement opposée à celle avec laquelle le fil BC le tire vers Q, et par conséquent $PC = CQ$. Ainsi les droites GP, HQ, CK étant parallèles, il s'en suit que $KG = KH$, et $CK = \ldots\ldots$ $\frac{GP + HQ}{2} = \frac{1}{2} CI$, ce qu'il fallait premièrement démontrer. Il ne nous reste plus qu'à déterminer le triangle GCH, dont les côtés GC, CH sont donnés, ainsi que la droite CK qui est menée du sommet C sur le milieu de la base. Pour cela, du point C j'abaisse sur la base GH la perpendiculaire CL, ce qui donne, $\frac{\overline{CG}^2 - \overline{CH}^2}{2GH} = KL = \frac{\overline{GC}^2 - \overline{CK}^2 - \overline{GK}^2}{2GK}$. Au lieu de $2GK$, écrivez GH, et effaçant

Digitized by Google

le diviseur commun GH, et ordonnant, vous aurez.....

$2\overline{GK}^2 = \overline{GC}^2 - 2\overline{CK}^2 + \overline{CH}^2$, ou bien, $GK = \sqrt{\frac{1}{2}\overline{GC}^2 - \overline{CK}^2 + \frac{1}{2}\overline{CH}^2}$.

GK et KH étant une fois connues, les angles GCK, KCH, ou leurs alternes DAC, FBC le seront aussi. Donc des points A et B si on mène les droites AC, BC de manière que AC fasse avec AD un angle égal à GCK, et que BC fasse avec BF un angle égal à KCH, ces deux droites AC, BC iront concourir en un point C, et ce point C sera celui qu'on cherchait.

Au reste, dans les questions de cette espèce, on n'a pas toujours besoin d'une opération algébrique particulière pour arriver à la solution; le plus souvent même la résolution d'une question suffit pour faire trouver celle d'une autre, comme on le verra dans l'exemple suivant.

(*Pl.* VI, *Fig.* 8). *Un fil $ACDB$ étant divisé en parties données AC, CD, DB; ses deux extrémités étant attachées à deux points fixes A et B donnés de position; et deux poids E et F étant suspendus aux points de division C et D, on demande, le poids F étant donné, ainsi que la position des points C et D, de déterminer la grandeur du poids E.*

De la solution du problême précédent, on peut facilement déduire celle-ci. Prolongez AC, BD jusqu'à ce qu'elles rencontrent en G et en H les lignes DF, CE; et le poids E sera au poids F comme DG est à CH.

On voit par-là, qu'il est facile de composer avec des fils seulement, une balance telle, qu'au moyen d'un poids donné F, on déterminera le poids d'un autre corps quelconque E.

Digitized by Google

PROBLÊME L.

Déterminer la profondeur d'un puits par le son d'une pierre qui en va frappet le fond.

Appelons x la profondeur du puits. Si la pierre, par son mouvement accéléré, parcourt un espace donné a dans un temps donné b, et que le son, par un mouvement uniforme, parcourre le même espace a dans un temps donné d, la pierre parcourra l'espace x, dans un temps exprimé par $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, et le son que cause la pierre en frappant le fond du puits, parcourra le même espace x dans un temps exprimé par $\frac{dx}{a}$. Car, dans la chûte des corps graves, les espaces parcourus sont comme les quarrés des temps employés à les parcourir; ou ce qui revient au même, les temps sont comme les racines quarrées des espaces parcourus, c'est-à-dire, comme $\sqrt{x}$ et $\sqrt{a}$. Et dans la transmission du son, les espaces parcourus sont comme les temps employés à les parcourir. Or le temps de la chûte du corps jusqu'au fond du puits, étant exprimé par $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, et le temps du retour du son, par $\frac{dx}{a}$, on voit que la somme de ces deux temps nous donne exactement le temps écoulé depuis le départ de la pierre, jusqu'à l'arrivée du son. Ce temps peut être connu par l'observation. Soit ce temps t, on aura $b\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{a} = t$ et.... $b\sqrt{\frac{x}{a}} = t - \frac{dx}{a}$. Et en quarrant chaque membre..... $\frac{b^2x}{a} = t^2 - \frac{2dtx}{a} + \frac{d^2x^2}{a^2}$. Cette équation étant résolue, donne $x = \frac{adt + \frac{1}{2}ab^2}{d^2} - \frac{ab}{2d^2}\sqrt{b^2 + 4dt}$.

Digitized by Google

PROBLÊME LI.

Un globe A est donné, ainsi que sa position par rapport à un mur DE; on donne également la distance BD du centre du globe B au même mur. Le centre du globe A est sur la droite BD perpendiculaire au mur. On suppose que les deux corps sont sans pesanteur, et qu'ils se meuvent dans un milieu parfaitement libre; enfin on suppose que le corps A, poussé d'un mouvement uniforme vers le point D, rencontre en son chemin le corps B qui est en repos; que le corps B va frapper le mur, et, par un mouvement de réflexion, vient rechoquer le globe A au point C. On demande, d'après toutes ces données, de déterminer la masse du globe B.

(*Pl.* VII, *Fig.* 1re). Soit a la vîtesse du globe A avant le choc, on aura, par le problême XII, page 106, sa vîtesse après le choc, $= \frac{aA - aB}{A+B}$, et la vîtesse de B après le choc, sera $= \frac{2aA}{A+B}$. Ainsi la vîtesse du globe A sera à la vîtesse du globe B comme $A - B$ est à $2A$. Sur GD prenez $gD = GH =$ le diamètre du globe B. Et les vîtesses des deux globes seront entre elles comme GC est à $Gg + gC$; car lorsque le globe A aura frappé le globe B, le point G qui est sur la surface du globe B, se mouvra dans la ligne AD, et continuera sa route de G en g, où il arrivera au moment que sa face antérieure H atteindra le mur, alors, par un mouvement de réflexion, ce même point G parcourra l'espace gC. Ainsi le point G sera mu dans tout l'espace $Gg + gC$, pendant le temps que le point F du globe A parcourra l'espace GC, de manière que les deux globes se rencontreront de nouveau, et se choqueront encore au point C. Ainsi les intervalles BC, BD étant donnés, faites $BC = m$, $BD + DC = n$, et $BG = x$, vous aurez $GC = m + x$,

Digitized by Google

et $Gg + gC = GD + DC - 2gD = BG + BD + DC - 2GH = x + n - 4x = n - 3x$. Nous avons trouvé ci-dessus, que la vîtesse de A était à celle de B comme $A - B$ est à $2A$, comme GC est à $Gg + gC$; ainsi $A - B : 2A :: m + x : n - 3x$. Enfin le globe A est au globe B comme le cube de AF est au cube de GB, c'est-à-dire dans le rapport des cubes de leurs rayons. Par conséquent, si vous faites $AF = s$, les deux globes seront entre eux $:: s^3 : x^3$. Donc on aura encore cette proportion, $s^3 - x^3 (A - B) : 2s^3 (2A) :: m + x : n - 3x$. Et en faisant le produit des extrêmes, et celui des moyens, on aura l'équation, $ns^3 - 3s^3x - nx^3 + 3x^4 = 2ms^3 + 2s^3x$. Et en réduisant, $3x^4 - nx^3 - 5s^3x \begin{matrix} + s^3 n \\ - 2s^3 m \end{matrix} = 0$. En construisant cette équation, on trouvera x demi-diamètre du globe B; et x étant connue, le globe B lui-même sera connu. C. Q. F. T.

Remarquez bien au reste, que, si le point C eût été pris de l'autre côté par rapport au globe B, il aurait fallu changer, dans l'équation, le signe de la quantité $2m$, et l'écrire ainsi.....

$$3x^4 - nx^3 - 5s^3x \begin{matrix} + s^3 n \\ + 2s^3 m \end{matrix} = 0.$$

Si le globe B était donné, et qu'on cherchât le globe A, toujours avec la même condition, que le globe B ayant été réfléchi par le mur, les deux corps se rencontreraient encore en C; le problême deviendrait alors plus facile. Car dans ce cas, x serait connu dans notre dernière équation, et la quantité inconnue serait s. Je réunirais donc dans un seul membre tous les termes affectés de s^3, et j'aurais $(5x - n + 2m)s^3 = 3x^4 - nx^3$, et enfin..... $s^3 = \frac{3x^4 - nx^3}{5x - n + 2m}$. Il suffit maintenant d'extraire une racine cubique pour connaître s.

Digitized by Google

Si les deux globes étaient connus, et qu'on cherchât le point C, où, après le premier choc et la réflexion du globe B par le mur, les deux globes devraient se choquer une seconde fois, on se rappellerait que nous avons trouvé plus haut cette proportion... $A - B : 2A :: GC : Gg + gC$, de laquelle on peut déduire celle-ci, $A - B + 2A : A - B :: GC + Gg + gC : GC$. Ou bien, $3A - B : A - B :: 2Gg : GC$, et le quatrième terme GC de cette proportion est la distance cherchée.

PROBLÊME LII.

Deux globes A et B sont joints par un léger fil PQ. Le globe B est suspendu au globe A; on abandonne celui-ci à l'action de la pesanteur selon la verticale PR; le globe B, parvenu au plan horizontal FG, est réfléchi en haut, et rencontre au point D le globe A qui continuait de tomber. On demande de quelle hauteur il faut que le globe A soit tombé pour produire l'effet énoncé, en supposant que l'on connaisse la longueur du fil PQ et la distance DF du point de rencontre des deux globes au plan horizontal GF.

(*Pl.* VII, *Fig.* 2). Soit la longueur du fil PQ, a. Sur la verticale $PQRF$, prenez, à compter du point F, la droite FE égale au diamètre QR du globe inférieur, afin qu'au moment où le point inférieur R du globe B touchera le point F, son point supérieur Q se trouve en E. Soit ED l'espace que parcourra en remontant le globe B, après avoir été réfléchi par le fond, avant de rencontrer au point D le globe supérieur A qui continuait à descendre. Ainsi la distance du point D au point F étant donnée, de même que EF qu'on a fait égale au diamètre du globe inférieur, il s'en suit que

DE,

Digitized by Google

DE, différence de ces deux lignes, est aussi donnée. Soit donc $DE = b$. Il est évident que $RF = QE =$ la hauteur dont le globe inférieur doit tomber avant d'arriver au plan horizontal. Appelons RF ou QE, x, puisque c'est une quantité inconnue. Une fois x connue, il suffira de lui ajouter EF et PQ, et on aura PF, hauteur d'où le globe supérieur A doit tomber pour produire l'effet demandé.

Comme nous avons fait $PQ = a$, et $QE = x$, nous aurons $PE = a + x$. De PE retranchons DE ou b, le reste sera, $PD = a + x - b$. Or le temps de la chûte du globe A est comme la racine quarrée de l'espace qu'il a parcouru en tombant, ou comme $\sqrt{a + x - b}$; et le temps de la chûte du globe B, est comme la racine quarrée de l'espace qu'il a parcouru, ou comme $\sqrt{x}$. Et le temps de l'ascension du même globe B est comme la différence de $\sqrt{x}$, et de la racine de l'espace qu'il aurait parcouru en tombant de Q en D. En effet, la différence de ces deux racines est comme le temps de la chûte de D en E. Or le temps de la chûte de D en E est égal au temps de l'ascension de E en D. Et cette différence des racines est $\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. (*). Ainsi le temps de la chûte du globe B étant ajouté au temps de son ascension, donne.....

(*) Si le globe B remontait de E en Q, le temps de son ascension serait exprimé par $\sqrt{x}$, et s'il remontait de D en Q, par $\sqrt{DQ} = \sqrt{x - b}$. Donc, comme il ne remonte que de E en D, le temps de son ascension sera exprimé par $\sqrt{EQ} - \sqrt{DQ} = \sqrt{x} - \sqrt{x - b}$, et enfin le temps de sa chûte de Q en E, et de son ascension de E en D, sera exprimé par..... $\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x - b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$.

Digitized by Google

$2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Par conséquent comme ce temps est égal au temps de la chûte du globe supérieur, on a cette équation, $\sqrt{a+x-b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$, ce qui nous donne, en quarrant chaque membre, $a+x-b = 5x-b-4\sqrt{x^2-bx}$. Ou bien, $4x-a = 4\sqrt{x^2-bx}$, et en quarrant de nouveau chaque membre, $16x^2-8ax+a^2 = 16x^2-16bx$, ou bien $a^2 = 8ax-16bx$, et en divisant tout par $8a-16b$, on a, $x = \frac{a^2}{8a-16b}$. Faites donc cette proportion, $8a-16b : a :: a : x$, et vous connaîtrez, x ou QE. C.Q.F.T.

Mais si QE était donné, et qu'on demandât seulement de déterminer la longueur du fil PQ ou a; il est clair que dans ce cas, x étant connue, et a inconnue, l'équation $a^2 = 8ax-16bx$ est du second degré; et qu'étant résolue selon les règles de l'algèbre, elle donne, $a = 4x - \sqrt{16x^2-16bx}$. Pour construire cette valeur de a, prenez QY moyenne proportionnelle entre QD et QE, et vous aurez $PQ = 4EY$. Car cette moyenne proportionnelle est $\sqrt{x(x-b)}$, ou $\sqrt{x^2-bx}$. Si vous retranchez sa valeur de QE ou x, le reste sera EY, dont le quadruple est $4x-4\sqrt{x^2-bx}$, valeur de a.

Si on donne QE ou x, et la longueur du fil PQ ou a, et qu'on cherche le point D, où le globe supérieur, en descendant, rencontre le globe inférieur qui remonte; le point E est connu par cette supposition; c'est donc sa distance DE ou b au point inconnu D

Digitized by Google

que l'on cherche. Or il est facile d'obtenir la valeur de b par l'équation $a^2 = 8ax - 16bx$, qui donne, $b = \frac{8ax - a^2}{16x}$. Faites donc la proportion $16x : 8x - a :: a : b$, et vous connaîtrez b ou DE.

Jusqu'ici j'ai supposé que les deux globes réunis par un fil sans pesanteur étaient abandonnés en même temps. Mais s'ils ne sont unis par aucun fil, et qu'on les laisse tomber à des instans différens, de manière que le globe supérieur A, par exemple, soit abandonné le premier, et tombe de l'espace PT avant qu'on abandonne le second globe, et qu'au moyen des distances données PT, QP et DE, on cherche à connaître la hauteur PF d'où a dû tomber le globe supérieur pour pouvoir être rencontré au point D par le globe inférieur; faites $PQ = a$, $DE = b$, $PT = c$, et $QE = x$, alors vous aurez, $PD = a + x - b$, comme ci-dessus. Et les temps pendant lesquels le globe supérieur parcourra, en tombant, les espaces PT et TD, seront comme $\sqrt{PT}$ et $\sqrt{PD} - \sqrt{PT}$, ou $\sqrt{c}$ et $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c}$; et le temps que le globe inférieur emploie, d'abord en tombant, et ensuite en remontant, pour parcourir la somme des espaces $QE + DE$, sera comme..... $2\sqrt{QE} - \sqrt{QD}$, ou bien, $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Maintenant, les temps que les globes emploient à décrire, l'un l'espace TD, l'autre la somme des espaces $QE + ED$, sont égaux par hypothèse. Donc $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Et en quarrant chaque membre, $a + c - 2\sqrt{ca + cx - bc} = 4x - 4\sqrt{x^2 - bx}$. Faites $a + c = e$, et $a - b = f$, vous aurez, après les réductions....

Digitized by Google

$4x - e + 2\sqrt{cf+cx} = 4\sqrt{x^2 - bx}$. Et en quarrant encore chaque membre, $e^2 - 8ex + 16x^2 + 4cf + 4cx + (16x - 4e)\sqrt{cf+cx} = 16x^2 - 16bx$. Effacez de part et d'autre $16x^2$, faites $e^2 + 4cf = m$, et $8e - 16b - 4c = n$, vous aurez, après les réductions convenables, $(16x - 4e)\sqrt{cf+cx} = nx - m$. Et en quarrant encore chaque membre, $256cfx^2 + 256cx^3 - 128cefx - 128cex^2 + 16ce^2f + 16ce^2x = n^2x^2 - 2mnx + m^2$. Cette équation étant ordonnée, devient, $256cx^3 \begin{matrix} +256cf \\ -128ce \\ -n^2 \end{matrix} \Bigg\{ x^2 \begin{matrix} -128cef \\ +16ce^2 \\ +2mn \end{matrix} \Bigg\} x \begin{matrix} +16ce^2f \\ -m^2 \end{matrix} = 0.$

En la construisant, on aura x ou QE, et si à QE on ajoute les distances données PQ et EF, ou QR, on aura la hauteur PF qu'il fallait trouver.

PROBLÊME LIII.

Si on a deux globes en repos ; que le globe A soit plus élevé que le globe B ; qu'on les fasse tomber à des instans différens, par exemple, que A ait déjà parcouru l'espace PT, au moment que B commence à tomber : on demande de déterminer les lieux α et β où se trouvent les deux globes, lorsque leur distance ϖχ sera égale à une quantité donnée.

(*Pl.* VII, *Fig.* 3). Comme l'espace PT, et les distances PQ et $\varpi\chi$ sont donnés, faites $PT = a$, $PQ = b$, et $\varpi\chi = c$; et l'espace $P\varpi$ que le globe supérieur aura parcouru avant d'arriver au lieu cherché α, appelez-le x. Actuellement, les temps que le globe supérieur emploie à parcourir les espaces PT, $P\varpi$, $T\varpi$, ainsi que le temps que le

Digitized by Google

globe inférieur emploie à parcourir $Q\chi$, sont entre eux respectivement comme $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\varpi}$, $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$, et $\sqrt{Q\chi}$. Or, comme les deux globes emploient le même temps à parcourir les espaces $T\varpi$ et $Q\chi$, il s'ensuit que $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT} = \sqrt{Q\chi}$. Nous avons fait $P\varpi = x$ et $PT = a$. Si à $P\varpi$ nous ajoutons $\varpi\chi$ ou c, et que de la somme nous retranchions PQ ou b, le reste sera $Q\chi = x + c - b$. Donc en substituant ces valeurs analytiques dans l'équation trouvée plus haut, elle deviendra $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{x + c - b}$. Et en quarrant chaque membre, $x + a - 2\sqrt{ax} = x + c - b$. Et en effaçant x de part et d'autre, et transposant seule dans l'autre membre la quantité affectée du radical, il viendra $a + b - c = 2\sqrt{ax}$, et en quarrant de nouveau $(a + b - c)^2 = 4ax$. D'où $x = \frac{(a+b-c)^2}{4a}$, et par conséquent $4a : a + b - c :: a + b - c : x$. x ou $P\varpi$ étant trouvée, on a le lieu α où est arrivé en tombant le globe supérieur A. Et comme la distance $\varpi\chi$ qui doit se trouver dans cet instant entre les deux globes, est donnée, il s'en suit qu'on connaît aussi le lieu β du globe inférieur.

Si on cherche le point où le globe supérieur en tombant atteint le globe inférieur, il suffit, pour le trouver, de supposer que la distance $\varpi\chi$ des deux globes est nulle, et par conséquent d'effacer c dans l'équation $(a + b - c)^2 = 4ax$, ce qui la réduirait à $(a + b)^2 = 4ax$. D'où l'on tire la proportion $4a : a + b :: a + b : x$ $(P\varpi)$, et le point ϖ est celui qu'on cherchait.

Réciproquement, si on donne le point ϖ ou χ, sur lequel le

Digitized by Google

globe supérieur rencontre l'inférieur, et qu'on demande le lieu T où se trouve le point le plus bas P du globe supérieur, au moment que l'inférieur commence à tomber, il suffit de dégager a de l'équation $(a+b)^2 = 4ax$, ou $a^2 + 2ab + b^2 = 4ax$, et elle donne $a = 2x - b - 2\sqrt{x^2 - bx}$. Prenez donc une moyenne proportionnelle $V\varpi$ entre x et $x - b$, ou bien ce qui est la même chose, entre $P\varpi$ et $Q\varpi$, et vous aurez $V\varpi = \sqrt{x(x-b)} = \sqrt{x^2 - bx}$. Et si vous retranchez le double de cette quantité de $2x - b$, ou de $2P\varpi - PQ$, c'est-à-dire, de $2Q\varpi + PQ$, il restera.... $PQ - 2VQ$, ou bien $PV - VQ$, c'est-à-dire, PT.

Enfin le globe supérieur ayant choqué l'inférieur, et par leur action mutuelle, la vîtesse du supérieur étant retardée, et celle de l'inférieur accélérée, si l'on veut savoir à quel point de leur chûte les deux globes se trouveront éloignés l'un de l'autre, d'une distance donnée; il faudra chercher d'abord le lieu où le globe supérieur choque l'inférieur; ensuite, connaissant la grandeur des globes (sans quoi le problême serait insoluble) ainsi que leurs vîtesses au moment du choc, on déterminera (*au moyen du problême* XII, *page* 106) leurs vîtesses immédiatement après le choc; après quoi il faudra chercher à quelle hauteur parviendraient les globes en vertu de ces vîtesses, si elles agissaient de bas en haut; et on connaîtra par-là les espaces, que, dans des temps donnés, après la réflexion, les deux globes seront en état de parcourir en tombant. On connaîtra donc la différence des espaces parcourus. Et réciproquement, si on donnait la différence des espaces parcourus, on pourrait, par l'analyse, revenir aux espaces mêmes parcourus en tombant.

(*Pl.* VII, *Fig.* 4). Supposons, par exemple, que le globe supérieur

Digitized by Google

atteigne l'inférieur au point ϖ, et qu'après la réflexion, la vîtesse du supérieur en descendant soit telle, qu'elle pourrait lui faire remonter l'espace ϖN; que la vîtesse de l'inférieur en descendant soit aussi telle, qu'elle serait capable de lui faire parcourir en remontant, l'espace ϖM. Actuellement, les temps que le globe A emploierait à parcourir de nouveau en descendant, les espaces $N\varpi$, NG, ces temps, dis-je, seront entre eux comme $\sqrt{N\varpi}$ est à $\sqrt{NG}$; et les temps que le globe B emploierait à parcourir une seconde fois, mais en descendant, les espaces $M\varpi$, MH, seraient entre eux, comme $\sqrt{M\varpi}$ est à $\sqrt{MH}$; ainsi le temps que le globe supérieur emploierait à parcourir l'espace ϖG, serait au temps que l'inférieur emploierait à parcourir l'espace ϖH, comme..... $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi}$ est à $\sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$. Supposez que ces temps soient égaux, et vous aurez $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi} = \sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$. Et comme d'ailleurs la distance GH est donnée, faites $\varpi G + GH = \varpi H$. Et au moyen de ces deux équations, vous arriverez à la résolution du problême. En effet, soit $M\varpi = a$, $N\varpi = b$, $GH = c$ et $\varpi G = x$, on aura pour la dernière équation $\varpi H = x + c$, et en ajoutant, de part et d'autre, $M\varpi$, il viendra..... $\varpi H + M\varpi$, ou $MH = a + c + x$. Et en ajoutant $N\varpi$ à ϖG, on aura, $NG = b + x$; et en substituant toutes ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles représentent, l'équation $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi} = \sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$, devient $\sqrt{b + x} - \sqrt{b} = \sqrt{a + c + x} - \sqrt{a}$. Mettez e pour $a + c$, et $\sqrt{f}$ pour $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, et l'équation sera

Digitized by Google

réduite à $\sqrt{b+x} = \sqrt{e+x} - \sqrt{f}$, et en quarrant tout; $b+x = c+x+f-2\sqrt{ef+fx}$, ou bien $e+f-b = 2\sqrt{ef+fx}$. Faites $g = e+f-b$, et en substituant, il viendra, $g = 2\sqrt{ef+fx}$, ou en quarrant, $g^2 = 4ef+4fx$; d'où l'on tire, $x = \frac{g^2}{4f} - e$.

PROBLÊME LIV.

Si l'on a deux globes A et B, dont le supérieur A, tombant du point G, rencontre l'inférieur B au moment qu'il remonte, après avoir été réfléchi par le fond H; si ces deux globes, après s'être choqués, se séparent de nouveau, de manière que le globe supérieur remonte à sa première hauteur G, dans le même temps que l'inférieur est renvoyé contre le fond H; ensuite que le globe A retombant encore, tandis que le globe B remonte après avoir été réfléchi par le fond, ces deux globes se choquent une seconde fois au même lieu que la première, et qu'ils continuent ainsi à se choquer sans cesse et à retourner toujours au même point d'où ils étaient partis; il s'agit, connaissant la grandeur des deux globes, la position du fond, et celle du point G, d'où le globe supérieur est tombé, il s'agit, dis-je, de déterminer le lieu où les deux globes se choqueront.

(*Pl.* VII, *Fig.* 5). Soient, *e* le centre du globe *A*, et *f* celui du globe *B*; *d* le centre du lieu *G*, où le globe *A* est à sa plus grande hauteur; *g* le centre du globe *B* lorsqu'il touche le fond; *a* le demi-diamètre du globe *A*; *b* le demi-diamètre du globe *B*; *c* le point de contact des deux globes lorsqu'ils se choquent, et *H* le point de contact du globe inférieur et du fond. La vîtesse du globe *A*, lorsqu'il arrivera sur le globe *B*, sera celle qu'il aura acquise en tombant de la hauteur *de*, ainsi cette vîtesse sera comme $\sqrt{de}$. Il faut que le globe *A* conserve cette même vîtesse après

Digitized by Google

après le choc, pour remonter au lieu G d'où il était parti. Et le globe B doit être repoussé vers le bas avec une vîtesse égale à celle qui le faisait monter, afin qu'il puisse retourner contre le fond dans un temps égal à celui qu'il avait mis à s'en éloigner. Et pour que ces deux cas arrivent, il faut que les quantités de mouvement soient égales. Or la quantité de mouvement des globes s'évalue en multipliant leur masse par leur vîtesse. Ainsi dans le cas présent, il faut que le produit de la masse du globe A, par sa vîtesse, soit égal au produit de la masse du globe B par la vîtesse du même B. D'où on voit que, si l'on divise le produit de la masse par la vîtesse du premier globe, par la masse du second, le quotient sera la vîtesse du second, tant avant qu'après la réflexion; où si vous voulez, pour le moment où il va cesser de monter, et pour celui où il commence à descendre. Cette vîtesse sera donc comme $\frac{A\sqrt{de}}{B}$. Ou bien, les globes étant comme les cubes de leurs rayons, cette vîtesse sera représentée par $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Et le quarré de cette vîtesse de B est au quarré de la vîtesse de A immédiatement avant le choc, comme la hauteur à laquelle s'élèverait B, s'il n'était pas rencontré et arrêté par A, est à la hauteur de, d'où le globe A est descendu. C'est-à-dire qu'on a cette proportion, $\frac{A^2 de}{B^2} : de :: h : de$ (*) (*en appelant h la hauteur à laquelle s'élèverait B, s'il*

(*) Cette proportion n'est que la traduction analytique de ce théorême bien connu de mécanique : que dans la chûte des corps graves, les quarrés des vîtesses sont comme les espaces parcourus; ainsi le second terme de cette proportion qui devrait être le quarré de la vîtesse de A avant le choc, n'est que l'espace que le corps A a parcouru avant le choc. Mais l'un peut être mis au

Digitized by Google

n'était pas rencontré par A) ou bien, en nous servant de la dernière expression de la vîtesse de B, $\frac{a^6 de}{b^6} : de :: h : de$ ou x (en appelant x le dernier terme de) ou bien, $a^6 : b^6 :: h : x$, ce qui donne, $h = \frac{a^6 x}{b^6}$. Telle est l'expression de la hauteur à laquelle s'élèverait B, s'il n'était pas arrêté dans son ascension. Supposons que cette hauteur soit fK. Ajoutez à fK la quantité fg, ou $dH - de - ef - gH$, ou $p - x$, en appelant p la quantité donnée $dH - ef - gH$, et x la quantité inconnue de, et vous aurez, $Kg = \frac{a^6}{b^6} x + p - x$. Actuellement si le globe B tombait réellement du point K jusqu'au fond, ou si son centre décrivait l'espace Kg (ce qu'il ferait sans la rencontre du globe A) la vîtesse de ce globe B serait exprimée par $\sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$. Mais ce globe ne tombe en effet que du lieu Bcf jusqu'au fond, dans le même temps que le globe A s'élève du lieu Ace jusqu'au point d, ou qu'il descend du point d au lieu Ace. Or dans la chûte des corps graves, les accroissemens des vîtesses sont égaux quand le temps de la chûte est égal. Par conséquent le degré de vîtesse qu'acquiert le globe B en tombant vers le fond, est égal au degré de vîtesse qu'acquiert le globe A qui tombe dans le même temps de d en e; ou même encore, égal au degré de vîtesse que perd le globe A en remontant de e en d,

---

lieu de l'autre, d'après le théorême que nous venons de rapporter. Au reste, remarquez bien qu'on ne met au second terme l'espace parcouru par A, au lieu du quarré de sa vîtesse, que parce que le quatrième terme représente aussi un espace, sans quoi on comparerait ensemble des choses hétérogènes, ce qui serait absurde.

Digitized by Google

toujours dans le même temps. Ainsi, à la vîtesse qu'avait déja le globe B dans le lieu Bcf, ajoutez la vîtesse du globe A parvenu au lieu Ace, et la somme de ces deux vîtesses, qui est comme $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, ou bien comme $\sqrt{x} + \frac{a^3\sqrt{x}}{b^3}$, sera la vîtesse totale du globe B lorsqu'il frappe sur le fond. Or, $\sqrt{x} + \frac{a^3\sqrt{x}}{b^3}$ doit être égale à $\sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$ (*). A la place de $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$, écrivez $\frac{r}{s}$, et à la place de $\frac{a^6 - b^6}{b^6}$, écrivez $\frac{rt}{s^2}$, et l'équation deviendra, $\frac{r}{s}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{rtx}{s^2} + p}$. Et en quarrant chaque membre, $\frac{r^2 x}{s^2} = \frac{rtx}{s^2} + p$, équation que l'on peut ordonner ainsi, $\left(\frac{r^2}{s^2} - \frac{rt}{s^2}\right) x = p$; d'où l'on tire, $x = \frac{ps^2}{r^2 - rt}$. Cette équation aurait été plus simple, si au lieu de prendre $\frac{r}{s}$ pour $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$, on eût pris $\frac{p}{s}$, car on aurait eu, $x = \frac{s^2}{p - t}$. D'où l'on voit que x ou ed se détermine en faisant cette proportion, $p - t : s :: s : x$ ou de. Maintenant si à de on

(*) Il est d'abord évident que le globe B en tombant du lieu Bcf jusqu'au fond, acquiert la même vîtesse que le globe A qui tombe dans le même temps de G en Ace, et cette vîtesse est représentée par $\sqrt{de}$. En outre, sans la rencontre de A, le globe B aurait encore parcouru l'espace h, ou $fK = \frac{a^6 de}{b^6}$, ce qui suppose une vîtesse $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Donc enfin la vîtesse totale de B est $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, ou bien $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$; mais, sans la rencontre de A, le globe B aurait réellement parcouru tout l'espace gK, ce qui suppose une vîtesse $\sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$. Donc enfin..... $\sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x} = \sqrt{x} + \frac{a^3\sqrt{x}}{b^3}$.

Digitized by Google

ajoute ec, on aura dc, et par conséquent le point c, où les deux globes se choqueront mutuellement. C. Q. F. T.

PROBLÊME LV.

On a planté, dans un certain lieu de la terre, aux points A, B, C, trois piquets perpendiculaires au plan horizontal: le piquet qui est en A, a six pieds; celui qui est en B, en a dix-huit, et celui qui est en C, huit; la droite AB est de trente pieds. Il arrive qu'un certain jour de l'année l'extrémité de l'ombre du piquet A passe par les points B et C; que l'extrémité de l'ombre du piquet B passe par A et C; et que l'extrémité de l'ombre du piquet C passe par A. On demande la déclinaison du soleil, et l'élévation du pole, ou, ce qui est la même chose, le jour et le lieu où cela est arrivé.

(*Pl.* VII, *Fig.* 6). Puisque l'ombre de chaque piquet a décrit une section conique, qui est la section du cône lumineux, dont le sommet est placé au sommet même du piquet; je supposerai que $BCDEF$ est la courbe de cette espèce (parabole, hyperbole ou ellipse) que l'ombre du piquet A, a décrite ce jour-là; je supposerai de plus, que AD, AE, AF ont été les ombres du piquet A; BC, BA celles du piquet B; et CA celle du piquet C. Je supposerai encore que PAQ est la méridienne ou l'axe de la courbe, et que les perpendiculaires BM, CH, DK, EN et FL abaissées des différens points de la courbe sur PAQ, en sont les ordonnées. J'appellerai ces ordonnées, y, et les parties interceptées de l'axe, telles que AM, AH, AK, AN et AL, je les appellerai x. Je supposerai enfin que l'équation $a^2 \pm bx \pm cx^2 = y^2$ exprime la nature de la courbe, c'est-à-dire, la relation entre les x et les y. Et je regarderai comme connues, a^2, b, c (l'analyse les fera bientôt

Digitized by Google

connaître). Je n'ai pris que de deux dimensions au plus les inconnues x et y, puisque l'équation est aux sections coniques. Je n'ai pas fait entrer dans l'équation les dimensions impaires de y, parce que les y ou ordonnées prennent immédiatement leur origine sur l'axe. Comme on ne sait pas encore si b et c doivent être pris positivement ou négativement, j'ai affecté les termes où ils se trouvent du signe ambigu $\pm$. J'ai donné le signe positif à a^2, parce que le piquet A portant son ombre de différens côtés, tels que C, F, B et E, il est évident qu'il doit être enveloppé de toutes parts, par la concavité de la courbe. Par conséquent, si on élève au point A une perpendiculaire $A\beta$, elle ira rencontrer quelque part en β, la courbe : ainsi elle sera l'ordonnée pour le point où $x = 0$; et comme elle rencontre toujours la courbe, elle sera toujours réelle; donc son quarré a^2 doit toujours être positif.

Il est donc constant que l'équation feinte $a^2 \pm bx \pm cx^2 = y^2$, ne contient aucun terme superflu, et que pourtant elle en contient autant qu'il est nécessaire pour exprimer tous les cas possibles du problême, soit qu'ils se rapportent à l'ellipse, à la parabole ou à l'hyperbole; et que, dans tous ces cas, nous serons en état d'assigner des valeurs réelles ou nulles pour les quantités a^2, b, c. L'analyse suivante va nous faire connaître quelles sont ces valeurs, et avec quels signes elles doivent être prises; et enfin quelle est la nature de la courbe.

Première partie analytique.

Comme les ombres sont dans le rapport de la longueur des piquets, on aura, $BC : AD :: AB : AE :: 18 : 6 :: 3 : 1$. Ensuite $CA : AF :: 8 : 6 :: 4 : 3$. Ainsi appelant AM, r; BM, s;

Digitized by Google

AH, t; et HC, $\pm v$: comme les triangles AMB, ANE sont semblables, ainsi que AHC et ALF, on aura, $AN = -\frac{r}{3}$, $NE = -\frac{s}{3}$, $AL = -\frac{3t}{4}$, et $LF = \mp\frac{3v}{4}$. J'ai donné à ces différentes quantités des signes contraires à ceux de AM, MB, AH, HC, parce que toutes étant rapportées au point A, il est clair que si je donne le signe + aux lignes qui vont à droite de ce point, celles qui vont à gauche doivent avoir le signe —. Par la même raison, celles qui sont au-dessus de PAQ, telles que BM, étant affectées du signe +, celles qui sont au-dessous, telles que NE doivent avoir le signe —. Maintenant si on écrit respectivement ces valeurs à la place de x et de y dans l'équation feinte..... $a^2 \pm bx \pm c^2x^2 = y^2$, on aura,

En mettant r pour x et s pour y, $a^2 \pm br \pm cr^2 = s^2$.

En mettant $-\frac{r}{3}$ pour x et $-\frac{s}{3}$ pour y, on aura..... $a^2 \mp \frac{br}{3} \pm \frac{1}{9}cr^2 = \frac{1}{9}s^2$.

En mettant t pour x et $\pm v$ pour y, on aura, $a^2 \pm bt \pm ct^2 = v^2$. Enfin, si nous mettons $-\frac{3}{4}t$ pour x et $\mp\frac{3}{4}v$ pour y, nous aurons, $a^2 \mp \frac{3}{4}bt \pm \frac{9}{16}ct^2 = \frac{9}{16}v^2$. Si, au moyen des deux premières équations, on élimine s^2, afin d'avoir la valeur de r, on trouvera, $r = \frac{2a^2}{\pm b}$; d'où il suit que b est nécessairement positif. Ensuite éliminant v^2 au moyen des troisième et quatrième équations, afin d'obtenir la valeur de t, il viendra, $t = \frac{a^2}{3b}$. Après quoi, mettant dans la première équation, au lieu de r sa valeur $\frac{2a^2}{b}$, et dans le troisième, au lieu de t sa valeur $\frac{a^2}{3b}$, l'une deviendra, $3a^2 \pm \frac{4a^4c}{b^2} = s^2$, et l'autre, $\frac{4}{3}a^2 \pm \frac{a^4c}{9b^2} = v^2$.

Digitized by Google

Ensuite menant du point B, $B\lambda$ perpendiculairement à CH, on aura la proportion $BC : AD :: 3 : 1 :: B\lambda : AK :: C\lambda : DK$. Et comme $B\lambda = AM - AH = r - t = \frac{5a^2}{3b}$, on aura, $AK = \frac{5a^2}{9b}$, ou plutôt $AK = -\frac{5a^2}{9b}$. On a aussi, $C\lambda = CH \pm BM = v \pm s = \sqrt{\frac{4a^2}{3} \pm \frac{a^4c}{9b^2}} \pm \sqrt{3a^2 \pm \frac{4a^4c}{b^2}}$. Donc à cause de $DK = \frac{1}{3}C\lambda$, on aura, $DK = \sqrt{\frac{4a^2}{27} \pm \frac{a^4c}{81b^2}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{3} \pm \frac{4a^4c}{9b^2}}$. Ces quantités étant écrites dans l'équation, $a^2 + bx \pm cx^2 = y^2$, au lieu de AK et DK, ou de x et y, on aura, $\frac{4a^2}{9} \pm \frac{25a^4c}{81b^2} = \frac{13}{27}a^2 \pm \frac{37a^4c}{81b^2} \pm 2\sqrt{\frac{4a^2}{27} \pm \frac{a^4c}{81b^2}} \times \sqrt{\frac{a^2}{3} \pm \frac{4a^4c}{9b^2}}$. Et en réduisant, $-b^2 \mp 4a^2c = \pm 2\sqrt{36b^4 \pm 51a^2b^2c + 4a^4c^2}$. Quarrant de nouveau chaque membre et réduisant, on a..... $0 = 143b^4 \pm 196a^2b^2c$, ou bien $\pm c = -\frac{143b^2}{196a^2}$. D'où l'on voit que c doit être négatif, et que par conséquent, l'équation feinte, $a^2 \pm bx \pm cx^2 = y^2$ doit être de la forme $a^2 + bx - cx^2 = y^2$, et qu'ainsi la courbe qu'elle exprime est une ellipse. Voici de quelle manière on en trouvera le centre et les axes.

En supposant $y = 0$, comme cela arrive aux sommets P et Q, notre équation se réduit à $a^2 = cx^2 - bx$. Cette équation étant résolue donne, $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a^2}{c}} = AQ$ ou AP. Ainsi prenant $AV = \frac{b}{2c}$, le point V sera le centre de l'ellipse, et VP ou $VQ = \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a^2}{c}}$, la moitié du grand axe. Maintenant, si on écrit AV ou sa valeur $\frac{b}{2c}$, au lieu de x, dans l'équation....

Digitized by Google

$a^2 + bx - cx^2 = y^2$, elle deviendra, $a^2 + \frac{b^2}{4c} = y^2$. Ainsi... $a^2 + \frac{b^2}{4c} = \overline{VZ}^2$, quarré de la moitié du petit axe. Enfin si, dans les valeurs de AV, VQ, VZ déjà trouvées, on substitue au lieu de c sa valeur $\frac{143\,b^2}{196\,a^2}$, on aura, $AV = \frac{98\,a^2}{143\,b}$;..... $VQ = \frac{112\,a^2\sqrt{3}}{143\,b}$; et $VZ = \frac{8\,a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$.

Seconde partie analytique.

(*Pl.* VII, *Fig.* 7). Supposons que le piquet en A soit AR, et que RPQ soit le plan méridional, et $RPZQ$ le cône radieux dont le sommet est en R. Soit de plus TXZ un plan dont la commune section avec le plan horizontal soit VZ, et dont la commune section avec le plan méridional ou vertical soit TVX, et qu'on ait dirigé cette section TVX perpendiculairement à l'axe du monde; alors le plan TXZ sera lui-même perpendiculaire à l'axe du monde, et il coupera le cône dans la circonférence du cercle TZX, circonférence dont chaque point T, Z, X, sera également éloigné du sommet R du cône. Par conséquent si on mène à TVX une parallèle PS, on aura, $PR = RS$, à cause de $RX = RT$. On aura aussi, $SX = XQ$, à cause des lignes égales PV, VQ; d'où l'on conclut que RX ou $RZ = \frac{RS + RQ}{2} = \frac{RP + RQ}{2}$. Soit enfin tiré RV. Comme VZ est la commune section de deux plans perpendiculaires au plan PRQ, il s'en suit que VZ est elle-même perpendiculaire à ce plan, et que par conséquent le triangle RVZ est rectangle en V. Faisant donc $RA = d$, $AV = e$, VP ou $VQ = f$, et $VZ = g$, on aura, $AP = f - e$, et $RP =$.....

$\sqrt{f^2}$

Digitized by Google

$\sqrt{f^2 - 2ef + e^2 + d^2}$. Ensuite $AQ = f + e$, et $RQ = \ldots\ldots$ $\sqrt{f^2 + 2fe + e^2 + d^2}$. Par conséquent, $RZ = \frac{RP + RQ}{2} = \ldots$ $\frac{\sqrt{f^2 - 2fe + e^2 + d^2} + \sqrt{f^2 + 2fe + e^2 + d^2}}{2}$, dont le quarré..... $\frac{d^2 + e^2 + f^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{f^4 - 2e^2f^2 + e^4 + 2d^2f^2 + 2d^2e^2 + d^4}$ est égal à $\overline{RV}^2 + \overline{VZ}^2 = \overline{RA}^2 + \overline{AV}^2 + \overline{VZ}^2$. Or, $\overline{RA}^2 + \overline{AV}^2 + \overline{VZ}^2 = d^2 + e^2 + g^2$. Donc $d^2 + e^2 + g^2 = \frac{d^2 + e^2 + f^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{f^4 - 2e^2f^2 + e^4 + 2d^2f^2 + 2d^2e^2 + d^4}$. Et en faisant la réduction, on a, $\sqrt{f^4 - 2e^2f^2 + e^4 + 2d^2f^2 + 2d^2e^2 + d^4} = d^2 + e^2 - f^2 + 2g^2$. Et en quarrant et ordonnant, $d^2f^2 = \ldots\ldots$ $d^2g^2 + e^2g^2 - f^2g^2 + g^4$, ou bien, $\frac{d^2f^2}{g^2} = d^2 + e^2 - f^2 + g^2$. Enfin si à la place de AR, d; de AV, e; de VZ, g; et de VQ, f, on met les valeurs de ces lignes, déja connues ou déterminées, et qui sont respectivement, 6, $\frac{98a^2}{143b}$, $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$, $\frac{112a^2\sqrt{3}}{143b}$, notre dernière équation deviendra, $36 - \frac{196a^4}{143b^2} + \frac{192a^2}{143} = \frac{36 \times 14 \times 14a^2}{143b^2}$; et en réduisant, $\frac{49a^4 + 36 \times 49a^2}{48a^2 + 1287} = b^2$.

Dans la Figure 6, on a, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2$, c'est-à-dire, $r^2 + s^2 = \overline{33}^2$. Et nous avons trouvé, $r = \frac{2a^2}{b}$; et $s^2 = 3a^2 - \frac{4a^4c}{b^2}$. De $r = \frac{2a^2}{b}$, nous tirons $r^2 = \frac{4a^4}{b^2}$, et si nous substituons à la place de c sa valeur $\frac{143b^2}{196a^2}$, dans l'équation $s^2 = 3a^2 - \frac{4a^4c}{b^2}$, elle deviendra, $s^2 = \frac{4a^2}{49}$. Ensuite ces valeurs de r^2 et s^2, mises dans l'équation $r^2 + s^2 = \overline{33}^2$, la changent en celle-ci..... $\frac{4a^4}{b^2} + \frac{4a^2}{49} = \overline{33}^2$. Et en réduisant, on a encore, $\frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4a^2} = b^2$.

Digitized by Google

Égalant maintenant cette nouvelle valeur de b^2 à celle que nous avons trouvée plus haut, et divisant tout par 49, il nous viendra, $\frac{a^4 + 36a^2}{48a^2 + 1287} = \frac{4a^4}{53361 - 4a^2}$. Multipliant en sautoir les deux membres de cette équation, ordonnant et divisant par 49, il viendra, $4a^4 = 981a^2 + 39204$; équation dans laquelle a est l'inconnue qu'on cherche. Si on la résout par la méthode des équations du second degré, on trouvera, $a^2 = \frac{981 + \sqrt{1589625}}{8} = 280,2254144$. Nous avons trouvé plus haut, $\frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4a^2} = b^2$, ou bien..... $\frac{14a^2}{\sqrt{53361 - 4a^2}} = b$. Si dans $AV = \frac{98a^2}{143b}$, nous substituons cette valeur de b, il viendra, $AV = \frac{7\sqrt{53361 - 4a^2}}{143}$. De même si nous substituons encore cette valeur de b dans VP, ou $VQ = \frac{112a^2\sqrt{3}}{143b}$, nous aurons, $\frac{8\sqrt{160083 - 12a^2}}{143} = VP$ ou VQ. Et encore, en mettant 280,2254144, au lieu de a^2 dans les valeurs de AV et de VP ou VQ, que nous venons de trouver, nous aurons, en réduisant tout en décimales, $AV = 11,188297$, et VP ou $VQ = 22,147085$. Par conséquent $AP(VP - AV) = 10,958788$, et $AQ(AV + VQ) = 33,335382$.

Enfin si l'on prend pour rayon 1 pied ou $\frac{1}{6}AR$, on aura, $\frac{1}{6}AQ$ ou 5,555897 pour la tangente de l'angle ARQ, qui se trouvera de 79°, 47′, 48″. Et $\frac{1}{6}AP$ ou 1,826465 tangente de l'angle ARP, nous fait connaître que cet angle est de 61°, 17′, 57″. La demi-somme de ces angles est de 70°, 32′, 52″, complément de la déclinaison du soleil; et leur demi-différence 9°, 14′, 56″ est le complément de la latitude du lieu. Ainsi la déclinaison du soleil était de 19°, 27′, 8″, et la latitude du lieu de 80°, 45′, 4″. C. Q. F. T.

Digitized by Google

PROBLÊME LVI.

Une comète traversant le ciel d'un mouvement uniforme et rectiligne; il s'agit de déterminer, par quatre observations faites en différens temps, sa distance de la terre, et la loi de son mouvement d'après le systême de Copernic.

(*Pl.* VII, *Fig.* 8). Si de chacun des points du ciel où se trouvait le centre de la comète, au temps de chacune des observations, on abaisse autant de perpendiculaires sur le plan de l'écliptique, et que A, B, C, D soient les points où ces quatre perpendiculaires rencontrent ce plan, menez par ces points la droite AD; cette droite et la ligne que décrit la comète par son mouvement, seront coupées en même raison par les quatre perpendiculaires, de manière qu'on aura $AB : AC ::$ le temps qui s'est écoulé entre la première et la seconde observations : au temps entre la première et la troisième. On a encore, $AB : AD ::$ le temps entre la première et la seconde observations : au temps entre la première et la quatrième. Ainsi les temps des observations nous donnent les rapports que les lignes AB, AC, AD ont entre elles.

Soient de plus, le lieu du soleil dans l'écliptique, S; l'arc de l'écliptique dans lequel se meut la terre, EH; les quatre différens lieux où se trouvait la terre au temps de chacune des quatre observations, E, F, G, H. Supposons, par exemple, qu'elle se trouvait en E au temps de la première, en F au temps de la seconde, en G au temps de la troisième, et en H au temps de la quatrième. Joignez AE, BF, CG, DH; prolongez les trois dernières jusqu'à ce qu'elles coupent la première AE; le point de section de BF avec AE

Digitized by Google

sera I; celui de CG sera K; celui de DH sera L. Et les angles AIB, ACK, ALD seront les différences des longitudes observées de la comète; AIB, par exemple, sera la différence des longitudes entre le premier et le second lieux de la comète; AKC la différence des longitudes entre le premier et le troisième lieux; et ALD la différence des longitudes entre le premier et le quatrième. Ainsi les angles AIB, AKC et ALD sont donnés par les observations.

Joignez par des droites les points S, E; S, F; E, F. Et comme les points S, E, F sont donnés, ainsi que l'angle ESF, l'angle SEF sera aussi donné. On connaît également l'angle SEA, car il est la différence de la longitude de la comète et du soleil au temps de la première observation; ainsi, en ajoutant son complément à deux droits, c'est-à-dire, l'angle SEI, à l'angle SEF, vous aurez l'angle IEF. Donc dans le triangle IEF, on a les angles et le côté EF, et par conséquent, le côté IE est aussi donné. Par un semblable raisonnement, on verra que les côtés KE et LE sont aussi donnés. Les quatre lignes AI, BI, CK, DL sont donc données de position; ainsi le problême proposé revient à celui-ci: quatre droites étant données de position, en trouver une cinquième, qui soit coupée par les quatre premières dans un rapport donné.

Ayant abaissé sur AE les perpendiculaires BM, CN, DO, à cause de l'angle donné AIB, on a le rapport de BM à MI. Ensuite BM est à CN dans le rapport de BA à CA; et à cause de l'angle donné CKN, on a le rapport de CN à KN, et par conséquent, celui de BM à KN, ainsi que celui de BM à $MI - KN$, ou ce qui est la même chose, de BM à $MN + IK$. Faites, $P : IK :: AB : BC :: MA : MN$; d'où $P + MA : IK + MN :: AB : BC$. C'est-à-dire que $P + MA$ et $IK + MN$

Digitized by Google

sont entre eux en raison donnée. Donc on a aussi la raison de BM à $P + MA$. Par un raisonnement semblable, si on prend $Q : IL :: AB : BD$, on aura aussi le rapport de BM à $Q + MA$, et par conséquent, celui de BM à la différence des deux quantités $B + MA$ et $Q + MA$ sera aussi donné. Or la différence de ces deux quantités, c'est-à-dire, $P - Q$ ou $Q - P$ est donnée, donc BM, est aussi donné; et BM étant donné, $P + MA$ et MI le sont également, ainsi que MA, ME, AE et l'angle EAB.

Ces quantités étant trouvées, élevez au point A une perpendiculaire au plan de l'écliptique, et qui soit à AE comme la tangente de la latitude de la comète, dans la première observation, est au rayon; et l'extrémité de cette perpendiculaire ainsi déterminée de longueur, sera le lieu du centre de la comète au temps de la première observation. Par conséquent on connaîtra la distance de la comète à la terre, au temps de cette première observation. Si on élève de la même manière au point B une perpendiculaire qui soit à BF comme la tangente de la latitude de la comète, dans la seconde observation, est au rayon, on aura le lieu du centre de la comète dans cette seconde observation. Et joignant le premier lieu du centre au second, on aura la route que suit la comète dans le ciel.

Digitized by Google

PROBLÊME LVII.

Si un angle donné CAD n'a que la faculté de tourner autour du point A donné de position; que l'angle donné CBD n'ait aussi qu'un mouvement possible de rotation autour du point B donné de position; et que les deux angles tournent en effet selon cette loi, en supposant de plus que les côtés AD, BD se coupent toujours dans une ligne droite EF donnée de position: il s'agit de déterminer la courbe que décrira la suite des intersections C des deux autres côtés AC, BC.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 1). Prolongez CA jusqu'en d, afin d'avoir $Ad = AD$; prolongez également CB jusqu'en δ, afin d'avoir $BD = B\delta$; faites l'angle Ade égal à l'angle ADE, et l'angle $B\delta f$ égal à l'angle BDF, et prolongez de part et d'autre la droite AB, jusqu'à ce qu'elle rencontre de en e, et δf en f; prolongez aussi ed jusqu'en G, afin d'avoir $dG = \delta f$. Et du point C menez CH parallèlement à ed, et CK parallèlement à δf. Et si l'on conçoit que les lignes eG, $f\delta$ demeurent immobiles, tandis que les angles CAD, CBD tournent selon la loi prescrite, autour des poles A et B, on aura toujours $dG = \delta f$, et le triangle CKH sera donné d'espèce. (62). Faites donc $Ae = a$, $eG = b$, $Bf = c$, $AB = m$, $BK = x$, et $CK = y$, il viendra, $BK : CK :: Bf : \delta f$. Donc $\delta f = \frac{cy}{x} = dG$. Retranchez cette quantité de Ge, le reste sera, $ed = b - \frac{cy}{x}$. Comme le triangle CHK est donné d'espèce, faites $CK : CH :: d : e$, et $CH : HK :: e : f$, et vous aurez, $CH = \frac{ey}{d}$, et $HK = \frac{fy}{d}$. Par conséquent $AH = m - x - \frac{fy}{d}$. On a de plus, $AH : HC :: Ae : ed$, c'est-à-dire.....

Digitized by Google

$m - x - \frac{fy}{d} : \frac{cy}{d} :: a : b - \frac{cy}{x}$. Ainsi, en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on aura.....

$mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - \frac{bfy}{d} + \frac{cfy^2}{dx} = \frac{acy}{d}$. (63). Multipliez tous les termes par dx, ensuite ordonnez, et il viendra.....

$fcy^2 \left.\begin{matrix} +dc \\ -ae \\ -bf \end{matrix}\right\} yx - dcmy - bdx^2 + bdmx = 0$. D'où il suit que, les deux inconnues x et y ne s'élevant pas au-delà de deux dimensions, la courbe que décrit le point C est une section conique. Faites $\frac{ae + bf - dc}{c} = 2p$, et vous aurez.....

$y^2 = \frac{2p}{f} \cdot xy + \frac{dm}{f} \cdot y + \frac{bd}{fc} \cdot x^2 - \frac{bdm}{fc} \cdot x$. Et si l'on résout cette équation pour avoir la valeur de y, elle donnera.....

$y = \frac{px}{f} + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\frac{p^2x^2}{f^2} + \frac{bdx^2}{fc} + \frac{pdmx}{f^2} - \frac{bdmx}{fc} + \frac{d^2m^2}{4f^2}}$.

D'où l'on conclut que la courbe est une hyperbole, si $\frac{bd}{fc}$ est positif, ou si, étant négatif, il est moins grand que $\frac{p^2}{f^2}$. Elle sera une parabole, si $\frac{bd}{fc}$ est négatif et égal à $\frac{p^2}{f^2}$; un cercle ou une ellipse, si $\frac{bd}{fc}$ est négatif, et plus grand que $\frac{p^2}{f^2}$. C. Q. F. T.

PROBLÊME LVIII.

Décrire une parabole qui passe par quatre points donnés.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 2). Soient ces quatre points A, B, C, D; joignez A et B, et coupez AB en deux parties égales au point E. Menez une droite quelconque EV que vous supposerez un diamètre de la parabole, et le point V, le sommet de ce diamètre. Joignez A et C, et

Digitized by Google

par le point D menez à AB la parallèle DG qui rencontrera AC en G. Faites $AB = a$, $AC = b$, $AG = c$, et $GD = d$. Sur AC prenez une ligne AP d'une grandeur quelconque ; par le point P menez à AB la parallèle PQ, et supposez que le point Q appartient à la parabole. Faites $AP = x$, et $PQ = y$. Prenez ensuite une équation quelconque à la parabole, et qui exprime la relation qui existe entre AP et PQ. Soit cette équation $y = e + fx \pm \sqrt{g^2 + hx}$.

Actuellement supposez AP ou $x = 0$, le point P tombera en A, et PQ ou y aura deux valeurs, l'une zéro, et l'autre $-AB$. Faisons donc, dans l'équation que nous avons prise, $x = 0$, elle deviendra, $y = e \pm \sqrt{g^2}$, c'est-à-dire $y = e \pm g$. De ces deux valeurs, la plus grande est, $y = e + g$, et la plus petite est, $y = e - g = -AB = -a$. Or dans le cas de $x = 0$, nous avons vu qu'une valeur de y était aussi zéro. Donc on a, $0 = e + g$ (*), ce qui donne, $e = -g$. De la seconde équation, $e - g = -a$, on tire, en mettant pour e sa valeur $-g$, trouvée par la première équation, on tire, dis-je, $-2g = -a$, ou $g = \frac{1}{2}a$. Ainsi, au lieu de l'équation que nous avons prise, nous aurons celle-ci, $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + hx}$.

Supposons encore que AP ou $x = AC$, de manière que le point P tombe en C, nous aurons de nouveau $PQ = 0$. Au lieu de x dans la dernière équation, écrivez AC ou b, et au lieu de y, 0, et elle deviendra, $0 = -\frac{1}{2}a + fb \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bh}$. Ou bien.....

(*) Il est bien évident que, dans le cas de $x = 0$, la plus grande valeur de y est zéro, puisque son autre valeur est négative, et qu'une quantité négative est plus petite que zéro.

$\frac{1}{2}a -$

Digitized by Google

$\frac{1}{2}a - fb = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bh}$. Et en quarrant chaque membre..... $-afb + f^2b^2 = bh$, ou bien, $f^2b - fa = h$. Par conséquent, au lieu de l'équation supposée, nous aurons celle-ci..... $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2bx - fax}$.

Supposons de nouveau que AP ou $x = AG$ ou c, nous aurons, PQ ou $y = -GD = -d$. Ecrivons donc, dans la dernière équation, c au lieu de x, et $-d$ au lieu de y, et elle deviendra, $-d = -\frac{1}{2}a + fc \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2bc - fac}$. Ou bien..... $\frac{1}{2}a - d - fc = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2bc - fac}$, et, en quarrant chaque membre et réduisant, $-ad + d^2 + 2def + c^2f^2 = f^2bc$. On voit que f étant l'inconnue, l'équation est du second degré. Si, pour abréger, on fait $b - c$ ou $GC = k$, et qu'on résolve l'équation, on trouvera, $f = \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{d^2c + d^2k - adk}{ck^2}}$. f étant ainsi déterminée, l'équation $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2bx - fax}$, est entièrement déterminée, et par conséquent aussi la parabole dont elle exprime la nature.

Voici de quelle manière on la construira. Du point C menez à BD la parallèle CH jusqu'à ce qu'elle rencontre DG en H; prenez une moyenne proportionnelle DK entre DG et DH; tirez la droite CK, et parallèlement à CK menez EI qui passe par le point E milieu de AB, et qui rencontre DG en I; prolongez ensuite IE jusqu'en V, de manière que vous ayez $EV : EI :: \overline{EB}^2 : \overline{DI}^2 - \overline{EB}^2$, alors VE sera un diamètre de la parabole, V sera le sommet de ce diamètre, et $\frac{\overline{BE}^2}{VE}$ sera son paramètre. (64).

Digitized by Google

PROBLÊME LIX.

Décrire une section conique qui passe par cinq points donnés.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 3). Soient ces points A, B, C, D, E. Tirez AC, BE qui se couperont mutuellement en H. Menez à BE la parallèle DI, qui rencontrera AC au point I; ensuite à AC la parallèle EK, qui rencontrera en K, DI prolongée. Il faut prolonger aussi DI jusqu'en F, et EK jusqu'en G, afin d'avoir la proportion $AH \times HC : BH \times HE :: AI \times IC : FI \times ID :: EK \times KG : FK \times KD$. Et les points F et G appartiendront, comme on sait, à la section conique. Il faut cependant observer que si le point H tombe entre tous les points A, C, B, E, ou hors de tous ces points, le point I devra tomber entre tous les points A, C, D, F, ou bien entièrement au-dehors; et le point K entre tous les points D, F, E, G, ou entièrement au-dehors. (65). Mais si le point H tombe entre les deux points A, C, et hors des deux autres points B, E; ou entre les deux points B, E, et hors des deux autres A, C, le point I devra tomber entre deux quelconques des quatre points A, C, F, D, et hors des deux autres. De même le point K devra tomber entre deux quelconques des quatre points D, F, E, G, et hors de deux de ces mêmes quatre points. C'est ce qui arrivera en prenant IF, KG d'un côté ou de l'autre des points I et K, selon que l'exige le problême. Les points F et G étant déterminés, coupez AC et EG en deux parties égales, en N et en O, ainsi que BE et FD en L et en M. Tirez NO, LM qui se couperont mutuellement en R, et LM et NO seront les diamètres de la section conique; le point R en sera le centre, et BL et FM seront les

Digitized by Google

ordonnées du diamètre LM. Prolongez LM de part et d'autre, si cela est nécessaire, jusqu'aux points P et Q, de manière que vous ayiez $\overline{BL}^2 : \overline{FM}^2 :: PL \times LQ : PM \times MQ$, et les points P et Q seront les sommets de la section conique, et PQ en sera le diamètre principal. Faites $PL \times LQ : \overline{LB}^2 :: PQ : T$, et T sera le paramètre. Ces deux lignes connues, la section est déterminée.

Il reste maintenant à montrer de quelle manière il faut prolonger de part et d'autre la droite LM jusqu'aux points P et Q, pour qu'on ait la proportion $\overline{BL}^2 : \overline{FM}^2 :: PL \times LQ : PM \times MQ$. D'abord $PL \times LQ = (PR - LR)(PR + LR)$, car $PL = PR - RL$, et $LQ = RQ + RL$, ou $PR + RL$. Enfin $(PR - RL)(PR + RL) = \overline{PR}^2 - \overline{RL}^2$. On a de même $PM \times MQ = (PR + RM)(PR - RM) = \overline{PR}^2 - \overline{RM}^2$. Donc $\overline{BL}^2 : \overline{FM}^2 :: \overline{PR}^2 - \overline{RL}^2 : \overline{PR}^2 - \overline{RM}^2$. Et en soustrayant, $\overline{BL}^2 - \overline{FM}^2 : \overline{FM}^2 :: \overline{RM}^2 - \overline{RL}^2 : \overline{PR}^2 - \overline{RM}^2$. Par conséquent $\overline{BL}^2 - \overline{FM}^2$ et $\overline{FM}^2$ étant donnés, ainsi que $\overline{RM}^2 - \overline{RL}^2$, il s'en suit qu'on aura aussi, $\overline{PR}^2 - \overline{RM}^2$. Et si à cette dernière quantité vous ajoutez la quantité donnée $\overline{RM}^2$, la somme sera $\overline{PR}^2$. Donc l'on connaîtra le demi-diamètre $PR = QR$.

Digitized by Google

PROBLÊME LX.

Décrire une section conique qui passe par quatre points donnés, et qui, dans un de ces points, touche une ligne droite donnée de position.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 4). Soient les quatre points donnés A, B, C, D, et AE la droite donnée de position, que doit toucher la section conique au point A. Joignez deux quelconques des quatre points, D et C par exemple, et prolongez la droite DC, s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre en E la ligne tangente. Par le point B, menez à DC la parallèle BF, qui rencontrera la ligne tangente en F. Ensuite par le point D, menez à AE une parallèle DI, qui rencontrera BF en I. Sur les droites BF, DI prolongées, s'il est nécessaire, prenez FG, HI d'une longueur telle, que vous ayez la proportion $\overline{AE}^2 : CE \times ED :: \overline{AF}^2 : BF \times FG :: DI \times IH : BI \times IG$, et les points G et H seront, comme on sait, à la section conique (66), pourvu que vous preniez FG, IH du côté convenable, par rapport aux points F et I, comme on l'a enseigné dans le problême précédent. Coupez en deux parties égales les droites BG, DC, DH en K, L, M; tirez KL, MA qui se couperont en O; et O sera le centre, A, le sommet, et MH l'ordonnée du demi-diamètre AO. Toutes ces choses étant connues, la section conique est déterminée.

Digitized by Google

PROBLÊME LXI.

Décrire une section conique qui passe par trois points donnés, et qui, dans deux de ces points, touche deux droites données de position.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 5). Soient ces points donnés A, B, C; les tangentes aux points A et B, AD et BD; enfin D l'intersection commune des deux tangentes. Coupez AB en deux parties égales au point E, tirez DE que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre en F la droite CF menée parallèlement à AB, vous aurez DF pour le diamètre de la courbe, et AE et CF seront les ordonnées à ce diamètre. Prolongez DF jusqu'en O, et sur DO prenez OV moyenne proportionnelle entre DO et EO. (*). Faites en même temps cette proportion, $\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 :: VE \times (VO + OE) : VF \times (VO + OF)$. Le point V sera le sommet de la courbe, et le point O en sera le centre. Ces points connus, la figure est déterminée. Actuellement $VE = VO - OE$; et par conséquent $VE(VO + OE) = (VO - OE)(VO + OE) = \overline{VO}^2 - \overline{OE}^2$. En outre, comme VO est moyenne proportionnelle entre DO et

(*) Le lecteur doit bien voir que O étant le centre inconnu de la courbe, les lignes DO, VO, EO sont toutes inconnues; mais aussitôt que ce point O sera connu, ces trois lignes le seront aussi. Car l'équation à la soutangente pour l'ellipse et l'hyperbole (seules sections coniques qui aient un centre) étant $s = \frac{\frac{1}{4}a^2 - x^2}{x}$, on en tire pour l'ellipse $\frac{1}{4}a^2 = x(s + x)$, ou $\overline{VO}^2 = EO \times DO$. Donc toutes les opérations que Newton fait avec ces lignes, sont purement analytiques, jusqu'à ce que le centre O soit déterminé.

Digitized by Google

EO, on aura, $\overline{VO}^2 = DO \times EO$; par conséquent $\overline{VO}^2 - \overline{OE}^2 = DO \times OE - \overline{OE}^2 = OE(DO - OE) = OE \times DE$. Par le même raisonnement on trouvera, $VF(VO + OF) = \overline{VO}^2 - \overline{OF}^2 = DO \times OE - \overline{OF}^2$; par conséquent on a, $\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 :: DE \times EO : DO \times OE - \overline{OF}^2$. De plus, $\overline{OF}^2 = \overline{EO}^2 - 2FE \times EO + \overline{FE}^2$. Ainsi, $DO \times OE - \overline{OF}^2 = DO \times OE - \overline{OE}^2 + 2FE \times EO - \overline{FE}^2 = DE \times EO + 2FE \times EO - \overline{FE}^2$, et alors $\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 :: DE \times EO : DE \times EO + 2FE \times EO - \overline{FE}^2 :: DE : DE + 2FE - \frac{\overline{FE}^2}{EO}$. Ainsi la quantité $DE + 2EF - \frac{\overline{FE}^2}{EO}$ est connue; retranchez-la de la quantité également connue $DE + 2FE$, et il restera, $\frac{\overline{FE}^2}{EO}$, quantité connue; appelez-la N, et vous aurez, $\frac{\overline{FE}^2}{N} = EO$. Ainsi vous connaîtrez EO, qui elle-même, fera connaître VO, moyenne proportionnelle entre DO et EO.

C'est ainsi qu'au moyen de quelques théorêmes d'Apollonius, on résout, d'une manière assez expéditive, ces sortes de problêmes, qui peuvent l'être aussi sans autre secours que la seule algèbre. Par exemple, si on voulait résoudre ainsi celui des trois derniers problêmes, où il s'agit de faire passer une section conique par cinq points donnés, A, B, C, D, E (*Pl.* VIII, *Fig.* 6); joignez d'abord deux quelconques des cinq points, A et C; joignez-en après cela deux autres B et E, et les droites AC, BE se couperont en un point H. Menez parallèlement à BE la droite DI qui rencontrera AC en I; menez encore parallèlement BE une autre droite quelconque KL rencontrant AC en K, et la section conique en L.

Digitized by Google

Supposez que la section conique est donnée, afin que le point K étant connu, le point L le soit aussi, en faisant $AK = x$ et $KL = y$. Afin d'exprimer la relation qui existe entre les x et les y, prenez l'équation la plus générale des sections coniques, par exemple, $a + bx + cx^2 + dy + exy + y^2 = 0$, dans laquelle a, b, c, d, e marquent des quantités déterminées avec leurs signes, et x et y des quantités indéterminées. Maintenant, si nous pouvons trouver la valeur des quantités déterminées, nous aurons la section conique. Supposons donc que le point L tombe successivement en A, C, B, E, D, et voyons ce qui en résulte. D'abord, que L tombe en A, on aura, dans ce cas, AK et KL, c'est-à-dire, x et y égales à zéro, et tous les termes de l'équation s'évanouiront. Ainsi il faut effacer a de cette équation, qui deviendra, $bx + cx^2 + dy + exy + y^2 = 0$. Ensuite si L tombe en C, on aura, AK ou $x = AC$ et LK ou $y = 0$. Faites donc $AC = f$; et substituant f pour x, et 0 pour y, dans l'équation à la courbe, elle deviendra $bf + cf^2 = 0$, ou bien $b = -cf$. Et si on écrit encore $-cf$ pour b dans l'équation, elle se changera en $-cfx + cx^2 + dy + exy + y^2 = 0$. Ensuite, si le point L tombe sur le point B, on aura, AK ou $x = AH$ et KL ou $y = BH$. Faites $AH = g$, et $BH = h$, et écrivez g au lieu de x, et h au lieu de y dans l'équation, elle deviendra, $-cfg + cg^2 + dh + egh + h^2 = 0$. Si le point L tombe en E, on aura, $AK = AH$, ou $x = g$, et KL ou $y = HE$. Au lieu de HE, écrivez $-k$ (avec un signe négatif, parce que HE tombe de l'autre côté de AC) et en substituant g pour x et $-k$ pour y, la dernière équation devient, $-cfg + cg^2 - dk - egk + k^2 = 0$. Retranchez cette équation de la précédente, et il restera $dh + egh + h^2 + dk + egk - k^2 = 0$. Divisez ce reste par $h + k$, et le quotient sera $d + eg +$

Digitized by Google

$h - k = 0$, multipliez-le par h, et retranchez le produit $dh + egh + h^2 - hk = 0$, de l'équation $-cfg + cg^2 + dh + egh + h^2 = 0$, et le reste sera, $-cfg + cg^2 + hk = 0$, d'où l'on tire..... $c = \frac{hk}{-g^2 + fg}$. Enfin si le point L tombe en D, on aura, AK ou $x = AI$ et KL ou $y = DI$. Ainsi écrivez au lieu de AI, m, et au lieu de DI, n, et substituez m pour x et n pour y dans l'équation $-efx + cx^2 + dy + exy + y^2 = 0$, et elle deviendra.... $-cfm + cm^2 + dn + emn + n^2 = 0$. Divisez cette dernière par n, et vous aurez, $\frac{-cfm + cm^2}{n} + d + em + n = 0$. Retranchez-en $d + eg + h - k = 0$, et vous aurez pour reste $\frac{-cfm + cm^2}{n} + em - eg + n - h + k = 0$, ou bien $\frac{cm^2 - cfm}{n} + n - h + k = eg - em$. Maintenant, à cause des points donnés A, B, C, D, E, les lignes AC, AH, AI, BH, EH, DI sont connues. Or ces lignes étant représentées respectivement par f, g, m, h, k, n, il s'en suit que ces dernières quantités sont aussi connues. Donc l'équation..... $c = \frac{hk}{fg - g^2}$ nous donne la valeur de c, et c étant connu, nous aurons la valeur de $eg - em$ par l'équation $\frac{cm^2 - cfm}{n} + n - h + k = eg - em$. Et la quantité $eg - em$ ou $e(g - m)$ étant connue, ainsi que le facteur $g - m$, l'autre facteur e est aussi connu. Tout cela étant trouvé, l'équation $d + eg + h - k = 0$, ou bien $d = k - h - eg$, nous donnera la valeur de d. On connaît maintenant la valeur de toutes les quantités déterminées qui entrent dans l'équation $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$. Avec cette équation, l'on déterminera, par le moyen de la méthode de Descartes, l'espèce de section conique qui résout le problême.

Si on donne seulement quatre points A, B, C, E et la position d'une droite AF qui touche la section conique, et passe par un des

Digitized by Google

des quatre points donnés A, on pourra plus facilement déterminer l'espèce de section en cette manière : ayant trouvé comme ci-dessus les équations $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$; $d = k - h - eg$, et $c = \frac{hk}{fg - g^2}$, imaginez que la tangente AF aille rencontrer la droite EH en F; ensuite que le point L se meuve sur le périmètre de la Figure CDE, jusqu'à ce qu'il vienne tomber au point A; la raison dernière de LK à AK sera celle de FH à AH, comme il est aisé de le voir en considérant la Figure. Faites $FH = p$, et dans le cas qui nous occupe, où on cherche la raison dernière de LK à AK, on aura, $p : g :: y : x$, ou $\frac{gy}{p} = x$. Donc à la place de x dans l'équation $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$, écrivez, $\frac{gy}{p}$, et il viendra, $\frac{cfgy}{p} = \frac{cg^2y^2}{p^2} + dy + \frac{egy^2}{p} + y^2$. Divisez tout par y, et elle sera réduite à, $\frac{cfg}{p} = \frac{cg^2y}{p^2} + d + \frac{egy}{p} + y$. Maintenant, comme on suppose que le point L tombe au point A, il s'en suit que KL ou y est infiniment petit ou nul; effacez donc les termes multipliés par y, et l'équation sera réduite à $\frac{cfg}{p} = d$. Faites donc $c = \frac{hk}{fg - g^2}$, ensuite $d = \frac{cfg}{p}$, et enfin $e = \frac{k - h - d}{g}$. Et c, e, d étant une fois trouvés, l'équation $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$, déterminera la section conique.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 7). Si enfin on ne donne que trois points A, B, C, et la position de deux droites AT, CT qui touchent la section conique dans deux de ces points A et C, on obtiendra, comme ci-dessus, l'équation à une section conique, $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$. Ensuite si on suppose que l'ordonnée KL soit

Digitized by Google

parallèle à la tangente AT, et que de plus cette ordonnée soit prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la courbe en un second point M, et qu'ensuite cette ligne LM, glissant parallèlement à elle-même, s'approche sans cesse de la tangente AT, jusqu'à ce qu'elle s'y confonde au point A; il est visible qu'à ce point la dernière raison de KL à KM sera une raison d'égalité; il suffit, pour s'en assurer, de regarder la Figure. Ainsi, dans ce cas, KL et KM étant égaux, c'est-à-dire les deux valeurs de y pour le point A, l'une positive, et l'autre négative, étant égales, il en résulte que dans l'équation $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$, les termes où y est d'une dimension impaire, tels que $dy + exy$ doivent s'évanouir par rapport au terme y^2, où y est d'une dimension paire; car autrement les deux valeurs de y, l'une positive, l'autre négative, ne pourraient pas être égales. De plus, AK ou x est infiniment moindre que LK ou y, et par conséquent le terme exy infiniment moindre que y^2; on peut donc le regarder comme nul par rapport à y^2. Mais le terme dy ne s'évanouirait pas, comme il est nécessaire, à moins que d ne soit infiniment petit, ou plutôt nul, car autrement dy serait infiniment plus grand que y^2. Nous supposerons donc $d = 0$, et nous effacerons dy; alors il ne restera que $cfx = cx^2 + exy + y^2$, équation à une section conique. Imaginons que les deux tangentes se coupent mutuellement en un point T, et que le point L s'avance vers le point C jusqu'à ce qu'il s'y confonde; la raison dernière de KL à KC sera celle de AT à AC. Nous avons appelé KL, y; AK, x; et AC, f; ainsi KC sera $f - x$. Faisons $AT = g$, et la raison dernière de y à $f - x$ sera celle de g à f. L'équation $cfx = cx^2 + exy + y^2$, peut s'écrire de cette manière, $cfx - cx^2 = exy + y^2$, ou bien $(f - x)cx =$

Digitized by Google

$y(ex+y)$, ce qui nous donne la proportion, $y : f - x :: cx : ex+y$. Par conséquent, $g : f :: cx : ex+y$. Mais lorsque le point L tombe au point C, $y = 0$. Donc $g : f :: cx : ex$, ou bien, en divisant le dernier rapport par x, $g : f :: c : e$. D'où l'on tire, $\frac{cf}{g} = e$. Donc si dans l'équation $cfx = cx^2 + exy + y^2$, on écrit $\frac{cf}{g}$ au lieu de e, elle deviendra, $cfx = cx^2 + \frac{cf}{g} . xy + y^2$, équation à une section conique. Enfin par le point donné B, par lequel doit passer la section conique, menez parallèlement à LK ou à AT la droite BH, qui rencontrera AC en H; et imaginez que LK s'approche de BH, jusqu'à ce qu'elle s'y confonde. Dans ce cas, $AH = x$, et $BH = y$. Faites la ligne donnée $AH = m$, et la ligne donnée $BH = n$; et au lieu de x et y, substituez respectivement m et n dans l'équation $cfx = cx^2 + \frac{cf}{g} . xy + y^2$, et elle deviendra, $cfm = cm^2 + \frac{cf}{g} . mn + n^2$, que vous pouvez écrire ainsi, $cfm - cm^2 - \frac{cf}{g} . mn = n^2$. Faites, $f - m - \frac{fn}{g} = s$, et vous aurez, $csm = n^2$. Divisez chaque membre par sm, et il viendra, $c = \frac{n^2}{sm}$. La quantité c étant connue, l'équation à une section conique $cfx = cx^2 + \frac{cf}{g} . xy + y^2$, est déterminée. Et ensuite, par la Méthode de Descartes, on trouvera à quelle section conique elle appartient, et l'on pourra la décrire.

Jusqu'ici j'ai résolu un grand nombre de problêmes de différentes espèces, parce que dans l'étude des sciences, les exemples sont bien plus utiles que les préceptes. Parmi ces problêmes, il en est quelques-uns que j'ai résolus sans le secours de l'algèbre; et j'ai voulu

Digitized by Google

faire comprendre par-là qu'une question qui paraît difficile au premier coup-d'œil, n'a pourtant pas toujours besoin d'algèbre pour être résolue. Mais il est temps maintenant d'enseigner la méthode de résoudre les équations; car dès qu'un problême a été mis en équation, il faut savoir obtenir les valeurs des différentes racines de cette équation, puisque c'est d'elles que dépend la solution du problême.

FIN DU TOME PREMIER.

Digitized by Google

ARITHMÉTIQUE
UNIVERSELLE
DE NEWTON.

Digitized by Google

Digitized by Google

ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE DE NEWTON,

TRADUITE

DU LATIN EN FRANÇAIS;

AVEC

DES NOTES EXPLICATIVES,

PAR NOEL BEAUDEUX.

TOME SECOND.

A PARIS,

Chez BERNARD, Libraire, quai des Augustins, N°. 31.

An X. — 1802.

Digitized by Google

Digitized by Google

ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE, OU DE LA COMPOSITION ET DE LA DÉCOMPOSITION ARITHMÉTIQUES.

De la manière de résoudre les Équations.

LORSQU'ON est parvenu à mettre une question en équation, et que cette équation est réduite et ordonnée, si les quantités connues représentées par des lettres, désignent des nombres, il faut substituer à ces lettres, les nombres qu'elles représentent, et on aura une équation numérique; dont la racine satisfera à la question. Par exemple, dans la division d'un angle en cinq parties égales, si je prends r pour le rayon du cercle, q pour la corde du double du complément de l'angle proposé, et x pour la corde du double du complément de la cinquième partie de cet angle, et que je sois parvenu à cette équation $x^5 - 5r^2x^3 + 5r^4x - r^4q = 0$ (*), il peut y avoir des

(*) Pour bien entendre cet énoncé, et savoir de quelle manière l'équation a été trouvée, consultez le problême XXIX, page 174, Tome Ier. et les notes qui s'y rapportent.

Digitized by Google

cas particuliers où le rayon r me serait donné en nombres, ainsi que q, corde du double du complément de l'angle proposé : par exemple, si $r = 10$ et $q = 3$, je substitue ces nombres à la place de r et de q dans l'équation, et elle devient $x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0$, et en tirant la racine de cette équation, on aura la valeur de x, ou la corde du double du complément de la cinquième partie de l'angle donné.

De la nature des Racines des Équations.

La racine d'une équation est un nombre qui, étant substitué dans l'équation à la place de la lettre qui le représente, fait évanouir tous les termes.

Ainsi, dans l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, l'unité est une racine, car, étant substituée à la place de x, elle change l'équation en celle-ci : $1 - 1 - 19 + 49 - 30$, ce qui se réduit à zéro. Mais il peut y avoir plusieurs autres racines de la même équation; car si, à la place de x et de ces puissances, on substitue 2 et ses puissances, elle deviendra, $16 - 8 - 76 + 98 - 30$, quantité où tous les termes se détruisent. Ensuite si, à la place de x et de ses puissances, on substitue $+3$ ou -5 et leurs puissances, l'équation sera encore réduite à zéro. Dans ces quatre cas, les termes positifs sont détruits par les négatifs. Ainsi, comme les nombres 1, 2, 3 et -5 substitués successivement dans l'équation, y remplissent la même fonction que x, qui est de réduire à zéro la totalité de ses termes, chacun de ces nombres est une racine de l'équation.

En effet, il n'est pas étonnant qu'une équation ait plusieurs racines, puisqu'un même problême a plusieurs solutions.

Par exemple, si l'on cherche l'intersection de deux cercles donnés,

Digitized by Google

il est évident qu'il y a deux intersections, et par conséquent l'équation a deux solutions. Donc l'équation qui détermine l'intersection a deux racines, une pour chaque intersection; à moins que, dans les quantités données, il n'y ait quelque condition qui détermine la réponse à une seule intersection.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 8). Qu'il s'agisse, par exemple, de trouver la cinquième partie *AP* de l'arc *APB*. Alors l'équation qui donnera la solution de ce problême, exprimera la cinquième partie de tous les arcs qui sont terminés aux points *A* et *B*. Ainsi elle exprimera la cinquième partie de *ASB*; la cinquième partie de *APBSAPB*; celle de *ASBPASB*; celle de *APBSAPBSAPB*, tout aussi bien que la cinquième partie de *APB*. Et si vous divisez toute la circonférence en cinq parties égales, *PQ*, *QR*, *RS*, *SF*, *FP*; la cinquième partie de chacun des arcs ci-dessus, sera respectivement, *AF*, *AQ*, *AFS*, *AQR*. Ainsi, en cherchant la cinquième partie de tous les arcs que soutend la corde *AB*, il faut, pour déterminer tous les cas, couper la circonférence en cinq points *P*, *Q*, *R*, *S*, *F*, et par conséquent l'équation qui doit renfermer tous ces cas, aura cinq racines; car la cinquième partie de chacun de ces arcs dépend des mêmes données; et on calculerait l'équation pour la quintisection de chacun d'eux, de la même manière; de sorte qu'on arriverait toujours à la même équation finale, soit qu'on cherchât la cinquième partie de l'arc *APB*, ou la cinquième partie de l'arc *ASB*, ou enfin la cinquième partie d'un arc quelconque de ceux que nous avons nommés. Donc si l'équation propre à déterminer la cinquième partie de l'arc *APB*, n'avait qu'une seule racine, comme c'est aussi la même équation qui donne la cinquième partie de l'arc *ASB*, il suivrait de-là, que les cinquièmes parties de deux arcs inégaux

Digitized by Google

seraient égales, parce que l'une et l'autre seraient exprimées par la racine unique d'une même équation.

Il est donc nécessaire que l'équation de tout problême ait autant de racines que le problême lui-même renferme de cas différens dépendans des mêmes données, et déterminés par la même méthode de calcul.

L'équation peut avoir autant de racines qu'elle a de dimensions, mais elle ne peut pas en avoir davantage.

Ainsi l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, a quatre racines, 1, 2, 3, — 5. Mais elle n'en a pas davantage. En effet, chacun de ces nombres, mis dans l'équation à la place de x, fera que tous les termes se détruiront mutuellement, comme nous l'avons vu. Mais tout autre nombre, hors ces quatre, étant substitué à la place de x, n'opérera pas cette destruction.

Au reste, on jugera facilement et de la nature, et du nombre des racines d'une équation, par la manière même dont se forme l'équation.

Par exemple, si nous voulons savoir de quelle manière se forme l'équation dont les racines sont 1, 2, 3, et — 5, il n'y a qu'à supposer que x désigne ces nombres d'une manière ambiguë, c'est-à-dire, que $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = -5$, ou bien que $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$ et $x + 5 = 0$. Si on multiplie d'abord $x - 1$ par $x - 2$, on aura, $x^2 - 3x + 2 = 0$, équation de deux dimensions, et qui a deux racines 1 et 2. Et si on multiplie cette équation par $x - 3$, on aura, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, qui a trois racines; et celle-ci multipliée encore par $x + 5$, donne $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, comme ci-dessus. Ainsi cette équation étant engendrée par les quatre facteurs, $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, $x + 5$ multipliés les uns par les autres, si un de

Digitized by Google

ces facteurs devient zéro, le produit de tous les autres par celui-ci doit être zéro. Mais lorsqu'aucun des facteurs n'est zéro, il est impossible que le produit total soit zéro. Par conséquent, l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30$, ne peut être égale à zéro que dans quatre cas; lorsque $x - 1 = 0$, ou bien $x - 2 = 0$, ou $x - 3 = 0$, ou $x + 5 = 0$. Donc les seuls nombres, 1, 2, 3 et -5 peuvent être les valeurs de x, ou être les racines de l'équation. Il faut en dire autant de toutes les équations, parce que nous pouvons imaginer que toutes sont engendrées par une pareille multiplication, quoique ordinairement, il soit fort difficile de reconnaître les facteurs particuliers qui ont servi à les produire; car cette décomposition d'une équation en ses facteurs primitifs, est proprement la résolution de l'équation, ou l'extraction de ses racines. Or les racines étant connues, les facteurs le sont aussi.

Il y a différentes espèces de racines; les positives, comme sont, dans l'exemple cité, 1, 2, 3, et les négatives, comme -5. Enfin il se rencontre assez fréquemment des racines impossibles, qu'on appelle imaginaires.

Ainsi dans l'équation $x^2 - 2ax + b^2 = 0$, les deux racines sont, $a + \sqrt{a^2 - b^2}$, et $a - \sqrt{a^2 - b^2}$. Ces deux racines sont réelles, lorsque a^2 est plus grand que b^2; mais elles sont impossibles ou imaginaires, lorsque a^2 est plus petit que b^2, parce qu'alors $a^2 - b^2$ est une quantité négative, et que la racine quarrée d'une telle quantité est impossible, puisque toute racine réelle, soit positive, soit négative, étant multipliée par elle-même, produira toujours un quarré positif. Ainsi la racine d'un quarré négatif est impossible. Par un semblable raisonnement, on voit que l'équation $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = 0$, a une racine réelle, qui est 2, et deux autres,

Digitized by Google

$1 + \sqrt{-2}$, et $1 - \sqrt{-2}$, qui sont imaginaires. Car en écrivant l'une quelconque de ces trois racines, 2, $1 + \sqrt{-2}$, $1 - \sqrt{-2}$, à la place de x, dans l'équation, tous les termes se détruisent mutuellement. Or les deux racines, $1 + \sqrt{-2}$, et $1 - \sqrt{-2}$, sont imaginaires, parce qu'il faut, pour les obtenir, tirer la racine quarrée du nombre négatif -2, ce qui est impossible.

Il faut bien que dans les équations il y ait des racines impossibles, sans quoi, dans les problêmes, certains cas impossibles se trouveraient possibles.

Si l'on veut, par exemple, déterminer l'intersection d'un cercle par une ligne droite; qu'on exprime par une lettre la longueur du rayon, et par une autre lettre la distance de la ligne droite au centre du cercle; et que, parvenu à l'équation qui exprime l'intersection, on mette, au lieu de la lettre qui désigne la distance de la droite au centre, un nombre plus petit que le rayon, l'intersection sera possible. Mais si, au lieu de cette lettre, on met un nombre plus grand que le rayon, l'intersection sera impossible. Ainsi l'équation devant exprimer tous les cas du problême, aussi bien ceux qui sont impossibles que ceux qui sont possibles, il faut que ses deux racines puissent devenir possibles ou imaginaires.

Ainsi lorsqu'un cercle *CDEF* et une ellipse *ACBF* (*Pl.* VIII, *Fig.* 9) se coupent mutuellement aux points *C*, *D*, *E*, *F*, et que des points d'intersection on abaisse sur la droite *AB* donnée de position, des perpendiculaires *CG*, *DH*, *EI*, *FK*, et qu'en cherchant la longueur de l'une quelconque de ces perpendiculaires, on arrive enfin à une équation; il faudra, puisque le cercle coupe l'ellipse en quatre points, il faudra, dis-je, que cette équation ait

Digitized by Google

quatre racines, qui seront ces quatre perpendiculaires. Que si le centre du cercle demeurant fixe, son rayon se raccourcissait, jusqu'à ce que les deux points E et F se rapprochant toujours, parvinssent enfin à se confondre, et à ne plus former qu'un point de contact entre l'ellipse et le cercle, deux des racines de l'équation, qui exprimaient les deux perpendiculaires EI, FK, confondues dans ce cas en une seule ligne droite, deviendraient égales. Et si le cercle diminuait encore, de manière qu'il ne touchât même plus l'ellipse aux deux points E, F, mais qu'il continuât pourtant à la couper encore aux deux autres points C et D, alors les deux perpendiculaires EI, FK étant devenues impossibles, il arriverait que des quatre racines de l'équation, les deux qui exprimaient ces perpendiculaires deviendraient imaginaires en même temps que ces perpendiculaires. C'est ainsi que dans toutes les équations, en augmentant ou en diminuant quelque quantité, deux racines qui étaient inégales deviennent d'abord égales, et finissent par devenir impossibles. De-là vient que le nombre des racines impossibles est toujours pair.

Il y a cependant des cas où les racines des équations sont possibles, lorsque la figure nous les montre impossibles; mais cela n'arrive que parce qu'une figure a des limites qu'une équation ne reconnaît pas.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 10). Par exemple, si dans le cercle ABD on donne le diamètre AB et la ligne inscrite AD, ainsi que la perpendiculaire DC, et qu'on cherche le segment AC du diamètre, on aura, $AC = \frac{\overline{AD}^2}{AB}$. Or dans cette équation, que AD soit plus petit ou plus grand que AB, AC est toujours réel. Mais dans la figure, lorsque AD est plus grand que le diamètre, AC est une

Digitized by Google

quantité impossible. En effet, dans la figure on suppose que *AD* est inscrit dans le cercle, et par conséquent il ne peut être plus grand que le diamètre du cercle; au lieu que dans l'équation, il n'y a aucune limite de cette espèce, elle n'exige que cette seule condition, que les lignes *AB*, *AD*, *AC* soient en proportion continue. Et puisque l'équation n'est pas bornée aux conditions de la figure, il n'est pas nécessaire non plus qu'elle soit restreinte par les limites de ces conditions. Une figure peut donner des limites aux différens cas d'un problême, mais l'équation l'embrasse dans toute sa généralité. Concluons donc, d'après tout ce qui vient d'être dit, 1°. que dans les équations de dimensions impaires, il est impossible que toutes les racines soient imaginaires. 2°. Que les figures donnent souvent aux quantités d'où dépendent toutes les racines, des limites telles, qu'il est impossible de les franchir sans anéantir toutes les conditions des figures.

Les racines réelles se divisent en positives et en négatives. Quand les positives sont dirigées dans un sens, les négatives sont dirigées dans le sens opposé.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 9). C'est ainsi qu'en cherchant la perpendiculaire *CG*, on tombera dans une équation qui aura deux racines positives *CG* et *DH* dirigées des points *C* et *D* vers le bas, et deux racines négatives *EI*, *FK* partant des points *E* et *F*, et dirigées de bas en haut.

Supposons encore que sur la droite *AB* vers laquelle tendent toutes les perpendiculaires, on donne un point quelconque *P*, et qu'on cherche une partie *PG* de la droite *AB*, s'étendant du point *P* vers une des perpendiculaires, vers *CG*, par exemple, on arrivera à une équation qui aura quatre racines, *PG*, *PH*, *PI*, *PK*.

La

Digitized by Google

La racine cherchée PG, et toutes celles qui tendent d'un même côté que PG, telle que PK, seront positives; mais celles qui tendent du côté opposé, telles que PH et PI, seront négatives.

Lorsqu'une équation ne contient aucune racine imaginaire, on peut connaître par les signes qui affectent ses termes, le nombre des racines positives, ainsi que le nombre des racines négatives qu'elle contient; car il y aura autant de racines positives que de variations de signes de + en — et de — en + d'un terme à son suivant : toutes les autres racines seront négatives.

Dans l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, les signes se suivent dans cet ordre : +, —, —, +, —. Du premier au second, je compte une variation + et —, du troisième au quatrième, une variation — et +, et du quatrième au cinquième, une autre variation + et —. Il y a donc en tout trois variations, et par conséquent trois racines positives, donc une seule est négative. Mais lorsqu'il se trouve des racines imaginaires, cette règle n'a plus lieu, à moins que ces racines imaginaires n'étant ni positives, ni négatives, on ne les regarde comme des racines ambiguës. Ainsi dans l'équation $x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$, les signes indiquent une racine positive et deux négatives; supposez que $x = 2p$, ou que $x - 2p = 0$, et multipliez la première équation par $x - 2p = 0$, de cette manière, l'équation résultante devra contenir une racine positive de plus que la première équation, et il viendra.....

$x^4 - px^3 + p^2x^2 \begin{matrix} -6p^3 \\ -q \end{matrix} \Big\{ x + 2pq = 0$, équation qui devrait avoir seulement deux racines positives et deux négatives : cependant, en considérant les variations des signes, on voit qu'elle a quatre racines positives. Ceci vient donc de deux racines imaginaires, qui, par leur ambiguïté, se montrent sous la forme de racines négatives

Digitized by Google

dans la première équation, et sous celle de positives dans la dernière.

Au reste, on peut presque toujours connaître le nombre des racines imaginaires qui se trouvent dans une équation, par cette règle.

Prenez une suite de fractions dont les dénominateurs forment la progression arithmétique, 1, 2, 3, 4, 5, *etc. en suivant ainsi jusqu'au nombre qui sera l'indicateur des dimensions de votre équation; et pour les numérateurs de vos fractions, prenez la suite des termes qui forme les dénominateurs, mais dans un ordre renversé. Divisez chacune de ces fractions par celle qui la précède, et placez les fractions qui résulteront de ces divisions, au-dessus des termes moyens de l'équation. Ensuite élevez chaque terme moyen au quarré, et multipliez ce quarré par la fraction qui est au-dessus du terme correspondant, et puis examinez si ce produit est plus grand ou plus petit que le rectangle des deux termes adjacens à droite et à gauche, au terme que vous examinez; si plus grand, placez au-dessous de ce terme le signe* +; *si plus petit, placez au-dessous le signe* —. *Écrivez sous le premier et le dernier termes, le signe* +. *Et il y aura dans l'équation autant de racines imaginaires que de variations dans les signes souscrits de* + *en* — *et de* — *en* +. (67).

Si on a l'équation $x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$, que l'on forme d'abord cette série de fractions, $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, ensuite on divisera la seconde $\frac{2}{2}$ par la première $\frac{3}{1}$, et la troisième $\frac{1}{3}$ par la seconde $\frac{2}{2}$, et on placera les quotiens $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ au-dessus des termes moyens, comme il suit : $x^3 \overset{+}{+} \overset{\frac{1}{3}}{p} \overset{-}{x^2} \overset{+}{+} 3 \overset{\frac{1}{3}}{p^2} \overset{+}{x} \overset{+}{-} q = 0$. Après cela, comme le quarré du second terme px^2 multiplié par la fraction $\frac{1}{3}$ qui est au-dessus de

Digitized by Google

lui, donne un produit $\frac{p^2 x^4}{3}$, moins grand que le produit du premier terme x^3 par le troisième terme $3p^2x$, produit qui est $3p^2x^4$, on placera sous le terme px^2 le signe —. Mais comme le quarré $9p^4x^2$ du troisième terme $3p^2x$ multiplié par la fraction $\frac{1}{3}$, qui est au-dessus de lui, est plus grand que zéro, et à plus forte raison, plus grand que le produit négatif du second terme px^2 par $-q$, on placera sous ce troisième terme le signe +. Et en écrivant sous le premier terme x^3, et sous le dernier $-q$, le signe +, les signes souscrits forment la suite, + — + +, dans laquelle il y a deux variations, l'un de + en —, et l'autre de — en +, ce qui indique deux racines imaginaires. On trouvera de même que l'équation $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$, a deux racines imaginaires, ainsi que l'équation $x^4 - 6x^2 - 3x - 2 = 0$.

La première de ces deux équations se traiterait comme celle de l'exemple précédent : ainsi je ne m'occuperai que de la seconde. Je forme donc la série des fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, je divise la seconde par la première, la troisième par la seconde, et enfin la quatrième par la troisième, ce qui me donne cette suite de fractions $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{8}$ que je place au-dessus des termes moyens de l'équation.

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{8} & & \frac{4}{9} & & \frac{3}{8} & & \\ x^4 & * & - & 6x^2 & - & 3x & - & 2 = 0, \\ + & + & & + & - & & + & \end{array}$$

Multipliant ensuite le quarré du second terme, qui est ici zéro, par la fraction $\frac{3}{8}$ qui est au-dessus de ce second terme, le produit est zéro, qui est cependant plus grand que le rectangle négatif $-6x^6$ de x^4 par $-6x^2$. Ainsi, sous le terme qui manque, et qui est désigné par une étoile, j'écris le signe +. Je continue pour le reste comme dans l'exemple précédent, et la suite des termes souscrits est + + + — +, où il y a deux

Digitized by Google

variations qui indiquent deux racines imaginaires. En s'y prenant de la même manière, on trouvera dans l'équation $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$, deux racines imaginaires.....

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & \frac{2}{5} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{5} & & & \\ x^5 & - & 4x^4 & + & 4x^3 & - & 2x^2 & - & 5x & - & 4 & = 0. \\ + & & + & & - & & + & & + & & + & \end{array}$$

Mais lorsqu'il y a deux ou un plus grand nombre de termes qui manquent, il faut placer sous le premier terme qui manque, le signe —, sous le second le signe +, sous le troisième le signe —, et ainsi de suite, toujours en variant les signes, excepté le cas où le terme qui précède et celui qui suit immédiatement les termes déficiens, auraient des signes contraires; car alors il faut toujours mettre sous le dernier des termes déficiens le signe +. Ainsi.....

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} x^5 & + & a & x^4 & * & * & * & + & a^5 & = 0, & & x^5 & + & a & x^4 & * & * & * & - & a^5 & = 0. \\ + & & + & & - & + & - & & + & & & + & & + & & - & + & + & & + & \end{array}$$

La première de ces équations a quatre racines imaginaires, et la seconde en a deux. L'équation suivante a six racines imaginaires,

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & & \frac{3}{7} & & \frac{1}{9} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{1}{9} & & \frac{3}{7} & & & \\ x^7 & - & 2x^6 & + & 3x^5 & - & 2x^4 & + & x^3 & * & * & - & 3 & = & 0. \\ + & & - & & + & & - & & + & - & + & & + & & \end{array}$$

Par-là encore, on peut connaître si les racines imaginaires d'une équation, doivent être placées parmi ses racines positives ou parmi ses négatives; car si l'on considère en même temps les signes des termes et les signes souscrits à chacun de ces termes, on aura autant de racines imaginaires positives que de variations de signes d'un terme à l'autre, et autant de racines imaginaires négatives que de permanences dans les signes d'un terme à l'autre. Ainsi, dans l'équation

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x^5 & - & 4x^4 & + & 4x^3 & - & 2x^2 & - & 5x & - & 4 & = & 0, \\ + & & + & & - & & + & & + & & + & & \end{array}$$

les signes souscrits ont

Digitized by Google

les variations $+ - +$, et les termes au-dessus de ces signes étant $-4x^4 + 4x^3 - 2x^2$, leurs signes sont $- + -$, qui, par deux variations, indiquent qu'il y a deux racines positives, en conséquence les deux racines imaginaires doivent être rangées parmi les racines positives (*). Tous les signes de l'équation étant $+ - + - - -$, on voit qu'il y a trois variations qui indiquent trois racines positives, et que par conséquent les deux autres sont négatives. Or parmi les positives, il y en a deux d'imaginaires; il s'en suit donc que l'équation n'a réellement qu'une racine positive, que deux autres sont négatives, et deux autres imaginaires. Si l'équation était.....

$x^5 - 4x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$, la première variation

$+ \quad + \quad - \quad - \quad + \quad +$

des signes souscrits annonce une racine imaginaire, les termes correspondans à cette première variation étant, $-4x^4 - 4x^3$, on voit qu'il n'y a pas de variation d'un terme à l'autre, donc la racine imaginaire est négative (**). Et les termes correspondans à la

---

(*) En effet, les signes des termes étant $- + -$
et les signes qui leur sont souscrits étant $+ - +$
on voit que le signe du premier terme avec son signe souscrit font $\mp$, et que le signe du second terme avec son signe souscrit font $\pm$. Il y a donc une variation du premier au second terme. Il y en a encore une du second au troisième. Donc il y a deux variations, et par conséquent deux racines imaginaires positives.

(**) Newton dit qu'il n'y a point de variation d'un terme à l'autre. En effet, les signes des termes sont $- -$
les signes souscrits sont $+ -$.

Or il est évident que le signe du premier terme et son signe souscrit étant $\mp$,

Digitized by Google

dernière variation des signes souscrits $- +$, étant $- 2x^2 - 5x$, ne donnent point encore de variation : ce qui prouve qu'une seconde racine imaginaire est encore négative. Ainsi tous les signes de l'équation étant $+ - - - - -$, où il n'y a qu'une seule variation, il n'y a aussi qu'une racine positive, par conséquent il y en a quatre de négatives. Il suit donc de-là, qu'il y a une racine positive, deux négatives, et deux imaginaires. C'est ainsi qu'on détermine la nature de toutes les racines, lorsque le nombre des imaginaires n'est pas plus grand que celui qu'on peut découvrir par la règle établie ci-dessus; mais il peut arriver, quoique bien rarement, que le nombre des racines imaginaires surpasse celui que la règle a fait connaître.

---

il faudrait, pour une variation, que le signe du terme suivant et son souscrit fussent $\pm$. Ce qui n'est pas.

Donc il n'y a point de variation.

Digitized by Google

DES TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS.

Les racines positives d'une équation quelconque peuvent être rendues négatives, et réciproquement on peut changer les négatives en positives; il suffit, pour opérer ces transformations, de changer les signes des termes alternatifs, à partir du second inclusivement.

Ainsi, dans l'équation $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$, on peut changer ses trois racines positives en négatives, et ses deux racines négatives en positives. Pour cela, il suffit de changer les signes du deuxième, quatrième et sixième termes, ce qui donne, $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 4 = 0$. Cette dernière équation a les mêmes racines que la précédente, avec la seule différence que celles qui étaient positives dans la première, sont devenues négatives dans la seconde, et réciproquement; en sorte que les deux racines imaginaires qui dans l'une étaient comptées parmi les positives, le sont dans l'autre parmi les négatives. Ainsi ces deux imaginaires étant retranchées, il ne restera qu'une seule racine véritablement négative.

Il y a aussi d'autres transformations d'équations qui ont leurs différens usages. *Par exemple, nous pouvons supposer que la racine d'une équation est égale à une nouvelle inconnue, plus ou moins une quantité connue arbitraire; et il nous sera libre de substituer dans l'équation, à la place de la vraie racine, cette nouvelle quantité qu'on suppose lui être égale.* De cette manière, nous pouvons augmenter ou diminuer, d'une quantité

Digitized by Google

connue, les racines d'une équation; rendre positives quelques-unes de celles qui étaient négatives, et réciproquement; ou même les rendre toutes positives, ou toutes négatives. Ainsi dans l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, si je veux augmenter les racines d'une unité, je feindrai que $x + 1 = y$, ou que $x = y - 1$, et en écrivant dans l'équation, au lieu de x et de ses puissances, sa nouvelle valeur $y - 1$ et ses puissances, en cette sorte :

$$\begin{array}{r|rrrrr}
x^4 & y^4 & -4y^3 & +6y^2 & -4y & +1 \\
-x^3 & & -y^3 & +3y^2 & -3y & +1 \\
-19x^2 & & & -19y^2 & +38y & -19 \\
+49x & & & & +49y & -49 \\
-30 & & & & & -30 \\
\hline
\end{array}$$

Résultat..... $y^4 - 5y^3 - 10y^2 + 80y - 96 = 0$

Les racines de la nouvelle équation $y^4 - 5y^3 - 10y^2 + 80y - 96 = 0$, seront, 2, 3, 4, — 4; et chacune d'elles est d'une unité plus grande que sa correspondante dans l'équation proposée, qui a pour racines 1, 2, 3, — 5.

Si au lieu de x j'avais substitué dans l'équation proposée $y + \frac{3}{2}$, il me serait venu l'équation $y^4 + 5y^3 - 10y^2 - \frac{5}{4}y + \frac{39}{16} = 0$, dans laquelle il y a deux racines positives, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$; et deux racines négatives, $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{13}{2}$. Si au lieu de x on écrivait $y - 6$, on aurait une équation dont les racines seraient 7, 8, 9, 1, qui sont toutes positives. Et enfin si on mettait pour x, $y + 4$, les racines deviendraient toutes plus petites de quatre unités, et seraient, — 3, — 2, — 1, — 9, qui sont, comme on voit, toutes négatives.

C'est ainsi qu'en augmentant ou en diminuant les racines, on parvient

Digitized by Google

parvient quelquefois à mieux découvrir les imaginaires que par la règle que nous avons donnée précédemment. En effet, cette régle ne nous fait appercevoir aucunes racines imaginaires dans l'équation $x^3 - 3a^2x - 3a^3 = 0$. Mais si on augmente ses racines de la quantité a, en écrivant $y - a$ au lieu de x, l'équation résultante sera, $y^3 - 3ay^2 - a^3 = 0$. Qu'on y applique maintenant la règle, on y trouvera deux racines imaginaires.

Nous pouvons aussi, par la même méthode, faire disparaître le second terme d'une équation quelconque. Voici comment il faut s'y prendre: *Substituez dans l'équation, au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue augmentée du coëfficient du second terme de l'équation, pris avec un signe contraire, et divisé par l'exposant du premier.*

Par exemple, si on proposait de faire évanouir le second terme de l'équation $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$; le coëfficient du second terme étant -4, je le divise par 3, et le joins avec le signe $+$ à une nouvelle inconnue y, et la somme $y + \frac{4}{3}$ étant substituée à la place de x dans la proposée, il viendra,

$$\begin{array}{r}
y^3 + 4y^2 + \frac{16}{3}y + \frac{64}{27} \\
- 4y^2 - \frac{32}{3}y - \frac{64}{9} \\
+ 4y + \frac{16}{3} \\
- 6 \\
\hline
y^3 \quad * \quad - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0.
\end{array}$$

On peut encore, par la même méthode, faire évanouir le troisième terme d'une équation. Soit proposée l'équation $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0$, et qu'on suppose $x = y - e$. En substituant $y - e$ pour x, il naîtra cette équation,

Digitized by Google

$$y^4 \begin{matrix} -4e \\ -3 \end{matrix} \left\{ y^3 \begin{matrix} +6e^2 \\ +9e \\ +3 \end{matrix} \right\{ y^2 \begin{matrix} -4e^3 \\ -9e^2 \\ -6e \\ -5 \end{matrix} \right\{ y \begin{matrix} +e^4 \\ +3e^3 \\ +3e^2 \\ +5e \\ -2 \end{matrix} = 0$$

Le troisième terme de cette équation est, $6e^2 + 9e + 3$ multiplié par y^2. Pour que ce terme s'évanouisse, il faut que la quantité $6e^2 + 9e + 3$ devienne zéro. Supposons en effet qu'elle soit zéro, afin de pouvoir découvrir par-là quel nombre il faut substituer à e, afin de faire disparaître ce troisième terme. Cette supposition nous donne l'équation du second degré, $6e^2 + 9e + 3 = 0$, qui, étant divisée par 6, devient, $e^2 + \frac{3}{2}e + \frac{1}{2} = 0$, et en la résolvant, on a, $e = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}$, ou bien, $-\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$, qui se réduit à $-\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$. Ainsi $e = -\frac{1}{2}$, ou bien, $e = -1$. Par conséquent $y - e$ sera, ou $y + \frac{1}{2}$, ou $y + 1$. Et comme on a substitué dans l'équation $y - e$ au lieu de x, il faut substituer $y + \frac{1}{2}$, ou $y + 1$, au lieu de $y - e$, et dans l'équation qui en résultera, le troisième terme ne se trouvera plus, et il disparaîtra également, soit qu'on substitue $y + \frac{1}{2}$, ou $y + 1$. Dans le premier cas, l'équation résultante sera, $y^4 - y^3 - \frac{15}{4}y - \frac{65}{16} = 0$; et dans le second, $y^4 + y^3 - 4y - 6 = 0$.

On peut encore multiplier ou diviser les racines des équations par des nombres donnés; cela sert à augmenter ou à diminuer la valeur des racines, ou encore à faire disparaître les fractions ou les quantités radicales.

Si on a, par exemple, l'équation $y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0$. Pour faire disparaître les fractions, je fais $y = \frac{1}{3}z$, et en substituant $\frac{1}{3}z$ pour y dans l'équation, elle devient, $\frac{z^3}{27} - \frac{12z}{27} - \frac{146}{27} = 0$, qui se réduit, en ôtant le diviseur 27, à $z^3 - 12z - 146 = 0$, et les racines de cette nouvelle équation sont triples de celles de la précédente. Si je voulais maintenant diminuer les dernières, je ferais,

Digitized by Google

$2v = z$, et il viendrait, $8v^3 - 24v - 146 = 0$; et en divisant tout par 8, elle se réduirait à $v^3 - 3v - \frac{73}{4} = 0$, équation dont les racines ne sont que la moitié de celles de l'équation $z^3 - 12z - 146 = 0$. Enfin lorsqu'on aura obtenu la valeur de v par la dernière équation, on fera, $2v = z$, $\frac{1}{3}z = y$, et $y + \frac{4}{3} = x$. C'est ainsi que l'on connaîtra la valeur de la racine x dans la première équation proposée, $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$.

De même, pour faire évanouir le radical $\sqrt{3}$ de l'équation $x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$, je fais $x = y\sqrt{3}$, et l'équation proposée devient, $3y^3\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$, et en divisant tout par $\sqrt{3}$, elle se réduit à $3y^3 - 2y + 1 = 0$.

On peut aussi changer les racines des équations en d'autres qui soient en raison inverse des premières, et par ce moyen l'équation se trouve quelquefois réduite à une forme plus commode.

Ainsi notre dernière équation $3y^3 - 2y + 1 = 0$, en faisant $y = \frac{1}{z}$, se changerait en celle-ci, $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0$, ou, en multipliant tous les termes par z^3, et en ordonnant, par rapport aux puissances de z, on aurait, $z^3 - 2z^2 + 3 = 0$. On peut encore, par cette méthode, faire évanouir l'avant-dernier terme d'une équation, pourvu qu'on ait d'abord ôté le second terme comme nous l'avons fait dans l'exemple précédent. Mais si vous voulez débarrasser l'équation de l'ante-pénultième terme, il faudra d'abord faire évanouir le troisième. Ce moyen sert encore à convertir la plus petite racine d'une équation en la plus grande, et réciproquement la plus grande en la plus petite; et cela fournit quelques applications utiles, comme on le verra dans ce qui suit. Par exemple, étant donnée l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, dont les racines sont,

Digitized by Google

1, 2, 3, — 5, si l'on substitue $\frac{1}{y}$ au lieu de x, il en résultera l'équation, $\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{y^2} + \frac{49}{y} - 30 = 0$, et en multipliant tous les termes par y^4, et les divisant par 30, ordonnant et changeant les signes, elle deviendra, $y^4 - \frac{49}{30} y^3 + \frac{19}{30} y^2 + \frac{1}{30} y - \frac{1}{30} = 0$, dont les racines sont, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$; où l'on voit que la plus grande des racines positives 3, de la proposée est convertie en la plus petite $\frac{1}{3}$, et que celle qui d'abord était la plus petite 1, est devenue maintenant la plus grande, et que la racine négative — 5, qui de toutes les racines de la proposée s'éloignait le plus de zéro, est maintenant celle qui en est la plus voisine.

Il y a encore d'autres transformations des équations; mais toutes peuvent se rapporter à l'espèce de celle où nous avons fait disparaître le troisième terme d'une équation, ainsi nous n'en parlerons plus. Disons plutôt quelque chose des limites des équations.

Il est évident, par la manière dont se forment les équations, que le coëfficient du second terme, pris avec un signe contraire, est égal à la somme de toutes les racines; que le coëfficient du troisième terme est égal à la somme des produits deux-à-deux de toutes les racines; que le coëfficient du quatrième, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des produits trois-à-trois de toutes les racines; que le coëfficient du cinquième est égal à la somme des produits quatre-à-quatre de toutes les racines, et ainsi jusqu'à l'infini.

Prenons $x = a$, $x = b$, $x = -c$, $x = d$, etc., ou bien, $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, $x - d = 0$; et en multipliant successivement toutes ces équations les unes par les autres, nous aurons, 1°. en multipliant $x - a$ par $x - b$, $x^2 \begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix} \Big\} x + ab = 0$, où l'on voit que le coëfficient du second terme, en changeant son

Digitized by Google

signe, est $a+b$, somme des racines a et b; et ab, coëfficient du troisième terme (*), est égal au produit des deux racines. En multipliant ensuite l'équation trouvée par $x+c$, il viendra l'équation du troisième degré, $x^3 \begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \end{matrix}\Bigg\{ x^2 \begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \end{matrix}\Bigg\} x + abc = 0$. En changeant les signes du coëfficient du second terme, on a, $a+b-c$, qui est la somme des racines a, b, $-c$; le coëfficient du troisième terme, $ab-ac-bc$, est égal à la somme des produits de a par b, de a par $-c$, et de b par $-c$; et enfin le coëfficient du quatrième terme, en changeant son signe, est $-abc$, qui est égal au produit des trois racines a, b et $-c$. Qu'on multiplie encore l'équation du troisième degré par $x-d$, il viendra l'équation du quatrième,

$$x^4 \begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \\ -d \end{matrix}\Bigg\{ x^3 \begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \\ +ad \\ +bd \\ -cd \end{matrix}\Bigg\} x^2 \begin{matrix} +abc \\ -abd \\ +bcd \\ +acd \end{matrix}\Bigg\} x - abcd = 0,$$

dans laquelle le coëfficient du second terme, en changeant les signes, est $a+b-c+d$, somme de toutes les racines; le coëfficient du troisième terme, $ab-ac-bc+ad+bd-cd$, est la somme des produits deux-à-deux de toutes les racines; le coëfficient du quatrième terme, en changeant les signes, est $-abc+abd-bcd-acd$, somme des produits trois-à-trois de toutes les racines; et enfin le coëfficient du cinquième est le produit de toutes les racines quatre-à-quatre.

(*) Newton appelle ab, coëfficient du troisième terme. En effet, le dernier terme d'une équation quelconque est censé multiplié par l'inconnue élevée à la puissance 0. Donc la quantité connue qui multiplie cette puissance zéro de l'inconnue, peut être appelée le coëfficient du dernier terme.

Digitized by Google

De tout cela nous pouvons conclure qu'une équation quelconque, dont aucun terme n'est fractionnaire ou incommensurable, contient parmi les diviseurs entiers de son dernier terme, soit ses racines commensurables, soit les produits deux-à-deux, ou trois-à-trois, etc. de ses racines. Ainsi lorsqu'on se sera bien assuré qu'aucun des diviseurs du dernier n'est ni une des racines de l'équation, ni le produit de deux ou d'un plus grand nombre de racines, il sera bien évident que l'équation n'a aucune racine, aucun produit deux-à-deux, ou trois-à-trois, etc. de ses racines, qui ne soit incommensurable.

Supposons maintenant que les coëfficiens des termes d'une équation quelconque soient respectivement p, q, r, s, t, v; supposons de plus que les signes de ces coëfficiens soient changés dans tous les termes où ils doivent l'être. En observant bien les signes que doivent avoir les différens termes, on aura, $p = a$, $pa + 2q = b$, $pb + qa + 3r = c$, $pc + bq + ra + 4s = d$, $pd + qc + rb + sa + 5t = e$, $pe + qd + rc + sb + ta + 6v = f$, et ainsi jusqu'à l'infini, en suivant la marche de la progression. Et a sera la somme des racines, b la somme des quarrés de chacune des racines, c la somme des cubes, d la somme des quatrièmes puissances, e la somme des cinquièmes, f la somme des sixièmes, et ainsi du reste; de manière que dans l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, où le coëfficient du second terme est -1, celui du troisième -19, celui du quatrième $+49$, celui du cinquième -30, il faudra faire, $p = 1$, $q = 19$, $r = -49$, $s = 30$. De là on tirera, $a = p = 1$, $b = pa + 2q = 1 + 38 = 39$, $c = pb + qa + 3r = 39 + 19 - 147 = -89$, $d = pc + qb + ra + 4s = -89 + 741 - 49 + 120 = 723$. Ainsi la somme des racines est 1, la somme des

Digitized by Google

quarrés des racines est 39, la somme des cubes est -89, et la somme des quatrièmes puissances est 723. Or les racines de cette équation étant 1, 2, 3, -5, et leur somme $1+2+3-5$, il est clair qu'elle se réduit à 1; la somme des quarrés est $1+4+9+25=39$; celle des cubes est $1+8+27-125=-89$, et celle des quatrièmes puissances est $1+16+81+625=723$. (68).

Des limites des Équations.

C'est par la méthode précédente que l'on parvient à déterminer les limites entre lesquelles sont renfermées les racines d'une équation, lorsqu'elle n'en contient point d'imaginaires; car chacun des quarrés des racines étant positif, leur somme sera aussi positive, et surpassera le quarré de la plus grande racine. Par la même raison, la somme des quatrièmes puissances de toutes les racines surpassera la quatrième puissance de la plus grande racine, et la somme de leurs sixièmes puissances surpassera la sixième puissance de la plus grande racine.

Si vous désirez donc connaître la limite qu'aucune racine ne peut dépasser, cherchez la somme des quarrés des racines, et prenez-en la racine quarrée, elle sera nécessairement plus grande que la plus grande racine de l'équation. Vous approcherez plus près de la valeur de la plus grande racine, si vous extrayez la racine quatrième de la somme des quatrièmes puissances; plus près encore, si vous extrayez la racine sixième de la somme des sixièmes puissances, et ainsi à l'infini. (69).

Ainsi, dans l'équation précédente, la somme des quarrés des racines étant 39, et la valeur la plus approchée de $\sqrt{39}$ étant $6\frac{1}{2}$, on voit que $6\frac{1}{2}$ est plus éloigné de zéro qu'aucune des racines

Digitized by Google

1, 2, 3, — 5, de l'équation. Mais la racine quatrième de la somme des quatrièmes puissances étant $\sqrt[4]{723}$, ou $5\frac{1}{2}$ environ, approche encore plus de — 5, racine la plus éloignée de zéro.

Si entre la somme des quarrés et la somme des quatrièmes puissances des racines, on prend une moyenne proportionnelle géométrique, elle sera un peu plus grande que la somme des cubes des racines prises toutes avec des signes positifs. (70). Ensuite si l'on ajoute à cette moyenne proportionnelle la somme des cubes, prise avec son propre signe, c'est-à-dire le signe avec lequel on l'a trouvée d'abord; qu'ensuite on l'en retranche, et qu'on prenne la demi-somme et la demi-différence de ces deux quantités, la demi-somme sera plus grande que la somme des cubes de toutes les racines positives de l'équation, et la demi-différence plus grande que la somme des cubes des racines négatives.

Donc la plus grande des racines positives de l'équation sera plus petite que la racine cubique de cette demi-somme, et la plus grande des racines négatives sera plus petite que la racine cubique de cette demi-différence. (71).

Ainsi dans l'équation précédente, la moyenne proportionnelle entre la somme des quarrés des racines 39 et la somme de leurs quatrièmes puissances 723, est 168 environ. La somme des cubes prise avec son signe propre, est, comme nous l'avons trouvée plus haut, — 89. La demi-somme de 168 et de — 89, est $39\frac{1}{2}$; et la demi-différence de ces deux mêmes nombres est $128\frac{1}{2}$. La racine cubique de $39\frac{1}{2}$ est $3\frac{1}{2}$ environ, quantité plus grande que la plus grande racine positive qui est 3. La racine cubique de $128\frac{1}{2}$ est, à très-peu près, $5\frac{1}{21}$, quantité plus grande que la racine négative — 5. On voit, par cet exemple, combien on peut approcher de la valeur

de

Digitized by Google

de la racine d'une équation, lorsqu'il n'y en a qu'une seule positive, ou une seule négative. Cependant on en approcherait encore de plus plus près, si, après avoir cherché une moyenne proportionnelle entre la somme des quatrièmes et la somme des sixièmes puissances des racines de l'équation, on cherchait encore la somme des cinquièmes puissances des racines, et que, prenant la demi-somme et la demi-différence de ces deux quantités, on tirât la racine cinquième de cette demi-somme, et la racine cinquième de cette demi-différence. Car la racine cinquième de la demi-somme surpasserait encore, mais moins que ci-dessus, la plus grande racine positive de l'équation; et la racine cinquième de la demi-différence surpasserait aussi, mais moins que précédemment, la plus grande racine négative. Nous avons vu plus haut, qu'en augmentant ou en diminuant toutes les racines d'une équation, on pouvait rendre une quelconque d'entre elles, la plus petite de toutes, et ensuite convertir cette plus petite en la plus grande; enfin rendre toutes les racines négatives, hors la plus grande. Il résulte de-là, qu'on peut approcher aussi près qu'on veut de la valeur d'une racine cherchée.

Si dans une équation toutes les racines sont négatives, excepté deux, on peut en déterminer la valeur par la méthode suivante:

Ayant trouvé, par la méthode précédente, la somme des cubes des deux racines positives, celles des cinquièmes et septièmes puissances de toutes les racines, cherchez entre les sommes des cinquièmes et des septièmes puissances, une moyenne proportionnelle géométrique, et cette moyenne proportionnelle sera, à très-peu près, la différence entre la somme des sixièmes puissances des racines positives, et la somme des sixièmes puissances des racines négatives; ajoutez donc la somme des sixièmes puissances de toutes les racines à cette moyenne

Digitized by Google

proportionnelle, ensuite retranchez-l'en, et la moitié de la première quantité sera la somme des sixièmes puissances des racines positives, et la moitié de la seconde, la somme des sixièmes puissances des racines négatives. Ainsi, prenant et la somme des cubes, et la somme des sixièmes puissances des deux racines positives, doublez la somme des sixièmes puissances, et retranchez-en le quarré de la somme des cubes, tirez la racine quarrée du reste, et cette racine quarrée sera la différence des cubes des deux racines positives. Or, une fois qu'on a la somme et la différence des cubes, on a les cubes eux-mêmes. Tirez donc leurs racines cubiques, et vous aurez, à très-peu près, la valeur des deux racines positives. Et si l'on exécutait une opération analogue dans des puissances plus élevées, on obtiendrait une approximation encore plus grande des deux racines. Mais cette méthode de trouver les limites ne peut être que de très-peu d'usage à cause de la difficulté des calculs; et d'ailleurs elle ne peut s'appliquer qu'aux équations qui ne contiennent point d'imaginaires. Je vais donc enseigner, pour trouver les limites, un autre moyen plus facile, et qui s'étend à toutes sortes d'équations.

Multipliez chacun des termes de l'équation par l'exposant de l'inconnue dans ce terme, ensuite divisez le produit par la racine. Recommencez la même opération sur l'équation résultante, et continuez ainsi jusqu'à ce que vous arriviez à un reste qui ne contienne plus que deux termes. Alors si dans ce dernier reste, ainsi que dans ceux de toutes les opérations précédentes, vous substituez pour l'inconnue, un nombre de même signe que le terme le plus élevé de l'équation proposée, et que, par l'effet de la substitution, tous ces restes aient des résultats de même signe que le terme le plus élevé de l'équation proposée; le nombre que vous aurez substitué pour l'inconnue, sera plus grand que la plus grande racine positive de l'équation (72).

Digitized by Google

Si l'on propose, par exemple, l'équation... $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$,
je multiplie les termes de cette équation par.. 5 4 3 2 1 0.
Et le produit étant.. $5x^5 - 8x^4 - 30x^3 + 60x^2 + 63x = 0$,
je le divise par x, ce qui le réduit à..... $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$.
Je multiplie ensuite ses termes par..... 4 3 2 1 0,
ce qui donne..... $20x^4 - 24x^3 - 60x^2 + 60x = 0$.
Et en divisant tout par x, il vient..... $20x^3 - 24x^2 - 60x + 60 = 0$.
Je multiplie par.... 3 2 1 0,
ce qui produit..... $60x^3 - 48x^2 - 60x = 0$.
Je divise cette dernière par $12x$, et j'ai $5x^2 - 4x - 5 = 0$.
Je multiplie par.... 2 1 0,
et j'ai..... $10x^2 - 4x = 0$.
qui, étant divisé par $2x$, donne..... $5x - 2 = 0$.

Maintenant, le terme le plus élevé x^5 de l'équation, étant positif, je cherche quel nombre positif substitué à la place de x dans chacun des résultats qu'on a obtenus, ainsi que dans l'équation proposée, les convertit tous en nombres positifs. J'essaie d'abord 1, que je substitue à la place de x dans $5x - 2$, ce qui le transforme en $+3$; mais ce même nombre 1 substitué dans $5x^2 - 4x - 5$, le transforme en -4, quantité négative. Ainsi la limite est plus grande

Digitized by Google

que 1, j'essaie donc 2, et le substituant à la place de x dans les résultats, on a.....

$5x - 2$.....	.....	$+ 8$
$5x^2 - 4x - 5$.....	.....	$+ 7$
$5x^3 - 6x^2 - 15x + 15$.....	qui devient	$+ 1$
$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63$.....	.....	$+ 79$
$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120$	.....	$+ 46$.

Ainsi les nombres 8, 7, 1, 79, 46, étant tous positifs, le nombre 2 est plus grand que la plus grande racine positive de l'équation. De même, si je voulais chercher la limite des racines négatives, j'essayerais des substitutions de nombres négatifs, ou, au lieu de cela, je changerais dans tous les résultats, et dans l'équation proposée, les signes des termes de deux en deux, et je substituerais des nombres positifs. En effet, en changeant les signes des termes de deux en deux, les résultats et l'équation proposée deviennent.....

$$5x + 2$$
$$5x^2 + 4x - 5$$
$$5x^3 + 6x^2 - 15x - 15$$
$$5x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 60x + 63$$
$$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 63x + 120.$$

Je choisis parmi ces résultats, un de ceux qui ont le plus de signes négatifs, par exemple, $5x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 60x + 63$; j'y substitue à la place de x, les nombres 1 et 2, ce qui le convertit respectivement en deux nombres négatifs $- 14$, et $- 33$. Ainsi la limite est plus grande que $- 2$; mais en substituant le nombre 3, il en provient le nombre positif 234. Maintenant je substitue le même nombre 3 dans les autres résultats, ainsi que dans la proposée, et il en provient toujours des nombres positifs. D'où je conclus

Digitized by Google

que le nombre — 3 est plus grand qu'aucune racine négative. Par conséquent, 2 et — 3 sont les limites entre lesquelles sont renfermées toutes les racines de l'équation.

La connaissance de ces limites est utile pour trouver les racines rationnelles d'une équation, ainsi que pour déterminer ses racines incommensurables. Elle sert à nous épargner des tentatives inutiles qui nous feraient chercher des racines au-delà des limites où elles sont renfermées. Par exemple, que je veuille connaître si la dernière équation contient des racines rationnelles, il est certain, par tout ce que nous avons vu, qu'elles ne peuvent se trouver que parmi les diviseurs du dernier terme 120; ainsi je devrais substituer successivement chacun de ces diviseurs, à la place de x, et si aucun d'eux ne réduisait l'équation à zéro, j'en conclurais qu'elle n'a point de racines rationnelles. Mais le dernier terme 120 a un grand nombre de diviseurs, ce sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, et 120. Et pris en moins, ce sont − 1, − 2, − 3, − 4, − 5, − 6, − 8, − 10, − 12, − 15, − 20, − 24, − 30, − 40, − 60, − 120. La substitution de tous ces nombres serait fastidieuse. Mais en sachant que toutes les racines sont renfermées entre les limites 2 et − 3, nous sommes délivrés de ce travail, car il n'est plus question que de substituer ceux des diviseurs du dernier terme qui se trouvent compris entre les limites, et qui sont ici, 1, − 1, et − 2; et si aucun de ces nombres n'est une racine, on est sûr alors que l'équation n'a aucune racine commensurable (*).

(*) Il me semble que cette méthode de trouver les racines commensurables qu'une équation peut renfermer, est bien préférable dans la pratique, à celle qui a été enseignée à la page 46, Tome Ier, sur-tout quand le dernier terme a beaucoup de diviseurs.

Digitized by Google

Réduction des Équations par les diviseurs incommensurables.

JUSQU'ICI j'ai donné les moyens de réduire les équations qui ont des diviseurs rationnels. Mais avant de conclure qu'une équation de quatre, six, ou un plus grand nombre de dimensions, est irréductible, il faut avoir essayé si elle n'aurait pas pour diviseur quelque quantité sourde ou incommensurable; ou ce qui revient au même, il faut voir si l'équation ne pourrait pas être partagée en deux parties égales, de chacune desquelles on pût extraire la racine. La méthode suivante nous en fournira le moyen.

Ordonnez l'équation par rapport aux dimensions de l'inconnue, et faisant passer tous les termes dans un seul membre, afin que la totalité soit égale à zéro, ayez soin que le terme où se trouve la plus haute puissance de l'inconnue, soit toujours positif. Ensuite, si l'équation est quarrée (car je veux aussi, à cause de l'analogie, y faire entrer ce cas), *retranchez, de part et d'autre, le dernier terme, et ajoutez, aussi de part et d'autre, le quarré de la moitié du coëfficient du terme moyen.*

Soit l'équation $x^2 - ax - b = 0$, retranchez, de part et d'autre, $-b$, et ajoutez $\frac{1}{4}a^2$, et il viendra, $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = b + \frac{1}{4}a^2$, et en tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura..... $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$, ou bien $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$.

Si l'équation est de quatre dimensions, comme $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, *où* p, q, r, s *désignent les coëfficiens des termes de l'équation, avec les signes qui leur appartiennent; faites,*

$$q - \tfrac{1}{4}p^2 = \alpha;\ r - \tfrac{1}{2}\alpha p = \beta,\ s - \tfrac{1}{4}\alpha^2 = \zeta;$$

Digitized by Google

désignez par n un diviseur commun de β et de 2ζ. Il faut que ce diviseur commun soit un nombre entier, mais non pas un quarré; il faut de plus que, dans le cas où l'un des deux nombres p et r, serait impair, ce diviseur commun soit impair, et qu'étant divisé par 4, il laisse l'unité pour reste. Désignez aussi par k, un diviseur de $\frac{\beta}{n}$, si p est un nombre pair: mais si p est impair, k ne désignera que la moitié d'un diviseur impair de $\frac{\beta}{n}$. Enfin k sera zéro, si β est nul ou zéro. Retranchez le quotient de cette division de $\frac{1}{2}pk$, et appelez l la moitié du reste. Faites ensuite.... $\frac{\alpha + nk^2}{2} = Q$, et voyez si la division de $Q^2 - s$ par n est possible, et si de plus, la racine de ce quotient est rationnelle et égale à l. Si toutes ces conditions ont lieu, ajoutez à chaque membre de l'équation $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, et en tirant la racine, vous aurez..... $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = (kx + l)\sqrt{n}$. (73).

EXEMPLE. Soit proposée l'équation $x^4 + 12x - 17 = 0$. Comme p et q manquent, que $r = 12$, et $s = -17$, si on substitue ces nombres dans les formules, on aura, $\alpha = 0$, $\beta = 12$, et $\zeta = -17$, et le diviseur commun de $\beta(12)$ et de $2\zeta(-34)$ étant le seul nombre 2, il sera désigné par n. Donc $\frac{\beta}{n} = 6$. Il faut essayer successivement pour k chacun des diviseurs de 6, qui sont 1, 2, 3, 6; et ensuite les valeurs respectives de l, qui sont -3, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$. D'un autre côté on a, $\frac{\alpha + nk^2}{2} = Q$, ce qui se réduit à $k^2 = Q$. Et il faut aussi avoir $\sqrt{\frac{Q^2 - s}{n}}$, c'est-à-dire, $\sqrt{\frac{Q^2 + 17}{2}} = l$. Si l'on écrit successivement pour k les nombres pairs 2, 6, Q devient respectivement 4 et 36, et $Q^2 - s$ sera un nombre impair, qui ne pourra par conséquent être divisé par

Digitized by Google

n qui est 2 ; ainsi il faut rejeter les deux nombres 2 et 6. Mais lorsqu'on met pour k les deux nombres 1 et 3, Q devient 1 et 9, et $Q^2 - s$ devient respectivement 18 et 98. Ces deux nombres sont divisibles par n, et l'on peut extraire les racines de leurs quotiens. Ces racines sont respectivement ± 3 et ± 7. Cependant la seule racine -3 est égale à une des valeurs de l. Je fais donc $k = 1$, $l = -3$, et $Q = 1$. Ensuite j'ajoute à chaque membre de l'équation, $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, ou bien, $2x^2 - 12x + 18$, ce qui me donne, $x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 - 12x + 18$, qui devient, en tirant la racine quarrée, $x^2 + 1 = x\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$. Si vous voulez même éviter une extraction de racine, faites, $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = (kx + l)\sqrt{n}$, et vous trouverez, comme auparavant, $x^2 + 1 = (x - 3) \times \pm\sqrt{2}$. Et en tirant de nouveau la racine de cette équation, on a... $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \mp 3\sqrt{2}}$. C'est-à-dire, à cause des variations des signes, $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$, et..... $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$; ensuite $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$, et $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$. Telles sont les quatre racines de l'équation proposée, $x^4 + 12x - 17 = 0$. Mais de ces quatre racines les deux dernières sont imaginaires.

Soit proposée l'équation $x^4 - 6x^3 - 58x^2 - 114x - 11 = 0$; et que l'on désigne respectivement -6, -58, -114, -11 par p, q, r, s, et on aura, $-67 = \alpha$, $-315 = \beta$, et $-1133\frac{1}{4} = \zeta$. 3 est le diviseur commun et unique des nombres β et 2ζ, ou de

-315

Digitized by Google

-315 et de $-\frac{4533}{2}$. Ainsi n sera ici 3, et $\frac{\beta}{n}$ ou -105 aura pour diviseurs 3, 5, 7, 15, 21, 35, et 105, qu'il faut essayer pour k. Ainsi j'essaye d'abord 3, et en divisant $\frac{\beta}{n}$ ou -105 par k ou par 3, je retranche le quotient -35, qui en provient, de $\frac{1}{2}pk$, ou de -3×3, et le reste est $+26$, dont il faut que la moitié 13 soit égale à l. Mais $\frac{\alpha+nk^2}{2}$, ou $\frac{-67+27}{2}$, ou -20 est égal à Q; on aura donc, $Q^2-s=411$, qui est divisible par n ou 3, mais le quotient 137 ne donne pas une racine rationnelle. Ainsi je rejette 3, et j'essaye de mettre 5 pour k, et le quotient de la division de $\frac{\beta}{n}$ par k, ou de -105 par 5 est -21, qui, étant retranché de $\frac{1}{2}pk$, ou de -3×5, donne pour reste $+6$, dont la moitié 3 sera l. Ensuite Q ou $\frac{\alpha+nk^2}{2}$, c'est-à-dire $\frac{-67+75}{2}$ se réduit à 4, et Q^2-s, ou $16+11$ est divisible par n, et le quotient étant 9, a une racine rationnelle 3, qui est identique avec la valeur trouvée pour l. Ainsi je conclus que $l=3$, $k=5$, $Q=4$, et $n=3$. Donc en ajoutant à chaque membre de l'équation proposée, $nk^2x^2+2nklx+nl^2$, ou $75x^2+90x+27$, on pourra extraire la racine de chaque membre, et l'on aura, $x^2+\frac{1}{2}px+Q=(kx+l)\sqrt{n}$, ou bien, $x^2-3x+4=\pm(5x+3)\sqrt{3}$. Et en tirant une seconde fois la racine, $x=\frac{3\pm 5\sqrt{3}}{2}\pm\ldots\ldots\sqrt{17\pm\frac{21\sqrt{3}}{2}}$.

De même, si l'on proposait l'équation $x^4-9x^3+15x^2-27x+9=0$, j'écris respectivement -9, $+15$, -27, et $+9$

Digitized by Google

pour p, q, r, s; et il vient $-5\frac{1}{4}$ pour α, $-50\frac{5}{8}$ pour β, et $2\frac{7}{64}$ pour ζ. Les diviseurs communs de β ou $-\frac{405}{8}$, et de 2ζ ou $\frac{135}{32}$, sont 3, 5, 9, 15, 27, 45, et 135; mais 9 est un quarré, et les nombres 3, 15, 27, 135 étant divisés par 4, ne donnent pas l'unité pour reste, comme ils devraient la donner, à cause du nombre impair p. Je rejette donc tous ces nombres, et il ne reste que 5 et 45, qu'il faut essayer pour n. Faisons d'abord $n = 5$; et il faudra essayer pour k la moitié de chacun des diviseurs impairs de $\frac{\beta}{n}$ ou $-\frac{81}{8}$, qui sont, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$. Si l'on met $\frac{1}{2}$ pour k, le quotient $-\frac{81}{4}$, qui provient de la division de $\frac{\beta}{n}$ par k, ce quotient, dis-je, étant rétranché de $\frac{1}{2}pk$ ou $-\frac{9}{4}$, donne pour reste 18, qui sera $2l$. Et $\frac{\alpha + nk^2}{2} = -2$ sera Q, et $Q^2 - s$ ou -5 est divisible par n ou 5; mais le quotient étant -1, la racine en est impossible, et cependant il faudrait qu'elle fût 9. Ainsi j'en conclus que k ne peut être $\frac{1}{2}$. J'essaye donc $\frac{3}{2}$. En divisant $\frac{\beta}{n}$ ou $-\frac{81}{8}$ par $k\left(\frac{3}{2}\right)$, le quotient sera $-\frac{27}{4}$, que je retranche de $\frac{1}{2}pk$ ou $-\frac{27}{4}$, et il reste 0. Ainsi l sera aussi 0. Or, dans cette hypothèse, $\frac{\alpha + nk^2}{2} = 3 = Q$, et $Q^2 - s = 0$. Donc la seconde valeur de l devant égaler $\sqrt{\frac{Q^2 - s}{n}}$, sera encore 0. Toutes les conditions sont donc remplies, et j'en conclus que $n = 5$, $k = \frac{3}{2}$, $l = 0$, et $Q = 3$. Ainsi j'ajoute à chaque membre de l'équation proposée la quantité $nk^2x^2 + 2nlkx + nl^2$, qui se réduit à $\frac{45x^2}{4}$. Et en extrayant la racine quarrée de chaque membre, il vient, $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = (kx + l)\sqrt{n}$, ou bien, $x^2 - \frac{9}{2}x + 3 = \frac{3}{2}x\sqrt{5}$.

On parvient par la même méthode à réduire les équations littérales. Si,

Digitized by Google

par exemple, on a $x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$, en substituant respectivement $-2a$, $2a^2 - c^2$, $-2a^3$, et $+a^4$ pour p, q, r, s, on aura, $\alpha = a^2 - c^2$, $\beta = -ac^2 - a^3$, et $\zeta = \frac{3}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2c^2 - \frac{1}{4}c^4$. Le diviseur commun de β et de 2ζ est $a^2 + c^2$, qui sera par conséquent n, et $\frac{\beta}{n}$ ou $-a$ n'a pour diviseurs que 1 et a. Mais parce que n est de deux dimensions, et que $k\sqrt{n}$ ne doit en avoir qu'une seule, il s'en suit que k ne doit avoir aucune dimension; il ne peut donc être a, il faut donc qu'il soit 1. Et en divisant $\frac{\beta}{n}$ par k, et retranchant le quotient $-a$ de $\frac{1}{2}pk$ ou $-a$, il restera zéro pour la valeur de l. Ensuite $\frac{\alpha + nk^2}{2}$, ou $a^2 = Q$, et $Q^2 - s$, ou $a^4 - a^4 = 0$. Ainsi la seconde valeur de l est encore zéro, ce qui prouve que les valeurs trouvées pour n, k, l, et Q sont bonnes. Ainsi j'ajoute à chaque membre de l'équation proposée, $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, c'est-à-dire, $a^2x^2 + c^2x^2$; alors la racine de chaque membre peut être extraite, et il vient, $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = (kx + l)\sqrt{n}$, ou bien, $x^2 - ax + a^2 = \ldots \pm x\sqrt{a^2 + c^2}$. Et en tirant de nouveau la racine quarrée, on a, $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}$.

Jusqu'ici nous avons appliqué la règle à l'extraction des racines sourdes, mais on peut aussi en faire usage pour trouver les racines rationnelles; il suffit pour cela de supposer $n = 1$. En faisant cette recherche, nous pourrons en même temps nous occuper d'une autre, qui sera de voir si une équation, n'ayant aucun terme fractionnaire ou affecté de radicaux, ne contiendrait pas quelque diviseur de deux dimensions, soit commensurable, soit incommensurable. Si

Digitized by Google

l'on nous donne, par exemple, l'équation $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, en substituant respectivement -1, -5, $+12$, et -6, pour p, q, r, s, il viendra, $\alpha = -5\frac{1}{4}$, $\beta = 9\frac{3}{8}$. Et dans cette supposition de $n = 1$, les diviseurs de $\frac{\beta}{n}$ ou $\frac{75}{8}$ sont 1, 3, 5, 15, 25, 75, dont il faut essayer les moitiés pour k, parce que p est impair. Si l'on essaye d'abord $\frac{5}{2}$ pour k, on aura, $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = -5$, et sa moitié $-\frac{5}{2} = l$. Ensuite $\frac{\alpha + nk^2}{2} = \frac{1}{2} = Q$; et $\frac{Q^2 - s}{n} = 6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, dont la racine est identique avec la valeur trouvée pour l.

J'en conclus donc que les valeurs prises pour n, k, l, Q, sont bonnes, et qu'en ajoutant à chaque membre de l'équation, $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, c'est-à-dire, $6\frac{1}{4}x^2 - 12\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{4}$, il sera possible d'extraire la racine de chaque membre, ce qui donnera, $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = \pm(kx + l)\sqrt{n}$, ou bien, $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \pm(2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}) \times 1$. Ou bien, les deux équations suivantes, $x^2 - 3x + 3 = 0$, et $x^2 + 2x - 2 = 0$. Ainsi ces deux dernières équations sont les facteurs de l'équation du quatrième degré. Mais on trouve les diviseurs rationnels de cette espèce, d'une manière bien plus expéditive par la méthode que nous avons enseignée précédemment, Tome Ier, page 49.

Il arrive souvent que les diviseurs de $\frac{\beta}{n}$ étant en grand nombre, ce serait un travail très-pénible que de les essayer tous successivement pour k. Voici un moyen d'abréger les essais. Cherchez les diviseurs de $\alpha s - \frac{1}{4}r^2$, car parmi ces diviseurs, ou parmi les moitiés de ceux qui sont impairs, il doit s'en trouver quelqu'un qui soit égal à Q. C'est ainsi que, dans le dernier exemple, $\alpha s - \frac{1}{4}r^2$, ou

Digitized by Google

$-\frac{9}{2}$, ayant pour diviseurs 1, 3, 9, il faut que parmi ces diviseurs 1, 3, 9, ou leurs moitiés $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, il se trouve quelque nombre qui soit égal à Q. Ainsi ayant essayé successivement pour k les moitiés des diviseurs de la quantité $\frac{\beta}{n}$, qui sont $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$, et $\frac{75}{2}$, je rejette toutes celles qui ne convertissent pas la quantité $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$, ou $-\frac{21}{8} + \frac{1}{2}k^2$ en Q, c'est-à-dire en quelqu'un des nombres 1, 3, 9; $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Ainsi en écrivant respectivement pour k, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, etc., il viendra aussi respectivement, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{51}{2}$, etc. pour Q. Et $-\frac{3}{2}$, $+\frac{1}{2}$ sont les seuls qui se trouvent répétés dans la série des nombres 1, 3, 9; $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Ainsi rejetant tous les autres, je fais $k = \frac{3}{2}$, ce qui donne $Q = -\frac{3}{2}$; ou bien $k = \frac{1}{2}$, ce qui donne $Q = \frac{1}{2}$. On examinera ces deux cas. Mais en voilà suffisamment pour les équations de quatre dimensions.

Qu'on donne à réduire l'équation de six dimensions, $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0$. Faites,

$$q - \tfrac{1}{4}p^2 = \alpha,\ r - \tfrac{1}{2}p\alpha = \beta,\ s - \tfrac{1}{2}p\beta = \gamma.$$
$$\gamma - \tfrac{1}{4}\alpha^2 = \zeta,\ t - \tfrac{1}{2}\alpha\beta = \mu,\ v - \tfrac{1}{4}\beta^2 = \theta.$$
$$\zeta\theta - \tfrac{1}{4}\mu^2 = \lambda.$$

Ensuite prenez pour n quelqu'un des diviseurs communs de 2ζ, μ, 2θ, et il faut que ce diviseur commun soit un nombre entier et non quarré, ni divisible par un nombre quarré, et que de plus, étant divisé par 4, il donne l'unité pour reste, lorsque quelqu'un des nombres p, r, t est impair. Prenez pour k quelqu'un des diviseurs entiers de la quantité $\frac{\lambda}{2n^2}$, dans le cas où p est un nombre pair, ou si p est impair, prenez la moitié d'un diviseur impair.

Digitized by Google

Enfin dans le cas où λ sera zéro, k sera aussi zéro. Prenez pour Q la quantité $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$, et pour l, quelque diviseur de la quantité $\frac{Qr - Q^2p - t}{n}$, si Q est un nombre entier; ou la moitié d'un diviseur de la même quantité, si Q est une fraction ayant pour dénominateur 2. Enfin l sera zéro dans le cas où la quantité $\frac{Qr - Q^2p - t}{n}$ serait zéro. Faites $R = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}Qp + nkl$; ensuite essayez si $R^2 - v$ ne serait pas divisible par n, et si l'on ne pourrait pas extraire la racine du quotient, et enfin si cette racine ne serait point égale à $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$, et à $\frac{Q^2 + pR - nl^2 - s}{2nk}$. Si toutes ces conditions sont remplies, appelez cette racine m; et au lieu de l'équation proposée, écrivez celle-ci, $x^3 + \frac{1}{2}px^2 + Qx + R = \pm(kx^2 + lx + m)\sqrt{n}$.

En effet, si on quarre chaque membre de cette équation, et qu'on transpose tous les termes d'un même côté, elle rendra l'équation proposée. Mais si dans aucun cas toutes ces conditions ne peuvent avoir lieu, et qu'on se soit assuré d'avance que l'équation n'a point de diviseur rationnel, on peut être certain que l'équation est irréductible.

Exemple. Soit proposée l'équation.....

$$x^6 - 2ax^5 + 2b^2x^4 + 2ab^2x^3 \left.\begin{matrix} -2a^2b^2 \\ +2a^3b \\ -4ab^3 \end{matrix}\right\} x^2 \begin{matrix} +3a^2b^4 \\ -a^4b^2 \end{matrix} = 0.$$

Si l'on écrit respectivement, $-2a$, $+2b^2$, $+2ab^2$, $-2a^2b^2 + 2a^3b - 4ab^3$, 0, et $3a^2b^4 - a^4b^2$, pour p, q, r, s, t et v, on aura, $\alpha = 2b^2 - a^2$, $\beta = 4ab^2 - a^3$, $\gamma = 2a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 - a^4$, $\zeta = -b^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 - 4ab^3 - \frac{1}{4}a^4$, $\mu = -\frac{1}{2}a^5 + 3a^3b^2 - 4ab^4$, et $\theta = -a^2b^4 + a^4b^2 - \frac{1}{4}a^6$. Les termes 2ζ, μ, et 2θ ont pour diviseur commun, $a^2 - 2b^2$, ou bien $2b^2 - a^2$, selon que a^2

Digitized by Google

est plus grand ou plus petit que $2b^2$. Soit a^2 plus grand que $2b^2$, et on aura, $a^2 - 2b^2 = n$; parce que n doit toujours être positif. Ensuite $\frac{\zeta}{n} = -\frac{1}{4}a^2 + 2ab + \frac{1}{2}b^2$, $\frac{\mu}{n} = -\frac{1}{2}a^3 + 2ab^2$, et..... $\frac{\theta}{n} = \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2$. Ainsi $\frac{\zeta}{2n} \times \frac{\theta}{n} - \frac{\mu^2}{8n^2} = \frac{\lambda}{2n^2} = \frac{1}{8}a^6 - \frac{1}{4}a^5b - \frac{1}{8}a^4b^2 + \frac{1}{2}a^3b^3 - \frac{3}{8}a^2b^4$, dont les diviseurs sont, 1, a, a^2. Mais comme $k\sqrt{n}$ ne peut être que d'une seule dimension, et que $\sqrt{n}$ est déjà d'une dimension, il s'en suit que k ne peut avoir aucune dimension, et par conséquent il ne doit être qu'un nombre. Je rejette donc a et a^2, et il ne reste que 1 pour k. D'un autre côté, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$ donne 0 pour Q, et $\frac{Qr - Q^2p - t}{n}$ est aussi 0; par conséquent l, qui doit être un des diviseurs de cette dernière quantité, sera également 0. Enfin $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + nkl$ donne pour R, ab^2; et $R^2 - v = -a^2b^4 + a^4b^2$, quantité qui peut être divisée par n, ou $a^2 - 2b^2$, et le quotient étant a^2b^2, on peut en extraire la racine, qui est ab. Cette racine prise négativement, étant comparée à la quantité indéfinie $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$ ou $\frac{0}{0}$, on peut la regarder comme lui étant égale, et elle l'est bien certainement à la quantité déterminée, $\frac{Q^2 + pR - nl^2 - s}{2nk}$. Ainsi je désigne cette racine $-ab$ par m, et au lieu de l'équation proposée, je puis écrire.... $x^3 + \frac{1}{2}px^2 + Qx + R = (kx^2 + lx + m)\sqrt{n}$, c'est-à-dire..... $x^3 - ax^2 + ab^2 = (x^2 - ab)\sqrt{a^2 - 2b^2}$; on peut s'assurer de la légitimité des opérations qui nous ont amenés à cette équation, ainsi que de la bonté de l'équation elle-même, en quarrant chacun de ses membres, et transposant tous les termes d'un même côté;

Digitized by Google

car par-là nous retrouverons l'équation, $x^6 - 2ax^5 + 2b^2x^4 + 2ab^2x^3 - 2a^2b^2x^2 + 2a^3bx^2 - 4ab^3x^2 + 3a^2b^4 - a^4b^2 = 0$, qui est l'équation même qu'on avait proposé de réduire.

Si on a une équation du huitième degré, telle que $x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vx^2 + wx + z = 0$, et qu'on fasse $\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$, $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$, $\gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{2}\alpha^2$, $\delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta$, $\varepsilon = v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2$, $\zeta = w - \frac{1}{2}\beta\gamma$, et $\mu = z - \frac{1}{4}\gamma^2$. Qu'on cherche maintenant un diviseur commun des quantités, 2δ, 2ε, 2ζ, 8μ; et il faut que ce diviseur commun soit un nombre entier, non quarré ni divisible par un quarré; il faut de plus, que dans le cas où un des coëfficiens p, r, t, w des termes alternes serait impair, il faut, dis-je, que ce diviseur commun étant lui-même divisé par 4, laisse l'unité pour reste. Si on ne trouve aucun des diviseurs communs qui remplisse toutes ces conditions, on peut être certain que l'équation n'est pas réductible par l'extraction d'une racine sourde du second degré. Et lorsqu'elle ne sera pas réductible, il sera même bien difficile de trouver un simple diviseur commun des quantités 2δ, 2ε, etc. Jusqu'ici tout notre travail a été employé à examiner si une équation était réductible ou non; mais comme ces réductions sont rarement possibles, en voilà suffisamment sur cet article.

Cependant nous observerons encore que c'est par une méthode semblable qu'on s'assurerait si une équation du dixième ou du douzième degré, ou même d'un degré plus élevé, est irréductible.

Par exemple, si l'on a celle-ci, $x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + vx^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, on fera, $\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$, $\beta = r - \frac{1}{2}p\alpha$, $\gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha^2$, $\delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta$, $\varepsilon = v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2$, $\zeta = a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma$, $\mu = b -$

$\frac{1}{2}\beta\delta$

Digitized by Google

$\frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma^2$, $\theta = c - \frac{1}{2}\gamma\delta$, et enfin $\varkappa = d - \frac{1}{4}\delta^2$. Il faudra chercher le diviseur commun des cinq termes 2ε, 2ζ, 8μ, 4θ, $8\varkappa$; il faudra que ce diviseur soit un nombre entier, non quarré; et si quelqu'un des coëfficiens des termes alternes p, r, t, a, c est impair, il faudra de plus, que ce commun diviseur, étant lui-même divisé par 4, laisse l'unité pour reste.

Si l'on a l'équation de douze dimensions, $x^{12} + px^{11} + qx^{10} + rx^9 + sx^8 + tx^7 + vx^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, il faudra faire, $\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$, $\beta = r - \frac{1}{2}p\alpha$, $\gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha^2$, $\delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta$, $\varepsilon = v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2$, $\zeta = a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma$, $\mu = b - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma^2$, $\theta = c - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta$, $\varkappa = d - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta^2$, $\lambda = e - \frac{1}{2}\delta\varepsilon$, $\rho = f - \frac{1}{4}\varepsilon$. Et il faudra chercher un diviseur commun, qui soit un nombre entier et non quarré, des six termes 2ζ, 8μ, 4θ, $8\varkappa$, 4λ, 8ρ; et si un des coëfficiens p, r, t, a, c, e des termes alternes, est impair, il faudra que ce commun diviseur étant lui-même divisé par 4, laisse l'unité pour reste.

On pourra procéder de cette manière jusqu'à l'infini, et l'on sera certain que l'équation sera irréductible, par l'extraction d'une racine sourde quarrée, toutes les fois qu'on ne trouvera pas un diviseur commun avec toutes les conditions que nous avons énoncées. Si donc on trouve un diviseur n qui donne l'espérance de pouvoir réduire l'équation, il faudra se guider pour les opérations, sur l'exemple que nous allons donner, en réduisant une équation du huitième degré.

Cherchez un nombre quarré tel, qu'étant multiplié par n, si l'on ajoute au produit le dernier terme z de l'équation avec son propre signe, la somme fasse encore un quarré. Cela s'exécutera bien facilement de la manière suivante : si n est un nombre pair, ajoutez

Digitized by Google

successivement à z, les nombres, n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, etc., mais si n est impair, c'est à $4z$ qu'il faudra ajouter successivement n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, etc.; et dans l'un ou l'autre cas, il faudra essayer les termes, en suivant la progression, jusqu'à ce qu'on tombe sur quelque nombre quarré; et pour cela, je suppose qu'on a sous les yeux la table des nombres quarrés. Mais si, avant qu'aucune des sommes essayées donnât un quarré, on trouvait que la racine quarrée de l'une quelconque d'entre elles, augmentée de la racine quarrée de l'excès de cette même somme sur le dernier terme de l'équation, donne une quantité plus grande que le quadruple du plus grand des coëfficiens p, q, r, s, t, v, etc., de l'équation proposée, il serait inutile de pousser plus loin les tentatives, l'équation est irréductible. Mais si c'est le quarré qu'on rencontre d'abord, on appellera sa racine S, si n est pair, ou $2S$, si n est impair; et on fera $\sqrt{\frac{S^2 - z}{n}} = h$. Si n est pair, S et h doivent être des nombres entiers; mais si n est impair, S et h peuvent être des nombres fractionnaires ayant 2 pour dénominateur. Et s'il l'un des deux est fractionnaire, il faut que l'autre le soit aussi. On dira la même chose des nombres R et m, Q et l, p et k qu'on trouvera ensuite. Il faudra écrire dans une table, tous les nombres S et h qui se trouveront compris dans les limites assignées. Ensuite il faudra essayer pour k tous les nombres qui ne donneront pas $nk \pm \frac{1}{2}p$ plus grand, que le quadruple du plus grand coëfficient de l'équation. Et dans tous les cas, on fera $\frac{nk^2 + a}{2} = Q$. Après cela, on essayera pour l, tous les nombres qui ne feront pas $nl \pm Q$ plus grand, que le quadruple du plus grand coëfficient de l'équation. Et il faudra toujours supposer que, $\frac{-npk^2 + 2\beta}{4} + nkl = R$. Enfin il faudra

Digitized by Google

successivement essayer pour m, tous les nombres qui ne feront pas $nm \pm R$ plus grand que le quadruple du plus grand coëfficient de l'équation, et voir pour chaque cas si l'on a, $s - Q^2 - pR + nl^2 = 2H$ et $H + nkm = S$, et si cet S est un des nombres précédemment mis pour S dans la table; et si de plus, le nombre qui a été mis pour h dans la table, est égal aux trois quantités $\frac{2RS - w}{2mn}$, $\frac{2QS + R^2 - v - m^2 n}{2nl}$ et $\frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk}$. S'il se trouve un cas où toutes ces conditions soient remplies, au lieu de l'équation proposée, on écrira celle-ci.....

$$x^4 + \tfrac{1}{2}px^3 + Qx^2 + Rx + S = (kx^3 + lx^2 + mx + h)\sqrt{n}.$$

Exemple : soit proposée l'équation, $x^8 + 4x^7 - x^6 - 10x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 10x - 5 = 0$, on aura, $q - \frac{1}{4}p^2 = -1 - 4 = -5 = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = -10 + 10 = 0 = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 = 5 - \frac{25}{4} = -\frac{5}{4} = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = -5 + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} = \delta$, $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2 = -10 - \frac{25}{8} = -\frac{105}{8} = \varepsilon$, $w - \frac{1}{2}\beta\gamma = -10 = \zeta$, $z - \frac{1}{4}\gamma^2 = -5 - \frac{25}{64} = -\frac{345}{64} = \mu$. Ainsi 2δ, 2ε, 2ζ, 8μ sont respectivement, -5, $-\frac{105}{4}$, -20 et $-\frac{345}{4}$. Ces quantités ont pour diviseur commun, 5, qui lui-même, étant divisé par 4, laisse 1 pour reste, comme cela devait être à cause du coëfficient impair s. Ainsi, ayant trouvé un diviseur commun n ou 5 qui me donne l'espérance de réduire l'équation, et ce diviseur étant impair, j'ajoute successivement à $4z$ ou à -20, les nombres n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, etc., ou 5, 15, 25, 35, 45, etc., et il me vient, -15, 0, 25, 60, 105, 160, 225, 300, 385, 480, 585, 700, 825, 960, 1105, 1260, 1425, 1600, parmi lesquels, il ne se trouve que les seuls nombres, 0, 25, 225 et 1600 qui soient des quarrés. C'est pourquoi, je prends

Digitized by Google

la moitié de leurs racines $0, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 20$, je les écris dans une table, pour S; et j'écris dans la même table, pour h, $\sqrt{\frac{S^2-\xi}{n}}$, c'est-à-dire, $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 9$, valeurs de h qui correspondent respectivement aux valeurs $0, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 20$ de S. Mais si dans la formule, $S+nh$, on écrit 20 pour S et 9 pour h, on aura 65, nombre plus grand que le quadruple du plus grand coëfficient de l'équation. Je rejette donc 20 et 9, et je porte seulement dans la table, les autres nombres, comme on le voit ici à côté.

h	$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}.$
S	$0, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}.$

Les choses étant ainsi disposées, j'essaye pour k tous les nombres qui ne rendront pas la formule $\frac{1}{2}p \pm nk$ ou $2 \pm 5k$ plus grande que le quadruple du plus grand coëfficient de l'équation, qui est ici, 40. J'essaye donc les nombres $-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; et je fais, $\frac{nk^2+a}{2}$ ou $\frac{5k^2-5}{2} = Q$, et en mettant successivement pour k les valeurs posées plus haut, nous aurons aussi respectivement pour Q les valeurs suivantes: $\frac{315}{2}, 120, \frac{175}{2}, 60, \frac{75}{2}, 20, \frac{15}{2}, 0, -\frac{5}{2}, 0, \frac{15}{2}, 20, \frac{75}{2}, 60, \frac{175}{2}, 120$. Or comme $Q \pm nl$ ne doit pas excéder 40, à plus forte raison, Q seul ne doit-il pas l'excéder; par conséquent il est facile de voir qu'il faut rejeter, $\frac{315}{2}, 120, \frac{175}{2}$ et 60, ainsi que leurs nombres correspondans, $-8, -7, -6, -5, 5, 6, 7$; ainsi les seuls qu'il faut essayer pour k, sont $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. Et ceux qu'il faut respectivement essayer pour Q sont, $\frac{75}{2}, 20, \frac{15}{2}, 0, -\frac{5}{2}, 0, \frac{15}{2}, 20, \frac{75}{2}$. Essayons donc -1 pour k, et 0 pour Q, et dans ce cas, il faudra encore essayer pour l, tous les nombres qui ne rendront pas $Q \pm nl$ plus grand que 40, c'est-à-dire,

Digitized by Google

qu'il faudra essayer tous les nombres qui sont entre $+10$ et -10. Il faudra aussi essayer respectivement pour R, tous les nombres $\frac{2\beta - npk^2}{4} + nkl$ ou $-5-5l$, ou bien $-55, -50, -45, -40, -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$, parmi lesquels, les trois premiers et le dernier étant plus grands que 40, peuvent être négligés. Essayons encore -2 pour l, et 5 pour R; et dans ce cas, il faudra essayer pour m, tous les nombres qui ne rendront pas $R \pm nm$ ou $5 \pm 5m$ plus grand que 40; c'est-à-dire, qu'il faudra essayer les nombres qui sont entre $+7$ et -9. Ensuite il faudra voir si, en faisant $s - Q^2 - pR + nl^2$, c'est-à-dire, $5 - 20 + 20$ ou $5 = 2H$, il faudra voir, dis-je, si $H \pm nkm$ ou $\frac{5}{2} - 5m = S$; ou bien, si parmi les nombres $-\frac{65}{2}, -\frac{55}{2}, -\frac{45}{2}, -\frac{35}{2}, -\frac{25}{2}, -\frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}, \frac{35}{2}, \frac{45}{2}, \frac{55}{2}, \frac{65}{2}, \frac{75}{2}, \frac{85}{2}$, il ne s'en trouverait pas quelqu'un d'égal à quelqu'un des nombres $0, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2}$ qu'on a mis pour S dans la table. Ici il s'en rencontre quatre qui sont $-\frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}$, qui répondent aux nombres $\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{7}{2}$ qui ont été écrits pour h dans la table, selon que j'ai substitué $2, 1, 0, -1$ pour m. Mais si nous essayons $-\frac{5}{2}$ pour S et -1 pour m et $\pm\frac{3}{2}$ pour h, il viendra, $\frac{2RS - w}{2mn} = \frac{-25+10}{10} = -\frac{3}{2}$, et.....

$\frac{2QS + R^2 - v - nm^2}{2nl} = \frac{25+10-5}{-20} = -\frac{3}{2}$, et.....

$\frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk} = \frac{-10+5+20}{-10} = -\frac{3}{2}$; ainsi comme dans tous les cas, il nous vient, $-\frac{3}{2}$ pour h, j'en conclus, que tous les nombres sont bons; par conséquent, au lieu de l'équation proposée,

Digitized by Google

j'écrirai celle-ci, $x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qx^2 + Rx + S = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $(kx^3 + lx^2 + mx + h)\sqrt{n}$, ou bien $x^4 + 2x^3 + 5x - 2\frac{1}{2} =$ $(-x^3 - 2x^2 + x - 1\frac{1}{2})\sqrt{5}$. Et en quarrant chaque membre de cette équation, il en naîtra l'équation même de huit dimensions que l'on s'était proposé de réduire.

Si, après avoir essayé tous les nombres, les valeurs trouvées dans chaque cas, pour h, n'eussent pas été toutes égales entre elles, c'eût été une preuve que l'équation proposée aurait été irréductible par l'extraction d'une racine sourde quarrée.

Je passe ici quelques moyens d'abréviation qu'on aurait pu employer, parce que mon but était plutôt de faire voir la possibilité de pareilles réductions que d'en enseigner la pratique. Elles ne peuvent guère être d'aucun usage, vu leur grande difficulté, et le peu de cas où elles réussissent. Au reste on les appelle *réductions par l'extraction des racines sourdes quarrées.*

On pourrait encore placer ici la réduction des équations par l'extraction des racines sourdes cubiques. Mais comme elles sont bien rarement utiles, je n'en ferai pas mention pour abréger.

Il y a cependant quelques réductions connues des équations cubiques que le lecteur pourrait regretter de ne pas trouver ici. Soit proposée, par exemple, l'équation cubique $x^3 + qx + r = 0$, qui manque de second terme (car nous avons vu précédemment que toute équation cubique peut être ramenée à cette forme). Supposons que $x = a + b$, on aura, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (c'est-à-dire x^3) $+ qx + r = 0$; supposons encore, $3a^2b + 3ab^2 + qx = 0$, ce qui donne (à cause de $3a^2b + 3ab^2 = 3abx$), $3abx + qx = 0$, Et il s'en suivra que $a^3 + b^3 + r = 0$. De la première, je tire

Digitized by Google

$b = -\frac{q}{3a}$, et par conséquent, $b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$; et en substituant cette valeur de b^3 dans la seconde équation, elle devient..... $a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0$, ou bien, $a^6 + ra^3 = \frac{q^3}{27}$. Et en résolvant cette équation selon la méthode de celles du second degré, on aura, $a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$. Et en tirant la racine cubique, il viendra la valeur de a. Mais nous avons vu plus haut que $b = -\frac{q}{3a}$, et $x = a + b$, donc $a - \frac{q}{3a}$ sera la racine de l'équation proposée.

Par exemple, si l'on donne l'équation $y^3 - 6y^2 + 6y + 12 = 0$. Pour en ôter le second terme, je ferai $x + 2 = y$, et il me viendra, $x^3 - 6x + 8 = 0$, où $q = -6$, $r = 8$, $\frac{1}{4}r^2 = 16$, $\frac{q^3}{27} = -8$, $a^3 = -4 \pm \sqrt{8}$, $a - \frac{q}{3a} = x$, et $x + 2 = y$. Donc on a,

$$y = 2 + \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}}.$$

Par cette méthode on trouve les racines de toutes les équations cubiques lorsque q est positif, ou lorsque q étant négatif, $\frac{q^3}{27}$ n'est pas plus grand que $\frac{1}{4}r^2$, c'est-à-dire, *lorsque deux racines de l'équation sont impossibles ou imaginaires.* Mais lorsque q est négatif, et que $\frac{q^3}{27}$ est plus grand que $\frac{1}{4}r^2$, les racines x ou y de l'équation se présentent alors sous une forme impossible, parce que la racine quarrée $\sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{q^3}{27}}$ est une quantité imaginaire; *et cependant c'est alors que les trois racines sont réelles.* Elles dépendent toutes les trois, et de la même manière, des coëfficiens q et r de l'équation; il semblerait donc qu'elles devraient être déterminées toutes les trois

Digitized by Google

par la même loi qui en fait trouver une; *mais il est impossible de les déterminer.* (*).

Dans notre hypothèse, la valeur de x est représentée par $a - \frac{q}{3a}$; or ce binome ne peut avoir qu'une seule valeur, tandis que x doit en avoir plusieurs, donc cette hypothèse est impossible; elle ne l'est pas moins, en ce qu'elle suppose, $a^3 + b^3 = \pm r$, et $3ab = \pm q$. Or il n'est pas étonnant que d'une hypothèse impossible on ne puisse tirer aucune conclusion possible.

Voici cependant un autre moyen d'exprimer ces racines. Nous avons supposé que $a^3 + b^3 + r = 0$. Si de cette équation nous retranchons $a^3 + r$, ou bien, $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$, il restera.....

$b^3 = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$. Par conséquent.....

$a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}$, et $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}$,

ou bien, $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}$, et.....

$b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}$. Et alors, à cause de $x = a + b$,

on a, $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}$.

On peut aussi obtenir les racines des équations du quatrième degré par le moyen des racines de l'équation cubique.

Commencez par faire disparaître le second terme, et soit l'équation

(*) C'est-à-dire, qu'il est impossible de les exprimer sous une forme finie, et qu'on ne peut avoir leur valeur approchée que par le moyen des séries.

résultante,

Digitized by Google

résultante, $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$. Imaginez que cette équation est le produit des deux équations du second degré, $x^2 + ex + f = 0$, et $x^2 - ex + g = 0$, ou que l'équation.....

$x^4 \times \begin{matrix} +f \\ +g \\ -e^2 \end{matrix} \Big\{ x^2 \begin{matrix} +eg \\ -ef \end{matrix} \Big\} x + fg = 0$, est identique avec l'équation proposée. En les comparant terme à terme, on aura, $f + g - e^2 = q$, $eg - ef = r$, et $fg = s$. Ainsi $q + e^2 = f + g$, $\frac{r}{e} = g - f$,.....

$\frac{q + e^2 + \frac{r}{e}}{2} = g$, $\frac{q + e^2 - \frac{r}{e}}{2} = f$, $\frac{q^2 + 2e^2 q + e^4 - \frac{r^2}{e^2}}{4} = fg = s$,

et en réduisant, $e^6 + 2qe^4 \begin{matrix} +q^2 \\ -4s \end{matrix} \Big\{ e^2 - r^2 = 0$. Je fais $y = e^2$, et je substitue dans l'équation, ce qui la change en.....

$y^3 + 2qy^2 \begin{matrix} +q^2 \\ -4s \end{matrix} \Big\{ y - r^2 = 0$, équation cubique, dont on peut faire disparaître le second terme, et en tirer ensuite la racine, soit par la règle précédente, soit par une autre quelconque. Une fois cette racine obtenue, il faudra remonter aux opérations précédentes de cette manière, $e = \sqrt{y}$, $\frac{q + e^2 + \frac{r}{e}}{2} = g$, $\frac{q + e^2 - \frac{r}{e}}{2} = f$, et ayant résolu les équations $x^2 + ex + f = 0$, et $x^2 - ex + g = 0$, on aura les quatre racines de l'équation $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$, qui seront, $x = -\frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}e^2 - f}$, et $x = \frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}e^2 - g}$. Il faut remarquer ici que si l'équation du quatrième degré a ses quatre racines réelles, il faut que l'équation cubique.....

$y^3 + 2qy^2 \begin{matrix} +q^2 \\ -4s \end{matrix} \Big\{ y - r^2 = 0$, ait aussi ses trois racines réelles; or,

Digitized by Google

dans ce cas, nous avons vu, par la règle précédente, qu'elle ne peuvent pas être déterminées. (*).

Si une équation affectée de cinq ou d'un plus grand nombre de dimensions, est convertie en une équation non-affectée, les termes moyens étant ôtés par un procédé quelconque, l'expression des racines de cette équation sera toujours impossible, lorsqu'étant d'un degré impair elle a plus d'une racine réelle, ou qu'étant d'un degré pair, elle en a plus de deux; à moins que, dans ce dernier cas, elle ne puisse être réduite par l'extraction d'une racine sourde quarrée, selon la méthode qui a été enseignée précédemment. (74).

C'est Descartes qui a enseigné l'art de réduire les équations du quatrième degré, comme nous venons de le faire. Par exemple, si l'on propose l'équation dont nous avons déjà fait ci-devant la réduction, $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, qu'on fasse disparaître le second terme en écrivant, $v + \frac{1}{4}$ au lieu de x, et l'on aura, $v^4 - \frac{43v^2}{8} + \frac{75v}{8} - \frac{851}{256} = 0$. Pour faire évanouir les fractions, on substituera $\frac{1}{4}z$ au lieu de v, et il viendra, $z^4 - 86z^2 + 600z - 851 = 0$. On a donc, $-86 = q$, $600 = r$, et $-851 = s$. Ainsi, en substituant ces valeurs dans l'équation.....

$y^3 + 2qy^2 \begin{matrix} +q^2 \\ -4s \end{matrix} \Big\} y - r^2 = 0$, elle deviendra, $y^3 - 172y^2 + 10800y - 360000 = 0$. Et en essayant tous les diviseurs du dernier terme, 1, — 1, 2, — 2, 3, — 3, 4, — 4, 5, — 5, et ainsi de

(*) Il me semble que la méthode de résoudre les équations du troisième et du quatrième degrés, n'est exposée nulle part avec plus d'ordre et de clarté que dans l'Algèbre du Cn. Bossut. Le lecteur peut la consulter, et il y trouvera l'explication de tout ce qui pourrait l'embarrasser ici.

Digitized by Google

suite, on trouvera enfin que $y = 100$, résultat où on serait parvenu bien plus promptement par la méthode que nous avons exposée ci-devant. (*).

Continuons la méthode de Descartes. Ayant trouvé $y = 100$, on aura, $e = \sqrt{y} = 10$; et $\frac{q + e^2 - \frac{r}{e}}{2}$, c'est-à-dire..... $\frac{-86 + 100 - 60}{2}$, ou $-23 = f$; et $\frac{q + e^2 + \frac{r}{e}}{2}$, ou $37 = g$. Ainsi, en substituant ces valeurs de e, de f, et de g, dans les deux équations, $x^2 + ex + f = 0$, et $x^2 - ex + g = 0$; et en écrivant z pour x, elles deviendront, $z^2 + 10z - 23 = 0$, et $z^2 - 10z + 37 = 0$. Remettant maintenant v pour $\frac{z}{4}$, elles seront changées en..... $v^2 + 2\frac{1}{2}v - \frac{23}{16} = 0$, et $v^2 - 2\frac{1}{2}v + \frac{37}{16} = 0$. Et en remettant encore $x - \frac{1}{4}$ au lieu de v, on aura enfin, $x^2 + 2x - 2 = 0$, et $x^2 - 3x + 3 = 0$. Les quatre racines de ces deux équations sont, $x = -1 \pm \sqrt{3}$, et $x = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$. Ces racines sont les mêmes que celles que nous avons trouvées au commencement de cet ouvrage, pour l'équation proposée, $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$; et pour y parvenir alors, nous avons fait usage d'une nouvelle méthode de trouver les diviseurs, méthode plus facile que celle que nous venons d'employer.

(*) Cette méthode dont parle Newton, est celle qui a été enseignée, tome I, page 46 et suivantes, ou mieux encore, celle qu'il a donnée, tome II, page 26.

Digitized by Google

CONSTRUCTION LINÉAIRE DES ÉQUATIONS.

Jusqu'ici j'ai enseigné les propriétés des équations, leurs transformations, leurs limites, et tous les moyens qu'on peut employer pour les réduire. Je n'ai pas toujours démontré les méthodes dont j'ai fait usage, parce qu'elles m'ont paru assez faciles, et que leur démonstration aurait souvent entraîné beaucoup de longueurs. On sait maintenant quelle est la forme la plus commode qu'il faut donner aux racines des équations, il ne reste donc plus qu'à enseigner l'art de les traduire en nombres ; et la plus grande difficulté est d'obtenir les deux ou trois premiers chiffres qui en donnent la valeur approchée. Or c'est à quoi l'on parvient très-facilement en construisant l'équation, soit géométriquement, soit mécaniquement (*). Je crois donc que le lecteur ne sera pas fâché de trouver ici quelques constructions de cette espèce.

Les Anciens, comme nous l'apprend Pappus, essayèrent d'abord de trouver la trissection de l'angle, et deux moyennes proportionnelles géométriques, par le moyen de la ligne droite et du cercle, mais leurs efforts furent inutiles. Ils en vinrent ensuite à considérer beaucoup d'autres lignes, telles que la conchoïde, la cissoïde et les sections coniques, et par le moyen de quelques-unes de ces courbes,

(*) On va voir bientôt pourquoi Newton ne considère la construction géométrique d'une équation, que comme un moyen d'obtenir, par approximation, la valeur numérique de ses racines.

Digitized by Google

ils résolurent ces deux problêmes. Enfin, après un mûr examen, ils regardèrent les sections coniques comme des lignes géométriques, et classèrent les problêmes sous trois genres : ils appelèrent *Problêmes plans*, ceux qui peuvent être résolus par des lignes qui naissent sur un plan, telles que la ligne droite et le cercle; *Problêmes solides*, ceux qui ne peuvent être résolus que par des lignes engendrées dans un solide, tel que le cône; et enfin, *Problêmes linéaires*, ceux dont la solution dépend de lignes plus composées. D'après cette distinction, tout problême solide, dont la solution ne peut s'obtenir que par des lignes différentes des sections coniques, ne doit pas être considéré comme problême géométrique, sur-tout si l'on n'admet au rang des lignes géométriques, que la droite, le cercle, et les sections coniques. Mais les modernes se sont mis plus au large; ils ont regardé comme géométrique, toute ligne qui pouvait être exprimée par une équation. Ils ont classé ces lignes en différens genres, d'après le nombre de dimensions de leurs équations, et ils ont posé pour loi : qu'il n'était pas permis de construire par une ligne d'un genre quelconque, un problême qui peut l'être par celle d'un genre inférieur.

Que dans l'étude des courbes, dans l'examen que l'on fait de leurs propriétés, l'on procède selon l'ordre des dimensions de leurs équations, c'est une marche qui me paraît digne d'être approuvée; cependant on remarquera, que ce n'est pas l'équation, mais la description d'une courbe, qui la rend géométrique. Le cercle est une courbe géométrique, non parce qu'il peut être exprimé par une équation, mais parce qu'il peut être décrit géométriquement. Le motif qui doit faire préférer une courbe à une autre, pour la construction d'un problême, n'est pas la simplicité de son équation, mais la facilité avec laquelle on peut la décrire. Car l'équation de la parabole est

Digitized by Google

plus simple que celle du cercle; et cependant, toutes les fois qu'on le peut, on préfère le cercle, parce que sa description est plus facile. Si l'on considère le cercle et les sections coniques sous le rapport des dimensions de leurs équations, on les rangera dans le même ordre : ce qu'on ne fait pas cependant; car le cercle dans la construction des problêmes, est mis au même rang que la ligne droite, à cause de la facilité de sa description; de manière qu'on peut, sans pécher contre la règle, construire par le cercle, un problême qu'on aurait pu également construire par la ligne droite. On y pécherait, au contraire, si l'on construisait par les sections coniques, celui qui peut l'être par un cercle. Décidez-vous maintenant, et voyez si la loi des dimensions des équations doit être tellement observée, qu'on ne puisse faire d'exception en faveur du cercle, et alors rejetez comme inutile cette distinction des problêmes *en plans* et *en solides;* ou bien dites si, malgré cette loi, on peut, dans les lignes des ordres supérieurs, en choisir quelqu'une de préférence à celles du même ordre, et à cause de la facilité de sa description, la ranger, du moins pour la construction des problêmes, parmi celles d'un ordre inférieur. Lorsqu'on est maître de choisir entre plusieurs constructions également géométriques, il faut toujours préférer la plus simple : cette règle n'admet point d'exception. Or, les expressions algébriques les plus simples, ne sont pas toujours les plus faciles à construire. La simplicité que l'on doit préférer, ne doit donc s'entendre que de la simplicité de description : c'est elle uniquement que considéraient les géomètres qui rangeaient le cercle dans la même classe que la ligne droite; car les problêmes sont plus ou moins faciles à construire, selon que les lignes qui en donnent la solution, sont plus ou moins aisées à décrire. Ainsi il est répugnant d'aller

Digitized by Google

chercher les loix de la construction ailleurs qu'en elle-même. Il faudra donc nous accorder avec les anciens pour n'admettre comme lignes géométriques, que *la droite*, *le cercle*, et peut-être *les sections coniques*, ou bien les regarder toutes comme *telles*, en les rangeant selon l'ordre de simplicité de leur description. Si la trochoïde était reçue comme une ligne géométrique, on pourrait, par son moyen, partager un angle en raison donnée. Reprocheriez-vous donc à un géomètre, d'employer la trochoïde, pour couper un angle dans le rapport d'un nombre à un autre, en prétendant que cette courbe ne pouvant être exprimée par une équation, il est obligé d'en employer une qui puisse l'être ? Ainsi donc s'il avait à partager un angle en 10001 parties, il serait tenu, selon vous, à employer une courbe dont l'équation passerait le centième degré. Est-il un homme qui soit, je ne dis pas en état de construire, mais seulement de comprendre une telle équation ? Et pourriez-vous préférer une telle courbe, si elle pouvait exister, à la trochoïde, ligne très-connue, et si facile à décrire par le mouvement d'une roue ou d'un cercle ? Au reste, je crois avoir fait toucher au doigt l'absurdité d'un tel systême. Il faut donc, ou refuser d'admettre la trochoïde dans la géométrie, ou la préférer dans la construction des problêmes, à toute autre ligne d'une construction moins facile; et ce que je viens de dire de la trochoïde, doit s'entendre également de toute autre espèce de courbes. C'est pour cette raison que je préfère les trissections d'angles que nous ont laissées, Archimède dans ses lemmes, et Pappus dans ses collections, à toutes les autres méthodes qu'on a trouvées pour résoudre le même problême, puisque, je le répète, il faut exclure de la géométrie toutes les lignes, hors la droite et le cercle, ou les admettre toutes, selon le rang de simplicité de leur description. Or, excepté

Digitized by Google

le cercle, il n'est aucune courbe plus facile à décrire que la conchoïde.

Une équation est, en général, l'expression d'un calcul arithmétique, où l'on prononce que quelques quantités sont égales à d'autres. Une équation ne peut être géométrique qu'autant que les quantités qu'elle contient sont géométriques, telles que lignes, surfaces, solides, ou proportions. C'est par une innovation des modernes qu'on y a fait entrer des multiplications, des divisions, et d'autres calculs de cette espèce; et cette innovation n'est point heureuse; elle répugne aux premiers principes de la science. Car si l'on réfléchit bien aux constructions des problêmes par la ligne droite et le cercle, telles que les ont imaginées les anciens géomètres, on verra facilement qu'ils n'y ont eu recours qu'afin d'éviter, par le tracer facile de quelques lignes, l'ennui des longs calculs. Il ne faut donc pas confondre ces deux sciences; les anciens en séparaient les limites avec tant de soin, que jamais ils ne se sont permis d'introduire des termes d'arithmétique dans la géométrie; et les modernes en les confondant, ont fait disparaître la simplicité qui fait toute l'élégance de la géométrie. La simplicité arithmétique consiste à exprimer une question par l'équation la plus simple, et la simplicité géométrique, à résoudre une équation en menant les lignes les plus simples. On n'aura donc point de reproches à me faire, si, avec le plus grand des géomètres, Archimède, et les autres anciens, j'emploie la conchoïde pour construire les problêmes solides. Au reste, s'il se trouvait quelqu'un qui ne partageât pas mes sentimens à cet égard, qu'il se persuade bien qu'il s'agit ici, moins de constructions géométriques, que de constructions quelconques, par lesquelles je cherche à approcher le plus près possible de la valeur des racines d'une équation. En conséquence, je vais commencer par un problême qui nous servira de lemme.

Entre

Digitized by Google

Entre deux droites données AB, AC, placer une droite BC d'une longueur donnée, de manière qu'elle passe par un point donné P.

(*Pl.* IX, *Fig.* 1ere). SI la droite BC tourne autour du point P comme pôle, et qu'une de ses extrémités C soit contrainte de glisser le long de AC, son autre extrémité B décrira la conchoïde des anciens, et rencontrera la droite AB au point B. Joignez les points B et P, et la partie BC de cette droite sera la ligne qu'il fallait mener. On pourrait encore, par la même méthode, mener la ligne BC, si, au lieu de la ligne droite AC, on nous avait donné une courbe quelconque.

Si cette construction, par la conchoïde, paraissait peu élégante, on peut y employer une section conique. Pour cela, du point P, menez les droites PD et PE de manière, qu'en rencontrant les lignes AD, AE, elles forment le parallélogramme $EADP$, et des points C et D, abaissez sur AB les perpendiculaires CF, DG; menez aussi du point E sur AC prolongée, la perpendiculaire EH; et faisant $AD = a$, $PD = b$, $BC = c$, $AG = d$, $AB = x$ et $AC = y$, on aura, $AD : AG :: AC : AF$, d'où $AF = \frac{dy}{a}$. On aura aussi, $AB : AC :: PD : CD$, ou bien $x : y :: b : a - y$, d'où l'on tire $by = ax - xy$, équation qui appartient à l'hyperbole. Ensuite (par la 13e. prop. du 2e. liv. des Élémens) on a,

Digitized by Google

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2FA \times AB$, c'est-à-dire, $c^2 = y^2 + x^2 - \frac{2dxy}{a}$. Multipliez par $\frac{2d}{a}$ l'équation $by = ax - xy$, et retranchez le produit de l'équation $c^2 = y^2 + x^2 - \frac{2dxy}{a}$, et il restera..... $c^2 - \frac{2bdy}{a} = y^2 + x^2 - 2dx$, équation au cercle, lorsque x et y font entre eux des angles droits. Si vous combinez donc l'hyperbole avec le cercle, par le moyen de ces deux équations, l'intersection des deux courbes donnera l'x et l'y, ou AB et AC qui détermineront la position de la droite BC. Et voici de quelle manière se fera la combinaison de ces deux lignes.

Menez deux droites quelconques KL et KM (*Pl.* IX, *Fig.* 2). Faites la première $KL = AD$, et la seconde $KM = PD$; et que ces deux droites fassent entre elles un angle droit MKL; achevez le parallélogramme $KLMN$; prenez LN, MN pour asymptotes, et faites passer par le point K, une hyperbole IKX.

Sur KM prolongée au-delà du point K, prenez $KP = AG$, et $KQ = BC$, et sur KL prolongée au-delà du point K, prenez $KR = AH$, et $RS = RQ$; achevez le parallélogramme $PKRT$, et du centre T avec un rayon égal à TS, décrivez un cercle, il coupera l'hyperbole au point X; de ce point, abaissez sur KP la perpendiculaire XY, et la droite XY sera égale à AC, et KY sera égale à AB. Ces deux lignes AC et AB, ou seulement l'une d'entre elles, avec le point P, suffisent pour déterminer la position cherchée de la droite BC. Je ne m'amuserai point à démontrer cette construction, ni les différens changemens qu'elle peut subir, selon les différens cas du problême.

Voilà donc la construction que j'offrirais à ceux qui n'auraient pas goûté la première. Mais on sent bien qu'elle est trop compliquée

Digitized by Google

pour être jamais d'aucun usage. Ce n'est donc qu'une pure spéculation; mais les spéculations géométriques n'ont d'élégance qu'autant qu'elles ont de simplicité; et de mérite, qu'à proportion de leur utilité. C'est pourquoi je préfère la construction par la conchoïde, comme étant plus simple que l'autre, non moins géométrique et résolvant parfaitement le problême. Après avoir donné ce lemme, nous allons procéder à la construction géométrique des problêmes cubiques, et des problêmes du 4e degré. Ces derniers peuvent se ramener à la construction des problêmes cubiques.

(*Pl.* IX, *Fig.* 3, 4 et 5). *Soit proposée l'équation cubique.....* $x^3 + qx + r = 0$, *dont le second terme manque, dont le coëfficient du troisième est* $+ q$, *et celui du quatrième,* $+ r$.

Tirez une droite quelconque KA que vous nommerez n. KA étant prolongée suffisamment de part et d'autre du point K, prenez $KB = \frac{q}{n}$ que vous porterez de K vers A, lorsque q sera positif, et du côté opposé, lorsqu'il sera négatif. Partagez AB en deux parties égales au point C, et du point K comme centre, avec KC comme rayon, décrivez le cercle CX, dans lequel vous inscrirez la droite $CX = \frac{r}{n^2}$, prolongez cette droite de part et d'autre; tirez maintenant AX que vous prolongerez aussi de part et d'autre. Enfin entre CX et AX, ou leurs prolongemens, inscrivez la droite EY d'une longueur égale à CA, et qui, étant prolongée, passe par le point K, et XY sera une racine de l'équation. Parmi ces racines, celles qui, du point X, tendent vers C, sont positives, et celles qui vont dans le sens opposé, sont négatives; dans la supposition pourtant que r est positif, car s'il était négatif, ce serait tout le contraire.

Digitized by Google

Démonstration.

Nous ferons précéder la démonstration, des trois Lemmes suivans :

Lemme Ier. On a, $XY : AK :: CX : KE$. En effet, menez à CX la parallèle KF, et à cause des triangles semblables ACX, AKF, et EXY, EFK, vous aurez, $AC : AK :: CX : KF$; et $XY : YE$ ou $AC :: KF : KE$. D'où il est facile de tirer la proportion $XY : AK :: CX : KE$. C. Q. F. D.

Lemme II. On a, $XY : AK :: CY : AK + KE$. Car en composant la dernière proportion du Lemme précédent, elle devient, $XY : AK :: XY + CX$ ou $CY : AK + KE$. C. Q. F. D.

Lemme III. On a aussi, $KE - BK : XY :: XY : AK$. Car (par la 12e. prop. du deuxième livre des Élémens) on a, $\overline{KY}^2 - \overline{CK}^2 = \overline{CY}^2 - CY \times CX = CY \times YX$. Donc $\overline{KY}^2 - \overline{CK}^2 = CY \times XY$, ce qui donne la proportion $CY : KY - CK :: KY + CK : XY$. Mais $KY - CK = KY - EY + CA - CK = KE - BK$. Et $KY + CK = KY - EY + CA + CK = KE + AK$. Ainsi on a, $CY : KE + AK :: KE - BK : XY$. Mais par le Lemme 2e, on avait, $CY : KE + AK :: XY : AK$, d'où il est facile de conclure que $XY : KE - BK :: AK : XY$ ou $KE - BK : XY :: XY : AK$. C. Q. F. D. (75).

Après ces préliminaires, voici comment on démontrera le problême.

Dans le premier Lemme, nous avons eu, $XY : AK :: CX : KE$, ce qui donne, $KE \times XY = AK \times CX$. Dans le troisième, nous avons eu, $KE - BK : XY :: XY : AK$; et en multipliant les

Digitized by Google

deux termes du premier rapport de cette proportion par XY, elle deviendra, $KE \times XY - BK \times XY : \overline{XY}^2 :: XY : AK$. Et si l'on substitue à la place de $KE \times XY$, sa valeur trouvée plus haut, la dernière proportion devient, $AK \times CX - BK \times XY : \overline{XY}^2 :: XY : AK$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, $\overline{AK}^2 \times CX - AK \times BK \times XY = \overline{XY}^3$. Enfin, pour XY, AK, BK, et CX, remettant leurs valeurs analytiques, x, n, $\frac{q}{n}$, et $\frac{r}{n^2}$, il viendra, $r - qx = x^3$. C. Q. F. D.

Quant aux variations des signes qui peuvent affecter les termes de l'équation, selon les différens cas du problême, je ne m'arrêterai pas à en faire la recherche.

Soit proposée maintenant l'équation, $x^3 + px^2 + r = 0$, *où le troisième terme manque.* Pour la construire, prenez une ligne quelconque, que vous appellerez n; prenez sur une autre ligne les deux longueurs $AK = \frac{r}{n^2}$, et $KB = p$; portez ces deux lignes dans le même sens, si r et p ont les mêmes signes, et dans des sens opposés, s'ils ont des signes contraires. Partagez BA en deux parties égales en C, et du point K, comme centre, avec le rayon CK, décrivez un cercle, dans lequel vous inscrirez CX égale à n, et que vous prolongerez de part et d'autre. Ensuite joignez les points A et K par une droite que vous prolongerez encore de part et d'autre. Enfin entre les lignes CX et AX, inscrivez EY de même longueur que CA, de manière que cette ligne EY étant prolongée, passe par le point K; alors KE sera la racine de l'équation. Les racines sont positives lorsque, par rapport au point X, le point Y tombe du côté de C, et elles sont négatives quand le point Y tombe de l'autre côté

Digitized by Google

de X, par rapport à C. Tout cela dans la supposition que r a le signe $+$; ce serait tout le contraire s'il avait le signe $-$.

Les figures et les lemmes qui ont servi à construire l'équation $x^3 + qx + r = 0$, serviront également à celle-ci, et voici de quelle manière.

Par le Lemme premier nous avons eu, $XY : AK :: CX : KE$, ou bien, $XY . KE = AK . CX$; et par le Lemme troisième, $KE - BK : XY :: XY : AK$, ou en prenant KB dans un sens opposé, $KE + KB : XY :: XY : AK$, qui deviendra, en multipliant les deux termes du premier rapport par KE, $(KE + KB) \times KE : XY \times KE :: XY : AK$. Et en mettant, au lieu de $XY \times KE$ sa valeur, $AK \times CX$, trouvée plus haut, la proportion deviendra, $(KE + KB) \times KE : AK \times CX :: XY : AK$, ou enfin, à cause des deux proportions qui ont des rapports égaux..... $(KE + KB) \times KE : AK \times CX :: CX : KE$, et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on a, $\overline{KE}^3 + KB \times \overline{KE}^2 = AK \times \overline{CX}^2$. Et si l'on met, au lieu de KE, KB, AK, CX, leurs valeurs analytiques respectives, on trouvera l'équation proposée, $x^3 + px^2 = r$.

Il s'agit maintenant de construire l'équation du troisième degré, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, qui a tous ses termes, et dont les racines ne sont ni toutes positives, ni toutes négatives.

(*Pl.* IX, *Fig.* 6). D'abord si le coëfficient q est négatif, prenez sur une droite quelconque KB, deux lignes $KA = \frac{r}{q}$, et $KB = p$, et portez-les du même côté par rapport au point K, si p et $\frac{r}{q}$ ont des signes différens; et de côtés opposés du point K, si p et $\frac{r}{q}$ ont les mêmes signes. Coupez AB en deux parties égales au point C;

Digitized by Google

élevez à ce point C une ligne CX, perpendiculairement à AB, et égale à la racine quarrée de q. Tirez maintenant les lignes AX et CX, que vous prolongerez indéfiniment, et inscrivez entre elles une droite EY, égale à AC, de manière que cette ligne inscrite étant prolongée, passe par le point K, et KE sera la racine de l'équation; racine positive si le point X tombe entre les points A et E, et négative si le point E tombe au-delà du point X du côté de A.

Si le coëfficient q est positif, prenez sur la droite KB, deux lignes, l'une $KA = \sqrt{-\frac{r}{p}}$, et l'autre $KB = \frac{q}{KA}$, et portez-les toutes deux du même côté, par rapport au point K, si les quantités $\sqrt{-\frac{r}{p}}$ et $\frac{q}{KA}$ ont des signes différens; et de côtés opposés, si elles ont les mêmes signes. Divisez AB en deux parties égales au point C, et par ce point, élevez sur AB une perpendiculaire CX égale au coëfficient p, et entre les lignes AX et CX prolongées indéfiniment, inscrivez une droite EY égale à AC, et disposée de manière qu'étant prolongée, elle passe par le point K, et XY sera la racine de l'équation; racine qui sera négative, si le point X tombe entre les points A et E, et positive, si le point Y tombe du côté de C par rapport à X.

Démonstration du premier cas où q est négatif.

Par le premier Lemme nous avons eu, $KE : CX :: AK : XY$, et en composant, $:: KE + AK$ ou $KY + KC : CX + XY$ ou CY. Mais dans le triangle rectangle KCY on a, $\overline{CY}^2 = \overline{KY}^2 - \overline{KC}^2 = (KY + KC) \times (KY - KC)$; d'où l'on tire la proportion, $KY + KC : CY :: CY : KY - KC$. Mais nous avons vu plus haut,

Digitized by Google

que $KY + KC$ était la même chose que $KE + AK$, donc $KE + AK : CY :: CY : EK - KB$. (*). Or le premier rapport de cette proportion est égal à celui de KE à CX. Donc on a, $KE : CX :: CY : EK - KB$, et en élevant tout au quarré, $\overline{KE}^2 : \overline{CX}^2 :: KE + AK : KE - KB$. (76). Multipliant maintenant les extrêmes et les moyens, on aura, $\overline{KE}^3 - KB \times \overline{KE}^2 = \overline{CX}^2 \times KE + \overline{CX}^2 \times AK$, et en remettant, à la place de ces quantités, leurs valeurs analytiques assignées plus haut, on trouvera..... $x^3 - px^2 = qx + r$.

Démonstration du deuxième cas où q est positif.

Par le premier Lemme on a la proportion, $KE : CX :: AK : XY$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, il vient, $KE \times XY = CX \times AK$. Si, dans l'équation trouvée plus haut, $\overline{KE}^3 - KB \times \overline{KE}^2 = \overline{CX}^2 \times KE + \overline{CX}^2 \times AK$, on substitue $KE \times XY$, au lieu de $CX \times AK$, elle deviendra, $\overline{KE}^3 - KB \times \overline{KE}^2 =$.... $\overline{CX}^2 \times KE + CX \times KE \times XY$, et divisant tout par KE, elle se trouvera réduite à $\overline{KE}^2 - KB \times KE = \overline{CX}^2 + CX \times XY$. Ensuite multipliant tout par AK, on aura, $AK \times \overline{KE}^2 - AK \times KE \times KB = AK \times \overline{CX}^2 + AK \times CX \times XY$, et remettant de nouveau $KE \times XY$,

(*) Le dernier terme de cette proportion devrait être $KY - CK$; mais nous avons vu (*note* 75) que $KY - CK = KE - BK$. Donc, etc.

au

Digitized by Google

au lieu de $CX \times AK$, nous aurons, $AK \times \overline{KE}^2 - AK \times KE \times KB = KE \times XY \times CX + KE \times \overline{XY}^2$. Et en divisant tout par KE, il viendra, $AK \times KE - AK \times KB = XY \times CX + \overline{XY}^2$. Je multiplie tout par XY, et il me vient, $AK \times KE \times XY - AK \times KB \times XY = \overline{XY}^2 \times CX + \overline{XY}^3$. Maintenant, dans le premier terme de cette équation, au lieu de $KE \times XY$, je remets $CX \times AK$, et l'équation devient, $CX \times \overline{AK}^2 - AK \times KB \times XY = CX \times \overline{XY}^2 + \overline{XY}^3$, ou bien, $\overline{XY}^3 + CX \times \overline{XY}^2 + AK \times KB \times XY - \overline{AK}^2 \times CX = 0$. Ensuite, substituant pour XY, CX, AK, et KB, leurs valeurs analytiques assignées plus haut, et qui sont respectivement x, p, $\sqrt{-\frac{r}{p}}$, $q\sqrt{-\frac{R}{r}}$, il viendra enfin, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; équation proposée qu'il fallait construire.

Un cercle et une ligne droite étant donnés de position; si vous tracez entre cette ligne droite et le cercle une autre ligne droite d'une grandeur donnée, avec la condition que cette dernière étant prolongée, passera par un point donné: vous aurez encore une nouvelle manière de résoudre ces problémes.

En effet, soit proposée l'équation du troisième degré, $x^3 + qx + r = 0$, *qui manque de second terme:*

(*Pl.* IX, *Fig.* 7). Menez la ligne KA à volonté, et appelez-la n. Sur KA prolongée de part et d'autre, prenez $KB = \frac{q}{n}$, que vous porterez de K vers A, lorsque q sera négatif, et au contraire de K vers Y, lorsque q sera positif. Partagez BA en deux parties égales au point C, et du point A comme centre, avec un

Digitized by Google

rayon AC, décrivez le cercle CX. Inscrivez dans ce cercle une droite $CX = \frac{r}{n^2}$, et par les points K, C et X, faites passer une circonférence de cercle $KCXG$. Joignez les points A et X par une droite, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle $KCXG$ en un point G. Enfin, entre ce dernier cercle et la droite KC prolongée, inscrivez une ligne droite EY, de même longueur que AC, et de manière qu'elle soit dirigée vers le point G. Maintenant, par le point E, où cette droite rencontre le cercle, menez la ligne EC; ce sera une des racines de l'équation. Toutes les racines qui tomberont dans le grand segment KGC du cercle, seront positives; toutes celles au contraire qui tomberont dans le petit segment KFC, seront négatives. Tout cela cependant, dans la supposition que r est négatif; car s'il était positif, ce serait tout le contraire, et les racines positives se trouveraient dans le petit segment, et les négatives dans le grand.

Pour démontrer cette construction, nous commencerons par démontrer les Lemmes suivans.

LEMME Ier. *En nous servant de la construction précédente, nous aurons*, $CE : KA :: CE + CX : AY :: CX : KY$.

Car ayant mené la droite KG, on a, $AC : AK :: CX : KG$, à cause des triangles semblables ACX, AKG. Les triangles EYC, KGY sont aussi semblables, car ils ont un angle commun en Y; et de plus, l'angle YGK de l'un, et l'angle ECY de l'autre, ont chacun pour mesure la moitié du même arc EK, donc ces deux angles sont encore égaux, et par conséquent les triangles sont semblables. Ainsi l'on a la proportion, $CE : EY :: KG : KY$, ou bien, à cause de $EY = AC$ (par const.) $CE : AC :: KG : KY$,

Digitized by Google

ce qui donne, $AC \times KG = CE \times KY$. Mais la proportion trouvée plus haut, $AC : AK :: CX : KG$, donne, $AC \times KG = AK \times CX$. Donc $AK \times CX = CE \times KY$. D'où l'on tire la proportion, $CE : AK :: CX : KY$, ou bien, en alternant, $CE : CX :: AK : KY$, et en composant, $CE + CX : CX :: AK + KY : KY :: AY : KY$; et en alternant encore cette dernière proportion, $CE + CX : AY :: CX : KY$. Et à cause de la proportion trouvée plus haut, $CE : AK :: CX : KY$, on a, $CE + CX : AY :: CX : KY :: CE : AK$. C. Q. F. D.

LEMME II. *Ayant abaissé sur la ligne GY la perpendiculaire CH, on aura le rectangle $2HE \times EY = CE \times CX$.*

Car, en abaissant aussi sur la ligne AY la perpendiculaire GL, on aura les triangles rectangles EHC, GLK semblables, puisque, outre l'angle droit, l'angle en E de l'un, et l'angle en K de l'autre, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc GXC. Donc ces triangles sont équiangles, et par conséquent on a la proportion, $KG : KL :: EC : EH$. Ensuite du point A j'abaisse sur KG la perpendiculaire AM, et à cause des sécantes égales AK, AG, cette perpendiculaire coupera KG en deux parties égales au point M. Les deux triangles rectangles KAM, KGL ayant un angle commun en K, sont semblables, et par conséquent on a la proportion, $AK : KM :: KG : KL$. Or, $AK : KM :: 2AK : 2KM$ ou KG. Donc, à cause des triangles semblables ACX, AKG, on a, $2AK : KG :: 2AC : CX :: 2EY : CX$ (parce que $AC = EY$). Donc $AK : KM :: 2AK : KG :: 2EY : CX$. Et à cause de la proportion $AK : KM :: KG : KL$, il s'en suit qu'on a aussi la suivante, $2EY : CX :: KG : KL$. Mais nous avions déjà, $KG : KL :: EC : EH$.

Digitized by Google

Donc $2EY : CX :: EC : EH$, et par conséquent, en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on a, $2EY \times EH = EC \times CX$. C. Q. F. D.

Nous avons regardé AK et AG comme étant égales; et en effet, le rectangle $CA \times AK =$ le rectangle $AX \times AG$ (par le corollaire de la 36e. prop. du 3e. liv. des Elém.); d'où l'on tire la proportion $CA : AX :: AG : AK$. Or (par const.) $AX = CA$, donc $AG = AK$.

LEMME III. *En gardant toutes les constructions précédentes, les trois lignes BY, CE, KA, sont en proportion continue.*

Car on a (par la 12e. prop. du 2e. liv. des Elém.) $\overline{CY}^2 = \overline{EY}^2 + \overline{CE}^2 + 2EY \times EH$. Et en retranchant $\overline{EY}^2$ de chaque membre de cette équation, elle deviendra, $\overline{CY}^2 - \overline{EY}^2 = \overline{CE}^2 + 2EY \times EH$. Mais nous avons vu, par le Lemme second, que $2EY \times EH = EC \times CX$. Ajoutons à chaque membre de cette dernière équation $\overline{CE}^2$; et nous aurons, $\overline{CE}^2 + 2EY \times EH = \overline{CE}^2 + CE \times CX$. Donc $\overline{CY}^2 - \overline{EY}^2 = \overline{CE}^2 + CE \times CX$, qu'on peut décomposer ainsi; $(CY + EY)(CY - EY) = CE(CE + CX)$; d'où l'on tire la proportion, $CE + CX : CY + EY :: CY - EY : CE$. Maintenant les trois lignes EY, CA et CB étant égales (par const.), il s'en suit qu'on a aussi, $CY + EY = CY + CA = AY$; et $CY - EY = CY - BC = BY$. Écrivons donc dans notre proportion, AY au lieu de $CY + EY$, et BY au lieu de $CY - EY$, et elle deviendra, $CE + CX : AY :: BY : CE$. Mais, par le Lemme premier, on a,

Digitized by Google

$CE + CX : AY :: CE : AK$. Donc $CE : AK :: BY : CE$, ou, en intervertissant l'ordre, $BY : CE :: CE : AK$. Ces trois lignes sont donc en proportion continue, et c'est *ce qu'il fallait démontrer.*

Enfin, à l'aide de ces Lemmes, voici comment nous démontrerons la construction du problême proposé.

Par le premier Lemme, on a, $CE : AK :: CX : KY$, donc $CE \times KY = AK \times CX$; et en divisant les deux membres de cette équation par CE, elle devient, $KY = \frac{AK \times CX}{CE}$. Ajoutez BK à chaque membre, et vous aurez, $BK + KY$ ou..... $BY = \frac{AK \times CX}{CE} + BK$. Donc, *par le Lemme troisième*, on a.... $\frac{AK \times CX}{CE} + BK : CE :: CE : AK$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, il vient, $\frac{\overline{AK}^2 \times CX}{CE} + AK \times BK = \overline{CE}^2$; et en multipliant encore chaque membre par CE, on a enfin, $\overline{AK}^2 \times CX + AK \times BK \times CE = \overline{CE}^3$. Nous avons dit que la racine x de l'équation, était la ligne CE, et comme nous avons fait, $KA = n$, $KB = \frac{q}{n}$, et $CX = \frac{r}{n^2}$, si nous mettons ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles représentent, l'équation deviendra, $r + qx = x^3$, ou bien $x^3 - qx - r = 0$, équation qu'il fallait construire. Lorsque q et r sont négatifs, les lignes KA, KB doivent se porter du même côté par rapport au point K, et la racine positive se trouve dans le plus grand segment CGK. *Voilà donc un des cas de la proposition qu'il fallait démontrer.*

Portez maintenant KB du côté opposé à celui où vous l'avez porté d'abord; par-là, vous changez le signe de la valeur $\frac{q}{n}$,

Digitized by Google

ou, ce qui revient au même, le signe de q, et la construction de votre équation donnera, $x^3 + qx - r = 0$. *Ce qui est un second cas.* Dans ces deux cas, CX, et la racine positive CE, tombent du même côté de AK. Si la ligne CX, et la racine négative, tombent encore du même côté de AK, après avoir changé le signe de CX, ou de $\frac{r}{n^2}$, ou, ce qui est la même chose, le signe de r, *vous aurez le troisième cas*, $x^3 + qx + r = 0$, dans lequel toutes les racines sont négatives. Et en changeant de nouveau le signe de KB ou de $\frac{q}{n}$, ou de la seule quantité q, vous tomberez dans le *quatrième cas*, $x^3 - qx + r = 0$. Le lecteur pourra s'exercer à rechercher les constructions pour tous ces cas, et à trouver leurs démonstrations, en suivant la marche de celle que nous avons donnée pour le premier cas. Il nous a paru suffisant d'avoir démontré ce seul cas, et indiqué légèrement les autres, dont la démonstration se fera, en employant les mêmes termes, et en changeant seulement la situation de quelques lignes.

Qu'il s'agisse maintenant de construire l'équation du troisième degré, $x^3 + px^2 + r = 0$, *où manque le troisième terme.*

Employez toujours la même Figure, et prenez une ligne d'une longueur quelconque, que vous appellerez n; sur cette ligne prolongée indéfiniment de A vers Y, prenez KA et KB; faites, $KA = \frac{r}{n^2}$ et $KB = p$; portez ces lignes du même côté du point K, si les signes des termes p et r sont les mêmes, mais s'ils sont différens, portez ces lignes de côtés opposés. Partagez BA en deux parties égales au point C, et du point A comme centre, avec un rayon AC, décrivez le cercle CX. Inscrivez dans ce cercle une ligne CX égale à la ligne n; joignez les points A et X par une droite que vous prolongerez jusqu'en G, de manière que $AG = AK$,

Digitized by Google

et par les points K, C, X, G, faites passer une circonférence de cercle. Enfin, entre ce cercle et la droite KC prolongée de part et d'autre, inscrivez une droite EY de même longueur que AC, et avec cette condition, que EY étant prolongée, passera par le point G. Et la droite KY sera une des racines de l'équation. Dans le cas de r positif, les racines qui tendront de K vers A, seront positives. Mais si r est négatif, alors les racines positives tendront de K vers le côté opposé à A. Il est bien évident, que, dans tous les cas, lorsque les racines positives tendent d'un côté de K, les racines négatives tendent du côté opposé.

Voici de quelle manière on démontre la légitimité de cette construction, par le moyen des trois derniers Lemmes.

Par le troisième de ces Lemmes, nous avons vu que BY, CE, KA sont en proportion continue, et *par le premier*, que l'on a la proportion $CE : AK :: CX : KY$. Donc $BY : CE :: CX : KY$. Or, $BY = KY - KB$. On aura donc la proportion $KY - KB : CE :: CX : KY$, et (par la prop. 1ere. du liv. 6e. des Élém.), on a $(KY - KB) \times KY : CE \times KY :: KY - KB : CE$. Et à cause de la proportion $CE : AK :: CX : KY$, on a, $CE \times KY = AK \times CX$. Donc, en substituant dans la proportion précédente, $AK \times CX$ à la place de $CE \times KY$, elle deviendra..... $(KY - KB) \times KY : AK \times CX :: KY - BK : CE$, c'est-à-dire $:: CX : KY$. Donc $(KY - KB) \times KY : AK \times CX :: CX : KY$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on aura, $\overline{KY}^3 - KB \times \overline{KY}^2 = AK \times \overline{CX}^2$. Or, dans la construction, nous avons regardé KY, comme la racine de l'équation, et par conséquent, KY est x, KB est p, KA est $\frac{r}{n^2}$, et CX est n.

Digitized by Google

Écrivons donc ces valeurs analytiques dans l'équation, au lieu des lignes qu'elles représentent, et elle deviendra, $x^3 - px^2 = r$, ou bien $x^3 - px^2 - r = 0$.

La construction qu'il s'agissait de démontrer, aurait pu être décomposée en quatre cas, $x^3 - px^2 - r = 0$, $x^3 - px^2 + r = 0$, $x^3 + px^2 - r = 0$, $x^3 + px^2 + r = 0$. J'ai déjà démontré le premier cas; pour démontrer les autres, il suffit de changer la position des lignes. Car, de même que nous avons porté KA et KB du même côté du point K, et que nous avons eu pour racine positive la ligne KY qui tend du côté opposé, ce qui nous a donné l'équation $\overline{KY}^3 - KB \times \overline{KY}^2 = KA \times \overline{CX}^2$, ou $x^3 - px^2 = r$; de même, en portant KB du côté opposé, et en raisonnant comme ci-dessus, nous aurons, $\overline{KY}^3 + KB \times \overline{KY}^2 = KA \times \overline{CX}^2$, ou $x^3 + px^2 = r$. Et si, dans chacun de ces cas, on change seulement la position de la racine KY, en la prenant du côté opposé du point K, et en raisonnant toujours comme nous avons fait, on arrivera aux deux autres cas, qui sont, $\overline{KY}^3 + KB \times \overline{KY}^2 = -KA \times \overline{CX}^2$, ou $x^3 + px^2 = -r$, et $\overline{KY}^3 - KB \times \overline{KY}^2 = -KA \times \overline{CX}^2$, ou $x^3 = px^2 = -r$. Voilà tous les cas qu'il fallait démontrer.

Soit proposé maintenant de construire l'équation cubique, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, *qui a tous ses termes, à l'exception peut-être du troisième.*

Voici de quelle manière elle se construira. Prenez (*Pl.* IX, *Fig.* 8). une ligne arbitraire n; prenez GC égale à sa moitié, et par le point G élevez une perpendiculaire $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$. Enfin si les termes p et r ont des signes différens, du point C, comme centre, et

Digitized by Google

et de l'intervalle CD, décrivez une circonférence de cercle PBE; mais si p et r ont les mêmes signes, du point D, comme centre, et d'un rayon égal à GC, décrivez un arc qui coupera GA en H. (*Pl.* X, *Fig.* 1re.). Ensuite du centre C, et d'un rayon égal à GH, décrivez une circonférence PBE. Faites $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$. Portez cette ligne GA, de G vers C, si la quantité $-\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$ est positive; mais si GA est négative, vous la porterez du côté opposé. Il faudra donc faire bien attention aux signes des coëfficiens p, q, r. Dans le premier cas, élevez une perpendiculaire AY au point A; entre cette perpendiculaire et le cercle PBE, décrit précédemment, inscrivez la ligne EY égale au coëfficient p, avec la condition que cette ligne étant prolongée, passera par le point G. Prolongez-la en effet, et la ligne EG sera une des racines de l'équation qu'il fallait construire. Toutes les racines qui auront une position semblable, seront positives, si le point E tombe entre Y et G; elles seront négatives, si le point E tombe hors des points Y et G. Tout cela cependant ne doit s'entendre que pour le cas où on a $+p$, car si l'on avait $-p$, il faudrait dire tout le contraire.

Avant de faire la démonstration de cette construction, nous allons donner les Lemmes suivans.

LEMME Ier. *Si du point E on abaisse sur AG la perpendiculaire EF, et qu'on tire la droite EC, on a,* $\overline{EG}^2 + \overline{GC}^2 = \overline{EC}^2 + 2GC \times GF$.

Car (par la prop. 12e. du 2e. liv. des Élém.) on a, $\overline{EG}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{GC}^2 + 2GC \times CF$. Ajoutons de part et d'autre $\overline{GC}^2$, et nous aurons, $\overline{EG}^2 + \overline{GC}^2 = \overline{EC}^2 + 2\overline{GC}^2 + 2GC \times CF$. Mais $2\overline{GC}^2 + 2GC \times CF =$

Digitized by Google

$2GC(GC+CF)$, c'est-à-dire $2GC\times GF$. Donc $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2=\overline{EC}^2+2GC\times GF$. C. Q. F. D.

LEMME II. (*Pl.* IX, *Fig.* 8). *Dans le premier cas de la construction, lorsque le cercle PBE passe par le point D, on a.....* $\overline{EG}^2-\overline{GD}^2=2GC\times GF$.

Car, par le Lemme premier, on a, $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2=\overline{EC}^2+2GC\times GF$, et en retranchant de part et d'autre $\overline{GC}^2$, le reste est, $\overline{EG}^2=\overline{EC}^2-\overline{GC}^2+2GC\times GF$. Mais $\overline{EC}^2-\overline{GC}^2$ est la même chose que $\overline{CD}^2-\overline{GC}^2$, quantité égale à $\overline{GD}^2$. Donc $\overline{EG}^2=\overline{GD}^2+2GC\times GF$. C. Q. F. D.

LEMME III. (*Pl.* X, *Fig.* 1re.). *Dans le second cas de la construction, où le cercle PBE ne passe pas par le point D, nous avons,* $\overline{EG}^2+\overline{GD}^2=2GC\times GF$.

Car, par le Lemme premier, $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2=\overline{EC}^2+2GC\times GF$. Retranchez de part et d'autre $\overline{EC}^2$, et le reste sera, $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2-\overline{EC}^2=2GC\times GF$. Mais $GC=DH$ (par const.), et $EC=CP=GH$. Donc $\overline{GC}^2-\overline{EC}^2=\overline{DH}^2-\overline{GH}^2=\overline{DG}^2$. Donc $\overline{EG}^2+\overline{DG}^2=2GC\times GF$. C. Q. F. D.

LEMME IV. *On a,* $2CG\times GF\times GY=2CG\times AG\times GE$. Car, à cause des triangles semblables, GEF, GYA, on a, $GF:GE::AG:GY$, c'est-à-dire (par la première prop. du 4e. liv. des Elém.) $::2CG\times AG:2CG\times GY$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on aura, $2GC\times GY\times GF=2GC\times AG\times GE$. C. Q. F. D.

Digitized by Google

Enfin, à l'aide de tous ces Lemmes, voici comment on démontrera la construction du problême.

Pour le premier cas. (*Pl.* IX, *Fig.* 8.), On a, par le Lemme second, $\overline{EG}^2 - \overline{GD}^2 = 2GC \times GF$. Et en multipliant les deux membres par GY, on aura, $GY \times \overline{EG}^2 - GY \times \overline{GD}^2 = 2GC \times GF \times GY =$ (*par le Lemme quatrième*) $2GC \times AG \times GE$. Maintenant, à la place de GY, mettez $EG + EY$, et vous aurez.....

$(EG + EY)\overline{EG}^2 - \overline{GD}^2(EG + EY) = 2GC \times AG \times GE$, ou bien, $\overline{EG}^3 + EY \times \overline{EG}^2 - EG \times \overline{GD}^2 - EY \times \overline{GD}^2 = 2GC \times AG \times GE$.

ou bien, $\overline{EG}^3 + EY \times \overline{EG}^2 \left.\begin{matrix} - \overline{GD}^2 \\ - 2CG \times GA \end{matrix}\right\} EG - \overline{GD}^2 \times EY = 0$.

Dans le second cas. (*Pl.* X, *Fig.* 1re.). On a, par le Lemme troisième, $\overline{EG}^2 + \overline{GD}^2 = 2GC \times GF$, et en multipliant chaque membre par GY, il vient, $\overline{EG}^2 \times GY + \overline{GD}^2 \times GY = 2CG \times GF \times GY$. Or, par le Lemme quatrième, $2CG \times GF \times GY = 2CG \times AG \times GE$. Donc $\overline{EG}^2 \times GY + \overline{GD}^2 \times GY = 2CG \times AG \times GE$. Et en mettant pour GY sa valeur $GE + EY$, on aura, $\overline{EG}^3 + EY \times \overline{EG}^2 + \overline{GD}^2 \times EG + \overline{GD}^2 \times EY = 2GC \times AG \times EG$. Ou bien.....

$\overline{EG}^3 + EY \times \overline{EG}^2 \left.\begin{matrix} + \overline{GD}^2 \\ - 2GC \times AG \end{matrix}\right\} EG + \overline{GD}^2 \times EY = 0$.

Actuellement, nous avons appelé x la racine EG de l'équation, et nous avons fait $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2GC = n$, et..... $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$; telles sont les quantités et leurs signes, pour le premier cas, où p et r ont des signes différens. Mais pour le

Digitized by Google

second cas, où l'on change le signe de p ou celui de r, on aura, $GA = -\frac{q}{n} + \frac{r}{np}$. Écrivons donc, au lieu de EG, GD, EY, $2GC$ et GA, leurs valeurs analytiques, qui sont respectivement, x, $\sqrt{\frac{r}{p}}$, p, n, et $-\frac{q}{n} \mp \frac{r}{np}$; et le premier cas donnera,

$$x^3 + px^2 \begin{matrix} -\frac{r}{p} \\ +q+\frac{r}{p} \end{matrix} \Big\} x - r = 0,$$ qui se réduit à.....

$x^3 + px^2 + qx - r = 0$; et le second cas donne.....

$$x^3 + px^2 \begin{matrix} +\frac{r}{p} \\ +q-\frac{r}{p} \end{matrix} \Big\} x + r = 0,$$ qui se réduit à, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Dans les deux cas, EG est donc la véritable longueur de la racine x. C. Q. F. D.

Chacun de ces deux cas est sous-divisé en plusieurs cas particuliers; d'abord le premier en ceux-ci : $x^3 + px^2 + qx - r = 0$, $x^3 + px^2 - qx - r = 0$, $x^3 - px^2 + qx + r = 0$, $x^3 - px^2 - qx + r = 0$, $x^3 + px^2 - r = 0$, et $x^3 - px^2 + r = 0$; et le second en ceux-ci : $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, $x^3 + px^2 - qx + r = 0$, $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, $x^3 - px^2 - qx - r = 0$, $x^3 + px^2 + r = 0$, et $x^3 - px^2 - r = 0$. Si l'on change, pour chacun de ces cas, la situation des lignes, le reste de la démonstration s'achèvera entièrement comme pour les cas que nous avons démontrés.

Voilà les principales constructions que l'on peut donner des problêmes, en inscrivant une ligne droite d'une longueur donnée, entre un cercle et une autre ligne droite donnés de position, avec la condition que la ligne droite inscrite étant prolongée, passera par un point donné. Or, on trouvera toujours le moyen d'inscrire cette droite en traçant la *conchoïde* des anciens, et lui donnant pour pôle,

Digitized by Google

le point par lequel doit passer la droite inscrite prolongée. Cette conchoïde aura pour asymptote la droite donnée de position, et pour *intervalle* (*) la longueur même de la ligne à inscrire; car cette conchoïde coupera le cercle au point E, par lequel il faudra faire passer la droite à inscrire. Dans la pratique, on pourra employer un moyen mécanique quelconque, pour placer *la droite à inscrire*, entre le cercle et la droite donnée de position.

On remarquera que, dans toutes ces constructions, on a pris la droite n indéterminée, et pouvant être prolongée de part et d'autre, à volonté, afin de la rendre propre aux différentes constructions qu'exigent les différens cas du problême. Nous donnerons un exemple de cela dans la recherche de deux moyennes proportionnelles continues, ainsi que dans la trisection de l'angle.

Il s'agit de trouver entre a et b deux moyennes proportionnelles x et y. Puisque les quantités a, x, y, b sont en proportion continue, on aura, $a^2 : x^2 :: x : b$ (**), ainsi $x^3 = a^2 b$, ou $x^3 - a^2 b = 0$. Dans cette équation, les termes p et q manquent et $r = -a^2 b$. Ainsi nous ferons usage de la première formule de construction, où il s'agissait d'inscrire une ligne droite entre deux lignes données de position, avec la condition que cette droite serait dirigée vers un point donné.

(*) L'*intervalle*, est la distance constante qu'il y a entre chaque point de la courbe et son asymptote, cette distance étant prise sur les lignes qui se dirigent du pôle vers chaque point de la courbe.

(**) En effet, puisqu'on a, $a : x :: x : y :: y : b$, il s'en suit qu'on a aussi, $a^2 : x^2 :: y^2 : b^2$; or $x : y :: y : b$, donne $y^2 = bx$. Donc en substituant à la place de y^2 sa valeur bx, dans la proportion $a^2 : x^2 :: y^2 : b^2$, elle deviendra, $a^2 : x^2 :: bx : b^2 :: x : b$.

Digitized by Google

Ici la droite à inscrire (*Pl.* X, *Fig.* 2) est EY qui est dirigée vers le point K, et les deux lignes entre lesquelles elle doit être inscrite sont EX et CY. Je fais $CX = \frac{r}{n^2} = \frac{-a^2 b}{n^2}$; et comme n est indéterminée, je la suppose égale à a, ce qui donne $CX = -b$; et voici la construction qui en résulte.

Je trace une droite $KA = a$, que je divise en deux parties égales en C, et du point K comme centre, avec un rayon égal à CK, je décris le cercle XC, dans lequel je place la droite $CX = b$, et entre les droites XA et CX prolongées indéfiniment, je place $EY = CA$, de manière que EY étant prolongée, puisse passer par le point K; et les lignes KA, XY, KE, CX seront en proportion continue (77), c'est-à-dire, que XY et KE seront les deux moyennes proportionnelles cherchées entre a et b. Cette construction est bien connue.

Dans une des autres formules de construction, lorsque la droite EY doit être placée entre le cercle et une droite AK donnés de position (*Pl.* IX, *Fig.* 7), et de plus, être dirigée vers le point donné G, on a, $CX = \frac{r}{n^2}$, c'est-à-dire, dans le problême actuel, $= \frac{-a^2 b}{n^2}$. Je fais donc comme auparavant, $n = a$, ce qui donne $CX = b$. Le reste s'achevera comme on va le voir.

Je tire une droite $KA = a$ (*Pl.* X, *Fig.* 3), je la divise en deux parties égales en C, et du point A comme centre avec le rayon AK, je décris un arc KG, dans lequel j'inscris une corde $KG = 2b$, inscription à laquelle je parviens facilement en construisant le triangle isocèle KAG. Ensuite par les points C, K, G, je fais passer une circonférence de cercle, et entre cette circonférence et la droite AK prolongée, j'inscris la droite $EY = CK$, de

Digitized by Google

manière que cette droite EY soit dirigée vers le point G. Cela fait, on aura les quatre droites AK, EC, KY, $\frac{1}{2}KG$ en proportion continue; c'est-à-dire, que EC et KY sont les deux moyennes entre a et b. (78).

Qu'il s'agisse maintenant de partager un angle en trois parties égales; et que l'angle proposé soit ACB (Pl. X, Fig. 4), et soient de plus, les parties dans lesquelles il doit être divisé, ACD, DCE, ECB.

Du point C comme centre, et d'un rayon arbitraire soit tracée la circonférence $ADEB$, qui coupe respectivement les droites CA, CD, CE, CB aux points A, D, E, B. Tirez les droites AD, DE, EB, ainsi que AB qui coupera les droites CD, CE aux points F et H; menez ensuite par le point D et parallèlement à CE la droite DG qui rencontrera AB en G. A cause des triangles semblables CAD, ADF, DFG, les lignes CA, AD, DF, FG sont en proportion continue. Si l'on fait donc $AC = a$ et $AD = x$, on aura, $DF = \frac{x^2}{a}$ et $FG = \frac{x^3}{a^2}$. D'un autre côté, on a, $AB = BH + GH + FA - GF = 3AD - GF = 3x - \frac{x^3}{a^2}$. Ou bien en faisant $AB = b$, on aura, $b = 3x - \frac{x^3}{a^2}$, ce qui donne, en réduisant, $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$. Cette équation n'a point de second terme, ainsi $p = 0$, et les quantités q et r sont respectivement égales à $-3a^2$ et $+a^2b$. Ainsi, dans la première des formules de construction, où l'on avait, $p = 0$, $KA = n$, $KB = \frac{q}{n}$ et $CX = \frac{r}{n^2}$, ces lignes se changeront pour le problême actuel en $KB = -\frac{3a^2}{n}$, et $CX = \frac{a^2b}{n^2}$; et afin qu'elles deviennent les

Digitized by Google

plus simples possible, je suppose que $n = a$, et de cette manière, $KB = -3a$, et $CX = b$. Voici comment se construira le problême.

Je trace une ligne $KA = a$ (*Pl.* X, *Fig.* 5), et au-delà du point K, je la prolonge d'une quantité $KB = 3a$. Je divise BA en deux parties égales en C, et du point K comme centre, avec KC comme rayon, je décris un cercle dans lequel j'inscris la corde $CX = b$. Et ayant tiré la droite AX que je prolonge indéfiniment, j'inscris entre AX et CX la droite $EY = AC$, et je l'inscris de manière qu'elle soit dirigée vers le point K. C'est ainsi que j'obtiendrai $XY = x$. De plus, à cause des cercles égaux $ADEB$, CXA, et des cordes égales AB, CX, et des parties égales BH, XY de ces mêmes cordes, les angles ACB, CKX seront égaux, ainsi que les angles BCH, XKY. Par conséquent, l'angle XKY sera la troisième partie de l'angle CKX. On trouvera donc le tiers XKY d'un angle quelconque CKX, si, en tirant la corde CX de cet angle, et la corde AX de son supplément, prolongées toutes deux indéfiniment, on inscrit une droite EY égale au diamètre AC, de manière qu'elle soit dirigée vers le centre K du cercle (79).

D'où il suit, que si, du centre K d'un cercle, on abaisse sur une corde CX la perpendiculaire KH, l'angle HKY sera le tiers de l'angle HKX (*). Donc si un angle quelconque HKX est donné, qu'on abaisse d'un point quelconque X d'un

(*) Il est bien facile de voir que l'angle $HKY = \frac{1}{3} HKX$. Car..... $HKX = \frac{1}{2} CKX$, et $YKX = \frac{1}{3} CKX$. Or $HKY = HKX - YKX = \frac{1}{2} CKX - \frac{1}{3} CKX = \frac{1}{6} CKX = \frac{1}{3} HKX$.

de

Digitized by Google

de ses côtés KX une perpendiculaire XH, sur l'autre côté KH, qu'ensuite du point X on mène au côté KH, la parallèle XE, et qu'on inscrive entre cette parallèle et la ligne XH une droite EY, double de KX, de manière qu'elle soit dirigée vers le point K, et l'angle HKY sera le tiers de l'angle HKX. Ou bien encore....

Soit l'angle donné AXK (*Pl.* X, *Fig.* 6) sur l'un de ses côtés, AX par exemple, élevez une perpendiculaire XH, et d'un point quelconque K de l'autre côté KX menez une droite KE dont la partie EY interceptée entre le côté AX prolongé et la perpendiculaire XH, soit double de l'autre côté XK; et l'angle KEA sera le tiers de l'angle AXK. Élevant ensuite une autre perpendiculaire EZ, et tirant la droite KF de manière que sa partie ZF interceptée entre EF et EZ, soit double de KE, l'angle KFA sera le tiers de l'angle KEA. C'est ainsi qu'on pourra continuer la trisection jusqu'à l'infini. Cette méthode se trouve dans Pappus, livre 4, prop. 32 (*).

Si vous aimez mieux, pour opérer la trisection de l'angle, employer celle des formules de construction, où l'on inscrit une droite entre la circonférence d'un cercle et une autre droite donnée de position (*Pl.* IX, *Fig.* 7); alors vous aurez encore, $KB = \frac{q}{n}$, et $CX = \frac{r}{n^2}$, quantités qui deviennent dans le problême actuel, $KB = \frac{-3a^2}{n}$, et $CX = \frac{a^2 b}{n^2}$.

(*) Cette construction est absolument la même que la précédente; car si, au lieu de l'angle AXK, on prend son égal XKH, il est évident, d'après ce qui vient d'être démontré, que YKH est le tiers de XKH; donc, etc.

Digitized by Google

Et en faisant $n = a$, on aura, $KB = -3a$ et $CX = b$. De-là résulte la construction suivante.....

Lemme d'Archimède.

D'un point quelconque K (*Pl.* X, *Fig.* 7), soient menées du même côté, par rapport au point K, deux droites $KA = a$, et $KB = 3a$. Partagez AB en deux parties égales en C, et du point A, comme centre, avec un rayon AC, décrivez une circonférence dans laquelle vous placerez la corde $CX = b$; ensuite unissez les points A et X par une droite que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau la circonférence en G; et entre la droite KC prolongée indéfiniment, et la circonférence, inscrivez une droite $EY = AC$, et dirigée de manière qu'étant prolongée, elle passe par le point G; et ayant mené la ligne EC, elle sera la racine cherchée x, ou la corde qui soutendra le tiers de l'angle donné. Cette construction nous rendra la formule rapportée plus haut. (80).

Mais voici encore une manière de la simplifier. A cause des deux cercles égaux $ADEB$, KXG, et de leurs cordes égales CX et AB, les angles CAX ou KAG, et ACB sont égaux, ainsi CE est la soutendante du tiers de l'angle KAG. Par conséquent un angle quelconque KAG étant donné, pour trouver sa troisième partie CAE, inscrivez entre le cercle KGC et le côté de l'angle KA prolongé indéfiniment, une droite EY égale au rayon AG du cercle et dirigée vers le point G. C'est ainsi qu'Archimède a enseigné à couper un angle en trois parties égales. On aurait pu expliquer toutes ces constructions d'une manière plus simple qu'on ne l'a fait ici; mais j'ai voulu faire voir comment on pouvait déduire les

Digitized by Google

constructions particulières des problêmes, des constructions générales qui ont été exposées plus haut.

On pourrait ajouter ici beaucoup de constructions à celles que nous avons déjà données. Par exemple, si vous voulez trouver deux moyennes proportionnelles géométriques entre a et b, tracez une droite $AK = b$ (*Pl.* X, *Fig.* 8), et élevez-lui une perpendiculaire $AB = a$; coupez AK en deux parties égales en I; portez de A en H une ligne égale à la distance BI; portez sur AB prolongée une ligne AC égale à la distance BH; ensuite sur AK prolongée au-delà du point A, prenez une longueur arbitraire AD que vous porterez aussi de D en E. Maintenant des points D et E, comme centres, et des intervalles DB, EC, comme rayons, décrivez les deux circonférences BF, CG; placez entre ces deux circonférences la droite $FG = AI$, de manière que FG soit dirigée vers le point A; et AF sera la première des deux moyennes proportionnelles. (81).

Les anciens ont montré qu'on pouvait obtenir deux moyennes proportionnelles par la construction d'une cissoïde; mais personne que je sache n'avait indiqué jusqu'ici un moyen mécanique assez simple de décrire cette courbe; le voici.

(*Pl.* X, *Fig.* 9). Soit AG le diamètre, et F le centre du cercle auquel appartiendra la cissoïde. Par le point F élevez sur le diamètre une perpendiculaire FD que vous prolongerez indéfiniment. Prolongez FG jusqu'au point P, de manière que FP soit égale au diamètre. Faites mouvoir l'équerre PED, de sorte que son côté EP passe toujours par le point P, et que l'autre côté ED, égal au diamètre AG ou FP, ait toujours son extrémité D sur la ligne FD, et ne puisse se mouvoir qu'en glissant sur elle. Dans le mouvement

Digitized by Google

de cette équerre, le point C, milieu du côté ED, décrira une cissoïde GCK, comme je l'ai démontré ci-devant (voyez le 34e des prob. géom.). S'il est donc question de trouver entre a et b deux moyennes proportionnelles, prenez $AM = a$, élevez au point M une perpendiculaire $MN = b$, joignez les points A et N, faites mouvoir selon la loi prescrite, l'équerre PED, jusqu'à ce que son point C soit parvenu dans la ligne AN; alors en abaissant du point C une perpendiculaire CB sur AP, et faisant $t : BH :: u : BG :: MN : BC$, vous aurez, à cause des lignes, AB, BH, BG, BC, qui sont en proportion continue, vous aurez aussi, dis-je, a, t, u, b en proportion continue.

On peut encore se servir de l'équerre pour construire d'autres problêmes solides. Par exemple, soit proposée l'équation cubique, $x^3 \pm px^2 + qx - r = 0$, dans laquelle on suppose que q est toujours positif, r toujours négatif, et p positif ou négatif. Faites $AG = \frac{r}{q}$; partagez AG en deux parties égales au point F, et prenez $FR = GL = \frac{1}{2}p$; portez FR de F vers A, et GL de G vers A, si vous avez $+p$, mais si vous avez $-p$, vous porterez ces deux lignes vers P; élevez au point F la perpendiculaire FD, et sur cette perpendiculaire prenez $FQ = \sqrt{q}$; élevez encore au point Q la perpendiculaire QC; prenez sur la jambe ED de l'équerre les parties ED et EC, respectivement égales à AG et à AR, ensuite appliquez l'équerre sur la figure de manière que le point D touche la droite FD, et le point C la droite QC; alors si vous achevez le parallélogramme BQ, la droite BL sera la valeur de x.

Jusqu'ici je n'ai employé, pour construire les problêmes solides, que des moyens mécaniques d'une pratique facile et expéditive.

Digitized by Google

C'est ainsi que les anciens ayant déterminé, par composition, les lieux des problêmes solides, ont bientôt senti que de telles constructions resteraient inutiles, à cause de la difficulté de décrire les sections coniques; c'est ce qui les a engagés à en rechercher de plus faciles, ou par la conchoïde, ou par la cissoïde, ou en tendant des fils, ou enfin par quelques autres moyens mécaniques, préférant, comme nous l'apprend Pappus, une construction mécanique, mais d'une exécution aisée, à une autre géométrique, à la vérité, mais bonne uniquement en spéculation. C'est pour cette raison que le grand Archimède, négligeant la méthode trouvée par les géomètres ses prédécesseurs, d'opérer la trisection d'un angle par les sections coniques, enseigna dans ses lemmes un nouveau moyen d'exécuter ce problême; c'est celui que nous avons fait connaître ci-devant. Si les anciens, tout en regardant certaines courbes comme mécaniques, les ont cependant préférées pour la construction des problêmes, il me semble qu'il y a encore bien plus de raisons de les préférer pour cet usage, aujourd'hui que la plupart des géomètres les regardent comme tout aussi géométriques que les sections coniques elles-mêmes.

Au reste, je ne partage pas leur opinion à cet égard. Leur règle, qui est d'admettre pour la construction des problêmes toutes les espèces de lignes, selon le rang des dimensions de leurs équations, me paraît arbitraire, et sans aucune base solide en géométrie. Je dis plus même, c'est qu'elle est fausse; car, selon cette règle, le cercle serait du même ordre que les sections coniques, et cependant on s'accorde généralement à le ranger avec la ligne droite; et la certitude de cette règle une fois ébranlée, que devient celle d'admettre dans la géométrie toutes les lignes, selon l'ordre de leurs

Digitized by Google

dimensions? N'est-elle pas sapée par les fondemens? Quant à moi, je crois qu'on ne doit admettre parmi les lignes planes que la droite et le cercle, à moins qu'on n'imagine auparavant un nouveau moyen de distinguer les lignes, tel que la droite et le cercle réunis par un caractère commun, soient distingués de toutes les autres. Et dans cette supposition même, le nombre des lignes planes ne pourrait être augmenté. En effet, toute ligne qu'on peut tracer sur un plan est réellement plane, et tout problême qu'on peut construire par une telle ligne est un problême plan. Supposons donc qu'on admette dans la géométrie plane les sections coniques, et d'autres courbes de dimensions plus élevées, il en résultera que les problêmes solides et d'autres même d'un ordre supérieur qui pourront être construits par ces courbes, deviendront des problêmes plans; donc les problêmes plans, les problêmes solides, etc. seront tous du même ordre, puisqu'ils seront tous construits par des courbes planes. La ligne droite est analytiquement plus simple que le cercle; mais malgré cette différence, les problêmes que l'on construit par l'une, sont du même ordre que ceux que l'on construit par l'autre. Par une seule *demande* de cette nouvelle méthode de diviser les lignes, la droite et le cercle sont ramenés au même ordre; l'ellipse s'y place encore plus facilement, puisqu'elle diffère moins du cercle que le cercle de la ligne droite; ainsi, en *demandant* que l'ellipse soit décrite sur un plan, elle est, par l'effet de cette seule *demande*, ramenée au même ordre que le cercle. Supposons que quelqu'un, en examinant les propriétés d'une ellipse, soit conduit à un problême solide, et qu'il lui soit possible de construire ce problême à l'aide de cette même ellipse et d'un cercle, ne paraîtrait-il pas raisonnable de regarder ce problême comme plan, puisqu'on suppose que déjà l'ellipse est

Digitized by Google

tracée sur un plan, et qu'il ne s'agit plus, pour achever la construction, que de tracer un cercle? Par la même raison ne paraîtrait-il pas très-légitime de construire des problêmes plans par le moyen de l'ellipse déjà tracée? Par exemple (*Pl.* XI, *Fig.* 1re.) si cette ellipse est *ADFG*, et qu'on demande son centre *O*, je tracerai les deux parallèles *AB*, *CD*, qui rencontreront l'ellipse aux points *A*, *B*, *C*, *D*; je mènerai ensuite deux autres parallèles *EF*, *GH*, qui rencontreront l'ellipse aux points *E*, *F*, *G*, *H*; je couperai chacune de ces parallèles en deux parties égales aux points *I*, *K*, *L*, *M*; j'unirai les points *I* et *K*, *L* et *M* par des droites que je prolongerai jusqu'à leur point de rencontre en *O*; et cette construction d'un problême plan par l'ellipse ne serait-elle pas très-légitime? Peu importerait que cette courbe soit exprimée analytiquement par une équation de deux dimensions, ou qu'elle soit engendrée par la section d'un solide: la seule *supposition* qu'elle est déjà tracée sur un plan, suffirait pour rendre *plans* tous les problêmes solides que l'on construirait par son moyen; et réciproquement elle serait très-bien employée à construire tous les problêmes plans, car la demande n'est-elle pas réciproque (*)? Or ce qui peut se faire en vertu d'une *demande*, doit être regardé comme fait et accordé. La *demande* sera donc: qu'une ellipse soit décrite sur un plan, et dès lors tous les problêmes qui seront construits par le moyen de

(*) Dans cette méthode que suppose Newton, de diviser les courbes, la première *demande* est que tout problême construit par une courbe tracée sur un plan, soit regardé comme *plan*; et la seconde *demande*, ou plutôt la *demande* réciproque est, que tout problême plan puisse être construit par une courbe quelconque tracée sur un plan.

Digitized by Google

cette ellipse, seront rangés parmi les problêmes plans; et réciproquement tous les problêmes plans pourront être construits par cette ellipse.

De tout ce qui précède, il faut nécessairement conclure ou que l'on doit confondre ensemble et ranger dans la même classe les problêmes plans et les problêmes solides, ou rejeter de la géométrie toutes les lignes, hors la droite et le cercle, et peut-être quelque autre encore qui, dans certains cas, pourrait servir à la construction de quelque problême. Maintenant peut-on supposer qu'il se trouve un géomètre qui veuille confondre tous les genres de problêmes? Non, sans doute. Eh bien donc, il faut rejeter de la géométrie plane les sections coniques, ainsi que toutes les autres espèces de lignes, excepté la droite, le cercle, et celles qui pourraient être données dans quelques cas particuliers. Ainsi cette pratique, si commune parmi les géomètres modernes, de décrire les sections coniques sur un plan, est entièrement contraire à l'esprit de la géométrie. Je ne prétends pas pourtant qu'on doive exclure de la géométrie les sections du cône; je dis seulement qu'on ne doit pas les décrire sur un plan, parce qu'elles n'y sont pas engendrées géométriquement. Elles naissent de l'intersection d'un solide géométrique avec un plan. Or, le cône se construit géométriquement, et sa section par un plan est une opération très-géométrique. Ainsi le segment du cône est une figure géométrique, qui tient dans la géométrie solide le même rang que le segment du cercle dans la géométrie plane; et par conséquent la base de ce segment du cône, qu'on appelle section conique, est une véritable figure de géométrie. Par conséquent une section conique n'est admise dans la géométrie que parce qu'elle est la surface d'un solide géométrique; et comme le seul moyen

géométrique

Digitized by Google

géométrique d'obtenir ces courbes est de couper un solide, les anciens ne les ont jamais admises que dans la géométrie solide. On sent bien qu'une telle génération des sections coniques devient si difficile, qu'elle ne peut être d'aucune utilité pour la pratique; et cependant le principal but de la géométrie est de faciliter les méthodes de pratique. Aussi les anciens ont-ils eu recours à différentes courbes mécaniques décrites sur un plan, et c'est à leur exemple que j'ai construit les problêmes précédens. Ces constructions sont mécaniques, dira-t-on; je le sais. Mais la méthode moderne de construire par le moyen des sections coniques décrites sur un plan, n'est-elle pas aussi mécanique? Et si l'on veut que les constructions par les sections coniques soient géométriques, pourquoi donc ne le seraient pas également celles que l'on ferait par toute autre figure? Les unes et les autres ne sont-elles pas de l'ordre des problêmes plans? Je ne vois aucune raison de préférer les sections coniques aux autres figures, à moins que ce ne soit parce que les premières sont engendrées par les sections du cône; mais cette propriété est bien inutile pour la pratique. Au reste, pour ne pas omettre tout-à-fait les constructions par les sections coniques, je vais en donner ici quelques exemples, où je n'oublierai pas même d'indiquer des moyens très-propres à en faciliter l'usage.

De toutes les sections coniques, la plus simple est l'ellipse. Elle est aussi la plus connue, et celle qui a le plus d'affinité avec le cercle, enfin celle qui peut être le plus facilement décrite sur un plan. Cependant la plupart des géomètres lui préfèrent la parabole, parce que l'équation de celle-ci est plus simple. Mais par la même raison ils devraient donc aussi préférer la parabole au cercle, et c'est ce qu'ils ne font pas. Rien n'est donc plus dénué de fondement

Digitized by Google

que cette classification des courbes selon la simplicité de leurs équations, et les géomètres modernes y ont trop d'égard. La simplicité des équations n'est qu'une simplicité analytique qui n'a rien de commun avec la composition. Les loix de celles-ci sont entièrement indépendantes de l'analyse : cette dernière nous mène comme par la main à la composition ; mais il n'y a de vraie composition qu'à l'instant où l'analyse a entièrement disparu, tant qu'il en reste la moindre trace, vous n'avez point encore de véritable composition. La simplicité des figures dépend et de la simplicité de leur description, et des idées qu'elles expriment. Une figure n'est point une équation ; c'est une peinture soit géométrique, soit mécanique, par laquelle on exprime ses idées pour les rendre faciles à concevoir. Nous donnerons donc le premier rang à l'ellipse, et nous enseignerons de quelle manière on peut construire les équations par son moyen.

Soit proposée l'équation générale du troisième degré, $x^3 - px^2 - qx - r = 0$, *où les quantités* p, q, r *sont les coëfficiens connus des termes de l'équation, et peuvent être indifféremment positifs ou négatifs, et où l'un des deux termes* p, q, *et même tous les deux peuvent manquer, ou bien, ce qui est la même chose, être égaux à zéro.* La seule construction suivante pourra servir de formule pour construire toutes les équations cubiques.

(*Pl.* XI, *Fig.* 2). Sur une droite donnée quelconque, portez d'un même côté, à partir du point B, les droites BC et BE, ainsi que BD moyenne proportionnelle entre BC et BE. Appelez BC, n; et faites $BA = \frac{q}{n}$, que vous porterez vers C, si q est positif, et du côté opposé, s'il est négatif. Elevez au point A une perpendi-

Digitized by Google

culaire AI; prenez sur cette perpendiculaire, $AF = p$, $FG = AF$, $FI = \frac{r}{n^2}$, et enfin faites la proportion, $BE : BC :: FI : FH$, et vous porterez FH de F en H. Les deux lignes FH et FI doivent se porter du même côté du point F, c'est-à-dire toutes les deux vers G, si p et r ont les mêmes signes, et toutes les deux vers A, s'ils ont des signes différens. Achevez les parallélogrammes $IACK$ et $HAEL$, et du point K, comme centre, avec KG pour rayon, décrivez un cercle. Prenez sur la droite HL, d'un côté ou de l'autre du point H, une ligne HR que vous déterminerez de longueur par cette proportion, $BE : BD :: HL : HR$; par les points G et R, tirez la droite GR jusqu'à ce qu'elle rencontre en quelque point S la perpendiculaire EL; ensuite faites mouvoir la ligne GRS de manière que son point R glisse toujours sur la droite HL, et son point S sur la droite EL; par ce mouvement, le point G décrira une ellipse qui coupera le cercle, comme on peut le voir lorsque la ligne GRS est arrivée dans la position $\gamma\rho\sigma$. Maintenant, si du point γ on abaisse sur AE la perpendiculaire γX, la moitié de cette perpendiculaire sera une des racines de l'équation. Et l'extrémité G ou γ de la règle GRS ou $\gamma\rho\sigma$, pourra rencontrer le cercle en autant de points qu'il y a de racines réelles dans l'équation. Toutes celles des racines qui seront situées, par rapport à AE, du même côté que FI comptée du point F, seront positives, et toutes celles qui seront situées, par rapport à AE, dans un sens contraire à FI, seront négatives. Tout cela cependant dans la supposition que l'on a $-r$; car si l'on avait $+r$, ce serait tout le contraire.

Cette construction se démontre avec le secours des Lemmes suivans.

Digitized by Google

LEMME Ier. *Tout étant supposé comme dans la construction précédente, on a,* $2AC \times AX - \overline{AX}^2 = \overline{\gamma X}^2 - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$.

Car on a, par la propriété du triangle rectangle, $\overline{K\gamma}^2 - \overline{CX}^2 = (X\gamma - CK)^2$, ou bien, $\overline{K\gamma}^2 - \overline{CX}^2 = (X\gamma - AI)^2$. Mais... $\overline{K\gamma}^2 = \overline{GI}^2 + \overline{AC}^2$, et $\overline{CX}^2 = (AX - AC)^2 = \overline{AX}^2 - 2AX \times AC + \overline{AC}^2$. Donc $\overline{K\gamma}^2 - \overline{CX}^2 = \overline{GI}^2 - \overline{AX}^2 + 2AX \times AC$. Et par conséquent, $(X\gamma - AI)^2 = \overline{GI}^2 - \overline{AX}^2 + 2AC \times AX$, ou bien, $\overline{X\gamma}^2 - 2X\gamma \times AI + \overline{AI}^2 = \overline{GI}^2 - \overline{AX}^2 + 2AC \times AX$. Retranchons de part et d'autre $\overline{GI}^2$, et il restera, $\overline{X\gamma}^2 - 2X\gamma \times AI + \overline{AI}^2 - \overline{GI}^2 = 2AC \times AX - \overline{AX}^2$. Or (par la 4e. prop. du 2e. liv. des Elém.) on a, $\overline{AI}^2 = \overline{AG}^2 + 2AG \times GI + \overline{GI}^2$, et par conséquent, $\overline{AI}^2 - \overline{GI}^2 = \overline{AG}^2 + 2AG \times GI = 2AG\left(\frac{AG}{2} + GI\right)$. Or $\frac{1}{2}AG + GI = FI$. Donc $\overline{AI}^2 - \overline{GI}^2 = 2AG \times FI$. Donc enfin $2AC \times AX - \overline{AX}^2 = \overline{X\gamma}^2 - 2X\gamma \times AI + 2AG \times FI$. C. Q. F. D.

LEMME II. *Tout étant supposé comme dans la construction précédente, on aura,* $2EA \times AX - \overline{AX}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{X\gamma}^2 - \frac{2FI}{FH} \times X\gamma \times AH + 2AG \times FI$.

On sait, par la manière dont nous avons fait mouvoir ci-dessus, la règle $\gamma\rho\sigma$, que son point γ décrit une ellipse, dont le centre est en L, et que les deux axes sont placés sur les droites LE et LH. Celui de ces deux axes qui tombe sur LE, égale $2\gamma\rho$, ou $2GR$, et celui qui tombe sur LH, égale $2\gamma\sigma$, ou $2GS$. Les

Digitized by Google

triangles semblables HGR, SRL nous donnent la proportion, $GR : RS :: RH : RL$, d'où nous tirons $GR : GR + RS :: RH : RH + RL$; ou bien, $GR : GS :: RH : HL$. Mais nous avons eu plus haut la proportion, $BE : BD :: HL : HR$. On conclut de ces deux proportions, celle-ci, $BD : BE :: 2GR : 2GS$. D'où il suit que le grand axe est à son paramètre $:: BE : BC$, ou bien $:: FI : FH$. (82). Ainsi $T\gamma$ étant une ordonnée à l'axe HL, on a par la propriété de l'ellipse, $\overline{GS}^2 - \overline{LT}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{T\gamma}^2$. (83). Mais $LT = AE - AX$, et $T\gamma = \gamma X - AH$. Ainsi $\overline{LT}^2 = \overline{AE}^2 - 2AE \times AX + \overline{AX}^2$; et $\overline{T\gamma}^2 = \overline{\gamma X}^2 - 2\gamma X \times AH + \overline{AH}^2$. Substituons, à la place de ces deux quarrés, leurs valeurs dans l'équation $\overline{GS}^2 - \overline{LT}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{T\gamma}^2$, elle deviendra, $\overline{GS}^2 - \overline{AE}^2 + 2AE \times AX - \overline{AX}^2 = \frac{FI}{FH}(\overline{\gamma X}^2 - 2\gamma X \times AH + \overline{AH}^2)$. Mais $\overline{GS}^2 - \overline{AE}^2 = (GH + LS)^2$, parce que GS est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont égaux, l'un à AE, et l'autre à $GH + LS$. Et à cause des triangles semblables RGH, RSL, on a, $LS : GH :: LR : HR$, et en composant, $LS + GH : GH :: LR + HR : HR$. Ou bien, $LS + GH : GH :: HL : HR$. D'où l'on tire..... $(LS + GH)^2 : \overline{GH}^2 :: \overline{HL}^2 : \overline{HR}^2$. Mais nous avons fait par construction, $BE : BD :: HL : HR$, ce qui donne, $\overline{BE}^2 : \overline{BD}^2 :: \overline{HL}^2 : \overline{HR}^2$; et en mettant pour $\overline{BD}^2$ sa valeur $BC \times BE$, nous aurons, $\overline{BE}^2 : BC \times BE :: \overline{HL}^2 : \overline{HR}^2$. Ou bien, $BE : BC :: \overline{HL}^2 : \overline{HR}^2$. Or $BE : BC :: FI : FH$, donc $FI : FH :: \overline{HL}^2 : \overline{HR}^2$,

Digitized by Google

donc aussi $(LS+GH)^2 : \overline{GH}^2 :: FI : FH$; d'où l'on tire... $(LS+GH)^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{GH}^2$. Et nous venons de voir que... $\overline{GS}^2 - \overline{AE}^2 = (LS+GH)^2$. Donc $\overline{GS}^2 - \overline{AE}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{GH}^2$. On aura donc, $\frac{FI}{FH} \times \overline{GH}^2 + 2AE \times AX - \overline{AX}^2 =$ ..... $\frac{FI}{FH}(\overline{\gamma X}^2 - 2\gamma X \times AH + \overline{AH}^2)$. Retranchez de part et d'autre $\frac{FI}{FH} \times \overline{GH}^2$, et il restera, $2AE \times AX - \overline{AX}^2 =$..... $\frac{FI}{FH}(\overline{\gamma X}^2 - 2\gamma X \times AH + \overline{AH}^2 - \overline{GH}^2)$. Mais $AH = AG + GH$, donc $\overline{AH}^2 = \overline{AG}^2 + 2AG \times GH + \overline{GH}^2$. Et en retranchant de part et d'autre $\overline{GH}^2$, le reste sera, $\overline{AH}^2 - \overline{GH}^2 = \overline{AG}^2 + 2AG \times GH$, ou bien, $\overline{AH}^2 - \overline{GH}^2 = 2AG\left(\frac{AG}{2} + GH\right) = 2AG \times FH$. Ainsi on aura, $2AE \times AX - \overline{AX}^2 =$..... $\frac{FI}{FH}(\overline{\gamma X}^2 - 2\gamma X \times AH + 2AG \times FH)$. Ou bien enfin..... $2AE \times AX - \overline{AX}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{\gamma X}^2 - \frac{2FI \times \gamma X \times AH}{FH} + 2FI + AG$. C. Q. F. D.

LEMME III. *En supposant toujours que tout est comme dans la construction, on aura la proportion*, $AX : \gamma X - AG :: \gamma X : 2BC$.

Car si l'on retranche l'équation donnée par le premier Lemme de celle qui est donnée par le second, on aura pour reste.... $2AX \times CE = \frac{HI}{FH} \times \overline{\gamma X}^2 - \frac{2FI}{FH} \times AH \times \gamma X + 2AI \times \gamma X$. Et en multipliant chaque membre de cette équation par FH, il viendra, $2FH \times AX \times CE = HI \times \overline{\gamma X}^2 - 2FI \times AH \times \gamma X + 2AI \times FH \times \gamma X$. Mais $AI = AH + HI$. Ainsi $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2FI \times$

Digitized by Google

$AH - 2FH \times AH - 2FH \times IH$. Ensuite $2FI \times AH - 2FH \times AH = 2AH \times HI$, et $2AH \times HI - 2FH \times HI = 2HI \times AF$. Donc $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2HI \times AF$; par conséquent $2FH \times CE \times AX = HI \times \overline{\gamma X}^2 - 2HI \times AF \times \gamma X$. De cette équation l'on tire la proportion, $HI : FH :: 2AX \times CE : (\gamma X - 2AF) \times \gamma X$. Mais on a (*par const.*) $CE : BC :: HI : FH$. (*). Donc $CE : BC :: 2AX \times CE : (\gamma X - 2AF) \times \gamma X$. D'où l'on tire, $2AX \times BC = (\gamma X - 2AF) \times \gamma X$. Et enfin... $AX : \gamma X - 2AF :: \gamma X : 2BC$. C. Q. F. D.

LEMME IV. *Toujours dans les mêmes suppositions*, on a, $2FI : AX - 2AB :: \gamma X : 2BC$.

Car si de l'équation résultant du troisième Lemme, $2BC \times AX = \overline{\gamma X}^2 - 2AF \times \gamma X$, on retranche l'équation résultant du premier Lemme, et qui est, $2BC \times AX - \overline{AX}^2 = \overline{\gamma X}^2 - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$, il restera, $-2AB \times AX + \overline{AX}^2 = 2FI \times \gamma X - 2FI \times AG$, ou bien $AX(AX - 2AB) = 2FI(\gamma X - AG)$; d'où l'on tire la proportion, $2FI : AX - 2AB :: AX : \gamma X - AG$. Mais par le Lemme troisième on a, $AX : \gamma X - 2AF :: \gamma X : 2BC$, ou bien (à cause de $2AF = AG$), $AX : \gamma X - AG :: \gamma X : 2BC$. Donc, à cause de l'égalité des deux rapports, on a, $2FI : AX - 2AB :: \gamma X : 2BC$. C. Q. F. D.

(*) Par construction on a, $BE : BC :: FI : FH$; d'où il est facile de tirer la proportion que Newton donne ici.

Digitized by Google

Après avoir établi tous ces Lemmes, voici enfin de quelle manière on démontre la construction du problême.

Par le Lemme quatrième on a cette proportion, $2FI : AX - 2AB :: \gamma X : 2BC$, ou bien $\gamma X : 2BC :: 2FI : AX - 2AB$; et (par la 1re. prop. du 6e. liv. des Elém.) cette proportion devient, $\gamma X : 2BC :: 2FI \times 2BC : 2BC(AX - 2AB)$, ou bien..... $\gamma X : 2BC :: 2FI \times 2BC : AX \times 2BC - 2AB \times 2BC$. Et par le Lemme troisième nous avons eu, $\gamma X : 2BC :: AX : \gamma X - 2AF$. Donc $\gamma X : 2BC :: 2BC \times 2FI : \gamma X(\gamma X - 2AF) - 2BC \times 2AB$ (84). Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on aura, $\overline{\gamma X}^3 - 2AF \times \overline{\gamma X}^2 - 4BC \times AB \times \gamma X = 8\overline{BC}^2 \times FI$. Et en transportant tous les termes d'un même côté, $\overline{\gamma X}^3 - 2AF \times \overline{\gamma X}^2 - 4BC \times AB \times \gamma X - 8\overline{BC}^2 \times FI = 0$. Maintenant, dans la construction qu'il s'agissait de démontrer, nous avons appelé $\frac{1}{2}\gamma X$, x; AF, p; BC, n; AB, $\frac{q}{n}$; et FI, $\frac{r}{n^2}$. Ainsi $BC \times AB = q$, et $\overline{BC}^2 \times FI = r$, et en substituant toutes ces valeurs dans l'équation finale, on aura, $x^3 - px^2 - qx - r = 0$. C. Q. F. D.

Corollaire. Si l'on suppose les lignes AB et AF égales à zéro, on aura, par le Lemme troisième, $AX : \gamma X :: \gamma X : 2BC$; et par le Lemme quatrième, $2FI : AX :: \gamma X : 2BC$. D'où l'on tire, $2FI : AX :: AX : \gamma X :: \gamma X : 2BC$. De là on déduit la méthode de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux droites quelconques FI et BC.

SCOLIE.

Digitized by Google

SCOLIE.

Jusqu'ici je n'ai employé que l'ellipse pour construire l'équation du 3e degré; mais la règle est plus générale par sa nature; elle s'étend indifféremment à toutes les sections coniques. En effet, si, au lieu de l'ellipse, vous voulez employer l'hyperbole, portez les lignes *BC* et *BE* dans des sens opposés à partir du point *B*; déterminez ensuite, comme auparavant, les points *A*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L* et *R*, excepté seulement que *FH* partant du point *F*, doit être portée du côté opposé à *FI*; et que *HR* ne doit point être comptée sur *HL*, mais sur *AI*, et qu'il faut porter *HR* de part et d'autre du point *H*; ensuite, au lieu de la ligne *GRS*, menez par le point *L* et par les deux points *R* et *R* deux droites, elles seront les asymptotes de l'hyperbole. Au moyen de ces asymptotes, *LR*, *LR*, décrivez une hyperbole que vous ferez passer par le point *G*; ensuite décrivez aussi un cercle du point *K* comme centre, et d'un rayon *KG*; et les moitiés des perpendiculaires abaissées de chaque point d'intersection de l'hyperbole avec le cercle, sur la droite *AE*, seront les racines de l'équation proposée. La démonstration s'en fera comme ci-dessus, en observant de changer convenablement les signes + et —, selon qu'on a changé la position des lignes.

Si vous voulez employer la parabole, le point *E* s'éloignera à l'infini, ainsi il ne se trouvera nulle part, et le point *H* tombera sur le point *F*. Cette parabole aura pour axe *HL* et *BC* pour paramètre de l'axe; elle passera par les points *G* et *A*; et son sommet sera situé par rapport à *F* du même côté que *B* est situé par rapport à *C*.

Digitized by Google

Les constructions que l'on fait par la parabole sont les plus simples de toutes, en ne considérant que la simplicité analytique; viennent ensuite celles que l'on fait par l'hyperbole, et en dernier lieu, les constructions par l'ellipse. Mais si vous n'avez égard qu'à la simplicité pratique, à la facilité de décrire les figures, renversez cet ordre.

Il faut observer dans toutes ces constructions, qu'en général une ellipse ou une hyperbole est déterminée d'espèce par le rapport qui existe entre le paramètre de son axe, et l'axe même; et ce rapport étant le même que celui des lignes BC et BE, on voit que connoissant celui-ci, on aura l'autre. Pour la parabole, il suffira de supposer BE infini, et BC sera le paramètre, ligne dont la connaissance suffit seule, pour construire la parabole. Ainsi l'on peut toujours construire une équation quelconque du troisième degré par le moyen de telle section conique qu'on voudra, lors même que la Figure en est déjà tracée, et par conséquent invariable. Et pour arriver de la Figure tracée à celle qui doit donner les racines de l'équation proposée, il faudra augmenter ou diminuer dans un rapport donné, toutes les dimensions de la première; je vais m'expliquer plus clairement.

Soit proposé de construire l'équation quelconque du troisième degré $x^3 \pm px^2 \pm qx \pm r = 0$, *par le moyen d'une section conique quelconque déjà tracée.*

D'un point quelconque B (*Pl.* XI, *Fig.* 3 et 4), prenez sur la droite indéfinie BCE, deux droites d'une longueur arbitraire BC, BE, avec la condition pourtant qu'elles seront entre elles dans le rapport du paramètre de l'axe principal, à l'axe même de la section tracée; portez ces lignes d'un même côté du point B, si la section est une ellipse, et de côtés différens, si c'est une hyperbole. Faites

Digitized by Google

$BC = n$, et $BA = \frac{q}{n}$, et portez BA de B vers C, si q est positif, et du côté opposé, s'il est négatif; élevez au point A une perpendiculaire AI, sur laquelle vous prendrez $AF = p$ et $FG = AF$. Enfin vous ferez $FI = \frac{r}{n^2}$; vous porterez FI de F vers G, si p et r ont les mêmes signes; mais s'ils ont des signes différens, vous porterez FI de F vers A. Faites ensuite la proportion $BE : BC :: FI : FH$. Les trois premiers termes de cette proportion étant connus, le quatrième l'est aussi; portez-le de F vers I, si la section tracée est une ellipse, et dans le sens opposé, si c'est une hyperbole. Enfin achevez les parallélogrammes $IACK$, $AHLE$. Toutes ces lignes étant décrites, appliquez-les sur la section conique tracée, ou bien, ce qui revient au même, appliquez sur elles la section conique, de manière que son axe principal coïncide avec la droite LH, et que son centre tombe sur le point L. Ces choses étant ainsi disposées, unissez par des droites les points L et K, ainsi que les points L et G; la droite LG coupera la section conique au point g. Ensuite prenez sur LK, à partir du point L, une quatrième proportionnelle que vous déterminerez en faisant la proportion $LG : Lg :: LK : Lk$; et du point k comme centre, avec un rayon kg décrivez un cercle; des points où ce cercle coupera la section conique superposée, abaissez sur LH des perpendiculaires, telles que γT; après quoi, portez de T vers γ une quatrième proportionnelle TY, que vous déterminerez par la proportion $Lg : LG :: T\gamma : TY$; prolongez TY jusqu'à ce qu'elle coupe la ligne AB en un point X, et $\frac{1}{2}XY$ sera une des racines de l'équation proposée. Toutes les racines qui seront situées par rapport à AB du même côté que FI est situé par rapport au point F, toutes ces racines, dis-je, seront positives;

Digitized by Google

et toutes celles qui seront situées dans un sens contraire, seront négatives; dans la supposition toutefois, que, dans l'équation, on a, $-r$; car si l'on avait $+r$, il faudrait dire tout le contraire.

C'est ainsi que, par le moyen d'ellipses ou d'hyperboles données, on construit toutes les équations du troisième degré. Si l'on veut construire par le moyen d'une parabole donnée, il faudra prendre BC égale au paramètre de cette parabole; et après avoir déterminé, comme ci-dessus, les points A, F, G, I et K, du point K comme centre, avec un rayon KG, on décrira un cercle, et sur ces lignes ainsi tracées, on appliquera la parabole donnée, ou les lignes sur la parabole, de manière que celle-ci passe par les points A et G, et que son axe passant par le point F, soit parallèle à AC, et que son sommet tombe, par rapport à F, du même côté que B est situé par rapport à C. Toutes ces choses étant ainsi disposées, si, des points d'intersection du cercle avec la parabole, on abaisse des perpendiculaires sur la droite BC, les moitiés de ces perpendiculaires seront les racines de l'équation qu'il fallait construire.

Et remarquez que si le second terme de l'équation manque, et que le paramètre de la parabole soit le nombre 2, notre construction devient celle que Descartes a donnée dans sa géométrie, excepté que toutes les lignes sont ici doubles de celles de la construction de Descartes.

Telle est la règle générale des constructions. Mais lorsqu'il s'agit de construire des problêmes particuliers, il faut tâcher de le faire par les formules les plus simples possibles. Par exemple, j'ai introduit l'indéterminée n, par le moyen de laquelle on peut très-souvent simplifier la construction. Je vais en donner un exemple.

Soit donnée une ellipse, et qu'il s'agisse de trouver deux

Digitized by Google

moyennes proportionnelles entre a et b. Soient, la première des deux moyennes x, et la seconde $\frac{x^2}{a}$; alors les quatre termes a, x, $\frac{x^2}{a}$, et b seront en proportion continue, et l'on aura, $ab = \frac{x^3}{a}$, ou $x^3 = a^2 b$, et enfin $x^3 - a^2 b = 0$, équation qu'il s'agit de construire. On voit que dans cette équation les termes p et q manquent, et que $r = a^2 b$. Ainsi BA et AF sont ici nulles, et $FI = \frac{a^2 b}{n^2}$. Afin que le dernier terme devienne plus simple, je suppose que l'indéterminée $n = a$; alors $FI = b$; et voici comment se fait la construction.

Sur une ligne indéfinie AE (*Pl.* XI, *Fig.* 5), prenez, à compter du point A, une ligne $AC = a$. Ensuite déterminez une ligne AE par cette proportion : le paramètre du grand axe de l'ellipse est à cet axe, comme AC est à AE; portez AE du même côté que AC, à partir du point A. Elevez sur AC et par le point A une perpendiculaire, sur laquelle vous prendrez $AI = b$; déterminez ensuite une ligne AH par cette proportion, $AE : AC :: AI : AH$; et achevez les parallélogrammes $IACK$, $HAEL$; tirez les droites LA, LK; appliquez sur tout ce tracé l'ellipse donnée, et supposez qu'elle coupe la droite AL en un point g; faites la proportion, $LA : Lg :: LK : Lk$; du point k, comme centre, et d'un rayon kg, décrivez un cercle qui coupera l'ellipse en γ; du point γ abaissez sur AE la perpendiculaire γX, qui rencontrera HL en T; déterminez une ligne TY par cette proportion, $Lg : LA :: T\gamma : TY$, et vous aurez, $\frac{1}{2} XY = x$; c'est-à-dire que $\frac{1}{2} XY$ sera la première des deux moyennes proportionnelles. C. Q. F. T.

Fin de l'Arithmétique Universelle.

Digitized by Google

Digitized by Google

NOTES

SUR

L'ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE

DE NEWTON.

NOTE (1), *pour la page* 47. *Tome I.*

SI une équation est le produit des facteurs $x-a=0$, $x+b=0$, $x-c=0$, ou qu'on ait, $(x-a)(x+b)(x-c)=0$, ou bien $x^3 \begin{matrix} -a \\ +b \\ -c \end{matrix} \left\{ x^2 \begin{matrix} -ab \\ +ac \\ -bc \end{matrix} \right\} x+abc=0$, il est évident que le dernier terme est le produit de toutes les racines, et qu'en substituant successivement à la place de x et de ses puissances, chacun des facteurs du dernier terme $+a$, $-b$, $+c$, l'équation, dans tous ces cas, devient égale à zéro ; par conséquent elle est divisible par $x-a=0$, ou par $x+b=0$, ou par $x-c=0$ (mais comme on ne sait pas d'avance si les racines a, b, c doivent être prises avec le signe $+$ ou le signe $-$, il est clair qu'il faut tenter la division successivement avec l'un et l'autre signes). On voit donc que, lorsqu'une équation littérale a des diviseurs commensurables, il est très-facile de les découvrir, mais il n'en est pas de même pour une équation numérique, parce que quelques-unes de ses racines, ou même toutes pouvant n'être pas des nombres premiers, le dernier terme qui est leur produit serait alors décomposable de plusieurs manières, sans qu'on sût quels

Digitized by Google

sont ceux de tous ses facteurs qui sont les racines de l'équation. Soit, par exemple, l'équation $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$; les diviseurs du dernier terme sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48, parmi lesquels se trouvent confondues les trois racines de l'équation 2, 4, 6, et c'est pour les reconnaître, que Newton, perfectionnant la règle de Descartes pour trouver les racines commensurables d'une équation, a donné la méthode que nous allons expliquer.

Supposons que l'équation $x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +$, etc. $+ K = 0$ soit divisible exactement par le facteur du premier degré $x \pm D = 0$, et que le quotient soit $x^{m-1} + Lx^{m-2} + Mx^{m-3} +$, etc. $+ N = 0$, il s'en suit que $x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +$ etc..... $+ K = (x^{m-1} + Lx^{m-2} + Mx^{m-3} +$ etc. $+ N)(x \pm D)$. Je remarque d'abord que $x \pm D$ ne peut pas être un diviseur exact de la proposée, à moins que D ne soit un facteur du dernier terme K; je remarque de plus, que la division s'étant faite sans supposer aucune valeur particulière à x, elle se fera encore en substituant pour x, une même valeur quelconque dans le dividende et dans le diviseur. En effet, substituons a pour x dans le dividende et dans le diviseur; l'un sera transformé par cette substitution en..... $(a^{m-1} + La^{m-2} + Ma^{m-3} +$ etc. $+ N)(a \pm D)$, et l'autre en $a \pm D$. Or l'on voit que cette dernière quantité divise encore exactement la première; donc, etc.

Maintenant veut-on savoir si une équation quelconque est divisible par une équation du premier degré, telle que $x \pm D = 0$, D étant un diviseur du dernier terme de la proposée; il n'y a qu'à supposer successivement pour x les termes de la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3, dont la différence est l'unité; chacune de ces suppositions transformera le dividende et le diviseur :

et

Digitized by Google

et d'après ce que nous venons de dire plus haut, si la proposée était divisible par un diviseur, tel que $x \pm D$, une transformée quelconque de cette proposée sera encore divisible par la transformée correspondante du diviseur. Or, par ces suppositions, le diviseur est devenu successivement $3 \pm D$, $2 \pm D$, $1 \pm D$, $0 \pm D$, $-1 \pm D$, $-2 \pm D$, $-3 \pm D$, etc., progression arithmétique, dont la différence est 1. *Donc si la proposée est divisible par* $x \pm D$, *décomposez dans tous ses facteurs chacune des transformées de cette proposée. Écrivez*, 1°. *dans une même ligne horizontale tous les facteurs de la transformée qui provient de la supposition de* $x = 3$. 2°. *Écrivez au-dessous dans une ligne horizontale les facteurs de la transformée qui provient de la supposition de* $x = 2$. 3°. *Écrivez dans une troisième ligne horizontale, au-dessous de la seconde, tous les facteurs de la transformée qui provient de la supposition de* $x = 1$, *et ainsi de suite. Comparez maintenant les termes d'une ligne à l'autre, en essayant chaque terme en* + *et en* —, *et vous trouverez nécessairement une progression arithmétique, dont la différence sera l'unité.* Si vous ne trouviez aucune progression de cette espèce, ce serait une preuve que la proposée n'est pas divisible par $x \pm D$. La converse de cette règle n'est pas toujours vraie : c'est-à-dire, que si la proposée est divisible par un facteur du premier degré, on trouvera nécessairement parmi les facteurs de ses transformées une ou plusieurs progressions arithmétiques; mais de ce qu'on trouve une ou plusieurs progressions de cette espèce, on ne peut pas toujours conclure que la proposée soit divisible par un facteur du premier degré : c'est à cause de cette restriction, que Newton dit : que dans le cas où l'on trouve une ou plusieurs progressions, il faut *essayer* la division de la proposée.

Si, après avoir supposé successivement pour x les termes de la

Digitized by Google

progression 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3, dont la différence est l'unité, on ne trouve parmi les facteurs des transformées que des progressions d'une tout autre différence r, il faut en conclure que le diviseur, s'il en existe, ne peut plus être $x \pm D$, mais $rx \pm D$. Car la progression trouvée étant, par supposition, $3r \pm D$, $2r \pm D$, $r \pm D$, $\pm D$, $-r \pm D$, $-2r \pm D$, $-3r \pm D$; il faut que le diviseur se transforme successivement en tous ces termes par la supposition de $x = 3$, $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, etc., ce qui ne peut se peut faire qu'autant que le diviseur serait $rx \pm D$. Or, pour que ce diviseur soit possible, il faut que la plus haute puissance de x, dans la proposée, ait un coëfficient dont r soit facteur. On comprendra encore mieux toute cette théorie par les notes que nous ferons sur les exemples de Newton.

NOTE (2), *pour la page* 48. *Tome I.*

Il s'agit de chercher si l'équation $x^3 - x^2 - 10x + 6$ a quelque diviseur d'une dimension. Pour cela, à la place de x, je substitue successivement les termes de la progression arithmétique, 1, 0, — 1. En substituant 1 pour x, l'équation se transforme en — 4; 0 pour x la transforme en + 6; enfin — 1 pour x la transforme en + 14. Je place dans une première colonne les termes de la progression; dans une seconde colonne les transformées correspondantes, sans avoir égard à leurs signes. Ensuite sur la même ligne où se trouve chacun des nombres 4, 6, 14, j'écris tous leurs diviseurs (tout cela se voit dans l'exemple ci-à-côté). Je cherche les

1	4	1, 2, 4
0	6	1, 2, 3, 6
— 1	14	1, 2, 7, 14

Digitized by Google

progressions que ces diviseurs peuvent me fournir, en essayant en + et en — chaque diviseur de 4 et le comparant aux diviseurs de 6 et de 14. Je prends donc d'abord 1 que je compare à 2 de la seconde ligne; mais il faudrait que le nombre 3 se trouvât dans la troisième ligne; et comme il n'y est pas, cette comparaison ne donne point de progression. Ensuite la comparaison de 1 avec 3 exigerait 5 dans la troisième ligne; et celle de 1 à 6 exigerait 11 dans la troisième ligne; et comme ces nombres ne s'y trouvent pas, il s'en suit que + 1 de la ligne supérieure ne donne aucune progression. On trouvera de même que — 1 n'en donne aucune. Je répète les mêmes essais sur 2 et 4 de la ligne supérieure, et je trouve que 4 donne la progression 4, 3, 2, dont la différence est l'unité, et le nombre 3 qui répond à la supposition de $x = 0$, est pris en +; je tente donc la division par $x + 3$. Elle réussit, et donne pour quotient $x^2 - 4x + 2$.

NOTE (3), *pour la page* 48. *Tome I.*

La quantité proposée étant $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20 = 0$, je substitue successivement 2, 1, 0, — 1, — 2, à la place de y, et en il résulte les transformées 30, 7, 20, 3, 34. Je dispose tout, comme dans l'exemple de Newton; et après avoir comparé en + et en — tous les diviseurs de 20 qui répond au terme 0 de la première colonne, après, dis-je, avoir comparé tous ses diviseurs à ceux qui se trouvent dans les lignes supérieures et inférieures, je ne trouve que la progression 10, 7, 4, 1, — 2, tandis que les nombres substitués pour y forment une progression dont la différence est l'unité. Donc *par le dernier alinéa de la note* (1), si la proposée

Digitized by Google

a un diviseur, il ne peut être que $3y + 4$; car 3 est un diviseur du coëfficient 6 qui affecte la plus haute puissance de y. Et en effet, la division se fait par ce diviseur.

NOTE (4), *pour la page* 49. *Tome I.*

Après avoir tout disposé comme dans l'exemple de Newton, J'ai trois progressions, 3, 1, −1, −3; 3, −1, −5, −9; et 7, 1, −5, −11.

2	42	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.	3	3	7
1	23	1, 23,	1	−1	1
0	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.	−1	−5	−5
−1	297	1, 3, 9, 11, 27, 33, 99, 297.	−3	−9	−11
−2	2618	1, 2, 7, 11, 17, 1309, 2618.			

La différence de la première est 2, diviseur exact du coëfficient 24 qui affecte a^5, et le terme de cette progression qui répond à la supposition de $a = 0$ étant -1, on pourra tenter la division par $2a - 1$.

La différence 4 de la seconde progression divisant exactement 24 coëfficient de $24a^5$, et -5 répondant à la supposition de $a = 0$, on pourra tenter la division par $4x - 5$.

La troisième progression ayant pour différence 6, diviseur exact de 24, et son terme -5 répondant à la supposition de $a = 0$, on pourra tenter la division par $6x - 5$.

On voit donc qu'il y a trois divisions à essayer. On peut s'en dispenser en faisant de nouvelles suppositions pour a, par exemple $a = -2$, qui donne pour résultat 2618, que je place avec tous ses diviseurs, comme on le voit dans l'exemple. Je cherche ensuite si, parmi tous ces diviseurs, il ne s'en trouverait pas quelques-uns

Digitized by Google

qui fissent suite à quelques-unes des progressions déjà trouvées. Il ne s'en rencontre qu'un seul, c'est 17, qui, étant pris en —, continue la progression 7, 1, — 5, — 11, — 17. Je tente donc la division par le moyen de la seule progression qui me reste. Le diviseur à essayer est $6x - 5$, et la division réussit. Ce moyen, comme on voit, me dispense de tenter deux divisions qui n'auraient point eu de succès.

NOTE (5), *pour la page* 50. *Tome I.*

Voici comment on démontre cette règle de Newton....

Soit proposée l'équation $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, et supposons qu'elle ait pour diviseur l'équation du second degré..... $Ax^2 + Bx - C = 0$ (A étant un facteur du coëfficient qui affecte la plus haute puissance de la proposée). Je fais successivement $x = 3$, $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, etc., et les résultats de la proposée seront respectivement 39, 6, 1, −6, − 21, − 26. Je les écris avec tous leurs diviseurs pris en plus et en moins, comme on le voit dans le tableau suivant :

3	39	1, 3, 13, 39, −39 −13 −3 −1
2	6	1, 2, 3, 6, −6, −3, −2, −1
1	1	1, −1
0	6	1, 2, 3, 6, −6, −3, −2, −1
−1	21	1, 3, 7, 21, −21, −7, −3, −1
−2	26	1, 2, 13, 26, −26, −13, −2, −1

Maintenant je fais les mêmes suppositions pour x dans le diviseur $Ax^2 + Bx - C$, et il devient respectivement $9A + 3B - C$, $4A + 2B - C$, $A + B - C$, $0A + 0B - C$, $A - B - C$, $4A - 2B - C$, etc. Il faut donc que $9A + 3B - C$ soit un des

Digitized by Google

diviseurs de 39; que $4A+2B-C$ soit un des diviseurs de 6, que $A+B-C$ soit un des diviseurs de 1; que $0A+0B-C$ soit un des diviseurs de 6; que $A-B-C$ soit un des diviseurs de 21; enfin que $4A-2B-C$ soit un des diviseurs de 26. Donc $9A+3B-C=1$, ou 3, ou 13, ou 39, ou -39, ou -13, ou -3, ou -1. Ce qui donne $-3B+C=9A-1$, ou $9A-3$, ou $9A-13$, ou $9A-39$, ou $9A+39$, ou $9A+13$, ou $9A+3$, ou $9A+1$. Chaque ligne du tableau précédent fournira un équation semblable, et on pourra les ordonner toutes comme on le voit ci-dessous.

	ou	ou	ou	ou	ou	ou	ou	ou
$-3B+C=$	$9A-1$	$9A-3$	$9A-13$	$9A-39$	$9A+39$	$9A+13$	$9A+3$	$9A+1$
$-2B+C=$	$4A-1$	$4A-2$	$4A-3$	$4A-6$	$4A+6$	$4A+3$	$4A+2$	$4A+1$
$-B+C=$	$A-1$	$A+1$						
$0B+C=$	$0A-1$	$0A-2$	$0A-3$	$0A-6$	$0A+6$	$0A+3$	$0A+2$	$0A+1$
$+B+C=$	$A-1$	$A-3$	$A-7$	$A-21$	$A+21$	$A+7$	$A+3$	$A+1$
$+2B+C=$	$4A-1$	$4A-2$	$4A-13$	$4A-26$	$4A+26$	$4A+13$	$4A+2$	$4A+1$

Or les premiers membres de ces équations formant une progression arithmétique, il s'en suit, que parmi les seconds membres, il doit nécessairement s'en trouver d'une ligne à l'autre, qui formeront aussi au moins une progression arithmétique. Actuellement, comme dans notre exemple, la proposée n'a pour multiplicateur de la plus haute puissance de l'inconnue que l'unité, il faut faire $A=1$, et si on prend, d'une ligne à l'autre, les termes $9A-13$, $4A-6$, $A-1$, $0A+2$, $A+3$, $4A+2$, ils donneront la progression arithmétique -4, -2, 0, 2, 4, 6. Et si on prend d'une ligne à l'autre, les termes $9A-3$, $4A-1$, $A-1$, $0A-3$, $A-7$, $4A-13$, on aura une seconde progression 6, 3, 0, -3, -6,

Digitized by Google

— 9. Voilà les deux progressions que Newton a trouvées dans le premier exemple qu'il donne de cette règle; et chacune de ces progressions lui fournit un diviseur.

La seule inspection de nos équations précédentes suffit pour faire comprendre toutes les raisons sur lesquelles la règle est établie.

NOTE (6), *pour la page* 53. *Tome I.*

Examinons d'abord la règle de Newton pour le cas des diviseurs d'une dimension.

Supposons que la proposée n'ait que trois lettres, x, a, b; que tous ses termes aient le même nombre de dimensions, et qu'elle soit divisible par le facteur du premier degré $mx + na + pb$ (m, n, p, représentant des nombres), et qu'après la division faite, le quotient soit Z; la proposée pourra s'écrire ainsi, $Z(mx + na + pb)$. Faisons successivement $x = 0$, $a = 0$, $b = 0$, il est clair que la proposée se réduira aussi successivement à $Z(na + pb)$, $Z(mx + pb)$, $Z(mx + na)$; où l'on voit que le premier résultat est divisible par $na + pb$; le second par $mx + pb$, et le troisième par $mx + na$. Or, ces trois diviseurs sont tels, que le terme na du premier se retrouve dans le troisième diviseur, et son autre terme pb, dans le second; enfin le terme mx du deuxième diviseur se retrouve dans le troisième. De sorte qu'en faisant la somme de ces trois diviseurs, on a, $2mx + 2na + 2pb$, c'est-à-dire le double du diviseur $mx + na + pb$. Mais, par supposition, il n'y a en tout que trois lettres dans la proposée, et dans la somme des trois diviseurs on trouve deux fois le terme mx, deux fois le terme na, et deux fois le terme pb; c'est-à-dire que chacun d'eux s'y trouve autant de fois, moins une, qu'il y a de lettres dans la proposée. Et c'est ce qu'exige

Digitized by Google

la règle de Newton, lorsque les parties de chaque diviseur ne sont composées que d'une lettre.

Si la proposée a quatre lettres, x, a, b, c, et qu'elle soit divisible par l'équation d'une dimension, $mx + na + pb + qc$ (m, n, p, q, représentant des nombres), et que de plus le quotient soit Z, on pourra écrire la proposée de cette manière, $Z(mx + na + pb + qc)$. Supposons maintenant que x, a, b, c, deviennent successivement zéro; la proposée deviendra aussi successivement, $Z(na + pb + qc)$; $Z(mx + pb + qc)$; $Z(mx + na + cq)$; et $Z(mx + na + pb)$. Les quatre diviseurs partiels sont donc, $na + pb + qc$, $mx + pb + qc$, $mx + na + qc$, $mx + na + pb$; et le terme na qui se trouve dans le premier, se retrouve dans le troisième et le quatrième; pb, autre terme du premier diviseur, se retrouve dans le second et le quatrième; et son dernier terme qc se retrouve dans le second et dans le troisième diviseurs; enfin le terme mx du second diviseur se retrouve dans le troisième et dans le quatrième; c'est-à-dire que chacune des parties d'un même diviseur se retrouve dans deux autres diviseurs, ou se trouve trois fois dans tous les diviseurs, ou se trouve dans tous les diviseurs autant de fois, moins une, qu'il y a de lettres dans la proposée. Et c'est encore là ce que demande la règle de Newton. Rassemblez donc toutes ces parties, en les prenant une seule fois chacune, et vous aurez le diviseur à essayer, $mx + na + pb + qc$.

On suivrait la même marche, si l'équation littérale dont on cherche un diviseur du premier degré, avait cinq ou six, ou un plus grand nombre de lettres.

Enfin, si l'on a une équation littérale ne contenant que trois lettres, et qu'on se soit assuré, par la méthode précédente, qu'elle n'a

Digitized by Google

n'a aucun diviseur du premier degré, il faudra chercher si elle n'en aurait pas un du second. Pour déterminer ce diviseur, voici ce qu'il faut observer. Supposons qu'une équation littérale, au moins de quatre dimensions, ayant tous ses termes homogènes, et ne renfermant que trois lettres, soit divisible par l'équation du second degré, $gx^2 + akx + lbx + ha^2 + rab + sb^2$ (g, h, l, k, r, s étant censés désigner des nombres), et que le quotient soit Z. La proposée pourra donc s'écrire ainsi, $Z(gx^2 + akx + blx + ha^2 + rab + sb^2)$. Faisons successivement, $x = 0$, $a = 0$, $b = 0$, et la proposée se réduira aussi successivement à $Z(ha^2 + rab + sb^2)$..... $Z(gx^2 + lbx + sb^2)$, $Z(gx^2 + akx + ha^2)$. On voit donc que les diviseurs des trois résultats de la proposée sont, $ha^2 + rab + sb^2$, $gx^2 + lbx + sb^2$, $gx^2 + akx + ha^2$; en examinant ces trois diviseurs, on voit que chacun ne contient que deux lettres de la proposée, c'est-à-dire le quarré de chacune de ces deux lettres, et le produit de l'une par l'autre; par exemple, le premier diviseur, $ha^2 + rab + sb^2$, ne contient que le quarré de a, celui de b, et le produit de a par b; il en est de même des deux autres diviseurs. De plus, ha^2 qui est un quarré contenu dans le premier diviseur, se retrouve aussi dans le troisième; sb^2, autre quarré contenu dans le premier, se retrouve dans le second; tandis que le rectangle rab, contenu dans le premier, ne se retrouve dans aucun des deux autres. Et c'est là ce qu'exige la règle : « *Que les parties des diviseurs, composées d'une seule lettre, se répètent autant de fois, moins une, qu'il y a de lettres dans la proposée; et que les parties des diviseurs, composées de deux lettres, se répètent autant de fois, moins deux, qu'il y a de lettres dans la quantité proposée.* Or les quarrés ne contiennent qu'une seule lettre, tandis que les rectangles en contiennent deux; donc les

Digitized by Google

premiers doivent se répéter autant de fois, moins une, qu'il y a de lettres dans la proposée, et les seconds, autant de fois, moins deux, comme nous l'avons trouvé.

Je crois avoir assez bien mis le lecteur sur la voie, pour que de lui-même il soit en état de suivre Newton dans la recherche de diviseurs plus compliqués. J'avais fait encore plusieurs autres notes sur ce sujet, mais je les supprime; elles me paraissent surabondantes.

NOTE (7), *pour la page 63. Tome I.*

Les deux derniers exemples, $\sqrt[4]{a^3 x}$, et $\sqrt[6]{a^7 x^5}$, ont besoin de deux mots d'éclaircissemens. On sait qu'il est indifférent d'écrire $\sqrt{a}$, ou bien $\sqrt[2]{a^1}$, ou bien $a^{\frac{1}{2}}$. Donc le premier exemple, $\sqrt[4]{a^3 x}$, peut s'écrire en cette manière, $a^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{4}}$, ou bien $a^{\frac{2}{4}} a^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}}$, ou $a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}}$, ou $\sqrt{a} \times \sqrt[4]{ax}$. Telle est la première forme que Newton donne à cette quantité. Si l'on multiplie et qu'on divise par $a^{\frac{1}{4}}$ la quantité $a^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{4}}$, elle deviendra, $\frac{a^{\frac{4}{4}} x^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}$, ou bien, $a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}$, et c'est la seconde forme que Newton lui donne.

Quant au dernier exemple, $\sqrt[6]{a^7 x^5}$, il devient sans difficulté, $a \sqrt[6]{a x^5}$, ou bien $a \sqrt[6]{\frac{a x^6}{x}} = a x \sqrt[6]{\frac{a}{x}}$. Première forme que l'auteur lui donne; et il dit qu'on peut encore lui donner celle-ci, $\sqrt{ax} \times \sqrt[3]{a^2 x}$. En effet, la quantité donnée étant, $\sqrt[6]{a^7 x^5}$, peut s'écrire ainsi, $a^{\frac{7}{6}} \times x^{\frac{5}{6}}$, ou bien $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$, qui devient, en

Digitized by Google

remettant les signes, $\sqrt{ax} \times \sqrt[3]{a^2x}$. Et c'est la forme que Newton demande.

NOTE (8), *pour la page 65. Tome I.*

Lorsqu'il s'agit de trouver la racine d'une quantité en partie commensurable et en partie incommensurable, on peut supposer que $g + 2\sqrt{gh} + h$, représente en général cette quantité, dont la racine est $\sqrt{g} + \sqrt{h}$. La partie rationnelle est représentée par $g + h$, et l'incommensurable par $2\sqrt{gh}$. Soit donc l'indéterminée..... $A = g + h$, et $B = 2\sqrt{gh}$. Nous aurons, $A^2 = g^2 + 2gh + h^2$, et $B^2 = 4gh$. Je commence d'abord par démontrer ce qu'annonce l'auteur, que A est la partie la plus grande de la quantité proposée, et B la plus petite. Or, si A est plus grand que B, A^2 sera aussi plus grand que B^2; donc il faut qu'en général on ait, $A^2 - B^2$ égal à une quantitité positive, et c'est ce qui a lieu effectivement, car $A^2 - B^2 = g^2 - 2gh + h^2 = (g - h)^2$, quantité toujours positive; donc enfin $A > B$, comme le dit Newton. Maintenant, si nous ajoutons les deux équations $\sqrt{A^2 - B^2} = g - h$, et.. $A = g + h$, nous aurons, $A + \sqrt{A^2 - B^2} = 2g$, ou bien..... $g = \frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}$; et en retranchant l'une de l'autre, il viendra, $A - \sqrt{A^2 - B^2} = 2h$, ou bien $h = \frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}$. Ainsi, pour que l'extraction de la racine soit possible, il faut évidemment que g et h soient des quantités rationnelles, et que par conséquent

Digitized by Google

$A^2 - B^2$ soit un quarré parfait; s'il ne l'est pas, il est inutile de chercher la racine, on ne la trouverait pas, à moins que les deux parties de la quantité dont on cherche la racine ne soient incommensurables.

NOTE (9), *pour la page* 67. *Tome I.*

Voici comment on démontre la méthode abrégée que Newton enseigne en cet endroit. Soit la quantité proposée $g + h + k + 2\sqrt{gh} + 2\sqrt{gk} + 2\sqrt{hk}$, dont la racine est, $\sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{k}$. Il est clair que je connaîtrai cette racine, si je parviens à connaître chacune de ses parties, $\sqrt{g}$, $\sqrt{h}$, $\sqrt{k}$. Or, multiplions l'un par l'autre les deux radicaux $2\sqrt{gh}$ et $2\sqrt{gk}$, et divisons le produit par l'autre radical $2\sqrt{hk}$, et nous aurons..... $\frac{4\sqrt{g^2hk}}{2\sqrt{hk}} = 2g \times \frac{\sqrt{hk}}{\sqrt{hk}} = 2g$. Et en doublant, et tirant la racine du double, nous aurons, $2\sqrt{g}$, qui est précisément le double de $\sqrt{g}$, comme Newton l'a annoncé. On trouverait de la même manière le double de $\sqrt{h}$ et le double de $\sqrt{k}$. Donc, etc.

NOTE (10), *pour la page* 68. *Tome I.*

Avant de chercher à expliquer les principes sur lesquels est fondée la règle que Newton donne ici, j'observe qu'il ne s'agira que des racines d'un degré impair; car si on voulait prendre la racine paire d'un binome, il est évident qu'on en pourrait tirer la racine quarrée par les règles précédentes qui ont été expliquées dans les notes

Digitized by Google

8 et 9, et qu'en répétant cette opération autant de fois qu'il est nécessaire, on arriverait toujours finalement à n'avoir à extraire qu'une simple racine quarrée, ou une racine d'un degré impair, selon que l'exposant de la racine serait un nombre pairement pair, ou pairement impair; or, le premier cas se rapporte aux règles précédentes, et le deuxième, à celle que nous allons expliquer. Il suffit donc de supposer que l'exposant c de la racine dont il s'agit, représente des nombres impairs.

Je passe à l'explication de la règle. Le binome dont il faut extraire la racine c, étant $A \pm B$, Newton cherche un nombre n, et introduit un autre nombre indéterminé Q, tels qu'il obtienne l'équation $A^2 Q - B^2 Q = n^c$, (n étant le plus petit nombre dont la puissance c soit divisible, sans reste, par $A^2 - B^2$), et de cette manière il trouve la racine c du binome $(A + B)\sqrt{Q}$, qui, étant divisée par $\sqrt[c]{\sqrt{Q}}$, ou $\sqrt[2c]{Q}$, donne pour quotient, $\sqrt[c]{A+B}$, qui est précisément la racine cherchée. Pour entendre la raison de tout cela, il faut d'abord démontrer le théorême suivant.

THÉORÊME. Si on élève la somme et la différence de deux quantités m et p à une puissance c, et qu'on appelle A la somme des termes impairs, et B la somme des termes pairs, la différence des quarrés de A et de B sera égale à la différence des quarrés de m et de p, élevée à la puissance c. En effet $(m+p)^c = m^c + cm^{c-1}p + c.\frac{c-1}{2}m^{c-2}p^2 + c.\frac{c-1}{2}.\frac{c-2}{3}m^{c-3}p^3 + \text{etc.} = A + B$ (en faisant A égal à la somme des premier, troisième, cinquième, etc. termes, et B à la somme des deuxième, quatrième, sixième, etc. termes). On aura de même $(m-p)^c = m^c - cm^{c-1}p + c.\frac{c-1}{2}m^{c-2}p^2 - c.\frac{c-1}{2}.\frac{c-2}{3}m^{c-3}p^3 + \text{etc.} =$

Digitized by Google

$A - B$. Donc $(m+p)^c \times (m-p)^c = (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$, ou bien $\big((m+p)(m-p)\big)^c = A^2 - B^2$, ou enfin $(m^2 - p^2)^c = A^2 - B^2$. C. Q. F. D.

Donc, lorsque $A^2 - B^2$ est une puissance parfaite du degré c, on est sûr de trouver la racine c du binome $A \pm B$, puisqu'on a $A \pm B = (m \pm p)^c$, et il est inutile d'introduire l'indéterminée Q dans la recherche de la racine, ou si on l'introduit, on la trouvera égale à 1, dans le cas toutefois où le premier terme du binome est rationnel. Mais il est rare que $A^2 - B^2$ soit une puissance parfaite du degré c, et c'est pour l'y amener que Newton la multiplie par une indéterminée Q, afin que son produit $(A^2 - B^2) \times Q$ égale une quantité n^c, qui est une puissance parfaite du degré c. C'est ainsi que dans son second exemple, où il s'agit de tirer la racine cubique d'un binome, il trouve $A^2 - B^2 = 250$; or 250 n'est point un cube parfait, mais en le multipliant par $Q = 4$, le produit est $1000 = 10^3$. Ainsi ce n'est plus de $A \pm B$, mais de $(A \pm B)\sqrt{Q}$ qu'il faut chercher la racine c.

Maintenant, supposons que $x\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$ exprime la racine cherchée du binome $A\sqrt{Q} + B\sqrt{Q}$, et que $x\sqrt{y}$ représente la plus grande partie de la racine; il est évident, d'après le théorême qui vient d'être démontré, que $(x^2y - z)^c = (A^2 - B^2)\,Q = n^c$. Donc $x^2y - z = n$. Et de cette équation l'on tire la proportion continue décroissante, $x\sqrt{y} + \sqrt{z} : \sqrt{n} :: \sqrt{n} : x\sqrt{y} - \sqrt{z}$. Mais on peut aussi faire la proportion, $r : \sqrt{n} :: \sqrt{n} : \frac{n}{r}$. Et

Digitized by Google

comme $r > \sqrt{n}$ (*), on a aussi, $\sqrt{n} > \frac{n}{r}$. Or, nos deux proportions ayant les mêmes termes moyens, il s'en suit que si le premier terme $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$ de la première est plus grand que r, premier terme de la seconde, le dernier terme $\frac{n}{r}$ de la seconde sera plus grand que $x\sqrt{y} - \sqrt{z}$, dernier terme de la première; et ce serait précisément le contraire, si le premier terme de la première était plus petit que le premier terme de la seconde. (**). Donc si $x\sqrt{y} + \sqrt{z} > r$, on aura aussi, $\frac{n}{r} > x\sqrt{y} - \sqrt{z}$. Je remarque, pour la première inégalité, que r étant la racine la plus approchée en nombres entiers du binome $(A+B)\sqrt{Q}$, il ne peut pas différer d'une unité de $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$, qui en est supposée

---

(*) Car $r = \sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}}$, à moins d'une unité près; et ..... $\sqrt{n} = \sqrt[2c]{(A^2 - B^2)\,Q}$. Or $\sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}} > \sqrt[2c]{(A^2 - B^2)\,Q}$, ou $\left((A+B)\sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{c}} > \left((A^2 - B^2)\,Q\right)^{\frac{1}{2c}}$, ou bien..... $\left((A+B)\sqrt{Q}\right)^{\frac{2}{2c}} > \left((A^2 - B^2)\,Q\right)^{\frac{1}{2c}}$, ou bien..... $(A+B)^2 \times Q > (A^2 - B^2)\,Q$, ou encore $(A+B)^2 > A^2 - B^2$, ou bien $A^2 + 2AB + B^2 > A^2 - B^2$, ce qui est de la dernière évidence. Donc enfin, $r > \sqrt{n}$. C. Q. F. D.

(**) En effet, si on a deux proportions continues décroissantes, $a : b :: b : c$, et $g : b :: b : f$, et qu'elles ayent le même moyen terme, je dis que si $a > g$, on aura, $f > c$. Car, à cause des deux proportions, on a l'équation, $ac = fg$, d'où $a : g :: f : c$. Mais, par hypothèse, $a > g$; donc $f > c$. Et réciproquement si $a < g$, on aura aussi, $f < c$, tout cela est bien évident.

Digitized by Google

la racine exacte. Donc $1 > x\sqrt{y} + \sqrt{z} - r$. Quant à la seconde inégalité, $\frac{n}{r} > x\sqrt{y} - \sqrt{z}$, elle donne, $0 > x\sqrt{y} - \sqrt{z} - \frac{n}{r}$. Et en ajoutant ces deux inégalités, on a, $1 + 0 > 2x\sqrt{y} - r - \frac{n}{r}$, ou bien $\frac{1}{2} > x\sqrt{y} - \left(\frac{r + \frac{n}{r}}{2}\right)$. Or, $x\sqrt{y}$ étant la plus grande partie de la racine, on voit qu'elle ne diffère pas de $\frac{1}{2}$ de la quantité $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$, ou, si l'on veut, que $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ exprime, à moins de $\frac{1}{2}$ près, la plus grande partie de la racine.

Nous avons deux cas à examiner.

1°. Lorsque $A\sqrt{Q}$ est rationnel, $x\sqrt{y}$, qui représente la plus grande partie de la racine, est aussi rationnel, et alors le radical $\sqrt{y}$, que Newton appelle s, devient égal à 1, et on a.....

$x = \frac{r + \frac{n}{r}}{2} = \frac{r + \frac{n}{r}}{2s} = t = ts$, à moins de $\frac{1}{2}$ près.

2°. Lorsque $A\sqrt{Q}$ est irrationnel, $x\sqrt{y}$ est aussi un nombre irrationnel; et si l'on extrait de $A\sqrt{Q}$ tout ce qu'il contient de rationnel, le radical qui restera, ou $\sqrt{y}$, étant ce que Newton appelle s, on a, $\sqrt{y} = s$. Mais nous avons vu plus haut qu'il ne s'en fallait pas de $\frac{1}{2}$ que $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ ne fût égal à $x\sqrt{y}$; donc si l'on divise chacune de ces quantités par s, ou par $\sqrt{y}$, nombre qui est plus grand que l'unité (parce qu'on n'opère que sur des quantités qui ne contiennent point de fractions, puisqu'on a dû les faire disparaître préalablement), les quotiens auront encore une différence

plus

Digitized by Google

plus petite. Donc $\frac{s\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ et $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, ou bien x et $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ont entre elles une différence bien plus petite que $\frac{1}{2}$. Donc x est un nombre entier extrêmement approchant de la valeur de $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$. Or Newton a appelé t cette valeur approchée en nombres entiers de $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$; donc $t=x$. Mais nous avons aussi $s=\sqrt{y}$, donc $ts=x\sqrt{y}$, et $t^2s^2=x^2y$. Mais nous avons trouvé plus haut l'équation $x^2y-z=n$, d'où $x^2y-n=z$, et en mettant pour x^2y sa valeur t^2s^2, on a, $t^2s^2-n=z$, ou bien $\sqrt{z}=\pm\sqrt{t^2s^2-n}$. Donc, en ajoutant pour chacun des deux cas que nous venons d'examiner, la valeur de $\sqrt{z}$, ou la plus petite partie de la racine à l'expression de la plus grande, déjà trouvée, nous aurons, $ts\pm\sqrt{t^2s^2-n}$, ou bien $x\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}}=ts\pm\sqrt{t^2s^2-n}$. Ou bien $\sqrt[c]{A+B}\times\sqrt[2c]{Q}=ts\pm\sqrt{t^2s^2-n}$. Ou enfin.....: $\sqrt[c]{A+B}=\frac{ts\pm\sqrt{t^2s^2-n}}{\sqrt[2c]{Q}}$. C. Q. F. D.

La Note (11) ayant été oubliée dans l'impression, j'ai été obligé de conserver aux autres les numéros qui les désignaient.

NOTE (12), *pour la page* 84. *Tome I.*

L'élimination est en général une opération très-pénible par la longueur des calculs, et qui demande beaucoup de précautions pour ne pas faire monter l'équation finale plus haut qu'elle ne doit. Je vais faire voir dans cette note-ci et dans la suivante, par quelle route Newton a pu arriver à ses équations finales.

Les deux équations proposées étant $ax^2+bx+c=0$, et

Digitized by Google

$fx^2 + gx + h = 0$. Je multiplie la première par f, et la seconde par a, et je retranche le second produit du premier, ce qui donne pour reste $(bf - ag)x + cf - ah = 0$, d'où l'on tire..... $x = \frac{ah - cf}{bf - ag}$. Pour trouver une seconde valeur de x, je reprends les deux équations proposées, je multiplie la première par h, et la seconde par c, et je retranche le second produit du premier, et j'ai pour reste $(ah - fc)x^2 + (bh - cg)x = 0$, et en divisant tout par x, il vient $(ah - fc)x + (bh - cg) = 0$, d'où l'on tire, $x = \frac{cg - bh}{ah - fc}$. Et en comparant cette seconde valeur de x à la première, nous aurons, $\frac{cg - bh}{ah - fc} = \frac{ah - fc}{bf - ag}$, équation où il n'y a plus d'x. Et en réduisant les deux membres au même dénominateur, ensuite multipliant tout par $(ah - fc)(bf - ag)$, nous aurons pour résultat $(cg - bh)(bf - ag) = (ah - fc)^2$. Et en faisant les opérations indiquées, et transportant tous les termes dans un seul membre, il viendra, $a^2h^2 - abgh - 2ahcf + b^2fh - bcgf + acg^2 + c^2f^2 = 0$. Les trois premiers termes ayant pour facteur commun ah, peuvent s'écrire ainsi, $(ah - bg - 2cf)ah$. Le quatrième et le cinquième ayant pour facteur bf, peuvent s'écrire ainsi, $(bh - cg) \times bf$. Et enfin le sixième et le septième peuvent se décomposer en cette manière, $(ag^2 + cf^2) \times c$. Rassemblant toutes ces parties, nous aurons $(ah - bg - 2cf)ah + (bh - cg)bf + (ag^2 + cf^2)c = 0$. Ce qui est le résultat de Newton.

NOTE (13), *pour la page* 85. *Tome I.*

Les deux équations proposées étant $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, et $fx^2 + gx + h = 0$, je multiplie la première par h, et la seconde par d, et je retranche le second produit du premier, le reste est, $ahx^3 + (bh - df)x^2 + (ch - dg)x = 0$, ou $ahx^2 + (bh - df)x +$

Digitized by Google

$ch - dg = 0$, en divisant tout par x. Pour abréger, je fais $ah = A$, $bh - df = B$, $ch - dg = C$, et en substituant, l'équation devient, $Ax^2 + Bx + C = 0$, que je traite de nouveau avec l'équation $fx^2 + gx + h = 0$; et comme elles sont maintenant du même degré, j'en obtiendrai deux valeurs de x par les procédés de la première règle, indiqués dans la note précédente. Je multiplie donc la première équation $Ax^2 + Bx + C = 0$ par f, et la seconde, $fx^2 + gx + h = 0$ par A, et retranchant le second produit du premier, le reste est, $(Bf - Ag)x + Cf - Ah = 0$, d'où je tire, $x = \frac{Ah - Cf}{Bf - Ag}$. Ensuite je multiplie encore la première par h, et la seconde par C, et je retranche le second produit du premier, je divise tout par x, et j'ai, $x = \frac{Cg - Bh}{Ah - Cf}$. Je compare cette seconde valeur de x à la première, et il vient, $\frac{Cg - Bh}{Ah - Cf} = \frac{Ah - Cf}{Bf - Ag}$, d'où l'on tire $(Cg - Bh)(Bf - Ag) = (Ah - Cf)^2$, qui devient, après avoir exécuté les opérations indiquées, et transporté tous les termes d'un même côté, $A^2h^2 - 2ACfh + C^2f^2 - BCfg + B^2fh + ACg^2 - ABgh = 0$. Maintenant si on remet, à la place de A, B, C, leurs valeurs respectives ah, $bh - df$, $ch - dg$, toutes les multiplications et réductions faites, il viendra, $a^2h^3 - abgh^2 - 2acfh^2 + b^2fh^2 - bcfgh - 2bdf^2h + acg^2h - adg^3 + c^2f^2h - cdf^2g + d^2f^3 + bdfg^2 + 3adfgh = 0$. Les 1er. 2e. et 3e. termes de cette équation peuvent se décomposer ainsi.....
$(ah - bg - 2cf) \times ah^2$; les 4e. 5e. et 6e. ainsi.....
$(bh - cg - 2df) \times bfh$; les 7e. 8e. 9e. et 10e. ainsi.....
$(ch - dg)(ag^2 + cf^2)$; les 11e. 12e. et 13e. ainsi.....
$(3agh + bg^2 + df^2) \times df$. Toutes ces différentes quantités étant

Digitized by Google

rassemblées, donnent, $(ah - bg - 2cf) \times ah^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $(bh - cg - 2df) \times bfh + (ch - dg)(ag^2 + cf^2) + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $(3agh + bg^2 + df^2) \times df = 0$. Résultat absolument le même que celui de Newton.

Pour parvenir aux formules qui composent les troisième et quatrième règles de Newton, il faudra procéder d'une manière entièrement semblable.

NOTE (14), *pour la page* 87. *Tome I.*

Newton propose de faire évanouir les incommensurables de l'équation, $\sqrt{ay} - \sqrt{a^2 - ay} = 2a + \sqrt[3]{ay^2}$, et pour cela, il fait, $t = \sqrt{ay}$, $v = \sqrt{a^2 - ay}$, et $x = \sqrt[3]{ay^2}$. Donc, en substituant t, v et x au lieu des quantités qu'elles représentent, la proposée deviendra, $t - v = 2a + x$; c'est de cette équation qu'il faut successivement éliminer les quantités x, t, v, pour n'avoir plus qu'une équation rationnelle en y et en a. J'ai d'abord $x = t - v - 2a$; ou $x = t - r$ (en faisant $-v - 2a = -r$). Donc (A) x^3, ou $ay^2 = t^3 - 3t^2r + 3tr^2 - r^3$. Et puisque $t = \sqrt{ay}$, on a..... $t^2 = ay$ et $t^3 = tay$. Et en substituant pour t^3 et t^2 leurs valeurs dans l'équation (A), elle devient (B) $ay^2 = tay - 3ayr + 3tr^2 - r^3$. Nous avons fait $-r = -v - 2a$, donc $r^2 = v^2 + 4av + 4a^2$; et en mettant pour v^2 sa valeur $a^2 - ay$, on aura, en réduisant, $r^2 = 5a^2 + 4av - ay$. Ensuite, si dans l'équation, $-r^3 = -v^3 - 6av^2 - 12a^2v - 8a^3$, nous mettons encore au lieu de v^2 sa valeur $a^2 - ay$, et au lieu de v^3 aussi sa valeur $a^2v - avy$, nous aurons, $-r^3 = -14a^3 - 13a^2v + avy + 6a^2y$,

Digitized by Google

toute réduction faite. Substituant maintenant dans l'équation (B) à la place de $-r$, de $+r^2$ et de $-r^3$ leurs valeurs, elle deviendra, $ay^2 = tay + 3ay(-v-2a) + 3t(5a^2+4av-ay) + (-14a^3-13a^2v+avy+6a^2y)$. Faisant les multiplications indiquées, transposant dans le premier membre tous les termes affectés de t, et dégageant la valeur de t, on aura, $t = \frac{ay^2+14a^3+13a^2v+2avy}{15a^2-2ay+12av}$. Et en effaçant a au numérateur et au dénominateur, $t = \frac{y^2+14a^2+13av+2vy}{15a-2y+12v}$. Et en élevant tout au quarré, il vient, t^2 ou $ay = \left(\frac{y^2+14a^2+13av+2vy}{15a-2y+12v}\right)^2$. Après avoir développé le quarré indiqué, fait évanouir le dénominateur, substitué à la place de v^2 sa valeur $a^2 - ay$, opéré toutes les réductions, et transporté dans le premier membre tous les termes affectés de v, on aura, en dégageant v, $v = \frac{y^4-8ay^3+184a^2y^2-486a^3y+365a^4}{-4y^3-74ay^2+304a^2y-364a^3}$, et en élevant chaque membre au quarré, v^2 ou..... $a^2 - ay = \left(\frac{y^4-8ay^3+184a^2y^2-486a^3y+365a^4}{-4y^3-74ay^2+304a^2y-364a^3)}\right)^2$. On voit que cette équation ne contenant plus que des valeurs rationnelles, si l'on dévelope le quarré, qu'on fasse évanouir la fraction, qu'on réduise, et transpose tous les termes dans un seul membre, on aura, $y^8 + 1008a^2y^6 - 1464a^3y^5 - 2762a^4y^4 + 3680a^5y^3 + 2916a^6y^2 - 972a^7y + 729a^8 = 0$.

NOTE (15), *pour la page 99. Tome I.*

On pourrait encore résoudre ce problême d'une autre manière, en disant : puisque l'agent A fait l'ouvrage en trois semaines, il est évident qu'il n'en fait que le $\frac{1}{3}$ en une semaine, et la septième partie d'un tiers ou $\frac{1}{21}$ en un jour. On trouvera, par le même raisonnement, que l'agent B fait en un jour $\frac{3}{16}$ de l'ouvrage

Digitized by Google

demandé, et l'agent C, $\frac{1}{84}$. Il faut voir maintenant en combien de jours ces trois agens réunis feront l'ouvrage entier. Soit x ce nombre de jours, nous aurons, $x\left(\frac{1}{21}+\frac{3}{16}+\frac{1}{84}\right)=1$, ou bien $\frac{x}{3}+\frac{3x}{8}+\frac{5x}{12}=7$. D'où l'on tire $x=6\frac{2}{9}$ de jours. Or $\frac{2}{9}$ de jour égalent 5 heures et $\frac{1}{3}$. Donc le temps employé par les trois agens réunis pour faire l'ouvrage, sera de 6 jours 5 $\frac{1}{3}$ heures.

NOTE (16), *pour la page* 103. *Tome I.*

Ce problême a besoin de quelques éclaircissemens. Newton dit d'abord que la pesanteur spécifique de l'or est à celle de l'argent :: 19 : $\frac{31}{3}$. Effectivement un pouce cube d'or pèse 12 $\frac{2}{3}$ onces ou $\frac{38}{3}$ d'once, et un pouce cube d'argent pèse 6 $\frac{8}{9}$ onces, ou $\frac{62}{9}$ d'once. Or $\frac{38}{3}$ et $\frac{62}{9}$ sont dans le même rapport que 19 et $\frac{31}{3}$; et de plus, il suppose que la pesanteur spécifique de la couronne est comme 17; il dit ensuite que le volume de l'or est à celui de l'argent dans la couronne :: 10 : 3 :: $e-b : a-e :: A : B$. En voici la preuve. Le volume d'or A est à celui de l'argent B :: $e-b : a-e$, et en substituant dans cettte proportion, à la place de a, b, e leurs valeurs respectives 19, $\frac{31}{3}$ et 17, on aura..... $17-\frac{31}{3} : 19-17 :: A : B$, ou $\frac{51-31}{3} : 19-17 :: A : B$, ou $\frac{20}{3} : 2 :: A : B$, ou $20 : 6 :: A : B$, ou enfin $10 : 3 :: A : B$. Donc on a, $10 : 3 :: e-b :: a-e :: A : B$. Il dit en troisième lieu, que le poids de l'or est au poids de l'argent dans cette même couronne :: $190 : 31 :: 19\times 10 : \frac{31}{3}\times 3 :: a(e-b) : b(a-e)$. En effet, il a nommé la pesanteur spécifique de l'or a et celle de l'argent b, donc $19 : \frac{31}{3} :: a : b$; et en multipliant chaque terme de cette proportion par le terme correspondant de celle-ci, $10 : 3 :: e-b : a-e$, il

Digitized by Google

en résulte cette nouvelle proportion, $190 : 31 :: a(e-b) : b(a-e)$, dont le premier et le second termes expriment en valeurs numériques, le rapport des poids respectifs de l'or et de l'argent de la couronne; car 190 et 31 sont les produits terme à terme de 10 et 3, rapport des volumes, par 19 et $\frac{31}{3}$, rapport des pesanteurs spécifiques, ce qui donne le rapport des masses ou des poids absolus. Et les deux derniers termes $a(e-b)$ et $b(a-e)$ sont les mêmes poids exprimés algébriquement; enfin il dit que le poids de la couronne est au poids de l'argent qu'elle contient :: 221 : 31. Ce qui est facile à voir, puisque le poids de la couronne est au poids de l'argent, :: $190+31 : 31$ ou :: $221 : 31$.

Mais remarquez que dans tout cela on ne connaît que les rapports des volumes et des masses, mais nullement les volumes ou les masses mêmes; pour les connaître, il faudrait que le volume de la couronne fût connu.

NOTE (17), *pour la page* 113. *Tome I.*

Si l'on doit à la fin de l'année une somme a, et qu'on l'acquitte au commencement, il est clair que l'on devra payer une somme moins forte, puisqu'il faut en déduire les intérêts des intérêts. Supposons que chaque livre de la somme a doive se réduire à x, à combien se réduira la somme elle-même? On le trouvera par cette proportion, $1 : x :: a : ax$. C'est donc ax qu'il faut payer au commencement de l'année, au lieu de a qu'on aurait payé à la fin. Supposons que l'on veuille avancer le paiement de deux ans; alors il faut chercher à quoi doit se réduire une somme a que l'on ne doit qu'après deux années, si l'on veut s'acquitter au commencement

Digitized by Google

de la première; mais j'arriverai au même résultat, si au lieu de regarder a comme la somme qu'il faudrait payer au bout de deux ans, je regarde ax comme celle que l'on doit au bout d'une année, et que je cherche à quoi elle doit se réduire si on la paie au commencement. Je trouverai donc sur-le-champ la somme réduite par cette proportion, $1 : x :: ax : ax^2$. Si le paiement devait être avancé de trois ans, je regarderais ax^2 comme la somme qu'il faudrait payer au bout de l'année, et ax^3 serait celle qu'il faudrait payer au commencement; et ainsi de suite. Et en rassemblant toutes ces sommes, on trouverait l'équation finale. Par exemple, si l'on ne doit une somme a qu'au bout de cinq ans, et qu'on s'en acquitte au commencement de la première avec une somme c, on aura, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = \frac{c}{a}$, qui est l'équation de Newton.

NOTE (18), *pour la page* 115. *Tome I.*

Pour avoir la valeur de x par le moyen de l'équation..... $\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^4}{x^2} = b^2$, je fais évanouir le diviseur x^2, ce qui me donne $\frac{1}{4}a^2x^2 + b^4 = b^2x^2$, ou bien $(\frac{1}{4}a^2 - b^2)x^2 = -b^4$, ou bien $(b^2 - \frac{1}{4}a^2)x^2 = b^4$, ou bien $(b + \frac{1}{2}a)(b - \frac{1}{2}a)x^2 = b^4$. Je cherche une moyenne proportionnelle k, entre $b + \frac{1}{2}a$ et $b - \frac{1}{2}a$, et l'équation devient $k^2x^2 = b^4$, ou $kx = b^2$, ou enfin $k : b :: b : x$.

NOTE (19), *pour la page* 116. *Tome I.*

Pour tirer de l'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{b^4}{c^2} = b^2$ la valeur linéaire de x, je la mets d'abord sous cette forme $x^2 = 4b^2 - \frac{4b^4}{c^2}$, ou bien $x^2 = \frac{4b^2c^2 - 4b^4}{c^2} = \frac{4b^2(c^2 - b^2)}{c^2}$, et enfin $x^2 = \frac{4b^2}{c^2}(c+b)(c-b)$.

Je

Digitized by Google

Je cherche une moyenne proportionnelle k entre $c + b$ et $c - b$, et l'équation devient $x^2 = \frac{4b^2k^2}{c^2}$, ou $x = \frac{2bk}{c}$; d'où $c : 2b :: k : x$.

NOTE (20), *pour la page* 116. *Tome I.*

L'équation $\frac{1}{4}a^2 + \frac{x^4}{c^2} = x^2$, devient, en réduisant et ordonnant, $x^4 - c^2x^2 = -\frac{1}{4}a^2c^2$. Cette équation du quatrième degré se résout comme celles du second, et donne $x^2 = \frac{c^2 \pm c\sqrt{c^2 - a^2}}{2}$, ou bien $x^2 = \frac{c}{2}(c \pm \sqrt{c^2 - a^2})$. Et enfin..... $x = \pm\sqrt{\frac{c}{2}(c \pm \sqrt{c^2 - a^2})}$. On voit donc que x a quatre valeurs, $x = +\sqrt{\frac{c}{2}(c + \sqrt{c^2 - a^2})}$, ... $x = +\sqrt{\frac{c}{2}(c - \sqrt{c^2 - a^2})}$, $x = -\sqrt{\frac{c}{2}(c + \sqrt{c^2 - a^2})}$, $x = -\sqrt{\frac{c}{2}(c - \sqrt{c^2 - a^2})}$, et de ces quatre racines, la première et la troisième sont égales et ne diffèrent que par leur signe; il en est de même de la seconde et de la quatrième. En effet, si au lieu de chercher le côté CB, ou le côté BD, nous avions cherché AC ou AD, nous serions arrivés par les mêmes moyens, à la même équation finale $\frac{1}{4}a^2 + \frac{x^4}{c^2} = x^2$; donc cette équation doit nous donner les valeurs des quatre lignes CB, BD, AC, AD. Et l'on voit de plus que CB et BD sont égales en grandeur, et ne diffèrent qu'en ce que l'une étant positive, l'autre est nécessairement négative : il en est de même de AC et de AD; donc l'équation a dû renfermer toutes ces conditions; et nous avons vu

Digitized by Google

qu'elle les renfermait effectivement. Et si on suppose que la base CD du triangle soit égale au diamètre AB, alors on voit que les quatre lignes CB, AC, BD, AD sont égales, et que les deux premières étant positives, les deux autres sont négatives; et c'est ce que l'équation nous apprendra encore. Car puisque $CD = AB$, on a $c = a$, donc $\sqrt{c^2 - a^2} = 0$, donc l'équation..... $x = \pm \sqrt{\frac{c}{2}(c \pm \sqrt{c^2 - a^2})}$ se réduit à $x = \pm \frac{c}{\sqrt{2}} \pm 0$.

NOTE (21), *pour la page* 140. *Tome I.*

Effectivement la somme des côtés est, ... $\frac{a - x + y}{2} + \frac{a - x - y}{2} = a - x$, et la base est x. Donc si de la somme des côtés $a - x$, on retranche la base x, on aura $a - 2x$, excès de la somme des côtés sur la base; et cette quantité devient $\frac{ab}{a+b}$, en substituant pour x sa valeur $\frac{a^2}{2a+2b}$.

NOTE (22), *pour la page* 141. *Tome I.*

L'équation $-x^4 - 2bx^3 + 2b^3x + b^4 = a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2$, devient en transposant tous les termes et ordonnant, ... $x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 \begin{matrix} -2ab^2x - b^4 \\ -2b^3x + a^2b^2 \end{matrix} = 0$, quantité bien différente de celle que Newton donne, mais si l'on ajoute à chacun de ses membres $\begin{matrix} 2b^2 \\ +2ab \end{matrix}\left\{ x^2 \begin{matrix} +4b^3 \\ +4ab^2 \end{matrix} \right\} x \begin{matrix} +2b^4 \\ +2ab^3 \end{matrix}$, alors elle devient

$$x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} +3b^2 \\ +2ab \end{matrix}\left\{ x^2 \begin{matrix} +2b^3 \\ +2ab^2 \end{matrix} \right\} x \begin{matrix} +b^4 \\ +2ab^3 \\ +a^2b^2 \end{matrix} = \begin{matrix} 2b^2 \\ +2ab \end{matrix}\left\{ x^2 \begin{matrix} +4b^3 \\ +4ab^2 \end{matrix} \right\} x \begin{matrix} +2b^4 \\ +2ab^3 \end{matrix}, \ldots$$

dont le premier membre est le quarré parfait du quatrinome.....

Digitized by Google

$x^2 + bx + b^2 + ab$, et le second, le quarré de.....
$(x+b)\sqrt{2ab+2b^2}$.

Quant à la manière dont il faut s'y prendre pour trouver les quantités qu'on doit ajouter à chaque membre de l'équation, afin de rendre l'extraction possible, on la trouvera dans le chapitre *de la réduction des équations par les diviseurs incommensurables*; on trouvera même à la fin de la note (73), l'opération détaillée pour réduire l'équation de cet article.

NOTE (23), *pour la page* 141. *Tome I.*

Puisque $AB = \frac{1}{2}b$, $CB = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}AB$, ou $CD = \frac{1}{4}b$, il s'en suit que $AC = \frac{b+a}{2}$. Et une moyenne proportionnelle AE entre b et AC sera $AE = \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab}$, et comme $CE = AC - AE$, ou bien $CE = \frac{b+a}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab}$; et que $DE = DC - CE$, il s'en suit que $DE = \frac{1}{4}b - \left(\frac{b+a}{2}\right) + \ldots$ $\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab}$, ou bien $DE = -\frac{1}{4}b - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab}$; d'où il résulte, qu'une moyenne proportionnelle EF entre b et DE donnera $EF = \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}$. Ensuite $BE = BC - CE$, ou bien $BE = \frac{1}{2}a - \left(\frac{b+a}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab}$, ce qui se réduit à $BE = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab}$. Maintenant si nous ajoutons EF à BE, et qu'ensuite nous l'en retranchions, nous aurons dans le premier cas.....

$$BE + EF = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} + \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab};$$

c'est la première valeur de x. Ensuite.....

Digitized by Google

$BE - EF = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}$, et c'est la seconde valeur de x. Or il est clair que les deux côtés AC et BC du triangle, se déterminant par les mêmes loix, on arrivera toujours à la même équation, quel que soit celui des deux que l'on cherche ; donc la même équation doit donner la valeur de chacun d'eux ; il est certain par conséquent que la première valeur de x est celle du plus grand côté, et que la seconde est celle du plus petit.

NOTE (24), *pour la page* 142. *Tome I.*

Newton fait $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Ensuite il élève en C la perpendiculaire $CD = b$, et il prolonge CD jusqu'en E, afin d'avoir... $DE = AD$. Mais $AD = \sqrt{a^2 + b^2}$, donc aussi $DE = \sqrt{a^2 + b^2}$, donc $CE = DE - CD = -b + \sqrt{a^2 + b^2}$. Ensuite il prend une moyenne proportionnelle géométrique CF entre b et CE, ce qui donne $CF = \sqrt{-b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}$. Du point F comme centre, et d'un rayon, $BC = \frac{1}{2}a$, il décrit un arc de cercle ; alors on voit que $CG = \sqrt{\overline{GF}^2 - \overline{CF}^2}$, ou bien ..... $CG = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}$, quantité qui est aussi égale à CH; donc $BC + CH$ ou $BH = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}$, et $BC - CG$ ou $BG = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}$. Donc $x = BH$, ou $x = BG$.

Digitized by Google

NOTE (25), *pour la page* 144. *Tome I.*

Voici le développement de cette construction; $b+a : R :: R : b-a$, donc $R = \sqrt{b^2 - a^2}$. Ensuite $R : S :: S : b - R$, donc..... $S = \sqrt{bR - R^2}$; enfin $\frac{1}{2}a + S : T :: T : \frac{1}{2}a - S$, donc..... $T = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - S^2}$. Substituons dans cette dernière équation, à la place de S, sa valeur, elle deviendra, $T = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bR + R^2}$; et si l'on remet encore dans cette dernière la valeur de R, elle deviendra, $T = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - a^2 - b\sqrt{b^2 - a^2}}$, qui se réduit à $T = \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2 - b\sqrt{b^2 - a^2}}$. Donc les deux valeurs de x sont, $x = \frac{1}{2}a + T$, et $x = \frac{1}{2}a - T$.

NOTE (26), *pour la page* 147. *Tome I.*

Pour trouver la proportion $AB : AC + BC :: AE : AC$, que fait Newton, le lecteur se rappellera que lorsqu'on partage un angle en deux parties égales, la ligne qui le partage coupe la base en deux segmens proportionnels aux côtés correspondans; ainsi on a, $BC : AC :: BE : EA$; ce qui donne, $BC + AC : AC :: BE + AE$ ou $BA : EA$, et en rendant les moyens extrêmes..... $AB : BC + AC :: AE : AC$.

NOTE (27), *page* 147. *Tome I.*

Ou plutôt ajoutez $\frac{1}{2}$ angle C avec l'angle CEA, et retranchez cette somme de deux angles droits, et le reste sera la valeur de l'angle A. Pour avoir l'angle B, ajoutez $\frac{1}{2}$ angle C avec l'angle CEB,

Digitized by Google

et retranchez cette somme de deux angles droits, et le reste sera la valeur de l'angle B.

NOTE (28), *pour la page* 147. *Tome I.*

Il est bien facile de prouver que $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$. D'abord $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$, ensuite $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$, et en retranchant la valeur de $\overline{BC}^2$ de celle de $\overline{AC}^2$, on a, $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$.

NOTE (29), *page* 148. *Tome I.*

Voici comment Newton arrive à l'équation $\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4a^2}$. $\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$ étant la différence de deux quarrés, peut se décomposer ainsi..... $(AC + AD)(AC - AD)$. Or il a trouvé $AD = \frac{1}{2}a + \frac{b^2 - c^2}{2a}$, ou bien $AD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$, et comme il a appelé AC, b, si nous substituons ces valeurs analytiques à la place de AC et de AD dans l'équation $\overline{DC}^2 = (AC + AD)(AC - AD)$, nous aurons, $\overline{DC}^2 = \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(b - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\right)$ ou..... $\overline{DC}^2 = \left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)$. Or, le premier facteur du second membre de cette équation est la même chose que $\frac{(a+b)^2 - c^2}{2a}$, et le second facteur est la même chose que... $\frac{c^2 - (a-b)^2}{2a}$. On voit donc qu'en considérant $a + b$ comme une seule quantité, et $a - b$ aussi comme une seule quantité, chacun

Digitized by Google

de ces deux facteurs est la différence de deux quarrés. On pourra donc écrire l'équation en cette manière.....

$\overline{DC}^2 = \left(\frac{(a+b)^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{c^2 - (a-b)^2}{2a}\right)$, ou bien.....

$\overline{DC}^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}$, formule qui est la même que celle de Newton.

NOTE (30), *pour la page* 148. *Tome I.*

Il est bien évident que l'angle ECD égale un demi-angle A, car (par const.) $AE = AC$, donc si de l'angle A on mène sur CE une perpendiculaire AK, les deux triangles DCE, KAE, qui ont chacun un angle droit, et l'angle commun E, sont semblables; donc l'angle DCE = l'angle $EAK = \frac{1}{2}$ angle A.

NOTE (31), *page* 148. *Tome I.*

Nous avons vu que.....

$\overline{DC}^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4a^2}$, et que.....

$DE = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2a}$. Cherchons une moyenne proportionnelle F, entre $c+a-b$, et $c-a+b$; alors $DE = \frac{F^2}{2a}$, et $\overline{DC}^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4a^2} \times F^2$. Cherchons encore une moyenne proportionnelle H, entre $a+b+c$, et $a+b-c$, nous aurons, $\overline{DC}^2 = \frac{H^2 \times F^2}{4a^2}$, ou bien $DC = \frac{H \times F}{2a}$, et $2a \times DC = H \times F$. D'un autre côté, $2a \times DE = F \times F$. Faisons des proportions avec ces deux équations. La première donne, $2a : F :: H : DC$, et la seconde, $2a : F :: F : DE$, donc $H : F :: DC : DE$, ou bien

Digitized by Google

une moyenne proportionnelle H, entre $a+b+c$, et $a+b-c$, est à une moyenne proportionnelle F, entre $c+a-b$, et $c-a+b$, comme DC est à DE, comme le rayon est à la tangente de la moitié de l'angle A, ou comme la cotangente de la moitié du même angle A est au rayon.

NOTE (32), *pour la page* 148. *Tome I.*

Nous avons vu, par le théorême quatrième, que..... $\overline{CE}^2 = \frac{b}{a}(c+a-b)(c-a+b)$. Maintenant, si de l'angle A nous abaissons une perpendiculaire sur CE, cette ligne CE sera coupée en deux parties égales (puisque dans le théorême second on a fait $AE = AC$), et une de ces parties sera le sinus de la moitié de l'angle A, ce qui nous fournit la proportion..... $CA : \frac{1}{2}CE :: R : \sin.\frac{A}{2}$; donc $\frac{1}{2}CE = \frac{CA \times \sin.\frac{1}{2}A}{R}$, ou bien.. $CE = \frac{2b \times \sin.\frac{1}{2}A}{R}$, et $\overline{CE}^2 = \frac{4b^2 \times (\sin.\frac{1}{2}A)^2}{R^2}$. Comparons maintenant cette seconde valeur de $\overline{CE}^2$ avec la première, et nous aurons, $\frac{4b^2 \times (\sin.\frac{1}{2}A)^2}{R^2} = \frac{b}{a}(c+a-b)(c-a+b)$; ou bien..... $4ab \times (\sin.\frac{1}{2}A)^2 = R^2(c+a-b)(c-a+b)$. Et en faisant une proportion, $2a \times 2b : (c+a-b)(c-a+b) :: R^2 : (\sin.\frac{1}{2}A)^2$. Et en cherchant une moyenne proportionnelle entre $2a$ et $2b$, et une autre entre $c+a-b$ et $c-a+b$, substituant les quarrés de ces deux moyennes dans la proportion, et prenant la racine quarrée de tous les termes, on aura la proportion énoncée dans la première partie du théorême cinquième,

NOTE

Digitized by Google

NOTE (33), *pour la page* 149. *Tome I.*

Cette seconde partie du théorême cinquième se tire de l'équation $4ab \times (\sin. \frac{1}{2}A)^2 = R^2(c+a-b)(c-a+b)$, que nous avons trouvée dans la note précédente. En effet, en divisant tout par $4ab$, il vient $(\sin. \frac{1}{2}A)^2 = R^2 \times \frac{(c+a-b)}{2a} \times \frac{(c-a+b)}{2b}$, d'où $1 : \left(\frac{c+a-b}{2a}\right)\left(\frac{c-a+b}{2b}\right) :: R^2 : (\sin. \frac{1}{2}A)^2$. Donc si on prend une moyenne proportionnelle entre $\frac{c+a-b}{2a}$ et $\frac{c-a+b}{2b}$, que l'on en substitue le quarré dans la proportion, qu'ensuite on prenne la racine quarrée de tous les termes, on aura la proportion énoncée dans la seconde partie du théorême cinquième.

NOTE (34), *pour la page* 149. *Tome I.*

Faisons d'abord la proportion, $CE : CD :: R : \cos. \frac{1}{2}A$, ou $\overline{CE}^2 : \overline{CD}^2 :: R^2 : (\cos. \frac{1}{2}A)^2$, d'où l'on tire, $\overline{CD}^2 = \frac{\overline{CE}^2 \times (\cos. \frac{1}{2}A)^2}{R^2}$, et en substituant, à la place de $\overline{CD}^2$ et de $\overline{CE}^2$, leurs valeurs analytiques données par les théorêmes premier et quatrième, on aura, $\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4a^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(\cos. \frac{1}{2}A)^2 \times \frac{b(c+a-b)(c-a+b)}{aR^2}$, ou bien..... $\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4a^2} = (\cos. \frac{1}{2}A)^2 \times \frac{b}{aR^2}$. Ou enfin..... $R^2(a+b+c)(a+b-c) = 4ab \times (\cos. \frac{1}{2}A)^2$. Il n'y a plus maintenant aucune difficulté pour trouver l'énoncé du sixième théorême.

Digitized by Google

NOTE (35), *pour la page* 150. *Tome I.*

On a (*par const.*) $AC = AE = AF$, et $BC = BH = BG$. Donc $BC + AC - AB = BE + EH + AH + EH - AH - EH - BE = EH$; et $BC - AC + AB = BE + EH - AH - EH + AH + EH + BE = 2BE + EH$; mais $2BE + EH = BH + BE = EG$. Donc $\frac{(BC + AC - AB)(BC - AC + AB)}{2AB} = \frac{EH \times EG}{2AB}$.

NOTE (36), *pour la page* 150. *Tome I.*

Newton dit que DC est moyenne proportionnelle entre DE et DF; pour le prouver, il suffit de démontrer que l'angle FCE est droit. Or, il a été prouvé (Note 30) pour la figure 7, que l'angle $DCE = \frac{1}{2}$ angle A; et comme l'angle DCE a été construit avec les mêmes conditions dans la figure 8, il s'en suit qu'il est égal à $\frac{1}{2}$ A. De plus, à cause de $AC = FA$, l'angle $F = \frac{1}{2}$ angle A, donc $CFD = DCE$. Mais $FCD + CFD =$ un droit : donc $FCD + DCE =$ un droit, ou bien $FCE =$ un angle droit. Donc, etc.

NOTE (37), *pour la page* 154. *Tome I.*

Les deux triangles BCE, AEF, étant tous deux rectangles (*par const.*), sont semblables, donc on a, $BE : EC :: AE : FE$, d'où l'on tire $BE : EC :: AE : FE :: BE + AE$ ou $AB : EC + FE$ ou FC. Donc $BE : EC :: AB : FC$. Mais on a par la propriété du triangle rectangle, $BE : EC :: BC : CD$. Mais (*par hypothèse*), $AB : AC :: BC : CD$; donc $AB : AC :: BE : EC$;

Digitized by Google

donc aussi $AB : AC :: AB : FC$; donc $AC = FC$, c'est-à-dire, que le triangle ACF est isocèle; or (*par const.*), l'angle F est droit, donc aussi l'angle FAC est droit, donc l'angle ACF qu'il faut ajouter à ACB ou en retrancher, pour que la somme ou la différence devienne égale à un droit, est nul; donc l'angle ACB est droit.

NOTE (38), *pour la page* 155. *Tome I.*

Par l'énoncé du problême, la base du triangle est moyenne proportionnelle arithmétique entre les côtés. Donc $2AB = BC + AC$. Retranchons AB de part et d'autre, nous aurons $AB = BC + AC - AB$, ou bien $AB - AC = BC - AB$. Et si nous faisons $BC - AB = x$, nous aurons aussi $AB - AC = x$, et puisque $AB = a$, il en résulte que $BC = x + a$ et que $AC = a - x$.

NOTE (39), *pour la page* 155. *Tome I.*

Voici comment on pourrait construire l'équation.....

$x = \frac{-2be^2 + d\sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{2}{4}a^2d^2}}{4e^2 + 3d^2}$. Soit m le rayon d'un cercle, qu'on inscrive dans ce cercle un triangle équilatéral, et qu'on appelle n le côté de ce triangle, on sait par la géométrie élémentaire qu'on aura l'équation $n^2 = 3m^2$. Cela posé, je passe à la construction. D'abord l'angle E est donné, et Newton a supposé de plus qu'on avait $d : e :: DE : CD :: \cos. E : \sin. E$. Je ferai donc un triangle rectangle avec des côtés d'une longueur arbitraire, et dont un des angles aigus sera égal à E; le côté adjacent à l'angle E représentera d, le côté adjacent à l'autre angle aigu, e; et en appelant f l'hypothénuse, on aura $f^2 = e^2 + d^2$. Avec f comme

Digitized by Google

rayon, je décris un cercle dans lequel j'inscris un triangle équilatéral dont j'appelle le côté g, ce qui donne $g^2 = 3f^2 = 3e^2 + 3d^2$, ou $(A)\, g^2 = 3e^2 + 3d^2$. Ensuite avec d comme rayon, je décris un cercle dans lequel j'inscris un triangle équilatéral, dont j'appelle le côté h, ce qui donne $h^2 = 3d^2$, ou $\frac{h^2}{4} = \frac{3d^2}{4}$, et retranchant membre par membre, cette dernière équation de l'équation (A), le reste sera $g^2 - \frac{h^2}{4} = 3e^2 + 3d^2 - \frac{3}{4}d^2$, ou bien..... $g^2 - \frac{h^2}{4} = 3e^2 + \frac{9d^2}{4}$ (B). Prenant ensuite une quatrième proportionnelle $k = \frac{be}{a}$, ce qui donne $k^2 = \frac{b^2e^2}{a^2}$, et décrivant un cercle avec k comme rayon, j'y inscris un triangle équilatéral, dont j'appelle le côté l, ce qui donne $l^2 = 3k^2 = \frac{3b^2e^2}{a^2}$, ou... $l^2 = \frac{3b^2e^2}{a^2}$, je retranche, membre par membre, cette dernière équation, de l'équation (B), et j'ai..... $g^2 - \frac{h^2}{4} - l^2 = 3e^2 - \frac{3b^2e^2}{a^2} + \frac{9d^2}{4}$, ou bien..... $g^2 - \frac{h^2}{4} - l^2 = \frac{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9a^2d^2}{4}}{a^2}$ (C). Maintenant je construis un triangle rectangle qui ait pour côtés l et $\frac{1}{2}h$, et j'appelle son hypothénuse p; j'en construis un autre qui ait p pour un de ses côtés, et g pour son hypothénuse, et j'appelle son autre côté q. La première construction donne, $p^2 = \frac{1}{4}h^2 + l^2$; et la seconde, $q^2 = g^2 - p^2$; donc $q^2 = g^2 - \frac{1}{4}h^2 - l^2$. Et en substituant dans l'équation (C), elle deviendra, $q^2 = \frac{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9}{4}a^2d^2}{a^2}$, ou bien $a^2q^2 = 3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9}{4}a^2d^2$, ou $aq = \sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9}{4}a^2d^2}$, ou bien $\frac{adq}{4e^2 + 3d^2} = \frac{d\sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9}{4}a^2d^2}}{4e^2 + 3d^2}$ (E), en multipliant

Digitized by Google

tout par $\frac{d}{4e^2+3d^2}$. Mais nous avons vu plus haut que $h^2 = 3d^2$; donc en faisant un triangle rectangle qui ait pour côtés h et $2e$, et appelant son hypothénuse r, il donnera, $r^2 = 4e^2 + 3d^2$; ensuite prenant une quatrième proportionnelle $s = \frac{aq}{r}$, et une autre quatrième proportionnelle $t = \frac{sd}{r}$, on aura.....

$t = \frac{aq}{r} \times \frac{d}{r} = \frac{aqd}{r^2} = \frac{adq}{4e^2+3d^2}$. Donc.....

$t = \frac{adq}{4e^2+3d^2} = \frac{d\sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{2}{4}a^2d^2}}{4e^2+3d^2}$. Actuellement, à cause de $\frac{2be^2}{4e^2+3d^2} = \frac{2be^2}{r^2}$, si l'on prend une quatrième proportionnelle $v = \frac{2be}{r}$, et une autre quatrième proportionnelle $\delta = \frac{ve}{r}$, on aura $\delta = \frac{2be^2}{r^2} = \frac{2be^2}{4e^2+3d^2}$. Donc enfin.....

$t - \delta = \frac{-2be^2 + d\sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{2}{4}a^2d^2}}{4e^2+3d^2} = x$; donc $t - \delta = x$.

NOTE (40), *pour la page* 156. *Tome I.*

Car la diagonale $AD = \sqrt{2\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}$. Donc en élevant tout au quarré, $\overline{AD}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$, et en ajoutant à chaque membre le quarré de la diagonale BC, il viendra.....

$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$.

NOTE (41), *pour la page* 167. *Tome I.*

(*Fig.* Ire. *pour les Notes*). Voici comment on peut trouver l'équation $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$. Prolongez indéfiniment la diagonale AC dans l'angle HAF; du point G milieu de EF élevez une perpendiculaire GK

Digitized by Google

sur ce prolongement, et du même point G comme centre, avec le rayon EG décrivez une circonférence de cercle, elle passera par les points E, A, F, et coupera le prolongement de la droite CA en un point T, et la corde AT sera divisée en deux parties égales AK et KT, par la perpendiculaire GK. Maintenant si l'on unit les points G et T, et les points A et G par des droites, elles seront des rayons du cercle, et les deux triangles AKG, TKG seront égaux en tout; de plus l'angle $TAF = 45°$, car la diagonale CAT coupe l'angle droit HAF en deux parties égales, et puisque TAF a son sommet à la circonférence, il faut que l'arc TF, intercepté entre ses côtés, soit de 90°; donc l'angle TGF qui a pour mesure tout l'arc TF est droit, donc TG est perpendiculaire sur CG, donc le triangle rectangle CGT donne la proportion $CT : TG :: TG : TK$ ou AK. Or, l'hypothénuse $CT = CA + AK + KT = CA + 2AK$. Et en conservant aux lignes les noms que leur a imposés Newton, la proportion devient $CT\,(e + 2y) : TG\,(b) :: TG\,(b) : TK$ ou $AK\,(y)$. D'où l'on tire $ey + 2y^2 = b^2$, ou bien $2y^2 = -ey + b^2$, et enfin $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$. Connaissant y de cette manière, le reste s'achevera comme il a été dit dans le problême.

NOTE (42), *pour la page* 173. *Tome I.*

Les deux ordonnées CB et DH ont pour expression commune l'équation $y = \frac{rz}{2b} \pm \sqrt{\frac{r^2 z^2}{4b^2} + ar - rz}$, et comme elles ont des positions différentes par rapport à l'axe, elles doivent avoir des signes contraires; donc CB étant prise avec un signe positif, DH doit être prise avec un signe négatif. On aura donc.....

Digitized by Google

$BC - (-DH) = BC + DH$, ou $BC + BK$ pour la différence des deux ordonnées. Maintenant l'ordonnée DH devant être négative, il est impossible que son radical soit affecté du signe $+$, on a donc nécessairement, $-DH = \frac{rz}{2b} - \sqrt{\frac{r^2 z^2}{4b^2} + ar - rz}$. Donc il faut aussi que $BC = \frac{rz}{2b} + \sqrt{\frac{r^2 z^2}{4b^2} + ar - rz}$. Donc en faisant la soustraction on aura, $BC + DH = 2\sqrt{\frac{r^2 z^2}{4b^2} + ar - rz}$. Ou bien $BC + DH = \sqrt{\frac{r^2 z^2}{b^2} + 4ar - 4rz}$, ainsi que Newton l'annonce.

NOTE (43), *pour la page* 174. *Tome I.*

C'est-à-dire, que si l'on considère AB comme le rayon du cercle, la droite AK sera le cosinus de l'angle BAK; mais si on prend AB comme diamètre, la droite AK sera la corde du double du complément de l'angle A, ou ce qui revient au même, sera le double du cosinus de l'angle A. En effet, il est d'abord bien évident qu'en prenant AB pour rayon, AK est le cosinus de A; ce qui donne la proportion $AB : AK :: R :$ cos. A. Mais le rapport de AB à AK restera le même, si on multiplie les deux termes du dernier rapport par 2, ce qui donne $AB : AK :: 2R$ ou $D : 2$ cos. A. Ainsi AB représentant le diamètre, AK représente ou le double du cosinus de A, ou ce qui est la même chose, la corde du double de son complément.

NOTE (44), *pour la page* 175. *Tome I.*

En effet, si on demandait de partager en deux parties égales l'angle donné LBC, dont le double du cosinus est BL, on voit

Digitized by Google

que l'angle cherché serait A, et que cet angle serait connu; si on connaissait le double de son cosinus AK ou x. Or l'équation... $\frac{x^2}{r} - 2r = BL$ peut nous faire connaître AK, puisque r et BL sont connus. De même si on cherchait le tiers de l'angle donné DCM, alors CM est connu, et A, tiers cherché de l'angle DCM, sera connu, si on détermine le double de son cosinus AK ou x, et c'est ce qui sera facile par le moyen de l'équation..... $\frac{x^3}{r^2} - 3x = CM$; et ainsi du reste.

NOTE (45), *pour la page* 181. *Tome I.*

Pour donner de ce problême une explication satisfaisante, il faut le reprendre dès son origine. Je commence donc par y ajouter une condition que Newton suppose tacitement; c'est que le plan sécant soit perpendiculaire au plan par son axe et par l'axe du solide, c'est-à-dire que le plan $IKLQ$ soit perpendiculaire au plan GHM. Maintenant BHQ ou GHO étant l'angle d'inclinaison de l'axe AB sur le plan de la section, et L un point quelconque de rencontre de la droite XY avec ce plan, menez DF parallèlement à AB, et du point L abaissez sur AB la perpendiculaire LG, sur DF la perpendiculaire LF, et sur HO la perpendiculaire LM, et joignez les points F, G et M, G. Remarquez ensuite que DC étant la distance (c'est-à-dire la plus courte distance) entre AB et XY, est nécessairement perpendiculaire à ces deux lignes. Or FD a été menée parallèlement à AB; donc CD, perpendiculaire à AB, l'est aussi à sa parallèle FD. Nous venons de dire aussi que CD était perpendiculaire à XY, donc CD est perpendiculaire au plan XDF; donc le plan $DCGF$ passant par une droite DC perpendiculaire au

Digitized by Google

au plan XDF est perpendiculaire à ce plan, et par conséquent toute ligne LF menée dans le plan XDF perpendiculairement à la section commune FD, sera perpendiculaire au second plan $FDCG$, ainsi qu'à toute droite FG tracée dans ce second plan par le pié de la perpendiculaire; donc l'angle GFL est droit. Je dis ensuite que l'angle MGH est aussi droit, car le plan de la section $INQLK$ est (*par const.*) perpendiculaire au plan AHO, et LM est aussi (*par const.*) perpendiculaire à leur section commune OH, donc LM est perpendiculaire au plan AHO. Or d'un point L de cette perpendiculaire, on a mené LG perpendiculairement à AB, donc en unissant les points M et G, MG sera aussi perpendiculaire à AB, donc l'angle MGH est droit.

Faites actuellement $CD = a$, $CH = b$, $MH = x$ et $ML = y$. Comme l'angle GHO est donné, que l'angle MGH est droit, les rapports des côtés dans ce triangle sont connus; soient donc..... $MH : HG :: d : e$, ou bien $x : HG :: d : e$, on aura..... $HG = \frac{ex}{d}$, et $GC = b + \frac{ex}{d} = FD$. Ensuite, à cause de l'angle connu LDF (l'angle LDF est connu, parce que l'inclinaison de la droite XY sur le plan $GCDF$ est donnée), à cause, dis-je, de l'angle connu LDF, et de l'angle droit LFD, le rapport des côtés FL, FD est connu; supposons donc que l'on ait $FD : FL :: g : h$, on aura, $\frac{FL}{FD} = \frac{h}{g}$, ou $FL = \frac{h}{g} \times FD$, et en mettant pour FD sa valeur $b + \frac{ex}{d}$, il viendra..... $FL = \frac{bh}{g} + \frac{ehx}{dg}$. Au quarré de FL, ajoutons celui de FG, ou celui de DC, c'est-à-dire a^2, et il viendra..... $\overline{GL}^2 = a^2 + \frac{b^2h^2}{g^2} + \frac{2behx}{dg^2} + \frac{e^2h^2x^2}{d^2g^2}$. GL étant l'hypothénuse du

Digitized by Google

triangle rectangle GFL, et aussi du triangle rectangle GML, si du quarré de cette hypothénuse, nous retranchons $\overline{MG}^2$, ou sa valeur $\overline{MH}^2 - \overline{GH}^2$, ou $x^2 - \frac{e^2 x^2}{d^2}$, il restera.....

$$\frac{a^2 g^2 + b^2 h^2}{g^2} + \frac{2 b e h^2}{d g^2} x + \left(\frac{h^2 e^2 - d^2 g^2 + e^2 g^2}{d^2 g^2}\right) x = \overline{ML}^2 = y^2.$$

Cette équation qui exprime la relation entre x et y, ne montant pas au-delà de deux dimensions, on sait que $INQLK$ est une section conique. Ce sera, dit Newton, une ellipse, si l'angle MHG est plus grand que l'angle LDF, si, au contraire, il est plus petit, ce sera une hyperbole, et s'il lui est égal, une parabole: et si les deux points C et H se confondent, la section sera un parallélogramme.

Il s'agit de prouver ces quatre assertions. Nous commencerons par la parabole.

1°. Newton dit que si l'angle MHG = l'angle LDF, la section $INQLK$ est une parabole. En effet, l'équation générale étant... $\frac{a^2 g^2 + b^2 h^2}{g^2} + \frac{2 b e h^2}{d g^2} x + \left(\frac{h^2 e^2 - d^2 g^2 + e^2 g^2}{d^2 g^2}\right) x^2 = y^2$, on sait que, dans le cas de la parabole, le terme affecté de x^2 doit disparaître; il faut donc que son coëfficient soit égal à zéro, ou qu'on ait.... $\frac{h^2 e^2 - d^2 g^2 + e^2 g^2}{d^2 g^2} = 0$, ou bien $(h^2 + g^2) e^2 = d^2 g^2$. Et en mettant à la place des lettres, les lignes qu'elles représentent, on a..... $\overline{LD}^2 \times \overline{HG}^2 = \overline{MH}^2 \times \overline{FD}^2$, ou bien $LD \times HG = MH \times FD$; d'où l'on tire $LD : MH :: FD : HG$. Or les deux triangles FLD, GMH ayant chacun un angle droit, les côtés autour d'un second angle proportionnels, et le troisième angle dans l'un et dans l'autre, étant nécessairement de même espèce, il s'en suit que les deux triangles sont semblables; donc l'angle D = l'angle H. *Ce qu'il fallait d'abord prouver.*

Digitized by Google

2°. Pour que la section soit une ellipse, il faut que le coëfficient de x^2 soit négatif, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que $d^2g^2 > (h^2 + g^2)e^2$, ou que $\overline{MH}^2 \times \overline{FD}^2 > \overline{LD}^2 \times \overline{GH}^2$, ou que $MH \times FD > LD \times GH$. D'où l'on tire, $\frac{MH}{GH} > \frac{LD}{FD}$. Or, dans le cas de la parabole, on a, $\frac{MH}{GH} = \frac{LD}{FD}$, et nous venons de voir que si le premier membre $\frac{MH}{GH}$ s'accroît, le second membre $\frac{LD}{FD}$ restant le même, la courbe est une ellipse; or le rapport $\frac{MH}{GH}$ étant celui du rayon au cosinus de l'angle MHG, ce rapport ne peut s'accroître qu'autant que le cosinus diminue, et que par conséquent l'angle MHG augmente, l'angle FDL restant le même. Donc, lorsque l'angle $MHG > FDL$, la courbe est une ellipse. *Ce qu'il fallait prouver en second lieu.*

3°. On trouverait dans le cas du coëfficient positif de x^2, que $\frac{MH}{GH} < \frac{LD}{FD}$, or $\frac{MH}{GH}$, rapport du rayon au cosinus de l'angle MHG, ne peut devenir plus petit que $\frac{LD}{FD}$, l'angle FDL restant toujours le même, à moins que le cosinus HG n'augmente, et que par conséquent l'angle MHG ne diminue. Donc, lorsque $MHG < FDL$, la section est une hyperbole. *Ce qui prouve la troisième assertion de Newton.*

4°. Enfin, dans le cas de la parabole, l'équation étant..... $\frac{a^2g^2 + b^2h^2}{g^2} + \frac{2h^2be}{dg^2}x = y^2$, si l'on suppose que CH ou b devienne zéro, ou que l'axe de la section passe par le point C, alors cette équation se réduit (à cause de $b = 0$) à $\frac{a^2g^2}{g^2} = y^2$,

Digitized by Google

ou $a^2 = y^2$, ce qui fait voir que toutes les y sont constantes. Donc, lorsque l'angle MHG = l'angle FDL, et que de plus l'axe de la section passe par le point C, la section est un parallélogramme. *Et c'est la quatrième assertion de Newton.*

A toute cette analyse, nous pouvons ajouter un cinquième cas, qui serait celui du cercle. Je dis donc que si l'angle MHG est droit, la section est un cercle; car dans cette supposition, e qui représente le cosinus de l'angle MHG, devient zéro, donc l'équation générale devient, $a^2 + \frac{b^2 h^2}{g^2} - x^2 = y^2$. Equation qui appartient visiblement au cercle.

NOTE (46), *pour la page* 182. *Tome I.*

Voici comment Newton réduit l'équation, $2ay + a^2 + y^2 = x\sqrt{a^2 - y^2}$. Il est d'abord évident que le premier membre est le quarré de $a + y$; et que le second, $x\sqrt{a^2 - y^2}$ est la même chose que $x\sqrt{a+y} \times \sqrt{a-y}$. L'équation pourra donc s'écrire ainsi, $(a+y)(a+y) = x\sqrt{a+y} \times \sqrt{a-y}$. Ou bien..... $(a+y)\sqrt{a+y} \times \sqrt{a+y} = x\sqrt{a+y} \times \sqrt{a-y}$. Donc, en divisant tout par $\sqrt{a+y}$, on a, $(a+y)\sqrt{a+y} = x\sqrt{a-y}$, et en élevant tout au quarré et ordonnant, on trouvera l'équation finale de l'auteur.

NOTE (47), *pour la page* 182. *Tome I.*

Pour saisir la suite de toutes ces égalités, on remarquera que l'angle BCF étant extérieur au triangle isocèle CKF, l'angle K

Digitized by Google

n'est que la moitié de BCF; mais les deux triangles BCF et FEG étant semblables, l'angle $BCF =$ l'angle EGF. Donc l'angle $EGF =$ le double de l'angle K, ou $K = \frac{1}{2} EGF$. Or, les deux triangles DAG, FEG étant égaux, $DG = GF$. Donc le triangle DGF est isocèle, donc l'angle EGF, extérieur à ce triangle, est double de l'angle GFD, donc l'angle $K = GFD$. Il faut montrer maintenant que $GFD = AMH$, c'est-à-dire que HC est parallèle à DF. D'abord nous venons de prouver que l'angle GFD ou $BFN = K$, donc les deux triangles rectangles BFN et BKF sont semblables, et par conséquent le triangle total KFN est aussi rectangle en F, et l'angle CFK est le complément à un droit de l'angle CFN. Mais l'angle BFN ou son égal CFK est aussi le complément à un droit de l'angle BNF ou CNF. Donc l'angle $CNF =$ l'angle CFN, donc les deux droites CN et CF sont également inclinées sur la droite DF. Or DH est parallèle à CN, donc DH et CF sont également inclinées sur DF; et comme DH et CF sont égales, il est clair que si par leurs extrémités H et C on tire la droite HC, elle sera parallèle à DF. Donc l'angle $GFD = AMH = MHI$, (car les droites AF et HI sont aussi parallèles). Maintenant il est facile de voir que l'angle $MHI =$ l'angle CIL, car le triangle HIC est rectangle en I (*par const.*), et IL est aussi, par construction, perpendiculaire sur l'hypothénuse HC. Donc $MHI = CIL$; donc enfin, $CIL = K$, donc $K = \frac{1}{2} BCF = \frac{1}{2} EGF = GFD = AMN = MHI = CIL$.

NOTE (48), *pour la page* 182. *Tome I.*

Montrons d'abord comment a lieu la proportion $BN : BK :: LC : LH :: \overline{CI}^2 : \overline{HI}^2$. Nous ferons voir ensuite que $BN = 2a - y$.

Digitized by Google

Les deux triangles rectangles semblables BFN et BKF donnent, $\overline{BF}^2 = BN \times BK$. Et les deux triangles semblables BFN, LIC donnent, $BN : BF :: LC : LI$, d'où $BF = \frac{BN \times LI}{LC}$, ou $\overline{BF}^2 = \frac{\overline{BN}^2 \times \overline{LI}^2}{\overline{LC}^2}$, et les deux triangles semblables LIC, LHI donnent, $LC : LI :: LI : LH$, ou bien $\overline{LI}^2 = LC \times LH$. Comparons les deux valeurs de $\overline{BF}^2$, nous aurons, $\frac{\overline{BN}^2 \times \overline{LI}^2}{\overline{LC}^2} = BN \times BK$, ou $\overline{BN}^2 \times \overline{LI}^2 = \overline{LC}^2 \times BN \times BK$, ou bien $BN \times \overline{LI}^2 = \overline{LC}^2 \times BK$, et en mettant, à la place de $\overline{LI}^2$, sa valeur $LC \times LH$, il vient, $BN \times LC \times LH = \overline{LC}^2 \times BK$, ou, en divisant tout par LC; $BN \times LH = LC \times BK$, d'où l'on tire, $BN : BK :: LC : LH$. Or, dans le triangle rectangle HIC, la droite LI étant perpendiculaire sur l'hypothénuse, on a, $LC : LH :: \overline{CI}^2 : \overline{HI}^2$, donc enfin, à cause du rapport commun, $BN : BK :: LC : LH :: \overline{CI}^2 : \overline{HI}^2$.

Maintenant, pour voir comment $BN = 2a - y$, rappelons-nous que, par construction, BI ou $BN + NI = CF = a$, donc $BN = a - NI$. Mais $NI = IC - NC = IC - CF$ (car nous avons démontré dans la note 47, que le triangle NCF est isocèle), donc $NI = y - a$, donc $BN = a - (y - a) = 2a - y$.

NOTE (49), *pour la page* 182. *Tome I.*

Newton dit que le centre du cercle de la cissoïde est A, et que le rayon de ce cercle est AH. Comme il n'a tracé aucun cercle

Digitized by Google

dans sa figure, il est clair qu'il faut recourir à la manière dont les anciens décrivaient cette courbe pour comprendre ce qu'il dit.

(*Fig.* II, *des Notes*). Soit BGH un cercle dont le rayon $AH = a$. Si, à l'extrémité B de son diamètre, j'élève une perpendiculaire indéfinie BT, et que de l'autre extrémité H, je tire une droite HS jusqu'à la ligne BT, et que je porte OS de H en M, le point M sera à la cissoïde, et tous les points de cette courbe en dedans du cercle, se trouveront de la même manière. La ligne HK, qui passe par le milieu de la demi-circonférence, étant coupée en deux parties égales au point G, on voit que ce point est encore à la cissoïde. Pour trouver le point de la cissoïde sur la ligne HT, portez TL de H en C, et le point C sera à la cissoïde. Cherchons maintenant l'équation de cette courbe. D'abord, $QB = PH$, car, à cause des parallèles, on a la proportion, $PH : MH :: QB : OS$. Mais (*par const.*) $OS = MH$, donc $QB = PH$, donc aussi $BP = QH$. Appelons, avec l'auteur, AH, a; HI ou NC, x; et CI ou NH, y; nous aurons, à cause des triangles semblables HRL, HNC, la proportion, $HR : RL :: HN : NC$. Or (*par const.*) $HR = BN = 2a - y$, et $RL = NV = \sqrt{y(2a-y)}$. La proportion précédente devient donc.....
$2a - y : \sqrt{y(2a-y)} :: y : x$, et en élevant tout au quarré, $(2a-y)^2 : y(2a-y) :: y^2 : x^2$, ou bien, en divisant les termes du premier rapport par $2a - y$, $2a - y : y :: y^2 : x^2$, d'où l'on tire, $y^3 = 2ax^2 - x^2y$, qui est l'équation même de l'auteur. On conçoit maintenant sans difficulté ce que dit Newton, que le point A est le centre du cercle de cette cissoïde, et que AH ou a est le rayon de ce cercle. On pourrait ajouter que BT est l'asymptote de cette

Digitized by Google

courbe, ce qui est assez clair par la manière dont elle est construite; mais on peut le démontrer aussi par le moyen de l'équation, en faisant voir que y ne peut devenir égal à $2a$ que lorsque x est infiniment grand; c'est-à-dire que la courbe ne va toucher BT qu'à un point infiniment éloigné. En effet, si dans l'équation $y^3 = 2ax^2 - x^2y$, on suppose $x = \infty$, l'équation se réduit à... $2ax^2 - x^2y = 0$, d'où $y = 2a$.

C'est Dioclès qui est l'inventeur de la cissoïde, mais c'est Newton qui a trouvé l'art de la décrire d'un mouvement continu, par le moyen d'une simple équerre.

NOTE (50), *pour la page* 184. *Tome I.*

J'écris ainsi l'équation de l'auteur..... $a^2y^2 - 2bexy + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$. Pour reconnaître si la section conique qui est représentée par cette équation est une ellipse, j'élève au quarré $2be$, coëfficient du terme qui contient le produit des deux indéterminées, et j'en retranche le quadruple du produit des coëfficiens des quarrés des deux indéterminées, le reste est, $4b^2e^2 - 4a^2b^2$, ou $4b^2(e^2 - a^2)$, or, comme l'a remarqué Newton, $e^2 - a^2$ est une quantité négative, donc $4b^2(e^2 - a^2)$ est aussi une quantité négative, et par conséquent l'équation appartient à l'ellipse. (Voyez l'Algèbre de Bezout, N°. 380 et suivans). Pour construire cette ellipse, je divise toute l'équation par a^2, ce qui donne (A) $y^2 - \frac{2bex}{a^2}y + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 = 0$. Je fais évanouir le second terme par rapport à y, en supposant, $y - \frac{bex}{a^2} = t$, ce qui donne, $y^2 - \frac{2bex}{a^2}y = t^2 - \frac{b^2e^2x^2}{a^4}$. Et en substituant dans l'équation

Digitized by Google

dans l'équation (A), elle devient, $t^2 - \frac{b^2 e^2 x^2}{a^4} + \frac{b^2 \times x^2}{a^2} - b^2 = 0$, qui peut s'écrire ainsi, $t^2 = b^2 + \frac{b^2 (e^2 - a^2) x^2}{a^4}$, ou parce qu'on a considéré a comme le rayon, et e comme le cosinus de l'angle CBH, on aura, en appelant q le sinus du même angle, $e^2 - a^2 = - q^2$, ce qui, en substituant, change la dernière équation en celle-ci, $t^2 = b^2 - \frac{b^2 q^2 x^2}{a^4}$ (B). Maintenant, comme le produit xy des deux indéterminées se trouve dans l'équation (A), je fais, $x = \frac{lu}{n}$. En substituant dans l'équation (B), il vient, $t^2 = b^2 - \frac{b^2 q^2}{a^4} \times \frac{l^2 u^2}{n^2}$. Mais n'ayant besoin que d'une seule indéterminée n, je puis supposer $l = a$, ce qui réduit mon équation à $t^2 = b^2 - \frac{b^2 q^2 u^2}{a^2 n^2}$, ou bien $t^2 = \frac{b^2 q^2}{a^2 n^2} \left(\frac{a^2 n^2}{q^2} - u^2 \right)$ (C). Pour trouver les diamètres et leur direction, je compare l'équation (C) à l'équation ordinaire de l'ellipse, $y^2 = \frac{f^2}{g^2} (g^2 - x^2)$, d'où il résulte, $\frac{f}{g} = \frac{bq}{an}$, et $g = \frac{an}{q}$, donc $f = \frac{bq}{an} \times g$, et en substituant pour g sa valeur, $f = \frac{bq}{an} \times \frac{an}{q}$. Donc $f = b$. Donc le second demi-diamètre... $f = b = CD$. Pour avoir le premier diamètre g, il faut auparavant déterminer n, qui entre dans son expression. Pour cela, j'ai recours à l'équation $y - \frac{bex}{a^2} = t$, que je construis ainsi. Sur AD (*Fig.* 3, *des Notes*) je prends une ligne arbitraire AM, et par le point M je mène parallèlement à AE une droite MN telle, que j'aie la proportion, $a^2 : be :: AM : MN$, et je tire ANP qui rencontre BC en O. A cause des parallèles MN et BC, j'aurai aussi, $AM : MN :: AB : BO$, ou $a^2 : be :: x : BO = \frac{bex}{a^2}$. Mais $CO = BC - BO = y - \frac{bex}{a^2} = t$,

Digitized by Google

donc $CO = t$. C'est donc sur la droite AO et parallèlement à AE que se comptent les t. Ainsi AO est la ligne des u, et par conséquent la direction du premier diamètre. Pour en déterminer la longueur, l'équation $x = \frac{lu}{n}$ me fait voir qu'en faisant $x = 0$, j'ai aussi $u = 0$, donc l'origine des u est au point A. Ensuite, comme j'ai supposé $l = a$, $x = \frac{lu}{n}$ devient, $x = \frac{au}{n}$, ce qui donne, $x : a :: u : n$. Donc en prenant $x = a$, on aura aussi, $u = n$. Soit donc x ou $AB = a = CE$, on aura, $u = AO = n$. Cette valeur de n étant substituée dans l'équation $g = \frac{an}{q}$, la change en $g = \frac{CE \times AO}{q}$, dans laquelle tout est connu, puisque q est le sinus de l'angle donné A, le rayon étant égal à CE. Donc on connaît aussi la longueur et la direction du premier demi-diamètre. L'ellipse est donc maintenant très-facile à construire. Supposons que ce soit CLF, et montrons que chaque point de cette courbe, par exemple le point L, satisfait à l'équation proposée. Pour le prouver, je mène par le point L, parallèlement à AE, la droite LK qui rencontre AP en S; et les triangles semblables AMN, AKS me donnent la proportion, $AM : MN :: AK : KS$, ou $a^2 : be :: x : KS = \frac{bex}{a^2}$. Donc $LK - KS = SL = y - \frac{bex}{a^2} = t$. Mais, par la propriété de l'ellipse, t^2 ou $\left(y - \frac{bex}{a^2}\right)^2 = \frac{f^2}{g^2}(g^2 - u^2)$. Et comme nous avons trouvé $f = b$, $g = \frac{an}{q}$; que de plus l'équation $x = \frac{lu}{n} = \frac{au}{n}$ donne, $u = \frac{nx}{a}$, si nous substituons toutes ces valeurs, en nous rappelant encore que

Digitized by Google

$q^2 = a^2 - e^2$, l'équation t^2 ou $\left(y - \frac{bex}{a^2}\right)^2 = \frac{f^2}{g^2}(g^2 - u^2)$ deviendra, $y^2 - \frac{2bex}{a^2}y + \frac{b^2e^2x^2}{a^4} = \frac{b^2q^2}{a^2n^2}\left(\frac{a^2n^2}{q^2} - \frac{n^2x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2(a^2-e^2)}{a^2n^2}\left(\frac{a^2n^2}{a^2-e^2} - \frac{n^2x^2}{a^2}\right) = b^2 - \frac{b^2a^2x^2}{a^4} + \frac{b^2e^2x^2}{a^4}$. Donc... $y^2 - \frac{2bex}{a^2}y + \frac{b^2e^2x^2}{a^4} = b^2 - \frac{b^2a^2x^2}{a^4} + \frac{b^2e^2x^2}{a^4}$, et en effaçant ce qui se détruit, $y^2 - \frac{2bex}{a^2}y = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$, d'où l'on tire, $a^2y^2 - 2bexy + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, équation qu'il s'agissait de construire.

Nous remarquerons encore que si l'angle EAD était droit, la ligne BC serait perpendiculaire sur AD, et que dans ce cas BH ou e deviendrait zéro; alors l'équation proposée, $a^2y^2 - 2bexy + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, serait réduite à $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, et les droites AE et AD seraient dans la direction des axes. De plus, l'équation $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, donne, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, ce qui fait voir que dans cette hypothèse, le premier demi-axe serait CE, et le second, CD.

NOTE (51), *pour la page* 189. *Tome I.*

Il est assez facile de voir que le diamètre du cercle se trouve sur la droite AB, car les ordonnées y ont deux valeurs égales, $y = +\sqrt{\frac{d^2a^2 - 2d^2ax}{e^2 - d^2} - x^2}$, et $y = -\sqrt{\frac{d^2a^2 - 2d^2ax}{e^2 - d^2} - x^2}$, l'une positive, et l'autre négative. Donc en regardant ces doubles ordonnées comme des cordes du cercle, la ligne AB qui les coupe toutes par la moitié, et qui de plus leur est perpendiculaire, doit

Digitized by Google

passer par le centre du cercle. Pour trouver la longueur du diamètre, il faut observer qu'aux endroits où le cercle coupe la droite AB, on a $y = 0$, donc si dans l'équation..... $y = \pm \sqrt{\frac{d^2 a^2 - 2 d^2 a x}{e^2 - d^2} - x^2}$, nous faisons $y = 0$, nous aurons $\pm \sqrt{\frac{d^2 a^2 - 2 d^2 a x}{e^2 - d^2} - x^2} = 0$, ou bien $\frac{d^2 a^2 - 2 d^2 a x}{e^2 - d^2} - x^2 = 0$; d'où on tire, $x = \frac{-a d^2 \pm a d e}{e^2 - d^2}$, ou bien $x = \frac{-a d (d \pm e)}{e^2 - d^2}$. Nous observerons maintenant qu'il faut que $e^2 - d^2$ soit une quantité négative, ou que l'on ait $d > e$, sans quoi une des valeurs de x serait négative, et se compterait à gauche du point A, ce qui appartiendrait à une autre question. Nous regarderons donc $e^2 - d^2$ comme une quantité négative, par conséquent l'équation..... $x = \frac{-a d (d \pm e)}{e^2 - d^2}$ devient $x = \frac{a d (d \pm e)}{d^2 - e^2}$, ou bien $x = \frac{a d (d \pm e)}{(d + e)(d - e)}$, ce qui donne deux valeurs de x, l'une $x = \frac{a d}{d + e}$, et l'autre $x = \frac{a d}{d - e}$. Il est clair que la première est AE, et que la seconde est AF, et que leur différence EF est le diamètre cherché. En effet, lorsque $y = 0$, le point C tombe en E ou en F. Dans le premier cas, on a $d : e :: AE : EB$, ou $d + e : d :: AE + EB$ ou $a : AE$, ce qui donne $AE = \frac{a d}{d + e} = x$. Dans le second cas, on a, $d : e :: AF : BF$, ou $d - e : d :: AF - BF$ ou $a : AF$, ce qui donne $AF = \frac{a d}{d - e} = x$, donc $AF - AE$ égale le diamètre cherché.

NOTE (52), *pour la page* 193. *Tome I.*

(*Fig.* 4, *des Notes*). Il est clair, dit Newton, que si l'angle ABF au lieu d'être comme dans le problême, égal à la différence des

Digitized by Google

angles sur la base, est égal à leur somme, l'angle D est donné. Effectivement dans ce cas-là, BF tombe sur BD, et l'angle ABF devient l'angle ODA. Car si l'on prend BA pour la corde d'un cercle, et que le point D soit placé successivement en différens points de l'arc (toujours au-dessus ou toujours au-dessous de la corde BA, car l'angle D varierait si on le plaçait tantôt au-dessus tantôt au-dessous de BA), il est manifeste que l'angle BDA aura par-tout la même valeur, et que son supplément ODA aura aussi pour tous les différens points de l'arc une même valeur. Il n'est donc plus question que de voir si cette supposition satisfait à la première équation partielle de Newton, qui est $x^2 - ax + dy + y^2 = 0$, et c'est ce que nous allons voir en effet. Pour cela j'appelle m et n les deux parties de l'angle D, et je conserve aux autres quantités les mêmes dénominations qu'elles ont dans le problême. Je cherche d'abord les sinus et cosinus des angles m et n, et j'ai $BD : BC :: r : \sin. m = \frac{r \times BC}{BD}$. Ensuite..... $BD : DC :: r : \cos. m = \frac{r \times DC}{BD}$. Pour l'angle n, j'ai..... $DA : CA :: r : \sin. n = \frac{r \times CA}{DA}$, et $DA : DC :: r : \cos. n = \frac{r \times DC}{DA}$. De sorte que $\sin. (m+n) = \frac{r \times BC}{BD} \times \frac{r \times DC}{DA} + \frac{r \times DC}{BD} \times \frac{r \times CA}{DA} = \frac{r^2 (BC \times DC + DC \times CA)}{BD \times DA} = \frac{r^2 \times DC (BC + CA)}{BD \times DA}$, donc.. ..... $\sin. (m+n) = \frac{r^2 \times DC (BC + CA)}{BD \times DA} = \sin. BDA$. On a aussi..... $\cos. (m+n) = \frac{r \times DC}{BD} \times \frac{r \times DC}{DA} - \frac{r \times BC}{BD} \times \frac{r \times CA}{DA} = \frac{r^2 (\overline{DC}^2 - BC \times CA)}{BD \times DA}$. Donc $\cos. (m+n) = \frac{r^2 (\overline{DC}^2 - BC \times CA)}{BD \times DA} = \cos. BDA$. Or..... tang. BDA, ou tang. $(m+n) = \frac{\sin. (m+n)}{\cos. (m+n)} = \frac{DC (BC + CA)}{DC^2 - BC \times CA} =$

Digitized by Google

tang. BDA. Et en mettant à la place des lignes leurs valeurs analytiques, on a, tang. $BDA = \frac{ay}{y^2 - ax + x^2}$. Mais ce n'est pas la tangente de BDA que nous cherchons, c'est celle de son supplément ODA, puisque c'est celui-ci qui dans le cas qui nous occupe, tient la place de l'angle ABF du problême. Or, ODA étant le supplément de l'angle BDA, a la même tangente, mais prise avec un signe contraire. Donc tang. $ODA = \frac{-ay}{y^2 - ax + x^2}$. Et comme l'angle ODA tient dans notre figure la même place que l'angle ABF dans la figure du problême; et que dans le problême Newton a fait $BC : CG :: d : a$, ou bien r : tang. $ABF :: d : a$; nous aurons aussi pour l'angle ODA, $DO : OA :: d : a$, ou bien r : tang. $ODA :: d : a$; d'où

tang. $ODA = \frac{r \times a}{d} = \frac{a}{d}$ (en faisant $r = 1$); donc $\frac{a}{d} = \frac{-ay}{y^2 - ax + x^2}$, et en divisant tout par a et réduisant, il viendra $x^2 - ax + y^2 + dy = 0$, qui est absolument la même équation que celle de Newton, et qui appartient visiblement au cercle; voila ce qu'il fallait d'abord démontrer.

Veut-on maintenant construire le cercle qui appartient à cette équation; on commencera par faire disparaître le second terme par rapport à x, en supposant $x - \frac{1}{2}a = z$, ce qui donne..... $x^2 - ax = z^2 - \frac{1}{4}a^2$. Et en substituant dans l'équation $x^2 - ax + dy + y^2$, elle devient $z^2 - \frac{a^2}{4} + dy + y^2 = 0$. Je fais aussi disparaître le second terme par rapport à y, en supposant $y + \frac{1}{2}d = t$, ce qui donne $y^2 + dy = t^2 - \frac{1}{4}d^2$; et en substituant dans la dernière équation, elle devient $z^2 - \frac{1}{4}a^2 + t^2 - \frac{1}{4}d^2 = 0$; d'où l'on tire $t^2 = \frac{a^2 + d^2}{4} - z^2$. C'est-là l'équation qu'il faut construire.

Digitized by Google

Je remarque d'abord que l'équation $x - \frac{1}{2}a = z$, qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à x, me donne, dans la supposition de $x = 0$, $z = -\frac{1}{2}a$; et dans la supposition de $x = a$, j'ai $z = \frac{1}{2}a$. Donc l'origine des z est au milieu de AB. Ainsi je partage AB en deux parties égales au point K, et c'est de ce point que se compteront les z. La seconde équation $y + \frac{1}{2}d = t$ qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à y, me donne dans la supposition de $y = 0$, $t = \frac{1}{2}d$; ce qui me fait voir que les t prennent leur origine sur une ligne parallèle à AB, et qui en est éloignée d'un $\frac{1}{2}d$. Pour déterminer cette ligne, je tire par le point B une droite BLM, formant avec AB un angle $ABM =$ l'angle DAO, et je mène du point A perpendiculairement à AB la droite AM. Les deux triangles rectangles DOA, BAM, étant semblables, donnent la proportion $DO : AO :: AM : AB$. Or, $DO : AO :: d : a$, donc $AM : AB :: d : a$; mais $AB = a$, donc $AM = d$. Par conséquent si par le point K milieu de AB, je mène parallèlement à AM la droite KL, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point L la droite BM, on aura $KL = \frac{1}{2}d$. Et si par le point L on mène ST parallèlement à AB, ce sera sur ST que se compteront les t, puisque $DE = DC + CE = y + \frac{1}{2}d = t$. Actuellement si du point L comme centre, et d'un rayon BL je trace un cercle, l'arc BDA de ce cercle contiendra les lieux de l'angle ODA, et tous les points de cet arc satisferont à l'équation $t^2 = \frac{a^2 + d^2}{4} - z^2$. Car SLT étant le diamètre du cercle, L son centre, DE une ordonnée; on a pour l'équation du cercle, lorsque les abscisses sont comptées du centre, $\overline{DE}^2 = \overline{SL}^2 - \overline{EL}^2$, ou bien en mettant au lieu de SL son égal BL, $\overline{DE}^2 = \overline{BL}^2 - \overline{EL}^2$. Mais.....

Digitized by Google

$\overline{BL}^2 = \overline{BK}^2 + \overline{KL}^2 = \frac{a^2+d^2}{4}$; et $\overline{EL}^2 = \overline{CK}^2 = \zeta^2$. Donc.....

$\overline{DE}^2 (t^2) = \frac{a^2+d^2}{4} - \zeta^2$. C. Q. F. D.

Si on voulait retrouver dans cette construction, l'équation même de Newton, cela serait très-facile, car $t = y + \frac{1}{2}d$, et $\zeta = x - \frac{1}{2}a$; donc en substituant ces valeurs de t et de ζ dans l'équation..... $t^2 = \frac{a^2+d^2}{4} - \zeta^2$, elle deviendra..... $y^2 + dy + \frac{d^2}{4} = \frac{a^2+d^2}{4} - \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right)$. Après avoir effacé ce qui se détruit, et transporté tous les termes dans un seul membre, on a $x^2 - ax + dy + y^2 = 0$, qui est l'équation même de Newton.

NOTE (53), *pour la page* 193. *Tome I.*

Newton dit que l'équation $x^2 - ax + \frac{2dxy}{a} - y^2 - dy = 0$, appartient à une hyperbole; et cela est évident puisque les quarrés des deux variables, x^2 et y^2 ont des signes différens dans le même membre de l'équation. Il s'agit à présent de démontrer la construction qu'il en donne, pour cela je change tous les signes de l'équation, et j'ai $(A)\ y^2 + dy - \frac{2dxy}{a} + ax - x^2 = 0$. Je commence par faire disparaître le second terme par rapport à y, en faisant $y + \frac{1}{2}d - \frac{dx}{a} = t$; ce qui donne..... $y^2 + dy - \frac{2dxy}{a} = t^2 - \frac{d^2}{4} + \frac{d^2x}{a} - \frac{d^2x^2}{a^2}$. Le second membre de cette équation étant substitué à la place du premier dans l'équation (A), elle devient $t^2 + \left(\frac{d^2}{a} + a\right)x - \left(\frac{d^2}{a^2} + 1\right)x^2 - \frac{d^2}{4} = 0$,

et

Digitized by Google

et en changeant tous les signes, et ordonnant par rapport à x, on a, $x^2 - ax - \frac{a^2 t^2}{a^2+d^2} + \frac{a^4 d^2}{4(a^2+d^2)} = 0$. (B) Je fais encore disparaître dans cette équation le second terme par rapport à x, en supposant $x - \frac{1}{2}a = \frac{au}{2n}$ (n étant une indéterminée dont la valeur sera fixée par les opérations subséquentes), ce qui donne $x^2 - ax = \frac{a^2 u^2}{4n^2} - \frac{1}{4}a^2$. Et en substituant le second membre de cette équation à la place du premier dans l'équation (B), elle devient $\frac{a^2 u^2}{4n^2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 t^2}{a^2+d^2} + \frac{a^2 d^2}{4(a^2+d^2)} = 0$. Et en dégageant la valeur de t^2, on a $t^2 = \frac{d^2}{4} - \left(\frac{a^2+d^2}{4}\right) + \left(\frac{a^2+d^2}{4n^2}\right) u^2$, qui se réduit à $t^2 = -\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a^2+d^2}{4n^2}\right) u^2$. Et en dégageant u^2 du coëfficient qui le multiplie, j'aurai $t^2 = \frac{a^2+d^2}{4n^2}\left(u^2 - \frac{a^2 n^2}{a^2+d^2}\right)$. Je compare maintenant cette équation particulière à l'équation générale de l'hyperbole par rapport à ses diamètres conjugués, $y^2 = \frac{f^2}{g^2}(x^2 - g^2)$. Et cette comparaison me donne..... $\frac{f^2}{g^2} = \frac{a^2+d^2}{4n^2}$, et $g^2 = \frac{a^2 n^2}{a^2+d^2}$, donc $g = \frac{an}{\sqrt{a^2+d^2}}$. Mais la première donne $f^2 = \frac{a^2+d^2}{4n^2} \times g^2$. Donc $f^2 = \frac{a^2+d^2}{4n^2} \times \frac{a^2 n^2}{a^2+d^2} = \frac{a^2}{4}$; donc $f = \frac{a}{2}$, et $g = \frac{an}{\sqrt{a^2+d^2}}$. C'est-à-dire que le second demi-diamètre f auquel les nouvelles ordonnées t sont parallèles, est égal à $\frac{AB}{2}$; donc $2f = AB$. Quant à la valeur du demi-diamètre prinpal g, nous ne pourrons la connaître qu'après avoir déterminé n. Pour y parvenir je considère l'équation $y + \frac{1}{2}d - \frac{du}{a} = t$ qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à y. Si je suppose $y = 0$,

Digitized by Google

elle devient $t = \frac{1}{2}d - \frac{dx}{a}$. Mais dans cette supposition de $y = 0$, on voit que la courbe rencontre AB aux points A et B. Or, pour le point A, on a $x = 0$, et pour le point B, $x = a$, donc dans l'équation $y + \frac{1}{2}d - \frac{dx}{a} = t$, si l'on fait $y = 0$, on aura ou $t = \frac{1}{2}d - \frac{da}{a}$, ce qui donne $t = -\frac{1}{2}d$; ou $t = \frac{1}{2}d - \frac{d \times 0}{a}$, ce qui se réduit à $t = \frac{1}{2}d$. Donc au point A on a $t = \frac{1}{2}d$, et au point B, $t = -\frac{1}{2}d$. Déterminons maintenant la valeur de d. Pour cela je mène par le point P milieu de AB, (*Fig.* 5, *pour les Notes.*) une droite PL, faisant avec PA un angle égal à BGC, et du point A je mène AL perpendiculairement à AB; ainsi les deux triangles rectangles BCG, PAL sont semblables; on a donc $BC : CG :: d : a :: AL : AP$. Or, $AP = \frac{1}{2}a$, donc $AL = \frac{1}{2}d$. Et si par le point B on mène BD parallèlement à AL, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point D la droite PL prolongée, BD sera égal à $-\frac{1}{2}d$. Or, nous avons trouvé pour la supposition de $y = 0$, $t = \frac{1}{2}d$, et $t = -\frac{1}{2}d$, donc les nouvelles ordonnées t ont leur origine sur la droite DL; c'est donc aussi sur cette droite que doivent se compter les abscisses. Déterminons maintenant la valeur de n. Pour cela j'ai recours à l'équation $x - \frac{1}{2}a = \frac{au}{2n}$ qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à x. A la seule inspection de cette équation, on voit qu'en faisant $x = \frac{1}{2}a$, on a $u = 0$, donc l'origine des u est au point P, et de plus nous avons vu qu'ils doivent se compter sur DL. Prenons donc sur PA une ligne arbitraire PN, et par le point N tirons NO parallèlement à AL, les deux triangles semblables PAL, PNO, nous donneront $PA\ (\frac{1}{2}a) : PL :: PN : PO\ (u)$. Donc $PL \times PN = \frac{au}{2}$, ou...

Digitized by Google

$PN = \frac{an}{2 \times PL}$. Or, PN a été pris à volonté, je puis donc supposer que $PN = PC = x - \frac{1}{2}a$, d'où il résultera que.....
$PN = x - \frac{1}{2}a = \frac{an}{2n}$. Donc $\frac{an}{2n} = \frac{an}{2PL}$, donc $n = PL$. Mais $PL = \sqrt{\frac{a^2 + d^2}{4}}$, donc $n = \sqrt{\frac{a^2 + d^2}{4}}$. Substituons cette valeur de n dans l'équation $g = \frac{an}{\sqrt{a^2 + d^2}}$, il viendra.....
$g = \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} \times \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{2}$, ce qui donne $g = \frac{a}{2}$. Donc le demi-diamètre principal est égal à $\frac{AB}{2}$; et nous avons vu que le second demi-diamètre était aussi égal à $\frac{AB}{2}$. Donc les deux diamètres conjugués sont égaux chacun à AB, donc l'hyperbole est équilatère; car en appelant a et b les deux demi-axes de cette hyperbole, g et f les deux demi-diamètres conjugués, on a cette équation bien connue $a^2 - b^2 = g^2 - f^2$, et puisque $f = g$, il en résulte que $a^2 - b^2 = 0$, ou bien $a = b$. Donc l'hyperbole est équilatère; et par conséquent ses asymptotes font entre elles un angle droit, et comme l'angle des asymptotes est toujours coupé en deux parties égales par le premier axe, tâchons au moyen de cette propriété, de déterminer la direction des asymptotes. Nous avons vu que le diamètre principal g était dans la direction de DL, donc en prenant de part et d'autre du point P des parties PO et PO' égales chacune à $\frac{1}{2}a$, OO' sera la longueur du diamètre principal. Mais BA qui est un autre diamètre principal, ou appartenant à la même branche de courbe est aussi égal à a ou bien à OO', d'où il suit que ces deux diamètres AB et OO' se trouvent situés de différens côtés de l'axe, et sont par là même également inclinés et sur l'axe et sur les asymptotes. Donc les asymptotes font chacune avec chacun de ces

Digitized by Google

diamètres des angles égaux. Mais l'angle des asymptotes est droit, et dans le triangle rectangle PAL la somme des angles $PLA + APL$ vaut aussi un angle droit, donc si on retranche de l'angle des asymptotes, l'angle LPA, le reste sera égal à l'angle PLA, ou CBG. Donc si du point P on tire une droite PQ faisant avec BA un angle $BPQ = \frac{1}{2} CBG$, la droite PQ sera une asymptote, et en menant PR perpendiculairement sur PQ ce sera l'autre asymptote. Il est bien facile maintenant de décrire la courbe.

Il ne s'agit plus que de faire voir que l'équation de cette hyperbole est la même que l'équation qu'il fallait construire.

D'un point quelconque M du diamètre DPL, j'abaisse sur BA une perpendiculaire MC qui rencontre la courbe en un point V, de sorte que $MV = t$. Newton a appelé AC, x; CP, $x - \frac{1}{2}a$; et CV, y; et nous avons vu que $AL = \frac{1}{2}d$. Donc à cause des triangles semblables PAL, PCM, on a.....

$AP\left(\frac{1}{2}a\right) : AL\left(\frac{1}{2}d\right) :: PC\left(x - \frac{1}{2}a\right) : CM = \frac{dx}{a} - \frac{1}{2}d$. Donc $MV = CM - VC = \frac{dx}{a} - \frac{1}{2}d - y$. Ensuite.....

$AP\left(\frac{1}{2}a\right) : PL\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + d^2}\right) :: PC\left(x - \frac{1}{2}a\right) : PM = \frac{x}{a}\sqrt{a^2 + d^2} - \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + d^2}$, ce qui donne $\overline{PM}^2 = x^2 + \frac{d^2x^2}{a^2} - ax - \frac{d^2x}{a} + \frac{a^2 + d^2}{4}$.

Mais à cause de l'hyperbole équilatère, on a $\overline{MV}^2 = \overline{PM}^2 - \overline{PO}^2$, ce qui donne, en substituant, $\frac{d^2x^2}{a^2} - \frac{d^2x}{a} + \frac{d^2}{4} - \frac{2dxy}{a} + dy + y^2 = x^2 + \frac{d^2x^2}{a^2} - ax - \frac{d^2x}{a} + \frac{a^2}{4} + \frac{d^2}{4} - \frac{a^2}{4}$. Et en effaçant ce qui se détruit, il reste $-\frac{2dxy}{a} + dy + y^2 = x^2 - ax$, et en transposant tous les termes d'un même côté, on a.....

Digitized by Google

$x^2 - ax + \frac{2dxy}{a} - dy - y^2 = 0$; c'est l'équation même de Newton, qu'il fallait construire.

NOTE (54), *pour la page* 194. *Tome I.*

Il est facile de voir que les deux angles DQP, DMP sont égaux, car $QPA = BPM$, et (*par const.*) chacun de ces angles est la moitié de la différence des angles DBP, DAP. Donc $DBP = DAP + QPA + BPM$. Mais $DBP = BMP + BPM$. Donc $DAP + QPA + BPM = BMP + BPM$, et en effaçant de part et d'autre BPM, il reste $DAP + QPA$ ou $DQP = BMP$, ou bien $DQM = DMQ$.

NOTE (55), *pour la page* 195. *Tome I.*

Les deux proportions desquelles Newton déduit son théorême, sont, $DO - BN : DO :: ON : MO$; et $DO + AR : DO : OR : QO$. Donc si on alterne les moyens, en se souvenant que $MO = QO$, et que $AR = BN$, on aura $DO - BN : ON :: DO : MO$; et $DO + BN : OR :: DO : QO$ ou MO; donc $DO - BN : DO + BN :: ON : OR$. Si on ajoute les antécédens aux conséquens, et qu'ensuite on les en retranche, la dernière proportion donnera... $2DO : 2BN :: OR + ON : OR - ON$, et en divisant tout par 2, $DO : BN :: \frac{OR+ON}{2} : \frac{OR-ON}{2}$. Mais $\frac{OR+ON}{2} = \frac{NR}{2} = PR = PN$; car, à cause des deux triangles rectangles semblables PNB, PRA, on a, $PN : PB :: PR : PA$; mais (*par const.*) $PB = PA$, donc aussi $PN = PR$; donc $\frac{OR+ON}{2} = PN$. Ensuite $\frac{OR-ON}{2} = PO$; car $OR = PR + PO = PN + PO = ON + 2PO$, donc $OR = ON + 2PO$, donc $OR - ON = ON +$

Digitized by Google

$2PO - ON = 2PO$, donc $\frac{OR - ON}{2} = PO$. En substituant donc respectivement PN et PO au lieu de $\frac{OR + ON}{2}$, et de $\frac{OR - ON}{2}$, dans la dernière proportion, elle devient, $DO : BN :: PN : PO$, d'où l'on tire $DO \times PO = BN \times PN$, qui est l'équation de Newton.

NOTE (56), *pour la page* 195. *Tome I.*

Il faut montrer que l'angle DMQ sera double de l'angle DQM dans l'hypothèse. En effet, soit G l'angle donné dont DBA surpasse le double de DAB, on aura $DBA = 2DAB + G$. Ensuite $DBA = DMQ + BPM$. Mais $BPM = \frac{G}{3}$ (par construction). Donc $DBA = DMQ + \frac{G}{3}$. Donc en comparant cette seconde valeur de BDA à la première, nous aurons..... $2DAB + G = DMQ + \frac{G}{3}$, ou bien $6DAB + 3G = 3DMQ + G$, ou bien $6DAB + 2G = 3DMQ$. D'un autre côté..... $DQM = DAB + APQ$, ou bien $DQM = DAB + \frac{G}{3}$, ou bien $3DQM = 3DAB + G$, et encore $6DQM = 6DAB + 2G$. Et en comparant cette valeur de $6DAB + 2G$ à celle qui a été trouvée plus haut, il viendra, $6DQM = 3DMQ$, ou bien $DMQ = 2DQM$. C. Q. F. D.

NOTE (57), *pour la page* 196. *Tome I.*

On sait par les élémens de la géométrie qu'un angle quelconque M, d'un triangle DMO étant coupé en deux parties

Digitized by Google

égales par une droite MS, les deux segmens de la base, OS et DS sont proportionnels aux côtés qui leur correspondent, et qu'ainsi on a la proportion $DS : OS :: DM : MO$.

NOTE (58), *pour la page* 197. *Tome I.*

Dans le problême pris dans toute sa généralité, on suppose que l'angle DBA surpasse le double de l'angle DAB, d'un angle donné quelconque G, et l'on suppose aussi que $BPM = \frac{G}{3}$. Or, si BPM ou $\frac{G}{3} = 0$, il est clair que G lui-même est zéro; donc dans le cas où $BPM = 0$, on a simplement $DBA = 2DAB$, et c'est-là le cas où la courbe de trois dimensions devient une hyperbole.

NOTE (59), *pour la page* 197. *Tome I.*

Il sera facile de comprendre le théorême que Newton établit dans ce paragraphe, en construisant l'équation, $y^2 = 3x^2 + 2cx - c^2$, qu'il a trouvée plus haut.

Je remarque d'abord qu'elle n'a point de second terme par rapport à y, et que les y sont perpendiculaires à l'axe des x, je n'introduirai donc pas une nouvelle indéterminée à la place de y; mais comme il y a un second terme par rapport à x, il faut le faire disparaître. J'écris d'abord l'équation de cette manière..... $(A)\, x^2 + \frac{2cx}{3} - \frac{c^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 0$. Ensuite je fais, $x + \frac{c}{3} = u$,

Digitized by Google

ce qui donne, $x^2 + \frac{2cx}{3} = u^2 - \frac{c^2}{9}$, et en substituant à la place de $x^2 + \frac{2cx}{3}$, sa valeur, dans l'équation (A), elle devient.... $u^2 - \frac{c^2}{9} - \frac{c^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 0$, ou $\frac{y^2}{3} = u^2 - \frac{4c^2}{9}$, ou enfin.. $y^2 = 3\left(u^2 - \frac{4c^2}{9}\right)$ (B). Telle est l'équation qu'il faut construire. Je commence par chercher en quels endroits la courbe rencontre la droite sur laquelle se comptent les u (et remarquez que c'est la même sur laquelle se comptent les x, puisque les ordonnées pour les u comme pour les x, sont toujours les y). Je fais donc.... $3\left(u^2 - \frac{4c^2}{9}\right) = 0$, d'où $u^2 = \frac{4c^2}{9}$, ou bien $u = \pm \frac{2c}{3}$. Et en substituant à la place de u sa valeur $x + \frac{c}{3}$, il viendra.... $x + \frac{c}{3} = \pm \frac{2c}{3}$, ce qui donne deux valeurs de x, la première $x = \frac{c}{3}$, et la seconde $x = -c$. D'où l'on voit que la courbe rencontre l'axe des x ou des u en deux points, dont le premier est éloigné du point P vers la gauche de $\frac{1}{3}c$, et le second vers la droite d'une quantité c. La longueur de l'axe des u est donc en tout de $\frac{4}{3}c$. Je fais en conséquence (*Fig.* 6, *pour les Notes*) $VR = \frac{4}{3}c$. Voyons maintenant en quel point commencent les u. Pour cela j'emploie l'équation $x + \frac{1}{3}c = u$, qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à x. Dans la supposition de $u = 0$, j'ai $x = -\frac{c}{3}$, donc il faut porter à droite du point P, de P en C, une quantité égale à $\frac{c}{3}$, et le point C sera l'origine des u, et par conséquent le centre de l'hyperbole. Il faut chercher actuellement la longueur des diamètres conjugués; mais comme les co-ordonnées

Digitized by Google

co-ordonnées sont perpendiculaires entre elles, ces diamètres seront les axes mêmes. Je compare donc l'équation particulière..... $y^2 = 3\left(u^2 - \frac{4c^2}{9}\right)$ à l'équation de l'hyperbole par rapport à ses axes, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$. Le résultat de cette comparaison me donne, $\frac{b^2}{a^2} = 3$, et $a^2 = \frac{4c^2}{9}$. Je tire de la seconde, $a = \pm \frac{2c}{3}$. C'est-à-dire que le premier demi-axe est égal à $\frac{2}{3}c$, donc le premier axe tout entier $= \frac{4}{3}c$. La première équation donne, $b^2 = 3 \times a^2$, ou bien $b^2 = 3 \times \frac{4c^2}{9} = \frac{4c^2}{3}$. Donc $b = \frac{2c}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire que le second demi-axe $= \frac{2c}{\sqrt{3}}$, donc l'axe tout entier $= \frac{4c}{\sqrt{3}}$. J'aurais pu me dispenser de chercher la longueur du premier axe $2a$ ou $\frac{4}{3}c$, puisqu'elle avait déjà été déterminée précédemment, mais la seconde méthode étant générale, j'ai cru devoir l'indiquer. Rien n'est plus facile maintenant que la construction de la courbe. J'élève à l'extrémité V du premier axe, une perpendiculaire.... $VK = b = \frac{2c}{\sqrt{3}}$, et je tire la droite CK; elle sera l'asymptote de la courbe. Et pour faire voir que l'angle des asymptotes est de 120°, il suffit de démontrer que l'angle que fait l'asymptote CK avec l'axe VR est de 60°. Or $VC = a = \frac{2}{3}c$, et $VK = b = \frac{2c}{\sqrt{3}}$, donc $VC : VK :: \frac{2c}{3} : \frac{2c}{\sqrt{3}} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{\sqrt{3}} :: \frac{1}{\sqrt{3}} : 1 :: 1 : \sqrt{3}$. Donc $VC : VK :: 1 : \sqrt{3}$. Mais on a aussi, $VC : VK :: R :$ tangente VCK. Donc $1 : \sqrt{3} :: R :$ tangente VCK, d'où tangente $VCK = \frac{R \times \sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ (parce que je suis toujours maître de

Digitized by Google

supposer R égal à l'unité), et en employant les logarithmes, on trouve tang. $VCK = 0{,}2385606$ (logarithme de la tangente d'un angle de 60°), donc l'angle VCK est de 60°, donc l'angle total des asymptotes KCT est de 120°.

Mais peut-être vaut-il mieux démontrer cela directement par la construction que Newton indique. Je porte donc VC de V en N, et je tire NK, qui est visiblement égal à CK. A cause du triangle rectangle VCK, j'ai, $\overline{CK}^2 = \overline{VC}^2 + \overline{VK}^2$, ou..... $\overline{CK}^2 = \frac{4c^2}{9} + \frac{4c^2}{3} = \frac{16c^2}{9}$. Ce qui donne, $CK = \frac{4c}{3}$. Mais $CN = CV + VN = 2CV$ (*par const.*) $= \frac{4c}{3}$. Donc $CN = CK = NK$. Par conséquent, le triangle KNC est équilatéral, et chacun de ses angles vaut 60°. Donc l'angle $KCN = 60°$. Donc l'angle total des asymptotes $= 120°$. Donc (*Pl.* V, *Fig.* 6), si des points B et A on mène des droites BD et AD à un même point D de l'hyperbole décrite comme il vient d'être indiqué, l'angle ABD sera double de l'angle BAD. Par conséquent, l'angle EDA égalera le triple de l'angle BAD. On peut donc encore, par ce problême, opérer la trisection de l'angle.

NOTE (60), *pour la page* 198. *Tome I.*

(*Fig.* 7, *pour les Notes*). L'équation qui résout le problême étant, $x = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$, voici comment on peut la construire. Soit prolongée la droite BD jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point H la droite FE aussi prolongée; et les triangles semblables FCE, FDH donneront la proportion, $FC : CE :: d : e :: FH : HD$. Donc, si je suppose que $FH = d$, j'aurai $HD = e$,

Digitized by Google

et $\overline{FH}^2 - \overline{DH}^2 = \overline{FD}^2 (b^2) = d^2 - e^2$. Sur DH, comme diamètre, je décris un demi-cercle HKD, dans lequel j'inscris la corde $HK = DB = a$, et je tire la corde $DK = \sqrt{\overline{DH}^2 - \overline{HK}^2} = \sqrt{e^2 - a^2}$. Je porte DK sur la droite DF de D en O, et je mène OP parallèlement à DH, ce qui donne la proportion, $DF : FH :: DO$ ou $DK : PH$, ou bien $b : d :: \sqrt{e^2 - a^2} : PH = \frac{d\sqrt{e^2 - a^2}}{b}$, ou, en multipliant et divisant le second membre par b, $PH = \frac{db\sqrt{e^2 - a^2}}{b^2} = \frac{d\sqrt{b^2e^2 - a^2b^2}}{b^2}$, ou bien, en mettant pour b^2 sa valeur $d^2 - e^2$ trouvée plus haut, en la mettant, dis-je, dans le second terme sous le radical, ainsi qu'au diviseur, on aura, $PH = \frac{d\sqrt{b^2e^2 - a^2(d^2 - e^2)}}{d^2 - e^2}$, ou $PH = \frac{d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$. Ainsi PH égale la partie radicale de x, quant à la partie rationnelle $- \frac{be^2}{d^2 - e^2}$, voici comment elle se trouvera : j'élève au point H une ligne HL perpendiculairement à FE, jusqu'à ce qu'elle rencontre FD prolongée en un point L, et à cause de HD perpendiculaire à FL (*par const.*), on a la proportion.....

$FD\ (b) : DH\ (e) :: DH\ (e) : DL = \frac{e^2}{b} = \frac{be^2}{b^2} = \frac{be^2}{d^2 - e^2}$.

Donc $DL = \frac{be^2}{d^2 - e^2}$. Donc si je porte PH de L en C, j'aurai,

$$CD = CL - DL = PH - DL = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2} = x.$$

NOTE (61), *pour la page* 208. *Tome I.*

(*Fig.* 8, *pour les Notes*). Il est très-aisé d'obtenir le point E sans faire d'équation. En effet, soient $E : D :: FE : AE :: g : d$. Menons

Digitized by Google

la perpendiculaire FG, et appelons e la pesanteur relative du poids E qui le fait descendre selon EG, nous aurons $FE : EG :: g : e$. Donc à cause de la proportion $FE : AE :: g : d$, on aura aussi, $AE : EG$ ou $BE :: d : e$. Maintenant, dans le triangle rectangle BEA nous connaissons le côté BA, et le rapport des côtés BE et AE, cela suffit pour déterminer aussi la grandeur absolue de ces côtés. Pour cela je prends une unité arbitraire, et une ligne BK qui contienne autant d'unités qu'il y en a dans e; ensuite du point K comme centre, et avec une ouverture de compas qui contienne autant de ces unités qu'il y en a dans d, je trace un arc de cercle qui coupe AB au point L. Il est évident que cette construction donne $LK : BK :: d : e$. Donc si par le point A, je mène AE parallèlement à LK, le point E où cette parallèle rencontre la droite BG, sera le point cherché; car, à cause des parallèles, on a, $LK : BK :: d : e :: AE : BE$; et comme le triangle BEA contient le côté donné AB, il s'en suit qu'il est le triangle cherché, et que par conséquent le point E satisfait au problême. Au reste, la construction de l'équation de l'auteur nous aurait menés au même but par le même chemin.

NOTE (62), *pour la page* 238. *Tome I.*

(*Fig.* 9, *pour les Notes*). Newton dit que le triangle CHK est donné d'espèce. En effet, le premier point D étant donné de position, le premier point C l'est aussi nécessairement. Donc l'angle CAB est déterminé, ainsi que son égal eAd. Mais (*par const.*) l'angle Ade = l'angle ADE, et $AD = Ad$: donc tout est connu dans le triangle Ade; et puisqu'on a mené CH parallèlement à de, l'angle CHK est le supplément de l'angle connu deA. Par un

Digitized by Google

raisonnement semblable, on prouvera que tout est connu dans le triangle $B\delta f$, et comme CK est parallèle à $f\delta$ (*par const.*) l'angle CKH est le supplément de l'angle connu $Bf\delta$. Donc dans le triangle HCK tous les angles sont connus, donc le triangle est donné d'espèce. Il en serait de même d'un autre triangle $C'K'H'$ formé d'après la même loi, puisque les lignes ed, $f\delta$ sont immobiles.

NOTE (63), *pour la page* 239. *Tome I.*

(*Fig.* 9, *pour les Notes*). La Figure que donne Newton suffit pour faire voir comment on doit s'y prendre pour déterminer l'équation du point C, mais on ne voit pas avec la même évidence, comment elle pourrait servir à déterminer un second, un troisième points C. Pour le faire comprendre, j'ai fait la Figure 9 des Notes, dans laquelle il y a un second point C' dont nous allons chercher l'équation.

En conservant à toutes les lignes les noms qu'elles ont dans le problême, supposons que l'angle CAD soit venu à la position $C'AD'$, et que l'angle CBD soit venu à la position $C'BD'$. Prolongeons $C'A$ jusqu'en d', et $C'B$ jusqu'en δ', et remarquons que, par le mouvement angulaire, l'angle DAD' = l'angle CAC' = l'angle dAd'. Mais (*par const.*) l'angle Ade = l'angle ADE, et... $AD = Ad$. Donc les deux triangles dAd' et DAD' sont égaux en tout, donc $dd' = DD'$. On prouvera, par un semblable raisonnement, que le triangle DBD' = le triangle $B\delta\delta'$, donc on aura, $\delta\delta' = DD'$; donc $\delta\delta' = dd'$. Or (*par const.*) $\delta f = dG$, donc $f\delta' = Gd'$. Les triangles semblables $BK'C'$, $Bf\delta'$ donnent la proportion $BK'\ (x) : C'K'\ (y) :: Bf\ (c) : f\delta' = \frac{cy}{x} = d'G$.

Digitized by Google

Et $ed' = eG - d'G = b - \frac{cy}{x}$; et le triangle $C'H'K'$ qui est donné d'espèce, a ses côtés dans un rapport connu; soient donc $C'K' : C'H' :: d : e$, ou bien $y : C'H' :: d : e$, d'où $C'H' = \frac{ey}{d}$. Et $C'H' \left(\frac{ey}{d}\right) : H'K' :: e : f$, d'où $H'K' = \frac{fy}{d}$. Donc..... $AH' = AB - BK' - H'K' = m - x - \frac{fy}{d}$. Et les triangles semblables $AH'C'$, Aed' donnent la proportion..... $AH' \left(m - x - \frac{fy}{d}\right) : H'C' \left(\frac{ey}{d}\right) :: Ae\ (a) : ed' \left(b - \frac{cy}{x}\right)$. Cette proportion est la même que celle que Newton a obtenue pour le point C, elle conduira donc à la même équation, et c'est ce que nous nous proposions de faire voir.

NOTE (64), *pour la page* 241. *Tome I.*

(*Fig.* 10, *pour les Notes*). L'équation $f = \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{d^2c + d^2k - adk}{ck^2}}$, donnant deux valeurs de f, il s'en suit que si on substitue successivement chacune de ces valeurs dans l'équation..... $y = -\frac{a}{2} + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2bx - fax}$, on aura pour y quatre valeurs différentes, ce qui nous fait voir qu'il y a deux paraboles qui peuvent passer par les quatre points donnés. Je commence par construire l'équation $f = \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{d^2c + d^2k - adk}{ck^2}}$. Newton a mené à BD la parallèle CH, et il a pris DK moyenne proportionnelle entre DG et DH; menons encore à BD une autre parallèle AF, et les triangles semblables HCG, GAF nous donneront la proportion $AG\ (c) : GF\ (d - a) :: GC\ (k) : GH$, d'où.....

Digitized by Google

$GH = \frac{dk - ak}{c}$; et $DH = DG + GH = \frac{dc + dk - ak}{c}$. Et en prenant une moyenne proportionnelle DK entre DH et DG, on a, $DG\,(d) : DK :: DK : DH\left(\frac{dc + dk - ak}{c}\right)$, donc.....

$DK = \pm\sqrt{\frac{d^2c + d^2k - adk}{c}}$. Donc.....

$DG \pm DK = d \pm \sqrt{\frac{d^2c + d^2k - adk}{c}}$. Or $DG + DK = 2DG + GK$, et $DG - DK = -GK$. Donc.....

$\frac{2DG + GK}{GC} = \frac{d}{k} + \sqrt{\frac{d^2c + d^2k - adk}{ck^2}}$; et.....

$-\frac{GK}{GC} = \frac{d}{k} - \sqrt{\frac{d^2c + d^2k - adk}{ck^2}}$. Voilà les deux valeurs de f au moyen desquelles nous pouvons construire les deux paraboles qui passeraient chacune par les quatre points donnés. Je me bornerai à en construire une, en prenant la seconde valeur de f, qui est $f = -\frac{GK}{GC} = -\frac{p}{k}$ (en faisant $p = GK$). Cette valeur de f étant substituée dans l'équation $y = -\frac{a}{2} + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2bx - fax}$, la change en celle-ci, $y = -\frac{1}{2}a - \frac{px}{k} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{p^2bx}{k^2} + \frac{apx}{k}}$, ou en élevant tout au quarré, réduisant et transposant, il vient, $y^2 + \left(a + \frac{2px}{k}\right)y = \frac{bp^2x}{k^2} - \frac{p^2x^2}{k^2}$ (A). Je fais $y + \frac{1}{2}a + \frac{px}{k} = t$, ce qui donne $y^2 + \left(a + \frac{2px}{k}\right)y = t^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{apx}{k} - \frac{p^2x^2}{k^2}$; si on substitue le second membre de cette équation à la place du premier dans l'équation (A) on aura, après avoir effacé ce qui se détruit, $t^2 - \frac{apx}{k} - \frac{a^2}{4} = \frac{bp^2x}{k^2}$, ou $t^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{apk + bp^2}{k^2}\right)x$. (B). Pour ramener cette équation à la forme ordinaire de celle de la parabole, je fais $\frac{a^2}{4} + \left(\frac{apk + bp^2}{k^2}\right)x = mz$; m étant une indéterminée dont

Digitized by Google

la valeur sera fixée par les opérations subséquentes. Et en substituant $m\zeta$ au lieu de sa valeur dans l'équation (B), on aura, $t^2 = m\zeta$, équation ordinaire de la parabole, et qu'il faut construire. D'abord je cherche la ligne sur laquelle les t prennent leur origine; pour cela je construis l'équation $y + \frac{1}{2}a + \frac{px}{k} = t$, qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à y. Par le milieu E de AB je tire EN parallèlement à AC, et EI parallèlement à CK. Les deux triangles semblables ENI, CGK donnent $CG(k) : GK(p) :: EN$ ou $AG(x) : NI = \frac{px}{k}$; si à NI on ajoute $GN = AE = \frac{1}{2}a$, et $qG = y$, la somme sera $qI = qG + GN + NI = y + \frac{1}{2}a + \frac{px}{k} = t$, donc $qI = t$. Donc EI est le diamètre des co-ordonnées t et ζ. Il faut chercher maintenant l'origine de ce diamètre. Pour cela j'emploie l'équation, $\frac{a^2}{4} + \left(\frac{apk + bp^2}{k^2}\right)x = m\zeta$, qui donne..... $x + \frac{a^2k^2}{4(apk + bp^2)} = \frac{k^2 m\zeta}{apk + bp^2}$. Et je remarque que ζ devient zéro, lorsque $x = \frac{-a^2k^2}{4(apk + bp^2)}$. Je porte donc sur la droite AG, à partir du point A, et dans le sens opposé à G, une ligne $AL = \frac{a^2k^2}{4(apk + bp^2)}$, par le point L je tire, parallèlement à GD, la droite LV, et le point V où elle rencontre EI prolongée est l'origine des ζ. Or si dans l'équation $x + \frac{a^2k^2}{4(apk + bp^2)} = \frac{k^2 m\zeta}{apk + bp^2}$, on suppose $x = 0$, la valeur correspondante de ζ est VE, et l'équation devient, $\frac{a^2k^2}{4(apk + bp^2)} = \frac{k^2 m \times VE}{apk + bp^2}$, ou bien..... $\frac{a^2}{4} = m \times VE$, ou $\overline{BE}^2 = m \times VE$. Donc le paramètre m de cette parabole est déterminé, et il est égal à $\frac{\overline{BE}^2}{VE}$, ainsi que Newton l'a trouvé. C. Q. F. D.

NOTE

Digitized by Google

NOTE (65), *pour la page* 242. *Tome I.*

La proportion sur laquelle Newton établit la résolution de son problême dépend d'un théorême, fort élégant, qu'on trouve dans un petit ouvrage du citoyen Prony, intitulé : *Exposition d'une Méthode de construire les équations indéterminées qui se rapportent aux sections coniques.*

(*Fig.* 11, *pour les Notes*). Soit la courbe $GADE$ rapportée aux deux axes MX, MY, faisant entre eux un angle quelconque, et ayant pour équation $y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$; qu'on pourra écrire ainsi, $y^2 + (bx + d)y + cx^2 + ex + f = 0. (A)$.

Si nous cherchons les racines par rapport à y, on sait que $bx + d$, pris avec un signe contraire, est égal à leur somme, c'est-à-dire, que $-bx - d = HB + HE$, et que le dernier terme $cx^2 + ex + f$, est égal au produit de ces racines, ainsi on a $cx^2 + ex + f = HB \times HE$. Supposons que les facteurs du trinome $x^2 + \frac{ex}{c} + \frac{f}{c}$ soient $x - m = 0$, $x - n = 0$; nous aurons.....

$$x^2 + \frac{ex}{c} + \frac{f}{c} = (x - m)(x - n) = \frac{1}{c} \times HB \times HE \ (B).$$

Lorsque $y = 0$, l'équation (A) se réduit à $cx^2 + ex + f = 0$, ou $x^2 + \frac{ex}{c} + \frac{f}{c} = 0$. Donc dans ce cas, $(x - m)(x - n) = 0$, ce qui donne $x = m$, $x = n$. Or, on voit dans la figure que, $y = 0$ répond au point C ou au point A, et que les valeurs correspondantes de x sont MC, MA : donc $MC = m$, et $MA = n$. Donc $x - m = MH - MC$, ou bien $x - m = CH$, et $x - n = MH - MA$, ou $x - n = AH$. Donc en substituant ces valeurs de $x - m$ et

Digitized by Google

de $x - n$ dans l'équation (B) on aura, $CH \times AH = \frac{1}{c} \times HB \times HE$. D'où l'on tire $\frac{AH \times CH}{BH \times HE} = \frac{1}{c}$ (D).

On voit que le théorême s'applique à toutes les sections coniques, puisque la seule condition que nous ayions imposée à la courbe $GADE$, c'est qu'elle soit exprimée par l'équation..... $y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, qui appartient à toutes les sections coniques. Il résulte donc de là, cette propriété commune à toutes les courbes qui se rapportent à l'équation (A)....

Si une ligne droite rencontrant une ligne du second ordre en deux points, est elle-même coupée par plusieurs droites parallèles qui chacune rencontrent aussi la courbe en deux points, le rectangle de la partie de la première droite comprise entre une quelconque des parallèles, et un point de la courbe, par la partie aboutissante de la même parallèle, à l'autre point d'intersection avec la courbe, sera toujours en raison constante, avec le rectangle des deux parties de la parallèle, prises de la même manière.

(*Fig.* 12, *pour les Notes*). Dans la figure 12 on a, en vertu du théorême qui vient d'être démontrée..... $\frac{AH \times HC}{BH \times HE} = \frac{1}{c}$; $\frac{AI \times IC}{FI \times ID} = \frac{1}{c}$; $\frac{EK \times KG}{FK \times KD} = \frac{1}{c}$. De tous ces rapports égaux, on tire la proportion $AH \times HC : BH \times HE :: AI \times IC : FI \times ID :: EK \times KG : FK \times KD$; et c'est la proportion même de Newton.

1°. Il est bon d'observer que si le produit $AH \times HC$ des deux parties d'une ligne parallèle à l'axe des x, forme le premier antécédent, et le produit $BH \times HE$ des deux parties d'une ligne parallèle à l'axe de y, le premier conséquent; les produits des

Digitized by Google

deux parties de toutes les lignes parallèles à l'axe des x seront tous antécédens, et les produits des deux parties de toutes les lignes parallèles à l'axe des y, tous conséquens, ou bien réciproquement.

2°. Lorsqu'on prend les parties d'une ligne à partir d'un même point H vers un même côté, comme dans les rectangles $AH \times CH$, ou $BH \times EH$ (*Fig.* 11), c'est une preuve que le point H est hors de la courbe. Mais lorsqu'on prend les parties d'une ligne à partir d'un même point H vers des côtés différens de ce point, comme dans les produits $AH \times HC$, ou $BH \times HE$ (*Fig.* 12), c'est une preuve que le point H est au-dedans de la courbe.

Continuons à suivre Newton. Il dit que si le point H tombe entre tous les points A, C, B, E, ou hors de tous ces points, le point I devra tomber entre tous les points A, C, D, F, ou bien entièrement au-dehors, et le point K entre tous les points D, F, E, G, ou entièrement au-dehors. En effet, dans la Figure 12, le point H tombe entre tous les points A, C, B, E, et le point I tombe entre tous les points A, C, D, F, et le point K entre tous les points D, F, E, G; mais dans la Figure 11, où le point H tombe hors de tous les points A, C, B, E, le point I tombe aussi hors de tous les points A, C, D, F, et le point K hors de tous les points D, F, E, G.

Quant à ce qu'il ajoute, *que si le point H tombe entre les deux points A, C, et hors des deux autres B, E*, ou entre les deux points B, E, et hors des deux autres A, C, le point I devra tomber entre deux quelconques des quatre points A, C, F, D, et hors des deux autres; et que de même le point K devra tomber entre

Digitized by Google

deux quelconques des quatre points D, F, E, G, et hors de deux de ces mêmes quatre points; ces cas ont lieu lorsque la courbe qui passe par les points donnés A, B, C, D, E, et par les points trouvés F et G, est une hyperbole, et qu'une partie de ces points est placée sur une des branches de la courbe, et l'autre partie sur la branche opposée. Le premier cas se comprendra facilement par la seule inspection de la Figure 13 pour les Notes ; et le second cas, par l'inspection de la Figure 14.

Je dois l'explication de ces deux derniers cas, ainsi que les Figures 13 et 14 qui servent à les expliquer, à la bonté du citoyen Prony, à qui j'en témoigne ici toute ma reconnaissance.

NOTE (66), *pour la page* 244. *Tome I.*

En lisant avec attention la Note 65, la proportion que Newton fait ici, n'offrira plus aucune difficulté. En effet, la droite EA étant tangente en A, il s'en suit que le point A appartient aux deux branches de la courbe; et puisque le point E est hors de la courbe, tandis que les points D, C, sont à la courbe, il s'en suit qu'on doit avoir $\frac{AE \times AE}{DE \times CE}$ = une quantité constante; et comme le point F est hors de la courbe, et que le point B est sur la courbe, si l'on fait $\frac{AF \times AF}{BF \times FG}$ = la même quantité constante, ce qui donnera $\frac{\overline{AE}^2}{DE \times CE} = \frac{\overline{AF}^2}{BF \times FG}$, il est bien évident que le point G sera à la courbe. On fera un semblable raisonnement pour prouver que le point H y est aussi.

Digitized by Google

NOTE (67), *pour la page* 10. *Tome II.*

Plusieurs géomètres ont donné des démonstrations de cette règle de Newton, entre autres Mac-Laurin et Campbell. Le citoyen Lagrange a aussi donné une méthode pour reconnaître les racines imaginaires qu'une équation peut contenir, dans un traité sur *la Manière de résoudre les équations numériques de tous les degrés.* Mais comme il suit une marche différente de celle de Newton, je n'ai pu, à mon grand regret, m'aider de son travail. La démonstration qu'on va lire, de la règle de Newton, est presque entièrement de Campbell; je n'ai fait qu'en développer quelques parties, afin de la rendre plus claire. Quant à la seconde méthode de découvrir les racines imaginaires, qui se trouve à la fin de cette note, elle est de Mac-Laurin. Je l'ai considérablement raccourcie sans lui rien faire perdre, je crois, de sa clarté.

LEMME Ier. Dans toute équation affectée (*) du second degré $ax^2 - Bx + A = 0$ dont les racines sont réelles, la quatrième partie du quarré du coëfficient du second terme est plus grande que le rectangle du coëfficient du premier terme par le dernier. C'est-à-dire, que $\frac{1}{4}B^2 > aA$, et réciproquement si $\frac{1}{4}B^2 > aA$, les racines de l'équation seront réelles. Mais si $\frac{1}{4}B^2 < aA$, les racines seront imaginaires, car les deux racines de l'équation sont.....

$$x = \frac{\frac{1}{2}B + \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - aA}}{a}, \text{ et } x = \frac{\frac{1}{2}B - \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - aA}}{a}.$$

(*) On appelle équation affectée, celle dans laquelle l'inconnue monte à plusieurs degrés différens. Ainsi $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, est une équation affectée, parce qu'il s'y trouve différentes puissances x^3, x^2, x, de l'inconnue. Mais l'équation $x^n \pm B = 0$, est une équation non-affectée.

Digitized by Google

LEMME II. Quel que soit le nombre des racines impossibles d'une équation $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{-3} +$, etc..... $\pm dx^3 \mp cx^2 \pm bx \mp A = 0$, si on prend une autre équation dont les racines soient réciproques de celles de la première, on trouvera dans la seconde équation le même nombre de racines imaginaires que dans la première. En effet, mettons $\frac{1}{x}$ au lieu de x dans la proposée, elle deviendra..... $\frac{1}{x^n} - \frac{B}{x^{n-1}} + \frac{C}{x^{n-2}} - \frac{D}{x^{n-3}} +$, etc. $\pm \frac{d}{x^3} \mp \frac{c}{x^2} \pm \frac{b}{x} \mp A = 0$. Ou bien, en multipliant tous les termes par x^n, $Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - dx^{n-3} +$, etc. $\pm Dx^3 \mp Cx^2 \pm Bx \mp 1 = 0$; les racines de cette dernière équation sont les réciproques de celles de la première, et si la première a des racines imaginaires, la seconde en a autant. Soit, par exemple, l'équation $x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0$, dont les racines sont, a, b, c, d, parmi lesquelles c et d sont imaginaires, l'équation $Ax^4 - Dx^3 + Cx^2 - Bx + 1 = 0$, dont les racines sont, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, a aussi deux racines imaginaires, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$.

LEMME III. Si on multiplie chaque terme d'une équation du degré n par l'exposant de x dans ce terme, on abaissera l'équation d'un degré; si on réitère la même opération sur le produit, on l'abaissera encore d'un degré, et ainsi successivement. Il résulte de là qu'une équation (A) $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4}$, – etc. $\pm ex^4 \mp dx^3 \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0$, pourra toujours être ramenée à une équation du second degré qui aura cette forme..... $n \cdot \frac{n-1}{2} x^2 - (n-1) Bx + C = 0$. En effet, puisque l'équation (A) est du degré n, et qu'on veut, par des opérations

Digitized by Google

successives, l'abaisser au second degré, il est évident qu'il faudra faire $n-2$ opérations successives, et que chaque coëfficient sera composé de $n-2$ facteurs. Par la première opération, l'équation (A) devient, $nx^{n-1}-(n-1)Bx^{n-2}+(n-2)Cx^{n-3}-(n-3)Dx^{n-4}+(n-4)Ex^{n-5}-$, etc. $\pm 4ex^3 \mp 3dx^2 \pm 2cx \mp b=0$. Et celle-ci devient, par une seconde opération, $n(n-1)x^{n-2}-(n-1)(n-2)Bx^{n-3}+(n-2)(n-3)Cx^{n-4}-\ldots\ldots (n-3)(n-4)Dx^{n-5}+(n-4)(n-5)Ex^{n-6}-$, etc. $\pm 12ex^2 \mp 6dx \pm 2c=0$, qui se réduit, en divisant tous ses termes par le coëfficient 2 de son dernier terme $2c$, à..... $n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2}-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)Bx^{n-3}+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)Cx^{n-4}-(n-3)\left(\frac{n-4}{2}\right)Dx^{n-5}+$, etc. $\pm 6ex^2 \mp 3dx \pm c=0$. Et en opérant de nouveau sur celle-ci, on a..... $n\left(\frac{n-1}{2}\right)(n-2)x^{n-3}-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)(n-3)Bx^{n-4}+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)(n-4)Cx^{n-5}-$, etc. $\pm 12ex \mp 3d=0$, ou, en divisant tous ses termes par 3, coëfficient de son dernier terme $3d$, il vient..... $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3}-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)Bx^{n-4}+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)Cx^{n-5}-$, etc. $\pm 4ex \mp d=0$. Il est bien facile de voir qu'en opérant de même sur ce dernier résultat, on aurait, $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4}-\ldots\ldots (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)Bx^{n-5}+\ldots\ldots (n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)Cx^{n-6}-$, etc. $\pm e=0$, et ainsi de suite. Donc si on abaisse l'équation (A) jusqu'au second

Digitized by Google

degré, le coëfficient du premier terme aura $n-2$ facteurs dont les numérateurs vont en diminuant d'une unité, à commencer du deuxième facteur inclusivement; de sorte qu'il y a en tout $n-1$ diminutions; ainsi le numérateur du dernier facteur est $n-(n-1)$. Et comme les dénominateurs dans chaque facteur sont d'une unité plus grands que le nombre diminué dans ce même facteur, il s'en suit que le dernier facteur est, $\frac{n-(n-1)}{n-2}$. Donc le premier terme de l'équation du second degré est, $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\ldots\ldots\frac{n-(n-1)}{n-2}x^2$, ou bien $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{n-2}\right)x^2$, où l'on voit que de numérateurs à dénominateurs tous les termes se détruisent, excepté les deux premiers; ainsi on a, $n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2$. Le coëfficient du second terme contenant aussi $n-2$ facteurs, et chaque facteur allant en diminuant d'une unité, à commencer par le premier, il est clair que le nombre des unités diminuées est de $n-2$, et que le coëfficient du second terme est de cette forme, $-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\ldots\ldots\frac{n-(n-2)}{n-2}Bx$, ou bien..... $-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\ldots\left(\frac{2}{n-2}\right)Bx$, où tous les termes se détruisent de numérateurs à dénominateurs, excepté le premier. En sorte que le second terme est, $-(n-1)Bx$. Par le même raisonnement on trouvera que le coëfficient du troisième terme est, $+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\ldots\left(\frac{n-(n-3)}{n-2}\right)C$, ou bien..... $+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\ldots\left(\frac{3}{n-2}\right)C$, qui se réduit à $+C$. Donc enfin l'équation (A), abaissée par des opérations successives au second degré, aura cette forme.....

$$n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2-(n-1)Bx+C=0.$$

COROLLAIRE.

Digitized by Google

COROLLAIRE. En considérant attentivement dans le Lemme précédent de quelle manière on est descendu de l'équation (A), à l'équation du second degré $n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2-(n-1)Bx+C=0$, on verra facilement quelle forme il faudrait donner aux équations réascendantes, pour remonter, par des opérations successives, de l'équation du second degré à l'équation (A).

Par exemple, si je veux remonter au troisième degré, je multiplie tous les termes de l'équation du second, par le facteur $n-2$, et je divise ce facteur par 3 pour le premier terme, par 2 pour le second, par 1 pour le troisième, ensuite j'ajoute un nouveau coëfficient D, auquel je donne un signe différent de celui de C. J'ai donc, $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)x^3-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)Bx^2+(n-2)Cx-D=0$. Pour remonter au quatrième degré, je multiplierai tous les termes de cette dernière équation par $n-3$, que je diviserai par 4 pour le premier terme, par 3 pour le second, par 2 pour le troisième, par 1 pour le quatrième, ensuite j'ajouterai un nouveau coëfficient E, auquel je donnerai un signe différent de celui de D, et j'aurai, $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)x^4-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)Bx^3+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)Cx^2-(n-3)Dx+E=0$.

Maintenant, si M désigne un coëfficient quelconque, L et N désigneront les coëfficiens les plus voisins, en sorte que m étant l'exposant de M, $m-1$ sera l'exposant de L, et $m+1$ l'exposant de N (j'entends par exposant d'un coëfficient, le nombre qui désigne le rang qu'il occupe dans l'équation; ainsi dans l'équation précédente, 1 est l'exposant de B, 2 celui de C, 3 celui de D, etc.). Supposons que je veuille faire remonter l'équation du second degré à une équation dont le dernier coëfficient soit N, il est clair, par ce qui vient d'être dit, que le degré

Digitized by Google

de cette équation sera $m+1$, et que l'équation immédiatement inférieure, qui avait pour dernier terme M, était du degré m. Or, on vient de voir plus haut que lorsque j'ai voulu faire remonter l'équation au quatrième degré, j'ai multiplié tous les termes de l'équation du troisième par le facteur $n-3$, que j'ai divisé par 4 pour le premier terme, par 3 pour le second, etc. Donc, pour avoir l'équation du degré m, je multiplierai tous les termes de l'équation immédiatement inférieure par $n-(m-1)$, de sorte que les deux derniers termes de l'équation du degré m, seront, $\pm(n-(m-1)Lx \mp M$, ou bien $\pm(n-m+1)Lx \mp M$. Et les trois derniers termes de l'équation du degré $m+1$, ou de l'équation dont le dernier terme est N, seront..... $\pm(n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right)Lx^2 \mp (n-m)Mx \pm N$. Ainsi l'équation réascendante qui aura pour dernier terme N, sera de cette forme,

$$(B)\, n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-m}{m+1}\right)x^{m+1}-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\cdots$$
$$\left(\frac{n-m}{m}\right)Bx^m+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{n-m}{m-1}\right)Cx^{m-1}-, \text{ etc.}$$
$$\pm(n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right)Lx^2 \mp (n-m)Mx \pm N=0.$$

Lemme IV. Si l'équation (A) du Lemme troisième a toutes ses racines réelles, toutes ses équations descendantes auront aussi leurs racines réelles (voyez le n°. 143 de l'analyse démontrée du Père Reyneau), et par conséquent l'équation..... $n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2-(n-1)Bx+C=0$, aura aussi ses racines réelles, puisqu'elle est une des descendantes de l'équation (A). Mais cette proposition n'a point de converse, c'est-à-dire, que les racines d'une équation descendante quelconque, par exemple.....

Digitized by Google

$n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2-(n-1)Bx+C=0$, peut avoir toutes ses racines réelles, sans qu'on puisse en conclure que l'équation (A) ait toutes ses racines, ni même aucune de ses racines réelles. (Voyez la remarque X du n°. 143 de l'ouvrage cité).

Mais quel que soit le nombre des racines imaginaires qui se rencontre, dans une des équations descendantes, il s'en trouvera au moins autant dans l'équation (A).

PROPOSITION. Si l'équation (A) $x^n-Bx^{n-1}+Cx^{n-2}-Dx^{n-3}+Ex^{n-4}-$ etc. $\pm ex^4\mp dx^3\pm cx^2\mp bx\pm A=0$, a toutes ses racines réelles, et que M soit un coëfficient quelconque de cette équation, L et N les deux coëfficiens adjacens, m l'exposant de M; je dis que le quarré du coëfficient M multiplié par la fraction $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}$ donnera un produit plus grand que le rectangle $L\times N$ des coëfficiens adjacens. C'est-à-dire qu'on aura, $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}\times M^2>L\times N$.

DÉMONSTRATION. Si toutes les racines de l'équation (A) sont réelles, par le Lemme IV, les racines de l'équation descendante $n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2-(n-1)Bx+C=0$, sont aussi réelles. Or, en la résolvant on a, $x=\frac{B}{n}\pm\sqrt{\frac{B^2}{n^2}-\frac{2C}{n(n-1)}}$. Il faut donc pour que les racines de cette équation soient réelles, que $\frac{B^2}{n^2}>\frac{2C}{n(n-1)}$, ou que $\frac{B^2}{n}>\frac{2C}{n-1}$, ou enfin que..... $\frac{n-1}{2n}\times B^2>1\times C$. Ainsi dans l'équation (A) dont toutes les racines sont réelles, le produit du quarré du coëfficient de son second terme par un fraction dont le numérateur est l'exposant du

Digitized by Google

degré de cette équation diminué d'une unité, et le dénominateur, le double de ce même exposant, ce produit, dis-je, est plus grand que le produit du coëfficient du premier terme par le coëfficient C du troisième; car tout ce discours n'est que la traduction de cette expression analytique, $\frac{n-1}{2n} \times B^2 > 1 \times C$. Maintenant, par le Lemme II, si toutes les racines de l'équation (A) sont réelles, celles de l'équation $Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - dx^{n-3} + ex^{n-4} -$, etc. $\pm Ex^4 \mp Dx^3 \pm Cx^2 \mp Bx \pm 1 = 0$, ou $x^n - \frac{b}{A} x^{n-1} + \frac{c}{A} x^{n-2} - \frac{d}{A} x^{n-3} + \frac{e}{A} x^{n-4} -$ etc., $\pm \frac{E}{A} x^4 \mp \frac{D}{A} x^3 \pm \frac{C}{A} x^2 \mp \frac{B}{A} x \pm \frac{1}{A} = 0$, seront aussi toutes réelles, puisqu'elles sont les réciproques des racines de l'équation (A). Donc d'après ce qui vient d'être démontré, on aura aussi $\frac{n-1}{2n} \times \frac{b^2}{A^2} > 1 \times \frac{c}{A}$, ou bien $\frac{n-1}{2n} \times \frac{b^2}{A} > 1 \times c$, ou enfin $\frac{n-1}{2n} \times b^2 > A \times c$. Donc dans l'équation (A) dont toutes les racines sont réelles, b^2 quarré du coëfficient de x multiplié par la fraction $\frac{n-1}{2n}$, donne un produit plus grand que le rectangle de c coëfficient de x^2 par le dernier terme A.

Il a été dit dans le Lemme IV que si toutes les racines de l'équation (A) sont réelles, celles de toutes ses équations descendantes seront aussi réelles; mais nous avons prouvé dans le corollaire du Lemme III que l'équation (B) $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\ldots\left(\frac{n-m}{m+1}\right)x^{m+1} - (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\ldots\left(\frac{n-m}{m}\right)Bx^m + (n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\ldots\left(\frac{n-m}{m-1}\right)Cx^{m-1} -$ etc.....

Digitized by Google

$\pm (n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right) Lx^2 \mp (n-m) Mx \pm N = 0$, était une des descendantes de l'équation (A), donc toutes ses racines sont aussi réelles, donc d'après ce qui vient d'être prouvé, on a, $\frac{m}{2(m+1)} (n-m)^2 M^2 > (n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right) L \times N$, ou bien en multipliant chaque membre par 2, ensuite en divisant par $(n-m)(n-m+1)$, il viendra $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)} \times M^2 > L \times N$. C. Q. F. D.

Corollaire. Si l'on fait successivement $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, etc. l'équation (B) deviendra aussi successivement chacune des descendantes de l'équation (A), à partir de l'équation du second degré, et en remontant par tous les degrés successifs, de sorte qu'au moment où on fera $m = n - 1$, l'équation (B) se confondra avec l'équation (A), et lorsque l'équation (B) représentera l'équation du second degré, le coëfficient M représentera le coëfficient B, L représentera 1, et N, C; lorsque l'équation (B) représentera l'équation descendante du troisième degré, le coëfficient M représentera C, L représentera B, et N représentera D, et ainsi de suite. Donc M aura représenté successivement tous les coëfficiens de l'équation (A), et L et N les coëfficiens adjacens; or, comme dans tous ces cas, l'inégalité $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)} \times M^2 > L \times N$ a toujours lieu, on en conclut généralement, que si une équation (A) a toutes ses racines réelles, le produit du quarré d'un quelconque de ses coëfficiens par la fraction $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}$, ($m$ étant l'exposant de ce coëfficient, et n l'exposant du degré de l'équation), ce produit, dis-je, sera toujours plus grand que le produit des deux coëfficiens adjacens.

Digitized by Google

Il ne s'agit plus maintenant que de démontrer de quelle manière on déduit de la théorie précédente les fractions qui doivent être écrites, d'après la règle de Newton, au-dessus de chaque terme intermédiaire de l'équation ; or, nous avons vu, que si on fait dans l'équation (B), $m = 1$, M représente le coëfficient B de l'équation (A), mais dans ce cas la fraction générale $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}$, devient $\frac{n-1}{2n}$; si on fait $m = 2$, M représente C, et la fraction générale devient $\frac{2(n-2)}{3(n-1)}$; si on fait $m = 3$ dans l'équation (B), M représente D, et la fraction générale devient $\frac{3(n-3)}{4(n-2)}$; de même si on fait $m = 4$, $m = 5$, $m = 6$, etc., M représentera respectivement E, F, G, etc., et la fraction générale deviendra aussi successivement $\frac{4(n-4)}{5(n-3)}$, $\frac{5(n-5)}{6(n-4)}$, $\frac{6(n-6)}{7(n-5)}$, etc.; et en écrivant chacune de ces fractions au-dessus de leur terme correspondant dans l'équation $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} +$, etc.... $\pm A = 0$, on aura.....

$$\frac{n-1}{2n} \quad \frac{2(n-2)}{3(n-1)} \quad \frac{3(n-3)}{4(n-2)} \quad \frac{4(n-4)}{5(n-3)} \quad \frac{5(n-5)}{6(n-4)}$$

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} -, \text{etc.....}$$

$\pm A = 0$, et d'après ce qui a été démontré dans la proposition, on aura, $\frac{n-1}{2n} \times B^2 > 1 \times C$; $\frac{2(n-2)}{3(n-1)} \times C^2 > B \times D$; $\frac{3(n-3)}{4(n-2)} \times D^2 > C \times E$, et ainsi de suite, si toutes les racines de l'équation (A) sont réelles : mais si quelqu'une de ces inégalités avait lieu en sens contraire, ce serait une preuve que l'équation (A) contiendrait quelques racines imaginaires. La règle est donc complettement démontrée.

Digitized by Google

Examinons encore ce que dit Newton sur la manière de reconnaître le nombre des racines imaginaires par le nombre des variations des signes souscrits. Supposons qu'on ait $\frac{n-1}{2n} \times B^2 > 1 \times C$, c'est une preuve que la dernière équation descendante, ou celle du second degré, a ses deux racines réelles; supposons encore que $\frac{2(n-2)}{3(n-1)} \times C^2 < B \times D$, c'est une preuve que l'équation descendante du troisième degré a quelque racine imaginaire, donc elle en a deux. Or nous avons vu, par le Lemme IV, que cela était possible, lors même que l'équation descendante du second degré a ses deux racines réelles. Donc en vertu de la règle, les signes souscrits dans cette équation du troisième degré seront + sous le premier terme, + sous le second, — sous le troisième, et + sous le quatrième; ainsi les signes souscrits seront + + — +, où l'on voit que du second au troisième il y a une variation, et une autre du troisième au quatrième, donc il y a deux variations, donc, par la règle de Newton, il doit y avoir deux racines imaginaires, et nous avons vu qu'elles y sont en effet. Le lecteur appliquera facilement la même règle sur les autres équations descendantes, en remontant de proche en proche jusqu'à l'équation (A).

La règle de Newton que nous venons de démontrer est souvent moins propre que la suivante à faire reconnaître les racines imaginaires qui se trouvent dans une équation.

Seconde méthode de reconnaître les racines imaginaires qu'une équation peut contenir.

DÉFINITIONS. Soit l'équation $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} + Gx^{n-6} - Hx^{n-7} + Ix^{n-8} - Kx^{n-9} +$, etc. $= 0$,

Digitized by Google

et que ses racines soient, $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k$, etc. j'appelle a, b, c, d, e, etc. les termes ou les parties du coëfficient B; et par la même raison, ab, ac, ad, bc, bd, etc. les termes ou les parties du coëfficient C; abc, abd, bcd, etc. les parties ou les termes du coëfficient D, et ainsi du reste. J'entends par dimensions d'un terme, ce que j'ai appelé précédemment exposant d'un coëfficient, ainsi D est de trois dimensions, parce que chacune de ses parties abc, abd, etc. est le produit de trois racines. Lorsque dans un terme $abcdef$ du coëfficient G on trouve une partie entière abc du coëfficient D, j'appelle $abcdef$ et abc les parties *semblables* de D et de G; de même $abcd$, et $abcdefg$ sont les parties *semblables* de E et de H, puisque H contient toutes les racines de la partie de E. J'appelle parties *dissemblables*, celles qui n'ont aucune racine commune; ainsi abc et $defgh$ sont des parties *dissemblables* de D et de F. L'expression $C' \times G'$ dans laquelle C et G sont marqués d'un accent, cette expression, dis-je, indiquera la somme des produits qu'on peut obtenir en multipliant les parties d'un coëfficient C par les parties semblables d'un autre coëfficient G; de même $D' \times F'$ exprimera la somme des produits qu'on peut obtenir en multipliant entre elles les parties semblables de D et de F. L'expression $C' \times C'$ indique la somme des quarrés de tous les termes du coëfficient C; mais $C' \times C$ exprime la somme de tous les produits qu'on peut faire en multipliant l'un par l'autre deux termes quelconques de C; d'où il résulte que $C^2 = C' \times C' + 2C'C$. Tout cela bien compris, il sera facile d'entendre la proposition suivante.

PROPOSITION Iere. *Si on appelle m la différence des dimensions de deux coëfficiens quelconques D et F, je dis qu'on aura.....*

$D . F$

Digitized by Google

$D \times F = D' \times F' + (m+2)\, C' \times G' + \left(\frac{m+3}{1}\right)\left(\frac{m+4}{2}\right) B' \times H' + \left(\frac{m+4}{1}\right)\left(\frac{m+5}{2}\right)\left(\frac{m+6}{3}\right) 1 \times I$, ($C$ et G étant les coëfficiens adjacens à D et F; B et H les coëfficiens adjacens à C et à G; enfin 1 et I, les coëfficiens adjacens à B et à H).

Démonstration. 1°. On sait que $D = abc + abd + abe + abf + abg +$, etc., et $F = abcde + abcdf + abcdg + bcdef + bcdeg +$, etc. On sait encore que dans l'expression du produit $D \times F$, chaque terme de $D' \times F'$, tel que $a^2 b^2 c^2 de$, ou tel que $a^2 b^2 c^2 df$, ou, etc., ne s'y trouve qu'une fois;

2°. Que chaque terme de $C' \times G'$, tel que $a^2 b^2 cdef$, peut être le produit, ou de abe par $abcdf$, ou celui de abf par $abcde$, ou celui de abc par $abdef$, enfin il peut être le produit d'un terme quelconque de D qui, outre les racines a, b, contienne une des autres racines c, d, e, f, multiplié par un terme de F qui outre les racines a, b contienne les trois autres; c'est-à-dire que le produit $a^2 b^2 cdef$ doit se trouver autant de fois qu'il contient de racines outre a et b; ou en général, autant de fois qu'il y a d'unités dans la différence des dimensions de C et G. Or, la différence des dimensions de D et F étant m, celle de C et G sera $m+2$. Ainsi dans l'expression de la valeur du produit $D \times F$, le second terme $C' \times G'$, aura pour coëfficient $m+2$.

3°. Chaque terme du produit $B' H'$, tel que $a^2 bcdefg$, peut être le produit d'une partie de D qui outre la racine a contienne deux quelconques des autres racines b, c, d, e, f, g, etc. (dont le nombre égale la différence des dimensions de B et de H, c'est-à-dire, $m+4$) multipliée par une partie de F, qui outre la racine a contienne

Digitized by Google

les quatre autres. Ainsi $a^2bcdefg$, ou tout autre terme du produit $B'H'$, doit se trouver autant de fois qu'un nombre $m+4$ de quantités peut donner de produits différens, ces quantités étant multipliées deux-à-deux; or le nombre des produits différens est exprimé par $(m+4)\left(\frac{m+4-1}{2}\right)$, ou bien $(m+3)\left(\frac{m+4}{2}\right)$. Donc dans l'expression de la valeur du produit $D \times F$, le coëfficient du troisième terme $B' \times H'$ sera $(m+3)\left(\frac{m+4}{2}\right)$ (*).

4°. Chaque terme du produit $1 \times I$, comme $abcdefghi$, peut être le produit d'une partie quelconque de D, qui contienne trois des racines de I par une partie de F qui contienne toutes les autres; ainsi le produit de 1 par I doit se trouver dans l'expression de la valeur de $D \times F$, autant de fois qu'un nombre $m+6$ de quantités multipliées trois-à-trois peuvent donner de produits différens. Or, ce nombre de produits est, $(m+6)\left(\frac{m+5}{2}\right)\left(\frac{m+4}{3}\right)$. Ainsi le coëfficient du quatrième terme dans l'expression de la valeur du produit $D \times F$, sera, $(m+3)\left(\frac{m+4}{2}\right)\left(\frac{m+5}{3}\right)$.

(*) En effet, la différence m des dimensions de D et de F étant 2..... $(m+3)\left(\frac{m+4}{2}\right) = 15$, mais les parties de D qui, outre la racine a, contiennent deux quelconques des autres racines b, c, d, e, f, g, sont abc, abd, abe, abg, abf, acd, ace, acg, acf, ade, adg, adf, aef, aeg, agf, qui sont au nombre de 15, et si on multiplie chacune de ces parties qui contiennent a et deux autres lettres, par chacune des parties de F, qui, outre la lettre a, contiennent le reste des quatre autres lettres, on trouvera quinze fois le même produit $B'H'$ ou $a^2bcdefg$; par exemple, on multipliera abc par $adefg$, ou abd par $acefg$, ou abe par $abcdfg$, etc., et on voit que tous ces produits sont toujours $a^2bcdefg$, et que ce même produit se trouvera quinze fois.

Digitized by Google

Et en général, si dans l'expression de la valeur d'un produit de deux coëfficiens quelconques D et F, x exprime l'ordre d'un terme quelconque de cette valeur, par exemple de $B' \times H'$, c'est-à-dire si x exprime le nombre des termes qui précèdent $B' \times H'$, le coëfficient du terme $B' \times H'$ sera, $\left(\frac{2x+m}{1}\right)\left(\frac{2x+m-1}{2}\right)\left(\frac{2x+m-2}{3}\right)$, etc. en prenant autant de fractions dans cette série qu'il y a d'unités dans x.

Donc enfin, en rassemblant toutes les parties que nous avons trouvées, nous aurons, $D \times F = D' \times F' + (m+2)\, C' \times G' + \left(\frac{m+3}{1}\right)\left(\frac{m+4}{2}\right) B' \times H' + \left(\frac{m+4}{1}\right)\left(\frac{m+5}{2}\right)\left(\frac{m+6}{3}\right) 1 \times I$. C. Q. F. D.

Corollaire I. Si par le moyen de la proposition qui vient d'être démontrée, on cherche le quarré de quelque coëfficient, comme E, par exemple, alors $m = 0$; car, puisque c'est le coëfficient E qu'on multiplie par lui-même, il est évident que la différence de dimensions des coëfficiens est nulle, et qu'on aura.....
$E^2 = E' \times E' + 2\, D' \times F' + 3 \times \frac{4}{2} C' \times G' + 4 \times \frac{5}{2} \times \frac{6}{3} B' \times H' + 5 \times \frac{6}{2} \times \frac{7}{3} \times \frac{8}{4} \times I = E' \times E' + 2\, D' \times F' + 6\, C' \times G' + 20\, B' \times H' + 70\, I$.
Or, nous avons dit dans les définitions que $E' \times E$ exprimait la somme des produits de deux parties quelconques de E, donc $E^2 = E' \times E' + 2\, E' \times E$, donne $E' \times E = \frac{E^2}{2} - \frac{E' \times E'}{2}$. Et en substituant à la place de $\frac{E^2}{2}$ sa valeur trouvée plus haut, il viendra, $E' \times E = D' \times F' + 3\, C' \times G' + 10\, B' \times H' + 35\, I$.

Digitized by Google

COROLLAIRE II. Nous tirerons encore de la même proposition les théorêmes suivans :

THÉOR. (1). $E^2 = E' \times E' + 2D' \times F' + 6C' \times G' + 20B' \times H' + 70I.$
THÉOR. (2). $D \times F = \ldots\ldots\ldots D' \times F' + 4C' \times G' + 15B' \times H' + 56I.$
THÉOR. (3). $C \times G = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C' \times G' + 6B' \times H' + 28I.$
THÉOR. (4). $B \times H = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B' \times H' + 8I.$

COROLLAIRE III. Par le moyen des théorêmes du corollaire II, nous trouverons facilement cette équation..... $E' \times E' = E^2 - 2D \times F + 2C \times G - 2B \times H + 2I.$ Car le théor. (1) donne, $(A)\ E' \times E' = E^2 - 2D' \times F' - 6C' \times G' - 20B' \times H' - 70I.$ Et le théorême (2) donne..... $2D' \times F' = 2D \times F - 8C' \times G' - 30B' \times H' - 112I.$ Et en substituant cette valeur de $2D' \times F'$ dans l'équation (A), elle deviendra, $(B)\ E' \times E' = E^2 - 2D \times F + 2C' \times G' + 10B' \times H' + 42I.$ Le théorême (3) donne, $2C' \times G' = 2C \times G - 12B' \times H' - 56I$, et en substituant à la place de $2C' \times G'$ sa valeur, dans l'équation (B), elle devient $(C)\ E' \times E' = E^2 - 2D \times F + 2C \times G - 2B' \times H' - 14I.$ Le théorême (4) donne, $2B' \times H' = 2B \times H - 16I$, et en substituant dans l'équation (C), elle devient enfin..... $(D)\ E' \times E' = E^2 - 2D \times F + 2C \times G - 2B \times H + 2 \times I.$ On trouverait de même.....

$$D' \times F' = D \times F - 4C \times G + 9B \times H - 16I.$$
$$C' \times G' = \ldots\ldots\ldots C \times G - 6B \times H + 20I.$$
$$B' \times H' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B \times H - 8I.$$

PROPOSITION II. *Soit* $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, etc. *en prenant autant de fractions que le coëfficient E a de dimensions, on aura toujours,*

Digitized by Google

$\frac{l-1}{2l} \times E^2 > D \times F - C \times G + B \times H - I$, *si les racines de l'équation sont toutes réelles.*

J'entends par l, le nombre de termes ou de parties dont est composé un coëfficient quelconque E.

Nous avons vu (*dans l'unique proposition de la première partie de cette Note, page* 187) que dans le cas où toutes les racines d'une équation sont réelles, on a toujours, $\frac{n-1}{2n} \times B^2 > C$, n désignant le degré quelconque d'une équation, B le coëfficient du second terme, et C celui du troisième; d'où il résulte que n peut représenter tous les nombres entiers positifs, donc si je désigne par l un nombre entier positif quelconque, j'aurai aussi, $\frac{l-1}{2l} \times B^2 > C$, ou bien..... $(l-1)B^2 > 2l \times C$. Mais B désigne la somme des racines prises avec un signe contraire, et C les produits deux-à-deux de toutes les racines; donc cette inégalité prouve d'une manière générale que le quarré d'un certain nombre de quantités, multiplié par $l-1$, est plus grand que la somme de leurs produits deux-à-deux, multipliée par $2l$. Donc $(l-1)E^2 > 2l \times E' \times E$ (car $E' \times E$ est le produit deux-à-deux de tous les termes de E. *Voyez les définitions*). Ou bien $\frac{l-1}{2l} \times E^2 > E' \times E$. Mais on a (*par la définition*).... $E^2 = E' \times E' + 2E' \times E$, d'où l'on tire, $2E' \times E = E^2 - E' \times E'$. Or, l'équation ($D$) trouvée dans le corollaire III, donne..... $E^2 - E' \times E' = 2D \times F - 2C \times G + 2B \times H - 2I$, donc $2E' \times E = 2D \times F - 2C \times G + 2B \times H - 2I$. Ou bien..... $E' \times E = D \times F - C \times G + B \times H - I$. Donc enfin on a..... $\frac{l-1}{2l} \times E^2 > D \times F - C \times G + B \times H - I$, lorsque toutes les racines de l'équation sont réelles. C. Q. F. D.

Digitized by Google

CONCLUSION. Nous avons désigné par l le nombre des parties dont un coëfficient quelconque est composé, et nous avons fait, $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, etc. en prenant autant de fractions que le coëfficient E a de dimensions, en sorte que si E est le premier coëfficient, l désignera le nombre des racines de l'équation, et on aura, $l = n$; si E représente le deuxième coëfficient, ou C, l désignera le nombre des produits deux-à-deux, et on aura, $l = n \times \frac{n-1}{2}$; si E désigne le troisième coëfficient, ou D, l désignera le nombre des produits trois-à-trois de toutes les racines, et on aura, $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, et ainsi de suite; donc l désigne successivement les coëfficiens des différens termes du produit d'un nombre n de binomes multipliés les uns par les autres, ou bien les différens coëfficiens d'un binome élevé à la puissance n; et on aura la fraction, $\frac{l-1}{2l}$, par laquelle il faut multiplier le quarré du coëfficient qu'on examine, on aura, dis-je, cette fraction, en diminuant d'une unité le coëfficient correspondant d'un binome élevé à une puissance n de même degré que l'équation, et divisant le reste par le double de ce même coëfficient du binome.

Tout cela s'entendra mieux par un exemple. Soit l'équation.... $x^7 - Bx^6 + Cx^5 - Dx^4 + Ex^3 - Fx^2 + Gx - H = 0$, dont les racines sont, a, b, c, d, e, f, g; dans ce cas, $n = 7$; et si on élève un binome quelconque à la septième puissance, les coëfficiens des termes intermédiaires seront, 7, 21, 35, 35, 21, 7, et en diminuant chacun de ces coëfficiens d'une unité, et divisant chaque reste par le double de ce même coëfficient, on aura..... $\frac{6}{14}$, $\frac{20}{42}$, $\frac{34}{70}$, $\frac{34}{70}$, $\frac{20}{42}$, $\frac{6}{14}$ (*), ou bien $\frac{3}{7}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{17}{35}$, $\frac{17}{35}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{3}{7}$. Et en

(*) Ainsi $\frac{l-1}{2l}$ représente successivement $\frac{6}{14}$, $\frac{20}{42}$, $\frac{34}{70}$, etc.

Digitized by Google

écrivant toutes ces fractions sur les termes moyens de l'équation, on aura, $x^7 - \overset{\frac{3}{7}}{B}x^6 + \overset{\frac{10}{21}}{C}x^5 - \overset{\frac{17}{35}}{D}x^4 + \overset{\frac{17}{35}}{E}x^3 - \overset{\frac{10}{21}}{F}x^2 + \overset{\frac{3}{7}}{G}x - H = 0$, et d'après ce qui a été démontré, si toutes les racines de cette équation sont réelles, il viendra, $\frac{3}{7}B^2 > C$; $\frac{10}{21}C^2 > B \times D - C$; $\frac{17}{35}D^2 > C \times E - B \times F + G$; $\frac{17}{35}E^2 > D \times F - C \times G + B \times H$; $\frac{10}{21}F^2 > G \times E - D \times H$; $\frac{3}{7}G^2 > F \times H$.

Cette méthode, comme nous l'avons dit en commençant, fait souvent découvrir plus de racines imaginaires que la règle de Newton, ou même en fait découvrir dans de certaines équations où la règle n'en fait appercevoir aucunes.

NOTE (68), *pour la page* 23. *Tome II.*

Ce beau théorême de Newton, qui est d'un usage si étendu dans la haute géométrie, n'a été démontré d'une manière générale que bien du temps après la première publication de l'Arithmétique universelle. Ceux qui paraissent en avoir trouvé les premiers la démonstration sont Mac-Laurin dans son Algèbre, Castillon dans ses Commentaires sur l'Arithmétique universelle, et Frédéric Baermann. Les deux premiers n'ont employé que les moyens de l'algèbre ordinaire, le troisième a eu recours au calcul des différences finies. Celle que j'offre au lecteur, et qui m'a paru aussi facile qu'élégante, est extraite des Notes que le citoyen Labay a publiées à la suite de son excellente traduction de l'Introduction à l'Analyse infinitesimale d'Euler ; j'y ai fait des développemens qui m'ont paru nécessaires pour la classe de lecteurs que j'ai eue principalement en vue dans mes Notes.

Soit $Z = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 +$ etc. .....

Digitized by Google

$= (1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z)$, etc., et soit Z' ce que deviennent ces quantités lorsqu'on met $z + y$ à la place de z. On aura.....

$$l\frac{Z'}{Z} = l\frac{1+\alpha z+\alpha y}{1+\alpha z} + l\frac{1+\beta z+\beta y}{1+\beta z} + l\frac{1+\gamma z+\gamma y}{1+\gamma z} +, \text{etc.}\ldots\ldots$$

Mais $\frac{1+\alpha z+\alpha y}{1+\alpha y} = \frac{1+\alpha z}{1+\alpha z} + \frac{\alpha y}{1+\alpha z} = 1 + \frac{\alpha y}{1+\alpha z}$. Donc....

$$(K)\ l\frac{Z'}{Z} = l\left(1 + \frac{\alpha y}{1+\alpha z}\right) + l\left(1 + \frac{\beta y}{1+\beta z}\right) + l\left(1 + \frac{\gamma y}{1+\gamma z}\right) +, \text{etc.}$$

La valeur de Z' donne.....

$$Z' = 1 + A(z+y) + B(z+y)^2 + C(z+y)^3 + D(z+y)^4 +, \text{etc.}$$
$$= 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +, \text{etc.}$$
$$+ y(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 +, \text{etc.})$$
$$+ y^2(B + 3Cz + 6Dz^2 +, \text{etc.})$$

Donc $Z' = Z + y(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 +, \text{etc.})$.....
$+ y^2(B + 3Cz + 6Dz^2 +, \text{etc.})$ etc. Et en divisant les deux membres de cette équation par Z, il viendra.....

$$(L)\ \frac{Z'}{Z} = 1 + \frac{y(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 +, \text{etc.}) + y^2(B + 3Cz + 6Dz^2 +, \text{etc.})}{Z}.$$

Appelons X tous les termes du second membre de cette équation, à l'exception du premier, et elle pourra s'écrire ainsi, $\frac{Z'}{Z} = 1 + X$; donc $(M)\ l\frac{Z'}{Z} = l(1 + X)$. Or on sait par la théorie des logarithmes que $l(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} +$, etc. Donc en remettant dans l'équation (M) à la place de $l(1 + X)$ sa valeur, nous aurons, $l\frac{Z'}{Z} = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3}$, — etc. Et enfin en remettant dans cette dernière à la place de X et de ses puissances les quantités qu'elles représentent, il viendra.....

$$l\frac{Z'}{Z} = \frac{y(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 +, \text{etc.}) + y^2(B + 3Cz +, \text{etc.})}{Z} \ldots\ldots$$
$$- \frac{y^2(A^2 + 4ABz + \text{etc.})}{2Z^2} +, \text{etc.}$$

Égalons maintenant le second membre

membre de cette équation au second membre de l'équation (K); en développant en série logarithmique chacun des termes de ce second membre, et nous bornant aux deux premiers termes de chaque série, nous aurons, $\frac{y(A+2B\zeta+3C\zeta^2+\text{etc.})+y^2(B+3C\zeta^2+\text{etc.})}{Z}$ .....

$-\frac{y^2}{2Z^2}(A^2+4AB\zeta+\text{etc.})+\text{etc.}=\frac{\alpha y}{1+\alpha\zeta}-\frac{\alpha^2y^2}{2(1+\alpha\zeta)^2}+\text{etc.}$

$+\frac{\beta y}{1+\beta\zeta}-\frac{\beta^2y^2}{2(1+\beta\zeta)^2}+\text{etc.}+\frac{\gamma y}{1+\gamma\zeta}-\frac{\gamma^2y^2}{2(1+\gamma\zeta)^2}+\text{etc.}+\text{etc.}$

Divisons les deux membres de cette équation par y; et ensuite supposons $y=0$, (ce qui est permis, puisque l'équation est vraie indépendamment d'aucune valeur de y), il viendra.....

$\frac{A+2B\zeta+3C\zeta^2+4D\zeta^3+5E\zeta^4+\text{etc.}}{Z}=\frac{\alpha}{1+\alpha\zeta}+\frac{\beta}{1+\beta\zeta}+\frac{\gamma}{1+\gamma\zeta}+$

$\frac{\delta}{1+\delta\zeta}+\frac{\epsilon}{1+\epsilon\zeta}+\text{etc.}$, ou en multipliant tout par Z.....

$(N)\ A+2B\zeta+3C\zeta^2+4D\zeta^3+5E\zeta^4+\text{etc.}$.....

$=Z\left(\frac{\alpha}{1+\alpha\zeta}+\frac{\beta}{1+\beta\zeta}+\frac{\gamma}{1+\gamma\zeta}+\frac{\delta}{1+\delta\zeta}+\text{etc.}\right)$ Soit maintenant l'équation $\frac{\alpha}{1+\alpha\zeta}=H+I\zeta+K\zeta^2+L\zeta^3+\text{etc.}$; si on la multiplie par $1+\alpha\zeta$, on aura.....

$\alpha=H\begin{matrix}+\\+\end{matrix}\left|\begin{matrix}I\\H\alpha\end{matrix}\right|\zeta\begin{matrix}+\\+\end{matrix}\left|\begin{matrix}K\\\alpha I\end{matrix}\right|\zeta^2\begin{matrix}+\\+\end{matrix}\left|\begin{matrix}L\\\alpha K\end{matrix}\right|\zeta^3\begin{matrix}+\text{etc.}\\+\text{etc.}\end{matrix}$ d'où l'on tire.....

$H=\alpha$; $I=-\alpha^2$; $K=\alpha^3$; $L=-\alpha^4$, et ainsi de suite. Donc $\frac{\alpha}{1+\alpha\zeta}=\alpha-\alpha^2\zeta+\alpha^3\zeta^2-\alpha^4\zeta^3+\alpha^5\zeta^4-\text{etc.}$ On trouverait de même $\frac{\beta}{1+\beta\zeta}=\beta-\beta^2\zeta+\beta^3\zeta^2-\beta^4\zeta^3+\beta^5\zeta^4-\text{etc.}$, et enfin on trouverait de pareilles séries pour tous les autres termes. Donc en substituant toutes ces valeurs dans l'équation (N), et ordonnant par rapport aux puissances de ζ, on aura.....

Digitized by Google

$$A + 2B\zeta + 3C\zeta^2 + 4D\zeta^3 + 5E\zeta^4 + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= Z \left\{ \begin{array}{l|l|l|l|l|l|l} \alpha - \alpha^2 & \zeta + \alpha^3 & \zeta^2 - \alpha^4 & \zeta^3 + \alpha^5 & \zeta^4 - \alpha^6 & \zeta^5 + \text{etc.} \\ + \beta - \beta^2 & + \beta^3 & - \beta^4 & + \beta^5 & - \beta^6 & + \text{etc.} \\ + \gamma - \gamma^2 & + \gamma^3 & - \gamma^4 & + \gamma^5 & - \gamma^6 & + \text{etc.} \\ + \delta - \delta^2 & + \delta^3 & - \delta^4 & + \delta^5 & - \delta^6 & + \text{etc.} \\ + \varepsilon - \varepsilon^2 & + \varepsilon^3 & - \varepsilon^4 & + \varepsilon^5 & - \varepsilon^6 & + \text{etc.} \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \end{array} \right.$$

Et enfin en remettant à la place de Z sa valeur.....
$1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + \text{etc.}$, on aura.....

$$(O)\ A + 2B\zeta + 3C\zeta^2 + 4D\zeta^3 + 5E\zeta^4 + \text{etc.} = (1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + \text{etc.})$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l|l|l|l|l|l|l} \alpha - \alpha^2 & \zeta + \alpha^3 & \zeta^2 - \alpha^4 & \zeta^3 + \alpha^5 & \zeta^4 - \alpha^6 & \zeta^5 + \text{etc.} \\ + \beta - \beta^2 & + \beta^3 & - \beta^4 & + \beta^5 & - \beta^6 & + \text{etc.} \\ + \gamma - \gamma^2 & + \gamma^3 & - \gamma^4 & + \gamma^5 & - \gamma^6 & + \text{etc.} \\ + \delta - \delta^2 & + \delta^3 & - \delta^4 & + \delta^5 & - \delta^6 & + \text{etc.} \\ + \varepsilon - \varepsilon^2 & + \varepsilon^3 & - \varepsilon^4 & + \varepsilon^5 & - \varepsilon^6 & \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \end{array} \right.$$

Supposons P égal à la somme des quantités α, β, γ, δ, ε, etc.; Q égal à la somme des quarrés de ces mêmes quantités; R égal à la somme de leurs cubes, et ainsi du reste, l'équation (O) deviendra, $(P)\ A + 2B\zeta + 3C\zeta^2 + 4D\zeta^3 + 5E\zeta^4 + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots$
$= (1 + A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + \text{etc.})(P - Q\zeta + R\zeta^2 - S\zeta^3 + T\zeta^4 - V\zeta^5 + \text{etc.})$
ou bien en faisant les multiplications indiquées dans le second membre, et ordonnant les produits par rapport aux puissances de ζ, il viendra, $A + 2B\zeta + 3C\zeta^2 + 4D\zeta^3 + 5E\zeta^4 + \text{etc.} \ldots\ldots$

$$= \left| \begin{array}{l|l|l|l|l|l} P + AP & \zeta + BP & \zeta^2 + CP & \zeta^3 + DP & \zeta^4 + EP & \zeta^5 + \text{etc.} \\ - Q & - AQ & - BQ & - CQ & - DQ & - \text{etc.} \\ & + R & + AR & + BR & + CR & + \text{etc.} \\ & & - S & - AS & - BS & - \text{etc.} \\ & & & + T & + AT & + \text{etc.} \\ & & & & - V & - \text{etc.} \\ & & & & & + \text{etc.} \end{array} \right.$$

Et si on égale d'un membre à l'autre de cette équation, les termes qui sont affectés des mêmes puissances de ζ, on trouvera les

Digitized by Google

équations partielles suivantes, $P = A$; $2B = AP - Q$; $3C = BP - AQ + R$; $4D = CP - BQ + AR - S$; $5E = DP - CQ + BR - AS + T$; $6F = EP - DQ + CR - BS + AT - V$, et ainsi du reste. De toutes ces équations on tire celles qui suivent.....

$P = A$

$Q = AP - 2B$

$R = AQ - PB + 3C$

$S = AR - BQ + CP - 4D$

$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$

$V = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F.$

Et en général si on représente par S^n, S^{n-1}, S^{n-2} ... S, la somme des puissances n, $n-1$, $n-2$, ... 1 d'un nombre de quantités α, β, γ, δ, ε, etc., on aura l'équation.....

$S^n = AS^{n-1} - BS^{n-2} + CS^{n-3} - \text{etc.} \ldots \mp LS \pm nM.$

Remarquons que dans ces équations qui sont des séries récurrentes, P représente la somme des quantités α, β, γ, δ, ε, etc. Q représente la somme de leurs quarrés; R, la somme de leurs cubes; S, la somme de leurs quatrièmes puissances; T, la somme de leurs cinquièmes puissances, et ainsi de suite. Et quant aux premières lettres de l'alphabet, A représente la somme des quantités α, β, γ, δ, ε, etc.; B, la somme de leurs produits deux-à-deux; C, la somme de leurs produits trois-à-trois; D, celle de leurs produits quatre-à-quatre, et ainsi du reste. Donc pour avoir la somme des puissances d'un certain ordre des racines d'une équation, la somme des quarrés, par exemple, la formule $Q = AP - 2B$ nous fait voir qu'il faut multiplier le coëfficient du second terme

Digitized by Google

de l'équation par lui-même, et retrancher du produit le double du coëfficient du troisième terme; pour avoir la somme des cubes des racines, la formule $R = AQ - PB + 3C$, nous montre qu'il faut multiplier la somme de leurs quarrés par le coëfficient du second terme, retrancher de ce produit celui du coëfficient du troisième terme par le coëfficient du second, et ajouter à la différence le triple du coëfficient du quatrième terme, et ainsi de suite. D'où il résulte que si une équation n'a que deux racines, on pourra obtenir la somme de leurs quarrés, mais nullement celle de leur cubes; si elle a trois racines, on pourra obtenir la somme de leurs quarrés, celle de leurs cubes, mais non pas celle de leurs quatrièmes puissances; enfin si l'équation a n racines, on pourra obtenir la somme des différentes puissances de ses racines, jusqu'à la somme des puissances de l'ordre n, mais non la somme des puissances d'un ordre supérieur. En effet, pour avoir la somme des puissances de l'ordre n d'un nombre n de racines, nous aurons recours à l'équation $S^n = AS^{n-1} - BS^{n-2} + CS^{n-3} \ldots \mp LS \pm nM$, dont le dernier terme du second membre, d'après ce qui a été dit, est la somme des produits d'un nombre n de termes pris n à n. Et si l'on voulait la somme des puissances de l'ordre $n + 1$, le dernier terme du second membre serait $\mp(n + 1)N$, dans lequel N devrait représenter la somme des produits d'un nombre n de quantités prises $n + 1$ à $n + 1$; ce qui est impossible puisque ces quantités ne sont qu'au nombre n.

NOTE (69), *pour la page* 23. *Tom. II.*

Pour la simplicité des calculs, je prends seulement deux racines a et b, l'une positive et l'autre négative, et il sera facile de voir que si on en prenait un plus grand nombre, on arriverait toujours aux mêmes

Digitized by Google

résultats. Le théorême de Newton sera démontré, si on prouve que $\left(a^{2m}+b^{2m}\right)^{\frac{1}{2m}} > \left(a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)}\right)^{\frac{1}{2(m+1)}}$, ou bien que $\left(a^{2m}+b^{2m}\right)^{\frac{m+1}{m}} > \left(a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)}\right)^{1}$, ou enfin que..... $(a^{2m}+b^{2m})^{m+1} > (a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)})^{m}$, m étant un nombre entier positif quelconque; car il est clair que, si cette dernière inégalité a lieu, toutes les autres auront lieu également. Soit donc $a > b$, et développons en série le binome $(a^{2m}+b^{2m})^{m+1}$, nous aurons.... $(a^{2m}+b^{2m})^{m+1} = a^{2m(m+1)} + (m+1)\, a^{2m(m)} b^{2m} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $(m+1)\frac{m}{2}\, a^{2m(m-1)} b^{4m} + (m+1)\frac{m}{2} \cdot \frac{m-1}{3}\, a^{2m(m-2)} b^{6m} +$, etc. (A).

Développons également en série l'autre quantité $(a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)})^{m}$, et nous aurons $(a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)})^{m} = a^{2m(m+1)} + \ldots\ldots\ldots$ $m\, a^{2(m+1)(m-1)} b^{2(m+1)} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot a^{2(m+1)(m-2)} b^{4(m+1)} + \ldots.$ $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}\, a^{2(m+1)(m-3)} b^{6(m+1)} +$, etc. (B).

Comparons terme à terme les séries (A) et (B). Je vois d'abord que la première a un terme de plus que la seconde, ensuite que les premiers termes sont égaux de part et d'autre, enfin que les seconds termes sont $(m+1)\, a^{2mm} b^{2m}$, ou..... $(m+1)\, a^{2m^2} b^{2m}$ pour (A) et $m\, a^{2(m+1)(m-1)} b^{2(m+1)}$, ou..... $m\, a^{2m^2-2} b^2 . b^{2m}$ pour (B). Or il est évident que $(m+1)\, a^{2m^2} b^{2m} > m\, a^{2m^2-2} b^2 b^{2m}$, ou $(m+1)\, a^{2m^2} . b^{2m} > \frac{m\, a^{2m^2}}{a^2}\, b^2 b^{2m}$, car en divisant de part et d'autre par $a^{2m^2} b^{2m}$, les quotiens sont $(m+1)$, et $\frac{m\, b^2}{a^2}$, et en les multipliant l'un et l'autre par a^2, on a enfin..... $(m+1)\, a^2 > m\, b^2$, à cause de $m+1 > m$, et de $a > b$.

En comparant les troisièmes termes des deux séries, on trouverait, toute réduction faite, qu'ils sont respectivement comme..... $(m+1) . \frac{m}{2}\, a^4$ et $m . \frac{m-1}{2}\, b^4$, et il est clair que le premier est plus grand que le second. Et à cause de la marche régulière des deux séries, on voit en général, qu'un terme n de la série (A) est au terme

Digitized by Google

n de la série (B) comme $(m+1)\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{3}\ldots a^{2(n-1)}$ est à.... $m.\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\ldots b^{2(n-1)}$, et que le premier est plus grand que le second. Donc un terme quelconque de la série (A) est plus grand que le terme correspondant de la série (B); donc $(A) > (B)$; donc enfin, $\sqrt[2m]{a^{2m}+b^{2m}} > \sqrt[2(m+1)]{a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)}}$. C. Q. F. D.

CONCLUSION. Donc puisque $\sqrt[2]{a^2+b^2} > a$; que..... $\sqrt[4]{a^4+b^4} > a$; que $\sqrt[6]{a^6+b^6} > a$, etc., et qu'il vient d'être prouvé généralement que..... $\sqrt[2]{a^2+b^2} > \sqrt[4]{a^4+b^4} > \sqrt[6]{a^6+b^6} > \sqrt[8]{a^8+b^8}$, etc.; il s'en suit que $\sqrt[4]{a^4+b^4}$ surpasse a, mais d'une quantité moins grande que a n'est surpassé par $\sqrt[2]{a^2+b^2}$. De même les quantités $\sqrt[6]{a^6+b^6}$ et $\sqrt[4]{a^4+b^4}$ surpassent toutes deux a, mais la première moins que la seconde, et ainsi de suite. Donc on approchera d'autant plus près de la valeur de a, qu'on prendra une racine plus élevée de la somme des puissances de pareil degré de toutes les racines. Et c'est-là ce qu'annonce la règle de Newton.

NOTE (70), *pour la page* 24. *Tome II.*

Newton dit que : *Si entre la somme des quarrés et la somme des quatrièmes puissances, on prend une moyenne proportionnelle géométrique, elle sera un peu plus grande que la somme des cubes des racines prises toutes avec un signe positif.*

Prenons, comme dans la Note précédente, les deux racines a et b. La somme de leurs quarrés est a^2+b^2, et celle de leurs quatrièmes puissances a^4+b^4. Appelons q la moyenne proportionnelle, et nous aurons $q^2=(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^6+a^4b^2+a^2b^4+b^6$. Donc

Digitized by Google

$q = \sqrt{a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6}$. La somme des cubes avec des signes positifs est $a^3 + b^3 = \sqrt{a^6 + 2a^3b^3 + b^6}$. Maintenant je dis qu'on a toujours $\sqrt{a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6} > \sqrt{a^6 + 2a^3b^3 + b^6}$, ou bien que $a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 > a^6 + 2a^3b^3 + b^6$, ou bien que... $a^4b^2 + a^2b^4 > 2a^3b^3$, ou, en divisant tout par a^2b^2, que..... $a^2 + b^2 > 2ab$, ou bien que $a^2 - 2ab + b^2 > 0$, ou bien enfin, $(a - b)^2 > 0$. Or $(a - b)^2$ est toujours une quantité positive, donc elle est toujours plus grande que zéro. Donc la dernière inégalité ayant toujours lieu, les autres ont aussi toujours lieu. Par conséquent, on a en général..... $\sqrt{a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6} > \sqrt{a^6 + 2a^3b^3 + b^6}$, ou bien..... $q > \sqrt{a^6 + 2a^3b^3 + b^6}$, ou $q > a^3 + b^3$. C. Q. F. D.

NOTE (71), *pour la page* 24. *Tome II.*

Si l'on ajoute, dit Newton, *à la moyenne proportionnelle, la somme des cubes prise avec son propre signe, et qu'ensuite on l'en retranche, et qu'on prenne la demi-somme et la demi-différence de ces deux quantités; la demi-somme sera plus grande que la somme des cubes de toutes les racines positives de l'équation, et la demi-différence plus grande que la somme des cubes de toutes les racines négatives.*

Soient toujours les deux racines a et b, la première positive, et la seconde négative; $a^3 - b^3$ sera la somme des cubes prise avec son propre signe. Or il est clair que $\frac{a^3 + b^3 + a^3 - b^3}{2} = a^3$; mais nous avons vu dans la Note précédente, que $q > a^3 + b^3$, donc..... $\frac{q + a^3 - b^3}{2} > a^3$; c'est-à-dire, que si, à la moyenne proportionnelle q, on ajoute la somme des cubes, prise avec son propre signe, et

Digitized by Google

qu'on prenne la moitié de cette quantité, elle sera plus grande que la somme des cubes des racines positives de l'équation. Ce qu'il fallait 1°. démontrer.

Ensuite $\frac{a^3+b^3-(a^3-b^3)}{2}=b^3$; et comme $q > a^3+b^3$, il s'en suit que $\frac{q-(a^3-b^3)}{2} > b^3$. C'est-à-dire que, si de la moyenne proportionnelle q, on retranche la somme des cubes, prise avec son propre signe, et qu'on prenne la moitié de cette différence, elle sera plus grande que la somme des cubes des racines négatives. Ce qu'il fallait, 2°. démontrer.

Conclusion. Il est facile maintenant de saisir la vérité de ces paroles de l'auteur : *Donc la plus grande des racines positives de l'équation sera plus petite que la racine cubique de cette demi-somme, et la plus grande des racines négatives sera plus petite que la racine cubique de cette demi-différence.* En effet, supposons maintenant que a^3 représente la somme des cubes de toutes les racines positives, et b^3 la somme des cubes de toutes les racines négatives, on aura toujours les inégalités, $\frac{q+a^3-b^3}{2} > a^3$, et $\frac{q-(a^3-b^3)}{2} > b^3$, ce qui donne... $a < \sqrt[3]{\frac{q+a^3-b^3}{2}}$, et $b < \sqrt[3]{\frac{q-(a^3-b^3)}{2}}$. Or, dans l'hypothèse actuelle, a est plus grand que la plus grande racine positive, donc, à plus forte raison, la plus grande racine positive sera plus petite que $\sqrt[3]{\frac{q+a^3-b^3}{2}}$. Et par le même raisonnement, la plus grande racine négative sera plus petite que $\sqrt[3]{\frac{q-(a^3-b^3)}{2}}$. Donc, etc.

Newton suit la même marche pour approcher encore de plus près de la valeur des racines, en employant des puissances plus élevées. Mais je me crois dispensé d'aller plus loin par ces paroles mêmes de l'auteur

Digitized by Google

l'auteur qui se trouvent un peu plus bas : « *Ces méthodes de trouver les limites des racines des équations, ne sont pas d'un grand usage, tant à cause de la difficulté des calculs, que parce qu'elles ne peuvent s'appliquer aux équations qui contiennent des racines imaginaires* ».

NOTE (72), *pour la page* 26. *Tome II.*

Voici comment on peut démontrer cette règle de Newton. Si on a une équation $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} -$ etc. $= 0$, et qu'on fasse $x - e = y$, ou bien $x = y + e$, ce qui donnera $x^n = (y+e)^n$, $Ax^{n-1} = A(y+e)^{n-1}$, $Bx^{n-2} = B(y+e)^{n-2}$, etc. en substituant dans la proposée, à la place de x et de ses puissances $y + e$, et ses puissances, on aura, en renversant l'ordre des termes, une équation transformée de cette forme, (A).....

$$
\begin{array}{llll}
e^n & + ne^{n-1}y & + n.\frac{n-1}{2}.e^{n-2}y^2 & - \text{etc.} \\
- Ae^{n-1} & - (n-1)Ae^{n-2}y & - (n-1)\frac{(n-2)}{2}Ae^{n-3}y^2 & - \text{etc.} \\
+ Be^{n-2} & + (n-2)Be^{n-3}y & + (n-2)\frac{(n-3)}{2}Be^{n-4}y^2 & - \text{etc.} \\
- Ce^{n-3} & - (n-3)Ce^{n-4}y & - (n-3)\frac{(n-4)}{2}Ce^{n-5}y^2 & - \text{etc.} \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}
$$

Voici les observations qu'on peut faire sur cette transformée...

1°. C'est que son premier terme, dans l'ordre renversé..... $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3} +$ etc., n'est autre chose que la proposée $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} -$ etc., dans laquelle on aurait mis e au lieu de x.

2°. Le coëfficient du second terme..... $ne^{n-1} - (n-1)Ae^{n-2} + (n-2)Be^{n-3} - (n-3)Ce^{n-4}$, etc. s'obtiendrait en multipliant chaque partie du terme précédent par

Digitized by Google

l'exposant de e dans cette partie, et en divisant le produit par e. En effet, le terme précédent étant $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3} +$ etc., multiplions chacune de ses parties par l'exposant de e dans cette partie, nous aurons $ne - (n-1)Ae^{n-1} + (n-2)Be^{n-2} -$ etc., et en divisant tout par e, on a.....

$ne^{n-1} - (n-1)Ae^{n-2} + (n-2)Be^{n-3} - (n-3)Ce^{n-4} +$ etc.

qui est précisément le coëfficient du second terme de la transformée.

3°. Le coëfficient du troisième terme peut s'obtenir en multipliant de même chaque partie du coëfficient du second terme par l'exposant de e dans cette partie, et divisant le produit par $2e$. Et en général, le coëfficient d'un terme quelconque de la transformée, par exemple du terme y^r, peut se déduire du coëfficient du terme précédent, c'est-à-dire, du terme y^{r-1}, en multipliant chaque partie du coëfficient de ce dernier terme par l'exposant de e dans cette partie, et en divisant le produit par re, c'est-à-dire par e multiplié par l'exposant de y dans le terme dont on cherche le coëfficient. Nous pouvons donc remonter ainsi, de proche en proche, jusqu'au coëfficient de l'avant-dernier terme, c'est-à-dire jusqu'au coëfficient du second terme, en prenant les termes dans l'ordre direct.

Faisons encore quelques réflexions sur cette transformée. D'abord puisqu'on a substitué $y + e$ au lieu de x, on a $x - e = y$; mais y désignant les racines de la transformée, et x celles de la proposée, il résulte de l'équation $x - e = y$, que toutes les racines positives de la transformée sont plus petites que les racines positives de la proposée, d'une quantité connue e, et qu'au contraire, ses racines négatives sont plus grandes que les négatives de la proposée, de la même quantité e.

Donc lorsque e est plus grand que la plus grande racine positive

Digitized by Google

de la proposée, la racine correspondante de la transformée devient négative, donc à plus forte raison, toutes les autres racines de la transformée seront négatives. Tout cela est évident à la seule inspection de l'équation $x - e = y$. Donc dans ce cas, toutes les racines de la transformée sont négatives, et par conséquent tous ses termes sont affectés de signes positifs. Donc réciproquement, lorsque tous les signes de la transformée sont positifs, on doit conclure que e est plus grand que la plus grande racine positive de la proposée.

Lorsque e est plus petit que la plus petite racine positive de la proposée, les racines de la transformée conservent les mêmes signes que leurs correspondantes dans la proposée.

Si au lieu de substituer $y + e$ à la place de x, on substitue $y - e$, l'équation $y - e = x$, ou $x + e = y$ fait voir, que toutes les racines positives de la proposée sont augmentées dans la transformée, de la quantité e, et qu'au contraire ses racines négatives sont diminuées dans la transformée, de la quantité e. D'où il suit, que si e surpasse la plus grande racine négative de la proposée, la racine correspondante de la transformée sera positive, et à plus forte raison, toutes les autres. Donc cette transformée aura alternativement les signes + et —. Donc réciproquement si tous les signes de la transformée sont alternativement + et —, c'est une preuve que la quantité connue e, est plus grande que la plus grande racine négative de la proposée.

Il est encore évident que si e est une quantité réelle, les racines imaginaires qui se trouvent dans la proposée, se retrouvent également dans la transformée; seulement elles y seront augmentées ou diminuées de la quantité réelle e.

Digitized by Google

Il en sera de même des racines incommensurables.

Après tout ce qui vient d'être dit, il est facile de démontrer la règle. En effet, nous avons vu au commencement de cette Note, que le premier terme de la transformée (A) (les termes étant pris dans un ordre renversé) était la proposée elle-même, dans laquelle on aurait substitué e au lieu de x; et qu'en multipliant chaque partie de ce premier terme par l'exposant de e dans cette partie, et divisant le produit par e, nous aurions le coëfficient du second terme, et ainsi de suite pour les coëfficiens des termes suivans. Nous trouverions donc par ce moyen le coëfficient de l'avant-dernier terme, qui serait celui du second terme dans l'ordre direct. Or, si dans la proposée $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} -$, etc., nous substituons pour x^n, $(y+e)^n$, nous aurons pour les deux premiers termes dans l'ordre direct $y^n + ney^{n-1}$. Et en substituant pour $-Ax^{n-1}$, $-A(y+e)^{n-1}$, nous aurons $-Ay^{n-1}$, donc les deux premiers termes de la transformée sont, dans l'ordre direct, $y^n + (ne - A)y^{n-1}$, donc le coëfficient du second terme est $ne - A$, c'est à ce coëfficient que nous serions parvenus par une marche inverse. On voit que toutes les opérations que nous faisons sur la transformée pour arriver à ce dernier coëfficient, sont précisément celles que Newton veut que l'on fasse sur la proposée $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} +$, ect. $= 0$, pour la réduire à deux termes. En effet, en multipliant chaque terme de cette équation par l'exposant de x, dans ce terme, et divisant le résultat par x, ensuite multipliant chaque terme de ce premier résultat par l'exposant de x dans ce terme, et divisant le produit par $2x$, et continuant d'opérer sur le second résultat comme sur le premier, notre équation finirait par être réduite à ces deux termes

Digitized by Google

$nx - A = 0$, qui serait le coëfficient du second terme de notre transformée, en mettant e pour x. Donc nous pouvons regarder les coëfficiens des termes de la transformée, comme les résultats que Newton obtient par ses opérations successives sur la proposée elle-même, ensorte que le premier terme de la transformée (les termes étant pris dans un ordre inverse) est la proposée même, dans laquelle on aurait mis e pour x; le coëfficient du second terme de la transformée, est le résultat de la première opération sur la proposée, et ainsi de suite. Donc si l'on a substitué $y + e$ à la place de x, ce qui donne $x - e = y$, et que e soit une quantité plus grande que la plus grande racine positive de la proposée, toutes les racines de la transformée seront négatives; donc tous ses termes auront le signe $+$, donc tous ses coëfficiens seront positifs; donc tous les résultats de la proposée (qui sont identiques avec les coëfficiens de la transformée, en changeant x en e) seront affectés du signe $+$. Donc réciproquement si on met dans tous ces résultats au lieu de x, un nombre e tel, qu'ils deviennent tous positifs, ce sera une preuve que le nombre e est plus grand que la plus grande racine positive de l'équation. Donc e sera une limite supérieure à la plus grande racine. Mais comment déterminer e de manière à avoir la limite supérieure la plus petite possible? le voici. Puisque vous voulez convertir tous les coëfficiens de la transformée en quantités positives, il faut d'abord que le coëfficient de son second terme $ne - A$ (qui est la même chose que le dernier reste de Newton) soit une quantité positive; il faut donc que $ne > A$, ou que $e > \frac{A}{n}$. En effet, la proposée étant du dégré n, a un nombre n de racines, et A coëfficient de son second terme étant égal à la somme de toutes ces racines, il

Digitized by Google

s'en suit que la plus grande racine positive est plus grande que $\frac{A}{n}$, donc il faudra prendre pour e le nombre immédiatement supérieur à $\frac{A}{n}$, et s'il convertit tous les résultats en quantités positives, c'est une preuve que e est la limite cherchée ; mais si tous, ou quelques-uns des résultats étaient encore négatifs, il faudrait prendre un nombre immédiatement supérieur au premier, et continuer ainsi, en augmentant par les plus petits degrés possibles, jusqu'à ce qu'on fût parvenu à rendre tous les résultats positifs.

NOTE (73), *pour la page* 31. *Tome II.*

Je dois cette Note à Mac-Laurin : mais j'y ai fait des développemens assez considérables.

Supposons l'équation du quatrième degré, $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, dans laquelle p, q, r, s sont des coëfficiens donnés avec leurs signes. Si l'on peut faire de cette équation un quarré complet, on doit avoir, comme le dit Newton, $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s + nk^2x^2 + 2nklx + nl^2 = nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$. Le premier membre sera donc, par supposition, le quarré exact de $x^2 + \frac{1}{2}px + Q$; donc on aura l'équation, $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s + nk^2x^2 + 2nklx + nl^2 = (x^2 + \frac{1}{2}px + Q)^2$. Et en développant le quarré du second membre, et rassemblant les quantités qui multiplient les mêmes puissances de x, il viendra, $x^4 + px^3 + (q + nk^2)x^2 + (r + 2nkl)x + s + nl^2 = x^4 + px^3 + (2Q + \frac{1}{4}p^2)x^2 + pQx + Q^2$. Comparons maintenant les coëfficiens qui affectent les mêmes puissances de x dans les deux membres, nous en tirerons les trois équations suivantes, $(A)\ q + nk^2 = 2Q + \frac{1}{4}p^2$; $(B)\ r + 2nkl = pQ$;

Digitized by Google

(C) $s + nl^2 = Q^2$. Or il y a, dans ces trois équations, quatre inconnues; on ne pourra donc en trouver la valeur qu'en tâtonnant.

Par le moyen des équations (A) et (B), j'élimine Q, ce qui me donne l'équation, $\frac{q + nk^2 - \frac{1}{4}p^2}{2} = \frac{r + 2nkl}{p}$, d'où je tire.... $n = \frac{pq - \frac{1}{4}p^3 - 2r}{4kl - pk^2}$, ou bien $n = \frac{\frac{1}{2}pq - \frac{1}{8}p^3 - r}{2kl - \frac{1}{2}pk^2} = \frac{r + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{2}pq}{k(\frac{1}{2}pk - 2l)} = \frac{r + \frac{1}{2}p(\frac{1}{4}p^2 - q)}{k(\frac{1}{2}pk - 2l)}$. Donc $n = \frac{r + \frac{1}{2}p(\frac{1}{4}p^2 - q)}{k(\frac{1}{2}pk - 2l)}$. Et comme Newton a fait $q - \frac{1}{4}p^2 = \alpha$, si nous substituons dans la valeur de n, il viendra, $n = \frac{r - \frac{1}{2}p\alpha}{k(\frac{1}{2}pk - 2l)}$. Mais il a fait aussi, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$; donc enfin $n = \frac{\beta}{k(\frac{1}{2}pk - 2l)}$. D'où l'on tire, $\beta = n \times k(\frac{1}{2}pk - 2l)$, et $\frac{\beta}{n} = k(\frac{1}{2}pk - 2l)$. Ces deux dernières équations nous font voir, la première, que n doit être un diviseur de β, et la seconde, que k doit être un diviseur de $\frac{\beta}{n}$, qui donne pour quotient.... $\frac{1}{2}pk - 2l$; retranchez ce quotient de $\frac{1}{2}pk$, et le reste sera $+ 2l$, dont la moitié donnera la valeur de l, et c'est encore ce qu'exige la règle. Ensuite l'équation (A) nous donne, $Q = \frac{q - \frac{1}{4}p^2 + nk^2}{2}$, et en mettant pour $q - \frac{1}{4}p^2$ sa valeur α, on a, $Q = \frac{\alpha + nk^2}{2}$, ou bien $Q = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$; et l'équation (C) donne, $l^2 = \frac{Q^2 - s}{n}$. Cette dernière équation nous fait voir encore la raison de deux conditions de la règle, c'est qu'il faut que $Q^2 - s$ soit divisible par le nombre qu'on aura pris pour n, et que de plus le quotient soit un quarré parfait, dont la racine soit égale au nombre qu'on a

Digitized by Google

déjà trouvé pour l. Et si, dans $l^2 n = Q^2 - s$, à la place de Q^2, on substitue sa valeur obtenue par l'équation $Q = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$, on aura, $nl^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{\alpha n k^2}{2} + \frac{n^2 k^4}{4} - s$, ou bien..... $nl^2 - \frac{\alpha n k^2}{2} - \frac{n^2 k^4}{4} = \frac{1}{4}\alpha^2 - s$, ou bien..... $n \cdot \frac{(2l^2 - \alpha k^2 - \frac{1}{2}nk^4)}{2} = \frac{1}{4}\alpha^2 - s$, ou bien, $n(\alpha k^2 + \frac{1}{2}nk^4 - 2l^2) = 2(s - \frac{1}{4}\alpha^2)$. Mais Newton a fait, $s - \frac{1}{4}\alpha^2 = \zeta$, donc..... $n(\alpha k^2 + \frac{1}{2}nk^4 - 2l^2) = 2\zeta$, et cette équation nous montre que n doit être un diviseur de 2ζ, comme nous avons déjà vu qu'il devait en être un de β, et en effet la règle exige qu'il soit diviseur commun de ces deux quantités.

Je cherche maintenant les raisons de quelques limitations que Newton a mises à sa règle.

Il dit, 1°. que n, diviseur commun de β et de 2ζ, doit être un nombre entier, mais non un quarré. Effectivement, puisqu'on cherche à réduire l'équation par un diviseur incommensurable, c'est que sans doute on a déjà tenté inutilement de la réduire par un diviseur rationnel de deux dimensions, selon la méthode qui a été enseignée (*page* 49, *tome I*); or, si n était quarré, le facteur $(kx + l)\sqrt{n}$ serait rationnel, et par conséquent l'équation pourrait être réduite par un facteur rationnel; mais ce ne serait plus le cas de la règle actuelle, qui n'est destinée qu'à enseigner à réduire les équations par des diviseurs incommensurables, lorsqu'on ne peut pas les réduire autrement; donc n doit être un nombre entier non-quarré.

Il dit, 2°. que dans le cas où un des deux coëfficiens p et r est impair, n doit être un nombre impair, et qu'étant divisé par 4, il doit laisser l'unité pour reste.

Supposons

Digitized by Google

Supposons donc que p soit pair, et r impair; à cause de l'équation $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$, ou $\beta + \frac{1}{2}\alpha p = r$, il faut nécessairement que l'un des deux nombres β ou $\frac{1}{2}\alpha p$ soit pair, et l'autre impair, puisque leur somme r doit être impaire; si c'est β qui est impair, son diviseur n doit l'être aussi. Donc, dans ce cas, la condition de la règle est évidente. Soit maintenant β pair, alors il faut que $\frac{1}{2}\alpha p$ soit impair, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que $\frac{1}{2}p$ et α sont tous deux impairs, car s'ils étaient tous deux pairs, où l'un pair et l'autre impair, leur produit $\frac{1}{2}\alpha p$ serait toujours pair. Donc $\frac{1}{2}p$ et α sont tous deux impairs; mais si α est impair, $\frac{1}{2}\alpha^2$ sera aussi un nombre impair de la forme $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{25}{2}$, etc. (*); donc, à cause de l'équation..... $2\zeta = 2s - \frac{1}{2}\alpha$, dans laquelle $2s$ est un nombre pair, le second membre sera un nombre de la forme $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc. donc 2ζ sera égal à la moitié d'un nombre impair, donc son diviseur n sera impair.

Et dans ce cas, je dis que Q et l doivent être des moitiés de nombres impairs. Pour le prouver, supposons que Q soit entier, alors à plus forte raison l serait entier, car on a, $nl^2 = Q^2 - s$, ou $l^2 = \frac{Q^2 - s}{n}$, et comme l doit être rationnel, il s'en suit que $\frac{Q^2 - s}{n}$ doit être un quarré parfait, et il ne peut pas être celui d'une fraction, car pour cela il faudrait que son numérateur et son dénominateur fussent des quarrés, et nous avons vu, par la première limitation, que n ne pouvait pas être quarré; donc il faut

(*) Cela est fondé sur ce principe; qu'un nombre impair élevé à une puissance quelconque, donne toujours un résultat impair.

Digitized by Google

que n divise exactement $Q^2 - s$, et que le quotient soit un quarré; donc l serait un nombre entier, dans le cas où Q serait un nombre entier. Mais Q et l étant des entiers, pQ serait un nombre pair; or, l'équation (B) étant, $r + 2nkl = pQ$, il s'en suivrait, que son premier membre serait impair et le second pair, ce qui serait absurde. Il est donc impossible que Q soit un nombre entier, il est donc nécessairement une fraction, et il satisfera à toutes les conditions, si on le suppose égal à la moitié d'un nombre impair, et dans ce cas, l sera aussi la moitié d'un nombre impair; car soit $Q = \frac{2m-1}{2}$, on aura..... $Q^2 = \frac{4m^2-4m+1}{4}$, et en substituant dans l'équation, $nl^2 = Q^2 - s$, elle deviendra, $nl^2 = \frac{4m^2-4m+1-4s}{4} = \frac{4m^2-4m-4s+1}{4}$ ou... $l^2 = \frac{4m^2-4m-4s+1}{4 \times n}$, où l'on voit que le numérateur est impair et le dénominateur pair, donc la division ne peut pas se faire exactement; il faudrait donc pouvoir extraire la racine exacte du numérateur et du dénominateur; sur quoi il est essentiel d'observer que le dénominateur $4 \times n$, ayant pour un de ses facteurs le quarré 4, ne peut devenir un quarré parfait, que dans le cas où l'autre facteur n serait lui-même un quarré, ce qui ne doit jamais arriver, comme on l'a dit; par conséquent on ne peut pas extraire la racine exacte du dénominateur; il faut donc que le numérateur se décompose en deux facteurs dont l'un soit égal à n, et que l'autre soit un quarré parfait mais impair; alors l'équation aura cette forme, $l^2 = \frac{n \times I^2}{4n} = \frac{I^2}{4}$ (I désignant le quarré d'un nombre impair), donc $l = \frac{I}{2}$. Q et l désignent donc des moitiés de nombres impairs; donc $2l$ et $2Q$ sont des nombres

Digitized by Google

entiers et impairs. Or, la différence des quarrés de deux nombres impairs est toujours divisible par 4, donc la différence des quarrés de Q^2 et l^2 sera un nombre entier, ou bien on aura, $Q^2 - l^2 = g$ (g désignant un nombre entier), donc $Q^2 = g + l^2$, et $Q^2 - s = g - s + l^2$, et en faisant $g - s = h$, on a $Q^2 - s = h + l^2$, ou bien en divisant tout par l^2, $\frac{Q^2 - s}{l^2} = \frac{h + l^2}{l^2} = 1 + \frac{h}{l^2}$. Mais $n = \frac{Q^2 - s}{l^2}$, donc $n = 1 + \frac{h}{l^2}$. Et comme n doit être un nombre entier, il faut que h soit exactement divisible par l^2; d'ailleurs nous avons fait $l = \frac{I}{2}$, I représentant un nombre impair quelconque, donc l'expression $\frac{h}{l^2}$ devient $\frac{4h}{I^2}$. Donc $n = 1 + \frac{4h}{I^2}$. Actuellement, I^2 étant un nombre impair, il faut que la division puisse se faire indépendamment du facteur pair 4, donc h est divisible par I^2; soit le quotient R; nous aurons, $h = RI^2$, et $4h = 4R \times I^2$, donc $n = 1 + 4R$; équation où l'on voit que n est un nombre entier impair, qui étant divisé par 4, donne pour quotient un nombre entier R, avec l'unité pour reste, et c'est ce qu'on cherchait.

Enfin il nous reste à examiner le cas où β étant zéro, Newton dit que k est aussi zéro. Nous avons trouvé ci-dessus l'équation $\beta = nk(\frac{1}{2}pk - 2l)$. Et comme on suppose $\beta = 0$, et que n ne peut pas être égal à zéro, il s'en suit qu'on a, ou $k = 0$, ou $\frac{1}{2}pk - 2l = 0$, mais il est bien rare que ce soit le dernier cas qui ait lieu. Donc lorsque $\beta = 0$, on a le plus communément $k = 0$, et c'est sans doute tout ce qu'a voulu dire Newton. Mais alors, comment déterminer la valeur de l? le voici. On a toujours l'équation $\frac{Q^2 - s}{n} = l^2$. Et, dans le cas qui nous occupe, l'équation $Q = \frac{\alpha + nk^2}{2}$ donne, $Q = \frac{1}{2}\alpha$, donc $\frac{\frac{1}{4}\alpha^2 - s}{n} = l^2$; et l'équation $s - \frac{1}{4}\alpha^2 = \zeta$, donne $s = \zeta + \frac{1}{4}\alpha^2$.

Digitized by Google

Donc en substituant cette valeur de s dans l'équation $\frac{\frac{3}{4}\alpha^2 - s}{n} = l^2$, elle deviendra $-\frac{\zeta}{n} = l^2$; il faudra donc que, $-\frac{\zeta}{n}$ soit un quarré parfait, dont la racine sera l.

Après avoir développé tous les principes sur lesquels la règle de Newton est établie, nous allons en faire quelques applications.

Exemple Ier. Newton a trouvé (probl. V, page 141, T. I.) l'équation $x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 \begin{matrix} -2ab^2 \\ -2b^3 \end{matrix} \Big| x \begin{matrix} -b^4 \\ +a^2b^2 \end{matrix} = 0$. En appliquant à cette équation les règles qui viennent d'être expliquées, j'ai $p = 2b$; $q = b^2$; $r = -2ab^2 - 2b^3$; $s = a^2b^2 - b^4$. Et à cause de $\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$; $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$; $\zeta = s - \frac{1}{4}\alpha^2$, on aura..... $\alpha = 0$; $\beta = -b(2ab + 2b^2)$; $\zeta = b^2(a^2 - b^2)$. Je prends pour n, $2ab + 2b^2$ qui est un diviseur de β et de 2ζ; car..... $2\zeta = 2b^2(a^2 - b^2) = 2b^2(a+b)(a-b) = b(2ab + 2b^2)(a-b)$. Donc $\frac{\beta}{n} = -b = -b \times 1$. Donc si l'on fait $k = 1$, on aura... $\frac{\beta}{nk} = -b$, et $\frac{1}{2}pk = b$. Donc si on retranche de $\frac{1}{2}pk = b$, le quotient $\frac{\beta}{nk} = -b$, le reste sera $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = 2b$, dont la moitié doit être égale à l; donc $l = b$. Maintenant, à cause de $\alpha = 0$, l'équation $\frac{\alpha + nk^2}{2} = Q$, se réduit à $\frac{nk^2}{2} = Q$, ou $Q = ab + b^2$. Donc $Q^2 = a^2b^2 + 2ab^3 + b^4$; donc $Q^2 - s = a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 - a^2b^2 + b^4 = 2ab^3 + 2b^4$. Donc..... $\frac{Q^2 - s}{n} = \frac{2ab^3 + 2b^4}{2ab + 2b^2} = \frac{b^2(2ab + 2b^2)}{2ab + 2b^2} = b^2$. Or la racine quarrée de ce quotient donne b, qui est une seconde valeur de l, égale à la première déja trouvée; j'en conclus donc que les quantités que j'ai prises pour n, k et l sont bonnes; donc la quantité

Digitized by Google

$nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, qu'il faut ajouter à chaque membre de l'équation proposée, devient, $(2ab + 2b^2)x^2 + (4ab^2 + 4b^3)x + 2ab^3 + 2b^4$, alors l'équation.....

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 \begin{matrix} -2ab^2 \\ -2b^3 \end{matrix} \Big| x \begin{matrix} -b^4 \\ +a^2b^2 \end{matrix} = 0,$$ se transforme en celle-ci,

$$x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} +3b^2 \\ +2ab \end{matrix} \Big| x^2 \begin{matrix} +2b^3 \\ +2ab^2 \end{matrix} \Big| x \begin{matrix} +b^4 \\ +2ab^3 \\ +a^2b^2 \end{matrix} = \begin{matrix} +2ab \\ +2b^2 \end{matrix} \Big| x^2 \begin{matrix} +4ab^2 \\ +4b^3 \end{matrix} \Big| x \begin{matrix} +2b4 \\ +2ab^3 \end{matrix}.$$

Le premier membre de cette équation est le quarré parfait du quatrinome $x^2 + bx + b^2 + ab$; et le second membre est le quarré parfait de $(x + b)\sqrt{2ab + 2b^2}$. Donc on a.....

$$x^2 + bx + b^2 + ab = (x + b)\sqrt{2ab + 2b^2}.$$

Exemple IIe. Newton a trouvé (problême VII, page 143, T. I.) l'équation $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +3a^2 \\ -2b^2 \end{matrix} \Big| x^2 \begin{matrix} -2a^3 \\ +2ab^2 \end{matrix} \Big| x \begin{matrix} +a^4 \\ -a^2b^2 \end{matrix} = 0$. Tâchons de la réduire; nous aurons $p = -2a$; $q = 3a^2 - 2b^2$; $r = 2ab^2 - 2a^3$; $s = a^4 - a^2b^2$; et par conséquent les trois équations.....

$\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$; $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$; $\zeta = s - \frac{1}{4}\alpha^2$, deviennent.....

$\alpha = 2a^2 - 2b^2$; $\beta = 0$, $\zeta = a^2b^2 - b^4$. Or, comme $\beta = 0$, il est de toute probabilité que k est aussi zéro; je prends donc pour n un diviseur de 2ζ, qui ne soit point un quarré, par exemple, $b^2 - a^2$. Et pour déterminer l, dans le cas de $\beta = 0$, et de $k = 0$, nous avons vu qu'il fallait que $-\frac{\zeta}{n}$ fût un quarré. Mais.....

$\zeta = a^2b^2 - b^4 = -b^2(b^2 - a^2)$, donc $\zeta = -b^2(b^2 - a^2)$, donc $-\zeta = b^2(b^2 - a^2)$, donc $-\frac{\zeta}{n} = \frac{b^2(b^2 - a^2)}{b^2 - a^2} = b^2$; donc $l = b$; donc, à cause de $k = 0$, la quantité $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, qu'il faut ajouter à chaque membre de la proposée, se réduit à.....

Digitized by Google

$nl^2 = b^2(b^2 - a^2) = b^4 - a^2b^2$, et en faisant l'addition de cette quantité à chaque membre de la proposée, elle devient.....

$$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +3a^2 \\ -2b^2 \end{matrix} \Bigg| x^2 \begin{matrix} -2a^3 \\ +2ab^2 \end{matrix} \Bigg| x \begin{matrix} +a^4 \\ -2a^2b^2 \\ +b^4 \end{matrix} = b^4 - a^2b^2,$$

dont le premier membre est le quarré du quatrinome $x^2 - ax + a^2 - b^2$, et le second membre est le quarré de $\pm b\sqrt{b^2 - a^2}$, de sorte que l'équation proposée se réduit à, $x^2 - ax + a^2 - b^2 = \pm b\sqrt{b^2 - a^2}$. Au reste il est toujours aisé, sans aucune extraction, de trouver la racine quarrée de chaque membre par le moyen de la formule, $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = (kx + l)\sqrt{n}$; il suffit de mettre pour chaque cas, à la place des quantités p, Q, k, l et n, leurs valeurs. Dans le premier exemple, $\frac{1}{2}p = b$; $Q = ab + b^2$; $k = 1$; $l = b$; $n = 2ab + 2b^2$; donc la formule donne.....

$x^2 + bx + ab + b^2 = (x + b)\sqrt{2ab + 2b^2}$, comme nous l'avions déja trouvé.

Dans le second exemple, $\frac{1}{2}p = -a$; $Q = \frac{1}{2}\alpha = a^2 - b^2$; $k = 0$; $l = b$; $n = b^2 - a^2$, donc en substituant, la formule donne.....

$x^2 - ax + a^2 - b^2 = \pm b\sqrt{b^2 - a^2}$.

NOTE (74), *pour la page* 50. *Tome II.*

Le lecteur qui a été renvoyé à la Note 74 par le petit avertissement qui se trouve au bas de la page 143 du Tome Ier, doit, au lieu de la Note 74e, consulter la Note 73e.

Dans cette note, je ne parlerai en aucune manière sur le fond du paragraphe auquel elle se rapporte; j'avoue que, quelques efforts

Digitized by Google

que j'aye faits, je n'y ai pu rien comprendre; mais j'y démontrerai un théorême qui pourrait être ignoré de quelques lecteurs, c'est qu'une équation à deux termes, d'un degré pair quelconque, ne peut jamais avoir plus de deux racines réelles, et qu'une équation à deux termes d'un degré impair n'en peut jamais avoir plus d'une.

Soit d'abord l'équation à deux termes du cinquième degré, $x^5 \pm m^5 = 0$, d'où on conclura que $x = \mp m$, ou $x \pm m = 0$; et si l'on divise l'équation du cinquième degré par $x \pm m = 0$, on aura pour quotient, $x^4 \mp mx^3 \pm m^2x^2 \mp m^3x \pm m^4 = 0$. Appliquons à cette équation du quatrième degré la seconde méthode qui a été enseignée dans la note 67, pour découvrir les racines imaginaires qu'une équation peut contenir. Lorsqu'on élève un binome à la quatrième puissance, les coëfficiens sont 4, 6, 4; donc les fractions qu'il faudra écrire au-dessus des termes intermédiaires de l'équation seront, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{8}$.....

Ainsi

$$x^4 \overset{\frac{3}{8}}{\underset{+}{\mp}} mx^3 \overset{\frac{5}{12}}{\underset{-}{\pm}} m^2x^2 \overset{\frac{3}{8}}{\underset{+}{\mp}} m^3x \underset{+}{\pm} m^4.$$

Or $\frac{3}{8}m^2 < m^2$, donc je mettrai $-$, au-dessous du second terme; ensuite $\frac{5}{12}m^4 > m^4 - m^4$, je mettrai donc $+$ sous le troisième terme; enfin $\frac{3}{8}m^6 < m^6$, je mettrai donc $-$ sous le quatrième, et en écrivant $+$ sous le premier et sous le dernier termes, je vois qu'il y a quatre permutations de signes souscrits, d'où je conclus que l'équation du quatrième degré a ses quatre racines imaginaires. Donc l'équation du cinquième, $x^5 \pm m^5 = 0$, n'a, dans tous les cas, qu'une seule racine réelle et quatre imaginaires.

On trouverait de même que l'équation $x^7 \pm m^7 = 0$, n'a qu'une seule racine réelle, et que les six autres sont imaginaires. De

Digitized by Google

même on trouverait que l'équation $x^6 \pm m^6 = 0$, n'a que deux racines réelles et quatre imaginaires. Mais démontrons le théorême d'une manière générale.

Si on a une équation non-affectée d'un degré impair quelconque, $x^n + m^n = 0$, n représentant un nombre impair quelconque, on en tirera l'équation du premier degré $x + m = 0$, et en divisant celle du degré n par celle-ci, le quotient sera..... $x^{n-1} - mx^{n-2} + m^2x^{n-3} - m^3x^{n-4} + m^4x^{n-5} -$, etc. et en cherchant les coëfficiens des termes moyens d'un binome élevé à la puissance $n - 1$, diminuant chaque coëfficient d'une unité, et divisant le reste par le double du même coëfficient, on trouvera de cette manière les fractions qui doivent être écrites au-dessus des termes moyens de l'équation $x^{n-1} - mx^{n-2} + m^2x^{n-3} -$, etc. Je dis maintenant qu'il est facile de prouver que cette équation a toutes ses racines imaginaires, car puisque n est impair, $n - 1$ est pair, donc l'équation $x^{n-1} - mx^{n-2} +$, etc. a un nombre impair de termes, et ses termes pairs sont affectés du signe —, et les impairs du signe +, et le terme qui occupe le milieu de l'équation est impair, par conséquent il est précédé et suivi d'un nombre pair de termes. De plus on voit, par la marche de l'équation, que le quarré du coëfficient d'un terme quelconque, donne une puissance de m égale à celle du produit de deux coëfficiens pris à égale distance de ce terme. Il nous suffira d'examiner la première moitié de l'équation, les résultats seraient absolument les mêmes dans la seconde moitié. Tout cela posé, je passe à la démonstration.

Je prends un terme pair, son coëfficient est affecté du signe —,

mais

Digitized by Google

mais son quarré aura le signe +, et ce quarré doit être multiplié par la fraction qui est au-dessus du terme; or, puisque le terme que je considère est pair, il est précédé d'un nombre impair de termes, et de plus, comme je le prends dans la première moitié de l'équation, il a plus de termes à sa suite qu'il n'en a devant lui, donc le nombre des produits des coëfficiens adjacens sera réglé par le nombre des termes qui le précèdent, par conséquent le nombre de ces produits, dans le cas qui nous occupe, sera impair, et tous ces produits, comme nous l'avons dit, donnent une même puissance de m, et de plus, ils sont positifs, puisque le terme que nous considérons étant pair, les deux premiers adjacens sont impairs, et par conséquent positifs, donc leur produit est positif; les deux seconds adjacens sont pairs, et par conséquent négatifs, donc leur produit est positif, et ainsi de suite; ainsi tous ces produits sont égaux (puisqu'ils donnent tous la même puissance de m), ils sont tous positifs, et leur nombre est impair, on aura donc une même puissance de m, qu'il faudra écrire un nombre impair de fois en prenant alternativement le signe + et le signe — en commençant par le signe +; donc on finira par le signe +, donc tous les termes se détruiront, excepté le dernier; donc on aura d'un côté le quarré du coëfficient d'un terme pair multiplié par une fraction, et de l'autre un produit égal à ce quarré; donc le premier terme de la comparaison (vu la fraction qui le multiplie) est plus petit que le second; donc il faudra écrire le signe — sous le terme pair. Actuellement ma démonstration sera générale, si je fais voir qu'il faut écrire + sous le terme suivant. Or, ce terme étant impair, est précédé d'un nombre pair de termes, donc le nombre des produits des coëfficiens adjacens est pair, donc, en

Digitized by Google

les prenant alternativement avec les signès + et —, en commençant par le signe +, on aura un nombre pair de signes + et —, et comme les quantités qu'ils affectent sont toutes égales, il s'en suit que le résultat sera égal à zéro; donc le quarré du coëfficient du terme impair, multiplié par sa fraction, étant plus grand que les produits des coëfficiens des termes adjacens pris alternativement en + et en — (produits qui se réduisent ici à zéro), il faudra mettre + sous le terme impair. Donc il faudra mettre + sous tous les termes impairs, et — sous tous les termes pairs dans toute l'étendue de l'équation, donc il y aura une variation de signe de chaque terme à son suivant, donc toutes les racines de l'équation $x^{n-1} - mx^{n-2} + m^2x^{n-3} - m^3x^{n-4} + m^4x^{n-5} +$, etc. seront toutes imaginaires, et par conséquent, l'équation $x^n + m^n = 0$, n'a qu'une racine réelle.

Si on a l'équation $x^n - m^n = 0$, on en tirera $x - m = 0$, et en divisant la première par la seconde, on aura pour quotient l'équation, $x^{n-1} + mx^{n-2} + m^2x^{n-3} + m^3x^{n-4} +$, etc. dans laquelle on prouverait, comme ci-dessus, que toutes les racines sont imaginaires. Donc l'équation non-affectée d'un degré impair quelconque, $x^n - m^n = 0$, n'a qu'une seule racine réelle, toutes les autres étant imaginaires. Donc enfin toutes les équations non-affectées d'un degré impair, $x^n \pm m^n = 0$, n'ont qu'une seule racine réelle.

Passons aux équations non-affectées d'un degré pair.

Soit l'équation $x^n - m^n = 0$, n désignant un nombre entier pair. J'observe que si on avait $x^n + m^n = 0$, l'équation n'aurait aucune racine réelle; donc, puisqu'on veut au moins deux racines réelles, il faut prendre la formule $x^n - m^n = 0$, et elle donne $x = \pm m$, ou bien $x^2 - m^2 = 0$, et si on divise la proposée par $x^2 - m^2 = 0$,

Digitized by Google

le quotient sera, $x^{n-2} + m^2 x^{n-4} + m^4 x^{n-6} + m^6 x^{n-8} +$, etc. et il aura autant de termes qu'il y a d'unités dans $\frac{n}{2}$, en sorte que si n est un nombre pairement pair, le nombre des termes de l'équation quotient sera pair, et il sera impair, si n est pairement impair (*). Comme toutes les conditions que nous avons établies précédemment s'appliquent encore ici, nous irons droit à la démonstration. Si j'examine le coëfficient d'un terme pair, il est précédé d'un nombre impair de termes; donc le nombre des produits des coëfficiens adjacens est impair, et par conséquent ils se détruiront tous, excepté un seul, et ce produit qui reste est égal au quarré du coëfficient du terme pair qu'on examine; mais celui-ci devant être multiplié par la fraction écrite au-dessus du terme pair, il s'en suit que ce dernier produit sera plus petit que l'autre, donc il faudra mettre le signe — sous le terme pair. Je dis maintenant qu'il faudra mettre + sous le terme suivant, car ce terme est impair, donc il est précédé d'un nombre pair de termes; donc le nombre

(*) Cette remarque servira à déterminer la puissance d'un binome dont les coëfficiens donneront les fractions qui doivent être écrites au-dessus des termes de l'équation. Effectivement si $n = 8$, l'équation quotient aura quatre termes. Or un binome a quatre termes à son cube; je prendrai donc le cube d'un binome pour déterminer les fractions qui doivent être écrites au-dessus des termes de l'équation. Si $n = 6$, l'équation quotient aura trois termes; mais le quarré d'un binome a aussi trois termes, donc ce sera dans ce cas là, le quarré d'un binome qui me donnera les fractions qui doivent être écrites au-dessus des termes de l'équation; et en général le degré de la puissance du binome dont on a besoin pour déterminer les fractions qui doivent être écrites au-dessus des termes de l'équation quotient, sera exprimé par la formule $\frac{n}{2} - 1$.

Digitized by Google

des produits des coëfficiens adjacens est pair, donc tous ces produits se détruiront les uns par les autres, et par conséquent le quarré du coëfficient du terme impair, multiplié par la fraction qui est écrite au-dessus de ce terme, donne un produit plus grand que zéro, qui est le résultat des produits de tous les coëfficiens adjacens, pris alternativement avec les signes + et —; donc il faudra écrire le signe + au-dessous du terme impair. Cette démonstration étant générale, il faudra donc écrire + au-dessous de tous les termes impairs, et — au-dessous de tous les termes pairs, donc il y aura une variation de chaque terme à son suivant, et par conséquent toutes les racines de l'équation $x^{n-2} + m^2 x^{n-4} + m^4 x^{n-6} + m^6 x^{n-8} +$, etc. seront toutes imaginaires; donc l'équation non-affectée de dimensions paires et d'un degré quelconque, $x^n - m^n = 0$, ne peut jamais avoir plus de deux racines réelles.

NOTE (75), *pour la page* 60. *Tome II.*

Avant de donner quelques éclaircissemens sur les démonstrations de ces trois Lemmes, je crois devoir avertir le lecteur que j'ai fait quelques légères additions aux figures 4 et 5 de la planche IX de Newton. Pour la figure 4, j'ai tiré la ligne KF parallèlement à CX, et j'ai prolongé AX jusqu'à la rencontre de cette parallèle en un point F. Pour la 5e. figure, j'ai prolongé un peu l'arc de cercle, et j'ai tiré KF parallèlement à CX, je crois avoir rendu ainsi la démonstration des Lemmes plus facile.

LEMME Ier. Newton trouve cette proportion, $XY : AK :: CX : KE$, et voici comme il a dû y arriver. Dans les figures 3, 4 et 5, on a les triangles semblables ACX, AKF, et EXY,

Digitized by Google

EFK, d'où l'on tire les deux proportions, $AC : AK :: CX : KF$, et $XY : YE$ ou $AC :: KF : KE$. La première donne, $AC \times KF = AK \times CX$, et la seconde, $AC \times KF = XY \times KE$. Donc $XY \times KE = AK \times CX$, d'où l'on tire la proportion $XY : AK :: CX : KE$.

Lemme II. De la proportion du Lemme précédent, Newton déduit celle-ci, $XY : AK :: XY + CX$ ou $CY : AK + KE$, qui fait son Lemme II. Mais on remarquera que cette proportion n'est vraie que pour les figures 3 et 4, car dans la figure 5, CY au lieu d'être la somme des lignes $XY + CX$, en est la différence. Donc, en soustrayant dans la proportion du Lemme premier, on aura, $XY : AK :: XY - CX : AK - KE$, ou bien $XY : AK :: CY : AK - KE$, et ce sera la proportion du Lemme II pour la figure 5.

Lemme III. Si on achevait les circonférences dans les figures 3, 4 et 5, on verrait que pour les fig. 3 et 4, $KY + KC$ et CY sont deux sécantes extérieures, et que $KY - CK$ et XY sont les parties de ces sécantes hors du cercle; et pour la fig. 5, les sécantes sont $KY + CK$ et XY, et leurs parties hors du cercle, $KY - CK$ et YC. Donc on a pour ces trois figures la proportion, $CY : KY + CK :: KY - CK : XY$. Ensuite, si on se rappelle que (*par const.*) $EY = AC = BC$, on verra que, pour *les figures* 3 et 4, on a $KY - CK = KE - BK$, et $KY + CK = KE + AK$. Donc, en substituant à la place de $KY - CK$, et de $KY + CK$, leurs valeurs dans la proportion $CY : KY + CK :: KY - CK : XY$, elle deviendra, $CY : KE + AK :: KE - BK : XY$. On a (*par le deuxième Lemme*) pour les mêmes figures, $CY : KE + AK :: XY : AK$; donc on aura aussi, $KE - BK : XY :: XY : AK$.

Digitized by Google

Voilà la proportion du Lemme III, démontrée pour les 3e. et 4e. figures.

Quant à la cinquième figure, on a (*par const.*) $KY + KE = AK + CK$, d'où l'on tire, $KY - CK = AK - KE$; et aussi, (*par construction*) $KY + KE$ ou $EY = BC$. D'où $KY + KE + CK = BC + CK = BK$. Donc $KY + CK = BK - KE$; donc, en substituant à la place de $KY - CK$, et de $KY + CK$, leurs valeurs, dans la proportion commune à toutes ces figures, $CY : KY - CK :: KY + CK : XY$, elle deviendra, pour la 5e. figure, $CY : AK - KE :: BK - KE : XY$. Or, la proportion du Lemme II, pour cette 5e. figure est, $XY : AK :: CY : AK - KE$, donc, à cause de l'égalité des rapports, on aura, $BK - KE : XY :: XY : AK$. On voit donc que, pour la 5e. figure, la proportion du troisième Lemme est différente de celle qui se rapporte aux 3e. et 4e. figures.

Faisons quelques observations sur ces trois figures. Je dis, 1°. que dans le cas où le point K tombe hors des points A et B, comme dans les figures 3 et 4, il est impossible d'inscrire entre les lignes AX et CX et leurs prolongemens, plus d'une droite EY égale à AC (outre la droite AC elle-même qui s'y trouve inscrite, mais qu'on ne doit pas compter), avec la condition que cette droite EY passera par le point K. En effet, puisque le point K est hors des points A et B, par la même raison il est hors des points C et A, donc il ne peut se trouver que dans l'angle supplément de l'angle CXA; or, l'angle CXA devant toujours être aigu, par une conséquence de la construction, comme je vais le prouver, il s'en suit que son supplément sera toujours obtus. Prouvons cela d'abord pour la figure 3. L'angle KCX est toujours aigu, puisqu'il est

Digitized by Google

formé par un diamètre et par une corde, donc son supplément ACX est toujours obtus, et à plus forte raison l'angle AXY, ou son égal CXF. Donc toute ligne qu'on voudrait inscrire entre les droites CX et AX dans l'angle CXF, avec la condition de passer par le point K, sera plus grande que le diamètre, et à plus forte raison plus grande que $CA = CB$, qui n'est qu'une partie du rayon. Il n'est pas besoin de dire qu'il est impossible de l'inscrire dans l'angle AXY. Donc, dans la figure 3, on ne peut inscrire que la seule ligne YE égale à AC. On démontrerait de même, dans la figure 4, où le point K est hors des points A et B, qu'il est impossible d'inscrire dans l'angle obtus YXA, et à plus forte raison dans son opposé au sommet EXC, une ligne égale à AC, et qui passe par le point K, donc on ne pourra inscrire que la seule ligne EY. Mais dans la figure 5, où le point K se trouve entre les points B et A, il tombe nécessairement, ou entre les points B et C, ou entre les points C et A, mais ces deux cas reviennent au même. Supposons donc qu'il tombe, comme dans la figure, entre C et A. Alors, le point K tombant dans l'angle CXA, on peut d'abord inscrire dans ce même angle, outre la ligne CA, une autre ligne qui lui soit égale YE (excepté dans le cas très-particulier, où la ligne CA serait la ligne inscriptible la plus courte possible), et il est évident qu'on peut inscrire dans les angles $Y''XA$ et YXE' des lignes depuis zéro jusqu'à l'infini, donc on peut y inscrire des lignes égales à CA. Concluons donc que les figures 3 et 4 ne pouvant recevoir qu'une seule inscrite égale à AC, elles ne donneront aussi qu'une seule racine XY. Ce sont donc ces deux figures qu'il faudra employer pour construire les équations cubiques de cette forme, $x^3 + qx \pm r = 0$, qui n'ont jamais qu'une seule

Digitized by Google

racine réelle. Mais comme on peut, dans la figure 5, inscrire trois lignes égales à AC, qui sont EY, $E'Y'$, $E''Y''$, il s'en suit qu'elles détermineront trois racines, XY, XY', XY''. C'est donc cette figure qu'il faudra employer pour construire les équations de cette forme, $x^3 - qx \pm r = 0$, lorsque toutes leurs racines sont réelles.

Construisons ici une équation de cette dernière espèce pour servir d'exemple.

Soit l'équation $x^3 - qx + r = 0$, qu'il s'agit de construire. J'emploie donc la figure 5. Le premier Lemme, pour les figures 3, 4 et 5, étant $XY : AK :: CX : KE$, j'en tire l'équation... $KE \times XY = CX \times AK$. Et le troisième Lemme, pour la 5e. figure, étant $BK - KE : XY :: XY : AK$, je multiplie les deux termes du premier rapport par XY, ce qui donne $BK \times XY - KE \times XY : \overline{XY}^2 :: XY : AK$, et en substituant pour $KE \times XY$, sa valeur prise dans l'équation que nous venons de trouver, la proportion deviendra, $BK \times XY - CX \times AK : \overline{XY}^3 :: XY : AK$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, nous aurons, $BK \times AK \times XY - CX \times \overline{AK}^2 = \overline{XY}^3$. Mais Newton a fait, par construction, $XY = x$, $AK = n$, $BK = \frac{q}{n}$, et $CX = \frac{r}{n^2}$. Donc, en substituant toutes ces valeurs dans l'équation, elle deviendra, $\frac{q}{n} \times n \times x - \frac{r}{n^2} \times n^2 = x^3$, ou bien $qx - r = x^3$, et enfin, $x^3 - qx + r = 0$; et cette construction s'applique mot pour mot à l'équation à laquelle Newton arrive, lorsqu'il partage un angle en trois parties égales (*Voyez page* 79, *Tome II*).

NOTE

Digitized by Google

NOTE (76), *pour la page* 64. *Tome II.*

Voici comment nous arriverons à cette proportion de l'auteur; élevons au quarré tous les termes de la proportion, $KE : CX :: CY : KE - KB$, nous aurons, $\overline{KE}^2 : \overline{CX}^2 :: \overline{CY}^2 : (KE - KB)^2$; mais nous avons vu que $\overline{CY}^2 = (KY + CK)(KY - CK)$, et que $KY + CK = KE + AK$, et que $KY - CK = KE - BK$; donc, en substituant toutes ces nouvelles valeurs dans la proportion des quarrés, elle deviendra, $\overline{KE}^2 : \overline{CX}^2 :: (KE + AK)(KE - BK) : (KE - BK)^2$, et en divisant le dernier rapport par $KE - BK$, il vient enfin, $\overline{KE}^2 : \overline{CX}^2 :: KE + AK : KE - BK$, qui est la proportion de Newton.

NOTE (77), *pour la page* 78. *Tome II.*

Il est facile de prouver que les quatre lignes KA, XY, KE, CX sont en proportion continue, ou qu'on a, $KA : XY :: XY : KE :: KE : CX$. En effet, l'équation à construire étant $x^3 - a^2 b = 0$, elle n'a qu'une racine réelle, et par conséquent il faudra, d'après ce qui a été dit dans la Note 75, employer pour la construire, ou la 3e. ou la 4e. figure de la planche IX. Or, par le Lemme premier de la page 60, tome II, on a, $XY : AK :: CX : KE$, ou, bien $AK : XY :: KE : CX$, et pour ces deux figures, le IIIe. Lemme de la même page est, $KE - BK : XY :: XY : AK$. Mais, dans la construction générale, Newton a fait, $BK = \frac{q}{n}$, et comme dans notre exemple, $q = 0$, il s'en suit que BK doit aussi être

Digitized by Google

zéro, donc la proportion du Lemme III devient, pour ce cas, $KE : XY :: XY : AK$; or, cette dernière proportion et celle du premier Lemme ont un même rapport, donc on a, comme le dit Newton, $AK : XY :: XY : KE :: KE : CX$.

NOTE (78), *pour la page* 79. *Tome II.*

Cette figure 3 de la planche X est la même que la fig. 7 de la planche IX, si on suppose dans cette dernière $BK = 0$.

En effet, le premier Lemme démontré, page 66, tome II, et qui se rapporte à la fig. 7 de la planche IX, est, $CE : AK :: CX : KY$; et le troisième Lemme, démontré page 68, tome II, pour la même fig. est, $BY : CE :: CE : AK$. Mais dans la fig. 7 de la planche IX on a, $BY = KY \pm BK$, selon que B tombe au-delà de K par rapport à Y, ou entre Y et K; et puisque dans la fig. 3 de la planche X, $BK = 0$, il s'en suit que $BY = KY \pm BK$, se réduit à $BY = KY$. Donc les deux proportions précédentes deviendront, $AK : CE :: KY : CX$, et $AK : CE :: CE : KY$, (en mettant dans la seconde proportion KY au lieu de BY). Donc, à cause du rapport commun, on aura, $AK : CE :: CE : KY :: KY : CX$, ou $\frac{1}{2}KG$. C. Q. F. D.

NOTE (79), *pour la page* 80. *Tome II.*

Pour construire l'équation $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$, Newton fait usage du Théorême qu'il a donné, page 59, tome II, pour construire les équations cubiques par le moyen d'une droite donnée de position et d'une conchoïde. Et comme l'équation proposée est de la forme $x^3 - qx + r = 0$, il est évident, d'après ce qui a été dit dans la Note 75, qu'il faut employer la 5e. fig. de la planche IX,

Digitized by Google

et par conséquent aussi les Lemmes qui ont rapport à cette figure, et qui ont été démontrés dans la même Note 75. En y faisant un peu d'attention, on verra que la fig. 5 de la planche IX deviendra la fig. 5 de la planche X, en supposant, dans la première, $AK = a$, $BK = 3a$, ce qui donne, $AC = 2a$, et $CK = a$. Dans ce cas, le point A tombera dans la circonférence du cercle CX, et rendra cette figure parfaitement identique avec la fig. 5 de la planche X. Nous pouvons donc appliquer à celle-ci les Lemmes qui ont été faits pour la première, c'est-à-dire les Lemmes de la page 60, tome II. Or, le premier Lemme donne, $XY : AK :: CX : KE$, d'où $XY \times KE = AK \times CX$, et le troisième Lemme pour la 5e. fig. de la planche IX étant, $BK - KE : XY :: XY : AK$ (*voyez la Note* 75), on aura, en multipliant les deux termes du premier rapport par XY, $BK \times XY - KE \times XY : \overline{XY}^2 :: XY : AK$, et en substituant pour $KE \times XY$, sa valeur $CX \times AK$ trouvée plus haut, j'aurai, $BK \times XY - CX \times AK : \overline{XY}^2 :: XY : AK$, et en faisant les produits des extrêmes et des moyens, il vient, $BK \times XY \times AK - CX \times \overline{AK}^2 = \overline{XY}^3$, et en mettant pour XY, AK, BK, CX, leurs valeurs analytiques, qui sont respectivement x, a, $3a$, et b, l'équation devient, $3a \times a \times x - ba^2 = x^3$, ou bien $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$, équation qu'il fallait construire.

Maintenant les deux cercles $ADEB$, CXA (*Fig.* 4 *et* 5, *Pl.* X) étant égaux (*par const.*), ainsi que les cordes AB, CX, et de plus ayant appelé AD, ou AF, ou BH, x, et trouvé que XY est aussi égal à x, il s'en suit que $XY = BH$, donc l'angle $XKY =$ l'angle $BCH = \frac{1}{3} BCA$.

Digitized by Google

NOTE (80), *pour la page* 82. *Tome II.*

Il est bien aisé de voir que la fig. 7 de la planche X n'est autre chose que la fig. 7 de la planche IX, dans laquelle on aurait donné des valeurs particulières aux lignes AK, BK, CX, etc.; donc le Théorême général et les Lemmes qui ont été démontrés (pages 65, 66 et 67, tome II.) pour la fig. 7 de la planche IX, doivent s'appliquer à la fig. 7 de la planche X.

Or, le premier Lemme, pour la fig. 7 de la planche IX, donne la proportion, $CE : AK :: CX : KY$, d'où je tire $KY = \frac{AK \times CX}{CE}$. Actuellement KA et KB étant regardées comme des quantités positives, BY doit être regardée comme une quantité négative. On a donc $BK - KY = - BY = BK - \frac{AK \times CX}{CE}$, ou bien..... $BY = \frac{AK \times CX}{CE} - BK$. Mais par le troisième Lemme (tome II, page 68) on a, $BY : CE :: CE : AK$, ou bien..... $\frac{AK \times CX}{CE} - BK : CE :: CE : AK$, et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, il vient, $\frac{\overline{AK}^2 \times CX}{CE} - BK \times AK = \overline{CE}^2$, ou bien, en multipliant tout par CE, $\overline{AK}^2 \times CX - BK \times AK \times CE = \overline{CE}^3$. Et comme CE et CX sont situées l'une au-dessus, l'autre au-dessous de la droite BK, il en résulte que si l'une est prise positivement, l'autre doit l'être négativement; il faudra donc changer le signe du terme où se trouve CX, ou bien changer les signes des termes qui contiennent des puissances impaires de CE,

Digitized by Google

et le résultat sera toujours le même. Je m'en tiens donc au premier changement, et j'ai, $-\overline{AK}^2 \times CX - BK \times AK \times CE = \overline{CE}^3$. Et en mettant pour AK, BK, CX, et CE, leurs valeurs analytiques respectives, a, $-3a$, b, et x, l'équation deviendra, $-a^2b + 3a^2x = x^3$, ou bien $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$, équation qu'il fallait construire.

NOTE (81), *pour la page* 83. *Tome II.*

Voici comment on peut démontrer cette construction de Newton. J'achève le cercle BF (*Fig.* 15 *pour les Notes*) dont le centre est en D, je prolonge GA jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle en R; je tire par le centre D la droite GO, ensuite je tire GE qui est le rayon du cercle CG. Maintenant la Géométrie Élémentaire me fournit ces trois équations, (1) $AR \times AF = \overline{AB}^2$. (2) $GF \times GR = GM \times GO$. Et (3) $\overline{GE}^2 + \overline{GA}^2 = 2\overline{GD}^2 + 2\overline{AD}^2$.

L'équation (2) peut s'écrire ainsi, $GF(GF + AF + AR) = GM(GM + 2MD)$, ou bien, (4) $\overline{GF}^2 + GF \times AF + GF \times AR = \overline{GM}^2 + 2GM \times MD$.

Et l'équation (3) est la même chose que $\overline{GE}^2 + (GF + AF)^2 = 2(GM + MD)^2 + 2\overline{AD}^2$, ou bien, (5) $\overline{GE}^2 + \overline{GF}^2 + 2GF \times AF + \overline{AF}^2 = 2\overline{GM}^2 + 4GM \times MD + 2\overline{MD}^2 + 2\overline{AD}^2$. Je tire de l'équation (1), $AR = \frac{\overline{AB}^2}{AF}$, je substitue cette valeur de AR dans l'équation (4), et elle devient, $\overline{GF}^2 + GF \times AF + GF \times \frac{\overline{AB}^2}{AF} = \overline{GM}^2 +$

Digitized by Google

$2GM \times MD$, ou bien $\overline{GF}^2 \times AF + GF \times \overline{AF}^2 + GF \times \overline{AB}^2 = AF \times \overline{GM}^2 + 2AF \times GM \times MD$. Et en transposant tous les termes d'un même côté, (6) $AF \times \overline{GM}^2 + 2AF \times GM \times MD - AF \times \overline{GF}^2 - GF \times \overline{AF}^2 - GF \times \overline{AB}^2 = 0$.

Je transpose également tous les termes de l'équation (5) dans un seul membre, et j'ai, (7) $2\overline{GM}^2 + 4GM \times MD + 2\overline{MD}^2 + 2\overline{AD}^2 - \overline{GE}^2 - \overline{GF}^2 - 2GF \times AF - \overline{AF}^2 = 0$.

Je multiplie l'équation (6) par 2, et l'équation (7) par AF, la première devient, (8) $2AF \times \overline{GM}^2 + 4AF \times GM \times MD - 2AF \times \overline{GF}^2 - 2GF \times \overline{AF}^2 - 2GF \times \overline{AB}^2 = 0$; et la seconde devient. . . (9) $2AF \times \overline{GM}^2 + 4AF \times GM \times MD + 2AF \times \overline{MD}^2 + 2AF \times \overline{AD}^2 - AF \times \overline{GE}^2 - AF \times \overline{GF}^2 - 2GF \times \overline{AF}^2 - \overline{AF}^3 = 0$.

Ensuite je retranche l'équation (8) de l'équation (9), et le reste est, (10) $2AF \times \overline{MD}^2 + 2AF \times \overline{AD}^2 - AF \times \overline{GE}^2 + \overline{GF}^2 \times AF - \overline{AF}^3 + 2GF \times \overline{AB}^2 = 0$.

Or $\overline{GE}^2 = 4\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2$, et en substituant dans l'équation (10), elle deviendra, $2AF \times \overline{MD}^2 + 2AF \times \overline{AD}^2 - 4AF \times \overline{AD}^2 - AF \times \overline{AC}^2 + AF \times \overline{GF}^2 - \overline{AF}^3 + 2GF \times \overline{AB}^2 = 0$, qui se réduit à.... $2AF \times \overline{MD}^2 - 2AF \times \overline{AD}^2 - AF \times \overline{AC}^2 + AF \times \overline{GF}^2 - \overline{AF}^3 + 2GF \times \overline{AB}^2 = 0$, ou bien, à cause de $2\overline{MD}^2 - 2\overline{AD}^2 = 2\overline{AB}^2$... (11) $AF(2\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{GF}^2) - \overline{AF}^3 + 2GF \times \overline{AB}^2 = 0$. Et en substituant dans la quantité, $2\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{GF}^2$, à la place de $2\overline{AB}^2$,

Digitized by Google

$-\overline{AC}^2$, et $\overline{GF}^2$ leurs valeurs analytiques respectives, $2a^2$, $-2a^2-\frac{b^2}{4}$, $+\frac{b^2}{4}$, elle deviendra, $2a^2-2a^2-\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}=0$. Donc l'équation (11) se réduit à, $-\overline{AF}^3+2GF\times\overline{AB}^2=0$, ou bien $\overline{AF}^3-2GF\times\overline{AB}^2=0$. Mais (*par const.*) $GF=\frac{AK}{2}$, donc $\overline{AF}^3-\overline{AB}^2\times AK=0$, où bien $\overline{AF}^3=\overline{AB}^2\times AK$; d'où l'on tire, $\overline{AB}^2:\overline{AF}^2::AF:AK$. Donc AF est la première de deux moyennes proportionnelles entre AB (a) et AK (b). C. Q. F. D.

NOTE (82), *pour la page* 93. *Tome II.*

Newton dit que le grand axe est à son paramètre $::BE:BC$, ou bien $::FI:FH$. En effet, il a trouvé précédemment la proportion $BD:BE::2GR:2GS$, qui devient, en élevant tout au quarré, $\overline{BD}^2:\overline{BE}^2::4\overline{GR}^2:4\overline{GS}^2$. Or (*par const.*) $\overline{BD}^2=BC\times BE$, donc $BC\times BE:\overline{BE}^2::4\overline{GR}^2:4\overline{GS}^2$, ou bien $BC:BE::4\overline{GR}^2:4\overline{GS}^2$. Et on sait que dans l'ellipse le paramètre d'un diamètre quelconque est une troisième proportionnelle à ce diamètre et à son conjugué; par conséquent, $2GS:2GR::2GR:p$ (en appelant p, le paramètre du diamètre $2GS$), d'où l'on tire $p=\frac{4\overline{GR}^2}{2GS}$, et.....

$\frac{p}{2GS}=\frac{4\overline{GR}^2}{4\overline{GS}^2}$, ce qui donne la proportion, $4\overline{GS}^2:4\overline{GR}^2::2GS:p$, donc $2GS:p::BE:BC$. Mais Newton a fait, $BE:BC::FI:FH$, donc enfin $2GS:p::BE:BC::FI:FH$, et cette proportion contient l'énoncé même de l'auteur.

Digitized by Google

NOTE (83), *pour la page* 93. *Tome II.*

L'équation de l'ellipse, en comptant les abscisses du centre, est, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$, ou bien $\frac{a^2}{b^2} \times y^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2$, ou bien, pour notre figure, $\frac{4\overline{GS}^2}{4\overline{GR}^2} \times \overline{T\gamma}^2 = \overline{GS}^2 - \overline{LT}^2$. Mais par la Note précédente on a, $4\overline{GS}^2 : 4\overline{GR}^2 :: 2GS : p :: FI : FH$; donc.... $\frac{4\overline{GS}^2}{4\overline{GR}^2} = \frac{FI}{FH}$, donc, en substituant dans l'équation ci-dessus, elle devient, $\frac{FI}{FH} \times \overline{T\gamma}^2 = \overline{GS}^2 - \overline{LT}^2$. C. Q. F. D.

NOTE (84), *pour la page* 96. *Tome II.*

Il sera facile de déduire cette dernière proportion de ces deux-ci, que Newton a écrites deux lignes plus haut. La première est, $\gamma X : 2BC :: 2BC \times 2FI : 2BC \times AX - 2BC \times 2AB$. La seconde est, $\gamma X : 2BC :: AX : \gamma X - 2AF$. Dégageons, par le moyen de cette dernière proportion, la valeur de AX, et nous aurons, $AX = \frac{\gamma X(\gamma X - 2AF)}{2BC}$, et en substituant cette valeur de AX dans la première proportion, elle deviendra, $\gamma X : 2BC :: 2BC \times 2FI : \gamma X(\gamma X - 2AF) - 2BC \times 2AB$, et c'est la proportion même de Newton.

Fin des Notes de l'Arithmétique Universelle.

SUPPLÉMENT

Digitized by Google

SUPPLÉMENT
AUX NOTES
SUR L'ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE.

Méthode pour construire les équations du troisième et du quatrième degrés par le moyen d'une parabole donnée et d'un cercle.

NEWTON avait promis de donner la construction des équations du quatrième degré; mais comme il n'a pas exécuté sa promesse, le lecteur ne sera peut-être pas fâché de trouver ici une méthode très-facile de construire les équations du troisième et du quatrième degrés, par le moyen d'une parabole donnée et d'un cercle. C'est à Descartes qu'est due l'invention de cette méthode.

Une équation quelconque du troisième degré peut toujours être ramenée à cette forme $x^3 \pm px \pm q = 0$; mais afin que tous ses termes soient homogènes, on voit que p et q représentant chacun une ligne, il faut multiplier le second terme par une quantité a prise pour unité, et le troisième par a^2, de sorte que l'équation sera de cette forme, $x^3 \pm apx \pm a^2q = 0$. Telle est la forme à laquelle on peut rappeler toute équation du troisième degré; et c'est cette équation qu'il faut construire par le moyen d'une parabole donnée dont le paramètre est a. On pourra objecter que ce n'est point avec une

Digitized by Google

parabole donnée quelconque que je construis mon équation, puisque je suppose que son paramètre est a, qui est une quantité de mon équation. A cela je réponds que la parabole étant donnée avec son paramètre a, je change le coëfficient quelconque de du second terme de mon équation, en un autre qui ait a pour un de ses facteurs, ainsi je fais $de = ap$. De même le troisième terme étant fgh, je le transforme en un autre $a^2 q$. Ainsi je ne construis pas la parabole pour l'équation, mais je transforme l'équation pour la parabole.

Soit donc la parabole donnée FAG (*Fig.* 16 *pour les Notes*) dont le paramètre est a, et soit l'équation à construire ramenée à cette forme $x^3 \pm apx \pm a^2 q = 0$. Je cherche le centre et le rayon du cercle dont les points d'intersection avec la parabole donneront les racines de l'équation. Pour cela je prends sur l'axe AZ, une partie $AC = \frac{1}{2} a$, ensuite sur le même axe une partie $= \frac{1}{2} p$ que je porte de C vers A, si le second terme est $+ apx$, ou de C vers Z, s'il est $- apx$. Supposons que ce dernier cas ait lieu, je porte donc $\frac{1}{2} p$ de C en D, et de ce point D, j'élève sur l'axe une perpendiculaire $= \frac{1}{2} q$ vers la droite, si le troisième terme est $- a^2 q$, et vers la gauche, s'il est $+ a^2 q$. Supposons ce dernier cas, et que l'équation soit... $x^3 - apx + a^2 q = 0$, je porte donc $DE = \frac{1}{2} q$, à gauche de l'axe, et du point E comme centre, avec EA comme rayon, je décris un cercle, et des points d'intersection G, L, F, j'abaisse sur l'axe les perpendiculaires GK, LS, FP, et celles de ces perpendiculaires qui se trouvent à droite de l'axe, telles que GK, LS seront les racines positives de l'équation, celles qui se trouvent à gauche, comme FP, en seront les négatives. Pour le prouver, il suffira de démontrer que chacune de ces perpendiculaires reproduit l'équation proposée.

Digitized by Google

Prouvons-le d'abord pour GK. On a $AC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}p$, $DE = \frac{1}{2}q$, $AK = \frac{x^2}{a}$, $CK = \frac{1}{2}a - \frac{x^2}{a}$, $DK = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}a - \frac{x^2}{a}$, $\overline{EG}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{EH}^2$, ou $\overline{EG}^2 = \overline{GH}^2 + (ED + DH)^2 = \overline{GH}^2 + \overline{ED}^2 + 2ED \times DH + \overline{DH}^2$, et en substituant les valeurs analytiques et observant que $GH = DK$, et que $DH = GK$, il vient.....

$$\overline{EG}^2 = \frac{1}{4}p^2 + \frac{ap}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{px^2}{a} - x^2 + \frac{x^4}{a^2} + \frac{q^2}{4} + qx + x^2.$$

D'un autre côté, $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p)^2 + \frac{q^2}{4} = \frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4}$, mais $AE = EG$, donc $\frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} = \frac{1}{4}p^2 + \frac{ap}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{px^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + qx + \frac{q^2}{4}$; équation qui donne, toutes réductions faites, $\frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + qx = 0$, ou bien $x^4 - apx^2 + a^2qx = 0$, ou enfin $x^3 - apx + a^2q = 0$. On trouverait de même, que la perpendiculaire SL reproduit l'équation, ainsi que la perpendiculaire FP, en prenant toutefois cette dernière avec le signe $-$.

Donc on peut construire toutes les équations du troisième degré avec une parabole donnée.

Pour construire, par le moyen de la même parabole, les équations du quatrième degré, on les mettra sous cette forme..... $x^4 \pm apx^2 \pm a^2qx \pm a^3r = 0$, ce qui est toujours possible. Ensuite on trouve le centre du cercle comme pour l'équation du troisième degré; mais, pour déterminer la longueur du rayon, voici ce qu'il faut faire de plus. Du quarré $\overline{AE}^2$ retranchez le rectangle ar, si le quatrième terme de la proposée est $+a^3r$, ou au quarré $\overline{AE}^2$ ajoutez

Digitized by Google

le rectangle ar, si le quatrième terme est $-a^3 r$, et la racine quarrée de la différence ou de la somme sera le rayon du cercle dont les points d'intersection avec la parabole feront connaître les racines de l'équation.

Soit donc la parabole donnée $FAGL$ (*Fig.* 17 *pour les Notes*) et l'équation proposée $x^4 \pm apx^2 \pm a^2qx \pm a^3r = 0$. Je prends sur l'axe AZ une partie $AC = \frac{1}{2}a$, ou un demi-paramètre de la parabole; je porte de C vers A une ligne $= \frac{1}{2}p$, si le second terme est $+apx^2$, ou dans le sens contraire, si le second terme est $-apx^2$, je suppose que ce dernier cas a lieu, de sorte que $CD = \frac{1}{2}p$; et j'élève au point D perpendiculairement à l'axe, une ligne $ED = \frac{1}{2}q$. Je porte ED à droite de l'axe, si le troisième terme de l'équation est $-a^2qx$, et à gauche, s'il est $+a^2qx$; je suppose ce dernier cas, et par conséquent le centre E du cercle sera à la gauche de l'axe; pour en avoir le rayon, je supposerai de plus que le dernier terme de l'équation est $+a^3r$, et par conséquent, d'après ce qui a été dit, il faudra retrancher le rectangle ar du quarré $\overline{AE}^2$, ou, ce qui revient au même, le rayon ER sera une moyenne proportionnelle entre $AE + \sqrt{ar}$ et $AE - \sqrt{ar}$. Soit donc le cercle décrit $RGLFQ$; je dis que si des points d'intersection G, L, F, Q avec la parabole, on abaisse sur l'axe, des perpendiculaires, elles seront les racines de l'équation proposée; que les perpendiculaires à la droite de l'axe seront les racines positives, et celles qui se trouvent à la gauche, les racines négatives. Prouvons donc qu'une quelconque de ces perpendiculaires reproduit l'équation donnée.

L'équation à construire d'après toutes les suppositions que nous avons faites, est $x^4 - apx^2 + a^2qx + a^3r = 0$. Et nous avons

Digitized by Google

$CD = \frac{1}{2}p$; $ED = \frac{1}{2}q$; et si du point d'intersection G, j'abaisse la perpendiculaire GK, j'aurai $AK = \frac{x^2}{a}$ (GK étant x); $AD = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p$; donc $DK = AD - AK = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p - \frac{x^2}{a}$; $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p)^2 + \frac{1}{4}q^2$; et le rayon $\overline{ER}^2 = \overline{AE}^2 - ar = \frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4}q^2 - ar$. D'un autre côté, $\overline{EG}^2 = \overline{DK}^2 + \overline{EH}^2 = \overline{DK}^2 + (ED + DH)^2 = \overline{DK}^2 + \overline{ED}^2 + 2ED \times DH + \overline{DH}^2$, ou bien en mettant les valeurs analytiques, $\overline{EG}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} - x^2 - \frac{px^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + \frac{q^2}{4} + qx + x^2$, qui se réduit à $\overline{EG}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{px^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + \frac{q^2}{4} + qx$.

Mais $EG = ER$, donc $\frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{px^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + \frac{q^2}{4} + qx = \frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4}q^2 - ar$; et en effaçant ce qui se détruit, on a, $-\frac{px^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + qx = -ar$, ou bien $x^4 - apx^2 + a^2qx + a^3r = 0$, qui est l'équation proposée, et dans laquelle x représente GK. On reproduirait de même l'équation, en calculant les autres perpendiculaires.

Donc on peut construire une équation quelconque du quatrième degré par le moyen d'une parabole donnée et d'un cercle.

FIN DU TOME SECOND.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE TOME PREMIER.

Discours préliminaire, ... page 5
Notation. Signification de quelques termes. Emploi des signes, ... 2
De l'Addition, ... 12
De la Soustraction, ... 16
De la Multiplication, ... 20
De l'extraction des Racines, ... 34
De la réduction des Fractions et des quantités radicales, ... 44
De la manière de trouver les Diviseurs, ... 46
De la réduction des Fractions à un dénominateur commun, ... 61
De la réduction des Radicaux à leurs moindres termes, ... 62
De la réduction des Radicaux à la même dénomination, ... 64
De la réduction des Radicaux à leurs expressions radicales les plus simples pour l'extraction des Racines, ... 65
De la forme de l'Équation, ... 71
De la manière de réduire une Équation unique, ... 73
Méthode pour réduire deux ou un plus grand nombre d'Équations à une seule, afin d'en éliminer les Inconnues, ... 78
De l'élimination d'une Inconnue par l'égalité de ses valeurs, ... 79
De l'élimination d'une Inconnue par la substitution de sa valeur, ... 81
De l'élimination d'une Inconnue qui est de plusieurs dimensions dans chaque équation, ... 82

Digitized by Google

Méthode pour mettre une Question en équation,..... page 88

PROBLÊME Ier. *La somme de deux nombres égale a; la différence de leurs quarrés est b; on demande quels sont ces deux nombres?*..... 91

PROBLÊME II. *On a trois quantités x, y, z. On connaît les sommes de ces quantités prises deux à deux, on demande la valeur de chacune en particulier?*..... 92

PROBLÊME III. *Il s'agit de partager un nombre donné en parties telles, que chacune des plus grandes surpasse la plus petite d'une quantité donnée*, 93

PROBÊME IV. *Un homme veut distribuer de l'argent entre des pauvres. S'il avait huit deniers de plus, il pourrait en donner trois à chacun; il ne leur en donne donc que deux, et il lui en reste trois. On demande le nombre des pauvres?*..... ibid.

PROBLÊME V. *Deux messagers A et B sont éloignés l'un de l'autre de 59 milles; ils partent le matin pour aller à leur rencontre mutuelle. A fait 7 milles en deux heures, et B en fait 8 en trois heures, mais A est parti une heure avant B. On demande combien A fera de milles avant de rencontrer B?*..... 94

Le même problême d'une manière plus générale,..... 95

PROBLÊME VI. *Étant donnée la puissance d'un agent quelconque, trouver combien il faudrait d'agens de cette espèce pour produire, dans un temps donné b, un effet demandé a*,..... 97

PROBLÊME VII. *Les forces de plusieurs agens étant données, déterminer le temps x dans lequel, toutes ensemble, elles peuvent produire un effet demandé d*,..... 98

PROBLÊME VIII. *On a différens mélanges de plusieurs substances, on veut en former un nouveau, de manière que ces différentes substances s'y trouvent dans une proportion donnée*,..... 99

PROBLÊME IX. *On connaît les prix de différens mélanges et les proportions*

Digitized by Google

de chacune des choses qui les composent; il s'agit de déterminer le prix de chacune de ces choses composantes en particulier,..... page 101

PROBLÊME X. *Connaissant la pesanteur spécifique d'un composé, et celle de chacun de ses composans, déterminer dans quelle proportion ces derniers s'y trouvent*,..... 102

PROBLÊME XI. *On a trois prés d'une qualité égale, et dans lesquels on suppose que l'herbe croît uniformément. Le premier b peut nourrir un nombre de bœufs a pendant le temps c; le second e peut nourrir un nombre de bœufs d pendant le temps f; on demande combien le troisième g peut en nourrir pendant le temps h?*..... 103

PROBLÊME XII. *Étant données les grandeurs et les quantités de mouvement respectives de deux corps sphériques qui se meuvent sur la même ligne droite et se choquent; déterminer leur quantité de mouvement respective après le choc*,..... 106

PROBLÊME XIII. *Trouver trois nombres en proportion continue, dont la somme soit* 20, *et dont la somme des quarrés soit* 140,..... 108

Le même problême d'une autre manière,..... 109

PROBLÊME XIV. *On veut trouver quatre nombres en proportion continue, dont la somme des deux moyens fasse* 12, *et celle des deux extrêmes* 20, ibid.

PROBLÊME XV. *Trouver quatre nombres en proportion continue, dont la somme soit a, et la somme des quarrés b*,..... 110

PROBLÊME XVI. *Une pension d'une somme a chaque année, doit être payée pendant cinq ans; quelqu'un achète cette pension pour une somme c d'argent. On demande à combien pour cent se monte, dans ce marché, l'intérêt des intérêts de chaque année?*..... 112

De la manière de mettre les Questions de Géométrie en équation,.... 114

PROBLÊME Ier. *Étant donnée une droite BC d'une longueur connue, sur les*

Digitized by Google

les extrêmités de laquelle deux autres droites BA, CA font des angles donnés ABC, ACB, trouver la hauteur AD du point de concours A, au-dessus de la droite donnée BC, ... page 136

PROBLÊME II. *Si les côtés AB, AC et la base BC d'un triangle quelconque, ABC sont donnés, et qu'une perpendiculaire AD soit abaissée du sommet de l'angle A sur la base, on demande de trouver les deux segmens BD et DC,* ..... ibid.

PROBLÊME III. *Étant donnés le périmètre et la surface d'un triangle rectangle ABC, trouver son hypothénuse BC,* 137

PROBLÊME IV. *Étant donnés le périmètre et la hauteur d'un triangle rectangle, trouver ce triangle,* 139

PROBLÊME V. *Étant données la base AB d'un triangle rectangle, ainsi que la somme faite de la perpendiculaire et des côtés CA + CB + CD, trouver le triangle,* 140

Le même d'une autre manière, ... ibid.

Construction Géométrique, ... 141

PROBLÊME VI. *Étant données dans un triangle rectangle ABC, la somme des côtés AC + BC, et la perpendiculaire CD, trouver le triangle,* ibid.

Construction Géométrique, ... 142

Le même d'une autre manière, ... ibid.

PROBLÊME VII. *Étant données dans un triangle rectangle, la somme des côtés, et la somme faite de la perpendiculaire et de la base, trouver le triangle,* 143

Construction Géométrique, ... 144

PROBLÊME VIII. *Étant donnés la surface, le périmètre et un angle A d'un triangle quelconque ABC, déterminer tout le reste,* ..... ibid.

PROBLÊME IX. *Étant données la hauteur, la base et la somme des côtés, trouver le triangle,* 145

Digitized by Google

PROBLÊME X. *Étant donnés la base AB, la somme des côtés AC + BC, et l'angle C, trouver le reste du triangle*, ... page 146

PROBLÊME XI. *Étant donnés les côtés d'un triangle, trouver les angles*, 147

PROBLÊME XII. *Les côtés et la base d'un triangle rectiligne quelconque étant donnés, trouver des segmens de la base, la perpendiculaire, la surface et les angles*, ... 149

PROBLÊME XIII. *L'angle CBD étant donné, ainsi que la droite CD, il s'agit de placer cette droite dans l'angle CBD, de manière que si de son extrémité D on tire en un point A donné sur la droite CB prolongée, la droite DA, l'angle ADC soit égal à l'angle ABD*, 151

PROBLÊME XIV. *Trouver le triangle ABC dont les trois côtés AB, AC, BC, et la perpendiculaire CD sont en progression arithmétique*, ibid.

PROBLÊME XV. *Trouver le triangle ABC dont les trois côtés AB, AC, BC et la perpendiculaire CD sont en progression géométrique*, 152

Le même d'une autre manière, ... 153

PROBLÊME XVI. *Sur une base donnée AB, construire le triangle ABC, dont le sommet C est à une droite CE donnée de position, et dont la base est moyenne proportionnelle arithmétique entre les côtés*, 154

PROBLÊME XVII. *Étant donnés les côtés AB, BD, DC et AC, et une diagonale BC d'un parallélogramme quelconque, trouver l'autre diagonale AD*, ... 155

PROBLÊME XVIII. *Étant donnés les angles, la surface et le périmètre d'un trapèze ABCD, trouver ses côtés*, ... 156

PROBLÊME XIX. *On veut entourer un réservoir ABCD, d'un trottoir ABCDEFGH, d'une surface donnée, et ayant par-tout la même largeur*, ... 158

PROBLÊME XX. *Mener d'un point donné C, une droite CF qui renferme*,

Digitized by Google

avec deux autres droites AE, AF données de position, un triangle AEF d'une grandeur donnée, ... page 159

PROBLÊME XXI. *Déterminer sur la droite DF un point C, tel que si de ce point on mène deux droites AC et BC aux points donnés A et B, la différence de ces deux droites soit égale à une ligne donnée*, ... 160

PROBLÊME XXII. *Trois droites, AD, AE, BF, étant données de position, il en faut mener une quatrième DF, de manière que ses parties DE, EF, interceptées par les premières droites, soient de longueurs données*, 161

PROBLÊME XXIII. *Il faut déterminer un point Z tel que, si de ce point on mène, sous des angles donnés, quatre droites ZA, ZB, ZC et ZD, à quatre autres droites données de position FA, EB, FC, GD, le rectangle des deux droites ZA et ZB soit donné; et que la somme des deux autres droites ZC et ZD soit aussi donnée*, ... 162

PROBLÊME XXIV. *Il faut placer dans l'angle droit EAF une droite donnée EF de manière que cette droite prolongée passe par un point donné C, également éloigné des deux droites qui comprennent l'angle droit*, ... 164

Le même d'une autre manière, ... 165

PROBLÊME XXV. *Un cercle étant décrit d'un centre C et avec un rayon CD, mener à ce cercle une tangente BD, de manière que la partie DB de cette tangente interceptée par les droites AP et AB données de position, soit égale à une droite d'une longueur donnée*, ... 167

PROBLÊME XXVI. *Étant données trois droites AE, BF, CF, trouver un point D tel que, si de ce point on abaisse sur chacune des droites, des perpendiculaires DA, DB, DC, ces perpendiculaires soient entre elles dans un rapport donné*, ... 169

PROBLÊME XXVII. *Trouver un point D, tel que si de ce point on tire trois droites DA, DB, DC, à trois points donnés A, B, C, ces droites soient entre elles dans un rapport donné*, ... 170

Digitized by Google

PROBLÊME XXVIII. *On veut inscrire une droite DC, d'une longueur donnée, dans une section conique donnée DAC, de manière que cette droite passe par le point G donné de position*, ... page 172

PROBLÊME XXIX. *Il faut multiplier ou diviser un angle donné par un nombre donné*, ... 174

PROBLÊME XXX. *Une comète ayant une marche uniforme sur une ligne droite BD, déterminer la position de sa route par trois observations*, 176

PROBLÊME XXXI. *Étant donné un point lumineux d'où partent des rayons divergens qui viennent frapper une surface sphérique réfringente, trouver le point de concours de chaque rayon réfracté avec l'axe de la sphère qui passe par le point lumineux*, ... 177

PROBLÊME XXXII. *Un cône étant coupé par un plan quelconque, trouver la figure de la section*, ... 179

PROBLÊME XXXIII. *Si une droite XY, éloignée de l'axe AB de la quantité CD, et ayant une inclinaison connue sur le plan DCB, fait une révolution autour de l'axe AB, et que le solide PQRVTS qu'elle engendrera par cette révolution, soit coupé par un plan quelconque INQLK; on demande quelle sera la figure de la section?* 180

PROBLÊME XXXIV. *Si on élève sur une droite AF une perpendiculaire AD d'une longueur donnée, et qu'une jambe ED de l'équerre DEF passe sans cesse par le point D, tandis que l'autre jambe EF, égale à AD, glisse sur AF, il s'agit de trouver la courbe HIC que décrira pendant ce mouvement le point C, milieu de la droite EF*, ... 181

Le même d'une autre manière, ... 182

PROBLÊME XXXV. *Si une droite ED, d'une longueur connue, et soutendant un angle donné EAD, se meut dans cet angle de manière que ses extrémités D et E touchent sans cesse les côtés AD et AE de l'angle;*

Digitized by Google

on demande de déterminer l'espèce de courbe FCG que décrit le point C de la droite DE pendant ce mouvement,..... page 183

PROBLÊME XXXVI. *Si une équerre EBD se meut de manière qu'une de ses jambes EB ne cesse pas d'être la soutendante de l'angle droit EAB, tandis que l'extrémité D de l'autre jambe BD décrit une courbe FDG; on demande de déterminer cette courbe?* 184

PROBLÊME XXXVII. *Les droites PD et BD dont la raison est donnée, étant menées, comme on voudra, dans l'angle connu PAB, avec la condition que BD soit toujours parallèle à AP, et que PD se termine toujours au point P donné de position sur la droite AP; on demande de trouver le lieu du point D, intersection des deux droites*,.... 186

PROBLÊME XXXVIII. *Si les deux droites VE et VC données de position, sont coupées d'une manière quelconque en C et en E, par une droite PE tournant sur le point P donné de position, et si la portion interceptée CE de cette droite est coupée en deux parties CD et DE en raison donnée; on demande de trouver le lieu du point D*,..... 187

PROBLÊME XXXIX. *Si de deux points donnés de position A et B, on mène à un troisième point quelconque C deux droites AC, BC qui soient entre elles dans un rapport quelconque, on demande de trouver le lieu du point de concours C*,..... 189

PROBLÊME XL. *Si un point lumineux A envoie des rayons vers une surface plane réfringente CD, on demande de trouver le rayon AC, dont le réfracté CB irait frapper le point B*,..... 190

PROBLÊME XLI. *Trouver le lieu du sommet D d'un triangle dont la base AB est donnée, et dont les deux angles DAB, DBA sur cette base, ont une différence donnée*,..... 191

Le même d'une manière plus courte,..... 194

PROBLÊME XLII. *Trouver le lieu du sommet d'un triangle dont la base*

Digitized by Google

est donnée, et dont les deux angles sur cette base sont tels, que l'un est plus grand que le double de l'autre, d'un angle donné,..... page 195

PROBLÊME XLIII. *Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et touche une droite donnée de position,*..... 197

PROBLÊME XLIV. *Décrire un cercle qui passe par un point donné, et touche deux droites données de position,*..... 199

PROBLÊME XLV. *Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et touche un autre cercle donné de position,*..... 200

PROBLÊME XLVI. *Décrire un cercle qui passe par un point donné, touche un cercle donné, et une droite donnée de position,*..... 202

PROBLÊME XLVII. *Décrire un cercle qui passe par un point donné, et touche deux autres cercles donnés de grandeur et de position,*.... 204

PROBLÊME XLVIII. *Si aux deux extrémités d'un fil DAE, qui peut glisser autour d'un point fixe A, on attache deux poids D et E; que l'un des deux, par exemple E, ne puisse glisser que selon la ligne oblique BG; on demande le lieu du poids E, lorsque ces deux poids se font équilibre,*..... 207

PROBLÊME XLIX. *Si au fil DACBF, qui peut glisser sur deux points fixes A et B, on suspend trois poids D, E et F; D et F aux extrémités du fil, et E à son milieu, qui est en C entre les deux points fixes; il s'agit, connaissant les poids et la situation des deux points fixes, de déterminer la position du point C, milieu du fil, lorsque tout le systême est en équilibre,*..... 210

PROBLÊME L. *Déterminer la profondeur d'un puits par le son d'une pierre qui en va frapper le fond,*..... 213

PROBLÊME LI. *Un globe A est donné, ainsi que sa position par rapport à un mur DE; on donne également la distance BD du centre du globe B*

Digitized by Google

au même mur. Le centre du globe A est sur la droite BD perpendiculaire au mur. On suppose que les deux corps sont sans pesanteur, et qu'ils se meuvent dans un milieu parfaitement libre; enfin on suppose que le corps A, poussé d'un mouvement uniforme vers le point D, rencontre en son chemin le corps B qui est en repos; que le corps B va frapper le mur, et, par un mouvement de réflexion, vient rechoquer le globe A au point C. On demande, d'après toutes ces données, de déterminer la masse du globe B, ... page 214

PROBLÊME LII. *Deux globes A et B sont joints par un léger fil PQ. Le globe B est suspendu au globe A; on abandonne celui-ci à l'action de la pesanteur selon la verticale PR; le globe B, parvenu au plan horizontal FG, est réfléchi en haut, et rencontre au point D le globe A qui continuait de tomber. On demande de quelle hauteur il faut que le globe A soit tombé pour produire l'effet énoncé, en supposant que l'on connaisse la longueur du fil PQ et la distance DF du point de rencontre des deux globes au plan horizontal GF,* 216

PROBLÊME LIII. *Si on a deux globes en repos; que le globe A soit plus élevé que le globe B; qu'on les fasse tomber à des instans différens, par exemple, que A ait déjà parcouru l'espace PT, au moment que B commence à tomber; on demande de déterminer les lieux α et β où se trouvent les deux globes, lorsque leur distance αχ sera égale à une quantité donnée,* 220

PROBLÊME LIV. *Si l'on a deux globes A et B, dont le supérieur A, tombant du point G, rencontre l'inférieur B au moment qu'il remonte, après avoir été réfléchi par le fond H; si ces deux globes, après s'être choqués, se séparent de nouveau, de manière que le globe supérieur remonte à sa première hauteur G, dans le même temps que l'inférieur est renvoyé contre le fond H; ensuite que le globe A retombant encore,*

Digitized by Google

tandis que le globe B remonte après avoir été réfléchi par le fond, ces deux globes se choquent une seconde fois au même lieu que la première, et qu'ils continuent ainsi à se choquer sans cesse et à retourner toujours au même point d'où ils étaient partis; il s'agit, connaissant la grandeur des deux globes, la position du fond, et celle du point G, d'où le globe supérieur est tombé, il s'agit, dis-je, de déterminer le lieu où les deux globes se choqueront, ... page 224

PROBLÊME LV. *On a planté, dans un certain lieu de la terre, aux points A, B, C, trois piquets perpendiculaires au plan horizontal: le piquet qui est en A, a six pieds; celui qui est en B, en a dix-huit; et celui qui est en C, huit; la droite AB est de trente pieds; il arrive qu'un certain jour de l'année l'extrémité de l'ombre du piquet A passe par les points B et C; que l'extrémité de l'ombre du piquet B passe par A et C; et que l'extrémité de l'ombre du piquet C passe par A. On demande la déclinaison du soleil, et l'élévation du pole, ou, ce qui est la même chose, le jour et le lieu où cela est arrivé*, ... 228

Première partie analytique, ... 229

Seconde partie analytique, ... 232

PROBLÊME LVI. *Une comète traversant le ciel d'un mouvement uniforme et rectiligne; il s'agit de déterminer, par quatre observations faites en différens temps, sa distance de la terre, et la loi de son mouvement d'après le systême de Copernic*, ... 235

PROBLÊME LVII. *Si un angle donné CAD n'a que la faculté de tourner autour du point A donné de position; que l'angle donné CBD n'ait aussi qu'un mouvement possible de rotation autour du point B donné de position; et que les deux angles tournent en effet selon cette loi, en supposant de plus que les côtés AD, BD se couperont toujours dans une ligne droite EF donnée de position: il s'agit de déterminer*

la

Digitized by Google

la courbe que décrira la suite des intersections C des deux autres côtés AC, BC, ... page 238

PROBLÊME LVIII. *Décrire une parabole qui passe par quatre points donnés*, ... 239

PROBLÊME LIX. *Décrire une section conique qui passe par cinq points donnés*, ... 242

PROBLÊME LX. *Décrire une section conique qui passe par quatre points donnés, et qui, dans un de ces points, touche une ligne droite donnée de position*, ... 244

PROBLÊME LXI. *Décrire une section conique qui passe par trois points donnés, et qui, dans deux de ces points, touche deux droites données de position*, ... 245

Fin de la Table du Tome premier.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE TOME SECOND.

De la manière de résoudre les Équations, ... page 1
De la nature des Racines des Équations, ... 2
Des transformations des Équations, ... 15
Des limites des Équations, ... 23
Réduction des Équations par les diviseurs incommensurables, ... 30
Construction linéaire des Équations, ... 52
Entre deux droites données AB, AC, placer une droite BC d'une longueur donnée de manière qu'elle passe par un point donné P, ... 57
Lemme d'Archimède, ... 82
Scolie, ... 97
Notes sur l'Arithmétique universelle de Newton, ... 103
Supplément aux Notes de l'Arithmétique universelle, ... 241

Fin de la Table du Tome second.

A PARIS, DE L'IMPRIMERIE DE STOUPE, AN X.

Digitized by Google

Fautes à corriger dans le Tome Premier.

Page 78, ligne 17, *afin d'en dégager*, lisez, *afin d'en éliminer.*

Page 144, ligne 20, au lieu de *par le double* qui se trouve dans quelques exemplaires, lisez, *par la moitié.*

Page 209, ligne 9, au lieu de *et à*, lisez, *est à.*

Page 227, ligne 6 de la Note, au lieu de $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$, lisez, $\sqrt{x} + \frac{a^3 \sqrt{x}}{b^3}$.

Tome II.

Page 40, ligne dernière, effacez $- \frac{1}{2} p e$.

Page 155, ligne dernière, effacez ces mots comme inutiles, *et qui de plus leur est perpendiculaire.*

Page 210, ligne 4, au lieu de ne, mettez ne^n.

Digitized by Google

ÉDITIONS PRINCIPALES DES OUVRAGES DE NEWTON.

ISAACI NEWTON Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. *Londini*, *Streater*, 1687, *in*-4°.

Eadem : Editio secunda. *Cantabrigiæ*, 1713, *in*-4°.

Eadem : Editio auctior. *Amstelodami*, 1714 et 1723, *in*-4°.

Eadem : Editio adhuc auctior, et ab autore emendata. *Londini*, *in*-4°, 1726.

Eadem, cum Commentariis LE SEUR et JACQUIER. *Genevæ*, 3 v. *in*-4°, 1739.

Eadem, *Coloniæ Allobrogum*, 3 vol. *in*-4°. 1760.

Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones et Differentias, 1716, *in*-4°, traduit en François par BUFFON, en 1740, *in*-4°.

Ejusdem Optice, sive de Reflectionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis Libri tres : Latinè reddidit SAMUEL CLARCKE. Accessêre Enumeratio Curvarum tertii Ordinis, et Tractatus de Quadraturâ Curvarum. *Londini*, *Smith et Walford*, 1706, *in*-4°. *cum Tabulis æneis*.

Eadem : Editio secunda auctior, omissis cæteris Tractatibus. *Londini*, 1719, *in*-4°. *cum Tabulis æneis*.

*Les Editions Angloises de l'*Optique *ont paru en* 1705 *et* 1718, *in*-8°.

Le même Traité d'Optique, traduit en François par COSTE. *Amsterdam*, *Humbert*, 1720, *in*-12, 2 *tom. fig.*

Le même Traité d'Optique, etc. traduit en François par BEAUZÉE, 1787, 2 vol. *in*-8°.

Le même, etc. nouvelle Edition. *Paris*, *Montalant*, 1722. *in*-4°. *fig.*

Ejusdem Arithmetica universalis; cui accedit HALLEIANA, Æquationum Radices arithmeticas inveniendi methodus. *Cantabr.* 1707, *in*-8°.

Eadem : Editio secunda. *Londini*, *Sam. Toocke*, 1722, *in*-8°.

Eadem, cum Commentariis ANTONII LECCHI, 3 v. *in*-8°. *Mediolani*, 1752.

Eadem, cum Commentariis CASTILLIONEI, *Amstelodami*, 1761, *in*-4°.

ISAACI NEWTON Opuscula Mathematica collecta a CASTILLONE. *Lausannæ* et *Genevæ*, 1744, 3 vol. *in*-4°.

Ejusdem Analysis Infinitorum a IONES; cum enumeratione Curvarum tertii Ordinis et Quadraturâ, etc. *Londini*, 1711, *in*-4°.

Ejusdem Tractatus de Quadraturâ Curvarum. *Parisiis*, *in*-4°. *Edition que fit faire Montmor.*

Bernardi *Vavenii* Geographia generalis, in quâ affectiones generales Telluris explicantur; aucta ab ISAACO NEWTON. *Cantabrig.* 1681, *in*-8°.

Abrégé de la Chronologie de Newton, avec les Observations de Freret. *Paris*, 1725, *in*-12.

Le même, traduit en François, par GRANET, 1728, *in*-4°.

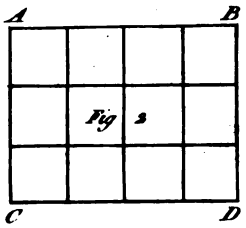
Réponse de NEWTON aux *Observations de Freret*, etc. avec une Lettre de L'ABBÉ CONTI, *Paris*, 1726, *in*-12.

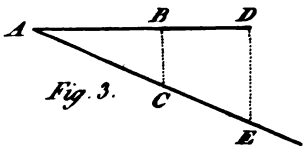
Il y a encore plusieurs Lettres de Newton insérées dans le *Commercium epistolicum* DE COLLINS, et dans le Recueil de DES MAIZEAUX.

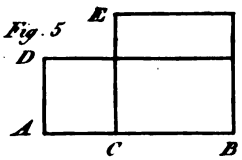
PEMBERTON a donné en Anglois *les Élémens de sa Philosophie neutonienne*, *in*-4°, traduits en François, et imprimés à *Amsterdam*, 1755.

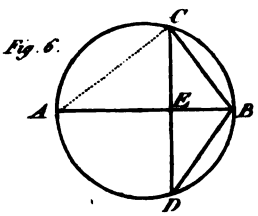
ISAACI NEWTON Opera quæ extant omnia, cum Commentariis SAMUEL HORSLEY. *Londini*, 1779, 5 vol. *in*-4°.

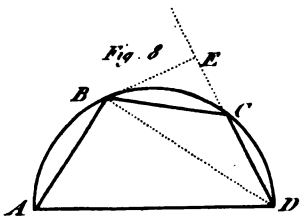
Digitized by Google

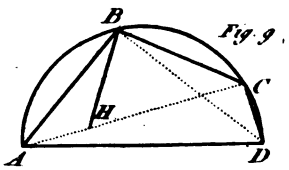


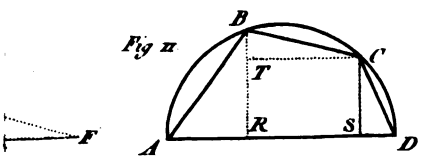


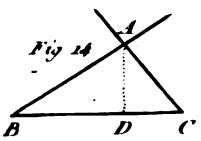


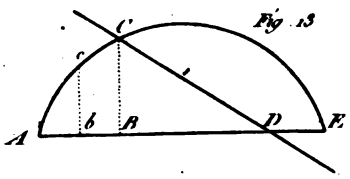


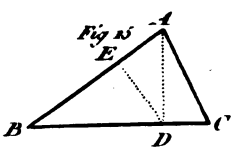






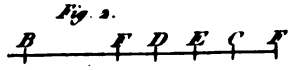


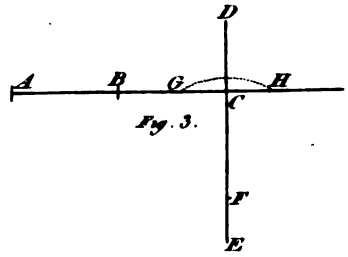


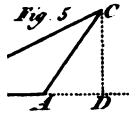


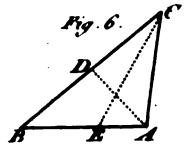
Digitized by Google

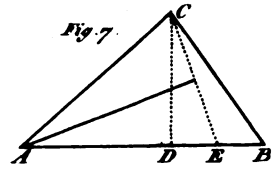
Digitized by Google

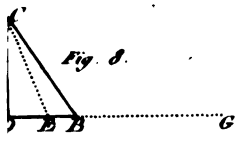


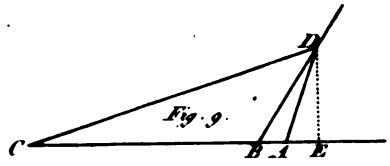


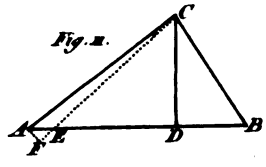


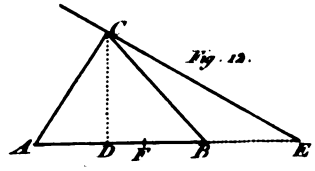


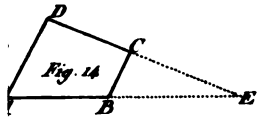


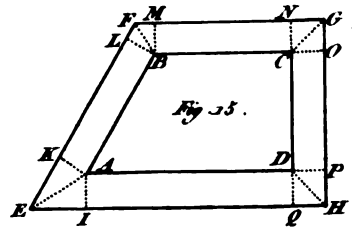












Digitized by Google

Digitized by Google

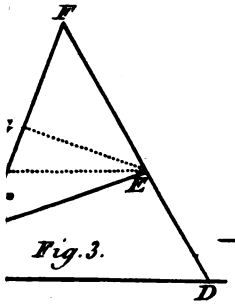


Fig. 3.

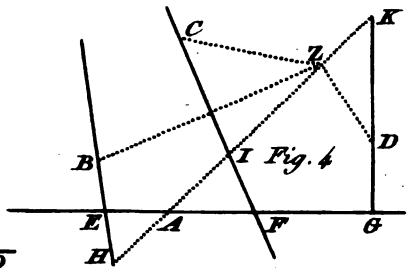


Fig. 4

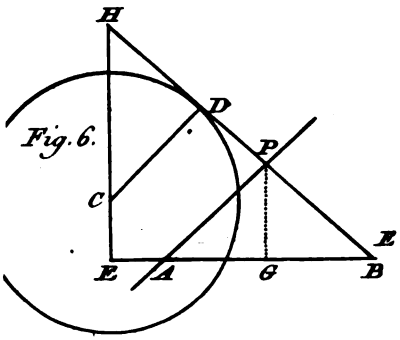


Fig. 6.

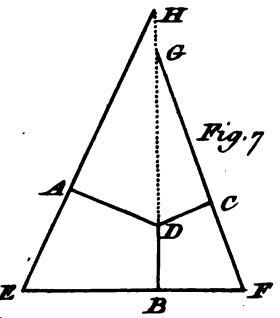


Fig. 7

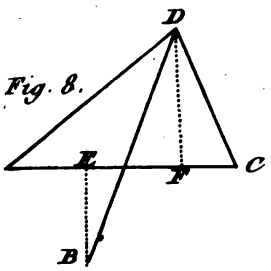


Fig. 8.

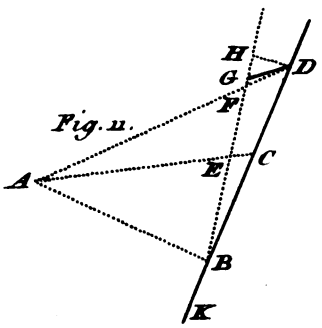
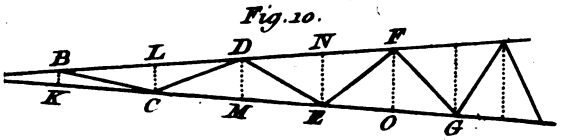


Fig. 11.

Fig. 10.



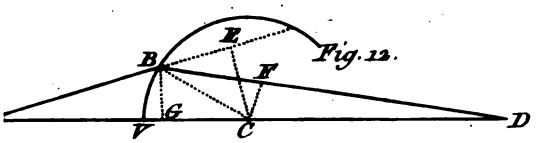
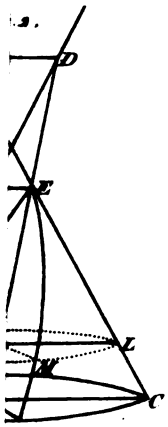
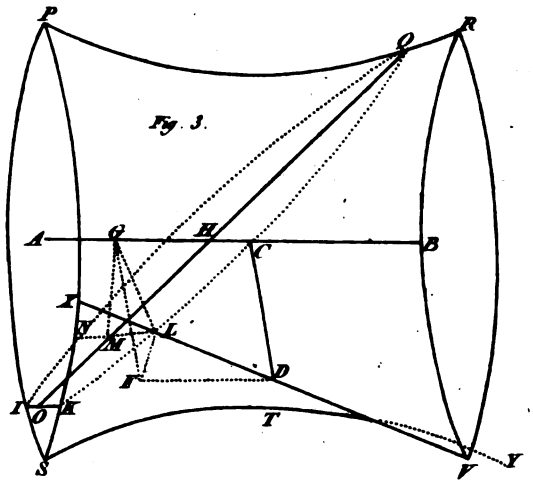


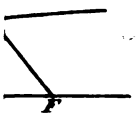
Fig. 12.

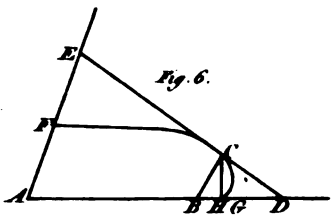
Digitized by Google

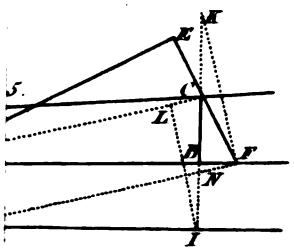
Digitized by Google

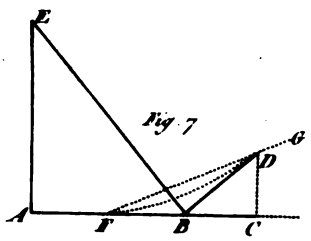


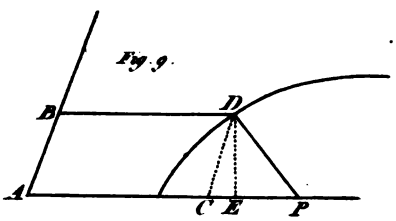












Digitized by Google

Digitized by Google

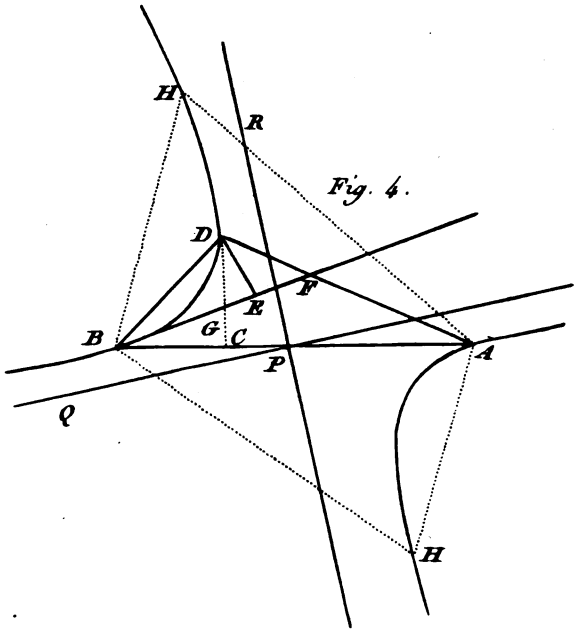


Fig. 4.

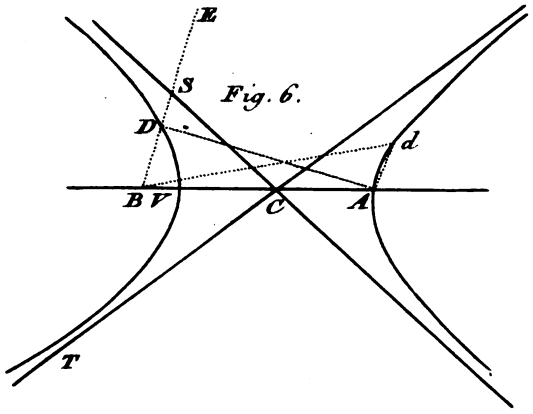


Fig. 6.

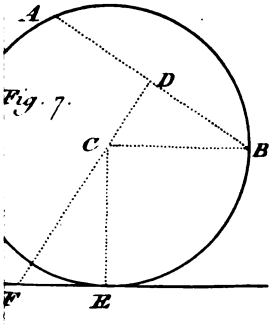


Fig. 7.

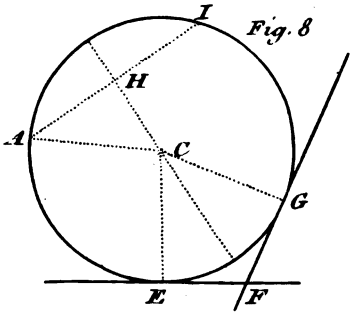
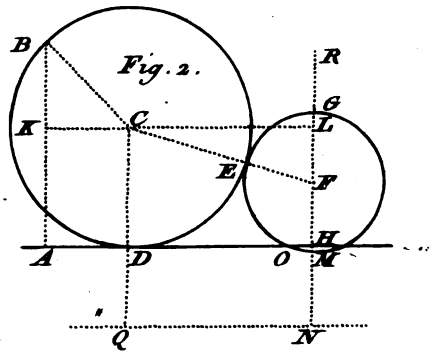
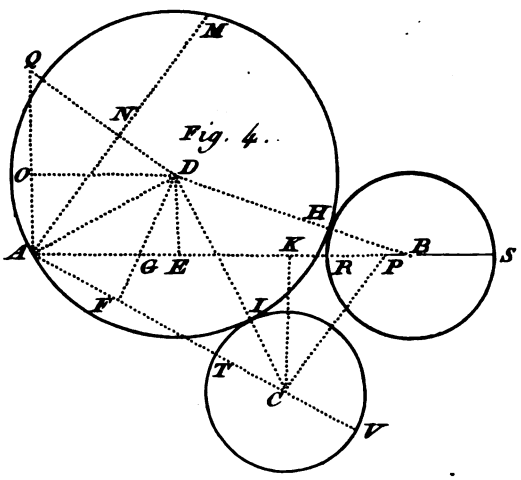
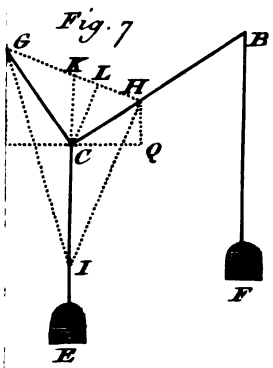


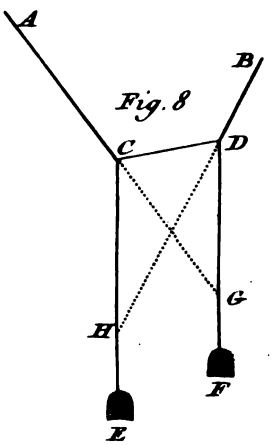
Fig. 8

Digitized by Google



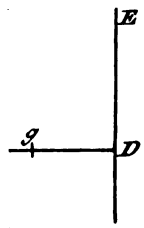






Digitized by Google

Digitized by Google



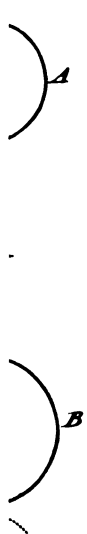


Fig. 4.

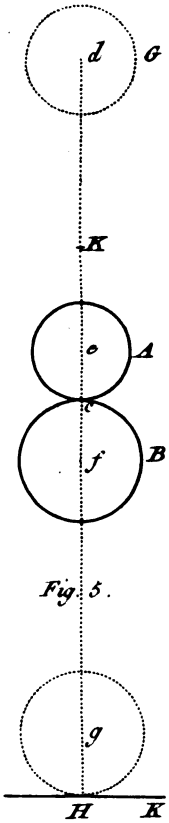
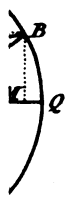


Fig. 5.



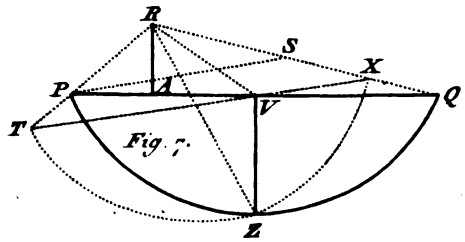


Fig. 7.

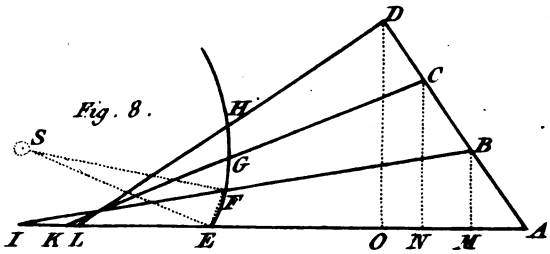


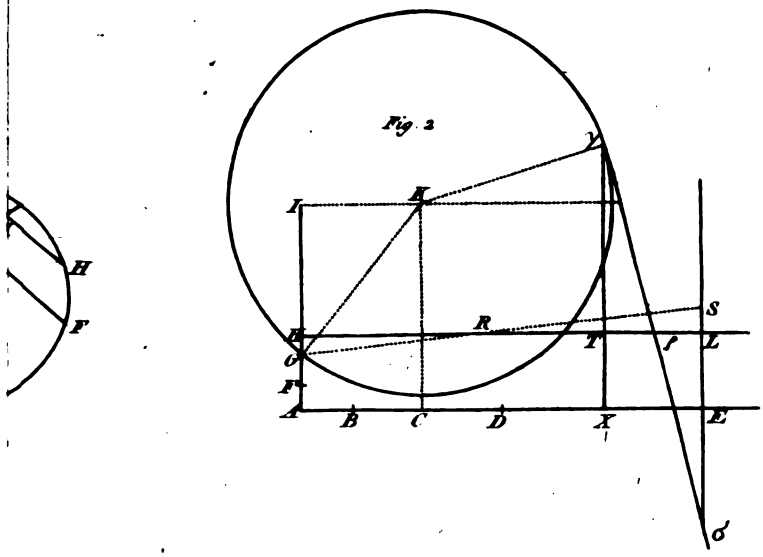
Fig. 8.

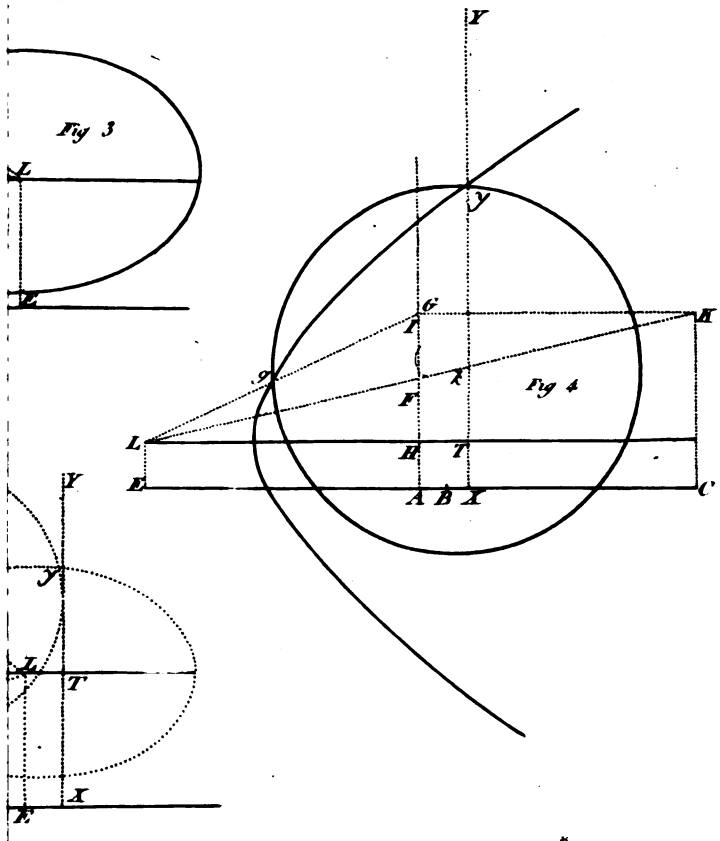
P——

Q——

Digitized by Google

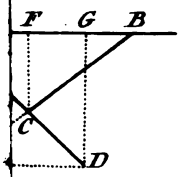
Digitized by Google





Digitized by Google

Digitized by Google



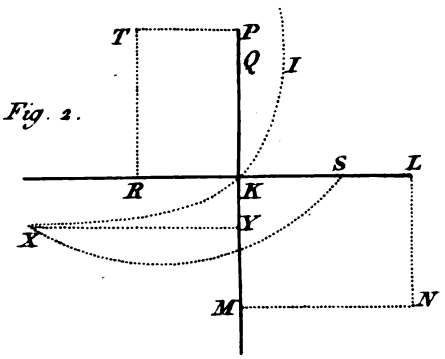
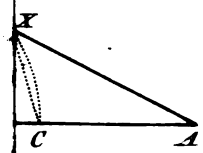


Fig. 2.

Fig. 3.



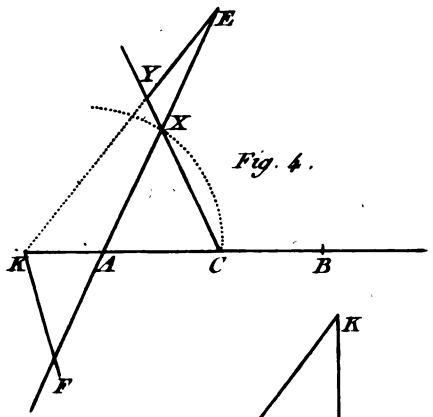
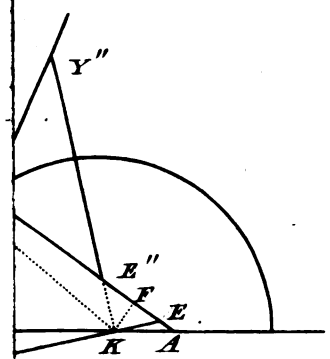


Fig. 4.



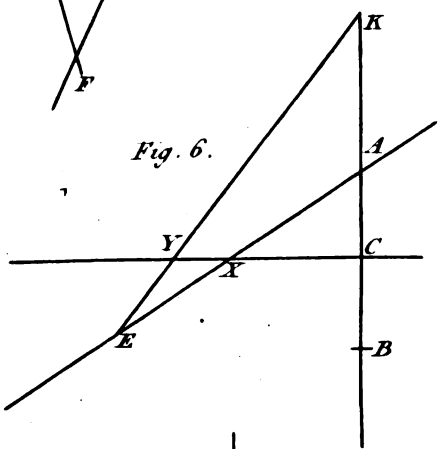
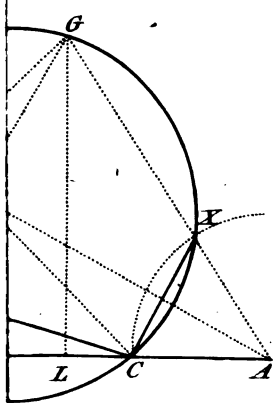


Fig. 6.



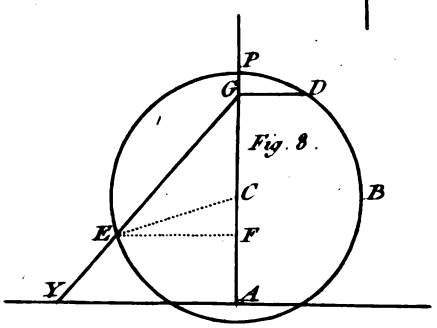


Fig. 8.

Digitized by Google

Digitized by Google

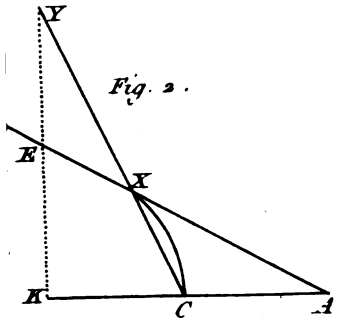


Fig. 2.

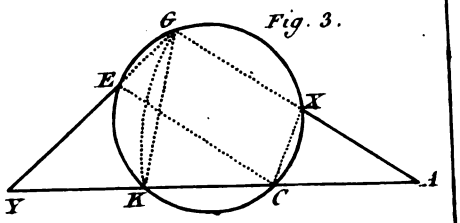


Fig. 3.

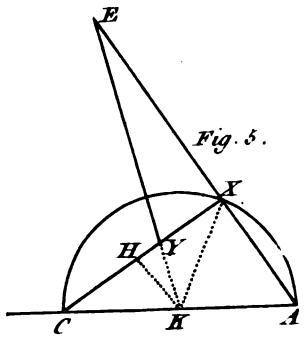


Fig. 5.

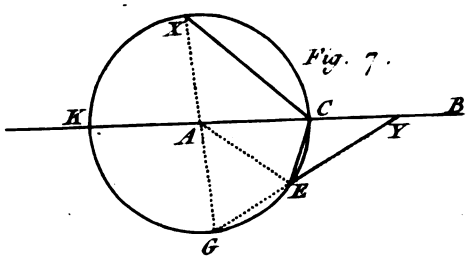


Fig. 7.

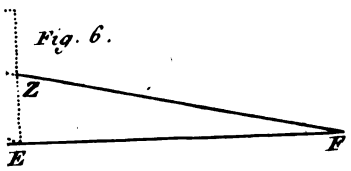


Fig. 6.

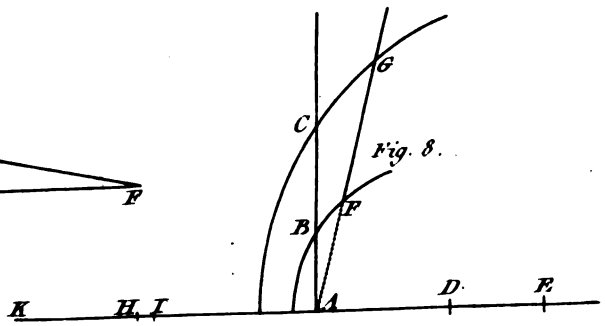


Fig. 8.

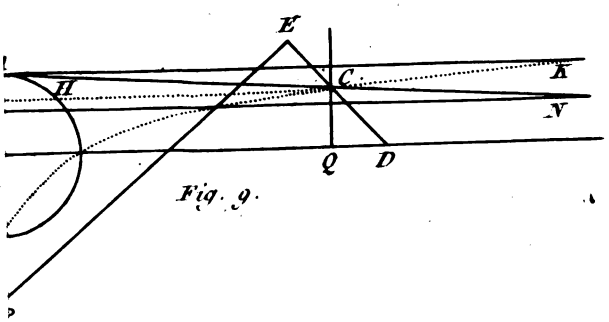
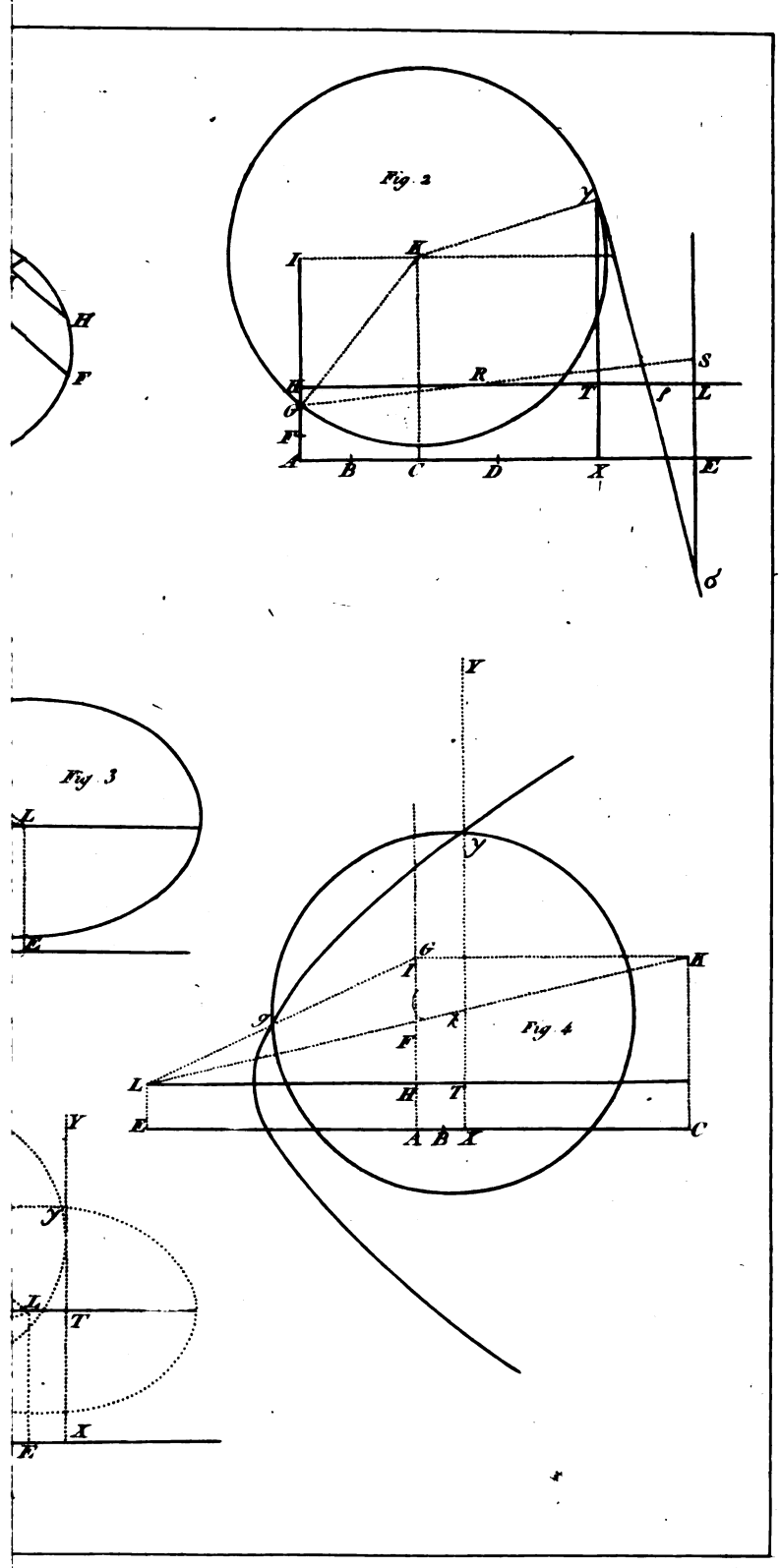


Fig. 9.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

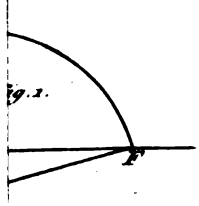


Fig. 1.

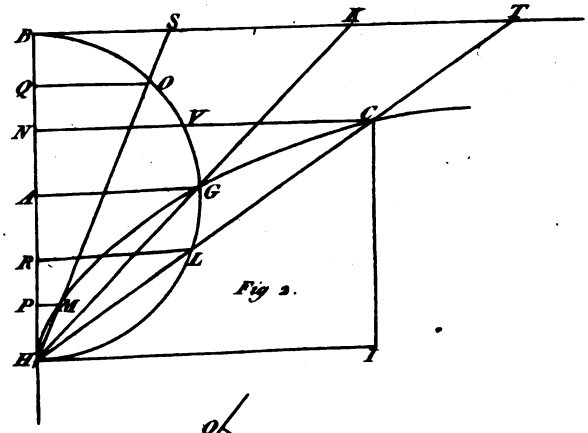
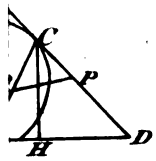


Fig 2.



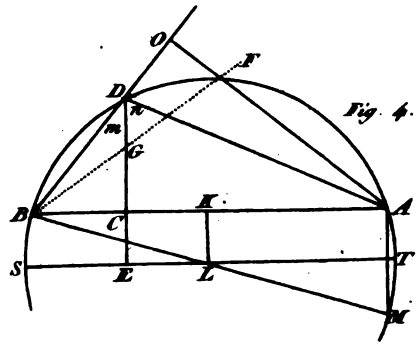


Fig. 4.

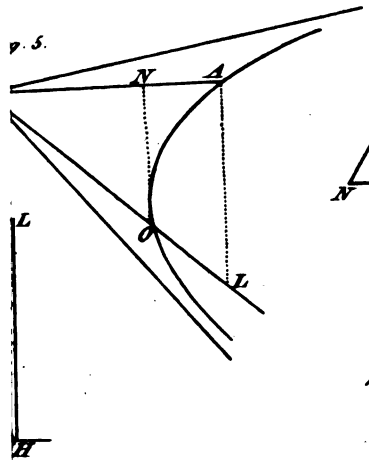


Fig. 5.

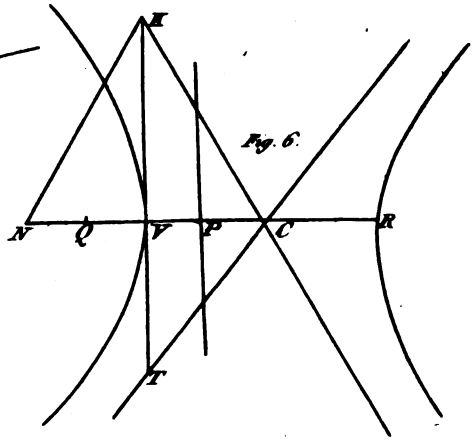


Fig. 6.

Digitized by Google

Digitized by Google

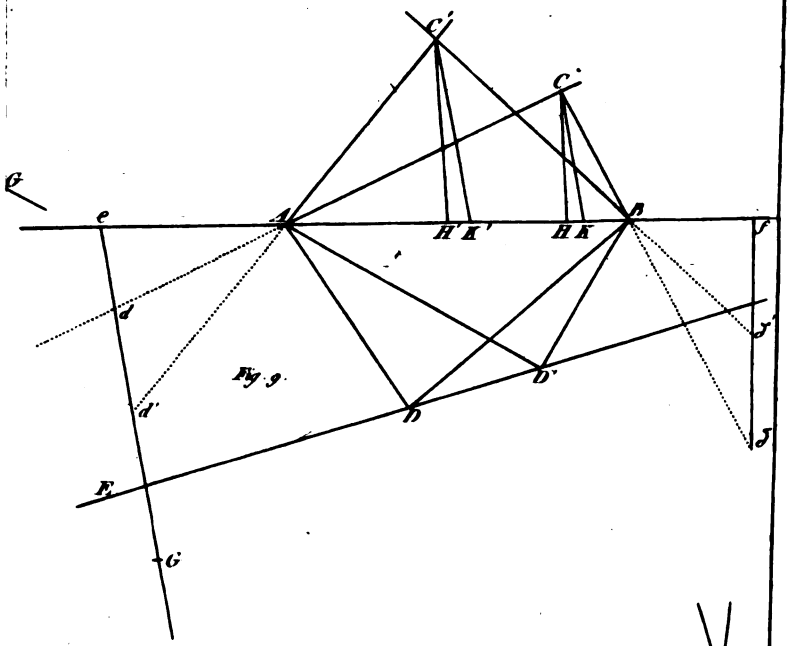


Fig. 9.

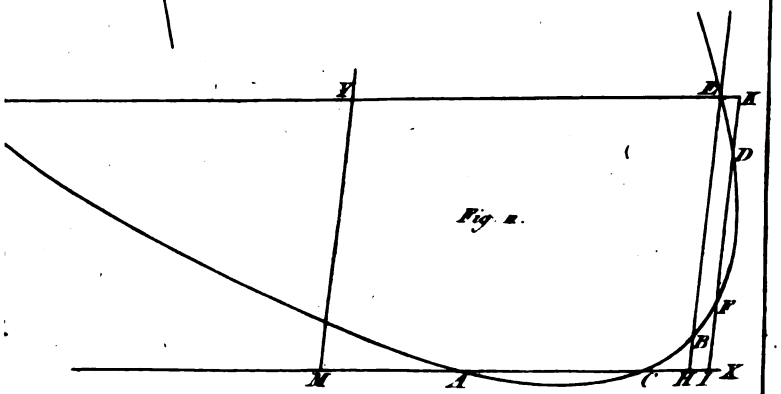


Fig. 10.

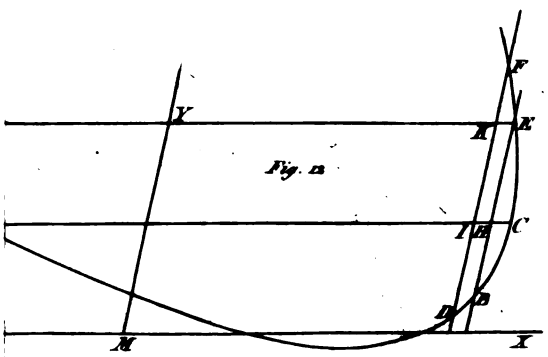
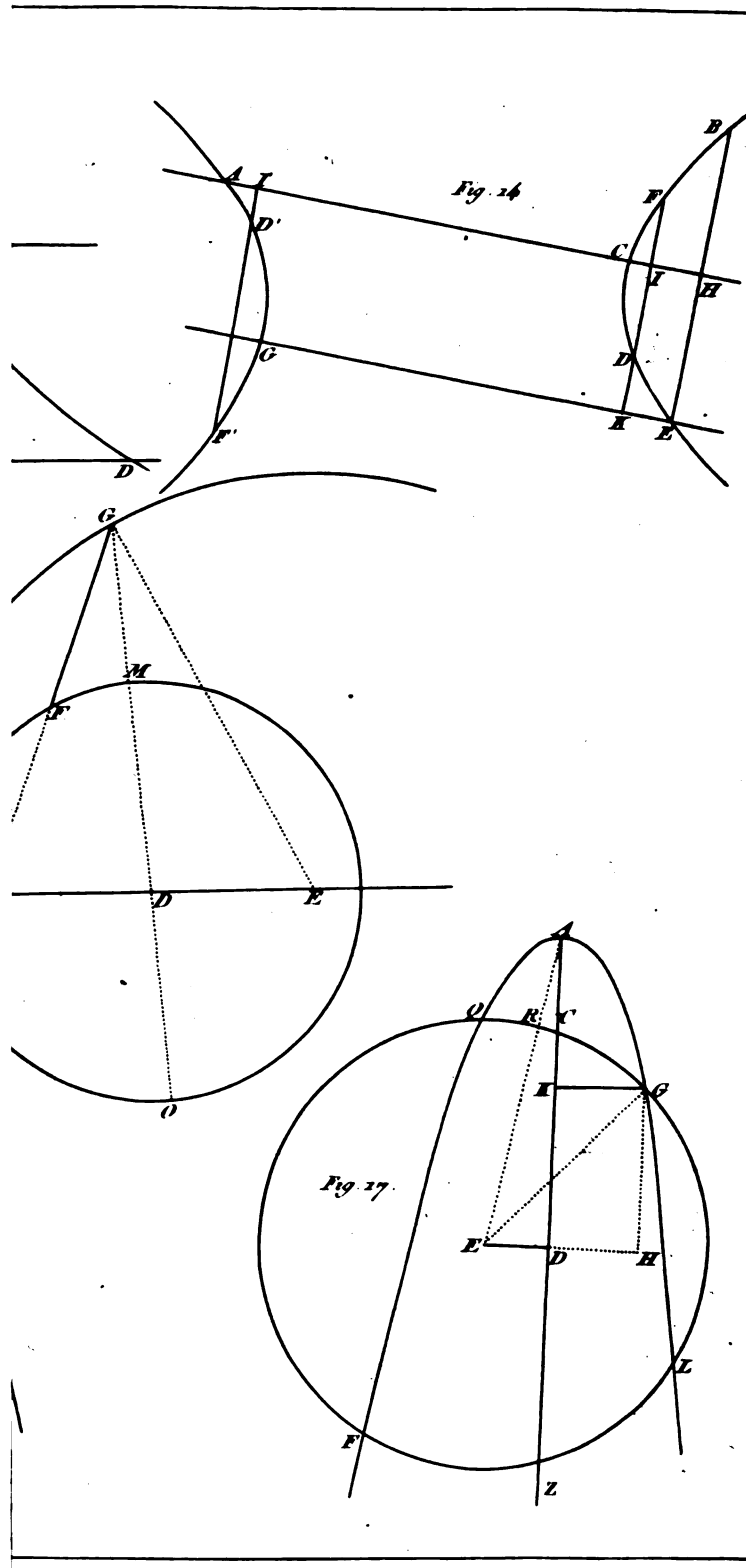


Fig. 11.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

NOTICE ABRÉGÉE
DES LIVRES

*Du C. BERNARD, Libraire de l'*Ecole polytechnique *et de celle des* Ponts et Chaussées, *quai des Augustins, près la rue Gît-le-Cœur, porte cochère, N°.* 31, *au premier.*

FLORÉAL AN X. — MAI 1802.

Journal de l'Ecole polytechnique, rédigé par les citoyens la Grange, Monge, Prony, Guyton-Morveau, Fourcroy, Chaptal, Chaussier, Berthollet, Vauquelin, Barruel, Hassenfratz, Achet, etc. etc. Les 1er., 2e., 3e., 4e., 5e, 6e. cahiers in-4°., se vendent 3 francs 60 centimes chaque, pour Paris. Le 7e. et le 8e. ne forment qu'un seul cahier in-4°. On le vend 6 fr. 50 c. pour Paris. Le 9e. est sous presse. On ne les envoie pas franc de port. On vend les cahiers séparément. On ne s'abonne pas.

Arithmétique universelle de Newton, traduite en françois, avec des notes explicatives, par le C. Beaudeux, 2 vol. in-4°., 14 pl., 18 fr. pour Paris. Les éditions latines étoient rares et coûteuses; ce livre manquoit à notre langue : il a été exécuté avec le plus grand soin. Les notes de cette édition sont très-supérieures aux notes latines de Castillon, dans l'édition de 1761. On y trouve l'histoire de Newton, et la notice des éditions de ses ouvrages. Les exemplaires sur *papier vélin*, sont de 36 francs. An X.

Programme et règlement de l'Ecole polytechnique, in-4°., 3 francs.

La Théorie des fonctions analytiques, par le C. la Grange, in-4°., 6 fr. pour Paris.

Traité de mécanique analytique, par le même, in-4°., br. 13 fr.

Traité élémentaire de mécanique, par Marie, in-4°., 10 fr.

Recueil de mécanique, et description de machines relatives à l'agriculture et aux arts, par Person, in-4°. 18 pl., faisant suite au cabinet de *Servière*, et à la *Mécanique de Berthelot*, 8 fr. 50 c. pour Paris.

Traité élémentaire de mécanique, par Jantet, in-8°., pl. 5 francs.

Traité du calcul différentiel et intégral, par Cousin, 2 vol. in-4°., 6 pl., dernière édition, 21 fr. pour Paris. La mort de se savant rend son ouvrage plus rare et plus précieux.

Traité de l'analyse mathématique, ou *d'algèbre*, par le même, in-8°. br. 4 fr. pour Paris. Il sert d'introduction au calcul différentiel et intégral. Il en reste peu d'exemplaires.

Introduction à l'astronomie physique, du même, in-4°., 13 fr.

Essai sur la physique, du même, 1 fr. 50 c.

Géométrie descriptive, par Monge, in-4°., 8 fr.

Traité de statique, du même, in-8°., 3 fr.

Description de la fonte des canons, *id.* in-4°., 60 pl.

Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie, *id.* in-4°., 6 fr. 50 c.

Arithmétique décimale, par Simonin, in-8°., 3 fr.

Art de tenir les livres de commerce, à parties simples et à parties doubles, in-4°. de 600 pages, 15 fr.

Tables décimales, de Borda, in-8°. — de Marie.

Tables stéréotypes, de Callet, 2 vol. in-8°., 12 fr. 50 c.

Digitized by Google

Cours de mathématiques de Bézout, édition revue par le C. *Lévêque*, 6 vol. in-8°., 19 fr. 25 c. Bézout, malgré les nombreuses éditions de son cours, et celles de ses successeurs, est toujours remarquable par sa méthode, sa clarté et sa précision.

Arithmétique, 2 fr. 50 c.
Géométrie, 2 fr. 75 c. } 8 liv. 25 c.
Algèbre, 3 fr.
Mécanique, 2 vol. in-8°. 6 fr. 50 c.
Navigation, 4 fr. 30 c.

Théorie des équations algébriques, de Bézout, in-4°. 16 fr.

Cours complet de Bossut, 9 vol. in-8°. 25 fr.

Abrégé de l'astronomie, par Lalande, in-8°., 5 fr.

Traité de gnomonique, par Bedos, in-8°., 8 fr.

Élémens de géométrie, de Legendre, dern. édit. in-8°., 6 fr.

Œuvres de Camus, Sauri, Mazéas, Rivar, Cramer, Cagnoli, Bougainville, Newton, les Bernouilly, Descartes, Montmaur, Condorcet, Mauduit.

Cours de mathématiques, par Robins, in-8°., 6 fr.

Collection complettes des œuvres de *d'Alembert*, et d'*Euler*, et leurs ouvrages séparés.

Tous les livres de mathématiques anciens et modernes.

Les Mémoires de l'académie de *Pétersbourg*, des *Sciences de Paris*, des *Inscriptions et Belles-lettres*, de *Turin*, de *Berlin*, de *Gottingue*, de *Bologne*.

Manuel d'un cours de chimie, ou *Principes élémentaires*, *théoriques et pratiques de cette science*, 3 vol. in-8°., formant environ 2,000 pages, avec des tableaux et 22 pl. qui contiennent la description d'un laboratoire, des instrumens et des appareils chimiques, avec les découvertes les plus modernes jusqu'à ce jour, par le C. *Bouillon la Grange*, professeur de physique, et coopérateur des *Annales de chimie*; nouvelle édition, 14 fr. pour Paris, 18 fr. franc de port.

Tableau des propriétés physiques et chimiques des corps, par le même, in-fol., 60 c.

Journal de la société des Pharmaciens de Paris, ou recueil d'*Observations de chimie et de pharmacie*, publié pendant les années 6, 7 et 8, par les CC. Fourcroy, Vauquelin, Bouillon la Grange, in-4°. 15 fr. pour Paris. Il sert d'introduction aux *Annales de chimie*.

Annales de chimie, douze cahiers par an, et les années précédentes.

Chimie de *Chaptal*, de *Lavoisier*, de *Fourcroy*.

Recherches chimiques et miscroscopiques, *sur un nouvel ordre de plantes-polypiers*, *les bisses*, *les tremelles et les conferves*, par le C. Girod-Chantrans, in-4°., 36 pl. enluminées, 15 fr., 18 fr. franc de port. Cette découverte fixe l'attention de tous les naturalistes. Les exemplaires des *figures* sur papier d'Hollande, sont de 25 fr. pour Paris.

Esprit du système de guerre moderne, destiné aux jeunes militaires, avec 58 figures. in-8°., 4 fr. pour Paris, 5 fr. franc de port. Ce manuel militaire renferme une théorie complette.

Histoire du Galvanisme, avec le détail des expériences faites et des écrits publiés sur ce phénomène, depuis sa découverte jusqu'à ce jour, par le C. *Sue*, *aîné*, professeur et bibliothécaire à l'Ecole de médecine de Paris, 2 vol. in-8°., avec pl. 9 fr. pour Paris, 12 fr. franc de port. Ce livre renferme la substance de tout ce qu'on a écrit sur ce sujet, depuis 1786 jusqu'en 1802.

Histoire naturelle de Buffon, réduite à ce qu'elle contient de plus intéressant, 10 vol. in-8°., pap. gr. raisin, 200 fig. 60 fr. pour Paris. — 100 fr. fig. coloriées. — Grand raisin vélin, fig. avant la lettre, 150.

Œuvres complettes de Buffon et Lacépède, in-12 rel. pr. épr.

Buffon de la jeunesse, 5 vol. in-12, 60 planches, 13 fr.

Digitized by Google

Linnæi systema naturæ, 10 vol. in-8°.

Histoire des plantes, *Jolyclerc*, 5 gros vol. in-8°., 25 fr.

Traité théorique et pratique sur la vigne, par Chaptal, 2 vol. in-8°., 21 pl., 12 fr. pour Paris.

Essai sur le blanchiment, d'après Chaptal, in-8°., 14 pl. 6 fr.

Manuel de l'essayeur, par Vauquelin, in-4°., 2 fr. 50 c.

Traité historique et pratique de la Vaccine, par le C. Moreau, in-8°., 4 fr. pour Paris, 5 fr. franc de port.

Traité des moyens de désinfecter l'air, de prévenir la contagion, et d'en arrêter les progrès, par le C. Guyton-Morveau, membre de l'Institut national, et directeur de l'école polytechnique, in-8°., 4 fr. pour Paris; 2e. édition. Cet ouvrage est principalement utile aux administrations, aux hôpitaux, aux prisons, aux lazarets, pour les chambres des malades, et dans les épidémies, 5 fr. franc de port.

Traité du goître et du crétinisme, par le C. Foderé, médecin des hôpitaux, in-8°., 4 fr. Ce livre réunit tous les moyens moraux et physiques pour délivrer l'humanité de ce fléau, 5 fr. franc de port.

Théorie des torrens et rivières, par Fabre, auteur de l'*Essai sur les machines hydrauliques*, 9 vol. in-4°. 8 pl., 14 fr.

Traité de la pesanteur spécifique des corps, par Brisson, in-4°, 2 pl. 12 fr.

Recherches sur les ensablemens des ports de mer, et sur les moyens de les empêcher, avec une *Nouvelle théorie sur les jonctions des rivières*, par Mercadier, ingénieur, in-4°., 11 vol.

Recherches sur les moyens de perfectionner les canaux de navigation, par Fulton, in-8°., 7 pl. 6 fr. pour Paris.

Théorie des vents et des ondes, par M. de la Coudraie, in-8°., 3 fr.

Collection complette des Cahiers des arts et métiers. in-folio.

Réflexions sur l'architecture, la sculpture, la peinture, par Pommereuil, in-8°, 4 fr. Il y en a sur papier vélin.

Tous les livres d'*architecture*, de *perspective*, d'*optique*, *etc.*

L'Antiquité expliquée par Montfaucon, 20 vol. in-folio, gr. pap., veau, filets, superbes épreuves.

Œuvres de Voltaire, 100 vol. in-12, 96 fr. — *Id.* pap. vél. 92 vol. rel., veau, dor. fil.

Œuvres de J. J. Rousseau, édit. origin., 33 vol. in-12, 36 fr.

Les mêmes, 25 vol. in-18, Didot, gr. raisin vél., édit. nouv., 400 fr. Il n'y en a eu que cent exemplaires.

Portrait de Barthélemy, in-4°. et in-8°., pour l'*Anacharsis*.

Etat du royaume de Portugal, in-4°., avec la carte, [illegible] fr. 12 fr.

Manuel du naturaliste, 2 vol. in-8°., 8 fr.

L'art de tricoter, pet. in-fol., avec 25 pl. Leipsic. 40 fr.

Collection de nouveaux bâtimens, pour la décoration des grands jardins et des campagnes, in-fol., 44 planch. 60 fr. Leipsic.

Traité des bâtimens propres à loger les animaux nécessaires à l'économie rurale, petit in-fol., 50 pl., 80 fr. Leipsic.

Mythologie de la jeunesse, 2 vol. in-12, 120 fig.

Fables de Lafontaine, 2 vol. in-12, 216 vignettes, 6 fr.

Physiologie végétale, contenant une description anatomique des organes des plantes, par Sénébier, 5 vol. in-8°. 21 fr.

Dictionnaire de la langue françoise, par Féraud, 3 vol. in-4°., 30 fr.

Traité des assurances, par Emérigon, 2 vol. in-4°. 20 fr.

Digitized by Google

Manuel des marins, 2 vol. in-8°. en 1 vol., 5 fr.

Cours de cosmographie, de chronologie, de géographie et *d'histoire*, divisé en 125 leçons, par le C. Mentelle, membre de l'Institut national, 3 v. in-8°. br., avec des tableaux et un atlas nouveau de 15 cartes enluminées, et gravées par le C. Tardieu, 21 fr. 50 c. pour Paris. Le succès de ce grand ouvrage est digne de l'auteur qui a su amener jusqu'à ce jour, l'histoire des temps, des empires et des corps planétaires.

Abrégé de l'histoire de la Grèce, depuis son origine jusqu'à ce jour, par le C. Bernard, 2 vol. in-8°., 7 francs pour Paris; 10 fr. franc de port. Il y a deux cartes géographiques, dont l'une contient la description de la Grèce, de la grande Grèce, de l'Archipel, et l'autre les colonies, les expéditions et les conquêtes des Grecs en Afrique, en Asie et dans l'Inde; avec *deux tableaux analytiques*, dont le premier, en deux colones, renferme la Grèce d'une part, et de l'autre les colonies grecques; et le second, les événemens majeurs de l'histoire de la Grèce, classés dans l'ordre chronologique, divisé en quatre âges. A la fin de chaque âge, la partie historique est suivie de la partie philosophique : elle embrasse les loix, les mœurs et usages, les sciences et arts, l'art militaire, la marine, l'agriculture, le commerce, les finances, les révolutions des gouvernemens des divers états de la Grèce. Chaque âge est terminé par une notice détaillée des hommes célèbres de cet intervalle de temps, avec la bibliographie des auteurs grecs. C'est un abrégé portatif et économique de la foule des bons livres qu'on a écrits depuis trente ans sur la Grèce. Cet ouvrage est un livre classique.

Abrégé d'histoire ancienne et d'histoire romaine, par Tailhié, 10 vol. in-12, 25 fr.

Les trois ouvrages ci-dessus forment un cours complet d'histoire universelle ancienne.

Lettres posthumes et inédites de Mademoiselle de Launaï (Madame de Staal) au chevalier de Menil, pendant leur séjour à la Bastille, en 1719 et 1720, 2 vol. in-12, 5 fr. pour Paris.

Œuvres complettes de Montesquieu, 5 gr. vol. in-4°., pap. vél. caract. de Didot, avec deux cartes gravés par le C. Tardieu l'aîné, et 15 fig. par Moreau, Peyron, Perrin, Vernet et Chaudet. Cette édition, de l'an 3, renferme beaucoup de *manuscrits inédits* et précieux, tels que sa *Dissertation sur la politique des Romains dans la religion*, *l'Éloge du duc de la Force*, les *Portraits des grands hommes de France*, etc. etc. Cette édition n'a été tirée qu'à 550 exemplaires; elle s'épuise. Le C. Bernard, éditeur, a rédigé les notes, les préfaces, et augmenté la table des matières. L'exemplaire est de 168 fr. en feuilles, fig. avec la lettre, et de 336 fr. fig. avant la lettre.

Les *Œuvres posthumes* de cette édition forment un supplément aux éditions in-8°., 3 fr. 60 et un supplément in-12 de 2 fr 50 pour les éditions in-12.

L'exemplaire unique des dessins originaux, en 5 vol., petit in-folio, contient les *dessins*, les *eaux fortes*, les figures *avant* la lettre, et les figures *avec* la lettre.

Livres sous presse, pour le commencement de l'an 11.

Histoire des guerres des Gaulois et des François en Italie, depuis Bellovèse et César jusqu'au dix-neuvième siècle, ou l'an 10 de la république françoise, 4 vol. in-8°., avec un atlas in-folio, qui renfermera *sept* cartes, dessinées avec un très-grand soin par d'habiles artistes, et gravées par le C. Tardieu. On donnera aussi la description pittoresque de la *Bataille de Marengo*, et du *passage du Mont-Saint-Bernard*.

Cours complet de littérature ancienne et moderne, depuis l'origine des lettres jusqu'au 19e. siècle, par une société de gens de lettres, 6 vol. in-8°.

Le *premier* volume contiendra les principes généraux de l'art d'écrire; le *second*, les principes et l'historique de tous les genres de prose, depuis l'origine des arts jusqu'à ce jour; le *troisième* offrira les genres de la poésie didactique, et le *quatrième* ceux de la poésie dramatique.

Le *cinquième* et le *sixième* présenteront, l'un, les morceaux choisis de notre langue, dans tous les genres de *prose*, et l'autre les plus beaux morceaux dans les genres de *poésie*.

On pourra acheter ces deux derniers volumes séparément. Ils formeront une *Bibliothèque portative*. On a tâché de la rédiger avec plus de soin que celle de Londres. Le dernier volume sera terminé par une *notice alphabétique* de tous les écrivains anciens et modernes. Ce tableau synoptique donnera leur patrie, leur naissance, leur talent, leur mort.

La plupart des traités partiels de littérature, sont insuffisans, nombreux et coûteux. On a voulu renfermer, avec méthode et simplicité, dans un petit nombre de volumes, toute la théorie et les modèles du génie et du bon goût. *L'ouvrage est sous presse.*

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google