Histoire des mathématiques , dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leurs origines jusqu'à nos jours... [...]

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

{BnF Gallica

Montucla, Jean-Étienne (1725-1799). Auteur du texte. Histoire des mathématiques , dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leurs origines jusqu'à nos jours... par M. Montucla,.... 1758.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
utilisationcommerciale@bnf.fr.

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE

©Eastman Kodak Company, 1982

KODAK Gray Scale

C M

Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

MIRE ISO N° 1
NF Z 43-007
AFNOR
Cedex 7 - 92080 PARIS-LA-DÉFENSE

graphicom
338.57.70

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

SERVICE PHOTOGRAPHIQUE

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

PHOT. BIBL. NAT. PARIS
REPRODUCTION INTERDITE SANS AUTORISATION.

LES ŒUVRES PROTÉGÉES PAR LA LÉGISLATION SUR LA PROPRIÉTE LITTÉRAIRE ET ARTISTIQUE (LOI DU 11 MARS 1957) NE PEUVENT ÊTRE REPRODUITES SANS AUTORISATION DE L'AUTEUR OU DE SES AYANTS DROIT.

DANS L'INTÉRÊT DE LA RECHERCHE LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE TIENT UN FICHIER DES TRAVAUX RELATIFS AUX MANUSCRITS QU'ELLE CONSERVE.

ELLE PRIE LES UTILISATEURS DU PRÉSENT MICROFILM DE LUI SIGNALER LES ÉTUDES QU'ILS ENTREPRENDRAIENT ET PUBLIERAIENT A L'AIDE DE CE DOCUMENT.

BIBLIOTHEQUE NATIONALE
DE FRANCE

DEPARTEMENT
RESERVE DES IMPRIMES

FILMOTHEQUE DE SECURITE

V6030

Entier

R 116084

Cde : 7024 Volts : 72 oc : 1,5
Date : 30.04.98

Service de la Reproduction
PARIS-RICHELIEU

CE DOCUMENT A ÉTÉ MICROFILMÉ
TEL QU'IL A ÉTÉ RELIÉ

$\sqrt{+7^{03}_{2}}$

6030.

+

HISTOIRE
DES
MATHEMATIQUES,

DANS laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau & le développement des principales découvertes, les contestations qu'elles ont fait naître, & les principaux traits de la vie des Mathématiciens les plus célebres.

Par M. MONTUCLA, de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse.

5

Multi pertranſibunt & augebitur ſcientia. *Bâcon.*

TOME SECOND.

BIBLIOTHEQUE ROYALE

V. 703.
H. 2.

A PARIS,

Chez CH. ANT. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

+ V

6030

HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES.

QUATRIEME PARTIE,

Qui comprend l'Hiſtoire de ces Sciences pendant le dix-ſeptieme ſiecle.

LIVRE PREMIER,

Qui contient les progrès de la Géométrie & des Mathématiques pures, traitées à la maniere des Anciens.

SOMMAIRE.

I. *Tableau général des découvertes Mathématiques dûes au dix-ſeptieme ſiecle.* II. *Lucas Valerius fait quelque progrès au-delà d'Archimede dans la théorie des centres de gravité. Snellius facilite auſſi par quelques inventions la meſure approchée du cercle.* III. *Invention des logarithmes par le Baron de Neper. Propriétés & nature de ces nombres. Comment Neper les enviſage. Quels ſont ceux qui l'ont ſecondé dans la conſtruction des Tables*

de logarithmes que nous poſſédons. Autres travaux de Neper. Ses inventions Trigonométriques, ſa Rhabdologie. IV. *Kepler propoſe dans ſa Stéreométrie quelques vues & divers problêmes qui paroiſſent avoir influé ſur la naiſſance des nouvelles méthodes.* V. *De la méthode de Guldin, application qu'en fait ſon auteur aux problêmes de Kepler.* VI. *De la Géométrie des indiviſibles, traits abrégés de la vie de Cavalleri. Explication de ſa méthode, & ſon accord avec celle des Anciens. Uſage qu'il en fait pour la réſolution de quantité de queſtions. Découverte de l'analogie de la ſpirale & de la parabole.* VII. *La Géométrie s'éleve vers ce temps en France à des recherches plus difficiles; on y conſidere les courbes d'une maniere plus générale; la ſpirale logarithmique & la cycloïde y prennent naiſſance, ou y occupent les Géometres.* VIII. *Ingénieuſe méthode pour les tangentes des courbes imaginée par Roberval, & ſon analogie avec celle des fluxions.* IX. *Hiſtoire de la cycloïde & des démêlés qu'elle occaſionne. Problêmes propoſés ſur cette courbe par M. Paſcal, & ce qui ſe paſſe à cette occaſion. Propriétés diverſes ſoit purement géométriques, ſoit méchaniques, que les Géometres ont découvertes dans la cycloïde.* X. *Récit des travaux de divers Géometres célebres qui ont cultivé la méthode ancienne durant ce ſiecle.*

I.

PARMI les ſiecles qui ont ſucceſſivement contribué à l'avancement des Sciences, celui qui vient de s'écouler doit ſans doute tenir juſqu'ici le premier rang; & cet avantage ne lui ſera probablement ravi par aucun de ceux qui le ſuivront. Nous ſommes bien éloignés de prétendre fixer des bornes à l'eſprit humain; qui ſçait quels ſont les derniers termes de connoiſſances où il peut atteindre? chaque jour ajoute aux découvertes du précédent, & ne pas le reconnoître, ce ſeroit refuſer injuſtement à pluſieurs de nos illuſtres contemporains le tribut de louanges qui leur eſt dû. Cependant quand on fera attention à l'eſſor prodigieux qu'ont pris les Sciences, & ſurtout les Mathématiques dans le dix-ſeptieme ſiecle, il faudra convenir que quelque perfection qu'elles reçoivent des ſuivans, une grande partie de la gloire en doit revenir à celui qui a ſi heureuſement ouvert la carriere.

Avant que de faire l'hiſtoire particuliere des découvertes Mathématiques dûes au dix-ſeptieme ſiecle, nous croyons devoir les conſidérer quelques momens ſous un point de vue général. Quel ſpectacle brillant que celui qu'elles nous préſentent ! qu'il eſt raviſſant & admirable pour un œil philoſophique ! Si nous nous attachons aux Mathématiques pures, nous trouvons d'abord dans les premieres années de ce ſiecle, l'invention ingénieuſe & plus utile encore des logarithmes ; nous voyons bientôt après une nouvelle Géométrie naître entre les mains de *Cavalleri*, & cultivée par divers autres, s'élever à des recherches fort ſupérieures à celles qui occuperent l'antiquité. Cependant *Deſcartes* prend une autre route, & appliquant l'analyſe à la Géométrie, il donne à la théorie des courbes une étendue & une facilité qu'elle n'avoit point encore eues ; il invente diverſes méthodes pour réſoudre par une voie certaine les plus difficiles problêmes qu'on puiſſe propoſer dans ce genre. *Fermat*, ſon rival & ſon contemporain, marche dans la même carriere, & propoſe auſſi des inventions qui ſont un germe fort développé des nouveaux calculs. *Wallis*, *Barrow*, *Gregori*, enrichiſſent la Géométrie d'une multitude de méthodes nouvelles & de découvertes : *Newton* enfin donne naiſſance à cette ſublime Géométrie, pour laquelle ce qui avoit coûté juſque-là tant de peine n'eſt plus qu'un jeu, & qui eſt ſeule capable de donner accès dans les recherches difficiles dont s'occupent aujourd'hui nos Géometres & nos Phyſiciens.

Si delà nous portons nos regards ſur les Mathématiques mixtes, nous ne ſerons pas moins ſatisfaits de l'accroiſſement que nous leur verrons prendre. La Méchanique nous offrira la découverte des loix du mouvement & de ſa communication, de celles de l'accélération des corps graves, du chemin des projectiles, de l'action mutuelle & du mouvement des fluides. Nous la verrons s'accroître de pluſieurs théories profondes, comme celles des centres d'oſcillation, de la réſiſtance des fluides, des forces centrales, &c. Les progrès que fait l'Optique pendant le même temps, ne ſont pas moins brillans ; la maniere dont ſe fait la viſion eſt expliquée ; la loi de la réfraction découverte, & une nouvelle ſcience s'éleve ſur ce fondement : le Téleſcope & le Microſcope offrent à la vue des ſecours

inconnus à l'antiquité : la cauſe du phénomene de l'Arc-en-Ciel eſt ſoumiſe à la raiſon : la lumiere eſt analyſée, & la différente réfrangibilité des couleurs eſt reconnue : le Téleſcope à réflection eſt inventé & exécuté avec ſuccès. L'Aſtronomie enfin nous préſente d'abord la découverte de la vraie forme des orbites que décrivent les planetes, & des loix qui préſident à leurs mouvemens : bientôt après aidés du Téleſcope, on voit les Aſtronomes s'élancer en quelque ſorte dans les cieux, & y découvrir les taches du ſoleil ; le mouvement de cet aſtre autour de ſon axe ; les phaſes de Venus & de Mercure ; ces petites planetes qui, ſemblables à notre lune, accompagnent Jupiter & Saturne avec le ſingulier anneau dont celui-ci eſt environné, phénomenes qui jettent un grand jour ſur le vrai ſyſtême de l'Univers : la Géographie eſt entiérement réformée ſur les obſervations : la terre eſt meſurée avec une exactitude bien ſupérieure à celle des Anciens, & ſa vraie forme eſt reconnue : ce que les obſervations avoient appris à *Kepler* eſt démontré, à l'aide d'une application profonde de la Géométrie & de la Méchanique aux mouvemens des corps céleſtes : les Cometes ſont miſes au rang des planetes, & leur cours eſt ſoumis au calcul, malgré la rareté de leurs apparitions : la lune, cette planete ſi long-temps rebelle à tous les efforts des Aſtronomes, reçoit des fers, & la cauſe de ſes irrégularités eſt dévoilée. On voit enfin ſortir des mains de l'immortel *Newton* un ſyſtême Phyſico-Aſtronomique, chef-d'œuvre de la Géométrie & de la Méchanique, & qui reçoit de jour à autre une nouvelle confirmation des travaux réunis des Géometres & des Obſervateurs. Tel eſt le tableau général des Mathématiques durant le dernier ſiecle ; tableau que nous aurions pu charger de quantité d'autres traits, ſi viſant à la briéveté nous ne nous étions pas bornés aux plus intéreſſans. Paſſons maintenant à préſenter ces différens objets avec le détail qu'ils exigent. Il eſt naturel de commencer par la Géométrie, qui porte le flambeau dans ces ſciences. Afin d'expoſer avec diſtinction les découvertes nombreuſes & de divers genres dont elle s'eſt accrue, nous en ferons trois parties, qui formeront autant de Livres. Dans celui-ci, il ne ſera queſtion que de la Géométrie traitée à la maniere des Anciens, c'eſt-à-dire, ſans calcul algébrique. Dans le ſuivant, nous nous

occuperons de la Géométrie de *Deſcartes*, & de l'analyſe algébrique. Nous donnerons enſuite quelques Livres au récit des progrès des autres parties des Mathématiques durant la premiere moitié du dix-ſeptieme ſiecle ; après quoi revenant à la Géométrie, nous ferons l'hiſtoire des nouveaux calculs juſqu'au commencement de celui-ci. Enfin nous reprendrons celle des autres parties des Mathématiques juſqu'à la même époque.

I I.

Lucas Valerius.

La Géométrie fit dès les premieres années du dix-ſeptieme ſiecle quelques progrès dignes d'attention au-delà du terme où les Anciens en étoient reſtés. Elles les dut au Géometre Italien *Lucas Valerius*. Ce Mathématicien s'appercevant qu'*Archimede* avoit négligé les centres de gravité des ſolides, & que *Commandin*, qui avoit tenté d'y ſuppléer, n'avoit pu réſoudre que les cas les plus faciles, s'attacha à porter plus loin cette théorie. Plus heureux, ou plutôt plus doué du génie de l'invention que *Commandin*, il y réuſſit, & il détermina ces centres dans tous les conoïdes & ſphéroïdes, & leurs ſegmens retranchés par des plans paralleles à la baſe ; il publia ces vérités intéreſſantes, je dirai même difficiles pour ſon temps, en 1604, dans ſon Livre *de Centro Gravitatis Solidorum*. Lucas *Valerius* nous a laiſſé un autre monument de ſon génie, dans une quadrature de la parabole, différente pour les moyens de celles qu'*Archimede* avoit autrefois données : on la trouve à la ſuite de l'ouvrage dont on vient de parler. Ce Géometre eſtimable étoit Profeſſeur de Mathématiques à Rome ; c'eſt tout ce que nous en ſçavons ; &, nous l'avouerons, ſurchargés de matiere nous n'avons pas cherché à prendre une connoiſſance plus approfondie de ce qui le concerne.

Snellius.

Nous placerons encore ici un Géometre qui perfectionna en quelques points une des découvertes d'*Archimede* ; c'eſt *Snellius*, dont le nom eſt célebre par ſa meſure de la terre & ſa découverte de la loi de la réfraction. Pour prendre une idée de ſon travail, il faut ſe rappeller qu'*Archimede* avoit trouvé ſon rapport fameux du diametre à la circonférence du cercle, par le moyen de deux polygones, l'un inſcrit, l'autre circonſcrit, & chacun de 192 côtés. *Ludolph* doublant continuellement le

nombre des côtés de ces polygones, étoit parvenu à un rapport exprimé en 35 chiffres, dont le dernier ſeul étoit inexact, & ne différoit du vrai que de moins d'une unité. Ce procédé parut exceſſivement laborieux à *Snellius*, & ce motif lui en fit chercher un autre moins prolixe. Il trouva en effet deux théorêmes (*a*) par leſquels les côtés de deux polygones ſemblables, l'un inſcrit, l'autre circonſcrit, étant donnés, on détermine des limites du cercle beaucoup plus reſſerrées que par ces polygones traités à la maniere ordinaire. Un exemple va faire ſentir ceci. Tandis qu'*Archimede* ne trouve ſon rapport de 7 à 22, ou de 100 à 314, que par le moyen de ſes polygones de 192 côtés, *Snellius* y parvient en employant deux exagones, & il ſurpaſſe du double le Géometre ancien en ſe ſervant de deux polygones de 180 côtés. Il vérifie de même le rapport de *Ludolph* avec un polygone qui n'auroit donné à celui-ci que la moitié autant de chiffres vrais. Il y a dans cet écrit de *Snellius*, qui eſt intitulé *Cyclometricus*, pluſieurs autres choſes remarquables; mais nous nous hâtons de paſſer ces objets, pour arriver aux grandes découvertes qui ont eu des ſuites ſi heureuſes pour le progrès de la Géométrie.

III.

Invention des logarithmes.

Une de ces découvertes, & la premiere qui illuſtre le ſiecle paſſé, eſt celle des logarithmes, de ces nombres qui, outre l'avantage qu'ils ont de diminuer extrêmement la longueur & l'embarras des calculs, ont des uſages ſi fréquens juſques dans la Géométrie tranſcendante. Cette belle découverte eſt l'ouvrage du Baron de *Neper*, Ecoſſois (*b*), qu'elle immortaliſe à juſte titre. Entrons dans des détails proportionnés à l'importance de cet objet.

Fig. 1.

(*a*) Le premier de ces théorêmes eſt celui-ci. *Si l'on prolonge le diametre d'un demi-cercle en* E, *de ſorte que* AE *ſoit égal au rayon, & que par un point quelconque* G, *on tire* EGH, *la partie de la tangente qu'elle retranche, ſçavoir* BH *eſt moindre que l'arc* BG, *mais elle en différe d'autant moins que cet arc eſt plus petit.* Voici le ſecond : *Si du même point* G, *on tire* FGI, *de maniere que* DF *ſoit égale au rayon, la portion de tangente* BI *eſt plus grande que l'arc* BG. Mais il eſt facile de trouver la grandeur de la tangente BH, & à l'égard de la ſeconde BI, on fait voir qu'elle eſt égale au double du ſinus du tiers de l'arc, plus une fois la tangente de ce tiers. Ainſi un arc quelconque étant donné, on peut facilement trouver des limites de ſa grandeur fort rapprochées.

(*b*) Jean Neper, Baron de Merchiſton en Ecoſſe, mort en 1618.

Les logarithmes ſont des nombres diſpoſés en table à côté de ceux de la progreſſion naturelle, & qui ſont tels que toutes les fois que dans celle-ci on prend des nombres géométriquement proportionnels, ceux qui leur répondent dans la table des logarithmes ſont en proportion arithmétique. Faiſons uſage de cette propriété ſans nous embarraſſer de quelle maniere on eſt parvenu à conſtruire cette table, & nous verrons facilement s'en déduire tous les avantages qui rendent les logarithmes ſi utiles & ſi précieux aux Mathématiciens.

Lorſqu'on cherche le quatrieme terme d'une proportion géométrique, on le trouve en multipliant le ſecond par le troiſieme, & diviſant le produit par le premier. Au contraire dans la proportion arithmétique, la ſomme du ſecond & du troiſieme diminuée du premier, eſt le quatrieme. Lors donc qu'on aura à trouver une quatrieme proportionnelle à des nombres prolixes, il ſuffira d'ajouter les logarithmes du ſecond & du troiſieme, & d'ôter de leur ſomme celui du premier, le reſtant ſera le logarithme du quatrieme; de ſorte qu'en le cherchant dans la table on trouvera à ſon côté le produit demandé. Ces abrégés de calcul s'étendent aux ſimples multiplications & diviſions; car perſonne n'ignore que lorſqu'on multiplie deux nombres, c'eſt la même choſe que ſi l'on faiſoit une regle de proportion dont le premier terme fût l'unité, & les moyens, les deux nombres à multiplier. Ainſi il faudra ajouter les logarithmes des nombres à multiplier, & en ôter celui de l'unité, le reſtant ſera le logarithme du produit. Dans la diviſion, le diviſeur eſt au dividende comme l'unité au quotient; il faudra donc ajouter enſemble les logarithmes de l'unité & du dividende, & ôter de leur ſomme celui du diviſeur, le reſte ſera celui du quotient. Tout ceci ſera même encore plus ſimple, ſi en conſtruiſant les tables on a fait enſorte que le logarithme de l'unité fût o, ce qui eſt dans les tables ordinaires. Alors la multiplication ſe réduira à une ſimple addition des logarithmes des nombres à multiplier, & la diviſion à une ſouſtraction du logarithme du diviſeur de celui du dividende: dans l'un & l'autre cas ce qui réſultera ſera le logarithme du produit ou du quotient. L'extraction des racines, ou la formation des puiſſances, reçoit également de grandes facilités de l'invention des logarithmes: car le cube d'un

nombre, par exemple, eſt la troiſieme des proportionnelles continues à l'unité & à ce nombre; & en général la puiſſance *n* d'un nombre eſt la continue proportionnelle à l'unité & à ce nombre, dont le rang eſt déſigné par *n*. C'eſt pourquoi, les logarithmes des quantités géométriquement proportionnelles étant en proportion arithmétique, & celui de l'unité étant zero, le logarithme du quarré ſera double de celui du nombre, celui du cube ſera triple, &c. & enfin le logarithme de la puiſſance *n* ſera le logarithme du nombre, multiplié par *n*. Ainſi le logarithme de la racine cube d'un nombre ſera le tiers du logarithme de ce nombre; & enfin celui de la racine *n* d'un nombre ſera le logarithme de ce nombre, diviſé par *n*.

Telle eſt la nature des logarithmes: il nous faut maintenant expoſer de quelle maniere *Neper* les enviſagea pour la premiere fois. Outre que notre hiſtoire l'exige, nous le faiſons d'autant plus volontiers, qu'il y a une certaine analogie entre les idées du Géometre Ecoſſois, & la maniere dont *Newton* a enviſagé ſon calcul des fluxions.

Fig. 2. Imaginons avec *Neper* un point ſe mouvoir le long de la ligne indéfinie P A E, avec une vîteſſe tellement tempérée, qu'elle ſoit toujours proportionnelle à la diſtance de ce point au terme fixe P. Cette ſuppoſition eſt facile à entendre: le mobile à une diſtance double de P, aura une vîteſſe double; à une diſtance moindre de moitié, cette vîteſſe ne ſera que la moitié de la premiere, &c. Ainſi cette vîteſſe ne ſera la même dans aucun point de la ligne P A E, mais toujours plus grande ou moindre à proportion que le mobile ſera plus loin, ou plus près de P. Or il eſt facile de démontrer que ſi P A, P B, P C, ſont en progreſſion continue, A B, B C, C D le ſeront auſſi, & que ces eſpaces ſeront parcourus dans des temps égaux.

Suppoſons maintenant que V ſoit la vîteſſe du mobile quand il eſt en A, & qu'en vertu de cette vîteſſe conſervée ſans augmentation ni diminution, un autre mobile partant du point A′, eût parcouru l'eſpace A′ B′ ſur la ligne indéfinie *f*′ A′ F′, dans le même temps que le premier a parcouru A B. Nous aurons de cette maniere deux points, dont l'un ſera porté d'un mouvement continuellement accéléré de A vers E, ou retardé de A vers *e*, & l'autre d'un mouvement uniforme

de

de A′ vers E′, ou *e*′. Ainſi pendant que A B, B C, C D, D E, &c. ſeront continument proportionnelles, A′ B′, B′ C′, C′ D′, &c. ſeront égales, & pendant que P B, P C, P B, P E, &c. croîtront géométriquement A′ B′, A′ C′, A′ D′, &c. croîtront arithmétiquement. C'eſt pourquoi A′ B′, A′ C′, &c. ſeront les logarithmes de P B, P C, &c. reſpectivement. Enfin le logarithme d'une quantité quelconque P S, ſera la ligne A′ S′ parcourue depuis le terme A′ d'un mouvement uniforme, pendant que A S l'a été d'un mouvement accéléré. De cette idée il eſt facile de déduire toutes les propriétés des logarithmes; mais comme ce détail intéreſſant pour les Géometres, & même néceſſaire pour ceux qui aſpirent à quelque choſe de plus que l'élémentaire de cette théorie, fatigueroit peut-être d'autres lecteurs, nous le renvoyons à une note que ceux-ci pourront omettre. (*a*)

(*a*) Voici quelques-unes des propriétés des logarithmes développées à la maniere de Neper. 1°. Si A & A′ ſont les termes d'où les deux mobiles, l'un mu d'un mouvement accéléré ou retardé, l'autre d'un mouvement uniforme, partent enſemble, le logarithme de P A ſera zero. Car lorſque le premier mobile eſt en A, le ſecond n'a encore parcouru aucun eſpace.

2°. Si les logarithmes des quantités P A, P B, P C, &c. ſont pris poſitivement, ceux des quantités décroiſſantes, P *b*, P *c*, &c. comme A′ *b*′, A′ *c*′, &c. ſeront négatifs. Car afin que A′ C′, A′ B′, o, A′ *b*′, A′ *c*′, ſoient en progreſſion arithmétique, tandis que P C, P B, P A, P *b*, P *c*, &c. ſont géométriquement proportionnels, il faut que A′ *b*′, A′ *c*′ ſoient pris négativement. Ainſi ſi le logarithme de l'unité ou P A eſt zero, & ceux des nombres naturels, poſitifs, ceux des fractions moindres que l'unité ſeront négatifs. Le logarithme de $\frac{1}{2}$, ſera le même que celui de 2, mais pris négativement; celui de $\frac{1}{3}$, le même que celui de 3, &c. Au reſte, rien n'empêche qu'on ne faſſe poſitifs les logarithmes des nombres décroiſſans & moindres que P A; mais alors ceux des nombres plus grands que P A ſeroient négatifs.

3°. Il eſt viſible que le logarithme d'une raiſon quelconque, par exemple, de P C à P B, ſera celui de P C moins celui de P B, c'eſt-à-dire, B C ou A B. Mais le logarithme du rapport de P E à P B, qui eſt triplée de la premiere, ſera par la même raiſon B E ou 3 A B, ce qui montre que les logarithmes ſont les meſures des raiſons, ou qu'ils ſont autant & ſemblablement multiples les uns des autres que les raiſons qui leur répondent ſont multipliées les unes des autres. Delà leur vient le nom de *logarithmes*, comme qui diroit, *qui numerant rationem.*

4°. Il peut y avoir autant de ſyſtêmes de logarithmes qu'on peut aſſigner de valeurs différentes à la raiſon de P A à P B, & à A′ B′. Car ſi P A = 1, & P B = 10, & A′ B′ = 1, ou 1.000000, on aura nos logarithmes ordinaires des tables de Briggs, Ulacq, &c. Mais rien n'oblige à cette ſuppoſition, on pourroit donner à A′ B′ telle autre valeur qu'on voudroit, & alors tous les logarithmes de ce nouveau ſyſtême ſeroient aux correſpondans du précédent, comme cette valeur à l'autre.

5°. La maniere dont Neper calculoit ſes logarithmes, ſuit naturellement de celle dont il les concevoit. Pour trouver l'eſpace A′ B′ parcouru d'un mouvement uniforme pendant que A B l'étoit d'un mouvement accéléré, il ſuppoſoit entre P A & P B, un ſi grand nombre de proportionnelles continues, que l'excès de P *a* la plus voiſine de P A ſur celle-ci, c'eſt-à-dire A *a*, fût

La maniere dont *Neper* conçoit ſes logarithmes, & dont il décrit leur génération, le met à l'abri de l'imputation de n'avoir fait que perfectionner l'idée d'un Arithméticien Allemand (Michel *Stifels*), qui les avoit entrevus au milieu du ſiecle précédent. En effet, ce Mathématicien dans ſon *Arithm. integra*, compare les deux progreſſions, la géométrique & l'arithmétique, comme on le voit ci-deſſous,

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c.

& il fait la remarque fondamentale de la théorie des logarithmes; ſçavoir que ſi l'on ajoute enſemble deux termes de la progreſſion arithmétique, comme 3 & 5, qui répondent à 4 & 32, il en réſultera un nouveau terme, comme ici 7, qui répondra au produit de 4 & 32. Mais cette remarque reſta ſtérile entre ſes mains, & quoiqu'il diſe qu'il ſupprime à regret diverſes autres propriétés de ces progreſſions comparées, ce ſeroit fort gratuitement qu'on lui attribueroit une idée plus développée des logarithmes.

Kepler dit auſſi que *Juſte-Byrge*, un des Aſtronomes du Landgrave de Heſſe, avoit autrefois imaginé les logarithmes. Mais ſoit que *Byrge* ait eu vraiment cette idée, ſoit que *Kepler*, porté d'un amour national, ait vu dans les écrits de ce Mathématicien plus qu'il n'y avoit réellement, cela ne fait aucun tort à *Neper*. Car on ſçait par le témoignage de

comme infiniment petite, ou exprimée par une fraction décimale, comme 0. 0000001. Or dans ce cas l'eſpace A *a* peut-être cenſé parcouru d'un mouvement uniforme, de ſorte que Neper prit *a* A lui-même pour le logarithme de P *a*. Puis il trouvoit par le calcul, qu'entre P A l'unité & P B, il y avoit 6931472 de ces proportions continues, & qu'entre 1 & 10, il y en avoit 2302585o. C'eſt pourquoi, ſuivant la théorie ci-deſſus, il multiplia A *a* ou 0. 0000001 par les nombres 6931472 & 2302585o, & il eut 0. 6931472 pour le logarithme de 2, & 2. 302585o pour celui de 10.

Mais il n'y a aucune néceſſité de prendre A *a* pour le logarithme de la raiſon de P A à P *a*. Tout multiple ou ſous-multiple de A *a* le pourroit être également, & alors tous les autres logarithmes ſeroient augmentés ou diminués proportionnellement. Nos tables ordinaires, par exemple, ſont conſtruites comme ſi au lieu de A *a*, on n'en eût pris qu'un peu moins de la moitié, ou la 0. 4342994e partie. Car en faiſant cette ſuppoſition, on rencontre l'unité pour le logarithme de 10. Ainſi nos logarithmes ordinaires ſont à ceux de Neper dans le rapport de 0. 4342994 à 1, ou ce qui eſt la même choſe, dans celui de 1. à 2. 302585o; c'eſt pourquoi en multipliant les logarithmes ordinaires par 2. 302585o, on les réduit à ceux de Neper, ou au contraire diviſant ceux-ci par 2. 3025, &c. ou les multipliant par 0. 4342994, on a ceux dont nous nous ſervons vulgairement.

Repler même, que cette découverte ne vit jamais le jour. A l'égard de *Longomontanus*, à qui on a auſſi attribué l'invention des logarithmes (*a*), cela eſt ſans fondement. Cet Aſtronome qui ne mourut qu'en 1647, ne s'étant jamais aviſé de réclamer ſes droits ſur elle, ce doit être une preuve ſuffiſante qu'il n'en eut jamais aucun.

Neper publia ſa découverte en 1614 dans ſon Livre intitulé: *Mirifici logarithmorum canonis deſcriptio*. Il y donnoit une Table des logarithmes des ſinus pour tous les degrés & minutes du quart de cercle; mais elle avoit quelques particularités en quoi elle différoit de celles que nous employons aujourd'hui. Premiérement *Neper* remarquant que le ſinus total étoit le plus ſouvent un des termes de la proportion à laquelle ſe réduiſent les réſolutions des triangles, avoit fait le logarithme du ſinus total égal à 0, afin d'éviter une opération dans tous ces cas. En ſecond lieu, ſes logarithmes différoient de ceux que préſentent nos tables ordinaires, en ce que dans celles-ci le logarithme de 10 eſt l'unité ou 1. 000000. & dans celle de *Neper* c'étoit 2. 3025850; ce qui ſuivoit de ſa maniere de les conſtruire que nous avons expoſée dans la note ci-deſſus. Mais il réſultoit de l'une & de l'autre de ces ſuppoſitions quelques inconvéniens qui le frapperent, & qui l'engagerent bientôt après à donner une autre forme à ſes logarithmes. C'eſt ce qu'il propoſe dans un écrit poſthume intitulé, *Appendix de logarithmorum præſtantiori uſu*, que ſon fils publia en donnant une nouvelle édition de l'ouvrage précédent. *Neper* ſuppoſe dans cet *appendix*, comme nous le faiſons aujourd'hui, le logarithme de l'unité égal à 0, celui de 10 à 1. 000000. celui de 100 à 2. 000000. celui de 1000 à 3. 0000000; & ainſi de ſuite. Par-là le logarithme du ſinus total qu'on ſuppoſe l'unité ſuivie de dix zeros, eſt 10. 000000. Cette nouvelle ſuppoſition remédie à tous les inconvéniens de la premiere, & en réunit tous les avantages avec divers autres qu'il ſeroit trop long de déduire ici. Tous les logarithmes des ſinus, tangentes & ſécantes, ſont poſitifs, & il n'y a de logarithmes négatifs que ceux des fractions proprement dites ou moindres que l'unité; quant à l'addition & la

(*a*) Suppl. au Dict. de Bayle, par M. *de la Chauffepié*, au mot *Henri Briggs*.

ſouſtraction fréquente du logarithme du ſinus total, elle n'a rien de laborieux, puiſque ce logarithme eſt tout compoſé de zeros hors le premier chiffre qui eſt même l'unité. On n'a cependant pas entiérement rejetté la forme des logarithmes de *Neper* pour les nombres naturels. Ils ont leur uſage dans la Géométrie tranſcendante : car ils repréſentent les aires de l'hyperbole équilatere entre les aſymptotes, l'unité étant la valeur du côté du quarré inſcrit ; c'eſt pourquoi on les nomme hyperboliques. Ce n'eſt pas que les autres logarithmes ne repréſentent auſſi des aires hyperboliques, mais elles appartiennent à des hyperboles entre des aſymptotes obliques l'une à l'autre, & l'hyperbole équilatere étant comme la principale entre toutes les autres, a donné le nom aux logarithmes de *Neper*. Nous nous bornons ici à ce peu de mots ſur l'analogie des logarithmes avec les aires hyperboliques, parce que nous aurons occaſion ailleurs de la développer davantage.

Neper eut à peine la ſatisfaction d'être témoin de l'accueil que ſa découverte reçut des Mathématiciens, & le temps de la perfectionner comme il déſiroit. Il mourut en 1618 ; mais il eut dans *Henri Briggs* un ſucceſſeur qui entra parfaitement dans ſes vues. *Neper* n'eut pas plutôt publié ſon ouvrage, que ce Profeſſeur d'Oxford l'alla trouver à Edimbourg pour conférer avec lui ſur cette matiere. Il y fit même divers voyages, & il y étoit lorſque *Neper* mourut. Celui-ci lui fit part du projet qu'il avoit formé de changer la forme de ſes logarithmes, & lui en recommanda l'exécution avec inſtance. *Briggs* en ſentit l'utilité, & il ne tarda pas de mettre la main à l'œuvre. Il entreprit ſur ce nouveau plan deux immenſes Tables, l'une qui devoit contenir tous les logarithmes des nombres naturels depuis l'unité juſqu'à 100000, l'autre ceux des ſinus & tangentes pour tous les degrés & centiemes de degrés du quart de cercle. Ce zélé Calculateur exécuta une partie de ces projets. Il publia à Londres en 1624, les logarithmes des nombres naturels depuis l'unité juſqu'à 20000, & depuis 90000 juſqu'à 101000. Ils y ſont calculés juſquà 14 chiffres. Cet ouvrage intitulé, *Arithmetica logarithmica*, (*in fol.*) contient auſſi une ſçavante introduction, où la théorie & l'uſage de ces nombres ſont amplement développés. A l'égard de la

ſeconde Table, *Briggs* l'avoit aſſez avancée, mais la mort le prévint, & l'empêcha de l'achever. *Henri Gellibrand* y mit la derniere main, & la publia en 1630, ſous le titre de *Trigonometria Britannica.* (*in fol.*)

L'invention des logarithmes ne fut pas moins accueillie dans le continent. *Kepler* en ſentit le premier tout le mérite. Il publia en 1624 (*a*) un ouvrage ſur ce ſujet; & comme il travailloit alors à la conſtruction de ſes Tables Rudolphines, il y introduiſit le calcul logarithmique. *Benjamin Urſinus*, Mathématicien de l'Electeur de Brandebourg, calcula des Tables de ſinus avec leurs logarithmes, pour tous les arcs croiſſans de 10 en 10 ſecondes, juſqu'au quart de cercle. Mais, de même que *Kepler*, il s'en tint à la premiere idée du Mathématicien Ecoſſois; ce qui rend aujourd'hui ſon travail peu utile. *Adrien Ulacq*, dont les petites Tables ont eu un grand nombre d'éditions, eſt après *Neper* & *Briggs*, celui à qui nous avons le plus d'obligation dans ce genre. Perſonne ne les ſeconda avec autant de zele que ce Calculateur des Pays-Bas. Inſtruit de la découverte de *Neper* par un exemplaire de l'ouvrage de *Briggs*, il ſe mit auſſitôt à travailler ſur le même plan, & à ſuppléer à ce que celui-ci avoit laiſſé imparfait. Il remplit la lacune qui ſe trouvoit entre 10000 & 90000, comme *Briggs* l'avoit recommandé, & il ſupputa les logarithmes pour les ſinus, tangentes & ſécantes du quart de cercle, en les réduiſant à 10 chiffres. Cette importante addition à l'ouvrage de *Briggs* parut dans la nouvelle édition de l'*Arithmetica logarithmica*, que donna *Ulacq* en 1628. Il ne s'en tint pas là: il s'engagea bientôt dans une entrepriſe plus conſidérable, en étendant ſes Tables juſqu'aux ſinus, tangentes & ſécantes, & leurs logarithmes de 10 en 10 ſecondes. Ces nouvelles & amples Tables furent publiées en 1633, avec les logarithmes des nombres naturels depuis l'unité juſqu'à 20000. Depuis ce temps une multitude d'Auteurs, entr'autres ceux de Trigonométrie, ont traité des logarithmes, & en ont donné des Tables. L'énumération en ſeroit longue & ennuieuſe: c'eſt pourquoi je crois devoir m'en diſpenſer. Il eſt facile de ſentir que le mérite eſſentiel

(*a*) *Chilias logarithmorum, cum ipſorum dem. & uſu.* Linzii 1624. *Supplem. ad. chil. logarith.* Ibid. 1625. in-4°. Ces ouvrages ſont aujourd'hui entiérement inutiles.

des ouvrages de cette ſorte conſiſte dans l'exactitude & une parfaite correction. Les Tables qui ont aujourd'hui le plus de réputation pour l'étendue & pour ces qualités ſi néceſſaires, ſont celles de *Gardiner* (*in* 4°.) Celles de *Sherwin* imprimées à Londres en 1705, (*in-oct.*) ſous le titre de *Tables Mathématiques*, méritent auſſi d'être recommandées, à cauſe des commodités qu'elles préſentent pour le calcul des logarithmes des plus grands nombres. Au défaut de ces Tables, celles que nous croyons mériter le plus l'accueil des Aſtronomes & des Trigonometres, ſont celles de M. *Deparcieux*.

L'invention des logarithmes a donné naiſſance à une courbe célebre depuis ce temps parmi les Géometres, & qu'on nomme
Fig. 3. la logarithmique : en voici la nature. Sur les points A,B,C,D,&c. à égales diſtances ſoient élevées les perpendiculaires A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, &c. en proportion géométrique continue : la courbe qui paſſera par les extrêmités de toutes ces proportionnelles, & par celles de toutes les autres moyennes en nombre infini, qu'on pourroit inſérer entr'elles, eſt celle dont nous parlons. Il eſt évident que cette courbe repréſentera les logarithmes par les ſegmens de ſon axe : ſi A*a*, par exemple, eſt l'unité, F*f* = 2, G*g* = 3, & que le logarithme de l'unité ſoit zero, AF, AG, ſeront les logarithmes de 2, 3, &c. & AB, AC, AD, &c, ſeront ceux de B*b*, C*c*, D*d*, &c; de même AO, AP, ſeront les logarithmes des nombres repréſentés par O*o*, P*p*, &c, moindres que l'unité ; c'eſt pourquoi ces logarithmes ſeront négatifs. Car les abciſſes étant priſes poſitivement du côté de G, elles ſont réputées négatives du côté oppoſé. La premiere idée de cette courbe eſt dûe, à ce que j'ai lu quelque part, à *Edmund Gunther*, Mathématicien Anglois, contemporain de *Briggs* : mais je n'ai pu recouvrer ſon écrit pour ſçavoir quel uſage il en faiſoit. Elle a excité la curioſité des Analiſtes modernes qui y ont découvert des propriétés fort remarquables ; par exemple que ſa ſous-tangente eſt une ligne conſtante, c'eſt-à-dire que dans quelque endroit qu'elle ſoit touchée, l'intervalle entre l'endroit où la tangente rencontre l'axe, & l'ordonnée abaiſſée du point de contact comme G*i* ou A*k*, eſt le même ; que l'eſpace prolongé à l'infini du côté où elle s'approche de ſon

asymptote, est fini, &c. La considération de cette courbe jette une grande lumiere sur la nature & les propriétés des logarithmes. C'est par ce motif que M. *Keil*, quittant la route frayée par les écrivains ordinaires sur cette théorie, a fait suivre son édition des Elémens d'*Euclide* d'un petit Traité intitulé : *de Naturâ & Arithmeticâ logarithmorum*, où il développe les propriétés de ces nombres par le moyen de la logarithmique qu'il emploie aussi à la solution de quelques problêmes curieux. A l'égard de la construction des logarithmes si laborieuse par la voie ordinaire, elle a été extrêmement facilitée par les nouveaux calculs. Des Géometres du premier ordre, MM. *Gregori*, *Mercator*, *Newton*, *Hallei* ont donné diverses méthodes de plus en plus commodes pour les trouver. M. *Hallei* surtout a donné pour cet effet (*transf. phil.* 1695.) une suite si convergente, qu'un très-petit nombre de termes suffit pour trouver les logarithmes de *Neper* jusqu'au vingtieme chiffre. Nous invitons le Lecteur à consulter l'endroit cité. Revenons à *Neper*.

C'est principalement de la découverte des logarithmes que *Neper* tire sa célébrité ; nous ne croyons cependant pas devoir passer sous silence quelques autres inventions qu'on lui doit, quoique moins brillantes & d'une utilité moins universelle. Telles sont diverses nouvelles méthodes de résolution imaginées dans la vue de simplifier la Trigonométrie sphérique. Parmi ces inventions nous remarquons surtout une regle pour la résolution des triangles sphériques rectangles, qui au jugement de tous ceux qui la connoissent, est extrêmement ingénieuse & commode. En effet ceux qui pratiquent la Trigonométrie sphérique, sçavent qu'on peut proposer seize cas différens sur les triangles rectangles, & que de ces seize cas il y en a au moins douze dont la solution ne se présente pas facilement ; de sorte que les Auteurs qui ont écrit sur ce sujet, ont été obligés pour soulager la mémoire, d'en dresser une Table qu'on puisse consulter au besoin. La regle de *Neper* réduit tous ces cas à une seule regle en deux parties, qui est fort propre par son élégance à s'imprimer profondément dans la mémoire. Aussi les Trigonometres Anglois ne manquent-ils point d'en faire un grand usage, & je ne sçaurois dissimuler ma surprise de n'en trouver aucune

trace dans divers Traités François de Trigonométrie qui ont paru depuis peu d'années, & qui méritent d'ailleurs tout-à-fait l'accueil du public. Comme cette regle eſt fort bien expoſée dans le *Cours de Mathématiques* de M. *Wolf*, Livre aſſez répandu, nous nous contenterons d'inviter les Trigonometres à l'y rechercher.

On a encore un monument du génie de *Neper*, dans ſa *Rhabdologie*, (*a*) ouvrage qu'il publia en 1617. L'objet qu'il s'y eſt propoſé, a été de faciliter les multiplications & les diviſions des grands nombres d'une autre maniere que par les logarithmes. Il l'exécute par le moyen de certaines petites baguettes qui portent neuf caſes diviſées en deux par une diagonale tirée de gauche à droite, & de haut en bas. Dans ces caſes ſont ſucceſſivement écrits les neuf multiples du premier nombre que chaque baguette porte en tête, le chiffre des dixaines étant dans le triangle d'en bas. Cette préparation faite il n'y a preſque qu'à ranger ces baguettes les unes à côté des autres, de maniere qu'elles portent en tête le nombre à multiplier; & l'on trouve dans les rangs horizontaux chacun des produits partiaux preſque tout fait, de ſorte qu'on n'a que la peine de les tranſcrire & de les ajouter pour avoir le produit total. Cette invention eſt aſſez commode pour la multiplication, mais il eſt bon de remarquer qu'elle n'abrege pas ſenſiblement la diviſion; & l'on ne doit guere la regarder que comme une curioſité Mathématique. Je doute qu'aucun Arithméticien l'ait jamais pratiquée autrement que par forme d'amuſement.

IV.

Problêmes & nouvelles vues de Kepler.

Tandis que *Neper* publioit en Angleterre ſon ingénieuſe invention des logarithmes, l'Allemagne donnoit naiſſance aux premiers germes de la nouvelle Géométrie qu'on vit éclorre quelques années après entre les mains de *Cavalleri*. Nous les trouvons dans un ouvrage de *Kepler*. Quoique cet homme célebre ne ſe ſoit adonné qu'en paſſant à la Géométrie, & que par cette raiſon il n'y ait pas fait des découvertes

(*a*) M. Rauſſain a perfectionné en quelques points les bâtons de Neper, & il a donné ſur ce ſujet un Mémoire à l'Académie Royale des Sciences, qui l'a jugé digne qu'il en fût fait mention dans ſon hiſtoire. *Voyez Mem. de l'Acad.* 1738.

remarquables,

remarquables, on ne peut cependant lui refuſer d'y avoir montré quelques étincelles de ce génie qu'on voit briller dans ſes autres écrits. Sa *Stereometria doliorum*, (Lintz 1615. in-fol.) nous préſente des vues qui paroiſſent avoir beaucoup influé ſur cette révolution qu'a éprouvé la Géométrie. Il oſa le premier introduire dans le langage ordinaire, le nom & l'idée de l'infini. Le cercle n'eſt, dit-il, que le compoſé d'une infinité de triangles, dont les ſommets ſont au centre, & les baſes forment la circonférence. Le cône eſt compoſé d'une infinité de pyramides appuyées ſur les triangles infiniment petits de ſa baſe circulaire, & ayant leur ſommet commun avec celui du cône, tandis que le cylindre de même baſe & même hauteur, eſt formé d'un pareil nombre de petits priſmes ſur les mêmes baſes, & ayant même hauteur qu'elles. A l'aide de ces notions ſous leſquelles ces grandeurs ſe préſenterent ſans doute aux Géometres de l'antiquité, mais qu'ils n'oſerent employer de crainte de bleſſer la délicateſſe de leurs contemporains; à l'aide de ces notions, dis-je, *Kepler* démontroit d'une maniere directe & très-claire, les vérités qui exigeoient chez les Anciens des détours ſi ſinguliers & ſi difficiles à ſuivre.

Kepler ouvroit dans ce même Livre un vaſte champ de ſpéculation. Portant ſes vues au-delà de celles d'*Archimede*, il ſe formoit une multitude de nouveaux corps dont il recherchoit la ſolidité, & qu'il préſentoit aux Géometres comme un objet digne de les occuper. *Archimede* n'avoit formé ſes conoïdes & ſes ſphéroïdes, qu'en faiſant tourner les ſections coniques autour de leur axe; encore n'avoit-il fait aucune attention à celui qu'engendreroit l'hyperbole en tournant autour de ſon axe conjugué. *Kepler* faiſoit naître les ſiens de la circonvolution des ſections coniques autour d'un diametre quelconque, de leur ordonnée, de leur tangente au ſommet, ou enfin d'une ligne priſe au dehors de la courbe. Enumération faite, il en trouvoit quatre-vingt-dix, outre ceux qu'*Archimede* avoit conſidérés, & il leur donnoit des noms tirés pour la plûpart de leur reſſemblance avec quelques-uns de nos fruits. Il eût mieux valu ſupprimer ces dénominations le plus ſouvent fort voiſines de la puérilité.

Il eſt vrai, & nous ne devons pas le diſſimuler, que *Kepler*

ne réſolvoit que les plus aiſés de ces problêmes. Parmi ceux dont il ſe tire heureuſement, le ſeul où il y ait quelque difficulté, eſt celui où il s'agit de meſurer le ſolide formé par un ſegment de cercle ou d'ellipſe tournant autour de ſa corde. Il le développoit en un autre corps formé en coin, & dont nous donnerons une idée de cette maniere. Qu'on imagine ſur le ſegment propoſé un cylindre droit, & que ce cylindre ſoit coupé par un plan paſſant par la corde du ſegment, de telle
Fig. 4. ſorte que la fleche D E ſoit à la hauteur C E, comme le rayon à la circonférence. C'eſt ici que *Kepler* employoit un procédé fort reſſemblant à celui de la méthode des indiviſibles. Il démontroit l'égalité de ce ſolide avec celui que formoit le ſegment tournant autour de ſa corde, parce qu'en les coupant l'un & l'autre par un même plan perpendiculaire à l'axe commun, la ſection circulaire de l'un eſt toujours égale au triangle qui eſt la ſection de l'autre: cela étant démontré, pour trouver ce dernier ſolide, il ſuppoſoit qu'il étoit la partie ſupérieure d'un autre formé de la même maniere ſur le demi-cercle ou la demi-ellipſe & qui étoit connu étant égal à la ſphere, ou au ſphéroïde. Or on voit facilement que pour avoir
Fig. 5. le ſolide A C B, il faut retrancher du total F C H, 1°. deux fois le ſolide A F I *a*, qui eſt égal au ſegment de ſphere ou de ſphéroïde, fait par le ſegment F *a* I, 2°. le priſme rectiligne A *a* I L *b* B, 3°. le priſme ſur la baſe *a e b*, ou A E B, dont la hauteur eſt A *a*.

A l'égard des autres problêmes que *Kepler* ſe propoſoit, ils étoient la plûpart d'une difficulté trop ſupérieure à la Géométrie de ſon temps pour s'étonner qu'il y ait échoué: il eſt vrai qu'on ne peut guere l'excuſer ſur les eſpeces de ſolutions qu'il crut donner de pluſieurs de ces problêmes, quoiqu'il n'ait pas prononcé ſur elles en homme perſuadé de leur juſteſſe. Au défaut d'une méthode directe, il employa certaines analogies, certaines raiſons de convenance plus arbitraires que fondées dans la nature. Auſſi ſouleva-t'il quelques Géometres contre lui. Un, entr'autres, nommé *Alexandre Anderſon*, (*a*) lui reprocha cette ſinguliere maniere de ſe conduire en Géométrie, & montra que les vraiſemblances qu'il avoit

(*a*) *Vindiciæ Archimed.* 1616.

prises pour guides ne l'avoient conduit qu'à des erreurs.

Nous passerons légérement sur la seconde partie de cet ouvrage de *Kepler*; elle concerne le jeaugeage des tonneaux, sujet sur lequel il propose des idées ingénieuses. Nous y trouvons surtout une remarque heureuse concernant les problêmes *de maximis & minimis*. C'est que, lorsqu'une grandeur est parvenue au terme de son plus grand accroissement, ou au contraire, dans les environs de ce terme elle ne varie que par des degrés insensibles. Il est facile de voir dans cette remarque le fondement de la regle *de maximis & minimis*, usitée dans le calcul moderne.

V.

Méthode de Guldin.

Les problêmes proposés par *Kepler*, semblent avoir été l'aiguillon puissant qui excita les Géometres à s'ouvrir de nouvelles voies propres à leur en procurer la solution; & peut-être est-ce à ces problêmes que nous devons l'invention des deux méthodes célebres qu'on vit paroître environ 20 ans après, sçavoir celle de *Guldin*, & celle de *Cavalleri*. Ce nombre d'années ne doit pas former une difficulté contre notre conjecture. Les productions Littéraires se communiquoient encore si lentement en Europe, qu'il n'en falloit guere moins pour donner à l'ouvrage de *Kepler* une publicité suffisante, & pour que les géometres dont nous parlons, pussent découvrir & mettre au jour les méthodes dont il occasionnoit l'invention.

Avant que d'entrer dans l'explication de la méthode de *Guldin* (*a*), il est néceſſaire de se rappeller quelques connoissances préliminaires. La principale est, que dans toute figure il y a un point qu'on nomme centre de gravité, qui est tel que si on conçoit cette figure traversée par un axe passant par ce point, toutes ses parties resteront en équilibre autour de cet axe, & la figure retiendra la situation qu'on lui

(*a*) Le Pere Guldin naquit à Saint-Gall en 1577, & ayant quitté la Religion Protestante, il entra dans la Compagnie de de Jesus en 1597, en qualité de Frere, ou de Coadjuteur temporel. Mais les talens qu'il montra pour les Mathématiques, ayant frappé ses Supérieurs, on l'envoya les cultiver à Rome, où il professa la Philosophie & les Mathématiques. Il les enseigna aussi à Gratz & à Vienne. Outre ses *Centro-Barica*, dont les premiers Livres parurent en 1635, & le reste en 1640, il réfuta Calvisius au sujet du Calendrier Grégorien, dans un ouvrage intitulé *Elenchi Calendarii Greg. refutatio*. Il mourut en 1643.

donnera. Une des propriétés du centre de gravité qu'il eſt encore à propos de remarquer, eſt que ſi l'on imagine une ligne quelconque tirée hors de la figure, & que cette ligne ſoit comme l'appui, ou l'axe autour duquel cette figure tend à tourner en tombant, le produit de la figure entiere par la diſtance de ſon centre de gravité à cet axe, eſt égal à la ſomme des produits de chacune de ſes parties par la diſtance de ſon centre de gravité propre à ce même axe. Cela eſt évident par la nature du centre de gravité. Car toute la figure réunie, & comme condenſée à ſon centre de gravité, tendroit à tourner avec une force qui ſeroit comme ſon poids, (ou la grandeur de la figure,) multiplié par la diſtance de ce centre au point d'appui. C'eſt ce qu'enſeignent les principes les plus ordinaires de la Méchanique. Mais la figure elle-même fait un effort qui eſt la ſomme de tous ceux de ſes parties; & chacun de ces efforts eſt le produit de chaque partie par la diſtance de ſon centre de gravité propre au point d'appui: ainſi la vérité de la propoſition ci-deſſus eſt manifeſte.

La théorie des centres de gravité des figures planes & des lignes courbes eſt en quelque ſorte le veſtibule de la méthode de *Guldin*, & nous l'imiterons en commençant à parler de ſes recherches ſur ce ſujet. Les deux premiers Livres de ſon ouvrage intitulé, *Centro baryca*, ou *de centro gravitatis*, qui parurent en 1635, ont pour objet de déterminer ces centres dans les arcs de cercles, les ſecteurs, & les ſegmens ſoit circulaires ſoit elliptiques. Nous ne devons cependant pas diſſimuler que la plûpart de ces choſes avoient été publiées quelques années auparavant (en 1632) par un Auteur de la même Compagnie, nommé le P. *de la Faille*, dans un écrit intitulé, *De centro gravitatis partium circuli & ellipſis*, *theor.* 40. Là ce Géometre qui mérite des éloges, aſſignoit, à la vérité d'une maniere un peu prolixe, les centres de gravité des différentes parties du cercle & de l'ellipſe. Il y faiſoit voir ſurtout la liaiſon qu'il y a entre cette détermination & celle de la quadrature de ces courbes, & comment l'une des deux étant donnée, l'autre l'eſt auſſi néceſſairement. A l'égard de *Guldin*, il prend une route un peu différente, & il étend davantage cette théoric.

La principale découverte qui rend l'ouvrage de *Guldin* re-

commandable, conſiſte dans l'application qu'il fait du centre de gravité à la meſure des figures produites par circonvolution. Nous avons déja remarqué ailleurs que *Pappus* avoit reconnu cette propriété, & qu'il l'avoit ſeulement énoncée en termes un peu différens. Le Géometre ancien avoit dit que les figures produites par circonvolution étoient entr'elles en raiſon compoſée des figures génératrices, & des chemins de leurs centres de gravité. Mais nous devons obſerver en même temps que cet endroit de *Pappus* n'avoit point encore vu le jour, & qu'il n'a paru que dans l'édition de ce Géometre donnée en 1660. Il y auroit, je penſe, de la malignité à conjecturer que *Guldin* l'avoit trouvé en fouillant dans quelque manuſcrit de cet ancien Auteur, quoique ſon peu de ſuccès à démontrer ce principe pût le faire ſoupçonner. Quoi qu'il en ſoit, voici la propoſition fondamentale de cette méthode: « Toute figure, dit *Guldin*, formée par la » rotation d'une ligne ou d'une ſurface autour d'un axe im- » mobile, eſt le produit de la quantité génératrice par le che- » min que décrit ſon centre de gravité. » Nous allons développer cette regle par quelques exemples faciles, & dont on a la démonſtration par d'autres voies. Perſonne n'ignore que le cône droit eſt formé par un triangle rectangle qui tourneroit autour d'un des côtés qui comprennent l'angle droit; mais l'on ſçait auſſi que le centre de gravité de ce triangle eſt éloigné de cet axe du tiers de la baſe, & par conſéquent il décrit une circonférence qui eſt le tiers de celle que décrit l'extrêmité de la baſe. Le cône ſera donc, ſuivant *Guldin*, le produit du triangle générateur par le tiers de cette derniere circonférence, d'où l'on déduit facilement qu'il eſt le tiers du cylindre de même baſe & même hauteur. On fait voir de même par la poſition du centre de gravité du demi-cercle, que la ſphere qu'il produit en tournant autour du diametre, eſt les $\frac{2}{3}$ du cylindre de même baſe & même hauteur, & que ſa ſurface eſt égale à la ſurface courbe de ce cylindre; que le conoïde parabolique eſt la moitié du cylindre de même baſe & même hauteur, &c.

Guldin parcouroit ainſi diverſes queſtions déja réſolues, & y appliquant ſa regle il tâchoit de la démontrer par cet accord parfait des ſolutions qu'elle donne, avec les anciennes.

Mais ce n'étoient-là que des inductions, qui, quoique favorables, ne ſuffiſent point en Géométrie, où l'on a droit d'exiger des preuves qui arrachent le conſentement. *Guldin* fit, à la vérité, quelques efforts pour la démontrer directement, mais il y réuſſit mal; & il eut ſans doute mieux fait de s'en tenir à ſes inductions, que de former un raiſonnement auſſi peu digne d'un Mathématicien que le ſuivant. Il diſoit, par exemple, que la diſtance du centre de gravité à l'axe de rotation tenoit un milieu entre toutes celles des différentes parties de la figure à cet axe: que ce point étoit unique, & par conſéquent que ſi quelqu'un de ceux de la figure devoit jouir de la prérogative en queſtion, ce devoit être le centre de gravité. Ceci montre qu'il y a quelquefois dans les découvertes même géométriques, plus de bonheur que d'habileté; & c'eſt ce que *Cavalleri* (*a*) reprocha à *Guldin* dans le cours d'une conteſtation qu'ils eurent enſemble au ſujet de l'exactitude de la méthode des indiviſibles. En effet il convenoit peu au Géometre Allemand d'attaquer l'Italien, comme coupable de relâchement en Géométrie. Auſſi *Cavalleri* n'eut pas beaucoup de peine à ſe juſtifier, & uſant de récrimination, il montra que ce reproche ne pouvoit tomber que ſur ſon adverſaire: il fit plus: pour prouver que *Guldin* avoit échoué contre une difficulté peu capable d'arrêter un Géometre, il lui donna une démonſtration fort ſimple de ce principe. Elle n'eſt effectivement que le corollaire d'une propriété du centre de gravité, qu'il eſt ſurprenant que *Guldin* n'ait pas apperçue (*b*). *Cavalleri* en attribue l'invention à un de ſes

(*a*) *Exercit. Geom.* Bon. 1647. *Exer.* 1. 2.

(*b*) L'importance de ce principe nous engage à en donner ici la démonſtration en faveur des lecteurs à qui elle ne ſe préſenteroit pas. Si le rectangle A *a*, (*fig.* 6.) tourne à l'entour de l'axe G H, il décrira évidemment un cylindre creux, dont la ſolidité ſera le produit de A *a*, par la circonférence moyenne entre celles que décrivent ſes côtés autour de l'axe de rotation, c'eſt-à-dire, par la circonférence dont le rayon eſt D α, la diſtance du centre de gravité α à cet axe. De même le ſolide creux décrit par le parallélogramme B *b*, ſera le produit de B *b*, par la circonférence que décrit le centre de gravité β. Que δ ſoit maintenant le centre de gravité des deux rectangles A *a*, B *b*, le produit de A *a* + B *b*, par la diſtance de δ à l'axe, ſera égal (par la propriété du centre de gravité) à la ſomme du produit de A *a*, par la diſtance de α à l'axe, plus celui de B *b* par la diſtance de β à ce même axe. Et par conſéquent, prenant au lieu des rayons les circonférences, le produit de A *a* par le chemin de ſon centre de gravité α, ſera égal au produit de A *a* + B *b*, par le chemin du centre de gravité commun δ. Si donc on inſcrit ou l'on circonſcrit à une

anciens disciples, nommé *Antonio Roccha*, qui, à ce qu'il ajoute, la lui avoit communiquée long-temps avant que son adversaire eût publié son ouvrage.

En partant du principe de *Guldin*, il est facile de résoudre plusieurs des problêmes que *Kepler* avoit proposés. Car 1°. la quadrature du cercle étant supposée, on a le centre de gravité d'un segment circulaire ou elliptique quelconque, aussi-bien que sa grandeur: par conséquent si l'on fait tourner ce segment autour de sa corde, ou de sa tangente, ou enfin d'une autre ligne quelconque, on aura & la quantité de la figure génératrice, & le chemin parcouru par son centre de gravité: le solide produit ne sera donc plus inconnu. Il en sera de même de la surface formée par un arc circulaire tournant sur un axe quelconque: on connoît sa grandeur & la position de son centre de gravité, on aura par conséquent les deux facteurs du produit, qui est la surface cherchée. Une partie du Livre de *Guldin* est employée à la résolution de ces problêmes.

Archimede s'étoit autrefois proposé de trouver la grandeur du solide formé par la circonvolution du segment parabolique autour de son axe, & il avoit montré qu'il étoit la moitié du cylindre de même base & de même hauteur. *Kepler* avoit proposé de trouver la mesure du solide produit par le même segment tournant autour de son ordonnée, ou de sa tangente à son sommet. Ces deux problêmes, de même que divers autres sur les segmens paraboliques, sont encore du ressort de la méthode de *Guldin*. On sçait que le centre de gravité de la parabole est éloigné de la base des $\frac{2}{5}$ de l'axe, & par conséquent du sommet des $\frac{3}{5}$ de ce même axe. On sçait encore que le segment parabolique est les deux tiers du rectangle circonscrit, & que le centre de gravité de ce rectangle est éloigné de sa base commune avec le segment parabolique, de la moitié de son axe. Le solide produit par le

figure courbe quelconque (*fig.* 7.), les rectángles, comme A, B, C, &c. le solide qu'ils décriront en tournant autour d'un axe quelconque, sera égal au produit de leur somme par la circonférence que décrit leur centre de gravité commun. Mais que ces rectangles soient multipliés à l'infini, ils se confondront avec la figure, & leur centre de gravité avec celui de cette figure. Ainsi le produit de la figure par le chemin de son centre de gravité, sera égal au solide qu'elle décrira dans sa circonvolution.

rectangle tournant autour de cette baſe, ſera donc au ſolide produit par la parabole, comme $1 \times \frac{1}{2}$, à $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{15}$. Ces deux ſolides ſont donc l'un à l'autre comme $\frac{1}{2}$ à $\frac{4}{15}$, ou comme 15 à 8. On trouvera par un procédé ſemblable, que le ſolide de la parabole tournant autour de la tangente au ſommet, eſt au cylindre circonſcrit, comme $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$, à $1 \times \frac{1}{2}$, ou comme $\frac{2}{5}$ à $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{4}{5}$ à 1.

Ce qu'on vient de dire ſur la regle de *Guldin*, doit ſuffire dans un ouvrage où l'on ſe propoſe ſeulement de donner l'eſprit & le précis des découvertes. Il eſt facile de voir qu'on l'employera avec ſuccès dans tous les cas où l'on aura la grandeur & le centre de gravité de la figure génératrice. Nous croyons cependant pouvoir dire qu'elle n'eſt point la voie naturelle pour la dimenſion des ſolides & des ſurfaces, & qu'elle ne va à ſon but que par un circuit ſouvent inutile, je veux dire qu'elle ſuppoſe ſouvent des connoiſſances d'une difficulté ſupérieure à celle du problême qu'on cherche à réſoudre. En général, la détermination des aires des courbes, ou de leur centre de gravité, eſt plus difficile que celle des ſolides qu'elles forment par leur circonvolution : on en a un exemple dans le conoïde hyperbolique, dont la grandeur eſt bien plus facile à trouver que celle du ſegment hyperbolique, ou ſon centre de gravité. La regle de *Guldin* ſemble même dans ce cas induire en erreur, en ce qu'elle repréſente le problême comme d'un genre ſupérieur à celui dont il eſt réellement. La ſurface du conoïde parabolique en offre encore un exemple. La méthode dont nous parlons exigeroit la rectification de l'arc parabolique, & la détermination de ſon centre de gravité, quoique la meſure de cette ſurface ne dépende que de la quadrature d'un ſegment parabolique tronqué, & de celle du cercle qui entre néceſſairement dans tous les problêmes qui concernent des ſurfaces ou des corps produits par circonvolution. Cependant malgré ces inconvéniens, on doit regarder cette liaiſon que *Guldin* établit entre les figures, leurs centres de gravité, & celles qu'elles engendrent en tournant autour d'un axe, comme une des belles découvertes de la Géométrie. C'eſt avoir multiplié les reſſources de la ſcience, en réduiſant trois problêmes regardés juſqu'alors, comme iſolés à deux ſeulement.

VI.

Méthode des indiviſibles.

Quelque ingénieuſe que ſoit la méthode de *Guldin*, elle n'a pas autant ſervi à reculer les bornes de la Géométrie que celle des indiviſibles. C'eſt à dater de l'époque de celle-ci, qu'on doit compter les grands progrès qu'a fait cette Science, & par leſquels elle s'eſt élevée à l'état où elle eſt aujourd'hui. Ce fut en 1635 que *Cavalleri* la publia dans ſon Livre intitulé, *Geometria indiviſibilibus continuorum novâ quâdam ratione promota* (*Bon. in* 4°.). Nous ſuſpendrons quelques momens l'expoſition de ce que contient cet ouvrage mémorable, pour faire connoître ſon Auteur.

Cavalleri.

Cavalleri (*Bonaventure*) naquit à Milan en 1598, & entra jeune dans l'ordre des Jéſuates ou Hieronymites. Il montra tant de facilité & de génie dans ſes études, qu'après qu'il eut pris les Ordres, ſes ſupérieurs jugerent à propos de l'envoyer à Piſe, afin qu'il pût y profiter des ſecours qu'offroit l'Univerſité célebre qui y fleuriſſoit. Ce fut au grand regret de *Cavalleri*. Cependant c'eſt à ce voyage qu'il doit à certains égards la célébrité de ſon nom ; car c'eſt dans cette ville qu'il connut pour la premiere fois la Géométrie. *Benoît Caſtelli*, diſciple & ami de *Galilée*, la lui ayant conſeillée pour le diſtraire de ſes ennuis & des douleurs que commençoit à lui cauſer une goutte qui alla toujours en empirant, *Cavalleri* y fit de tels progrès, & épuiſa ſi promptement dans ſes lectures tous les Géometres anciens, que *Caſtelli* & *Galilée* prédirent dès-lors la haute célébrité à laquelle il devoit atteindre. En effet il imagina peu après la *Géométrie des indiviſibles* ; & dès l'année 1629 il étoit en poſſeſſion de cette ingénieuſe méthode. Car l'Aſtronome *Magin*, Profeſſeur dans l'Univerſité de Boulogne, étant mort, *Cavalleri* fit communiquer ſon Traité des indiviſibles, avec un autre ſur les ſections coniques, à quelques Sçavans & aux Magiſtrats de cette ville, en demandant la place vacante. On n'en exigea pas davantage : on trouva dans l'un & dans l'autre de ces écrits tant de marques de génie, qu'on agréa ſa demande. *Cavalleri* fut nommé Profeſſeur, & commença à en exerçer les fonctions à la fin de l'année 1629.

Outre l'ouvrage célebre de *Cavalieri*, nous voulons dire ſa *Géométrie des indiviſibles*, on lui en doit pluſieurs autres, comme un Traité des ſections coniques intitulé *de ſpeculo uſtorio*, (*in* 4°. 1632.) une Trigonométrie ſous le titre de *Directorium univerſale urano-metricum* (*in* 4. 1632.), qui reparut en 1643, ſous celui de *Trigonometria plana ac ſpherica, linearis & logarithmica*; un *Compendium regularum de triangulis*, une *Centuria problematum aſtronomicarum*, ouvrages apparemment uniquement deſtinés à l'inſtruction de ſes éleves. Les inſtances de quelques-uns de ſes Auditeurs lui en arracherent un autre qui doit nous ſurprendre; c'eſt un Traité d'Aſtrologie qu'il intitula *Rota planetaria*, & qu'il mit ſous le nom de *Sylvius Philomantius*. Ennemi de l'Aſtrologie Judiciaire, comme le dépeint l'Auteur de ſa vie, il eût ſans doute mieux fait de ne point céder à ces ſollicitations. Eſt-il aucun motif qui doive porter un Philoſophe & un amateur de la vérité à faire quoi que ce ſoit, qui puiſſe contribuer à étendre ou à perpétuer un préjugé? Nous retrouvons enfin l'Auteur de la Géométrie des indiviſibles dans ſes *Exercitationes Geometricæ*, qu'il publia en 1643. Cet ouvrage que nous ferons mieux connoître dans la ſuite, fut le dernier de ceux de *Cavalleri*. Il mourut à Boulogne vers la fin de cette même année 1647, après avoir eſſuyé pendant douze ans les atteintes d'une goutte ſi cruelle, qu'elle l'avoit réduit à pouvoir à peine tenir ſa plume & s'en ſervir. Faiſons connoître maintenant la méthode de *Cavalleri*, & quelques-unes des découvertes auxquelles il s'éleva par ſon moyen.

Cavalleri imagine le continu compoſé d'un nombre infini de parties, qui ſont ſes derniers élémens ou les derniers termes de la décompoſition qu'on peut en faire, en le diviſant continuellement en tranches paralleles entr'elles. Ce ſont ces derniers élémens qu'il appelle *indiviſibles*; & c'eſt dans le rapport ſuivant lequel ils croiſſent ou décroiſſent, qu'il cherche la meſure des figures, ou leur rapport entr'elles.

On ne peut diſconvenir que *Cavalleri* s'énonce d'une maniere un peu dure pour les oreilles géométriques. A en juger par ſes expreſſions, il ſemble qu'il conçoit le corps comme compoſé d'une multitude de ſurfaces amoncelées les unes ſur les autres; les ſurfaces comme formées d'une infinité de li-

gnes ſemblablement accumulées, &c. Mais il eſt facile de reconcilier ce langage avec la ſaine Géométrie par une interprétation que *Cavalleri* ſentit ſans doute d'abord, quoiqu'il ne l'ait pas donnée dans l'ouvrage dont nous parlons. Il le fit ſeulement dans la ſuite, lorſqu'il fut attaqué par *Guldin* en 1640. Il montra alors que ſa méthode n'eſt autre choſe que celle d'exhauſtion des Anciens ſimplifiée. En effet ces ſurfaces, ces lignes dont *Cavalleri* examine les rapports & les ſommes, ne ſont autre choſe que les petits ſolides, ou les triangles inſcrits ou circonſcrits d'*Archimede*, pouſſés à un ſi grand nombre, que leur différence avec la figure qu'ils environnent, ſoit moindre que toute grandeur donnée. Mais tandis qu'*Archimede*, à chaque fois qu'il entreprend de démontrer le rapport d'une figure curviligne avec une autre connue, emploie un long circuit de paroles & un tour indirect de démonſtration, le Géometre moderne s'élançant en quelque ſorte dans l'infini, va ſaiſir par l'eſprit le dernier terme de ces diviſions & ſoudiviſions continuelles, qui doivent enfin anéantir la différence des figures rectilignes inſcrites ou circonſcrites avec la figure curviligne qu'elles enferment. C'eſt à peu près ainſi que, quand on détermine la ſomme d'une progreſſion géométriquement décroiſſante, on ſuppoſe le dernier terme égal à o; car quoique l'on ne puiſſe jamais atteindre à ce terme, l'eſprit voit cependant avec évidence qu'il eſt plus petit qu'aucune grandeur aſſignable, quelque petite qu'elle ſoit: par conſéquent il ne peut le déſigner que par zero, puiſqu'il n'y a que le rien qui ſoit moindre que toute grandeur poſſible. De même on doit concevoir les ſurfaces, les lignes dont *Cavalleri* fait les élémens des figures, comme les dernieres des diviſions dont nous avons parlé plus haut; ce qui ſuffit pour corriger ce que ſon expreſſion a de dur & de contraire à la rigoureuſe Géométrie. D'ailleurs il n'eſt aucun cas dans la méthode des indiviſibles, qu'on ne puiſſe facilement réduire à la forme ancienne de démonſtration. Ainſi c'eſt s'arrêter à l'écorce que de chicaner ſur le mot d'*indiviſibles*. Il eſt impropre, ſi l'on veut, mais il n'en réſulte aucun danger pour la Géométrie, & loin de conduire à l'erreur, cette méthode au contraire a ſervi à atteindre à des vérités qui avoient échappé juſques-là aux efforts de tous les Géometres.

La Géométrie des indiviſibles peut être diviſée en deux parties. L'une a pour objet la comparaiſon des figures entr'elles à l'aide de l'égalité ou du rapport conſtant qui regne entre leurs élémens ſemblables. C'eſt ce qui occupe *Cavalleri* dans le premier Livre de ſon ouvrage, & dans une partie du ſecond. Il y démontre à ſa maniere l'égalité & les rapports des parallélogrammes, des triangles, des priſmes, &c, ſur même baſe & même hauteur. Tout cela peut ſe réduire à une propoſition générale, ſçavoir que *toutes les figures dont les élémens croiſſent ou décroiſſent ſemblablement de la baſe au ſommet, ſont à la figure uniforme de même baſe & même hauteur, en même raiſon.* Il eſt facile d'appercevoir la vérité de cette propoſition; les conſéquences en ſont ſi nombreuſes que nous croyons devoir en donner quelques exemples. Voyez la note (*a*).

(*a*) La propoſition féconde dont il s'agit ici, nous donne d'abord une quadrature facile de la parabole. Car ſoit (*fig.* 8.) une pyramide A B C, & l'eſpace parabolique extérieur D E F, compris entre la parabole, la tangente au ſommet, & une parallele à l'axe. Il eſt facile d'appercevoir que ces figures ſont ſemblablement décroiſſantes. Car l'élément de la pyramide *f g*, eſt dans le même rapport que le quarré de ſa diſtance au ſommet, & dans la parabole extérieure, H I eſt de même comme le quarré de D H. L'eſpace extérieur D E F de la parabole ſera donc le tiers du parallélogramme de même baſe & même hauteur, comme la pyramide eſt le tiers du cylindre correſpondant.

Soit encore (*fig.* 9.) une parabole dont I eſt le ſommet, I K l'axe, E F une ordonnée. C'eſt une propriété de cette courbe que tirant une ligne quelconque G H parallele à l'axe, on a G H à K I, comme le rectangle E G F à E K F, ou K F^2. Or cette propriété eſt celle des élémens de la ſphere, dont l'axe ſeroit E F. Car par la propriété du cercle G M^2 : K L^2 : : E G × G F: K F^2, & par conſéquent le cercle décrit du rayon G M, qui eſt un des élémens de la ſphere, ſera à celui qui a K L pour rayon dans la même raiſon. C'eſt pourquoi K I : G H : : le cercle N L : O M. La ſphere & la parabole rapportée à ſon ordonnée, ſont donc des figures analogues; par conſéquent, la ſphere étant au cylindre circonſcrit, comme 2 à 3, la parabole ſera au parallélogramme de même baſe & même hauteur dans cette raiſon; ou au contraire ſi la quadrature de la parabole étoit la premiere connue, on en concluroit que la ſphere eſt les deux tiers du cylindre de même baſe & même hauteur.

Cette maniere de conſidérer la parabole nous va auſſi donner la meſure du conoïde hyperbolique. Car que la parabole B A C, (*fig.* 10.) ſoit prolongée de même que l'ordonnée C B; & que H K = B E, ſoit l'axe tranſverſe d'un conoïde hyperbolique. Si l'on tire les lignes D F, E G, on aura dans la parabole D F à G E, comme F C × F B à GC × GB; mais dans le conoïde hyperbolique, on a le cercle du diametre N P à celui de O Q, comme L K × L H à M K × M H, c'eſt-à-dire, dans la même raiſon: c'eſt pourquoi l'eſpace parabolique G B E croît ſemblablement avec le conoïde hyperbolique N K P. Ainſi ce conoïde ſera au cylindre correſpondant, comme cet eſpace au rectangle de même baſe & même hauteur.

Il eſt facile de voir que cette méthode donnera auſſi les centres de gravité d'une multitude de figures. Par exemple, dans le conoïde parabolique les élémens qui ſont comme les quarrés des ordonnées, étant par conſéquent comme les abſciſſes, ou leurs diſtances au ſommet, le conoïde ſera analogue au triangle rectiligne: ainſi ou-

La ſeconde partie de la Géométrie des indiviſibles eſt occupée à déterminer le rapport de la ſomme de cette infinité de lignes ou de plans, croiſſans ou décroiſſans, avec la ſomme de tous les élémens homogênes à ces premiers, mais tous égaux entr'eux. Un exemple éclaircira ceci. Un cône, ſuivant le langage de *Cavalleri*, eſt compoſé d'une infinité de cercles décroiſſans de la baſe au ſommet, pendant que le cylindre de même baſe & même hauteur, eſt compoſé d'une infinité de cercles égaux. On aura donc la raiſon du cône au cylindre, ſi l'on trouve le rapport de la ſomme de tous ces cercles décroiſſans dans le cône, & infinis en nombre, avec celle de tous les cercles égaux du cylindre. Dans le cône ces cercles décroiſſent de la baſe au ſommet, comme les quarrés des termes d'une progreſſion arithmétique. Dans d'autres corps ils ſuivent une autre raiſon; dans le conoïde parabolique, par exemple, c'eſt celle des termes d'une progreſſion arithmétique. L'objet général de la méthode eſt d'aſſigner le rapport de cette ſomme de termes croiſſans ou décroiſſans, avec celle des termes égaux dont eſt compoſée la figure uniforme & connue, de même baſe & même hauteur.

Cavalleri commence donc par examiner quel eſt le rapport de la ſomme des quarrés de toutes les lignes qui rempliſſent le triangle, avec la ſomme des quarrés de toutes celles qui rempliſſent le parallélogramme de même baſe & même hauteur; & il montre que la premiere eſt le tiers de la ſeconde, d'où il conclut que les pyramides, les cônes, & toutes les autres figures dont les élémens décroiſſent, comme ces quarrés, ſont le tiers des figures uniformes de même baſe & même hauteur. Delà il paſſe à examiner les ſommes des quarrés des lignes qui rempliſſent diverſes autres figures, comme le cercle ou ſes ſegmens, ceux des ſections coniques, &c: il applique enſuite ſa théorie à divers problêmes; & il paſſe en revue la plûpart de ceux de *Ké-*

tre que par-là on reconnoît que le conoïde parabolique eſt la moitié du cylindre de même baſe & même hauteur, on voit que ſon centre de gravité eſt placé comme celui du triangle. L'analogie remarquée ci-deſſus entre le conoïde hyperbolique & un certain eſpace parabolique, donnera auſſi le centre de gravité de ce conoïde, & celle qu'il y a entre les ſegmens ſphériques, comme O E M, & l'eſpace parabolique E G H, donnera celui de l'hémiſphere & de ſes ſegmens. Mais en voilà aſſez ſur ce ſujet, les exemples précédens ſuffiſent pour mettre ſur la voie ceux qui ſont doués de l'eſprit géométrique, & leur faire appercevoir mille autres comparaiſons ſemblables.

*

pler, qu'il réſoud avec beaucoup d'élégance. En voici quelques-uns. *Képler* avoit demandé la grandeur du corps formé par un ſegment circulaire ou elliptique ABE, tournant autour de ſa corde. Que C en ſoit le centre, dit *Cavalleri*, BI la fleche, ID le reſte de l'axe; & qu'on faſſe comme le rectangle circonſcrit AF, eſt au ſegment; ainſi 3 CI à DL: le ſolide en queſtion ſera au cylindre décrit en même temps par AF, comme 2 IL à 3 IB. De cette détermination l'on voit renaître le rapport ſi connu de l'hémiſphere ou l'hémiſphéroïde, au cylindre de même baſe & même hauteur. Car que le ſegment ABI ſoit un quart de cercle ou d'ellipſe, alors le point I tombera ſur le centre C, & le point L ſur D; de ſorte que la raiſon de 2 IL à 3 IB, ſera celle de 2 CD à 3 CB, ou de 2 à 3.

Fig. 11.

On trouve par la même méthode, que le ſolide formé par la circonvolution de l'eſpace extérieur du quart de cercle ou d'ellipſe, comme GABH, autour de GH, ou HB, eſt les $\frac{2}{2\,1}$ du cylindre décrit en même temps par le rectangle GB, en ſuppoſant le cercle au quarré du diametre, comme 11 à 14.

Si ce triangle mixtiligne étoit l'eſpace extérieur d'un ſegment parabolique tournant autour de la tangente au ſommet, le ſolide qu'il décriroit ſeroit au cylindre circonſcrit comme 7 à 15; & au contraire comme 1 à 6, s'il tournoit autour de la parallele à l'axe. Afin de ne pas fatiguer le Lecteur, nous nous bornons à remarquer encore que le ſegment hyperbolique intérieur, comme ABE, tournant autour de l'axe conjugué, forme un ſolide qui eſt les deux tiers du cylindre concave décrit en même temps par la révolution du rectangle AB. Toutes ces vérités ſont aujourd'hui faciles à démontrer, à l'aide des nouveaux calculs, & même par diverſes méthodes fort ſimples, & qui ſe préſentent facilement aux Géometres un peu intelligens.

Fig. 12.

Ces queſtions, & diverſes autres comparaiſons des mêmes ſolides, occupent *Cavalleri* juſqu'à la fin du cinquieme Livre. Nous trouvons dans le ſixieme, qui traite de la ſpirale, une belle remarque, ſçavoir, celle de la ſymboliſation de la parabole avec cette courbe. Nous allons nous expliquer; qu'on imagine un cercle au dedans duquel eſt décrite une ſpirale, & qu'on développe ce cercle dans le triangle CA*a*, dont la baſe eſt la circonférence, & dont la hauteur eſt le rayon qui

Fig. 13.

touche la ſpirale au centre Si toutes les circonférences moyennes ſont ſemblablement développées en lignes droites paralleles à la baſe A *a*, la courbe ſpirale ſe trouvera transformée en un arc parabolique dont le ſommet ſera en C. L'une & l'autre ſont de la même longueur, & l'aire renfermée entre la ſpirale & la circonférence du cercle, eſt égale à celle que comprend la parabole avec les lignes C A & A *a*. On voit par-là que cette propriété facilite beaucoup la détermination des aires ſpirales. Auſſi *Cavalleri* s'en aide-t'il heureuſement pour cet effet. Un Ecrivain moderne a fait honneur de cette découverte à *Grégoire de S. Vincent*, mais il ignoroit ſans doute le droit que *Cavalleri* a ſur elle. D'ailleurs quelqu'ingénieuſe qu'elle ſoit, elle ne méritoit pas d'être autant exaltée; car *Archimede* en avoit fait tous les frais dans ſa quadrature de la parabole, en y démontrant la propriété qui lui ſert de fondement.

Cavalleri s'éleva bientôt à des conſidérations plus ſublimes & plus difficiles. Ce fut encore à l'occaſion d'un des problêmes de *Kepler:* ce Mathématicien avoit propoſé de trouver la grandeur du ſolide décrit par la parabole tournant autour de ſon ordonnée, ou de la tangente au ſommet. *Cavalleri* la rechercha, & vit bientôt que le problême ſe réduiſoit à déterminer le rapport de la ſomme des quarrés quarrés des lignes qui rempliſſent le triangle, à la ſomme des ſemblables puiſſances des lignes qui rempliſſent le parallélogramme. Il trouva que ce rapport étoit celui de 1 à 5. Il découvrit de même que s'il s'agiſſoit des cubes de ces lignes, ce rapport ſeroit celui de 1 à 4. L'analogie le conduiſit dans le reſte, & il conclut que l'expoſant d'une puiſſance quelconque étant n, le rapport de ces ſommes eſt celui de 1 à $n+1$. Cette découverte le mit en poſſeſſion de la meſure de toutes les paraboles des ordres ſupérieurs, de celles des conoïdes, de leurs centres de gravité, &c. Il publia ces choſes en 1647, dans ſes *Exercitationes Mathematicæ*. Cet ouvrage nous offre encore quelques objets intéreſſans & nouveaux. C'eſt-là que *Cavalleri* établit ſa méthode ſur de ſolides fondemens, & qu'il la défend contre les imputations de quelques adverſaires, entr'autres du P. *Guldin:* il y réſoud divers problêmes ſur les ſections coniques: il y détermine enfin les foyers des verres de ſphéricité

inégale, problême que *Kepler* n'avoit point réſolu, & qui avoit, ce ſemble, reſté juſques-là ſans ſolution.

VII.

Travaux des Géometres François.

Nous ne nous ſommes juſqu'ici preſque occupés que des découvertes & des travaux des Etrangers : il eſt temps que nous paſſions en France, où fleuriſſoient déja divers Géometres, qui ne le cédoient point à ceux dont nous venons de parler, nous oſerons même dire, qui les laiſſoient en arriere par la difficulté de leurs recherches. Nous n'irons point encore en chercher les preuves dans la nouvelle Géométrie dont l'invention eſt dûe à *Deſcartes*. Sans ſortir du genre qui doit nous occuper dans ce Livre, nous trouverons en France des découvertes à oppoſer aux plus belles de celles que l'on vient d'expoſer.

En effet pendant que *Cavalleri* appliquoit ſa Géométrie à la recherche des ſolides formés par les ſections coniques, les Géometres François s'élevoient déja à la conſidération d'une foule d'autres courbes d'un genre ſupérieur, à la détermination de leurs tangentes, de leurs centres de gravité, des ſolides formés par leur circonvolution, &c. Peu contens des ſolutions particulieres, ils en cherchoient de générales, & dédaignant en quelque ſorte les rameaux, ils faiſoient des efforts pour remonter au tronc dont ils dépendoient.

Le commerce épiſtolaire entre M. de *Fermat* (*a*) & divers autres ſçavans Géometres, nous fournit les preuves de toutes ces choſes. On y voit que dès l'an 1636, il étoit queſtion en France des ſpirales & des paraboles des degrés ſupéricurs. M. *de Fermat* dans ſa premiere Lettre au P. *Merſenne*, qui eſt du milieu de l'année 1636 (*b*), lui annonce qu'il a conſidéré une ſpirale différente de celle d'*Archimede*. Dans cette nouvelle courbe les arcs de cercle parcourus depuis le commencement de la révolution par l'extrêmité du rayon, ne ſont point, comme dans celle du Géometre ancien, en même raiſon que les eſpaces parcourus par le point décrivant en s'éloignant du centre, mais en raiſon des quarrés de ces eſ-

(*a*) On dira dans le Livre ſuivant quelque choſe de plus ſur la perſonne & les écrits de ce ſçavant Géometre.

(*b*) Fermat. op. p. 121.

paces,

paces, de ſorte que les arcs de cercle qui meſurent la révolution, croiſſant uniformément, ce ſont les quarrés des rayons, & non les rayons, qui croiſſent auſſi uniformément. *Fermat* annonce à *Merſenne* que l'eſpace renfermé par la premiere révolution eſt la moitié du cercle qui la comprend ; que le ſecond eſpace entre la premiere & la ſeconde révolution eſt le double du premier, & qu'enſuite entre la ſeconde & la troiſieme, la troiſieme & la quatrieme, & ainſi à l'infini tous ces eſpaces ſont égaux au ſecond : ce qui eſt une propriété fort remarquable. Bientôt après ayant lié un commerce de Lettres avec *Roberval*, il lui propoſa le problême de déterminer les aires des paraboles, où les abſciſſes ne ſont plus comme les quarrés des ordonnées, (ce qui eſt la propriété de la parabole ancienne,) mais comme leurs cubes, leurs quatriemes, leurs cinquiemes puiſſances, &c : il lui fait auſſi part de la meſure du conoïde formé par la parabole tournant autour de ſon ordonnée, & des ſegmens retranchés par des plans perpendiculaires à l'axe de la rotation.

Roberval ne tarda pas à ſe mettre en cela au niveau de M. *de Fermat*. Il lui renvoya dans ſa réponſe la ſolution du problême qui lui étoit propoſé. Les paraboles, dit-il, où les abſciſſes ſont comme les cubes, les troiſiemes, les quatriemes puiſſances de l'ordonnée ſont les $\frac{3}{4}$, les $\frac{4}{5}$, les $\frac{5}{6}$ du parallélogramme de même baſe & même hauteur, & ainſi de ſuite. La loi de la progreſſion ſe manifeſte facilement. Il reſtoit le cas où une puiſſance quelconque de l'abſciſſe comme le quarré, auroit été comme une autre puiſſance quelconque, par exemple la troiſieme de l'ordonnée : on en trouve la ſolution dans un écrit poſtérieur de *Roberval* (*a*) : il y remarque que, dans le cas ci-deſſus, par exemple, la parabole eſt au rectangle circonſcrit comme 3 à 5 ; & qu'en général ſi n exprime la puiſſance de l'abſciſſe, & m celle de l'ordonnée, $\frac{m}{n+m}$ déſigne le rapport de la parabole au parallélogramme circonſcrit. *Roberval* envoya à *Fermat* (*b*) la détermination des tangentes de ces ſortes de paraboles, & celui-ci lui répondit en lui envoyant leur centre de gravité (*c*). La remarque de *Fer-*

(*a*) Lettre de Roberval à Torricelli en 1644. *Mem. de l'Acad. avant le renouvell.* T. VI.
(*b*) Lettres de Fermat, p. 140.
(*c*) Ibid. p. 147.

mat eſt d'une élégance propre à lui mériter place ici. Dans toutes les paraboles ou leurs conoïdes, dit-il, le centre de gravité diviſe l'axe en deux ſegmens tels que le plus voiſin de la baſe eſt à l'autre, comme la figure elle-même au parallélogramme ou au cylindre de même baſe & même hauteur : il eſt facile de le vérifier dans la parabole ordinaire, ſon conoïde, & le triangle qui eſt une ſorte de parabole où les ordonnées ſont comme les abſciſſes.

A la vue de ces ſolutions on ne peut douter de ce que *Roberval* écrivoit en 1644 à *Torricelli*, (*a*) ſçavoir que dans le temps ou environ, que *Cavalleri* publioit en Italie ſes indiviſibles, les Géometres François étoient en poſſeſſion d'une méthode ſemblable. *Roberval* dans la lettre dont nous parlons, aſſure que long-temps avant que le Géometre Italien mît au jour ſa méthode, il en avoit une fort analogue qu'il s'étoit formée d'après une lecture ſérieuſe des Livres d'*Archimede*; mais plus attentif que *Cavalleri* à ménager les oreilles des Géometres, il l'avoit dépouillée de ce que celle de *Cavalleri* avoit de dur & de choquant dans les termes, & même dans les idées à moins qu'elles ne ſoient expliquées. Il ſe contentoit, dit-il, de conſidérer les ſurfaces & les ſolides, comme compoſés d'une multitude indéfinie de petits rectangles ou de petits priſmes décroiſſans ſuivant une certaine loi : c'eſt par ce moyen & par celui d'une certaine analogie aſſez ſemblable à celle que *Wallis* étendit beaucoup plus dans la ſuite, qu'il parvint à la ſolution des problêmes de *Fermat*, & de divers autres, tels que ceux de l'aire de la cycloïde, & des ſolides qu'elle forme par ſa rotation autour de ſon axe & ſa baſe.

Roberval continue dans cette lettre, l'hiſtoire de ſes méditations & de la méthode qu'il s'étoit formée. Il la gardoit, dit-il, *in petto*, dans la vue de ſe procurer parmi les Géometres une ſupériorité flatteuſe par la difficulté des problêmes qu'elle le mettoit en état de réſoudre. Mais il éprouva ce qui arrive ſouvent à ceux qui cachent un ſecret que mille autres cherchent avec empreſſement. Pendant qu'il ſe réjouiſſoit *juveniliter*, c'eſt ſon expreſſion, *Cavalleri* publia ſes indiviſibles, & le fruſtra de l'honneur que lui auroit fait ſa méthode

(*a*) Anciens Mem. T. VI.

s'il l'eût publiée ; juſte punition de ceux qui par des motifs auſſi peu dignes d'un Philoſophe, font un myſtere de leurs inventions.

Nous devons aſſocier à toutes ces découvertes, l'illuſtre M. *Deſcartes.* Elles lui coûterent même peu, ſi nous en jugeons par une de ſes lettres. (*a*) Le P. *Merſenne* lui avoit envoyé un eſſai d'une méthode de M. *de Fermat*, pour l'invention des centres de gravité des conoïdes. *Deſcartes* dans ſa réponſe, lui renvoie auſſi-tôt non ſeulement les centres de gravité, mais la quadrature générale de toutes les paraboles, la détermination de leurs tangentes, & celle de la grandeur de leurs conoïdes.

La logarithmique ſpirale & la cycloïde, courbes que leurs propriétés ont depuis rendu célebres, prirent naiſſance dans ce temps entre les mains des Géometres François. Ceci confirme ce que nous avons dit plus haut ſur la nature des recherches auxquelles ils s'étoient déja élevés. Nous différons à parler de la cycloïde à laquelle nous deſtinons un article étendu. Nous ne toucherons ici que ce qui concerne la logarithmique.

C'eſt dans la Méchanique de *Deſcartes*, & dans une de ſes lettres, (*b*) que nous trouvons les premiers traits de cette courbe. En traitant des plans inclinés, ce Philoſophe obſerve, que dans la rigueur géométrique les directions des graves concourant toutes en un point, le plan incliné ne doit plus être un plan, afin qu'il faſſe toujours des angles égaux avec la direction des poids, & que la puiſſance ne ſoit pas plus chargée dans un endroit que dans un autre. Alors il faudroit, dit-il, au lieu d'un plan véritable, imaginer une portion de ſpirale autour du centre de la terre. Il eſt bien évident qu'il entendoit parler d'une ſpirale qui fît toujours, avec les lignes tirées à ſon centre, des angles égaux ; mais bien-tôt après il s'énonça plus clairement. Le P. *Merſenne* lui ayant demandé une explication plus claire de la nature de cette courbe, il répondit (*c*) que l'une de ſes propriétés étoit que les tangentes dans tous ſes points faiſoient des angles égaux avec les lignes tirées de ſon centre aux points de contact, comme les angles C A S :

(*a*) T. II, lett. 89.
(*b*) T. I, lettre 73, écrite en 1638.
(*c*) Ibid. lettre 74.

Fig. 14. CBT, &c. il ajoutoit que toute la courbe ABDC étoit au rayon CA, en même raiſon que le reſte BDC à CB.

Le P. *Merſenne* communiqua ſuivant ſa coutume, la lettre de *Deſcartes* à divers Géometres avec qui il étoit en liaiſon, & ceux-ci jugerent cette courbe plus digne d'être examinée avec ſoin. Ils y virent ce que *Deſcartes* avoit négligé de remarquer, & qu'il conteſta même d'abord par pure précipitation (*a*), ils virent, dis-je, que cette courbe faiſoit autour de ſon centre une infinité de révolutions avant que d'y arriver ; que les rayons CA croiſſoient ou décroiſſoient géométriquement, tandis que les angles de révolution croiſſoient en progreſſion arithmétique ou uniformément. Par exemple, ſi l'on tire trois rayons qui faſſent les angles DCB, BCA égaux, les rayons CD, CB, CA, au lieu d'être en progreſſion arithmétique, comme dans la ſpirale d'*Archimede*, ſont en progreſſion géométrique. On remarqua auſſi dès-lors cette propriété inſigne de la logarithmique ſpirale ; ſçavoir que malgré ce nombre infini de révolutions qu'elle fait autour de ſon centre, ſa longueur totale eſt finie, & qui plus eſt égale à une ligne droite qu'il eſt facile de déterminer. Il ſuffit en effet pour cela de tirer la tangente indéterminée AS, & d'élever au point C ſur le rayon CA, une perpendiculaire rencontrant cette tangente en S, la ligne AS ſera la longueur de toute la ſpirale compriſe, depuis le point A juſqu'au centre.

Les Lecteurs peu Géometres ſeront ſans doute d'abord tentés de ſe révolter contre la Géométrie, & de regarder cette vérité comme un paradoxe des plus incroyables. Comment, diront-ils, ſe peut-il faire qu'une ligne qui n'a point de bornes, ſoit d'une longueur finie ? Mais nous allons diſſiper cette difficulté par une obſervation fort ſimple. Si l'on tire un rayon CA, il coupera la courbe dans une infinité de points, comme A, *a*, *α*, & les lignes CA, C*a*, C*α*, &c, à l'infini, ſeront en progreſſion continue : les circonférences des cercles décrits de ces rayons ſeront donc auſſi en progreſſion géométrique, d'où il ſuit que, quoique leur nombre ſoit infini, leur ſomme ſera encore finie. Mais il eſt facile d'appercevoir que chaque portion de ſpirale compriſe entre

(*a*) Lettr. T. II.

deux de ces cercles concentriques, eſt ſemblable, & par conſéquent qu'elle a un certain rapport déterminé avec la circonférence du cercle qui la renferme. Toutes ces portions de ſpirale formeront donc elles-mêmes une progreſſion géométrique décroiſſante. Après cette remarque tout le merveilleux de la propriété dont on parle, s'évanouit. Il y a long-temps qu'on ne s'étonne plus de ce qu'un nombre infini de termes continuement proportionnels & décroiſſans, ne forment qu'une ſomme finie.

VIII.

Méthode des tangentes de Roberval.

Nous différons encore à parler de la cycloïde, juſqu'à ce que nous ayons rendu compte d'une méthode ingénieuſe que M. de *Roberval* imagina vers le même temps. Elle concerne les tangentes des courbes, & elle eſt remarquable en ce que le Géometre François paroît avoir eu le premier l'idée d'appliquer le mouvement à la réſolution de cet important problême. Il dit (*a*) avoir été en poſſeſſion de cette méthode dès l'année 1636, qu'un de ſes diſciples compila ſes inſtructions verbales, & en fit un petit Traité intitulé *des mouvemens compoſés* Il en entretenoit M. *de Fermat* dans une de ſes Lettres, écrite en 1640 (*b*), de ſorte que, quoique *Torricelli* ait publié quelque choſe de ſemblable en 1644 (*c*), on ne peut conteſter à *Roberval* la priorité de l'invention Cette méthode a beaucoup d'affinité avec celle des fluxions de l'illuſtre *Newton*. Ceux qui s'intéreſſent à la gloire de ce grand homme, ne doivent pas cependant s'allarmer de ma remarque; j'aurai ſoin d'apprécier au juſte la part que *Roberval* peut prétendre à cette brillante découverte.

La doctrine des mouvemens compoſés eſt le fondement de la méthode de M. de *Roberval*. C'eſt un principe connu de tous les Méchaniciens, que quand un corps eſt preſſé ou pouſſé par deux forces qui agiſſent ſuivant les côtés d'un angle, ſi l'on prend ſur ces côtés des lignes qui ſoient comme ces forces ou comme les vîteſſes qu'elles imprimeroient ſéparément au corps, ſa direction compoſée ſera la diagonale du

(*a*) *Epiſt. ad Torr.* anciens Mem. de l'Acad. T. VI.
(*b*) *Ferm. oper.* lettr. p. 165.
(*c*) *Torricellii op.*

parallélogramme conſtruit ſur ces côtés. Mais on peut concevoir toutes les courbes comme décrites par un mouvement compoſé à l'imitation de la ſpirale d'*Archimede*, de la quadratrice, &c. il n'y a qu'à imaginer un point ſe mouvoir ſur l'ordonnée ſuivant une certaine loi, pendant que cette ordonnée ſe mouvra parallélement à elle-même, ou d'un mouvement circulaire : ce point décrira une courbe dont la nature dépendra du rapport de ces mouvemens. Si, par exemple, tandis que l'ordonnée eſt portée parallélement à elle-même d'un mouvement uniforme, le point décrivant s'éloigne de l'axe, de maniere que les quarrés de ſa diſtance croiſſent également en temps égaux, la courbe qui en naîtra ſera la parabole ordinaire. On peut auſſi concevoir le point décrivant s'éloigner ſuivant une certaine loi, de deux ou de pluſieurs points à la fois, ou d'un point & d'une ligne droite. C'eſt ainſi que l'ellipſe, l'hyperbole & la parabole ſont décrites à l'égard de leurs foyers : car dans l'ellipſe le point décrivant s'éloigne d'un des foyers, autant qu'il s'approche de l'autre, & dans l'hyperbole il s'approche ou s'éloigne de l'un & de l'autre également dans le même temps : dans la parabole enfin, il s'éloigne à la fois de ſon foyer unique, & d'une certaine ligne droite qu'on nomme la directrice, d'une égale quantité.

La tangente à une courbe, continue *Roberval*, n'eſt autre choſe que la direction du mobile qui la décrit, à chacun de ſes points. Ce principe eſt preſqu'évident, & c'eſt une ſuite de cette vérité ſi connue dans la Méchanique, qu'un corps qui a un mouvement curviligne, s'il étoit livré à l'impreſſion qu'il a dans un point quelconque, s'échapperoit par la tangente à ce point. Au reſte *Roberval* ſentit plutôt qu'il ne démontra ce principe important de ſa méthode ; car on n'en trouve que des raiſons fort vagues & embrouillées dans l'écrit où il l'explique (*a*). Comme il dépend d'une théorie aſſez fine des mouvemens accélérés & retardés, nous ſommes obligés d'en ſuſpendre la démonſtration que nous donnerons en parlant de la célebre méthode des fluxions. A l'imitation de *Roberval*, nous nous bornerons ici à le ſuppoſer.

L'application de ce principe à la maniere de tirer des tan-

(*a*) Anciens Mem. de l'Acad. T. VI.

gentes des courbes eſt facile : puiſque le mobile qui décrit une courbe, eſt porté à chacun de ſes points dans une direction qui ſeroit la tangente, il s'agit de déterminer cette direction. Mais elle eſt toujours le réſultat de deux mouvemens : tout ſe réduit donc à démêler à chaque point de la courbe le rapport & la direction de ces deux mouvemens par le moyen de quelqu'une de ſes propriétés. Nous choiſirons, pour le faire ſentir, un des exemples les plus ſimples ; c'eſt celui de l'ellipſe décrite autour de ſes foyers. Une des propriétés de cette courbe étant que la ſomme de deux lignes tirées d'un point quelconque aux deux foyers, eſt la même, il eſt néceſſaire que l'une croiſſe autant que l'autre décroît. Ainſi l'on doit concevoir le point décrivant A, tandis que fA croît & que FA décroît, *Fig.* 15. on doit, dis-je, concevoir le point décrivant comme porté de deux mouvemens égaux, l'un par lequel il s'éloigne du point f le long de fA, & l'autre par lequel il s'approche de F, dans la direction AF. Si donc on décrit dans l'angle FAφ, un parallélogramme dont les côtés ſoient égaux, ſa diagonale ſera tangente à l'ellipſe ; & comme dans ce cas la diagonale partage en deux également l'angle formé par les côtés, il ſuit que la tangente à l'ellipſe partage en deux également l'angle formé par l'une des lignes tirées aux foyers, & par l'autre prolongée.

Si l'on eût propoſé une courbe dans laquelle la ligne fA fût toujours double de FA, on auroit vu que la vîteſſe du point décrivant dans la premiere de ces directions, auroit toujours été double de l'autre. Alors il auroit fallu faire le côté du parallélogramme dans cette direction double de l'autre, & ſa diagonale auroit été la tangente (*a*).

(*a*) Nous croyons devoir donner quelques exemples de cette méthode. Nous commencerons par la conchoïde dont la génération eſt connue ; que B* ſoit le point auquel il faut tirer une tangente. Si l'on ſuppoſe PB, Pb, deux lignes infiniment proches, & que du centre P on décrive les petits arcs Ad, Bc, il eſt évident que le mouvement du point décrivant ſur PB, ſera exprimé par cb, & Bc exprimera celui de rotation, qui naît du mouvement circulaire du rayon PB : enfin la direction compoſée de ces deux, ſera déſignée par Bb ; il faut donc trouver le rapport des deux vîteſſes compoſantes Bc, cb. Pour cela nous remarquerons d'abord que BA étant égale à ba, on a $bc = ad$. Maintenant bc eſt à Bc, en raiſon compoſée de bc ou da à Ad, & de Ad à Bc. Mais $ad : dA :: AE : PE$, & Ad : Bc :: PA : PB, ou PE : PG ; c'eſt pourquoi bc : Bc :: AE × PE : PE × PG, ou AE : PG. Si donc on éleve au point P une perpendiculaire PF, qui ſoit quatrieme proportionnelle à AE, * *Fig.* 16.

Ce qu'on vient de dire montre ſuffiſamment l'analogie de cette méthode avec celle des fluxions : *Roberval* la conçut même, & l'appliqua aux courbes d'une maniere très-géométrique, & où il n'entroit aucune ſuppoſition d'infiniment petits. On peut s'en aſſurer par l'inſpection des divers exemples de ſon Traité. Mais nous ne croyons pas que cela doive porter la moindre atteinte à la gloire de *Newton*. En effet il s'en faut bien que *Roberval* ait ſçu donner à ſa méthode l'étendue dont

P G, & P B; que du point F on tire la ligne F B, elle ſera tangente à la conchoïde.

Nous enviſagerons maintenant la conchoïde plus généralement, & nous imaginerons qu'elle ſoit décrite de telle maniere que ſon ordonnée inclinée A B, ſoit toujours égale au ſegment P E, intercepté entre le pole P & la courbe L E M, dont on ſçait tirer la tangente. Il eſt viſible que ſi P *b* eſt infiniment voiſine de P B, & qu'on conçoive les petits arcs E *f*, A *d*, B *c*, décrits du centre P, l'accroiſſement *c b* ſera égal à *d a* & *f e*, pris enſemble. Que *c o* ſoit égal à *d a*, la ligne B *o* ſera un arc de conchoïde ordinaire décrite du pole P avec ſes ordonnées inclinées, conſtamment égales à B A. On en aura donc la tangente, parce qu'on vient de dire dans l'exemple précédent ; que cette tangente ſoit B N, qui rencontre la perpendiculaire P K à P B, en N ; il reſte donc à trouver le rapport de *b o*, ou *f e* à B *o*. Or ce rapport eſt compoſé de ceux de *f e* à *f* E, de *f* E à B *c*, & de B *c* à B *o*. Le premier eſt le même que celui de P Q à P N, en tirant par le point N la parallele N Q à la tangente K E ; le ſecond eſt celui de P E à P B, & le troiſieme celui de P N à N B. C'eſt pourquoi, en compoſant ces raiſons, *o b* : *o* B : : P Q × P E : P B × B N, ou *o* B : *o b* : : P B × B N : P Q × P E. Si donc dans l'angle O B N, on décrit un parallélogramme dont les côtés ayent ce rapport, ſa diagonale ſera parallele à la tangente au point B. Mais en prenant B N pour un de ces côtés, l'autre dans la direction B O, ſe trouve égal à $\frac{PQ \times PE}{PB}$, ce qui ſuggere cette conſtruction aſſez élégante : prenez B O, quatrieme proportionnelle à P B, P Q & P E, tirez O N, & par le point B une parallele à N O, ce ſera la tangente cherchée.

Fig. 17.

On trouvera auſſi facilement par cette méthode la tangente de la quadratrice. Car ſoit A B E (*figure* 18.) une quadratrice décrite, par l'interſection continuelle d'une ligne portée d'un mouvement uniforme & parallélement à elle-même le long de C L égale à un diametre, avec le rayon C B qui ſe meut d'un mouvement circulaire & uniforme, & qui parcourt dans le même temps la demi-circonférence. On voit par cette génération que le point décrivant E, eſt continuellement porté de deux mouvemens, l'un qui eſt comme E *i*, & l'autre comme *h* E. Mais E *i* eſt à *h* E, en raiſon compoſée de E *i*, ou F *f* à G *g*, & de *g* G à *h* E. Or ces deux raiſons ſont données, car par la génération de la courbe, F *f* eſt à G *g*, comme le diametre à la demi-circonférence, ou le rayon au quart de cercle ; & G *g* eſt à *h* E, comme le rayon à E C. Ainſi E *i* eſt à *h* E en raiſon compoſée de celle du rayon C D au quart de cercle D B, ou de C E au quart de cercle décrit du rayon C E, & de celle de C G à C E. Or en compoſant ces deux raiſons, elles ſe réduiſent à celle de C D au quart de cercle décrit du rayon C E. La conſtruction eſt maintenant facile : il n'y a qu'à élever ſur le rayon C E une perpendiculaire C V, égale au quart de cercle décrit du rayon C E, & prendre F K égale au rayon C D, les deux lignes K T : V T, reſpectivement paralleles à E F, C E, ſe rencontreront dans un point T par où paſſera la tangente. On peut conclure delà que la tangente au point D de la quadratrice, rencontre ſon axe à une diſtance du centre qui eſt égale au quart de cercle D B. Car alors C V eſt égal à ce quart de cercle, & les points T & V ſe confondent ſur l'axe.

elle

elle étoit ſuſceptible. C'étoit en quelque ſorte avoir peu fait, que d'avoir démêlé ce principe : il falloit trouver un moyen commode de déterminer à chaque point d'une courbe le rapport des vîteſſes dont eſt compoſée la direction moyenne du mobile qui la décrit. Auſſi *Roberval* ne déterminoit-il les tangentes, que dans certains cas particuliers où ce rapport eſt facile à démêler. Il lui falloit même choiſir dans les courbes les plus connues celles de leurs propriétés qui le laiſſent appercevoir le plus facilement : dans les ſections coniques, par exemple, ce n'étoit pas par la relation de l'ordonnée à l'abſciſſe qu'il déterminoit la tangente ; il ſe ſervoit pour cela de celle des lignes tirées des foyers à la courbe, comme on l'a vu plus haut. Ainſi lorſqu'on ne connoiſſoit point dans une courbe de propriété qui donnât preſque immédiatement ce rapport, ſa regle ſe trouvoit en défaut entre ſes mains, & il ne pouvoit aſſigner la tangente.

Nous ſaiſirons cette occaſion de faire connoître un peu plus particuliérement la perſonne & les écrits de ce Géometre. M. de *Roberval*, dont le nom propre eſt *Perſonne*, naquit en 1602, à Roberval, village du Diocèſe de Beauvais, d'où lui eſt venu ſon nom. Il vint en 1627 à Paris, où il fit connoiſſance avec les Sçavans de cette ville, entr'autres avec le Pere *Merſenne*, & il commença bien-tôt après à tenir un rang parmi les Géometres, comme il paroît par les inventions qu'on vient de rapporter de lui. Il eut de vifs démêlés avec *Deſcartes*, contre lequel il ſe porta toujours pour ennemi ; & nous ne pouvons le diſſimuler, il montra dans la plûpart de ces démêlés beaucoup plus de paſſion, que de ſçavoir & d'amour pour la vérité.

On a de M. de *Roberval* pluſieurs écrits, mais aucun n'a ſubi l'impreſſion durant ſa vie. M. l'Abbé *Galois*, ſon ami, les a publiés en 1693, dans le Recueil de divers ouvrages de Mathématique & de Phyſique, par Meſſieurs de l'Académie Royale des Sciences, qu'il fit paroître cette année. On les a donnés de nouveau dans le ſixieme volume des *Mém. de l'Académie* avant le renouvellement. On y trouve d'abord ſon Traité *des Mouvemens compoſés*, dont on a déja vu le précis ; un autre intitulé, *De recognitione & conſtruct. æquationum*, ouvrage fait d'après les idées de *Deſcartes* & de *Fermat*, & qu'il

étoit fort inutile de mettre au jour ; celui *des Indiviſibles*, ou de cette méthode analogue à celle de *Cavalleri*, dont il étoit l'inventeur, & qu'il applique à diverſes queſtions choiſies ; enfin celui *de Trochoïde*, ou de la cycloïde, ſujet qui nous occupera dans peu. Nous remarquerons en paſſant que quoique habile Géometre, M. de *Roberval* n'eut rien moins que l'art d'expoſer ſes idées avec netteté & avec préciſion. Les écrits dont nous parlons en fourniſſent la preuve. Je défie les lecteurs les plus verſés dans la méthode ancienne de tenir contre quelques-unes de ſes démonſtrations, tant elles ſont prolixes & embarraſſées, juſques dans l'expoſition même.

M. de *Roberval* fut un des membres de l'Académie des Sciences lors de ſon établiſſement en 1665. Il poſſéda pendant environ quarante ans la Chaire du College Gervais, fondée par *Ramus*, & qui, ſuivant les ſtatuts de ſon inſtitution, devoit être remiſe au concours tous les trois ans. C'eſt par cette raiſon qu'il s'excuſe d'avoir tenu long-temps cachées quantité de belles choſes qu'il avoit découvertes, & qu'il réſervoit, dit-il, pour l'occaſion & pour ſe maintenir dans ſa place. Mais je crois plutôt que cela vient de ſon caractere qui étoit myſtérieux, &, ſi je l'oſe dire, un peu pédanteſque. Il mourut au mois de Novembre de l'année 1675.

IX.

Hiſtoire de la cycloïde.

Parmi les objets particuliers de recherche qui ont exercé les Géometres dans les divers temps, il en eſt peu qui ait eu plus de célébrité que la cycloïde : ſes propriétés nombreuſes & tout-à-fait remarquables, la lui mériteroient déja, mais elle la tient encore d'autres cauſes. Semblable à la pomme de diſcorde, cette courbe ne fut pas plutôt connue des Géometres, qu'elle excita des débats ; & par une ſorte de fatalité, preſque toutes les découvertes faites ſur ſon ſujet ont été l'occaſion de quelque conteſtation. Nous croyons par ces raiſons que nos lecteurs nous ſçaurons gré, ſi nous donnons quelque étendue à ce morceau de notre hiſtoire (*a*).

(*a*) L'hiſtoire de la cycloïde a été faite par deux Ecrivains, dont le premier eſt M. Paſcal. Son ouvrage, qui eſt d'une rareté extrême, n'y en ayant eu que ſoixante exemplaires tirés, n'eſt rien moins qu'une hiſtoire, mais plutôt un libelle fait au gré

La cycloïde eſt une courbe dont la génération eſt facile à concevoir. Qu'on imagine un cercle qui roule ſur une ligne droite & dans un même plan, tandis qu'un point de ſa circonférence, ou plus généralement pris au dedans ou au dehors, laiſſe une trace ſur ce plan; cette trace ſera la cycloïde. Nous avons tous les jours ſous les yeux des exemples de cette génération. Le clou d'une roue qui roule, décrit une courbe qui ſeroit une cycloïde parfaite, ſi cette roue & la ligne à laquelle elle s'applique étoient un cercle & une ligne Mathématiques. On la nomma d'abord *trochoïde*, nom que quelques Géometres changerent en celui de *roulette*; on lui a enſuite donné celui de *cycloïde*, ſous lequel elle eſt connue de nos jours. Il eſt à propos de remarquer dès à préſent que le cercle générateur peut parcourir d'un mouvement uniforme ſur ſa baſe droite, une ligne plus ou moins grande que ſa circonférence: cela donne lieu à la diviſion des cycloïdes en alongées & raccourcies. Ce ſont les mêmes courbes que celles que décrit un point pris au dedans ou au dehors de la circonférence, tandis que le cercle générateur parcourt une ligne qui lui eſt égale.

Quelques perſonnes ont cru voir les premieres traces de la cycloïde chez le Cardinal de *Cuſa*. Ce Prélat Géometre, qui prétendit avoir trouvé la quadrature du cercle, faiſoit en effet rouler un cercle ſur une ligne droite, juſqu'à ce que le point qui l'avoit d'abord touchée s'y appliquât de nouveau; ce fut auſſi le procédé d'un certain *Bovillus* de Vermandois, mince Géometre du commencement du ſeizieme ſiecle, & diffamé par une prétendue quadrature du cercle. Mais on n'apperçoit, ni chez l'un, ni chez l'autre, aucune conſidération de la courbe, qui eſt la trace du mouvement de ce point. C'eſt *Galilée* qui a eu la premiere idée de la cycloïde; car il dit lui même dans une lettre écrite à *Torricelli* en 1639, qu'il l'avoit conſidérée depuis quarante ans, & qu'il l'avoit jugé propre par ſa forme gracieuſe, à ſervir aux arches d'un pont. Il ajoute qu'il fit quelques tentatives pour déterminer ſon aire, mais qu'il

de la paſſion de Roberval, avec qui il étoit fort lié, & dont il tenoit apparemment tout ce qu'il y raconte: l'autre hiſtoire, qui eſt Latine, a été donnée en 1701, par *Groningius;* celui-ci tombe dans l'extrêmité contraire; il ſemble n'avoir conſulté que les Mémoires fournis par les Italiens. Nous avons eu égard aux pieces des deux partis dans les différentes querelles ſurvenues à cette occaſion, & nous croyons avoir rendu juſtice a chacun.

ne put y réuſſir. Le trait ſuivant ne paroît pas fort honorable pour ce grand homme : ſi nous en croyons *Torricelli*, *Galilée* s'aviſa de peſer une cycloïde décrite ſur quelque matiere mince & également épaiſſe pour la comparer avec le cercle, & la trouvant conſtamment moindre que le triple de ce cercle, il ſoupçonna dans leur rapport quelque incommenſurabilité qui le fit déſiſter de s'y appliquer davantage. En vain quelques perſonnes qui n'étoient point Géometres, (*a*) ont voulu le juſtifier par l'exemple d'*Archimede*, qui trouva, diſent-elles, d'abord la quadrature de la parabole par une voie méchanique avant que de la trouver par un procédé purement géométrique. Cette juſtification eſt tout-à-fait ridicule ; le premier procédé d'*Archimede* n'eſt appellé méchanique, que parce qu'il eſt fondé ſur les principes abſtraits de l'équilibre, qui appartiennent à la ſcience de ce nom, & il n'a d'ailleurs aucune reſſemblance avec celui de *Galilée*. Mais c'en eſt aſſez ſur ce point de l'hiſtoire de la cycloïde ; eût-elle été connue au Cardinal de *Cuſa*, comme *Wallis* s'efforce de le prouver, c'eſt ce qui importe peu. Il n'y a pas grand mérite à l'avoir remarquée, il ne commence à y en avoir que dans la ſolution des problêmes qu'elle préſente.

C'eſt entre les années 1630 & 1640, qu'on commença à conſidérer avec ſuccès la cycloïde, & c'eſt en France que furent réſolus pour la premiere fois les problêmes de ſon aire & de ſes tangentes. Nous en fournirons les preuves après avoir raconté de quelle maniere elle devint l'objet des recherches des Géometres François. Le P. *Merſenne* l'avoit, dit-on, remarquée dès l'année 1615, en contemplant le mouvement d'une roue, & il avoit tâché, mais ſans ſuccès, de la quarrer. Pluſieurs années s'écoulerent avant qu'il eût la ſatisfaction de voir ſon problême réſolu. En 1628 il fit connoiſſance avec *Roberval*, & il le lui propoſa ; mais celui-ci étoit encore inférieur au problême ; il le ſentit même, à ce qu'il dit, & ſans s'y amuſer infructueuſement, il ſe livra à une étude approfondie des anciens Géometres, & en particulier d'*Archimede*. Six ans s'écoulerent dans ce travail ou d'autres occupations, & le problême de la cycloïde étoit effacé de ſon

(*a*) Groningius. M. Carlo dati, *lettera a' Philalethi*, &c.

ſouvenir, lorſque *Merſenne* le lui rappella. Il l'attaqua alors avec les nouvelles forces qu'il avoit acquiſes dans ſes études, & il le ſurmonta. Il démontra que l'aire de la cycloïde ordinaire, c'eſt-à-dire dont la baſe eſt égale à la circonférence du cercle générateur, eſt le triple du cercle. Il trouva auſſi la meſure des autres cycloïdes alongées ou raccourcies. Comme il s'étoit écoulé ſix ans entre la premiere propoſition de ce problême & ſa ſolution, les ennemis de *Roberval* dirent qu'il avoit demeuré tout ce temps dans le pénible travail d'enfanter ſa découverte.

Le P. *Merſenne* écrivant en 1647, donne à la ſolution du problême de l'aire de la cycloïde, la date de l'année 1634. On ne ſçauroit douter de la candeur de ce Pere ; mais comme on pourroit ſuſpecter ſa mémoire, ou ſa facilité extrême à ſe prêter aux impreſſions de ſes amis, nous recourrons à une autre preuve qui n'eſt point ſujette à cette exception. Le P. *Merſenne* a publié dans ſon *Harmonie univerſelle*, ouvrage qui parut en 1637 (*a*), la découverte de *Roberval* ſur les cycloïdes de toute eſpece. Si *Wallis* & le ſecond Hiſtorien de la cycloïde euſſent connu ces preuves, ils n'auroient pas adjugé à l'Italie l'honneur d'avoir été la premiere à trouver l'aire de cette courbe. Car on voit par une Lettre de *Galilée* écrite à *Cavalleri* en 1640, que l'aire de la cycloïde étoit encore un myſtere pour les Géometres Italiens (*b*), & même qu'il déſeſpéroit qu'il fût poſſible de la trouver. C'eſt un fait dont *Torricelli* eſt auſſi convenu dans une Lettre écrite en 1646 (*c*).

Le P. *Merſenne* apprit à *Deſcartes*, vers le commencement de 1638, la découverte de *Roberval* (*d*); mais elle n'eut pas à ſes yeux le même mérite qu'à ceux de ſon Correſpondant, & c'eſt ici le commencement des querelles nombreuſes que la cycloïde excita à diverſes repriſes parmi les Géometres. *Deſcartes* répondit qu'à la vérité la remarque en étoit aſſez belle, & qu'il n'y avoit jamais ſongé ; mais qu'il ne falloit pas faire tant de bruit à ce ſujet, & qu'il n'étoit perſonne médiocrement verſé dans la Géométrie qui ne fût en état de trouver ce dont *Roberval* ſe faiſoit tant d'honneur. Il lui envoyoit dans la même Lettre écrite à la hâte un précis de dé-

(*a*) T. II, nouv. obſ. Phyſ. ob. XI.
(*b*) Gron. *hiſt. cycloid.* p, 13.
(*c*) Ibid. p. 35.
(*d*) Lett. *de Deſcartes.* T. III, lett. 66.

monſtration du rapport de la cycloïde à ſon cercle générateur, qu'il développa davantage dans la Lettre ſuivante. Il vouloit montrer par cet exemple que le problême étoit fort au deſſous de lui. Telle étoit en effet ſa ſupériorité ſur tous les Géometres de ſon temps, que les queſtions qui les occupoient le plus, ne lui coûtoient pour la plûpart qu'une médiocre attention. Il eſt facile de s'en convaincre par la lecture de ſes Lettres.

Roberval mortifié par ce jugement de *Deſcartes*, ne manqua pas de dire qu'il avoit été aidé dans ſa ſolution du problême par la connoiſſance du réſultat qu'il devoit rencontrer, & que s'il l'eût ignoré, il auroit pu y échouer, ou en être davantage embarraſſé. *Deſcartes* l'apprenant, afin d'établir ſa ſupériorité ſur lui par un nouveau trait, chercha les tangentes de la cycloïde, problême dont *Roberval* s'occupoit depuis long-temps, ſans pouvoir y réuſſir. Il en envoya la ſolution au P. *Merſenne*, avec un défi pour *Roberval* de les trouver. Il paroît que M. de *Fermat* avec qui il avoit pour lors un démêlé aſſez vif, fut auſſi compris dans le cartel: celui-ci à qui l'on ne peut refuſer un génie preſqu'égal à celui de *Deſcartes*, réſolut le problême fort généralement: mais *Roberval* y échoua, ou ne s'en tira qu'avec beaucoup de peine, ſi nous en jugeons par les Lettres de *Deſcartes*.

M. *Paſcal* qui étoit ami de *Roberval*, & qui ne tenoit probablement que de lui ſes inſtructions ſur l'hiſtoire de la cycloïde, dit que ce fut l'opiniâtreté ſeule de *Deſcartes* qui l'empêcha de donner les mains à la ſolution de ſon adverſaire; mais qu'on liſe diverſes lettres de ce Philoſophe, comme la quatre-vingt-onzieme & la quatre-vingt-douzieme du ſecond volume, & les ſoixante-quatrieme, ſoixante-cinquieme & quatre-vingt-quatrieme du troiſieme, l'on ne pourra guere douter du fait que nous avançons. Ces Lettres prouvent clairement que *Roberval* fit de vains efforts pour réſoudre le problême; qu'il en envoya cinq à ſix ſolutions différentes qu'il changea à diverſes repriſes, comme un homme qui erre à l'aventure; qu'enfin *Fermat* ayant envoyé la ſienne, qui tranſpira ſelon les apparences entre les mains du P. *Merſenne*, ce que croiront facilement ceux qui connoiſſent le caractere de ce Pere d'après ſes Lettres & ſes écrits, *Roberval* arrangea

une ſolution dont *Deſcartes* le ſomma en vain de donner la démonſtration. Ce que M. l'Abbé *Galois* a écrit dans les Mémoires de l'Académie de 1692, ſçavoir que *Roberval* trouva le premier la tangente de la cycloïde, eſt entiérement détruit par les obſervations précédentes. M. *Galois* autrefois ami de *Roberval*, ne parloit ſans doute que d'après ce que celui-ci lui avoit raconté : or il eſt naturel de penſer qu'il étoit bien éloigné de convenir de ſa défaite, & même, à en juger par la paſſion qu'il mit toujours dans ſes démêlés avec *Deſcartes*, qu'il étoit homme à s'attribuer la victoire. Mais perſonne de ceux qui auront lu les pieces que nous avons citées plus haut, ne doutera que *Deſcartes* & *Fermat* n'ayent trouvé, du moins en même temps que lui, les tangentes de la cycloïde, & que le premier n'ait reſolu le problême avec une très-grande généralité.

En effet la méthode donnée par *Deſcartes* pour les tangentes de la cycloide s'étend généralement à toutes les courbes formées par la rotation d'une autre ſur une baſe quelconque, ſoit droite, ſoit curviligne, & quelque part que ſoit le point décrivant, au dedans, au dehors, ou ſur la circonférence de la courbe génératrice. Elle eſt auſſi très-remarquable par ſa ſimplicité. *Deſcartes* montre (*a*) que ſi l'on tire du point dont on cherche la tangente, une ligne à celui de la baſe que touche la génératrice, tandis qu'elle le décrit, cette ligne ſera perpendiculaire à la tangente. La raiſon qu'il en donne eſt ſenſible : ſi l'on faiſoit rouler un polygone, la courbe que décriroit un point quelconque du même plan, ſeroit compoſée d'autant de ſecteurs de cercle, qu'il auroit d'angles. Mais une courbe peut être conſidérée comme un polygone d'une infinité de côtés. Celle qu'elle décrira par un de ſes points en s'appliquant ſucceſſivement à une baſe quelconque, ſera donc une figure compoſée d'une infinité de ſecteurs dont chacun aura ſon centre au contact de la génératrice avec la baſe, & l'arc infiniment petit au point décrit en même temps : la tangente eſt donc perpendiculaire au rayon de ce ſecteur, & par conſéquent à la ligne tirée du point de contact au point décrit. Ceci ſuppoſe, comme l'on voit, que la

Fig. 19.

(*a*) Lettre 65, T. II.

courbe génératrice roule ſur une ligne qui lui eſt égale ; mais ſi l'on ſuppoſoit qu'elle gliſſât un peu dans ce mouvement ; il ſeroit facile d'y étendre la regle (*a*).

Dans le cas de la cycloïde ordinaire, on voit aiſément par la démonſtration de *Deſcartes*, que la tangente Q T eſt parallele à la corde A P, & que la tangente au cercle rencontre
Fig. 20. celle de la cycloïde, de telle maniere que P T eſt égale à P Q, où à l'arc A P. C'eſt ainſi que *Fermat* réſolvoit ce problême, & il ajoutoit que lorſque la cycloïde eſt alongée ou raccourcie, le ſegment P T eſt à l'arc A P ou l'ordonnée P Q, comme la circonférence du cercle générateur à la baſe. *Deſcartes* fit en même temps une remarque qu'il ne faut pas oublier : c'eſt que les cycloïdes raccourcies ſe replient en dedans, & que les alongées, de concaves qu'elles ſont d'abord vers leur axe aux environs du ſommet, deviennent convexes en s'approchant de la baſe. Il enſeigna auſſi le moyen de déterminer l'endroit où ſe fait ce changement de courbure ou de direction.

Tout ce que nous venons de raconter, ſe paſſa au plus tard vers le commencement de l'année 1639 : c'eſt ce que prouve ſans réplique la date d'une Lettre de *Deſcartes* (*b*). Ainſi la

(*a*) Voici la maniere dont on détermineroit la tangente dans le cas qu'on vient de propoſer. Suppoſons (*figure* 21.) que la courbe H D ſoit décrite par le point D, & que tandis que la courbe génératrice GAD s'applique ſur la ligne droite H S, elle gliſſe toujours également, de ſorte que chaque petit côté de cette courbe, comme A B, au lieu de s'appliquer ſur une portion égale de la baſe A *b*, gliſſe de la quantité *c b*, qui a le même rapport à la baſe A *b*, que la ligne H K égale à toute la courbe G A D, à K S qui eſt la quantité dont elle gliſſe dans ſon mouvement total. Pour trouver la tangente de la courbe H D au point D, je remarque que s'il n'y avoit point de gliſſement, le mouvement du point D ſe feroit dans l'arc D *f*, qui eſt la baſe du ſecteur infiniment petit D A F, dont l'angle eſt égal à l'angle B A *b*. Mais en même temps ce point a un mouvement horizontal D *e*, qui eſt égal à *c b*. Il faut donc trouver le rapport de ces deux mouvemens, ce qu'on fera ainſi. Le rapport de D *f* à D *e* ou *c b*, eſt compoſé de ces trois, ſçavoir celui de D *f* à B *b*, de B *b* à B A, & B A à *c b*. Mais le premier eſt le même que celui de D A à A B. Le ſecond eſt égal a celui de B A à A O. (A O eſt le rayon de courbure au point A, ce qui dépend d'une théorie qu'on verra dans la ſuite). Enfin B A eſt a *c b* en raiſon donnée, ſçavoir celle de H K à K S ; ainſi en compoſant ces raiſons, on trouvera que D *f* : D *e* : : D A × H K : A O × K S. La raiſon de D *f* à D *e* eſt donc donnée ; & ſi l'on décrit dans l'angle E D F un parallélogramme dont les côtés ſoient dans le rapport qu'on vient de trouver, ſa diagonale ſera la direction de la tangente.

On pourroit trouver cette tangente d'une autre maniere, ſçavoir en ſuppoſant que le petit côté D *i* de la courbe propoſée fît partie d'une cycloïde alongée ou raccourcie, dont le centre du cercle générateur ſeroit au point O ; mais nous nous contentons d'indiquer cet autre moyen qu'il ſeroit trop long de développer.

(*b*) *La 84e du tom. III.*

priorité

priorité des Géometres François en ce qui concerne la ſolution de ces problêmes, ne ſçauroit être révoquée en doute. Paſſons en Italie, où nous avons vu qu'on n'avoit encore en 1640 que la ſtérile connoiſſance de la génération de la cycloïde.

Merſenne qui étoit en correſpondance avec la plûpart des Mathématiciens de l'Europe, s'aviſa, à ce qu'il paroît, vers l'an 1639 d'écrire à *Galilée*, & de lui parler de la détermination de l'aire de la cycloïde comme d'un problême qui occupoit les Géometres François. On ſeroit mal fondé à tirer delà une preuve que ce problême n'avoit pas encore été réſolu en France, comme ont fait quelques gens précipités ou mal informés, puiſque nous avons cité un Livre imprimé en 1637, où l'on en trouve la ſolution. C'étoit ſeulement par égards que *Merſenne* écrivant à *Galilée*, parloit comme il faiſoit; la queſtion propoſée autrement eût eu l'air d'un défi, & c'eût été une vraie inſulte pour ce grand homme, vu les ſervices qu'il avoit rendus aux Mathématiques, & ſon âge extrêmement avancé. *Galilée* écrivit donc à *Cavalleri* vers le commencement de 1640. On a un fragment de ſa Lettre (*a*), il l'y invite de nouveau à la recherche de l'aire de la cycloïde; je dis de nouveau, car il l'avoit déja fait, ce ſemble, de ſon propre mouvement, par une Lettre écrite en 1639. Mais il n'eut pas la ſatisfaction de voir ce problême réſolu, ni même de ſçavoir s'il l'avoit été quelque part; ce qu'il demandoit inſtamment dans une de ſes Lettres. *Cavalleri*, quoique habile Géometre, y échoua, & *Galilée* mourut en 1642. Après ſa mort *Torricelli* & *Viviani*, ſes derniers diſciples & les compagnons de ſa vieilleſſe, informés des invitations qu'on lui avoit faites de travailler à ce problême, y eſſayerent leurs forces. *Torricelli* trouva l'aire, & *Viviani* les tangentes (*b*); le premier en reçut au commencement de 1643 les félicitations de *Cavalleri*, qui convenoit avoir fait de vains efforts pour ſurmonter la difficulté du problême (*c*). *Torricelli* faiſoit alors imprimer ſes ouvrages: il y inſéra par forme d'*Appendix* ce qu'on avoit trouvé en Italie ſur la cycloïde. On ne peut diſconve-

(*a*) Groning. *Hiſt. cycloid.*
(*b*) Lettre de Torricelli à Roberval, anciens Mem. de l'Acad. T. VI.
(*c*) Groning. *Ibid.*

nir que *Torricelli* & *Viviani* n'ayent pu réſoudre delà les monts un problême déja réſolu en deça, & puiſque *Roberval* étoit ſi jaloux de ſa découverte, il lui ſuffiſoit d'établir par des pieces authentiques ſon droit ſur elle, au lieu de la longue & pédanteſque Lettre qu'il écrivit à *Torricelli*, & dans laquelle il n'a pas ſçu faire valoir les bonnes raiſons qu'il pouvoit alléguer, comme le Livre de *Merſenne* imprimé en 1637. Cette preuve eût mieux valu que toutes ſes proteſtations, & la longue hiſtoire qu'il fait de ſes recherches ſur la cycloïde. Perſonne n'ignore que dans les conteſtations on n'a égard aux faits avancés par les parties, qu'autant qu'ils ſont fondés en preuve.

M. *Paſcal* dans ſon hiſtoire de la cycloïde, dit que *Roberval* ayant trouvé l'aire de cette courbe vers l'an 1634, *Merſenne* l'exhorta à cacher ſa ſolution pendant un an, & qu'il invita tous les Géometres de l'Europe à la rechercher. L'un & l'autre de ces faits me paroiſſent peu exacts. Car d'abord *Deſcartes* ne paroît avoir eu connoiſſance de ce problême que vers l'année 1638, où *Merſenne* lui en parla pour la premiere fois, & il n'y a aucune apparence que ce correſpondant de notre Philoſophe eût oublié de le mettre au rang des premiers Géometres de l'Europe. En ſecond lieu la date de 1634, me paroît antérieure à la véritable. Car *Merſenne* à la fin de ſon *Harmonie univerſelle*, qui parut en 1637, corrige d'après la découverte de *Roberval* ce qu'il avoit dit dans le premier volume ſur la cycloïde, qu'il prenoit alors pour une ellipſe. Il paroît que c'eſt ſeulement en 1638 qu'il s'aviſa d'écrire à quelques Géometres pour les inviter à chercher l'aire de cette courbe. *Paſcal* continue, & dit ſans alléguer de preuves que vers l'an 1638 un certain M. de *Beaugrand*, Mathématicien fort maltraité par *Deſcartes*, & avec juſtice, quoique le P. *Merſenne* le qualifie de *très-ſubtil Géometre*, ramaſſa les démonſtrations des découvertes qu'on avoit faites en France ſur la cycloïde, & que les ayant un peu déguiſées, il les envoya en Italie à *Galilée*. Ce fait me paroît avancé au gré de la paſſion de *Roberval* dont le tenoit *Paſcal*; car *Galilée*, dans ſes Lettres à *Cavalleri*, écrites en 1639 & 1640 (*a*), parle de la

(*a*) Groning, *Hiſt. cycloid.*

cycloïde, comme d'une courbe dont il déſeſpere qu'on trouve jamais la meſure. Perſonne ne croira que ce grand homme, plus qu'octogénaire, & chargé des lauriers quil avoit cueillis dans la carriere des Mathématiques, voulut déguiſer ce qu'il venoit d'apprendre ſur ce ſujet. Ainſi je crois qu'on peut regarder l'hiſtoire de la Lettre de M. de *Beaugrand*, comme une fiction de *Roberval*. *Paſcal* dit enfin que *Galilée* étant mort, *Torricelli* parcourant ſes papiers, y trouva les démonſtrations que *Beaugrand* lui avoit envoyées, que celui-ci mourut bientôt après, & que *Torricelli* l'ayant appris, & ſe croyant aſſuré par-là de ne pouvoir être démaſqué par perſonne, divulgua ces démonſtrations comme ſiennes dans ſon ouvrage imprimé en 1644 : les obſervations que nous venons de faire, me paroiſſent propres à élever de grands doutes contre ce dernier trait du récit de *Paſcal*. Cet Hiſtorien de la cycloïde n'eſt pas plus exact ou moins partial, lorſque pour confirmer le plagiat de *Torricelli*, il parle d'une Lettre de rétractation, écrite en 1646 par ce Géometre. On diroit que *Torricelli* eſt convenu de ſon crime par cette Lettre. Rien néanmoins de cela : on la lit dans l'hiſtoire de la cycloïde de *Groningius*, & l'on y voit ſeulement que *Torricelli* fatigué des criailleries de *Roberval*, lui écrit enfin qu'il importoit peu que le problême de la cycloïde fût né en France ou en Italie, qu'il ne s'en diſoit point l'inventeur ; que juſqu'à la mort de *Galilée* on n'avoit point connu en Italie la meſure de cette courbe, & qu'il ne l'avoit point reçue de France : il ajoutoit qu'il avoit trouvé les demonſtrations qu'on lui conteſtoit, & qu'il s'inquiétoit peu qu'on le crût ou qu'on ne le crût point, parce que ce qu'il diſoit, étoit conforme au témoignage de ſa conſcience ; qu'au ſurplus, ſi l'on étoit ſi jaloux de cette découverte, il l'abandonnoit à qui la vouloit, pourvu qu'on ne prétendît point la lui arracher par violence. Voilà le précis de cette prétendue Lettre de rétractation alléguée comme une preuve du plagiat de *Torricelli*. Mais nous terminerons ici l'hiſtoire d'une conteſtation à laquelle les Géometres d'aujourd'hui ne donneront pas la même importance. Le récit que nous en avons fait, & que nous avons appuyé de preuves, montre que *Roberval* y mit beaucoup de paſſion, & que *Paſ-*

cal n'a pas mis moins de partialité dans l'hiſtoire qu'il en a donnée.

Après les problêmes ſur l'aire & les tangentes de la cycloïde, ceux qui ſe préſentent les premiers, regardent les ſolides formés par ſa rotation autour de ſon axe & de ſa baſe. *Roberval* paroît avoir eu le mérite de les trouver l'un & l'autre. Le P. *Merſenne* mandoit en 1644 à *Torricelli* la raiſon du premier de ces corps avec le cylindre de même baſe & même hauteur, qui eſt celle de 5 à 8 ; à quoi *Torricelli* répondit auſſitôt qu'il avoit trouvé la même choſe quelques mois auparavant. A l'égard du dernier, qui eſt incomparablement plus difficile à trouver, le Géometre Italien y échoua, & *Roberval* reſte ſeul en poſſeſſion d'avoir découvert ſa meſure. *Torricelli* avoit cru qu'il étoit à ſon cylindre circonſcrit comme 11 à 18 ; le Géometre François montra qu'il s'étoit trompé, & dévoila le véritable rapport (*a*).

M. de *Roberval* a dit long-temps après (*b*) qu'il avoit trouvé dans le même temps la grandeur de l'arc de la cycloïde, & qu'ayant dévoilé toutes ſes autres découvertes ſur cette courbe, il avoit toujours tenu celle-là cachée, juſqu'au temps où *Wren* y parvint de ſon côté. Mais je ne crois pas qu'on doive avoir égard à cette proteſtation. En effet, pourquoi M. *Roberval* ne communiqua-t'il pas ſa découverte à *Paſcal*, lorſque celui-ci propoſa ſes derniers problêmes, parmi leſquels eſt la détermination de la grandeur de la courbe cycloïdale ? Son ami lui en eût fait aſſurément honneur ; au lieu qu'en ne la publiant point dans cette circonſtance, c'étoit certainement renoncer à la gloire qui pouvoit lui en revenir. *Roberval* pouvoit-il douter que le problême propoſé par *Paſcal* ſeroit réſolu par lui-même, s'il ne l'étoit par aucun autre ; & par conſéquent que s'il s'obſtinoit à faire myſtere de ſa découverte, il ſeroit prévenu.

La théorie de la cycloïde ne s'accrut d'aucune vérité nouvelle pendant un intervalle d'environ 12 ans, c'eſt-à-dire depuis 1646 juſques vers 1658. Ce fut M. *Paſcal* qui la reproduiſit alors ſur la ſcene. Ce Géometre & Ecrivain célebre,

(*a*) Le ſolide en queſtion eſt au cylindre circonſcrit, comme les $\frac{3}{4}$ du quarré de la demi-circonférence, moins le tiers du quarré du diametre, au quarré de la demi-circonférence.

(*b*) *De Trochoïde.*

fils d'un pere qui étoit lui-même très-verſé en Géométrie, avoit fait dans cette ſcience des progrès étonnans dès ſa tendre jeuneſſe. Perſonne n'ignore l'hiſtoire peu croyable qu'on raconte de lui. Agé de 12 ans, il étoit, dit-on, parvenu ſans livre & par la ſeule force de ſon génie juſqu'à la trente-deuxieme propoſition du premier Livre d'*Euclide*. Les Lecteurs en croiront ce qu'ils jugeront à propos: quant à moi, dût-il m'arriver la même choſe qu'à *Baillet*, qui fut tancé par quelques partiſans de M. *Paſcal*, pour avoir eu quelque doute ſur ce trait de ſa vie, je ne diſſimulerai point que je le ſuſpecte fort d'exagération. Ce qu'on ne peut cependant refuſer à M. *Paſcal*, c'eſt qu'il étoit déja Géometre, & Géometre profond à un âge où ordinairement les bons eſprits ne ſçavent point encore ce que c'eſt que la Géométrie. A l'âge de 16 ans il compoſa un Traité des coniques, où tout ce qu'*Apollonius* avoit démontré, étoit élégamment déduit d'une ſeule propoſition générale (*a*). Ce Traité fut envoyé á *Deſcartes*, qui ne put le croire l'ouvrage d'un jeune homme de 16 ans, & qui aima mieux l'attribuer à MM. *Paſcal* le pere, & *Deſargues*. Mais outre que nous avons dans ce ſiecle des exemples de cet avancement en Géométrie ſi peu proportionné au nombre des années, il y a dans la vie de M. *Paſcal* des traits qui rendent celui-là probable. On peut facilement le croire de celui qui a inventé la machine arithmétique à 19 ans. En effet M. *Paſcal* n'en avoit pas davantage, lorſqu'il imagina cette ingénieuſe machine, qui fait encore l'admiration des meilleurs eſprits par la complication de ſes parties & l'invention qu'on y voit éclater.

M. *Paſcal* avoit en quelque ſorte abandonné la Géométrie douze ans avant ſa mort, pour s'adonner uniquement à des études plus importantes, telles que celles de la religion & de la morale. Mais les Mathématiques ſont pour ceux qui les ont une fois connues, une maîtreſſe chérie avec qui de puiſſans motifs peuvent faire rompre, mais qu'on ne ſçauroit oublier entiérement. M. *Paſcal* éprouva, ce ſemble, une pareille foibleſſe pour elles. On le voit par ſes lettres à M. de *Fer-*

(*a*) *Quid de binis Paſcalibus dixero, patre in omnibus Mathematicis apprimè verſato, qui mira de triangulis demonſtravit, filio qui unica propoſitione quadringentis corollariis ſtipatâ omnia Apollonii conica comprehendit?* Merſenne, *Harm. univ.*

mat, avec qui il diſcutoit en 1654 diverſes queſtions ſur les combinaiſons & les parties de jeu ; ce qui s'accrut bientôt au point de lui fournir la matiere de ſon *Triangle arithmétique*, qu'il publia cette même année. La cycloïde enfin, car il eſt temps que nous reprenions le fil de notre hiſtoire, fut un nouveau ſujet de diſtraction, je dirois preſque de rechûte pour M. *Paſcal*. Il ſe mit vers l'an 1658 à conſidérer plus profondément cette courbe. Ceux qui en avoient fait juſque-là l'objet de leurs recherches, s'étoient bornés à l'aire de la cycloïde entiere, & aux ſolides formés autour de l'axe & de la baſe : M. *Paſcal* enviſagea la choſe plus généralement, & tirant une ordonnée quelconque comme F H, il rechercha l'aire & le centre de gravité de ces ſegmens, comme A H F ; la grandeur des ſolides qu'ils forment en tournant autour de l'ordonnée ou de l'axe ; leurs centres de gravité, & enfin ce qui augmente beaucoup la difficulté, ceux des ſegmens de ces ſolides coupés par un plan paſſant par l'axe de rotation.

Fig. 22.

En poſſeſſion de ces problêmes, les plus difficiles ſans doute que ſe fût encore propoſé la Géométrie, M. *Paſcal* voulut faire un eſſai de la force des Géometres ſes contemporains. Il leur adreſſa une lettre circulaire pour les inviter à la ſolution de ſes problêmes. Il s'engageoit à donner au premier qui les réſoudroit, quarante piſtoles, & vingt au ſecond ; il fixoit le premier Octobre de la même année pour le terme auquel il falloit que les ſolutions fuſſent remiſes, avec les formalités à obſerver pour en conſtater la délivrance. M. de *Carcavi* fut déſigné pour celui à qui il falloit les adreſſer. Quant à lui, il ſe cacha ſous le nom de *Dettonville*, & c'eſt ſous ce nom que parurent toutes les pieces qui concernent ce défi Mathématique.

Le terme fixé par M. *Paſcal* étant arrivé ſans que perſonne eût réſolu ſes problêmes à ſon gré, il publia alors ſon Hiſtoire de la Roulette, & il propoſa de nouveaux problêmes concernant cette courbe. Ceux-ci regardent les ſurfaces des ſolides & des demi-ſolides dont on a parlé, & les centres de gravité de ces ſurfaces. Il donna juſqu'au premier de Janvier pour leur ſolution, & il prorogea juſque-là le terme accordé pour celle des premiers, & ſous les mêmes conditions.

Ceux qui ne connoiſſent ces problêmes que par ce qu'en a

écrit M. *Paſcal*, ſont dans la perſuaſion que perſonne autre que lui ne les réſolut. Mais après l'inſpection de différentes pieces, il nous a paru que ce célebre Ecrivain fut dans le cas de la plûpart de ceux qui propoſent de pareils défis, c'eſt-à-dire qu'il n'avoit point envie de perdre la ſomme dépoſée, & qu'il fit de mauvaiſes difficultés contre une ſolution qu'on lui envoya. En effet *Wallis* réſolut les premiers problêmes avant le terme aſſigné. Le Chevalier de *Digbi* ayant reçu la Lettre circulaire de *Paſcal* par l'entremiſe de M. de *Carcavi*, vers le 10 Août, en informa *Wallis*. Celui-ci déja en poſſeſſion de ſurmonter les plus grandes difficultés de la Géométrie, ſe mit auſſitôt à travailler aux problêmes en queſtion, & envoya avant la fin du mois ſa ſolution à M. de *Carcavi* avec une atteſtation d'un Notaire d'Oxford, formalité qu'il crut néceſſaire pour en conſtater la date, ſi quelque circonſtance en retardoit l'arrivée à Paris au-delà du terme aſſigné. *Paſcal* la reçut le 23 Septembre, & répondant à *Wren* ſous le nom de *Dettonville*, il lui apprit la réception de l'écrit de *Wallis*. Il lui en fit des éloges, & lui dit qu'il étoit content de cette ſolution, qu'il auroit ſeulement déſiré qu'au lieu de faire atteſter la date du départ par un Notaire d'Oxford, il en eût fait notifier l'arrivée & la dépoſition entre les mains de M. de *Carcavi* par un Notaire de Paris, ce qui étoit une des formalités qu'il avoit demandée par ſa Lettre circulaire. Ce fut ſous ce prétexte qu'il n'accorda point à *Wallis* le prix qu'il avoit gagné. Mais ce procédé, quoique dans les loix de la rigoureuſe équité, n'aura pas, je penſe, l'approbation de beaucoup de perſonnes. Dans une affaire de cette nature, qui étoit toute de bonne foi, il ſuffiſoit ſans doute que M. *Paſcal* eût reçu lui-même, comme il en convenoit, la ſolution de *Wallis*, pour qu'il dût lui décerner le prix. *Wallis* ſe plaignit avec modération & en homme déſintéreſſé, qui avoit cherché l'honneur plutôt que le gain d'une modique ſomme, en travaillant à ces problêmes. Il ne me paroît pas qu'il ait concouru pour ceux que *Paſcal* propoſa enſuite au mois d'Octobre, ſoit qu'il n'en ait pas eu connoiſſance à temps, ſoit que rebuté de la mauvaiſe difficulté qu'on lui avoit faite, il n'ait pas voulu ſe donner la peine d'y travailler. Il publia ſes ſolutions en 1659, dans un Traité particulier intitulé, *de cycloïde & cyſ-*

ſoïde, qu'on retrouve dans le premier volume de ſes œuvres.

Un autre Géometre à qui il me ſemble que M. *Paſcal* ne rendit pas aſſez de juſtice, eſt le Pere *Laloubere*. Ce Jéſuite de Toulouſe, déja connu par un ouvrage intitulé : *Elementa Tetragonimiſca*, ou *Quad. circuli & Hyp. ſegmentorum ex datis ipſorum centris gravitatis* (Tol. 1651. in-8.) qui contient beaucoup de ſçavante & profonde Géométrie, envoya à M. *Paſcal* la ſolution de ſes problêmes ſur les ſolides de la cycloïde, & leur centre de gravité, avant la fin de l'année 1658. Nous en tirons la preuve de ce que M. *Paſcal* lui répondant par une lettre datée du premier Janvier 1659, lui chercha querelle ſur une prétendue erreur de calcul. Mais *Laloubere* me paroît s'en juſtifier ſuffiſamment, & montrer que ce n'eſt qu'une erreur de tranſcription, ſoit en renvoyant à ſon écrit imprimé qui parut à Toulouſe le 9 Janvier, & qu'il n'eſt pas à préſumer qu'il eût entiérement refondu, & fait imprimer dans trois ou quatre jours, ſoit par la comparaiſon d'autres circonſtances. Cependant M. *Paſcal* peu diſpoſé à rendre juſtice à un membre du corps dont étoit *Laloubere*, prétendit toujours que ce Pere s'étoit trompé, & qu'il n'avoit reconnu ſon erreur qu'après en avoir été averti : il dit dans quelques additions à ſon hiſtoire de la cycloïde pluſieurs choſes mortifiantes pour ce Jéſuite de Toulouſe, & comme il étoit en poſſeſſion de tourner comme il vouloit la raiſon de ſon côté, ſon adverſaire parut avoir tort. A la vérité, ce Pere auroit été mal fondé à prétendre aux prix propoſés par M. *Paſcal*; il n'avoit pas réſolu aſſez-tôt les premiers problêmes pour y avoir aucun droit, mais il l'avoit fait aſſez à temps pour mériter plus de juſtice que cet homme célebre ne lui en rendit. *Laloubere* publia ſes méditations ſur la cycloïde en 1660, dans un ouvrage intitulé, *Geometria promota in ſeptem de cycloïde libris*. Ce Livre eſt rempli de belle & ſçavante Géométrie. Outre les ſolutions des premiers problêmes de M. *Paſcal*, nous remarquons dans le ſecond Livre une ſpéculation fort ingénieuſe. *Laloubere* y examine la dimenſion de la courbe qui ſeroit retranchée ſur la ſurface d'un cylindre droit, avec un compas dont la pointe immobile ſeroit dans un point quelconque C, & l'autre parcourroit cette ſurface. Il appelle cette figure *cyclo-cylindrique*; & il montre que toutes

Fig. 23, 24.

tes les fois que l'ouverture ſera telle, que la pointe mobile atteindra l'extrêmité du diametre D, cette ſurface ſera abſolument quarrable, c'eſt-à-dire égale à 4 fois le rectangle D H G. Mais ſi la pointe mobile n'atteint pas à cette extrêmité, la figure retranchée de la ſurface du cylindre en queſtion, ſera égale à celle d'un cylindre oblique déterminé. Au reſte il faudroit avoir beaucoup de patience & de temps à perdre, pour s'aviſer d'aller puiſer dans cet ouvrage, de même que dans celui que nous avons cité plus haut. La ſingularité de la méthode qu'emploie leur Auteur, qui eſt le plus ſouvent celle dont *Archimede* s'eſt ſervi dans ſa quadrature méchanique de la parabole, la prolixité qui naît d'une trop grande affectation de rigueur géométrique, & diverſes autres choſes ſemblables, ſont capables d'en écarter le Lecteur le plus intrépide.

Il y eut divers autres Géometres qui eſſayerent leurs forces ſur les problêmes de M. *Paſcal*. Le Chevalier *Chriſtophe Wren* trouva la rectification de la cycloïde. Il montra qu'un arc quelconque de cette courbe, pris depuis le ſommet, comme A F, étoit égal au double de la corde A D, de ſorte que la moitié A B de la cycloïde eſt double du diametre A C du cercle générateur. Il découvrit auſſi la dimenſion de la ſurface des ſolides autour de la baſe & de l'axe, & conſéquemment le centre de gravité de la courbe elle-même. Il envoya toutes ces choſes à M. *Paſcal*, dans une Lettre datée du 12 Octobre, c'eſt-à-dire du 22 ſuivant notre ſtyle. M. *de Fermat* détermina auſſi la grandeur des ſurfaces dont nous venons de parler, & donna à cette occaſion, dit M. *Paſcal*, une méthode générale & fort belle pour la dimenſion des ſurfaces rondes, dont nous dirons un mot ailleurs. Mais perſonne, que je ſçache, ne réſolut les problêmes les plus difficiles ſur les ſurfaces en queſtion, ſçavoir ceux qui concernent les ſurfaces des ſolides formés autour des paralleles à la baſe, les centres de gravité de ces ſurfaces, & des demi-ſurfaces. Ainſi ſi M. *Paſcal* n'eut pas la ſatisfaction de voir ſes premiers problêmes hors de la portée des autres Géometres de ſon temps, il eut du moins celle de voir que lui ſeul pouvoit donner la ſolution des derniers. *Fig.* 22.

Le commencement de l'année 1659 étant arrivé, M. *Paſcal*

ſe diſpoſa à mettre au jour ſes ſolutions. Il les publia peu après dans un écrit ſous le titre de *Lettre de A. Dettonville à M. de Carcavi.* On y trouve d'abord une méthode pour les centres de gravité de toutes ſortes de grandeurs. Elle eſt ſuivie d'un Traité intitulé *des trilignes & de leurs onglets*, qui eſt une introduction générale à la dimenſion des ſolides curvilignes. Il y examine ce qu'il faut connoître dans une figure curviligne quelconque pour avoir la meſure des ſolides produits par ſa circonvolution, ſoit autour de la baſe, ſoit autour de l'axe, leurs centres de gravité, & ceux des demi-ſolides, avec les ſurfaces de ces ſolides & demi-ſolides & leurs centres de gravité. Dans les Traités ſuivans, qui portent pour titre, *des ſinus du quart de cercle, & des arcs de cercle*, il eſt occupé à déterminer dans la figure circulaire les différentes choſes qu'il a démontré être néceſſaires pour la ſolution des problêmes ci-deſſus. Enfin, après avoir obſervé que l'ordonnée de la cycloïde ſe réſout en deux parties, dont l'une eſt l'ordonnée du cercle générateur, & l'autre l'arc correſpondant, il réſume toutes ces choſes, & il montre qu'il a donné dans les Traités précédens tout ce qu'il faut pour la ſolution de ſes problêmes ſur cette courbe. Nous regrettons que l'extrême fécondité de notre matiere ne nous permette pas de développer davantage tout le procédé de M. *Paſcal.* Il ne ſeroit pas poſſible de le faire, ſans y donner pluſieurs pages, & nous ſommes contraints de ſacrifier ce morceau, quoiqu'intéreſſant, à la briéveté.

La ſolution que M. *Paſcal* donne de ſes problêmes, eſt ſuivie de quelques autres écrits géométriques, dont l'un vient à notre objet préſent. Il concerne la rectification de la cycloïde, ſoit ordinaire, ſoit alongée, ſoit raccourcie. *Paſcal* y montre par une méthode générale, que toutes ces courbes ſont égales à des demi-circonférences d'ellipſe, dont il détermine les axes conjugués. Ceci ne contredit point la découverte de *Wren*, ſuivant laquelle la cycloïde ordinaire eſt quadruple du diametre du cercle générateur. Il arrive en effet dans ce cas que le petit axe de l'ellipſe eſt nul ; ce qui fait que ſa circonférence coincide avec ſon grand axe. Ainſi ce que *Wren* avoit trouvé par une méthode particuliere, n'eſt qu'une conſéquence de celle de M. *Paſcal.* On démontre facilement ce

rapport des courbes cycloïdales avec l'ellipſe par le moyen du calcul intégral. Car l'expreſſion différentielle ou de l'élément de cette courbe, eſt abſolument ſemblable à celle de l'élément de l'arc elliptique.

Quoique la meſure de la cycloïde entiere dépende de la quadrature du cercle, on peut cependant trouver pluſieurs de ſes portions égales à des eſpaces rectilignes. MM. *Wren* & *Huyghens* en ont donné le premier exemple, en remarquant que l'ordonnée éloignée du ſommet de la moitié du rayon, retranche un ſegment égal au triangle équilatéral inſcrit dans le cercle générateur. M. *Leibnitz* a trouvé enſuite que, ſi l'on tire du ſommet une ligne à l'extrêmité de l'ordonnée paſſant par le centre, le ſegment A *d* I étoit abſolument quarrable, & qu'il égaloit la moitié du quarré circonſcrit. Mais tout cela eſt contenu dans la découverte ſuivante de M. *Jean Bernoulli* (*a*). Si l'on prend, dit ce ſçavant Géometre, de côté & d'autre du point B qui diviſe le rayon contigu au ſommet en deux parties égales, deux ordonnées également diſtantes, comme E *e* & D ♂, ou E *e* & D *d*, & qu'on tire la ligne E ♂ ou E *d*, le ſegment *e* A ♂, ou *e d*, ſera abſolument quarrable, c'eſt-à-dire dans le premier cas, égal à la ſomme des triangles F H E, G D E, & dans le ſecond, à leur différence. Si donc les points E & D ſe rapprochant continuellement de B, coincident avec lui, le ſegment *e* A ♂ deviendra celui de *Wren* & *Huyghens*; ſi au contraire, les points E & D s'éloignant également de B, arrivent enfin l'un en A, & l'autre en C, on aura viſiblement celui de *Leibnitz*. M. *Bernoulli* enſeigne auſſi de quelle maniere on peut trouver par des équations algébriques une infinité de bandes cycloïdales interceptées entre deux ordonnées, qui ſoient ſuſceptibles de quadrature abſolue. On peut voir à la ſuite de la piece que nous avons citée, quelques autres écrits qui concernent cette matiere, & dont quelques-uns ſont de M. *Jacques Bernoulli*. Les cycloïdes alongées ou raccourcies ont pareillement des eſpaces abſolument quarrables; M. *Bernoulli* montre comment on peut les déterminer, & dans quel cas cela eſt poſſible. *Fig.* 25.

Le ſujet que nous traitons, demande que nous rappro-

(*a*) Act. Lipſ. 1699. Bernoulli op. T. 1, p. 322.

chions encore ici, du moins hiſtoriquement, quelques autres propriétés fameuſes de cette courbe. On pourroit dire qu'il en eſt peu dans la Géométrie qui en ait de plus remarquables. M. *Huyghens* a montré que la developpée de la cycloïde étoit elle-même une cycloïde ſeulement poſée en ſens contraire : on donnera ailleurs une idée plus claire de cette propriété, lorſqu'on expliquera la théorie des développées. Le même célebre Géometre a auſſi découvert qu'un corps qui roule le long d'une cycloïde renverſée, parvient au bas dans le même temps, de quelque point qu'il commence à rouler; d'où il ſuit qu'un pendule dont le poids ſeroit contraint de décrire une cycloïde, feroit des vibrations parfaitement égales. Cette courbe eſt encore celle de la plus vîte deſcente. Je m'explique. Qu'on ait deux points qui ne ſoient, ni dans la même ligne horizontale, ni dans la même perpendiculaire, & qu'on demande le chemin le long-duquel un corps devroit rouler par un mouvement uniformément accéléré, afin qu'il y employât le moins de temps poſſible; ce n'eſt point une ligne droite, comme le penſeront ſans doute d'abord bien des Lecteurs, c'eſt un arc de cycloïde paſſant par ces deux points.

La cycloïde a donné naiſſance à une autre courbe, appellée d'abord par quelques Géometres du nom de *petite cycloïde*, mais connue aujourd'hui ſous celui de *la compagne de la cycloïde*. Cette courbe eſt celle qui ſe formeroit, ſi l'on prolongeoit les ordonnées du demi-cercle, juſqu'à ce qu'elles fuſſent égales aux arcs correſpondans, par exemple, C D à l'arc
Fig. 16. A F, *c d* à A *f*, &c; ou bien c'eſt la cycloïde ordinaire, dont après avoir retranché le cercle générateur, on auroit abaiſſé les reſtes d'ordonnées parallélement à elles-mêmes, juſqu'à ce qu'elles fuſſent appuyées ſur l'axe. Cette courbe a cela de remarquable, que l'eſpace A C D retranché par l'ordonnée centrale C D, eſt abſolument quarrable, & égal au quarré du rayon. Cela a été remarqué dans le ſiecle paſſé par divers Géometres, comme *Roberval*, *Laloubere*, *Wallis*, &c. La partie A D de la courbe dont nous parlons, eſt la même que la courbe appellée *des ſinus*, dont la génération conſiſte à prendre une baſe égale à un quart de cercle, & à élever ſur les différens points de cet axe les ſinus des arcs égaux aux abſciſſes. Les Géometres qui ont travaillé aux problêmes de M. *Paſcal* ſur

la cycloïde, ont auſſi traité de ſa *compagne*, & ils ont déterminé la dimenſion de ſes différentes parties, ſon centre de gravité, & les ſolides formés par ſa circonvolution, ſoit autour de ſon axe, ſoit autour de ſa baſe, &c. M. *Jean Bernoulli* a remarqué ſur cette courbe la même choſe à peu près que ſur la cycloïde, en ce qui concerne les eſpaces abſolument quarrables qu'elle peut avoir. Il y a ſeulement ici cette différence, que c'eſt à égales diſtances du centre qu'il faut prendre les ordonnées qui déterminent le ſegment oblique abſolument quarrable, au lieu que dans la cycloïde, c'eſt à égales diſtances d'un point éloigné du ſommet du quart du diametre.

A l'imitation de la cycloïde, les Géometres s'élevant toujours de difficultés en difficultés, & généraliſant leur idées, ont imaginé de faire rouler un cercle ſur un autre, & d'examiner les propriétés de la trace que décriroit durant ce mouvement un point quelconque du cercle mobile. On a appellé ces courbes *Epicycloïdes*, & elles ont des propriétés fort remarquables; ce n'eſt pas ici l'endroit convenable pour les développer, nous le ferons avec quelque étendue dans un article du Livre VI.

X.

Il nous reſte, pour ne rien oublier de notre ſujet, à faire connoître divers Géometres dont nous n'avons point encore eu occaſion de parler, ou qui ont vécu poſtérieurement à l'époque à laquelle nous ſommes arrivés. L'ordre des temps nous conduit d'abord à faire mention de deux Géometres de mérite, qui fleuriſſoient en France un peu avant le milieu du dix-ſeptieme ſiecle: ce ſont MM. *Midorge* & *Deſargues*. Le premier faiſoit une étude particuliere des ſections coniques, & l'on a de lui un Traité en quatre Livres, où ce ſujet eſt traité d'une maniere ſçavante & facile. *Deſargues* étoit un ami de *Deſcartes*, qui avoit l'art encore peu commun d'enviſager les objets ſous des vues très-générales. Il en donna un eſſai ſur les ſections coniques, qui plut beaucoup aux Géometres d'un ordre relevé. Nous n'avons jamais rencontré cet écrit, mais nous conjecturons que *Deſargues* les y conſidéroit comme l'ont fait depuis quelques Géometres, c'eſt-à-dire, comme une même

Midorge.

Deſargues.

courbe qui par les variations de certaines lignes devient tantôt parabole, tantôt ellipſe ou hyperbole. En effet, une parabole peut être regardée comme une ellipſe dont le centre, ou l'autre foyer ſeroit infiniment éloigné; une hyperbole n'eſt encore qu'une ellipſe dont le centre ou l'un des foyers auroit paſſé du côté oppoſé, & ſeroit éloigné du ſommet d'une diſtance négative. Le cercle enfin n'eſt qu'une ellipſe dont les deux foyers coincident au centre. On peut enfin regarder les aſymptotes de l'hyperbole comme de ſimples tangentes, mais à des points infiniment éloignés. Cette maniere de conſidérer les ſections coniques fournit des démonſtrations extrêmement faciles de leurs propriétés, & nous ſoupçonnons par cette raiſon que c'étoit ainſi que les enviſageoit le jeune M. *Paſcal*, dans ce Traité ſingulier qu'il donna à l'âge de ſeize ans, & où à l'aide d'une propoſition unique, ſuivie de quatre cens corollaires, il démontroit toute la théorie ancienne de ces courbes. Auſſi M. *Deſcartes*, qui ne pouvoit croire que ce fût l'ouvrage d'un enfant de cet âge, diſoit-il qu'il y reconnoiſſoit la méthode de M. *Deſargues*.

Torricelli. Tout le monde connoît le nom de *Torricelli*, devenu ſi mémorable par la découverte de la ſuſpenſion du Mercure dans le vuide & de la peſanteur de l'air. La Géométrie lui doit auſſi quelques ouvrages eſtimables; ils parurent en 1644, ſous le titre *De ſolidis Spheralibus libri 2 : de quad. parabolæ, de ſolido hyp. acuto. &c.* Il y a dans ces écrits diverſes choſes fort ingénieuſes; telles ſont les démonſtrations qu'il donne du rapport de la ſphere au cylindre, de la quadrature de la parabole, &c. qui ſont nouvelles, & d'une extrême élégance. On trouve dans le troiſieme de ces Traités une découverte digne de remarque, & qui ſurprendra peut-être pluſieurs de nos lecteurs : c'eſt que ſi l'on fait tourner l'eſpace hyperbolique ABDE autour de ſon aſymptote, le ſolide qu'il produit eſt fini, quoique infiniment prolongé, & même ce qui eſt plus merveilleux, quoique l'eſpace générateur ſoit infini. Ce ne ſera cependant point un paradoxe pour ceux qui ſont verſés dans une Géométrie un peu relevée. Ils verront que cela vient de ce que le centre de gravité de l'eſpace hyperbolique tombe ſur l'aſymptote même. Ainſi des deux facteurs du produit, qui eſt le ſolide en queſtion, l'un étant infiniment grand,

Fig. 27.

l'autre infiniment petit, il n'y a plus de quoi s'étonner que ce produit ſoit d'une grandeur finie.

Grégoire de S. Vincent

Les Pays-Bas nous offrent vers le même temps un Géometre qui s'eſt fait un grand nom, & à qui nous devons un ouvrage mémorable par quantité de découvertes, quoiqu'il ait échoué à la principale & à celle qui étoit l'unique objet de toutes les autres. Pour peu qu'on ſoit au fait de l'hiſtoire de la Géométrie, il eſt facile de voir que nous voulons parler du Pere *Grégoire de S. Vincent*, & de ſon fameux ouvrage intitulé *Quadratura circuli & hyperbolæ.* (*Antuerp. in-fol.* 1647.) Jamais Géometre n'a pourſuivi avec plus de génie & d'aſſiduité cet important problême, à travers toutes les épines de la Géométrie; & quoiqu'il ait manqué ſon but, l'abondante moiſſon de vérités nouvelles qu'il rapporta de cette recherche, lui ont mérité un rang parmi les Géometres les plus diſtingués. C'eſt le jugement qu'en portoit M. *Huyghens* lui-même, qui l'avoit combattu, c'eſt celui de M. *Leibnitz*, dont voici les paroles: *Majora* (*nempe Galileanis ac Cavallerianis*) *ſubſidia attulêre triumviri illuſtres, Carteſius oſtensâ ratione lineas Geometriæ communis exprimendi per æquationes, Fermatius inventâ methodo de maximis ac minimis, ac Gregorius à Sancto Vicentio, multis præclaris inventis* (*a*).

Grégoire de Saint-Vincent nous apprend dans ſa Préface, combien de différentes voies il tenta pour parvenir à la quadrature du cercle. Il eſpera d'abord quelque choſe de la ſpirale, enſuite il ſe tourna du côté de la quadratrice, ſur laquelle il avoit compoſé un gros Traité prêt à imprimer, & qui fut la proie des flammes lors de la priſe de Prague par les Saxons. Il abandonna enfin ces recherches, & il ſe mit à conſidérer profondément les ſections coniques & les divers corps formés ſur leurs ſegmens, eſpérant que quelqu'un d'entr'eux lui pourroit préſenter des propriétés capables de donner la ſolution de cet épineux problême. Ce fut en ſuivant cette route qu'il fit un grand nombre de découvertes importantes & curieuſes. Telles ſont une multitude de propriétés nouvelles des ſections coniques; la ſommation des termes & des puiſſances des termes des progreſſions, plus développée;

(*a*) Act. Lipſ. *ann.* 1695.

des moyens ſans nombre de meſurer la parabole & les figures conſidérées par les Anciens ; la meſure abſolue de quantité de corps, comme les onglets cylindriques ſur des baſes circulaires, elliptiques, hyperboliques, & divers autres. Nous voudrions pouvoir entrer dans une expoſition plus détaillée de toutes ces choſes ; mais les bornes de notre ouvrage ne nous le permettent pas. Nous nous en tiendrons ici à préſenter la belle propriété de l'hyperbole découverte par ce Géometre. Si l'on prend ſur l'aſymptote d'une hyperbole les proportionnelles continues C A, C B, C D, &c. & qu'on mene les ordonnées A *a*, B *b*, C *c*, &c. les eſpaces A *b*, B *d*, D *e*, &c. ſont égaux. D'où il ſuit que ceux-ci A *b*, A *d*, A *e*, &c. ſont en progreſſion arithmétique. Il en eſt de même des ſecteurs *a* C *b*, *b* C *d*, &c. car ils ſont reſpectivement égaux aux eſpaces A *b*, B *d*, &c. L'eſpace hyperbolique A *g* croît donc uniformément, tandis que l'abſciſſe C G croît géométriquement, & par conſéquent il eſt le logarithme de cette abſciſſe. Cette propriété eſt du plus grand uſage dans la Géométrie tranſcendante, & elle a fourni l'idée de réduire la réſolution pratique de tous les problêmes qui dépendent de la quadrature d'un eſpace hyperbolique à l'uſage d'une table de logarithmes. Au reſte, nous n'adopterons point les éloges exceſſifs dont l'Auteur de la préface du Calcul intégral de M. *Stone*, a comblé *Greg. de Saint-Vincent*. Dire que les Modernes avec leurs calculs & leurs *dx*, *dy*, qu'ils reſſaſſent (c'eſt l'expreſſion de cet Ecrivain, plus favoriſé du côté de l'imagination que de celui de la juſteſſe) n'ont fait que repaſſer à la filiere ce que le Géometre Flamand a trouvé ; c'eſt avoir formé le deſſein de faire rire ceux qui connoiſſent ces calculs & les queſtions auſquelles ſe ſont élevés les *Newton*, les *Leibnitz*, les *Bernoulli*, &c. dès les premiers eſſais qu'ils en ont donnés. Il y auroit une obſervation ſemblable à faire ſur chaque ligne de cette préface, dont l'auteur, pour exalter ſon héros, ſemble fermer volontairement les yeux ſur tout ce qu'ont fait les Géometres avant & après lui. Mais un pareil examen ne s'accorderoit pas avec la briéveté que nous affectons. Diſons un mot de la prétendue quadrature de *Grégoire de Saint-Vincent*.

Fig. 28.

L'ouvrage du Pere *de Saint-Vincent* ne vit pas plutôt le jour, qu'on s'empreſſa de toutes parts à l'examiner. Le titre qu'il

qu'il portoit, le nom de ſon Auteur, & la quantité d'excellentes choſes qu'il contenoit, étoient fort capables de piquer la curioſité; mais ſa quadrature ne ſoutint pas, comme le reſte, l'épreuve de l'examen. *Deſcartes* en apperçut bientôt la fauſſeté, & montra la ſource de l'erreur dans une lettre au Pere *Merſenne*. Elle fut enſuite publiquement réfutée par le célebre M. *Huyghens*, alors encore fort jeune, dans un écrit modele de netteté & de préciſion (*a*); & plus au long par le Pere *Leotaud*, habile Géometre Dauphinois (*b*). L'un & l'autre montrerent avec beaucoup de ménagement & de ſolidité, que le problême important de la quadrature du cercle n'étoit point encore réſolu.

Le Pere *de Saint-Vincent* trouva néanmoins des défenſeurs dans deux de ſes diſciples, les Peres *Ainſcom* & *Saraſſa*, tous deux habiles Géometres. *Ainſcom* deſcendit le premier dans la lice (*c*), & ſe ſignala ſur quelques Aventuriers en Géométrie, comme *Meibomius* qui, en attaquant *Grégoire de Saint-Vincent*, étoient eux-mêmes tombés dans de ridicules erreurs. Venant enſuite à *Huyghens* & *Leotaud*, il prétendit qu'ils n'avoient point pris le véritable ſens de ſon maître, & il en donna l'explication qui fut confirmée en 1663, par le Pere *Saraſſa* (*d*). C'étoit en quelque ſorte ce qu'attendoit le Pere *Leotaud* pour porter le dernier coup à la prétendue quadrature. Il ne reſtoit plus de ſubterfuges à ſes défenſeurs, qui s'étoient authentiquement expliqués ſur le ſens dans lequel il falloit prendre certaines expreſſions ambiguës. Le Jéſuite Dauphinois montra donc clairement (*e*) qu'en les prenant même dans ce ſens, il n'en réſulte qu'une erreur au lieu de la véritable quadrature du cercle. En vain l'Auteur de la préface dont on a parlé plus haut, dit qu'il n'eſt pas encore bien démontré que *Grégoire de Saint-Vincent* ſe ſoit trompé. Nous oſons aſſurer que rien n'eſt plus certain : nous ajouterons même qu'il y a une ſorte de mauvaiſe foi dans les défenſes des deux diſciples de ce Géometre célebre : car étant invités à pluſieurs repriſes d'aſſigner ce rapport d'où dépendoit la quadrature du cercle, rap-

(*a*) *Exetaſis quad. circuli P. Greg. à S. Vinc.* 1651. in4°.

(*b*) *Examen quad. circuli hactenùs celeberrimæ.* Lugd. 1653. in-4°.

(*c*) *Expoſitio & deductio Geom. quad. P. Greg. à S. Vinc.* 1656. in-fol.

(*d*) *Solutio probl. de quad. circuli, &c.* 1663.

(*e*) *Cyclo-mathia, ſeu de multiplici circuli contempl.* 1663. in-4°.

port qu'ils ne ceſſoient de répéter être *donné*, ils ne le firent jamais, & s'enveloppant dans leur obſcure & fauſſe théorie des proportionalités, comme un plaideur dans les replis de la chicane, ils s'obſtinerent toujours à conclure que ce rapport étoit donné ſans le déterminer. S'il l'eût été réellement, étoit-il quelque moyen plus certain de confondre leurs adverſaires que de l'aſſigner ?

Huyghens.

Ce fut vers ce temps que débuta dans la Géométrie le célebre M. *Huyghens*. Ce nom ſeul nous diſpenſe d'un éloge auprès de ceux à qui les découvertes les plus curieuſes de l'Aſtronomie, & les queſtions les plus ſublimes des Mathématiques ſont connues. Il naquit en 1629, & dès l'année 1651 il ſe ſignala en combattant la quadrature du P. *de Saint Vincent :* la même année il publia ſes *Theoremata de circuli & hyp. quad.* où il démontre d'une maniere neuve, la liaiſon entre la quadrature des ſections coniques, & l'invention de leurs centres de gravité. Il perfectionna enſuite ce que *Snellius* avoit enſeigné ſur les approximations du cercle, & il publia en 1654 ſes découvertes ſur ce ſujet dans l'ouvrage intitulé *De circuli magnitudine inventa.* Mais quoique ces ouvrages, & le dernier ſurtout, ayent bien leur mérite, on peut dire que ce ne ſont que des eſſais de la jeuneſſe de M. *Huyghens*. On le vit bientôt après prendre un eſſor plus élevé : en 1657 il trouva la dimenſion des ſurfaces courbes des conoïdes & ſphéroïdes, problême qui n'avoit point encore été tenté par les Géometres, à cauſe de ſa difficulté ; il imagina ſa méthode de réduire les rectifications des courbes aux quadratures ; il détermina la meſure de la cyſſoïde, & il trouva que quoique prolongée à l'infini, ſon étendue étoit ſeulement égale à trois fois le demi-cercle générateur. Il commença enfin dès-lors à jetter les fondemens de ſon célebre ouvrage *De Horologio oſcillatorio*. Cet ouvrage, mêlange de la Méchanique la plus ſubtile & d'une Géométrie des plus profondes, nous préſente entr'autres la nouvelle théorie des développées, qui depuis ce temps eſt d'un ſi grand uſage dans les recherches géométriques & méchaniques. Ce ſeroit ici la place d'en rendre compte, mais il nous a paru qu'elle figureroit mieux à côté des découvertes de la nouvelle Géométrie. Ce motif nous en fait renvoyer l'expoſition au Livre ſixieme.

La Logarithmique a fourni à M. *Huyghens* la matiere d'un morceau de Géométrie très-curieux & très-ſçavant. Cette courbe ſe forme, comme on l'a dit ailleurs, en élevant ſur les diviſions égales d'une ligne droite infinie des perpendiculaires en progreſſion géométrique croiſſante d'un côté, & décroiſſante de l'autre, d'où il ſuit d'abord évidemment que cette courbe a ſon axe même pour aſymptote. C'eſt auſſi une ſuite de cette génération que les abſciſſes priſes d'un certain point comme terme, ſont analogues aux logarithmes des ordonnées; ce qui a donné le nom à cette courbe. Mais M. *Huyghens* ne ſe borna pas-là; il en examina l'aire, les tangentes, les ſolides, les centres de gravité, &c. & il trouva ſur tous ces ſujets des vérités remarquables qu'il publia en 1691, à la fin de ſon Traité *De causâ gravitatis*. En voici quelques-unes. 1°. La ſoutangente, c'eſt-à-dire, la ligne B C ou E F, compriſe entre la tangente & l'ordonnée, eſt partout la même. 2°. L'aire D E G H infiniment prolongée, n'eſt égale qu'au rectangle de D E par E F, c'eſt-à-dire, de l'ordonnée par la ſoutangente. 3°. Le ſolide formé par ce même eſpace tournant autour de l'aſymptote, eſt une fois & demie le cône formé en même temps par le triangle DEF; & ſi cet eſpace tourne autour de DE, le ſolide qu'il formera ſera égal à ſix fois le cône formé par ce triangle autour de D E. Je paſſe diverſes autres propriétés de cette courbe, remarquées par M. *Huyghens*. Toutes ces vérités que M. *Huyghens* s'étoit contenté d'énoncer, ont été démontrées par le P. *Grandi*, Géometre Italien, qui donna ſur ce ſujet en 1701, un ouvrage intitulé *Demonſtratio Hugenianorum Theorematum*, dans le ſtyle de l'ancienne Géométrie. L'Editeur des Œuvres d'*Huyghens*, l'a jugé digne avec raiſon de reparoître à la ſuite de celui qui en avoit été l'occaſion.

Fig. 29.

Parmi les Géometres dont s'illuſtroit l'Angleterre peu après le milieu du ſiecle paſſé, un des plus recommandables eſt M. Jacques *Grégory*. Ce Mathématicien, en général plus connu comme Opticien que comme Géometre, doit néanmoins tirer ſa principale célébrité de la Géométrie. En effet, déja rival de *Newton* dans l'invention du Téleſcope à réflection, il fut auſſi le premier à marcher ſur les traces de ce grand homme, & à ajouter à ſes découvertes analytiques. Mais ce n'eſt pas ici le lieu d'embraſſer ces objets: nous nous bornons à

Jacques Grégory.

celles de ſes recherches géométriques dans leſquelles il a ſuivi la méthode ancienne. De ce genre eſt l'ouvrage qu'il publia en 1664, & qui eſt intitulé *Vera circuli & hyperbolæ quadratura*. Sur ce titre on ne doit pas juger que ſa prétention fut d'avoir trouvé la quadrature abſolue du cercle & de l'hyperbole. Son objet eſt tout différent : car il entreprend au contraire de démontrer qu'elle eſt impoſſible, & qu'il n'y en a point d'autre que celles *par approximation*. Il en donne de très-ingénieuſes, & l'on ne peut méconnoître qu'elles ont un avantage ſur celles de *Snellius* & d'*Huyghens*, non ſeulement par l'exactitude, mais encore en ce qu'elles ſont communes au cercle & à l'hyperbole, courbes qu'on ſçait tenir l'une à l'autre par tant de propriétés analogues. M. *Grégori* démontre auſſi dans cet ouvrage, une propriété fort remarquable des polygones inſcrits & circonſcrits aux ſections coniques : elle conſiſte en ceci. Si l'on a deux polygones ſemblables, l'un inſcrit & l'autre circonſcrit, que nous nommerons A & B ; enſuite les deux autres inſcrit & circonſcrit, qui ſuivent, c'eſt-à-dire, qui ont un nombre double de côtés, que nous nommerons C & D ; le polygone C eſt moyen géométrique entre A & B, & le polygone D eſt moyen harmonique entre C & A, & ainſi de ſuite à l'infini. Delà naît une ſuite de termes toujours convergens, c'eſt-à-dire, approchant de plus en plus de la grandeur du ſecteur curviligne. C'eſt ce que *Grégori* nomme une ſuite convergente. Il eſt des ſuites de cette eſpece dans leſquelles il eſt poſſible d'aſſigner le dernier terme. Si cela arrivoit ici, on auroit la quadrature du cercle & celle de l'hyperbole ; mais bien loin delà : M. *Grégori* prétend démontrer que par la nature de la loi qui y regne, ce dernier terme eſt inaſſignable analytiquement, c'eſt-à-dire, qu'on ne ſçauroit trouver aucune expreſſion en termes finis par laquelle on puiſſe le déſigner. Sa démonſtration eſt ingénieuſe, & reſſemble beaucoup à celle par laquelle on démontre l'impoſſibilité de diviſer généralement un angle en raiſon donnée. Elle ne convainquit cependant pas M. *Huyghens*, & ce fut entre lui & *Grégori* le ſujet d'un vif débat, dont le Journal des Sçavans & les Tranſactions Philoſophiques des années 1667 & 1668 furent le champ. Les Géometres ne me paroiſſent pas avoir prononcé ſur cette conteſtation, & quoique je ſois porté à regarder la démonſtration de *Grégori* com-

me concluante, je les imiterai. Toutes les Pieces de cette ſçavante diſcuſſion, ſe trouvent avec le Traité de *Grégori*, dans le ſecond volume des Œuvres d'*Huyghens*.

M. *Grégori* publia quelques années après (en 1668.) un autre ouvrage de Géométrie profonde, ſous le titre de *Geometriæ pars univerſalis*. C'eſt, pour en donner briévement une idée, un recueil de théorêmes curieux & utiles pour la transformation & la quadrature des figures curvilignes, pour la rectification des courbes, la meſure de leurs ſolides de circonvolution, &c. S'ils ne ſont pas tous nouveaux, ils y ſont du moins le plus ſouvent généraliſés d'une maniere qui les rend en quelque ſorte propres à l'Auteur. Nous parlerons ailleurs de ſes *Exercitationes Geometricæ*, à cauſe qu'elles appartiennent plus à l'analyſe moderne qu'à la Géométrie ancienne. Le ſçavant Géometre dont nous parlons étoit de *New-aberdeen* en Ecoſſe, où il naquit en 1636. Il fit en Italie un ſéjour de pluſieurs années, & rendu à ſa patrie vers 1670, il y occupa une Chaire de Profeſſeur de Mathématiques. Il donnoit les plus grandes eſpérances, commençant à ſuivre de près *Newton* dans la carriere que celui-ci avoit ouverte, lorſqu'une mort précipitée l'enleva en 1675.

Il nous faut préſentement repaſſer en Italie, où nous rappellent quelques Géometres célebres, dont il ſeroit injuſte d'enſevelir les travaux dans l'oubli. Le premier qui s'offre à nous, eſt *Etienne de Angelis*. Ce diſciple de *Cavalleri* s'attacha à cultiver & à étendre la méthode de ſon maître; ce qu'il fit heureuſement dans divers ouvrages qu'il publia entre les années 1658 & 1662. Ils concernent la plûpart des ſujets de Géométrie ſublime, comme les aires & les centres de gravité des ſections coniques; les ſolides formés de diverſes manieres par la rotation de leurs ſegmens; les ſections coniques & les ſpirales des ordres ſupérieurs, &c. Nous avons parcouru pluſieurs de ces ouvrages qui nous ont paru dignes d'un très-habile Géometre. *De Angelis* étoit de l'Ordre des Hieronymites; mais cet Ordre ayant été ſupprimé en 1668, il vécut depuis en particulier. Il profeſſa les Mathématiques à Padoue, où il vivoit encore vers la fin du ſiecle.

Etienne de Angelis.

Le Géometre *Michel-Ange Ricci* mérite auſſi que nous en faſſions ici mention. Il eſt Auteur d'une Diſſertation ſous le

M. Ricci.

titre *de Maximis & Minimis*, imprimée à Rome en 1665; la Société Royale de Londres la jugea assez intéressante pour en procurer une seconde édition, qui est à la suite de la Logarithmotechnie de *Mercator*. L'objet de cette Dissertation est de déterminer les tangentes & les *Maxima* & *Minima* des courbes par le moyen de la Géométrie pure, ce qu'il exécuta entr'autres sur les sections coniques des ordres supérieurs. Il y promettoit quantité d'autres recherches importantes sur ces courbes, sur l'analyse ancienne, sur la construction géométrique des équations; mais nous ne voyons pas que cette promesse ait eu son exécution.

Viviani.

Nous terminerons cette partie de notre Histoire par le récit des travaux de M. *Viviani*. Ce disciple de *Galilée*, s'est principalement illustré en Géométrie, par deux ouvrages d'un genre particulier. Le premier est sa divination sur le cinquieme Livre des coniques d'*Appollonius*, dont nous avons fait l'histoire en parlant des écrits de cet ancien Géometre : le second concerne un autre Géometre de l'Antiquité, à peu près contemporain d'*Euclide*, qu'on nommoit *Aristée* l'ancien. Cet *Aristée* avoit écrit, au rapport de *Pappus* (*a*), outre cinq Livres d'*Elémens des Coniques*, un autre Traité intitulé *des Lieux solides*, c'est-à-dire, des propriétés locales de ces courbes. Les Coniques d'*Appollonius* ne nous laissent aucun lieu de regreter le premier de ces ouvrages; mais il eût été intéressant pour la Géométrie que le second nous fût parvenu. Ce motif excita M. *Viviani*, à peine âgé de vingt-trois ans, à faire des efforts pour y suppléer. Il commença dès-lors à assembler des matériaux dans cette vue : mais tant d'occupations différentes le traverserent à diverses reprises, & quoique ce ouvrage soit le premier de ceux qu'il avoit médités, c'est cependant le dernier qu'il ait achevé. Enfin ayant été nommé par Louis XIV, dont il étoit déja pensionné depuis long-temps, Associé étranger de l'Académie, il fit, malgré son extrême vieillesse, un dernier effort pour l'achever, & il le mit au jour en 1701. Cet ouvrage fait également honneur au sçavoir & au cœur de M. *Viviani*, par la sçavante Géométrie qu'il contient, & par les sentimens de reconnoissance envers le Monarque son

(*a*) *Coll. Math.* l. VII, *Præf.*

bienfaicteur, & *Galilée* ſon illuſtre maître, qui y ſont répandus.

M. *Viviani* propoſa en 1692 un problême curieux, & tout-à-fait digne de trouver place ici. Il lui donna le titre d'*Ænigma Geometricum à D. Pio Liſci puſillo Geometra :* ces derniers mots ſous leſquels il ſe cachoit, ſont l'anagramme de ceux-ci : *à poſtremo Galilei diſcipulo. Il y a*, diſoit-il, *parmi les antiques monumens de la Grece, un Temple conſacré à la Géométrie, dont le plan eſt circulaire, & qui eſt couronné d'un dôme hémiſphérique. Ce dôme eſt percé de quatre fenêtres égales avec un tel art que le reſtant de la ſurface eſt abſolument quarrable. On demande de quelle maniere on s'y étoit pris.* M. *Viviani* s'adreſſoit principalement aux illuſtres Analiſtes du temps, & il ajoutoit qu'il ne doutoit point que leur art ſecret, (c'eſt ainſi qu'il déſignoit la nouvelle Analyſe,) ne les mît bientôt en poſſeſſion de ſon enigme.

En effet, cette énigme n'en fut pas long-temps une pour ceux qui étoient verſés dans la nouvelle Géométrie ultramontaine. En Allemagne, MM. *Leibnitz* & *Jacques Bernoulli ;* en France le Marquis *de l'Hôpital* en donnerent pluſieurs ſolutions preſque auſſi-tôt qu'ils l'eurent vue. L'Angleterre où elle ne pénétra apparemment que l'année ſuivante, en fournit auſſi quelques-unes, qui furent l'ouvrage des DD. *Wallis* & *David Gregori.* Mais toutes ces ſolutions, il faut en convenir, le cédent à certains égards à celle de *Viviani.* Si l'on décrit, dit-il, dans le demi-cercle A B D, qui paſſe par le ſommet & le centre de la voûte, deux autres demi-cercles ſur les rayons A C, C D, & qu'on en faſſe les baſes de deux cylindres droits qui pénétrent l'hémiſphere de part & d'autre, ils en retrancheront quatre portions telles que le reſte ſera égal à deux fois le quarré du diamètre de la ſphere. Il y a encore ici une choſe remarquable, & que je ne ſçais ſi *Viviani* obſerva ; c'eſt que la portion de chaque demi-cylindre, renfermée dans l'hémiſphere, eſt auſſi ſuſceptible de quadrature abſolue, & égale à deux fois le quarré du rayon de l'hémiſphere : il publia cette ſolution avec diverſes autres vérités géométriques dans ſon *Exercitatio Mathematica de formatione & menſurâ fornicum ;* mais il s'y borna au ſimple énoncé, & il ſupprima les démonſtrations : cela donna lieu quelques années après au P. *Guido-Grandi* Géometre, de l'Ordre de Camaldules, de les recher-

Fig. 30.

cher & de les publier ſous le titre de *Vivianeorum problematum demonſtratio.* Dans cet écrit qui contient plus que ne promet le titre, le P. *Grandi* remarque auſſi quelques curioſités géométriques du même genre, entr'autres une portion de ſurface de cône droit, qui eſt abſolument quarrable (*a*), & à laquelle il donne le nom de *tentorium* ou *tabernaculum Camaldulenſe.* Il eût mieux fait, à notre avis, de ne lui en donner aucun.

Il y auroit encore à dire ſur M. *Viviani* pluſieurs choſes curieuſes que nous ſupprimons à regret. Dans la néceſſité où nous ſommes d'abréger, nous renvoyons nos Lecteurs à ſon éloge hiſtorique qu'on lit dans l'Hiſtoire de l'Académie de l'année 1703. Nous nous bornerons ici à leur apprendre qu'il mourut au mois de Septembre de cette même année, âgé de 81 ans.

Le P. *Grandi*, dans une lettre qui ſuit ſa démonſtration des théorêmes d'*Huyghens*, cite pluſieurs fois avec éloge le Géometre *Jean Ceva*, Auteur d'un ouvrage intitulé *Geometria motus* (1692. in-4°. Bon.) C'étoit le frere du P. *Thomas Ceva*, Jéſuite, habile Géometre lui-même, & connu par diverſes Poëſies Latines, parmi leſquelles eſt un Poëme élégant ſur la Phyſique ancienne & moderne. *Jean Ceva* traitoit dans ſon ouvrage de la méthode des tangentes par la compoſition du mouvement; c'eſt du moins ce que font conjecturer les citations que je viens d'indiquer. Je trouve encore quelques opuſcules de ce Géometre ou de ſon frere, ſous ces titres: *De lineis rectis conſtructio Statica* (1678): *de flexi-lineis, &c.* Mais je ſuis obligé de me borner à cette ſtérile indication, n'ayant point pu m'en procurer la vue.

(*a*) M. Jean Bernoulli avoit déja annoncé dans les Actes de Leipſick 1695, cette propriété du cône droit. Il y avoit remarqué que ſi ſur ſa baſe on a une figure quelconque ſur laquelle on éleve un priſme droit, la portion de ſurface qu'il retranche du côté du ſommet, eſt en raiſon donnée avec la figure propoſée. Cela eſt facile à démontrer, & il ne l'eſt pas moins de voir qu'on peut par ce moyen retrancher de la ſurface du cône tant de portions abſolument quarrables qu'on voudra.

Fin du Livre I.

HISTOIRE

HISTOIRE
DES
MATHÉMATIQUES.

QUATRIEME PARTIE,

Qui comprend l'Hiſtoire de ces Sciences pendant le dix-ſeptieme ſiecle.

LIVRE SECOND.

De la Géométrie & de l'Analyſe, traitées à la maniere de Deſcartes, juſqu'à la fin du dix-ſeptieme ſiecle.

SOMMAIRE.

I. *Cauſe de la lenteur des progrès de la Géométrie, & en quoi l'Analyſe algébrique les a accélérés.* II. *Découvertes d'Harriot ſur la nature des équations. Examen de pluſieurs de celles que lui attribue Wallis.* III. *D'Albert Girard.* IV. *De Deſcartes. Traits abrégés de ſa vie. Expoſition de ſes découvertes purement analytiques. Sa défenſe contre Wallis.* V. *Des découvertes géométriques de Deſcartes. Il applique l'analyſe algébrique à la théorie des courbes, avantages de cette application. Solution qu'il donne d'un problême où avoit échoué l'An-*

tiquité. Sa conſtruction des équations cubiques, quarré-quarrées, & du ſixieme degré. Examen de quelques-unes de ſes opinions concernant la ſimplicité des conſtructions géométriques. De ſes ovales. VI. *De la méthode des tangentes de Deſcartes. Application de ſon principe à celle* de Maximis & Minimis, *à l'invention des points d'inflexion, &c. Uſage de la méthode des tangentes pour la détermination des aſymptotes.* VII. *De M. de Fermat. Sa regle* de Maximis & Minimis. *Sa méthode des des tangentes. Querelle qu'il a à ce ſujet avec Deſcartes. Autres inventions analytiques de Fermat.* VIII. *Quel accueil reçoit l'analyſe de Deſcartes ; Roberval prétend y relever des fautes. M. de Beaune eſt le premier à en pénétrer les myſteres. Origine du problême inverſe des tangentes ; problême propoſé par M. de Beaune à Deſcartes, & juſqu'où celui-ci y pénetre. De divers autres Géometres qui cultivent l'analyſe de Deſcartes; de Schoten, de ſon Commentaire & de ſes autres écrits. De M. de Witt. De M. Hudde. De M. Van-Heuraet, M. Huyghens, &c.* IX. *Progrès que fait la méthode* de Maximis & Minimis, *& celle des tangentes entre les mains de MM. Hudde; Huyghens; de Sluſe.* X. *De la conſtruction des équations. Méthode de M. de Sluſe. Inventions de quelques autres Géometres concernant ce ſujet.* XI. *Sur la réſolution des équations ; progrès de cette partie de l'analyſe.* XII. *Ouvrages principaux qui traitent de l'analyſe de Deſcartes.*

I.

La nouvelle forme qu'a pris l'analyſe entre les mains des Géometres du ſiecle paſſé, eſt une des cauſes principales des rapides progrès qui ont amené la Géométrie au point où elle eſt aujourd'hui. Tant que les rapports dont la recherche occupa les Géometres ne furent pas trop compliqués, les méthodes anciennes purent les aider à les démêler. C'eſt par leurs ſecours qu'ils firent les découvertes profondes qui nous ont ocupés juſqu'ici; découvertes qui ont d'autant plus de droit à notre eſtime, que les moyens par leſquels ils y parvinrent étoient plus laborieux, & qu'il étoit plus facile de ſe tromper en les employant. Ils pénétrerent auſſi avant que les inſtrumens, qu'on me permette ce terme, dont ils étoient en poſſeſſion leur purent ſervir, & ils en tirerent ſouvent un parti que ne ſoupçonneroient pas ceux qui ne connoiſſent que la nouvelle Géo-

métrie. Mais enfin il étoit de la nature de ces inſtrumens de ne pouvoir les aider que juſqu'à un certain point, & lorſqu'après avoir épuiſé les recherches qui étoient à leur portée, ils voulurent s'élever à des ſpéculations plus difficiles, ils échouerent devant des difficultés qu'une analyſe moins ſçavante, mais plus commode, ſurmonte aujourd'hui ſans peine.

La principale cauſe qui rend l'analyſe ancienne inſuffiſante dans des queſtions d'un certain ordre, eſt ſon aſſujettiſſement néceſſaire à une ſuite de raiſonnemens développés. Si l'on ne peut les ſuivre qu'avec peine, à plus forte raiſon ne les peut-on former ſans une contention extrême d'eſprit, ſans des efforts extraordinaires de mémoire & d'imagination. Faut-il donc s'étonner que la même méthode qui dans certaines queſtions préſente une clarté lumineuſe, devienne obſcure & impraticable dans d'autres où la complication des rapports eſt fort ſupérieure.

Le premier pas à faire pour mettre l'analyſe en état de ſurmonter ces difficultés, étoit donc d'en changer la forme, & de ſoulager l'eſprit de ce fardeau accablant de raiſonnemens. Rien de plus heureux pour cet effet que l'idée qu'on a eue de réduire ces raiſonnemens, en une ſorte d'art ou de procédés techniques qui après les premiers pas n'exigent preſque plus aucun travail d'eſprit. L'Arithmétique & l'Algebre ordinaire nous en offrent des exemples. Car qu'eſt-ce qu'une opération arithmétique, ſinon un procédé méchanique pour la plûpart des hommes, mais qui eſt cependant le tableau & l'équivalent des opérations laborieuſes auſquelles l'eſprit ſeroit réduit ſans ce ſecours? L'analyſe algébrique d'un problême ſur les nombres n'eſt encore autre choſe qu'une ſuite de raiſonnemens écrits en abrégé, & qui ſans contention & preſque méchaniquement, conduiſent au même but que ſi l'eſprit les eût ſuivis. Rien n'empêche de ſe ſervir d'un ſemblable artifice dans la Géométrie. Les grandeurs qu'elle conſidere ſont ſuſceptibles des mêmes calculs: toute eſpece d'étenduc peut être déſignée par des nombres; car une ligne, par exemple, n'eſt d'une certaine grandeur que parce qu'elle en contient une autre priſe pour meſure ou comme unité, un certain nombre de fois: il en eſt de même des ſurfaces, &c. On pourra conſéquemment les repréſenter comme ſi c'étoient des nombres,

par des ſignes univerſels. Mais toutes les propriétés des figures ne conſiſtent qu'en ce que certaines dimenſions ſont à d'autres dans un certain rapport. Dans le cercle, par exemple, le quarré de la perpendiculaire tirée d'un point ſur le diametre eſt égal au rectangle ou au produit des deux ſegmens de ce diametre : on pourra donc encore exprimer ces dimenſions par leurs rapports mutuels, & les analyſer comme on a vu qu'on le faiſoit dans les queſtions purement numériques. Voilà l'analyſe algébrique, voilà l'application de l'Algebre à la Géométrie.

I I.

On a expoſé dans un des Livres précédens les diverſes inventions dont le célebre *Viete* enrichit l'analyſe : on y a vu les méthodes qu'il imagina pour la réſolution des équations du troiſieme degré, la conſtruction ingénieuſe qu'il en donna par le moyen des deux moyennes proportionnelles, ou de la triſection de l'angle, la décompoſition des équations du quatrieme degré par le moyen de celles du troiſieme, la formation des puiſſances, le commencement enfin de l'analyſe des équations ſi vivement revendiquée à *Harriot* par *Wallis*. Tel étoit l'état de l'analyſe au commencement du dix-ſeptieme ſiecle, & où elle reſta aſſez long-temps. La plûpart de ceux qui la cultiverent ſe bornerent preſque à éclaircir, ou à énoncer en d'autres termes ce que *Viete* avoit enſeigné. Nous diſtinguerons cependant parmi ces Analiſtes, *Guillaume Ougthred* (*a*), dont on a quelques ouvrages eſtimables dans ce genre. Il développa davantage l'application de l'analyſe aux problêmes géométriques, la conſtruction des équations, la formation des puiſſances, les formules pour les ſections angulaires, &c. Mais la plûpart de ces choſes ne paſſent guere ce qu'on pourroit nommer l'analyſe élémentaire, ou ce qu'on tenoit déja de *Viete*. C'eſt pourquoi il ſeroit inutile de nous y arrêter davantage.

(*a*) Guillaume Ougthred étoit né en 1573, & mourut en 1660, d'un tranſport de joie, en apprenant la réſolution priſe par le Parlement de rappeller Charles II. Outre ſa *Clavis Geometrica*, on a de lui divers ouvrages publiés en divers temps, & qui ont été raſſemblés pour la plûpart, & imprimés ſous le titre d'Opuſcules en 1667.

Découvertes d'Harriot sur les équations.

C'eſt à *Harriot* (*a*) que l'analyſe doit les premiers progrès qu'elle fit au-delà de ceux que *Viete* lui avoit procurés le ſiecle precédent. On lui eſt redevable de l'importante découverte de la nature & de la formation des équations, découverte ébauchée par *Viete*, & qu'il développa avec beaucoup de ſagacité. L'ouvrage dans lequel il l'expoſe, eſt intitulé, *Artis analyticæ praxis*, & parut à Londres en 1631, dix ans après la mort de ſon Auteur. Il entre dans notre plan de donner le précis de ce qu'il contient de plus remarquable.

Le premier pas d'*Harriot*, eſt de ne s'être point borné à conſidérer les équations ſous la forme uſitée juſqu'alors, c'eſt-à-dire en égalant les termes où entre la quantité inconnue à celui qui contient la connue. *Harriot* fait paſſer dans l'occaſion ce dernier terme du même côté que les autres, & l'affectant d'un ſigne contraire à celui qu'il avoit, il égale toute l'expreſſion à zero. Cela eſt naturel, & dans les regles de l'analyſe algébrique ordinaire; ſi $x = b$, on aura auſſi $x - b = 0$: & ſi $x^2 - 20x = 9$, il eſt également vrai que $x^2 - 20x - 9 = 0$. Il eſt enfin évident que toute valeur poſitive ou négative, qui miſe à la place de x & de ſes puiſſances dans une équation réduite à cette forme, la rendra égale à zero, ſera la valeur, ou une des valeurs de x, puiſqu'elle ſatisfera à la condition indiquée par cette expreſſion. Il nous faut cependant remarquer, pour n'accorder à *Harriot* que ce qui lui eſt dû en ce qui concerne cette maniere de conſidérer les équations, il nous faut, dis-je, remarquer qu'il fut bien éloigné d'en faire tout l'uſage qu'il pouvoit, & d'en ſentir tout l'avantage. Ce n'eſt qu'en paſſant, & dans un ſeul chapitre de ſon ouvrage qu'il l'emploie: partout ailleurs, & même là, lorſqu'il propoſe une équation, il lui donne la forme ordinaire, & c'eſt ſeulement dans le cours de la démonſtration que, faiſant paſſer tous les termes d'un côté, il égale l'expreſſion entiere à zero; mais il revient promptement à la forme uſitée, comme ſi cette autre faiſoit en quelque ſorte violence à la nature.

J'étonnerai ſans doute pluſieurs de mes Lecteurs, lorſque

(*a*) Thomas Harriot, né à Oxford en 1560, mort en 1621.

je remarquerai encore qu'*Harriot* n'eut qu'une idée fort peu développée des racines négatives ; mais quelque ſinguliere que paroiſſe cette prétention à ceux qui ne connoiſſent cet Analiſte & ſes travaux que par le pompeux étalage des découvertes que lui attribue *Wallis*, la preuve en ſera facile : car premiérement parmi les formes d'équations générales, de quelque degré que ce ſoit, il omet toujours celles qui ne donnent que des racines négatives ; en ſecond lieu, lorſqu'il propoſe une équation qui contient des racines négatives & poſitives, comme $x + (a - b)x - ab = 0$, ou x eſt également b ou $-a$, ſuivant la doctrine vulgaire des équations du ſecond degré, il ne parle que de la valeur poſitive, & il en uſe de même à l'égard des équations d'un genre plus élevé. En troiſieme lieu, & ceci va achever de démontrer ce que nous avançons, lorſqu'il examine les équations du troiſieme degré, & les différentes valeurs de l'inconnue, il n'eſt jamais queſtion que des poſitives ; c'eſt par cette raiſon qu'il dit (*a*) que l'équation $x - 3bbx = -2c$, n'eſt explicable que par deux racines, lorſque c eſt moindre que b ; en effet dans ce cas & dans cette forme d'équation il n'y a que deux valeurs poſitives, & la troiſieme eſt négative. Delà vient encore ce qu'il dit, (*b*) ſçavoir que l'équation $x^3 - 3bbx = 2c^3$, n'eſt explicable que d'une racine : effectivement, ſi c eſt moindre que b, il n'y en a qu'une dans ce cas ſi l'on n'a égard qu'aux poſitives ; mais il y en a auſſi deux autres qui ſont négatives, & dont l'Analiſte Anglois ne tient aucun compte. Il s'en explique même d'une façon poſitive dans un endroit (*c*) où il nomme ces ſortes de racines, *privatives* ; mais ce n'eſt que pour nous dire qu'il n'a point conſidéré les équations qui en ſont toutes compoſées, parce qu'elles ſont inutiles. On voit par-là que ſi *Harriot* connut ces racines, il ne nous a rien dit à leur ſujet de plus que *Cardan*, qui les avoit auſſi connues, & qui les avoit appellées, *feintes*. Ainſi c'eſt un article qu'il faut retrancher du prolixe Catalogue que *Wallis* a dreſſé de ſes découvertes.

La découverte fondamentale d'*Harriot*, celle qui l'illuſ-

(*a*) *Art. Analyt. praxis. Sect.* 5, prop. 4.
(*b*) Ibid. prop. 3.
(*c*) Ibid. pag. 27.

tre parmi les Analiſtes, conſiſte à avoir remarqué que toutes les équations d'ordres ſupérieurs ſont des produits d'équations ſimples. Cela ſe montre de cette maniere. Qu'on prenne tant qu'on voudra d'équations ſimples, telles que $x \pm a = 0$; $x \pm b = 0$; $x \pm c = 0$, & avec telle combinaiſon de ſignes qu'on voudra, par exemple, celles-ci, $x + a = 0$; $x - b = 0$; $x + c = 0$; qu'on les multiplie enſemble, il en naîtra un produit qui ſera dans le cas préſent $x^3 + (a - b + c)\, x^2 - (ab + bc - ac)\, x - abc = 0$: ce qui eſt une équation du troiſieme degré, parce que nous avons eu trois facteurs. Or il eſt facile de ſe convaincre par l'expérience que, ſi dans cette expreſſion au lieu de x & de ſes puiſſances, on ſubſtitue $-a$, ou b, ou $-c$ elle deviendra toute égale à 0. Il eſt donc évident que x a trois valeurs, puiſque chacune d'elles ſatisfait aux conditions de l'expreſſion. La même choſe paroîtra encore plus clairement en ſe ſervant d'exemples numériques. Prenons $x - 1 = 0$; $x + 9 = 0$; $x - 7 = 0$: le produit eſt $x^3 + x^2 - 65x + 63 = 0$, ou $x^3 + x^2 - 65x = -63$. Si dans cette expreſſion on fait x égal à 1, ou à -9, ou à 7, l'équation ſe vérifiera, car on aura dans le premier cas $1 + 1 - 65 + 63$, ce qui eſt effectivement égal à zero. Dans le ſecond ce ſera $-729 + 81 + 585 + 63 = 0$: ce qui eſt encore vrai. Il en ſera de même dans le troiſieme cas, comme il eſt facile de le vérifier.

De cette génération des équations découle une foule de vérités intéreſſantes dans l'analyſe. La premiere eſt que dans toute équation il y a autant de valeurs, que le degré qui la dénomme, a d'unités. Une du ſecond degré en aura deux, une du troiſieme, trois, &c (*a*). Quand nous diſons des valeurs, nous entendons dire ſoit réelles, c'eſt-à-dire poſitives

(*a*) Cette vérité qu'on vient de démontrer par induction, ſe démontre auſſi directement par ce moyen. Qu'on propoſe une équation quelconque, telle que celle-ci, $x^3 \pm A\, x^2 \pm B\, x \pm C = 0$, où A, B, C, déſignent des quantités quelconques connues; prenons maintenant autant d'équations ſimples $x + a = 0$, $x + b = 0$, $x + c = 0$, leur produit eſt $x^3 + (a + b + c)\, x^2 + (ab + ac + bc)\, x + abc = 0$. Si donc on égale le coefficient du ſecond terme de l'une de ces équations, avec celui du ſecond terme de l'autre, celui du troiſieme avec celui du troiſieme, &c. on aura préciſément autant d'équations qu'il y a d'inconnues a, b, a. Il en ſera de même dans les équations d'ordres plus relevées. Ainſi chacune des grandeurs a, b, c, &c. a une valeur déterminée: toute équation eſt donc le produit d'autant d'équations ſimples qu'il y a d'unités dans l'expoſant de l'ordre dont elle eſt.

ou négatives, ſoit imaginaires. Rien n'empêche qu'il n'y en ait dans toute équation pluſieurs de cette derniere eſpece; car une équation du ſecond degré peut en contenir deux. Telle eſt, par exemple, celle-ci, $x^2 - 2x + 9$, où x eſt égale à $1 + \text{ou} - \sqrt{-8}$. Mais il peut y avoir une équation formée de la précédente, multipliée par une autre équation ſimple : celle-ci, par exemple, $x^3 + 2x^2 - x + 45 = 0$, vient de l'équation ci-deſſus multipliée par $x + 5 = 0$. Elle aura donc deux valeurs imaginaires, ſçavoir $1 + \sqrt{-8}$, & $1 - \sqrt{-8}$, & une réelle -5. Cette conſidération nous conduit en même temps à ſçavoir une remarque utile concernant les racines imaginaires ; qu'elles marchent toujours en nombre pair. Car elles doivent toujours être accouplées de ſorte que leur produit forme une expreſſion où il n'entre rien d'imaginaire, & cela ne pourra arriver que lorſque deux à deux elles formeront une équation réelle du ſecond degré. Ainſi une équation d'un degré pair quelconque, ou un problême qui y conduiroit, pourroit être impoſſible n'y ayant dans cette équation que des racines imaginaires ; mais toute équation de degré impair, comme celles du troiſieme, du cinquieme, &c. aura du moins une ſolution.

Reprenons maintenant la forme d'équations où les racines de l'inconnue ſont exprimées par des lettres, car elle nous ſera plus commode pour reconnoître la compoſition de chaque terme, les traces des opérations ne s'y effaçant point comme dans la forme numérique. Suppoſons donc une équation du quatrieme degré formée de ces quatre, $x - a = 0$; $x - b = 0$; $x - c = 0$; $x + d = 0$: leur produit eſt l'équation $x^4 - (a + b + c - d)\, x^3 + (ac + ab + cb - ad - cb - bd)\, x^2 - (abc - acd - abd - cbd)\, x - abcd = 0$. Les racines de cette équation ſont a, b, c, $-d$: or la ſeule inſpection nous montre que le coefficient du ſecond terme eſt la ſomme de toutes les racines miſes avec des ſignes contraires, c'eſt-à-dire avec le ſigne $-$, ſi elles ſont poſitives, & avec celui de $+$, ſi elles ſont négatives. Celui du troiſieme eſt la ſomme des produits des mêmes racines, faits en les multipliant deux à deux ; celui du quatrieme eſt celle des produits de ces racines priſes trois à trois, & affectés de ſignes contraires ; celui du quatrieme, celle des racines priſes quatre à quatre, &c.

&c. enfin celui du dernier, le produit de toutes les racines, pris avec ſon ſigne ſi le rang de ce terme eſt impair, ou avec le ſigne contraire, s'il eſt pair.

Ce qu'on vient de dire ſur la formation des équations, conduit à une méthode pour réſoudre non ſeulement celles du troiſieme degré, mais celles des degrés quelconques au deſſus. Car, puiſque la quantité connue eſt le produit de toutes les racines de l'équation, ſi ces racines ſont rationnelles & entieres, elles ſeront néceſſairement quelques-uns des diviſeurs de ce dernier terme. Il faudra donc eſſayer quel d'entr'eux mis à la place de l'inconnue poſitivement ou négativement, rendra l'équation égale à zero. Si cela réuſſit, ce ſera une des valeurs de l'inconnue. Donnons-en un exemple : que l'équation propoſée ſoit $x^3 - 17x^2 + 79x - 63 = 0$. Les diviſeurs de 63 ſont 1, 3, 7, 9, 21, 63; par conſéquent ſi une des racines de l'équation eſt un nombre entier, ce doit être un d'eux. En effet ſi au lieu de x on met dans cette expreſſion 1, ou 7, ou 9, tous les termes ſe détruiront. Les valeurs de l'inconnue ſeront donc 1, ou 7, ou 9, & l'équation ſera diviſible par $x - 1$, ou $x - 7$, ou $x - 9$. De même dans l'équation $x^3 - 34x - 45 = 0$: les diviſeurs de 45 ſont 1, 3, 5, 9, 15, 45; en les eſſayant les uns après les autres, on trouve que -5 étant ſubſtitué à la place de x, l'équation ſe détruit; c'eſt pourquoi l'une des racines eſt -5, & diviſant cette équation par $x + 5$, on l'abaiſſe à celle-ci $x^2 - 5x - 9 = 0$, dont les racines ſont $\frac{5}{2} + \sqrt{15\frac{1}{4}}$ & $\frac{5}{2} - \sqrt{15\frac{1}{4}}$: ſi aucune de ces ſubſtitutions ne réuſſit, c'eſt un ſigne que la racine de l'équation n'eſt point un nombre rationnel ni entier; il faut recourir à d'autres moyens dont on parlera dans la ſuite.

Tels ſont à peu près les progrès que l'analyſe algébrique dut à *Harriot*. Les découvertes que nous venons d'expoſer, en conſtituent la principale partie; car nous ne mettrons point dans ce rang diverſes remarques dont *Wallis* a groſſi le Catalogue des inventions de cet Analiſte, en même temps qu'il travailloit à exténuer celles de *Deſcartes*. Je ne vois pas beaucoup de mérite à avoir introduit l'uſage des petites lettres au lieu des grandes, à avoir écrit tout de ſuite

les puiſſances par des lettres répétés, comme *aaa*, au lieu de A^c, ainſi qu'on le faiſoit avant lui. Encore moins doit-on regarder comme des découvertes d'*Harriot* la maniere de multiplier, de diviſer, d'augmenter ou de diminuer les racines d'une équation ſans les connoître, de faire diſparoître le ſecond terme, les fractions & les irrationalités : tout cela fut connu à *Viete*. La méthode qu'*Harriot* emploie pour réduire les équations cubiques aux formules de *Cardan*, eſt encore à très-peu de choſe près, celle de l'Analiſte François. On connoiſſoit auſſi avant lui que les équations cubiques qui conduiſent au cas irréductible, ont cependant des racines réelles. Cette vérité avoit été démontrée par *Viete* dès l'année 1593, puiſqu'il avoit conſtruit ces équations par la triſection de l'angle, que dis-je, elle avoit été connue à *Bombelli* dont l'ouvrage avoit paru l'année 1579. Comment excuſerons-nous M. *Wallis* qui, nous donnant un Traité hiſtorique de l'Algebre, ſemble avoir à peine jetté les yeux ſur tout autre Analiſte qu'*Harriot*, & après avoir traité *Deſcartes* de plagiaire, & avoir déprimé, autant qu'il l'a pu, ſes inventions, forme en grande partie l'énumération de celles de ſon compatriote, de choſes ou peu importantes, ou empruntées de ſes prédéceſſeurs. Qui pourra même ne pas rire en voyant ce zélé reſtaurateur de la gloire d'*Harriot*, lui attribuer, je ne dis pas ſeulement la réſolution des équations du ſecond degré par l'évanouiſſement du ſecond terme, invention de *Viete*, mais encore la méthode vulgaire qui procede, comme on ſçait, en ajoutant de part & d'autre de quoi faire un quarré parfait du membre où eſt l'inconnue (*a*). La partialité & l'aveuglement qui en eſt la ſuite ordinaire ne ſçauroient être portés plus loin.

III.

Albert Girard.

Nous trouvons ici un Analiſte Hollandois peu connu, & qui mérite par quelques circonſtances de l'être davantage. Il ſe nommoit *Albert Girard:* on a de lui un ouvrage qui parut en 1629, ſous le titre d'*Invention nouvelle en Algebre* (*b*), &

(*a*) *Peculiarem*, dit-il, *oſtendit methodum æquationes quad. reſolvendi complendo quadratum in ſpeciebus.* De Alg. c. 53, p. 206.

(*b*) Je n'ai jamais vu cet ouvrage, mais Schooten le cite, & en a extrait pluſieurs choſes, dans ſon Commentaire ſur la Géométrie de Deſcartes, *Voyez p. 345, & ſuiv.*

qui eſt remarquable en ce qu'on y trouve une connoiſſance des racines négatives plus développée que dans ceux de la plûpart des autres Analiſtes. L'objet de ce Livre eſt de montrer que dans les équations cubiques qui conduiſent au cas irréductible, il y a toujours trois racines, deux poſitives & une négative, ou au contraire. *Viete*, à la vérité, avoit déja conſtruit ces équations, mais il s'étoit borné à aſſigner les racines poſitives; *Girard* développant davantage cette conſtruction, va plus loin, & aſſigne auſſi les négatives qu'il appelle *par moins*. Du reſte, nous ignorons ce qu'il penſoit à leur ſujet: il eſt fort probable qu'à l'exemple de *Cardan* & des autres Analiſtes qui les avoient entrevues, il les réputoit inutiles. C'eſt à *Deſcartes*, comme nous l'allons voir, qu'eſt dûe la connoiſſance diſtincte de leur nature & de leur uſage.

IV.

Découvertes analytiques de Deſcartes.

On ne ſçauroit donner une idée plus juſte de ce qu'a été l'époque de *Deſcartes* dans la Géométrie moderne, qu'en la comparant à celle de *Platon* dans la Géométrie ancienne. Celui-ci, en inventant l'analyſe, fit prendre à cette ſcience une face nouvelle, l'autre par la liaiſon qu'il établit entr'elle & l'analyſe algébrique, y a opéré de même une heureuſe révolution. La découverte de l'analyſe donna lieu à diverſes théories ſublimes: la Géométrie a tiré les mêmes avantages de ſon alliance avec l'analyſe algébrique, & aidée de ce ſecours, elle s'eſt ſoumis une multitude d'objets auxquels elle n'avoit encore pu atteindre. De même enfin que *Platon* prépara par ſa découverte celles des *Archimede*, des *Appollonius*, &c. on peut dire que *Deſcartes* a jetté les fondemens de celles qui illuſtrent aujourd'hui les *Newton*, les *Leibnitz*, &c.

Nous ſommes obligés de nous borner ici à un précis très-abrégé de la vie de cet homme célebre. Il naquit à la Haye en Touraine, le 31 Mars 1596; & dès ſon enfance il montra tant de curioſité pour toutes les connoiſſances naturelles, que ſon pere le nommoit par diſtinction, *ſon Philoſophe*. Il paſſa une partie de ſa jeuneſſe à voyager dans des vues philoſophiques, & enfin l'amour de la liberté & de la retraite lui fit choiſir le ſéjour de la Hollande. Ce fut-là qu'il publia la

plûpart de ſes ouvrages. Si l'on n'y trouve pas toujours la vérité, on ne peut y méconnoître le génie, & ce qui le caractériſe, cette noble liberté qui fait profeſſion de ne rien admettre qui ne ſoit examiné ſans préjugés, & d'après de ſolides principes. C'eſt ſurtout par-là que *Deſcartes* a contribué à l'avancement de la Philoſophie. *Galilée* & *Bâcon* avoient commencé à affranchir l'eſprit humain, mais c'eſt le Philoſophe François qui a achevé de lui rendre la liberté, & qui a hâté la révolution. *Deſcartes* mourut, comme tout le monde ſçait, en 1650, à la Cour de la Reine Chriſtine, qui l'avoit engagé de venir auprès d'elle, afin de pouvoir jouir de ſes entretiens. Dix-ſept ans après ſon corps fut apporté en France, & dépoſé dans l'Egliſe de Sainte Géneviéve, où on lui a dreſſé un monument conſiſtant en ſon buſte en bas-relief, avec une inſcription peut-être trop pompeuſe aujourd'hui, vu la grande révolution qu'a éprouvé ſa Philoſophie.

C'eſt de la Géométrie que *Deſcartes* tire aujourd'hui la partie la plus ſolide, & la moins conteſtée de ſa gloire; & c'eſt celui de ces ouvrages qui la concerne qui doit ſeul nous occuper ici: les autres (*a*) trouveront leur place ailleurs. La Géométrie de *Deſcartes* parut en 1637, & elle eſt le troiſieme des Traités qui ſuivent ſa *méthode*, comme des exemples qu'il a voulu en donner dans ces trois principaux genres, la Phyſique, les Mathématiques mixtes & la Géométrie pure. On ne doit pas y chercher le mérite de l'ordre & des développemens; ce ſont les idées d'un homme de génie qui ne ſuit pas la marche des eſprits ordinaires, & qui content de dévoiler les principes, laiſſe aux lecteurs le ſoin d'en faire l'application, & d'en tirer les conſéquences.

Deſcartes commence ſa Géométrie par donner la ſolution d'une difficulté que s'étoient faite les Anciens & les Modernes concernant les puiſſances au deſſus du cube. Qu'eſt-ce qu'un

(*a*) Ces autres ouvrages ſont ſa Méchanique, ſa Dioptrique, & ſes principes ou l'expoſition de ſon ſyſtême de l'Univers. Nous ne dirons rien de ſes écrits purement Phyſiques ou Métaphyſiques, l'énumération en ſeroit longue, & n'eſt pas de notre objet. On a outre cela trois volumes (*in*-4°.) de lettres de Deſcartes, ou de diverſes perſonnes avec qui il étoit en relation. Elles contiennent pluſieurs choſes concernant la Géométrie & les Mathématiques. On trouve enfin dans ſes *Opera poſthuma*, publiés en 1701, quelques morceaux peu importans de Géométrie ou d'Analyſe.

quarré quarré, ou le produit de quatre lignes, demandoient-ils, puiſqu'il ne peut y avoir d'étendue compoſée de plus de trois dimenſions? *Pappus* recourt aux raiſons compoſées, ce qui eſt prolixe & embrouillé. M. *Deſcartes* montre plus clairement que ce ne ſont que des proportionnelles continues ou diſcretes, à l'unité ou une ligne priſe conſtamment pour telle dans le cours de la queſtion, & aux lignes données. Ainſi a^5 eſt la cinquieme proportionnelle à l'unité, & à a; de même ab eſt la quatrieme proportionnelle à l'unité, à a & à b : abc eſt la quatrieme proportionnelle à cette unité, à ab & à c, & ainſi des autres produits plus compoſés. Nous pourrions encore remarquer que *Deſcartes* eſt l'auteur de l'uſage d'écrire les puiſſances avec leurs expoſans numériques : nous y ſerions plus fondés que ne l'eſt *Wallis*, à faire un mérite à ſon compatriote d'avoir ſubſtitué de petites lettres aux grandes dont ſe ſervoient avant lui les Analiſtes : mais nous ne ferons pas, pour rehauſſer le mérite de *Deſcartes*, un vain étalage de ces minuties, propres ſeulement à parer quelqu'autre moins riche.

C'eſt à *Deſcartes*, nous le répéterons ici, qu'eſt dûe la connoiſſance de la nature & de l'uſage des racines négatives, & il eſt le premier qui les ait introduites dans la Géométrie & dans l'analyſe. Doué, comme il étoit, d'un eſprit métaphyſique, il apperçut qu'il ne pouvoit y avoir de quantités moindres que zero, & que ce ne pouvoient être que des quantités priſes en ſens contraire de celles qui ſont affectées poſitivement. En effet le ſigne — n'eſt que celui de la ſouſtraction, & ôter d'une quantité priſe en un certain ſens, par exemple, en montant, plus que cette quantité même, c'eſt deſcendre du ſurplus qui ſe trouve affecté du ſigne —. A la vérité, le nom de *fauſſes* que *Deſcartes* donne aux racines négatives, ſembleroit déſigner qu'il n'en eut pas une idée auſſi juſte qu'on vient de le dire : mais l'emploi preſque continuel qu'il en fait dans ſa Géométrie & de la maniere convenable, détruit entiérement cette objection.

Deſcartes enrichit la théorie d'*Harriot* ſur la formation des équations d'une très-belle découverte, très-belle, dis-je, malgré la limitation qu'il y faut mettre, & les efforts de *Wallis* pour la déprimer. C'eſt une regle pour déterminer par la ſeule inſpection des ſignes le nombre des racines poſiti-

ves & négatives dans une équation. Dans toute équation, dit *Deſcartes*, *il peut y avoir* autant de racines vraies, (c'eſt-à-dire poſitives,) qu'il y a de changemens de ſignes ou de paſſages du ſigne + au ſigne —, ou au contraire, & autant de fauſſes, (c'eſt-à-dire de négatives,) qu'il y a de ſucceſſions du même ſigne. Dans cette équation, par exemple, $x^3 - 17x^2 + 79x - 63 = 0$, il y a trois changemens de ſignes; auſſi les trois racines ſont poſitives, ſçavoir 1, 7, 9: multiplions la par $x+4$, nous aurons celle-ci, $x^4 - 13x^3 + 11x^2 + 253x - 252 = 0$, où il y a effectivement trois changemens de ſignes qui indiquent les trois racines poſitives, & une ſucceſſion du même ſigne à cauſe de la racine négative.

La limitation de cette regle annoncée plus haut conſiſte en ce qu'il faut que l'équation n'ait aucune racine imaginaire, & elle ne fut pas inconnue à *Deſcartes*. On ne lui voit pas dire d'une maniere générale, *il y a* dans toute équation autant de racines poſitives que de changemens de ſignes, mais *il peut y avoir*; c'eſt-à-dire qu'elles n'y ſont pas toujours, ſçavoir quand il en a d'imaginaires; c'eſt ainſi que nous dirions qu'un problême qui conduit à une équation du troiſieme degré, par exemple, peut avoir trois ſolutions: car on ne veut pas dire qu'elle les ait toujours, mais qu'elle les aura, s'il n'y a aucune racine imaginaire dans l'équation. Ce fut la réponſe qu'il fit à *Roberval*, qui lui objectoit une équation du quatrieme degré où ſa regle étoit défectueuſe, & qui ne laiſſa pas de renouveller dix ans après cette objection avec une opiniâtreté qui lui fait peu d'honneur. *Wallis* qui a le chagrin de trouver chez le Géometre François une invention qu'il ne peut s'empêcher de qualifier d'*aſſez belle*, ne manque pas de rabaiſſer auſſi-tôt le mérite de ſon Auteur, en prétendant qu'il en ignora la limitation. Telle eſt enfin la précipitation de certaines gens, qu'on voit encore M. *Rolle* faire à *Deſcartes* un procès à ce ſujet. On pourroit demander à ces adverſaires obſtinés de notre Philoſophe, pourquoi il a pu dire, *il peut y avoir*, au lieu d'*il y a*; s'il eût cru ſa regle générale & ſans exceptions. Quand *Wallis* propoſoit une équation, comme $x^4 + 111x^3 + 6x^2 + 1993x + 35878 = 0$, qui ſemble préſenter quatre racines négatives, *Deſcartes* auroit dit ſeulement qu'il y devoit avoir quatre racines de cette eſpece, s'il

n'y en avoit aucune imaginaire, & lorſqu'en multipliant cette équation par $x - 18$, il l'auroit vu prendre une forme qui annonce 5 racines poſitives, il en auroit conclu qu'elle avoit 4 racines imaginaires, & certainement une poſitive. On peut même rendre à la regle de *Deſcartes* toute ſa généralité, en regardant les racines imaginaires comme ambiguës, ou négatives & poſitives à la fois. Dans la premiere équation de *Wallis* il y a quatre racines négatives, & dans la ſeconde cinq racines poſitives, c'eſt-à-dire une réelle & poſitive, & les quatre autres *negativo-poſitives*, ou imaginaires.

Une invention purement analytique & très-importante que *Wallis* n'a point voulu voir dans *Deſcartes*, eſt celle de la *méthode des indéterminés*. Elle conſiſte à ſuppoſer une équation avec des coefficiens indéterminés dont on fixe enſuite la valeur par la comparaiſon de ſes termes avec ceux d'une autre qui lui doit être égale. *Deſcartes* s'en ſert pour la réduction des équations du quatrieme degré aux deux du ſecond dont elles ſont formées par leur multiplication. Voici l'eſprit de ſa méthode fort différente, pour le remarquer en paſſant, de celles de *Ferrari* & de *Viete*, avec leſquelles *Wallis* ſemble la confondre. Il ſuppoſe deux équations du ſecond degré dont les coefficiens ſont indéterminés, & dont les termes ſont tellement formés, que de leur multiplication réſulte une expreſſion ſemblable & égale dans tous ſes termes, excepté le dernier, avec l'équation propoſée. Il les ſuppoſe enſuite égales, d'où il réſulte que leur différence eſt zero, ce qui lui donne une nouvelle équation du troiſieme degré, dont la racine eſt la valeur du coefficient cherché. Cette méthode pour la réſolution des équations du quatrieme degré, eſt aujourd'hui, à quelques changemens près, celle qui eſt en uſage. C'eſt pourquoi je ne m'attache pas à la développer davantage: les Livres ordinaires d'Algebre donneront ſur ce ſujet toutes les inſtructions néceſſaires.

Nous ne pouvons nous diſpenſer de parler ici de l'accuſation de plagiat intentée à *Deſcartes*, pour avoir fait uſage dans ſa Géométrie de la doctrine d'*Harriot* ſur la formation des équations, ſans lui en faire expreſſément honneur. *Wallis* ne tarit point là-deſſus, & entre dans une déclamation auſſi ridicule qu'indécente; mais pour apprécier ces clameurs

quelques remarques ſuffiront. *Wallis* pouvoit facilement en impoſer à ceux qui ne ſçavoient point l'hiſtoire de l'Algebre, par l'expoſé qu'il a fait des découvertes d'*Harriot*, & le ſilence qu'il a gardé ſur toutes celles qui les avoit précédées. Mais ceux qui ont lu cette partie de notre hiſtoire, ont pu voir que la découverte en queſtion étoit ſi bien préparée, qu'il étoit difficile qu'elle échappât davantage à un homme de génie. En effet 1°. *Cardan* & *Albert Girard* avoient parlé diſtinctement des racines négatives, & l'on ne peut refuſer à *Deſcartes* d'en avoir le premier reconnu la nature & l'uſage : en ſecond lieu *Viete* avoit enſeigné la compoſition des coefficiens des équations dans les cas où les racines étoient poſitives. Or de ces deux remarques réunies réſulte en grande partie la découverte d'*Harriot* ; car il ne faut que faire une multiplication de deux ou trois binomes pour voir arriver dans le produit tout ce qu'on obſerve ſur les coefficiens des équations. Il n'y avoit donc qu'un pas à faire pour être en poſſeſſion de la découverte dont nous parlons, & ce pas ne paroîtra point trop grand pour *Deſcartes*, à ceux qui ont une idée convenable du génie de cet homme célebre, génie tel que ce qui coûtoit bien des méditations aux autres Géometres de ſon temps, n'étoit pour lui qu'un jeu, comme le prouvent pluſieurs de ſes lettres.

Admettons néanmoins, ce qui peut être, que *Deſcartes* ait vu l'ouvrage d'*Harriot* publié ſix ans avant ſa Géométrie, & qu'il en ait emprunté cette théorie des équations, doit-on pour cela le traiter de plagiaire ? Nous ne le croyons point, ou il eſt peu de Géometres qui puſſent échapper à cette qualification. Si *Deſcartes* intitulant un Livre *de la nature des Equations*, y eût refondu les découvertes d'*Harriot* ſans rien dire de leur Auteur, il la mériteroit ; mais il a toujours été permis à un Ecrivain d'employer quelques idées étrangeres lorſqu'elles ſervent à préparer ſes découvertes propres, ou à jetter du jour ſur elles, & ſurtout lorſqu'on y ajoute auſſi conſidérablement que *Deſcartes* l'a fait à celles d'*Harriot*.

Mais s'il falloit adopter le principe rigoureux de *Wallis*, où en ſeroit-il réduit lui-même, & celui qu'il éleve avec tant de chaleur ? *Harriot* a-t'il fait quelque part l'aveu de ce qu'il devoit à *Viete*, qui l'avoit précédé dans preſque tout ce qu'il enſeigne

enſeigne ſur la préparation des équations ; ſur la réduction des équations cubiques aux formules de *Cardan*, ſur la réſolution de celles du quatrieme degré par le moyen d'une équation cubique ; ſur la compoſition des termes dans les équations qui n'ont que des racines poſitives, &c. Venons maintenant à *Wallis* : ne ſe donne-t'il pas pour inventeur d'une méthode par laquelle il prétend avoir réſolu le cas irréductible ; méthode enſeignée depuis près de 80 ans par *Bombelli*, & qui n'eſt, ſuivant M. de *Moivre*, (*a*) qu'une pétition de principe. Nous pourrions auſſi remarquer que les deux regles des tangentes qu'il a données en 1672, ne ſont, l'une que celle de M. *de Fermat*, publiée en 1644 par *Hérigone*, dans ſon cours, & l'autre celle de M. *de Roberval*, connue en France dès l'année 1636, & qui ſe trouve d'ailleurs dans les Œuvres de *Torricelli*, publiées en 1644. D'un autre côté, s'il accuſe *Deſcartes* avec tant d'affectation de s'être trompé dans ſa regle pour diſcerner les racines poſitives des négatives, ne nous donne-t'il pas le droit de le traiter avec la même rigueur. Car indépendamment de l'erreur ci-deſſus, il en commet une autre dans la conſtruction qu'il enſeigne des équations cubiques, où il emploie une parabole du troiſieme degré avec une ligne droite ; ce qui eſt une faute & une pétition de principe, puiſqu'il eſt impoſſible de conſtruire cette courbe à tous ſes points ſans la réſolution générale des équations cubiques. *Harriot* enfin, qu'il met à tant d'égards au deſſus de *Deſcartes*, & ſurtout comme ayant donné des regles plus ſûres pour le diſcernement des différentes eſpeces de racines dans les équations, n'eſt pas plus exempt d'erreur. M. *Hallei* a remarqué (*b*) qu'il s'eſt trompé, en ce qui concerne la détermination des racines réelles & imaginaires dans les équations cubiques. Cette récrimination au reſte n'a point pour objet de déprimer des hommes qui ont ſi bien mérité des Mathématiques, mais ſeulement de montrer l'injuſtice des clameurs de *Wallis* contre *Deſcartes*. Pour avoir le droit, je ne dis pas de remarquer l'erreur d'un grand homme, mais de la lui reprocher, il faut en être ſoi-même parfaitement exempt.

(*a*) *Tranſ. Phil.* n°. 451.
(*b*) *Tranſ. Phil.* ann. 1687, n°. 193.

Nous ne pouvons nous empêcher de relever encore quelques traits de la partialité finguliere de *Wallis* envers ſon compatriote, & de ſon déchaînement contre *Deſcartes*. De ce que l'ouvrage d'*Harriot* a paru le premier, il conclud que le Philoſophe François a dû le connoître, & qu'il en a profité. Mais trouve-t'on dans des écrits d'Analiſtes antérieurs à *Harriot*, des idées que celui-ci a employées; ſuivant ſon zele panégyriſte, il ne les a point connus : c'eſt ſon compatriote enfin, tout eſt ſon ouvrage, tout lui eſt dû juſqu'à la réſolution ordinaire des équations du ſecond degré. A l'égard des Analiſtes François, c'eſt un autre poids, une autre balance. D'abord il omet ou il extenue tout ce qu'il y a d'original dans la Géométrie de *Deſcartes*. Il ne forme preſque l'énumération de ce qu'elle contient que de ce qu'il y a de plus trivial en Algebre; il lui fait même en quelque ſorte un crime d'avoir fait uſage des opérations les plus ſimples de l'Algebre, & peu s'en faut qu'il ne le traite de plagiaire. Forcé cependant de reconnoître cette belle regle pour la diſtinction des racines poſitives & négatives, il la met bien au deſſous de celle d'*Harriot ;* jugement que n'ont point confirmé les Analiſtes qui ſe ſervent tous les jours de celle de *Deſcartes*, & qui ont oublié l'autre. Cet homme enfin, ſi aſſuré quand il s'agit d'attribuer à *Harriot* des découvertes qui ne lui appartiennent point, s'il laiſſe à *Viete*, à *Deſcartes* quelques bagatelles, ne manque point de craindre toujours de leur en trop accorder. Ces formules dubitatives, *& fortè antè eum alii ; neſcio an non ante eum alii*, ou d'autres ſemblables, ſont le plus ſouvent employées. Lorſqu'il arrive aux découvertes mixtes de notre Géometre, il élude adroitement ce point embarraſſant, ſous le prétexte qu'elles ne ſont point d'analyſe pure, comme ſi l'Algebre n'avoit pas autant gagné à ſon alliance avec la Géométrie que celle-ci même. Cependant ſa haine contre *Deſcartes* ſe rallume, il revient à la charge, & il ne craint point de mettre ſon ouvrage au niveau des plus médiocres. Il finit par comparer *Harriot* à *Colomb*, qui découvrit le nouveau Monde, & à qui l'aventurier *Americ Veſpuce* ravit l'honneur de lui donner ſon nom. Fut-il jamais de déclamation auſſi indécente, auſſi aveugle, & autant contredite par l'admiration univerſelle des Géometres pour l'ouvrage de *Deſcartes ?* Elle porte avec elle-même ſon ridicule & ſa réfutation.

V.

Découvertes mixtes de Deſcartes.

Nous paſſons préſentement à faire le récit des découvertes d'analyſe-mixte, dont nous ſommes redevables à M. *Deſcartes*. Celle qui tient le premier rang, & qui eſt le fondement de toutes les autres, eſt l'application qu'il fit de l'Algebre à la Géométrie des courbes. Nous diſons à la Géométrie des courbes; car on a vu que l'application de l'Algebre à la réſolution des problêmes ordinaires eſt beaucoup plus ancienne. Mais ſans déprimer ces inventions, nous pouvons dire qu'elles ne ſont que l'élémentaire de celles de *Deſcartes*; c'eſt, à ce qu'il y ajouta, qu'on doit fixer l'époque de la révolution qui a rapidement élevé la Géométrie au degré où elle eſt aujourd'hui.

Il y avoit déja long-temps que la Géométrie étoit en poſſeſſion d'exprimer la nature d'une courbe par le rapport des lignes paralleles entr'elles, tirées de chacun de ſes points ſur une autre fixe & invariable. Ce moyen ſe préſente aſſez naturellement à l'eſprit; car qu'eſt-ce qui détermine une courbe à être d'une certaine forme? c'eſt qu'il y a entre chacun de ſes points un certain rapport de diſtance, à l'égard d'une ligne droite qui la traverſe & qui lui ſert d'axe. Dans la Géométrie élémentaire, le cercle eſt une courbe dont tous les points ſont également éloignés d'un autre qui eſt le centre. Mais une Géométrie plus relevée le conſidere autrement. Sous ce nouveau point de vue le cercle eſt une courbe dans laquelle ayant tiré un diametre quelconque, ſi d'un point pris à volonté on mene une perpendiculaire à ce diametre, le rectangle des ſegmens qu'elle y fera, ſera égal au quarré de cette perpendiculaire, ou bien ce quarré ſera égal à celui du rayon moins celui du ſegment intercepté entr'elle & le centre. C'eſt-là dans la théorie des courbes la propriété diſtinctive & caractériſtique du cercle. Dans la parabole, le quarré d'une ordonnée quelconque à l'axe, eſt égal au rectangle du ſegment intercepté entr'elle & le ſommet, par une certaine ligne conſtante, &c.

Il étoit ſans doute facile d'exprimer ces rapports en langage algébrique, dès qu'il fut connu aux Géometres. Mais il falloit auparavant prévoir de quel uſage pouvoit être cette maniere de les exprimer, & c'eſt ce que la ſagacité de *Deſcar-*

tes, ſon eſprit métaphyſique, & ſa grande habileté en Géométrie lui montrerent. Il vit qu'une expreſſion algébrique eſt un tableau plus court & en quelque ſorte plus énergique, des propriétés d'une courbe, & qu'elle préſente à celui qui poſſede l'analyſe, de grandes commodités pour tirer ſes propriétés les plus enveloppées des plus faciles. C'eſt ce dont nous donnerons des exemples.

On appelle dans cette nouvelle Géométrie l'équation d'une courbe, l'expreſſion algébrique qui déſigne la relation toujours ſemblable entre chaque ordonnée de la courbe & ſon abſciſſe. On a vu, par exemple, que dans le cercle on a conſtamment $AF \times FB = FD^2$. Nommons pour traduire cette expreſſion en langage algébrique, nommons, dis-je, le diametre $AB = a$, $AF = x$, & $FD = y$; FB ſera $2a - x$, ainſi $AF \times FB = FD^2$, ſera $2ax - xx = y^2$, & quelle que ſoit la grandeur de x, ou de AF, cette équation donnera la grandeur de FD. *Fig.* 31, 32, 33. Si nous euſſions fait CF, ou la diſtance de l'ordonnée au centre, égale à x, alors FD^2 étant $= CA^2 - CF^2$, nous aurions eu $y^2 = aa - xx$, qui eſt encore l'équation au cercle, mais rapportée au centre. De la même maniere on trouvera dans la parabole qu'en nommant p le parametre, x le ſegment AF de l'axe ou du diametre, & y l'ordonnée FD perpendiculaire ſi c'eſt l'axe, ou inclinée dans l'obliquité convenable ſi c'eſt un diametre, on trouvera, dis-je, que ſon équation eſt $y^2 = px$. Dans l'ellipſe, ſi l'on nomme a la moitié d'un des axes ou d'un des diametres AB, b l'autre demi-axe, ou demi-diametre conjugué CG, on aura (en faiſant toujours $AF = x$, & $FD = y$,) $yy = \frac{2bx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$ (*a*).

(*a*) Nous avons promis plus haut quelques exemples de l'utilité des équations algébriques, pour reconnoître facilement la forme & les propriétés des courbes. Nous allons ſatisfaire ici à cette promeſſe. Commençons d'abord par un exemple ſimple; ce ſera une équation du ſecond degré telle que celle-ci, $ax + xx = yy$, (*y* exprime l'ordonnée, & x l'abſciſſe,) & l'on demande la courbe qui eſt déſignée par cette équation. Pour cet effet, il faut d'abord reconnoître les points où la courbe coupe ſon axe. On le fera en ſuppoſant $y =$ *Fig.* 34. o; ce qui donne $ax + xx = 0$. Or pour cela il faut que x ſoit zero, ou $-a$. Ceci montre déja que ſi l'on prend une ligne indéfinie AE pour axe, & A pour l'origine des abſciſſes comptées poſitivement de A en E, la courbe paſſe non ſeulement par A, mais encore par le point B, qui en eſt éloigné en ſens contraire de la quantité a: qu'on faſſe préſentement x ſi petit ou ſi grand qu'on voudra, mais toujours poſitif, la valeur de y ſera réelle; car x étant poſitif, $\sqrt{(ax + xx)}$ eſt toujours poſſible. On aura donc l'ordonnée EP; mais cette

Ces premieres équations ſont les plus ſimples, parce que nous avons pris l'origine des abſciſſes, c'eſt-à-dire, que nous avons commencé à les compter du véritable ſommet de la courbe. Rien ne nous oblige néanmoins à les enviſager ainſi. La nature d'une courbe, de l'ellipſe par exemple, peut être également exprimée, quoique moins ſimplement par le rapport d'une ordonnée comme K P, tirée ſur un axe R *d* pris à volonté, avec l'abſciſſe priſe ſur cet axe, à commencer d'un point quelconque R pris auſſi où l'on voudra (*a*); ainſi la nature

équation $yy = ax + xx$, donne indifféremment $y = \sqrt{(ax + xx)}$ ou $-y = \sqrt{(ax + xx)}$, car la racine de yy eſt également $+$ ou $-y$, il y a donc une ordonnée E *p* priſe négativement, c'eſt-à-dire, en deſſous & égale à celle qui eſt priſe en deſſus. La courbe a donc deux branches ſemblables autour de l'axe A E, & qui vont toujours en s'éloignant. Mais qu'on faſſe x négatif, & moindre que a, la valeur de $\sqrt{(ax + xx)}$ ſera alors imaginaire, d'où l'on doit conclure qu'il n'y a point de partie de courbe qui réponde à toute l'étendue A B ou a. Lorſqu'enfin x pris négativement ſera tant ſoit peu plus grand que a, alors $\sqrt{(ax + xx)} = \pm y$, ceſſera d'être imaginaire, & il y aura des ordonnées ſoit en deſſus, ſoit en deſſous dans toute l'étendue de B vers D à l'infini. On démontrera auſſi facilement que ces deux portions de courbes ſont égales. Ainſi ſi l'on ignoroit que cette équation eſt celle de l'hyperbole, on apprendroit que la courbe qu'elle exprime eſt compoſée de deux portions infinies & égales, qui ſe préſentent leurs convéxités, & qui fuient en ſens contraire, &c.

Nous prendrons pour ſecond exemple, l'équation $ax^2 - x^3 = y^3$, qui eſt celle d'une courbe dans laquelle A B (*fig.* 35.) étant a, le quarré de l'abſciſſe A E par le reſtant E B, ſeroit égal au cube de l'ordonnée y. On voit d'abord que ſi l'on ſuppoſe $y = 0$, on aura $ax^2 - x^3 = 0$, c'eſt-à-dire, $x = 0$, ou bien $= a$. La courbe paſſe donc par A & B. Préſentement tant que x ſera moindre que a, & poſitif, $\sqrt[3]{ax^2 - x^3}$ ſera poſitive, & par conſéquent y ſera poſitif; car la racine cube de y^3 n'eſt que $+ y$. Delà on doit conclure que la courbe paſſe au deſſus de cette partie de ſon axe, mais non au deſſous. Continuons à faire x poſitif, & plus grand que a, par exemple 2 a. Alors $\sqrt[3]{ax^2 - x^3}$, devient $\sqrt[3]{4a^3 - 8a^3}$, ou $-a\sqrt[3]{4}$. La valeur de y eſt donc alors négative, & par conſéquent les ordonnées doivent être priſes au deſſous de ſon axe, comme on le voit dans la figure. Mais ſi l'on fait x négatif, quelle que ſoit la grandeur de x, $\sqrt[3]{ax^2 - x^3}$ eſt toujours poſitive; ainſi la courbe a une branche A π au deſſus de ſon axe qui s'étend à l'infini. Telle eſt la figure de la courbe dont nous venons d'analyſer l'équation.

On montre par un moyen ſemblable que la parabole cubique, dont l'équation eſt $a^2 x = y^3$, n'eſt point formée comme la parabole ordinaire, mais que l'une de ſes branches eſt au deſſus de l'axe, & l'autre au deſſous, comme on voit dans la fig. 36. Au contraire, la parabole dont l'équation eſt $ax^2 = y^3$, a ſes deux branches au deſſus de ſon axe, & aucune au deſſous. (*Voyez fig.* 37.)

(*a*) Il eſt encore important de donner un exemple de cette tranſmutation d'axe, parce qu'il doit en réſulter une grande lumiere pour la théorie des courbes. Soit un cercle dont le diametre A B ſoit a, A D $= x$ l'abſciſſe, D P $= y$ l'ordonnée, & qu'on veuille le rapporter à un autre axe R L parallele au diametre AB, & qui en eſt éloigné d'une quantité AG $= b$: faiſons l'abſciſſe RF $= z$, & F P l'ordonnée $= u$: que R G ſoit égal à c: donc G F ou A D $= x$, ſera $z - c$, & D P ou $y =$ F P $-$ F D, ſera $u - b$. L'équation au cercle rapporté au diametre A B, eſt $yy = ax - xx$. Il faudra donc ſubſtituer au lieu de y & x, leurs va- *Fig.* 38.

d'une même courbe peut être exprimée de quantité de manieres, ſuivant l'axe & l'origine des abſciſſes qu'on choiſira. Mais il eſt eſſentiel de remarquer que de quelque maniere que ſoit poſé cet axe, la plus haute puiſſance de l'équation ne ſçauroit paſſer à un degré moindre ou plus grand. La raiſon en eſt aiſée à appercevoir dans la maniere dont ſe fait cette transformation ; car c'eſt toujours la puiſſance d'une ligne augmentée ou diminuée de quelque quantité conſtante, qu'on ſubſtitue à la place d'une puiſſance ſemblable dans l'équation primitive. Il pourra y avoir dans l'une plus ou moins de termes & de puiſſances inférieures que dans l'autre, mais la plus haute puiſſance ne ſçauroit varier.

Le degré de cette plus haute puiſſance de l'une des indéterminées des équations des courbes, eſt donc un caractere propre à les diſtinguer en eſpeces. Ainſi l'on rangera dans un même ordre toutes celles dans leſquelles la plus haute puiſſance d'une des indéterminées montera au même degré. La ligne droite où cette puiſſance ne ſçauroit paſſer le premier degré, formera le premier ordre. Le cercle & les ſections coniques où elle ne ſçauroit paſſer le quarré, formeront le ſecond, & ainſi des autres. M. *Deſcartes* arrangeoit ces différentes eſpeces de courbes un peu autrement. Il les diviſoit par genres, dans chacun deſquels il renfermoit deux degrés ou deux ordres. Ainſi le premier genre comprenoit les courbes du premier & du ſecond degré ; le ſecond genre celles du troiſieme & du quatrieme, & ainſi de deux en deux degrés. Il en donnoit cette raiſon, ſçavoir qu'une équation du quatrieme degré, ſe réduiſoit au troiſieme ; une du ſixieme au cinquieme, d'où il concluoit que deux courbes qui ſe ſuivoient de cette maniere, ne devoient pas être cenſées plus compoſées l'une que l'autre. Mais ce principe de *Deſcartes* n'eſt pas entiérement vrai, & ſa diviſion des courbes n'eſt plus uſitée par cette raiſon. On s'en tient aujourd'hui à la premiere.

Il ſemble que juſqu'à *Deſcartes* on n'avoit admis dans la Géométrie que le cercle & la ligne droite. *Pappus* & M. *Viete*

leurs, & l'on aura $uu - 2bu + bb = (a + 2c)z - zz - ac - cc$. C'eſt encore là une équation au cercle, mais rapportée à un axe parallele au diametre A B. On pourroit de même la rapporter à un axe tel que R λ, faiſant un angle avec le premier, & cela ne ſeroit guere plus difficile. L'équation ſeroit alors plus compliquée, mais ſans être d'un degré plus élevé.

nous le témoignent clairement ; le premier, quand il disoit qu'on n'avoit pu construire géométriquement le problême des deux moyennes proportionnelles, parce qu'il étoit solide ; le second, quand il demandoit (*a*) si l'on pouvoit regarder le cube comme doublé géométriquement : si on le faisoit, disoit-il, *reclamaret Euclides & tota Euclideorum schola.* Ils n'ignoroient cependant pas l'un & l'autre les constructions qu'on en avoit données par le moyen des sections coniques. On mit enfin, jusqu'à *Descartes*, presque dans un même rang toutes les courbes qu'on ne pouvoit pas décrire d'un mouvement continu par la regle & le compas, & on les appelloit méchaniques. M. *Descartes* redresse dans sa Géométrie cette double erreur de l'antiquité. Il y fait une distinction plus juste des courbes géométriques & méchaniques. Il remarque qu'on doit appeller géométrique tout ce qui se fait par un procédé certain & exact ; & par-là il rend à la Géométrie toutes les courbes dont on peut déterminer les points par la composition de deux mouvemens qui ont entr'eux un rapport connu exactement, ou dont la nature peut être expliquée par une équation algébrique capable de construction. Ces conditions conviennent à la conchoïde, à la cyssoïde ; ainsi elles rentrent dans la classe des courbes géométriques, de même que les sections coniques. Mais il n'en est pas ainsi des spirales & des quadratrices : les mouvemens qui les engendrent sont tels qu'on n'en connoît encore point les rapports ; car ils sont entr'eux comme une ligne droite à un arc de cercle. Ainsi M. *Descartes* les laisse dans la classe des courbes méchaniques. Telles sont encore la cycloïde, la logarithmique, &c. Ces courbes deviendroient géométriques, si l'on trouvoit la quadrature du cercle & de l'hyperbole.

Il est à propos de remarquer dès à présent que depuis la découverte des nouveaux calculs, les Géometres ont réformé à certains égards la division des courbes donnée par *Descartes*. M. *Leibnitz* les a toutes admises dans la Géométrie ; mais il nomme les unes algébriques, les autres transcendantes. Les premieres sont celles dont la nature ou le rapport des abscisses & des ordonnées s'exprime par une équation al-

(*a*) *Resp. Math.* l. VIII.

gébrique finie. Les tranſcendantes ſont celles dont l'équation contient un nombre infini de termes, à moins qu'on ne recoure au rapport de leurs différentielles, ou de leurs élémens infiniment petits. En effet, une ſuite infinie de termes dans laquelle la puiſſance de l'ordonnée ou de l'abſciſſe va toujours en montant, doit être regardée comme une équation d'un ordre infini, ou qui ſurpaſſe tout ordre fini. Delà M. *Leibnitz* a pris le nom de *tranſcendantes*, qu'il donne à cet ordre de courbes. Cette derniere diviſion n'a cependant pas mis entiérement hors d'uſage celle de *Deſcartes*. On dit preſque indifféremment les courbes géométriques en les oppoſant aux méchaniques, ou les courbes algébriques en les oppoſant aux tranſcendantes.

M. *Deſcartes* fait preſque le premier eſſai de ſon analyſe ſur un problême qui avoit été l'écueil de toute l'Antiquité. Voici quel eſt ce problême: pluſieurs lignes comme AB, CD, EF, GH, &c, étant données de poſition & indéfiniment prolongées, il s'agiſſoit de trouver un point I, & le lieu de tous les points ſemblables, deſquels menant ſur chacune de ces lignes, d'autres telles que IK, IL, IM, IN, &c. ſous des angles donnés, le rectangle de deux fût en raiſon donnée avec celui des deux autres s'il y en avoit quatre, ou le ſolide de trois en raiſon donnée avec celui des 3 autres s'il y en avoit 6, ou ſi nous n'en ſuppoſons que 5, le ſolide de 3 fût en rapport conſtant avec le produit des deux autres multipliées par une même ligne, ou avec le produit de l'une des reſtantes par le quarré de l'autre, & ainſi ſuivant toutes les combinaiſons qu'on peut en faire, & quelque nombre de lignes qui fût donné. Ce problême vraiment épineux & du reſſort du calcul, avoit fort tourmenté les anciens Géometres. *Euclide* en avoit ébauché la ſolution; *Apollonius* l'avoit pouſſée plus loin, & l'on en étoit enfin venu à reconnoître que, lorſque ces lignes étoient ſeulement au nombre de 3 ou 4, la courbe où ſe trouvoient tous ces points, étoit une ſection conique dont on déterminoit dans quelques cas l'eſpece & la poſition (*a*). Mais quand il y avoit un plus grand nombre de lignes, on ſçavoit ſeulement

Fig. 39.

(*a*) M. Newton en a donné la ſolution dans ſes principes. *L. 1. Sect.*

que

que le lieu cherché étoit quelque courbe d'un ordre ſupérieur, dont on n'avoit déterminé l'eſpece que dans un cas ſeul que *Pappus* n'énonce point. Ainſi l'on peut dire, ſans déroger au mérite de la ſçavante Antiquité, que les ſolutions qu'elle avoit données de ce problême, étoient fort imparfaites : elle n'avoit fait qu'entrevoir celle de quelque cas ſimple, & elle avoit entiérement échoué aux plus difficiles.

Deſcartes ſoumettant ce problême à ſon analyſe, en donne une ſolution complette. Il fait voir dès la fin de ſon premier Livre, de quel ordre eſt le problême dans les différens cas. Ce ſera une ſimple ligne droite, s'il n'y a que deux lignes ; une ſection conique, s'il y en a trois ou quatre ; une courbe du troiſieme ordre, s'il y en a cinq ou ſix, & ainſi de ſuite. Enfin le problême eſt toujours plan, s'il ne s'agit que de trouver un des points qui ſatisfont à la queſtion, tant qu'il n'y aura pas plus de quatre lignes : il ſera ſolide, tant que le nombre de ces lignes ne paſſera pas huit, &c.

Ce problême ébauché dans le premier Livre, eſt achevé dans la premiere partie du ſecond. M. *Deſcartes* y expoſe à cette occaſion ſa formule générale d'équation pour les ſections coniques, quelle que ſoit la poſition de l'axe auquel on les rapporte ; & il en montre l'uſage en l'appliquant au problême en queſtion. Ce morceau vraiment digne du génie de notre Philoſophe, contient en peu de mots toute la théorie des lieux géométriques du ſecond degré. M. *Deſcartes* termine enfin ce qu'il y a à dire ſur ce problême, en donnant une conſtruction géométrique fort élégante d'un de ces cas particuliers qui paſſent le ſecond degré. C'eſt celui où l'on a cinq lignes, quatre paralleles avec une autre qui leur eſt perpendiculaire, & où il faut que le ſolide de trois de ces lignes qui ſeront tirées à angles droits, ſoit égal au ſolide formé des deux reſtantes & d'une ſixieme donnée. Alors le point cherché ſe trouve continuellement dans une eſpece de conchoïde, qu'il nomme parabolique (*a*).

(*a*) La conchoïde ordinaire eſt formée par l'interſection continuelle d'un cercle qui ſe meut ſur l'axe A C E, (*fig.* 40.) avec la ligne droite mobile, qui paſſe continuellement par ſon centre & par le point P. On peut donc, pour généraliſer cette conſtruction, ſuppoſer au lieu d'un cercle une courbe quelconque, par exemple, une parabole, qui ſe mouvra de la même maniere ſur l'axe A E, & qui entraînera une ligne droite paſſant par un point de ſon axe, & par le pole P. Leur interſection conti-

Si nous nous attachions à ſuivre pas à pas la Géométrie de *Deſcartes*, il nous faudroit parler ici de ſa méthode des tangentes, dont l'expoſition ſuit immédiatement les découvertes qu'on vient de voir. Mais, on l'a déja dit, *Deſcartes*, en écrivant ſa Géométrie, s'eſt beaucoup plus livré à l'ordre de ſes idées, qu'à celui des matieres, de ſorte que parmi les qualités de cet ouvrage mémorable, on ne doit guere rechercher celle de l'arrangement. C'eſt pourquoi nous l'abandonnons ici, pour parler de ſa maniere de conſtruire les équations déterminées du troiſieme & du quatrieme degré. La méthode des tangentes, à cauſe de ſon importance, ſera l'objet d'un article particulier.

De même qu'un problême qui conduit à une équation du ſecond degré ſe conſtruit par l'interſection d'un cercle ou d'une ligne droite, ceux qui conduiſent à des équations d'un degré plus élevé exigent des courbes d'un ordre ſupérieur. On chercheroit en vain le moyen de conſtruire une équation du troiſieme ou du quatrieme degré par le moyen de la regle & du compas, les Géometres regardent comme démontré que cela eſt impoſſible. Leurs raiſons tiennent à la nature des équations; mais il ſeroit trop long de les développer ici.

M. *Deſcartes* réduit la conſtruction de toutes les équations cubiques ou quarré-quarrées, à un même procédé, dont les changemens ſont indiqués par la forme & par les ſignes des termes. Il conſidere pour plus de généralité les équations cubiques ſous la forme de celles du quatrieme degré, dont le dernier terme ſeroit égal à zero, un de ſes facteurs étant nul; ce qui eſt fort ingénieux. Il ſuppoſe auſſi que l'on ait fait évanouir le ſecond terme; (ce qui eſt toujours facile): après quoi il détermine le parametre de la parabole convenable avec la poſition du centre du cercle qu'il faut décrire & qui doit la couper. Dans les équations du troiſieme degré, il paſſe par le ſommet, & s'il y a trois racines réelles, il coupe la parabole en trois points, d'où les ordonnées abaiſſées ſur l'axe de la parabole ſont les trois valeurs réelles de l'inconnue. S'il n'y en

nuelle, ſoit en deſſus, ſoit en deſſous, décrira une courbe qu'on nommera une conchoïde parabolique, & qui ſera compoſée de pluſieurs branches, comme on voit dans la *fig.* 41. Il eſt remarquable que ſi au lieu de cercle & de parabole, on ſe ſert d'un triangle rectiligne, cette conchoïde n'eſt autre choſe qu'une hyperbole entre ſes aſymptotes.

a qu'une réelle, les deux autres étant imaginaires, le cercle paſſant par le ſommet de la parabole, ne la coupera qu'en un point qui donnera de la même maniere la racine réelle & unique de l'équation. Dans celles du quatrieme degré, où il doit y avoir quatre racines réelles, ou deux ſeulement, ou aucune, la forme de la conſtruction détermine le cercle, à couper la parabole en quatre points, ou en deux, ou en aucun. S'il y a deux racines égales, le cercle touchera ſeulement la parabole, & la coupera encore une ou deux fois, ſuivant le nombre des autres racines inégales : car un point de contact n'eſt autre choſe que deux points d'interſection infiniment proches & coincidens. Ainſi l'ordonnée tirée de ce point ſur l'axe, ſera chacune de ces deux racines. Il pourroit encore ſe faire qu'il y eût dans une équation du quatrieme degré de la forme de celles que conſtruit *Deſcartes*, trois racines égales. Alors le cercle, après avoir coupé la parabole d'un côté, iroit la rencontrer de l'autre dans un point de contact & d'interſection à la fois, qui équivaut à trois points d'interſection. On fera connoître dans la ſuite ce genre d'attouchemens des courbes, qu'on connoît ſous le nom d'oſculation.

Après divers exemples de conſtruction de problêmes ſolides, M. *Deſcartes* paſſe à la réſolution de ceux du cinquieme & du ſixieme degré. Les mêmes raiſons qui démontrent que les premiers ne peuvent être conſtruits que par une ſection conique combinée avec un cercle, font auſſi voir que la conſtruction de ceux-ci demande quelque courbe du troiſieme degré. M. *Deſcartes* donne une regle générale pour les équations du cinquieme & du ſixieme degré, en les réduiſant à une du ſixieme, dont toutes les racines ſeroient poſitives : il y emploie enſuite une conchoïde parabolique, courbe du troiſieme degré dont nous avons parlé plus haut, avec un cercle. Ce cercle la coupe en autant de points qu'il y a de racines réelles dans l'équation, en comptant les points de contact pour deux d'interſection ; & les ordonnées tirées de ces points ſur l'axe ſont les racines de l'équation.

M. *Deſcartes* paroît avoir été dans une fauſſe opinion concernant les courbes propres à conſtruire les équations des ordres ſupérieurs. Il ſemble qu'il ait voulu qu'à meſure que l'équation montoit de deux dimenſions, celle de la courbe à

combiner avec le cercle montât auſſi de deux degrés (*a*), de ſorte que pour conſtruire, par exemple, un problême du huitieme degré, il faudroit une courbe du ſixieme combinée avec un cercle. Si ce fut-là le ſentiment de *Deſcartes*, on ne peut diſconvenir qu'il ſe trompa, & cette erreur n'échappa pas à M. de *Fermat*. Il a fait voir dans quelques écrits particuliers (*b*) qu'il ſuffit que le produit des expoſans des courbes égale celui de l'équation à conſtruire : ainſi l'on peut conſtruire une équation du huitieme degré, par le moyen d'un cercle & d'une courbe du quatrieme. Une équation du neuvieme degré n'exigeroit qu'une courbe du cinquieme avec un cercle, ou deux du troiſieme. M. *Jacques Bernoulli*, ne connoiſſant point ſans doute la diſſertation de *Fermat*, a inſéré dans les actes de Leipſick de l'année 1688, & dans ſes notes ſur *Deſcartes*, un écrit où il démontre les mêmes choſes. Je dois cependant remarquer que c'eſt un peu légérement qu'on accuſe *Deſcartes* de l'erreur dont nous parlons : car outre que l'endroit qu'on cite eſt ambigu, il nous a lui-même donné un exemple contraire à la regle qu'on lui attribue. En effet, lorſqu'il s'agit de conſtruire les équations du ſixieme degré, il n'y emploie qu'un cercle courbe du ſecond degré avec ſa conchoïde parabolique qui eſt du troiſieme ; ce qui eſt conforme à la regle de MM. de *Fermat* & *Bernoulli*.

M. *Deſcartes* a penſé que la conſtruction la plus ſimple des équations ſolides eſt celle, où l'on emploie la parabole, ou une des ſections coniques avec un cercle. Mais il y a de puiſſantes raiſons à oppoſer à ce ſentiment. De toutes les courbes ſupérieures au cercle, la parabole eſt, à la vérité, celle dont l'équation eſt la plus ſimple : mais cela eſt-il ſuffiſant pour donner à cette courbe la préférence ſur toutes les autres ? Si cela étoit, dit M. *Newton*, (*c*) il faudroit auſſi la préférer au cercle. Il y a donc une ſorte d'inconſéquence à adopter le cercle préférablement à la parabole dans la conſtruction des problêmes plans, ou bien il faut dire qu'on ne le fait que parce que ſa deſcription eſt plus facile que celle de la parabole. Or ce que l'on fait ici, pourquoi ne le feroit-

(*a*) *Cart. Geom*, ad fin.
(*b*) *Fermat. op.* p. 110, & ſeq.
(*c*) *Arith. univ.* Append. *de æquat. conſtruct. lineari*

on pas dans d'autres cas, & qu'y a-t'il de plus eſſentiel à conſidérer dans des deſcriptions géométriques que la facilité de l'opération? Ces raiſons de la juſteſſe deſquelles on ne peut diſconvenir, ont porté M. *Newton* (*a*) à adopter pour la conſtruction des équations ſolides, la conchoïde combinée avec une ligne droite, quoique cette courbe ſoit du quatrieme degré; & il approuve fort les conſtructions que *Nicomede* donna autrefois des problêmes de la duplication du cube & de la triſection de l'angle par ce moyen. En effet, de toutes les courbes la conchoïde eſt après le cercle une des plus faciles à décrire, & l'inſtrument propoſé par ſon inventeur eſt un des plus ſimples après le compas. Il y a néanmoins des manieres de décrire les ſections coniques par un mouvement continu, qui ne le cedent guere en ſimplicité à la deſcription de la conchoïde. On ſçait, par exemple, & les Anciens mêmes ne l'ignorerent pas (*b*), qu'une ligne de grandeur invariable qui ſe meut dans un angle, ſes deux extrêmités appuyées contre les côtés de cet angle, décrit par chacun de ſes points un quart d'ellipſe renfermé entre ces côtés comme demi-diametres conjugués. Il eſt facile de voir que cette propriété peut ſervir de principe à un inſtrument d'une ſimplicité extrême pour décrire toutes ſortes d'ellipſes par un mouvement continu. Que ſi l'on avoit quelque ſcrupule à admettre dans la Géométrie d'autre inſtrument que la regle & le compas, nous remarquerions que ce ſeroit une délicateſſe tout-à-fait mal fondée. Puiſqu'il n'eſt pas poſſible de réſoudre les problêmes d'un certain ordre que par le moyen des courbes d'un genre ſupérieur au cercle, les inſtrumens, ſeuls propres à les décrire par un mouvement continu, doivent être reçus dans la Géométrie: car on doit regarder comme la ſolution vraie & géométrique d'un problême, celle qui eſt la plus ſimple que comporte la nature de ce problême. Si l'on inſiſtoit à dire que le compas & la regle étant les inſtrumens les plus ſimples, ſont moins ſujets à erreur, nous répondrions qu'une regle géométriquement parfaite eſt de tous les inſtrumens le plus difficile. Auſſi ce n'eſt qu'en vertu d'une ſuppoſition qu'on regarde le compas & la regle comme parfaits; &

(*a*) Ibid.
(*b*) Procl. *Comm. in I. Eucl. ad def.* 4.

pourquoi ne voudra-t'on pas admettre que ceux dont on ſe ſervira dans les deſcriptions des courbes de genres ſupérieurs, le ſoient auſſi.

Nous ne devons point omettre de donner ici une idée d'un endroit des plus ingénieux & des plus profonds de la Géométrie de *Deſcartes*. C'eſt celui où il applique ſon analyſe à la recherche de certaines courbes qu'il appelle *ovales*, & qui ont retenu le nom d'*ovales de Deſcartes*. Ce ſont des courbes décrites à l'imitation de l'ellipſe & de l'hyperbole rapportées à leurs foyers. Mais tandis que dans ces ſections coniques les lignes tirées d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers, ſont toujours telles, qu'elles croiſſent ou décroiſſent également enſemble comme dans l'hyperbole, ou que l'une croît autant que l'autre décroît, ce qui eſt le cas de l'ellipſe, dans les ovales de *Deſcartes* ces diminutions ou accroiſſemens reſpectifs ſont ſeulement en raiſon donnée : ainſi les ſections coniques ſont contenues dans cet ordre de courbes, & n'en ſont qu'une eſpece particuliere. M. *Deſcartes* ſe ſert de ces ovales pour la réſolution d'un problême optique auſſi curieux que difficile. Il conſiſte à déterminer quelle forme doit avoir la ſurface qui ſépare deux milieux de différente denſité, pour que tous les rayons qui partent d'un même point, ou qui convergent vers un même, ſoient renvoyés par la réfraction dans un autre, ou rendus paralleles, ou divergens comme s'ils venoient d'un point donné. La ſolution qu'en donne *Deſcartes* eſt ſi générale, qu'elle comprend même les cas où la réfraction ſe change en réflection. Ainſi non ſeulement ce que la Catoptrique ancienne avoit démontré ſur l'ellipſe & l'hyperbole, mais encore ce qu'il avoit démontré lui-même ſur la réfraction de la lumiere dans les verres elliptiques & hyperboliques, eſt compris dans cette ſolution. Nous donnerons, en traitant de l'optique, une idée plus développée de ce problême.

VI.

Méthode des tangentes de Deſcartes.

Parmi les découvertes que *Deſcartes* expoſe dans ſa Géométrie, aucune ne lui fit plus de plaiſir que celle d'une regle générale pour la détermination des tangentes des courbes.

» De tous les problêmes, dit-il, que je connois en Géomé-» trie, il n'en eſt aucun qui ſoit plus utile & plus général, & » c'eſt de tous celui dont j'ai davantage déſiré la ſolution. « En effet, ce problême ſert à pluſieurs déterminations importantes dans la théorie des courbes. C'eſt par ſon moyen qu'on trouve leurs aſymptotes, ſi elles en ont; la direction ſous laquelle elles rencontrent leur axe; les endroits où elles s'en éloignent le plus, & ceux où elles changent de courbure, &c. Je ne dis rien des uſages nombreux de la connoiſſance des tangentes dans les Mathématiques Phyſiques. Ainſi l'importance que *Deſcartes* donne à ce problême, ne doit point paroître exceſſive.

M. *Deſcartes* nous a laiſſé deux manieres de déterminer les tangentes des courbes, l'une dans ſa Géométrie, l'autre dans ſes Lettres; elles ſont fondées l'une & l'autre ſur le même principe, & par cette raiſon nous les comprendrons ſous le nom de *Méthode des tangentes de Deſcartes*. Nous ne pouvons diſconvenir que depuis ſon temps on n'en ait imaginé d'autres qui ſont plus commodes, mais ce motif ne doit point avilir à nos yeux une invention qui a été la premiere de ce genre, & qui eſt fort ingénieuſe.

Le principe de la méthode des tangentes de *Deſcartes* eſt celui-ci: Concevons une courbe décrite ſur un axe, & que d'un point de cet axe, comme centre, ſoit décrit un cercle qui la coupe au moins en deux points, deſquels ſoient tirées deux ordonnées, qui ſeront par conſéquent communes à ce cercle & à la courbe. Imaginons maintenant que le rayon de ce cercle décroît, ſon centre reſtant immobile. Il n'eſt perſonne qui ne voie que les points d'interſection ſe rapprochant, ils coincideront enfin, qu'alors le cercle touchera la courbe, & que le rayon tiré au point de contact ſera perpendiculaire à cette courbe, & à la ligne droite qui la toucheroit au même point. Ainſi le problême de déterminer la tangente d'une courbe ſe réduit à trouver la poſition de la perpendiculaire qu'on lui tireroit d'un point quelconque pris ſur l'axe. *Fig.* 42.

Pour cet effet *Deſcartes* recherche d'une maniere générale quels ſeroient les points d'interſection d'un cercle décrit d'un rayon déterminé, & d'un point de l'axe comme centre, avec

la courbe (*a*). Il parvient à une équation qui dans le cas de deux interſections doit contenir deux racines inégales, dont l'une eſt la diſtance d'une des ordonnées au ſommet, & l'autre celle de l'autre. Mais ſi ces points d'interſection viennent à ſe confondre, alors les deux ordonnées ſe confondront, leur éloignement du ſommet ſera le même, & l'équation aura deux racines égales. Il faudra donc dans cette équation faire les coefficiens de l'inconnue qui ſont indéterminés, tels que cette inconnue ait deux valeurs égales. M. *Deſcartes* y parvient d'une maniere fort ingénieuſe, en comparant l'équation propoſée avec une autre équation fictice du même degré, ou il y a deux valeurs égales; ce qui lui donne la diſtance de l'ordonnée abaiſſée du point de contact au ſommet. Cela une fois déterminé, la plus ſimple analyſe met en poſſeſſion de tout le reſte.

La ſeconde méthode imaginée par notre Philoſophe pour tirer les tangentes, procede ainſi. Il conçoit une ligne droite qui tourne autour d'un centre ſur l'axe prolongé de la courbe. Elle la coupe d'abord en un certain nombre de points; mais à meſure qu'elle s'éloigne ou ſe rapproche de l'axe, ſuivant les circonſtances, les deux points d'interſection ſe rapprochent & coincident: enfin elle touche la courbe propoſée. Pour déterminer la ſituation qu'a alors cette ligne, *M. Deſcartes* procede à peu près comme dans la méthode précédente. Il recherche d'abord l'équation générale, par laquelle cette li-

Fig. 42.

(*a*) Voici en faveur des Géometres de quelle maniere on détermine les interſections de deux courbes. Nous nous ſervirons pour cela d'une parabole A B *b*, & d'un cercle. Que A C ſoit *a*, A D $= x$, le rayon C B $= r$; C D ſera donc $= a - x$. Maintenant puiſque l'ordonnée B D appartient au cercle, il ſuit que $y\,y = r^2 - C\,D^2$, ou $r^2 - \overline{a-x}^2$. Mais cette même ordonnée appartient encore à la parabole dont nous ferons le parametre égal à *p*. On a donc $y\,y = p\,x$, & par conſéquent $r^2 - a^2 + 2\,a\,x - x\,x = p\,x$. Arrangeons tous les termes d'un côté ſelon les puiſſances de x, nous aurons l'équation $x^2 + (p - 2\,a)\,x + (a^2 - r^2) = 0$; équation qui aura deux racines ou deux valeurs de x; car nous aurions trouvé la même choſe en cherchant l'autre interſection *b*. C'eſt pourquoi ſi l'on veut que *r* ſoit tel que ces deux interſections coincident, il faut que ces deux racines ſoient égales. Pour le faire Deſcartes prend une équation formée de $x - e = 0$, $x - e = 0$, c'eſt-à-dire, $x^2 - 2\,e\,x + e\,e = 0$, qu'il compare terme à terme avec la précédente. Cela lui donne $p - 2\,a = -2\,e$, ou $2\,a - p = 2\,e$, ou $2\,x$, puiſque $x = e$. Delà enfin il tire $a - x$ ou C D $= \frac{1}{2}p$, c'eſt-à-dire, que la ſou-perpendiculaire dans la parabole eſt égale au demi-parametre. Dans d'autres courbes les opérations ſeront plus laborieuſes, mais elles conduiront toujours de même à l'expreſſion de la ſou-perpendiculaire, qui étant donnée fait connoître facilement la ſou-tangente,

gne

gne étant inclinée ſous un angle donné, on trouveroit ſes points d'interſection avec la courbe. Enſuite par le moyen d'une équation fictice qui a deux racines égales, il détermine cette inclinaiſon à être celle qu'il faut pour que la ligne ſoit tangente. Enfin il tire delà le rapport de la ſoutangente à l'abſciſſe.

Nous avons parlé au commencement de cet article de diverſes déterminations importantes dans la théorie des courbes, & qui tiennent à la méthode des tangentes. Quoique *Deſcartes* n'en ait point traité, ce ſeroit mal le connoître que de penſer qu'il les ait ignorées: il eſt fort probable que ce ſont là de ces choſes qu'il dit à la fin de ſa Géométrie avoir voulu laiſſer à ſes Lecteurs le plaiſir de trouver eux-mêmes. Mais nous ne croyons pas devoir l'imiter ici: il entre néceſſairement dans notre plan d'en donner une idée.

Des queſtions de Maximis & Minimis.

Il eſt peu de queſtions plus utiles & plus curieuſes dans la Géométrie que celles *de maximis & minimis*. On donne ce nom à toutes celles dans leſquelles une grandeur qui varie ſuivant une loi connue, croiſſant juſqu'à un certain terme & décroiſſant enſuite, ou bien au contraire croiſſant après avoir diminué juſqu'à un certain point, il s'agit de déterminer ce point où elle devient la plus grande, ou la moindre qu'il eſt poſſible. Outre l'utilité de cette détermination dans la Géométrie pure, ſon application eſt fréquente dans les Mathématiques mixtes. Toutes les fois qu'un effet produit par une combinaiſon de cauſes augmente, puis diminue, ou au contraire, voilà le cas d'un *maximum*, ou d'un *minimum* à déterminer. Ainſi l'on ne doit point regarder ces queſtions comme de pures curioſités géométriques, mais comme des plus importantes dans l'étendue des Mathématiques.

Toute grandeur variable ſuivant une certaine loi, peut s'exprimer par l'ordonnée d'une courbe d'une eſpece particuliere. Ainſi la détermination du point où cette grandeur atteint à ſon dernier période d'augmentation ou de diminution, n'eſt aux yeux du Géometre, que celle de la plus grande ou la moindre ordonnée d'une courbe d'équation donnée.

Il eſt facile de voir que ſi M eſt un point de *maximum*, ou de *minimum*, aux environs de ce point, la courbe ſera néceſſairement coupée par quelque parallele à l'axe, en deux en- *Fig.* 43.

droits, comme C, *c*. Pour s'en convaincre, il ſuffit de conſidérer la figure 43e, qui repréſente toutes les différentes eſpeces de points de *maximum* ou de *minimum*. Delà il ſuit qu'en ſuppoſant BC, ou l'ordonnée déterminée, l'équation de la courbe contient deux racines, ou deux valeurs inégales de l'abſciſſe, comme AB, ou A*b*. Mais au point de *maximum* ou de *minimum*, ces deux ordonnées ſe confondent, & par conſéquent l'équation de la courbe doit donner deux valeurs égales à l'abſciſſe. Il faudra donc, en faiſant BC indéterminée, ſuppoſer dans cette équation deux valeurs égales; ce qu'on fera comme on a vu ci-devant dans la méthode des tangentes, & l'on aura la valeur de l'abſciſſe Aβ, à laquelle répond la plus grande ou la moindre ordonnée.

Il y a une obſervation importante à faire concernant la regle *de maximis & minimis*, tirée du principe de *Deſcartes*; c'eſt qu'elle donne non ſeulement les points de plus grandes & moindres ordonnées de courbe, mais auſſi ceux où deux branches de la courbe s'entre-coupent, lorſque cela arrive, comme on voit en N. Cela eſt une ſuite néceſſaire du principe ſur lequel elle eſt fondée. Car il arrive auſſi dans ce dernier point, que deux interſections de la courbe avec une parallele à l'axe coincident, & par conſéquent y a deux valeurs égales dans l'équation de la courbe. Mais c'eſt-là une ſorte de défaut; car outre qu'un point d'interſection de deux branches de courbe eſt d'une nature bien différente que ceux des plus grandes ou moindres ordonnées, ces derniers doivent auſſi être diviſés en deux eſpeces qu'il faut bien diſtinguer, quand on veut reconnoître la forme d'une courbe. Les uns ſont ceux où la tangente eſt parallele à l'axe; ce ſont les véritables points de *maximum* ou *minimum*. Les autres ſont ceux où cette tangente lui eſt perpendiculaire ou oblique, comme les trois derniers dans la figure ci-deſſus. Ces points ſe nomment aujourd'hui points de rebrouſſement. Or la regle de *Deſcartes* confond tous ces points entr'eux, & par conſéquent induit en erreur ſur la forme de la courbe, à moins qu'on ne les examine enſuite chacun en particulier.

La maniere de les examiner, ſi l'on ſe ſervoit de la regle de *Deſcartes*, conſiſteroit à chercher à chacun de ces points la direction de la tangente. Car ſi elle devenoit parallele à l'axe,

ce ſeroit un ſigne que les points où cela arriveroit, ſeroient de véritables points de *maximum* ou *minimum*, mais ſi elle étoit perpendiculaire ou oblique, c'eſt-à-dire, que la ſoutangente fût nulle ou d'une grandeur finie, les points qui auroient cette propriété ſeroient de ſimples points de rebrouſſement. S'il arrivoit enfin que cette ſoutangente fut comme indéterminée, c'eſt-à-dire, que le numérateur & le dénominateur de la fraction qui l'exprimeroit, devinſſent l'un & l'autre zero, on auroit un point d'interſection de deux branches de la courbe. En effet, c'eſt ce qui doit arriver à un point de cette eſpece ; car l'expreſſion de la ſoutangente ne peut donner qu'une ſeule valeur : & cependant à une interſection de rameaux de courbe, il y a pluſieurs tangentes, puiſque chaque rameau a la ſienne propre à ce point. Il faut donc dans ce cas que l'analyſe ne réponde rien, & c'eſt ce qu'elle fait en donnant une fraction telle que $\frac{0}{0}$.

Des points d'inflexion.

Lorſqu'une courbe de convexe qu'elle étoit vers ſon axe, devient concave, ou au contraire, il y a un point qui ſépare la convexité de la concavité, & qui eſt en quelque ſorte le paſſage de l'une à l'autre ; ce point ſe nomme *point d'inflexion*, ou *de changement de courbure*. Il nous faut encore montrer briévement de quelle maniere on peut les trouver dans la théorie de *Deſcartes*.

Pour connoître la nature d'un point d'inflexion, il faut faire les remarques ſuivantes. Lorſqu'une courbe a une partie convexe & l'autre concave, elle peut être coupée en trois points par une droite, ou touchée en un & coupée dans un autre, ce qui eſt la même choſe, un point de contact équivalant à deux d'interſection. Suppoſons préſentement le point de contact ſe rapprocher de celui d'interſection, il y aura un point où ils ſe confondront, & la tangente touchera en même temps & coupera la courbe. Or ce point ne peut être que celui d'inflexion ; il y aura donc dans l'équation formée ſuivant la méthode de *Deſcartes*, comme pour tirer la tangente à la courbe, il y aura, dis-je, trois racines égales. Car les trois points d'interſection qui donneroient trois racines inégales, ou trois abſciſſes différentes pour chacun d'eux s'ils étoient ſéparés, en donneront trois égales lorſqu'ils ſe confondront en un ſeul. Ainſi en ſuivant le procédé de *Deſcartes* pour ſa méthode des tangentes,

Fig. 44.

il faudroit égaler l'équation en queſtion, à une autre feinte & ayant trois racines égales. Par-là on trouveroit la grandeur de l'abſciſſe répondante au point d'inflexion.

Il y a une autre méthode plus ſimple pour déterminer cette ſorte de point : celle-ci eſt fondée ſur cette conſidération, ſçavoir que la tangente à un point ſemblable, forme toujours avec l'axe, un moindre ou un plus grand angle que toutes les autres tangentes. L'inſpection de la figure 45e, en convaincra. La raiſon de la ſoutangente à l'ordonnée dans un point d'inflexion, ſera donc un *maximum*, ou un *minimum*. Il ſuffira par conſéquent de former une expreſſion de cette raiſon, (ce qui ſe fera en diviſant la ſoutangente par l'ordonnée), & de la traiter comme une grandeur dont on demande le *maximum* ou le *minimum*. Cela donnera la valeur de l'abſciſſe, qui répond à ce point d'infléxion.

Fig. 45.

Des aſymptotes des courbes.

La détermination des aſymptotes des courbes eſt encore une des branches importantes de la méthode des tangentes, & nous ne devons pas l'oublier. Les Géometres ſçavent qu'on appelle aſymptote d'une courbe la ligne vers laquelle elle s'approche, nous ne diſons pas ſeulement, avec quelques Auteurs peu exacts, de plus en plus, mais de telle ſorte que leur diſtance devienne moindre que toute grandeur donnée, ſans cependant jamais ſe rencontrer. La Géométrie moderne conſidére ces lignes d'une maniere très-lumineuſe. Elle les regarde comme des tangentes à un point infiniment éloigné de la courbe, qui paſſent cependant à une diſtance finie de ſon axe, ou qui le rencontrent dans un point qui n'eſt éloigné du ſommet que d'une quantité finie. La courbe de la fig. 46, n°. 1, nous offre un exemple des aſymptotes de la premiere eſpece, & l'hyperbole rapportée à ſon axe tranſverſe, nous en préſente un de celles de la ſeconde. Mais avant que d'aller plus loin, il eſt beſoin de quelques obſervations préliminaires.

Fig. 46, n°. 1, 2.

La premiere, eſt que lorſque dans une expreſſion algébrique, comme $x^2 + ax + b$, on fait l'indéterminée x infinie, alors tous les termes où elle ne ſe trouve pas, auſſi-bien que tous ceux où elle eſt dans un degré inférieur, s'évanouiſſent; & le ſeul ou les ſeuls termes, où elle ſe trouve à la plus haute puiſſance, ſubſiſtent. La raiſon de cela eſt aiſée à ſentir : un quarré dont les deux dimenſions ſont infinies, eſt infini à

l'égard d'un rectangle qui n'en a qu'une d'infinie, & ainſi des autres puiſſances. Par conſéquent les plus baſſes s'anéantiſſent en comparaiſon des plus hautes.

La ſeconde remarque eſt qu'une fraction, dont le numérateur eſt fini & le dénominateur infini, eſt o, & qu'au contraire celle dont le dénominateur eſt o, eſt infinie. En effet, à meſure que le dénominateur augmente, la fraction diminue, & au contraire. Les exemples les plus ſimples ſuffiſent pour s'en convaincre. Ainſi lorſque dans une expreſſion fractionnelle, comme $\frac{a^2 b}{a a - x x}$, on ſuppoſera x infinie, cette expreſſion deviendra nulle; mais ſi l'on vouloit la rendre infinie, la choſe ſeroit facile. Il n'y auroit qu'à ſuppoſer $a a - x x = o$, ou $x = a$. Alors elle ſe réduiroit à $\frac{a^2 b}{o}$, dont la valeur eſt infinie. Une courbe qui auroit pour équation $\frac{a^2 b}{a a - x x} = y$, auroit donc ſon ordonnée infinie à la diſtance a du ſommet.

Aidé de ces obſervations, le lecteur eſt en état de nous prévenir & d'appercevoir de lui-même la maniere de déterminer les aſymptotes des courbes. D'abord celles de la premiere eſpece n'exigent rien de plus que l'équation de la courbe. Il ſuffit d'y ſuppoſer l'abſciſſe infinie, & d'examiner d'après les principes ci-deſſus, quelle valeur en réſulte pour l'ordonnée. Si elle eſt finie, ce ſera évidemment la diſtance de l'aſymptote parallele à l'axe. Si elle eſt zero, cet axe même ſera l'aſymptote de la courbe. Si l'on ſoupçonnoit que cette courbe eût pour aſymptote une de ſes ordonnées, placée à une diſtance finie du ſommet, il n'y auroit qu'à ſuppoſer l'ordonnée infinie, c'eſt-à-dire égaler à o le dénominateur de la fraction qui l'exprime, la valeur qui en réſulteroit ſeroit l'abſciſſe correſpondante.

Les aſymptotes inclinées à l'axe exigent un peu plus d'appareil, & c'eſt ici que la détermination des tangentes eſt néceſſaire. Ce ſont, nous l'avons dit plus haut, des lignes qui touchent la courbe à un point infiniment éloigné, & qui rencontrent l'axe à une diſtance finie du ſommet. Il faut donc trouver généralement cette diſtance; ce qui ſe fera facilement en ôtant l'abſciſſe de la ſoutangente, ou les ajoutant enſemble, ſuivant la forme de la courbe. Enſuite il faudra y ſuppoſer l'abſciſſe infinie, & la valeur qui réſultera de cette ſuppoſition,

ſi elle eſt finie, donnera le point de l'axe par où paſſe l'aſymptote. Il reſte à déterminer l'angle qu'elle fera avec l'axe. Ceci ne ſera pas plus difficile ; il eſt aiſé de voir que cet angle ſera déterminé par le rapport de la ſoutangente à l'ordonnée, lorſque l'abſciſſe eſt infinie. Il faudra donc former l'expreſſion de ce rapport, c'eſt-à-dire, diviſer la ſoutangente par l'ordonnée, & ſuppoſer dans cette expreſſion l'abſciſſe infinie. La raiſon qui en réſultera, ſi c'eſt celle d'une quantité finie à une autre finie, (comme s'il ne reſtoit que des quantités conſtantes dans le numérateur & le dénominateur de la fraction), donnera l'angle de l'aſymptote avec l'axe. Si l'abſciſſe reſtoit ſeule dans le dénominateur, ce ſeroit un ſigne que ce rapport ſeroit infini ; l'aſymptote ſeroit une ordonnée perpendiculaire. Au contraire, ſi l'abſciſſe reſtoit dans le numérateur, cette raiſon ſeroit infiniment petite, & l'aſymptote ſeroit l'axe même de la courbe.

Nous pourrions encore, ſi l'étendue à laquelle nous ſommes limités le permettoit, donner ici la maniere de reconnoître diverſes autres affections des courbes, comme l'angle qu'elles forment avec leur axe, dans les endroits où elles l'entre-coupent ; leurs points de rebrouſſement ſoit obliques, ſoit perpendiculaires à l'axe, &c ; mais tout cela nous meneroit beaucoup trop loin. Comme ces déterminations tiennent aux principes ci-deſſus, nous laiſſons aux lecteurs Géometres le plaiſir d'y parvenir d'eux-mêmes.

VII.

Inventions géométriques de M. de Fermat.

Nous ſuſpendons ici pour quelque temps le récit des progrès de la méthode de *Deſcartes*, afin de faire connoître un de ſes comtemporains à qui la Géométrie a auſſi de grandes obligations. Ceux à qui l'hiſtoire de cette Science eſt un peu connue, doivent s'appercevoir que nous voulons parler de M. *de Fermat*. Ce rival digne de *Deſcartes*, ne ſe porta avec guere moins de ſuccès que lui dans la carriere des découvertes analytiques : on ne peut même diſconvenir que quelques unes de ſes inventions ne l'emportent ſur les ſiennes en ſimplicité, & ne ſoient des germes plus développés des méthodes ſi commodes que nous poſſédons aujourd'hui. Si *Deſcartes*

eût manqué à l'eſprit humain, *Fermat* l'eût remplacé en Géométrie.

En effet, avant même que *Deſcartes* publiât ſa Géométrie, M. *de Fermat* étoit en poſſeſſion de la plûpart de ſes inventions les plus brillantes, comme ſes méthodes *de maximis & minimis*, & des tangentes, ſa conſtruction des lieux ſolides, &c. On en tire la preuve de ſon commerce épiſtolaire avec *Roberval*, imprimé à la ſuite de ſes œuvres. On y lit dans une Lettre du mois d'Août 1636, » J'ai trouvé beaucoup » d'autres propoſitions géométriques, comme la reſtitution » de tous les lieux plans d'*Apollonius*, &c. Mais ce que j'eſ- » time le plus eſt une méthode pour déterminer toutes ſortes » de lieux plans & ſolides, par le moyen de laquelle je trouve » les *maximæ & minimæ in omnibus problematibus*, & ce par » une équation auſſi ſimple que celles de l'analyſe ordinaire. » Dans une autre du mois ſuivant, il lui dit qu'il y avoit déja ſept ans qu'il avoit communiqué cette regle à M. d'*Eſpagnet*. Il ajoute que depuis ce temps il l'a beaucoup étendue, qu'il la fait ſervir à l'invention des quadratures des courbes & des ſolides, à celle des tangentes, des centres de gravité, à la réſolution de certains problêmes numériques, enfin à la détermination des lieux plans & ſolides. Il paroît par-là que M. de *Fermat* donnoit aſſez improprement le nom de *maximis & minimis*, à ſa méthode d'analyſer les problêmes; car on aura de la peine à concevoir que la vraie méthode de ce nom puiſſe être de quelque uſage dans pluſieurs de ces queſtions.

La méthode *de maximis & minimis* de M. de *Fermat*, eſt fondée ſur ce principe déja apperçu par *Kepler* dans ſa *Stereometria doliorum*, ſçavoir que lorſqu'une grandeur, par exemple l'ordonnée d'une courbe, eſt parvenue à ſon *maximum* ou ſon *minimum*, dans une ſituation infiniment voiſine ſon accroiſſement ou ſa diminution eſt nulle. En faiſant uſage de ce principe, dont il eſt facile d'appercevoir la vérité, nous allons voir naître la regle de M. de *Fermat*. Car ſuppoſons qu'une ordonnée y, exprimée par une équation, ſoit parvenue à ſon *maximum*, il s'enſuivra qu'en ſuppoſant dans cette équation l'abſciſſe augmentée ou diminuée d'une quantité infiniment petite comme e, ces deux valeurs de y ſeront égales. Par conſéquent ſi on les égale, qu'on en retranche les termes communs, qu'on di-

viſe par *e* autant qu'il eſt poſſible, & qu'enfin on ſupprime les termes où *e* ſe trouve, (car ils ſont nuls à l'égard des autres à cauſe de la petiteſſe infinie de *e*), on aura enfin la valeur de *x*, à laquelle répond la plus grande ordonnée. (*a*) Cette regle extrêmement ingénieuſe, eſt la même, à la notation près, que celle qu'enſeigne le calcul différentiel. Elle lui cede ſeulement en quelques abrégés de calcul, & en ce qu'elle eſt arrêtée par les irrationalités dont il n'eſt pas toujours facile de délivrer une équation, au lieu qu'elles ne ſont point un obſtacle à la derniere.

De même que la regle de *Deſcartes* pour les queſtions *de maximis & minimis*, eſt ſujette à quelques limitations particulieres, celle de M. de *Fermat* a auſſi les ſiennes. Sa nature étant de donner les points d'une courbe où deux ordonnées infiniment proches ſont égales, elle donne tous ceux où la tangente eſt parallele à l'axe. Mais quoique cela arrive le plus ſouvent dans des points de plus grandes ou moindres ordonnées, ces points ne ſont pas les ſeuls qui ayent cette propriété. Un point d'infléxion ou de rebrouſſement peut avoir ſa tangente parallele à l'axe, comme on peut voir dans la figure 47e, & par conſéquent ſi dans la courbe propoſée, il y en a quelqu'un de cette nature, la regle de *Fermat* le donnera avec ceux de vrais *maxima* ou *minima*. Il faudra donc, après avoir déterminé ces points, les examiner chacun en particulier, & voir ſi au-delà l'ordonnée continue à croître ou à diminuer; car dans ce cas ce ne ſeroient que des points d'in-

Fig. 47.

(*a*) Nous croyons devoir éclaircir par quelques exemples le procédé de cette regle. Pour cet effet, nous prendrons l'équation au cercle qui eſt $2ax - xx = yy$, & nous ſuppoſerons qu'on ignorât qu'elle eſt la poſition de la plus grande ordonnée. En ſuivant la regle en queſtion, il faut à la place de x, ſubſtituer dans cette expreſſion, $x + e$; ce qui donne celle-ci, $2ax + 2ae - xx - 2xe - ee$, qu'il faut égaler à $2ax - xx$. En ôtant les termes communs, on a $2ae - 2xe - ee = 0$. Qu'on ſupprime ee, à cauſe de ſa petiteſſe infinie, & on aura $2ae - 2xe = 0$, $2x = 2a$, $x = a$; ce qu'on ſçait déja.

Mais ſuppoſons qu'on demandât la plus grande ordonnée dans la courbe dont l'équation eſt $y^3 = ax^2 - x^3$, ou ce qui eſt la même choſe, le plus grand produit fait d'un des ſegmens d'une ligne par le quarré de l'autre. Nous aurons dans ce cas, ſuivant le précepte de la regle, $ax^2 - x^3 = ax^2 + 2axe + aee - x^3 - 3ex^2 - 3eex - e^3$. Otons-en les termes communs, enſuite ſupprimons ceux où *e* eſt élevé au cube ou au quarré, diviſons enfin par *e*; & nous aurons $2a = 3x$, ou $x = \frac{2}{3}a$; ce qui nous apprend que cette courbe a ſa plus grande ordonnée éloignée de ſon ſommet de $\frac{2}{3}a$, ou que le plus grand produit cherché eſt celui qui ſe fait du quarré des $\frac{2}{3}$ de la ligne par l'autre tiers.

fléxion ou de rebrouſſement. Nous remarquerons ici en paſſant que M. *Huyghens* s'eſt trompé dans l'expoſition qu'il donne de cette regle. Son fondement, dit-il, conſiſte en ce que lorſqu'une ordonnée eſt parvenue à ſon *maximum* ou *minimum*, il y en a de part & d'autre deux qui l'avoiſinent & qui ſont égales. C'eſt bien là une propriété des *maxima* & *minima*, mais ce n'eſt pas celle qui préſide à la regle de M. de *Fermat*. Car ſi cela étoit, elle devroit non ſeulement donner les points où la tangente eſt parallele à l'axe, mais auſſi ceux où elle eſt perpendiculaire, comme la regle de *Deſcartes*, & même les points d'interſections de rameaux de courbes; ce qu'elle ne fait point. Son véritable fondement eſt que lorſqu'une ordonnée de courbe eſt parvenue à ſon *maximum* ou *minimum*, le plus ſouvent ſa tangente eſt parallele à l'axe, & par conſéquent la différence de deux ordonnées infiniment voiſines eſt nulle.

Cette invention de M. de *Fermat* fut l'occaſion d'une querelle aſſez vive entre lui & M. *Deſcartes:* mais comme ſa méthode des tangentes fut auſſi un des objets de cette querelle, nous la ferons connoître auparavant. Celle-ci n'eſt pas moins ingénieuſe, & elle eſt fondée à peu près ſur les mêmes principes. Voici de quelle maniere M. de *Fermat* l'explique. Que la ligne BD, ſoit tangente à une courbe, par exemple, une parabole: *Fig.* 48. il eſt évident, dit M. de *Fermat*, que toute autre ordonnée que BC comme bc, la rencontrera au dehors, & par conſéquent la raiſon de BC^2 à βc^2, qui eſt la même que celle de CD^2 à cD^2, ſera moindre que celle de CB^2 à cb^2, ou que celle de CA à cA. Mais ſi l'on ſuppoſe que cette raiſon ſoit la même, & que la diſtance Cc s'anéantiſſe, les points b & B, ſe confondront, & l'on aura une équation qui, traitée de la même maniere que dans la méthode *de maximis & minimis*, donnera le rapport de CD à CA.

Nous ne pouvons diſconvenir que la regle de M. de *Fermat*, expoſée comme nous venons de le faire d'après lui, n'eſt pas préſentée ſous le point de vue le plus avantageux. Elle le ſeroit mieux de la maniere ſuivante. Toute tangente, dirions-nous, n'eſt autre choſe qu'une ſécante dont les points d'interſection avec la courbe ſe rapprochant continuellement, coincident enfin. Il faut donc ſuppoſer deux ordonnées, comme

BC, *bc*, dont la distance *e* soit indéterminée, & trouver par l'équation de la courbe la grandeur de la ligne CD, distance
Fig. 49. de l'intersection de la sécante & de l'axe, à l'ordonnée BC. Cela donnera une équation dans laquelle il n'y aura qu'à faire *e* infiniment petite, comme on a fait dans la méthode *de maximis & minimis*, on aura une équation entre CD & CA, qui donnera le rapport de la soutangente à l'abscisse (*a*).

Il nous faut maintenant rendre compte du démêlé qu'eut M. de *Fermat* avec *Descartes*, à l'occasion de ces deux méthodes. Lorsque la Géométrie de *Descartes* vit le jour, M. de *Fermat* fut un des premiers à l'examiner, & sans doute il lui rendit la justice qu'elle méritoit. Mais il fut fort surpris de n'y rien trouver concernant les questions *de maximis & minimis*, qui par leur importance & leur difficulté méritent particuliérement l'attention des Géometres. Il écrivit donc au Pere *Mersenne*, & il lui envoya ses méthodes pour les questions *de maximis & minimis*, pour les tangentes des courbes, pour la construction des lieux solides, lui témoignant en même temps sa surprise que M. *Descartes* eût omis les premieres de ces questions. Cette remarque parut un défi injurieux à *Descartes :* d'ailleurs sa querelle avec M. de *Fermat* sur la réfraction, étoit encore dans toute sa chaleur, & il s'aigrissoit aisément contre ceux qui tardoient trop à se rendre à son sentiment. Ce fut dans ces circonstances & avec ces dispositions qu'il reçut l'écrit de M. de *Fermat*. Préoccupé de l'envie d'y trouver à redire, il répondit au Pere *Mersenne*, que l'une & l'autre de ces regles ne valoient rien, & il proposa contr'elles des difficultés que nous exposerons plus bas. M. de *Fermat* trouva deux zélés défenseurs dans MM. *Roberval* & *Pascal* le pere ; d'un autre côté, MM. *Midorge*, *Desargues*, *Hardi*, prirent le parti de *Descartes*, & ce fut un procès littéraire qui fut

(*a*) Voici un exemple de cette méthode appliquée à l'hyperbole équilatere. Que le demi-diametre transverse soit *a*, l'abscisse AC $=$ *x*, CD $=$ ζ, BC est $\sqrt{(2ax+xx)}$, & A*c* étant $x-e$, *cb* est $\sqrt{(2ax-e+x-e^2)}$. Maintenant à cause de la similitude des triangles, BC : *bc* :: CD : *c*D, ou BC^2 : *bc*^{2} :: CD^2 : *c*D^2 ; conséquemment $2ax+xx : 2ax-2ae+x^2-2xe+e^2 :: \zeta^2 : \zeta-e^2$, & en multipliant les extrêmes & les moyens, rejettant ensuite les termes communs, aussi-bien que ceux où se trouve *ee*, divisant enfin par *e*, on a $\zeta = \frac{2ax+x^2}{a+x}$, qui est la vraie expression de la soutangente dans l'hyperbole.

plaidé avec beaucoup de vivacité & d'aigreur d'un côté & de l'autre. Nous en avons les pieces dans le troiſieme Tome des Lettres de *Deſcartes*. Il ſe termina en même temps que celui qui concernoit la Dioptrique. M. de *Fermat*, ennemi des querelles, & plus juſte à l'égard de *Deſcartes* que celui-ci ne l'étoit au ſien, fit les premieres démarches de réconciliation ; la paix fut ſignée, & ſuivie de quelques lettres obligeantes de part & d'autre.

Nous n'héſiterons pas un inſtant à donner ici le tort entier à *Deſcartes*. Il eſt évident en ce qui concerne la regle *de maximis & minimis* ; en effet, *Deſcartes* prétendoit que la regle de M. de *Fermat* étoit mauvaiſe, parce qu'elle ne réuſſiſſoit point dans un cas où il en faiſoit une fauſſe application. Il *Fig. 50.* vouloit que la tangente tirée d'un point extérieur comme C, à la circonférence d'une courbe fût un vrai *maximum* à l'égard des lignes tirées à la partie convexe, ou un *minimum* à l'égard de celles qui atteignent à la partie concave ; en conſéquence il vouloit que la regle de M. de *Fermat* ſervît de cette maniere à trouver les tangentes des courbes ; & comme elle ne le faiſoit point, il la déclaroit mauvaiſe. Mais la paſſion ſeule, (car les grands hommes n'en ſont pas toujours exempts), pouvoit inſpirer cette objection à *Deſcartes*. De quelque maniere qu'on l'entende, la tangente CA n'eſt point un *maximum*, ou un *minimum*, & elle n'en a aucun caractere. La regle propre de *Deſcartes* pour les queſtions de cette nature ; celle du calcul différentiel, la même, à la notation près, que celle de *Fermat*, ſeroient vicieuſes ſi cette prétention étoit fondée. Il n'y a ici de *maximum* ou de *minimum*, que la raiſon de CB à BA, ou bien le ſegment DE de la tangente au point D. Or en conſidérant la queſtion de cette maniere, la regle de M. de *Fermat* réuſſit très-bien, & donne exactement la tangente.

Deſcartes eût pu faire une objection plus ſpécieuſe, & à certains égards plus fondée, s'il eût mieux connu le fondement de la regle de M. de *Fermat*. C'eût été de chercher une courbe telle que celle que repréſente la figure 51e, & qui a un point de rebrouſſement perpendiculaire en B, qui eſt une ſorte de *maximum*. La regle en queſtion appliquée à la détermination de ce *maximum*, ne l'auroit point donné, d'où il auroit pu conclure qu'elle étoit vicieuſe. Mais *Fermat* auroit pu répon-

dre que la nature de ſa regle étoit de ne donner que les points où la tangente eſt parallele à l'axe, & que loin de réputer cette limitation comme un défaut, on devoit la regarder comme une perfection. Enfin s'il eût été aidé des lumieres que nous avons aujourd'hui, il eût pu le défier d'en donner aucune qui ne fût ſujette à quelque limitation ſemblable ou équivalente. En effet il n'en eſt aucune, ſans en excepter celle du calcul différentiel, qui ne ſoit ou trop, ou trop peu étendue, & qui n'exige par cette raiſon quelques attentions particulieres. Ce défaut paroît abſolument inévitable.

Il y a dans les objections que M. *Deſcartes* éleva contre la regle des tangentes de *Fermat*, quelque choſe de plus ſpécieux; mais ce n'eſt encore au fond qu'une vraie chicane. *Fermat* s'étoit ſervi dans l'exemple de ſa méthode, d'une parabole & d'une de ſes propriétés pour en déterminer la tangente. *Deſcartes* regardant cet exemple comme général, appliqua la regle à d'autres courbes en ſuivant préciſément le même procédé que celui de l'exemple; procédé qui n'étoit applicable qu'à la parabole: & comme elle ne réuſſiſſoit point, il prononçoit qu'elle étoit fauſſe, & ſi mauvaiſe qu'on n'y faiſoit pas même uſage des propriétés caractériſtiques de la courbe à laquelle il s'agiſſoit de tirer la tangente. On ne peut pas ſoupçonner que M. de *Fermat*, doué comme il l'étoit de génie, donnât dans une abſurdité pareille. *Roberval* & *Paſcal* répondirent vivement, & prétendirent que ſi *Deſcartes* eût voulu entendre le ſens de la regle & de l'exemple en queſtion, il ne lui eût point fait cette querelle. M. *Deſcartes* s'obſtina de ſon côté à dire que M. de *Fermat* n'entendoit pas ſa regle, & rien ne l'a pu faire changer de ſentiment, pas même leur réconciliation. On le voit encore prétendre quelque temps après, en écrivant au Pere *Merſenne*, que c'étoit lui qui avoit déſillé les yeux ſur ce ſujet à ſon adverſaire, & que ſi celui-ci avoit réuſſi à la rendre exacte, c'étoit à lui qu'il le devoit. S'il convient enfin quelque part de ſon excellence & de l'avantage qu'elle a ſur la ſienne quant à la ſimplicité & à la briéveté, ce n'eſt que pour s'en donner le mérite. Il eſt vrai qu'on la trouve développée plus clairement dans une de ſes Lettres (*a*), qu'elle ne

(*a*) Lettres, T. III, p. 332.

l'avoit été par M. de *Fermat*. Mais ce n'étoit point une raiſon de s'en attribuer l'honneur. Sans *Fermat*, content de la ſienne il ne ſongeoit à rien de plus ; & le mérite d'une invention reſte toujours à celui qui en a poſé les premiers principes, quoique dans la ſuite on y ait ajouté quelques degrés de perfection.

A ces regles pour les tangentes & les queſtions *de maximis & minimis*, M. de *Fermat* en ajoutoit une pour la détermination des centres de gravité. Mais comme elle eſt fort bornée, & qu'elle ne s'étend qu'aux paraboles & aux conoïdes paraboliques de tous les ordres, nous ne nous y arrêterons pas. Nous devons donner plus d'attention à ſes écrits ſur les lieux plans & ſolides, & ſur la conſtruction des équations du troiſieme & du quatrieme degré. On voit par ces écrits, dont il parle dans ſes Lettres avant que la Géométrie de *Deſcartes* parût, qu'il ſe rencontra avec notre Philoſophe dans l'idée d'exprimer la nature des courbes par des équations algébriques. Dans l'un, qui eſt intitulé *Iſagoge Topica ad loca plana & ſolida*, il détermine les différentes formes d'équations qui réſultent des différentes poſitions de l'axe de la ſection conique ſur lequel on prend les abſciſſes, & du point d'où l'on commence à les compter. Il paſſe enſuite à conſtruire diverſes équations ſolides, dans celui qui porte pour titre : *Appendix ad iſagogem Topicam*, que les éditeurs des Œuvres de *Roberval* ont mal à propos inſéré parmi celles de ce dernier, mais qui appartient inconteſtablement à M. de *Fermat*. Nous nous bornerons ici à dire que ſon analyſe eſt très-reſſemblante à celle de M. de *Sluſe*, que nous ferons connoître dans la ſuite de ce Livre.

M. de *Fermat* fit encore quelques progrès remarquables dans cette partie de la Géométrie qui concerne la quadrature des figures curvilignes. Dans un écrit qu'on lit parmi ſes Œuvres, il aſſigne la dimenſion de pluſieurs courbes aſſez compliquées, qu'il réduit par d'ingénieuſes transformations à celle du cercle ou de l'hyperbole. C'eſt par-là qu'il trouva la meſure de la cyſſoïde & de la conchoïde, la quadrature abſolue des hyperboles des genres ſupérieurs, &c.

Nous ne doutons point que la curioſité de nos lecteurs ne s'intéreſſe à connoître un peu plus particuliérement un Géometre auſſi recommandable. Nous allons leur apprendre le

peu que nous en ſçavons. M. de *Fermat* étoit de Toulouſe, où il naquit vers le commencement du dix-ſeptieme ſiecle, ou la fin du précédent. Quoiqu'il ſe ſoit fait un grand nom dans les Mathématiques, elles ne furent cependant pas ſon unique & ſa principale occupation. A ce goût & ce talent ſupérieur qu'il avoit pour elles, il joignoit une grande érudition & une connoiſſance parfaite de la Langue Grecque, & de pluſieurs autres modernes. Revêtu outre cela d'une charge de Conſeiller au Parlement de Toulouſe, il l'exerça toujours avec aſſiduité, & il s'y fit la réputation d'un Juge des plus éclairés (*a*). Il mourut au commencement de 1665. Le recueil de ſes Ouvrages conſiſte en deux volumes qui parurent après ſa mort. (*in-fol.*) L'un eſt une édition de *Diophante*, enrichie de ſes notes & de ſes découvertes dans le genre d'analyſe cultivée par cet ancien Arithméticien, qu'il pouſſa fort loin (*b*); l'autre contient ſes œuvres propres, ſoit de Géométrie traitée ſuivant la méthode ancienne qui lui étoit très-familiere, ſoit d'analyſe moderne. On y trouve encore ſon commerce épiſtolaire avec divers Géometres célebres de ſon temps, comme *Roberval*, *Paſcal*, &c; c'eſt un morceau très-intéreſſant pour l'hiſtoire de la Géométrie & de l'Analyſe.

VIII.

Progrès de la Géométrie de Deſcartes.

On devroit s'attendre à voir la Géométrie de *Deſcartes* reçue avec un empreſſement univerſel. Mais diverſes cauſes en retarderent pendant quelques années les progrès. Il eſt des préjugés juſques dans la Géométrie, & il eſt rare que ceux qui ſont accoutumés dès long-temps à une certaine maniere de raiſonner, ſoient diſpoſés à quitter une ancienne habitude pour en contracter une nouvelle. D'ailleurs l'ouvrage de *Deſcartes* étoit écrit avec une ſi grande préciſion, qu'il ne pouvoit y avoir qu'un fort petit nombre de perſonnes en état de l'entendre. *Deſcartes* enfin avoit ſes ennemis, qui déprimoient le plus qu'il leur étoit poſſible ſes inventions. Toutes ces raiſons réunies, produiſirent l'eſpece d'oppoſition que rencontra d'abord ſon ouvrage. La plûpart des Géometres ſe mirent peu en peine

(*a*) Journal des Sçav. Fév. 1665.
(*b*) Voyez l'article de *Diophante*.

d'y pénétrer, & quelques autres ne s'attacherent qu'à le critiquer ſans lui rendre la juſtice qu'il méritoit pour les découvertes mêmes qu'ils ne pouvoient ſe refuſer d'y reconnoître.

Parmi ces détracteurs de la Géométrie de *Deſcartes*, nous ſommes fâchés de trouver M. de *Roberval.* Nous ne pouvons diſſimuler qu'il ſe comporta à cet égard d'une maniere fort paſſionnée, & qui lui fait peu d'honneur. Son hiſtoire avec Milord *Cavendish*, mérite d'être racontée. S'entretenant un jour avec ce Seigneur, qui étoit fort verſé dans les Mathématiques, il lui témoignoit être inquiet de ſçavoir d'où *Deſcartes* avoit pu avoir l'idée d'égaler tous les termes de l'équation à zero. Milord *Cavendish* lui répondit qu'il n'ignoroit cela que parce qu'il étoit François, & lui offrit de lui montrer le Livre auquel *Deſcartes* devoit cette invention. En effet, il le mena chez lui, & lui montra l'endroit d'*Harriot* où l'on voit la même choſe; ſur quoi *Roberval* tranſporté de joie, s'écria, *il l'a vu, il l'a vu!* & il le publia de toutes parts. Ce trait ne nous offre, à la vérité, encore qu'une preuve de la jalouſie de *Roberval:* mais il ne s'en tint pas là. Il prétendit relever pluſieurs fautes dans la Géométrie de *Deſcartes*, & c'eſt en quoi il eſt tout-à-fait inexcuſable; car ſes objections ſont toutes mauvaiſes, & ne prouvent que ſa paſſion & ſon opiniâtreté. Il objecta d'abord à *Deſcartes* qu'il s'étoit trompé dans ſa conſtruction des équations du ſixieme degré, & qu'il avoit omis une partie de ſa conchoïde parabolique, ſans laquelle un cercle ne pouvoit la couper en ſix points. Il avoit tort viſiblement: car *Deſcartes* réduiſant ſon équation à une autre ayant toutes ſes racines poſitives, cette partie de ſa conchoïde que *Roberval* prétendoit omiſe, étoit entiérement inutile, puiſque étant au deſſous de l'axe, elle auroit donné des racines négatives. Il ſe trompoit encore en prétendant que la partie ſupérieure de cette courbe ne pouvoit pas être coupée en ſix points différens par un cercle. *Deſcartes* lui indiqua un moyen facile de s'aſſurer que cela eſt poſſible; & effectivement cela arrive, comme l'ont démontré M. *Hudde* (*a*) & le Pere *Rabuel* (*b*). Cependant malgré le temps qu'il avoit eu pour le vérifier, on le voit dix ans après renouveller à *Deſcartes* cette

(*a*) Schoot. *Comm. ad fin.*
(*b*) Comm. ſur la Géométrie de Deſcartes.

objection (*a*). Il en fit en même temps une nouvelle ſur la nature des équations. Il ne ſe borna plus à prétendre, comme il avoit fait d'abord (*b*), que *Deſcartes* s'étoit trompé dans ſa regle pour la diſtinction des racines poſitives & négatives, en ce qu'elle n'a pas lieu quand il y a des racines imaginaires. Il prétendit qu'elle étoit fauſſe même lorſqu'il n'y en a aucune. L'équation qu'il propoſoit en exemple, étoit celle-ci, $x^3 - 4x^2 + 4x - 4 = 0$, où, diſoit-il, il n'y a aucune racine imaginaire, & qui n'a cependant pas trois racines poſitives: on s'attendroit à lui voir aſſigner ces trois racines qui démentoient la regle de *Deſcartes;* mais c'eſt ce qu'il ne fait point: & en effet, cette équation n'a qu'une racine réelle qu'on trouve être à fort peu de choſe près 3. 13, & les deux autres qui ſont imaginaires, ſont $0.43 \pm \sqrt{(-1.0930)}$.

M. de Beaune.

La France auroit preſque la honte d'avoir été la derniere à accueillir la Géométrie de *Deſcartes* ſans M. de *Beaune* (*c*). Ce ſçavant Analiſte en pénétra le premier tous les myſteres, & il n'y avoit pas encore long-temps qu'elle avoit paru, lorſqu'il entreprit d'en éclaircir les endroits difficiles par des notes. Il les communiqua à *Deſcartes*, qui les approuva fort obligeamment, & qui lui répondit qu'il n'en avoit pas trouvé un mot qui ne fût ſelon ſon ſens. On les trouve dans le Commentaire de *Schooten*, ſous le titre de *Florimundi de Beaune, in Cart. Geom. notæ Breves.* Le zele avec lequel M. de *Beaune* ſe porta en faveur de la nouvelle Géométrie, lui valut particuliérement l'amitié de notre Philoſophe, qui témoigne en pluſieurs endroits de ſes Lettres faire plus de fonds ſur ſes lumieres & ſon approbation, que ſur celles de tous les autres Géometres qu'il y avoit alors en France.

Ces Lettres (*d*) nous apprennent que M. de *Beaune* a élevé le premier la fameuſe queſtion de déterminer la nature des courbes par les propriétés données de leurs tangentes. C'eſt ce qu'on appelle la méthode inverſe des tangentes, parce que

(*a*) Lettres de Deſcartes. *T. III, p.* 454.

(*b*) Cette objection eſt imputée à M. de Fermat dans un excellent Mémoire de M. l'Abbé de Gua, (*Mem. de l'Acad.* 1743). Ce qui a pu induire cet Académicien en erreur, c'eſt que Roberval n'eſt point nommé dans la lettre dont il s'autoriſe, mais c'eſt certainement de lui qu'il eſt queſtion.

(*c*) M. de Beaune étoit Conſeiller au Préſidial de Blois. Il étoit né en 1601, & il mourut en 1651.

(*d*) Voyez la 71 du T. III.

c'eſt

c'eſt l'inverſe de celle qui détermine les tangentes par les propriétés de la courbe. Il fit même à ce ſujet quelques découvertes dont M. *Deſcartes* le loue beaucoup. « Pour vos lignes » courbes, dit-il, (*a*) la propriété dont vous m'envoyez la dé» monſtration m'a paru ſi belle, que je la préfére à la qua» drature de la parabole trouvée par *Archimede*; car il exami» noit une ligne donnée, au lieu que vous déterminez l'eſ» pace contenu dans une qui ne l'eſt pas encore. »

Ce fut dans ces circonſtances que M. de *Beaune* propoſa à *Deſcartes* un problême qui eſt devenu célebre, & qui a retenu ſon nom. Il s'agiſſoit de trouver la conſtruction d'une courbe telle que l'ordonnée E G fût à la ſoutangente E B, comme une ligne donnée N, à G F qui eſt une ligne interceptée entre la courbe & la ligne A F inclinée de 45°. Ce problême eſt aſſez difficile, même en y employant le calcul intégral : mais les génies ſupérieurs ſçavent ordinairement ſe frayer des voies au travers des difficultés qui arrêtent les eſprits ordinaires ; & M. *Deſcartes* ne fût pas auſſi court à ce ſujet qu'on le croit ordinairement, & que l'a écrit un célebre Géometre (*b*). Il trouva (*c*) 1°. que cette courbe avoit une aſymptote parallele à la ligne A F, & paſſant par le point C éloigné de A d'une quantité égale à N. 2°. Que menant G I parallele à C E, & G K tangente au point G, la ſoutangente I K étoit conſtante ; propriété qui ſuffit pour conclure que la courbe cherchée n'eſt qu'une logarithmique dont les ordonnées ſont inclinées ſur l'axe d'un angle de 45°. 3°. Il la conſtruiſit par la combinaiſon de deux mouvemens, ou par l'interſection continuelle de deux regles dont les vîteſſes étoient, l'une uniforme, l'autre variée, ſuivant une certaine loi qui lui permettoit d'en trouver tant de points qu'il vouloit. Il la déclara enfin du nombre des courbes méchaniques. Il ſeroit curieux que l'analyſe par laquelle *Deſcartes* s'éleva à ces connoiſſances, nous fût parvenue. Mais nous n'en avons trouvé aucune trace dans ſes Lettres. *Fig.* 52.

M. de *Beaune* ne ſe contenta pas d'éclaircir la Géométrie de *Deſcartes* par ſes notes : il donna naiſſance dans l'analyſe

(*a*) Ibid.
(*b*) C'eſt M. J. Bernoulli dans ſes *Lect. calculi integ.* Lect. 11.
(*c*) Lett. de Deſcart. *Ibid.*

à une théorie nouvelle, ſçavoir celle des limites des équations; théorie très-utile pour leur réſolution. Pour ſentir le mérite de cette invention, il faut ſe rappeller ce qu'on a fait voir plus haut, que lorſque l'équation eſt affranchie des fractions & des irrationalités, ſi elle a quelque racine rationnelle, c'eſt néceſſairement un diviſeur du dernier terme: mais il arrive ſouvent que ce dernier terme a une foule de diviſeurs. Comment reconnoître à peu près celui qu'il faut choiſir pour s'éviter mille eſſais inutiles & laborieux? M. de *Beaune* imagina pour cela de déterminer les deux nombres entre leſquels ſe rencontrent la plus grande & la moindre des racines cherchées, ce qu'il nomme les limites de l'équation. Cette invention diminue beaucoup le travail, & réduit ſouvent à un très-petit nombre, les diviſeurs à eſſayer; quelquefois même on verra tout de ſuite par-là que l'équation n'a aucune racine rationnelle, comme s'il arrivoit que les limites tombaſſent entre les diviſeurs du dernier terme les plus voiſins. M. de *Beaune* ſuit avec beaucoup de ſoin toutes les formes d'équations depuis le ſecond degré juſqu'au quatrieme incluſivement, & aſſigne dans tous ces cas les limites des racines. Nous devons le Traité qui contient ſes inventions à M. *Eraſme Bartholin*. Après la mort de M. de *Beaune*, qu'il étoit allé trouver à Blois, il obtint de ſes héritiers les lambeaux épars de ſes manuſcrits. Il les raſſembla, les ſuppléa & les fit imprimer en 1659, à la ſuite de la nouvelle édition du Commentaire de *Schooten* ſur la Géométrie de *Deſcartes*. Il promettoit un autre Traité du même M. de *Beaune*, intitulé *De angulo ſolido*; mais cette promeſſe n'a point été effectuée.

Après M. de *Beaune*, ce ſont principalement des Etrangers, & preſque tous Hollandois, à qui la nouvelle analyſe de *Deſcartes* doit ſon établiſſement, & les premiers progrès qu'elle fit au-delà du terme où l'avoit amené ſon inventeur. Nous remarquons encore que ce furent la plûpart de jeunes Géometres. En effet, *Schooten*, *Huyghens*, *Hudde*, *de Witt*, *Van-Heuraet*, *Sluſe*, &c. dont les travaux ou les découvertes dans ce genre vont nous occuper, ne faiſoient que commencer à courir la carriere de la Géométrie dans les premieres années qui ſuivirent la publication de l'ouvrage de *Deſcartes*. Cela ne doit point nous ſurprendre. Lorſqu'on n'a point encore

contracté de préjugés d'habitude, l'esprit est bien plus sensible à l'impression de la vérité, & plus propre à faire un bon choix. Aussi a-t'on vu le plus souvent ces découvertes qui ont changé de mieux en mieux la face des Sciences, ne devoir leur établissement qu'à de jeunes gens. La Physique nous en offre des exemples connus; & sans sortir de notre genre, nous en trouvons plusieurs. La méthode de *Cavalleri*, rejettée par les vieux Géometres de son temps, fut embrassée par tous les jeunes, au grand avantage de la Géométrie, qui en reçut un accroissement considérable. De jeunes Géometres firent valoir celle de *Newton* & de *Leibnitz*, & établirent sa supériorité sur celle de *Descartes* qui avoit rencontré les mêmes difficultés pour supplanter celle de *Viete*, & celle-ci probablement avoit éprouvé un sort semblable.

Schooten (François) Professeur de Leyde, un des premiers qui ait accueilli la Géométrie de *Descartes*, s'est rendu recommandable par le Commentaire qu'il a donné sur elle. *Descartes* avoit écrit en homme de génie qui ne s'attache pas à de petits éclaircissemens: il avoit même affecté en divers endroits une sorte d'obscurité, par des raisons qu'il dévoile dans une de ses Lettres, de sorte que son ouvrage n'étoit rien moins qu'à la portée de tout le monde. Il l'avoit senti lui-même, & par cette raison il approuvoit fort le dessein de M. de *Beaune*, qui avoit travaillé à l'éclaircir par des notes. Mais *Schooten* entreprit quelque chose de plus étendu. Il traduisit d'abord cet ouvrage en Latin, afin d'en rendre la connoissance plus générale, & il le publia ainsi avec son Commentaire en 1649: il en donna en 1659 une nouvelle édition considérablement augmentée, & suivie de quantité de pieces intéressantes, comme les notes de M. de *Beaune*, deux Lettres de M. *Hudde* sur la réduction des équations, & les *Maxima* & *Minima*; une de *Van-Heuraet* sur la rectification des Courbes; les deux Traités posthumes de M. de *Beaune* sur la nature & les limites des équations; les Elémens des Courbes de M. *de Witt*: on y trouve enfin un Traité posthume de lui-même; (car il mourut dans le cours de l'impression du second volume). Il est intitulé *de concinnandis dem. Geom. ex calculo Algebrico.* *Schooten.*

Le Commentaire de *Schooten* a eu, & avec raison, l'approbation générale. Il contient tout ce qui est nécessaire

pour l'intelligence de la Géométrie de *Deſcartes*, ſans avoir cette prolixité fatiguante que la plûpart des Commentateurs ſçavent rarement éviter. On pourroit ſeulement y deſirer quelques éclairciſſemens ſur la fin du ſecond Livre, où *Deſcartes* parle de ſes ovales; ce qui eſt un des endroits les plus difficiles de ſa Géométrie. Nous avons encore un Commentaire ſur *Deſcartes* par le Pere *Rabuel* Jéſuite. Cet ouvrage eſt ſans doute excellent: mais outre qu'il eſt venu un peu tard, il nous ſemble qu'il eſt trop ſurchargé d'exemples & d'explications. Nous croyons avec *Newton*, que ceux qui ont beſoin de tant d'éclairciſſemens ne ſont pas nés pour la Géométrie. Les notes que M. *Jacques Bernoulli* a jointes à l'édition de la Géométrie de *Deſcartes* faite à Bâle en 169.., rendent cette édition précieuſe. Il n'en faut pour garand que le nom de cet illuſtre Géometre.

Outre le Commentaire de *Schooten* ſur la Géométrie de *Deſcartes*, nous avons encore de lui un ouvrage eſtimable, ſous le titre d'*Exercitationes Mathematicæ*. Quelques-unes d'entr'elles concernent des objets dignes d'attention: telle eſt celle où il reſtitue *les lieux plans d'Appollonius*. On doit auſſi faire cas de ſon Traité *de organica ſectionum conicarum deſcriptione*, déja publié en 1646, où il enſeigne diverſes manieres de décrire les ſections coniques par un mouvement continu. On trouve enfin dans le cinquieme Livre de ces Exercitations, divers exemples d'analyſe adroitement appliquée à des problêmes difficiles & curieux, ſoit de Géométrie, ſoit d'Arithmétique.

M. de Witt.

Parmi ceux qui ont adopté les premiers, & qui ont cultivé l'analyſe de *Deſcartes*, nous remarquerons avec diſtinction M. *de Witt* (*a*). Ce politique célebre, dont la triſte cataſtrophe eſt ſi connue, avant que de devenir homme d'état, s'étoit adonné à la Géométrie avec le plus grand ſuccès. *Schooten* nous a conſervé un monument de ſes travaux. C'eſt ce Traité intitulé *Elementa curvarum*, dont on a parlé plus haut. Il comprend deux Livres, dans le premier deſquels M. *de Witt*

(*a*) M. de Witt (Jean) naquit en 1625. Il fut à la tête du gouvernement dans les temps les plus difficiles de la République. Zélé pour la liberté de ſa patrie, il s'oppoſa toujours fortement à l'élection d'un Stathouder, & ce fut la cauſe de ſa perte. Il fut maſſacré & mis en morceaux avec ſon frere Corneille de Witt, dans une émeute populaire excitée en 1672 par la faction du Stathouderat.

traite la théorie des Sections Coniques d'une maniere qui lui eſt propre & qui eſt fort ingénieuſe. Il conçoit ces courbes décrites par l'interſection continuelle d'un des côtés d'un angle mobile avec une ligne droite qui ſe meut parallélement à elle-même, d'où il déduit toutes leurs propriétés avec beaucoup de ſagacité. Le ſecond Livre a pour objet la conſtruction des lieux géométriques qu'il développe davantage que *Deſcartes*, & pour leſquels il donne des formules particulieres. On a néanmoins davantage ſimplifié cette théorie depuis ce temps. M. *de Witt*, à la tête des affaires de ſa patrie, n'eut plus le temps de ſe livrer à des recherches géométriques purement curieuſes. Mais doué de l'eſprit Mathématique, il le tourna du côté des objets utiles, & nous le trouvons à la tête de ceux qui ont examiné la probabilité de la vie humaine, & le prix des rentes viageres. Ses réfléxions ſur ce problême d'économie politique, donnerent lieu à un nouvel arrangement dans la République à cet égard, & il publia ſur ce ſujet un petit écrit Hollandois, dont l'objet étoit d'en montrer l'équité à ſes compatriotes. M. *Leibnitz*, de qui nous tenons ceci (*a*), eût fort deſiré de voir cet écrit, mais je crois qu'il ne ſe retrouve plus même en Hollande.

M. Hudde.

Le célebre M. *Hudde* (*b*) eſt encore un de ces hommes que l'étude des Mathématiques ne détourna pas des affaires, & qui après avoir ſervi ces Sciences par des découvertes, ſervit auſſi ſa patrie dans des places diſtinguées. Nous le voyons cité en pluſieurs endroits du Commentaire de *Schooten*, qui rapporte de lui diverſes inventions, eſſais de ſa jeuneſſe. Il s'adonna enſuite particuliérement à l'analyſe des équations, & il fit ſur ce ſujet quantités de remarques utiles. Il ſe propoſoit de donner un ouvrage, où il eût traité cette matiere à fond & avec étendue : mais ſes occupations ne le lui permettant plus, il s'eſt contenté d'en laiſſer voir le jour à deux fragmens que *Schooten* publia en 1659, ſous le titre de *J. Huddenii*, *de reductione æquationum, & de maximis & minimis*, *epiſt. II.* Le premier de ces écrits nous offre diverſes regles utiles pour diſcerner ſi une équation, ſoit littérale, ſoit numérique, eſt réductible ou non ; ſi elle eſt le produit de deux autres d'un degré inférieur,

(*a*) *Comm. Philoſ.* T. II, p. 219.

(*b*) M. Hudde a été long-temps un des Conſuls & Bourguemeſtre d'Amſterdam. Il mourut en 1704, à un âge fort avancé.

& pour trouver dans ce dernier cas ſes facteurs. Cet écrit & le ſuivant, ſont encore recommandables par l'invention particuliere de M. *Hudde* pour déterminer les tangentes des courbes, & les *maxima & minima*. Comme nous avons deſſein de rapporter dans un article les progrès de cette méthode, nous différerons juſque-là d'en rendre compte.

Nous n'avons qu'une bien petite partie des inventions analytiques de M. *Hudde*. Livré une fois aux affaires, il ne lui fut plus poſſible de mettre dans ſes papiers l'ordre & la liaiſon néceſſaires pour les donner au public. Mais M. *Leibnitz* qui, paſſant par Amſterdam, le viſita & converſa avec lui, nous aſſure que ces papiers renfermoient quantité de choſes excellentes (*a*). Il ajoute que la méthode des tangentes de M. de *Sluſe*, lui étoit connue depuis long-temps, & même qu'il en avoit une meilleure & plus étendue. *Amplior*, dit-il, *ejus methodus eſt quàm quæ à Sluſio fuit publicata*. Il avoit auſſi trouvé, ſuivant M. *Leibnitz*, dès l'année 1662, la quadrature de l'hyperbole que *Mercator* publia en 1667. Nous liſons encore dans une lettre de M. *Leibnitz* (*b*), que M. *Hudde* étoit en poſſeſſion de ce beau problême de Géométrie, ſçavoir de faire paſſer une courbe par tant de points qu'on voudra; ſur quoi M. *Hudde* lui avoit dit, apparemment en badinant, qu'il pourroit déterminer l'équation d'une courbe qui repréſenteroit les traits du viſage d'un homme connu. Il avoit encore écrit ſur les rentes viageres, & la probabilité de la vie humaine (*c*). M. *Leibnitz* deſiroit fort que ſes manuſcrits tombaſſent entre les mains de perſonnes intelligentes & zélées pour le bien des Sciences, qui fiſſent part au public de quelques-uns des morceaux intéreſſans qu'ils contenoient; mais ſes ſouhaits n'ont pas été exaucés, & l'on n'a rien vu du tout de ces précieux écrits.

Van-Heuraet. M. *Van-Heuraet* mérite auſſi une place parmi ceux qui ont cultivé avec le plus de ſuccès l'analyſe de *Deſcartes*. *Schooten* rapporte de lui une ſolution du problême de déterminer le point d'inflexion dans la conchoïde, en ſe ſervant de la conchoïde même avec un cercle pour conſtruire l'équation cubi-

(*a*) *Comm. Epiſt. de Analyſi promotâ*, p. 87, ed. *in*-4°.
(*b*) Ibid. p. 92.
(*c*) *Comm. Phil.* T. II, p. 219.

que à laquelle il conduit. Mais il s'eſt fait ſurtout un nom par ſa méthode pour réduire la rectification d'une ligne courbe, à la quadrature d'une autre figure curviligne : voici l'eſprit & le précis de cette méthode qui eſt très-ingénieuſe. Que P D ſoit l'ordonnée tirée d'un point D, & A D, D L, la perpendiculaire à la courbe & la tangente au même point D ; enfin B une ligne conſtante : ſi l'on fait comme P D à A D ainſi B, à une quatrieme proportionnelle P E qu'on éleve ſur le même axe, & ſur le même point P, le point E & tous les autres ſemblablement déterminés ſeront dans une courbe dont l'aire diviſée par la ligne B ſera la grandeur de l'arc correſpondant de la premiere : par exemple, l'arc H D ſera égal à l'aire F E P I diviſée par B ; d'où il ſuit que ſi la courbe F E G devient une de celles qui ſont abſolument quarrables, on pourra aſſigner une ligne droite égale à l'arc H D. Or c'eſt-là ce qui arrive ſi l'on ſuppoſe que la courbe H D ſoit celle des paraboles cubiques, dont l'équation eſt $a x^2 = y^3$. Alors la courbe F E G devient un ſegment de parabole ordinaire ; ainſi la parabole cubique dont on vient de parler eſt abſolument rectifiable. Il en eſt de même des autres paraboles dont les équations ſont $a x^4 = y^5$, $a x^6 = y^7$, &c. Que ſi l'on ſuppoſoit la courbe H D une parabole ordinaire, l'autre F E G deviendroit une hyperbole rapportée à ſon axe conjugué : c'eſt pourquoi la rectification de la parabole dépend de la quadrature d'un eſpace hyperbolique. *Fig.* 53.

Cette découverte, je veux dire, celle de la premiere rectification abſolue d'une courbe géométrique, a été revendiquée à l'Angleterre par MM. *Wallis* & *Brounker*, qui en font honneur à M. Guillaume *Neil* : effectivement en admettant les faits qu'ils racontent, on ne peut diſconvenir que *Van-Heuraet* n'ait été prévenu par *Neil* : mais outre que la méthode du Géometre Hollandois eſt fort différente de celle de l'Anglois, il eſt fort probable que la découverte en queſtion n'avoit point encore paſſé la mer ; car on voit par les Lettres de

(*a*) La démonſtration de ce théorême eſt facile ; car en concevant une ordonnée *p d e* infiniment proche de la premiere, & la ligne *d l* parallele à l'axe, on a les deux triangles *d l* D, D P A ſemblables, & conſéquemment *d l* : *d* D : : D P : D A. Or D P : D A : : B : P E ; donc *d l* ou P *p* × P E = *d* D × B ; ainſi le rectangle infiniment petit P *e* eſt égal à *d* D × B, & la même choſe arrivant partout ailleurs, on a l'aire de la courbe F P, égale au rectangle de l'arc H D par la ligne conſtante B.

Paſcal, qu'au commencement de 1659, on croyoit encore dans le continent, à ce prétendu axiôme auquel la rectification de la cycloïde avoit donné naiſſance ; ſçavoir que la nature ne permettoit pas qu'on rectifiât une courbe, à moins qu'on n'eût déja ſuppoſé, comme dans la cycloïde, une courbe égale à une droite. Il eſt auſſi certain qu'*Huyghens*, qui étoit en correſpondance avec l'Angleterre, ignoroit à la fin de l'année 1658, la découverte de *Neil ;* ce qui rend fort vraiſemblable que *Van-Heuraet* n'en étoit pas non plus informé.

Nous trouvons encore un troiſieme prétendant à l'honneur de cette découverte, ſçavoir M. de *Fermat.* Ses démonſtrations ſur ce ſujet ne virent à la vérité le jour qu'au commencement de 1660 (*a*) : mais nous avons des raiſons de croire qu'il en étoit en poſſeſſion depuis quelque temps, & qu'il étoit parvenu de lui-même à cette belle vérité ; car *Paſcal* nous apprend que *Fermat* lui avoit envoyé dès la fin de 1658, une méthode très-générale pour la dimenſion des ſurfaces produites par circonvolution, & quoiqu'il ne nous l'ait pas communiquée, nous la devinons ſans peine (*b*). Or cette méthode a telle analogie avec celle qui ſert à la rectification des courbes, qu'il eſt très-probable qu'il ne tarda pas à paſſer de l'une à l'autre. Ainſi ſans déroger au droit de priorité de *Neil* & *Van-Heuraet*, comme ayant publié les premiers cette découverte, nous croyons pouvoir en faire auſſi honneur à M. de *Fermat.*

(*a*) *Geom. promota in 7. de cycl. lib. ad finem.*

(*b*) Cette méthode eſt ſans doute celle-ci. Qu'on ait une courbe quelconque, comme I D B, & que l'ordonnée P D ſoit prolongée de telle ſorte que P E ſoit égale à la perpendiculaire D A au point D de la courbe ; ce point E & tous les autres ſemblablement déterminés, formeront une courbe dont l'aire ſera égale à la ſurface de l'onglet cylindrique retranché par un plan paſſant par l'axe I A, & incliné de 45°, ſurface qui eſt viſiblement à celle du ſolide de circonvolution autour du même axe, comme le rayon à la circonférence. Or on trouve que ſi I D eſt une parabole, F E en eſt auſſi une dont le ſommet eſt quelque peu retiré en arriere. Si I D eſt une ellipſe dont I A ſoit le grand axe, F E en eſt encore une : mais celle-ci ſera une hyperbole rapportée à ſon axe conjugué, ſi la courbe de rotation eſt une ellipſe ſur ſon petit axe, d'où il ſuit que la ſurface du ſphéroïde alongé ne dépend que de la quadrature d'un ſegment elliptique ; mais celle du ſphéroïde applati dépend de la quadrature de l'hyperbole. On trouve de même que ſi la courbe de rotation eſt une hyperbole rapportée, ſoit à ſon axe tranſverſe, ſoit à ſon axe conjugué, celle qui en réſulte F E eſt une hyperbole. La démonſtration de toutes ces choſes ſera facile à ceux qui poſſedent un peu l'analyſe : c'eſt pourquoi je la ſupprime.

Fig. 54.

M.

M. *Huyghens* ne s'eſt pas moins diſtingué dès ſa jeuneſſe par ſon intelligence dans l'analyſe algébrique, que par ſon habileté dans la méthode ancienne. Ses premiers eſſais dans la Géométrie nous en fourniſſent les preuves. Nous le voyons cité pluſieurs fois par *Schooten*, qui rapporte de lui diverſes inventions, ouvrages du temps où il étoit ſon diſciple. Parvenu à un âge plus mûr, il inventa la théorie des développées, théorie devenue depuis ce temps très-célebre parmi les Géometres. Elle forme la troiſieme partie de ſon fameux ouvrage intitulé, *Horologium Oſcillatorium*. Quoiqu'elle y ſoit expoſée en grande partie ſuivant le ſtyle de l'ancienne Géométrie, on ne peut douter que l'analyſe de *Deſcartes* ne ſoit le principal inſtrument dont il s'eſt ſervi. C'eſt pourquoi nous allons préſenter ici le tableau de cette théorie. *M. Huyghens.*

Des développées.

Qu'on imagine une courbe comme A B, enveloppée d'un fil infiniment fléxible & délié, ſans être capable d'extenſion, & qu'à commencer du point A, ce fil ſe déploie en ſe roidiſſant de deſſus cette courbe, ſon extrêmité en décrira une autre. On nomme celle-ci la courbe décrite par évolution ou par développement, & la premiere eſt nommée ſa *développée*. Voici leurs principales propriétés. *Fig.* 55.

1°. Il eſt d'abord facile de voir que le fil qui ſe développe doit être continuellement perpendiculaire à la courbe que décrit ſon extrêmité. En effet, la développée peut être conſidérée comme un polygone d'une infinité de côtés, & par conſéquent à chaque petit développement de deſſus un de ces côtés, l'extrêmité du fil décrira un arc de ſecteur circulaire infiniment petit. Or le rayon d'un ſecteur circulaire eſt perpendiculaire à l'arc; c'eſt pourquoi le fil dans ſon développement ſera toujours perpendiculaire au petit arc de courbe qu'il décrit en même temps. La longueur de ce fil eſt nommée le rayon de la développée.

2°. Il eſt encore évident que le fil eſt continuellement tangente à la développée: celle-ci n'eſt donc que la courbe que touchent toutes les perpendiculaires à celle qui eſt décrite par évolution; ou bien autrement, c'eſt celle qui borne l'eſpace d'où l'on ne peut tirer aucune perpendiculaire à la partie AEF de la courbe, d'avec celui d'où on peut tirer deux, comme l'avoit autrefois remarqué *Appollonius*, qui avoit touché de fort près

à cette découverte. On peut enfin concevoir la développée comme & le lieu des concours de toutes les perpendiculaires infiniment proches à la courbe AEF ; car ſi ces perpendiculaires ſont à des diſtances finies, elles formeront par leur concours un polygone circonſcrit à la développée : mais quand on les ſuppoſera infiniment proches & en nombre infini, ce polygone deviendra la développée même.

3°. Si d'un point quelconque de la développée comme B, & du rayon BE, on décrit un cercle, il touchera & coupera à la fois la courbe au point E. Cette propriété ſinguliere eſt facile à démontrer. Car puiſque le petit côté E*e* de la courbe décrite, eſt l'arc d'un des ſecteurs infiniment petits qui ont leurs ſommets dans la développée, le cercle dont cet arc eſt partie, & la courbe AEF auront une tangente commune au point E. Le cercle touchera donc la courbe à ce point ; mais on démontre auſſi qu'il en ſort d'un côté, & qu'il y entre de l'autre (*a*), d'où il ſuit qu'il la touche & la coupe à la fois. Ce ſera là une eſpece de paradoxe pour ceux qui ne connoiſſent que la Géométrie ordinaire ; mais il n'y a qu'à conſidérer les courbes comme des polygones d'une infinité de côtés pour faire diſparoître tout le ſingulier que préſente un contact & une interſection à la fois. Il eſt aiſé de voir dans la figure 56, que ſi CD, DE, EF, ſont trois côtés infiniment petits d'une courbe dont AB eſt tangente, il peut y en avoir une autre comme *c*DE*f*, qui ait avec elle le petit côté DE commun & par conſéquent la même tangente, & qui paſſe d'un côté entre la courbe & la tangente, & de l'autre les laiſſe toutes deux de même part. Rien n'empêche même qu'une courbe comme *c*DE*φ*, ne touche & ne coupe à la fois une ligne droite : c'eſt ce qui arrive dans les points d'infléxion, comme nous l'avons déja remarqué.

Fig. 56.

4°. Puiſque chaque portion infiniment petite E*e* d'une courbe, eſt un arc de ſecteur dont le centre eſt ſur la développée, il s'enſuit que la courbure d'une courbe à chacun de ſes points, eſt la même que celle du cercle décrit du rayon de la dévelop-

(*a*) Nous ferons d'abord voir facilement que le cercle ſort de la courbe du côté du point A. Car il eſt évident qu'en tirant une autre tangente TH (*fig.* 55.) le côté BT eſt moindre que l'arc BH & la droite TH. Or ces deux lignes priſes enſemble ſont égales à BE ; par conſéquent BT < BE, le cercle paſſe donc au-delà du point T. On démontre par un procédé ſemblable qu'il tombe au dedans, du côté oppoſé.

pée à ce point ; & comme un cercle eſt d'autant moins courbe que ſon rayon eſt plus grand, il s'enſuit que la courbure d'une courbe à chaque point, eſt en raiſon inverſe du rayon de la développée. Cette propriété eſt d'un très-grand uſage dans la Méchanique. Car l'analyſe des mouvemens curvilignes, dépend en grande partie de la connoiſſance de la courbure à chaque point de la courbe décrite.

5°. Une courbe algébrique quelconque étant donnée, on peut trouver l'équation de celle qui la décriroit par ſon développement. On peut pour cela employer une analyſe ſemblable à celle de *Deſcartes* pour les tangentes. Si l'on conçoit un cercle décrit d'un rayon déterminé & coupant la courbe en pluſieurs points, & qu'on cherche par l'analyſe ordinaire les abſciſſes qui répondent aux points d'interſection, on trouvera une équation dans laquelle il y aura trois valeurs égales lorſque ce cercle deviendra le cercle oſculateur, ou ſon rayon celui de la développée : il n'y aura donc qu'à la comparer à une autre équation feinte ayant trois valeurs égales, & cette comparaiſon déterminera le rapport du rayon de la développée avec l'abſciſſe de la courbe. Mais il nous ſuffira ici d'avoir indiqué cette méthode, parce qu'elle eſt trop laborieuſe. Sans recourir encore au calcul différentiel, il y en a une autre plus ſimple & fondée ſur les mêmes principes que celle de M. de *Fermat* pour les tangentes.

En effet, une courbe étant donnée, on connoît la poſition de chacune de ſes perpendiculaires comme E Q, F H, qui répondent à des ordonnées éloignées d'une diſtance finie. On peut par conſéquent trouver par une analyſe fort ſimple la diſtance du point *b*, où ſe coupent ces deux perpendiculaires ; ce qui donnera la grandeur de l'une des lignes E*b*, ou F*b*. Mais ſuppoſons que la diſtance des ordonnées P E, Q F diminue & enfin s'évanouiſſe, le point *b* ſe rapprochera de la développée, & enfin tombera ſur elle. Il faudra donc, comme dans la regle de M. de *Fermat* pour les tangentes, ſuppoſer la diſtance P Q s'évanouir, ou faire ſon expreſſion égale à zero, la valeur qu'aura dans ce cas la ligne E*b* ſera le rayon de la développée au point E. Mais lorſqu'on connoîtra la grandeur de E B, rien ne ſera plus facile que de déterminer celles des lignes

Fig. 57

à cette découverte. On peut enfin concevoir la développée comme & le lieu des concours de toutes les perpendiculaires infiniment proches à la courbe A E F ; car ſi ces perpendiculaires ſont à des diſtances finies, elles formeront par leur concours un polygone circonſcrit à la développée : mais quand on les ſuppoſera infiniment proches & en nombre infini, ce polygone deviendra la développée même.

3°. Si d'un point quelconque de la développée comme B, & du rayon B E, on décrit un cercle, il touchera & coupera à la fois la courbe au point E. Cette propriété ſinguliere eſt facile à démontrer. Car puiſque le petit côté E*e* de la courbe décrite, eſt l'arc d'un des ſecteurs infiniment petits qui ont leurs ſommets dans la développée, le cercle dont cet arc eſt partie, & la courbe A E F auront une tangente commune au point E. Le cercle touchera donc la courbe à ce point ; mais on démontre auſſi qu'il en ſort d'un côté, & qu'il y entre de l'autre (*a*), d'où il ſuit qu'il la touche & la coupe à la fois. Ce ſera là une eſpece de paradoxe pour ceux qui ne connoiſſent que la Géométrie ordinaire ; mais il n'y a qu'à conſidérer les courbes comme des polygones d'une infinité de côtés pour faire diſparoître tout le ſingulier que préſente un contact & une interſection à la fois. Il eſt aiſé de voir dans la figure 56, que ſi C D, D E, E F, ſont trois côtés infiniment petits d'une courbe dont A B eſt tangente, il peut y en avoir une autre comme *c* D E *f*, qui ait avec elle le petit côté D E commun & par conſéquent la même tangente, & qui paſſe d'un côté entre la courbe & la tangente, & de l'autre les laiſſe toutes deux de même part. Rien n'empêche même qu'une courbe comme *c* D E *φ*, ne touche & ne coupe à la fois une ligne droite : c'eſt ce qui arrive dans les points d'infléxion, comme nous l'avons déja remarqué.

Fig. 56.

4°. Puiſque chaque portion infiniment petite E*e* d'une courbe, eſt un arc de ſecteur dont le centre eſt ſur la développée, il s'enſuit que la courbure d'une courbe à chacun de ſes points, eſt la même que celle du cercle décrit du rayon de la dévelop-

(*a*) Nous ferons d'abord voir facilement que le cercle ſort de la courbe du côté du point A. Car il eſt évident qu'en tirant une autre tangente T H (*fig.* 55.) le côté B T eſt moindre que l'arc B H & la droite T H. Or ces deux lignes priſes enſemble ſont égales à B E ; par conſéquent B T < B E, le cercle paſſe donc au-delà du point T. On démontre par un procédé ſemblable qu'il tombe au dedans, du côté oppoſé.

pée à ce point ; & comme un cercle eſt d'autant moins courbe que ſon rayon eſt plus grand, il s'enſuit que la courbure d'une courbe à chaque point, eſt en raiſon inverſe du rayon de la développée. Cette propriété eſt d'un très-grand uſage dans la Méchanique. Car l'analyſe des mouvemens curvilignes, dépend en grande partie de la connoiſſance de la courbure à chaque point de la courbe décrite.

5°. Une courbe algébrique quelconque étant donnée, on peut trouver l'équation de celle qui la décriroit par ſon développement. On peut pour cela employer une analyſe ſemblable à celle de *Deſcartes* pour les tangentes. Si l'on conçoit un cercle décrit d'un rayon déterminé & coupant la courbe en pluſieurs points, & qu'on cherche par l'analyſe ordinaire les abſciſſes qui répondent aux points d'interſection, on trouvera une équation dans laquelle il y aura trois valeurs égales lorſque ce cercle deviendra le cercle oſculateur, ou ſon rayon celui de la développée : il n'y aura donc qu'à la comparer à une autre équation feinte ayant trois valeurs égales, & cette comparaiſon déterminera le rapport du rayon de la développée avec l'abſciſſe de la courbe. Mais il nous ſuffira ici d'avoir indiqué cette méthode, parce qu'elle eſt trop laborieuſe. Sans recourir encore au calcul différentiel, il y en a une autre plus ſimple & fondée ſur les mêmes principes que celle de M. de *Fermat* pour les tangentes.

En effet, une courbe étant donnée, on connoît la poſition de chacune de ſes perpendiculaires comme E Q, F H, qui répondent à des ordonnées éloignées d'une diſtance finie. On peut par conſéquent trouver par une analyſe fort ſimple la diſtance du point *b*, où ſe coupent ces deux perpendiculaires ; ce qui donnera la grandeur de l'une des lignes E*b*, ou F*b*. Mais ſuppoſons que la diſtance des ordonnées P E, Q F diminue & enfin s'évanouiſſe, le point *b* ſe rapprochera de la développée, & enfin tombera ſur elle. Il faudra donc, comme dans la regle de M. de *Fermat* pour les tangentes, ſuppoſer la diſtance P Q s'évanouir, ou faire ſon expreſſion égale à zero, la valeur qu'aura dans ce cas la ligne E*b* ſera le rayon de la développée au point E. Mais lorſqu'on connoîtra la grandeur de E B, rien ne ſera plus facile que de déterminer celles des lignes

Fig. 57

BR, AR, qui ſont les coordonnées de la courbe ABD, on aura donc enfin l'équation de la développée.

Juſqu'ici nous n'avons vu qu'un fort petit nombre de courbes rectifiables, comme la parabole cubique, & quelques autres du même genre remarquées par *Van-Heuraet*. La théorie des développées mit M. *Huyghens* en poſſeſſion de quelque choſe d'infiniment plus général. Une courbe algébrique quelconque étant donnée, on peut déterminer l'équation de celle qui la décriroit par ſon développement : or toutes celles-ci ſont rectifiables abſolument, puiſque le rayon de la développée eſt égal à la portion de la courbe SAB qu'il touche, (plus ou moins quelque ligne connue, ſi le rayon de la développée au ſommet S n'eſt pas nul ; ce qui eſt le cas des ſections coniques, & de diverſes autres courbes) : ainſi voilà une infinité de courbes ſuſceptibles de rectification abſolue. M. *Deſcartes* déſeſpéroit qu'il fût poſſible de rectifier aucune courbe : quel auroit été ſon étonnement, s'il eût été témoin de cette découverte ?

C'eſt le propre de la vérité d'être acceſſible par diverſes voies différentes : ce que *Neil* & *Van-Heuraet* avoient démontré chacun à leur maniere, ſur la parabole cubique exprimée par $ax^2 = y^3$, fut la premiere choſe qui ſe préſenta à M. *Huyghens*. Cette parabole eſt la développée de la parabole ordinaire dont elle touche l'axe à une diſtance du ſommet égale à la moitié du parametre, comme l'on voit dans la figure 57.

Cette théorie conduiſit auſſi M. *Huyghens* à une belle découverte ſur la cycloïde : c'eſt que la développée de cette courbe eſt elle-même une cycloïde égale à la premiere, & ſeulement poſée en ſens contraire ; & qu'à chaque point comme E, le rayon de la développée EG eſt égal au double de la corde EF. La découverte de M. *Wren* ſur la longueur de la cycloïde & de ſes parties, n'eſt plus qu'un corollaire de cette vérité. Car puiſque la développée de la demi-cycloïde AB eſt une autre demi-cycloïde égale AC, & que la longueur de celle-ci eſt CB, qui eſt double de BD, il ſuit que la longueur de AB eſt double de BD, ou du diametre du cercle générateur. On voit avec le même facilité que chaque portion AG, ſera double de la corde EF, ou de ſon égale AK. Il ne faut

Fig. 58.

que l'inſpection de la figure pour s'en convaincre.

Nous aurions encore à faire mention ici de ce que M. *Huyghens* ajouta à la méthode des tangentes de *Fermat*. Mais les mêmes motifs qui nous ont fait renvoyer à un article particulier les inventions de M. *Hudde* ſur ce ſujet, nous portent à différer auſſi juſque-là l'expoſition de celles d'*Huyghens*. Nous en agirons de même à l'égard de celles de M. de *Sluſe* qui concernent en partie la méthode des tangentes, en partie la conſtruction des équations. Nous deſtinons un article à part à ce dernier objet.

IX.

Progrès de la méthode des tangentes & de maximis & minimis.

Nous avons fait connoître dans le cours de ce Livre deux méthodes pour tirer les tangentes, & pour les queſtions *de maximis & minimis*; ſçavoir celles de *Deſcartes* & de *Fermat*. Mais quoique l'une & l'autre ſortant des mains de leurs inventeurs ne laiſſaſſent rien à deſirer pour le fonds, elles étoient ſuſceptibles de quelques degrés de plus de facilité, que leur ont donné des Géometres poſtérieurs. MM. *Hudde*, *Huyghens*, *Sluſe*, ſont ceux à qui l'on eut cette obligation; & quoique le calcul différentiel ait effacé leurs inventions, la nature de notre ouvrage nous impoſe la néceſſité d'en parler. Commençons par celle de M. *Hudde*.

Pour prendre une idée de ce que M. *Hudde* ajouta à la méthode des tangentes de *Deſcartes*, & à celle qui eſt fondée ſur le même principe pour les queſtions *de maximis & minimis*, il faut ſe rappeller que la principale partie de l'opération, ſe réduit à déterminer une équation d'une certaine forme à contenir deux racines égales. *Deſcartes* l'exécutoit en la comparant à une équation fictice à racines égales; procédé qui étoit laborieux & prolixe. C'eſt en cela que M. *Hudde* ſimplifia beaucoup ces deux méthodes; il obſerva que pour réduire cette équation à contenir ces racines égales requiſes, il n'y avoit qu'à la multiplier terme à terme par ceux d'une progreſſion arithmétique, le premier par le premier, le ſecond par le ſecond, &c. Il démontre cette regle dans ſes deux lettres que *Schooten* a imprimées à la ſuite de ſon Commentaire ſur *Deſcartes*. Mais cela tient à des principes qu'il ſeroit trop long d'expoſer. Nous nous contenterons de l'induction des

exemples que nous donnerons bientôt. D'ailleurs M. le Marquis *de l'Hôpital* en a donné une démonſtration dans ſon *Analyſe des infiniment Petits*, à laquelle nous renvoyons.

C'eſt principalement dans les queſtions *de maximis & minimis*, qu'éclate la commodité de la regle de M. *Hudde*, parce qu'il n'y a aucune préparation à faire à l'équation de la courbe, ou à l'expreſſion de la grandeur dont on cherche le *maximum* ou le *minimum*. Nous avons négligé par cette raiſon d'en faire l'application à la méthode des tangentes de *Deſcartes*, qui ſuppoſant pluſieurs opérations préliminaires, n'eſt plus d'aucun uſage. Quant aux *maxima & minima*, la regle de M. *Hudde* eſt d'une commodité qui ne le cede point à celle du calcul différentiel, pourvu que l'expreſſion à traiter ſoit rationnelle. Il n'y a en effet qu'à ordonner l'équation de la courbe ſuivant les puiſſances de l'abſciſſe; écrire enſuite au deſſous la progreſſion arithmétique, la plus commode pour faire évanouir celui des termes dont l'abſence préſentera des facilités pour réſoudre la nouvelle équation; enfin multiplier, terme par terme, ceux de l'équation propoſée par ceux de la progreſſion choiſie, la valeur ou les valeurs de l'abſciſſe qui réſulteront de la nouvelle équation, donneront le *maximum* ou les *minima* cherchés. Appliquons ceci à quelques exemples; nous prendrons pour le premier cette courbe dont nous avons donné ailleurs le *maximum* par la regle de M. de *Fermat*, où le cube de l'ordonnée eſt égal au ſolide du quarré d'un des ſegmens de l'axe, par l'autre; c'eſt-à-dire dont l'équation eſt $ax^2 - x^3 = y^3$. En arrangeant cette équation comme on la preſcrit plus haut, on a celle-ci $x^3 - ax^2 + ox + y^3 = o$. On la multipliera terme à terme par 3. 2. 1. 0, ce qui la réduira à $3x^3 - 2ax^2 = o$, ou $x = \frac{2}{3}a$, comme on l'a déja trouvé. On auroit encore rencontré le même réſultat en ſe ſervant de la progreſſion arithmétique 0. 1. 2. 3. Car on auroit eu $2ax^2 - 3y^3 = o$; d'où on auroit tiré à l'aide de la premiere équation $x = \frac{2}{3}a$. Enſuite mettant dans l'équation de la courbe cette valeur, on trouve que lorſque y eſt la plus grande qu'il ſe puiſſe, elle eſt égale à $a\sqrt[3]{\frac{4}{27}}$.

Qu'on propoſe préſentement l'équation $y^2 - 2by + bb + xx - ax = o$, & qu'on demande la plus grande valeur de x.

On écrira $x^2 - ax + (yy - 2by + bb) = 0$. On multipliera comme ci-deſſus par 2. 1. 0, & l'équation ſe réduira à $2x^2 - ax$, ou $x = \frac{a}{2}$: l'abſciſſe à laquelle répondent la plus grande ou la moindre ordonnée, eſt donc $\frac{1}{2}a$, Ainſi mettant $\frac{1}{2}a$ dans l'équation propoſée, au lieu de x, elle devient $yy - 2by + bb - \frac{1}{4}aa$, ce qui donne à y deux valeurs, l'une poſitive $y = a + b$, & l'autre négative $-y = a - b$. Cette équation n'eſt effectivement que celle d'un cercle rapporté à une paralele à ſon diametre A a, & l'ordonnée y étant généralement ed ou $e\delta$, elle devient la plus grande ED ou EA, lorſque l'abſciſſe devient CE; (fig. 59.) mais ſi c'eſt la plus grande abſolument qu'on cherche, il eſt facile de la reconnoître: on auroit trouvé les mêmes choſes en multipliant l'équation propoſée par une autre progreſſion arithmétique. On peut en faire l'éprcuve. *Fig.* 59.

La regle de M. *Hudde* eſt ſujette aux mêmes limitations que celle de M. *Deſcartes*; c'eſt-à-dire qu'elle donne non ſeulement les véritables points de *maxima & minima*, ou ceux des tangentes paralleles à l'axe, mais encore ceux de rebrouſſement & les points d'interſection des rameaux de la courbe. Cela eſt néceſſaire; car elle eſt fondée ſur les mêmes principes que la regle de *Deſcartes*, & elle n'en differe que dans les moyens de trouver les racines égales de l'équation propoſée. Tout ce qu'on a dit ſur celle-là doit donc s'appliquer à celle-ci.

La méthode qu'on vient d'expoſer s'applique auſſi à la détermination des points d'infléxion & des rayons de la développée. On parvient dans ces deux cas, en ſuivant la méthode de *Deſcartes*, à une équation dans laquelle il doit y avoir trois racines égales. Pour les trouver, il faudra, ſuivant M. *Hudde*, la multiplier par une progreſſion arithmétique, comme on l'a enſeigné plus haut, & réiterer cette opération à l'égard de l'équation qui en réſultera, en employant ou la même progreſſion arithmétique, ou une autre quelconque: ou bien, ce qui revient au même, il faudra prendre deux progreſſions, les multiplier termes par termes, & s'en ſervir pour multiplier ceux de l'équation propoſée. Celle qui en naîtra contiendra l'une des racines égales cherchées. Si quelque problême conduiſoit à une équation qui dût contenir quatre racines égales,

il faudroit trois multiplications de cette eſpece, & ainſi de ſuite. Nous n'entrerons pas ici dans de plus grands détails concernant cette méthode; nous nous contenterons d'indiquer des livres où elle eſt plus développée, & appliquée à divers exemples, comme le Commentaire du P. *Rabuel* ſur la Géométrie de *Deſcartes*, & le Traité des infinimens Petits de M. de *l'Hôpital*, où l'on en trouve la comparaiſon avec la méthode du calcul différentiel.

MM. *Huyghens* & de *Sluſe* ont pris une autre route que M. *Hudde*, & ſe ſont attachés à ſimplifier les procédés de la regle de M. de *Fermat*. Reprenons cette regle & examinons de près ce qui ſe paſſe dans les opérations qu'elle exige; nous allons voir naître les abrégés de calcul que ces deux Géometres ont remarqués. Qu'on ait cette expreſſion $x^3 - a x^2$, dont il faut déterminer le *maximum* : *Fermat* preſcrit d'augmenter ou de diminuer x de la quantité e, & de ſubſtituer dans l'expreſſion précédente $x \pm e$, ou ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances, d'égaler l'une & l'autre expreſſion, de ſupprimer les termes communs, & ceux où e eſt au deſſus du premier degré, & de diviſer le reſte par e. Faiſons cela à l'égard de x^3 : Nous aurons $x \pm e^3$, ou $x^3 \pm 3 e x^2 + 3 x e^2 \pm e^3$, qu'il faudra égaler à x^3. Or les autres opérations étant faites, il ne reſtera plus que le terme $3 x^2$, qui eſt viſiblement le produit de x^3 multiplié par ſon expoſant, & diviſé par x; de même en comparant $a x^2$ à $a \times (x^2 \pm 2 e x + e^2)$, il ne doit plus ſubſiſter que le terme $2 a x$, qui eſt encore le produit de $a x^2$ par ſon expoſant, diviſé par x. La regle de M. de *Fermat* ſe réduira donc à ceci. Ayant une expreſſion, par exemple, $x^3 - 3 a x^2 + b^3 = 0$, dont on demande le *maximum* ou le *minimum*; multipliez chaque terme où eſt x par ſon expoſant, & diviſez par x, en négligeant tous les autres, enfin égalez cela à zero. Ce ſera l'équation qui donnera la valeur ou les valeurs de x, qui rendent cette expreſſion un *maximum* ou un *minimum*. Ainſi l'expreſſion ci-deſſus devient tout de ſuite $3 x^2 - 6 a x = 0$; ce qui donne $x = 0$, & $x = 2 a$. Ce ſeront les deux points où répondront des tangentes paralleles à l'axe. Je dis à deſſein les points où répondront des tangentes paralleles à l'axe; car des deux que nous venons de trouver il n'en eſt qu'un

qu'un qui ſoit un point de vrai *maximum ;* ſçavoir celui qui répond à $x = 0$; l'autre eſt ſeulement un point d'inflexion. On le reconnoît à ce qu'en ſuppoſant x toujours croiſſant, la valeur de l'ordonnée va en décroiſſant avant & après celle qui répond à $2a$. La regle de M. *Hudde* nous ſervira auſſi à le reconnoître ; car en l'appliquant à cet exemple, on trouve $x = 0$, & $x = \frac{3}{2}a$. Or cette regle ne donnant point le *maximum* apparent que nous trouvions répondre à $x = 2a$, il faut en conclure que ce n'eſt ni un *maximum*, ni un point de rebrouſſement, & ce ne peut être qu'un point d'inflexion ayant ſa tangente parallele à l'axe. Au contraire, la regle de M. de *Fermat* ne donnant pas le *maximum* qui ſemble répondre à $x = \frac{3}{2}a$, c'eſt un ſigne que ce ne peut être qu'un point de rebrouſſement. Ainſi l'une des deux regles ſert à redreſſer l'autre : celle de *Fermat* donne les points de *maximum*, ceux d'inflexion & de rebrouſſement ayant leurs tangentes paralleles à l'axe : celle de M. *Hudde* donne les *maximum* quelconques, les points de rebrouſſement à tangentes perpendiculaires ou obliques, & les interſections de deux branches. Par la comparaiſon du réſultat de l'une avec celui de l'autre, on peut reconnoître la nature des points qu'on trouve par leur moyen. Les vrais *maxima & minima* ſont les ſeuls qu'elles donnent en commun. Revenons à notre ſujet. *Fig.* 60.

C'eſt par un moyen ſemblable à celui que nous avons développé plus haut pour abréger la regle *de maximis & minimis*, que MM. *Huyghens* (*a*) & *Sluſe* (*b*) ſont encore venus à ſimplifier celle des tangentes. Mais comme cette regle eſt un peu compoſée, & que nous ne pouvons pas nous étendre à notre gré, nous nous contentons d'indiquer leur procédé. Un exemple eſt néceſſaire pour l'éclaircir : qu'on propoſe l'équation $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = 0$, & qu'on demande la ſoutangente de la courbe qu'elle repréſente. Pour cela, dit M. de *Sluſe*, il faut mettre à part tous les termes où eſt y, comme $-y^3 + byy - 2xxy$, & les multiplier par leurs expoſans ; ce ſera le numérateur de la fraction qui exprimera cette ſoutangente. Le dénominateur ſera formé de tous les termes où ſe trouvera x, multipliés par l'expoſant de cette lettre, &

(*a*) *Op.* T. II.
(*b*) *Tranſ. Phil.* ann. 1672 & 1673.

diviſés enſuite par x. On aura donc dans le cas préſent pour la valeur de la ſoutangente $\frac{-3x^3+2bx^2-2xxy}{3x^2-2xy+2bx-bb}$. C'eſt-là effectivement ce qu'on rencontre en exécutant toutes les opérations preſcrites par *Fermat*, ou en employant le calcul différentiel.

X.

Progrès de la conſtruction des équations.

La conſtruction des équations ſolides & plus que ſolides, étoit encore une des parties de l'analyſe de *Deſcartes* qui attendoit des Géometres poſtérieurs quelques degrés de perfection. *Deſcartes* s'étoit borné à conſtruire les équations cubiques & quarré-quarrées, par le moyen d'un cercle & d'une parabole. Ce n'eſt pas qu'il ne fût en poſſeſſion de quelque choſe de plus parfait & de plus général. Ce qu'il dit ne permet pas d'en douter ; car il ajoute que l'on pourra toujours conſtruire ces équations par celle des ſections coniques que l'on voudra, & même avec une portion de ces courbes, quelque petite qu'elle ſoit. Mais il avoit caché le principe de ces conſtructions ; & quoique divers Géometres euſſent amplifié ſa théorie à cet égard, on n'étoit point encore parvenu à toute la généralité qu'on pouvoit deſirer.

M. de Sluſe.

M. *de Sluſe* (*a*) eſt celui à qui nous en avons l'obligation. Il eſt Auteur d'une méthode par laquelle, une équation quelconque ſolide étant propoſée, on peut la conſtruire d'une infinité de manieres différentes par le moyen d'un cercle & celle des ſections coniques qu'on voudra. Il en donna un eſſai dans un ouvrage qu'il publia en 1659 (*b*), mais il en cachoit encore l'analyſe qu'il promettoit de dévoiler quelque jour. Il exécuta ſa promeſſe en 1668, en donnant une nouvelle édition de l'ouvrage dont on vient de parler, avec une ſeconde partie où il expoſe de quelle maniere il eſt parvenu à ces conſtructions. Il eſt néceſſaire d'en donner ici une idée.

La méthode de M. *de Sluſe* conſiſte à prendre une équation

(*a*) M. René-François [illegible]alter de Sluſe, Chanoine de la Cathédrale de Liege, Abbé d'Amas, naquit en 1623. A des talens ſupérieurs pour les Mathématiques, il joignoit beaucoup d'érudition, & même de goût pour la belle Littérature. Il mourut en 1685. Nous dirons dans cet article un mot de ſes ouvrages.

(*b*) *Meſolabum, ſeu duæ mediæ prop. per circulum & ellipſim vel hyp. infinitis modis exhibitæ.* Leod. 1659. 4. & iterùm 1668, *cum parte alterâ de analyſi, & miſcellaneis.*

entre l'inconnue de celle qu'il s'agit de conſtruire, & une nouvelle indéterminée, qui ſoit un lieu du ſecond degré, par exemple, une parabole. Enſuite il introduit par des ſubſtitutions cette indéterminée dans l'équation à conſtruire, ce qui de déterminée qu'elle étoit la rend indéterminée, c'eſt-à-dire exprimant un autre lieu. Il continue ces ſubſtitutions, en diviſant, additionnant ou ſouſtrayant les équations qui en proviennent juſqu'à ce qu'il ſoit arrivé à un lieu au cercle; ce qui eſt facile. Cela fait, ce dernier lieu combiné de la maniere convenable avec chacun des autres, qui ſont à la parabole, à l'ellipſe, à l'hyperbole, lui donne autant de conſtructions différentes du problême.

Ce que nous venons de dire ſeroit peu intelligible ſans le ſecours d'un exemple. C'eſt pourquoi nous allons en donner un que nous choiſirons parmi les plus ſimples. Suppoſons l'équation $y^3 = a\,ab$, qui eſt celle qu'on rencontre en cherchant la premiere des deux moyennes proportionnelles entre a & b. On peut d'abord prendre pour premiere équation indéterminée $y^2 = a\,x$, ce qui eſt un lieu à la parabole : donc $\frac{y^2}{a} = x$; & mettant cette valeur de y dans l'équation propoſée, on en tire cette autre $xy = ab$, qui eſt un lieu à l'hyperbole entre les aſymptotes. On tire encore de la comparaiſon de ces équations, celle-ci $x^2 = by$, qui eſt un autre lieu à la parabole. Nous voici déja en poſſeſſion des deux conſtructions que *Menechme* donna autrefois du problême que nous analyſons. Car il n'y auroit qu'à combiner, ou ces deux lieux à la parabole, ou l'un d'eux avec celui qui eſt à l'hyperbole, & l'ordonnée commune ſeroit la moyenne cherchée. Mais comme c'eſt aujourd'hui une faute que d'employer deux ſections coniques, on ne doit pas s'arrêter à ces ſolutions; il faut rechercher un lieu au cercle. Pour cela il n'y a qu'à ajouter les deux équations à la parabole qu'on a trouvées; elles donneront $y^2 - by + x^2 - ax = 0$, qui eſt un lieu au cercle. Au contraire leur ſouſtraction mutuelle en donnera une $y^2 - x^2 + by - ax = 0$, qui ſera un lieu à l'hyperbole équilatere. Si enfin on diviſe par un nombre quelconque, par exemple 2, l'équation $x^2 - by = 0$, (ce qui ne la détruit point), & qu'on l'ajoute à la premiere, ou qu'on l'en ſouſtraye, on aura $y^2 - ax + \frac{x^2}{2} - \frac{by}{2}$

$= 0$, qui eſt un lieu à l'ellipſe, ou $yy - ax - \frac{xx}{2} + \frac{by}{2}$, qui eſt un lieu à l'hyperbole ſcalene. D'autres nombres auroient donné d'autres ellipſes ou d'autres hyperboles. On peut ainſi former une multitude d'égalités indéterminées, qui ſont toutes vraies, puiſque les primitives qui en ſont formées ſont vraies. Par conſéquent voilà une infinité de lieux différens dont chacun deſquels l'inconnue y cherchée eſt une certaine ordonnée. Si donc on combine celui au cercle, avec chacun des autres, on aura autant de conſtructions différentes du problême; & l'ordonnée commune ſera la valeur de y. Or la maniere de combiner ces lieux eſt facile. Il n'y a qu'à les concevoir décrits chacun en particulier, & appliqués l'un ſur l'autre de maniere qu'ils ayent même axe & même origine. Par exemple, dans le cas préſent, l'équation au cercle ci-deſſus, déſigne, ſuivant les formules connues, que l'origine des abſciſſes eſt à l'extrêmité d'une corde égale, à b & éloignée du centre de $\frac{1}{2}a$, comme on voit dans la figure 61, n°. 1. L'équation $yy = ax$, déſigne une parabole, n°. 2, dont l'abſciſſe priſe ſur l'axe eſt x, l'ordonnée y, & le parametre a. Qu'on conçoive ces deux lieux appliqués l'un ſur l'autre, comme dans la même figure, n. 3. On verra que la conſtruction ſe réduit à prendre $ST = \frac{1}{2}b$, $TC = \frac{1}{2}a$, & le cercle décrit du centre C au rayon CS, coupera la parabole en N, d'où l'ordonnée abaiſſée ſur l'axe, ſera l'inconnue cherchée. On ne doit pas s'attendre à trouver ici de plus grands développemens de cette méthode; les lecteurs qui deſireront s'en inſtruire plus à fonds, doivent recourir au Livre de M. *de Sluſe*, ou au Traité poſthume des ſections coniques & des lieux géométriques de M. *de l'Hôpital*. On trouve auſſi toute cette théorie expoſée d'une maniere très-ſatisfaiſante dans le *Cours de Mathématique de M. Wolf*. T. I. Nous citerons encore un Livre peu connu, quoique excellent, qui traite ce ſujet. Il eſt intitulé, *Hyacinthi Chriſtophori, de conſtructione equationum*. Neap. in-4°. 1699.

Fig. 61, n°. 2.

Nous nous permettrons ici une petite digreſſion pour faire connoître une partie de l'ouvrage de M. *de Sluſe*, dont nous n'avons point eu occaſion de parler. Elle parut dans la ſeconde édition de ſon *Meſolabum*, ſous le titre de *Miſcellanea*. Ces *Miſcellanea*, ou mêlanges de Géométrie, ſont très-pro-

pres à faire honneur à leur Auteur, & montrent les progrès profonds qu'il avoit faits dans l'analyſe. M. *de Sluſe* y traite des ſpirales infinies qu'il compare avec des paraboles de même degré : il y quarre diverſes courbes, & aſſigne leurs centres de gravité ; il détermine les points d'infléxion dans la conchoïde, ſur quoi il fait diverſes remarques curieuſes ; il y généraliſe la formation de la conchoïde, & il examine les propriétés des nouvelles courbes qui en réſultent, leurs aires, leurs centres de gravité & les ſolides qu'elles forment par leur circonvolution, &c. Nous paſſons pluſieurs autres recherches curieuſes que contient cette partie de l'ouvrage de M. *de Sluſe*, afin de ne point donner trop d'étendue à cette digreſſion. Nous revenons à notre ſujet principal.

La méthode que nous avons expoſée plus haut pour la conſtruction des équations ſolides, c'eſt-à-dire, des troiſieme & quatrieme degrés, s'applique auſſi aux degrés plus élevés. Une équation du ſixieme degré, par exemple, étant propoſée, on pourra la réduire à une équation à la parabole ou à l'hyperbole ſolide, & à une autre qui ſera une des ſections coniques. Il faut tâcher ici de choiſir un premier lieu qui ſoit tel que celui qui en réſultera pour le ſecond ſoit un cercle; ce qu'on pourra, je crois, toujours faire par la méthode des indéterminées. De même une équation du huitieme degré pourra ſe réduire à deux lieux, l'un du quatrieme degré, & l'autre du ſecond, ou l'un & l'autre du troiſieme. On trouve des exemples de ces choſes dans les Livres qui traitent de la conſtruction des équations (*a*).

C'eſt ici le lieu convenable de faire connoître une invention utile pour la conſtruction des lieux géométriques du ſecond ordre. *Deſcartes*, à la vérité, a donné pour cela une formule extrêmement générale, mais qui a ſes embarras, ſoit par les opérations préliminaires qu'elle exige, ſoit par l'attention qu'il faut faire à la variété des ſignes. M. *Craig* me paroît avoir facilité cette partie eſſentielle de la conſtruction des équations par des formules nouvelles qu'il publia en 1694 (*b*). Ces formules ne ſont autre choſe que l'équation de

(*a*) Voy. le Marquis de l'Hôpital, *Traité des ſect. coniques & des lieux géom.* Hyacinthi Chriſtophori, *de conſtructione equationum.* Ozanam, *de la conſtr. des équations.*

(*b*) *De fig. curvil. quadraturis, ac locis Geometricis.* Lond. 1694. *in*-4°.

chacune des ſections coniques, la plus compliquée qu'elle puiſſe être. Pour y parvenir, il ſuppoſe l'origine des abſciſſes à un point comme O, éloigné (fig. 62.) du ſommet & de l'axe, d'une quantité indéterminée, qui peut être poſitive ou négative, & il prend les abſciſſes ſur une ligne OP inclinée à une parallele à l'axe d'une quantité auſſi indéterminée. Il eſt facile de voir que ce cas renferme tous les autres poſſibles: car ſuivant que les quantités OQ, QS, & la raiſon de OT à OV s'anéantiront ou deviendront négatives, le point O tombera ſur le ſommet ou de l'autre côté de l'axe, ou au dedans de la courbe; l'angle de OP avec l'axe deviendra nul ou en ſens contraire, ce qui contient toutes les combinaiſons imaginables. Une équation quelconque étant enſuite propoſée, on la compare terme à terme avec la formule générale, & la comparaiſon des coefficiens donne la poſition de l'origine des abſciſſes & de l'axe. Cette méthode a paru à M. le Marquis *de l'Hôpital* avoir les avantages que nous lui attribuons. C'eſt pourquoi il l'a adoptée dans ſon Traité *des lieux géométriques*. Nous pouvons auſſi indiquer à nos lecteurs curieux de s'en inſtruire plus à fonds, le *Cours de Mathématiques* de M. *Wolf*, où il la trouveront expoſée avec beaucoup de netteté & de préciſion.

Nous ne devons pas omettre ici certaines obſervations importantes dans la conſtruction des équations, & qui ſemblent avoir échappé aux Géometres juſqu'à ce que M. *Rolle* en eût montré la néceſſité (*a*). Perſonne ne doutoit que lorſqu'on avoit une équation déterminée à conſtruire, en prenant un premier lieu arbitraire, & introduiſant par ſon moyen dans l'équation propoſée une ſeconde indéterminée, on n'eût deux lieux dont l'interſection devoit donner les racines demandées. Mais cela n'arrive pas toujours; au contraire il y a des cas où les lieux trouvés de cette maniere ne ſe couperont point, & où il arrivera divers autres inconvéniens que M. *Rolle* parcourt dans ſon Mémoire. Ces défauts néanmoins ne doivent pas être imputés à la méthode, mais ſeulement à l'application mal-adroite de l'Analiſte. S'il choiſit pour le premier lieu une courbe dont la plus grande ordonnée

(*a*) Mem. de l'Acad. 1708, 1709.

ſoit moindre que la moindre des racines de l'équation à conſtruire, ou qu'y ayant des racines négatives, il prenne une courbe qui n'a que des ordonnées poſitives, faut-il s'étonner que la méthode manque, & qu'elle ſoit ſujette aux inconvéniens que lui reproche M. *Rolle*. Il y a donc des attentions à faire dans le choix du premier lieu, & même dans l'examen du ſecond qui en provient. Mais ſi l'on ſuit le procédé de *Sluſe*, tel que le développe ſon Auteur, ou M. *Wolf* qui l'a exactement expoſé, on n'aura rien à craindre des inconvéniens dont nous avons parlé, parce que les premiers lieux de la combinaiſon deſquels proviennent tous les autres, ſont déduits de l'équation même à conſtruire, & ne peuvent pas ne pas contenir les racines de cette équation (*a*).

Pour mettre fin à cet article, nous paſſerons rapidement ſur diverſes inventions ou écrits concernant la conſtruction des équations. De ce nombre eſt la regle générale que *Baker* a donnée pour (*b*) les équations ſolides, par le moyen d'un cercle & d'une parabole, & qu'il nomme centrale. Elle ne differe de celle de *Deſcartes* qu'en ce que celle-ci exige la ſuppreſſion du ſecond terme, au lieu que celle de *Baker* ne la ſuppoſe point. M. *Hallei* a enſuite montré (*c*) comment on peut conſtruire une équation propoſée par le moyen d'un cercle combiné avec une parabole donnée. On peut de même ſe ſervir de telle des ſections coniques qu'on voudra, donnée d'eſpece & de grandeur, pour conſtruire une équation ſolide aſſignée. M. *Newton* conſtruit toutes les équations ſolides (*d*) d'une maniere très-élégante, en montrant qu'elles ſe réduiſent à introduire dans un angle donné une ligne droite de grandeur déterminée, qui converge vers un point donné ; ce qui eſt la maniere dont l'ancien Géometre *Nicomede* avoit conſtruit le problême des deux moyennes proportionnelles. M. Jacques *Bernoulli* a donné une conſtruction ingénieuſe, ou une approximation géométrique & continuelle des équations ſolides par la regle & le compas. Elle peut être utile pour déterminer dans les approximations numériques, la racine de l'équation juſqu'à un

(*a*) Voyez un Mémoire de M. de la Hire de l'année 1710 ; l'introduction à la théorie des courbes de M. Cramer, *chap. IV*, & les remarques de M. Herman ſur l'écrit de M. Rolle dans les *Miſcell. Berol.* T. III.

(*b*) *Clavis Geom. Catholica.* 1684. *in*-4°.

(*c*) *Tranſ. Phil. ann.* 1687, n°. 188.

(*d*) *Arithm. univ. App. de æquat. conſtruct. lineari.*

certain degré d'exactitude ; ce qui eſt important pour arriver promptement à une valeur fort approchée. On peut auſſi voir ſur ce ſujet quelques morceaux de M. Jean *Bernoulli* (*a*) qui dévoile les principes de cette approximation.

XI.

Sur la réſolution numérique des équations.

Nous venons enfin à un des objets les plus importans de l'analyſe, à la réſolution numérique des équations. Nous ſommes ici contraints de faire l'aveu humiliant que cette partie de l'Algebre n'eſt rien moins que fort avancée. Depuis *Tartalea* & *Ferrari*, qui réſolurent les équations du troiſieme & du quatrieme degré, c'eſt-à-dire, depuis plus de deux ſiecles, on n'a preſque fait aucun progrès vers la réſolution générale des équations. La fameuſe difficulté connue ſous le nom du cas irréductible, n'a pas même encore été ſurmontée, & cauſe tous les jours l'embarras des Analiſtes qu'elle oblige de recourir à des méthodes indirectes.

Il en eſt à peu près de cette partie de l'analyſe comme du problême de la quadrature du cercle. Quoique le fonds de la queſtion ne ſoit point encore entamé, elle ne laiſſe pas de nous préſenter une multitude d'inventions & de recherches utiles. Au défaut d'une réſolution générale, on a recouru aux approximations ; on a recherché les cas particuliers qui ſont ſuſceptibles de réſolution ; on a enfin donné des méthodes qui dans la pratique tiennent entiérement lieu d'une ſolution complette, & qui ſont même plus commodes que ne le ſeroient peut-être les formules qu'elle donneroit.

Viete a le premier recouru aux approximations, ſoit pour les équations des troiſieme & quatrieme degrés, ſoit pour celles des degrés ultérieurs. Sa méthode pour le troiſieme degré, lorſque le cas irréductible a lieu, eſt ſans contredit ce qu'il y a de plus commode, & le jugement que nous en portons eſt confirmé par celui de M. *Hallei* (*b*). Il réduit, comme on l'a dit ailleurs, la réſolution de l'équation à l'invention des trois cordes de trois arcs qui réſultent de la triſection d'un arc donné, & de la circonférence ; ce qui donne à peu de frais les

(*a*) *Lect. calculi integ.* ad fin. op. T. III.
(*b*) *Tranſ. Phil. ann.* 1694, n°. 210.

valeurs

valeurs différentes de l'inconnue juſqu'à un grand nombre de décimales. Nous renvoyons à ce que nous avons dit ſur ce ſujet dans un des Livres précédens. Quant à ſa méthode générale pour l'extraction des racines de toutes les équations, qu'il appelle *Exegetice numeroſa*, elle eſt auſſi des plus ingénieuſes. Mais elle a des difficultés & des embarras qu'*Harriot*, qui l'a beaucoup cultivée, n'a pu lever entiérement, & elle a cédé la place à d'autres plus commodes que nous indiquerons bientôt.

Viete, en remarquant que le terme connu d'une équation eſt le produit de toutes les valeurs différentes de l'inconnue, fournit encore un moyen de réſolution pour toutes les équations qui ont quelque valeur rationnelle & en nombre entier. Nous le trouvons employé par les Analiſtes du commencement du dix-ſeptieme ſiecle, comme Michel *Coignet* d'Anvers, Albert *Girard*, &c. Cette ſorte de réſolution des équations a néanmoins reçu ſon principal jour des inventions d'*Harriot* & de *Deſcartes*. Comme nous les avons expliquées aſſez au long dans les premiers articles de ce Livre, nous ne jugeons pas à propos de nous répéter, & nous y renvoyons.

Mais cette méthode dans le cas même où les racines ſont des nombres entiers, a ſes embarras. Car il peut arriver que le dernier terme ait tant de diviſeurs qu'il ſeroit extrêmement laborieux de les eſſayer tous ; d'ailleurs il y a ici une ſorte de tâtonnement que les Mathématiciens ont toujours réputé comme un défaut. C'eſt pour cela que les Analiſtes ont imaginé de rechercher les limites des équations, c'eſt-à-dire, entre quels termes ſont renfermées la plus grande & la moindre des racines. M. *de Beaune* eſt le premier auteur de cette invention qui a été pouſſée plus loin par M. *Newton* dans ſon *Arithmétique univerſelle :* & elle eſt très-utile dans les cas où les racines cherchées ne ſont pas beaucoup inégales entr'elles. Car l'on n'aura alors qu'un fort petit nombre de facteurs à eſſayer ; & s'il arrive qu'aucun d'eux ne rende l'équation égale à zero, on pourra prononcer avec aſſurance qu'elle n'a point de racine rationnelle. Dans cette équation, par exemple, $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 31x + 63x - 120 = 0$, dont le dernier terme a 16 facteurs, il y auroit 32 opérations à faire en les eſſayant poſitivement ou négativement. Mais la regle enſeignée

par *Newton* apprend que les termes entre leſquels ſont compriſes les racines, ſont 2 & — 3 : de ſorte qu'il n'y a d'eſſais à faire que ſur 1 ou — 1 , ou — 2 ; & comme aucun de ces eſſais ne réuſſit , on doit être certain que l'équation ci-deſſus n'a aucune racine rationnelle.

Nous avons dit à deſſein que cette méthode ſera très-utile lorſque les racines cherchées ſeront peu inégales entr'elles. Mais s'il arrivoit qu'elles le fuſſent beaucoup , comme ſi l'une étoit approchante du plus grand facteur du dernier terme , & l'autre du moindre , elle ſeroit de peu d'utilité , puiſqu'alors preſque tous les facteurs de ce dernier terme tomberoient entre les limites qu'on trouveroit. Il faut donc dans ce cas un autre moyen de diminuer la multitude des eſſais. En voici un qui eſt fort ingénieux , & qu'enſeigne *Schooten* (*a*) , qui en fait honneur à un M. *Waſſenaer*. Il conſiſte à augmenter ou diminuer les racines de l'équation propoſée d'un nombre donné, de l'unité , par exemple : or il eſt facile de voir que ſi une des racines de cette équation eſt un des facteurs de ſon dernier terme , ce facteur doit ſe retrouver augmenté ou diminué de l'unité parmi ceux du dernier terme de la nouvelle équation. Il faudra donc prendre tous les facteurs du dernier terme de cette nouvelle équation , les augmenter ou les diminuer de l'unité , au contraire de ce qu'on aura fait à l'égard de l'équation propoſée ; les ſeuls nombres qui ſeront les mêmes que les facteurs de celle-ci , pourront être ſes racines. On en exclura par-là un très-grand nombre , & une ſeconde opération donnera ſouvent l'excluſion à la plûpart de ceux que la premiere n'aura pas exclus , quelquefois à tous ſi l'équation propoſée n'a aucune racine rationnelle : c'eſt ce qui arrive dans l'équation ci-deſſus $x^5 + 2x^4$, &c. En diminuant la racine de l'unité , on trouve que de tous les diviſeurs de 120 , il n'y a que — 1. 2. 3 , ou 20 qui puiſſent être racines de l'équation ; & en augmentant cette même racine de l'unité , on ne trouve aucun de ces derniers , d'où l'on doit conclure que l'équation propoſée n'a aucune racine rationnelle.

Lorſqu'on eſt aſſuré par l'examen ci-deſſus qu'une équation n'a aucune racine rationnelle , il reſte à tenter ſi elle ne ſeroit

(*a*) *Comm. in Cart. Geom.* L. III.

point le produit de pluſieurs équations complexes, ou dans le cas où elle ſeroit de dimenſion paire, s'il n'y auroit point quelque quantité complexe qui, ajoutée de part & d'autre de l'équation diſpoſée d'une certaine maniere, permît l'extraction de la racine de chaque membre. M. *Hudde* a choiſi la premiere de ces deux voies dans ſon écrit intitulé, *de reductione equationum*. Il y donne un grand nombre de regles utiles pour diſcerner ſi l'équation propoſée eſt réductible de la maniere qu'on vient de dire. Il a auſſi donné des tables des formes d'équations qui ſont ſuſceptibles de cette réduction, avec les diviſeurs, ſoit ſimples comme $x \pm a$, ſoit complexes comme $x^2 \pm ax \pm b$, &c. qui peuvent les diviſer, & qui en ſont par conſéquent les facteurs. M. *Wallis* nous apprend que tandis que M. *Hudde* s'addonnoit en Hollande à cette recherche, un de ſes compatriotes, nommé *Merrey*, en faiſoit autant en Angleterre. Mais ſes écrits n'ont point vu le jour, ils ont été ſeulement dépoſés dans la Bibliotheque d'Oxford. *Wallis* en a extrait quelques tables reſſemblantes à celles de M. *Hudde*, & il les a données dans ſon Algebre.

M. *Newton* a tenté la ſeconde des voies que nous avons indiquées plus haut; il a cherché à réduire les équations, en ajoutant de part & d'autre quelque quantité complexe qui rendît chaque membre ſuſceptible d'extraction de racine. Les regles qu'il a données pour cet effet, ſe voient dans ſon *Arithmétique univerſelle*. Mais elles ſont ſi laborieuſes, elles exigent tant d'eſſais, & le concours de tant de conditions particulieres, qu'on ne peut guere les regarder que comme une curioſité d'analyſe. Elles ont néanmoins cet avantage, qu'on peut appercevoir le plus ſouvent dès les premiers pas que la réduction n'eſt point poſſible; ce qui épargne un travail ſuperflu.

M. *Leibnitz* n'a pas moins travaillé que M. *Newton* à perfectionner cette partie de l'analyſe, & ce qu'il dit dans une de ſes Lettres écrite en 1676 (*a*), nous donne de grands motifs de regretter que ſes méditations ſur ce ſujet n'ayent pas vu le jour. « Je me ſuis, dit-il, fort occupé de la maniere de trouver généralement les racines irrationnelles des équations, » ou de faire évanouir tous les termes moyens; & il y a déja

(*a*) *Comm. Epiſt.* p. 63, 64. & p. 95.

» un an au printemps paſſé que je communiquai à M. *Huy-*
» *ghens* des eſſais de regles ſemblables aux formules de *Car-*
» *dan*. Car j'avois une ſuite d'expreſſions ſemblables (pour
» tous les degrés), dans laquelle étoient compriſes ces formu-
» les. Mais elles n'étoient pas générales au-delà du troiſieme
» degré. Je crois cependant avoir apperçu la vraie méthode
» pour aller plus loin ; à la vérité il reſte encore bien des arti-
» fices à imaginer pour en venir à bout, ce que je laiſſe à
» M. *Tchirnauſen*, qui eſt parvenu de ſon côté aux mêmes dé-
» couvertes, & qui a même été au-delà.... Au reſte de mes
» méditations ſur ce ſujet ſuit un paradoxe aſſez ſingulier ;
» c'eſt que toutes les équations des huitieme, neuvieme, di-
» xieme degrés peuvent s'abaiſſer juſqu'au ſeptieme, &c. . . . .
» Si quelqu'un avoit le courage d'en entreprendre le travail,
» je lui enſeignerois une méthode générale & infaillible de
» trouver les racines de toutes les équations ».

Nous ignorons ſi M. *Leibnitz* ne promettoit point trop en annonçant ces dernieres découvertes ; il y a quelque lieu de le craindre. Il n'eſt pas rare de voir d'habiles gens ſur la foi d'un calcul ou d'une méthode qui ſemble devoir réuſſir, ſe croire déja en poſſeſſion de ce qu'ils cherchent ; mais ſouvent des obſtacles imprévus & inſurmontables, ferment une route qui paroiſſoit ouverte. M. *Leibnitz* eût peut-être été dans ce cas lorſqu'il auroit voulu mettre la derniere main à ſes calculs.

Quoi qu'il en ſoit, il ne nous eſt parvenu de toutes ces inventions de M. *Leibnitz*, qu'une méthode fort ingénieuſe pour le cas irréductible. Il réſoud chacune des deux expreſſions radicales qui compoſent la formule de *Cardan*, en ſuite infinie, & il arrive que les termes qui renferment la quantité négative ſous le radical du ſecond degré, ſont affectées de ſignes différens dans l'une & l'autre ſuite, de ſorte qu'en les ajoutant, ces termes diſparoiſſent, & il n'en reſte que de réels qui compoſent une ſuite qui eſt la valeur de la formule. Ce que *Leibnitz* n'a fait qu'indiquer, a été davantage développé par M. *Nicole* dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1738. Cette méthode ajoutée à tant d'autres pour la réſolution approchée des équations cubiques lorſque le cas irréductible a lieu, met dans un nouveau jour l'étendue des reſſources de la Géométrie.

Nous devons à de *Moivre* une invention ſur les équations, qui ſemble faire partie de celles dont M. *Leibnitz* diſoit être en poſſeſſion. Il nous a donné (*a*) des formules ſemblables à celles de *Cardan* pour quelques cas des équations de degrés quelconques. Qu'on ait, par exemple, cette équation $ny + \frac{nn-1}{2.3} \times ny^3 + \frac{nn-1}{2.3} \times \frac{nn-9}{3.4} \times ny^5 +$ &c. $= a$, équation qui ſera finie lorſque n ſera un nombre impair, ſa racine qui ſera alors unique, ſera $\frac{1}{2} \sqrt[n]{[a + \sqrt{(aa+1)}]} - \frac{1}{2} \sqrt[n]{[-a + \sqrt{(aa+1)}]}$: ainſi l'équation $5y + 10y^3 + 16y^5 = 4$, a pour racine, $\frac{1}{2} \sqrt[5]{[4 + \sqrt{17}]} - \frac{1}{2} \sqrt[5]{[-4 + \sqrt{17}]}$, ce qu'on trouve par le moyen des logarithmes être 0. 4313 : que ſi au lieu de $nn - 1$, &c, on avoit $1 - nn$, &c, ce qui rendroit les termes alternativement poſitifs & négatifs, alors la formule au lieu de $\sqrt{(aa+1)}$, on auroit $\sqrt{(aa-1)}$. Il y a ici une analogie remarquable avec le cas ſemblable dans les équations cubiques. Dans ces dernieres, ſi l'extraction ne peut pas ſe faire, les racines de l'équation peuvent être trouvées par la triſection de l'angle. Il en eſt de même dans les formes d'équations ſupérieures que nous conſidérons : ſi le cas irréductible a lieu, c'eſt-à-dire, ſi a eſt moindre que 1, il y aura autant de racines que le degré de l'équation contiendra d'unités, & elles pourront être exprimées par la multiſection d'un arc dont (1 étant le rayon), a ſera le ſinus.

M. *Tchirnauſen* a cru autrefois être en poſſeſſion d'une réſolution générale des équations. Il publia en 1684, dans les Actes de Leipſick, une méthode par laquelle il prétendoit faire évanouir tous les termes intermédiaires d'une équation quelconque ; ce qui la réduiſoit à l'égalité ſimple de l'inconnue élevée à la plus haute puiſſance avec le terme connu. Rien n'eût été plus beau qu'une pareille méthode, mais il eſt à regretter que ce ſçavant Géometre, par un effet de cette précipitation qui lui étoit aſſez ordinaire, ſe ſoit trompé. Quand même il n'y auroit point de parallogiſme dans ſon procédé, ce que prétend le P. *Preſtet* qui l'a examiné, le ſeul exemple qu'il donne de ſa méthode ſur une équation cubique, ſuffit pour montrer qu'elle n'a pas les avantages que lui attribue ſon Auteur : car

(*a*) *Tranſ. Phil.* ann. 1707. n°. 309. *Act. de Leipſick.* ann. 1709.

une des grandeurs qu'il lui eſt néceſſaire de déterminer, ſe trouve égale à une expreſſion ſujette à devenir imaginaire, & qui le devient effectivement, lorſque le cas irréductible a lieu. A l'égard des équations d'ordre plus relevé, il eſt reconnu aujourd'hui qu'elle manque entiérement.

M. *de Lagni* eſt un de ceux qui ont le plus travaillé à la réſolution générale des équations. On a de lui un volume entier ſur ce ſujet, qui a été joint aux anciens Mémoires de l'Académie avant 1699, ſans compter quelques écrits inſérés parmi les nouveaux (*a*). On ne peut s'empêcher d'y reconnoître des vues ingénieuſes, mais elles ne l'ont point mené loin en ce qui concernoit ſon objet principal. C'eſt le jugement qu'en porte M. *Hallei* (*b*), jugement qui me paroît tacitement confirmé par les Analiſtes. C'eſt auſſi celui qu'on peut porter de l'ouvrage de M. *Laloubere*, intitulé *la réſolution des équations*. M. *Rolle* eſt encore un de ceux qui ſe ſont propoſé cet objet. Il donne dans ſon Algebre imprimée en 1690, quelques regles pour trouver les racines rationnelles des équations lorſqu'elles en ont, ou pour approcher de plus en plus de leur valeur exacte lorſqu'il n'y en a aucune de cette eſpece. Mais ces regles ne ſont pas aſſez commodes pour mériter une attention particuliere parmi tant d'autres qu'on a pour cet effet. Sa méthode qu'il appelle *des Caſcades*, & dont il ſe ſert pour déterminer les limites des racines, mérite ſeule d'être remarquée. Elle eſt, à peu de choſe près, la même que celle que *Newton* a donnée dans ſon *Arithmétique univerſelle*.

Il nous faut enfin faire connoître les méthodes que les Analiſtes ont imaginées pour déterminer du moins d'une maniere approchée les racines des équations. C'eſt-là l'unique reſſource qui reſte lorſque toutes les méthodes de réduction n'ont point réuſſi. On eſt même, à bien dire, contraint d'y recourir dès qu'on eſt aſſuré que les racines de l'équation ſont irrationnelles. Car, ſans aller chercher un exemple plus compoſé que celui du troiſieme degré, n'a-t'on pas une idée plus nette d'un nombre exprimé en fraction décimales, que d'une expreſſion auſſi enveloppée de radicaux que le ſont les formules de *Cardan*, lors même que l'extraction de la racine eſt

(*a*) Ann. 1705, 1706.
(*b*) *Tranſ. Phil.* ann. 1694, n°. 210.

poſſible. La réſolution générale des équations eſt ſans doute à deſirer, ſi on l'enviſage dans la rigueur mathématique; mais il eſt fort probable qu'elle n'affranchiroit pas de la néceſſité des approximations telles que les donnent les Analiſtes.

La méthode d'approximation, la plus générale eſt celle qu'ont donnée MM. *Newton*, *Hallei* & *Raphſon*. Nous les joignons enſemble, parce qu'ils y ſont venus tous les trois, ou par des voies différentes, ou à l'inſçu les uns des autres. Mais M. *Newton* eſt celui à qui eſt dûe la premiere invention; car il la communiqua au D. *Barrow* dès l'année 1669, dans ſon écrit intitulé *Analyſis per æquationum numero terminorum infinitas*. Voici en peu de mots le principe & l'eſprit de cette méthode (*a*).

On ſuppoſe qu'on ait déja la racine entiere la plus approchée, c'eſt-à-dire, qui ne differe de la véritable que de moins d'une unité; c'eſt-là la baſe de l'opération. On égale donc ce nombre plus une nouvelle inconnue, à celle de l'équation propoſée, & on la ſubſtitue à ſa place. On a une autre équation dont la racine eſt ce qu'il faudroit ajouter à la premiere racine pour avoir la valeur exacte. Mais comme on ſuppoſe que ce reſte eſt fort petit, & au moins au deſſous de l'unité, on en conclud que la valeur des termes les plus élevés eſt fort petite; & on les néglige, ce qui réduit l'équation au terme connu, & à celui où l'inconnue eſt au premier degré, à moins qu'on n'eût quelque doute que la premiere racine fût aſſez approchée. Dans ce cas on pourroit conſerver auſſi le terme où eſt la ſeconde puiſſance de l'inconnue; ce qui laiſſeroit une équation du ſecond degré à réſoudre. On cherche donc la racine de cette équation en fractions décimales, c'eſt ce qu'il faut ajouter à la premiere racine trouvée, ou

(*a*) Que l'équation ſoit $y^3 - 2y - y = 0$, & qu'on ſçache que la racine entiere la plus proche eſt 2. On ſuppoſera $2 + z = y$, & on ſubſtituera dans l'équation précédente cette valeur à y; ce qui donnera $z^3 + 6z^2 + 10z - 1 = 0$. Comme z eſt fort petit, on néglige les deux premiers termes; on a donc ſeulement $10z = 1$, ou $z = \frac{1}{10}$, ou 0. 1. Maintenant comme 0. 1 n'eſt que la racine approchée de l'équation z^3, &c. qu'on faſſe $0.1 + u = z$, & qu'on procede comme ci-deſſus, on a l'équation $u^3 + 6.3u^2 + 11.23u + 0.061 = 0$, dont on ne conſidere que les deux derniers termes qui donnent $u = -0.0054$. Qu'on faſſe donc encore $-0.0054 + r = u$. On trouve par un procédé ſemblable, $r = -0.0000485\,3$: qu'on ajoute enfin toutes les parties poſitives, & qu'on en ôte la ſomme des négatives, on trouve $y = 2.07955147$.

ce qu'il faut en ſouſtraire, ſuivant que le ſigne qui affecte ces fractions eſt poſitif ou négatif. Si ce degré d'exactitude ne ſuffit pas, il faudra reprendre la ſeconde équation entiere, & la traiter comme on a fait la premiere; ce qui donnera une troiſieme équation, qui deviendra du premier degré, en négligeant tous les termes au deſſus. Sa réſolution donnera de nouveaux chiffres à ajouter à la fraction décimale qui exprime la racine cherchée, & ainſi de ſuite. En trois opérations, M. *Newton* trouve que la racine de cette équation $y^3 - 2y - 5 = 0$, eſt en fractions décimales, 2. 09455147 +, ce qui eſt vrai juſqu'au neuvieme chiffre.

Des deux méthodes que M. *Hallei* a données pour les approximations des équations, l'une eſt fort reſſemblante à celle que nous venons de décrire; elle en differe ſeulement en ce qu'il revient toujours à la premiere équation propoſée, en ſubſtituant à l'inconnue la valeur de la racine de plus en plus approchée & augmentée d'un reſte inconnu; ce qui donne à chaque opération, de nouvelles décimales & une valeur plus exacte (*a*). Dans la ſeconde, il conſerve les termes où l'inconnue eſt au ſecond degré, mais par un moyen ingénieux dont il fait honneur à M. *de Lagni*, il réduit encore toute l'opération à une ſeule diviſion. M. Jean *Bernoulli* ſe ſert d'une ſemblable méthode pour le même effet (*b*).

La méthode que *Raphſon* a ſuivie differe encore fort peu de celle de *Newton* (*c*); il lui a ſeulement donné quelques degrés de facilité, par certaines tables qui, ſur l'inſpection ſeule d'une équation d'un degré quelconque, font connoître le numérateur & le dénominateur de la fraction qui eſt le reſte à ajouter à la racine déja approchée. Comme le Livre de cet Analiſte ne peut manquer d'être rare dans ces contrées, nous indiquerons à ceux qui voudront connoître ſon procédé, les Œuvres de *Wallis*, T. II.

La méthode précédente n'eſt pas la ſeule que poſſedent les Analiſtes pour les approximations des racines des équations. La fécondité des Mathématiques, & la variété de leurs reſſources, ſe ſoutiennent ici comme partout ailleurs. M. *Tailor*

(*a*) *Tranſ. Phil.* n°. 210, ann. 1694.
(*b*) *Lect. calculi integ.* Lect. 53.
(*c*) *Analyſis æquat. univerſ.* Lond. *in*-4°. 1690.

a donné pour ces approximations une nouvelle regle, qui eſt fondée ſur ſa théorie *des Incrémens* (*a*). Nous finirons par en indiquer deux de l'invention de M. Thomas *Simpſon*, qui ſont fort ingénieuſes, & qui approchent fort rapidement. L'une ſuppoſe le calcul différentiel, mais elle n'en eſt pas pour cela d'un uſage moins facile, & elle s'applique auſſi à trouver à la fois les valeurs de deux inconnues données par deux équations (*b*). La ſeconde ſuit d'une méthode d'approximation qu'il donne pour les ſuites infinies, & eſt également fort commode (*c*). Dans l'impoſſibilité d'expoſer toutes ces choſes, nous invitons les lecteurs à recourir aux écrits de ces ſçavans Géometres.

Il eſt important dans l'analyſe des équations de pouvoir reconnoître le nombre de racines imaginaires qu'elles contiennent, ſans être obligé de recourir à leur réſolution qui eſt, comme nous l'avons vu, ſujette à tant de difficultés. On connoît, dans les équations cubiques, ce qui indique les racines imaginaires, & comme elles ne peuvent pas être plus de deux, on a tout ce qu'on peut deſirer dans ce cas particulier. Mais cette diſtinction eſt beaucoup plus difficile dans les équations de degrés plus relevés. M. *Newton* a tenté d'y parvenir, & a donné pour cet effet dans ſon *Arithmétique univerſelle*, une regle aſſez ſimple, mais encore fort imparfaite. Ce motif a excité divers Analiſtes à faire des efforts pour y ſuppléer. MM. *Maclaurin* (*d*) & *Campbell* (*e*) y ſont parvenus, & ont donné des regles plus parfaites que celles de *Newton*. M. l'Abbé *de Gua* a auſſi travaillé ſur ce ſujet (*f*); & enfin M. *Fontaine* ſemble avoir donné tout ce qu'on peut attendre de plus parfait ſur cette matiere (*g*). Sa méthode ne ſe réduit même pas à la ſimple découverte de la forme & de l'eſpece de racines dans toutes les équations : elle touche de fort près à leur réſolution complette ; & nous croyons effectivement avec ſon Auteur, que quand il nous aura mis en poſſeſſion des tables qui ſont néceſſaires pour la pratiquer, elle ne laiſſera guere plus rien à deſirer ſur cette matiere.

(*a*) *Tranſ. Phil.* ann. 1717.
(*b*) *Eſſais on various ſubjects.* p. 81, &c.
(*c*) Mathem. diſſertations, p. 102.
(*d*) *Tranſ. Phil.* ann. 1726 & 1729.
(*e*) Ibid. ann. 1728.
(*f*) Mem. de l'Acad. ann. 1741.
(*g*) Ibid. ann. 1747.

Un autre point important de la théorie des équations concerne la regle de *Deſcartes* pour la diſtinction des racines poſitives & négatives. Cette regle n'étoit point démontrée, & ſa vérité n'étoit établie que par induction. M. *de Gua* en a donné une démonſtration analytique qu'on lit dans les Mémoires de l'Académie de 1741. Toutes ces choſes ſont d'une nature à ne pouvoir être qu'indiquées ici ; les lecteurs doivent recourir aux ſources que nous avons ſoin de leur montrer en même temps.

XII.

Nous croyons ne pouvoir pas mieux terminer ce Livre qu'en faiſant connoître quelques-uns des principaux ouvrages dans leſquels on peut s'inſtruire des matieres dont nous venons de traiter l'hiſtoire. Celui qui mérite à pluſieurs titres le premier rang, eſt l'*Arithmetica univerſalis* de M. *Newton*. Il ſuffit d'en nommer l'Auteur, pour en faire concevoir la plus grande idée. Ce ſont les leçons que ce grand homme donnoit à Cambridge, tandis qu'il y occupoit une Chaire de Mathématiques. A la vérité, nous ne conſeillerons pas cet ouvrage à ceux qui ne ſont point encore initiés dans l'Algebre & dans l'Analyſe appliquée à la Géométrie. Mais ceux qui s'y ſont déja familiariſés dans d'autres Livres élémentaires, ne ſçauroient mieux faire que d'entreprendre la lecture de celui-ci, & nous leur dirons avec confiance, *nocturnâ verſate manu, verſate diurnâ*. On doit cependant avertir qu'il y a dans cet ouvrage différens endroits qui ſont de nature à ne pouvoir être entendus que par des perſonnes déja profondes dans l'analyſe : telles ſont diverſes méthodes nouvelles ſur l'invention des diviſeurs, ſur la détermination des limites & du nombre des racines imaginaires dans les équations, &c. C'eſt pourquoi il ſeroit à deſirer que quelque habile Analiſte entreprît un Commentaire ſur ces endroits épineux. Un Auteur Italien a donné, il y a quelques années, un ouvrage ſous ce titre ; mais on peut lui appliquer ce qu'on a dit de bien des Commentateurs, *in re difficili mutus :* ce Commentaire eſt encore à exécuter. Des trois éditions que je connois de l'Arithmétique univerſelle de *Newton* (*a*), la derniere me paroît la préférable. On trouve à ſa ſuite

(*a*) *Lond.* 1707. *in*-8°. *Ibid.* 1722. *in*-8°. *Lugd. Bat. in* 4°. 1732.

l'utile Recueil de diverſes pieces extraites *des Tranſactions Philoſophiques*, ſur la réſolution, ſoit géométrique, ſoit numérique des équations, qui tiennent lieu de Commentaire ou de ſupplément à certains endroits de cet ouvrage.

On a fait cas vers la fin du ſiecle paſſé des *Elémens de Mathématiques* du P. *Preſtet*. Ils contiennent effectivement beaucoup de bonnes choſes, mais ils péchent par trop de prolixité. C'eſt auſſi le défaut qu'on peut imputer à l'*Analyſe démontrée* du P. *Reynau*, livre néanmoins très-eſtimable à pluſieurs autres égards. On a aujourd'hui divers Traités, où l'on voit éclater plus de préciſion, & que je conſeillerai plus volontiers; telles ſont l'Algebre du fameux aveugle *Saunderſon*, nouvellement traduite en François (*in*-4°.); celle du célebre Géometre M. *Maclaurin*, donnée auſſi il y a quelques années dans notre Langue, avec diverſes additions utiles du Traducteur. Nous citerons enfin les *Elémens d'Algebre* de M. *Clairault*: cet ouvrage que nous ne ſçaurions mieux comparer pour la petiteſſe du volume, & l'excellence des choſes, qu'à l'*Arithmétique univerſelle* de *Newton*, mérite d'être conſeillé à tous ceux qui, doués de facilité, veulent faire des progrès profonds en Algebre, & ſe familiariſer bientôt à ſes plus grandes difficultés.

La plûpart des ouvrages que nous venons d'indiquer ne traitent que de l'Algebre pure: en voici qui ont pour objet l'Algebre mixte ou appliquée à la Géométrie. Parmi ceux-ci nous donnerons le premier rang dans l'ordre d'inſtruction à celui de M. *Guiſnée*, intitulé l'*Algebre appliquée à la Géométrie*, (in-4°. 1704). Delà on peut paſſer à l'excellent Traité *des Sections Coniques, & des lieux géométriques*, de M. le Marquis *de l'Hôpital*. Le nom de ſon Auteur & le cas qu'en font depuis un demi-ſiecle tous les Mathématiciens, ſuffiſent pour en faire l'éloge. Les *Inſtitutions analytiques* (*a*) de Mademoiſelle *Agneſi*, méritent auſſi une place diſtinguée dans cette indication des meilleurs Livres ſur l'analyſe. Les lecteurs ne verront pas ſans étonnement qu'une perſonne d'un ſexe ſi peu fait pour ſe familiariſer avec les épines des Sciences, ait pénétré auſſi profondément dans toutes les parties de l'analyſe, ſoit ordinaire,

(*a*) *Iſtituzioni analytiche, ad uſo della gioventù Italiana.* Mil. in-4°. 2. vol.

ſoit tranſcendante. Ceux qui poſſedent les *Elementa Matheſeos univerſalis* de M. *Wolf*, peuvent s'épargner la peine de recourir preſqu'à aucun autre Livre. On y trouve raſſemblé avec choix & avec préciſion preſque tout ce qu'il y a de plus remarquable & de plus important dans l'Algebre, ſoit pure, ſoit appliquée à la Géométrie, de ſorte qu'on peut paſſer delà immédiatement à la lecture des Livres les plus difficiles. Nous pourrions citer encore divers autres ouvrages dignes d'éloges ſur ces matieres, ſi notre objet étoit ici d'entrer dans ce détail. Nous avons cru devoir nous borner à un petit nombre, & à ceux où l'on peut puiſer une connoiſſance plus univerſelle de toutes les parties de l'analyſe.

Fin du Livre II.

HISTOIRE
DES
MATHÉMATIQUES.

QUATRIEME PARTIE,

Qui comprend l'Hiſtoire de ces Sciences pendant le dix-ſeptieme ſiecle.

LIVRE TROISIEME.

Progrès de l'Optique juſques vers le milieu du dix-ſeptieme ſiecle.

SOMMAIRE.

I. *Kepler explique la maniere dont on apperçoit les objets. Deſcription de l'organe de l'œil. Explication des principaux phénomenes de la viſion. Autres traits de l'Aſtronomie optique de Kepler.* II. *Invention du Téleſcope. Manieres différentes dont on la raconte. Pieces curieuſes ſur ce ſujet. Des diverſes eſpeces de Téleſcopes, & à qui elles ſont dûes.* III. *Des Microſcopes,*

& ce qu'on ſçait ſur leur invention. IV. *Kepler publie ſa Dioptrique, où il examine les foyers des verres lenticulaires, & la cauſe des effets des Téleſcopes. Explication de ces effets & de ceux des Microſcopes.* V. *Découverte de la loi de la réfraction par Snellius.* VI. *Deſcartes tente de la démontrer. Querelle élevée entre lui & Fermat à ce ſujet, & comment elle ſe termine. Idée abrégée des tentatives faites par d'autres Philoſophes pour rendre raiſon de cette propriété de la lumiere.* VII. *Nouvelles vues de Deſcartes ſur la perfection des Téleſcopes. Ses découvertes ſur la forme des ſurfaces propres à rompre la lumiere.* VIII. *Il perfectionne l'explication de l'arc-en-ciel ébauchée par Antoine de Dominis.*

I.

Nous touchons enfin à une partie de notre ouvrage propre à délaſſer les lecteurs de la contention d'eſprit qu'ont exigé d'eux les Livres précédens. Des objets d'une nature plus agréable & plus acceſſible vont nous occuper dans celui-ci. La découverte de la maniere dont ſe fait la viſion & ſes principaux phénomenes, l'invention des Téleſcopes & des Microſcopes, & la cauſe de leurs effets, la loi de la réfraction, & les tentatives faites pour en rendre raiſon, l'explication de l'iris, ſont les matieres principales qu'il doit offrir. De pareils objets ont droit d'intéreſſer, je ne dis pas ſeulement les Mathématiciens, mais tous ceux pour qui les connoiſſances naturelles ont quelque attrait.

Découverte du méchaniſme de la viſion.

La maniere dont ſe fait la viſion, c'eſt-à-dire, dont on apperçoit les objets, étoit encore un myſtere à l'époque où nous a amené le volume précédent. *Porta* & *Maurolicus* avoient touché d'aſſez près à la vérité ; mais ſur le point qu'ils étoient de la ſaiſir, ils avoient malheureuſement échoué. Cette intéreſſante découverte étoit réſervée au commencement du dix-ſeptieme ſiecle, & à *Kepler*. Ce grand homme raſſemblant les traits de lumiere que lui fourniſſoient ces deux Phyſiciens, dévoila enfin ce myſtere. Il reconnut le vrai uſage du cryſtallin & de la rétine, l'exiſtence des images qui ſe peignent ſur celle-ci, & leur inverſion, les cauſes de la diſtinction & de la confuſion avec laquelle on apperçoit les objets. Il expliqua

toutes ces choſes dans ſon *Aſtronomiæ pars Optica*, ouvrage dans lequel il ne faut pas chercher cette préciſion qui caractériſe ceux de notre ſiecle, mais qui eſt plein d'idées neuves & dignes d'un homme de génie. Avant que d'entrer dans des détails ſur le méchaniſme de la viſion, donnons une idée de l'organe qui en eſt l'inſtrument.

L'œil eſt un globe creux dont l'enveloppe eſt formée de trois tuniques ou membranes. La premiere eſt celle qu'on nomme la ſclérotique; elle eſt une production de la dure-mere, la plus extérieure de celles qui revêtent le cerveau. La choroïde qui eſt au deſſous, provient de la pie-mere ou de la ſeconde membrane dont le cerveau eſt enveloppé. Elles ſortent du crâne, enveloppant la partie vraiment nerveuſe du nerf optique, qui s'épanouiſſant en quelque ſorte, tapiſſe l'intérieur de la choroïde, d'un tiſſu de filamens nerveux, mêlés avec des vaiſſeaux ſanguins; ce qui lui donne la reſſemblance d'un réſeau, & lui a fait donner le nom de la rétine. C'eſt-là la troiſieme des membranes qui forment l'enveloppe de l'œil, & c'eſt dans elle que réſide le ſentiment de la viſion (*a*). *Fig. 62.*

La partie antérieure de la ſclérotique eſt tranſparente, & forme ce qu'on nomme la cornée: celle-ci eſt portion d'une moindre ſphere, de ſorte que l'œil regardé de profil forme dans cet endroit une petite éminence. Au deſſous de la cornée, on apperçoit un petit diaphragme, ou cercle percé dans ſon milieu d'un trou circulaire; c'eſt ce qu'on nomme l'uvée, ou l'iris à cauſe de ſes couleurs. L'uvée eſt formée d'un entrelaſſement de fibres muſculeuſes, les unes circulaires & concentriques, les autres droites & diſpoſées comme les rayons d'un

(*a*) Deux hommes célebres du ſiecle paſſé, M. Pecquet & M. Mariotte, ont diſcuté ſi la rétine étoit véritablement l'organe de la vue. M. Pecquet tenoit pour l'affirmative; M. Mariotte étoit d'un avis contraire, & prétendoit que c'étoit la choroïde. Il ſeroit trop long d'examiner leurs raiſons. Mais malgré celles de M. Mariotte, qui ſont fort ingénieuſes, la rétine eſt reſtée en poſſeſſion d'être l'organe qui tranſmet à l'ame l'impreſſion de la lumiere; & je n'héſite point à regarder l'opinion contraire comme abſolument inſoutenable. Quel peut être l'uſage d'une partie preſque toute nerveuſe comme la rétine, ſi ce n'eſt de tranſmettre l'impreſſion des objets extérieurs. Il ne ſçauroit y avoir ſur cela de diviſion entre les Phyſiologiſtes qui ſçavent par mille expériences déciſives, que c'eſt uniquement dans les nerfs & les parties qui en ſont les plus compoſées, que réſide le ſentiment. On peut voir les principales pieces de cette conteſtation dans le Recueil des Œuvres de M. Mariotte.

cercle, par le jeu desquelles l'ouverture dont nous venons de parler se contracte ou s'élargit. La partie postérieure de l'iris est toujours teinte dans l'homme d'une mucosité noire propre à obscurcir l'intérieur de l'œil en absorbant tous les rayons latéraux. Dans l'endroit où l'uvée se sépare de la sclérotique, elle lui est fortement attachée par un ligament qu'on nomme ciliaire, & que quelques Opticiens physiologistes soupçonnent être un muscle dont la contraction ou le relâchement sert à augmenter ou à diminuer la convexité de la partie antérieure de l'œil pour l'accommoder à la différence des objets proches ou éloignés (*a*). Quoi qu'il en soit, de ce ligament partent une multitude de filets appellés *processus ciliaires*, qui servent à soutenir le cryſtallin dont nous parlerons tout à l'heure. Le nerf optique n'est point, comme le représentoient les anciens Opticiens, implanté directement vis-à-vis le trou de la prunelle, mais un peu en dedans & plus haut, comme le montrent l'expérience & la position du trou par lequel il sort du crâne dans l'orbite de l'œil.

Cette concavité que nous venons de décrire est remplie de trois humeurs, l'acqueuse, la cryſtalline & la vitrée. La vitrée qui paroît de la consistance de la glaire d'œuf, est néanmoins une humeur très-limpide & très-fluide, mais qui est renfermée dans une multitude de petites capsules; ce qui lui donne cette apparence. Elle occupe le fond de l'œil, & applique la rétine contre la choroïde. Le cryſtallin est comme une petite lentille, renfermée dans une membrane très-transparente nommée l'arachnoïde, & logée dans une concavité de l'humeur vitrée, comme la pierre d'une bague dans son châton. L'humeur aqueuse occupe la chambre antérieure de l'œil, qui est séparée en deux par la cloison de l'uvée. Six muscles, quatre droits, sçavoir un supérieur, un inférieur avec deux latéraux, & deux obliques ou dont la direction est en diagonale, enveloppent ce globe par leurs expansions membraneuses, & servent à ses mouvemens. Le devant de l'œil est enfin recouvert d'une membrane blanche très-déliée, qu'on nomme *la conjonctive*, & qui est une production

(*a*) Voyez M. Jurin, *Diss. on distinct and indistinct vision.* A la fin de l'*Optique* de M. Smith.

de

de celle qui revêt l'intérieur de l'orbite. Telle eſt la conformation de cet admirable organe ; nous paſſons à ce qui concerne plus particuliérement notre objet.

L'exemple d'une chambre obſcure dont l'ouverture eſt garnie d'un verre convexe, eſt extrêmement propre à expliquer la maniere dont ſe fait la viſion. La prunelle dans l'œil eſt l'ouverture de la chambre, le cryſtallin en eſt le verre, & la rétine eſt le carton ou la muraille blanche où ſe peignent les objets. L'œil eſt ſeulement une chambre obſcure plus compoſée. Les rayons de lumiere émanés du même point, en tombant ſur la cornée & en pénétrant l'humeur aqueuſe, y éprouvent une réfraction qui commence à les faire converger. Une partie eſt reçue par l'ouverture de la prunelle, & tombe ſur le cryſtallin. Ce corps lenticulaire les rompt davantage & les rend plus convergens. Ils ſortent du cryſtallin, & ils éprouvent une nouvelle réfraction en paſſant dans l'humeur vitrée : à l'aide de toutes ces réfractions, ceux qui viennent d'un même point de l'objet, ſi l'œil eſt bien conformé, ſe réuniſſent fort exactement dans un autre, & peignent ſur la rétine l'image de ce point. Ainſi tous les cônes de rayons partis des différens points de l'objet, forment ſur la rétine ſon image, & elle eſt renverſée, comme le reconnut enfin *Kepler*, après s'être long-temps & vainement tourmenté pour la redreſſer (*a*). On s'aſſure facilement de tous ces faits par l'expérience. On prend un œil d'animal recemment mort, & l'ayant dépouillé par derriere de ſes tuniques ſans endommager la rétine, on le préſente à l'ouverture de la chambre obſcure. On voit tous les objets extérieurs s'y peindre renverſés avec une vérité raviſſante.

En poſſeſſion de ces faits, il ne nous ſera plus difficile de rendre compte de la maniere dont nous appercevons les objets. Nous ne nous arrêterons point avec la plûpart des Auteurs à ces images ſi reſſemblantes qui ſe peignent ſur la rétine. Ce ſeroit ſuppoſer que l'ame les y contempleroit comme dans un miroir qui les lui repréſenteroit ; ce qui ſeroit ridicule & puérile. Il faut rechercher la cauſe de la viſion dans l'impreſſion que chaque cône de lumiere exerce ſur le filet nerveux qu'il

(*a*) *Aſtron. Optica.* p. 205, 206.

atteint par ſon ſommet. On ne doit point s'étonner que la lumiere, malgré ſa ſubtilité extrême, puiſſe faire impreſſion ſur les nerfs, puiſque portée à un certain degré de denſité elle eſt capable d'exciter une ſenſation douloureuſe ſur les mammelons nerveux de l'organe du tact. On peut par conſéquent ſuppoſer dans les filamens de la rétine une telle ſenſibilité, que l'action de la lumiere puiſſe les ébranler. L'ame, quelle que ſoit la nature de ſon union avec le corps, attentive à cet ébranlement, ſera affectée d'une certaine ſenſation, & reconnoîtra la préſence de la lumiere, comme elle reconnoît les autres qualités des corps par celui des nerfs deſtinés aux autres organes. On peut auſſi concevoir, & il eſt probable, qu'elle eſt avertie de la différente grandeur des objets par l'éloignement des filets de la rétine qui reçoivent les rayons extrêmes; de l'intenſité de la lumiere par la vivacité de l'ébranlement qu'elle excite; des couleurs par la nature de cet ébranlement différent, ſans doute, ſuivant la différence des couleurs; de la ſituation des objets par celle des filets qui en tranſmettent l'impreſſion. La fameuſe queſtion pourquoi les images étant peintes renverſées ſur la rétine, on voit néanmoins les objets droits, n'eſt, à mon gré, qu'une queſtion puérile. Nous ne jugeons du droit & du renverſé que par comparaiſon à la poſition de notre corps, & à la ſituation accoutumée des objets. Dès que nous avons commencé à faire uſage de nos ſens, nous avons pris l'habitude de joindre à l'ébranlement d'un filet ſupérieur de la rétine, l'idée d'un objet inférieur ou plus voiſin de nos pieds. Ainſi demander pourquoi les images étant renverſées dans l'œil, les objets nous paroiſſent droits, c'eſt demander pourquoi nous voyons les objets comme nous avons accoutumé de les voir. Un aveugle né, à qui la lumiere ſeroit ſubitement rendue, ne verroit d'abord ni près, ni loin, ni haut, ni bas. Ce fut le cas de celui à qui *Cheſelden* leva la cataracte; il ne commença à juger des poſitions & des éloignemens, qu'après avoir palpé les objets. *Deſcartes* ſe ſert de la comparaiſon d'un aveugle qui tient deux bâtons croiſés, & qui par l'impreſſion de la main gauche juge que l'objet eſt à droite, & au contraire. Cette comparaiſon eſt ingénieuſe, & répond aſſez bien à la difficulté, pourvu qu'on remarque que ce n'eſt pas par la nature du tact que cet aveugle rapporte l'impreſſion exercée

ſur la main gauche à un objet placé à droite, mais par l'habitude qu'il a contractée d'en juger ainſi. Sans cette habitude, ſemblable à l'aveugle de *Cheſelden*, il ſentiroit ; mais il ne pourroit porter aucun jugement ſur la ſituation de l'objet qui l'affecteroit.

La diſtinction avec laquelle nous appercevons un objet dépend de celle avec laquelle ſon image eſt peinte dans l'œil. Si chacun des cônes formés par les réfractions de l'œil, porte exactement ſa pointe ſur la rétine, toutes les parties de l'objet & ſes bords ſeront exactement terminés ; l'on verra l'objet diſtinctement. Mais ſi cette pointe tombe en avant ou en arriere, cette image ſera confuſe, comme dans la chambre obſcure ſi la muraille où ſe peignent les objets eſt trop voiſine ou trop éloignée du verre : dans ce cas on ne voit que confuſément. Il eſt donc eſſentiel pour la viſion diſtincte que l'œil ſoit tellement conformé que la réunion des rayons viſuels ne ſe faſſe ni trop près, ni trop loin, mais exactement ſur la rétine.

Ceci nous conduit naturellement à la cauſe des défauts qu'on remarque dans les différentes vues. Il y a des hommes qui n'apperçoivent les objets qu'à de très-petites diſtances, & d'autres qui ne voient diſtinctement que les objets éloignés. Ce dernier défaut eſt ordinairement celui des vieillards, & l'on nomme par cette raiſon *presbites*, ceux qui ont l'organe de la vue ainſi conformé : les autres ſont nommés *myopes*. Dans les preſbites, la cornée ou le cryſtallin trop applatis ne rompent pas aſſez la lumiere, ou peut-être quelque conformation particuliere rend la rétine trop proche du cryſtallin. Delà il arrive que les rayons partis d'un objet voiſin, & par conſéquent trop divergens, ne ſe réuniſſent qu'au-delà de la rétine ; mais s'il eſt extrêmement éloigné, de ſorte que les rayons qui partent de chacun de ſes points ſoient ſenſiblement paralleles, le degré de réfraction qu'ils éprouveront dans cet œil, ſera ſuffiſant pour les faire converger & ſe réunir préciſément ſur la rétine. L'art ſupplée à cette diſpoſition de la nature ou de l'objet, par le moyen d'un verre convexe. Ce verre rendant les rayons émanés des objets moins divergens ou paralleles, les rend propres à ſe réunir préciſément ſur la rétine, & voilà pourquoi les verres de cette forme ſont utiles à ceux qu'on nomme presbites.

Le défaut des myopes eſt l'effet d'une cauſe toute contraire. Si les humeurs de l'œil ſont trop réfringentes, la cornée ou le le cryſtallin trop convexes, ou la rétine trop éloignée, les rayons ſe réuniront avant que de l'atteindre, & n'y peindront qu'une image confuſe. On remediera à ce défaut par un verre concave, qui faiſant diverger ces rayons, retardera leur réunion, & rendra l'image diſtincte.

L'explication de la maniere dont ſe fait la viſion n'eſt pas le ſeul mérite de l'ouvrage de *Kepler*. Il nous préſente divers autres objets dignes d'être indiqués. Tels ſont la ſolution du problême d'*Ariſtote* ſur la rondeur de la lumiere du ſoleil paſſant par un trou d'une forme quelconque, & projettée à une certaine diſtance; la cauſe de la dilatation du diametre apparent de la lune & de tous les corps lumineux placés ſur un fond obſcur, auſſi-bien que de ſa contraction dans les éclipſes de Soleil; l'examen du principe juſque-là reçu ſur le lieu de l'image dans les miroirs ſphériques, lieu que l'on plaçoit dans le concours de la perpendiculaire d'incidence avec le rayon réfléchi. *Kepler* montre qu'on s'étoit trompé juſqu'alors, & que ce principe a beſoin de reſtriction. Il conclud dans le même ouvrage *à priori* (*a*), l'ellipticité apparente du Soleil voiſin de l'horizon, découverte vulgairement attribuée au P. *Scheiner*. On y trouve encore diverſes obſervations curieuſes d'Aſtronomie-Optique, comme ſur la forme de la lumiere du ſoleil rompue par l'athmoſphere de la terre, & projettée au travers de ſon ombre, d'où naiſſent quelques phénomenes ſinguliers des éclipſes que *Kepler* explique fort bien. Mais il fût moins heureux à d'autres égards: on le voit faire bien des efforts & ſe tourner de bien des manieres pour découvrir la loi de la réfraction. Il tente quantité de rapports, qu'il compare avec la Table dreſſée par *Vitellion*, & celle des réfractions aſtronomiques donnée par *Tycho*. Mais s'en tenant toujours à chercher ce rapport entre la réfraction elle-même, & le ſinus ou la ſécante de l'angle d'inclinaiſon, il manqua le véritable; & M. *Flamſteed*, qui lui fait honneur de la découverte de ce rapport (*b*), s'eſt aſſurément trompé. *Kepler* ne fût pas plus heureux dans la recherche d'un autre

(*a*) Pag. 131.
(*b*) *Hiſt. celeſtis proleg.*

problême optique, ſçavoir celui de déterminer la ſurface réfringente qui rendra les rayons partis d'un point, paralleles, ou convergens vers un point donné. Le principal élément de cette recherche lui manquoit, auſſi-bien que les ſecours géométriques qu'elle exige. Ainſi il n'eſt pas ſurprenant qu'il y ait totalement échoué.

II.

Découverte du Téleſcope.

S'il eſt quelque invention qui ait droit à notre admiration, c'eſt ſans doute celle du Téleſcope & du Microſcope. Tranſportons-nous dans les ſiecles privés de ces admirables inſtrumens; qu'euſſent dit les Philoſophes mêmes, ſi on leur eût annoncé qu'il viendroit un jour, où à l'aide de quelque matiere tranſparente artiſtement travaillée, on rapprocheroit les objets les plus éloignés, on groſſiroit les plus petits, au point de reconnoître avec diſtinction toutes leurs parties. Sans doute ils euſſent regardé cette annonce comme une chimere. C'eſt cependant ce qu'a vu le commencement du ſiecle paſſé, & ce dont nous ſommes aujourd'hui témoins tous les jours. Quoi de plus propre à apprendre à l'eſprit humain à ne ſe point trop défier de ſes forces, de celles du temps & du hazard.

Il eſt très-certain que le Téleſcope fut inconnu à l'Antiquité. Le plus ancien monument qu'on ait cité pour en reculer l'époque au-delà du commencement du dix-ſeptieme ſiecle, eſt un vieux manuſcrit cité par le P. *Mabillon*, dans ſon *Voyage d'Allemagne* (*a*), où l'on voit un *Ptolemée* mirant à un aſtre à travers un tube compoſé de pluſieurs tuyaux mobiles & rentrans les uns dans les autres. On en a conclu que c'étoit un Téleſcope, & que cet inſtrument étoit connu au temps où ce manuſcrit a été écrit; ce qui paroît être vers le milieu du treizieme ſiecle. Cependant, malgré ce que cette autorité a de ſpécieux, on n'a pu encore ſe perſuader qu'un inſtrument auſſi merveilleux ait reſté ſi long-temps enfoui dans l'obſcurité, & l'on a mieux aimé penſer que ce tube n'étoit autre choſe qu'une ſorte de dioptre propre à écarter les rayons latéraux. D'ailleurs pour diſcuter cette autorité, il faudroit avoir une

j'ay vu pluſieurs manuſcrits qui ont dans les lettres enluminées l'inſtrument que mon. a repreſenté et il n'a rien epargné. n. d. lect.

(*a*) Pag. 46.

repréſentation fidelle de ce deſſein. Il n'eſt pas rare de voir des Sçavans épris d'une découverte qu'ils croient avoir faite, trouver dans un paſſage ce qui n'y eſt pas; il peut de même ſe faire ici que le ſçavant Bénédictin cité ci-deſſus, ait un peu exagéré la reſſemblance de l'inſtrument que préſente le deſſein dont nous parlons, avec un Téleſcope.

Si nous en croyons l'opinion communément reçue, c'eſt au hazard que nous devons le Téleſcope. *Deſcartes*, qui écrivoit dans le pays même qui l'avoit vu naître, étoit de ce ſentiment. Il commence preſque ſa Dioptrique par cet aveu humiliant: après un court éloge du Téleſcope, il continue en ces termes: « Mais à la honte de nos Sciences, cette invention » ſi admirable n'a premiérement été trouvée que par l'expé- » rience & la fortune. Il y a environ trente ans qu'un nommé » Jacques *Metius*, homme qui n'avoit jamais étudié, bien » qu'il eût eu un pere & un frere qui ont fait profeſſion de » Mathématiques, mais qui prenoit plaiſir à faire des miroirs » & des verres brûlans, ayant à cette occaſion des verres de » différentes formes, s'aviſa de regarder au travers de deux, » dont l'un étoit convexe, l'autre concave; & il les appliqua » ſi heureuſement au bout d'un tuyau, que la premiere des lu- » nettes dont nous parlons en fut compoſée ».

Quelques Auteurs peu contens de cette origine du Téleſcope, ont cherché, ce ſemble, à la rendre encore plus humiliante pour les Sciences & pour l'eſprit humain. Les enfans d'un Lunettier de Middelbourg, diſent-ils, ſe jouant dans la boutique de leur pere, s'aviſerent de regarder le coq de leur clocher avec deux verres, l'un convexe, l'autre concave; & par hazard ces deux verres ſe trouvant à la diſtance convenable, ils le virent fort groſſi & fort rapproché. Ils firent part de leur ſurpriſe à leur pere qui, pour rendre l'expérience plus commode, les diſpoſa d'une maniere ſtable ſur une planchette. Bientôt un autre les adapta aux extrêmités d'un tuyau qui écartant la lumiere latérale, fit paroître les objets plus diſtinctement. Un troiſieme rendit les tuyaux mobiles & rentrans l'un dans l'autre. Ainſi prit naiſſance le Téleſcope qui, tourné peu après vers le Ciel, y fit appercevoir les phénomenes les plus merveilleux, que les Artiſtes & les Sçavans s'empreſſerent de perfectionner, & qu'on a enfin porté aujourd'hui à un point de perfection ſurprenant.

Un Auteur du milieu du ſiecle paſſé (*a*), a fait des efforts pour retrouver les traces de cette invention, & la revendiquer à ſes véritables Auteurs. Il rapporte cinq témoignages juridiques, & une Lettre d'un Envoyé des Etats d'Hollande, qui jettent quelque lumiere ſur ce ſujet. De ces cinq témoignages, il y en a deux qui font honneur du Téleſcope à un certain Zacharie *Jans*, Lunettier de Middelbourg. Ils différent à la vérité dans les dattes : le premier, qui eſt celui du fils de Zacharie, en fait remonter l'époque juſqu'en 1590, & celui de la ſœur ne la recule que juſques vers 1610. Mais les trois autres ne diſent mot de Zacharie, & adjugent l'invention dont il s'agit, à un certain Jean *Lapprey*, Lunettier de la même ville.

La lettre de M. *Borel* contient divers faits ſinguliers & dignes de trouver place ici. Cet Envoyé des Etats raconte qu'il a connu particuliérement ce Zacharie *Jans*, dont nous avons parlé plus haut, ayant joué ſouvent avec lui dans ſon enfance, & ayant été fréquemment dans la boutique de ſon pere ; qu'il a oui dire pluſieurs fois qu'ils étoient les inventeurs du Microſcope ; qu'étant en Angleterre en 1619, il avoit vu entre les mains de Corneille *Drebbel* ſon ami, le Microſcope même que Zacharie & ſon pere avoient préſenté à l'Archiduc *Albert*, & que ce Prince avoit donné à *Drebbel* ; il en fait enſuite une deſcription qui ne permet point de le prendre pour autre choſe qu'un Microſcope compoſé. Il ajoute que vers l'an 1610, les deux Lunettiers ci-deſſus imaginerent les Téleſcopes, & qu'ils en préſenterent un au Prince *Maurice*, qui deſiroit le cacher pour s'en ſervir avantageuſement dans la guerre où les Provinces-Unies étoient alors engagées. Mais l'invention tranſpira, & ſur le bruit qu'elle fit, un inconnu vint à Middelbourg, & cherchant l'inventeur du Téleſcope, il s'adreſſa à Jean *Lapprey* qu'il prit pour lui, & par ſes queſtions il lui donna lieu d'en deviner la compoſition qu'il dévoila le premier, ce qui l'en fit réputer l'inventeur. Cependant, ajoute M. *Borel*, on reconnut peu de temps après la mépriſe. Car *Adrianus Metius* & *Drebbel*, étant venus peu après à Middelbourg, allerent directement chez Zacharie *Jans*, de qui ils acheterent des Téleſcopes, &c. Sur ce fondement, l'Auteur du Livre *de vero*

(*a*) Pierre Borel, *De vero Teleſcopii inventore.* In-4°. 1655.

Teleſcopii inventore, adjuge l'invention du Téleſcope à Zacharie *Jans* : la Lettre de M. *Borel* concilie effectivement aſſez bien la contradiction des dépoſitions que nous avons citées plus haut. Mais que dirons-nous du Microſcope ; croirons-nous contre toutes les idées reçues juſqu'ici, que ſa naiſſance ait précédé celle du Téleſcope ? C'eſt cependant ce qu'il faut conclure du témoignage de cet Envoyé des Etats, qu'il ne me paroît pas poſſible de recuſer, ſi ce n'eſt peut-être en objectant quelque défaut de mémoire. Je me borne à avoir rappellé ces faits qui m'ont paru n'être guere connus, quoique mille Auteurs aient eu occaſion de parler de l'invention du Téleſcope. Je laiſſe au lecteur à les peſer & à ſe déterminer.

Quoi qu'il en ſoit de la découverte du Téleſcope, elle étoit trop brillante pour reſter long-temps renfermée dans une contrée de l'Europe. Elle ne tarda pas à ſe répandre de toutes parts, & l'on ſent aiſément que les Sçavans & les Aſtronomes ne furent pas les derniers à s'y intéreſſer. Mais parmi ceux pour qui cet inſtrument ne fut pas un vain ſujet de curioſité, *Galilée* mérite le premier rang. Il étoit à Veniſe lorſque le bruit de la découverte dont nous parlons s'y répandit. Incertain de ce qu'il devoit croire, il en attendit la confirmation que lui apporterent enfin des lettres écrites de Paris. Alors aſſuré des merveilles que la renommée débitoit du nouvel inſtrument, il ſe mit, dit-il, à examiner profondément, à l'aide de la théorie des réfractions, quelle pouvoit être ſa compoſition, & il la découvrit. Il garnit les extrêmités d'un tuyau, de deux verres, l'un convexe, l'autre concave ; & le tournant vers les objets, il remarqua qu'il les augmentoit trois fois en diametre. Ce premier ſuccès l'encouragea ; il ſe fit peu après un autre Téleſcope, qui augmentoit environ huit fois : enfin n'épargnant ni peine, ni dépenſe, il s'en procura un qui groſſiſſoit environ trente-trois fois en diametre, & ce fut par le moyen de ce dernier qu'il découvrit les Satellites de Jupiter, les taches du Soleil, &c.

Ce que nous venons de raconter, eſt d'après le récit même de *Galilée*. Ainſi rien n'eſt moins fondé que la prétention de ceux qui l'ont donné pour l'inventeur du Téleſcope. Ce qu'on ne peut lui refuſer, c'eſt d'en avoir le premier conſtruit un d'une certaine longueur, & de l'avoir tourné vers le Ciel. Il

eſt

eſt encore vrai que, ſuivant le récit qu'il fait, il y a plus de mérite dans ſa découverte que dans celle du Hollandois qui n'y fut probablement conduit que par le hazard. Mais doit-on en croire *Galilée* ſur ſa ſeule parole, lorſqu'il dit qu'il n'avoit aucune connoiſſance de la forme des verres qui entroient dans la compoſition de ce nouvel inſtrument. Il eſt difficile de ſe perſuader qu'il n'eût pas appris du moins qu'il conſiſtoit en deux verres adaptés aux extrêmités d'un tube. Or dans ce cas le nombre des combinaiſons de verres à tenter, n'étoit pas conſidérable, & c'étoit ſans doute le moyen le plus court de découvrir ſa véritable compoſition. La Dioptrique étoit encore trop peu avancée pour qu'il fût poſſible d'y parvenir autrement que par des eſſais & des tentatives. Ce que *Galilée* dit quelque part, qu'il trouva par ſa théorie qu'il falloit néceſſairement un verre convexe & un concave, montre du moins que cette théorie étoit fauſſe.

Le Téleſcope dont nous venons de raconter l'invention, fut aſſez long-temps le ſeul en uſage. On n'en connoiſſoit point encore d'autre, du temps de *Deſcartes* qui écrivoit près de trente ans après. On ne trouve dans ſa *Dioptrique* aucune combinaiſon de verres, autre que celle d'un objectif convexe avec un oculaire concave. Cette diſpoſition a néanmoins un très-grand défaut; c'eſt qu'elle rétrecit extrêmement l'étendue des objets qu'on apperçoit d'un ſeul coup d'œil, & ce défaut augmente à proportion que le Téleſcope groſſit davantage, de ſorte qu'on a peine à ſe perſuader aujourd'hui qu'il ait pu rendre à l'Aſtronomie d'auſſi grands ſervices qu'il a fait entre les mains des *Galilée*, des *Scheiner*, &c. Les lunettes de cette forme ſont depuis long-temps reſtreintes à de petites longueurs. Il eſt rare d'en voir qui paſſent quinze à dix-huit pouces, & les plus ordinaires n'en ont que cinq à ſix, & même moins. Cette premiere eſpece de lunette eſt appellée *Batavique*, à cauſe de ſon origine.

On ne peut conteſter à *Kepler* la gloire d'avoir reconnu le premier dans la théorie le Téleſcope *aſtronomique*. C'eſt celui qui n'eſt compoſé que de deux verres convexes, & qui renverſe les objets, choſe peu importante aux obſervateurs à qui il ſuffit d'en être prévenu. *Kepler* le décrit dans ſa Dioptri-

que (*a*) d'une maniere à ne pouvoir le méconnoître, & il en explique fort bien les effets, comme on le verra par l'analyſe que nous ferons dans peu de cet ouvrage. Mais il en reſta là. Uniquement appliqué à déterminer avec préciſion les mouvemens céleſtes, cet homme célebre faiſoit peu d'uſage du Téleſcope, & c'eſt là probablement une des raiſons pour leſquelles il négligea de mettre en pratique ce qu'une théorie éclairée lui avoit appris. Une autre raiſon du peu d'intérêt que *Kepler* prit à ſa découverte, pourroit être qu'il ne connut point l'avantage de cette nouvelle combinaiſon de verres; ſçavoir l'augmentation conſidérable du champ de la viſion. Il jugea peut-être qu'il étoit aſſez inutile d'eſſayer une diſpoſition de verres, qui ne devoit différer de celle qui étoit connue, qu'en ce qu'elle renverſeroit les objets.

L'opinion vulgaire eſt que le Pere *de Rheita*, Capucin, eſt celui qui a fait la premiere mention expreſſe du Téleſcope aſtronomique. Mais cette opinion eſt mal fondée, & ceux qui lui ont donné crédit n'avoient pas lu la *Roſa urſina* du Pere *Scheiner*, publiée en 1630. C'eſt, à mon avis, ce Pere qui le premier a reconnu diſtinctement par l'expérience l'effet d'un oculaire convexe ſubſtitué à un concave (*b*). « Si vous appli-
» quez, dit-il, au tube deux lentilles ſemblables, c'eſt-à-dire
» toutes deux convexes, & que vous y approchiez l'œil de la
» maniere convenable, vous verrez tous les objets terreſtres
» renverſés à la vérité, mais augmentés, & avec une clarté &
» une étendue conſidérable. Vous verrez de même les aſtres,
» & comme ils ſont ronds, leur renverſement ne nuira point
» à leur configuration. » Plus loin il donne la conſtruction du Téleſcope à trois verres qui redreſſe les objets, & dont le principe fut auſſi connu à *Kepler*. Il dit enfin dans le même endroit, qu'il y avoit treize ans qu'il s'étoit ſervi de deux verres convexes, dans une obſervation qu'il avoit faite devant l'Archiduc *Maximilien*. Ainſi l'on ne peut s'empêcher de reconnoître le P. *Scheiner*, comme le premier qui ait réduit en pratique la théorie de *Kepler*, ſur ces deux nouveaux Téleſcopes. Il eſt vrai qu'un obſervateur Napolitain, nommé *Fon-*

(*a*) *Prop.* 86.
(*b*) *Roſa urſina*, p. 130 & ſeq.

tana (*a*), revendique l'invention du Téleſcope aſtronomique, auſſi-bien que celle du Microſcope. Il prétend avoir trouvé le premier dès l'année 1608, & il rapporte le certificat d'un ami, qui dit lui en avoir vu faire uſage vers l'an 1614. Mais ces ſortes de réclamations tardives ſont toujours mal accueillies, à moins de preuves bien convainquantes. Il eſt dans la République des Lettres, comme dans la ſociété, une ſorte de preſcription contre laquelle on n'eſt point reçu à revenir. Si *Fontana* fut en poſſeſſion du Téleſcope aſtronomique dès l'an 1608, pourquoi ne publia-t'il pas alors ſa découverte pour s'en aſſurer l'honneur & pour le bien de l'Aſtronomie. Ces inventeurs avares, qui font myſtere de ce qu'ils ont trouvé, méritent de n'en être plus crus, lorſque d'autres trouvant les mêmes choſes, les préviennent, & en font part à la ſociété.

Nous voici déja en poſſeſſion de trois ſortes de Téleſcopes; le Batavique à deux verres, l'un convexe, l'autre concave; l'Aſtronomique à deux verres convexes, & un troiſieme qui redreſſe les objets à l'aide d'une certaine diſpoſition de deux oculaires convexes. Ce dernier néanmoins a le défaut de repréſenter les objets un peu courbes vers les bords, d'être fort ſujet aux couleurs de l'iris, & de faire paroître les imperfections du premier oculaire: c'eſt pourquoi on a cherché une autre combinaiſon de verres, propre à redreſſer les objets ſans ces inconvéniens. Le P. *de Rheita* me paroît en être l'Auteur. Après avoir décrit le Téleſcope à trois verres dont on vient de parler, il en annonce (*b*) un autre ſous des lettres tranſpoſées qu'il expliqua dans la ſuite. Leur ſens eſt que quatre verres convexes redreſſent mieux les objets, & que de ces quatre verres trois ſont les oculaires, & un autre l'objectif. *Rheita* eut raiſon de dire que ce Téleſcope redreſſe mieux les objets: à quelque différence près de clarté, il jouit des mêmes avantages que le Téleſcope aſtronomique.

Les Téleſcopes qu'on vient de décrire, rempliſſent toutes les vues qu'on peut ſe propoſer. Le Batavique eſt excellent pour les petites diſtances; l'Aſtronomique eſt plus commode pour les obſervations céleſtes; le dernier, qu'on nomme *Terreſtre*, eſt tout ce qu'on peut deſirer de mieux pour regarder

(*a*) *Novæ terreſtrium & celeſtium obſ.* Neap. 1646. in-4°.
(*b*) *Oculus Enoch & Eliæ, ſeu radius ſidereo-myſticus.*

les objets qu'il importe de voir dans leur ſituation naturelle. Il y a cependant quelques autres formes de Téleſcopes, mais qui ont fait peu de fortune. Tels ſont certains Téleſcopes à cinq verres convexes, ou davantage, qu'on trouve décrits dans *Deſchales* (*a*). Si quelquefois il y en a eu de cette ſorte qui aient été eſtimés pour leur bonté, je crois que cela vient de l'excellence des verres dont ils étoient compoſés, & qu'ils auroient encore été meilleurs s'ils euſſent été plus ſimples, comme l'Aſtronomique ou le Terreſtre.

Hevelius fait auſſi mention d'un Téleſcope à deux objectifs convexes, & un oculaire concave. Il avoit déja été décrit par *Syrturus* dans ſon *Teleſcopium* (*b*); mais il eſt viſible que ces deux objectifs équivalent à un ſeul, & que ce n'eſt là qu'un Téleſcope Batavique : cette diſpoſition peut néanmoins avoir des avantages dans certaines circonſtances. M. *Molyneux* (*c*) fait beaucoup d'éloges d'un Téleſcope aſtronomique à deux objectifs, & il l'appelle *Téleſcope nocturne*, à cauſe qu'on l'employoit principalement dans les obſervations de nuit : en effet, comme chacun des objectifs appartient alors à une ſphere double de celle dont l'objectif unique auroit été portion, on peut lui donner une ouverture environ double en ſurface de celle de ce dernier, ce qui peut être commode pour conſidérer des objets peu éclairés. Il y a une autre combinaiſon de verres propoſée par quelques Opticiens dans la vue de faire ſervir un objectif médiocre à peindre une image beaucoup plus grande que ne le comporte la longueur de ſon foyer (*d*). Ils vouloient qu'un peu avant le foyer, on adaptât un verre concave dans un certain éloignement, afin qu'en retardant la réunion des rayons, il agrandît l'image de l'objet. L'oculaire devoit être convexe, comme dans le Téleſcope aſtronomique. Cette compoſition eſt ingénieuſe, & bonne dans la théorie, mais la pratique y a fait reconnoître des défauts, de ſorte qu'on l'a rejettée.

Il ne nous faut pas oublier ici le Téleſcope binocle, autre invention du P. *Rheita*, & qu'un Opticien de ſon Ordre (le

(*a*) *In Dioptrica.* Mund. Math. T. III.

(*b*) 1618. in-4°. C'eſt un ouvrage de très-mince conſéquence, & l'on voit facilement que Syrturus n'étoit qu'un ignorant qui ne connoiſſoit pas même les élémens de la Dioptrique.

(*c*) Dioptrick.

(*d*) Inventions de M. de Hautefeuille.

P. *Cherubin* d'Orléans) a tenté de mettre en crédit pluſieurs années après. Ce ſont deux Téleſcopes égaux, & diſpoſés de maniere qu'on mire à la fois au même objet. Il arrive ici un phénomene curieux, & dont il ne faut cependant pas conclure que ce Téleſcope ait quelque avantage ſur les autres. Lorſqu'on regarde par un ſeul des deux, on voit l'objet comme à l'ordinaire par un Téleſcope de même bonté & même longueur, mais ſi-tôt qu'on regarde dans tous les deux à la fois, le champ de la viſion ſemble s'agrandir, & l'objet paroît beaucoup plus grand & plus rapproché. Mais ce n'eſt là qu'une illuſion de la vue : on n'apperçoit point par ce moyen ce qu'un ſeul des deux Téleſcopes ne montreroit pas à un œil attentif; il y a ſeulement quelques degrés de plus de clarté, ce qui eſt l'effet de la double impreſſion qui ſe fait en même temps dans les yeux. Au reſte, cet avantage eſt compenſé par l'incommodité de mirer au même objet, & malgré les éloges du P. *Chérubin*, nous doutons que les obſervatoires ſe garniſſent jamais de Téleſcopes de cette eſpece.

III.

Hiſtoire du Microſcope.

A l'hiſtoire du Téleſcope doit naturellement ſuccéder celle du Microſcope. Ce que le premier eſt dans l'Aſtronomie, le ſecond l'eſt dans la Phyſique; ſi l'un nous tranſporte en quelque ſorte dans les régions céleſtes les plus reculées, l'autre nous découvre les plus petits objets de la nature : celui-là nous a fait appercevoir dans les Cieux les phénomenes les plus étonnans, & a principalement contribué à redreſſer les idées des Phyſiciens ſur le ſyſtême de l'Univers. Celui-ci nous faiſant pénétrer dans la contexture intime des corps, nous a en quelque ſorte découvert un nouveau monde auſſi fécond en merveilles, & auſſi digne de l'admiration de l'eſprit humain.

Il y a deux ſortes de Microſcopes, le ſimple & le compoſé. Le premier ne conſiſte qu'en une lentille d'un foyer très-court. Une ſphere de verre d'un petit diametre eſt encore un Microſcope. Ainſi toutes les fois qu'on a fait de pareilles lentilles ou ſpheres de verre, on a eu des Microſcopes. Il eſt vrai qu'on ne s'eſt guere aviſé que vers le milieu du ſiecle paſſé, d'en faire d'extrêmement petites, & à cet égard on peut dire

que la date du Microſcope ſimple n'eſt pas moins récente que celle du Téleſcope.

Les Microſcopes compoſés ſont ceux qui ſont formés d'une lentille d'un foyer fort court, qu'on appelle l'objectif, & d'un ou de pluſieurs oculaires. Leur invention n'eſt pas moins incertaine que celle du Téleſcope. On croit vulgairement que Corneille *Drebbel* (*a*) en eſt l'Auteur, & que les premiers ont paru vers l'an 1618 ou 1620. Mais ſuivant la lettre que nous avons citée plus haut, il faut donner à cet inſtrument plus d'antiquité, & même lui accorder le droit d'aîneſſe ſur le Téleſcope. Le Microſcope que *Drebbel* avoit à Londres, n'étoit point ſon ouvrage, comme le dit expreſſément la lettre dont nous parlons, & il pourroit bien ſe faire que le bruit qui l'en fait l'inventeur, n'eût pour fondement que l'uſage qu'il en faiſoit, & les curioſités qu'il montroit par ſon moyen.

Il ſeroit intéreſſant que l'Envoyé des Etats d'Hollande, qui nous a décrit l'extérieur du Microſcope de *Drebbel*, nous en eût auſſi fait connoître l'intérieur. Je ſoupçonne qu'il étoit compoſé, comme les Téleſcopes de ce temps, de deux verres, l'un convexe, l'autre concave. En effet, on peut faire un Microſcope avec une lentille d'un foyer médiocre, en plaçant l'objet un peu au-delà de ce foyer, & mettant l'oculaire entre ce verre & le lieu de l'image. Mais ce Microſcope a le défaut du Téleſcope Batavique; le champ en eſt fort étroit: c'eſt pourquoi on ne s'en ſert plus depuis l'invention de ceux à oculaire convexe.

Le Microſcope compoſé de verres convexes, eſt au Téleſcope aſtronomique, ce qu'eſt le précédent au Téleſcope Batavique. Cette raiſon nous fait croire que ſon époque ne remonte pas au-delà de celle du Téleſcope aſtronomique; & en effet, nous n'en trouvons pas de trace avant l'an 1646, où parut l'ouvrage de *Fontana*, dont nous avons parlé. *Fontana* pré-

(*a*) Drebbel, l'inventeur du Thermometre, n'étoit point, comme on le lit dans divers Livres, & entr'autres dans le Spectacle de la Nature, un payſan de la Nort-Hollande. Il étoit né à *Alcmaer*, & il avoit reçu, dit la Chronique de cette ville, une éducation fort recherchée. Il étoit fort curieux de nouveautés ingénieuſes & de ſecrets naturels; ce qui le rendit cher à Jacques I, Roi d'Angleterre, à la Cour duquel il vécut quelque temps. M. Borel, Envoyé des Etats en Angleterre & en France, le nomme *ſon ami*; ce n'eſt point là le titre que donne un homme de marque à un payſan qui montre ou qui a imaginé quelques curioſités.

rend en être l'inventeur, de même que du Téleſcope à oculaire convexe. Nous ne pouvons rien ſtatuer ſur cela. Les faits nous manquent; c'eſt pourquoi nous laiſſerons volontiers cet Aſtronome Italien en poſſeſſion de la découverte de cette ſorte de Microſcope, puiſque perſonne autre ne la revendique.

IV.

Le Téleſcope étoit un inſtrument trop digne d'admiration pour ne pas exciter dans tous les Mathématiciens une vive inquiétude ſur la cauſe de ſes effets; & il y en eut ſans doute un grand nombre qui travaillerent à la démêler. Mais *Képler* fut le plus heureux, & le plus prompt de tous. Il la dévoila en 1611, dans ſa *Dioptrique*, ouvrage qui ne lui fait guere moins d'honneur que ceux dont il enrichit l'Aſtronomie. L'analyſe ſuivante montrera que ce jugement n'a rien d'exagéré.

Le premier pas à faire dans la Dioptrique, étoit de découvrir la loi que ſuit la lumiere en ſe rompant. *Képler*, à la vérité, ne fut pas plus heureux ici, qu'il l'avoit été dans ſon *Aſtronomia Optica*, où nous l'avons vu s'épuiſer en recherches & en conjectures pour la déterminer. Mais guidé par l'expérience, il lui en ſubſtitua une propre à en tenir lieu dans les recherches qu'il avoit à faire. Il obſerva que tant que l'angle d'inclinaiſon (*a*) d'un rayon ne paſſe pas 30°, la réfraction que ſouffre ce rayon en eſt à très-peu de choſe près, le tiers, & il prit ce rapport pour la vraie loi. Comme les ſurfaces ſphériques des verres qu'on emploie dans les Téleſcopes, ont rarement 20° d'étendue de leur milieu vers les bords, *Képler* crut pouvoir s'en ſervir avec aſſurance; & en effet, elle ne l'égara point. Ses déterminations ſont tout-à-fait conformes à celles que donne la vraie loi de la réfraction.

La lumiere paſſant d'un milieu plus denſe dans un plus rare, s'écarte de la perpendiculaire, & d'autant plus que l'inclinaiſon eſt plus grande : il en eſt enfin une telle que le rayon rompu devient parallele à la ſurface réfringente. Cet angle eſt de 48 degrés & quelques minutes dans le verre, c'eſt-à-

(*a*) L'angle d'inclinaiſon dont on aura ſouvent occaſion de parler, eſt celui que forme le rayon incident avec la perpendiculaire à la ſurface réfringente. Celui que forme le rayon rompu avec cette perpendiculaire, s'appelle l'angle rompu. Il eſt cependant paſſé en uſage, depuis quelques années, d'appeller auſſi ces deux angles, angles d'incidence & de réfraction.

dire, qu'un rayon de lumiere qui tomberoit ſur une ſurface plane de verre pour paſſer delà dans l'air, en faiſant avec elle un angle de 42°, l'effleureroit au ſortir. Mais que deviendront ceux qui la rencontreront encore plus obliquement. Ici il arrive un phénomene remarquable, qui n'échappa pas à *Képler*. La réfraction ne pouvant plus avoir lieu, elle ſe change en une réflection, qui ſe fait d'ailleurs comme à l'ordinaire, à angle égal avec celui d'incidence.

Ces principes généraux ſur la réfraction étant poſés, *Képler* paſſe à examiner les propriétés des verres lenticulaires. Il fait d'abord voir que ceux qui ſont plans convexes ont leur foyer, c'eſt-à-dire, réuniſſent les rayons paralleles à leur axe, à la diſtance du diametre de la ſphere dont leur convexité eſt portion, & que ceux qui ſont également convexes des deux côtés, l'ont à la diſtance du rayon. Quant à ceux qui ſont inégalement convexes, il ne détermine la diſtance de leur foyer qu'en diſant qu'elle tient un milieu entre les rayons de l'une & de l'autre ſphéricité. On a depuis aſſigné plus préciſément cette diſtance (*a*), & c'eſt, je crois, *Cavalleri* qui l'a fait le premier. Tout ce qu'on vient de dire ſur les verres convexes, s'applique aux concaves, à cela près, que le concours des rayons rompus, au lieu de ſe faire au-delà du verre, ſe fait en deçà, ou du même côté que viennent les rayons incidens; les Analiſtes diroient que la diſtance de leur foyer eſt négative, tandis que celle des verres convexes eſt poſitive.

Il n'eſt pas difficile après cela de trouver quel changement opere un verre convexe dans la direction des rayons qui viennent d'un point placé ſur ſon axe. Puiſque ceux qui ſont paralleles ſe réuniſſent à ſon foyer, ceux qui partent de ce foyer doivent devenir paralleles. S'ils viennent d'un point entre le foyer & le verre, ils reſteront divergens, mais moins que s'ils n'euſſent pas éprouvé une réfraction. Ceux enfin qui viennent d'un point au-delà du foyer, convergeront au ſortir du verre, & iront ſe réunir à un point placé au-delà du foyer oppoſé. *Képler* remarque en particulier que les rayons partis d'une diſtance double de celle du foyer, vont ſe réunir également loin de l'autre côté. Les Opticiens poſtéricurs ont

(*a*) Il faut faire, comme la ſomme des diametres des deux convéxités, à l'un des deux, ainſi l'autre à la diſtance du foyer.

examiné

examiné de plus près les autres, & ont aſſigné à quelle diſtance ſe fait la réunion des rayons partis d'un point quelconque de l'axe (*a*). Cette détermination étoit encore un peu trop difficile pour *Kepler*, à qui ſes travaux aſtronomiques & extrêmement variés, n'avoient pas permis de faire des progrès profonds dans la Géométrie.

Un phénomene connu de tous ceux qui ont manié des verres lenticulaires, eſt celui de l'image des objets qu'ils peignent derriere eux. Qu'on préſente dans une chambre un verre convexe au mur oppoſé à une fenêtre, & qu'on l'en éloigne de la diſtance environ de ſon foyer, on verra ſur ce mur l'image de la fenêtre oppoſée, d'autant plus grande & plus diſtincte, que le verre ſera d'une plus grande ſphere. L'explication de ce phénomene eſt facile; de chacun des points de l'objet (que nous ſuppoſons dans l'axe de verre ou aux environs) part un faiſceau de rayons qui tombent ſur le verre, & qui ſe réuniſſent au-delà. Ceux qui partent de l'axe même, ſe réuniſſent dans l'axe; ceux qui viennent des côtés concourent dans un point de la ligne tirée par le milieu du verre: delà vient que le concours des rayons venus des parties inférieures de l'objet, eſt en haut & au contraire; ce qui fait que l'image eſt renverſée. Quant à ſa grandeur, elle eſt à celle de l'objet, comme ſa diſtance au verre, à celle de celui-ci à l'objet. Cet objet eſt-il cent fois plus éloigné que l'image, celle-ci ſera cent fois moindre, & au contraire. Nous ne diſons rien de la diſtance à laquelle doit ſe peindre l'image. Cela eſt facile à déterminer, auſſi-tôt qu'on ſe rappellera ce que nous avons dit ſur le point de concours des rayons partis de l'axe d'un verre.

Ce qu'on vient de dire eſt le fondement de la théorie des Téleſcopes & des Microſcopes. Mais avant que de venir à en expliquer les effets, il faut remarquer avec *Kepler*, que l'on ne voit point diſtinctement les objets par des rayons convergens, ou même paralleles, à moins qu'on ne ſoit preſbite.

(*a*) Pour trouver ce point de réunion, il faut faire cette analogie. Comme l'excès de la diſtance de l'objet au verre ſur celle du foyer à la diſtance du foyer, ainſi cette diſtance à celle du point de réunion au-delà du verre. Cette même analogie donne le point d'où divergent les rayons, quand l'objet eſt entre le verre & le foyer. Car alors l'excès de la diſtance de l'objet au verre ſur celle du foyer eſt négative; ce qui rend négatif le dernier terme de la proportion: or une diſtance négative n'eſt que la même diſtance, mais priſe en ſens contraire.

La nature ayant deſtiné nos yeux à voir des objets peu éloignés, les a conformés de maniere qu'à moins de quelque vice particulier, il n'y a que les rayons médiocrement divergens dont le concours doive ſe porter ſur la rétine : ſi donc l'œil eſt ſitué de maniere qu'il reçoive des rayons convergens, on pourra rendre la viſion diſtincte, pourvu qu'on ait quelque moyen de corriger cette convergence, & de la changer en une divergence médiocre, ou tout au plus en paralléliſme. Appliquons ceci au Téleſcope Batavique.

Si l'on préſente un verre convexe au ſoleil, ou à un objet très-éloigné, il ſe formera au foyer de ce verre une image de cet aſtre ou de cet objet. Si l'œil étoit nuement placé entre ce foyer & le verre, les rayons qu'il recevroit étant convergens, il ne verroit que confuſément ; mais ſi l'on met entre deux & *Fig.* 63. tout près de l'œil, un verre concave qui faſſe diverger médiocrement ces rayons, l'objet ſera vu diſtinctement ; il paroîtra auſſi plus grand, parce que les rayons partis des extrêmités feront un plus grand angle. M. *Huyghens* a depuis montré que cette augmentation ſe faiſoit dans le rapport de l'éloignement du foyer du verre concave, à celui du foyer du verre convexe. Si ce dernier a ſon foyer dix fois plus éloigné que l'autre, l'objet paroîtra dix fois auſſi grand que ſi l'on le regardoit avec l'œil nu.

La raiſon de l'effet que produit le Téleſcope à verres convexes à peu près ſemblable. L'objectif peint vers ſon foyer une image de l'objet. Le ſecond verre étant diſpoſé de maniere que cette image eſt à ſon foyer, il s'enſuit que les rayons qui *Fig.* 64. partent de chacun des points de l'image, ſont rendus paralleles ou médiocrement divergens. Delà naît la diſtinction avec laquelle chacun de ces points eſt peint ſur la rétine. L'objet eſt vu diſtinctement, & il paroît groſſi dans le rapport des diſtances des foyers de l'oculaire & de l'objectif. Je dis que les rayons qui partent de chacun des points de l'image ſont rendus paralleles, ou médiocrement divergens. Quant à la direction de chacun des faiſceaux qu'ils compoſent, ils ſont pliés par la réfraction qu'ils éprouvent dans l'oculaire, de maniere que leurs axes ſe croiſent tous vers le foyer oppoſé. La figure 64 eſt propre à donner une idée diſtincte de cette route des rayons. C'eſt delà que naît le renverſement apparent de l'ob-

jet ; car ce croiſement des faiſceaux de rayons fait que l'image qui ſe peint dans l'œil, eſt dans la même ſituation que l'objet : il doit donc paroître renverſé. C'eſt auſſi pour cette raiſon qu'il faut appliquer l'œil à une diſtance de l'oculaire à peu près égale à celle de ſon foyer. Par-là on réunit le plus qu'il eſt poſſible de pinceaux des points latéraux de l'objet, & le champ de la viſion eſt d'autant plus grand.

Imaginons maintenant qu'au lieu de cet oculaire, on préſente à l'image formée par l'objectif, un verre d'un foyer court à une diſtance double de celle de ce foyer. On a vu plus haut qu'il doit ſe peindre de l'autre côté une image égale à la premiere, & ſeulement renverſée. Nous pourrons donc par ce moyen retourner l'image formée par l'objectif ; & ſi nous lui préſentons un oculaire de la même maniere qu'on l'a fait dans le Téleſcope ci-deſſus, on verra l'objet également groſſi & avec la même diſtinction, mais redreſſé. *Fig.* 65.

On a cependant reconnu dans cette diſpoſition de verres quelques inconvéniens dont on a parlé dans l'article ſecond, & cela a fait imaginer un autre moyen de redreſſer l'apparence de l'objet. On préſente à l'image que peint l'objectif un oculaire de maniere que cette image ſoit à ſon foyer antérieur. Cet oculaire rend paralleles les rayons qui compoſent chaque pinceau parti de chaque point de la premiere image. On leur oppoſe un ſecond verre égal au premier, & à une diſtance double de ſon foyer, qui recevant ces rayons paralleles, les fait de nouveau converger & peindre derriere lui, une image égale à la premiere, mais en ſens contraire. On lui applique enfin un troiſieme oculaire, comme dans le Téleſcope aſtronomique. Voilà le Téleſcope appellé terreſtre qui redreſſe les objets. *Fig.* 66.

Ce qu'on vient de dire ſur les Téleſcopes eſt un acheminement à la doctrine des Microſcopes compoſés. Mais il y a dans leur conſtruction un principe particulier qu'il faut d'abord faire connoître. Nous avons déja remarqué qu'un objet placé un peu au-delà du foyer d'un verre convexe, forme une image beaucoup plus grande & plus éloignée. Qu'on place une lentille d'un pouce de foyer, à treize lignes d'un petit objet, il ſe formera une image à environ treize pouces de ce verre, & elle ſera douze fois auſſi grande que l'objet même. C'eſt ſur cette

augmentation qu'eſt fondé l'effet que produit le Microſcope. Car, qu'on préſente à l'image ci-deſſus un oculaire convexe : cette image étant placée à ſon foyer, ce ſera comme ſi avec
Fig. 67. cet oculaire nous regardions un objet ſemblable au premier, & douze fois plus grand. Le Microſcope groſſira donc en raiſon compoſée de l'augmentation de l'image formée par le premier verre, & de ce dont l'oculaire groſſit lui-même. Il eſt encore facile de voir que l'objet paroîtra renverſé ; c'eſt une ſuite néceſſaire du renverſement de l'image, produit par l'objectif. Le champ de la viſion eſt auſſi beaucoup plus conſidérable que ſi l'on eût employé un oculaire concave, comme on le fit d'abord. On augmente même encore ce champ, en employant au lieu d'un oculaire unique, deux oculaires joints enſemble, ou à peu de diſtance l'un de l'autre. Comme il n'eſt pas néceſſaire alors que chacun ſoit portion d'une ſphere ſi petite, on peut en découvrir un plus grand ſegment, & par-là on raſſemble au foyer commun des deux oculaires un plus grand nombre de pinceaux latéraux de l'objet.

V.

Découverte de la loi de la réfraction.

On a vu dans l'article précédent que *Kepler* prit pour principes de ſes recherches que l'angle de réfraction étoit le tiers de celui d'inclinaiſon, tant que ce dernier ne paſſe pas 30°. Mais quelques découvertes qu'il eût faites par le moyen de cette loi approchée de la réfraction, les Mathématiciens étoient fondés à ne s'en pas contenter. Il falloit trouver la véritable, & c'étoit par ce moyen ſeul qu'ils pouvoient parvenir à la ſolution générale de tous les problêmes qui dépendent de cette propriété de la lumiere.

Il étoit réſervé à *Snellius* (*a*), Mathématicien Hollandois, & recommandable à divers titres, de faire cette découverte.

(*a*) Willebrord Snellius, (Snell) fils de Rodolphe Snellius, Profeſſeur de Mathématiques dans l'Univerſité de Leyde, & profeſſeur lui-même dans cette Univerſité, naquit en 1591. On lui doit, outre la découverte dont nous parlons, la premiere meſure exacte de la terre, ou du moins la maniere d'y parvenir. Il eſt Auteur de divers ouvrages imprimés, tels que ſon *Cyclometricus*, dont nous avons parlé au commencement du premier Livre ; ſon *Typhis Batavus* ; ſon *Eratoſtenes Batavus* ; *Appollonii, de ſectione rationis & determinatâ libri reſtituti* ; *Obſ. Haſſiacæ* ; *de Com. ann. 1618, &c.* Il mourut en 1626, encore très-peu avancé en âge.

la vérité, l'ouvrage qu'il préparoit ſur ce ſujet & ſur l'Optique en général, n'a jamais vu le jour : on ſçait néanmoins, l'on convient qu'il eſt le premier qui ait trouvé la vraie loi de la réfraction. On peut conjecturer avec vraiſemblance que ce fut l'expérience qui l'y conduiſit. Il découvrit qu'en tirant une parallele D H à l'axe de réfraction ACB, il y avoit toujours dans la réfraction entre mêmes lieux, un même rapport entre le rayon rompu CE, & la prolongation CF de l'incident. La lumiere paſſant de l'air dans l'eau, par exemple, ce rapport eſt conſtamment de 4 à 3 : lorſque la réfraction ſe fait de l'air dans le verre, c'eſt celui de 3 à 2. Ainſi en ſuppoſant un autre rayon incident gC, on a CE à CF, comme Ce à Cf, c'eſt-à-dire, que dans la réfraction faite entre les deux mêmes milieux, les ſécantes de complément de l'angle d'inclinaiſon & de l'angle rompu, ſont en raiſon conſtante. *Fig.* 68.

Quoique l'ouvrage de *Snellius* n'ait jamais été publié, la découverte dont nous parlons n'avoit pas laiſſé de tranſpirer avant *Deſcartes*. *Voſſius* dans ſon traité *de naturâ lucis*, nous dit que le Profeſſeur *Hortenſius* l'avoit enſeignée en public & en particulier. Il ajoute que les héritiers de ce Mathématicien donnoient facilement aux Sçavans la comuunication de ſes manuſcrits, & ayant eu lui-même entre les mains ſes trois livres d'Optique, il en fait un grand éloge. Nous en conjecturons fort avantageuſement, mais plutôt à cauſe de l'habileté reconnue de leur Auteur, que ſur le fondement de l'intelligence de *Voſſius* dans ces matieres. Car le Traité cité ci-deſſus, eſt un pitoyable ouvrage, & ne prouve que ſon ambition d'écrire ſur des matieres dans leſquelles il étoit à peine initié.

Nous tenons encore de *Voſſius* que ſon compatriote avoit recherché la ligne *réfractoire* ; il donnoit ce nom à la courbe que paroît former une ſurface plane, comme celle du fond d'un baſſin, vue par réfraction au travers de l'eau qui la couvre. Suivant le même Ecrivain, le célebre Penſionnaire de Hollande, M. *de Witt*, avoit auſſi examiné à fond cette ligne courbe, & il l'avoit trouvée d'un genre ſupérieur, pouvant être coupée en trois points par une ligne droite. Sans doute l'un & l'autre prirent pour principe, que le point vu par réfraction paroiſſoit dans la perpendiculaire ſur la ſurface réfringente. Ce problême a mérité l'attention de M. *de Mairan*, & nous a

valu un beau Mémoire ſur ce ſujet (*a*). Ce ſçavant Académicien employant le principe ci-deſſus, trouve que courbe dont nous parlons, eſt une conchoïde elliptique c'eſt-à-dire engendrée par une ellipſe, comme la conchoïde de ordinaire l'eſt par un cercle (*b*), & à cette occaſion entre dans de curieuſes & profondes recherches ſur cette claſſ de courbes. Mais revenons à *Snellius* & à la loi de la réfraction.

On veut que *Deſcartes* ait pris la premiere idée de ſa loi d la réfraction, de celle de *Snellius*, tranchons le mot entiérment, qu'il la tient de lui, & qu'il l'a ſeulement déguiſée e l'énonçant d'une autre maniere. Nous ne pouvons le diſſimuler, il y a quelque apparence de vérité dans cette accuſation Outre les faits rapportés plus haut ſur la foi de *Voſſius* M. *Huyghens* nous dit qu'il ſçavoit certainement que *Deſcartes* avoit vu les manuſcrits de *Snellius*. Il ne tire cependan point abſolument la conſéquence que *Deſcartes* leur devoi cette découverte. Il ſe contente d'en former le ſoupçon, nous ne croyons pas qu'on puiſſe légitimement aller plus loin

V I.

Tentatives pour la démonſtration de la loi de la réfraction.

Si nous ne devons pas à *Deſcartes* la découverte de la loi de la réfraction, on ne peut du moins lui conteſter le mérite d'en avoir donné la premiere explication raiſonnable, & déduite des principes d'une ſaine Phyſique. Ce fut là un des objets qu'il ſe propoſa dans ſa *Dioptrique*, qui parut en 1637. Je dis un des objets, car dans cet ouvrage, en partie Phyſique, en partie Mathématique, *Deſcartes* traite pluſieurs autres queſtions, comme la nature de la lumiere, la maniere dont ſe fait la viſion, la cauſe de l'arc-en-ciel, la forme des verres lenticulaires propres aux Téleſcopes les plus parfaits. Nous parcourrons ceux de ces objets qui nous offrent les idées les plus neuves & les plus juſtes.

Perſonne n'ignore que *Deſcartes* fait conſiſter la lumiere dans la preſſion d'un fluide ſubtil mis en action par le corps lumineux. Comme il jugeoit la propagation de la lumiere inſ-

(*a*) Mem. de l'Acad. ann. 1740.
(*b*) Voyez la note de la page 97.

tantanée, il ſuppoſoit les parties de ce fluide entiérement inflexibles, afin que la preſſion exercée par le corps lumineux ſe tranſmît à l'inſtant à l'extrêmité la plus éloignée. Les partiſans de ce Philoſophe ont rectifié en cela la doctrine de leur maître, en faiſant ce fluide élaſtique, & par-là ils l'ont rendue plus conforme à quelques phénomenes : mais ils ne l'ont point affranchie de quelques objections capitales. L'une eſt que ſi la lumiere conſiſtoit dans une preſſion ſemblable, elle ſe feroit toujours ſentir dans tous les points de ce fluide ſans que l'interpoſition d'un corps opaque s'y opposât. Car dans l'hypotheſe de *Deſcartes* il eſt néceſſaire de ſuppoſer tout le fluide, qui eſt l'élément de la lumiere, comme renfermé dans un vaſe dont les parois l'empêchent de s'échapper. Imaginons donc un fluide renfermé dans une ſphere, & qu'un corps placé à ſon centre agiſſe ſur elle par ſes vibrations, toutes les parties de ce fluide ſeront preſſées en tout ſens ; car c'eſt une propriété des fluides de tranſmettre en tout ſens l'impreſſion qu'ils reçoivent. Ainſi l'interpoſition d'un corps opaque ne nuiroit point à l'impreſſion de la lumiere ; on y verroit auſſi clair en plein minuit que lorſque le ſoleil eſt ſur l'horizon. C'eſt ainſi que le ſon conſiſtant dans une vibration ou une preſſion réciproque de toutes les parties d'un fluide élaſtique, ſe tranſmet dans tous les ſens. La lumiere ne le fait pas, d'où il faut conclure que le méchaniſme de la lumiere eſt d'une autre nature. Mais ç'en eſt aſſez ſur ce ſujet, en quelque ſorte, étranger à notre plan. C'eſt à la Phyſique à diſcuter cette grande queſtion. Revenons à la maniere dont *Deſcartes* a expliqué la loi de la réfraction, & dont il a tenté de la démontrer.

Deſcartes ne fait point conſiſter, comme *Snellius*, la loi de la réfraction dans le rapport conſtant des rayons incident & rompu, prolongés juſqu'à une parallele à l'axe de réfraction. Il l'exprime par le rapport conſtant du ſinus de l'angle d'inclinaiſon A R D, avec celui de l'angle rompu correſpondant C R B. Ainſi prenant un autre rayon incident *a* R, & ſon rayon rompu R *b*, il y a toujours même raiſon de A D à B C, que de *a d* à *b c*. Cette proportion ſe tire facilement de celle de *Snellius* (*a*), mais elle lui eſt préférable, quoi qu'en diſe *Fig.* 69.

(*a*) Car dans le triangle ROB (fig. 69.) il y a même raiſon de R B à R O, que du ſinus de l'angle R O B, ou R O G qui eſt égal à celui d'inclinaiſon, à celui de R B G

Voſſius, ou plutôt elles ont l'une & l'autre leur uſage ſelon les occurrences.

Deſcartes n'établit point cette loi par des expériences. Soit qu'il en eût faites pour s'aſſurer de la vérité, ſoit qu'il eût connoiſſance de celles de *Snellius*, il les a ſupprimées, & il nous la préſente uniquement comme le réſultat de ſes recherches ſur la nature de la réflection & de la réfraction.

Comme l'explication de la réflection ſert, ſuivant *Deſcartes*, à préparer celle de la réfraction, nous l'imiterons en commençant par-là. On peut prendre, dit-il, pour exemple de ce qui arrive à la lumiere réfléchie, ce qu'éprouve une boule parfaitement dure pouſſée contre un plan parfaitement dur & immobile. Le mouvement de cette balle eſt compoſé de deux, l'un ſuivant la perpendiculaire A F, & l'autre ſuivant la parallele A D au plan réfléchiſſant. Telle ſeroit en effet ſa direction, ſi elle étoit pouſſée à la fois dans ces deux ſens, par deux forces qui lui imprimaſſent des vîteſſes dans ces rapports. Mais cette balle étant arrivée au point de contact R, la partie de ſon mouvement A D n'éprouve aucune altération; car le plan ne lui préſente aucun obſtacle dans ce ſens; la vîteſſe A D, ou dans la direction A D, ſubſiſtera donc toute entiere, & en vertu de cette vîteſſe, la balle atteindroit la parallele H E auſſi diſtante de R D que l'eſt A F, dans le même temps qu'elle a mis à venir de A en R. D'un autre côté, dit *Deſcartes*, la balle ne communiquant rien de ſon mouvement, doit ſe mouvoir auſſi vîte qu'auparavant, & par conſéquent atteindre quelque point du cercle décrit du centre R au rayon R A, dans le même temps qu'elle a employé à parcourir la ligne A R. Elle doit donc aller au point commun de ce cercle & de la parallele H E, c'eſt-à-dire, au point E. Le reſte eſt facile, & il eſt évident que l'angle E R G = A R F, ou E R D = A R D, c'eſt-à-dire, que l'angle d'incidence eſt égal à celui de réflection.

Deſcartes auroit pu s'énoncer plus briévement & plus clairement de cette maniere. La direction A F de la balle A, à

ou B R C, qui eſt l'angle rompu. Mais ces
/6 deux mêmes lignes R● & R▪ ſont les
ſécantes des angles G R O, G R B, qui
ſont évidemment les complémens de l'angle d'incidence & de l'angle rompu. Donc R B & R O ſont réciproquement comme ces ſécantes.

laquelle

laquelle le plan s'oppoſe directement, & cette balle rejailliroit avec la même vîteſſe & dans la même direction, ſi elle n'avoit que ce mouvement. Mais elle a en même temps le mouvement AD, qui n'éprouve aucune altération : le mouvement de cette balle en R, ſera donc compoſé des deux RH, RD, égaux aux deux AD, AF, ou RF, RD; conſéquemment la direction compoſée ſera RE, & à cauſe de l'égalité des triangles RHE, RFA, l'angle ERH ſera égal à ARF. C'eſt ainſi que nous l'expoſons aujourd'hui. Mais *Deſcartes* avoit ſes raiſons de préférer la maniere que nous venons de donner, & c'étoit afin qu'elle préparât à ſon explication de la réfraction, où il faut néceſſairement prendre la choſe de ce biais.

Suppoſons maintenant avec lui, qu'au lieu d'un plan dur & impénétrable, on n'ait qu'une ſurface, comme une toile tendue qui ôteroit à la balle A la moitié de ſa vîteſſe. Le mouvement de cette balle ſera encore compoſé des deux AF, & AD, ou DR & FR, dont la derniere n'éprouvera aucune altération de la ſurface, puiſqu'elles ne ſont point oppoſées l'une à l'autre. Mais cette ſurface réduit à la moitié la vîteſſe de la balle A; c'eſt pourquoi elle ne parviendra à un point du cercle décrit du centre R au rayon RA, que dans le double du temps qu'elle a mis à aller de A en R. Or dans ce double de temps, le corps parcourra dans la direction RG une ligne double de FR. La nouvelle direction RB ſera donc telle que RH, ou BC, ſera double de AD, & cela dans toutes les inclinaiſons différentes. Ceci ſatisfait aux réfractions qui ſe font en s'éloignant de la perpendiculaire. Mais ſi au lieu de ſuppoſer que le mobile perd, en traverſant la ſurface FG, une partie de ſa vîteſſe, on ſuppoſât au contraire qu'elle fût augmentée, comme de la moitié, du tiers, &c, alors en ſuivant le même procédé, on trouvera avec *Deſcartes*, que la nouvelle direction ſera telle, que BC ſera moindre de la moitié, du tiers que AD, & par conſéquent les ſinus AD, AC de l'angle d'inclinaiſon & de l'angle rompu, ſeront toujours en même raiſon, ſçavoir l'inverſe des vîteſſes dans les différens milieux.

Avant que de raconter les démêlés qu'occaſionna cette explication, il eſt néceſſaire que nous faſſions quelques réflexions ſur ſon ſujet. Il faut d'abord bien prendre garde à la

maniere dont M. *Deſcartes* veut que ſe faſſe l'augmentation ou la diminution de la vîteſſe du mobile dans le ſecond milieu. C'eſt dans ſa direction totale RB, de ſorte qu'il ſuppoſe que ſous quelque inclinaiſon que la lumiere paſſe de l'air dans l'eau, par exemple, ſa vîteſſe ſoit augmentée de moitié. Cette premiere ſuppoſition eſt bien fondée; car ſi nous admettons que par la nature différente des milieux la lumiere ſe mouve plus ou moins facilement dans l'un que dans l'autre, la vîteſſe doit être plus grande ou moindre dans quelque direction que ce ſoit. A la vérité l'exemple dont *Deſcartes* ſe ſert pour rendre ſenſible cette altération de vîteſſe, ſçavoir celui d'une toile tendue, ne m'y paroît pas propre. Cette toile n'apporteroit de la diminution que dans la vîteſſe perpendiculaire, de ſorte qu'en ſuppoſant qu'elle la diminuât toujours, par exemple de moitié, ce ne ſeroit plus entre les ſinus des angles d'inclinaiſon & rompu que régneroit une raiſon conſtante, mais entre les tangentes de leurs complémens. Il faudroit un autre méchaniſme pour faire que cette altération dans un rapport conſtant, ſe fît uniquement ſur la direction totale. C'eſt à quoi ſatisfait parfaitement l'hypotheſe d'une attraction quelconque exercée par le milieu réfringent ſur la particule de lumiere : on démontre dans cette hypotheſe que la lumiere ſe meut plus ou moins vîte dans le ſecond milieu que dans le premier, ſuivant un rapport qui eſt toujours le même quelle que ſoit ſa nouvelle direction.

La ſeconde ſuppoſition de *Deſcartes* eſt que la vîteſſe dans le ſens parallele au plan réfringent, ne ſouffre aucune altération. Celle-ci n'eſt pas auſſi facile à admettre, ni à juſtifier que la précédente, à l'aide des ſeuls principes qu'employoit *Deſcartes*; & c'eſt-là la ſource des objections les plus fondées qu'on faſſe contre ſon explication. Cela eſt bien vrai dans la réflection, parce que le mobile ne pénetre point dans le ſecond milieu, & que ſi la direction perpendiculaire étoit détruite, il ſe mouvroit parallélement à cette ſurface avec ſa ſeule vîteſſe FR. Mais auſſi-tôt qu'il s'y plonge tant ſoit peu, ſon mouvement doit en éprouver de la réſiſtance ou une plus grande facilité dans ce ſens comme dans l'autre, & par conſéquent ſouffrir de l'altération. Cette ſuppoſition eſt néanmoins vraie *matériellement*, qu'on me permette ce terme de l'école, c'eſt-

à-dire, que quoique *Deſcartes* ne puiſſe en donner aucune bonne raiſon, elle a cependant lieu. Car ſi nous ne nous abuſons pas ſur la vérité de l'hypotheſe Newtonienne, l'attraction qu'exerce le corps réfringent ſur le rayon de lumiere, & qui eſt la cauſe de la réfraction, n'agit que perpendiculairement à la ſurface de ce corps, & par conſéquent ne change en rien la vîteſſe de ce rayon dans le ſens parallele.

Il y a encore une ſuppoſition néceſſaire dans l'explication de *Deſcartes*, pour rendre raiſon de l'approche du rayon vers la perpendiculaire, lorſqu'il paſſe d'un milieu plus rare dans un plus denſe. *Deſcartes* prétend que la lumiere pénetre plus facilement ce dernier que le premier, & il en donne une raiſon plus ingénieuſe que ſolide. Il attribue cet effet à la différente contexture des corps plus denſes, qui fait que leurs pores ſont plus dégagés d'obſtacles que ceux des corps plus rares; de ſorte, dit-il, que de même qu'une boule roulera avec plus de facilité ſur un plan bien dur & bien uni, que ſur un tapis, ainſi la lumiere ſe portera avec plus de facilité à travers les pores d'un corps dur & ſolide, qu'au travers de ceux d'un autre qui l'eſt moins. *Deſcartes* ne s'eſt encore ici trompé que dans l'explication, & non dans le fait. Les Phyſiciens modernes penſent comme lui, que la lumiere ſe meut plus rapidement dans les milieux plus denſes, mais par des raiſons différentes. C'eſt que ſon mouvement eſt accéléré à l'approche de la ſurface de ces corps par l'attraction qu'ils exercent ſur elle.

Les réfléxions que nous venons de faire montrent qu'en ne ſuivant que les principes méchaniques employés par *Deſcartes*, ſon explication étoit ſujette à de grandes difficultés. Ainſi l'on ne doit point s'étonner qu'à l'exception de ceux qui faiſoient profeſſion d'être ſes diſciples, cette explication, quoique vraie dans le fonds, ait trouvé peu d'approbateurs. Elle fut le ſujet d'une conteſtation qui faillit à devenir querelle entre lui d'un côté, & *Fermat* & *Hobbes* de l'autre. Ce dernier éleva d'abord contre les principes de *Deſcartes* quelques objections meilleures qu'on ne ſeroit fondé à les attendre d'un homme qui trouva dans la ſuite la quadrature du cercle, & qui entreprit de réformer la Géométrie juſques dans ſes axiômes. C'eſt, par exemple, avec raiſon qu'il prétendit que la réflection ne ſe faiſoit que par le reſſort du mobile, ou celui

de la ſurface qu'il choquoit; de ſorte que ſi l'on ſuppoſoit l'un & l'autre parfaitement durs, il n'y en auroit aucune. Ce ſont des vérités dont les Cartéſiens éclairés n'ont pas tardé de convenir, & ils ont fait aux ſuppoſitions de *Deſcartes* les changemens convenables, comme en donnant de l'élaſticité aux particules de la lumiere. A l'égard de la réfraction, la principale difficulté d'*Hobbes* ſe réduiſit à prétendre que l'altération de la vîteſſe du rayon de lumiere devoit ſe prendre dans la direction perpendiculaire, & non comme *Deſcartes* le prétendoit dans ſa direction totale. *Hobbes* étoit mal-fondé en cela: il écrivit diverſes lettres à *Deſcartes*, qui lui répondit conformément à ſes principes. Mais *Hobbes* accumulant toujours de nouvelles difficultés, notre Philoſophe rompit ce commerce en ne recevant plus aucune de ſes lettres.

Nous avons commencé par *Hobbes*, parce que la diſpute de *Fermat* avec *Deſcartes*, eut après la mort de celui-ci une repriſe avec ſes ſucceſſeurs, & fut ſuivie d'autres événemens que nous n'avons pas voulu ſéparer. *Fermat* étoit entré le premier dans la lice, & avoit eu par des moyens qu'il eſt inutile de rapporter, un exemplaire de la Dioptrique de *Deſcartes*, à l'inſçu de ſon Auteur, qui ne l'avoit pas encore miſe au jour. Il ſe hâta tellement de l'attaquer, qu'il n'attendit même pas qu'elle parût; ce qui choqua fort *Deſcartes*. Il compara le procédé de *Fermat* à celui d'un homme qui avoit voulu étouffer ſon fruit avant ſa naiſſance, & il en garda toujours une ſorte de reſſentiment, qu'on voit encore éclater dans des lettres écrites après leur réconciliation.

Les premieres objections de *Fermat*, il faut en convenir, ne lui font pas beaucoup d'honneur, & elles prouvent ſeulement que quoique grand Géometre, il étoit fort mauvais Phyſicien. On le voit en effet conteſter d'abord le principe de la décompoſition du mouvement; mais il abandonna enſuite cette objection, & il s'en tint à nier à *Deſcartes* que l'altération du mouvement de ſon mobile dût ſe prendre dans la direction totale; *Deſcartes*, de ſon côté, établit aſſez mal ce point fondamental de ſon explication: enfin la diſpute s'aigriſſoit, lorſque des amis communs entreprirent de les réconcilier. *Fermat* fit les premieres propoſitions de paix, & elles furent acceptées par *Deſcartes*. Ils s'écrivirent mutuellement

des lettres fort polies, mais ſans changer d'avis. *Fermat* reſta perſuadé que l'explication de *Deſcartes* étoit vicieuſe, & celui-ci, que ſon adverſaire étoit dans le cas d'un homme qui refuſe d'ouvrir les yeux à la lumiere.

Ainſi fut terminée, ou plutôt ſuſpendue, la premiere diſcuſſion qu'excita l'explication Cartéſienne de la réfraction : je dis ſuſpendue, car elle fut repriſe environ 20 ans après, entre le même M. de *Fermat* & quelques partiſans de la doctrine de notre Philoſophe. M. *Clerſelier*, célebre Cartéſien, ayant écrit à *Fermat* au ſujet de quelques-unes de ſes anciennes Lettres concernant ſa conteſtation ſur la réfraction, celui-ci ſaiſit cette occaſion de remettre dans un nouveau jour les difficultés qui l'avoient toujours aliéné de l'explication de *Deſcartes*. Il y ajoutoit celle-ci, ſçavoir, qu'on ne peut point dire que le mouvement dans le ſens parallele au plan réfringent ſoit inaltérable. La réponſe de M. *Clerſelier* eſt conforme au ſens de ſon maître, en ce qu'il maintient que le retardement ou l'accélération du mobile doit ſe prendre dans la direction totale. Mais je n'y trouve rien qui ſatisfaſſe à l'égard de la nouvelle objection. Bientôt après *Fermat* ſe jetta dans d'autres diſcuſſions, où il eut tantôt tort, tantôt raiſon, & la diſpute ſe réduiſit enfin à une vraie diſpute de mots. *Fermat* demeura plus perſuadé que jamais de l'inſuffiſance de la démonſtration cartéſienne, & pour terminer la conteſtation, il convint qu'il ne l'entendoit pas, puiſque cette démonſtration qui convainquoit ſes adverſaires, ne portoit aucune lumiere dans ſon eſprit.

Cependant il apprenoit de divers côtés que la loi de la réfraction propoſée par *Deſcartes* étoit vraie. Un Phyſicien de ce temps, nommé M. *Petit*, homme de beaucoup de mérite, l'avoit trouvé conforme à l'expérience. Cela engagea enfin *Fermat* à faire uſage d'un principe qu'il avoit communiqué depuis long-temps à M. *de la Chambre*, & qui lui paroiſſoit propre à déterminer le chemin que la lumiere doit prendre en ſe rompant. Ce principe eſt ſemblable à celui que les Anciens avoient imaginé pour démontrer l'égalité des angles d'incidence & de réflection. Ils avoient ſuppoſé que la lumiere, tant qu'elle reſte dans un même milieu, prend le chemin le plus court. *Fermat*, concevant cette loi de la nature

d'une maniere plus générale, l'étend au cas de deux milieux différens en denſité. Il ſuppoſe que la lumiere va toujours d'un point à l'autre dans le moindre temps, ce qui donne le chemin le plus court, lorſqu'elle reſte dans le même milieu ; mais ſi on ſuppoſe qu'elle paſſe d'un milieu dans un autre, elle va, ſuivant M. *de Fermat*, plus vîte dans le moins denſe, & elle tempere tellement ſon chemin, que parcourant moins d'eſpace dans le plus denſe, le temps total eſt moindre que dans tout autre chemin qu'elle auroit pris. Ce principe accordé, on voit déja que la lumiere doit ſe rompre en approchant de la perpendiculaire, quand elle paſſe dans un milieu plus denſe. Mais quelle apparence que de deux principes auſſi opposés que celui de *Deſcartes* & ce dernier, dût réſulter la même vérité ? C'eſt cependant ce qui arriva. Après avoir ſurmonté les difficultés d'un laborieux calcul, *Fermat* trouva que les ſinus des angles d'inclinaiſon & rompu, étoient dans un rapport conſtant ; ſçavoir, l'inverſe des réſiſtances dans l'un & l'autre milieu.

Un événement ſi peu attendu convainquit M. *de Fermat* que la conſéquence de *Deſcartes* étoit légitime : mais il ne le rendit pas plus docile ſur le fond de ſa démonſtration ; au contraire il la lui rendit encore plus ſuſpecte. Il déduiſoit effectivement la même vérité d'une ſuppoſition tout-à-fait vraiſemblable, & contraire à celle de ce Philoſophe. Quel motif de penſer que cette derniere étoit fauſſe, & par conſéquent que le raiſonnement auquel elle ſervoit de baſe, étoit vicieux ? Il inſtruiſit M. *de la Chambre* de ce ſuccès ineſpéré, & celui-ci en informa M. *Clerſelier* : ce diſciple de *Deſcartes* fit à cette occaſion un dernier effort pour gagner M. *de Fermat* à l'explication cartéſienne (*a*). Il lui obſerva judicieuſement que le principe ci-deſſus n'étoit point phyſique, & qu'il ne pouvoit être regardé comme cauſe d'aucun effet naturel. Il élevoit auſſi contre cette explication des ſoupçons que la ſuite a vérifiés, ſçavoir, qu'elle renfermoit deux ſuppoſitions fauſſes, qui par un heureux haſard ſe redreſſoient l'une l'autre. M. de *Fermat* qui étoit las de cette diſcuſſion, auſſitôt qu'il crut que la vérité n'y étoit plus intéreſſée, aima mieux y mettre fin

(*a*) Lett. de Deſc. T. III, l. 52, 53.

que de répliquer. Il accorda à M. *Clerſelier* tout ce qu'il demandoit (*a*), conſentant que la démonſtration de *Deſcartes* fût réputée bonne, quoiqu'elle ne l'eût jamais convaincu, & ne ſe réſervant que la ſtérile poſſeſſion de ſon problême de Géométrie. Il permet auſſi qu'on traite ſon principe d'erroné, pourvu qu'on le mette du moins à côté de ces erreurs qui ont plus de vraiſemblance que la vérité même, & il finit par lui appliquer ces vers ingénieux du *Taſſe*.

Quando ſarà il vero
Si bello che ſi poſſa a ti preporre ?

En effet, rien ne prouve mieux que M. *de Fermat* étoit fondé à tenir à ſon principe, & à être peu ſatisfait de l'explication cartéſienne de la réfraction, que les tentatives nombreuſes des Phyſiciens pour expliquer ce phénomene. Il n'en eſt preſque aucun qui dès les premiers pas ne prenne une route différente de celle de *Deſcartes*, en ſuppoſant que la lumiere pénetre plus difficilement le milieu le plus denſe. Nous ne ſçaurions avoir une occaſion plus favorable de rendre compte de ces différentes tentatives : c'eſt pourquoi nous allons les raſſembler ici ſous un même point de vue.

Parmi les Philoſophes qui ont tenté d'expliquer ou de démontrer la loi de la réfraction, les uns, à l'exemple de *Fermat*, ont recouru aux cauſes finales, les autres ont tâché de la déduire de cauſes purement phyſiques. Nous trouvons M. *Leibnitz* parmi les premiers. Ce Géometre & Métaphyſicien célebre, ſuppoſe que la lumiere va d'un point à un autre, non dans le temps le plus court, comme M. *de Fermat*, mais par le chemin le plus facile (*b*); & il meſure la facilité de ce chemin par le rapport compoſé de ſa longueur & de la réſiſtance dans le milieu où ſe meut la lumiere. Il applique enſuite ſon calcul différentiel à déterminer quel eſt le chemin le plus facile, & il trouve que les ſinus des angles que fait le rayon avec la perpendiculaire à la ſurface réfringente, ſont entr'eux réciproquement comme les réſiſtances. Il y a dans l'explication de M. *Leibnitz* ceci de remarquable, qu'il pré-

(*a*) Ibid. Lett. 54.
(*b*) *Act. Lipſ.* ann. 1682.

tend que la vîteſſe augmente à proportion de la réſiſtance; de ſorte qu'il s'accorde avec *Deſcartes* en donnant à la lumiere plus de vîteſſe dans le milieu le plus denſe. Mais ſes raiſons me paroiſſent trop ſubtiles pour être convainquantes. Quant au principe de M. *Leibnitz*, il eſt ſujet aux mêmes difficultés que celui de M. *de Fermat*; il paroît bien prouvé aujourd'hui que la lumiere ne choiſit en ſe rompant, ni le temps le plus court, ni le chemin le plus facile, comme on le verra, lorſqu'on aura fait connoître le méchaniſme de la réfraction d'après M. *Newton*. Nous paſſons aux explications purement phyſiques de cette propriété de la lumiere.

Il y a eu des Phyſiciens qui ont conſidéré un rayon de lumiere comme compoſé de petites parties oblongues, ſe mouvant parallélement à elles-mêmes, & dans une direction perpendiculaire à celle du rayon. Cette ſuppoſition étant admiſe, ils raiſonnoient ainſi. Lorſqu'un rayon de lumiere tombe obliquement ſur la ſurface plane d'un milieu plus denſe, par exemple, & plus réſiſtant, le bout d'une petite particule oblongue de cette lumiere, qui arrive le premier à cette ſurface, commence à éprouver une réſiſtance, tandis que l'autre qui eſt dans le premier milieu, n'en éprouve encore aucune. Celui-ci ira toujours avec la même vîteſſe, & décrira un petit arc, pendant que l'autre qui ſe plonge dans le ſecond milieu, décrit un arc concentrique, mais plus petit, parce que ſon mouvement eſt plus retardé. Lorſqu'enfin tous les deux ſeront plongés dans le ſecond milieu, alors le mouvement circulaire ceſſera, & cette particule de lumiere continuera à ſe mouvoir parallélement à elle-même. Or il eſt aiſé de voir que dans le cas où le ſecond milieu ſera le plus denſe, la
Fig. 70. réfraction ſe fera vers la perpendiculaire, l'arc *a b* étant moindre que A B: & que ce ſeroit le contraire, ſi le ſecond milieu étoit le plus rare. Mais, ajoute-t'on, rien de plus naturel que de meſurer le rapport des facilités des deux milieux par celui des arcs A B, *a b*. Car ce ſont ces arcs qui meſurent les chemins reſpectifs que parcourent les mobiles A & *a* en même temps dans ces deux milieux. Ainſi quelque inclinaiſon qu'on ſuppoſe au rayon, ce même rapport ſubſiſtant, on démontre facilement que les ſinus des angles d'inclinaiſon & rompu, ſont en raiſon conſtante. La premiere idée de

de cette explication eſt dûe, ſi je ne me trompe, au Pere *Maignan*; *Hobbes* l'a ſuivie dans un écrit que le P. *Merſenne* nous a tranſmis (*a*). M. *Barrow* l'a auſſi adoptée dans ſes *Leçons optiques*, & c'eſt ſon expoſition que nous avons ſuivie. Mais malgré le ſuffrage de ce Géometre célebre, nous ne craindrons point de dire que cette explication eſt peu heureuſe. Outre le peu de ſolidité de la premiere ſuppoſition ſur laquelle elle eſt fondée, rien de moins prouvé que celles qu'on emploie dans le cours du raiſonnement. M. *Rizzeti* a fait, il y a peu d'années (*a*), des efforts pour donner à cette explication quelque probabilité, & pour démontrer ces ſuppoſitions. Mais c'eſt, à mon avis, avec peu de ſuccès. Rien n'eſt moins une démonſtration que le raiſonnement auquel il donne ce titre.

Quelques autres Phyſiciens, à la tête deſquels eſt M. *David Grégori* (*b*), ont pris une voie différente. Ils imaginent que la lumiere paſſant d'un milieu dans un autre, s'y dilate ou s'y reſſerre latéralement, à proportion qu'elle y coule plus ou moins à ſon aiſe. Ils ſuppoſent enſuite dans cette dilatation ou cette contraction, un certain rapport d'où ils tirent la loi connue de la réfraction. Cette explication eſt auſſi peu ſatisfaiſante que la précédente. Car ce rapport qu'ils établiſſent, renferme lui-même ce qui eſt en queſtion. C'eſt-là le défaut de diverſes autres tentatives d'explications, comme celle d'*Hérigone*, qui ſuppoſe qu'un rayon de lumiere peſe ſur la ſurface réfringente, & tend à la pénétrer, comme feroit un poids qui tendroit à rouler ſur un plan ſemblablement incliné. Je ne dis rien d'une prétendue démonſtration donnée par un Mathématicien Anglois, nommé *Gualter Werner*, dont le Pere *Merſenne* nous rapporte l'écrit avec éloge. Ce n'eſt qu'un vrai paralogiſme & une pétition de principe.

L'idée d'*Hérigone*, quoique peu heureuſe, ſemble avoir donné à M. *Bernoulli* celle d'une autre démonſtration tirée de même d'un principe de Statique. Qu'on conçoive deux puiſſances données & inégales, qui tirent un point mobile le long d'une ligne de poſition donnée. Tel eſt, ſuivant M.

(*a*) *Syn. univ. Math.*
(*b*) *Act. Lipſ.* ann. 1726.
(*c*) *Catoptr. ac Diopt. Elem.*

Bernoulli, le cas de deux rayons de lumiere, l'un incident, l'autre rompu; ce qu'il établit par un raiſonnement, que j'avoue ne pas bien concevoir. Mais ſi l'on examine quelle poſition prendra le point mobile dont nous parlons, dans la ſuppoſition ci-deſſus, on trouvera qu'elle ſera telle, que les ſinus des angles avec la perpendiculaire à la ligne le long de laquelle ce point eſt mobile, ſoient en raiſon donnée, ſçavoir, celle des forces avec leſquelles ce point eſt tiré de part & d'autre; d'où il conclud que le même rapport conſtant doit régner dans la réfraction.

Parmi les explications méchaniques de la réfraction, je n'en connois aucune qui ſoit plus ingénieuſe que celle de M. *Huyghens* (*a*). Elle eſt une ſuite très-naturelle de ſon ſyſtême ſur la lumiere, ſyſtême le plus probable & le plus ſatisfaiſant de tous, ſi l'on n'avoit de fortes raiſons de pencher vers celui de l'émiſſion. M. *Huyghens* fait conſiſter, comme tout le monde ſçait, la lumiere dans les ondulations d'un fluide élaſtique très-ſubtil, qui ſe répandent circulairement & avec une promptitude extrême autour du centre lumineux. Mais ce n'eſt pas tout: chacune de ces ondes circulaires répandues autour du point lumineux, n'eſt que le réſultat d'une infinité d'autres ondulations particulieres, dont les centres ſont dans toutes les parties du fluide ébranlé, & qui concourent toutes à former la principale. Ainſi la direction perpendiculaire de chacune de ces ondes, dépend de la rapidité reſpective de celles qui la forment, de ſorte que ſi par quelques circonſtances les vîteſſes de celles-ci deviennent inégales, la direction de la principale changera. Or c'eſt, dit M. *Huyghens*, ce qui arrive dans la réfraction. Un rayon comme L A D, tombant obliquement ſur un milieu où la lumiere pénetre plus difficilement, par exemple, & où par conſéquent elle ſe meut plus lentement, la partie A de l'onde A D, qui eſt perpendiculaire à la direction L A, arrive la premiere; là ſon choc excite dans la matiere, dont eſt imprégné le ſecond milieu, une ondulation qui s'étend circulairement autour de A, en 1, 2, 3, 4, tandis que les points B, C, D, arrivent ſucceſſivement en *b*, *c*, *d*, & y excitent les ondulations *b* 1, *b* 2, *b* 3; *c* 1, *c* 2;

Fig. 71.

(*a*) *Tract. de lum.* c. 3.

d 1. Ainſi l'ondulation totale eſt G H, & la direction du rayon de lumiere qui lui eſt perpendiculaire, eſt A H. Mais, par la ſuppoſition, la lumiere ſe meut plus lentement, par exemple d'une moitié, dans le ſecond milieu que dans le premier. C'eſt pourquoi l'étendue de l'onde A *a*, eſt moindre de moitié que celle de l'onde B *b*, & par conſéquent A 3 eſt dans le même rapport avec D *d*. Or A 3 & D *d*, ſont reſpectivement comme les ſinus de l'angle rompu & de celui d'inclinaiſon. Donc ces ſinus ſeront entr'eux comme les facilités que la lumiere éprouve à ſe tranſmettre dans les différens milieux. Nous nous ſommes contentés ici d'une eſquiſſe de l'explication de M. *Huyghens ;* nous l'euſſions développée davantage ſans la prolixité à laquelle cela nous auroit engagés : ceux pour qui ce qu'on vient de dire ne ſuffira pas, peuvent recourir à ſon Traité *De lumine.* Nous ne croyons pas qu'on puiſſe imaginer rien de plus ſatisfaiſant dans l'hypotheſe, que la lumiere conſiſte en un fluide mis en action par le corps lumineux.

La difficulté fondée que *Fermat* faiſoit à *Deſcartes*, en ce qui concerne le mouvement de la lumiere dans le ſens parallele à la ſurface réfringente, mouvement qu'il ſuppoſoit n'être point altéré, a donné lieu à une tentative pour expliquer la réfraction, dont il nous faut dire un mot. On a conçu la réfraction de la lumiere comme ce qui arriveroit à un globe qui paſſeroit d'un milieu comme l'air, dans l'eau par exemple. Ce globe, à l'inſtant où il toucheroit la ſurface qui ſépare l'air d'avec l'eau, commenceroit à éprouver de la réſiſtance dans le ſens perpendiculaire ; mais il auroit encore toute ſa vîteſſe dans le ſens parallele. Suppoſons-le enfoncé d'un quart, par exemple, de ſon diametre : il éprouvera de la réſiſtance, & ſon mouvement ſera altéré dans les deux directions ; mais moins dans la direction parallele que dans la perpendiculaire. Il en ſera de même lorſqu'il ſera plongé de la moitié, des trois quarts de ce diametre ; ainſi pendant qu'il s'enfonce, il doit décrire une courbe convexe vers la perpendiculaire : enfin lorſqu'il ſera totalement plongé, alors éprouvant de tous les côtés une réſiſtance égale, il continuera ſa route par la tangente au dernier point de cette courbe qu'il a décrite, & il aura une direction plus éloignée de la perpendiculaire. Le contraire doit viſiblement arriver, lorſque ce globe paſſera d'un milieu plus

réſiſtant à un autre qui l'eſt moins : la réfraction ſe fera en approchant de la perpendiculaire.

Juſqu'ici cette explication procede fort bien, mais elle eſt ſujette à des difficultés qui ne permettent pas de l'admettre. Lorſqu'à l'aide d'une profonde Dynamique, on a examiné la trajectoire de ce globe pénétrant d'un milieu dans un autre, & les deux directions avec leſquelles il commence & il finit de la décrire, on a trouvé qu'elles ne ſuivent point la même loi que la lumiere en ſe rompant, quelque hypotheſe de réſiſtance que l'on prenne. D'ailleurs les mêmes milieux ſubſiſtant, la trajectoire eſt différente ſuivant la forme, la vîteſſe, & même la maſſe du corps qui les traverſe. Ainſi quand il y auroit quelque forme de corps qui rendît conſtant le rapport des ſinus des angles d'inclinaiſon & rompu, comme on ne peut ſuppoſer que fort gratuitement que toutes les particules de lumiere ſoient de cette forme, on ne pourroit guere s'aider de cette explication.

Ce n'eſt pas encore ici le lieu de développer la maniere dont M. *Newton* explique la réfraction. Comme elle tient à ſa théorie de l'attraction, nous croyons devoir ne l'expoſer qu'après avoir donné connoiſſance des faits qui établiſſent cette théorie. Ainſi nous renvoyons nos lecteurs au Livre où nous expoſerons les découvertes mémorables de ce grand homme ſur la lumiere. Nous renvoyons auſſi juſque-là à parler d'une ſorte de paradoxe auquel cette explication comparée avec celle de *Fermat*, donne naiſſance. Nous nous bornons à remarquer ici d'avance que M. *de Maupertuis* l'a fait diſparoître par la découverte d'une nouvelle loi de la nature, très-belle & très-étendue.

VII.

Découvertes dioptriques de Deſcartes.

La diſcuſſion où l'on vient d'entrer à l'occaſion des premiers pas de *Deſcartes* dans ſa *Dioptrique*, nous a fait perdre le fil de notre hiſtoire. Nous allons le reprendre en rendant compte de quelques vues nouvelles de ce Philoſophe pour perfectionner cette partie de l'Optique. Quoiqu'elles n'aient point eu dans la pratique le ſuccès que s'en promettoit leur Auteur, elles revendiquent ici une place, du moins à titre de découvertes dans la théorie.

Les lentilles ſphériques de verre ne réuniſſent pas tous les rayons paralleles à leur axe en un même point. Dans les déterminations qu'on a données ci-deſſus des foyers de ces verres, il n'a été queſtion que des rayons infiniment voiſins de l'axe ; car à meſure qu'ils s'en écartent, leur rencontre avec cet axe ſe fait dans un point plus proche que le foyer. A la vérité cette différence eſt peu ſenſible, tant que la ſurface ſphérique qui les reçoit, n'eſt qu'une fort petite portion de ſphere ; mais enfin elle eſt réelle, & delà il ſuit qu'une lentille ſphérique ne peint pas à ſon foyer une image parfaitement diſtincte.

Ce défaut des verres ſphériques eſt probablement ce qui inſpira à *Deſcartes* la premiere idée de rechercher s'il n'y avoit pas quelque ſurface tellement conformée que les rayons paralles s'y réuniſſent préciſément dans un même point. D'ailleurs cette recherche, à la conſidérer du côté purement théorique, ne pouvoit manquer d'avoir des attraits pour un Géometre. Auſſi avoit-elle déja excité les efforts de *Kepler*, qui par analogie avoit conjecturé que les ſections coniques pouvoient ſatisfaire au problême.

Cette conjecture de *Kepler* ſe tourna en réalité entre les mains de M. *Deſcartes* : il démontra que ſi dans une ellipſe, comme A D H D, la diſtance des foyers *f* F & le grand axe, ſont comme les ſinus des angles d'inclinaiſon & rompu dans les milieux entre leſquels ſe fait la réfraction, par exemple comme 2 à 3 ſi c'eſt de l'air & du verre, le rayon E D parallele à l'axe rencontrant le ſphéroïde de verre D B, ſe rompra & ira concourir au foyer F. Au contraire, ſi l'eſpace A H B eſt rempli du milieu le plus rare, comme l'air, le rayon G D rencontrant la ſurface concave, s'y rompra comme s'il venoit du point F. Ainſi, ſi dans le premier cas on décrit du centre F un arc de cercle D I, & qu'on imagine une lentille dont la coupe ſoit D A I K, elle réunira à ſon foyer F, tous les rayons paralleles à ſon axe. Dans le ſecond cas, il faudra que l'arc de cercle ſoit extérieur, & on en aura une qui rendra tous les rayons paralleles à ſon axe & tombans ſur ſa concavité, divergens comme du point F, ou au contraire qui rendra paralleles tous les rayons convergens vers F & tombant ſur ſa convexité. L'hyperbole jouit de la même propriété, s'il y a entre ſon axe & la diſtance de ſes foyers le rapport

Fig. 72.

ci-deſſus. Le rayon paſſant parallélement à l'axe de l'une des hyperboles où nous ſuppoſons le milieu le plus denſe, ſe rompra & concourra au foyer de l'oppoſée ; & l'on pourra de même former des lentilles hyperboliques convexes ou concaves, qui rendront convergens les rayons paralleles, ou paralleles les rayons convergens vers un point donné.

Ce problême nous mene naturellement à un autre plus général, dans lequel il s'agit de déterminer la forme d'une ſurface telle que les rayons partis d'un point donné, ſoient rendus convergens vers un autre point donné, ou divergens, comme s'ils en venoient. *Deſcartes* le réſolut encore : mais content dans ſa *Dioptrique* de conſidérer les cas qui peuvent être le plus d'uſage, & les ſurfaces les plus faciles à décrire, il en renvoie ſa ſolution à la *Géométrie*. Il y démontre que ſi le point A eſt celui d'où partent les rayons de lumiere, B celui auquel ils ſe doivent réunir, & que le point S ſoit pris pour le ſommet de la ſurface ou de la courbe génératrice qu'on cherche, elle ſera telle que tirant à un point quelconque G, les lignes AG, GB, l'excès de AG ſur AS, ſera à celui de
Fig. 73. BS ſur BG, en raiſon donnée, ſçavoir, celle de la réfraction entre les milieux A & B (*a*). Cette eſpece de courbe que nous venons de décrire, eſt celle que M. *Deſcartes* nomme la premiere de ſes ovales. Que ſi, au lieu de ſuppoſer le ſommet S de la courbe entre A & B, on le ſuppoſoit au-delà, alors naîtroient différentes autres courbes qui conſtituent les autres eſpeces d'ovales que M. *Deſcartes* conſidere dans ſa Géométrie, & qui ſervent à renvoyer diverſement les rayons, ſoit par réfraction, ſoit par réflection, de ſorte que ceux qui partent d'un point, ou qui y convergent, ſoient renvoyés vers

(*a*) Voici la démonſtration de cette belle propriété. Suppoſons un point *g* infiniment proche de G, & les lignes A*g*, B*g*, avec les arcs de cercle G*e*, *gf*, décrits des points B & A, comme centres, de ſorte que *ge* eſt la différence de GB, *g*B, & G*f* celle de GA, *g*A. Le petit côté curviligne G*g* prolongé, eſt la tangente à la courbe, & ſa perpendiculaire CD repréſente l'axe de réfraction. Maintenant puiſque partout la différence de GA & AS, eſt à celle de GB & BS en même raiſon, il ſuit que les différences des lignes infiniment proches GA, A*g*, & GB, B*g*, c'eſt-à-dire, G*f*, *ge*, ſeront en même raiſon ; mais il eſt viſible que les angles *fg*G, *g*G*e*, ſont reſpectivement égaux aux angles AGC, BGD, qui ſont l'angle d'inclinaiſon & l'angle rompu. Donc G*f* & *ge*, qui ſont les ſinus des angles *fg*G & *g*G*e*, étant en raiſon conſtante, ſçavoir celle qui regle la réfraction entre les milieux A & B, il ſuit que les ſinus des angles AGC, & BGD ſont dans cette même raiſon, & par conſéquent GB eſt la vraie poſition du rayon rompu. Donc, &c.

un autre, ou rendus divergens, comme s'ils en venoient. Il ſeroit exceſſivement long de parcourir tous les cas qui naiſſent des différentes poſitions reſpectives des points donnés S, A, G. Mais ceci mérite d'être obſervé, c'eſt que ces courbes ſe transforment en ſections coniques ſuivant les circonſtances. Si, par exemple, on ſuppoſe dans la premiere eſpece le point A infiniment éloigné, l'ovale devient l'ellipſe ordinaire, ayant entre ſon grand axe & la diſtance de ſes foyers la raiſon de la réfraction : ce qui nous apprendroit, ſi nous ne le ſçavions déja, que la figure elliptique ayant les conditions ci-deſſus, renverroit vers un de ſes foyers les rayons paralleles à ſon axe. Si au contraire, on ſuppoſoit le point B infiniment éloigné, la courbe deviendroit une hyperbole qui renverroit parallélement les rayons partis du point A. Les autres propriétés des ſections coniques en ce qui concerne la réflection de la lumiere, ne ſont pareillement que de ſimples corollaires du problême général de M. *Deſcartes*. Il n'y a qu'à ſuppoſer les différences des lignes tirées des points A & B, aux points G, en raiſon d'égalité, les réfractions ſe changeront en réflections à angles égaux à ceux d'incidence, & l'on aura ſuivant la poſition des points A, B, S, une parabole, une ellipſe ou hyperbole. Cette théorie dans l'expoſition de laquelle M. *Deſcartes* n'a pas mis les développemens néceſſaires pour tous les Lecteurs, a été depuis plus clairement expoſée par M. *Huyghens* dans ſon Traité *de lumine*. On doit recourir à cet ouvrage, ou bien au ſçavant Commentaire du P. *Rabuel* ſur la Géometrie de *Deſcartes*.

Les propriétés que nous venons de remarquer avec M. *Deſcartes* dans les verres elliptiques & hyperboliques, le conduiſirent à penſer qu'ils ne pouvoient manquer d'être d'une grande utilité pour perfectionner les inſtrumens dioptriques. En effet, puiſque des verres de cette forme réuniſſent les rayons paralleles, à un ſeul point mathématique, ce que ne font point les verres ſphériques, il ſemble tout-à-fait naturel d'en conclure que les images des objets éloignés ſeront incomparablement plus diſtinctes. *Deſcartes* conſeille donc de donner aux verres de Téleſcopes une courbure elliptique ou hyperbolique, & en particulier la derniere qu'il jugeoit préférable. Il propoſe pour cet effet à la fin de ſa Dioptrique

diverſes machines. Ses Lettres nous apprennent auſſi qu'il ſe donna de grands mouvemens pour y réuſſir. Etant à Paris en 1628. il engagea un fabricateur d'inſtrumens mathématiques, nommé *Ferrier*, à entrer dans ſes vues, & il lui écrivit enſuite de ſa retraite diverſes Lettres pleines d'inſtructions pour le guider. Cet Artiſte vint effectivement à bout, dit *Deſcartes*, de tailler un aſſez bon verre hyperbolique convexe, mais il ne put réuſſir au concave, & s'étant dégoûté de ce travail difficile, cette entrepriſe n'eut pas d'autre ſuite. Les promeſſes de *Deſcartes* qui n'alloient pas moins qu'à découvrir dans les aſtres les plus petits objets, & l'inſtigation de M. *Huyghens de Zulichem*, le pere du célebre M. *Huyghens*, avec qui il étoit lié d'amitié, porterent auſſi quelques Artiſtes Hollandois à faire des efforts pour mettre ſes machines à exécution (*a*); mais les difficultés les rebuterent probablement, & leur firent abandonner ce travail: nous ne voyons pas qu'il ſoit venu delà à *Deſcartes* aucun bon verre hyperbolique. Depuis ce temps, quantité d'autres Mathématiciens ou Artiſtes ont propoſé de nouvelles inventions pour le même ſujet. M. *Wren* entr'autres en a propoſé une (*b*), qui eſt fondée ſur une nouvelle propriété de l'hyperbole, & qui me paroît être une de celles dont on pourroit le plus légitimement attendre du ſuccès. On trouve auſſi dans les Mémoires de l'Académie de Berlin (*c*) la deſcription d'une machine inventée pour cet effet par M. *Hertelius*. Cependant, nonobſtant tous ces efforts, les verres hyperboliques ſont encore des êtres imaginaires, & ceux qui connoiſſent la maniere dont on travaille les verres lenticulaires, n'en ſeront point ſurpris. On a vu, à la vérité, quelquefois annoncer dans des Journaux, qu'on étoit enfin parvenu à faire des verres de cette forme. On lit dans les *Tranſactions Philoſophiques* (*d*) qu'un M. *du Son* avoit fait de bons verres paraboliques, (on a apparemment voulu dire hyperboliques; car des verres paraboliques ne rempliroient point l'objet qu'on ſe propoſe;) mais ces belles promeſſes ſe ſont réduites à cette annonce. Au reſte, on ſe ſeroit épargné bien des peines, ſi l'on eût fait une réflexion qui ſe préſente aſſez naturellement, c'eſt que ſi

(*a*) Ibid. T. II, Lett. 81, 82, 85, 86, 90.
(*b*) *Tranſ. Phil.* ann. 1668, 1669.
(*c*) T. III. ad ann. 1710.
(*d*) Ann. 1665.

un

un verre de courbure elliptique ou hyperbolique réunit plus exactement qu'un ſphérique tous les rayons paralleles à ſon axe, il lui ſera fort inférieur en ce qui concerne les rayons qui forment avec cet axe quelque angle ſenſible. Car la courbure ſphérique préſente de tous les côtés une figure uniforme, ce que ne fait point la courbure elliptique ou hyperbolique. C'eſt pourquoi ces dernieres réuniront moins exactement les rayons venans des parties latérales de l'objet. Enfin ce qui ne permet plus aujourd'hui de s'attacher à faire des verres de cette forme, c'eſt la découverte de la différente réfrangibilité de la lumiere. C'eſt de cette différente réfrangibilité que naît le principal obſtacle à la diſtinction de l'image; & l'aberration qu'elle cauſe eſt incomparablement plus grande que celle qui vient de la forme ſphérique du verre. Quand on corrigeroit cette derniere par la figure hyperbolique, la premiere ne ſubſiſteroit pas moins, & la diſtinction ne ſeroit pas plus grande. Il n'eſt aujourd'hui aucune perſonne inſtruite, qui ajoute foi aux verres hyperboliques, & il n'y a plus que quelques Artiſtes charlatans qui, pour rehauſſer leur ouvrage, diſent avoir le ſecret de les travailler.

VIII.

Découvertes de Deſcartes ſur l'Arc-en-Ciel.

Nous devons enfin à M. *Deſcartes* d'avoir perfectionné l'explication de l'Arc-en-Ciel qu'avoit autrefois donné *Antonio de Dominis*. On a vu vers la fin du volume précédent que ce Phyſicien Italien, guidé par un heureux haſard plutôt que par ſa ſagacité, avoit rencontré le vrai principe de cette explication : mais il avoit encore laiſſé bien des choſes à faire pour la rendre complette. En premier lieu, il avoit totalement manqué celle de l'arc-en-ciel extérieur. En ſecond lieu, il reſtoit à rendre raiſon pourquoi ces arcs lumineux ne paroiſſent que d'une certaine grandeur, l'inférieur de 42°. environ de rayon, & l'extérieur de 54. Il falloit enfin expliquer d'où viennent les couleurs qu'ils nous préſentent, & leur arrangement. De ces trois choſes, *Deſcartes* en découvrit deux. La troiſieme tenoit à la différente réfrangibilité de la lumiere, & étoit réſervée à M. *Newton*.

L'arc-en-ciel intérieur ou principal, eſt formé, comme

nous l'avons dit en parlant d'*Antoine de Dominis*, par une réflection unique du rayon ſolaire contre la partie poſtérieure des gouttes d'eau ou de vapeurs, réflection précédée & ſuivie d'une réfraction à l'entrée & à la ſortie de cette goutte. C'étoit-là que s'étoit arrêté l'Auteur Italien, qui avoit cru pouvoir expliquer de même l'arc-en-ciel extérieur, en changeant ſeulement quelques circonſtances. *Deſcartes* plus clairvoyant apperçut & s'aſſura par l'expérience (*a*), que l'arc-en-ciel extérieur
Fig. 73. eſt produit par deux réflections dans l'intérieur des gouttes de vapeurs, comme l'on voit dans la figure en B. Le rayon de lumiere parti du ſoleil, entre par la partie inférieure de la goutte, & y ſouffre une réfraction; il ſe réfléchit deux fois contre ſa ſurface, & il ſort enfin en ſouffrant une ſeconde réfraction qui le renvoie à un point de l'axe tiré du ſoleil par l'œil du ſpectateur. Telle eſt la trace de chaque rayon de lumiere qui forme un point de la ſeconde iris.

Mais pourquoi n'y a-t'il que les rayons comme AO & BO, inclinés à cet axe, l'un de 42°, l'autre de 54, qui excitent dans l'œil du ſpectateur une ſenſation de lumiere: car il eſt évident qu'il n'y a point de goutte, ſoit inférieure à A, ſoit entre A & B, ſoit enfin au deſſus de B, qui n'envoie auſſi à l'œil quelque rayon de lumiere. Cependant on n'apperçoit de l'éclat qu'en A & en B: en voici la raiſon d'après M. *Deſcartes*. Il ne ſuffit pas qu'un rayon de lumiere parvienne à nos yeux pour y exciter quelque ſenſation; il faut pour cela qu'il ait une certaine denſité, proportionnée à la ſenſibilité de notre organe: or de tous les faiſceaux de rayons ſolaires qui tombent parallélement ſur une goutte de vapeurs, M. *Deſcartes* trouve par le calcul qu'il n'y en a qu'un ſeul, ſçavoir celui qui eſt éloigné du rayon central entre les 85 & 86 centiemes du rayon du globule, qui après la réfraction & la réflection qu'il éprouve, ſoit encore compoſé de rayons paralleles. Il n'y a donc que ce faiſceau de lumiere qui ſoit capable d'exciter quelque ſenſation ſur un œil éloigné. Or celui-ci forme avec l'axe tiré du ſoleil au point diamétralement oppoſé, un angle de 41°, 30′, en ſuppoſant la raiſon du ſinus d'incidence à celui de réfraction dans l'eau de pluie, celle de 257 à 180. On ne doit donc voir la bande lumineuſe du pre-

(*a*) *Meteor.* Diſc. 8.

mier arc-en-ciel qu'à une diſtance d'environ 41° 30′ du point diamétralement oppoſé au ſoleil. M. *Deſcartes* démontre par un procédé ſemblable que de tous les petits faiſceaux de rayons qui tombent ſur les mêmes globules, & qui ſortent après deux réflections, il n'y en a qu'un dont les rayons compoſans conſervent leur paralléliſme, & qu'il fait, avec le même axe que ci-deſſus, un angle de 51°, 57′. Ainſi la bande lumincuſe ne peut paroître au même œil qu'à 52° environ du point oppoſé au ſoleil. L'intervalle entre la goutte A & la goutte B n'en peut fournir aucune dont un faiſceau parallele puiſſe parvenir au même œil. Delà l'interruption de la lumiere entre les deux iris.

Il reſte à rendre raiſon des couleurs qui parent ces deux arcs lumineux. L'explication complette de ce phénomene tient, nous l'avons déja dit, à la théorie Newtonienne des couleurs. *Deſcartes* néanmoins en rend une raiſon à certains égards ſatisfaiſante, en regardant la petite partie du globule par où ſortent les rayons du faiſceau parallele, comme un petit priſme qui jette, comme on ſçait, des rayons colorés; la ſituation différente de ces petits priſmes à l'égard de l'œil du ſpectateur, fait que les couleurs paroiſſent dans un ordre inverſe dans les deux arcs. Nous n'en dirons pas davantage maintenant; ce qui reſte encore ici à deſirer ſur ce ſujet, nous le réſervons au Livre où nous devons faire connoître les belles découvertes de M. *Newton* ſur la nature des couleurs. Nous y rendrons auſſi compte des ingénieuſes ſpéculations de M. *Hallei* ſur les arcs-en-ciel de différens ordres.

Fin du Livre IIIe de la IVe Partie.

HISTOIRE
DES
MATHÉMATIQUES.

QUATRIEME PARTIE,

Qui contient leurs progrès durant le dix-ſeptieme ſiecle.

LIVRE QUATRIEME.

Hiſtoire & progrès de l'Aſtronomie, depuis le commencement juſques vers la fin du dix-ſeptieme ſiecle.

SOMMAIRE.

I. *L'Aſtronomie eſt cultivée au commencement de ce ſiecle par Kepler. Vie abrégée de cet Aſtronome. Il découvre la vraie forme des orbites des Planetes, & les loix qu'elles ſuivent dans leurs mouvemens. Diverſes conjectures heureuſes de Kepler. Idée abrégée de ſes inventions.* II. *Des étoiles nouvelles qui paroiſſent en 1600 & 1604. Autres phénomenes ſemblables obſervés depuis.* III. *De Galilée. Ses découvertes aſtronomiques dans la Lune & les fixes. Celle des Satellites de Jupiter, & des taches du Soleil. Conſéquences qu'il en tire.* IV. *Des Aſtro-*

nomes qui disputent à Galilée l'honneur de ces découvertes ; de Jean Fabricius. De Scheiner, théorie des taches du Soleil expliquée. De Marius. V. *Des travaux de divers Astronomes pour la mesure de la terre dans cette premiere partie du dix-septieme siecle. De la mesure de Snellius, & de sa méthode ; de celles de Blaeu, de Norwood. De celle des PP. Riccioli & Grimaldi.* VI. *Observation de Mercure sous le Soleil, faite en 1631, & par qui. Utilité qu'on en a tirée. Autres observations semblables faites depuis. Venus observée de même sous le Soleil en 1639. De l'Astronome Horoccius, Auteur de cette observation. Avantage qu'on attend de l'observation semblable qui aura lieu en 1761.* VII. *Systême Physico-Astronomique de Descartes. Difficultés auxquelles il est sujet.* VIII. *De quelques Astronomes dont on n'a point parlé. Idée de leurs travaux.*

I.

Découvertes Astronomiques de Kepler.

Les découvertes dont l'immortel *Kepler* enrichit l'Astronomie au commencement de ce siecle, forment une des époques les plus mémorables de l'histoire de cette Science. Si *Copernic*, secouant le joug d'un ancien préjugé, sçut démêler le vrai arrangement des corps célestes ; si *Tycho-Brahé* perfectionna l'Astronomie pratique, accumula des observations sans nombre, rectifia en divers points les idées de ses prédécesseurs, il étoit réservé à *Kepler* de reconnoître la vraie marche des Planetes, la forme des orbites qu'elles parcourent, & les loix suivant lesquelles elles s'y meuvent. Nous choisissons ici pour caractériser cet illustre Astronome, quelques-unes de ses découvertes qui ont le plus de célébrité. Car on pourroit former une ample énumération des choses que lui doit l'Astronomie. Nous ne pouvons que faire une chose agréable à nos lecteurs, en leur apprenant quelques traits de la vie de cet homme célebre.

Kepler naquit en 1571, (le 27 Décembre) à Viel dans le Duché de Vittemberg, de parens nobles, mais réduits par le service & la mauvaise conduite, à une sorte d'indigence. L'ardeur de s'instruire lui en fit trouver les moyens, & il parvint enfin à prendre des grades dans l'Université de Tubinge, en 1589 & 1591. *Kepler* ne se destinoit point encore aux Mathé-

matiques : plein d'ambition & d'ardeur pour la gloire, il ne les regardoit point alors comme capables de ſatisfaire ſes vues. Cependant il les avoit étudiées avec ſuccès ſous l'Aſtronome *Mæſtlin*. La Chaire de Mathématiques de Gratz étant devenue vacante par la mort de *Stadius*, le Duc de Vittemberg la procura à *Kepler*, qui ne l'accepta que pour ne point indiſpoſer contre lui ſon Souverain & ſon protecteur. Ce fut ſeulement alors que les exhortations de *Mæſtlin*, qui voyoit dans lui un génie vif & propre aux plus grandes découvertes, le gagnerent à l'Aſtronomie. Il commença à la cultiver avec goût & avec ardeur, & il publia en 1593 ſon *Myſterium Coſmographicum*. Au travers des myſtérieuſes analogies des nombres & des figures, que *Kepler* y employoit pour déterminer les rapports des diſtances des Planetes, *Tycho* démêla le génie du jeune Auteur, & le jugea digne d'être remis dans la vraie route. Il l'exhorta à obſerver, conſeil que ſuivit *Kepler*, mais qui ne le guérit pas entiérement de ſon foible pour ces chimeres Pythagoriciennes. Divers endroits de ſon *Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ*, & ſon *Harmonia Mundi*, ſont des preuves ſubſiſtantes de ce foible, qu'il allia le plus ſouvent avec les idées les plus juſtes & les plus ſublimes.

Kepler alla voir, en 1598, *Tycho* retiré à Prague, & cet Aſtronome lui procura le titre de Mathématicien Impérial, avec des appointemens qui lui furent preſque toujours aſſez mal payés. Ce titre ne lui ſuffiſant pas pour vivre, il demanda & il obtint en 1613 la Chaire de Lintz, qu'il garda juſqu'en 1626, qu'il paſſa à celle de Sagan, & delà à celle de Roſtock; enfin étant allé à la Diete de Ratiſbonne pour y ſolliciter le paiement des arrérages de ſes penſions, il y mourut le 5 Novembre 1631. On lui doit un grand nombre d'ouvrages, dont quelques-uns nous ont déja occupés. Nous allons en analyſer quelques autres dans cet article, & l'on en trouvera l'énumération dans la note ſuivante (*a*). Un ſçavant Allemand (M. *Gottlieb Hanſch*) qui a donné en 1718 un Recueil de Lettres de

(*a*) *Prodromus diſſ. Coſmographicarum*, &c. Tubingæ, 1596. in-4°. *De fundam. Aſtrologiæ certioribus, diſſertatiuncula*. Prag. 1602. in-4°. *Paralipomena ad Vitellionem, ſeu Aſtron. pars Optica*. Francof. 1604. in-4°. *Epiſt. ad rerum cel. amat. de ſolis deliquio anni 1605*. Prag. 1605. *De ſtellâ novâ in pede ſerpentarii*, &c. *Cui acceſſit narratio de ſtellâ incognitâ cygni*. Prag. 1606. in-4°. *Mercurius in ſole*, &c. Lipſ. 1609. *Aſtronomia nova, ſeu Phyſica celeſtis de motibus ſtellæ martis*, &c. Prag. 1609. in-

Kepler, nous promettoit en 1714 une édition complette de ſes Œuvres en vingt-deux volumes in-folio. (*a*) Quelque eſtime que nous ayons pour cet Aſtronome célebre, nous croyons qu'une pareille collection réuſſiroit mal aujourd'hui. Le nom de *Kepler* vivra ſans doute tant qu'on cultivera l'Aſtronomie : mais ſes écrits trop mal digérés, trop remplis d'idées hazardées & qui ont beſoin de l'indulgence des lecteurs, malgré les excellentes découvertes qui y ſont éparſes, ne ſçauroient ſe réimprimer dans un ſiecle tel que celui-ci. Quel avantage pourroit-on concevoir à nous remettre ſous les yeux ſes ſçavans délires ſur l'harmonie du monde, &c? On eût applaudi vers la fin du ſiecle paſſé à une édition de ces Œuvres faite par un homme de goût, capable d'apprécier ce qui méritoit d'être préſenté au public de ce qui devoit être ſupprimé. Mais il ſeroit aujourd'hui trop tard pour entreprendre même cette collection.

Les deux découvertes qui ont le plus contribué à faire un grand nom à *Kepler*, ſont celles de la forme des orbites des Planetes, & des deux loix de leurs mouvemens. Nous l'allons ſuivre dans ſes *Commentaires ſur les mouvemens de Mars*, où il a pris ſoin de nous inſtruire des eſſais & des conjectures qui le conduiſirent enfin à la premiere de ces mémorables découvertes.

Ce fut une eſpece de hazard qui excita les recherches de *Kepler* ſur la théorie de Mars ; & ce fut un heureux hazard, parce que cette planete étant une des plus excentriques, elle étoit une de celle qui pouvoit le conduire plus facilement à la vraie cauſe de ſes inégalités. Il étoit allé à Prague, trouver *Tycho* qui, à l'occaſion d'une oppoſition prochaine de Mars, travailloit à mettre en état ſa théorie ſur cette planete. *Tycho* étoit perſuadé avec *Copernic*, que c'étoit par le lieu moyen du ſoleil que devoient paſſer les apſides des orbites des Planetes,

fol. *Dioptrica*. Prag. 1611. in-4°. *Ephem. novæ motuum cœleſtium ab anno 1617 ad 1636, partes III.* Linzii ac Sag. in-4°. *Epitome Aſtron. Copern.* 1618 & 1622. in-8°. Linz. *Harmonices, L. V.* Linc. 1619. in-fol. *De Cometis, lib. III.* Aug. Vind. 1619. in-4°. *Hyperaſpiſtes Tychonis contra Scip. Claramontium.* Francof. 1625. in-4°. *Tab. Rudolphinæ, &c.* Ulm. 1627. in-fol. *Reſp. ad Epiſt. Jac. Bartchii, &c.* Sag. 1629. in-4°. *Admon. ad Aſtron. de miris ac raris A. 1631 phenomenis, nempe Mercur. ac Ven. in ſolem incurſu.* Lipſ. 1629. in-4°. *Somnium Kepleri, ſeu de Aſtron. lunari, &c. Opus poſthumum.* Francof. 1634. in-4°. *Epiſt. Keplerianæ quæd. cum reſponſis.* Lipſ. 1718. in-fol. *Ster. dol.* Linc. 1605. in-fol.

(*a*) *Act. Lipſ.* ann. 1714.

& à l'aide d'un grand échaffaudage de cercles, il réuſſiſſoit aſſez bien à repréſenter le mouvement de Mars en longitude: mais ſon hypotheſe manquoit totalement en ce qui concerne la latitude. *Kepler*, qui avoit déja des idées phyſiques qui lui perſuadoient que le ſoleil étoit, non un centre ſans action, mais le modérateur du mouvement des planetes, ſuſpecta d'abord l'hypotheſe de *Tycho* de fauſſeté à cet égard. D'idées en idées, (car nous ſerions trop longs ſi nous entreprenions d'en décrire ici la ſucceſſion) il vint enfin à reconnoître qu'il étoit néceſſaire de partager en deux également l'excentricité. Il fut probablement aidé par l'obſervation que *Ptolémée* avoit déja faite, ſçavoir que la premiere inégalité des Planetes ſupérieures étoit en partie réelle, en partie optique, raiſon qui lui avoit fait établir le centre de leur mouvement égal, hors de celui de leur excentrique. Les obſervations modernes avoient auſſi convaincu de cette néceſſité, & il n'y avoit que la terre qu'on eût exceptée de cette loi commune; mais *Kepler* ſe conduiſant par analogie, jugea qu'on devoit l'appliquer de même à la terre, qui eſt ſemblable aux autres Planetes. Il montra qu'il falloit rapprocher le centre de l'orbite de la moitié de l'excentricité qu'on lui donnoit autrefois; & qu'en ſuppoſant le mouvement égal ſe faire autour du point également éloigné du centre de l'autre côté, on ſatisfaiſoit beaucoup mieux, que par l'excentrique ſimple à l'inégalité obſervée des mouvemens ſolaires. C'eſt-là ce qu'on appelle la biſſection de l'excentricité; premier pas de *Kepler* vers ſa grande découverte. Entr'autres preuves de la néceſſité de partager ainſi l'excentricité, & de faire le mouvement du ſoleil ou plutôt de la terre, réellement inégal, il donnoit celle-ci. Si le ſoleil rouloit uniformément autour du centre de ſon orbite, la vîteſſe de ſon mouvement ſuivroit exactement le rapport de ſes diametres apparens; ce qui n'eſt cependant pas. En effet, le diametre du ſoleil dans ſon apogée, n'eſt que d'un 30e environ moindre que dans ſon périgée; ce qui déſigne que ſa diſtance, dans le premier de ces points, eſt plus grande d'environ un 30e que dans le ſecond. Mais ſon mouvement eſt dans l'apogée d'un quinzieme plus lent: ſi donc on attribue à la différence d'éloignement l'effet qu'elle doit produire, ſçavoir un trentieme de retardement, l'autre trentieme ſera

une

une retardation réelle. Or on ſatisfait à l'une & à l'autre de ces conditions en retirant le centre de l'orbite terreſtre vers le ſoleil de la moitié de l'excentricité ancienne, & en faiſant mouvoir la terre uniformément à l'égard du point oppoſé, & également éloigné de l'autre côté du centre. *Kepler* appliqua auſſi ceci au mouvement de Mars, & trouva que ſon excentricité partagée de la même maniere, repréſentoit mieux ſon mouvement que quelque hypotheſe qu'on eût encore faite. *Fig.* 74.

Cette hypotheſe eût contenté bien des Aſtronomes, & nous trouvons en effet que pluſieurs s'en ſont tenus là; mais *Kepler*, qui aſpiroit à une plus grande perfection, apperçut qu'elle ne ſatisfaiſoit pas encore entiérement aux mouvemens hors des aphélies & des périhélies. Conduit par un raiſonnement plus heureux qu'exact & concluant, il tenta de faire croître dans cette hypotheſe circulaire les ſecteurs autour du point excentrique S uniformément. Ceci l'approcha en effet beaucoup de la perfection : il trouva ſeulement à cette hypotheſe le défaut de donner les lieux calculés trop avancés dans le premier quart de cercle de l'aphélie, & trop peu dans le dernier; il trouva auſſi que hors l'aphélie & le périhélie, les diſtances calculées étoient plus grandes que les diſtances obſervées, & cela d'autant plus que la planete étoit plus voiſine des lieux moyens. Ces deux obſervations lui apprirent que l'excentrique qu'il avoit d'abord ſuppoſé, n'avoit que le défaut d'être trop renflé vers les diſtances moyennes, & que la vraie orbite rentroit au dedans en forme d'ovale, & avoit le même axe.

Mais quelle ſera l'eſpece d'ovale qu'il faudra adopter au lieu du cercle ? car on peut concevoir ſur le même axe une infinité de courbes plus applaties les unes que les autres, & décrites par certains procédés géométriques. Ceci ne fut pas une des moindres occaſions de travail pour *Kepler*. Prévenu de certain mouvement compoſé, par lequel il croyoit que cette ovale étoit décrite, il en imagina une différente de l'ellipſe ordinaire, qu'il ne ſoupçonnoit pas encore. Il croyoit Mars ſubjugué, lorſqu'il s'apperçut qu'il lui échappoit de nouveau. Les paroles de *Kepler* ſont remarquables, & méritent d'être rapportées comme décelant une imagination vive, qui en eût facilement fait un Poëte, s'il n'eût été Aſtronome. *At dùm de motibus martis in hunc modum triumpho, eique ut planè de-*

victo tabularum carceres æquationumque compedes necto, diversis nuntiatur locis, futilem victoriam, ac bellum totâ mole recrudescere; nam domi quidem captivus, ut contemptus, rupit omnia æquationum vincula, carceresque tabularum effregit. Jamque parùm obfuit quin hostis fugitivus sese cum rebellibus suis conjungeret, meque in desperationem adigeret, nisi raptim nova rationum Physicarum subsidia, fusis & palantibus veteribus, submisissem, & quà sese captivus proripuisset, vestigiis ipsius, nullâ morâ interpositâ inhæsissem, &c. En effet, pour me servir de l'expreſſion figurée de *Kepler*, il ne ceſſa point de pourſuivre ſon priſonnier échappé, qu'il ne l'eût attcint & entiérement ſoumis. Il remarqua que le défaut de ſon ovale étoit d'être trop rentrante dans le cercle, & trop applatie; il en conclut que l'ellipſe ordinaire qui tenoit un milieu entre cette ovale fictice & le cercle, étoit la véritable trace du mouvement de la planete. Son priſonnier, dit-il, content de cette capitulation, ſe rendit de bonne grace, & ne fit plus d'efforts pour s'échapper. Depuis ce temps on tient pour principe des mouvemens céleſtes, que les Planetes parcourent des orbites elliptiques, dont l'un des foyers eſt occupé par le ſoleil ou la Planete principale, & qu'elles s'y meuvent de telle maniere que les aires décrites par la ligne tirée du foyer où eſt la Planete centrale, ſont proportionnelles aux temps. Si l'orbite d'une Planete eſt repréſentée par l'ellipſe A F P G, dont A P eſt la ligne des apſides, le ſoleil S en occupe l'un des foyers, & elle s'y meut de ſorte que les ſecteurs A S T, A S *t*, A F P S ☉, ſont comme les temps employés à arriver aux lieux T, *t*, ☉. C'eſt *Fig. 75.* ſur ce principe que ſont calculées les Tables qu'emploient aujourd'hui les Aſtronomes. On a pris l'aire entiere de l'ellipſe, ou celle du cercle A D P A, pour 360°: enſuite on a ſuppoſé les ſecteurs D S A au foyer S, croître uniformément de degré en degré, c'eſt-à-dire, de 360e en 360e de l'aire entiere, & on a déterminé quel étoit l'angle T S A, qui répondoit à chacun de ces ſecteurs; ce qui a donné l'anomalie vraie répondante à chaque anomalie moyenne croiſſante de degré en degré (*a*); car il eſt évident que le ſecteur A S D réduit en degrés, re-

(*a*) Ce problême de déterminer l'anomalie vraie, la moyenne étant donnée, eſt devenu célebre parmi les Géometres, à cauſe de ſa difficulté. Kepler ne le réſolvoit qu'indirectement en prenant l'arc AD (qu'il appelle *l'anomalie de l'excentre*) plus

préſente l'anomalie moyenne, & que l'angle correſpondant AST eſt l'anomalie vraie. On a enfin ſouſtrait l'anomalie vraie de la moyenne, ou au contraire, & l'on a inſcrit la différence avec le ſigne convenable d'addition ou de ſouſtraction, à côté de l'anomalie moyenne, afin d'avoir, ſuivant la forme des Tables anciennes, l'équation, c'eſt-à-dire, la partie à ajouter ou à ſouſtraire du lieu moyen pour avoir le lieu vrai.

Telle eſt la premiere loi du mouvement des Planetes, découverte par *Kepler*; il en eſt une ſeconde qui concerne les mouvemens reſpectifs de pluſieurs Planetes qui tournent autour du même point. Celle-ci conſiſte en ce que, dans ce cas, les quarrés des temps qu'elles emploient dans leurs révolutions, ſont comme les cubes de leurs diſtances de point, ou ce qui eſt la même choſe, que ces diſtances ſont comme les quarrés des racines cubiques des temps périodiques. *Kepler* en fait la re-

ou moins grand, de ſorte qu'il en réſultât pour le ſecteur ASD la grandeur de l'anomalie moyenne donnée; enſuite il tiroit facilement delà l'anomalie vraie AST. Mais la Géométrie ayant acquis des forces, on a jugé indigne d'elle de ne réſoudre ce problême qu'indirectement: on a cherché des ſolutions directes, & divers Géometres & Aſtronomes ſe ſont exercés à en donner.

La premiere de ce genre eſt celle du Chevalier Wren, qui nous a été tranſmiſe par Wallis (*de cycl. ad fin.*) & par M. Newton (*Princ. l. 1.*). Elle eſt purement géométrique, & procede par le moyen d'une cycloïde alongée. Mais cela n'eſt ſatisfaiſant que dans la théorie; c'eſt pourquoi M. Newton la fait ſuivre auſſi-tôt d'une autre, qui conſiſte en une ſuite d'angles décroiſſans qui ſont la correction à faire à l'anomalie moyenne pour avoir la vraie.

Comme cette ſolution eſt aſſez compoſée, les DD. Keil & Grégori en ont propoſée une autre, l'un dans ſes *Lect. Aſtron.* l'autre dans ſes *Elem. Aſtron.* En voici l'eſprit. Le problême en queſtion ſe réduit, comme l'on ſçait, à retrancher d'un cercle un eſpace ASD égal à un eſpace donné par une ligne tirée d'un point S, autre que le centre. Or en employant les calculs modernes, on trouve une ſuite qui exprime la valeur du ſecteur fait au point S, & qui répond à l'ordonnée indéterminée DE. On égale cette ſuite à l'eſpace donné, & par le retour des ſuites on trouve DE exprimée par une nouvelle ſuite qui eſt très-convergente lorſque l'excentricité eſt peu conſidérable; de ſorte qu'un petit nombre de termes ſuffiſent pour avoir la valeur de DE. Cette ſolution n'a pas été inconnue à M. Newton. On la trouve dans le *Comm. Epiſt.* p. 53.

Ces ſolutions diverſes n'ont pas ſatisfait l'inquiétude des Mathématiciens. D'un côté les Aſtronomes ont cherché des approximations purement Trigonométriques. Telles ſont celles qu'ont donné M. Horrebow (Act. Lipſ. Suppl. T. VI.) & M. Caſſini (Mem. de l'Acad. 1719) D'un autre côté les Géometres ont cherché de nouvelles ſolutions géométriques ou analytiques. M. Hermann a donné (Mem. de Peterb. ann. 1726.) un Mémoire où il en propoſe deux, l'une géométrique par le moyen de la quadratrice de M. Tchirnauſen, l'autre arithmétique, qui eſt fort praticable. On a auſſi (Tranſ. Phil. ann. 1738.) un ſçavant écrit de M. Machin, qui y donne des ſuites extrêmement convergentes, d'où il dérive une méthode très-prompte & expéditive. On trouve enfin dans les Œuvres de M. Simpſon, (Eſſais on various ſubjects, p. 41) quelques nouvelles ſolutions de ce problême.

marque dans ſon *Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ* (*a*), & il la prouve d'abord par la comparaiſon des mouvemens des Planetes ſupérieures. En effet, ſi nous comparons la terre avec Saturne, nous trouvons que le temps périodique de la terre eſt à celui de Saturne, comme 1 à $29\frac{4}{5}$, dont les racines cubiques ſont 1 & $3\frac{1}{10}$; faiſons-en les quarrés, ce ſeront 1 & $9 + \frac{61}{100}$. C'eſt-là en effet le rapport de leurs diſtances au ſoleil, tiré des théories qui répondent le mieux à leur mouvement. Que ſi l'on prend plus exactement les temps périodiques de deux Planetes principales, on trouvera le rapport de leurs diſtances avec plus d'exactitude, & plus approchant de celui que donnent les obſervations des meilleurs Aſtronomes.

Ce que nous venons d'obſerver entre les Planetes principales, s'obſerve auſſi entre les quatre Satellites de Jupiter, comme le remarque *Kepler*, qui en tire une nouvelle preuve de ſa découverte. On voit enfin cette loi régner entre les cinq Satellites de Saturne. Si, comme ces deux Planetes, nous euſſions été avantagés de pluſieurs Lunes, nous aurions ſans doute le plaiſir de la voir régner entr'elles.

Si nous pouvions nous étendre ici à notre gré, nous nous livrerions volontiers à donner quelque idée de la Phyſique de *Kepler*. Car il ne ſe borna pas aux faits, il tenta auſſi d'en aſſigner les cauſes, & preſque toujours il fait marcher la Phyſique à côté de l'Aſtronomie. Mais nous ne le diſſimulerons point, cette partie des écrits de *Kepler* n'eſt pas la plus brillante, & quoiqu'elle décele l'homme de génie, elle a beaucoup beſoin de l'indulgence des lecteurs. Ceux qui voudront cependant en prendre une idée, ſans recourir à ſes ouvrages, doivent conſulter *les Elémens d'Aſtronomie* du Docteur *Gregori*, où ils en trouveront un précis très-ſuccinct & très-bien fait.

Il y a néanmoins dans la Phyſique de *Kepler* diverſes conjectures heureuſes, & tout-à-fait conformes aux découvertes modernes. On le voit, dans ſes *Commentaires ſur Mars*, ſoupçonner que les irrégularités particulieres à la Lune, ſont l'effet des actions combinées de la terre & du ſoleil ſur elle (*b*). Il y conjecture que les aphélies des Planetes ſont tantôt directes,

(*a*) *Epit. Aſtron. Cop.* p. 500, 530, 554.
(*b*) c. 37. *Epit. Aſtron. Cop.* L. IV, §. 5, l. VI.

tantôt rétrogrades, mais qu'étant plus long-temps directes que rétrogrades à chaque révolution, elles paroiſſent, après un certain nombre de révolutions, avoir avancé. Cela ſe vérifie à l'égard de la lune, & il eſt très-probable que cela arrive aux Planetes qui tournent autour du ſoleil, quoique la lenteur du mouvement de leurs apſides ne permette pas de s'en aſſurer. L'attraction univerſelle de la matiere eſt clairement énoncée dans le même ouvrage (*a*). « La gravité, dit *Kepler*, n'eſt » qu'une affection corporelle & mutuelle entre des corps ſem- » blables pour ſe réunir. Les corps graves, ajoute-t'il, ne » tendent point au centre du monde, mais à celui du corps » rond dont ils font partie; & ſi la terre n'étoit pas ronde, » les corps ne tomberoient point perpendiculairement à » ſa ſurface. Si la lune & la terre n'étoient pas retenues » dans leurs diſtances reſpectives, elles tomberoient l'une ſur » l'autre, la lune faiſant environ les $\frac{53}{54}$ du chemin, & la terre » le reſte, en les ſuppoſant également denſes. « Il penſe auſſi qu'on ne doit attribuer qu'à cette attraction de la lune, le phénomene du flux & du reflux de la mer. « L'attraction de la » lune, dit-il, s'étend juſques ſur la terre. Elle attire les eaux » de l'Océan dans la Zone torride, ſous l'endroit dont elle oc- » cupe le zénith, &c. La lune, continue-t'il, paſſant rapide- » ment le zénith, & les eaux ne la pouvant ſuivre avec la même » vîteſſe, il ſe forme un courant continuel d'Orient en Occi- » dent, qui va frapper ſans ceſſe les rivages oppoſés, & qui » ſe réfléchit ſur les côtés. Delà l'origine du courant d'air » continuel qu'éprouvent ceux qui navigent ſous la Zone tor- » ride, & la cauſe de la naiſſance ou de la deſtruction de di- » vers Bancs de ſables, ou Iſles, &c. de l'excavation du Golfe » du Méxique & de la côte orientale de l'Aſie. » Il paroît reconnoître auſſi la gravitation des Planetes vers le ſoleil (*b*); car il lui compare celle des corps peſans ſur la terre, & quoique dans ſon *Abrégé de l'Aſtronomie Copernicienne*, il ne veuille pas que l'attraction des Planetes & du ſoleil ſoit réciproque, de crainte que le ſoleil ne ſoit ébranlé de ſa place, il ne laiſſe pas de la reconnoître ailleurs. Car il prévient cette objection en diſant que la maſſe & la denſité du ſoleil ſont telles, qu'il

(*a*) *Ibid. in Introd.*
(*b*) *Epit. Aſtron. Cop.* l. v, §. 1.

n'y a aucun ſujet de craindre qu'il puiſſe être déplacé par l'action réunie de toutes les autres Planetes (*a*). *Kepler* enfin avoit conjecturé le mouvement du ſoleil autour de ſon axe, & il en avoit fait un des points fondamentaux de ſa Phyſique céleſte (*b*); chacun ſçait que ſa conjecture a été vérifiée peu de temps après par la découverte des taches du ſoleil. Il fait ici une remarque digne d'attention, ſçavoir que c'eſt à l'équateur ſolaire, ou au cercle que cet équateur prolongé marque parmi les fixes, que devroient ſe rapporter les orbites des Planetes, & non à notre écliptique : en effet, notre écliptique eſt un cercle avec lequel ces orbites n'ont aucune relation phyſique, & par cette raiſon il doit néceſſairement arriver, comme le remarque encore *Kepler* (*c*), que leur inclinaiſon à l'écliptique ſoit changeante, à moins que les nœuds de l'orbite de la terre & de celles des autres Planetes, n'ayent un mouvement préciſément égal à l'égard de l'équateur ſolaire. Or comme ce mouvement eſt effectivement inégal, ce n'eſt qu'à ſa lenteur extrême que nous devons attribuer de ne nous être point encore apperçus de cette variation.

Après tant de traits de génie, on devroit, ce ſemble, s'attendre que *Kepler* reconnût le vrai ſyſtême des Cometes, ſyſtême ſi ſatisfaiſant, & qui avoit droit de lui plaire à tant de titres. Mais les hommes les plus clairvoyans ne le ſont pas également partout, & cette vérité ſublime lui échappa. Loin de ſoupçonner que ces aſtres ſont des Planetes fort excentriques, comme les obſervations modernes ſemblent le confirmer de plus en plus, il en fait des générations nouvelles, & il les regarde comme des épaiſſemens de l'æther capables de nous renvoyer la lumiere (*d*). Il leur donne un mouvement rectiligne, & en quelque ſorte malgré les obſervations ; car elles devoient au contraire le porter à compoſer leurs trajectoires de pluſieurs portions de droites diverſement inclinées, & ſucceſſivement de plus en plus dans un même ſens; ce qui indiquoit une orbite curviligne, au lieu qu'afin de ne point abandonner ſon hypotheſe, il attribue à ces aſtres un ralentiſſement de vîteſſe à meſure qu'ils s'éloignent de leur périhélie. A l'égard

(*a*) *Comm. de Mot. Mart.* Ibid.
(*b*) *Comm. de Mot. ſtellæ Martis.* P. IV, cap. 34. & *alibi paſſim.*
(*c*) Ibid. c. 60.
(*d*) *De Com.* lib. 3.

des queues des Cometes, *Kepler* eut une opinion qui a paru probable à divers Phyſiciens modernes. Il penſa que ce pouvoit être une partie de leur athmoſphere entraînée par les rayons ſolaires, & qui nous les réfléchit. Il y a néanmoins de fortes raiſons pour rejetter ce ſentiment.

Il nous faudroit donner au ſeul *Kepler* une partie conſidérable de la place que revendiquent divers autres Aſtronomes dignes d'éloges, ſi nous entreprenions de faire connoître toutes ſes découvertes avec la même étendue que les précédentes. Nous nous bornerons par cette raiſon à une brieve énumération du reſte de ce que lui doit l'Aſtronomie : telles ſont d'abord diverſes méthodes pour la détermination des orbites des Planetes, de leurs dimenſions & de leurs poſitions ; une multitude d'obſervations qu'il fit pour ſuppléer à celles de *Tycho* ; la remarque de la forme elliptique du ſoleil & de la lune dans le voiſinage de l'horizon, remarque dont on fait ordinairement honneur au Pere *Scheiner*, mais que *Kepler* déduiſit avant lui, & *à priori*, de la théorie des réfractions (*a*). La méthode dont ſe ſervent aujourd'hui les Aſtronomes pour calculer les éclipſes de ſoleil, lui eſt encore dûe : elle conſiſte à regarder ces ſortes d'éclipſes comme des éclipſes de la terre par l'ombre de la lune, & elle a non ſeulement l'avantage d'affranchir de quantité d'embarras auxquels la méthode ancienne étoit ſujette, mais encore celui de montrer comme dans un tableau dans quelles régions de la terre une éclipſe ſera viſible, de quelle quantité elle ſera, &c. Nous lui avons déja fait honneur de quelques remarques importantes d'Aſtronomie Optique (*b*). Les Aſtronomes lui dûrent enfin les célebres Tables Rudolphines qu'il publia en 1627. Elles ſeront à jamais mémorables, comme les premieres qui ayent été calculées ſur les véritables hypotheſes des mouvemens céleſtes ; & l'induſtrie des Aſtronomes poſtérieurs n'a trouvé de changemens à y faire que dans quelques détails, comme les excentricités, les poſitions & les mouvemens des apſides, &c. L'état de l'Aſtronomie pratique au temps de *Kepler*, ne lui permettoit pas d'approcher davantage de la vérité qu'il l'a fait.

(*a*) *Aſtr. pars Opt.* p. 131.
(*b*) Liv. précéd. art. 1.

II.

Des étoiles nouvelles observées en 1600 & 1604.

Il ſeroit fort naturel de penſer que rien n'eſt moins ſujet au changement que ces régions immenſes où les étoiles fixes ſont diſperſées. Le ſpectacle qu'elles nous préſentent, eſt depuis ſi long-temps le même, qu'il eſt difficile de ſe défendre de cette opinion ; mais, comme le remarque M. *de Fontenelle*, ce ſpectacle n'eſt parfaitement le même que pour des yeux peu éclairés ou peu attentifs. Depuis qu'il y a de toutes parts des Obſervateurs qui ont les yeux tournés vers les Cieux, on trouve, pour me ſervir encore des expreſſions de cet Ecrivain célebre, qu'ils ont leur part des changemens qu'on croyoit n'être que ſublunaires.

L'apparition d'une étoile nouvelle, qui arriva en 1572 dans Caſſiopée, étoit déja un exemple mémorable qui prouvoit ce que nous venons de dire. On vit en 1604 ſe renouveller ce phénomene. Il parut tout à coup dans la conſtellation du Serpentaire, une étoile de la premiere grandeur, qui après avoir duré quelques années, a diſparu, & n'a plus été vue depuis. Ce fut le 10 Octobre de cette année que les Diſciples de *Kepler* l'apperçurent, & il eſt très-certain que quelques jours auparavant elle ne paroiſſoit point encore; car elle n'auroit pas échappé à *Kepler*, qui étoit alors occupé à ſuivre les mouvemens de Saturne, Jupiter & Mars, en conjonction tout près de cet endroit. Elle fut obſervée par divers autres Aſtronomes, comme *Juſte Byrge*, *Fabricius*, *Galilée*, qui, quoique placés à des diſtances conſidérables, lui donnerent à peu de choſe près, la même poſition entre les fixes, d'où l'on conclut que ce n'étoit point un météore ſublunaire, mais qu'il falloit la ranger au nombre des étoiles. Sa durée fut d'environ quinze mois : après s'être affoiblie par degrés, elle diſparut entiérement au commencement de l'année 1606 (*a*).

L'année 1600 nous offre un phénomene également digne de notre attention & de notre ſurpriſe. C'eſt celui d'une étoile périodique, placée dans la poitrine du Cygne, qui paroît & diſparoît ſucceſſivement. Elle n'avoit point été apperçue par *Tycho*,

(*a*) Voyez Kepler, *de ſtellâ novâ in pede Serpentarii.* 1606. in-4°.

qui

qui avoit apparemment dreſſé ſon Catalogue des étoiles de cette conſtellation, pendant le temps d'une de ſes occultations. On la remarqua, comme nous avons dit, pour la premiere fois en 1600, & *Bayer* la marqua dans ſon *Uranométrie*, ou les Cartes céleſtes qu'il publia en 1603. Elle étoit, en 1605 ou 1606, de la troiſieme grandeur; elle diminua enſuite pendant quelques années, & elle diſparut tout-à-fait. M. *Caſſini* la revit en 1655, de la même grandeur, & elle diminua par degrés juſqu'en 1662, qu'on la perdit de vue. M. *Hevelius* l'obſerva de nouveau en 1666, lorſqu'elle recommençoit à ſe montrer. De ces obſervations & des autres qu'on a faites dans la ſuite, on a conclu que cette étoile a une période d'environ quinze ans, qu'elle reſte environ dix ans apparente, & cinq ans inviſible.

Le ſecond phénomene de cette nature, (car les Cieux nous en offrent pluſieurs ſemblables,) eſt l'étoile changeante du col de la Baleine. David *Fabricius* l'avoit vue en 1596, ſans la connoître pour ce qu'elle étoit, & l'avoit enſuite perdue de vue ſans pouvoir la retrouver (*a*). *Bayer* l'apperçut vers l'an 1600, & la marqua dans ſon *Uranométrie*, comme omiſe par *Tycho*. Enfin en 1638, *Phocylide Holwarda* la vit diſparoître, & renaître neuf mois après; & pluſieurs autres à ſon exemple firent la même obſervation les années ſuivantes. Depuis ce temps on a remarqué qu'elle paroît & diſparoît tous les ans, anticipant chaque fois d'environ un mois (*b*), & que lorſqu'elle eſt dans ſon plus grand éclat elle va quelquefois, mais rarement, juſqu'à égaler celles de la ſeconde grandeur, plus ordinairement celles de la troiſieme. M. *Bouillaud* (*c*) fixe la durée de ſa période, entre ſes deux plus grandes phaſes, à 333 jours; ce qui fait une anticipation annuelle d'envion 33 jours: M. *Caſſini*, fondé ſur une plus longue ſuite d'obſervations, l'a déterminée de 35 jours & demi.

La conſtellation du Cygne ſeroit déja ſuffiſamment remarquable, en ce qu'elle contient une étoile de l'eſpece que nous venons de décrire. Mais elle l'eſt encore à un nouveau titre;

(*a*) Kepl. *Aſt. pars Optica.* p. 446.

(*b*) *J. Hevelii, hiſtoriola miræ ſtellæ in collo ceti.*

(*c*) *Ad Aſtron. monita duo. Primum de novâ ſtellâ in collo ceti. Secundum de nebuloſâ in cingulo Andromedæ ante biennium iterum ortâ.* Par. 1665.

car on y en a découvert une ſeconde en 1670. On doit, ce ſemble, cette découverte à M. *Hevelius*, & au P. *Anthelme* Chartreux & Obſervateur de Dijon. L'étoile changeante dont nous parlons, eſt ſituée dans le col près du bec. Elle diſparut la même année, & reparut en 1671, après quoi elle ſe cacha de nouveau, & l'on attendit vainement pendant pluſieurs années une nouvelle apparition. Elle a néanmoins reparu dans la ſuite, & l'on a reconnu qu'à quelques irrégularités près, ſa période eſt de treize mois. M. *Kirch* l'a fixée plus exactement à 404 jours & demi (*a*).

M. *Maraldi* a découvert en 1704 dans l'Hydre une étoile ſemblable aux précédentes (*b*). Elle avoit été vue, à la vérité, par *Hevelius* & *Montanari* en 1662 & 1672, mais ſans qu'ils euſſent voir une étoile particuliere. Ce que celle-ci a de remarquable, c'eſt que le temps de ſon apparition n'eſt guere que de quatre mois ; elle en reſte environ vingt ſans paroître, de ſorte que ſa période entiere eſt préciſément de deux ans. Elle ne ſurpaſſe pas les étoiles de la quatrieme grandeur, lorſqu'elle eſt dans ſon plus grand éclat.

La conſtellation d'Andromede a auſſi ſes ſingularités. On y obſerve une étoile nébuleuſe, d'un genre différent de celui des autres de cette eſpece, qu'on ſçait n'être que des amas de petites étoiles très-voiſines. Celle-ci reſſemble à un petit nuage apparent à la vue ſimple, & au milieu duquel on apperçoit, à l'aide du Téleſcope, une partie plus lumineuſe. Simon *Marius* remarqua cette étoile vers l'an 1612, & la deſcription qu'il en donne eſt fort conforme à la vérité. M. *Bouillaud* (*c*) nous apprend cependant que *Marius* n'eſt pas le premier qui l'ait vue. Il cite un Manuſcrit anonyme rapporté d'Hollande par M. de *Thou*, & dont l'Auteur, qui vivoit près d'un ſiecle avant *Marius*, avoit été témoin de ce phénomene. M. *Bouillaud* remarque dans cet écrit, que cette étoile n'ayant été marquée, ni dans les Catalogues anciens, ni dans celui de *Tycho*, ni dans l'Uranométrie de *Bayer*, & ayant pourtant été vue dans des temps intermédiaires, il y a beaucoup d'apparence qu'elle eſt ſujette à des apparitions & des occultations périodiques ; ce

(*a*) *Miſcell. Berol.* T. III, ad ann. 1710.
(*b*) Mem. de l'Acad. 1706, 1709.
(*c*) *Ad Aſtron. monita duo, &c.*

que M. Godefroi *Kirch* a confirmé par ſon ſuffrage & ſes obſervations. Quant à la cauſe de cette nébuloſité, nous ne ſçaurions en aſſigner de plus vraiſemblable que celle que ſoupçonne M. de *Mairan* (*a*). Il penſe que cet éclat foible pourroit bien être occaſionné par une immenſe athmoſphere, ſemblable à celle qui environne notre ſoleil, & qui cauſe la lumiere Zodiacale dont la découverte eſt due, comme l'on ſçait, à M. *Caſſini* : cette conjecture me paroît tout-à-fait heureuſe & ſatisfaiſante.

Après avoir vu dans le Ciel des étoiles qui ont paru & diſparu, d'autres qui ont des périodes d'occultations & d'apparitions, il n'y aura plus que de quoi s'étonner médiocrement, ſi nous y en trouvons qui paroiſſent avoir été inconnues à l'Antiquité, & d'autres qui ſemblent s'être éteintes depuis quelques ſiecles. A la vérité, on n'a pas des preuves bien completes de ces derniers faits ; mais ſi l'on rapproche tous les ſoupçons que divers Aſtronomes en ont formés en comparant d'anciens Catalogues aux nôtres, il en réſultera une eſpece de corps de preuves qui rendra ces faits aſſez vraiſemblables. Comme il ſeroit long de les raſſembler ici, nous nous contentons de renvoyer au Catalogue des étoiles auſtrales, de M. *Hallei* qui conjecture pluſieurs de ces apparitions nouvelles ou de ces obſcurciſſemens d'étoiles. Il faut encore conſulter ſur ce ſujet un Mémoire de M. *Maraldi*, donné parmi ceux de l'Académie en 1708, auſſi-bien que divers écrits inſérés dans les *Tranſactions Philoſophiques* (*b*), qui contiennent pluſieurs obſervations pareilles. On doit lire enfin, pour s'inſtruire pleinement de tout ce qui concerne ces phénomenes, l'hiſtoire des étoiles nouvelles qu'on trouve dans les Tranſactions de l'année 1715, ou bien celle que M. *Caſſini* a inſérée dans ſes *Elémens d'Aſtronomie*.

Pour remplir toute l'étendue de notre objet, il faudroit ici dire quelque choſe des conjectures que les Phyſiciens ont formées pour expliquer ces apparitions & ces occultations ſi ſingulieres. Je ne connois ſur cela rien de plus ingénieux & de

(*a*) Traité de l'Aurore Boréale, nouv. édit. ſect. v, p. 259. On trouve dans la ſection citée, pluſieurs exemples d'eſpaces nébuleux répandus dans le Ciel, & entr'autres celui d'une étoile qui paroît être devenue nébuleuſe depuis M. Huyghens.

(*b*) Voy. *Tables des Tranſ.* p. 149, 150.

plus vraiſemblable que ce qu'à dit M. de *Maupertuis* dans ſon Livre ſur la figure des aſtres. Il conjecture qu'il pourroit bien y avoir des ſoleils qui par la rapidité de leur rotation fuſſent des ſphéroïdes extrêmement applatis. Or des aſtres de cette forme, qui nous préſenteroient tantôt leur diſque, tantôt leur tranchant, paroîtroient dans le premier cas, & diſparoîtroient dans le ſecond. Mais par quelle cauſe ces aſtres éprouveront-ils ces changemens de ſituation : on la trouve dans le même méchaniſme qui opere la nutation de l'axe de la terre, & diverſes autres irrégularités ſemblables dans les mouvemens céleſtes. Un des ſoleils dont nous parlons, pourroit être pareillement dérangé par l'action des Planetes qui circuleroient autour de lui. Je remarque même ici une choſe qui ſemble avoir échappé à M. de *Maupertuis ;* c'eſt que la nutation de l'axe de la terre, la préceſſion des équinoxes, &c. ne ſont produites que par l'applatiſſement de la terre, ou par l'action du ſoleil ſur cet anneau concave qui excede la ſphere. Des aſtres extrêmement applatis donneroient donc, pour ainſi dire, beaucoup plus de priſe à l'action des corps qui circuleroient autour d'eux, pour les déranger ; d'où il ſuit qu'ils ſeroient ſujets à beaucoup de variations. Cette réfléxion me ſemble propre à donner un nouveau degré de vraiſemblance à la conjecture en queſtion.

III.

Découvertes aſtronomiques de Galilée.

Pendant que *Kepler* faiſoit en Allemagne les découvertes qu'on a expoſées plus haut, le célebre *Galilée* fleuriſſoit en Italie, & par des travaux d'un autre genre ne contribuoit pas moins aux progrès de la ſolide Aſtronomie. Aidé du Téleſcope, il découvroit dans le Ciel de nouveaux phénomenes, & quoique dans un pays où certaines circonſtances redoublent l'empire des préjugés, il tiroit de ces phénomenes de légitimes conſéquences en faveur du vrai ſyſtême de l'Univers. Avant que de faire le récit des découvertes de *Galilée*, diſons un mot de ſa perſonne & de ſa naiſſance.

Galilée naquit à Piſe le 18 Février 1564, de Vincenzio *Galilei*, noble Florentin, & de Julie *Ammanati*, d'une ancienne & noble famille de Piſtoye. Son pere étoit un homme

verſé dans les Sciences Mathématiques, & ſurtout dans la théorie de la Muſique, ſur laquelle il a écrit un ouvrage que nous poſſédons (*a*). *Galilée* reçut une éducation proportionnée à ſa naiſſance & aux lumieres de ſon pere. Il étoit deſtiné à la Médecine, mais l'impulſion de la nature en fit un Mathématicien, & dès l'année 1589, il obtint une Chaire de Profeſſeur à Piſe. Il n'y reſta pas long-temps : quelques expériences contraires à la doctrine d'*Ariſtote* ſur la chûte des graves, ſouleverent contre lui toute la faction Péripatéticienne, & l'obligerent de quitter Piſe pour Padoue où ſon mérite le faiſoit deſirer. Il y profeſſa juſqu'en 1609 ou 1610, que ſes brillantes découvertes le firent rappeller à Piſe par le Grand-Duc de Toſcane, qui ne voulut pas qu'un Etat étranger poſſédât un de ſes ſujets auſſi propre à illuſtrer le ſien. Il l'établit comme Chef & Directeur des Etudes à Piſe, où il paſſa le reſte de ſa vie à faire main-baſſe ſur des erreurs philoſophiques de toute eſpece, & à perfectionner les Mathématiques & la Phyſique par diverſes découvertes.

Quoique la jeuneſſe de *Galilée* ait été marquée de même que ſon âge mûr, par divers traits de génie, ce n'eſt cependant qu'à l'année 1609 qu'on doit fixer l'époque de ſa célébrité. Etant cette année à Veniſe, il y apprit par le bruit public l'invention du Téleſcope ; & après divers eſſais, il s'en fit un qui groſſiſſoit environ 33 fois en diametre. Son premier ſoin fut de le tourner vers le Ciel, & le premier objet qu'il conſidéra fut la lune. Elle venoit alors de paſſer la conjonction, & il remarqua que le confin de la lumiere & de l'ombre étoit terminé fort irréguliérement, & paroiſſoit comme dentelés ; il apperçut auſſi à quelque diſtance de la lumiere des parties déja éclairées. Comme il étoit fort dégagé des préjugés de l'Ecole ſur la nature des corps céleſtes, il n'en fallut pas davantage pour lui perſuader que la lune étoit un corps ſemblable à la terre, & hériſſé d'inégalités qu'on ne peut mieux comparer qu'à des montagnes. Il fit plus, il conçut l'idée de meſurer la hauteur d'une de ces éminences, & il démontra par un procédé géométrique qu'elle étoit beaucoup plus élevée qu'aucune de celles de notre globe. Les étoiles fixes

(*a*) *Dialoghi della Muſica antica è nova.* 1581. Flor. in-fol.

ne lui préſenterent pas des phénomenes moins nouveaux. Il vit la voie lactée parſemée d'une multitude d'étoiles exceſſivement petites, comme l'avoient ſoupçonné d'anciens Philoſophes. Il en trouva plus de quarante dans l'eſpace étroit du groupe des Pleyades, & plus de cinq cens dans Orion. La nébuleuſe de cette conſtellation lui parut compoſée de vingt-une étoiles très-voiſines, & celle du Cancer, connue ſous le nom de *Preſepe Cancri*, lui en montra plus de quarante.

La découverte des Satellites de Jupiter ſuivit de près les précédentes. Le 8 Janvier de l'an 1610, *Galilée* obſervant Jupiter, apperçut auprès de lui trois étoiles, dont deux étoient d'un côté, & la troiſieme de l'autre. Il les prit d'abord, ce qui étoit fort naturel, pour quelques-unes de ces étoiles fixes, qu'on ne peut appercevoir qu'à l'aide du Téleſcope. Heureuſement il s'aviſa le lendemain de conſidérer de nouveau cette Planete, & il reconnut alors, par leur configuration nouvelle & les circonſtances du mouvement de Jupiter, qu'il falloit néceſſairement qu'elles euſſent changé de place. Il découvrit peu après la quatrieme qui lui avoit échappé juſque-là, & continuant ſes obſervations pendant deux mois entiers, il ſe démontra que Jupiter étoit environné de quatre petites Planetes qui font leurs circonvolutions autour de lui, comme la lune autour de la terre. Il les nomma *Aſtres de Médicis*, en honneur de l'illuſtre Maiſon qui le protégeoit. Il publia ces découvertes & ces obſervations, au commencement du mois de Mars ſuivant, ſous le titre de *Nuncius Sidereus ;* époque mémorable, & qu'on peut regarder comme celle du triomphe de la ſaine Aſtronomie-Phyſique, ſur les préjugés de l'ancienne Philoſophie. *Galilée* ne ſe borna pas là, à l'égard de ces nouvelles Planetes : curieux de reconnoître les biſarreries de leurs mouvemens, il les obſerva autant qu'il put les années ſuivantes ; il s'en forma une ſorte de théorie, & il oſa au commencement de 1613 prédire leurs configurations pour deux mois conſécutifs (*a*).

Galilée devoit ſe ſçavoir trop de gré d'avoir tourné ſon Téleſcope ſur la Lune & Jupiter, pour ne pas paſſer de même en revue les autres Planetes. Celle de Venus lui offrit un ſpectacle non moins concluant contre l'ancienne Philoſophie. Ce

(*a*) *Lett. 3ª. al S. Velſero.*

que *Copernic* avoit autrefois dit être néceſſaire, ſçavoir que Venus eut des phaſes ſemblables à celles de la lune, le Téleſcope le démontra à *Galilée*. Il la vit en croiſſant dans les environs de ſa conjonction inférieure, demi-pleine vers ſes plus grandes élongations du ſoleil, pleine enfin ou preſque pleine, dans le voiſinage de la conjonction ſupérieure. Comme il s'attendoit à ce phénomene, il en fut plus ſatisfait que ſurpris ; mais celui que lui offrit Saturne le frappa d'étonnement. Son Téleſcope n'augmentant pas aſſez les objets pour diſtinguer les anſes de l'anneau qui environne, comme l'on ſçait, cette Planete, elle lui parut accompagnée de deux globes, qu'il prit pour deux Satellites immobiles. Sa ſurpriſe fut bien plus grande lorſqu'après deux ans d'obſervations, il vit diſparoître ces prétendues Planetes. Il n'étoit pas poſſible à *Galilée* d'entrevoir la cauſe de ce biſarre phénomene. Nous en rendrons compte en expliquant les découvertes de M. *Huyghens* ſur ce ſujet.

La découverte des taches du ſoleil n'a pas moins contribué que les précédentes à la célébrité de *Galilée*. Elle lui eſt, à la vérité, diſputée par le P. *Scheiner*, & même ſi l'on devoit abſolument juger de la date d'une découverte par celle des écrits qui l'ont rendue publique, il faudroit en faire honneur à Jean *Fabricius*, qui annonça ce phénomene par un petit ouvrage dès le mois de Juin de l'année 1611. Mais *Galilée* me paroît avoir aſſez bien établi par diverſes autorités (*a*), qu'il doit au moins concourir avec les plus anciens de ceux qui ont obſervé les taches du ſoleil. Nous remettons à l'article ſuivant, de dire quelque choſe de plus des démêlés qu'il eut à ce ſujet avec le P. *Scheiner*, & de développer les conſéquences que l'on tire de ce phénomene.

Galilée étoit trop dégagé des préjugés de l'ancienne Philoſophie pour ne pas tirer de ces découvertes les fortes preuves qu'elles fourniſſent en faveur du vrai ſyſtême de l'Univers. Il établit la reſſemblance des corps céleſtes avec la terre, par les inégalités de la lune, par les altérations qu'on obſerve ſur la ſurface du ſoleil, & par les Satellites de Jupiter. Ces quatre Planetes ſubordonnées à une autre, & qui l'accompagnent

(*a*) *Op.* T. II, p. 152. & ſeq.

dans toute ſa révolution, lui fournirent une réponſe ſans réplique à ceux qui trouvoient une abſurdité à faire ſuivre la terre par la lune, pendant qu'elle-même tourne autour du ſoleil. Les phaſes de Venus lui ſervirent à établir qu'elle fait ſa révolution autour du ſoleil. Quel eût été le tranſport de *Copernic*, s'il eût pu alléguer de pareilles preuves de ſon ſyſtême. Quel eût été celui de *Galilée* même, ſi muni d'inſtrumens plus parfaits, il eût pu appercevoir les révolutions de toutes les autres Planetes ſur des axes inclinés au plan de leurs orbites, comme l'eſt celui de la terre à l'écliptique dans l'hypotheſe de *Copernic*, s'il eût pu voir les taches nombreuſes dont elles ſont couvertes, les nouveaux Satellites de Saturne, &c.

Nous ne répéterons pas ici l'hiſtoire de la perſécution qu'eſſuya *Galilée* à l'occaſion de ſes nouvelles découvertes & des conſéquences qu'il en tiroit. Nous avons traité ce ſujet aſſez au long, en faiſant lé récit des contradictions qu'a éprouvé le ſyſtême de *Copernic*. L'Europe indignée ne vit dans le jugement porté contre l'Aſtronome Italien, que l'ouvrage d'un tribunal ignorant & incompétent, & les pays Proteſtans triompherent de voir Rome compromettre d'une maniere ſi viſible ſon autorité. Ce fut tout le fruit de cette condamnation indiſcrete, qui ne ſuſpendit pas d'un moment le triomphe de la vérité.

Mais c'en eſt aſſez ici ſur cet événement de la vie de *Galilée*. Revenons à ſes travaux aſtronomiques. Un des principaux, & dont il s'occupa une grande partie de ſa vie, fut d'obſerver les ſatellites de Jupiter, & de fonder une théorie de leurs mouvemens. On ne ſçait point préciſément quel progrès il y avoit fait. Il avoit conçu l'idée de les appliquer à la réſolution du problême des longitudes. Les Etats de Hollande qui s'intéreſſoient beaucoup à la perfection de l'art de naviger, lui promirent de grandes récompenſes s'il y réuſſiſſoit. Ils lui envoyerent en 1636 *Hortenſius* & *Blaew*, pour obſerver avec lui & l'aider dans le calcul des tables néceſſaires. Mais à peine arrivoient-ils, qu'une fluxion tombée ſur les yeux de *Galilée* le priva de la vue, & ils s'en retournerent ſans avoir rien fait. Après cet accident, un de ſes diſciples nommé *Vincent Reyneri*, Auteur des *Tables Medicées*, fut chargé par le Grand Duc de continuer à obſerver les ſatellites

lites de Jupiter, & de dreſſer des Tables de leurs mouvemens. *Reyneri* en effet y travailla, & dix ans après, ſçavoir en 1647, il étoit ſur le point de les mettre ſous preſſe, lorſqu'une mort imprévue fruſtra les Aſtronomes de cet ouvrage : tous les papiers de *Reyneri*, auſſi bien que les obſervations de *Galilée*, qui lui avoient été confiées, diſparurent, ſans que les perquiſitions du Grand Duc en aient pu rien faire retrouver (*a*).

Galilée étoit occupé à dêmeler les phénomenes de la libration de la lune, qu'il avoit le premier remarquée, lorſqu'il perdit la vue (*b*). Un accident ſi triſte, & qui l'eſt bien plus pour un Obſervateur curieux de la nature, que pour un homme ordinaire, ne lui ôta rien de ſon enjouement. Aidé de quelques diſciples, entr'autres de *Viviani* & *Torricelli*, dont le premier paſſa avec lui les trois dernieres années de ſa vie, il continua à cultiver les ſciences qu'il avoit toujours chéries, autant que ſa vue pouvoit le lui permettre. Il mourut en 1642, à Arcétri dans le territoire de Florence, que l'Inquiſition lui avoit aſſigné pour priſon. Le célebre Géometre M. *Viviani*, a montré pour la gloire de ce grand homme un zele qui n'a pas d'exemple. Le fils le plus tendre ne témoigna jamais plus d'affection & de reconnoiſſance pour ſon pere, que ce diſciple de *Galilée* pour ſon illuſtre maître. Il fit toujours gloire de ſe nommer ſon dernier diſciple, & lorſque Louis XIV lui donna une penſion, & le nomma aſſocié étranger de l'Académie des Sciences, il fit conſtruire à Florence une maiſon qui, à la principale inſcription près qui montre ſa reconnoiſſance envers le Monarque François, eſt un monument conſacré à la gloire de *Galilée*. On y voit ſon buſte en bronze, fait d'après ſon portrait ſculpté en 1610, & la plûpart de ſes inventions y ſont repréſentées par des bas-reliefs, accompagnés d'inſcriptions magnifiques (*c*). J'ignore ſi ce monument ſubſiſte encore. Il eſt de l'honneur des Florentins de l'entretenir, de crainte de mériter le reproche que Ciceron fit autrefois aux Syracuſains de négliger la mémoire d'un de leurs plus illuſtres concitoyens. Les œuvres de *Galilée* ont été recueillies & imprimées en trois volumes in-4°. *Viviani* a écrit ſa vie fort au

(*a*) Riccioli, *Alm. nov.* T. 1, p. 489.

(*b*) Voy. *Lett. al Sig. Antonini*, Op. T. II.

(*c*) On voit les deſſeins de cette maiſon, & les inſcriptions dont on parle ici, dans la *Divinatio in Ariſtæum* de M. Viviani.

long. On la trouve dans les *faſti conſolari dell' Acad. Fiorentina* (*a*). Il laiſſa un fils, nommé *Vincentio Galilei*, qui fut verſé dans les Mathématiques, & à qui les Italiens font honneur de l'application du pendule aux horloges. Mais c'eſt une prétention qui n'eſt fondée ſur rien de ſolide.

IV.

C'eſt le ſort de preſque toutes les inventions brillantes, que d'être diſputée par pluſieurs prétendans, dont chacun parvient même ſouvent à donner de telles couleurs à ſa cauſe, qu'il eſt fort difficile de diſcerner de quel côté eſt la vérité. Celles que nous venons d'expoſer, n'ont pas été exemptes de cette loi preſque générale; & *Galilée* a trouvé pluſieurs rivaux qui ont révendiqué ſur lui, les uns la découverte des taches du ſoleil, d'autres celle des ſatellites de Jupiter. Mais parmi ces concurrens à l'honneur des premieres découvertes faites avec le Téleſcope, je n'en trouve aucun dont le droit ſoit mieux établi, que *Jean Fabricius*. En effet ſon écrit intitulé, *de maculis in ſole viſis, & earum cum ſole revolutione narratio*, parut au mois de Juin de l'année 1611, à Vittemberg. Si l'on doit quelque foi à la date des écrits imprimés, on ne peut lui refuſer d'avoir le premier dévoilé de cette maniere le phénomene des taches du ſoleil.

Fabricius.

Le ſecond concurrent de *Galilée* dans la découverte de ce phénomene, eſt le P. *Scheiner* Jéſuite (*b*); mais il nous ſemble que ſes droits ne ſont pas auſſi bien établis que ceux du précédent. Ecoutons-le lui-même dans ſa premiere lettre à Marc *Velſer*, qui doit être regardée comme le récit le plus naïf & le plus exact de la part qu'il a à cette découverte. Dans

Le P. Scheiner.

(*a*) Voyez auſſi Heumann, *Act. Phil.* T. III.

(*a*) Chriſtophe Scheiner, né en 1575, entra dans la Société en 1595; il fut longtemps Profeſſeur de Mathématiques à Ingolſtadt, à Gratz & à Rome. Il mourut en 1650, Confeſſeur de l'Archiduc Charles. On a de lui, outre ſa *Roſa Urſina* dont nous parlons dans cet article, divers ouvrages Mathématiques; ſçavoir, ſon *Oculus* ou *Fundam. Opticum*, qui eſt un Traité d'Optique directe; *Sol Ellipticus*, où il traite du phénomene de l'ellipticité apparente du ſoleil & de la lune voiſins de l'horizon; *Refractiones Celeſtes; Exeg. Fund. Gnom.; Pantographia*: dans ce dernier ouvrage, il montre l'uſage du Pantographe, inſtrument fort connu depuis, & qui ſert à copier de grand en petit, ou au contraire, un deſſein, ſans aucune teinture de l'art de deſſiner.

cette Lettre, dont la date eſt du 12 Novembre 1611, il dit qu'il y avoit ſept à huit mois que regardant le ſoleil au travers d'un Téleſcope, il apperçut ſur ſon diſque quelques taches noirâtres, qu'il y fit peu d'attention alors, & que ce ne fut qu'au mois d'Octobre ſuivant, qu'ayant de nouveau contemplé le ſoleil, ces taches le frapperent lui & ſon compagnon d'obſervation, & qu'après bien des raiſonnemens & des examens, ils conclurent qu'elles ne pouvoient être que ſur le corps du ſoleil ou aux environs. Ils réitérerent cette obſervation à commencer du 21 Octobre, pendant le reſte de ce mois, & le ſuivant, & ils trouverent que ces taches avoient un mouvement progreſſif vers le bord du diſque ſolaire où elles diſparurent ſucceſſivement.

Quelqu'un s'égayant ſans doute aux dépens des Péripatéticiens, a fait le conte ſuivant: Le P. *Scheiner* ayant communiqué ſa découverte à ſon Provincial, celui-ci lui répondit que cela ne pouvoit être. « J'ai lu, lui dit-il, pluſieurs fois » mon *Ariſtote* tout entier, & je puis vous aſſurer que je n'y ai » rien trouvé de ſemblable. Allez, mon fils ajouta-t'il, tranquil- » liſez-vous, & ſoyez certain que ce ſont des défauts de vos » verres ou de vos yeux que vous prenez pour des taches dans » le ſoleil. » Quoi qu'il en ſoit de ce trait, le Provincial du P. *Scheiner* ne lui voulut pas permettre de divulguer ſa découverte ſous ſon nom; il lui laiſſa ſeulement la liberté d'en informer ſon ami, le Sénateur *Marc Velſer*, Magiſtrat d'Augbourg. *Scheiner* le fit par trois Lettres, que *Velſer* fit imprimer l'année ſuivante 1612, apparemment du conſentement de leur Auteur, qui y gardoit l'Anonyme, ou s'y voiloit ſous le nom d'*Appelles poſt tabulam*.

Velſer informa *Galilée* dès les premiers jours de l'an 1612, de la découverte de *Scheiner*, & lui en demanda ſon avis. Les paroles ſuivantes de ſa Lettre ſont remarquables, & prouvent qu'à la date de celles de *Scheiner*, il couroit déja quelque bruit venant d'Italie ſur les taches du ſoleil. « Si comme je crois, » dit *Velſer*, ce n'eſt pas pour vous une choſe entiérement » nouvelle, j'eſpere du moins que vous verrez avec plaiſir » qu'il y a ici deçà les monts des perſonnes qui marchent » ſur vos traces. » *Galilée* lui répondit qu'en effet ce phénomene n'étoit pas nouveau pour lui, qu'il y avoit environ

dix-huit mois qu'il le connoiſſoit, & qu'il l'avoit montré à diverſes perſonnes diſtinguées; ce qui, vu la date de cette réponſe, remonte vers les premiers mois de l'année 1611. Nous paſſerons ſur ce fait difficile à avérer; mais ce qu'on ne peut refuſer à *Galilée*, c'eſt de diſcourir bien plus judicieuſement ſur ce ſujet que le P. *Scheiner*. Ce Pere en effet dans les écrits dont nous venons de parler, prend les taches du ſoleil pour de petites planettes qui tournent autour de cet aſtre, qui s'accrochent & s'amaſſent enſemble, & enſuite ſe ſéparent (*a*). Il tenoit encore, ce ſemble, aux préjugés péripatéticiens ſur la nature des aſtres, & delà venoit apparemment ſa répugnance à regarder ces taches comme des altérations qui ſe paſſent ſur la ſurface du ſoleil. Les Lettres de *Galilée* à *Velſer* ſont occupées à montrer le peu de ſolidité de l'opinion de *Scheiner*, & à combattre diverſes autres idées auſſi peu juſtes. Il y établit que les taches du ſoleil ſont contigues à ſa ſurface, ou fort voiſines, & de leur mouvement réglé il conclud que cet aſtre a un mouvement de rotation autour de ſon axe.

Si l'on ne peut refuſer à *Galilée* d'avoir d'abord diſcouru le plus judicieuſement ſur les taches du ſoleil, on doit auſſi reconnoître le P. *Scheiner*, pour celui qui a le plus contribué par ſes travaux aſſidus à établir la théorie de leurs mouvemens. Il fit une prodigieuſe multitude d'obſervations de cette eſpece, & il les publia en 1630 dans ſon Livre, biſarrement intitulé *Roſa Urſina*, à cauſe qu'il le dédioit à un Duc *Orſini*. Il y démêle avec beaucoup de ſagacité les bizarreries ſingulieres de leurs mouvemens. Il nous faut donner ici une idée de cette théorie.

Le mouvement progreſſif & toujours dans le même ſens, des taches du ſoleil, a d'abord appris aux premiers qui en firent l'obſervation, que cet aſtre a un mouvement autour d'un axe. Si cet axe étoit perpendiculaire à l'écliptique, le mouvement des taches ſeroit toujours rectiligne, & même parallele à la ligne qui marque l'écliptique ſur le diſque du ſoleil. Mais il eſt ſeulement deux ſaiſons de l'année où cela arrive: ce ſont

(*a*) Ce ſyſtême ſur les taches du ſoleil, quoique peu judicieux, & abandonné dans la ſuite par Scheiner, a été adopté par le P. Malapertius, qui les a nommées *Sidera Auſtriaca*, dans un ouvrage qu'il publia ſur ce ſujet en 1627. Il y avoit déja quelques années qu'un Chanoine de Sarlat, nommé Tarde, avoit eu la même idée, & avoit mis au jour un ouvrage où il leur donnoit le nom de *Borbonia Sidera*.

la fin des mois de Février & d'Août. Bien-tôt après cette trace devient curviligne, & trois mois après elle eſt ſemblable à un arc qui auroit pour corde une parallele à l'écliptique : à la fin de Mai, la convexité de cet arc regarde le Midi, à la fin de Novembre elle regarde le Septentrion.

La conſidération attentive de ce phénomene a appris que la rotation du Soleil ſe fait ſur un axe incliné au plan de l'écliptique. En effet, ſi l'on ſuppoſe cet axe tellement ſitué qu'à la fin des mois de Février & d'Août, il ſoit au bord du diſque apparent du Soleil, alors la trace des taches ſera rectiligne, puiſque l'œil du ſpectateur terreſtre ſera dans le plan de l'équateur ſolaire prolongé. Mais trois mois après il ſera élevé au deſſus de cet équateur, ou abaiſſé au deſſous, de ſorte que tous ſes paralleles doivent paroître curvilignes. A l'aide d'une grande quantité d'obſervations, on a découvert que l'axe du Soleil décline de la perpendiculaire au plan de l'écliptique de $7° \frac{1}{2}$, & que le plan de ſon équateur coupe l'orbite de la terre, vers les dixiemes degrés des Poiſſons & de la Vierge, de ſorte que les poles de la révolution ſolaire regardent deux points éloignés de ceux de l'écliptique de ſept degrés & demi, & ſont dans le cercle tiré par ces poles & les dixiemes degrés des Gémeaux & du Sagittaire. Quant à la durée de la révolution ſolaire, les mêmes obſervations montrent qu'à l'égard du ſpectateur terreſtre, elle eſt de 27 jours & demi ; mais comme la terre eſt mobile, & va du même côté que ſe fait la révolution du Soleil, il y a une réduction à faire, & l'on trouve que cette révolution à l'égard des fixes, ou telle qu'elle paroîtroit à la terre immobile, eſt ſeulement d'environ 25 jours & demi.

Il nous reſte à parler d'un troiſieme prétendant à l'honneur des découvertes précédentes. C'eſt Simon *Marius*, Mathématicien & Aſtronome de l'Electeur de Brandebourg. *Marius* publia en 1614, ſon *Mundus Jovialis anno 1609 detectus*, *&c :* il y fait à ce ſujet une hiſtoire ſur la vérité de laquelle il atteſte M. *Fuchs à Bimbach*, Conſeiller intime de l'Electeur, & il prétend avoir vu les Satellites de Jupiter dès les derniers jours de Décembre de l'année 1609. On ne ſçauroit rien prononcer ſur ce ſujet ; mais ce qu'il y a de bien certain, c'eſt que l'hypotheſe & les Tables qu'il donne

pour calculer les mouvemens de ces petites planetes, ne s'accordent en aucune maniere avec la réalité. *Galilée* en prenoit occaſion de douter que *Marius*, loin de l'avoir prévenu dans leur découverte, les eût jamais vues. Néanmoins M. *Caſſini* trouve cette conſéquence forcée, & obſerve que certaines circonſtances ne permettent pas de douter, que *Marius* ne les ait obſervées, quoiqu'il ait été peu heureux dans ſes efforts pour repréſenter leurs mouvemens. Cet Aſtronome s'eſt mis auſſi ſur les rangs pour la découverte des taches du Soleil, qu'il dit avoir vues dès le 3 Août 1611. C'eſt une prétention ſur laquelle il eſt également impoſſible de rien ſtatuer.

V.

Travaux entrepris pour la meſure de la terre.

Quand il n'y auroit que notre curioſité qui fût intéreſſée à la meſure de la terre, on oſe dire que c'en ſeroit une bien légitime & bien raiſonnable. Quoi de plus naturel à l'être penſant qui habite ce globe, que le deſir de connoître l'étendue de cette portion de l'Univers qui lui a été aſſignée pour habitation. Mais nous ne nous en tiendrons pas à ce motif pour juſtifier l'inquiétude ques les Aſtronomes ont montrée, ſurtout depuis un ſiecle & demi, pour meſurer la terre avec préciſion. Il ne faut qu'être initié dans la Géographie pour ſentir que cette meſure eſt de la plus grande utilité, qu'elle eſt enfin la baſe d'une Géographie parfaite. Quelles erreurs ne commettroit-on pas dans les diſtances d'une infinité de lieux dont les poſitions reſpectives ne ſont déterminées que par des obſervations aſtronomiques, ſi l'on ne ſçavoit quelle étendue répond à un certain nombre de degrés ſur la terre. La navigation fait auſſi un uſage preſque continuel de cette meſure. C'eſt ſur elle qu'eſt fondée *l'eſtime* qui eſt un des principaux élémens de cet art.

On a déja rendu compte, dans les endroits convenables, des efforts que firent autrefois les Grecs & les Arabes pour meſurer la terre. Mais les déterminations qu'ils nous ont tranſmiſes n'étoient point capables de ſatisfaire, dans des temps où l'on commençoit à aſpirer à une grande exactitude. N'y eût-il eu que l'incertitude du rapport de nos meſures aux leurs, ce ſeul motif eût exigé qu'on réitérât ces opérations. A plus forte raiſon cela étoit-il néceſſaire, lorſ-

que par l'examen de leurs procédés, on étoit assuré qu'ils n'avoient pas mis dans cette détermination toute l'exactitude & le soin qu'elle exigeoit.

Le fameux *Fernel*, Médecin & Mathématicien du seizieme siecle, est le premier des Modernes qui ait entrepris de déterminer de nouveau la grandeur de la terre. Il alla de Paris à Amiens, mesurant le chemin qu'il faisoit par le nombre des révolutions d'une roue de voiture, & s'avançant jusqu'à ce qu'il eût trouvé préciſément un degré de plus de hauteur du pole; & par-là il détermina la grandeur du degré, de 56746 toises de Paris. Cette exactitude feroit beaucoup d'honneur à *Fernel*, si elle étoit un effet de la bonté de sa méthode; car on sçait aujourd'hui que ce degré est de 57060 toises environ : mais qui ne voit que ce fut seulement un heureux hazard qui l'approcha si fort de la vérité, & à apprécier le procédé qu'il suivit, qui auroit osé le soupçonner ?

On fut ainsi jusqu'au commencement du siecle passé sans mesure de la terre, sur laquelle on pût faire quelque fonds. Ce motif engagea alors divers Astronomes à y procéder d'une maniere plus géométrique & plus exacte. *Snellius* commença & donna l'exemple. Il est Auteur d'une excellente méthode pour mesurer en toises la longueur d'un grand arc du méridien. Comme elle est la base de toute cette opération, & qu'elle a été employée par les Académiciens François qui ont déterminé dans le dernier siecle & dans celui-ci la grandeur & la figure de la terre, nous allons l'expliquer.

Qu'on imagine aux environs de la méridienne, une suite de lieux éminens, comme des montagnes, des tours, A, B, C, D, &c. On releve avec un instrument fort exact, les angles que font les lignes tirées de ces objets les uns aux autres, & l'on forme par ce moyen une suite de triangles liés, (c'est-à-dire ayant quelque côté commun, & tous leurs angles connus,) qui se termine aux extrêmités de la distance à mesurer. On a aussi le soin de déterminer vers le commencement la position d'un des côtés de ces triangles avec la méridienne, d'où il est aisé de conclure celle de chacun des autres côtés. *Fig. 76.*

Cela fait, on mesure actuellement, c'est-à-dire avec la toise, dans quelque endroit commode, comme dans une plaine, une longue base LM, & par des opérations trigonométri-

ques on en conclud la longueur en toiſes d'un côté d'un des triangles voiſins, comme AB. Ce côté unique étant connu, il eſt facile de déterminer la longueur de tous ceux de la ſuite des triangles, & par leur poſition connue avec la méridienne, les portions de cette méridienne A*b*, B*c*, C*d*, &c. compriſes entre les paralleles paſſant par A, B, C, &c. On a, par l'addition de toutes ces portions, la longueur de l'arc du méridien compris entre les paralleles des lieux extrêmes. Il ne reſte donc qu'à meſurer leur différence de latitude, ce qui eſt facile, & l'on connoît par-là à quelle portion du méridien répond la longueur trouvée, de ſorte qu'on en conclut la longueur du degré, & celle de la circonférence.

Telle eſt la méthode que ſuivit *Snellius*. Il trouva entre les paralleles d'Alcmaer & Bergopſoom, qui étoient ſes lieux extrêmes, 34018 perches du Rhin, & une différence de latitude de 1°. 11′ 30″; d'où il conclut le degré de 28473 perches. Il obſerva auſſi la latitude de Leyde, lieu moyen entre Alcmaer & Bergopſoom, & par cette opération il trouva 28510 perches; c'eſt pourquoi prenant un milieu, il eſtima le degré terreſtre à 28491 ou 28500 perches, qui reviennent à 55021 toiſes de Paris. Le détail de ſes opérations eſt expoſé dans ſon *Eratoſtenes Batavus*, qui eſt l'ouvrage qu'il publia à ce ſujet en 1617.

M. *Picard* ayant meſuré la terre en 1671, & ayant trouvé par des opérations qui portent le caractere de la plus grande exactitude le degré entre Paris & Amiens, de 57060 toiſes, on a reconnu que *Snellius* s'étoit trompé (*a*); mais M. *Muſchembroeck*, jaloux de la gloire de ſon compatriote, nous a appris des particularités qui le juſtifient (*b*). *Snellius* s'étoit apperçu de ſon erreur, il avoit de nouveau meſuré ſa baſe & les angles de ſes triangles, & même prolongé ſa méridienne du côté du Midi par Anvers juſqu'à Malines. Il ſe propoſoit de redonner ſon *Eraſtotenes Batavus*, avec les corrections convenables, lorſqu'une mort précipitée l'enleva & fit échouer ſon projet. Ses manuſcrits étant tombés depuis entre les mains de M. *Muſchembroeck*, ce ſçavant Profeſſeur de Leyde, a cal-

(*a*) Mémoires de l'Académie 1702. Voyez auſſi le Livre de la grandeur de la terre. Part. II, c. 8.

(*b*) Diſſ. *de Magnit. terræ*. Parmi ſes *Diſſ. Phyſicæ*.

culé

culé de nouveau tous les triangles de *Snellius*, d'après les corrections qu'il y avoit faites, & il a trouvé par ce moyen la grandeur du degré de 29510 perches, ou 57033 toises; ce qui ne differe de la mesure de M. *Picard*, que d'une trentaine de toises.

Il n'y avoit pas encore long-temps que *Snellius* avoit achevé sa mesure, lorsque *Blaeu* (*a*) en entreprit une semblable. Nous ignorons les motifs qui l'y porterent, l'ouvrage qu'il préparoit sur ce sujet n'ayant jamais vu le jour. Peut-être soupçonnoit-il l'erreur qui s'étoit glissée dans la mesure de *Snellius*. Quoi qu'il en soit, il est certain qu'après les travaux de M. *Picard*, & des Académiciens qui ont décidé la fameuse question de la figure de la terre, il ne s'est rien fait de plus exact. *Blaeu* mesura trigonométriquement un très-grand arc du méridien, & détermina la différence de latitude des extrêmités, avec un secteur de douze degrés, portion d'un cercle de quatorze pieds de rayon (*b*). Aussi l'exactitude de sa mesure répond-elle aux soins qu'il se donna. C'est le témoignage qu'en rend M. *Picard* (*c*) : cet exact Observateur allant à Uranibourg, & passant par Amsterdam, y vit le manuscrit de *Blaeu* entre les mains d'un de ses descendans, & il nous apprend que sa mesure ne différoit de la sienne propre que de soixante pieds du Rhin. Ceci doit nous donner une grande idée de la dextérité de *Blaeu* à observer, & des attentions qu'il apporta à cette opération.

Nous trouvons vers le même temps un Astronome Anglois qui travailla pour la troisieme fois à la mesure de la terre, avec succès (*d*). Richard *Norwood*, c'est le nom de cet Astronome, eut le courage de mesurer la distance de Londres à Yorck, c'est-à-dire, plus de soixante lieues, la chaîne à la main. Voici quelle étoit sa méthode. Il mesuroit la longueur des chemins, en conservant autant qu'il pouvoit la même direction : il avoit soin de déterminer en même temps par le moyen de la bousſole l'angle du chemin ou de la ligne mesurée avec le méridien, aussi-bien

(*a*) Guillaume Janson Blaeu, (en latin Cæsius) disciple de Tychon, s'est fait un nom célebre par ses travaux géographiques. Il mourut en 1638, âgé de 77 ans. Il a eu plusieurs descendans qui ont longtemps soutenu en Hollande la haute réputation qu'il s'étoit acquise.

(*b*) Vossius, *de Scient. Math.* p. 263.

(*c*) Voyage d'Uranibourg.

(*d*) *Sea-man's Practice.*

que les angles d'inclinaiſon à l'horizon à chaque fois qu'il montoit ou deſcendoit ; après quoi il réduiſoit les longueurs trouvées au plan horizontal & au méridien. Il meſura enfin, en deux jours de ſolſtice d'Eté, les hauteurs du ſoleil à Londres & à Yorck, avec un ſecteur de cinq pieds de rayon, & il trouva que ces deux villes différoient en latitude de 2°. 28′. D'où il conclut que le degré étoit de 367176 pieds Anglois, qui font 57300 de nos toiſes.

Nous devons encore ranger le P. *Riccioli*, & ſon compagnon d'obſervations le P. *Grimaldi*, parmi ceux qui ſe ſont donné de grands ſoins pour la meſure de la terre ; mais nous ne pouvons diſſimuler en même temps, qu'ils furent bien moins heureux qu'aucun de ceux qui les précéderent dans le même ſiecle. Car ſi *Snellius* ſe trompa de deux mille toiſes, *Riccioli*, par diverſes petites erreurs accumulées, ſe trompa de plus de 5000. Nous croyons en appercevoir la cauſe : rien n'eſt plus pernicieux à un Obſervateur que d'être prévenu qu'il doit rencontrer un certain réſultat. *Riccioli*, après avoir ſçavamment diſcuté les meſures anciennes, ſe perſuada qu'il devoit trouver le degré d'environ 81000 pas Romains. En conſéquence on le voit toujours adopter par préférence les obſervations qui lui donnent une plus grande meſure. D'ailleurs on trouve la ſource de l'erreur énorme de *Riccioli* dans la nature de la méthode qu'il a employée. Loin de choiſir la plus ſimple, la plus exempte d'élémens incertains ou difficiles à déterminer, celle dont il s'eſt ſervi eſt la plus compliquée qu'on puiſſe imaginer. Ce ſont, par exemple, des obſervations de hauteurs d'étoiles priſes dans un certain vertical, & près de l'horizon, dans leſquelles la réfraction eſt négligée & la déclinaiſon tirée du Catalogue de *Tycho*, où l'on peut, ſans faire tort à ce grand homme, ſuppoſer quelque erreur d'une ou deux minutes. Il entre encore dans l'opération de *Riccioli* des hauteurs du pole ſur leſquelles il varie lui-même ; enfin je vois des triangles extraordinairement aigus, où une erreur légere ſur un angle peut en occaſionner une fort grande ſur un des côtés. Cette incertitude jointe à la préoccupation où il étoit que le degré devoit contenir environ 81000 pas Romains, ou 64 à 65 mille pas de Boulogne, lui fournit en effet le moyen de prolonger ſa meſure de telle maniere qu'il porte

enfin le degré à 64368 pas, qui reviennent à 62650 toiſes de Paris, c'eſt-à-dire plus de 5000 toiſes au deſſus de ſa vraie grandeur. On peut voir dans le Livre *de la grandeur & de la figure de la Terre*, par M. *Caſſini*, une ample diſcuſſion de cette meſure. Elle confirme parfaitement ce que nous venons de dire, & qui n'eſt que le réſultat de l'examen attentif que nous en avions fait nous-même ſur l'ouvrage de *Riccioli*.

VI.

Mercure & Venus obſervés ſous le Soleil.

Il eſt peu d'obſervations plus rares que celles dont nous avons à parler dans cet article. L'une, ſçavoir celle du paſſage de Mercure ſous le ſoleil, ne peut avoir lieu qu'un petit nombre de fois dans un ſiecle. Depuis l'année 1631, que fut faite la premiere obſervation de cette eſpece, on n'a pu la réitérer que dix fois. Mais celle du paſſage de Vénus ſous le ſoleil eſt bien plus rare. Un ſiecle eſt un eſpace trop court pour la voir répéter, & depuis l'année 1639, qu'on la fit pour la premiere fois, les Aſtronomes n'ont point eu le plaiſir de la réitérer. Ils attendent avec impatience l'année 1761, qui doit leur offrir de nouveau ce rare phénomene. Donnons d'abord une idée de l'utilité de ces ſortes de paſſages.

Les obſervations de Mercure ſont ſi rares, & ſe font dans des endroits ſi déſavantageux, que tant qu'on n'a eu que la maniere ordinaire de l'obſerver, on ne pouvoit avoir trop de défiance ſur la juſteſſe de la théorie de cette planete. Mais ſon paſſage ſous le ſoleil offre le moyen de déterminer avec beaucoup d'exactitude deux des élémens principaux de cette théorie, ſçavoir la poſition des nœuds & l'inclinaiſon de l'orbite à l'écliptique. En effet, il eſt viſible que Mercure ne peut paſſer ſous le diſque du ſoleil qu'aux environs de ſes nœuds. Mais tandis qu'il paſſera ſous ce diſque, & qu'il paroîtra le traverſer ſous la forme d'une tache noire, on pourra avoir à chaque inſtant, & ſurtout à ſon entrée & à ſa ſortie, ſa poſition à l'égard de l'écliptique, c'eſt-à-dire ſa longitude & ſa latitude. Or ces choſes étant données, rien n'eſt plus facile que de déterminer ſur l'écliptique le point où ſa route prolongée la rencontre, & l'angle qu'elles forment entr'elles. On aura

donc le nœud voiſin du lieu de l'obſervation, & l'angle de l'écliptique avec l'orbite de la planete.

L'importance de l'obſervation qu'on vient de décrire, avoit engagé *Kepler* dès le commencement du ſiecle, à guetter, pour ainſi dire, Mercure ſous le ſoleil, & il avoit cru l'y appercevoir le 28 Mai de l'année 1607. Ayant reçu ce jour-là l'image du ſoleil dans la chambre obſcure, il y avoit vu une tache noire qu'il avoit pris pour Mercure, conformément au calcul qu'il avoit fait d'après une fauſſe poſition des nœuds. Il avoit annoncé ſon obſervation en 1609; mais auſſitôt après la découverte des taches du ſoleil, il vit qu'il s'étoit trompé, & il reconnut que ce qu'il avoit pris pour Mercure dans le ſoleil, n'étoit qu'une tache qui ſe trouvoit par hazard alors ſur le diſque de cet aſtre. C'eſt le jugement qu'on doit auſſi porter de quelques autres obſervations ſemblables, faites dans des ſiecles antérieurs, comme celle que *Lycoſthene* rapporte à l'an 778, celle de l'Anonyme Hiſtorien de Louis le débonnaire, faite l'an 807, & une troiſieme attribuée à *Averroès*. *Kepler* ayant reconnu ſon erreur, rectifia ſa théorie ſur de nouvelles obſervations, & enfin avertit en 1629 les Aſtronomes, de ſe préparer à obſerver Mercure ſous le ſoleil le 7 Novembre de l'année 1631. Il annonçoit un paſſage ſemblable de Vénus pour le 6 Décembre de la même anneé. A la vérité, ce dernier devoit arriver durant la nuit à l'égard de l'Europe; mais *Kepler* ne ſe tenoit pas aſſez aſſuré de ſes calculs, pour oſer prononcer qu'il ne ſeroit pas viſible dans cette partie de la terre.

Un grand nombre d'Aſtronomes ſe tinrent prêts à l'obſervation de Mercure; mais peu furent aſſez heureux pour la faire. Tous ceux qui ſe contenterent d'introduire dans la chambre obſcure l'image du ſoleil, comptant y appercevoir Mercure, furent fruſtrés de leur attente. Il n'y eut que ceux qui ſe ſervirent du Téleſcope pour contempler immédiatement le ſoleil, ou pour former ſon image, qui apperçurent cette petite planete. Tels furent *Gaſſendi* à Paris, le P. *Cyſatus* à Inſpruk, *Jean Remus Quietanus*, Médecin & Mathématicien de l'Empereur Mathias, en Alſace, & un Anonyme

(a) *Mercurius in ſole*, &c. Lipſ. 1609. in-4°.

à Ingolſtadt. Nous ne connoiſſons aucunes circonſtances des obſervations des trois derniers. C'eſt pourquoi nous nous bornerons au récit de celle de *Gaſſendi*.

Peu s'en fallut que le mauvais temps ne privât l'Aſtronome François du plaiſir d'une obſervation ſi rare & ſi nouvelle. Le ciel fut couvert tous les jours précédens; enfin celui qui étoit annoncé par *Kepler* étant venu, les nuages ceſſerent. *Gaſſendi* qui guétoit l'inſtant où il pourroit appercevoir le ſoleil, tourna auſſitôt ſon Téleſcope vers cet aſtre, & n'y apperçut qu'une petite tache noire & ronde, déja aſſez avancée ſur ſon diſque. La petiteſſe extrême de cette tache lui fit d'abord croire que ce n'étoit point Mercure; car on s'attendoit à lui trouver une ou deux minutes de diametre apparent: mais, peu de temps après, la rapidité de ſon mouvement ne lui permit plus de méconnoître la planete qu'il attendoit ſous le ſoleil, & il ſe hâta de déterminer ſa route ſur le diſque de cet aſtre avec l'inſtant & l'endroit de ſa ſortie. Il trouva que ſon centre étoit ſur le bord de ce diſque à dix heures, vingt-huit minutes du matin, & il détermina la conjonction à ſept heures cinquante-huit minutes, dans le quatorzieme degré trente-ſix minutes du Scorpion. Il conclud le moment de l'entrée à cinq heures vingt-huit minutes du matin, & le lieu du nœud voiſin au quatorzieme degré cinquante-deux minutes du ſigne ci-deſſus, au lieu du quinzieme degré & vingt minutes où le plaçoit *Kepler*. *Gaſ-*

(*a*) Le célebre Gaſſendi naquit en 1592, dans le territoire de Digne, d'un pere qui n'étoit qu'un bon payſan, & qui ne le vit pas ſans peine ſe jetter dans la carriere des Sciences. Après pluſieurs années de ſéjour à Aix & à Digne, où il avoit un Canonicat, il vint à Paris, où il ſe fit une grande réputation. Le Cardinal de Richelieu le força en 1640, malgré ſes refus, à accepter une Chaire de Profeſſeur Royal qu'il remplit juſqu'en 1655, qui fut l'année de ſa mort. Tout le monde ſçait que Gaſſendi travailla à relever de ſes cendres la Philoſophie Epicurienne, non cette Philoſophie impie qui attribue au hazard l'origine de l'Univers & de tous les êtres, mais cette Philoſophie qui admet les atômes, le vuide, &c. & dont pluſieurs dogmes paroiſſent aſſez conformes à ceux de la Phyſique moderne. Mais ce n'eſt pas ici le lieu d'en dire davantage ſur ce ſujet. Les principaux écrits Mathématiques & Aſtronomiques de Gaſſendi ſont les ſuivans. *De Apparente magnit. ſolis humilis & ſublimis*, Epiſt. 4. Op. T. III. *Inſtitutio Aſtron. ann. 1647. edita.* Op. T. IV. *De rebus celeſtibus comm. ſeu obſ. ab anno 1618. ad ann. 1652. habitæ.* Ibid. *De Mercurio in ſole viſo & ven. inviſâ, epiſt. ad* Schik. *cum reſponſo.* 1631. Par. in-4°. Op. T. III. *De novem ſtellis circà Jovem viſis à P. Rheita.* Ibid. *Prop. Gnom. ad umbram ſolſtit. Maſſiliæ obſ.* Ibid. *Ad P. Caſræum de accelerat. gravium epiſt.* 3. T. IV. *Vitæ Purbachii, Tychonis, Copernici, & Regiomontani.* 1655. Hag. in-4°. Op. T. V. *Epiſtolæ variæ.* T. VI.

ſendi meſura enfin le diametre apparent de Mercure, & ne l'eſtima que de vingt ſecondes. Il forma dès-lors la conjecture que celui de Vénus n'excédoit pas de beaucoup une minute; ce que l'événement vérifia en 1639. A l'égard de Vénus dont nous avons vu que *Kepler* annonçoit le paſſage pour le 6 de Décembre de la même année, il n'arriva pas, ou du moins il ne fut pas viſible dans ces contrées. *Gaſſendi* l'attendit pluſieurs jours inutilement; c'eſt pourquoi il intitula le récit qu'il fit de ſon obſervation, *de Mercurio in ſole viſo & Venere inviſâ.* Cet écrit parut en 1632, avec une réponſe ſçavante de *Schickard* (*a*). On ſera peut-être étonné de ne point trouver *Kepler* parmi les Obſervateurs de Mercure. Cet homme célebre n'eut pas même le plaiſir de ſçavoir ſi ſon calcul étoit exact. Il étoit mort l'avant-veille du jour qu'il avoit annoncé pour cette obſervation. Quel regret pour un Aſtronome qui a ſon art à cœur, de quitter la vie dans pareille circonſtance!

Le phénomene dont nous venons de parler, arriva de nouveau en 1651 : mais il ne fut obſervé que d'un ſeul mortel. On vit à cette occaſion un exemple d'un grand zele pour l'avancement de l'Aſtronomie. *Jérémie Shakerley*, Anglois, ayant calculé le moment du paſſage de Mercure ſous le diſque du ſoleil, & ayant trouvé qu'il ne ſeroit viſible qu'en Aſie, s'embarqua pour y aller, & l'obſerva en effet à Surate le 3 Novembre à ſix heures quarante minutes du matin, c'eſt-à-dire à 1 h. 58 m. après minuit pour le méridien de Paris. Il informa les amis qu'il avoit en Europe, de ſon obſervation, & c'eſt d'eux que nous la tenons. Car il mourut aux Indes, victime de ſon amour pour l'Aſtronomie. Depuis ce temps les Aſtronomes ont été témoins de pluſieurs autres paſſages ſemblables : il y en a eu en 1661, 1677, 1690, 1697, 1707, 1723, 1736, 1740, 1743, & preſque récemment le 6 Mai 1753. M. *Deliſle* publia à cette occaſion un avertiſſement aux Obſervateurs, qui mérite d'être lu. Ce ſçavant Aſtronome nous y a promis un Traité complet de ces ſortes

(*a*) Schickard, Profeſſeur de Mathématiques & des Langues Orientales à Tubinge, étoit un Obſervateur adroit & éclairé. Il mourut en 1635; ſes obſervations ont été recueillies par Lucius Barretus, ou Albert Curtius, & inſérées dans ſon *Hiſt. Celeſtis*, à la ſuite de celles de Tycho, p. 913.

de paſſages, où il doit raſſembler toutes les obſervations qui en ont déja été faites. On ne peut qu'applaudir à ce deſſein, & déſirer qu'il ait une prompte exécution.

Les mêmes raiſons qui faiſoient déſirer aux Aſtronomes de voir Mercure ſous le ſoleil, rendoient auſſi un paſſage de Vénus ſous cet aſtre, très-important. *Kepler* l'avoit annoncé pour l'année 1631 : mais comme nous l'avons dit, il n'eut pas lieu, ou il ne fut pas viſible en Europe. Il ne fut donc point obſervé, & *Kepler* ayant prononcé qu'il n'y en auroit point d'autre durant tout le reſte du ſiecle, les Aſtronomes laiſſoient à leurs ſucceſſeurs le plaiſir de ce rare ſpectacle.

Kepler ſe trompoit néanmoins, & ce fut un jeune Aſtronome confiné dans le fond de l'Angleterre, preſque deſtitué de ſecours & d'inſtrumens, qui s'en apperçut, & qui fit cette obſervation encore unique juſqu'à nos jours. Il ſe nommoit *Horoxes*. Né dans le Comté de Lancaſtre de parens peu riches, il avoit pris le goût de l'Aſtronomie vers 1633. Mais deſtitué de ſecours & de Livres, il commençoit à ſe rebuter, lorſqu'il fit connoiſſance avec un autre jeune Aſtronome de ſon voiſinage, nommé *Guillaume Crabtree*, qui éprouvoit preſque les mêmes difficultés. Le commerce de Lettres qu'ils lierent ſur des matieres aſtronomiques, leur donna à l'un & à l'autre un nouveau courage. Ils ſe procurerent des Livres & des inſtrumens, & aidés des ſeules lumieres qu'ils ſe communiquoient mutuellement, ils firent d'importantes corrections dans la théorie des planetes. *Horoxes* avoit été d'abord ſéduit par les magnifiques promeſſes de *Lansberge*, & les pompeux panégyriques de quelques adulateurs, qu'on lit à la tête de ſon ouvrage. Le premier fruit de ſa liaiſon avec *Crabtree* fut de concevoir de grands ſoupçons contre cet Aſtronome, & ils ſe trouverent bientôt en certitude : il vit que ſes hypotheſes étoient vicieuſes, que les obſervations ſur leſquelles il les appuyoit, étoient ou falſifiées, ou pliées d'une maniere qui approchoit de la mauvaiſe foi ; enfin que *Kepler* & *Tycho-Brahé* étoient injuſtement & indignement dégradés. Il revint à ces deux reſtaurateurs de l'Aſtronomie, dont il fit une excellente apologie contre *Lansberge* (*a*), & adoptant les idées de

(*a*) Voy. *Horoccii opera poſthuma*, vid. *Aſtronomia Keppleriana defenſa & promota*.

Kepler, il ne s'attacha plus qu'à rectifier ſa théorie dans les points où elle étoit encore défectueuſe. Il fit entr'autres diverſes remarques très-importantes ſur la théorie de la lune, & l'hypotheſe qu'il propoſa pour ſatisfaire à ſes mouvemens, a paru à M. *Flamſteed* la plus exacte qui eût encore été imaginée; de ſorte que ce célebre Aſtronome n'a pas dédaigné de calculer les Tables qu'*Horrocius* n'avoit pas eu le temps de dreſſer d'après ſon hypotheſe (*a*). On en parlera en rendant compte des efforts des Aſtronomes pour perfectionner cette théorie. Revenons à l'obſervation célebre que nous avons annoncée plus haut.

Ce fut un hazard qui donna lieu à *Horoxes* de s'appercevoir que la conjonction inférieure de Venus qui devoit arriver vers la fin de 1639, ſeroit viſible. Ayant remarqué que les Tables de *Lansberge*, quoique fort défectueuſes à d'autres égards, l'annonçoient telle, il voulut examiner ce que donnoient celles de *Kepler;* & il trouva, à ſon grand étonnement, qu'elles l'annonçoient auſſi comme viſible pour le 4 Décembre, nouveau ſtyle. En ayant égard à quelques corrections qu'il avoit trouvé néceſſaires, il détermina le moment de la conjonction à cinq heures cinquante-ſept minutes du ſoir du 4 Décembre, avec une latitude auſtrale de dix minutes. Il informa auſſi-tôt ſon ami *Crabtrée* de cette importante découverte, & pour lui il ſe mit à obſerver le ſoleil dès la veille du jour annoncé par le calcul : enfin le ſoir de ce jour, comme il retournoit de l'Office Divin, dont la décence, dit-il, ne lui permettoit pas de s'abſenter pour un pareil ſujet, il vit Venus qui ne venoit que d'entrer dans le diſque du ſoleil dont elle touchoit le bord. Il étoit alors trois heures quinze minutes du ſoir. Il meſura auſſi-tôt la diſtance de Venus au centre du ſoleil, ce qu'il réitera à diverſes repriſes durant le peu de temps qu'il put jouir de ce ſpectacle. Car le ſoleil ſe coucha à trois heures cinquante minutes, de ſorte que la durée de l'obſervation ne fut que de trente-cinq minutes. L'ami d'*Horoxes* la fit auſſi, & ce ſont juſqu'ici les ſeuls mortels qui ayent vu Venus dans ces circonſtances.

Excerpta ex epiſtolis ad Crabtræum. Obſervationum Catalogus : lune theoria nova ; unà cum Crabtrei obſervationibus, nec non Joannis Flamſteedii de æquat. temporis diatribe, & numeris lunaribus ad novum lunæ ſyſtema Horoccii. Lond. 1678. in-4°.

(*a*) Voyez l'ouvrage précédent.

Quoique

Quoique le lieu où obſervoit *Horoxes*, ne lui ait permis de jouir du ſpectacle de Venus ſous le ſoleil, que bien peu de temps, l'Aſtronomie n'a pas laiſſé de tirer un grand fruit de cette obſervation. Il détermina en effet par ſon moyen avec beaucoup plus d'exactitude qu'on n'avoit encore fait, la poſition des nœuds, & divers autres élémens du mouvement de cette Planete. Il trouva d'abord que la conjonction étoit arrivée à cinq heures cinquante-cinq minutes du ſoir, au lieu de cinq heures cinquante-ſept minutes, que donnoit le calcul, & que la latitude de Venus à ce moment n'avoit été que de huit minutes trente-une ſecondes, au lieu de 10′, d'où il conclut qu'il falloit placer les nœuds au 13°. 22′. 45″ du Sagittaire & des Gémeaux, au lieu de 13°. 31′. 13″, où les plaçoit *Kepler*; que l'inclinaiſon de l'orbite à l'écliptique étoit de 3°. 24′ ou 25′; enfin que de toutes les Tables alors connues, les Rudolphines étoient celles qui approchoient le plus de la vérité. *Horoxes* écrivit ſur ce ſujet un excellent Traité intitulé: *Venus in ſole viſa*, auquel nous renvoyons pour le ſurplus des conſéquences qu'il tire de ſon obſervation. Il n'eut pas le plaiſir de le publier; il finiſſoit à peine de le mettre en ordre, qu'il mourut preſque ſubitement le 15 Janvier de l'an 1641. Ce précieux ouvrage, & divers autres écrits d'*Horoxes*, reſterent près de vingt ans enfouis dans l'obſcurité, juſqu'à ce qu'ils tomberent dans les mains d'une perſonne capable de les apprécier. *Huyghens* ſe procura une copie du Traité ci-deſſus, & en fit part à *Hevelius*, qui le fit imprimer en 1661, avec ſon obſervation du paſſage de Mercure arrivé cette année. Ce qu'on a pu tirer du reſte de ces précieux écrits, a vu le jour en 1678, par les ſoins du D. *Wallis*, & de la Société Royale de Londres. Quant à *Crabtree*, il ſuivit de près ſon ami, également à la fleur de ſon âge. Il périt, à ce qu'on conjecture, de même que *Gaſcoigne* auquel les Anglois attribuent la premiere invention du Micrometre, dans les guerres civiles qui déſolerent l'Angleterre vers ce temps.

Depuis l'année 1639, il n'eſt point arrivé de phénomene ſemblable que les Aſtronomes ayent pu obſerver. Mais dans peu d'années, c'eſt-à-dire en 1761 (le 26 Juin) on jouira de nouveau de ce ſpectacle; & comme il y a aujourd'hui des Obſervateurs répandus ſur toute la ſurface de la terre, on peut

être assuré que ce passage de Venus sous le soleil sera vu d'un grand nombre d'endroits. Outre l'utilité dont il sera pour déterminer avec encore plus de précision quelques élémens de la théorie de cette Planete, il servira à trouver avec une exactitude à laquelle aucune autre méthode ne sçauroit atteindre, la parallaxe du soleil & sa distance à la terre. M. *Hallei* a donné pour cela dans les *Transf. Phil.* (ann. 1716.) une méthode dont voici l'esprit.

Chacun sçait que la distance de Venus à la terre dans sa conjonction inférieure, n'est qu'environ le quart de celle du soleil; d'où il suit que sa parallaxe est alors quadruple de celle de cet astre. Qu'on suppose à présent un spectateur qui observe le passage de Venus, d'un lieu tellement situé que l'entrée & la sortie arrivent à peu près à la même distance de Midi; le mouvement de ce spectateur occasionné par la rotation de la terre, & qui se fera en sens contraire de celui de Venus, raccourcira la durée de sa demeure sur le disque du soleil, d'un peu moins que le double du temps que Venus employeroit à parcourir par son mouvement propre un arc égal à sa parallaxe. M. *Hallei* trouve qu'en supposant la parallaxe du soleil de douze secondes, ce raccourcissement de durée sera d'environ onze minutes. Au contraire, si l'on observe le passage de Venus d'un lieu tel, qu'on apperçoive son entrée vers le coucher du soleil, & sa sortie vers son lever, ce qui pourra se faire en quelques lieux de l'Amérique Septentrionale, le mouvement de Venus sur le soleil sera retardé à l'égard de l'Observateur terrestre, dont le mouvement se fera vers le même côté, & ce retardement fera durer le passage entier d'une sixaine de minutes de plus que si cet Observateur, placé au centre de la terre, eût été immobile. Ainsi voilà dix-sept minutes de différence entre les durées du passage observé de ces deux lieux; il n'en faut pas davantage à ceux qui connoissent la précision des Observateurs modernes, pour voir qu'on pourra déterminer par ce moyen, à une très-petite erreur près, la parallaxe du soleil. Nous renvoyons le lecteur curieux de plus grands détails à l'écrit de M. *Hallei*.

Le raisonnement qu'on vient de faire à l'égard de Venus, on le peut faire à l'égard de Mercure, à cela près que la parallaxe de cette derniere Planete étant beaucoup moindre, &

ſon mouvement plus rapide, il ne peut pas y avoir à beaucoup près une auſſi grande inégalité entre les durées de ſes paſſages au devant du ſoleil obſervés de différens lieux de la terre. M. *Deliſle* comptoit néanmoins en publiant ſon avertiſſement ſur le dernier paſſage de Mercure, pouvoir s'en ſervir pour déterminer la parallaxe du ſoleil, en attendant que celui de Venus ſervît à le faire avec encore plus de préciſion. Mais il y a recontré des obſtacles phyſiques dont il eſt à propos que les Obſervateurs ſoient avertis avant le phénomene qu'on attend en 1761. C'eſt que le vrai diametre apparent du ſoleil paroît continuellement augmenté d'une couronne lumineuſe, & variable ſuivant la couleur & l'opacité des verres dont on ſe ſert, tandis que celui de la Planete qui le parcourt, eſt au contraire diminué par une ſemblable couronne lumineuſe qui anticipe ſur elle; ce qui donne lieu à quelques phénomenes particuliers qui rendent l'entrée & la ſortie de cette Planete, incertaine pendant quelque intervalle de temps. Nous devons à M. de *Barros*, Gentilhomme Portugais, la remarque & l'explication de ces phénomenes, qu'il a données dans un écrit lu à l'Académie des Sciences, & publié en 1753. Il en réſulte que pour l'obſervation exacte de la durée de ces paſſages, il eſt néceſſaire de quelques attentions ſur leſquelles cet ingénieux Obſervateur, auſſi-bien que M. *Deliſle*, ne ſont pas encore entiérement ſatisfaits; & c'eſt à fixer cette incertitude qu'ils travaillent aujourd'hui. L'avertiſſement que M. *Deliſle* doit publier au ſujet du paſſage prochain de Venus, & qui ne doit pas tarder à paroître, inſtruira les Aſtronomes des précautions qu'ils doivent prendre à cet égard.

VIII.

De l'Aſtronomie-Phyſique de Deſcartes.

On peut diviſer l'Aſtronomie en deux parties, l'une purement Mathématique, l'autre Phyſique; l'une qui travaille à repréſenter & à aſſujettir au calcul les mouvemens céleſtes, l'autre qui tâche d'en aſſigner les cauſes & le Méchaniſme. Il n'y a proprement que la premiere qui ſoit de notre plan, & nous pourrions par cette raiſon légitimement nous diſpenſer d'entrer dans l'examen du ſyſtême Phyſico-Aſtronomique de *Deſcartes*, qui appartient tout entier à la ſeconde. Mais la cé-

lébrité de ce ſyſtême nous impoſe en quelque façon la loi d'en parler & de le diſcuter.

Sans entrer dans le détail du Roman phyſique de *Deſcartes*, j'appelle ainſi la maniere dont il conçoit la formation de ſes trois élémens, je me borne à dire qu'il fait de notre ſyſtême planétaire comme un vaſte tourbillon au milieu duquel eſt le ſoleil. Les diverſes parties de ce tourbillon ſe meuvent avec des vîteſſes inégales, & entraînent les Planetes qui y ſont plongées, & qui y nagent dans des couches d'une denſité égale à la leur. Les Planetes qui ont des Satellites, ſont elles-mêmes placées au centre d'un tourbillon plus petit qui nage dans le grand. Les corps plongés dans ce petit tourbillon, ſont ces Satellites, & s'y meuvent ſuivant les mêmes loix que les Planetes principales autour du ſoleil.

Tel eſt en peu de mots le ſyſtême céleſte de *Deſcartes*: rien n'eſt plus ſimple, plus intelligible, & plus ſatisfaiſant du premier abord; de ſorte qu'on ne doit point être ſurpris que l'idée en ait extrêmement plu à ſon Auteur, & qu'elle ait même encore aujourd'hui des partiſans qui aient peine à s'en détacher. Mais ce n'eſt pas toujours ſur ce premier coup d'œil qu'on doit ſe déterminer en faveur d'une opinion phyſique. Il faut qu'une hypotheſe ſatisfaſſe aux phénomenes; c'eſt-là la pierre de touche à laquelle il faut l'éprouver; & nous le diſons avec regret, celle de *Deſcartes* ne ſoutient pas cette épreuve. Les remarques ſuivantes vont le montrer.

1°. On ſçait que les mouvemens des Planetes ſont elliptiques; il faut donc que les couches des tourbillons le ſoient auſſi. Mais quelle en ſera la cauſe? *Deſcartes* l'attribue à la compreſſion des tourbillons voiſins. Si cela étoit, il faudroit que toutes les orbites des Planetes fuſſent alongées du même côté; ce qui n'eſt pas. Il y a plus, il ſemble que le ſoleil devroit occuper le centre commun de toutes ces orbites, & non un de leurs foyers. Enfin il eſt évident que ſi cet alongement des tourbillons, étoit l'effet de la compreſſion latérale des tourbillons voiſins, la matiere céleſte qui circuleroit près du centre s'en reſſentiroit le moins; de ſorte que l'orbite de Mercure ſeroit la moins excentrique de toutes. Or c'eſt tout le contraire; ainſi il eſt néceſſaire de rejetter entiérement ce méchaniſme.

2°. Quoique *Deſcartes* ne s'explique pas poſitivement ſur ce qui entretient ce mouvement de tourbillon, il eſt aſſez évident qu'il a penſé, ou que la révolution de la planete centrale en étoit la cauſe, ou au contraire que ce mouvement étoit celle de la circonvolution de cette planete. Mais on va faire voir qu'on ne peut dire ni l'un ni l'autre. En effet, il eſt d'abord facile d'appercevoir que toutes les planetes devroient faire leur révolution dans l'équateur, ou paralléle-ment à l'équateur de la planete centrale. Or, on ſçait qu'il n'y en a aucune parmi les principales, qui n'ait ſon orbite inclinée à l'équateur ſolaire; la lune tourne auſſi autour de la terre, ſans paroître avoir aucun rapport phyſique à l'équateur terreſtre. En ſecond lieu, ſi la rotation de la planete centrale produiſoit le mouvement de tourbillon, ou en étoit produite, la couche du tourbillon contigu à la planete, auroit la même vîteſſe qu'elle; ce qui ne ſçauroit ſe concilier avec la fameuſe loi de *Kepler*. Le calcul en eſt facile à faire: l'on trouve, par exemple, que pour que cette loi eût lieu, la vîteſſe de la couche contigue au ſoleil devroit faire ſa révolution en un tiers de jour environ: cependant le ſoleil ne fait la ſienne qu'en 27 jours & demi; ſa rotation devroit donc être accélérée, juſqu'à ce qu'il eût pris un mouvement convenable à la loi du tourbillon, ou bien il la détruiroit. Les planetes qui ont des ſatellites autour d'elles, comme la terre, Jupiter & Saturne, fourniſſent des objections encore plus inſolubles, parce qu'elles ne laiſſent lieu à aucun ſubterfuge, tel que quelque partiſan obſtiné des tourbillons pourroit en imaginer pour affranchir le ſoleil de cette communication du mouvement.

3°. Les Phyſiciens qui, à l'aide de la Géométrie & d'une ſaine théorie d'Hydrodynamique, ont examiné le mouvement que pourroit prendre un tourbillon, n'ont jamais pu le concilier avec la regle de *Kepler*. M. *Newton* a traité cette matiere à la fin du ſecond Livre de ſes principes, & trouvoit que dans un tourbillon cylindrique „ c'eſt-à-dire engendré par un cylindre tournant rapidement autour de ſon centre, les temps périodiques des couches devroient être comme les diſtances à l'axe, & que dans le tourbillon ſphérique, c'eſt-à-dire engendré par le mouvement d'une ſphere centrale, les temps

périodiques des couches ſeroient comme les quarrés des diſtances aux centres, tandis que ſuivant la loi de *Kepler*, ils devroient être comme les racines quarrées des cubes de ces diſtances. Il eſt vrai que M. *Bernoulli* (*a*) a remarqué dans la ſuite, que M. *Newton* n'avoit pas eu égard dans cette détermination à quelques élémens qui devoient y entrer, & il a cru trouver que les couches d'un tourbillon ſphérique dans lequel on ſuppoſeroit la denſité en raiſon inverſe de la racine quarrée de la diſtance au centre, auroient des mouvemens tels que les quarrés des temps périodiques ſeroient comme les cubes des diſtances (*a*). Il explique auſſi l'excentricité des planetes par un mouvement d'oſcillation combiné avec le mouvement circulaire du tourbillon. Mais M. d'*Alembert* examinant avec ſoin le calcul de M. *Bernoulli*, a trouvé (*b*) que ce grand homme s'étoit trompé en négligeant une partie conſtante d'intégrale, qui change totalement le réſultat. Or, en ayant égard à cette conſtante, il montre qu'un tourbillon, ſoit cylindrique, ſoit ſphérique, ne ſçauroit ſubſiſter, à moins que toutes ſes couches ne faſſent leurs révolutions dans le même temps, & qu'il ne ſoit infini, ou bien circonſcrit par des bornes impénétrables, comme ſeroient les parois d'un vaſe. On peut encore renverſer tout l'édifice de M. *Bernoulli* par une remarque qu'ont faite MM. *Daniel Bernoulli* & d'*Alembert*. C'eſt que pour qu'un tourbillon de matiere fluide puiſſe ſubſiſter, il faut que la force centrifuge d'une partie quelconque de volume donné, priſe dans quelque couche que ce ſoit, ne ſoit pas plus grande que celle d'une partie égale priſe dans la couche ſupérieure. Ce ne ſeroit point aſſez, comme quelques Philoſophes partiſans des tourbillons l'ont penſé, que l'effort total d'une couche ne l'emportât point ſur l'effort total de celle qui la ſuit; car ſi l'on mettoit dans un vaſe des fluides diverſement mêlangés, ſuffiroit-il que la peſanteur totale d'une couche ne ſurpaſſât point celle de l'inférieure, pour que cet ordre fût permanent ? non, ſans doute ! Aucun Hydroſtaticien ne diſconviendra que s'il y a inégalité dans quelque endroit, la portion prévalente de la couche ſupé-

(*a*) *Nouvelles penſées ſur le ſyſtême de Deſcartes*, Diſcours couronné par l'Académie en 1730.

(*b*) *Traité des Fluides*, p. 385 & ſuiv.

ieure enfoncera l'inférieure, & ne ceſſera de deſcendre, u'elle n'ait trouvé une réſiſtance égale. Ainſi il en doit être e même dans l'hypotheſe des tourbillons. Or dans celui de . *Bernoulli*, ſi nous négligeons l'inégalité de denſité, nous trouvons que l'effort centrifuge croît réciproquement comme le quarré du rayon, & ſi nous avons égard à la denſité qu'il ſuppoſe en raiſon réciproque de la racine de la diſtance au centre, on trouve que cet effort centrifuge eſt en raiſon inverſe de la puiſſance du rayon dont l'expoſant eſt $\frac{1}{2}$. D'où il eſt évident que cet effort va toujours en croiſſant de la circonférence au centre. C'eſt comme ſi l'on prétendoit arranger dans un vaſe pluſieurs fluides d'inégale peſanteur ſpécifique, de maniere que le plus léger occupât le fond. Quand même les couches iroient en décroiſſant de volume, afin que l'effort total de chacune ne l'emportât point ſur celui d'une autre, rien n'empêcheroit le mêlange. La plus peſante ſpécifiquement iroit au fond, à moins que ce ne fuſſent des fluides d'une très-grande ténacité.

M. *Bouguer* (*a*) nous fournit deux autres objections puiſſantes contre le ſentiment de M. *Bernoulli*. La premiere eſt celle-ci. En faiſant tourner une couche ſphérique du tourbillon comme il le ſuppoſe, on établit une ſorte d'équilibre entre les différentes parties du tourbillon, dans le ſens du rayon du parallele, ou ſi l'on veut, du rayon même du tourbillon. Mais il n'y en a aucun dans la direction perpendiculaire à ce rayon. Toutes les parties tendent à remonter vers l'équateur ſans être contrebalancées par un effort contraire & égal; ce qui ne peut manquer de mettre le déſordre dans ce tourbillon, & de le détruire. Il ſemble même ſuivre delà qu'un tourbillon ſphérique eſt abſolument impoſſible. Auſſi ce paroît être le ſentiment de M. d'*Alembert* dans l'ouvrage que nous avons cité plus haut. La ſeconde des objections dont nous venons de parler, regarde la maniere dont M. *Bernoulli* conçoit que les planetes décrivent des orbites elliptiques. M. *Bouguer* montre dans un Mémoire inſéré parmi ceux de l'Académie en 1731, que les deux portions de courbe que décriroit la planete par ſes oſcillations de l'Aphélie au Périhélie, ne ſçauroient être égales & ſemblables.

(*a*) *Entretions ſur l'inclinaiſon des orbites des Planetes.* Eclair. p. 89.

On a encore de M. *Bernoulli* une autre piece que celle que nous avons citée plus haut, & dans laquelle en admettant les tourbillons cartéſiens avec les changemens imaginés dans la premiere, il prétend déduire l'inclinaiſon des orbites des planetes à l'équateur ſolaire, des ſeules loix de l'impulſion communiquée à ces planetes par le tourbillon. Mais comme il y admet, & même qu'il eſt néceſſaire qu'il prenne pour principe, que chaque planete, la terre par exemple, eſt un ſphéroïde alongé, ce qui eſt contraire aux obſervations modernes, nous croyons inutile de nous y arrêter.

M. *Leibnitz*, dans un écrit inſéré dans les Actes de Leipſick, & intitulé *Tentamen de motuum celeſtium cauſis*, tentoit de concilier les tourbillons avec les phénomenes d'une autre maniere. Il ſuppoſoit dans les différentes couches du tourbillon, une vîteſſe en raiſon réciproque des diſtances, & enſuite combinant la tranſlation circulaire de la planete dans ces différentes couches, avec ſa force centrifuge & une force centrale qui la pouſſoit ou l'attiroit vers le ſoleil, il réuſſiſſoit à montrer que ſi cette derniere étoit en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, la planete décriroit des aires égales en temps égaux, & une ellipſe ayant le ſoleil à ſon foyer. Mais il y a contre ce ſyſtême autant de difficultés à oppoſer que contre le précédent.

Premiérement, un tourbillon tel que le conçoit M. *Leibnitz*, ne ſçauroit ſubſiſter; car la force centrifuge de chaque particule de matiere, y croîtroit à meſure qu'on s'approcheroit du centre. 2°. Ce méchaniſme ſatisfait, à la vérité, au mouvement d'une Planete ſeule conſidérée dans les diverſes parties de ſon orbite. Mais ſi l'on compare deux Planetes différentes, on trouvera que la loi de *Kepler* exige une circulation différente de celle que ſuppoſe M. *Leibnitz*. Il faudroit que le tourbillon fût comme partagé en diverſes couches d'une épaiſſeur conſidérable, & iſolées entr'elles, dans chacune deſquelles les vîteſſes moyennes ſeroient réciproquement comme la racine quarrée de la diſtance, tandis que les diverſes couches de chacune auroient des vîteſſes réciproques aux diſtances elles-mêmes. Or cela ne ſçauroit être admis, à moins d'introduire dans la Phyſique la licence des hypotheſes les plus arbitraires. 3°. Je remarque encore que le tourbillon

billon ſuppoſé par M. *Leibnitz*, eſt entiérement inutile. Car la ſeule force centrifuge qu'il emploie, avec ce qu'il appelle l'*effort paracentrique* de la Planete qui n'eſt que l'attraction Newtonienne déguiſée, ſuffit pour faire décrire des orbites elliptiques.

Nous n'accumulerons pas davantage de réfléxions contre le ſyſtême des tourbillons. Celles que nous venons de faire ne nous paroiſſent laiſſer aucune réponſe aux partiſans de ce ſyſtême. Quelqu'arrangement qu'on imagine dans les couches & dans les vîteſſes de ces tourbillons, on ne peut venir à bout de les concilier avec toutes les loix de l'Hydroſtatique & de la Méchanique. En vain MM. *Villemot* (*a*), de *Molieres* (*b*), de *Gamaches* (*c*), & preſque récemment l'Auteur de la *Théorie des Tourbillons* (*d*), partiſans célebres de ce ſyſtême, ont-ils épuiſé tout leur art à en combiner les parties, à imaginer de nouveaux mouvemens, à ſe corriger les uns les autres, à prévenir enfin les objections & à y répondre, c'eſt un édifice que toute l'habileté de ſes Architectes ne peut ſoutenir. Tandis qu'on le répare d'un côté, il menace ruine & croule effectivement d'un autre.

5°. Mais admettons pour quelques inſtans, que le ſyſtême des tourbillons fût compatible avec les phénomenes que nous obſervons, & les loix connues de la Méchanique, ſa cauſe n'en ſeroit guere meilleure. Nous avons des preuves poſitives, qu'on ne ſçauroit admettre dans les eſpaces céleſtes aucune matiere réſiſtante, du moins ſenſiblement. Il eſt certain aujourd'hui que les Cometes traverſent ces eſpaces dans tous les ſens, ſans éprouver dans leur mouvement aucune altération apparente; c'eſt ce qu'on établira en rendant compte du ſyſtême moderne ſur ces aſtres d'une eſpece ſinguliere; & cela eſt ſi bien reconnu, que depuis preſque le commencement de ce ſiecle, tous les partiſans des tourbillons n'ont rien oublié pour ôter à la matiere dont ils les compoſent, toute réſiſtance (*e*).

(*a*) *Nouvelle explication du mouvement des Planetes.* Lyon. 1700.

(*b*) *Leçons de Phyſique.* Paris, 1733. in-12.

(*c*) *Aſtron. Phyſique, &c.* Paris, 1740. in-4°.

(*d*) Paris, 1753.

(*e*) Voyez M. Bernoulli, *dans les Pieces citées*; M. de Moliere, *Leçons Phyſiques, Leç. v*; M. de Gamaches, *Aſtron. Phyſ. &c. v^e Diſſ.*

Ils ont imaginé pour cet effet, les uns un fluide infiniment peu denſe, les autres un fluide infiniment diviſé, & ils ont cru ſatisfaire pleinement à l'objection. Mais, à notre avis, rien n'eſt plus foible, & plus mal combiné que cette réponſe. En admettant leur ſuppoſition, ſçavoir que ce fluide ne réſiſtera pas, ou ne réſiſtera qu'infiniment peu, de quel uſage peut-il être, ou pour imprimer aux Planetes le mouvement qu'ils en dérivent, ou pour en déduire la cauſe de la peſanteur ? Un fluide qui ne réſiſte point, ou infiniment peu, n'eſt capable que d'une action infiniment petite. Quant à la prétention de ceux qui veulent qu'un fluide infiniment atténué ne préſentera aucune réſiſtance aux corps qui le traverſeront, indépendamment de la réponſe ci-deſſus, nous ne pouvons nous empêcher de remarquer que rien n'eſt plus gratuit & plus contraire aux loix de la Méchanique. Ces loix nous apprennent que la réſiſtance, tout le reſte étant égal, eſt proportionnelle à la maſſe à déplacer, quelle que ſoit ſa figure & ſa diviſion. Sur cela nous indiquerons, afin d'abréger, les excellentes réfléxions de M. *Bouguer* dans ſes *Entretiens ſur la cauſe de l'inclinaiſon des orbites des Planetes.*

IX.

Longomontanus.

Avant que de terminer ce Livre, il nous faut faire mention de quelques Aſtronomes dont nous n'avons rien dit encore. Nous commencerons par *Longomontanus* (*a*), dont le nom eſt célebre par le ſyſtême mi-parti de ceux de *Copernic* & de *Tycho*, dont on le fait Auteur mal-à-propos; car ce ſyſtême eſt plus ancien, & ſemble être l'ouvrage de Raymard *Urſus Dithmarſus*, comme nous l'avons dit ailleurs (*b*). *Longomontanus* eſt Auteur de divers ouvrages Mathématiques, entr'autres de l'*Aſtronomia Danica*, imprimée pour la premiere fois en 1621, & de nouveau en 1640. Les hypotheſes qu'il y emploie ſont proprement celles de *Tycho*, de ſorte qu'on lui a l'obligation de nous avoir tranſmis les idées de ce célebre Aſtronome. Mais c'eſt-là ſon principal mérite; car il montre

(*a*) Né en 1562, à Langberg en Dannemarck, d'où lui eſt venu ſon nom, & mort en 1647, Profeſſeur d'Aſtronomie à Copenhague.

(*b*) Volume précédent, Part. IV, Liv. II, art. I.

aſſez peu de diſcernement en préférant ces hypotheſes à celles que *Kepler* avoit déja établies ſi ſolidement : auſſi cet ouvrage n'a-t'il pas joui long-temps de quelque réputation parmi les Aſtronomes.

Jean *Bayer* d'Augſbourg, rendit au commencement de ce ſiecle, un ſervice ſignalé à l'Aſtronomie, par l'exécution d'un ouvrage important. Il publia en 1603, ſous le titre d'*Uranometria*, une deſcription des conſtellations céleſtes en pluſieurs planches, avec leur explication, & le catalogue des étoiles qu'elles contiennent. *Bayer* y déſigne chaque étoile par une lettre grecque ou latine, dénomination qui a depuis fait comme loi parmi les Aſtronomes. On trouve ſeulement à redire dans cet ouvrage, d'ailleurs digne de l'accueil qu'il reçut, que les figures y ſont à l'envers, comme ſi étant droites pour ceux qui ſeroient ſitués au dedans du globe céleſte, on les voyoit de dehors. La cauſe de ce défaut eſt facile à reconnoître pour ceux qui ſont au fait de la gravure. *Bayer* ne fit pas attention qu'une figure étant gravée ſur la planche de cuivre telle qu'elle doit être vue, le côté droit devient le gauche ſur le papier où on l'imprime. Mais ce défaut n'eſt pas eſſentiel, & cela n'empêche pas que l'*Uranométrie* de *Bayer* ne ſoit encore recherchée par les Aſtronomes, & qu'ils ne la réputent un Livre précieux. *Bayer.*

Il y eut quelques années après un compatriote de *Bayer* qui forma une entrepriſe ſinguliere. Il ſe nommoit Jules *Schiller*. Ce pieux Uranographe fut choqué de voir le Ciel rempli de perſonnages & d'objets appartenans à la Mythologie ; & il propoſa de les changer, & de leur ſubſtituer des figures tirées de l'ancien & du nouveau Teſtament. Il plaça les douze Apôtres dans le Zodiaque ; il tira les conſtellations méridionales de l'ancien Teſtament, & les ſeptentrionales du nouveau. Son Livre eſt intitulé par cette raiſon : *Cœlum Stellatum Chriſtianum*, & parut en 1627. Mais les Aſtronomes n'ont point adopté ce biſarre projet, qui n'auroit ſervi qu'à jetter de l'embarras dans l'Aſtronomie.

Lansberge, (Philippe) (*a*) fleuriſſoit vers ce temps dans

(*a*) Né à Gand en 1560, & mort en 1635 Miniſtre de Goes en Zélande. Le Recueil entier de ſes Œuvres parut en 1663. in-fol.

Ils ont imaginé pour cet effet, les uns un fluide infiniment peu denſe, les autres un fluide infiniment diviſé, & ils ont cru ſatisfaire pleinement à l'objection. Mais, à notre avis, rien n'eſt plus foible, & plus mal combiné que cette réponſe. En admettant leur ſuppoſition, ſçavoir que ce fluide ne réſiſtera pas, ou ne réſiſtera qu'infiniment peu, de quel uſage peut-il être, ou pour imprimer aux Planetes le mouvement qu'ils en dérivent, ou pour en déduire la cauſe de la peſanteur? Un fluide qui ne réſiſte point, ou infiniment peu, n'eſt capable que d'une action infiniment petite. Quant à la prétention de ceux qui veulent qu'un fluide infiniment atténué ne préſentera aucune réſiſtance aux corps qui le traverſeront, indépendamment de la réponſe ci-deſſus, nous ne pouvons nous empêcher de remarquer que rien n'eſt plus gratuit & plus contraire aux loix de la Méchanique. Ces loix nous apprennent que la réſiſtance, tout le reſte étant égal, eſt proportionnelle à la maſſe à déplacer, quelle que ſoit ſa figure & ſa diviſion. Sur cela nous indiquerons, afin d'abréger, les excellentes réfléxions de M. *Bouguer* dans ſes *Entretiens ſur la cauſe de l'inclinaiſon des orbites des Planetes.*

IX.

Longomontanus.

Avant que de terminer ce Livre, il nous faut faire mention de quelques Aſtronomes dont nous n'avons rien dit encore. Nous commencerons par *Longomontanus* (*a*), dont le nom eſt célebre par le ſyſtême mi-parti de ceux de *Copernic* & de *Tycho*, dont on le fait Auteur mal-à-propos; car ce ſyſtême eſt plus ancien, & ſemble être l'ouvrage de Raymard *Urſus Dithmarſus*, comme nous l'avons dit ailleurs (*b*). *Longomontanus* eſt Auteur de divers ouvrages Mathématiques, entr'autres de l'*Aſtronomia Danica*, imprimée pour la premiere fois en 1621, & de nouveau en 1640. Les hypotheſes qu'il y emploie ſont proprement celles de *Tycho*, de ſorte qu'on lui a l'obligation de nous avoir tranſmis les idées de ce célebre Aſtronome. Mais c'eſt-là ſon principal mérite; car il montre

(*a*) Né en 1562, à Langberg en Dannemarck, d'où lui eſt venu ſon nom, & mort en 1647, Profeſſeur d'Aſtronomie à Copenhague.

(*b*) Volume précédent, Part. IV, Liv. II, art. I.

aſſez peu de diſcernement en préférant ces hypotheſes à celles que *Kepler* avoit déja établies ſi ſolidement : auſſi cet ouvrage n'a-t'il pas joui long-temps de quelque réputation parmi les Aſtronomes.

Jean *Bayer* d'Augſbourg, rendit au commencement de ce ſiecle, un ſervice ſignalé à l'Aſtronomie, par l'exécution d'un ouvrage important. Il publia en 1603, ſous le titre d'*Uranometria*, une deſcription des conſtellations céleſtes en pluſieurs planches, avec leur explication, & le catalogue des étoiles qu'elles contiennent. *Bayer* y déſigne chaque étoile par une lettre grecque ou latine, dénomination qui a depuis fait comme loi parmi les Aſtronomes. On trouve ſeulement à redire dans cet ouvrage, d'ailleurs digne de l'accueil qu'il reçut, que les figures y ſont à l'envers, comme ſi étant droites pour ceux qui ſeroient ſitués au dedans du globe céleſte, on les voyoit de dehors. La cauſe de ce défaut eſt facile à reconnoître pour ceux qui ſont au fait de la gravure. *Bayer* ne fit pas attention qu'une figure étant gravée ſur la planche de cuivre telle qu'elle doit être vue, le côté droit devient le gauche ſur le papier où on l'imprime. Mais ce défaut n'eſt pas eſſentiel, & cela n'empêche pas que l'*Uranométrie* de *Bayer* ne ſoit encore recherchée par les Aſtronomes, & qu'ils ne la réputent un Livre précieux. *Bayer.*

Il y eut quelques années après un compatriote de *Bayer* qui forma une entrepriſe ſinguliere. Il ſe nommoit Jules *Schiller*. Ce pieux Uranographe fut choqué de voir le Ciel rempli de perſonnages & d'objets appartenans à la Mythologie ; & il propoſa de les changer, & de leur ſubſtituer des figures tirées de l'ancien & du nouveau Teſtament. Il plaça les douze Apôtres dans le Zodiaque ; il tira les conſtellations méridionales de l'ancien Teſtament, & les ſeptentrionales du nouveau. Son Livre eſt intitulé par cette raiſon : *Cœlum Stellatum Chriſtianum*, & parut en 1627. Mais les Aſtronomes n'ont point adopté ce biſarre projet, qui n'auroit ſervi qu'à jetter de l'embarras dans l'Aſtronomie.

Lansberge, (Philippe) (*a*) fleuriſſoit vers ce temps dans

(*a*) Né à Gand en 1560, & mort en 1635 Miniſtre de Goes en Zélande. Le Recueil entier de ſes Œuvres parut en 1663. in-fol.

Lansberge. les Pays-Bas. On ne peut lui refuſer des talens, & il eût pu rendre davantage de ſervices à l'Aſtronomie, ſi au lieu d'avoir l'ambition de fonder un corps complet de cette ſcience ſur ſes hypotheſes propres, & de déchirer comme il fait *Tycho* & *Kepler*, il eût mieux jugé de ces hommes célebres & de leurs ſentimens aſtronomiques. Il publia en 1632 ſon *Uranometria*, & l'année ſuivante ſes *Tables perpétuelles*; mais ſes grandes promeſſes, & les pompeux panégyriques qu'on lit à la tête de ce dernier ouvrage, n'en ont pas impoſé long-temps. On a bien-tôt apperçu que ces Tables vantées comme perpétuelles, n'étoient rien moins que dignes de ce titre : on a même relevé des traits de mauvaiſe foi dans l'emploi qu'il fait des obſervations pour établir ſes hypotheſes, & le récit de celles qu'il rapporte pour les confirmer. *Horoccius* l'a fort maltraité dans ſon apologie de *Kepler* & de *Tycho*, ſous le titre d'*Aſtronomia Kepleriana defenſa & promota*. Il y montre que *Lansberge*, par l'envie de contredire & de rabaiſſer ces deux hommes célebres, tombe lui-même dans une multitude d'abſurdités, de contradictions & d'embarras inutiles.

Morin. *Morin*, (Jean-Baptiſte) (*a*) s'eſt rendu plus célebre par ſes ridicules, que par ſes talens quoiqu'il n'en manquât pas. Mais ſon attachement à l'Aſtrologie judiciaire, & au ſyſtême de l'immobilité de la terre qu'il défendit par les plus pitoyables raiſons, & avec une confiance inſultante, lui firent preſque autant de contradicteurs & d'ennemis qu'il y avoit de perſonnes de mérite ; & comme *Morin* n'étoit rien moins que poli dans ſes attaques, quelques-uns de ſes adverſaires lui répondirent ſur le même ton, ce qui engagea une querelle plus digne de la Halle que de gens qui faiſoient profeſſion de ſçavoir. *Morin* crut avoir trouvé la ſolution du problême des longitudes, par le moyen du mouvement de la lune, & il demanda des Commiſſaires au Cardinal de Richelieu, qui lui en fit nommer. Mais ils le condamnerent ; & en effet, quoique ſa méthode fût bonne dans la théorie, il manquoit encore trop de connoiſſances

(*a*) Né à Villefranche en Beaujolois en 1583, & mort à Paris en 1656.

ſur le mouvement de la lune, & ſur divers autres points aſtronomiques, pour qu'on pût en tirer quelque utilité. Il la défendit dans ſon *Aſtronomia jam à fundamentis reſtituta*, qu'il publia en 1640 : cet ouvrage n'eſt point mépriſable ; la méthode que *Morin* y donne pour l'équation du temps, eſt la véritable, quoique M. *Bouillaud* l'ait traité à ce ſujet d'une maniere tout-à-fait indigne & ridicule.

Bouillaud.

M. *Bouillaud* (*a*) tient un rang diſtingué parmi les Aſtronomes & les Mathématiciens du dix-ſeptieme ſiecle. Il publia en 1645 ſon *Aſtronomia Philolaïca*, ouvrage où il prétend repréſenter les mouvemens céleſtes par une nouvelle hypotheſe. Il admet les ellipſes de *Kepler*, mais il n'approuve pas ſa maniere d'y faire mouvoir les Planetes. M. *Bouillaud* imagine ſon ellipſe adaptée dans un cône oblique, de ſorte que l'axe de ce cône paſſe par le foyer qui n'eſt pas occupé par le ſoleil ; enſuite il conçoit que la Planete ſe meut dans cette ellipſe de maniere qu'en temps égaux elle décrive des angles égaux, non à l'égard de ce foyer, mais autour de l'axe du cône. C'eſt-là l'hypotheſe qu'il donne pour Phyſique, par où il paroît qu'il étoit peu Phyſicien ; car tout au plus l'auroit il pu donner comme Mathématique, ſi elle eût repréſenté parfaitement les mouvemens céleſtes, puiſqu'il n'aſſigne aucune cauſe, aucun moyen naturel & méchanique pour engendrer un pareil mouvement. Il y a encore de remarquable dans le procédé de *Bouillaud*, ſçavoir que ſes Tables ne ſont point conſtruites ſur cette hypotheſe. Il imagine bien-tôt après une maniere de décrire l'ellipſe par la combinaiſon de deux mouvemens, celui d'un épicycle ſur ſon déférent excentrique, & celui de l'aſtre ſur cet épicycle, en ſens contraire & avec un mouvement angulaire double de

(*a*) Iſmael Bouillaud, naquit à Loudun en 1605. Il voyagea dans ſa jeuneſſe, & étant venu à Paris, il y publia divers ouvrages, comme ſon Traité *de Natura lucis*, (1638.) qui eſt de mauvaiſe Phyſique ; ſon *Philolaüs*, ou *Diſſertatio de vero ſyſtemate mundi* (1639.) ; ſon *Aſtronomia Philolaïca*, dont nous parlons dans cet article. On a encore de lui les écrits ſuivans, *Calculus duarum Ecl.* ann. 1652. *Exercit. Geom. de inſcr. & circumſcr. figuris, conicis ſect. & poriſmatibus.* 1657. *De lineis ſpiralibus.* 1657. *Aſtr. Phil. fundamenta clariùs aſſerta.* 1657. *Ad Aſtron. monita duo, &c.* 1667. *Opus novum de Arith. infinit. lib. VI, compreh.* in-fol. 1683. M. Bouillaud mourut en 1694, à l'Oratoire, dont il avoit embraſſé l'inſtitut.

celui du centre de l'épicycle. Ainſi la critique qu'en fit le Docteur *Seth Ward* d'Oxford, eſt légitime (*a*), & *Bouillaud* fait de vains efforts pour ſe juſtifier. Nous n'entrerons pas dans d'autres détails ſur l'*Aſtronomie Philolaïque*, qui eſt d'ailleurs un ouvrage ſçavant & eſtimable. M. *Bouillaud* continua durant le reſte de ſa vie à ramaſſer quantité d'obſervations, dont le Recueil eſt aujourd'hui entre les mains de M. le *Monnier*.

Le D. *Seth Ward* (*b*), dont nous venons de parler à l'occaſion de *Bouillaud*, eſt regardé comme l'inventeur de l'hypotheſe appellée *elliptique ſimple*, ſi pourtant on peut appeller inventeur celui qui ne fait qu'employer une idée déja rejettée par de bonnes raiſons. L'hypotheſe dont nous parlons eſt celle où l'on fait tourner la Planete dans une ellipſe, en faiſant des angles égaux en temps égaux, autour du foyer qui n'eſt pas occupé par le ſoleil ou la Planete principale. Nous remarquons comme une choſe ſinguliere, qu'un grand nombre d'Aſtronomes, & même de ceux du premier mérite, n'ayent vu pendant long-temps dans l'hypotheſe elliptique de *Kepler*, que le mouvement que nous venons de décrire. *Riccioli*, qui rapporte toutes les hypotheſes aſtronomiques imaginées avant lui, ſemble n'avoir pas ſeulement ſoupçonné que *Kepler* fit croître les aires autour de la Planete centrale, en même rapport que les temps. Le célebre M. *Caſſini* lui-même, décrivant l'hypotheſe elliptique, dans un abrégé manuſcrit d'Aſtronomie que j'ai eu entre les mains, ſe contente de dire qu'on fait, dans cette hypotheſe, du ſecond foyer de l'ellipſe le centre du mouvement égal, & c'eſt pour la rectifier qu'il propoſe une nouvelle ellipſe où les produits des lignes tirées des foyers à un point quelconque ſont conſtans. Mais revenons à l'hypotheſe elliptique ſimple. Cette hypotheſe a plu à beaucoup d'Aſtronomes, qu'elle a ſéduits par la facilité qu'elle donne à tirer l'anomalie vraie de la moyenne. Elle a été employée par le Docteur *Ward* dans ſon *Aſtronomia Geom.* en 1656; par le Comte de *Pagan*, dans ſa *Théorie des Planetes & ſes Tables*, données en 1655 & 1658; par *Street*, dans ſon *Aſ-*

(*a*) *Inquiſitio in Iſm. Bullialdi. Aſtr.* 1653. in-4°. Oxon.
(*b*) Né en 1618; mort en 1688, Evêque de Saliſbury.

tronomie Caroline, qu'il publia en 1661 ; par Jean *Newton* & Vincent *Wing*, dans leur *Aſtronomie Britannique*, qu'ils donnerent, l'un en 1657, & l'autre en 1669. Mais cette hypotheſe n'eſt ſatisfaiſante que lorſque l'excentricité eſt peu conſidérable. C'eſt ce que *Kepler* avoit montré, & que M. *Bouillaud* récriminant le Docteur *Ward*, montra de nouveau en 1657 (*a*) ; c'eſt pourquoi Nicolas *Mercator* y fit dans la ſuite une correction (*b*). Il partagea la diſtance entre les foyers de l'ellipſe en moyenne & extrême raiſon, de ſorte que le point de ſection tombât au-delà du centre à l'égard de la Planete centrale, & ce fut ce point qu'il prit pour centre du mouvement moyen. Cela réuſſit un peu mieux que l'hypotheſe elliptique ſimple, quand l'excentricité eſt conſidérable ; mais il en faut toujours revenir à la véritable hypotheſe, où l'on fait croître les aires autour de la Planete centrale en même raiſon que les temps.

Je finis cet article & ce Livre en faiſant mention des Peres *Riccioli* (*c*) & *Grimaldi*, qui travaillerent de concert pendant pluſieurs années à cultiver l'Aſtronomie & la Phyſique. On doit au premier de ces ſçavans Jéſuites divers ouvrages remarquable, entr'autres ſon *Almageſtum novum*, où, à l'exemple de *Ptolémée*, il a raſſemblé toutes les penſées des Aſtronomes juſqu'à ſon temps, auſſi-bien que les ſiennes propres ; ce qui en fait un vrai tréſor d'érudition & de ſçavoir aſtronomique. Mais c'eſt à peu près là que nous croyons devoir borner le mérite de cet ouvrage. Le Pere *Riccioli* publia en 1665, ſon *Aſtronomia reformata*, où il propoſe de nouvelles hypotheſes qui n'ont pas ſatisfait les Aſtronomes. On a enfin de lui une *Chronologie* & une *Géographie réformées*, qui ſont à l'égard de ces deux ſciences, ce que ſon *Almageſte* eſt à l'égard de l'Aſtronomie. Quant au P. *Grimaldi*, nous lui devons, outre une partie des travaux du P. *Riccioli* auxquels il a eu part, une deſcription parti-

(*a*) *Aſtron. Philol. fundamenta adverſus Wardi impug. aſſerta.*

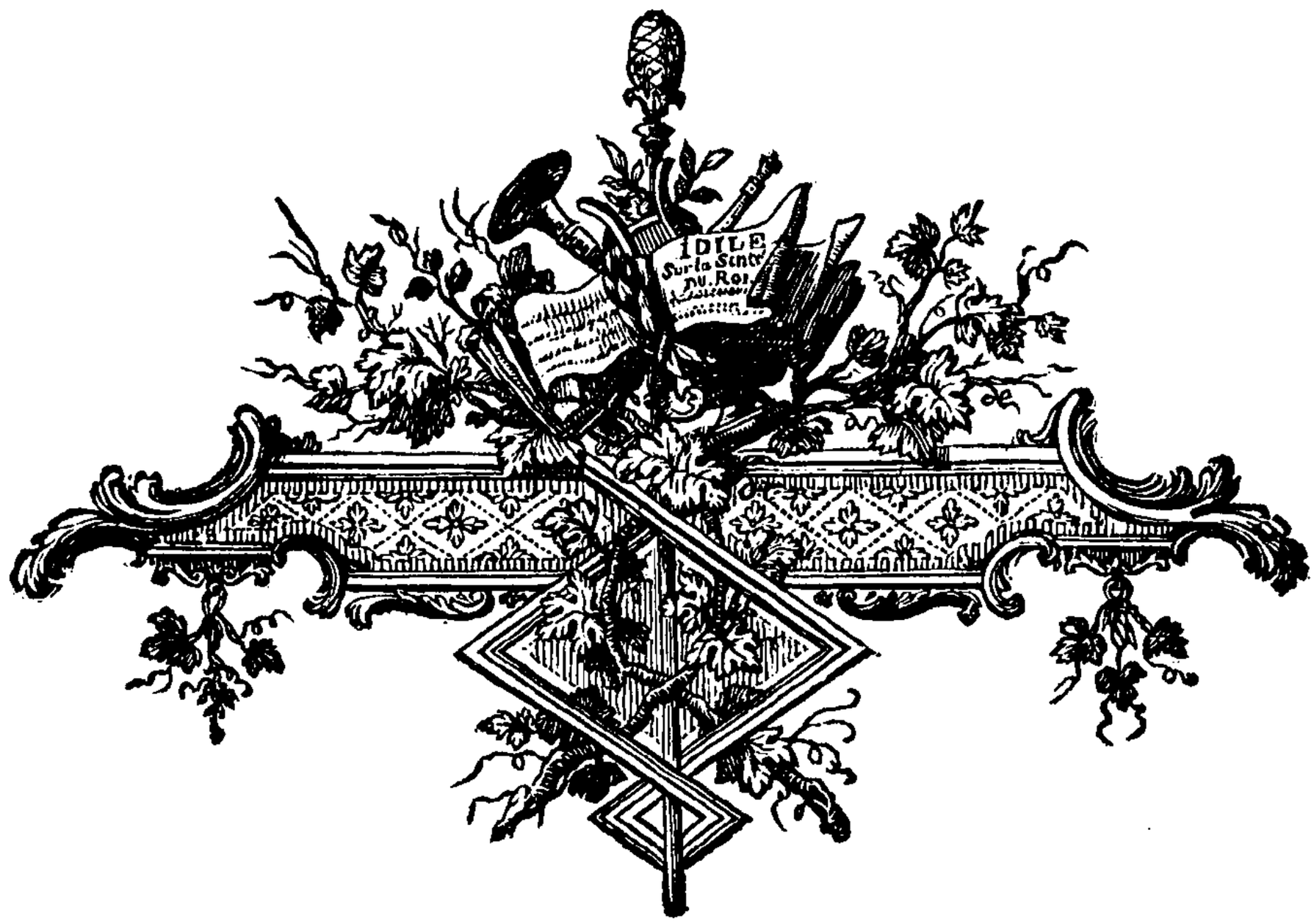
(*b*) *Hypoth. nova Aſtron.* 1664. Lond. in-fol. *Inſtitut. Aſtron.* Ibid. 1666. in-8°.

(*c*) Le P. Riccioli, (Jean-Baptiſte) né à Ferrare en 1598, entra dans la Société de Jeſus en 1614, & après avoir enſeigné long-temps la Théologie, il eut la liberté de ſe livrer à ſon goût pour l'Aſtronomie, qu'il cultiva avec ardeur le reſte de ſa vie. Il mourut en 1671.

culiere des taches de la lune, & leur dénomination qui eſt en uſage aujourd'hui parmi les Aſtronomes. Il y avoit déja quelques années que M. *Hevelius* (*a*) avoit mis au jour ſa *Séléno-graphie*, où il donne aux taches de la lune, les noms des montagnes & des lieux de la terre. Mais la dénomination imaginée par *Grimaldi*, l'a emporté, & les Aſtronomes ont préféré avec lui de ſe loger dans cette planete en compagnie des principaux Philoſophes & Mathématiciens de l Antiquité.

(*a*) On parlera de M. Hevelius dans le Livre VIII, parce qu'il a fleuri & vécu principalement dans la ſeconde moitié du dix-ſeptieme ſiecle.

Fin du Livre IVe de la IVe Partie.



HISTOIRE

HISTOIRE
DES
MATHÉMATIQUES.

QUATRIEME PARTIE,

Qui contient l'Hiſtoire de ces Sciences durant le dix-ſeptieme ſiecle.

LIVRE CINQUIEME.

Progrès de la Méchanique juſques vers le milieu de ce ſiecle.

SOMMAIRE.

I. *La Méchanique eſt cultivée & perfectionnée en pluſieurs points par Stevin.* II. *Des découvertes méchaniques de Galilée. De ſon principe de Statique. Il releve une erreur conſidérable d'Ariſtote & de l'Antiquité ſur la chûte des corps graves. Il découvre la loi ſuivant laquelle cette chûte s'accélere ; explication de cette théorie. Il enſeigne quelle eſt la courbe que décrivent les corps*

projettés obliquement ; quels rapports de durée ont les vibrations des pendules inégaux. Il examine mathématiquement la réſiſtance des ſolides à être rompus. III. *De l'hypotheſe de Baliani ſur l'accélération des graves. Querelle de Gaſſendi avec le P. Caſrée ſur ce ſujet. Conſéquences abſurdes qui ſuivent de cette hypotheſe. Expériences qui prouvent celle de Galilée.* IV. *Diſciples de Galilée qui cultivent la Méchanique. Benoît Caſtelli traite fort bien le mouvement des eaux courantes. Torricelli amplifie la théorie de Galilée, ſur le mouvement accéléré & celui des projectiles, de quantité de vérités nouvelles. Il traite auſſi le mouvement des eaux, & remarque le principe ordinaire ſur la vîteſſe des eaux jailliſſantes. Obſervation ſur ce principe.* V. *Découverte de la peſanteur de l'air, & de la cauſe de la ſuſpenſion du Mercure dans les tubes vuides. Part qu'y a M. Deſcartes. Expériences de M. Paſcal pour la confirmer.* VI. *De divers Méchaniciens François, & des nouvelles théories qu'ils ébauchent. De M. Deſcartes en particulier. Il enſeigne d'une maniere développée les loix du mouvement. Il tâche de déterminer celles du choc des corps. Critique de ces dernieres. Son ſyſtême ſur la peſanteur & ſon examen.*

I.

Découvertes ſtatiques de Stevin.

LES premiers des Modernes qui ayent ajouté quelque choſe au peu que contenoit la Méchanique ancienne, ſont *Guido Ubaldi*, & *Stevin* (*a*). On a déja parlé du premier dans la partie précédente de cet ouvrage. A ſuivre exactement l'ordre des dates, c'eût auſſi été le lieu de faire connoître les travaux du Méchanicien Flamand. Mais ſes découvertes m'ont paru une introduction ſi avantageuſe à la Méchanique moderne, que j'ai cru devoir différer juſqu'ici à en rendre compte, d'autres choſes neuves. Si l'original Flamand eſt en tout conforme à l'édition Latine ou Françoiſe, c'étoit un ouvrage excellent pour le temps. Sa *Fortification par écluſes*, eſt encore un ouvrage qui m'a paru digne d'attention. On attribue à Stevin l'invention de certains charriots à voiles, qui alloient plus vîte que les voitures les mieux attelées.

(*a*) Simon Stevin de Bruges, mourut en 1633. Nous ignorons la date de ſa naiſſance. On a de ce Mathématicien diverſ ouvrages, d'abord recueillis & imprimés en Flamand, à Leyde en 1605 ; enſuite traduits en Latin, & imprimés en 1608. On en a enfin une traduction Françoiſe ou plutôt Gauloiſe, qui parut en 1634. in-fol. De tous ces écrits de Stevin, il n'y a proprement que ſa *Méchanique* qui contienne

tant plus qu'il a vécu assez avant dans le dix-septieme siecle pour être réputé lui appartenir.

Stevin, Mathématicien du Prince d'Orange, & Ingénieur des Digues de Hollande, déploya principalement son génie dans la Méchanique. Il alla bien plus loin que *Ubaldi*, dans l'ouvrage qu'il publia sur ce sujet en 1585; & il enrichit la Statique & l'Hydrostatique d'un grand nombre de vérités nouvelles. Il nous paroît d'abord le premier qui ait reconnu la vraie proportion de la puissance au poids dans le plan incliné; proportion que les Anciens avoient manquée, aussi-bien que *Guido Ubaldi* qui n'avoit fait en cela que les suivre. *Stevin* détermine très-bien cette proportion dans tous les cas différens, & quelle que soit la direction de la puissance. Il ne se borne même pas à rendre raison des effets des machines simples. Il traite dans cet ouvrage quantité d'autres questions méchaniques, comme les rapports des charges que soutiennent deux puissances qui portent un poids à des distances inégales; quel effort fait un poids suspendu à plusieurs cordages, contre les puissances qui le soutiennent par leur moyen. En résolvant ces questions & diverses autres, il fait le plus souvent usage du fameux principe qui est la base de la Méchanique nouvelle de M. *Varignon*. Il forme un triangle dont les trois côtés sont paralleles aux trois directions; sçavoir celles du poids & des deux puissances qui le soutiennent, & il fait voir que ces trois lignes expriment respectivement ce poids & ces puissances.

Stevin ne se montre pas moins original dans son Hydrostatique, qui fait partie de sa Méchanique. Il y examine entr'autres la pression des fluides sur les surfaces qui les soutiennent, & il fait voir qu'elle est toujours comme le produit de la base par la hauteur : nous supposons ici une surface horizontale comme le fond d'un vase; car si on la supposoit verticale ou inclinée, alors la détermination seroit plus difficile. Elle n'échappa cependant pas à *Stevin*; il montre fort ingénieusement quel est dans ce cas la quantité & le centre de l'équilibre de cette pression. Ce paradoxe fameux, sçavoir qu'un fluide renfermé dans un canal décroissant par en haut exerce contre le fond le même effort que si ce canal étoit partout uniforme, fût encore une découverte de ce Méchanicien. Il l'établit de deux manieres, & par l'expérience & par un rai-

ſonnement fondé ſur la nature des fluides, qui eſt ingénieux. Nous regrettons de ne point trouver dans les éditions Latines & Françoiſes de la Méchanique de *Stevin*, deux parties qu'il annonce au commencement du ſixieme Livre, ſous le titre *de l'attraction de l'eau, & du poids* ou *de la Statique de l'air*; nous n'avons pu nous procurer l'édition Flamande, pour ſçavoir ce que contenoient ces deux parties de ſon ouvrage. Un de ces titres ſemble annoncer que ce Mathématicien connut la peſanteur de l'air. Je crois cependant qu'il pourroit bien n'y être queſtion que de l'action de ce fluide ſur les voiles, les aîles de moulin, &c.

I I.

Découvertes de Galilée dans la Méchanique.

Le nom de *Galilée* n'eſt pas moins célebre dans la Méchanique, que dans l'Aſtronomie. Quelques brillantes même que ſoient les découvertes dont il enrichit la derniere, elles ne lui aſſureroient pas dans la poſtérité une place auſſi diſtinguée, que celles dont nous avons à parler ici. Il falloit bien moins de génie pour tourner un Téleſcope vers le Ciel, & y appercevoir les phénomenes dont on lui doit la découverte, que pour démêler les loix de la nature dans la chûte des corps graves, l'eſpece de courbe qu'ils décrivent en tombant obliquement, la ſolution enfin de divers autres problêmes méchaniques qu'il traita avec beaucoup de ſagacité. Auſſi remarquons-nous que l'honneur de ſes découvertes aſtronomiques lui eſt conteſté par divers concurrens, dons nous ne croyons point porter un jugement trop peu avantageux, en diſant qu'ils lui étoient bien inférieurs du côté du génie. Il n'en eſt pas ainſi de ſes découvertes méchaniques. Seul poſſeſſeur de ce qu'elles ont de plus brillant, il ſera toujours regardé comme celui qui a principalement débrouillé cette partie ſi intéreſſante de nos connoiſſances.

Les premiers travaux de *Galilée* dans ce genre, regardent la Statique & l'Hydroſtatique. Dans ſon Traité de Méchanique, ouvrage de l'année 1592, quoiqu'il ait été publié beaucoup plus tard, il réduit la Statique à ce principe unique & univerſel, d'où découlent comme autant de corollaires toutes les propriétés des machines. Il faut, dit-il, toujours le même temps à une puiſſance pour enlever à une certaine hauteur, un

poids donné, de quelque maniere qu'elle le faſſe, ſoit qu'elle l'enleve tout d'un coup, ſoit que le partageant en parties proportionnées à ſa force, elle le faſſe à pluſieurs repriſes. En effet, de quelque combinaiſon d'agens que nous faſſions uſage, la nature, ſi nous pouvons parler ainſi, ne ſçauroit rien perdre de ſes droits. Une puiſſance déterminée n'eſt capable que d'un effet déterminé, & cet effet eſt d'autant plus grand, que la maſſe tranſportée dans un certain temps, l'eſt par un eſpace plus grand, ou que l'eſpace étant le même, elle l'eſt dans un moindre temps. Il faut donc, pour que l'effet ſubſiſte le même, que le temps ſoit réciproque avec la maſſe. Ainſi tout l'avantage des machines conſiſte en ce que par leur moyen on peut exécuter dans une ſeule opération, ce que par l'application nue de la puiſſance, on n'auroit pu faire qu'en pluſieurs repriſes. Si l'on conſidere autrement l'avantage des machines, il conſiſte en ce qu'étant plus maîtres du temps que de la grandeur des puiſſances à employer, elles nous mettent à portée de faire en un temps plus long & avec de moindres forces, ce que des puiſſances plus grandes ou plus multipliées auroient exécuté plus promptement. Enfin ce qu'on gagne dans l'épargne de la puiſſance, on le perd du côté du temps, & préciſément dans le même rapport, d'où l'on doit conclure avec *Galilée*, que les machines les plus avantageuſes ſont toujours les plus ſimples. Car plus une machine eſt compliquée, plus il y a d'effort perdu à ſurmonter les frottemens, &c.

L'Hydroſtatique dut auſſi à *Galilée* pluſieurs vérités nouvelles. Dans ſon Livre, *Delle coſe che ſtanno ſull'acqua*, il examine la nature des fluides mieux qu'aucun de ceux qui avoient écrit avant lui ſur ce ſujet, hormis *Stevin*. Il y démontre auſſi le paradoxe hydroſtatique dont nous avons parlé ci-deſſus, de même que diverſes autres ſingularités du même genre. Mais nous paſſons légerement ſur ce ſujet, de même que ſur ſa *Bilanceta* ou balance, pour trouver ſans calcul le mélanges des métaux, en les peſant comme l'on ſçait dans l'air & dans l'eau. Nous nous hâtons d'arriver à ſes découvertes qui concernent le mouvement.

On a vu dans le dernier Livre de la Partie précédente, combien l'on fût peu éclairé juſques vers la fin du ſeizieme ſiecle ſur les propriétés du mouvement. Cette partie de la Phyſi-

que avoit beſoin d'une réforme entiere : *Galilée* la commença, & ce qui lui fait encore plus d'honneur, dans cet âge même, où de bons eſprits ne voient guere que par les yeux de leurs maîtres. Dans le temps où il étudioit la Philoſophie à Piſe, il étoit déja ſi peu ſatisfait de la doctrine alors reçue, qu'il ſoutenoit toujours des theſes contradictoires à celles de ſes maîtres ; & il ne fut pas plutôt nommé Profeſſeur dans cette Univerſité, qu'il ſe déclara hautement contre preſque tous les points de leur doctrine. Il attaqua d'abord cet axiome prétendu de la Phyſique Péripatéticienne ſur la chûte des corps graves, ſçavoir que les vîteſſes étoient en même raiſon que les peſanteurs. Il fit voir, en laiſſant tomber du haut d'un dôme d'Egliſe des corps de peſanteur extrêmement inégale, qu'il n'y avoit preſque pas de différence dans le temps de leurs chûtes, lorſque les matieres de ces corps étoient peu différentes en denſité. Il y eut un grand concours de monde à cette expérience, qui ſouleva tous les vieux Profeſſeurs contre *Galilée*, de maniere qu'il fut obligé, pour éviter leurs mauvaiſes manœuvres, d'abandonner Piſe, & de ſe retirer à Padoue où on lui offroit une Chaire. Il établit dans la ſuite cette vérité par pluſieurs autres expériences (*a*), entr'autre par celle de deux pendules de même longueur, & qui quoique chargés de poids dix fois plus peſans l'un que l'autre, ne laiſſent pas de faire leurs vibrations à peu près dans le même temps.

Il y aura ſans doute ici bien des lecteurs qui regarderont ce que nous venons de dire comme un paradoxe des plus incroyables. Il leur paroîtra de la derniere évidence qu'un corps dix fois auſſi peſant qu'un autre devra acquérir dix fois autant de vîteſſe. Ils ſe trompent cependant, & il eſt facile de leur montrer l'équivoque. Il ſeroit bien vrai qu'un corps dix fois plus peſant auroit une vîteſſe dix fois plus grande, ſi avec cette peſanteur dix fois plus grande il n'avoit pas dix fois plus de maſſe. Mais la peſanteur étant proportionnelle à la maſſe, ce n'eſt qu'une force dix fois plus grande employée à mouvoir une maſſe dans le même rapport. La vîteſſe doit donc être la même : l'erreur d'*Ariſtote* & de ſes ſectateurs vient de ce qu'ils ne faiſoient aucune attention à cette circonſtance.

(*a*) *Diſc. & dem. intorno duo nove ſcienze, &c.* Dial. 3.

Il y a encore une autre maniere plus ſimple de démontrer ce qu'on vient de dire, ſçavoir par un raiſonnement que je faiſois autrefois, & que j'ai depuis trouvé dans *Galilée*. Qu'on laiſſe tomber d'un côté une once de plomb, de l'autre dix ſéparées & ſimplement poſées l'une ſur l'autre. Sans contredit les vîteſſes ſeront égales des deux côtés. Mais ces dix onces de plomb ne faiſant que ſe toucher, ou formant une même maſſe, ne ſçauroient tomber avec des vîteſſes différentes. Car on ne ſçauroit dire que l'adhérence de ces dix onces, les unes avec les autres, doive contribuer en aucune maniere à les accélérer, puiſque de leur nature elles vont toutes avec la même vîteſſe, & que par conſéquent les ſupérieures ne preſſent point ſur les inférieures, ni ne ſont entraînées par elles. Ainſi vouloir que dix livres de plomb tombent plus vîte qu'une ſeule, c'eſt comme ſi l'on vouloit que dix hommes, qui ont la même aptitude à courir, allaſſent plus vîte courant enſemble, que n'iroit un ſeul d'eux. Au reſte, lorſqu'on dit que tous les corps tombent avec une égale vîteſſe, cela doit s'entendre qu'ils le feroient ſans la réſiſtance du milieu où ils ſe meuvent. Car il eſt évident que l'air ôte bien plus de vîteſſe aux corps légers qu'aux corps peſans, parce que la maſſe d'air déplacée a un plus grand rapport avec celle du corps léger qu'avec celle du plus peſant. Mais dans le vuide, les chûtes de tous les corps les plus inégaux en peſanteur, comme l'or & la plume, ſe feroient en même temps; & c'eſt ce que confirme l'expérience faite dans la machine pneumatique.

Je me ſuis un peu étendu ſur les raiſons de ce paradoxe méchanique, parce que j'ai vu des gens d'eſprit avoir de la peine à s'en perſuader la vérité. Je reprends le fil des découvertes de *Galilée*, en faiſant connoître ſa théorie ſur l'accélération des graves.

Il n'eſt perſonne qui n'ait obſervé qu'un corps qui tombe, acquiert d'autant plus de vîteſſe qu'il s'éloigne davantage du commencement de ſa chûte. Un effet ſi naturel, & que nous avons ſi ſouvent devant les yeux, étoit bien digne des réflexions des Philoſophes. Auſſi y en avoit-il eu déja pluſieurs avant *Galilée*, qui avoient tâché de déterminer la loi de cette accélération; mais deſtitués comme ils étoient des vraies notions du mouvement, ils y avoient échoué, ou ils n'avoient pro-

posé que des choses ridicules. Il y en avoit eu, par exemple, qui avoient conjecturé que les espaces parcourus en temps égaux, croissoient comme les segmens d'une ligne divisée en moyenne & extrême raison, de sorte que l'espace parcouru dans un premier temps étant comme le petit segment, l'espace qui répondoit au second étoit comme le grand, & ainsi de suite continuellement. Cela n'étoit fondé que sur la chimérique perfection qu'on attribuoit à cette progression. L'opinion la plus commune, parce qu'elle se présente la premiere, étoit sans doute, que l'accroissement de la vîtesse se faisoit proportionnellement à l'espace déja parcouru ; mais cette opinion, quoique raisonnable en apparence, n'est pas moins absurde comme on le verra bien-tôt.

Galilée établit au contraire que l'accroissement de la vîtesse suit le rapport du temps, c'est-à-dire, qu'après un temps double, par exemple, la vîtesse est double, &c. Il fut sans doute d'abord conduit à soupçonner cette loi d'accélération, par le raisonnement suivant. En supposant la pesanteur uniforme, ce qui est vrai dans les petites distances où nous pouvons l'expérimenter, c'est une puissance ou une force continuellement appliquée au corps : or qu'arriveroit-il à un corps qui, après avoir reçu l'impulsion d'une force quelconque au commencement d'un premier instant, au second en recevroit une nouvelle & égale, de même au troisieme, &c. Il est évident qu'au second instant il auroit une vîtesse double, au troisieme une triple, & ainsi de suite. Tel sera donc le mouvement des corps pesans : ainsi la vîtesse sera proportionnelle au temps écoulé depuis le commencement de la chûte. Ce n'est cependant pas là tout-à-fait le procédé de *Galilée* pour établir sa théorie. Il commence par supposer cette loi d'accélération ; il en recherche les propriétés, & il montre par l'expérience qu'elles conviennent à la chûte des corps graves, d'où il conclud que cette loi est celle de la nature. Le procédé que nous avons suivi est plus direct ; celui de *Galilée* est plus propre à convaincre & à écarter les chicanes & les difficultés.

En partant donc de cette notion du mouvement accéléré, *Galilée* fait voir qu'à la fin d'un temps quelconque, pris à compter du commencement de la chûte, le corps aura parcouru par son mouvement accéléré, la moitié de l'espace qu'il eût

eût parcouru s'il ſe fût mu pendant tout ce temps avec la vîteſſe qu'il a acquiſe à la fin. Il repréſente les temps écoulés depuis le commencement de la chûte, par les abſciſſes d'un triangle, comme A B, A *b*, &c. & les vîteſſes acquiſes à la fin de ces temps par les ordonnées de ce triangle qui leur ſont proportionnelles, d'où il conclud que le rapport des eſpaces parcourus eſt exprimé par celui des aires triangulaires, comme A B C, A *b c*, &c. qui répondent aux abſciſſes qui déſignent les temps. Or ces aires croiſſent comme les quarrés des A *b* correſpondantes : les eſpaces, dit *Galilée*, croiſſent donc comme les quarrés des temps comptés depuis le commencement de la chûte. Dans des temps comme 1. 2. 3. 4. 5, les eſpaces ſeront comme 1. 4. 9. 16. 25. Par conſéquent ſi dans le premier inſtant le chemin parcouru eſt 1, dans le ſecond ce ſera 3, dans le troiſieme 5, dans le quatrieme 7, dans le cinquieme 9, &c. c'eſt-à-dire qu'en partageant le temps de la chûte en intervalles égaux, les eſpaces qui leur répondront ſeront comme les nombres impairs en commençant par l'unité. *Fig.* 77.

Il reſtoit à démontrer que ces propriétés ſont celles de la chûte des corps graves. Pour cet effet *Galilée* montre par une expérience ingénieuſe, qu'un corps qui roule le long d'un plan incliné, ou d'une courbe quelconque, a acquis les mêmes degrés de vîteſſe quand il a parcouru les mêmes hauteurs dans la perpendiculaire : d'où il eſt aiſé de conclure qu'il y a même rapport entre les eſpaces parcourus le long des plans inclinés dans des temps inégaux, que dans les chûtes perpendiculaires. *Galilée* établit encore cette vérité par le rapport des forces avec leſquelles le même poids peſe dans la perpendiculaire, & le long du plan incliné. Il prit donc une longue piece de bois, & il y creuſa un canal bien liſſe. Il le plaça enſuite dans des inclinaiſons commodes, pour que le mobile roulant dans ce canal n'allât pas trop rapidement, & qu'il pût meſurer le temps & l'eſpace parcouru : il remarqua toujours que dans un temps double, le corps avoit parcouru un eſpace quadruple ; que dans un temps triple cet eſpace étoit neuf fois auſſi grand, &c ; d'où il inféra que la chûte des graves dans la perpendiculaire ſuit la même loi.

Ce principe une fois établi, *Galilée* en déduit quantité de vérités utiles & curieuſes. Il fait voir que ſi d'un point quel-

conque de la ligne verticale, on tire ſur le plan incliné, une perpendiculaire comme B D, le corps tombant perpendiculairement, ou roulant le long du plan incliné, arrivera aux points
Fig. 78. B ou D, dans le même temps; que, dans un cercle dont le diametre A B eſt perpendiculaire, un corps parcourroit les cordes A B, A E, ou F B, G B dans le même temps; qu'un corps qui roule le long de pluſieurs lignes différemment inclinées, ou le long d'une courbe quelconque, a toujours à la fin de ſa chûte la même vîteſſe qu'il auroit acquiſe de la même hauteur perpendiculaire (*a*); qu'un corps rouleroit plus promptement le long du quart de cercle que par la corde, ou deux cordes quelconques, quoique plus courtes que l'arc. Il ſe trompoit néanmoins en concluant delà que le quart de cercle étoit de toutes les courbes celle qui conduiroit le mobile de ſon ſommet à ſon fonds dans le temps le plus court. On ſçait aujourd'hui que cette courbe eſt un arc de cycloïde. *Galilée* ſe propoſe enfin quelques queſtions curieuſes, par exemple celle-ci, quelle devroit être l'inclinaiſon d'un plan le long duquel un corps rouleroit d'un point donné à une ligne droite de poſition donnée, afin qu'il y arrivât dans le moindre temps poſſible; de quelle hauteur il faudroit que tombât un corps, afin que roulant delà horizontalement le long d'une ligne de grandeur donnée avec la vîteſſe acquiſe, le temps de la chûte & celui qu'il employeroit à parcourir cette ligne, fiſſent le temps le plus court, &c. Ce ſont des problêmes ſur leſquels les jeunes Analiſtes qui ont conçu les principes ci-deſſus peuvent s'exercer.

(*a*) Cette vérité eſt fort facile à démontrer, en ſuppoſant, comme fait Galilée, que le corps en paſſant d'un plan incliné ſur un autre qui l'eſt moins, n'éprouve aucun choc qui diminue ſa vîteſſe acquiſe. M. Varignon a examiné cette ſuppoſition, (Mem. de l'Acad. ann. 1704.) & a trouvé qu'elle n'eſt pas vraie; à moins que l'angle que font entr'eux les plans ſucceſſifs ne ſoient infiniment obtus. Dans ce dernier cas, la perte de vîteſſe à chaque changement de plan, n'eſt qu'une portion infiniment petite de la vîteſſe acquiſe. Mais il y a dans une courbe une infinité de changemens de direction : on pourroit donc dire qu'il y a une infinité de portions infiniment petites de la vîteſſe qui ſont perdues; ce qui renverſeroit la propoſition de Galilée. On répond à cela que cet infiniment petit n'eſt que du 2e ordre. Ainſi dans une courbe à chaque changement de plan infiniment petit, il ne ſe fait qu'une perte de vîteſſe qui eſt un infiniment petit du ſecond ordre : le mobile peut donc faire une infinité de pertes ſemblables, ſans avoir perdu qu'un infiniment petit de la vîteſſe qu'il auroit eue en roulant le long d'un ſeul plan. M. d'Alembert a donné dans ſa Dynamique une autre démonſtration très-élégante de cette même vérité.

Une des découvertes qui a le plus contribué à la célébrité du nom de *Galilée*, eſt celle de la nature de la courbe que décrivent les corps projettés obliquement. Il trouva, comme tout le monde ſçait, en comparant le mouvement oblique, effet de l'impreſſion communiquée au corps, avec ſa chûte perpendiculaire, que cette courbe eſt une parabole : la démonſtration eſt trop connue des Méchaniciens, pour nous y arrêter, & afin d'abréger nous la ſupprimerons. *Galilée* ne ſe borna pas là : il examina encore diverſes circonſtances de ce mouvement. Il fit voir, par exemple, que la hauteur d'où un corps tombant acquerroit la vîteſſe néceſſaire pour décrire une parabole donnée A C, en partant horizontalement avec cette vîteſſe, eſt troiſieme proportionnelle à la hauteur de la parabole A B, & à la demi-étendue B C, c'eſt-à-dire, égale au quart du parametre de cette parabole : il montra enſuite que les projections faites par la même force ſous des angles également diſtans de 45°, ont des étendues égales, de ſorte que le jet qui atteint le plus loin qu'il ſe peut, eſt celui qu'il fait ſous l'angle de 45°, vérité déja remarquée par *Tartalea*, & ceux qui pratiquoient l'artillerie, mais dont ils ne pouvoient aſſigner aucune bonne raiſon. On a montré dans la ſuite que l'étendue horizontale du jet eſt proportionnelle au ſinus droit, & la hauteur au ſinus verſe du double de l'angle du jet avec l'horizon. *Galilée* dreſſa enfin des Tables où l'on trouve les portées reſpectives qui répondent à chaque angle, & les hauteurs auxquelles parvient le projectile, la force étant ſuppoſée la même : ainſi faiſant une expérience à quelle diſtance une charge donnée pouſſe un boulet de peſanteur donnée ſous un certain angle, on a auſſi-tôt par une ſimple analogie les portées correſpondantes aux autres angles d'inclinaiſon. Comme *Galilée* s'étoit borné à déterminer l'étendue horizontale des jets, *Torricelli* alla dans la ſuite plus loin, & il détermina cette étendue priſe ſur des lignes inclinées à l'horizon. Il trouva auſſi ſur ce ſujet une propoſition extrêmement curieuſe, que nous rapporterons en parlant de ce diſciple célebre de *Galilée*. Quelques Sçavans ont depuis encore étendu & développé davantage cette théorie. Nous les faiſons connoître dans la note ſuivante (*a*). *Fig.* 79.

(*a*) Voyez le Livre de M. Blondel, intitulé *l'Art de jetter les Bombes*. (1683. in-4°.)

Il y a une troiſieme branche de la théorie des mouvemens accélérés, qui n'eſt pas moins importante que la précédente : c'eſt celle du mouvement des pendules qui nous ſervent aujourd'hui ſi heureuſement à meſurer le temps avec préciſion. Nous en devons encore la premiere idée à *Galilée* (*a*). Doué dès ſa plus tendre jeuneſſe de l'eſprit d'obſervation, il avoit dès-lors obſervé leur iſochroniſme, c'eſt-à-dire, que le même pendule faiſoit ſes vibrations grandes & petites dans le même temps. Il avoit auſſi déja remarqué que deux pendules inégaux mis en mouvement, faiſoient dans un même temps des nombres de vibrations, qui ſont réciproquement comme les racines quarrées de leurs longueurs ; & il avoit appliqué cette vérité à meſurer la hauteur des voûtes d'Egliſes, en comparant le nombre des vibrations des lampes qui y ſont ſuſpendues avec celles que faiſoit dans le même temps un pendule d'une longueur connue. La raiſon de cet effet ſe déduit facilement de la théorie précédente ſur l'accélération des corps : car deux pendules inégaux qui décrivent des arcs ſemblables & fort petits, ſont dans le cas de deux poids qui rouleroient le long de deux plans inégaux, mais ſemblablement inclinés. Or on a vu ci-deſſus que les temps qu'ils employeroient à les parcourir ſeroient comme les racines des hauteurs : les temps que ces pendules mettront à faire une demi-vibration, ou à tomber juſqu'à la perpendiculaire, ſeront donc comme les racines des hauteurs de ces arcs, ou parce qu'ils ſont ſemblables, comme les racines des rayons ou des longueurs des pendules. Mais le nombre des vibrations dans un même temps, eſt en raiſon réciproque de la durée de chacune d'elles. C'eſt pourquoi les nombres de vibrations que feront dans le même temps deux pendules, ſeront comme les racines de leurs longueurs, ou les quarrés de ces nombres ſeront comme les longueurs elles-mêmes.

On doit enfin à *Galilée* d'avoir jetté les premiers fondemens d'une nouvelle théorie, ſçavoir celle de la réſiſtance des ſo-

Les Mémoires de l'Académie des années 1700 & 1707, dans la derniere deſquelles on trouve un Mémoire analytique très-élégant ſur cette matiere, par M. Guiſnée. On doit conſulter enfin le *Bombardier François*, par M. Bélidor, dont les travaux dans tous les genres qui conſtituent l'Ingénieur, ſont ſi connus & ſi juſtement priſés.

(*a*) Ibid. *Dial.* 1°. Voy. *Vita di Galileo*, del Signor Viviani.

lides (*a*). Expoſons d'abord l'état de la queſtion ; nous ferons enſuite quelques réfléxions ſur l'utilité dont elle eſt, & nous ſuivrons *Galilée* dans quelques-unes des conſéquences ingénieuſes qu'il tire de ſa ſolution. Imaginons un priſme de bois fiché dans un mur, & qu'une force peſant ſur ſon extrêmité travaille à le rompre, quel ſera le rapport de la force qui en ſeroit capable avec celle qui pourroit le faire en le tirant horizontalement, comme le poids R, qui paſſant ſur la poulie S, tendroit à l'arracher directement ? Tel eſt le problême : voici le raiſonnement que faiſoit *Galilée* pour le réſoudre. Tandis que le priſme en queſtion eſt tiré dans la direction de ſon axe, chacune de ſes fibres réſiſte également. Mais lorſqu'un poids tend à le rompre obliquement, la ligne A *a* devient un appui, & chaque fibre eſt tirée, & réſiſte par un bras de levier d'autant plus court qu'elle eſt plus proche de cet appui. La réſiſtance que chacune oppoſe à la rupture, eſt par conſéquent comme la diſtance à cet appui ; d'où il ſuit que leur ſomme eſt à ce qu'elle ſeroit ſi elles étoient toutes égales à la plus grande, comme la diſtance du centre de gravité de la figure A C *a* à l'appui A *a*, eſt à l'axe de cette figure. Ainſi ſi le corps eſt une poutre rectangulaire, la réſiſtance oblique eſt à la réſiſtance directe, comme 1 à 2. Il en eſt de même d'un cylindre, parce le centre de gravité de ſa baſe eſt au centre ou au milieu de la hauteur. On a ſuppoſé ici un corps tirant obliquement par un bras égal de levier A P, égal à la hauteur A G, & c'eſt ce poids que nous avons pris pour la meſure de la réſiſtance oblique, afin d'éviter les circonlocutions. Que ſi l'effort appliqué au corps pour le rompre étoit plus éloigné, les loix de la Méchanique apprennent qu'il faudroit le diminuer en même raiſon. *Fig.* 80.

Galilée tire de ſa théorie quelques conſéquences que nous ne devons pas omettre. La premiere eſt que des corps ſemblables n'ont point des forces proportionnées à leurs maſſes pour réſiſter à leur rupture : car les maſſes croiſſent comme les cubes des côtés ſemblables ; les réſiſtances, *cæteris paribus*, ne le font qu'en raiſon des quarrés de ces côtés : d'où il ſuit qu'il y a un terme de grandeur au-delà duquel un corps ſe romproit

(*a*) *Diſc. & dim. Math.* &c. Dial. 2.

au moindre choc ajouté à ſon propre poids, ou par ce poids même, tandis qu'un autre moindre & ſemblable, réſiſtera au au ſien, & même à un effort étranger. Delà vient, dit *Galilée*, qu'une machine qui fait ſon effet en petit, manque lorſqu'elle eſt exécutée en grand, & croule ſous ſa propre maſſe. La nature, ajoute-t'il, ne ſçauroit faire des arbres ou des animaux déméſurément grands, ſans être expoſés à un pareil accident, & c'eſt pour cela que les plus grands animaux vivent dans un fluide qui leur ôte une partie de leur poids. Nous pourrions encore remarquer que c'eſt-là la raiſon pour laquelle de petits inſectes peuvent, ſans danger de fracture, faire des chûtes ſi démeſurées, eu égard à leur taille, tandis que de grands animaux, comme l'homme, ſe bleſſent ſouvent en tombant de leur hauteur. Une autre vérité curieuſe qui ſuit de cette théorie, c'eſt qu'un cylindre creux, & ayant la même baſe en ſuperficie, réſiſte davantage que s'il étoit ſolide. C'eſt, ce ſemble, pour cette raiſon, & pour concilier en même temps la légéreté & la ſolidité, que la nature a fait creux les os des animaux, les plumes des oiſeaux, & les tiges de pluſieurs plantes, &c. Qui croiroit que la Géométrie pût avoir tant d'influence ſur un genre de Phyſique ſi éloigné d'elle?

Depuis *Galilée* on a fait à ſa théorie quelques changemens dont il nous faut rendre compte. Toutes ſes conſéquences ſont juſtes dans la ſuppoſition que la réſiſtance de chaque fibre eſt proportionnelle à ſa diſtance au point d'appui. Cela ſeroit effectivement, ſi elle rompoit bruſquement & ſans ſouffrir auparavant quelque extenſion. Mais l'on eſt fondé à penſer que ce n'eſt pas là la vraie hypotheſe. Il eſt plus vraiſemblable, comme l'ont remarqué MM. *Mariotte* & *Leibnitz*, que la force de chaque fibre n'eſt que proportionnelle à ſa diſtance au point d'appui; car chaque fibre s'étend en même raiſon que cette diſtance, & il eſt reçu comme principe en Méchanique, que hormis les extenſions extrêmes, la réſiſtance des reſſorts eſt à peu près proportionnelle à leurs extenſions. La réſiſtance que chaque fibre oppoſe à la rupture ſera donc comme le quarré du levier par lequel elle agit: ainſi au lieu du centre de gravité de la baſe de la rupture qui ſert, dans l'hypotheſe de *Galilée*, à déterminer le rapport de la réſiſtance oblique à la directe, il faudra ici ſe ſervir de celui de l'onglet cylindrique formé ſur

cette baſe par le plan paſſant par la ligne d'appui. Suivant l'hypotheſe de *Galilée*, la réſiſtance oblique d'une poutre rectangulaire, eſt à ſa réſiſtance directe comme 1 à 2. Suivant celle de M. *Mariotte*, elle n'en eſt que le tiers; ce qui eſt plus conforme à l'expérience. M. *Varignon* a traité cette matiere avec une généralité très-ſatisfaiſante, dans un Mémoire qu'on lit parmi ceux de l'Académie de l'année 1702. Je paſſe, afin d'abréger, une infinité de détails de cette théorie, & je renvoie aux écrits de divers Mathématiciens qui l'ont traitée (*a*).

III.

Quoique la théorie de *Galilée* ſur l'accélération des graves fût auſſi-bien prouvée que le peut être une vérité Phyſico-Mathématique, elle n'a pas laiſſé d'éprouver des oppoſitions. Il y eut d'abord des Phyſiciens qui la rejetterent, & qui lui en ſubſtituerent une autre; ce qui éleva pendant quelques années des conteſtations, & donna lieu à divers écrits. Nous avons cru devoir en rendre compte avant que d'aller plus loin. Nous dirons auſſi quelques mots des expériences par leſquelles les Phyſiciens modernes établiſſent la vérité de cette théorie de *Galilée*.

L'hypotheſe de *Baliani* eſt la principale de celles qu'on a oppoſées à *Galilée*. *Baliani* étoit un noble Génois, aſſez bon Phyſicien, qui paroît avoir eu quelque part à déſabuſer des préjugés de ſon ſiecle ſur le mouvement. Dans un ouvrage qu'il publia en 1646 (*b*), ouvrage en général d'une doctrine ſolide & judicieuſe, après avoir dit de fort bonnes choſes ſur le mouvement, & avoir même donné une démonſtration ingénieuſe & tout-à-fait ſenſible de la loi d'accélération établie par *Galilée*, je ne ſçais comment il vient à dire qu'il pourroit bien ſe faire que l'accélération ſe fît de maniere que les vîteſſes acquiſes fuſſent proportionnelles aux eſpaces par-

(*a*) Alex. Marchetti, *de reſiſt. ſolid.* L. II. *Mem. de l'Acad.* avant le renouv. T. VI. & ann. 1702, 1705, 1709. *Mouv. des Eaux*, Part. V, Diſ. 2. *De coherentia corporum*, *Diſſ. auth. Petr.* Van Muſchembroeck, *inter Diſſ. varias.* Cette derniere Diſſertation contient ſurtout un grand nombre d'expériences ſur la réſiſtance des corps.

(*b*) *De motu naturali gravium fluid. ac ſol.* Genuæ. in-4°. On a encore de Baliani quelques Opuſcules imprimés en 1656, qui ſont fort peu de choſe.

courus. Quelques Phyſiciens ſaiſiſſans cette idée, l'ont employée, & ont donné par-là à ſon Auteur une malheureuſe célébrité. Je dis malheureuſe; car donner ſon nom à une opinion qui, examinée d'un peu près, n'eſt qu'une abſurdité, cela ne vaut pas, à mon avis, une honnête obſcurité.

Cette ſorte d'hypotheſe ſur l'accélération des graves n'avoit pas été inconnue à *Galilée*. Il ſe la fait propoſer par un des interlocuteurs de ſes Dialogues, & il avoue même (*a*) qu'elle lui avoit d'abord paru fort vraiſemblable. Mais il la réfute auſſitôt par un raiſonnement très-ingénieux, qui montre que ſi on l'admettoit, il faudroit que le mouvement ſe fît *in inſtanti*. En effet, dit *Galilée*, lorſque les vîteſſes d'un corps ſont proportionnelles aux eſpaces parcourus, les temps dans leſquels ils ont été parcourus ſont égaux. Si donc on ſuppoſe la vîteſſe croître continuellement comme l'eſpace, de ſorte qu'après une chûte de quatre pieds, la vîteſſe ſoit quadruple de celle qui a été acquiſe après un pied de chûte, le corps aura parcouru ces quatre pieds dans le même temps que le premier. Il auroit donc parcouru trois pieds ſans y mettre aucun temps; abſurdité palpable, & qui montre que l'accélération ne ſçauroit ſe faire ſuivant ce rapport. En vain ſe rejetteroit-on ſur la différence qu'il y a entre le mouvement accéléré & le mouvement uniforme. Car ſi l'on diviſe l'eſpace total, & ſon premier quart, par exemple, en un même nombre de parties égales, & ſi petites que l'on puiſſe regarder chacune d'elles comme parcourue d'un mouvement uniforme, il ſera facile de montrer que cet eſpace total & le quart ſeront parcourus en temps égaux. Ainſi la démonſtration de *Galilée*, quoique traitée de paralogiſme par M. *Blondel* (*b*), qui dit ne l'avoir jamais pu concevoir, eſt très-légitime, & concluante.

Cette abſurdité que *Galilée* montroit dans l'hypotheſe de l'accroiſſement de la vîteſſe en raiſon de l'eſpace, eût dû la faire rejetter unanimement. Mais il y a eu dans tous les temps de ces hommes précipités, [illegible] qui ſçavent jetter un nuage ſur les raiſonnemens les plus concluans. Nonobſtant la démonſtration du Philoſophe Italien, quelques-uns entreprirent la défenſe de cette fauſſe hypotheſe. Tel fut entr'autres un Pere

(*a*) *Diſcorſi & dim. Math. intorno à due nuove ſcienze, &c.* Dial. 3.
(*b*) Mem. de l'Acad. avant 1699. T. VIII.

Caſrée,

Caſrée, dont on lit la réfutation dans les Œuvres de *Gaſſendi* (T. IV). Après bien de mauvais raiſonnemens contre l'hypotheſe de *Galilée*, raiſonnemens qui décelent un homme qui a peu de ſolide Phyſique, & encore moins de connoiſſance des Mathématiques, il tâchoit d'établir celle de *Baliani* par l'expérience ſuivante. Il laiſſoit tomber un globe de la hauteur de ſon diametre ſur un des baſſins d'une balance dont l'autre étoit chargé d'un poids égal, & il remarquoit qu'il ſoulevoit ce poids. Il doubloit enſuite, triploit, quadruploit ce poids, & laiſſant tomber le globe d'une hauteur double, triple, quadruple, il remarquoit que le poids en étoit ſoulevé. Delà il concluoit que les forces étoient comme les hauteurs, & que ces forces étant comme les vîteſſes, celles-ci étoient auſſi comme les hauteurs ou les eſpaces parcourus. Il prétendoit enfin que ſi l'on partageoit l'eſpace parcouru dans un temps donné en parties égales, la premiere étant parcourue dans un certain temps, la ſeconde l'étoit dans la moitié de ce temps, la troiſieme dans le tiers, &c.

Gaſſendi ne manqua pas à la cauſe de la vérité, & il réfuta la Diſſertation du P. *Caſrée*. Il fit voir que ſes expériences ne concluoient rien contre l'hypotheſe de *Galilée*. En effet il eût fallu montrer, non ſeulement qu'un globe tombant d'une hauteur double, triple, &c. de ſon diametre, ſouleve le double, le triple de ſon poids, mais encore qu'il n'auroit pu l'ébranler d'une hauteur tant ſoit peu moindre. Or il n'eſt point douteux qu'il l'auroit fait également, avec cette ſeule différence qu'il ne l'auroit pas autant ſoulevé. Si l'on ſuppoſoit une balance Mathématique, les loix connues du mouvement nous apprennent qu'il n'eſt point de poids ſi petit qu'il ſoit, qui tombant de la plus petite hauteur ſur un des baſſins, ne ſoulevât le plus grand poids qui ſeroit dans l'autre. *Gaſſendi* montra auſſi diverſes conſéquences abſurdes & contradictoires, qui ſuivent de l'hypotheſe dont nous parlons, & qui prouvent que ce bon Pere, deſtitué des lumieres de la Géométrie, n'avoit pas la moindre idée de la maniere dont on doit comparer les temps, les vîteſſes & les eſpaces. Car ce rapport qu'il établit entre les temps que le corps met à parcourir des eſpaces égaux pris dans la perpendiculaire, eſt ridiculement abſurde, en ce que, ſuivant le nombre des parties

courus. Quelques Phyſiciens ſaiſiſſans cette idée, l'ont employée, & ont donné par-là à ſon Auteur une malheureuſe célébrité. Je dis malheureuſe; car donner ſon nom à une opinion qui, examinée d'un peu près, n'eſt qu'une abſurdité, cela ne vaut pas, à mon avis, une honnête obſcurité.

Cette ſorte d'hypotheſe ſur l'accélération des graves n'avoit pas été inconnue à *Galilée*. Il ſe la fait propoſer par un des interlocuteurs de ſes Dialogues, & il avoue même (*a*) qu'elle lui avoit d'abord paru fort vraiſemblable. Mais il la réfute auſſitôt par un raiſonnement très-ingénieux, qui montre que ſi on l'admettoit, il faudroit que le mouvement ſe fît *in inſtanti*. En effet, dit *Galilée*, lorſque les vîteſſes d'un corps ſont proportionnelles aux eſpaces parcourus, les temps dans leſquels ils ont été parcourus ſont égaux. Si donc on ſuppoſe la vîteſſe croître continuellement comme l'eſpace, de ſorte qu'après une chûte de quatre pieds, la vîteſſe ſoit quadruple de celle qui a été acquiſe après un pied de chûte, le corps aura parcouru ces quatre pieds dans le même temps que le premier. Il auroit donc parcouru trois pieds ſans y mettre aucun temps; abſurdité palpable, & qui montre que l'accélération ne ſçauroit ſe faire ſuivant ce rapport. En vain ſe rejetteroit-on ſur la différence qu'il y a entre le mouvement accéléré & le mouvement uniforme. Car ſi l'on diviſe l'eſpace total, & ſon premier quart, par exemple, en un même nombre de parties égales, & ſi petites que l'on puiſſe regarder chacune d'elles comme parcourue d'un mouvement uniforme, il ſera facile de montrer que cet eſpace total & le quart ſeront parcourus en temps égaux. Ainſi la démonſtration de *Galilée*, quoique traitée de paralogiſme par M. *Blondel* (*b*), qui dit ne l'avoir jamais pu concevoir, eſt très-légitime, & concluante.

Cette abſurdité que *Galilée* montroit dans l'hypotheſe de l'accroiſſement de la vîteſſe en raiſon de l'eſpace, eût dû la faire rejetter unanimement. Mais il y a eu dans tous les temps de ces hommes précipités, [illegible] qui ſçavent jetter un nuage ſur les raiſonnemens les plus concluans. Nonobſtant la démonſtration du Philoſophe Italien, quelques-uns entreprirent la défenſe de cette fauſſe hypotheſe. Tel fut entr'autres un Pere

(*a*) *Diſcorſi & dim. Math. intorno à due nuove ſcienze, &c.* Dial. 3.
(*b*) Mem. de l'Acad. avant 1699. T. VIII.

Caſrée,

Caſrée, dont on lit la réfutation dans les Œuvres de *Gaſſendi* (T. IV). Après bien de mauvais raiſonnemens contre l'hypotheſe de *Galilée*, raiſonnemens qui décelent un homme qui a peu de ſolide Phyſique, & encore moins de connoiſſance des Mathématiques, il tâchoit d'établir celle de *Baliani* par l'expérience ſuivante. Il laiſſoit tomber un globe de la hauteur de ſon diametre ſur un des baſſins d'une balance dont l'autre étoit chargé d'un poids égal, & il remarquoit qu'il ſoulevoit ce poids. Il doubloit enſuite, triploit, quadruploit ce poids, & laiſſant tomber le globe d'une hauteur double, triple, quadruple, il remarquoit que le poids en étoit ſoulevé. Delà il concluoit que les forces étoient comme les hauteurs, & que ces forces étant comme les vîteſſes, celles-ci étoient auſſi comme les hauteurs ou les eſpaces parcourus. Il prétendoit enfin que ſi l'on partageoit l'eſpace parcouru dans un temps donné en parties égales, la premiere étant parcourue dans un certain temps, la ſeconde l'étoit dans la moitié de ce temps, la troiſieme dans le tiers, &c.

Gaſſendi ne manqua pas à la cauſe de la vérité, & il réfuta la Diſſertation du P. *Caſrée*. Il fit voir que ſes expériences ne concluoient rien contre l'hypotheſe de *Galilée*. En effet il cût fallu montrer, non ſeulement qu'un globe tombant d'une hauteur double, triple, &c. de ſon diametre, ſouleve le double, le triple de ſon poids, mais encore qu'il n'auroit pu l'ébranler d'une hauteur tant ſoit peu moindre. Or il n'eſt point douteux qu'il l'auroit fait également, avec cette ſeule différence qu'il ne l'auroit pas autant ſoulevé. Si l'on ſuppoſoit une balance Mathématique, les loix connues du mouvement nous apprennent qu'il n'eſt point de poids ſi petit qu'il ſoit, qui tombant de la plus petite hauteur ſur un des baſſins, ne ſoulevât le plus grand poids qui ſeroit dans l'autre. *Gaſſendi* montra auſſi diverſes conſéquences abſurdes & contradictoires, qui ſuivent de l'hypotheſe dont nous parlons, & qui prouvent que ce bon Pere, deſtitué des lumieres de la Géométrie, n'avoit pas la moindre idée de la maniere dont on doit comparer les temps, les vîteſſes & les eſpaces. Car ce rapport qu'il établit entre les temps que le corps met à parcourir des eſpaces égaux pris dans la perpendiculaire, eſt ridiculement abſurde, en ce que, ſuivant le nombre des parties

égales dans leſquelles on diviſe cet eſpace, on trouve les mêmes parties parcourues dans des temps totalement différens; auſſi ce rapport des temps n'eſt-il point celui qui ſuit de l'accroiſſement de la vîteſſe en raiſon de l'eſpace. On trouve au contraire qu'en diviſant l'eſpace parcouru en parties continuellement proportionnelles, la premiere étant priſe du commencement de la chûte, ces parties ſont parcourues en temps égaux (*a*). Et delà il eſt facile de tirer la conſéquence que cette hypotheſe eſt fauſſe; car rien n'eſt plus aiſé que de montrer qu'il faudroit un temps infini pour parcourir le plus petit eſpace donné.

Gaſſendi auroit encore pu faire voir d'une autre maniere que l'expérience alléguée par le P. *Caſrée*, ne concluoit rien. Car ſi la meſure de la vîteſſe que le corps a acquiſe dans ſa chûte d'une certaine hauteur, étoit le poids qu'il eſt capable d'enlever, & que ces poids fuſſent proportionnels aux hauteurs, il s'enſuivroit que ce corps, tombant d'une hauteur moindre de moitié que celle d'où il enleve un poids égal à lui, n'en enleveroit que la moitié, & d'une hauteur cent mille fois moindre, il n'en enleveroit qu'un cent mille fois moindre; enfin tombant d'une hauteur nulle ou infiniment petite, ce qui eſt l'équivalent d'être ſimplement placé dans l'autre baſſin de la balance, il ne pourroit enlever qu'un poids infiniment petit ou nul, c'eſt-à-dire qu'il ſeroit ſans peſanteur, nouvelle abſurdité, qui montre avec évidence la fauſſeté du principe.

(*a*) Voici la démonſtration de ce que nous venons d'avancer. Suppoſons que C B ſoit la ligne perpendiculaire dans laquelle s'exécute la chûte du corps, & que cette perpendiculaire, ou tout l'eſpace parcouru, ſoit diviſée en une infinité de parties égales, de telle ſorte qu'on puiſſe regarder chacune comme parcourue d'un mouvement uniforme. Que B *b* ſoit une de ces parties: puiſque, ſuivant l'hypotheſe, la vîteſſe en B eſt comme l'eſpace parcouru C B, & que les temps dans leſquels des eſpaces égaux ſont parcourus, ſont réciproquement comme les vîteſſes, il s'enſuit que le temps employé à parcourir B *b*, eſt réciproquement comme C B; ainſi ſi B D exprime le temps, le point D & tous les autres ſemblablement déterminés, feront dans une hyperbole entre les aſymptotes C A, C H; & chaque ordonnée ou chaque rectangle infiniment petit, comme D *b*, exprimant le tempuſcule employé à parcourir B *b*, l'aire totale de la courbe repréſentera le temps entier employé à deſcendre de C en B. Or on ſçait que, dans l'hyperbole entre les aſymptotes, à des ſegmens de l'axe continuement proportionnels répondent des aires égales; c'eſt pourquoi l'eſpace C B étant diviſé de B en C, en parties continuement proportionnelles, ces parties ſeront parcourues en temps égaux. Delà il eſt aiſé de conclure qu'il faudroit un temps infini au corps, pour parcourir le plus petit eſpace à commencer de la chûte, c'eſt-à-dire, que le mouvement ſeroit impoſſible.

Fig. 81.

Galilée trouva un autre défenſeur dans M. de *Fermat*. Cet habile Géometre ſentit la juſteſſe du raiſonnement que le Philoſophe Italien avoit fait contre l'hypotheſe de l'accélération en raiſon de l'eſpace, & le voyant conteſté, afin qu'il ne reſtât aucun ſubterfuge pour l'éluder, il le développa davantage, & l'établit en ſe ſervant de la méthode des anciens Géometres. Il communiqua ſa démonſtration à *Gaſſendi*, qui s'en ſervit pour porter un dernier coup à la fauſſe hypotheſe dont nous parlons (*a*).

Pendant que *Gaſſendi* étoit aux priſes avec le P. *Caſrée* au ſujet de la loi d'accélération propoſée par *Galilée*, le P. *Riccioli* travailloit en Italie à l'établir par des expériences qui paroiſſent faites avec beaucoup de ſoin (*b*). Cet Aſtronome & le P. *Grimaldi*, ſon compagnon, afin de meſurer & de ſubdiviſer le temps avec plus de préciſion, ſe ſervirent d'un pendule dont les vibrations ne duroient qu'un ſixieme de ſeconde. Mettant enſuite ce pendule en mouvement, ils laiſſerent tomber de diverſes hauteurs qu'ils avoient meſurées, des globes d'argille peſans huit onces, & ils trouverent à pluſieurs repriſes que dans des temps exprimés par 5, 10, 15, 20, 25 vibrations, ces corps parcoururent des hauteurs qui furent reſpectivement de 10, 40, 90, 160, 250 pieds, & que dans les intervalles de 6, 12, 18, 24, 26 vibrations, ces hauteurs furent 15, 60, 135, 240, 280 pieds. Je ne ſçaurois cependant diſſimuler que cette expérience eſt bien délicate, & que quand les choſes ſe ſeroient paſſées un peu autrement, elle n'auroit pas manquée de réuſſir à peu près de même. Car il étoit bien difficile de déterminer ſi l'inſtant de l'arrivée du globe au pavé étoit préciſément celui de la fin de la vibration, & la rapidité de la chûte eſt ſi grande, que dans une partie de vibration très-petite le corps pouvoit parcourir un eſpace aſſez conſidérable. Auſſi voyons-nous que quelques autres Obſervateurs n'ont pas trouvé un réſultat ſi parfaitement conforme à celui de la théorie. Le P. *Deſchales* (*c*) entr'autres dit avoir examiné les eſpaces parcourus pendant les vibrations d'un pendule de demi-ſeconde, & avoir trouvé que des pierres qu'il laiſſoit tomber dans des puits

(*a*) Voy. *Op. Ferm.* p. 201. *Op. Gaſſ.* T. VI. *verſ. fin.*
(*b*) *Alm. Nov.* L. II, c. 19.
(*c*) *In Mecan.* Mund. Math. T. II.

d'inégale hauteur, parcouroient en 1, 2, 3, 4, 5, 6 vibrations des eſpaces qui étoient $4\frac{1}{4}$, $16\frac{1}{2}$, 36, 60, 90, 123, pieds; au lieu qu'ils auroient dû être, ſuivant la théorie, de $4\frac{1}{4}$, 17, $38\frac{1}{4}$, 65, $106\frac{1}{4}$, 153. Mais ce Mathématicien obſerve lui-même que cela doit être attribué à la réſiſtance de l'air, & il eſt probable que ſi, au lieu de faire ces expériences avec de petits cailloux, il les eût faites avec des poids ſpécifiquement plus graves, comme des balles de plomb, leur réſultat eût été beaucoup plus approchant de celui de la théorie. Car le P. *Merſenne* a remarqué (*a*) que laiſſant tomber des balles de plomb d'un endroit du dôme de S. Pierre de Rome, élevé de 300 pieds, elles parcouroient cet eſpace en 5, ou 5 ſecondes & demi, au lieu que de petits cailloux employoient à le faire 7 à 8 ſecondes, ce qui eſt conforme aux expériences faites par M. *Deſaguliers* à S. Paul de Londres.

Il n'eſt pas poſſible par les raiſons qu'on a dites plus haut, de s'aſſurer parfaitement par les temps des chûtes perpendiculaires, de la vérité de l'hypotheſe de *Galilée*. C'eſt pourquoi, à l'exemple de cet homme célebre, les Phyſiciens qui ont voulu établir cette vérité par expérience, ont recouru à d'autres preuves. La plus ſûre & la plus démonſtrative eſt celle qu'on tire du mouvement des pendules. Car il ſuit inconteſtablement de l'hypotheſe de *Galilée*, & de cette hypotheſe ſeule, que des pendules inégaux & ſemblables doivent dans le même temps faire des nombres de vibrations qui ſoient réciproquement comme les quarrés de leurs longueurs; & c'eſt ce qu'on obſerve avec la derniere préciſion, pourvu que les vibrations ſoient fort petites, ainſi que l'exige la démonſtration tirée du principe de *Galilée*. Ainſi ſon hypotheſe eſt la véritable, à l'excluſion de toute autre. On trouve dans les Livres de Phyſique expérimentale divers autres moyens de rendre ſenſible aux yeux la vérité de cette hypotheſe. Mais l'un des plus ingénieux, eſt celui du fameux P. *Sébaſtien* (*b*), que nous nous bornerons à faire connoître : qu'on ſe repréſente un conoïde parabolique, autour duquel regne un canal ſpiral qui fait un angle conſtant, par exemple un quart de droit, avec le plan de chacune des paraboles génératrices. On démontre que ſi

(*a*) *Reflect. Phyſ. Math.* c. 9.
(*b*) Hiſt. de l'Acad. ann. 1699.

l'hypotheſe de *Galilée* eſt la vraie, chaque tour de ſpirale doit être parcouru dans un même temps. Or c'eſt ce qui arrive. Si dans l'inſtant où une boule acheve le premier tour en commençant du ſommet, on en lâche une ſeconde, & enſuite une troiſieme lorſque la ſeconde a fini ce premier tour, & ainſi de ſuite, on les voit avec plaiſir ſe trouver toutes ſenſiblement en même temps ſur le même arc de parabole. Remarquons ici avec M. *Varignon* (*a*), qu'en général ſi l'on a une courbe dont l'abſciſſe repréſente l'eſpace, & l'ordonnée la vîteſſe correſpondante, & qu'ayant fait tourner cette courbe autour de ſon axe, on faſſe régner autour de ce ſolide une ſpirale comme celle de la machine précédente, chaque tour devra être parcouru dans le même temps, ſi la loi d'accélération déſignée par l'équation de la courbe génératrice, eſt la véritable. Ceci fournit un moyen d'éprouver, d'une maniere ſemblable à celle qu'on vient de voir, une hypotheſe quelconque. Dans celle de *Baliani*, par exemple, il faudroit que ce fût un ſimple cône. Mais nous oſons prévoir que ſi on en faiſoit l'expérience, elle ne feroit que fournir une nouvelle preuve de la fauſſeté de cette hypotheſe.

IV.

De quelques Diſciples de Galilée.

Les théories auxquelles *Galilée* avoit donné naiſſance, reçurent leurs premiers accroiſſemens de deux de ſes diſciples. L'un eſt Benoît *Caſtelli* (*b*). Ce Méchanicien eſt recommandable, comme étant en quelque ſorte le créateur d'une nouvelle partie de l'hydraulique, ſçavoir, *La meſure des eaux courantes*. Les conteſtations fréquentes qui s'élevent en Italie ſur le cours des fleuves, & la néceſſité où l'on eſt dans ce pays de ſe tenir continuellement en garde contre leurs dommages, firent que le Pape Urbain VIII, qui l'avoit appellé à Rome pour y enſeigner les Mathématiques, le chargea de réfléchir ſur cette matiere. *Caſtelli* travailla à remplir les vues de ſa Sainteté ; & c'eſt le fruit de ſes recherches & de ſes réflexions qu'il donna dans ſon Traité intitulé, *della miſura dell'acque cor-*

(*a*) Ibid. ann. 1702.

(*b*) Benoît Caſtelli, Moine du Mont-Caſſin, fut un des premiers diſciples de Galilée. Son Traité parut en 1639, & a été traduit en François en 1664. On le trouve auſſi dans le Recueil Italien des Auteurs qui traitent du mouvement des eaux. Nous ignorons la date de la naiſſance & de la mort de cet habile homme.

renti; ouvrage peu conſidérable pour le volume, mais précieux par la ſolide & judicieuſe doctrine qu'il contient. Nous en dirons quelque choſe de plus, lorſque nous parlerons des Ecrivains plus modernes ſur le mouvement des eaux.

L'autre diſciple de *Galilée* à qui la Méchanique & l'Hydraulique doivent des progrès, eſt le célebre *Torricelli* (*a*). Il étudioit à Rome les Mathématiques ſous *Caſtelli*, lorſque les écrits de *Galilée* ſur le mouvement lui tomberent entre les mains. Il compoſa dès-lors ſur le même ſujet un Traité qui fut envoyé à *Galilée*, & qui lui donna tant d'eſtime pour ſon Auteur, qu'il déſira le connoître & l'avoir auprès de lui. Mais *Torricelli* ne jouit de cet avantage que fort peu de temps, *Galilée* étant mort trois mois après. Il augmenta dans la ſuite le Traité dont nous parlons, & y ajoutant une partie ſur le mouvement des fluides, il le publia avec ſes autres ouvrages mathématiques en 1644. Nous y trouvons la premiere idée d'un principe ingénieux & très-utile en Méchanique. C'eſt celui-ci. *Lorſque deux poids ſont tellement liés enſemble, qu'étant placés comme l'on voudra, leur centre de gravité commun ne hauſſe ni ne baiſſe, ils ſont en équilibre dans toutes ces ſituations.* C'eſt par le moyen de ce principe que *Torricelli* démontre le rapport des poids qui ſe contrebalancent le long des plans inclinés; & quoiqu'il ne l'emploie que dans ce cas, il eſt facile de voir qu'on peut l'appliquer à tous les autres cas imaginables de la Statique, de même qu'à quantité d'autres recherches Méchaniques. *Torricelli* paſſe delà à examiner le mouvement accéléré, auſſi bien que celui des projectiles, & il ajoute à la théorie de *Galilée* quantité de vérités remarquables. Nous en choiſirons une ſeule parmi une multitude d'autres. C'eſt une propriété ſinguliere de la trace de tous les projectiles jettés d'un même point ſous différens angles, mais avec la même force. *Torricelli* montre que toutes les paraboles qu'il décrivent, ſont renfermées dans une courbe qui eſt elle-même une parabole,

(*a*) Torricelli naquit à Faenza en 1618. Il fut envoyé à l'âge de 20 ans à Rome, pour y étudier les Mathématiques; ce qu'il fit ſous Benoît Caſtelli. Après la mort de Galilée, le Grand-Duc ſe l'attacha en qualité d'un de ſes Mathématiciens. Torricelli eut de vifs démêlés avec Roberval au ſujet de la cycloïde: on peut en voir l'hiſtoire dans le Livre premier de cette partie. Il mourut en 1647: il laiſſa quantité d'écrits ébauchés qui n'ont pas vu le jour. On en trouve les titres dans le Journal de Veniſe, T. XXX, où l'on lit auſſi ſa vie.

& qui les touche. Par exemple, que A ſoit le foyer d'une parabole, dont C ſoit le ſommet, tous les corps lancés du point A, ſous quelque inclinaiſon que ce ſoit, avec une force capable de les élever perpendiculairement à la hauteur AC, décriront des paraboles qui toucheront la premiere. *Torricelli* termine ſon Traité en rectifiant l'équerre ordinaire des Bombardiers; il en donne une nouvelle & fort ſimple, dont la conſtruction eſt appuyée ſur le vrai principe, & dont l'uſage eſt fort facile. *Fig.* 82.

Le ſecond Livre du Traité de *Torricelli* a pour objet le mouvement des fluides. Il prend pour fondement de toute ſa théorie, que l'eau qui s'écoule d'une ouverture pratiquée à un vaſe en ſort avec une vîteſſe égale à celle d'un corps qui ſeroit tombé de la hauteur du niveau de l'eau au deſſus de cette ouverture. Il tâche d'établir ce principe par diverſes raiſons, dont la meilleure eſt celle de l'expérience qui montre que l'eau atteint preſque ce niveau, de ſorte qu'il eſt à préſumer que ſans la réſiſtance de l'air elle l'atteindroit préciſément. Nous remarquerons cependant dès cet endroit que cela n'eſt pas généralement vrai, & que les prétendues démonſtrations qu'en donnent les Livres vulgaires d'Hydraulique, ne ſont pas concluantes. Depuis qu'on a traité cette partie de la Méchanique d'après ſes vrais principes, on a reconnu que la hauteur à laquelle jailliroit l'eau ſortant verticalement par l'ouverture d'un vaſe, n'eſt égale à la hauteur du niveau que dans le cas où cette ouverture n'a aucun rapport ſenſible avec la grandeur de la ſurface du fluide qui s'abaiſſe en même temps. Nous traiterons ceci plus au long en rendant compte des découvertes de l'Hydrodynamique moderne. Nous paſſons ſur une multitude de propoſitions utiles & curieuſes que *Torricelli* déduit de ſon principe, afin d'arriver à la découverte mémorable de la peſanteur de l'air.

V.

Découverte de la peſanteur de l'air.

Quoique la découverte de la peſanteur de l'air ſoit des plus modernes, il y avoit déja long-temps que les phénomenes qu'elle occaſionne, étoient connus. On ſçavoit depuis pluſieurs ſiecles qu'en aſpirant l'air contenu dans un tube dont

l'extrêmité eſt plongée dans un fluide, ce fluide s'élevoit au deſſus de ſon niveau, & prenoit la place de l'air. C'eſt d'après cette obſervation qu'on avoit imaginé les pompes aſpirantes, & diverſes autres inventions hydrauliques, comme les ſyphons que *Heron* décrit dans ſes *Pneumatiques*, & ces eſpeces d'arroſoirs connus du temps d'*Ariſtote* ſous le nom de *Clepſidres* (*a*), qui s'écoulent ou s'arrêtent ſuivant qu'on laiſſe l'orifice ouvert, ou qu'on le bouche avec le doigt. La raiſon qu'on donnoit de ce phénomene, étoit la ſuivante. On prétendoit que la nature avoit une certaine horreur pour le vuide, & que plutôt que de le ſouffrir, elle préféroit de faire monter ou de ſoutenir un corps contre l'inclination de ſa peſanteur. *Galilée* lui-même, malgré ſa ſagacité, n'avoit rien trouvé de plus ſatisfaiſant. Il avoit ſeulement donné des bornes à cette horreur pour le vuide. Ayant remarqué que les pompes aſpirantes ne ſoulevoient plus l'eau au-delà de la hauteur de 16 braſſes ou 32 pieds, il avoit limité cette force de la nature pour éviter le vuide à celle qui équivaudroit au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur ſur la baſe de l'eſpace vuide. Il avoit en conſéquence enſeigné à faire du vuide par le moyen d'un cylindre creux & renverſé, dont on charge le piſton de poids ſuffiſans pour le détacher du fond. Cet effort ſe nommoit la meſure de la force du vuide, & il s'en ſervoit pour expliquer la cohérence des parties des corps (*b*).

Galilée n'ignoroit cependant pas la peſanteur de l'air. Il enſeigne dans ſes Dialogues deux manieres de la démontrer. Le pas étoit facile d'une découverte à l'autre: mais l'hiſtoire des ſciences nous apprend à ne nous point étonner de voir d'excellens génies manquer des découvertes auxquelles ils touchoient.

Torricelli eut enfin l'idée heureuſe de ſoupçonner que ce contrepoids qui ſoutient les fluides au deſſus de leur niveau, lorſque rien ne peſe ſur leur ſurface intérieure, eſt la maſſe d'air qui eſt appuyée ſur la ſurface extérieure. Voici par quels degrés il y parvint. En 1643 ce diſciple de *Galilée* cherchant à exécuter en petit l'expérience du vuide qui ſe fait dans les

(*a*) Phyſic. IV, c. 6.
(*b*) *Diſc. & dim. Math. &c.* Dial. 1°.

pompes

pompes au deſſus de la colonne d'eau, quand elle excede 32 pieds, imagina de ſe ſervir d'un fluide plus peſant que l'eau, comme le mercure. Il ſoupçonnoit que, quelle que fût la cauſe qui ſoutenoit une colonne de 32 pieds au deſſus de ſon niveau, cette même force ſoutiendroit une colonne d'un fluide quelconque qui peſeroit autant que la colonne d'eau ſur même baſe; d'où il concluoit que le mercure étant environ 14 fois auſſi peſant que l'eau, ne ſeroit ſoutenu qu'à la hauteur de 27 à 28 pouces. Il prit donc un tube de verre de pluſieurs pieds de longueur, & ſcellé hermétiquement par un de ſes bouts. Il le remplit de mercure, puis le retournant verticalement l'orifice en bas, en le tenant bouché avec le doigt, il le plongea dans un autre vaſe plein de mercure, & le laiſſa écouler. L'événement vérifia ſa conjecture: le mercure fidele aux loix de l'Hydroſtatique, deſcendit juſqu'à ce que la colonne élevée au deſſus du niveau du réſervoir fût d'environ 28 pouces.

L'expérience de *Torricelli* devint célebre dans peu de temps; le P. *Merſenne* qui entretenoit un commerce de Lettres avec la plûpart des ſçavans d'Italie, en fut informé en 1644, & la communiqua à ceux de France qui la répéterent bientôt. Le fameux M. *Paſcal*, & M. *Petit*, curieux Phyſicien de ce temps, furent des premiers à la faire & à la varier de différentes manieres. Cela donna lieu à l'ingénieux Traité que M. *Paſcal* publia à l'âge de 23 ans, ſous le titre d'*expériences nouvelles touchant le vuide*, & qui le rendit dès-lors fort célebre dans toute l'Europe.

Cependant *Torricelli* réfléchiſſoit ſur la cauſe de ce phénomene, & il parvint enfin à deviner que la peſanteur de l'air appuyé ſur la ſurface du réſervoir, étoit ce qui contrebalançoit le fluide contenu dans le tube. Cette idée eſt ſi conforme aux loix de l'Hydroſtatique, qu'il ſuffit de l'avoir entrevue pour y reconnoître la vraie cauſe du phénomene en queſtion. *Torricelli* eut ſans doute imaginé de nouvelles expériences pour confirmer ſa découverte. Mais arrêté par la mort preſqu'à l'entrée de ſa carriere, il fut contraint de laiſſer ce ſoin à d'autres.

En effet, M. *Paſcal* qui, dans le premier Traité dont nous avons parlé, avoit employé le principe de l'horreur du vuide, quoique, dit-il, il eût déja quelque ſoupçon de la peſanteur

de l'air, ſaiſit l'idée de *Torricelli*, & imagina diverſes expériences pour la vérifier. L'une fut de ſe procurer un vuide au deſſus du réſervoir du mercure. On vit alors la colonne tomber au niveau; mais cela ne lui paroiſſant pas encore aſſez puiſſant pour forcer les préjugés de l'ancienne Philoſophie, il fit exécuter par un de ſes beaufreres, (M. *Perier*, Conſeiller à la Cour des Aides de Clermont,) la fameuſe expérience de Puy-de-Dôme. Sa célébrité me diſpenſe de m'étendre beaucoup ſur ce ſujet. Tout le monde ſçait que le correſpondant de *Paſcal* trouva que la hauteur du mercure à mi-côte de la montagne étoit moindre de quelques pouces qu'au pied, & encore moindre au ſommet, de ſorte qu'il étoit évident que c'étoit le poids de l'athmoſphere qui contrebalançoit le mercure. M. *Paſcal* apprit en même temps par-là qu'il pouvoit avoir à Paris la ſatisfaction de voir l'abaiſſement du mercure, à meſure qu'il s'éleveroit dans l'athmoſphere. Il choiſit une des plus hautes tours de cette ville, ſçavoir celle de S. Jacques de la boucherie, qui eſt élevée d'environ 25 toiſes, & il trouva dans la hauteur du mercure une différence de plus de deux lignes. Nous ne croyons pas devoir entrer ici dans le détail de l'explication de divers phénomenes qui ſont une ſuite de la peſanteur de l'air. Outre que cela nous meneroit trop loin, ils ſont ſi connus de tous ceux qui ſont initiés dans la Phyſique, que ce ſeroit nous y amuſer inutilement. Nous nous contentons donc de renvoyer aux Livres de Phyſique expérimentale, qui pour la plûpart traitent amplement cette matiere.

Il ne nous faut pas oublier ici quelques traits de la ſagacité de M. *Deſcartes* au ſujet du phénomene dont nous venons de parler. Nous avons des preuves que ce Philoſophe reconnut avant *Torricelli* la peſanteur de l'air, & ſon action pour ſoutenir l'eau dans les pompes & les tuyaux fermés par un bout. Dans le recueil de ſes Lettres, il y en a une qui porte la date de l'année 1631 (*a*), & où il explique le phénomene de la ſuſpenſion du mercure dans un tuyau fermé par le haut, en l'attribuant au poids de la colonne d'air élevée juſqu'au-delà des nues : c'eſt auſſi par-là qu'il explique dans cette même Let-

(*a*) T. III, lett. III, p. 602.

tre la preſſion d'un verre rempli d'air chaud, qu'on renverſe ſur un corps en bouchant bien les avenues de l'air extérieur. Nous trouvons encore des preuves du ſentiment de *Deſcartes* ſur ce ſujet dans diverſes autres Lettres. Dans une qui eſt peu poſtérieure à la publication des *Dialogues* de *Galilée* ſur le mouvement, & qui contient une critique un peu amere, & en pluſieurs points peu juſte, de cet ouvrage (*a*), *Deſcartes* rejette la prétendue force du vuide imaginée par le Philoſophe Italien, & il attribue l'adhérence de deux corps qui ſe touchent par des ſurfaces fort polies, à la ſeule peſanteur de l'athmoſphere qui peſe deſſus ; raiſon qu'il donne encore, quoique d'une maniere moins excluſive, à la ſuſpenſion de l'eau dans les tuyaux des pompes. Enfin dans une Lettre (*b*) qui ſuit de près la précédente, il s'agit de ces arroſoirs qu'on maintient pleins d'eau en tenant l'ouverture ſupérieure bouchée. « L'eau ne demeure pas, dit-il, dans les vaiſſeaux par la crainte » du vuide, mais à cauſe de la peſanteur de l'air, &c. » Il eſt encore à propos de remarquer que M. *Deſcartes* révendique dans une de ſes Lettres (*c*) l'idée de l'expérience de Puy-de-Dôme. Après avoir demandé à M. de *Carcavi* de s'informer du ſuccès de cette expérience que la renommée lui avoit appris avoir été faite par M. *Paſcal* : » J'aurois, dit-il, droit d'attendre cela » de lui plutôt que de vous, parce que c'eſt moi qui l'en ai aviſé » il y a deux ans, & qui l'ai aſſuré que, quoique je ne l'euſſe » pas faite, je ne doutois point du ſuccès ; mais parce qu'il eſt » ami de M. *Roberval* qui fait profeſſion de n'être pas le mien, » j'ai lieu de croire qu'il en ſuit les paſſions. » Nous ne pouvons porter aucun jugement bien aſſuré ſur la juſtice de ces plaintes de *Deſcartes*, & ſur le droit qu'il prétend à l'expérience dont il s'agit ; mais ce que nous venons de rapporter d'après ſes Lettres, pourra paroître fort favorable à ſa prétention.

VI.

La France déja rivale de l'Italie en ce qui concerne les premieres découvertes géométriques qui ont commencé à frayer

(*a*) T. II, lett. 91.
(*b*) Ibid. lett. 94.
(*c*) T. III, lett. 75.

la route aux nouveaux calculs, ſemble l'avoir été auſſi à l'égard de quelques-unes des découvertes méchaniques que nous venons d'expoſer. Vers le temps où *Galilée* finiſſoit ſa carriere, divers Mathématiciens François cultivoient la Méchanique, ſoit en confirmant par de nouveaux tours de démonſtrations, les vérités déja connues, ſoit en agitant entr'eux diverſes queſtions qui ont enſuite donné lieu à des branches intéreſſantes de cette ſcience. L'*Harmonie univerſelle* du P. *Merſenne*, ouvrage imprimé en 1637, nous fournit des preuves de ce que nous venons de dire. On y voit des eſſais méchaniques de M. *Roberval*, qui contiennent des démonſtrations fort ingénieuſes ſur divers points de Statique. Il y fait uſage de ce principe depuis ſi employé & ſi connu, ſçavoir, qu'il y a équilibre entre deux puiſſances, lorſqu'elles ſont en raiſon réciproque des perpendiculaires tirées du point d'appui ſur les lignes de direction. Quoique la découverte de ce principe ne paroiſſe pas d'une grande difficulté, il ne laiſſe pas d'y avoir quelque mérite à l'avoir apperçu, d'autant plus qu'il ne parut pas ſi évident à quelques gens de mérite, comme M. de *Fermat*, qui éleva à ſon ſujet des difficultés mal fondées. A la vérité, la plûpart des diſcuſſions méchaniques où entra M. de *Fermat*, montrent qu'il n'étoit pas auſſi habile Phyſicien que Géometre. C'eſt ſurtout l'idée que font naître les prétentions qu'on lit dans ſon commerce épiſtolaire avec *Roberval*, & qui reſſemblent fort à celles d'un Mr de *Beaugrand*, Auteur d'un ouvrage intitulé *Geoſtatique*, dont *Deſcartes* ne parle qu'avec pitié, & qui mérite ce jugement.

Le P. *Merſenne* (*a*) ſervit la Méchanique principalement par un grand nombre d'expériences, comme ſur la réſiſtance des ſolides, ſur l'écoulement des fluides & le déchet occaſionné par les ajutages, ſur les vibrations des corps, & ſur une multitude d'autres ſujets. On les trouve répandues dans ſon *Harmonie univerſelle*, & ſes divers écrits méchaniques. On pourroit les appeller un Océan d'obſervations de toute eſpece, parmi leſquelles il y en a un grand nombre d'aſſez puériles.

(*a*) Merſenne (Marin), le célebre correſpondant de Deſcartes, naquit en 1588. Il fit ſes études à la Fléche, & il entra dans l'Ordre des Minimes en 1612. On a de ce ſçavant Minime, pluſieurs écrits Phyſiques & Mathématiques, comme ſon *Harmonie univerſelle*, un *Traité* Latin *de Méchanique*, des *Cogitata Phyſico-Mathematica*, avec un Appendix; une *Synopſis univerſæ Matheſeos*, &c. Il mourut en 1648.

Merſenne excitoit, comme tout le monde ſçait, les ſçavans par les queſtions perpétuelles qu'il leur propoſoit, & perſuadé que la vérité naît de la diſpute, comme la lumiere ſort du ſein du caillou & du fer qui s'entrechoquent, il mettoit ſouvent ſes correſpondans aux priſes les uns avec les autres. C'eſt à ces queſtions propoſées par le P. *Merſenne* que nous devons la théorie des centres de percuſſion ou d'oſcillation, ſujet à l'occaſion duquel *Deſcartes* & *Roberval* ſe querellerent fort, ſans avoir raiſon ni l'un ni l'autre, du moins en ce qui concerne les cas les plus difficiles. Nous voyons auſſi par les Lettres de *Deſcartes* qu'il fut alors queſtion parmi les Méchaniciens François, de la poſition du centre de gravité dans les corps, en ſuppoſant les directions des graves convergentes; de ce qui arriveroit à un corps tombant dans un milieu réſiſtant, ſur quoi *Deſcartes* fit une remarque fort juſte. Nous nous bornons ici à cette indication, & nous paſſons à rendre compte des efforts que fit ce Philoſophe pour perfectionner la ſcience du mouvement. A la vérité, ils ne furent pas tous également heureux; nous ne pouvons même diſſimuler qu'en pluſieurs points cet homme ſi bien partagé du côté du génie, ſe trompa d'une maniere qui nous fait peine pour ſa réputation. Mais il entre dans notre plan de rapporter ſes erreurs comme ſes découvertes.

Deſcartes imita *Galilée* en réduiſant la Statique à un principe général & unique. On a de lui un Traité de Méchanique en peu de pages, ouvrage qu'il accorda à la ſollicitation de M. de *Zuylichem*, pere du célebre M. *Huyghens*, qui ſe plaiſoit dans ces matieres. Le principe auquel M. *Deſcartes* réduit toute cette ſcience, eſt qu'il faut autant de force, c'eſt-à-dire la même quantité d'effort, pour élever un poids à une certaine hauteur, que pour élever le double à une hauteur moindre de moitié. Car, dit-il, élever cent livres à la hauteur d'un pied, & de nouveau cent livres à la même hauteur, c'eſt la même choſe qu'élever deux cens livres à la hauteur d'un pied, ou cent à celle de deux : ainſi l'effet eſt le même, & par conſéquent il faut la même quantité d'action. Nous pourrions davantage développer ce principe, comme nous avons fait à l'égard de celui de *Galilée*. Mais nous ſacrifions ce développement à la briéveté & à des objets plus intéreſſans.

On doit principalement à M. *Deſcartes* d'avoir enſeigné plus diſtinctement qu'on n'avoit encore fait les propriétés du mouvement. Je me borne à dire plus diſtinctement ; car on ne peut refuſer au célebre Philoſophe Italien de les avoir reconnues, & employées dans divers écrits, ſoit ſon *Syſtema Coſmicum*, ſoit ſes Dialogues ſur le mouvement. Nous ne croyons cependant pas que ce ſoit de lui que *Deſcartes* les ait empruntées, le ſyſtême de notre Philoſophe étant déja en grande partie arrêté avant que les écrits de *Galilée* euſſent vu le jour.

Deſcartes prend pour principe de toute ſa Phyſique méchanique, 1°. que le mouvement ſubſiſte dans un corps avec la même vîteſſe & la même direction, tant qu'aucun obſtacle ne le détruit, ou ne change cette vîteſſe & cette direction. 2°. Que tout mouvement ne ſe fait de ſa nature qu'en ligne droite ; de ſorte que 3°. un corps ne ſe meut dans une ligne courbe, que parce que ſa direction eſt continuellement changée par quelqu'obſtacle, ſans lequel il s'échapperoit par la tangente au point où cet obſtacle ceſſeroit.

On emploie ordinairement, pour prouver ces regles, l'idée du mouvement qu'on conſidere comme un état du corps ; d'où l'on conclud que toute choſe reſtant dans ſon état, tant qu'aucune cauſe extérieure ne l'en tire, il faut qu'un corps en mouvement continue à ſe mouvoir, juſqu'à ce qu'il rencontre quelqu'obſtacle. Il en eſt de même de la direction & de la vîteſſe : elles doivent, dit-on, reſter les mêmes par une raiſon ſemblable ; car cette vîteſſe & cette direction ſont au mouvement, ce qu'une plus grande ou une moindre courbure ou une courbure dans un certain ſens, eſt à l'état de curvité. Ce ſont des modifications du mouvement qui doivent par conſéquent ſubſiſter, tant qu'aucune cauſe ne les change. Telles ſont à peu près les raiſons de M. *Deſcartes* pour prouver ces regles. Mais nous remarquerons avec M. d'*Alembert* (*a*), que ſi l'on n'avoit que de pareilles raiſons, elles ne ſeroient guere propres à opérer une conviction entiere. La nature du mouvement, nous ne pouvons le diſſimuler, eſt encore pour nous une énigme ; ainſi toute preuve appuyée ſur ce fondement ne peut être que foible. Nous n'en avons au-

(*a*) *Traité de Dynamique*. Préface.

cune meilleure que celle de l'expérience, qui dépose de cent façons différentes en faveur de ces loix. Tout corps dégagé d'obstacle ne prend qu'un mouvement rectiligne, & tant qu'il ne rencontre aucune résistance sensible, il continue à se mouvoir avec la même vîtesse. Un pendule d'un certain poids, dont le mouvement est très-libre, fait des oscillations durant vingt-quatre heures, & il est facile d'assigner ici la cause de la cessation de son mouvement, sçavoir la résistance de l'air qu'il a à fendre : car cette résistance est-elle plus grande, comme celle de l'eau, le mouvement est plutôt éteint; est-elle moindre, comme si le mouvement se passe dans la machine pneumatique, il continue plus long-temps qu'il n'auroit fait. Enfin tout corps qui décrit une courbe, ne le fait qu'au moyen d'un arrêt contre lequel il exerce un effort qu'on ne peut méconnoître. Cet arrêt cesse-t'il, le corps s'échappe par la tangente : c'est ce qu'on éprouve dans tous les mouvemens curvilignes. Ainsi aucune vérité physique mieux prouvée que celle des loix qu'on a exposées ci-dessus.

Nous voudrions bien pour la gloire de *Descartes*, à laquelle nous devons nous intéresser, comme compatriote, pouvoir en dire autant des regles qu'il prétendit établir pour la communication du mouvement. Mais c'est ici que sa trop grande confiance en certaines idées métaphysiques, & un esprit systêmatique mal dirigé, l'entraînerent dans une foule d'erreurs trop peu excusables. Nous trouvons effectivement dans ces regles toutes sortes de défauts, principes hazardés, contradictions, manque d'analogie & de liaison ; c'est, pour le dire en un mot, un tissu d'erreurs qui ne mériteroient pas d'être discutées sans la célébrité de leur Auteur.

Descartes établit ses loix du choc des corps, sur deux principes, l'un assez séduisant, l'autre trop peu pour que nous ne soyons pas étonnés qu'il ait pu lui en imposer. Le premier de ces principes, est que dans le choc des corps il reste toujours la même quantité de mouvement. *Descartes* appuye sa prétention sur l'idée de l'immutabilité divine. Dieu, dit-il, ayant créé le monde avec une certaine quantité de mouvement qu'il a établie comme le ressort de toutes les opérations de la nature, il semble que son immutabilité consiste à en conserver la même quantité. D'ailleurs n'y auroit-il pas à

craindre ſans cela que le monde ne tombât dans une eſpece d'engourdiſſement fatal à tous les êtres. Le ſecond principe employé par *Deſcartes*, eſt que le corps a une force pour perſévérer dans l'état où il eſt, ſoit de mouvement, ſoit de repos. Il faut encore remarquer que, ſuivant ce Philoſophe, un mouvement dans une direction oppoſée, n'eſt point un état contraire; de ſorte que la ſeule raiſon de ne pouvoir continuer ſon mouvement, en eſt une pour être réfléchi en ſens contraire avec la même vîteſſe. Nous diſcuterons toutes ces prétentions après avoir rapporté quelques-unes des loix du choc, que M. *Deſcartes* en déduit pour les corps abſolument durs qui ſont les ſeuls qu'il conſidere. Les voici.

1°. Si deux corps égaux ſe choquent avec des vîteſſes égales, ils ſe réfléchiront en arriere, chacun avec ſa vîteſſe.

2°. Si l'un des deux eſt plus grand que l'autre, & que les vîteſſes ſoient égales, le moindre ſeul ſera réfléchi, & ils iront tous les deux du même côté avec la vîteſſe qu'ils avoient avant le choc.

3°. Si deux corps égaux & ayant des vîteſſes inégales en ſens contraire, viennent à ſe choquer, le plus lent ſera entraîné, de ſorte que leur vîteſſe commune ſera égale à la moitié de la ſomme de celles qu'ils avoient avant le choc.

4°. Si l'un des deux corps eſt en repos, & qu'un autre moindre que lui vienne le frapper, celui-ci, dit M. *Deſcartes*, ſe réfléchira ſans lui imprimer aucun mouvement.

5°. Si un corps en repos eſt choqué par un plus grand, il en ſera entraîné, & ils iront enſemble du même côté, avec une vîteſſe qui ſera à celle du corps choquant, comme la maſſe de celui-ci à la ſomme des maſſes de l'un & de l'autre. Le corps en repos ayant 1 de maſſe, & l'autre 2, leur vîteſſe commune après le choc ſera les $\frac{2}{3}$ de celle du corps choquant. Cette regle eſt la ſeule où *Deſcartes* ait rencontré la vérité. Je paſſe les autres cas, qui ſont ceux où un corps en atteint un autre en le ſuivant avec une vîteſſe plus grande que la ſienne, parce qu'il s'y trompe de même que dans les précédens. Il vaut mieux paſſer à examiner les principes ſur leſquelles ſont établies ces déterminations.

En premier lieu, que la quantité du mouvement doive reſter toujours la même, c'eſt une propoſition démontrée fauſſe

fauſſe par l'expérience : quant à la preuve qu'en apporte *Deſcartes*, il eſt bien vrai que la Divinité agit d'une maniere immuable : accordons encore qu'il eſt fort probable qu'elle entretient l'univers par quelque loi générale ; mais il eſt bien téméraire de prendre pour le caractere de l'immutabilité divine, cette prétendue inaltérabilité dans la quantité du mouvement. Il eſt mille autres loix plus générales, plus néceſſaires, que la divinité a pu choiſir, eût pu dire quelque adverſaire de *Deſcartes* ; & en effet l'on ſçait aujourd'hui que ce n'eſt pas la quantité de mouvement abſolu qui eſt inaltérable, mais celle du mouvement vers un même côté, ou bien encore, dans le choc des corps élaſtiques, la ſomme des produits de chaque maſſe par le quarré de ſa vîteſſe.

En ſecond lieu, *Deſcartes* s'étoit formé une idée très-fauſſe du mouvement. Sans doute il eût raiſonné autrement, s'il n'eût pas trop déféré au faux principe qu'il avoit pris pour guide. Car c'eſt une propoſition bien dure à admettre, que de dire que deux mouvemens égaux, mais en ſens oppoſés, ne ſoient pas deux états contraires du corps On conçoit très-diſtinctement qu'il faut quelque choſe de plus pour changer un mouvement en mouvement contraire, que pour le détruire ſimplement & arrêter le mobile : tout de même que pour changer une courbure en courbure contraire, il faut quelque choſe de plus que pour la réduire en ligne droite.

En troiſieme lieu, *Deſcartes* tomboit dans une erreur bien peu digne d'un Métaphyſicien, lorſqu'il attribuoit au repos & au mouvement une force pour réſiſter à leur changement d'état. Il étoit encore bien éloigné de ce ſentiment, lorſqu'il écrivoit (*a*), « Je ne reconnois dans les corps aucune inertie, » ou tardiveté naturelle, & je crois que lorſqu'un homme ſe » promene, il fait tant ſoit peu mouvoir toute la terre ; mais » je ne laiſſe pas d'accorder que les plus grands corps étant » pouſſés par une même force, ſe meuvent plus lentement ; » ce qui ſeroit peut-être aſſez, ſans avoir recours à cette iner- » tie naturelle *qui ne peut aucunement être prouvée :* » nous ajouterons, qui eſt entiérement contraire à l'idée que nous devons avoir de la matiere. En effet, nous ne pouvons la re-

(*a*) Lett. 94, T. II.

garder que comme une ſubſtance purement paſſive & incapable d'action. Or qui dit *force*, dit action ; par conſéquent la matiere étant incapable de la derniere, l'eſt également de la premiere. Toute l'inertie des corps ne conſiſte qu'en ce qu'il faut une force pour imprimer un mouvement à un corps, puiſqu'il ne ſçauroit de lui-même changer d'état ; & qu'il en faut une plus grande pour lui donner une plus grande vîteſſe. Quant à la preuve que M. *Deſcartes* prétend donner de ſon ſentiment, preuve qu'il tire de l'immutabilité divine, qui conſiſte à laiſſer les choſes dans l'état où elles ſont lorſque rien ne tend à les en tirer, elle eſt abſolument ſans force ; car cette immutabilité eſt très-compatible avec le ſentiment contraire. Il ſuffit qu'il y ait un choc pour qu'il y ait motif à un changement.

Après les obſervations que l'on vient de faire ſur les principes que *Deſcartes* a employés dans ſa recherche des loix du choc, il eſt facile d'en porter un jugement. La premiere, où il s'agit de deux corps égaux & parfaitement durs, qui ſe choquent avec des vîteſſes égales, eſt fauſſe. Ces deux corps ne doivent pas ſe réfléchir, mais s'arrêter tout court ; car la force de chacun eſt uniquement employée à détruire le mouvement de l'autre ; & comme on ne les ſuppoſe point élaſtiques, il n'y a aucune cauſe capable de rétablir le mouvement détruit. D'ailleurs ſi ces deux corps ſe réfléchiſſoient l'un à la rencontre de l'autre, le reſſort ſeroit abſolument inutile.

La ſeconde regle eſt encore fauſſe par une ſuite des deux faux principes adoptés par *Deſcartes*. En raiſonnant plus conformément aux ſaines idées du mouvement, il auroit trouvé que dans le choc le mouvement du petit corps auroit été détruit, & en auroit [illegible] détruit également dans le grand, & que le ſurplus ſe diſtribuant ſur la maſſe de l'un & de l'autre, ils auroient dû aller dans la direction du plus grand. Je paſſe la troiſieme regle pour m'arrêter un peu à la quatrieme, qui eſt d'une fauſſeté évidente & des plus contraires à l'expérience.

Dans cette regle *Deſcartes* veut que, ſi un corps en repos eſt choqué par un autre tant ſoit peu moindre, celui-ci ne puiſſe le mettre en mouvement, & qu'il ſoit obligé de ſe réfléchir avec toute ſa vîteſſe. Il falloit que les premiers Car-

téſiens fuſſent des gens d'une ſinguliere docilité pour admettre une propoſition ſemblable. Auſſi l'un des plus éclairés, (M. *Clerſelier*) lui fit des difficultés à ce ſujet, & *Deſcartes* tenta de lui répondre (*a*); ce qu'il fit par un raiſonnement qui m'a paru fort peu intelligible. Quoi qu'il en ſoit, il eſt notoire aujourd'hui qu'un corps très-gros, un boulet de canon par exemple, ſuſpendu par une corde, ſera mis en mouvement par le choc d'une balle de piſtolet. Je n'ignore pas que *Deſcartes* tâche de rendre raiſon de cet effet. Il dit qu'un corps plongé dans un fluide, eſt dans un équilibre parfait avec les parties de ce fluide qui le choquent, les unes d'un côté, & les autres de l'autre; de ſorte que le choc d'un autre corps, quelque petit qu'il ſoit, venant s'y joindre, ne fait qu'emporter l'équilibre (*b*). Mais, nous l'oſerons dire, malgré le reſpect dû au Philoſophe François, ce n'eſt-là qu'une défaite pitoyable.

Il y a encore dans les regles de *Deſcartes* un manque d'analogie & de liaiſon, dont voici un exemple. Lorſque deux corps mus d'égale vîteſſe ſe rencontrent, ils ſe réfléchiſſent, dit *Deſcartes*, l'un & l'autre; mais diminuez tant ſoit peu l'un des deux, alors, ſuivant lui, le moindre ſe réfléchit avec toute ſa vîteſſe, & le plus grand continue avec la ſienne toute entiere. Cependant la raiſon perſuade qu'un changement auſſi léger n'eſt pas capable d'opérer un effet auſſi oppoſé; car la nature n'agit pas ordinairement de cette maniere. Les loix du choc admiſes aujourd'hui parmi les Méchaniciens, n'ont pas un pareil défaut; on y voit toujours le mouvement ſe changer en repos ou en mouvement contraire par gradation. Dans celles de *Deſcartes* tout ſe fait par ſaut, comme s'il n'y avoit pas entr'elles la moindre liaiſon, la moindre dépendance d'un même principe. Nous ſupprimons, afin d'abréger, pluſieurs autres réflexions qui ſe préſentent à nous ſur les défauts de ces regles qui péchent de tous les côtés. Comment ſe peut-il faire qu'un auſſi grand Géometre n'ait pas ſaiſi cet objet ſous un point de vue plus géométrique.

Il paroît par les Lettres de *Deſcartes* qu'il a quelquefois raiſonné plus ſainement ſur les loix du choc. Car dans la qua-

(*a*) Lett. 117, T. 1.
(*b*) *Princip.* p. 11, art. 56.

garder que comme une ſubſtance purement paſſive & incapable d'action. Or qui dit *force*, dit action ; par conſéquent la matiere étant incapable de la derniere, l'eſt également de la premiere. Toute l'inertie des corps ne conſiſte qu'en ce qu'il faut une force pour imprimer un mouvement à un corps, puiſqu'il ne ſçauroit de lui-même changer d'état ; & qu'il en faut une plus grande pour lui donner une plus grande vîteſſe. Quant à la preuve que M. *Deſcartes* prétend donner de ſon ſentiment, preuve qu'il tire de l'immutabilité divine, qui conſiſte à laiſſer les choſes dans l'état où elles ſont lorſque rien ne tend à les en tirer, elle eſt abſolument ſans force ; car cette immutabilité eſt très-compatible avec le ſentiment contraire. Il ſuffit qu'il y ait un choc pour qu'il y ait motif à un changement.

Après les obſervations que l'on vient de faire ſur les principes que *Deſcartes* a employés dans ſa recherche des loix du choc, il eſt facile d'en porter un jugement. La premiere, où il s'agit de deux corps égaux & parfaitement durs, qui ſe choquent avec des vîteſſes égales, eſt fauſſe. Ces deux corps ne doivent pas ſe réfléchir, mais s'arrêter tout court ; car la force de chacun eſt uniquement employée à détruire le mouvement de l'autre ; & comme on ne les ſuppoſe point élaſtiques, il n'y a aucune cauſe capable de rétablir le mouvement détruit. D'ailleurs ſi ces deux corps ſe réfléchiſſoient l'un à la rencontre de l'autre, le reſſort ſeroit abſolument inutile.

La ſeconde regle eſt encore fauſſe par une ſuite des deux faux principes adoptés par *Deſcartes*. En raiſonnant plus conformément aux ſaines idées du mouvement, il auroit trouvé que dans le choc le mouvement du petit corps auroit été détruit, & en auroit été détruit également dans le grand, & que le ſurplus ſe diſtribuant ſur la maſſe de l'un & de l'autre, ils auroient dû aller dans la direction du plus grand. Je paſſe la troiſieme regle pour m'arrêter un peu à la quatrieme, qui eſt d'une fauſſeté évidente & des plus contraires à l'expérience.

Dans cette regle *Deſcartes* veut que, ſi un corps en repos eſt choqué par un autre tant ſoit peu moindre, celui-ci ne puiſſe le mettre en mouvement, & qu'il ſoit obligé de ſe réfléchir avec toute ſa vîteſſe. Il falloit que les premiers Car-

téſiens fuſſent des gens d'une ſinguliere docilité pour admettre une propoſition ſemblable. Auſſi l'un des plus éclairés, (M. *Clerſelier*) lui fit des difficultés à ce ſujet, & *Deſcartes* tenta de lui répondre (*a*); ce qu'il fit par un raiſonnement qui m'a paru fort peu intelligible. Quoi qu'il en ſoit, il eſt notoire aujourd'hui qu'un corps très-gros, un boulet de canon par exemple, ſuſpendu par une corde, ſera mis en mouvement par le choc d'une balle de piſtolet. Je n'ignore pas que *Deſcartes* tâche de rendre raiſon de cet effet. Il dit qu'un corps plongé dans un fluide, eſt dans un équilibre parfait avec les parties de ce fluide qui le choquent, les unes d'un côté, & les autres de l'autre; de ſorte que le choc d'un autre corps, quelque petit qu'il ſoit, venant s'y joindre, ne fait qu'emporter l'équilibre (*b*). Mais, nous l'oſerons dire, malgré le reſpect dû au Philoſophe François, ce n'eſt-là qu'une défaite pitoyable.

Il y a encore dans les regles de *Deſcartes* un manque d'analogie & de liaiſon, dont voici un exemple. Lorſque deux corps mus d'égale vîteſſe ſe rencontrent, ils ſe réfléchiſſent, dit *Deſcartes*, l'un & l'autre; mais diminuez tant ſoit peu l'un des deux, alors, ſuivant lui, le moindre ſe réfléchit avec toute ſa vîteſſe, & le plus grand continue avec la ſienne toute entiere. Cependant la raiſon perſuade qu'un changement auſſi léger n'eſt pas capable d'opérer un effet auſſi oppoſé; car la nature n'agit pas ordinairement de cette maniere. Les loix du choc admiſes aujourd'hui parmi les Méchaniciens, n'ont pas un pareil défaut; on y voit toujours le mouvement ſe changer en repos ou en mouvement contraire par gradation. Dans celles de *Deſcartes* tout ſe fait par ſaut, comme s'il n'y avoit pas entr'elles la moindre liaiſon, la moindre dépendance d'un même principe. Nous ſupprimons, afin d'abréger, pluſieurs autres réflexions qui ſe préſentent à nous ſur les défauts de ces regles qui péchent de tous les côtés. Comment ſe peut-il faire qu'un auſſi grand Géometre n'ait pas ſaiſi cet objet ſous un point de vue plus géométrique.

Il paroît par les Lettres de *Deſcartes* qu'il a quelquefois raiſonné plus ſainement ſur les loix du choc. Car dans la qua-

(*a*) Lett. 117, T. 1.
(*b*) *Princip.* p. 11, art. 56.

rante-quatrieme du ſecond volume, il aſſigne la véritable loi, dans le cas où un corps en choque un autre quelconque en repos. Il prétend ici que le mouvement du corps choquant ſe répartit ſur la maſſe des deux, la vîteſſe diminuant en même raiſon que la maſſe eſt augmentée; ce qui eſt conforme à la vérité. Nous ne doutons en aucune maniere que *Deſcartes* n'eût parfaitement réuſſi à démêler les vrais loix de la communication du mouvement, s'il n'eût pas été préoccupé de l'idée de les faire quadrer avec ſon ſyſtême général. On ne peut trop regretter qu'il ait embraſſé un plan auſſi vaſte. S'il ſe fût adonné uniquement à perfectionner diverſes branches de la Phyſique, il n'en eſt aucune dans laquelle il n'eût porté une lumiere brillante; car l'unique ſource de ſes erreurs eſt l'eſprit ſyſtématique auquel il ſe livra avec trop de confiance, & ſans conſulter aſſez l'expérience. Mais en voilà aſſez ſur ce ſujet; finiſſons cet article par quelque trait qui faſſe plus d'honneur au génie de *Deſcartes*.

Une des plus ingénieuſes idées de *Deſcartes* eſt d'avoir tenté d'appliquer la force centrifuge de la matiere éthérée à l'explication de la peſanteur des corps. Quoique l'examen de ce ſyſtême paroiſſe appartenir davantage à la Phyſique qu'aux Mathématiques, cependant comme ce ſont des principes méchaniques que *Deſcartes* y emploie, je n'ai pas cru cet examen étranger à mon ſujet. D'ailleurs la célébrité de la queſtion juſtifie cette ſorte d'excurſion hors de mon plan.

Deſcartes fait rouler, comme l'on ſçait, autour de la terre, & de chaque planete, un tourbillon de matiere éthérée, c'eſt-à-dire extrêmement ſubtile. Mais tout corps, ajoute-t'il, qui a un mouvement de circulation, fait effort pour s'éloigner de plus en plus du centre autour duquel il circule; toutes les parties du tourbillon terreſtre ont donc une propenſion continuelle à s'éloigner de la terre, & ce tourbillon ſe diſſiperoit, s'il ne rencontroit pas une réſiſtance ſuffiſante dans l'effort du reſte de la matiere éthérée. Il faut encore ſuppoſer dans cette hypotheſe que les corps terreſtres ſont moins propres au mouvement que la matiere éthérée, & qu'elles n'ont par conſéquent qu'une force centrifuge moindre. Cette ſuppoſition admiſe, on ſent qu'ils ſont dans ce

fluide comme un corps plongé dans un liquide de moindre peſanteur ſpécifique, & de même que ce liquide le repouſſe vers le côté oppoſé à celui où il tend par ſa peſanteur, de même les corps terreſtres placés au milieu du tourbillon dont nous parlons, ſeront repouſſés vers le milieu dont il tend à s'éloigner. Voilà, ſuivant *Deſcartes*, la cauſe de la peſanteur & de la chûte des corps vers le centre de la terre.

Il en eſt à peu près de cette idée comme de celle des tourbillons, que le même Philoſophe employa pour expliquer les mouvemens céleſtes; elle ſéduit du premier abord, elle enchante par l'apparence d'un méchaniſme très-intelligible & très-vraiſemblable. Mais elle eſt ſujette à de grandes difficultés, & qui ſont telles que le plus grand nombre des Phyſiciens convient aujourd'hui qu'il faut recourir à quelque autre moyen d'expliquer la peſanteur.

M. *Huyghens*, quoique diſciple de *Deſcartes*, a le premier porté des coups dangereux à l'explication que nous venons d'expoſer. Il remarque dans ſon Livre *De causâ gravitatis*, 1°. Que l'effort centrifuge des portions de fluide, ſituées dans les paralleles à l'équateur, ſe faiſant dans le ſens des rayons de ces paralleles, c'eſt dans ce ſens que doit ſe faire la réaction qui cauſe la peſanteur: conſéquemment un corps placé partout ailleurs que dans l'équateur, tendra vers l'axe du tourbillon, & non vers le centre. 2°. Qu'afin que la matiere éthérée pût pouſſer les corps terreſtres avec la force que nous éprouvons, il faudroit que ſa circulation fût dix-ſept fois auſſi rapide que le mouvement diurne de la terre. Mais un tourbillon de cette rapidité & de cette denſité, entraîneroit avec lui tous les corps, & ne manqueroit pas d'accélérer peu à peu la révolution de notre globe. 3°. Il ſuivroit de l'hypotheſe de *Deſcartes* que ce ſeroient les corps les moins denſes qui peſeroient le plus, de même que ce ſont les moins denſes qui ſemblent faire plus d'effort pour s'élever ſur la ſurface des fluides plus peſans; ce qui eſt manifeſtement contraire à l'expérience. M. *Huyghens* n'a pas cru qu'il fût poſſible de répondre à ces difficultés, & s'eſt cru obligé par cette raiſon de donner à la matiere éthérée un autre mouvement qu'il imagine ſe faire dans diverſes couches ſphériques, & dans tous les ſens imaginables. Par-là on remédieroit effectivement à quelques-uns

des inconvéniens du tourbillon ſimple de *Deſcartes*; mais le remede eſt pire que le mal, & ce méchaniſme imaginé par M. *Huyghens*, eſt avec raiſon réputé impoſſible.

On en eſt donc revenu au tourbillon tel que *Deſcartes* l'avoit propoſé, & l'on a tâché de répondre aux objections de M. *Huyghens*. M. *Saurin* a cru avoir réſolu heureuſement la premiere : il diſoit qu'un fluide agiſſant toujours perpendiculairement à la ſurface qu'il comprime, un tourbillon renfermé dans une ſurface ſphérique exerceroit ſa preſſion dans le ſens du rayon, & que la réaction de cette preſſion, qui forme la peſanteur, ſe faiſant en ſens contraire, il devoit s'enſuivre que les corps tendroient vers le centre (*a*). Il faiſoit encore ſur ce ſujet un autre raiſonnement qu'il ſeroit trop long de rapporter; mais il ſemble qu'à l'exception de ceux qui étoient intéreſſés à trouver cette ſolution bonne, perſonne autre n'en a porté un jugement auſſi avantageux que lui. En effet, on pourroit, par un pareil raiſonnement, prouver qu'un corps qu'on plongeroit dans un vaſe hémiſphérique plein d'eau, devroit remonter perpendiculairement à la ſurface de ce vaſe, & non à l'horizon. Quant à la ſeconde difficulté de M. *Huyghens*, M. *Saurin* convient ingénuement qu'il n'a rien de ſatisfaiſant à y répondre (*b*). A l'égard de la troiſieme, je ne vois aucune part, pas même de tentative pour la réſoudre.

On n'a pas négligé de faire des expériences pour reconnoître d'une maniere ſenſible ſi les phénomenes de la gravité s'accordent avec l'hypotheſe des tourbillons. On en lit quelques-unes dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences des années 1714, 1715 & 1716. Mais leur Auteur (M. *Saulmon*) ne peut diſſimuler qu'il en réſulte tout le contraire de ce qu'il faudroit pour confirmer cette hypotheſe. Outre qu'un corps eſt entraîné par le tourbillon, on obſerve que les plus denſes, loin de ſe plonger au centre, s'écartent au contraire vers la circonférence. M. *Bülfinger*, conduit par les mêmes vues que M. *Saulmon*, & deſirant décider, par l'expérience, la queſtion ſi un corps plongé dans un tourbillon ſphérique tombera au centre, ou vers l'axe, s'eſt procuré un pareil tourbillon, en faiſant tourner rapidement autour de ſon axe, une

(*a*) Journal des Sça. ann. 1703.
(*b*) Mem. de l'Acad. ann. 1709.

ſphere de verre remplie d'eau (*a*). Il a remarqué que des bulles d'air qui ſe rencontroient dans cette ſphere, formerent bientôt un cylindre autour de l'axe, & non une ſphere, de ſorte qu'il a cru pouvoir en conclure qu'un tourbillon ſphérique rameneroit les corps vers l'axe, & non vers le centre.

L'Académie des Sciences ayant propoſé pour le Prix de l'année 1728, d'examiner la cauſe & le méchaniſme de la gravité, M. *Bülfinger* propoſa une nouvelle maniere d'expliquer ce phénomene (*b*). Il imaginoit un tourbillon tournant à la fois autour de deux axes perpendiculaires l'un à l'autre, eſpérant pouvoir en déduire la chûte directe des graves vers le centre. On voit auſſi dans cet écrit le deſſein d'une machine propre à en faire l'expérience, en donnant à une ſphere remplie d'eau ces deux mouvemens. Nous ne voyons pas que le Sçavant que nous citons ait exécuté cette expérience; nous doutons fort qu'elle eût eu quelque ſuccès, ou plutôt nous tenons le contraire pour aſſuré. Car afin qu'un tourbillon de cette nature repouſsât les corps au centre, il faudroit que tous les points du fluide décriviſſent des arcs de grands cercles, & c'eſt l'objet que ſe propoſoit M. *Bülfinger* par ce double mouvement. Mais il n'y a que les points éloignés également des poles des deux axes, qui décrivent des grands cercles. Tous les autres ne décrivent que des courbes à double courbure, dont les perpendiculaires ne concourent point au centre de la ſphere; ce qui ſeroit néceſſaire pour que les corps fuſſent pouſſés vers ce centre.

Nous ne diſons rien de diverſes autres manieres d'expliquer la peſanteur; comme elles n'ont pas été accueillies des Phyſiciens, nous ne croyons pas devoir nous en occuper. Nous nous bornons à une réfléxion qui paroît détruire toute explication de ce phénomene par le moyen du choc de quelque matiere fluide. C'eſt que ſi la peſanteur des corps dépendoit d'un pareil méchaniſme, elle ne ſeroit plus proportionnelle à la maſſe. Suivant qu'un corps préſenteroit plus de ſurface, il devroit être plus peſant, y ayant moins

(*a*) *De Direct. gravium in vortice Sphærico.* Mem. de Peterſb. T. 1, ann. 1726.
(*b*) *De causâ gravit. diff.* Prix de l'Acad. T. III.

de parties à l'abri de ce choc. Or cela eſt contraire à l'expérience. On peut voir encore dans les *Entretiens ſur la cauſe de l'inclinaiſon des orbites des Planetes* (*a*) par M. *Bouguer*, diverſes autres réflexions qui fourniſſent des raiſons puiſſantes contre ce méchaniſme.

(*a*) Remarques, p. 62, 82, &c.

Fin du Livre V^e de la IVe Partie.

HISTOIRE

HISTOIRE
DES
MATHÉMATIQUES.

QUATRIEME PARTIE,

Qui contient l'Hiſtoire de ces Sciences durant le dix-ſeptieme ſiecle.

LIVRE SIXIEME.

Où l'on rend compte de l'accroiſſement de la Géométrie, & en particulier de la naiſſance & des progrès des nouveaux calculs, durant la derniere moitié du dix-ſeptieme ſiecle.

SOMMAIRE.

I. *Wallis applique le calcul à la Géométrie des indiviſibles, & fait par ce moyen diverſes découvertes. Maniere dont il conſidere la quadrature du cercle, & expreſſion qu'il en tire.* II. *Découvertes auxquelles la méthode de Wallis donne lieu. Pre-*

miere rectification de courbe par Neil. Expreſſion que donne Milord Brouncker pour la meſure du cercle. Premiere ſuite pour la quadrature de l'hyperbole découverte par le même Géometre. Mercator en donne auſſi une qu'il avoit trouvée avant que celle de Brouncker eût vu le jour. III. *Du D. Barrow, & en particulier de ſa méthode des tangentes.* IV. *De M. Newton. Précis de la vie de cet homme célebre. Ses premieres découvertes géométriques. Il découvre la théorie générale des ſuites, le développement des puiſſances, & ſon calcul des fluxions, appellé dans le continent, calcul différentiel & intégral.* V. *Expoſition du principe géométrique des fluxions, & des premiers fondemens de leur calcul & de leur application.* VI. *Le Géometre Jacques Grégori s'éleve le premier au principe de M. Newton, & ajoute par ce moyen diverſes découvertes aux ſiennes.* VII. *Hiſtoire de ce qui s'eſt paſſé vers 1676, entre MM. Newton & Leibnitz, au ſujet de ces découvertes analytiques; récit de la querelle élevée depuis ſur l'invention du calcul différentiel.* VIII. *Expoſition de quelques théories particulieres qui prennent naiſſance alors, comme celle des cauſtiques de M. Tchirnauſen, & des épicycloïdes.* IX. *Progrès du calcul différentiel dans le continent, à dater du temps où M. Leibnitz le publia. Naiſſance du calcul intégral entre les mains du même M. Leibnitz & de M. Jacques Bernoulli. M. Jean Bernoulli entre dans la la même carriere, & fait en France des proſélytes au nouveau calcul, entr'autres M. de l'Hôpital, qui en dévoile les principes dans ſon* Analyſe des Infinimens Petits. X. *Tempête élevée contre le calcul différentiel. De M. Niewentiit, auteur d'un Livre contre ce calcul. Querelle entre Rolle & M. de Varignon, enſuite entre le même Rolle & M. Saurin ſur ce même ſujet. Autres contradicteurs de cette invention, & réponſes qu'on leur a oppoſées.*

I.

LA nouvelle Géométrie, nous voulons dire celle qui emploie dans ſes recherches le calcul algébrique, peut être diviſée en deux parties : l'une qui a pour objet l'analyſe des équations, & les affections des courbes; nous pourrions la nommer l'analyſe finie des grandeurs curvilignes : l'autre, qui s'occupe de la dimenſion de ces grandeurs, & qui fait uſage de la

conſidération de leurs élémens infiniment petits. Nous nous ſommes principalement occupés de la premiere, & nous en avons expoſé avec ſoin les progrès, dans le ſecond Livre de cette diviſion de notre ouvrage. Nous avons réſervé pour celui-ci de rendre compte de ceux de la ſeconde, & c'eſt ce dont nous allons maintenant nous acquitter.

De l'Arithmétique des infinis de Wallis.

L'époque de l'*Arithmétique des infinis* de *Wallis* (*a*), eſt celle à laquelle on doit fixer le commencement des progrès remarquables de cette partie de la Géométrie moderne. Cet ouvrage, qui vit le jour en 1655, eſt une application plus ſpéciale du calcul à la méthode, appellée *des indiviſibles*, par *Cavalleri*, & de l'infini, par quelques Géometres François. Je dis une application plus ſpéciale du calcul, à cette méthode; car on a vu que *Cavalleri*, *Fermat*, *Deſcartes*, *Roberval*, avoient déja donné des exemples de cette application en quarrant d'une maniere générale les paraboles de tous les ordres; mais ce n'étoit encore là que quelques rayons échappés d'une lumiere plus grande que *Wallis* dévoila dans l'ouvrage cité ci-deſſus. A l'aide d'une induction habilement ménagée, & du fil de l'analogie dont il ſçut toujours s'aider avec ſuccès, il ſoumit à la Géométrie une multitude d'objets qui lui avoient échappé juſqu'alors. Ce fut, par exemple, l'analogie qui le conduiſit à cette invention ſi utile, ſçavoir de regarder les dénominateurs des fractions comme des puiſſances à expoſans négatifs. En effet, ſi l'on prend cette ſuite de puiſſances, x^3, x^2, x^1, x^0 ou 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, &c. qui ſont en progreſſion géométrique continue, les expoſans ſeront en progreſſion arithmétique. Ceux

(*a*) Wallis (Jean) naquit à Ashford, dans le Comté de Kent, le 23 Novembre 1616. Après ſes premieres études, il s'addonna ſucceſſivement à la Théologie, à la Morale, & aux Mathématiques dans leſquelles il a principalement déployé ſon génie. Il fut nommé en 1649 à la Chaire de Géométrie fondée dans l'Univerſité d'Oxford, par le Chevalier Savile, & il occupa cette place juſqu'en 1703 (28 Octobre), qui eſt la date de ſa mort. Il a publié en divers temps un grand nombre d'ouvrages Mathématiques, qui ont été raſſemblés en trois volumes in-fol. dont le dernier parut en 1699, ſous le titre de *J. Walliſii Op. Math.* Il y a de lui quantité de pieces dans les *Tranſ. Philoſ.* de la Société Royale de Londres, dont il fut un des inſtituteurs & des premiers membres. Je ne dis rien de ſes ouvrages théologiques ou moraux, qui ſont auſſi en grand nombre. Wallis poſſédoit un génie particulier pour déchiffrer les lettres écrites en chiffre, quelque compliquée que fût la clef dont on s'étoit ſervi. On peut voir un article conſidérable & fort curieux ſur ce ſçavant, dans le dernier Supplément de Bayle, par M. de la Chauſſepied.

des premieres étant donc 3, 2, 1, 0, il faut que ceux des ſuivantes ſoient — 1, — 2, — 3, &c. Ainſi $\frac{1}{x}$ n'eſt autre choſe que x^{-1}, & $\frac{1}{x^m}$ eſt x^{-m}. Cette remarque heureuſe mit *Wallis* en poſſeſſion de la meſure de tous les eſpaces, ſoit plans, ſoit ſolides, dont les élémens ſont réciproquement comme quelque puiſſance de l'abſciſſe; dans l'hyperbole ordinaire, par exemple, l'ordonnée eſt réciproquement comme l'abſciſſe, & dans celles des ordres ſupérieurs elle eſt réciproquement comme une puiſſance de cette abſciſſe, c'eſt-à-dire, que l'équation de toutes ces courbes eſt $y = \frac{1}{x^m}$, ou $y = x^{-m}$. Or on a vu que dans les courbes dont l'équation eſt $y = x^m$, le rapport général de l'aire au parallélogramme de même baſe & de même hauteur, eſt $1 : m + 1$; & cela eſt vrai, quelle que ſoit la grandeur de m. Cela ſera donc encore vrai, ſuivant les loix de l'analyſe & de la continuité, même lorſque m deviendra négatif ou $-m$. Ainſi le rapport ci-deſſus ſera dans ce cas celui de $1 : -m + 1$, ou en général de 1 à $m + 1$, en prenant m avec le ſigne qui l'affecte. Dans l'hyperbole où les ordonnées ſont réciproquement comme les racines de l'abſciſſe, m eſt $\frac{1}{2}$, & par conſéquent $-m = -\frac{1}{2}$. Ainſi l'eſpace hyperbolique A H, *Fig.* 83. eſt au rectangle C B, comme 1 à $-\frac{1}{2} + 1$, ou 1 à $\frac{1}{2}$. Si $m = 1$, ce qui eſt le cas de l'hyperbole ordinaire; ce rapport eſt $1 : -1 + 1$, ou $1 : 0$; ce qui montre que l'hyperbole ordinaire a ſon eſpace aſymptotique infini.

Il ſe préſente ici une difficulté dont *Wallis*, malgré ſa ſagacité, n'apperçut pas le dénouement. Lorſque l'expoſant négatif m, eſt un nombre entier 3, par exemple, qui ſurpaſſe l'unité, le rapport ci-deſſus eſt $1 : -2$; c'eſt-à-dire, celui de l'unité à un nombre négatif. Or on ſçait, & il eſt facile de montrer que $1 : 0$, exprime un rapport infini: que déſignera donc cette autre expreſſion, peut-on ſe demander? *Wallis* imagina qu'elle déſignoit un eſpace pluſqu'infini; paradoxe ſingulier, dont on doit la ſolution à M. *Varignon*. Ce que *Wallis* a pris pour un eſpace plus qu'infini, n'eſt qu'un eſpace fini pris négativement ou en ſens contraire. Il arrive dans ce cas, ce dont l'analyſe fournit des exemples fréquens. On trouve la grandeur, non de l'eſpace C A B G H C qu'on demandoit, mais celle du reſte de l'eſpace hyperbolique A K I B qu'on ne

demandoit pas. Il eſt facile de s'en convaincre ; car en cherchant la meſure de cette partie C L B K, par ſon équation rapportée à l'axe C L, on trouve la même choſe que ci-devant, mais d'une maniere poſitive. Nous remarquons à cette occaſion une propriété de toutes les hyperboles de degrés ſupérieurs ; c'eſt qu'elles paſſent d'un côté au dedans de l'hyperbole ordinaire, c'eſt-à-dire, entre la courbe & l'aſymptote, & de l'autre au dehors ; & elles ont leur eſpace aſymptotique infiniment grand d'un côté, & de l'autre égal à un eſpace fini.

La méthode de *Wallis* s'applique avec facilité à des cas plus compoſés, par exemple, à ceux où l'ordonnée de la figure eſt exprimée par une puiſſance complexe, comme $aa \mp 2ax - xx$, $aa - xx$, $\sqrt{a} - \sqrt{x}$, &c. Car il eſt évident qu'on peut regarder cette ordonnée comme la ſomme de pluſieurs dont l'une ſeroit conſtamment aa, l'autre $\pm 2ax$, & la troiſieme $\pm xx$. Ainſi ſuivant la regle donnée ci-deſſus, l'aire ſera compoſée de pluſieurs parties, dont la premiere ſera aax, la ſeconde $\pm axx$, & la troiſieme $\frac{x^3}{3}$. *Wallis* examine de même la meſure des courbes dont les ordonnées ſeroient comme les fonctions (*a*) triangulaires, pyramidales, &c. de l'abſciſſe. Ces fonctions ne ſont que des compoſés de puiſſances de l'abſciſſe : c'eſt pourquoi elles tombent ſous les regles données ci-deſſus. Les bornes étroites où nous ſommes reſſerrés, ne nous permettent pas d'entrer dans de plus grands détails. Nous renvoyons à l'ouvrage même dont nous tâchons de donner une idée.

Wallis tira de ces conſidérations une maniere fort ingénieuſe d'enviſager la quadrature du cercle, qui fut, peu d'années après, le germe de diverſes inventions de *Newton*. Il obſerva qu'on avoit la quadrature abſolue de toutes les figures dont les ordonnées ſeroient exprimées par $(1 - xx)^0$; $(1 - xx)^1$; $(1 - xx)^2$; $(1 - xx)^3$, &c. (*b*) La premiere eſt, ſuivant les

(*a*) Nous appellons ici *fonction* avec les Géometres de nos jours, toute expreſſion compoſée d'une maniere quelconque, de grandeurs conſtantes & de variables ; ainſi $\sqrt{(aa \pm xx)}$, $aa + xx$, $mx + m.m - 1.xx$, &c. ſont des fonctions de x.

(*b*) Nous nous ſommes ſervis, pour ſimplifier, de l'expreſſion $1 - xx$, au lieu de $aa - xx$; en ſuppoſant que la valeur de a eſt l'unité. Il faut dans ce cas, afin de ſe conformer à la loi des homogênes, regarder x, non comme une ligne, mais comme une valeur numérique de x, à l'égard de la ligne a, qui eſt priſe pour l'unité ; & ce qu'on dit ici doit s'appliquer à tous les autres cas où l'on a une une expreſſion compoſée de pluſieurs puiſſances de x, combinées par l'addition ou la ſouſtraction.

regles de l'*Arithmétique des infinis*, égale au parallélogramme circonſcrit. La ſeconde en eſt les $\frac{2}{3}$; la troiſieme, les $\frac{8}{15}$; la 4e, les $\frac{48}{105}$, lorſque $x = 1$. Voilà donc une ſuite de termes $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$, &c. dont chacun exprime le rapport qu'a au parallélogramme de même baſe & de même hauteur, la figure dont l'expreſſion de l'ordonnée tient un rang correſpondant dans la ſuite des grandeurs $(1 - xx)^0$; $(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$, &c. Mais les expoſans des termes de cette derniere ſuite, ſont en progreſſion arithmétique, 0, 1, 2, &c. Si donc on vouloit introduire un nouveau terme entre chacun de ceux-là, celui qui tomberoit entre $(1 - xx)^0$, $(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$, ſeroit $(1 - xx)^{\frac{1}{4}}$, qui eſt l'expreſſion de l'ordonnée du cercle. On auroit par conſéquent la quadrature du cercle, ſi dans la ſuite $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$, &c. il étoit également facile de trouver le terme moyen entre 1 & $\frac{2}{3}$. Cette maniere de raiſonner en Géométrie, a été nommée *interpolation*. C'eſt inférer dans une progreſſion de grandeurs qui ſuivent une certaine loi, un ou pluſieurs termes intermédiaires qui s'y conforment autant qu'ils peuvent le faire. Cela eſt facile dans les progreſſions arithmétiques & géométriques, dans celle des nombres figurés quelconques; mais il n'en eſt pas ainſi dans le cas que ſe propoſe *Wallis*, & il y a bien du génie & de l'adreſſe dans la maniere dont il recherche ce terme. Nous nous contenterons de dire que, ne pouvant le trouver en termes finis, il l'exprime par une fraction dont le numérateur & le dénominateur ſont infinis, & ſont formés d'une ſuite de multiplicateurs qui ſuivent une progreſſion très-élégante. Cette expreſſion eſt celle-ci $\frac{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times \&c.}{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times \&c.}$ de ſorte que le rapport du quarré circonſcrit au cercle, eſt celui de l'unité à l'expreſſion ci-deſſus, ou de l'unité, à $\frac{8}{9}\times\frac{24}{25}\times\frac{48}{49}\times\frac{80}{81}$, &c. ou bien à $\frac{2}{3}\times\frac{16}{15}\times\frac{36}{35}\times\frac{64}{63}$, &c. (*a*) ce qui approche d'autant plus de la vérité que l'on prend un plus grand nombre de termes.

Une ample moiſſon de découvertes eſt ordinairement la récompenſe de l'invention d'une nouvelle méthode. Ce ſuccès étoit dû à *Wallis* : ſon *Arithmétique des infinis*, contenoit

(*a*) Cette ſuite réduite à une autre forme, eſt celle-ci $\frac{2}{3} + \frac{1}{15}A + \frac{1}{35}B + \frac{1}{63}C$, &c. A, B, C, &c, repréſentant toujours la ſomme tous les termes précédens. M. Euler montre dans les Mémoires de Peterſbourg (T. IX, ann. 1737.), qu'elle ſe réduit à la ſuite ſi connue pour le quart de cercle, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, &c; ce qui eſt une preuve ſenſible de la vérité de l'expreſſion de Wallis.

bien des nouveautés géométriques, elles ne ſont cependant qu'une fort petite partie de celles qu'il découvrit dans la ſuite en faiſant uſage de ſa méthode. Les célebres problêmes de M. *Paſcal* ſur la cycloïde en fourniſſent une preuve. M. *Wallis* les réſolut tous, & en peu de temps, comme on l'a dit en faiſant l'hiſtoire de cette courbe. Bientôt après il donna la meſure de la ſurface de la cyſſoïde & de la conchoïde, auſſi-bien que des ſolides formés par leurs circonvolutions; il démontra l'égalité de la parabole & de la ſpirale, & que leur rectification dépendoit de la quadrature de l'hyperbole; il détermina des eſpaces plans égaux aux ſurfaces courbes des conoïdes paraboliques, elliptiques & hyperboliques. Ces recherches & une multitude d'autres ſont l'objet de ſon Traité *De curvarum rectificatione & complanatione*, qui vit le jour en 1659, avec ſon Traité ſur la cycloïde. Il donna en 1669, celui *De centro gravitatis*, qui ſemble contenir tout ce que la Géométrie peut dire ſur ce ſujet. Toutes les figures dont la conſidération avoit occupé juſqu'alors les Géometres, & diverſes autres y ſont ſoumiſes à l'examen. Leur aire, leurs ſolides de circonvolution, leurs centres de gravité, & ceux de leurs ſegmens y ſont déterminés. Chaque chapitre enfin renferme la ſubſtance d'un volume entier. Remarquons encore que *Wallis* s'y ſert fort ſouvent d'expreſſions & de calculs, qui à la notation près, ſont les mêmes que dans les méthodes modernes. C'eſt avec regret que nous nous voyons obligés de nous borner à une indication auſſi légere des excellentes choſes que contiennent ces différens ouvrages.

I I.

Premiere rectification de courbe.

Il eſt tout-à fait glorieux pour *Wallis* que la plûpart des découvertes analytiques, qui ſe firent vers ce temps, ne ſoient à quelques égards que des développemens des nombreuſes vues qu'il avoit propoſées dans ſon *Arithmétique des infinis*. Cet ouvrage donna d'abord lieu à la premiere rectification de courbe, qui ait été trouvée. *Wallis* avoit jetté les fondemens de cette découverte, en remarquant que ſi l'on ajoutoit le quarré de chaque différence des ordonnées conſécutives d'une courbe, avec celui de l'intervalle commun entre ces ordonnées, &

qu'on en prît la racine, il en naiſſoit une expreſſion analogue à celle de l'ordonnée d'une autre courbe, dont l'aire avoit même rapport au rectangle de même baſe & même hauteur, que la longueur de la premiere courbe à une ligne droite donnée. Il s'étoit alors borné là, mais ce peu de paroles ne reſta point ſans fruit. Un jeune Géometre, nommé M. Guillaume *Neil*, réfléchiſſant davantage ſur ce ſujet, alla plus loin : il remarqua qu'afin que la ſeconde courbe que nous venons de décrire fût abſolument quarrable, il falloit que les différences des ordonnées de la premiere fuſſent comme les ordonnées d'une parabole ordinaire ; & qu'alors la nouvelle courbe qui en réſultoit étoit un tronc de parabole, d'où il réſultoit que la premiere courbe étoit abſolument rectifiable.

Cette découverte communiquée aux plus habiles Géometres de l'Angleterre, comme *Wren*, *Brouncker*, &c. les ſurprit beaucoup, & ils la confirmerent à l'envi par de nouvelles démonſtrations. Cependant aucun d'eux ne s'étoit apperçu de la nature de cette courbe remarquable. Il étoit juſte que *Wallis*, qui avoit fait les premiers frais de la découverte, y eût une part plus marquée que les autres. Il reconnut que la courbe en queſtion étoit une des paraboles cubiques, ſçavoir celle où le cube de l'ordonnée eſt toujours proportionnel au quarré de l'abſciſſe. Peu de temps après, M. *Wren* découvrit la rectification de la cycloïde, mais par une méthode indépendante de celle de *Wallis*, qui ne s'y applique pas. Ainſi voilà deux courbes, l'une géométrique, l'autre méchanique, ſuſceptibles de rectification abſolue, quoiqu'un grand Géometre, le célebre *Deſcartes*, n'eût pas oſé penſer qu'on en trouvât jamais aucune. C'étoit pour un Philoſophe déſeſpérer un peu trop vîte des reſſources de l'eſprit humain.

On fit fort peu de temps après, dans le continent, la même découverte que *Neil* avoit faite en Angleterre. M. *Van-Heuraet* en fut l'Auteur, & alla même plus loin que les Géometres Anglois, car il détermina pluſieurs autres paraboles abſolument rectifiables. On peut voir dans le Livre II, art. VIII, la méthode de *Van-Heuraet*, auſſi-bien que les raiſons qui nous font croire qu'il n'étoit pas même informé de ce qui s'étoit paſſé peu auparavant en Angleterre.

La maniere dont *Wallis* avoit enviſagé la quadrature du cercle,

cercle, donna encore naiſſance à une découverte remarquable. Nous avons vu qu'en cherchant à interpoler dans une certaine progreſſion un terme qui devoit lui donner l'aire du cercle, il avoit ſeulement trouvé une ſuite infinie de termes de plus en plus convergens vers la vraie valeur. Peu ſatisfait de ce réſultat, & ne déſeſpérant pas de quelque choſe de mieux, il conſulta Milord *Brouncker* (*a*), l'invitant à le ſeconder de ſes forces. Ce Seigneur, qui étoit doué d'un vrai génie pour la Géométrie, trouva effectivement quelque choſe de plus parfait à certains égards que ce que *Wallis* avoit trouvé. C'eſt une ſorte de ſuite, qui a la forme d'une fraction, mais d'une fraction dont le dénominateur eſt un entier plus une fraction, celle-ci de même, & ainſi à l'infini; ce qui lui a fait donner le nom de fraction continue. Suivant Milord *Brouncker*, le quarré étant 1, le cercle eſt égal à cette expreſſion

De M. Brouncker.

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\&c.}}}}}$$

prolongée à l'infini. Mais lorſqu'on la terminera, on aura alternativement des limites par excès & par défaut. Au reſte, Milord *Brouncker* obſerve que pour avoir une approximation plus juſte en terminant la ſuite, il faut augmenter le dénominateur de la fraction où l'on s'arrête, de la racine du numérateur; on trouve par ce moyen, dès les ſeptieme & huitieme termes, des limites plus reſſerrées que celles d'*Archimede*. *Wallis* en nous communiquant cette invention, nous a fait part de la maniere dont *Brouncker* y eſt parvenu (*b*).

La Géométrie eſt redevable à Milord *Brouncker* d'une autre

(*a*) Guillaume Brouncker, Vicomte de Caſtel-Lyons en Irlande, naquit vers l'an 1620. Il fut Chancelier de la Cour de la Reine, Garde de ſon Sceau, & dans les dernieres années de ſa vie un des Commiſſaires de la Tour. Lorſque la Société Royale prit naiſſance, il en fut établi le Préſident, & il fut continué annuellement environ quinze ans. Il mourut en 1684.

(*b*) M. Euler a donné dans les Mem. de Peterſbourg (ann. 1737) un excellent Mémoire ſur cette ſorte de fractions, qu'il applique à des uſages particuliers.

invention remarquable. C'eſt la premiere ſuite infinie qui ait été donnée pour exprimer l'aire de l'hyperbole. Il en étoit en poſſeſſion dès l'année 1657; car *Wallis* l'annonçoit dès-lors dans la dédicace d'un écrit contre *Meibomius* : mais diſtrait par d'autres occupations, *Brouncker* différa à la publier juſqu'en 1668, que *Mercator* ayant trouvé de ſon côté une ſuite ſemblable, & étant ſur le point de mettre au jour ſa *Logarithmotechnie*, lui arracha ſon ſecret. Il le dévoila dans les *Tranſact. Philoſ.* n°. 34. Voici cette ſuite, C étant le centre d'une hyperbole équilatere, & CA le quarré inſcrit entre ſes aſymptotes = 1, que BD ſoit égale à CB; Milord *Brouncker* montre que l'eſpace ABDEGA eſt égal à cette ſuite infinie de fractions décroiſſantes, $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.10}$, &c. que l'eſpace AGEF eſt $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7}$, &c. enfin que le ſegment $AGEA = \frac{1}{2.3.4.} + \frac{1}{4.5.6.} + \frac{1}{6.7.8.}$, &c. La maniere dont *Brouncker* démontre ceci, eſt trop ſimple pour la paſſer ſous ſilence. Il commence par prendre le plus grand rectangle BE, *Fig.* 84. inſcrit dans l'eſpace hyperbolique, il partage enſuite la baſe BD en deux également, & il calcule la valeur du rectangle 2. Il continue à partager de même chacune des deux moitiés BH, HD, en deux également, & chacune des portions BI, IK, &c. ce qui lui donne les rectangles 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. Or l'on trouve facilement que le rectangle 1 eſt $\frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$; que le rectangle 2 eſt $\frac{1}{1.2} \times \frac{1}{6}$, ou $\frac{1}{3.4}$; que les deux ſuivans 3, 4, ſont reſpectivement $\frac{1}{5.6}$, $\frac{1}{7.8}$; que les quatre qui viennent après, 5, 6, 7, 8, ſont $\frac{1}{9.10}$, $\frac{1}{11.12}$, $\frac{1}{13.14}$, $\frac{1}{15.16}$, &c. donc cette ſuite de fractions continuée à l'infini, épuiſera tous les rectangles inſcrits de la maniere qu'on vient de voir, & par conſéquent ſera l'aire de l'eſpace hyperbolique AEGDB. C'eſt en calculant de la même maniere les rectangles continuellement inſcrits dans l'eſpace AFEG, ou les triangles inſcrits dans le ſegment AEG, qu'il trouve les deux dernieres ſuites. On peut par le moyen de chacune d'elles calculer en pluſieurs dé-

cimales la valeur de l'aire hyperbolique entre les asymptotes : *Brouncker* en donne des exemples, & trouve par cette méthode les logarithmes hyperboliques de 2 & de 10.

C'est enfin à l'*Arithmétique des infinis* de *Wallis*, que nous devons à certains égards la découverte brillante par laquelle le Géometre Nicolas *Mercator* (*a*) s'illustra quelques années après. Car ce fut en cherchant à appliquer à l'hyperbole les regles de cette Arithmétique, qu'il trouva une suite pour exprimer l'aire hyperbolique entre les asymptotes. Voici de quelle maniere il y parvint. *De Mercator.*

Il suivoit de ce que *Wallis* avoit démontré dans l'ouvrage cité tant de fois, que si l'ordonnée d'une courbe étoit exprimée par une suite quelconque de puissances de l'abscisse, comme $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, &c. l'aire de cette courbe étoit $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$, &c. *Wallis* avoit aussi remarqué que prenant l'origine de l'abscisse sur l'asymptote, à une distance égale à B C, ou l'unité, de sorte que B*d* fût $= x$, l'ordonnée étoit $\frac{1}{1+x}$; mais cette expression ne tomboit point sous ses regles, & il avoit tenté en vain de l'y soumettre (*b*). *Fig.* 85.

Ce fût *Mercator* qui en vint à bout : il eut l'idée heureuse, & néanmoins fort simple, de diviser, par la méthode usitée, 1 par $1 + x$, & il trouva, au lieu d'un quotient fini, cette suite infinie $1 - x + x^2 - x^3 + x^4$, &c. La vérité de cette expression, & son identité avec la premiere, est facile à montrer lorsque x est moindre que l'unité : car alors la suite dont nous parlons est la différence des deux progressions géométriques décroissantes

(*a*) Nicolas Mercator (en Allemand Hauffmann), étoit du Duché de Holstein. Il vint s'établir vers l'an 1660 en Angleterre : il y demeura le reste de sa vie, & il fut un des premiers membres de la Société Royale. Nous ignorons les dates de sa naissance & de sa mort. On a de lui divers ouvrages, dont les principaux sont les suivans. *Hypoth. Astron. nova.* Lond. 1664. in-fol. On a parlé de cette hypothese à la fin du Livre IV. *Logarithmotechnia, &c.* Ibid. 1668. in-4°. *Institut. Astron.* Ibid. 1678. in-8°. Nous sommes fâchés, pour l'honneur de cet habile Mathématicien, qu'on ait trouvé après sa mort, parmi ses papiers, un Traité d'Astrologie Judiciaire. Voyez le *Supplément de Bayle*, par M. *de la Chauffepié.*

(*b*) On lit dans le Supplément de Bayle, à l'article de Newton, une remarque où l'on revendique à Wallis l'invention de Mercator, sur ce que, dit-on, Wallis avoit déja montré dans son *Opus Arithm.* imprimé en 1657, le développement de l'expression $1 : (1 + x)$. Mais nous pouvons assurer que l'Auteur de cette remarque, qui paroît être le Chevalier Jones, a mal vu, & qu'on ne trouve rien de semblable dans l'ouvrage cité, du moins de l'édition de 1657.

$1 + x^2 + x^4 + x^6$, &c. & $x + x^3 + x^5 + x^7$, &c. qui étant ſommées par la méthode ordinaire, & ſouſtraites l'une de l'autre, donnent préciſément $\frac{1}{1+x}$. La ſuite $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, &c. ſera donc égale, comme on l'a vu plus haut, à l'aire hyperbolique entre les aſymptotes, répondante à l'abſciſſe x. Que ſi l'on ſuppoſe au contraire x négatif, c'eſt-à-dire, pris de B en $\mathcal{A}$, la ſuite précédente ſera $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$, &c. *Mercator* publia ſa découverte dans ſa *Logarithmotechnia*, qui parut vers la fin de 1668. Il donna ce titre à ſon ouvrage, parce qu'il y applique principalement ſa ſuite à la conſtruction des logarithmes qui dépendent, comme on l'a dit tant de fois, de la quadrature de l'aire hyperbolique entre les aſymptotes.

L'invention de *Mercator* fournit en effet un moyen commode de calculer les aires hyperboliques, tant que x eſt moindre que l'unité. Car ſuppoſons que x ſoit $\frac{1}{5}$, alors la ſuite en queſtion ſe transforme en celle-ci $\frac{1}{5} - \frac{1}{2.25} + \frac{1}{3.125} - \frac{1}{4.625}$, &c. dont les termes décroiſſent rapidement, de telle ſorte qu'ils arriveront bientôt à un degré de petiteſſe qui les rendra de nulle conſidération. Il ſuffira donc d'en additionner un certain nombre, ce que l'on fera commodément par le moyen des fractions décimales dont nous ſuppoſons la doctrine connue au lecteur. Ainſi l'on trouvera par la ſuite ci-deſſus, que le logarithme hyperbolique de $\frac{6}{5}$, eſt 0.1823215. On trouvera de même ceux de tous les nombres pareils qui excedent peu l'unité, & par leur combinaiſon mutuelle on tirera ceux de la plûpart des nombres entiers (*a*).

On a dit qu'il falloit ſuppoſer dans la ſuite ci-deſſus x moindre que l'unité. En effet, à meſure que x approche davantage

(*a*) Car, par exemple, ayant le logarithme de $\frac{2}{8}$, & celui de $\frac{4}{3}$, on aura celui de 2, en ajoutant à celui de $\frac{2}{8}$ le double de celui de $\frac{4}{3}$, ou celui de $\frac{16}{9}$. Car $\frac{2}{8} \times \frac{16}{9} = 2$. Maintenant ayant le logarithme de 2, & celui de $\frac{5}{4}$, on aura facilement celui de 10; car $\frac{5}{4} \times 8$, ou $\frac{5}{4} \times 2^3 = 10$: ainſi il faudra au logarithme de $\frac{5}{4}$, ajouter le triple de celui de 2. Avec le logarithme de $\frac{4}{3}$, & celui de $\frac{2}{8}$, ou le double de celui de $\frac{3}{2}$, on aura celui de 3, car $\frac{4}{3} \times \frac{2}{4} = 3$. En ajoutant ceux de 10 & de $\frac{11}{10}$, on a celui de 11. Il eſt facile de concevoir par le moyen de ces exemples, comment on peut calculer les logarithmes des nombres entiers par le moyen de ceux des fractions peu différentes de l'unité.

de cette valeur, le calcul de la ſuite eſt plus laborieux, parce qu'elle converge plus lentement, c'eſt-à-dire, que ſes termes décroiſſent moins rapidement. L'inconvénient eſt encore plus grand, ſi x ſurpaſſe l'unité; car alors les termes de la ſuite, au lieu d'être décroiſſans, vont en croiſſant de plus en plus, ce qui la rend inutile. Mais il y a à cela divers remedes, entr'autres celui-ci: par exemple, ſi Ad eſt ſuppoſé 17, & qu'on ait déja le logarithme de 2, & par conſéquent ceux de 4, de 8, de 16, il n'y a qu'à diviſer 17 par 16, ce qui donnera $\frac{17}{16}$, ou $1\frac{1}{16}$. Alors en faiſant $x = \frac{1}{16}$, on aura, par la ſuite ci-deſſus, le logarithme de $1\frac{1}{16}$, ou $\frac{17}{16}$; à quoi ſi l'on ajoute le log. de 16, qui eſt quadruple de celui de 2, on aura celui de 17. Telle eſt la maniere dont on pourra parvenir à trouver les log. des nombres premiers, pourvu qu'on ait ceux des 10 premiers de la ſuite naturelle.

Il faut remarquer que les logarithmes qu'on trouve par cette méthode, ne ſont pas ceux des Tables ordinaires. On les nomme par cette raiſon *hyperboliques*; mais ils ſont aux *Tabulaires*, c'eſt-à-dire, à ceux des Tables ordinaires, dans un rapport conſtant, ſçavoir celui de 2. 3025850 à 1. 0000000. Cela vient de ce que dans la conſtruction de logarithmes ordinaires, on a ſuppoſé d'abord, que celui de 10 étoit 1. 0000000; mais par le calcul fondé ſur la méthode ci-deſſus, on le trouve de 2. 3025850. Les logarithmes appellés hyperboliques, ſont ceux qui réſultent du calcul des aires de l'hyperbole équilatere entre les aſymptotes: les tabulaires repréſentent les aires d'une hyperbole dont les aſymptotes font entr'elles un angle de 54° & 16′. Mais tout comme les aires de ces deux hyperboles ſur mêmes abſciſſes ſont entr'elles dans un rapport conſtant, qui eſt celui de leur plus grand parallélogramme inſcrit dans les aſymptotes, de même les logarithmes hyperboliques & tabulaires ſont dans un rapport conſtant, ſçavoir de 2. 3025850 à 1. 0000000, ou de 1. 0000000 à 0. 4342944: ainſi l'on réduira facilement les uns aux autres; les hyperboliques aux tabulaires, en diviſant les premiers par 2. 3025850, ou au contraire les tabulaires aux hyperboliques, en multipliant ceux-là par 2. 3025850, ou les diviſant par 0. 4342944.

III.

Du D. Barrow, & de ſa méthode des tangentes.

Parmi les Géometres contemporains de *Wallis*, & un peu antérieurs à *Newton*, qui ont principalement contribué à l'avancement de la Géométrie, on doit une place au D. *Barrow* (*a*). Ce Mathématicien célebre, publia en 1669, ſes *Leçons Géométriques*, ouvrage rempli de recherches profondes ſur la dimenſion & les propriétés des figures curvilignes. Nous nous en tiendrons à cet éloge; car nous ne pourrions, ſans tomber dans des détails prolixes, donner une idée plus développée de ce Livre ſçavant. Il ne falloit rien moins que les nouveaux calculs pour effacer tant d'inventions excellentes. Nous nous arrêterons ſeulement à une, ſçavoir ſa méthode des tangentes, à cauſe de ſa liaiſon avec le calcul différentiel ou des fluxions.

Il faut ſe rappeller ici ce qu'on a dit ſur la méthode de *Fermat*; car celle de *Barrow* n'eſt que cette méthode ſimplifiée. Le Géometre Anglois conſidere le petit triangle formé par la différence des deux ordonnées infiniment proches, leur diſtance & le côté infiniment petit de la courbe. Ce triangle eſt ſemblable à celui qui ſe forme par l'ordonnée, la tangente & la ſoutangente. Il cherche donc par l'équation de la courbe le rapport qu'ont enſemble ces deux côtés ba, aB du triangle Bba, lorſque la différence des ordonnées eſt infiniment petite (*b*); enſuite il

(*a*) Barrow, (Iſaac) naquit à Londres, vers l'an 1630. Il promettoit peu dans ſa jeuneſſe: mais lorſqu'il fut parvenu à un âge un peu plus mûr, ſon génie ſe développa, & il fit des progrès rapides dans preſque toutes les connoiſſances. En 1660 il fut nommé à une Chaire de Grec à Cambridge; il la quitta peu après pour une de Mathématiques au College de Gresham, & enfin en 1668, il revint occuper à Cambridge celle de Géométrie, qu'on nomme Lucaſienne, parce qu'elle eſt de la fondation de M. Lucas. Ce fut alors qu'il dicta ſes excellentes *Leçons Optiques & Géométriques*, qui furent imprimées en 1669. Cette année le D. Barrow ſe démit de ſa place en faveur de Newton, & dans la vue de ſe livrer principalement à la Théologie. Il mourut en 1678 à Cambridge, Recteur du College de la Trinité. Outre ſes *Lect. Opticæ & Geometricæ*, on a de lui divers autres ouvrages Mathématiques, que voici. *Notæ in Eucl. Elem.* Cant. 1655. in-4°. *Euclidis data ſuccinctè dem.* Ibid. 1659. in-4°. *Arch. opera*, *Appoll. Conica*, ac *Theod. Spherica*, *methodo novâ illuſtrata.* 1675. Lond. in-4°. *Lect. Math.* Cant. 1684. in-8°. Le célebre Tillotſon publia en 1683, ſes Œuvres Théologiques, Morales & Poétiques: on peut juger de leur mérite par celui de l'éditeur.

(*b*) Par exemple, ſi l'équation eſt $yy = px$, en ſuppoſant x devenir $x + e$, & l'ordonnée en même temps $y + a$, on a cette autre équation $yy + 2ay + aa = px + pe$. Otons de part & d'autre les

fait comme ab eſt à aB, ainſi l'ordonnée à la ſoutangente cherchée. Cette regle, ſi peu différente de celle de *Fermat*, ne differe, comme il eſt aiſé de le voir, de celle du calcul différentiel, que par la notation. Ce que *Barrow* nomme e, a, on le nomme dans le calcul différentiel dx, dy, les co-ordonnées étant x & y. Il y a auſſi une grande reſſemblance entre la maniere dont on prend la différentielle, ou la fluxion d'une grandeur, & celle qu'emploie *Barrow* pour trouver le rapport des lettres e, a. Il ne lui étoit même pas impoſſible d'appliquer ſa méthode aux expreſſions irrationnelles, de ſorte qu'il toucha de fort près au calcul différentiel, & qu'il n'eſt guere beſoin de recourir ailleurs qu'à ſes ouvrages pour y trouver l'origine de ce calcul. *Fig.* 86.

IV.

De M. Newton & de ſes premieres découvertes.

Tel étoit l'état de la Géométrie & de l'Analyſe lorſque parut M. *Newton*. Cet homme immortel à tant de titres, naquit le 25 Décembre 1642 (vieux ſtyle), à Woolſtrop, dans la Province de Lincoln, d'une famille noble qui poſſédoit depuis deux ſiecles la Seigneurie de ce nom, & qui étoit originaire de New-Town, ville de la Province de Lancaſtre. Il fit ſes premieres études dans le College de Grantham, où il fut envoyé à l'âge de douze ans. Lorſqu'elles furent finies, ſa mere crut devoir le rappeller dans la maiſon paternelle, afin qu'il commençât à veiller à ſes affaires; mais *Newton* ne rapporta de l'Univerſité qu'un eſprit ſi éloigné de ce genre d'occupations, & ſi porté à l'étude, qu'il fallut l'y renvoyer afin qu'il pût y ſuivre ſon goût. Ce fut alors qu'il commença à étudier les Mathématiques. Un génie ſi ſublime ne devoit pas ſuivre la route ordinaire; *Newton* ne fit, dit-on, que jetter les yeux ſur les Elémens d'Euclide; il paſſa ſur le champ à des Livres de Géométrie ſublime, comme la *Géométrie* de *Deſcartes*, & l'*Arithmétique des infinis* de *Wallis*. En liſant ces ouvrages, il ne ſe bornoit pas à les entendre, mais portant déja

---

quantités yy & px, qui ſont égales, reſtera $2ay + aa = pe$, ou parce que aa eſt infiniment petit, $2ay = pe$. Donc $a : e :: p : 2y :: p : 2\sqrt{px}$. Mais a eſt à e, comme l'ordonnée à la ſoutangente; donc $a : e$, ou $p : 2\sqrt{px}, :: \sqrt{px} : 2x$, par conſéquent la ſoutangente cherchée eſt égale à $2x$.

ſes vues au-delà de celles de l'Auteur, il faiſoit dès-lors comme par occaſion une ample moiſſon de découvertes. C'eſt ainſi que s'offrirent à lui ſes premieres inventions analytiques, comme on le verra dans le récit que nous en ferons.

Le mérite de M. *Newton* ne tarda pas à ſe faire jour. Le D. *Barrow*, ſi bon juge en ſes matieres, le connut, l'admira, & quittant ſa place de Profeſſeur à Cambridge, la lui procura. Il n'avoit encore que vingt-ſept ans, mais il étoit déja en poſſeſſion, & même depuis quelques années, de deux de ſes plus belles découvertes, ſa théorie de la lumiere, & ſon calcul des fluxions. Il commença alors à dévoiler la premiere, dans ſes *Leçons Optiques*, ouvrage ſublime, ſoit par les recherches d'Optique & de Géométrie mixte, qui y ſont répandues, ſoit par cette nouvelle théorie qui en eſt l'objet principal. Il mettoit en ordre dans le même temps ſon Traité intitulé *Méthode des Fluxions*, ſe propoſant de le publier inceſſamment avec le précédent. Mais les objections précipitées qui lui vinrent de divers côtés contre ſes découvertes Optiques, ſi-tôt qu'il en eut publié le précis dans les *Tranſactions*, le détournerent de ſon deſſein. Plus flatté de la tranquillité que de la gloire, il les ſupprima l'un & l'autre. Des découvertes ſans nombre, & divers écrits ſont l'ouvrage de ce temps où il profeſſoit les Mathématiques à Cambridge, entr'autres ſes *Principes Mathématiques de la Philoſophie Naturelle*, ce Livre immortel qui fera à jamais l'admiration de tous les ſiecles éclairés. On en rendra ailleurs un compte ſi étendu, que pour ne point nous répéter inutilement, nous nous bornerons ici à cet éloge, encore trop foible expreſſion de l'eſtime dûe à cette ſublime production de l'eſprit humain.

Un mérite tel que celui de M. *Newton*, étoit digne d'un autre théâtre que celui où nous l'avons vu juſqu'ici. On le ſentit en 1696. Milord *Montague*, Comte d'Halifax, lui procura la place de Directeur des Monnoyes de Londres. *Newton* la remplit en homme de génie, & fit dans certaines circonſtances difficiles, des opérations également ſçavantes & utiles. En 1705, il fut crée Chevalier par la Reine Anne. Cette Princeſſe ne ſe borna pas à cette faveur : elle lui fit ſouvent l'honneur de s'entretenir avec lui ſur les matieres les

plus

plus ſçavantes, & on l'entendit plus d'une fois ſe féliciter d'avoir eu un ſi grand homme pour ſon contemporain & ſon ſujet.

M. *Newton* jouit d'une ſanté heureuſe juſqu'à près de 80 ans : elle commença alors à s'affoiblir, & au commencement de 1727 il fut attaqué de la pierre. Il montra dans cette circonſtance autant de fermeté qu'il avoit déployé de ſagacité durant le cours de ſa vie. Au milieu des cruels accès qui terminerent ſes jours, on ne le vit jamais proférer une plainte, & ſi les gouttes d'eau qui couloient le long de ſon front, n'euſſent été des marques de la violente douleur qu'il éprouvoit intérieurement, on l'eût cru dans un état tranquille. Il mourut enfin le 20 Mars 1727 (v. ſt.), âgé de 84 ans & trois mois. La Grande-Bretagne crut devoir montrer qu'elle étoit ſenſible à l'honneur d'avoir produit un homme ſi ſupérieur. Son corps fût transféré à l'Abbaye de Weſtminſter, & dépoſé ſur un lit de parade. Il fut conduit delà au lieu deſtiné pour ſa ſépulture, avec une ſuite nombreuſe des plus grands Seigneurs. Le grand Chancelier d'Angleterre, les Ducs de Montroſe & de Roxbury, les Comtes de Pembrock, de Suſſex & de Maclesfied, ſe firent un honneur de porter le drap mortuaire. Sa famille lui a depuis élevé un monument où l'on lit cette Epitaphe.

H. S. E. *ISAACUS NEWTONUS, eques auratus, qui animi vi propè divinâ, planetarum motus, figuras, cometarum ſemitas, Oceanique æſtus, ſuâ Matheſi lucem preferente, primus demonſtravit. Radiorum lucis diſſimilitudines, colorumque indè naſcentium proprietates, quas nemo antè ſuſpicatus erat, perveſtigavit. Naturæ, Antiquitatis, S. Script. ſedulus, ſagax, fidus, interpres, Dei O. M. Majeſtatem Philoſophiâ aperuit, Evangelii ſimplicitatem moribus expreſſit. Sibi gratulentur mortales talè tantumque extitiſſe humani generis decus.*

Natus XXV. *Decemb.* A. D. MDCXLII; *obiit Martii* XX. MDCCXXVI. (*a*)

Les ouvrages de M. *Newton* ſont en grand nombre : les voici ſommairement raſſemblés par ordre des dates de leur impreſſion. Nous paſſons légérement ſur les notes dont il enrichit l'édition de la *Géographie* de *Varenius*, donnée en 1672,

(*a*) C'eſt-à-dire 1727, parce qu'en Angleterre l'année ne commence qu'à Pâques.

pour nous arrêter à ſes *Principes de la Philoſophie Naturelle.* Ce ſublime Livre parut en 1687 (*a*), & a eu depuis diverſes éditions. Il a été ſçavamment commenté par les PP. *Jacquier* & le *Sueur*, Religieux Minimes, & profonds Géometres (*b*); & il doit dans peu en paroître une traduction Françoiſe, avec un Commentaire ſur les endroits les plus importans; ouvrage de Madame la Marquiſe *du Châtelet*, auquel a préſidé M. *Clairault*, qui en a fourni les matériaux conjointement avec pluſieurs autres célebres Géometres. M. *Newton* publia en 1704, ſon *Optique* (*c*), avec les deux Traités Latins, *De Quadraturâ curvarum*, & *Enumeratio curvarum tertii ordinis*, réimprimés depuis en 1711, avec deux autres écrits Latins de M. *Newton*; ſçavoir ſon *Analyſis per æquat. numero terminorum infinitas*, & ſa *Methodus differentialis.* Les deux premiers de ces Traités ont été commentés, l'un par M. *Steward*, l'autre par le célebre Géometre M. *Stirling* (*d*). Nous revenons pour quelques momens ſur nos pas, afin de ne pas oublier l'*Arithmetica univerſalis*, qui parut en 1707; nous en avons donné ailleurs l'idée convenable, & nous y renvoyons. Après la mort de M. *Newton*, ont encore paru divers ouvrages qu'il n'avoit pas eu le temps, ou qu'il avoit négligé de publier : telles ſont ſes *Leçons Optiques*, ouvrage en grande partie différent de ſon Optique, en 1718; ſon Livre *de Syſtemate Mundi*, en 1731; ſa *Méthode des Fluxions & des ſuites infinies*, publiée en Anglois en 1736, & dont nous avons une traduction Françoiſe donnée en 1740, par M. de *Buffon.* Nous ne devons pas omettre ſa *Chronologie des anciens Royaumes corrigée*, ouvrage auſſi poſthume, qui parut en 1738, & dont l'abrégé avoit déja été furtivement publié à Paris en 1725. Si le ſyſtême chronologique que tâche d'y établir M. *Newton*, n'eſt pas vrai, il eſt du moins ſéduiſant, & il prouve la profonde érudition que ſon Auteur joignoit à ſes connoiſſances Mathématiques. Nous gliſſons légérement ſur ſes *Obſervations concernant les*

(*a*) *Cantabrig.* in-4°. 1687. *Ibid.* 1713; & *Amſtel.* 1714. *Lond.* 1726. Il y en a une traduction Angloiſe enrichie de notes par M. Machin, qui parut en 2. vol. in-8°. 174..

(*b*) *Phil. Nat. principiâ Math. perpetuis Comm. illuſtrata.* Genev. 1742. 3. vol. in-4°.

(*c*) *Angl. Lond.* in-4°. *Ibid.* 1717 & 1721. in-8°. *Latinè.* Lond. 1706, 1719. in-4°. En François, Amſterd. 1720, & Paris 1722. in-8°.

(*d*) *Illuſtratio tract.* D. Newtoni, *de enumeratione curvarum tertii ordinis.* Oxon. 1717.

prophéties de Daniel & l'Apocalypſe. Ailleurs qu'à Geneve & à Londres, on eût cru l'honneur de M. *Newton* intéreſſé à ce que ces obſervations ne viſſent pas le jour. Tous ces écrits enfin, à l'exception des *Principes*, de *l'Arithmétique univerſelle*, & de *l'Optique*, ont été raſſemblés ſous le titre d'*Opuſcula*, & publiés à Geneve en trois volumes in-4°. On y trouve auſſi quantité de pieces extraites des *Tranſactions*, du *Commercium Epiſtolicum*, & d'autres ouvrages. L'énumération en ſeroit trop longue; nous préférons de paſſer à l'expoſition des découvertes analytiques de M. *Newton*.

Les idées de *Wallis* ſur les interpolations, furent l'occaſion des premieres découvertes de *Newton*. Lorſqu'il commença à ſe jetter dans la carriere des Mathématiques, ce qui fut vers la fin de l'année 1663, un des premiers Livres qu'il lut, fut l'*Arithmétique des infinis*, dont nous avons ſi ſouvent parlé. On doit ſe reſſouvenir que *Wallis* y montroit la maniere de quarrer toutes les courbes dont (x étant l'abſciſſe), l'ordonnée étoit exprimée par $\overline{1-xx}^{m}$, tant que m étoit un nombre entier poſitif ou zero; & qu'en ſuppoſant m ſucceſſivement 0, 1, 2, 3, &c. les aires qui répondoient à l'abſciſſe x, étoient reſpectivement x, $x-\frac{1}{3}x^3$, $x-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{5}x^5$, $x-x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$, &c. Ainſi, diſoit-il, tout comme l'expoſant de $\overline{1-xx}^{\frac{1}{2}}$, qui eſt l'expreſſion de l'ordonnée du cercle, eſt le terme moyen entre 0 & 1, de même dans la ſuite x, $x-\frac{1}{3}x^3$, &c. la valeur de l'aire circulaire répondante à l'abſciſſe x, eſt le terme moyen entre les deux premiers x, $x-\frac{1}{3}x^3$. Mais *Wallis* ne put parvenir à trouver ce terme; cette découverte étoit réſervée à un des premiers efforts de M. *Newton*. Nous allons faire d'après lui-même l'hiſtoire de ſes méditations ſur ce ſujet (*a*).

Pour rendre ſenſible ce que nous avons à dire ici, il nous faut expoſer d'une maniere plus diſtincte la ſuite des expreſſions entre les deux premieres deſquelles il faut en interpoler une autre. Nous les réduirons pour cet effet en une eſpece de Table qui comprendra les quatre ou cinq premieres. Ce ſont

(*a*) *Comm. Epiſt. de Analyſi promotâ.* p. 67. Newtoni *Opuſcula.* T. 1, p. 328.

x.

$x - \frac{1}{3}x^3$.

$x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$.

$x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$.

$x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 - \frac{1}{9}x^9$.

Conſidérons maintenant cette Table, & nous y remarquerons, 1°. Que tous les premiers termes ſont x. 2°. Que les ſignes ſont alternativement poſitifs & négatifs. 3°. Que les puiſſances de x y croiſſent par degrés impairs. Ce doivent donc être là des conditions communes à l'expreſſion cherchée, & aux précédentes; & comme il eſt facile de s'y conformer, il n'y a plus que les coefficiens qui faſſent de la difficulté. Pour cela, remarquons encore avec M. *Newton*, que le dénominateur de chaque fraction qui forme le coefficient de chaque terme, eſt l'expoſant même de la puiſſance de x dans ce terme. A l'égard des numerateurs dans la ſeconde colonne, on remarque qu'ils croiſſent par des différences égales; dans la troiſieme ce ſont les nombres triangulaires 1, 3, 6, &c. Dans la quatrieme les nombres pyramidaux 1, 4, 10, &c.

Ce fut ſans doute par cette conſidération que M. *Newton* parvint à démêler que m étant l'expoſant de $1 - xx$, la ſuite de ces numérateurs étoit en général $1, m, \frac{m.m-1}{1.2}, \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$, &c. En effet, m, exprimant un nombre entier quelconque, $\frac{m.m-1}{1.2}$ eſt l'expreſſion générale de la ſuite de nombres triangulaires, $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$. eſt celle des nombres pyramidaux, &c. Il eſt aiſé d'en faire l'épreuve ſur les termes connus; puis donc que ces expreſſions ſont vraies à l'égard de m, tant qu'il eſt un nombre entier, elles le ſeront de même ſi m eſt un nombre rompu, par exemple $\frac{1}{2}$ dans le cas préſent. Ainſi les numérateurs cherchés pour le terme moyen, entre le premier & le ſecond de la ſuite ci-deſſus, ſont $1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{-5}{128}$, qui multipliant reſpectivement les termes que nous avons vu devoir être $x, \frac{-x^3}{3}, \frac{+x^5}{5}, \frac{-x^7}{7}, \frac{+x^9}{9}$, &c. donnent pour la ſuite cher-

chée, $x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8.5}x^5 - \frac{1}{16.7}x^7 - \frac{5}{128.9}x^9$. &c. C'eſt-là la valeur de l'aire du ſegment circulaire répondant à l'abſciſſe x, priſe à commencer du centre. M. *Newton* s'apperçut bientôt après qu'il y avoit une maniere plus ſimple de trouver la même ſuite; c'eſt d'extraire par la méthode ordinaire la racine de $1 - xx$, & de continuer l'opération juſqu'à ce qu'on ait un aſſez grand nombre de termes pour appercevoir la loi de la progreſſion. On trouve par cette voie que $\sqrt{1 - xx}$, eſt $x - \frac{xx}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5}{128}x^8$, &c. ce qui étant traité ſuivant les regles de l'Arithmétique des infinis, donne la même ſuite que ci-deſſus.

Cette découverte mit *Newton* en poſſeſſion d'une autre non moins intéreſſante, & qui auroit dû naturellement précéder celle qu'on vient de voir, ſi le génie inventeur ſuivoit toujours le chemin le plus facile. C'eſt le développement de la puiſſance $\overline{1 - xx}^m$ (m étant un nombre quelconque) en expreſſion rationnelle. Il remarqua qu'il n'y avoit qu'à omettre dans la formule précédente les dénominateurs 3. 5. 7. & abaiſſer chaque puiſſance d'une unité, &c. Ainſi $\overline{1 \pm xx}^m$. n'eſt autre choſe que $1 \pm mxx + \frac{m.m-1}{1.2}x^4 \pm \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}x^6$, &c; ce qui donne auſſi l'expreſſion générale de $\overline{a \pm b}^m$; car $\overline{a \pm b}^m = a^m \times (1 \pm \frac{b}{a})^m$. Mais $(1 \pm \frac{b}{a})^m$ eſt $1 \pm m.\frac{b}{a} + \frac{m.m-1}{1.2}.\frac{b^2}{a^2} \pm \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}.\frac{b^3}{a^3}$: on a donc, en multipliant tout cela par a^m, on a, dis-je, $(a \pm b)^m = a^m \pm m.a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}.a^{m-2}b^2$, &c. Ce peu de termes ſuffit pour montrer la loi de la progreſſion. Elle ſe terminera ſi m eſt un nombre entier & poſitif; car alors il arrivera que m moins un nombre de la progreſſion naturelle, deviendra zero, ce qui rendra nul ce terme, auſſi-bien que chacun des ſuivans. Si m eſt négatif ou un nombre rompu, cette ſuite aura un nombre infini de termes. C'eſt-là la fameuſe regle nommée

communément le binome de *Newton*, regle d'un uſage infini dans l'analyſe ordinaire, pour l'extraction approchée & expéditive des racines, de même que dans le calcul intégral.

M. *Newton* étoit déja parvenu à ces découvertes & à diverſes autres, pluſieurs années avant que *Mercator* publiât ſa *Logarithmotechnie*, qui ne comprend qu'un cas particulier de la théorie ci-deſſus. Mais par un excès de modeſtie & d'indifférence pour ces fruits de ſon génie, il ne ſe preſſoit point de ſe faire connoître en les mettant au jour. Sur ces entrefaites parut l'ouvrage de *Mercator :* c'eût été pour tout autre, un motif puiſſant de ſe hâter de prendre part à la gloire attachée à ces découvertes brillantes ; mais bien au contraire, cela ne ſervit qu'à confirmer *Newton* dans ſa réſolution. Il penſa que *Mercator* ayant trouvé la ſuite pour l'hyperbole, comme on l'a dit, il ne tarderoit pas d'étendre ſa méthode au cercle & aux autres courbes, ou que ſi *Mercator* ne le faiſoit pas, cette invention n'échapperoit pas à d'autres. En effet, il eſt ſurprenant que *Mercator* ayant réſolu par la diviſion ordinaire l'expreſſion $1 : 1 \pm x$ en une ſuite infinie, n'ait pas eu l'idée de tenter l'extraction de racine ſur celle-ci $\sqrt{1 \pm xx}$. M. *Newton* enfin ne ſe croyoit pas encore d'un âge aſſez mûr pour oſer rien mettre au grand jour (*a*), rare exemple de modeſtie, & qui mérite bien d'être mis en contraſte avec la confiance de ces Ecrivains que nous voyons ſi ſouvent écrire ſur des matieres avant que de les avoir étudiées.

M. *Newton* vint alors à être connu du D. *Barrow*. Ce ſçavant Géometre ſentit auſſi-tôt tout le prix de cet homme extraordinaire, il l'exhorta à ne pas enfouir davantage tant de tréſors, & il le détermina à lui permettre d'envoyer à un de ſes amis de Londres, un écrit qui étoit le précis ſommaire de quelques-unes de ces découvertes. Cet écrit eſt celui qui a paru depuis ſous le titre de *Analyſis per æquationes numero terminorum infinitas*. Outre l'extraction des racines de toutes les équations, & la méthode de réduire les expreſſions fractionnaires ou irrationnelles en ſuite infinie, il contient l'application de toutes ces inventions à la quadrature, & à la rectification des courbes, avec diverſes ſuites pour le cercle & l'hyper-

(*a*) *New. Epiſt. poſt. comm. Epiſt.*

bole. On y trouve auſſi la méthode du retour des ſuites, c'eſt-à-dire, la maniere de dégager l'indéterminée qui entre dans tous les termes d'une ſuite, & d'en trouver la valeur par une autre, qui ne contient que des quantités connues, ou bien la maniere de revenir à l'abſciſſe ou à l'ordonnée, ayant une ſuite qui exprime l'aire, ou l'arc par cette abſciſſe, ou cette ordonnée. *Newton* ne s'y borne pas aux courbes géométriques: il donne quelques exemples de quadratures de courbes mécaniques. Il y parle d'une méthode des tangentes, dont il étoit en poſſeſſion; méthode qui n'étoit point arrêtée par les irrationnalités, & qui s'appliquoit auſſi-bien aux courbes mécaniques qu'aux géométriques. On y voit enfin le principe *des Fluxions* & *des Fluentes* aſſez clairement expliqué & démontré, de ſorte qu'il eſt inconteſtable que *Newton* étoit dès-lors en poſſeſſion de cet admirable calcul. Car les éditeurs de cet écrit, dans le *Comm. Epiſtolicum*, nous atteſtent qu'il a été fidélement publié d'après la copie que *Collins* en avoit tirée ſur le manuſcrit envoyé par *Barrow*. Ce qui n'eſt préſenté que ſommairement & avec une préciſion extrême dans cet écrit, *Newton* ſollicité par *Barrow*, travailla bientôt après à l'étendre davantage; ce qui donna lieu à l'ouvrage intitulé *Methodus Fluxionum*, & *Serierum infinitarum*. Il étoit prêt à le faire imprimer en 1671, à la ſuite de l'Algebre d'un certain *Kinckuyſen*, qu'il avoit enrichie de ſes notes. Ce projet n'eût pas lieu, à cauſe d'un incendie qui conſuma une partie de ſes papiers, & entr'autres ce Traité, à la ſuite duquel il vouloit mettre le ſien. Il fut enſuite ſur le point de le publier avec ſes *Leçons Optiques*; mais à la vue des chicanes qu'il commença à eſſuyer à l'occaſion de ſes découvertes ſur la lumiere, il prit le parti de les ſupprimer l'un & l'autre: ce ſont-là les cauſes pour leſquelles cet excellent Traité a été ſi long-temps enſeveli dans l'oubli par ſon Auteur, au grand détriment de la Géométrie.

V.

Idée du principe des fluxions & de leur application.

Nous ne devons pas différer davantage à donner une idée diſtincte du principe ſur lequel eſt établie la méthode dont nous parlons. Car quoique pour l'effet elle ſoit la même que celle du calcul différentiel, la maniere dont M. *Newton* envi-

ſage la ſienne eſt bien plus lumineuſe. Il y a plus, cette maniere a l'avantage de prévenir toutes les difficultés qu'on a élevées contre le calcul de *Leibnitz*, du moins en ce qui concerne les ſecondes différences. Ces difficultés ne ſont, il eſt vrai, que des chicanes, mais c'eſt toujours un mérite que de préſenter les choſes ſous un point de vue ſi lumineux, que la chicane même ne puiſſe trouver à s'y attacher.

La méthode Newtonienne des fluxions & des fluentes, eſt fondée ſur les notions évidentes du mouvement. Lorſqu'un corps ſe meut uniformément, la vîteſſe qu'il a, à chaque inſtant, eſt la même; mais il en eſt autrement d'un corps qui ſe meut d'un mouvement accéléré, qui tombe, par exemple, en vertu de ſa peſanteur. Ce corps a une vîteſſe différente à chaque inſtant, & cette vîteſſe eſt celle avec laquelle il continueroit de ſe mouvoir, ſi la peſanteur ou la force qui l'accélere ceſſoit d'exercer ſur lui ſon action. Il en eſt de même du mouvement retardé; la vîteſſe à chaque point de l'eſpace parcouru par un mouvement ſemblable, eſt celle avec laquelle le corps continueroit à ſe mouvoir, ſi la cauſe retardatrice ceſſoit d'agir. La vîteſſe d'un corps mu d'un mouvement, ſoit accéléré, ſoit retardé, pourroit être meſurée par l'eſpace que ce corps parcourroit dans un certain temps donné, ſon mouvement ceſſant d'être altéré par l'action de la cauſe qu'on a dit ci-deſſus.

Ceci s'applique avec une clarté lumineuſe à la théorie des fluxions. Toute ligne courbe peut être conçue décrite par deux mouvemens: l'un eſt celui de l'ordonnée tranſportée parallélement à elle-même le long de l'abſciſſe, l'autre celui d'un point qui parcourt l'ordonnée en s'éloignant de l'axe ou de l'extrêmité de cette ordonnée. On ſuppoſe pour ſimplifier les idées, que le premier eſt uniforme; mais le ſecond eſt varié, ſinon la courbe dégénereroit en une ligne droite, comme il
Fig. 87. eſt aiſé de voir. S'il eſt accéléré, cette courbe ſera convexe vers ſon axe, & ce ſera le contraire s'il eſt retardé. Mais à chaque point où eſt parvenu le mobile C, la vîteſſe avec laquelle il flue ou ſe meut le long de BC, ce que M. *Newton* appelle la fluxion de l'ordonnée, ſera exprimée non par l'eſpace E*e*, qu'il parcourra dans le temps, pendant lequel l'ordonnée parcourra B*b*, mais par l'eſpace E*e*, qu'il parcourroit

parcourroit avec la vîteſſe acquiſe au point C, conſervée ſans augmentation ni diminution. Car ce point décrivant ne parvient en *c* qu'en vertu de l'accélération ou de la retardation qu'il éprouve durant le temps que l'ordonnée met à parcourir B*b*, puiſque s'il n'eût pas été accéléré ou retardé, l'eſpace qu'il eût parcouru eût été la ligne E*e*, interceptée entre la parallele C E & la tangente au point C.

Ce que nous venons de dire montre déja le principe de la regle des tangentes dans ce calcul. Sans faire aucune ſuppoſition dure, comme celle-ci, que les parties infiniment petites de courbe ſont des lignes droites, & que les tangentes ſont leurs prolongations, on peut prendre l'intervalle entre deux ordonnées quelconques B C, *bc*, ſi grand qu'on voudra; & ſi F C*e* eſt tangente au point C, & C E parallele à l'axe, C E ſera la fluxion de l'abſciſſe, & E*e* la fluxion correſpondante de l'ordonnée, de ſorte qu'il eſt évident que la fluxion de l'ordonnée eſt à celle de l'abſciſſe, comme l'ordonnée à la ſoutangente. On verra enſuite comment, par l'expreſſion analytique de la courbe, on trouve le rapport de ces deux fluxions. De même c'eſt la ligne C*e* qui eſt la fluxion de la ligne courbe A C; ainſi l'on voit encore que le quarré de la fluxion de la courbe, eſt égal à la ſomme de ceux des fluxions des coordonnées, ce qui eſt le principe des rectifications.

Il n'eſt guere plus difficile de déterminer, à l'aide des principes ci-deſſus, quelle eſt la fluxion d'une aire curviligne. Ce n'eſt pas l'eſpace C B*bc*, dont croît réellement cette aire, mais le rectangle B E, formé de l'ordonnée par la fluxion de l'abſciſſe. Car, pour prendre l'exemple le plus ſimple, dans le triangle où l'abſciſſe flue uniformément, l'aire croît ou flue d'un mouvement accéléré, puiſqu'en temps égaux les accroiſſemens ſont de plus en plus grands. Or il eſt évident que le petit triangle C E*e*, eſt ce qui eſt produit en vertu de cette accélération. Il faut donc le rejetter; & la vraie vîteſſe de l'aire croiſſante A B*c*, quand elle eſt parvenue à cette grandeur, eſt le rectangle C B*bc*. Ce qu'on vient de dire du triangle s'applique facilement aux autres courbes. Ainſi la fluxion d'une aire quelconque eſt le produit de l'ordonnée par la fluxion de l'abſciſſe. Celle d'un ſolide eſt le produit de la fluxion de l'abſciſſe par la ſurface génératrice, qui ſera, par exemple, le

cercle décrit du rayon BC, ſi ce ſolide eſt le cône ou le conoïde produit par la circonvolution de la figure ABC autour de AB.

Cette maniere d'enviſager l'accroiſſement des figures, nous conduit naturellement aux fluxions des fluxions, & aux fluxions de tous les ordres, ſans qu'on puiſſe leur oppoſer aucune des difficultés qu'on a élevées contre les ſecondes, troiſiemes différences, &c. du calcul différentiel. Car imaginons ſur le même axe AB, une courbe D*d*D, dont chaque ordonnée BD ſoit comme la fluxion de BC, ou la vîteſſe qu'a le point décrivant C ſur BC. Cette vîteſſe eſt-elle uniforme, la ligne
Fig. 89. D*d*D ne ſera qu'une parallele à l'axe, & BD n'aura conſéquemment aucune fluxion; il n'y en aura auſſi aucune ſeconde pour l'ordonnée BC. Mais la vîteſſe du point C, eſt-elle continuellement accélérée ou retardée, l'ordonnée BC croîtra ou décroîtra. Cette ordonnée aura par conſéquent une fluxion qui ſera évidemment la ſeconde de l'ordonnée BC, ou ſa fluxion de fluxion. Cet exemple nous ſervira encore à montrer ce que ſont les fluxions des ordres ultérieurs. Car ſi la courbe D*d* n'eſt pas une ſimple ligne droite inclinée à l'axe, l'ordonnée BD aura elle-même une ſeconde fluxion, qui ſera conſéquemment la troiſieme de l'ordonnée BC. On peut de même prouver & rendre ſenſibles les fluxions des ordres quatrieme, cinquieme, &c. En général une courbe d'un degré *m*, ne ſçauroit avoir de fluxions d'un ordre plus élevé que celui qui eſt dénommé par *m*; mais une courbe méchanique peut en avoir de tous les degrés à l'infini. Cela arrive à la logarithmique, parce que la courbe ſur le même axe qui déſigne le rapport des premieres fluxions, eſt elle-même une logarihmique; d'où il eſt évident que celle qui déſigneroit le rapport des fluxions de celle-ci, en ſeroit encore une, & ainſi à l'infini.

Après avoir fait connoître en quoi conſiſte la méthode des fluxions, il nous faut entrer dans l'expoſition ſommaire de leur calcul. Car ce ſeroit peu que d'être en poſſeſſion des principes qu'on vient d'établir, ſi l'on n'avoit le moyen de trouver le rapport des fluxions des différentes eſpeces de grandeurs, dans les divers cas, & ſuivant les diverſes équations des courbes. Il faut d'abord déſigner la fluxion d'une quantité ſimple, comme *x*, par quelque ſigne. M. *Newton* le

fait tantôt par $\dot{x}$, tantôt par $o\,x$, quelquefois par X, ou par quelque autre lettre, comme p. Mais le premier ſigne eſt celui qui a été adopté en Angleterre dans l'uſage ordinaire, tandis que la plûpart des Géometres du continent ſe ſervent de celui-ci dx. Lors donc qu'on aura une quantité ſimple & variable, comme x, il ſera facile de trouver ſa fluxion, & au contraire ayant une fluxion comme $\dot{x}$, on verra auſſi-tôt que ſa fluente, ou la quantité dont elle eſt la fluxion, eſt x. De même la fluxion de $m\,x$, (m étant une grandeur conſtante ou invariable) eſt $m\,\dot{x}$. Après ce cas, le plus ſimple & le premier de tous, vient celui où on a le produit de deux grandeurs, comme $x\,y$. Pour avoir leur fluxion, qu'on ſe repréſente un rectangle comme AC, dont les côtés ſont x & y. De même qu'on a montré que la fluxion de l'aire d'un triangle, comme ABC, eſt ſimplement BE, & non l'aire entiere BC$c\,b$, de même il eſt facile de prouver que la fluxion du rectangle AC, n'eſt que la ſomme des fluxions BE, DF, c'eſt-à-dire, $y\,\dot{x} + x\,\dot{y}$; & *vice verſâ*, ſi l'on a une fluxion de cette forme, on pourra dire que la quantité dont elle provient, eſt $x\,y$. Delà il eſt facile de tirer par la ſeule analyſe, & ſans aucune conſidération immédiate du principe des fluxions, le rapport de celles de toutes les autres ſortes de grandeurs, quelle que ſoit leur forme & leur compoſition. On en donne des exemples dans la note ſuivante (*a*). *Fig.* 90.

(*a*) En effet, la fluxion de $x\,y$ étant $y\,\dot{x} + x\,\dot{y}$, on démontrera facilement que celle de $x\,y\,z$ ſera $y\,z\,\dot{x} + x\,z\,\dot{y} + x\,y\,\dot{z}$. Car que l'on ſuppoſe $x\,y$ égal à u, on aura $x\,y\,z = u\,z$ dont la fluxion ſera $u\,\dot{z} + z\,\dot{u}$, & l'on a $\dot{u} = x\,\dot{y} + y\,\dot{x}$. Ainſi mettant à la place de u & $\dot{u}$ leurs valeurs, on aura l'expreſſion ci-deſſus, d'où il eſt facile de tirer la regle générale pour tous les cas ſemblables. Cela montre encore que la fluxion d'un quarré $x\,x$ eſt $2\,x\,\dot{x}$. Car alors y étant $= x$, on a $y\,\dot{x} + x\,\dot{y} = x\,\dot{x} + x\,\dot{x} = 2\,x\,\dot{x}$. De même la fluxion de x^3 ſera $3\,x^2\,\dot{x}$, & enfin celle de x^m, ſera $m\,x^{m-1}\,\dot{x}$. Et *vice verſâ*, la fluente de $2\,x\,\dot{x}$ ſera $x\,x$, & par conſéquent celle de $x\,\dot{x}$ ſera $\frac{xx}{2}$. Celle de $x^2\,\dot{x}$ ſera $\frac{x^3}{3}$, & enfin celle de $x^n\,\dot{x}$ ſera $\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\,\dot{x}$; c'eſt-à-dire, qu'il faudra augmenter l'expoſant de l'unité, effacer le ſigne de fluxion, & diviſer par cet expoſant ainſi augmenté. On peut tirer de la même regle générale les fluxions des radicaux; car $\sqrt{z}$ n'eſt que $z^{\frac{1}{2}}$. Donc ſa fluxion ſera $\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1}\,\dot{z}$, ou $\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,\dot{z}$, ou $\dot{z} : 2\,\sqrt{z}$. Si l'on avoit quelque doute ſur cette conſéquence, nous la prouverions de cette maniere. Soit $\sqrt{z} = y$: donc $z = y\,y$, & $d\,z = 2\,y\,dy$, & $d\,z : 2\,y$, ou $d\,z : 2\,\sqrt{z} = dy =$ à la fluxion de $\sqrt{z}$. De même la fluxion de $\sqrt[n]{z}$ eſt $\dot{z} : n\sqrt[n]{z^{n-1}}$. Tout ce que nous venons de dire eſt également vrai des quantités complexes, comme ſeroit $(a\,a\,x\,x)^n$. Sa fluxion eſt $2\,n\,x\,\dot{x} \times (a\,a\,xx)^{n-1}$. Enfin ſi

Ce que nous venons de dire ſur la nature des fluxions, c'eſt le précis de l'excellent Livre de M. *Maclaurin*, qui a pris un ſoin particulier de développer l'idée de *Newton*, & d'écarter toutes les difficultés qu'on pourroit élever à ce ſujet. M. *Newton* conçoit encore ſes fluxions d'une autre maniere, ſçavoir comme les dernieres raiſons des accroiſſemens ſimultanés de deux grandeurs qui dépendent l'une de l'autre. Nous allons éclaircir ceci; qu'on conçoive une courbe comme A C *c*, & deux ordonnées à une diſtance indéterminée B *b*, avec la parallele C D. Les côtés C D, D *c*, repréſentent les accroiſſemens reſpectifs & ſimultanés de l'abſciſſe A B, & de l'ordonnée B C. Que C *b* ſe rapproche de B C, la ſécante C *c* tournant ſur le point C, & ſe rapprochant de plus en plus de la tangente. Il eſt viſible que le petit triangle C D *c*, approchera de plus en plus d'être ſemblable avec celui que forment la tangente C F, & les lignes F B, B C. Donc la raiſon des côtés F B, B C, eſt la limite vers laquelle s'approche continuellement celle des côtés C D, D *c*, & qu'elle atteint à l'inſtant où ils s'anéantiſſent. Pour trouver donc cette raiſon, ſuppoſons l'abſciſſe égale à x, & l'ordonnée repréſentée par une fonction de x, comme x^n. Que l'accroiſſement de x ſoit déſigné par $\dot{x}$; tandis que x deviendra $x + \dot{x}$, x^n deviendra $(x + \dot{x})^n$, ou $x^n + n x^{n-1} \dot{x} + \frac{n.n-1}{2} x^{n-2} \dot{x}^2$, &c. ſuivant la formule connue. Les accroiſſemens reſpectifs ſeront donc comme $\dot{x}$, & $n x^{n-1} \dot{x} + \frac{n.n-1}{2}. x^{n-2} \dot{x}^2$, &c, ou comme 1, & $n x^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2}. x^{n-2} \dot{x}$, &c. Donc à l'inſtant où $\dot{x}$ de-

Fig. 91.

l'on a une quantité comme celle-ci $\frac{y}{z}$, ſa fluxion ſera $\frac{z\dot{y} - y\dot{z}}{zz}$; ce qu'on démontre, ſoit en regardant $\frac{y}{z}$, comme $y z^{-1}$, ou en faiſant $\frac{y}{z} = u$; ce qui donne $y = z u$, & $\dot{y} = z\dot{u} + u\dot{z}$, d'où l'on tire par les regles vulgaires de l'Algebre, la fluxion de $\frac{y}{z}$, égale à l'expreſſion ci-deſſus.

Le calcul des fluxions du ſecond ordre, eſt abſolument ſemblable. La fluxion de $\dot{x}$ eſt $\ddot{x}$, celle de $\dot{y}$ eſt $\ddot{y}$, celle de $\dot{y}\,\dot{y}$ eſt $2\dot{y}\ddot{y}$, & *vice verſâ*, la fluente de $2\dot{y}\ddot{y}$ eſt $\dot{y}\,\dot{y}$. Dans les équations de courbes, données en $\dot{y}$ & $\dot{x}$, on ſuppoſe ordinairement l'une des deux, le plus fréquemment la fluxion de l'abſciſſe ou $\dot{x}$, conſtante & invariable, de ſorte que $\dot{x}$ n'a point de fluxion; ainſi la fluxion de $x\,\dot{x}$ eſt ſeulement $\dot{x}^2$. Toutes les regles enfin pour trouver les fluxions des quantités ordinaires, ſont les mêmes pour trouver les fluxions de fluxions.

viendra zero, cette raiſon ſera celle de 1 à $n x^{n-1}$, ou enfin celle de $\dot{x}$ à $n x^{n-1} \dot{x}$, qui eſt la même. Ainſi la fluxion ou l'accroiſſement évaneſcent de x^2 ſera $2 x \dot{x}$; celui de x^3, $3 x \dot{x}$, &c. comme on l'a trouvé dans la note précédente.

On voit encore par là d'une autre maniere que ci-deſſus, ce que ſont les fluxions de fluxions, ou les accroiſſemens d'accroiſſemens; car ſuivant les différens points de la courbe A C *c*, la raiſon des côtés F B, B C du triangle tangentiel F B C varie; par conſéquent cette raiſon étant la même que celle des derniers accroiſſemens de l'abſciſſe & l'ordonnée, celle-ci varie: on pourra donc exprimer cette raiſon par l'ordonnée d'une courbe, qui ſera elle-même ſuſceptible d'accroiſſement ou de diminution. Les fluxions de ces ordonnées ſeront les ſecondes fluxions, ou les ſecondes différences ſuivant *Leibnitz*. Il eſt ſuperflu d'en dire davantage ſur la nature des fluxions que nous croyons avoir ſuffiſamment éclaircie. Paſſons à donner une idée de leur appplication.

La premiere application de la théorie des fluxions, concerne la maniere de trouver les tangentes des courbes. Il eſt facile de voir par tout ce qu'on a dit ci-deſſus, que dans toute courbe à ordonnées paralleles, la fluxion $\dot{y}$ de l'ordonnée eſt à celle de l'abſciſſe $\dot{x}$, comme l'ordonnée y eſt à la ſoutangente, de ſorte que celle-ci eſt égale à $\frac{y \dot{x}}{\dot{y}}$. Si donc on cherche par l'équation de la courbe la valeur de $\dot{y}$, ce qui ſera toujours facile, il en réſultera une expreſſion qui, miſe à la place de $\dot{y}$, donnera un dénominateur & un numérateur tout affecté de $\dot{x}$. Ainſi en diviſant l'un & l'autre par $\dot{x}$, reſtera une expreſſion en termes ordinaires, & par conſéquent ſuſceptible de conſtruction. Ce ſera le rapport de la ſoutangente & de l'abſciſſe.

La méthode des fluxions s'applique avec une grande facilité à la recherche des plus grandes & des moindres ordonnées des courbes. Lorſqu'une ordonnée de courbe, de croiſſante qu'elle étoit devient décroiſſante, ou au contraire, le point décrivant, qui eſt tranſporté ſur l'ordonnée, revient en quelque ſorte ſur ſes pas; ſa vîteſſe ou la fluxion de l'ordonnée devient donc de poſitive négative, ou au contraire. Ainſi dans l'inſtant du paſſage, elle doit être zero; car une quantité ne ſçauroit de poſitive devenir négative, ou au contraire,

qu'elle ne paſſe par l'état de zero. Pour trouver les *maxima* & *minima*, il faut donc prendre la fluxion de la grandeur dont on cherche le *maximum* ou le *minimum*, & l'égaler à zero. Cette ſuppoſition permettra toujours de retrancher le ſigne de fluxion $\dot{x}$ ou $\dot{y}$, qui affectera tous les termes, de ſorte qu'il ne reſtera qu'une équation en termes finis, qui donnera la valeur de l'abſciſſe à laquelle répond la plus grande ordonnée. On aura par-là les points comme M, *m*, où la tangente eſt parallele à l'axe. Ceux au contraire où la tangente eſt perpendiculaire à l'axe, ſe trouveront en faiſant la fluxion de l'abſciſſe égale à zero, ou ce qui revient au même, en égalant à zero tous les termes qui ſont affectés de la fluxion de l'ordonnée, ou de $\dot{y}$. Toutes ces choſes ſont d'une extrême facilité dès qu'on a bien conçu les principes de ce calcul. Nous ferons ſeulement une obſervation importante ſur ce ſujet, après avoir parlé de points d'infléxion.

On a ſuffiſamment expliqué dans le Livre ſecond, la nature des points d'infléxion. Ce qui les caractériſe, c'eſt que la courbe y eſt à la fois touchée & coupée par une ligne droite; & que cette ligne fait avec l'axe le plus grand ou le moindre angle qu'elle puiſſe faire. On conclud delà, en employant le principe des fluxions, que dans un point de cette nature, la ſeconde fluxion de l'ordonnée, ou $\ddot{y}$ eſt égale à zero. En effet, puiſqu'alors le rapport de l'ordonnée à la ſoutangente eſt un *maximum* ou un *minimum*, & que ce rapport eſt le même que celui de $\dot{y}$ à $\dot{x}$, il s'enſuit que $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ eſt un *maximum* ou un *minimum*. Conſéquemment $\ddot{y}$ eſt égal à zero, en ſuppoſant $\dot{x}$ invariable. On le démontre encore de cette maniere. Lorſqu'une courbe de convexe vers un certain côté devient concave, elle perd de plus en plus ſa courbure, & dans le paſſage du convexe au concave, elle eſt une ligne droite, coincidente dans un eſpace infiniment petit avec la tangente. Elle participe donc dans cet endroit de la nature de la ligne droite. Or dans une ligne droite inclinée à un axe, les ſecondes fluxions ſont nulles. Ainſi cela doit arriver au point d'infléxion. Il faudra donc prendre la ſeconde fluxion de la valeur de l'ordonnée: en faiſant $\dot{x}$ conſtante, il en réſultera une expreſſion toute affectée de $\dot{x}^2$, qu'on égalera à zero. Les $\dot{x}^2$, comme multi-

plicateur commun, ſeront ſupprimés, & il ne reſtera qu'une expreſſion en termes finis.

L'obſervation que nous avons promiſe plus haut, eſt celle-ci : il ne ſuffit pas, pour avoir un *maximum* ou un *minimum*, que la premiere fluxion $\dot{y}$ de l'ordonnée ſoit zero ; il faut que la ſeconde ne le ſoit pas dans ce point. Car ſi cela arrivoit, ce point auroit à la vérité ſa tangente parallele à l'axe, mais ce ſeroit en même temps un point d'infléxion, & la courbe continueroit à s'éloigner ou à s'approcher de cet axe.

Nous pourrions développer ici de même, la maniere dont le calcul des fluxions s'applique à la théorie des développées : mais comme nous ne le ſçaurions faire ſans entrer dans des détails trop peu convenables à la nature de cet ouvrage, nous préférons de paſſer à donner une idée de l'uſage de ce calcul pour la meſure des aires des courbes, pour leur rectification, & la dimenſion des ſolides curvilignes.

En examinant la nature des fluxions, nous avons jetté les fondemens de ce que nous avons à dire ici. Car nous avons montré que la fluxion d'une aire eſt le produit de l'ordonnée par la fluxion de l'abſciſſe, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt $y\dot{x}$. Or l'équation de la courbe donne toujours la valeur de y en x. On aura donc une fluxion toute en $\dot{x}$ & x : ſi donc on remonte à ſa fluente, procédé dont nous avons donné quelques exemples dans la note de la page 323, on aura l'aire de la courbe. Dans la parabole, par exemple $y = (ax)^{\frac{1}{2}}$. Ainſi $y\dot{x}$ ſera $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\dot{x}$, dont la fluente, par ce qu'on a dit dans la p. 323, eſt égale $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, ou $\frac{2}{3}yx$. Mais dans le cercle y étant $= \sqrt{aa - xx}$, on aura $y\dot{x} = \dot{x}(aa - xx)^{\frac{1}{2}}$. Comme on ne ſçauroit en trouver la fluente en termes finis, on tire la racine de $aa - xx$, en la réduiſant en une ſuite, qui eſt $a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$, &c. Ainſi multipliant chacun de ces termes par $\dot{x}$, & prenant enſuite la fluente de chaque terme, on a pour la valeur de l'aire répondante à l'abſciſſe x, on a, dis-je, $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^5}{112a^5}$, &c. qui approche d'autant plus de la vérité qu'on prend un plus grand nombre de termes.

Le principe des rectifications eſt auſſi contenu dans ce que

nous avons dit plus haut. La fluxion de l'arc C*e* eſt la racine de la ſomme des quarrés des fluxions de l'abſciſſe x, & de l'ordonnée y. Ce ſera donc $\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}$; mais l'équation de la courbe donne la valeur de y, en x & $\dot{x}$, de ſorte que cette valeur étant miſe à la place de y, le ſigne $\dot{x}$ ſort du ſigne radical, & l'on a une expreſſion dont la fluente, ſi on peut la trouver en termes finis, eſt la grandeur de l'arc. Si l'on cherche une ſurface de circonvolution, la fluxion de cette ſurface eſt la petite zone formée par la fluxion de l'arc tournant autour de l'axe; cette fluxion ſera donc $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ multipliée par la circonférence dont le rayon eſt y. Ainſi r & c déſignant le rayon & la circonférence, la fluxion de cette ſurface ſera $\frac{c}{r} y\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$, où mettant à la place de y & $\dot{y}$ leurs valeurs en x & $\dot{x}$, on aura une expreſſion toute en x & $\dot{x}$, dont la fluente ſera la ſurface cherchée. Il n'eſt pas moins aiſé de voir que ſi l'on multiplie le cercle que décrit une ordonnée, par la fluxion de l'abſciſſe, ce ſera la fluxion du ſolide produit par la circonvolution de la courbe. Ainſi cette fluxion ſera $\frac{c y^2 \dot{x}}{2r}$, où mettant au lieu de y^2, ſa valeur en x, & prenant la fluente, on aura la grandeur du ſolide. Mais il faut nous borner ici à cette légere eſquiſſe de l'uſage des fluxions dans la Géométrie. Nous renvoyons les lecteurs qui déſirent s'en inſtruire plus à fonds, aux Livres qui traitent de ce calcul. Nous allons reprendre le fil de notre hiſtoire.

VI.

De Jacques Grégori.

Le premier des Géometres qui ajouta quelque choſe aux inventions de M. *Newton*, fut Jacques *Grégori*, dont nous avons parlé ailleurs avec éloge (*a*). C'étoit ſans contredit un des meilleurs génies qu'eût alors l'Angleterre, un homme propre à ſeconder *Newton*, ſi la mort ne l'eût enlevé preſqu'à la fleur de ſon âge. Il l'avoit, en effet, déja prévenu dans l'invention du Téleſcope à réflection : nous l'allons voir marcher de près ſur ſes traces, & même le devancer quelquefois dans la nouvelle carriere qu'il venoit d'ouvrir.

(*a*) Livre I, vers la fin.

Vers

Vers le temps où *Newton* ſe diſpoſoit à ſe rendre aux inſtances de *Barrow*, Jacques *Grégori* publioit ſes *Exercitationes*, dans leſquelles il traitoit divers ſujets de Géométrie ſublime. Il y démontroit d'une maniere neuve la quadrature de l'hyperbole donnée par *Mercator*; il y réduiſoit à cette quadrature la figure des ſécantes, dont dépend le vrai accroiſſement des parties du méridien dans les Cartes réduites. Il y donnoit enfin une ſuite pour exprimer la circonférence circulaire, que nous ne croyons pas devoir rapporter, comme étant d'un uſage trop difficile.

Les découvertes de *Newton* ayant été communiquées à *Collins*, celui-ci en informa divers Géometres, parmi leſquels fut *Grégori*. Il lui envoya une des ſuites que *Newton* avoit trouvées pour le cercle. Elle fut, à la vérité, d'abord ſuſpecte à *Grégori*, qui prévenu pour la ſienne, penſoit qu'elles devoient ſe reſſembler & ſe déduire l'une de l'autre (*a*) Mais il ne tarda pas à rendre à *Newton* la juſtice qu'il méritoit; & réfléchiſſant profondément ſur cette matiere, il parvint à découvrir l'origine de l'expreſſion qui lui avoit été communiquée. Outre la remarque qu'on en fait dans le *Commercium Epiſtolicum* (*b*), on en a des preuves qui ne permettent pas d'en douter. Car répondant à *Collins*, il rétracte les ſoupçons qu'il lui avoit témoignés ſur la ſuite de *Newton*, & il lui en envoye la continuation, avec celle qui exprime l'arc par le ſinus, qu'il avoit trouvée de lui-même. Peu de temps après, *Collins* lui en ayant envoyé quelques autres, *Grégori* en réponſe lui en renvoya pluſieurs auxquelles *Newton* n'avoit point ſongé (*c*). Parmi elles eſt d'abord celle qui donne l'arc par la tangente. Le rayon étant r, & la tangente t, l'arc, dit *Grégori*, eſt $t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4}$, &c. à l'infini; de ſorte qu'en ſuppoſant le rayon $= 1$, & la tangente égale au rayon, l'arc qui eſt alors de 45°, ou $\frac{1}{8}$ de circonférence, eſt $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, &c. M. *Grégori* donne dans la même lettre la tangente & la ſécante par l'arc; ce qui prouve qu'il s'étoit mis en poſſeſſion de la méthode du retour des ſuites. Il fait plus: il donne auſſi

(*a*) *Comm. Epiſt.* p. 22, 23. *ed.* in-4°.
(*b*) Ibid. 29, 48, 71.
(*c*) Ibid. p. 25.

deux ſuites pour trouver immédiatement le logarithme de la tangente & de la ſécante, l'arc étant donné, ou au contraire, & une troiſieme pour la rectification de l'ellipſe, où il remarque fort bien qu'il n'y a que quelques ſignes à changer pour avoir celle qui convient à l'hyperbole. Il avoit écrit un Traité ſur cette méthode : mais comme *Newton* ſe propoſoit vers ce temps de publier lui-même ſes découvertes, par égard pour lui, il ne voulut pas le prévenir. Dans la ſuite *Newton* ſe déſiſta de ſon projet, de ſorte que l'ouvrage de *Grégori* eſt reſté manuſcrit.

VII.

Il faut convenir, & c'eſt un fait dont le *Comm. Epiſt.* fournit les preuves, que toutes ces brillantes nouveautés d'Analyſe & de Géométrie, prirent naiſſance en Angleterre : ce ne fut que quelques années après que le continent commença à y prendre part. Nous touchons ici à la diſcuſſion de la fameuſe querelle ſur la part qu'a *Leibnitz* à l'invention de ſon calcul différentiel. Nous allons en faire un rapport circonſtancié, & diſcuter avec ſoin les faits allégués de part & d'autre.

M. *Leibnitz* fut au commencement de 1673 à Londres, à la ſuite d'un Ambaſſadeur. Il paroît, & lui-même n'en diſconvient pas, qu'il ne s'étoit point encore beaucoup attaché à la Géométrie, & qu'il ne s'occupoit que d'Arithmétique : on ne peut même diſconvenir que de deux inventions qu'il donne dans une lettre écrite de Londres à *Oldembourg*, l'une & l'autre ne fuſſent connues avant lui. Mais on doit remarquer en même temps que M. *Leibnitz* avoit été bien plus loin que ceux qui l'avoient prévenu ; car il dit dans cette lettre qu'il peut aſſigner la ſomme de toutes les ſuites infinies de fractions, dont le numérateur étant l'unité, les dénominateurs ſont les nombres triangulaires, ou pyramidaux, ou triangulo-triangulaires ; comme ſeroient celles-ci $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}$, &c. ou $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$, &c. En effet, la premiere continuée à l'infini eſt égale à $1\frac{1}{2}$, la ſeconde à 2, &c. Cette invention ingénieuſe diſculpe M. *Leibnitz* du ſoupçon de plagiat que jette ſur lui l'éditeur du *Comm. Epiſtolicum*.

M. *Leibnitz* retourna à Paris, après quelques mois de ſéjour à Londres. Ce fut ſeulement alors qu'il commença à ſe

livrer à la haute Géométrie. La converſation de M. *Huyghens* qu'il fréquentoit, lui en fit naître le goût ; & comme il avoit apporté d'Angleterre la *Logarithmotechnie* de *Mercator*, il ſe mit à la lire, de même que l'ouvrage de *Grégoire de Saint-Vincent*, que M. *Huyghens* lui avoit loué. Tout à coup, dit-il, ſes yeux ſe déſillerent : de nouvelles idées ſe préſenterent à lui, & il trouva vers la fin de 1673, ſa quadrature du cercle par une ſuite rationnelle qu'il communiqua à M. *Huyghens*, qui l'approuva fort. Sa méthode conſiſtoit, comme on le voit par une de ſes lettres écrite en 1676, en une transformation par laquelle il changeoit le cercle en une autre figure égale, dont l'ordonnée étoit une fraction rationnelle, de ſorte qu'il pratiquoit ſur elle ce que *Mercator* faiſoit ſur l'ordonnée de l'hyperbole. Cette ſucceſſion d'idées eſt tout-à-fait probable, & le Livre de *Mercator* excitoit naturellement cette tentative.

La méthode de M. *Leibnitz* nous a été tranſmiſe par quelques Auteurs, ſçavoir par l'Abbé de *Catelan*, qui la lui attribue expreſſément (*a*), & par *Ozanam* (*b*), qui ne dit point de qui il la tient, mais qui n'en étoit ſûrement pas l'inventeur. Comme elle eſt ingénieuſe, & qu'elle ſert à éclaircir quelques imputations des adverſaires de *Leibnitz*, la voici. Une courbe quelconque étant propoſée, un cercle, par exemple, AHB ; ſi l'on prend ſur l'ordonnée PH une ligne égale à la tangente AI, retranchée par la ligne qui touche ce cercle en H, & qu'on faſſe cette conſtruction dans tous les autres points, on aura une nouvelle courbe dont l'aire APG, retranchée par l'ordonnée PG, ſera double du ſegment ALHA. Il trouve par ce moyen une équation entre les co-ordonnées AI, IG, telle que l'ordonnée IG eſt repréſentée par une fraction rationnelle. Il la réduit en ſuite par la diviſion ; enſuite traitant cette ſuite, ſuivant les regles de l'*Arithmétique des infinis*, il trouve la valeur de l'aire AGI, qui étant retranchée du rectangle GA, & le reſte diviſé par 2, donne le ſegment ALHA. On lui ajoute le triangle HPA, & voilà le ſegment APH repréſenté par une ſuite. Que ſi l'on ſuppoſe AI devenir égale à AF, ou au rayon, & ce rayon $=1$, on trouve pour le quart de cercle la ſuite $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, &c. Si au contraire au ſeg- *Fig.* 92.

(*a*) *Logiſt. univ. & Méthode pour les tangentes*, 1692. in-4°. Paris. p. 68 & 112.
(*b*) *Geom. Prat.*

ment A L H donné en x, on ajoute le triangle A C H, & qu'on diviſe le tout par 2, on aura le ſecteur A C L, répondant à la tangente A I; & ſi on diviſe ce ſecteur par $\frac{1}{2}$, on aura la valeur de l'arc A L égale à cette ſuite $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$, &c. Tout cela s'applique à l'hyperbole avec la même facilité, & l'on trouve le ſecteur hyperbolique dont la tangente eſt x, égal à la moitié de cette ſuite $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$, &c.

Leibnitz communiqua, dit-il, ſa découverte aux Géometres de Paris, au commencement de 1674, & quelques mois après il l'annonça à *Oldembourg* par deux lettres; dans la ſeconde, il parle de ſa ſuite avec beaucoup de complaiſance, la regardant comme la premiere qui ait été donnée pour le cercle. Il ajoutoit que par la même méthode il pouvoit aſſigner l'arc, le ſinus étant donné: il obſerve enfin que ſa quadrature fournit une analogie tout-à-fait remarquable entre le cercle & l'hyperbole.

A cette lettre *Oldembourg* répondit d'une maniere qui fait beaucoup en faveur de *Leibnitz*. Il l'informe ſeulement des progrès de *Newton* & *Grégori* dans cette partie de la Géométrie. *Leibnitz* en demande la communication. *Collins* & *Oldembourg* conjointement lui envoient les diverſes ſuites trouvées par les deux Géometres Anglois, & entr'autres celle qui exprime l'arc par la tangente. Mais ſi *Leibnitz* eût tenu cette ſuite d'*Oldembourg* ou de *Collins*, l'un ou l'autre auroit-il manqué de le lui rappeller? Soupçonnera-t'on *Leibnitz* d'une hardieſſe aſſez grande pour ſe vanter d'une découverte auprès de ceux qui la lui auroient communiquée?

Cette correſpondance entre *Leibnitz* & *Oldembourg*, dura juſques vers le milieu de 1676, que ſur les inſtances de l'un & de l'autre, *Newton* décrivit dans deux longues lettres ſa méthode pour les quadratures des courbes. Dans la premiere, il expoſe ſa formule pour l'extraction des racines, & il l'applique à divers exemples. Il donne diverſes ſuites pour le cercle, pour l'hyperbole, pour la rectification de l'ellipſe, la quadrature de la quadratrice, &c. Enfin il termine ſa lettre par certaines méthodes pour déduire des ſuites infinies, des approximations commodes.

Leibnitz répond à cette premiere lettre de *Newton*, en lui faiſant part de la méthode par laquelle il transforme une cour-

be à ordonnées irrationnelles, en une où elles ſont rationnelles; ce qui lui permet d'y appliquer la diviſion à la maniere de *Mercator*, pour la transformer en ſuite infinie; au reſte cette méthode, quoiqu'ingénieuſe, eſt fort au deſſous de celle de *Newton*, & même dans certains cas elle peut préſenter des difficultés inſurmontables, de ſorte qu'on ne ſçauroit la regarder comme générale, ni comme ſuffiſante. Dans cette lettre, M. *Leibnitz* remarque particuliérement l'analogie du ſecteur circulaire avec le ſecteur hyperbolique, en ce que t étant la tangente au ſommet, & 1 le demi-diametre, celui-là eſt $\frac{1}{2}\partial e\, t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$, &c. au lieu que celui-ci eſt $\frac{1}{2}\partial e\, t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7}$, &c. à l'infini. C'eſt cette derniere ſuite qu'il avoit probablement en vue, lorſqu'il annonçoit à *Oldembourg* l'analogie remarquable qu'il avoit découverte entre le cercle & l'hyperbole. Le reſte de la lettre eſt employé à expoſer quelques nouvelles vues ſur la réſolution des équations.

Newton répondit à cette lettre par une autre, qui contient une multitude de choſes remarquables; telles ſont la maniere dont il parvint d'abord à la méthode des ſuites, l'application qu'il en faiſoit dès l'an 1665, à la quadrature de l'hyperbole, & à la conſtruction des logarithmes; divers théorêmes généraux pour les quadratures, qui les donnent en termes finis quand elles ſont poſſibles, ou en ſuites infinies, par la ſeule comparaiſon des termes de l'équation; la rectification de la cyſſoïde réduite à la quadrature de l'hyperbole. Il y annonce ſa méthode pour trouver par approximation l'aire d'une courbe lorſque les ſuites qui l'expriment ſont trop compliquées, ou trop peu convergentes. C'eſt cette invention qu'il a expliquée dans ſon Traité intitulé *Méthode différentielle*. On y voit auſſi des formules d'expreſſions d'ordonnées de courbe, dont les aires ſe réduiſent à la quadrature des ſections coniques; diverſes ſuites pour le cercle, & leur uſage pour trouver des approximations en grand nombre de chiffres; l'uſage de ſon parallélogramme pour la réſolution des équations; deux méthodes pour le retour des ſuites, avec quelques théorêmes généraux pour cet effet. Il finit par dire qu'il eſt en poſſeſſion du problême inverſe des tangentes, & d'autres plus difficiles; & qu'il y em-

ploie deux méthodes qu'il ne veut pas dévoiler : c'eſt pourquoi il les cache ſous des lettres tranſpoſées, dont l'explication a depuis été donnée dans le *Commercium Epiſtolicum.*

Il faut bien remarquer, d'après les extraits que nous venons de donner de ces lettres, qu'il y eſt preſque uniquement queſtion de la méthode des ſuites & de la quadrature des courbes, de ſorte que *Leibnitz* avoit quelque raiſon de ſe plaindre de ce que tandis qu'il s'agiſſoit du calcul différentiel, ſes adverſaires prenoient ſans ceſſe le change, & ſe jettoient ſur les ſéries, en quoi il ne diſconvenoit point que M. *Newton* ne l'eût précédé. En effet, la queſtion eſt fort différente. Un Géometre eût pu être en poſſeſſion de la méthode des ſuites, & s'en ſervir à quarrer toutes les courbes, ſans être en poſſeſſion du calcul des fluxions & fluentes. Car l'expreſſion de l'ordonnée d'une courbe étant réduite en ſérie, ſi le cas l'exige, les méthodes de *Wallis*, de *Mercator*, que dis-je, de *Cavalleri* & de *Fermat*, ſuffiſent pour trouver l'aire. Quant au principe des fluxions, trois endroits ſeuls du *Commercium Epiſtolicum*, y ont trait, d'une maniere aſſez claire pour prouver que M. *Newton* l'avoit trouvé avant *Leibnitz*, mais trop obſcurément pour ôter à celui-ci le mérite de la découverte : l'un eſt une lettre de M. *Newton* à *Oldembourg*, qui lui avoit marqué que *Sluſe* & *Grégori* venoient de trouver une méthode des tangentes d'une ſimplicité extrême : *Newton* lui répond qu'il ſoupçonne bien ce que c'eſt, & il en donne un exemple qui eſt effectivement la même choſe que ce que ces deux Géometres avoient trouvé. Il ajoute que cela n'eſt qu'un cas particulier, ou plutôt un corollaire d'une méthode bien plus générale, qui s'étend à trouver, ſans calcul difficile, les tangentes de toutes ſortes de courbes, géométriques ou méchaniques, & ſans être obligé de délivrer l'équation des irrationalités. Il répete la même choſe, ſans s'expliquer davantage, dans ſa ſeconde lettre, dont nous avons parlé plus haut, & il en cache le principe ſous des lettres tranſpoſées. Le ſeul écrit où M. *Newton* ait laiſſé tranſpirer quelque choſe de ſa méthode, eſt ſon *Analyſis per æquationes numero term. infinitas.* Il y dévoile d'une maniere fort conciſe & aſſez obſcure, ſon principe des *Fluxions ;* il y nomme *momentum*, l'incrément inſtantané de l'aire qu'il fait proportionnel à l'ordonnée, tandis que celui de

l'abſciſſe eſt repréſenté par une ligne conſtante égale à l'unité. Il applique enſuite ce principe à trouver l'expreſſion du *moment* d'un arc de cercle, qu'il exprime par $\frac{1}{\sqrt{2x - xx}}$, d'où il tire par une ſuite la valeur de l'arc lui-même. Plus loin il nomme l'abſciſſe x, ſon *momentum* o, & celui de l'aire oy; & par un procédé reſſemblant à celui qu'employoit *Fermat* dans ſa regle des tangentes, il démontre que ſi l'aire z eſt exprimée par cette équation $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, il faut que l'ordonnée y ſoit égale à $x^{\frac{1}{2}}$. D'où il conclud *vice-verſa*, que ſi $y = x^{\frac{1}{2}}$, l'aire ſera $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. On ne peut diſconvenir, ſans doute, que le principe & la méthode des fluxions ne ſoient expoſés dans cet endroit de l'écrit dont nous parlons; mais on n'a aucune certitude que *Leibnitz* l'ait vu. Il ne lui a jamais été communiqué par lettres: ſes adverſaires ne l'ont pas même avancé, & ils ſe ſont contentés de donner à ſoupçonner que *Leibnitz*, dans l'entrevue qu'il eut de ſon aveu avec *Collins*, lors de ſon ſecond voyage à Londres, avoit eu communication de cet écrit. C'eſt à cela ſeul que ſe réduit la conteſtation. A la vérité, ce ſoupçon pourra paroître aſſez vraiſemblable, d'autant plus que *Leibnitz* convient encore qu'il vit dans cette occaſion une partie du commerce épiſtolaire de *Collins*. Je crois cependant qu'il ſeroit téméraire de prononcer là-deſſus; on ne condamne pas ſur de ſimples ſoupçons, comme coupable d'un crime odieux dans la République des Lettres, un homme qui a donné d'auſſi fortes preuves de génie que M. *Leibnitz*.

Nous croyons devoir faire ici quelques remarques ſur la Préface du *Traité des Fluxions*, traduit par M. de *Buffon*, parce qu'il nous a paru que ce ſçavant Académicien a un peu trop déféré aux imputations captieuſes de *Keil*. Si tout ce qu'on y lit étoit exact, *Leibnitz* ſeroit auſſi ridicule que le geai de la Fable. En effet, on lit dans la Préface dont nous parlons, qu'il eſt prouvé par le *Commercium Epiſtolicum*, & par les lettres de *Leibnitz* qu'il a eu connoiſſance de la méthode des ſuites avant que de donner la ſienne pour le cercle, & que celle-ci même lui avoit été envoyée par la voie d'*Oldembourg*; que *Leibnitz* n'en avoit pas la démonſtration, puiſqu'il la demanda dans la ſuite; qu'en 1677 il donna une méthode des

tangentes, qui n'eſt que la même que celle de *Barrow*, à la notation près, & dont le calcul eſt le même que celui que *Newton* avoit communiqué à *Collins* dès l'année 1669. Quatre ou cinq pages plus loin, on lit encore que le calcul des ſecondes, troiſiemes différences, &c. a été donné dans la premiere propoſition du Traité *des Quadratures*, communiquée à *Leibnitz* dès l'année 1675. C'eſt-là la ſubſtance des apoſtilles de *Keil* au *Comm. Epiſtolicum*; mais elles ſont toutes fauſſes ou du moins captieuſes, comme le vont montrer les obſervations ſuivantes.

1°. Quelque ſoin que j'aye mis à lire le *Comm. Epiſt.* je n'y ai vu nulle part que la théorie des ſuites ait été dévoilée à *Leibnitz*, ni qu'il ait reçu aucune ſuite pour le cercle, avant qu'il eût annoncé la ſienne à *Oldembourg*, avec l'analogie particuliere qu'elle lui faiſoit découvrir entre le cercle & l'hyperbole. Quelle apparence que *Leibnitz* ſe fût vanté d'une découverte qu'il n'avoit point. Nous ne croyons pas qu'aucun de nos lecteurs ſoupçonne cet homme illuſtre d'un procédé auſſi inſenſé. 2°. La ſuite dont il demande la démonſtration à *Oldembourg*, eſt celle-ci, $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5$, &c. qui donne l'arc par le ſinus x, mais cette ſuite n'eſt point celle que donne la méthode de *Leibnitz* expoſée ci-deſſus. Ainſi *Keil* eſt tout-à-fait mal fondé dans l'obſervation qu'il fait contre lui, ſçavoir qu'il avoit avancé qu'il pouvoit trouver l'arc par le ſinus, & que cependant après la communication d'une ſuite ſemblable, il en avoit demandé la démonſtration. En troiſieme lieu, la méthode des tangentes donnée en 1677, par *Leibnitz*, eſt bien vraiment le calcul différentiel, & nullement la méthode de *Barrow*; *Keil* avoit apparemment oublié que *Barrow* n'étendit jamais ſa méthode aux courbes à équations irationnelles; au contraire, *Leibnitz*, pour mieux montrer les avantages de la ſienne, l'applique à une expreſſion fort compliquée d'irrationalités, de ſorte que nous ne ſçavons à quoi *Keil* ſongeoit quand il a avancé un pareil fait. D'ailleurs il y a une contradiction ridicule à dire que le calcul de *Leibnitz*, décrit dans la lettre dont nous parlons, n'eſt que le calcul de *Barrow*, & qu'il eſt le même que celui que *Newton* avoit communiqué dès l'année 1669, & qu'on prétend être vraiment ſon calcul des fluxions. 4°. On ne verra aucune part que la propoſition du Traité *des Quadratures*, qui contient, dit-on,

le

principe des fluxions des différens ordres, ait été communiquée à *Leibnitz*. C'eſt une imputation de *Keil*, d'autant moins fondée, qu'il en réſulte préciſément tout le contraire de ce qu'il prétend; car cette prétendue méthode pour les fluxions de tous les ordres, eſt vicieuſe, & les donne toutes fauſſes, à l'exception de la premiere (*a*). C'eſt un fait que *Keil* ne ſçauroit détruire, & qui eſt trop bien prouvé: il ne faut que jetter les yeux ſur les éditions du Traité *de Quadraturâ curvarum*, des années 1704 & 1711, pour s'en convaincre. Je paſſe légérement ſur quelques autres obſervations de *Keil*; obſervations qui ſont évidemment l'ouvrage de la paſſion. Telle eſt celle-ci: Lors, dit-il, que *Newton* diſoit que la courbe dont l'ordonnée étoit $z^{\frac{1}{2}}$, avoit ſon aire égale à $\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$, c'eſt la même choſe que s'il eût dit que la différentielle de $\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$, étant $z^{\frac{1}{2}} dz$, ſon intégrale eſt $\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$; d'où M. *Leibnitz*, ajoute-t'il, a pu conclure que la différentielle de $\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$, eſt $z^{\frac{1}{2}} dz$. La conſéquence eſt tirée d'un peu loin. M. *Keil* ignoroit-il donc que ſans autre calcul que celui de *Wallis*, de *Fermat* même, & de *Cavalleri*, ce théorême étoit ſuſceptible de démonſtration? D'ailleurs, il n'y a point de découverte dont on n'exténuât le mérite, qu'on n'anéantît même, par un expoſé artificieux des gradations qui ont pu y conduire. Après ces obſervations, je reprends le fil de mon récit.

Leibnitz, après avoir ſéjourné quelques jours à Londres, partit pour Hanovre. Arrivé à Amſterdam, il écrivit à *Oldembourg*. On voit par ſa lettre qu'il n'étoit pas encore en poſſeſſion de ſa méthode pour les tangentes, tirée du calcul différentiel; car il propoſoit un certain travail à faire ſur celle de *Sluſe*. Enfin par une lettre du 21 Juin 1677, il notifia à *Collins* ſa découverte. « Je conviens, dit-il, avec M. *Newton*, » que la regle de *Sluſe* n'eſt pas parfaite, & il y a long-temps » que j'ai traité le problême des tangentes d'une maniere plus

(*a*) Newton, dit dans ſon Traité *de Quad. curvarum*, que pour avoir les fluxions de divers ordres de la grandeur x^m, il n'y a qu'à élever $x + \dot{x}$ à la puiſſance m. Ce qui donne $x^m + m.\, x^{m-1}\, \dot{x} + \frac{m.m-1}{1.\ 2}.\, x^{m-2}\, \dot{x}^2$, &c. & que les ſecond, troiſieme, quatrieme termes ſeront reſpectivement les fluxions premiere, ſeconde, troiſieme, &c. de x^m. Cela n'eſt vrai que du ſecond terme, parce que le dénominateur eſt l'unité. Les autres n'expriment les fluxions des ordres plus élevés, qu'en ſupprimant les dénominateurs.

» générale. » Il expoſe, immédiatement après, les regles de ſon nouveau calcul, & il l'applique à trouver les tangentes de courbes à équations irrationnelles, & à diverſes autres déterminations que je paſſe pour abréger.

La mort d'*Oldembourg*, qui arriva peu de temps après, mit fin à ce commerce. Les Actes de Leipſick parurent en 1682, & *Leibnitz* y donna ſa *Quadrature Arithmétique* du cercle & de l'hyperbole. Elle fut auſſi inſérée dans les *Tranſ. Phil.* de cette année, ſans que perſonne reclamât les droits de l'Angleterre, pas même David *Grégori*, neveu de Jacques, qui avoit été en poſſeſſion de tous les papiers de ſon oncle, & qui dans un écrit publié en 1684 (*a*), attribue cette ſuite à *Leibnitz*. Ceci me paroît jetter de grands doutes ſur cette publicité des découvertes analytiques de *Newton* & de *Grégori*, dont les adverſaires de *Leibnitz* tirent ſi grand parti contre lui. Il eſt ſurprenant que perſonne même dans la Société Royale de Londres, ne fut informé du droit que *Grégori* avoit ſur l'invention dont nous nous parlons. Enfin en 1684, *Leibnitz* publia dans les Actes de Leipſick, un eſſai de ſon calcul différentiel, l'appliquant à quelques problêmes de nature à échapper aux autres méthodes. Perſonne ne s'en formaliſa encore en Angleterre. *Newton* lui-même, le plus intéreſſé à cela, & qui ſçavoit le mieux juſqu'où ſes lettres avoient pu mettre *Leibnitz* ſur la voie, lui rendit dans ſes principes (*b*) un témoignage brillant. *Il y a dix ans*, dit-il, *qu'étant en commerce de lettres avec M. Leibnitz, & lui ayant donné avis que j'étois en poſſeſſion d'une méthode pour déterminer les tangentes & pour les queſtions de* maximis & minimis, *méthode que n'embarraſſoient point les irrationnalités, & l'ayant cachée ſous des lettres tranſpoſées, il me répondit qu'il avoit rencontré une méthode ſemblable, & il me communiqua cette méthode, qui ne différoit de la mienne que dans les termes & les ſignes, comme auſſi dans l'idée de la génération des grandeurs.* Cela ſe lit encore dans les éditions des années 1713 & 1714, mais on l'a ſupprimé dans celle de 1726, peut-être ſans le conſentement de *Newton*, qui mourut peu de mois après. Les défenſeurs de *Leibnitz* pourront toujours en appeller à ce témoignage de la conſcience de *Newton*, qui n'ignoroit pas le

(*a*) *De dim. figur.* Edimb.
(*b*) Lib. II, lemm. II.

ſecond voyage de *Leibnitz* à Londres, & ſon entrevue avec *Collins*, le dépoſitaire de ſes papiers; car *Collins* l'en avoit informé, comme on le voit par une lettre du *Commercium Epiſtolicum.*

Il y a apparence que M. *Leibnitz* auroit reſté tranquille poſſeſſeur d'une partie de l'honneur de la découverte de ſon nouveau calcul, s'il eût été plus équitable envers *Newton.* Nous ne pouvons ici diſſimuler qu'il eut des torts conſidérables, & ce fut ce qui lui attira ſon eſpece de diſgrace. Déja quelques lettres écrites en Angleterre, & où il s'attribuoit trop excluſivement cette invention, lui avoient attiré des remarques déſagréables ſur le droit qu'y avoit *Newton* antérieurement à lui. M. *Fatio* avoit même dit hautement que M. *Leibnitz* ne s'imaginât pas qu'il tint de lui ce qu'il ſçavoit de ce calcul; qu'il étoit obligé de reconnoître *Newton* pour le premier inventeur du calcul des fluxions, & qu'il laiſſoit à juger quelle part y avoit M. *Leibnitz*, à ceux qui pouvoient lire leurs lettres mutuelles, & divers papiers conſervés dans le dépôt de la Société Royale. *Leibnitz* inſulté ſans raiſon, répondit vivement, & ſe plaignit à la Société Royale; mais l'affaire n'eut pas alors d'autre ſuite. Ce fut ſeulement quelques années après que la querelle éclata. Le Traité de *Newton* ſur la *Quadrature des Courbes*, & ſon *Enumération des lignes du troiſieme ordre* ayant vu le jour, les Journaliſtes de Leipſick n'en firent pas un extrait trop avantageux. On y diſoit entr'autres, après une légere expoſition de la nature des fluxions, que *Newton*, au lieu des différences Leibnitiennes, ſe ſervoit & s'étoit toujours ſervi des *fluxions*, comme le P. *Fabri* avoit ſubſtitué dans ſa *Synopſis Geometriæ*, le mouvement aux indiviſibles de *Cavalleri.* C'étoit, ce ſemble, dire que *Newton* n'avoit fait que ſubſtituer les fluxions aux différences, quoique ces mots, *& s'eſt toujours ſervi*, ſemblent inſérés exprès pour prévenir ce ſens. Quel que fût l'objet des Journaliſtes, qui auroient pu s'exprimer plus clairement, & rendre ſans ambiguité à *Newton* la juſtice qu'il méritoit, cet article bleſſa ſes compatriotes. *Keil* mit en 1708, dans les *Tranſactions Philoſophiques*, un écrit où il diſoit formellement que *Newton* étoit le premier inventeur du calcul des fluxions, & que M. *Leibnitz*, en le publiant dans les Actes de Leipſick, n'avoit fait qu'en changer le nom & la

notation. *Leibnitz* prit ces paroles pour une accuſation de plagiat, à quoi elles reſſemblent effectivement beaucoup, & par une lettre écrite à M. *Hans Sloane*, Secretaire de la Société Royale, il demanda que *Keil* ſe rétractât. *Keil*, au lieu de le faire, répondit à M. *Hans Sloane* par une longue lettre, où il accumule toutes les raiſons qu'il peut pour montrer que non ſeulement *Newton* a précédé *Leibnitz*, mais qu'il lui a donné tant d'indices de ſon calcul, qu'il ne pouvoit pas échapper à un homme même d'une intelligence médiocre. La lettre fut envoyée à *Leibnitz*, qui demanda à la Société Royale de faire ceſſer ces criailleries de la part d'un homme trop nouveau pour ſçavoir ce qui s'étoit paſſé entre *Newton* & lui. La Société Royale jugea qu'il falloit conſulter les pieces originales, & nomma des Commiſſaires pour les choiſir & les examiner. Ils raſſemblerent celles qu'on lit dans le *Comm. Epiſt.* & ils firent leur rapport de cette maniere : Qu'il paroiſſoit par ces pieces que M. *Collins* communiquoit fort librement aux habiles gens les écrits dont il étoit le dépoſitaire ; que M. *Leibnitz* ne paroiſſoit pas avoir eu connoiſſance de ſon calcul juſqu'au mois de Juin 1677, un an après la communication d'une lettre où la méthode des fluxions étoit ſuffiſamment décrite pour toute perſonne intelligente. Nous remarquons ici qu'après avoir lu & relu cette lettre, nous y trouvons ſeulement cette méthode décrite quant à ſes effets & ſes avantages, mais non quant à ſes principes ; ce qu'il eſt important d'obſerver, afin de ne point donner à ce mot un ſens qu'il ne doit point avoir, & ſur lequel quelqu'un qui n'auroit pas les pieces en main, condamneroit ſans héſiter M. *Leibnitz*. Mais revenons au rapport des Commiſſaires de la Société Royale. Ils ajoutent que par des lettres de *Newton*, depuis 1669 juſqu'en 1677, il paroît qu'il étoit en poſſeſſion de la méthode des fluxions ; que la méthode différentielle de *Leibnitz* étoit la même, aux termes & ſignes près, que celle des fluxions ; ils diſent enfin qu'ils regardent M. *Newton* comme le premier inventeur de cette méthothe, & qu'ils penſent que M. *Keil* en le diſant n'a fait aucune injure à M. *Leibnitz*. Du reſte, ils ne prononcent rien ſur les indices qu'a pu fournir à M. *Leibnitz* la correſpondance qu'il a eue avec *Newton*. Ils en abandonnent la déciſion aux lecteurs, & pour les mettre en état de juger, la Société Royale ordonna

l'impreſſion des pieces ſur leſquelles étoit fait ce rapport. Elles parurent en 1712, ſous le titre de *Commercium Epiſtolicum de Analyſi promotâ.* in-4°.

La querelle concernant l'invention du calcul des fluxions, ou différentiel, n'en reſta pas là. Le *Commercium Epiſtolicum* ayant paru, M. *Leibnitz* s'en plaignit beaucoup, & menaça d'y répondre d'une maniere qui confondroit ſes adverſaires. Il eût été difficile de renverſer les faits qui prouvent l'antériorité de *Newton* ſur lui, en ce qui concerne l'invention de ce calcul: ce point ne pourra jamais être conteſté. Quant au reſte, il ne nous paroît pas ſans réponſe. Cependant tout cela n'aboutit qu'à quelques écrits anonymes, ouvrages de ſes amis, où *Newton* étoit plutôt attaqué, que *Leibnitz* défendu. On y prétendoit entr'autres, que M. *Newton*, ne connoiſſoit pas le vrai principe du calcul des différences des degrés ſupérieurs; il eſt vrai que par précipitation il s'étoit trompé dans une des manieres de conſidérer ces différences; mais l'on voit par une lettre écrite à *Wallis* en 1692, qu'il connoiſſoit la véritable. *Keil* défendit *Newton* dans les mêmes Journaux: on lui répliqua, & l'on ſe dit des injures ou des choſes fort aigres, comme c'eſt la coutume en pareil cas. Ce qu'il y eut de plus remarquable dans la ſuite de cette conteſtation, fut la propoſition d'un problême que *Leibnitz* fit indirectement à *Newton.* Ce problême, qu'après s'être concerté avec *Bernoulli*, il crut propre à embarraſſer ſes adverſaires, eſt le ſuivant. *Soit, par exemple, une infinité de courbes de même eſpece, comme ſeroient des hyperboles de même ſommet & de même centre, depuis la plus applatie qui coincide avec ſon axe, juſqu'à la plus ouverte qui n'eſt autre choſe que la ligne perpendiculaire à l'axe commun; on demande la courbe qui les coupera toutes à angles droits.* Nous nous hâtons d'obſerver que ce n'eſt là qu'un cas des plus ſimples, & qui n'excede pas la portée d'un médiocre Analiſte. Le problême eſt bien autrement difficile, s'il s'agit d'une ſuite de courbes, d'hyperboles, par exemple, de même ſommet, & même parametre, mais de centres variables; ſi les centres & les parametres ſont variables; ſi les courbes, au lieu d'être géométriques ſont tranſcendantes, par exemple, une infinité de logarithmiques paſſant par le même point, &c. L'idée générale du problême comprend une multitude d'autres cas,

dont quelques-uns ſont d'une très-grande difficulté. L'hiſtoire de ce problême déja ébauché par *Viviani*, & enſuite propoſé dans les Actes de Leipſick de 1697, & réſolu plus généralement par M. Jacques *Bernoulli*, ſeroit trop longue. Nous nous bornons à dire qu'il nous paroît que *Newton* le traita un peu trop légérement dans l'eſquiſſe de ſolution qu'il en donna; non que nous penſions qu'il ne l'eût pas réſolu d'une maniere complette, mais il y eût rencontré des difficultés particulieres, ſurtout au cas propoſé par M. *Bernoulli*. Quoi qu'il en ſoit, ce problême a ſucceſſivement excité la ſagacité de M. Jean *Bernoulli*, de ſon fils Nicolas *Bernoulli*, & de ſon neveu du même nom, de M. *Tailor*, qui parmi les Anglois y ſatisfit, & de M. *Herman*. On trouve toutes leurs recherches ſur ce ſujet dans les Œuvres de M. *Bernoulli* (*a*).

Un ami commun de *Leibnitz* & de *Newton* (l'Abbé *Conti*, Noble Vénitien) entreprit en 1715 de les faire expliquer l'un à l'autre. Mais cela ne ſervit qu'à les aigrir davantage, *Leibnitz* perſiſtant à conteſter à *Newton* ſon droit de priorité ſur le calcul en queſtion, & *Newton* refuſant à *Leibnitz* ce qu'il lui avoit autrefois accordé (*b*). Enfin la mort de *Leibnitz*, arrivée vers la fin de 1716, mit fin à la querelle. Pour la réſumer en peu de mots, nous dirons qu'il eſt inconteſtable que M. *Newton* eſt le premier inventeur du calcul des fluxions: quant à M. *Leibnitz*, il nous paroît que les pieces qu'on peut prouver lui avoir été communiquées, ne contiennent rien qui puiſſe donner lieu de le regarder comme ayant emprunté ce calcul de *Newton*, mais ſeulement comme l'ayant deviné ſur la deſcription que *Newton* lui faiſoit de ſes avantages. Au ſurplus, ſi l'on obſerve combien peu il y avoit à faire pour paſſer des calculs de *Barrow* & de *Wallis* au calcul différentiel, il paroîtra, ce ſemble, ſuperflu de rechercher aillcurs l'origine de ce dernier. En effet, ce que *Barrow* déſignoit par *e* & *a*, n'étoit autre choſe que les incrémens inſtantanés & infiniment petits de l'abſciſſe & de l'ordonnée. Or en ſuppoſant cette équation, par exemple, $x^3 = by^2$, le calcul de *Barrow*, dépouillé des opérations ſuperflues, donnoit $3x^2e = 2byа$; de même l'équation $x^4 = b^3y$, donnoit $4x^3e = b^2a$.

(*a*) Voyez la Table générale, au mot *Trajectoria Orthogonalis.*
(*b*) Voyez *Newt. Opuſcula*. T. 1. p. 379. & ſuiv.

L'analogie conduiſoit donc à remarquer que ſi l'on avoit $x^n = y$, on devoit trouver $n x^{n-1} e = a$, quel que fût le nombre n, entier ou rompu, poſitif ou négatif. D'un autre côté, *Wallis* avoit déſigné les élémens des aires des courbes par le rectangle fait de l'ordonnée, & d'une portion infiniment petite de l'abſciſſe qu'il nommoit A, de ſorte que l'élément de l'aire circulaire étoit ſuivant lui, $A\sqrt{aa - xx}$. Il avoit auſſi réduit à une expreſſion ſemblable, les élémens des longueurs des arcs curvilignes, ſçavoir par une analogie fondée ſur la reſſemblance du petit triangle caractériſtique avec celui de la ſoutangente, la tangente & l'ordonnée. Ajoutons à cela, de marquer l'incrément d'une grandeur de quelque maniere qui montre à quelle grandeur il appartient, comme par la même lettre précédée d'un ſigne particulier, (*Leibnitz* a choiſi la lettre *d*, qui ſignifie *différence*) : voilà le paſſage du calcul de *Barrow* & de celui de *Wallis* au calcul différentiel. Mais quoiqu'il y eût auſſi peu à faire pour paſſer de l'un à l'autre, il y auroit une grande injuſtice à vouloir priver *Leibnitz* de l'honneur de cette invention, puiſque tant de Géometres avoient vu les Livres de *Barrow* & de *Wallis*, les avoient médités, & n'avoient pas été plus loin. Le génie conſiſte dans cette heureuſe fécondité de vues & d'expédiens, qui paroiſſent après coup ſimples & faciles, mais qui échappent néanmoins à ceux qui ne ſont pas avantagés de cet heureux don de la nature.

VIII.

De la théorie des cauſtiques & des épicycloïdes.

Il nous faut ſuſpendre ici pour quelques momens le récit des progrès du calcul de l'infini, afin de rendre compte de quelques théories particulieres de Géométrie ſublime qui prirent naiſſance vers ce temps. L'une eſt celle des cauſtiques, nouveau genre de courbes, inventé par M. de *Tchirnauſen*, & doué de propriétés très-remarquables : l'autre celle des épicycloïdes, qui ont auſſi des propriétés intéreſſantes, ſoit à les conſidérer du côté de la théorie, ſoit à les enviſager du côté des uſages méchaniques. Nous commençons par les cauſtiques de M. *Tchirnauſen* (*a*).

(*a*) M. de Tchirnauſen (Ehrenfreid Walter), Seigneur de Killingſwald & de Stolzen-

Tout le monde ſçait que les rayons de lumiere réfléchis par une ſurface concave, ſe réuniſſent vers un certain point qu'on appelle foyer, à cauſe de l'incendie qu'y produit ordinairement cette réunion. Mais ce foyer n'eſt que rarement un point indiviſible, & ce n'eſt ordinairement que le lieu vers lequel ſe rendent le plus de rayons réfléchis. Il ſe fait une ſorte de foyer continu, dont on peut facilement ſe procurer le ſpectacle. Qu'on ait un vaſe cylindrique dont la ſurface intérieure ſoit fort polie. Si l'on en approche un flambeau, on voit ſe projetter ſur le fond deux traits de lumiere curvilignes, qui ſont d'autant plus brillans que le flambeau eſt préſenté plus obliquement. C'eſt-là la cauſtique des rayons réfléchis de deſſus cette ſurface. Le foyer proprement dit dans les miroirs ardens, n'eſt que l'environ du point où ſe touchent les deux branches de la cauſtique; ce qui fait que la plûpart des rayons ſe croiſent dans le petit eſpace voiſin de ce point, & y produiſent une chaleur conſidérable.

Pour concevoir la génération de ces courbes, il faut ſe repréſenter une ſuite de rayons paralleles & à égales diſtances. *Fig. 93.* On verra facilement que chaque rayon réfléchi coupera le ſuivant, & que de tous ces points d'interſection, & des parties de rayons réfléchis qu'ils interceptent, naîtra un polygone, comme on a vu dans la théorie des développées, s'en former un des parties des perpendiculaires à la courbe, lorſqu'elles étoient en nombre fini. Mais qu'on ſuppoſe les rayons incidens en plus grand nombre & plus ſerrés, on verra diminuer

berg, naquit à Killingſwald, dans la Luſace ſupérieure, le 10 Avril 1651. Après avoir fait quelques campagnes dans les troupes de Hollande vers l'année 1672, il ſe mit à voyager, & il parcourut en obſervateur curieux la plûpart des contrées de l'Europe. Il vint à Paris pour la troiſieme fois en 1682, & il fut aggrégé à l'Académie Royale des Sciences. Il ſe retira enſuite dans ſes terres, où il paſſa la plus grande partie de ſa vie, occupé de l'étude & des Mathématiques. Il y a dans les Actes de Leipſick quantité de pieces de ſa façon: elles montrent que M. de Tchirnauſen étoit un homme de beaucoup de génie, mais en même temps d'un caractere précipité qui l'engagea plus d'une fois dans l'erreur. C'eſt auſſi avec peine qu'on le voit, promettant ſans ceſſe les découvertes les plus brillantes, ſans tenir ſa parole, & affectant peu d'eſtime pour le calcul différentiel. Il s'en falloit cependant beaucoup que ſa méthode, qui n'eſt proprement que celle de Barrow, eût la même perfection, bien loin de lui être préférable. M. Tchirnauſen mourut vers la fin de 1708. Le ſeul Livre qu'on ait de lui, eſt ſa *Medicina mentis & corporis*, ouvrage dans le genre de celui de *la Recherche de la Vérité* du Pere Malebranche, mais plus étendu, comme l'annonce ſon titre. Il parut pour la premiere fois en 1687, & il y en eut une ſeconde édition augmentée, en 1695. *Voyez* l'Hiſt. de l'Acad. de l'année 1709.

ces

ces petits côtés, & enfin le polygone ſe changer en une courbe que touchera chacun des rayons réfléchis. Chaque point de la cauſtique peut auſſi être conſidéré comme le foyer de deux rayons infiniment proches, de même que nous avons vu chaque point de la développée être le concours de deux perpendiculaires à la courbe, infiniment voiſines.

Le D. *Barrow* avoit déja conſidéré dans ſes *Leçons Optiques* ces ſortes de concours de rayons; & il eſt ſurprenant que porté comme il l'étoit à enviſager les choſes du côté purement géométrique, il n'ait pas eu l'idée d'examiner quelles courbes forment ces points de concours ſuivant les divers cas. Cette idée vint à M. *Tchirnauſen* le premier, qui en donna (en 1682.) à l'Académie des Sciences, une eſquiſſe ſur la cauſtique du cercle formée par des rayons incidens paralleles. Cette courbe, dont on voit la repréſentation dans la figure 94, *Fig.* 94. ſe décrit en prenant partout le rayon réfléchi E G égal à la moitié de l'incident E D; de ſorte qu'elle ſe termine au point F, qui partage le rayon A C en deux également. Elle eſt ſuſceptible de rectification abſolue; chaque partie comme B G, eſt égale à la ſomme des rayons incident & réfléchi D E, E G; propriété au reſte commune à toutes les cauſtiques formées par des rayons paralleles, & qui s'étend, à quelques modifications près, à toutes les autres. Enfin la courbe B G F, n'eſt autre que celle que décriroit un point de la circonférence d'un cercle qui rouleroit ſur un autre comme F K décrit du rayon C F. C'eſt une remarque nouvelle que fit M. *Tchirnauſen* en 1690, de même que celle-ci, ſçavoir que cette courbe a la propriété de ſe reproduire par ſon développement, comme l'on ſçait que fait la cycloïde. Il y a néanmoins cette différence, que la cycloïde a pour développée une cycloïde préciſément égale, au lieu que la courbe dont nous parlons a bien pour développée une courbe ſemblable, mais ſeulement moins grande de moitié. Nous devons rendre ici à M. *de la Hire*, la juſtice de remarquer qu'il démêla quelques-unes des propriétés ci-deſſus avant M. *Tchirnauſen*. Car ce Géometre un peu précipité, s'étoit trompé en quelque choſe, lorſqu'il annonça ſa découverte à l'Académie des Sciences. Il prétendoit que pour trouver chaque point de la cauſtique, il n'y avoit qu'à décrire ſur le rayon C B un demi-cercle, & partager le reſtant de chaque ordonnée, comme

HE en deux également en I, & que le point I étoit dans la cauſtique. Cette prétention ne lui fut point paſſée par M. *de la Hire*, mais M. *Tchirnauſen*, entier dans ſes ſentimens, après avoir fort conteſté, ne ſe rendit pas. Il ne reconnut ſon erreur que pluſieurs années après, ſur la nouvelle obſervation que lui en fit M. *Bernoulli*. Cependant M. *de la Hire* conſidérant cette courbe, trouva que le rayon réfléchi étoit la moitié de l'incident, & il démontra auſſi qu'elle étoit une épicycloïde produite par la révolution d'un cercle ſur un autre (*a*).

Les Géometres contemporains de M. *Tchirnauſen*, ont beaucoup enchéri ſur ſa théorie. Elle ſortoit à peine de ſes mains, qu'ils l'étendirent, ſoit en ne ſe bornant plus aux rayons incidens paralleles, mais en les ſuppoſant convergens ou divergens à volonté, ſoit en appliquant à la réfraction ce que M. *Tchirnauſen* avoit ſeulement remarqué dans la réflection; ſoit enfin en examinant les cauſtiques des courbes méchaniques, auxquelles M. *Tchirnauſen* dédaignant l'uſage du calcul différentiel, ne pouvoit appliquer le ſien. On doit les principaux traits de toute cette théorie aux deux illuſtres freres MM. Jacques & Jean *Bernoulli*. Le premier donna en 1691, dans les Actes de Leipſick, des choſes très-curieuſes ſur ce ſujet (*b*), il y fit entr'autres la remarque, que la cauſtique de la ſpirale logarithmique, le point lumineux étant au centre, étoit une ſpirale égale. Pendant le même temps, M. Jean *Bernoulli*, qui étoit alors à Paris, donnoit dans ſes *Lectiones calculi integralis*, des formules déduites du calcul différentiel, pour déterminer les cauſtiques de toutes les eſpeces. Nous ſupprimons avec regret quantité de choſes curieuſes que nous aurions à dire ici, ſi nous pouvions nous étendre à notre gré. Nous renvoyons aux écrits des Géometres qui ont traité cette théorie, entr'autres aux *Leçons de calcul intégral* de M. *Bernoulli*, ou *au Traité des infiniment petits* de M. le Marquis *de l'Hôpital*. On peut auſſi conſulter un Mémoire qu'on lit parmi ceux de l'Académie de l'année 1703. C'eſt une eſpece de Traité ſur cette matiere, où l'on trouve raſſemblé avec beaucoup de préciſion tout ce qu'elle offre de plus intéreſſant.

La génération des épicycloïdes ſera facile à entendre pour

(*a*) Hiſt. de l'Acad. avant le renouv. ann. 1688, édit. Françoiſ.
(*b*) *Lineæ cycloid. cauſticæ, pericauſticæ, &c.*

ceux à qui la cycloïde eſt connue. Car elle n'eſt que celle de cette courbe célebre, un peu généraliſée. La cycloïde s'engendre lorſqu'on fait rouler un cercle ſur une ligne droite. Les épicycloïdes ſont formées de la même maniere, à cela près, que la baſe au lieu d'être une ligne droite, eſt une autre circonférence circulaire. *Des Epicycloïdes.*

On fait honneur de l'invention des épicycloïdes à M. *Roemer*, célebre Aſtronome Danois, qui les imagina durant ſon ſéjour à Paris, vers l'année 1674. Ce ne fut point entre ſes mains une pure ſpéculation géométrique. Ces courbes lui parurent être celles dont la forme convenoit aux dents des roues pour diminuer le frottement des unes contre les autres, & rendre l'action de la puiſſance plus égale; ce fut-là le motif qui le porta à les conſidérer. M. *de la Hire* néanmoins, dans ſon Traité des Epicycloïdes, imprimé en 1694, garde un profond ſilence ſur M. *Roemer*, & ſemble s'attribuer le mérite de cette invention géométrique & méchanique. Mais outre le cri public qui en fait honneur à M. *Roemer*, on a le témoignage exprès de M. *Leibnitz* (*a*), qui étant à Paris, en 1674 & les deux années ſuivantes, dit que l'invention des épicycloïdes & leur application à la méchanique, étoient l'ouvrage de ce Mathématicien Danois, & qu'il en paſſoit pour Auteur auprès de M. *Huyghens*, ſans qu'il fût en aucune maniere queſtion de M. *de la Hire*.

Je ne trouve perſonne qui ait rien publié ſur les épicycloïdes avant M. *Newton*. Ce grand homme donne, dans le premier Livre de ſes principes, leur rectification d'une maniere fort générale & fort ſimple. Après lui M. *Bernoulli*, pendant ſon ſéjour à Paris, s'adonna à déterminer, à l'aide du calcul différentiel & intégral, encore naiſſant, leur aire, leur rectification, leur développée, &c. pluſieurs de ſes *Leçons de calcul intégral* ſont occupées de cet objet. En 1694, M. *de la Hire* publia ſon *Traité des Epicycloïdes*, dont il revendique les principales vérités, comme des découvertes faites depuis longtemps. C'eſt un ouvrage exceſſivement embrouillé; mais on a dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1706, un écrit du même M. *de la Hire* ſur les épicycloïdes, qui forme un

(*a*) *Comm. Phil. Leibnitii & Bernoulli.* T. 1, p. 347.

Traité complet de ces courbes, très-curieux & très-élégant.

Il y auroit dans les écrits qu'on vient d'indiquer une ample moiſſon de vérités curieuſes à étaler ici. Mais nous nous bornerons à quelques-unes des plus dignes d'attention. C'eſt d'abord une propriété remarquable des épicycloïdes circulaires qu'elles ſont ſouvent géométriques, tandis que la cycloïde ordinaire, d'autant plus ſimple en apparence que la ligne droite l'eſt davantage que la courbe, n'eſt que méchanique ou tranſcendante. Ce cas où les épicycloïdes ſont géométriques, eſt celui où il y a un rapport comme de nombre à nombre entre les circonférences du cercle qui ſert de baſe, & du générateur. Que ſi ce rapport eſt incommenſurable, alors l'épicycloïde eſt méchanique. La raiſon en eſt ſenſible : dans le dernier cas, le cercle générateur continuant à l'infini de tourner ſur ſa baſe, jamais le point décrivant ne peut retomber ſur un de ceux d'où il eſt parti au commencement de quelque révolution ; ainſi la courbe ne rentrera jamais en elle-même, mais fera une infinité de circonvolutions différentes & de replis. Elle ſeroit par conſéquent coupée en une infinité de points par une ligne droite, ce qui ne ſçauroit arriver à une courbe géométrique. Ceci nous donne la ſolution de l'eſpece de paradoxe remarqué plus haut. La cycloïde ordinaire n'eſt qu'une épicycloïde formée par un cercle fini roulant ſur un cercle infini. Mais le fini & l'infini ſont incommenſurables. Ainſi elle eſt dans le cas des épicycloïdes à baſe incommenſurable avec le cercle générateur, & elle doit être tranſcendante comme elles.

C'eſt encore une propriété remarquable des épicycloïdes, ſoit géométriques, ſoit tranſcendantes, qu'elles ſont abſolument rectifiables, du moins dans le cas où le point décrivant eſt ſur la circonférence du cercle générateur. On démontre *Fig. 95.* que la circonférence de l'épicycloïde G E F eſt au quadruple du diametre du cercle générateur B E, comme le rayon de la baſe, à la ſomme de ceux de la baſe & du cercle générateur. Si l'épicycloïde étoit intérieure, alors, au lieu de la ſomme ci-deſſus, ce ſeroit la différence. Veut-on voir reparoître ici la cycloïde ordinaire & ſa propriété célebre, d'avoir ſa circonférence égale à quatre fois le diametre du cercle générateur, il n'y aura qu'à ſuppoſer le cercle de la baſe infini ; alors la raiſon ci-deſſus ſe changera en une raiſon d'égalité. Car l'in-

fini augmenté ou diminué d'une quantité finie, eſt toujours le même. Lorſque le point décrivant de l'épicycloïde eſt pris au dedans ou au dehors de la circonférence du cercle générateur, la longueur de l'épicycloïde eſt égale à une circonférence d'ellipſe facile à conſtruire. A l'égard des aires des épicycloïdes, elles ſe déterminent par l'analogie ſuivante : comme le rayon du cercle de la baſe : à trois fois ce rayon, plus deux fois celui du cercle générateur, ainſi le ſegment circulaire *b* H, au ſecteur épicycloïdal *b* H F, ou tout le cercle générateur, à l'aire entiere de l'épicycloïde F E G B. Je ne dis rien des tangentes : on ſçait depuis le temps de *Deſcartes* que la ligne H *b*, tirée d'un point quelconque H, à celui de la baſe que touche le cercle, tandis que ce point eſt décrit, eſt perpendiculaire à la courbe, par conſéquent à la tangente. Je finis cet article en donnant une idée de la méthode ingénieuſe que M. de *Maupertuis* a ſuivie en traitant ce ſujet (*a*). Il conçoit un polygone rouler ſur un autre dont les côtés ſont égaux aux ſiens. La trace d'un des angles, décrit une courbe dont le contour eſt formé d'arcs de cercles, & l'aire compoſée de ſecteurs circulaires, & de triangles rectilignes. Il détermine le rapport de l'aire & du contour de cette figure avec ceux du polygone générateur. Il ſuppoſe enſuite ces polygones devenir des cercles, la figure décrite devient une épicycloïde, & le rapport ci-deſſus, modifié comme il convient par cette ſuppoſition, lui donne l'aire & le contour de l'épicycloïde.

I X.

Progrès du calcul différentiel dans le continent.

L'Angleterre, quoique le pays natal des calculs que nous nommons différentiel & intégral, n'eſt cependant pas celui où ils ont d'abord pris leur accroiſſement. Nous faiſons abſtraction de M. *Newton*, qui les appliqua dès leur naiſſance avec tant de ſuccès à la découverte des vérités les plus ſublimes, & qui étoit en poſſeſſion de quantité de méthodes excellentes. Mais à l'exception de ce qu'il en dévoila dans ſes principes en 1687, & de ce qui en pût tranſpirer d'après ſes lettres & ſes manuſcrits, c'étoit un tréſor précieux dont lui ſeul avoit encore la

(*a*) Mem. de l'Acad. ann. 1727.

propriété ; de maniere que c'eſt, en quelque ſorte, du continent que l'Angleterre reçut la connoiſſance de ce calcul. *Craig*, qui le premier le cultiva, & qui l'appliqua à la dimenſion des grandeurs curvilignes (*a*), le tenoit des pieces inſérées par *Leibnitz* dans les Actes de Leipſick. Il en fait l'aveu de pluſieurs manieres, ſoit en appellant cette méthode, le calcul de *Leibnitz*, ſoit en adoptant ſa notation. Ainſi c'eſt à l'époque de la connoiſſance qu'en donna M. *Leibnitz* au monde ſçavant, qu'on doit à certains égards fixer ſa naiſſance & ſes développemens. Nous en ferons bientôt l'hiſtoire avec étendue ; mais quelques traits de la vie d'un homme à qui les Mathématiques ont de ſi grandes obligations, ne ſçauroient ſuſpendre qu'agréablement l'attente de nos lecteurs.

Le célebre M. *Leibnitz*, (Godefroi-Guillaume) naquit à Leipſick, le 23 Juin, v. ſt. de l'année 1646. Il fit ſes premieres études dans ſa patrie, & dès l'âge de quinze ans, il commença à embraſſer avec une ardeur incroyable tous les genres de connoiſſances. Poéſie, Hiſtoire, Antiquités, Philoſophie, Mathématiques, Juriſprudence, ſoit civile, ſoit politique, tout fut dans peu d'années de ſon reſſort, & il n'eſt aucun de ces genres dans lequel il n'ait ſignalé ſon génie ou ſon ſçavoir. Nous paſſerions bientôt les bornes que nous preſcrit l'étendue de cet ouvrage, ſi nous entreprenions de faire connoître M. *Leibnitz* ſous tous ces différens aſpects. Le lecteur curieux nous pardonnera ſi nous nous bornons à le repréſenter ici comme Mathématicien.

Les Mathématiques furent du nombre des connoiſſances que M. *Leibnitz*, avide de toute eſpece de ſçavoir, acquit dans ſa jeuneſſe. Lorſqu'il prit des grades en Philoſophie, il ſoutint une theſe ſur un ſujet à demi-Mathématique, & tenant à l'art des combinaiſons. Cette theſe fut le premier germe d'un Traité *de Arte combinatoriâ*, qu'il donna en 1668, & qui a été réimprimé en 1690. On ne doit pas mettre cette nouvelle édition ſur le compte de M. *Leibnitz*. Il la vit au contraire avec déplaiſir, ne jugeant plus cet ouvrage digne de ſon nom, quoiqu'il lui eût autrefois fait honneur. Il donna auſſi en 1671, un ouvrage intitulé *Hypotheſis Phyſica nova*, *&c.* ou *Theoria motus*, dont il déſapprouva la doctrine lorſqu'il fut parvenu à un âge plus mûr.

(*a*) *De fig. curvil. quad. & locis Geom.* Lond. 1693. in-4°.

M. *Leibnitz* vint à Paris en 1673, & s'y fit connoître avantageuſement de M. *Huyghens*, & des autres Membres de l'Académie des Sciences. Ce fut dans ce temps-là qu'il fit diverſes découvertes analytiques, entr'autres celle de ſa ſuite pour le cercle, ſujet ſur lequel il compoſa dès-lors un Traité qu'il ſe propoſa long-temps de mettre au jour, mais il s'en déſiſta dans la ſuite. Il imagina vers le même temps ſa machine arithmétique, machine plus parfaite & plus commode que celle de M. *Paſcal* (*a*). L'idée en fut communiquée à M. *Colbert*, & valut à M. *Leibnitz* d'être aggregé à l'Académie des Sciences.

M. *Leibnitz* retourna en Allemagne vers la fin de 1676, rappellé par l'Electeur d'Hanovre à qui il s'étoit attaché. Les affaires nombreuſes dont il fut chargé par ce Prince, ne lui permirent guere plus alors de s'adonner aux Mathématiques. Cependant lorſque les Actes de Leipſick parurent, il ne laiſſa pas de les enrichir de quantité d'écrits, ſoit phyſiques, ſoit mathématiques, écrits qui ſont tous marqués au coin du génie, & qui font regretter que leur Auteur n'ait pas eu le loiſir de ſuivre davantage ſes idées, & de ſe livrer à un travail plus réglé ſur ces matieres. M. *Leibnitz* ſe le propoſa ſouvent, & il a été pendant pluſieurs années queſtion d'un ouvrage *de Scientiâ infiniti*, dont ſon nouveau calcul, & ſurtout le calcul intégral, auroit fait la principale partie; mais diſtrait par des entrepriſes laborieuſes, & encore plus par ſon penchant vers la Métaphyſique la plus déliée, il ne trouva jamais le temps de remplir l'attente dont il avoit flatté le monde ſçavant.

M. *Leibnitz* étoit attentif à tout ce qui peut contribuer à l'accroiſſement & à la propagation des Sciences. L'établiſſement d'une Académie en Allemagne lui parut propre à cela, & il le ſollicita auprès de Fréderic I, Roi de Pruſſe & Electeur de Brandebourg. Ce Prince entrant dans ſes vues, fonda en 1701 à Berlin ſa capitale, cette Académie, émule de celles de Paris & de Londres, qu'on y voit fleurir aujourd'hui. M. *Leibnitz* en fut nommé Préſident, & remplit cette place juſqu'à ſa mort. Elle arriva le 14 Novembre 1716; & elle fut cauſée par un accès de goutte remontée qui le ſuffoqua preſque ſubitement. Il étoit un des Aſſociés étrangers que

(*a*) Voy. *Miſcell. Berol.* T. I.

propriété ; de maniere que c'eſt, en quelque ſorte, du continent que l'Angleterre reçut la connoiſſance de ce calcul. *Craig*, qui le premier le cultiva, & qui l'appliqua à la dimenſion des grandeurs curvilignes (*a*), le tenoit des pieces inſérées par *Leibnitz* dans les Actes de Leipſick. Il en fait l'aveu de pluſieurs manieres, ſoit en appellant cette méthode, le calcul de *Leibnitz*, ſoit en adoptant ſa notation. Ainſi c'eſt à l'époque de la connoiſſance qu'en donna M. *Leibnitz* au monde ſçavant, qu'on doit à certains égards fixer ſa naiſſance & ſes développemens. Nous en ferons bientôt l'hiſtoire avec étendue ; mais quelques traits de la vie d'un homme à qui les Mathématiques ont de ſi grandes obligations, ne ſçauroient ſuſpendre qu'agréablement l'attente de nos lecteurs.

Le célebre M. *Leibnitz*, (Godefroi-Guillaume) naquit à Leipſick, le 23 Juin, v. ſt. de l'année 1646. Il fit ſes premieres études dans ſa patrie, & dès l'âge de quinze ans, il commença à embraſſer avec une ardeur incroyable tous les genres de connoiſſances. Poéſie, Hiſtoire, Antiquités, Philoſophie, Mathématiques, Juriſprudence, ſoit civile, ſoit politique, tout fut dans peu d'années de ſon reſſort, & il n'eſt aucun de ces genres dans lequel il n'ait ſignalé ſon génie ou ſon ſçavoir. Nous paſſerions bientôt les bornes que nous preſcrit l'étendue de cet ouvrage, ſi nous entreprenions de faire connoître M. *Leibnitz* ſous tous ces différens aſpects. Le lecteur curieux nous pardonnera ſi nous nous bornons à le repréſenter ici comme Mathématicien.

Les Mathématiques furent du nombre des connoiſſances que M. *Leibnitz*, avide de toute eſpece de ſçavoir, acquit dans ſa jeuneſſe. Lorſqu'il prit des grades en Philoſophie, il ſoutint une theſe ſur un ſujet à demi-Mathématique, & tenant à l'art des combinaiſons. Cette theſe fut le premier germe d'un Traité *de Arte combinatoriâ*, qu'il donna en 1668, & qui a été réimprimé en 1690. On ne doit pas mettre cette nouvelle édition ſur le compte de M. *Leibnitz*. Il la vit au contraire avec déplaiſir, ne jugeant plus cet ouvrage digne de ſon nom, quoiqu'il lui eût autrefois fait honneur. Il donna auſſi en 1671, un ouvrage intitulé *Hypotheſis Phyſica nova, &c.* ou *Theoria motus*, dont il déſapprouva la doctrine lorſqu'il fut parvenu à un âge plus mûr.

(*a*) *De fig. curvil. quad. & locis Geom.* Lond. 1693. in-4°.

M. *Leibnitz* vint à Paris en 1673, & s'y fit connoître avantageuſement de M. *Huyghens*, & des autres Membres de l'Académie des Sciences. Ce fut dans ce temps-là qu'il fit diverſes découvertes analytiques, entr'autres celle de ſa ſuite pour le cercle, ſujet ſur lequel il compoſa dès-lors un Traité qu'il ſe propoſa long-temps de mettre au jour, mais il s'en déſiſta dans la ſuite. Il imagina vers le même temps ſa machine arithmétique, machine plus parfaite & plus commode que celle de M. *Paſcal* (*a*). L'idée en fut communiquée à M. *Colbert*, & valut à M. *Leibnitz* d'être aggregé à l'Académie des Sciences.

M. *Leibnitz* retourna en Allemagne vers la fin de 1676, rappellé par l'Electeur d'Hanovre à qui il s'étoit attaché. Les affaires nombreuſes dont il fut chargé par ce Prince, ne lui permirent guere plus alors de s'adonner aux Mathématiques. Cependant lorſque les Actes de Leipſick parurent, il ne laiſſa pas de les enrichir de quantité d'écrits, ſoit phyſiques, ſoit mathématiques, écrits qui ſont tous marqués au coin du génie, & qui font regretter que leur Auteur n'ait pas eu le loiſir de ſuivre davantage ſes idées, & de ſe livrer à un travail plus réglé ſur ces matieres. M. *Leibnitz* ſe le propoſa ſouvent, & il a été pendant pluſieurs années queſtion d'un ouvrage *de Scientiâ infiniti*, dont ſon nouveau calcul, & ſurtout le calcul intégral, auroit fait la principale partie; mais diſtrait par des entrepriſes laborieuſes, & encore plus par ſon penchant vers la Métaphyſique la plus déliée, il ne trouva jamais le temps de remplir l'attente dont il avoit flatté le monde ſçavant.

M. *Leibnitz* étoit attentif à tout ce qui peut contribuer à l'accroiſſement & à la propagation des Sciences. L'établiſſement d'une Académie en Allemagne lui parut propre à cela, & il le ſollicita auprès de Fréderic I, Roi de Pruſſe & Electeur de Brandebourg. Ce Prince entrant dans ſes vues, fonda en 1701 à Berlin ſa capitale, cette Académie, émule de celles de Paris & de Londres, qu'on y voit fleurir aujourd'hui. M. *Leibnitz* en fut nommé Préſident, & remplit cette place juſqu'à ſa mort. Elle arriva le 14 Novembre 1716; & elle fut cauſée par un accès de goutte remontée qui le ſuffoqua preſque ſubitement. Il étoit un des Aſſociés étrangers que

(*a*) Voy. *Miſcell. Berol.* T. I.

l'Académie choiſit lors des nouveaux réglemens qu'elle reçut en 1699. Il entretenoit depuis pluſieurs années avec M. Jean *Bernoulli*, un commerce de lettres, qui a été mis au jour en 1745, ſous le titre de *Leibnitii ac Bernoullii Comm. Phil. & Math.* 2. vol. in-4°. On ne peut que ſçavoir beaucoup de gré aux éditeurs de ce morceau, extrêmement intéreſſant par les objets ſçavans ſur leſquelles il roule, & par les nombreuſes anecdotes dont il nous inſtruit. L'abondance extrême de notre matiere nous contraint de nous en tenir à cette eſquiſſe très-légere de la vie & des ouvrages de cet homme célebre (*a*); nous nous hâtons de revenir à notre objet principal, ſçavoir l'hiſtoire du calcul différentiel.

M. *Leibnitz* a conçu ſon calcul d'une maniere moins géométrique que M. *Newton*. Il ſuppoſe qu'il y a des grandeurs infiniment petites à l'égard d'autres grandeurs, de telle ſorte qu'on peut négliger les premieres, eu égard aux ſecondes, ſans erreur ſenſible. Il ne ſe borne pas là; il y a, dans ce ſyſtême, des infiniment petits d'infiniment petits, ou du ſecond ordre, qui ſont de même négligibles à l'égard de ceux du premier. Ainſi en prenant dans une courbe trois ordonnées infiniment proches, la différence de chacune avec ſa voiſine, eſt un infiniment petit du premier ordre; ce qui forme deux différences infiniment petites & ſucceſſives: or ces deux infiniment petits, différent entr'eux d'une quantité infiniment petite à leur égard: voilà, ſuivant M. *Leibnitz*, un infiniment petit du ſecond ordre; c'eſt ce qui a fait donner à ce calcul, le nom d'*infiniment petits*: mais ce que ce principe & ſes idées ont, au premier abord, de dur aux oreilles géométriques, eſt ſeulement dans les termes. Ce n'eſt qu'une maniere de s'énoncer adoptée pour éviter les circonlocutions, & qui ne ſçauroit conduire à l'erreur. On le montrera après avoir donné une idée de la maniere dont on raiſonne dans le calcul différentiel.

Une quantité variable x étant propoſée, on déſigne ſon accroiſſement infiniment petit ou ſa différentielle, par dx. Cela ſuppoſé, qu'on demande l'accroiſſement infiniment petit de x^2,

(*a*) Les lecteurs curieux d'une connoiſſance plus détaillée de la vie & des ouvrages nombreux de M. Leibnitz, doivent recourir aux écrits qui ont eu cet objet particulier, comme ſon éloge hiſtorique, par M. de Fontenelle, les Actes de Leipſick de l'année 1717, & enfin l'article de Leibnitz dans le Supplément de Bayle par M. de la Chauffepié.

par

par exemple, tandis que x devient $x+dx$, il eſt viſible que x^2 deviendra $(x+dx)^2$, ou $x^2+2xdx+dx^2$. L'accroiſſement de x^2 ſera donc $2xdx+dx^2$; mais, dit M. *Leibnitz*, dx^2 eſt infiniment petit comparé à $2xdx$, puiſque le premier eſt un rectangle de deux dimenſions infiniment petites, tandis que le ſecond n'en a qu'une de cette eſpece. On peut donc négliger dx^2, ſans erreur; ainſi l'accroiſſement de x^2 eſt $2xdx$. On démontre de même que la différentielle de xy eſt $ydx+xdy$, & non $ydx+xdy+dxdy$. Car $dxdy$ eſt infiniment petit, eu égard à ydx ou xdy. Tout cela, quoiqu'en apparence contre la rigueur géométrique, ne laiſſe pas d'être vrai, ainſi que nous allons le faire voir.

En effet M. *Leibnitz*, en négligeant certaines grandeurs, n'a rien fait qui ne fût déja familier aux Analiſtes & aux Géometres. Toute quantité qui dans certaines circonſtances devenoit moindre qu'aucune grandeur aſſignable, quelque petite qu'elle fût, étoit réputée nulle dans ces circonſtances. C'eſt ainſi qu'en doublant continuellement le nombre des côtés d'un polygone inſcrit au cercle, on regardoit le cercle & le polygone comme ſe confondant enfin, ſans avoir égard aux petits ſegmens qui ſont la différence de l'un & de l'autre. Car on démontroit que la ſomme de tous ces ſegmens décroiſſoit au point de devenir moindre qu'aucune quantité aſſignable. C'eſt-là préciſément le cas des infinimens petits de M. *Leibnitz*. A meſure que dx diminue dans l'exemple précédent, la raiſon de dx^2 à $2xdx$, diminue, & devient enfin moindre qu'aucune raiſon aſſignable, lorſque dx devient moindre qu'aucune quantité donnée. On ne peut donc regarder dx^2, que comme nul comparé à $2xdx$, & par conſéquent dx & $2xdx$, expriment reſpectivement les accroiſſemens de x & de x^2, lorſque ces accroiſſemens ſont infiniment petits, c'eſt-à-dire, dans l'inſtant où ils s'anéantiſſent.

Mais que ſeront, ſuivant ce ſyſtême, les différens ordres d'infinent petits, ou de différences de différences. Nous conviendrons ingénument qu'il n'en donne pas une notion auſſi diſtincte & affranchie de difficultés, que celui de M. *Newton*. Quelque effort qu'ait fait un bel eſprit Géometre, le célebre Secretaire de l'Académie, pour établir l'exiſtence de ces différens ordres d'infinis & d'infiniment petits, c'eſt, à notre avis,

un édifice plus hardi que ſolide. Pour mettre cette partie du calcul de M. *Leibnitz* à l'abri de toute difficulté, il eſt néceſſaire de recourir aux notions qu'en donne M. *Newton*, & que nous avons expliquées dans un des articles précédens. Au reſte tout eſt de même dans le calcul différentiel que dans celui des fluxions. Ils ne différent que dans la notation, & dans la maniere dont leurs Auteurs ont enviſagé leur principe fondamental. Ainſi tout ce qu'on a dit dans l'article V, ſur l'application du calcul des fluxions à la méthode des tangentes, à l'invention des *maxima* & *minima*, à la quadrature & à la rectification des courbes, &c. doit s'entendre également du calcul de M. *Leibnitz*. Il n'y a qu'à changer les $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, &c. en dx, dy, ddx, &c. & l'on aura les mêmes conſéquences, les mêmes regles de calcul.

M. *Leibnitz* donna le premier eſſai public de ſon nouveau calcul dans les Actes de Leipſick de l'année 1684 (*a*); & il en montra l'uſage pour trouver les tangentes, les *maxima* & *minima*, & les points d'infléxion. Un des problêmes qu'il ſe propoſoit en exemple, étoit bien propre à faire éclater les avantages de ſon calcul. Il ſuppoſe une courbe dont la nature eſt telle que la ſomme des lignes tirées de chacun de ſes points à tant d'autres qu'on voudra pris ſur ſon axe, faſſe une même ſomme, & il demande la maniere d'y mener les tangentes. Ce problême qui éluderoit, dans certains cas, toutes les reſſources des méthodes de *Fermat*, de *Barrow*, &c. reçoit une ſolution facile du calcul différentiel, quel que ſoit le nombre des points ou des foyers donnés.

Cependant les germes de ce nouveau calcul jettés par M. *Leibnitz*, ne fructifierent pas d'abord, & il s'écoula quelques années avant qu'on ſentît le mérite de cette excellente méthode. La plûpart des Géometres, les plus habiles même, ne la regarderent d'abord que comme celle de *Barrow* perfectionnée. Ils n'avoient pas entiérement tort en cela, mais ils l'avoient en ce qu'ils n'appercevoient pas que c'étoit préciſément ce degré de perfection que *Leibnitz* avoit donné à ce calcul, qui l'étendoit à des queſtions ſur leſquelles il n'auroit autrement point eu de priſe.

(*a*) G. G. L. *Nova methodus pro max. & min. itemque tangent, &c. ac ſingulare pro his calculi genus.*

Le premier des Géometres qui commença à revenir de ſon erreur, & à ſeconder M. *Leibnitz*, fut M. Jacques *Bernoulli*. Ce fut, ce ſemble, le problême de la courbe iſochrone, propoſé en 1687 par *Leibnitz*, qui lui ouvrit les yeux. Car ſon premier eſſai de la méthode nouvelle, regarde ce problême, dont il publia l'analyſe en 1690. Ses progrès dans ce genre étoient déja profonds dès ce temps, puiſqu'il oſa propoſer à ſon tour le fameux problême de la chaînette, c'eſt-à-dire, de déterminer la courbure que prend une chaîne ou un fil peſant & infiniment fléxible, qui eſt ſuſpendu par ſes deux bouts. Peu de temps après, ſçavoir au commencement de 1691, il donna dans les Actes de Leipſick un eſſai de calcul différentiel & intégral. C'eſt, en quelque ſorte, un petit Traité de ce calcul, où à l'occaſion d'une eſpece particuliere de ſpirale, il donne toutes les regles pour déterminer les tangentes, les points d'infléxion, les rayons de la développée, les aires, & les rectifications, dans toutes les courbes à ordonnées, ſoit paralleles, ſoit convergentes. Cet eſſai fut ſuivi d'un autre ſur la ſpirale logarithmique, ſur la courbe loxodromique, ou celle que décrit ſur la ſurface de la mer un navire qui ſuit conſtamment le même rumb de vent, ſur les aires des triangles ſphériques, &c. Aidé des mêmes ſecours, il s'enfonça bientôt dans d'autres recherches profondes, en conſidérant les courbes qui naiſſent de leur roulement les unes ſur les autres, & en étendant la théorie des cauſtiques, découverte récente de M. *Tchirnauſen*. Chemin faiſant, il rencontra une propriété remarquable de la ſpirale logarithmique; c'eſt que non ſeulement ſa développée, mais encore ce qu'il appelle ſon anti-développée, ſa cauſtique, ſoit par réflection, ſoit par réfraction, le point rayonnant étant au centre, ſont de nouvelles ſpirales logarithmiques égales & ſemblables à la premiere. Cette eſpece de renaiſſance perpétuelle de la logarithmique, lui fit autant de plaiſir qu'en avoit fait autrefois à *Archimede* la découverte du rapport de la ſphere avec le cylindre; & de même que le Géometre ancien avoit ſouhaité qu'en mémoire de cette découverte on mît pour tout épitaphe ſur ſon tombeau une ſphere inſcrite à un cylindre, M. *Bernoulli* deſira qu'on gravât ſur le ſien une ſpirale logarithmique avec ces mots, *Eadem mutata reſurgo*, alluſion heureuſe à l'eſpérance des Chrétiens,

en quelque ſorte figurée par la propriété de cette courbe continuellement renaiſſante. M. *Bernoulli* ſignala ſon habileté dans le nouveau calcul par divers autres morceaux inſérés dans les Actes de Leipſick, & qui concernent les queſtions les plus épineuſes de la Géométrie & de la Méchanique. Son nom figurera encore fréquemment par cette raiſon dans divers endroits de cette hiſtoire (*a*).

M. Jean *Bernoulli*, l'illuſtre frere de celui dont nous venons de parler, ne tarda pas à entrer dans la même carriere, & à y marcher avec la même rapidité. Il eut part, auſſi-bien que lui, à la ſolution des plus beaux problêmes qui furent agités vers ce temps parmi les Géometres, & il en propoſa pluſieurs lui-même. Les Actes de Leipſick ſont pleins d'écrits de ce ſçavant Géometre, qui renferment une foule de découvertes & d'artifices ingénieux qui perfectionnent beaucoup le calcul intégral. Nous aurons occaſion d'en mettre dans la ſuite ſous les yeux une partie. Nous nous bornerons ici à donner une idée d'un nouveau genre de calcul, dont il publia les premiers eſſais en 1697.

Ce calcul eſt celui qu'on nomme exponentiel. Nous avons vu juſques ici des puiſſances dont l'expoſant étoit conſtant, comme y^n, n étant un nombre quelconque & invariable. Mais on peut concevoir des grandeurs dont l'expoſant même ſoit variable. Rien n'empêche, par exemple, d'imaginer une courbe de cette nature, que chaque ordonnée BC ou y, ſoit égale

(*a*) M. Bernoulli, (Jacques) naquit à Bâle, le 27 Décembre 1654. Il eut à vaincre les oppoſitions de ſa famille, qui le deſtinoit à toute autre choſe qu'aux Mathématiques, mais ſon goût l'emporta ſur les difficultés, & fut, comme dit M. de Fontenelle, ſon ſeul précepteur. Après avoir voyagé, il retourna dans ſa patrie, où il publia, en 1681, ſon *Conamen novi ſyſtematis planetarum*, ouvrage qui n'eſt pas tout-à-fait digne de ſon nom; & en 1682, ſa Diſſertation *De gravitate ætheris*. Mais c'eſt principalement des Mathématiques que M. Bernoulli tire ſon luſtre & ſa célébrité; il eſt inutile de répeter ici ce qu'on a déja dit ſur les obligations que lui ont la Géométrie & les nouveaux calculs. L'Académie des Sciences, lors de ſon renouvellement, ne manqua pas de s'aggréger, en qualité d'aſſocié étranger, un homme d'un mérite auſſi ſupérieur. Sa patrie ſe l'étoit auſſi attaché en lui donnant la place de Profeſſeur de Mathématiques dans l'Univerſité de Bâle. Il mourut le 16 Août de l'année 1705, n'ayant encore que 50 ans & quelques mois. Outre le Recueil de ſes Œuvres, c'eſt-à-dire, des diverſes pieces inſérées dans les Actes de Leipſick, ou trouvées dans ſes papiers, recueil précieux pour tous les amateurs de la Géométrie tranſcendante, on a de M. Bernoulli, un ouvrage poſthume, intitulé *De Arte conjectandi*, avec un morceau ſur les ſuites infinies. On en doit l'édition à M. Nicolas Bernoulli ſon neveu, qui le publia en 1713. Nous en parlerons ailleurs avec plus d'étendue, & avec les éloges qu'il mérite.

à x^x, c'eſt-à-dire, à la puiſſance de l'abſciſſe, dont l'abſciſſe même repréſentera l'expoſant. Alors en ſuppoſant AB $=$ 1, l'ordonnée BC ſeroit $=$ 1; au point b, ou A$b = \frac{1}{2}$, elle ſeroit $\sqrt{\frac{1}{2}}$. En β, où l'abſciſſe eſt 2, cette ordonnée ſeroit 2^2. On pourroit même, pour plus de généralité, ſuppoſer une courbe dDδ, dont les ordonnées $b\,d$, BD, &c. fuſſent z, & que celles de la courbe AcC, fuſſent exprimées par cette équation $y = x^z$. Quelles ſeront les propriétés des courbes de cette nature, leurs tangentes, leur aire, &c? Voilà l'objet du calcul dont nous parlons. M. *Bernoulli* le nommoit d'abord *parcourant*, à cauſe que les quantités de cette eſpece parcourent en quelque ſorte tous les ordres. Mais le nom d'*exponentiel*, que lui a donné M. *Leibnitz*, a prévalu, & c'eſt aujourd'hui le ſeul qui ſoit en uſage. *Fig.* 95.

Tout le calcul exponentiel eſt fondé ſur cette conſidération, que le logarithme de x^n, eſt n log. x, & que la différentielle d'un logarithme, par exemple du log. de x, eſt $\frac{dx}{x}$. Cela ſuppoſé, ſi l'on a une quantité comme $x^z = y$, & qu'on cherche ſa différentielle ou la valeur de dy, il n'y aura qu'à faire attention que puiſque ces grandeurs ſont égales, leurs logarithmes ſeront égaux; ainſi z log. x. $=$ log. y, & prenant les différences, dz log. $x + z\,\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, d'où l'on tire en multipliant par y, ou par ſa valeur x^z, $dy = x^z\,dz$ log. $x. + zx^{z-1}\,dx$. La derniere partie de cette équation montre ce qu'il faut faire pour avoir la différentielle d'une quantité telle que x^z. Il eſt auſſi facile de voir que lorſqu'on aura la valeur de z en x, en ſubſtituant au lieu de dz, ſa valeur en x & dx, on n'aura plus que des quantités finies & données, multipliées par dx; de ſorte qu'on pourra appliquer à ces courbes toutes les regles ordinaires du calcul différentiel pour l'invention des tangentes, des *maxima* & *minima*, &c. Nous en donnerions volontiers des exemples, de même que de la maniere de déterminer les aires de ces courbes, mais nous ſommes contraints de nous en tenir à cette eſquiſſe de ce calcul. Nous renvoyons aux écrits de M. *Bernoulli*, & à ſon commerce épiſtolaire avec *Leibnitz*, qui contient des choſes très-intéreſſantes ſur ce ſujet.

C'eſt à M. Jean *Bernoulli* que la France doit les premieres connoiſſances qu'elle eut du calcul différentiel & intégral. En 1691, il vint à Paris, & durant le ſéjour qu'il y fit, il connut le Marquis *de l'Hôpital*, qui plein d'ardeur & d'eſtime pour la nouvelle Géométrie, deſiroit fort pénétrer dans ce pays nouvellement découvert (*a*). M. *Bernoulli* lui ſervit de guide, & ce fut pour ſon uſage, qu'il écrivit les *Leçons de calcul différentiel & intégral*, qu'on lit dans le troiſieme tome de ſes Œuvres. Il eut le plaiſir de voir fructifier ſes inſtructions : M. *de l'Hôpital* devint bientôt un des premiers Géometres de l'Europe, & l'on vit figurer ſon nom parmi ceux qui réſolurent les fameux problêmes, de la plus courte deſcente, du pont-levis, &c. M. *Bernoulli* fit en même temps un autre proſélyte au nouveau calcul, ſçavoir M. *Varignon*, qui l'employa depuis avec beaucoup de ſuccès à quantité de recherches des plus épineuſes : nous le verrons bientôt défendre ſçavamment la cauſe de ce calcul contre ceux qui entreprirent d'en attaquer la certitude.

Cependant le calcul différentiel & intégral étoit encore une ſorte de myſtere pour la plûpart des Géometres. On eut pu facilement compter dans le continent ceux qui en avoient quelque connoiſſance. Ils ſe réduiſoient preſque à M. *Leibnitz*, aux deux freres MM. *Bernoulli*, à M. le Marquis *de l'Hôpital*, & M. *Varignon*; enfin à l'exception de quelques pieces diſperſées dans les Actes de Leipſick, il n'y avoit aucun ouvrage où l'on pût s'inſtruire de cette méthode. M. *de l'Hôpital* ſentit que les Mathématiques étoient intéreſſées à ce que cette eſpece de ſecret n'en fût pas un plus long-temps. C'eſt dans ces vues qu'il publia en 1696, ſon *Analyſe des infiniment petits*, Livre

(*a*) M. le Marquis de l'Hôpital naquit en 1661. L'attrait ſeul de la Géométrie le rendit Géometre, & il donna dès l'âge de quinze ans des preuves de ſa ſagacité par la ſolution de quelques problêmes ſur la cycloïde. Il ſervit pendant quelque temps: mais la foibleſſe de ſa vue l'expoſant à des inconvéniens perpétuels, il quitta un état où, à l'exemple de ſes ancêtres, il eût pu remplir une carriere brillante. Il ſe livra alors avec plus de liberté à ſon goût pour la Géométrie, & bientôt ſon nom figura parmi ceux des principaux Géometres de l'Europe. Il entra dans l'Académie des Sciences vers l'année 1690, & il a enrichi ſes Mémoires, de même que les Actes de Leipſick, de pluſieurs pieces intéreſſantes. Il mourut au mois de Février de l'année 1704, âgé ſeulement de 43 ans. Outre ſon *Analyſe des infiniment petits*, il laiſſa un ouvrage prêt à imprimer, ſçavoir ſon *Traité Analytique des Sections Coniques, & de la conſtruction des lieux géométriques*. Ce Livre parut en 1707, & eſt eſtimé avec raiſon comme l'un des meilleurs qu'il y ait ſur cette partie de l'Analyſe.

également bon & bien fait, qualité assez rare jusqu'alors, & même encore à présent, dans les ouvrages de Mathématiques, où le manque d'ordre & de méthode nuit souvent au mérite du fond. On pourroit seulement trouver à redire que M. *de l'Hôpital* ne fait pas assez connoître les obligations qu'il a à M. *Bernoulli*, de l'invention duquel sont la plûpart des méthodes qu'on trouve dans ce Livre, & ce qu'il contient de plus subtil dans ce genre d'analyse. M. *Bernoulli* en fut un peu indisposé lorsque l'ouvrage de M. *de l'Hôpital* parut, & ce ne furent que des motifs de considération & de reconnoissance pour la maniere dont il en avoit été accueilli à Paris, qui étoufferent ses plaintes, qu'il se contenta de faire à M. *Leibnitz* (*a*). Il eût été à desirer que le calcul intégral eût été traité dès-lors par la même main, ou par une aussi habile: mais M. *Leibnitz* méditant depuis long-temps un ouvrage intitulé *de Scientiâ infiniti*, dont ce calcul devoit former la principale partie, cela arrêta la plume de M. *de l'Hôpital*. L'attente du public ne fut remplie qu'en 1707, que M. Gabriel *Manfredi* publia son Traité *De constructione equationum differentialium primi gradûs*, ouvrage où l'on trouve rassemblé avec beaucoup d'intelligence tout ce qui avoit été fait sur le calcul intégral jusqu'à cette époque. Ce seroit le lieu de rendre compte des premiers progrès de ce calcul, mais comme il a pris ses accroissemens les plus remarquables dans ce siecle-ci, afin de présenter tout ce qui le concerne sous un même point de vue, nous différerons ce récit jusqu'à la partie suivante de notre histoire.

X.

Querelles suscitées au calcul différentiel.

Pendant que la plûpart des Géometres travailloient avec empressement à s'instruire du nouveau calcul, il y en eut d'autres qui lui déclarerent la guerre, & qui firent leurs efforts pour le renverser. Ce sera peut-être pour quelques esprits un sujet d'étonnement de voir s'élever des querelles dans le sein d'une science dont la nature devroit l'en rendre entiérement exempte. Mais ceux qui connoissent l'histoire de l'esprit humain, sçavent qu'il est peu d'inventions brillantes qui n'ayent

(*a*) *Comm. Epist. Leibn. & Bern.* T. 1, p. 350.

éprouvé des contradictions, & que ſouvent la jalouſie, ſecondée d'un peu de prévention, a élevé contre des nouveautés très-utiles, des hommes aſſez eſtimables. D'ailleurs nous oſons dire que quand nous aurons rendu compte de cette querelle, il n'y aura plus que des eſprits incapables d'apprécier les objections & les réponſes, pour qui elle puiſſe être un ſujet de ſcandale, & un motif de ſuſpecter la certitude de la Géométrie.

Il y eut d'abord des Géometres qui, ſans attaquer directement la nouvelle méthode, chercherent à en obſcurcir le mérite. Tel fut entr'autres l'Abbé *de Catelan*, Cartéſien zélé juſqu'à l'adoration, & qui s'étoit déja ſignalé par une mauvaiſe querelle qu'il avoit intentée à M. *Huyghens*, au ſujet de ſa théorie du centre d'oſcillation. Cet Abbé donna en 1692 un Livre intitulé *Logiſtique univerſelle*, & *Méthode pour les tangentes*, *&c.* Il y diſoit dans un petit avertiſſement, que cet eſſai étoit propre à montrer qu'il valoit mieux s'attacher à pouſſer plus loin les principes de M. *Deſcartes* ſur la Géométrie, qu'à chercher de nouvelles méthodes. Mais on ne peut guere ſe refuſer à une ſorte d'indignation, quand on voit que tout ce Traité n'eſt que le calcul différentiel déguiſé maladroitement ſous une notation moins commode & moins avantageuſe. Auſſi cet Auteur ne marche-t'il qu'à travers des embarras ſans nombre, & ce qui, traité ſuivant la méthode du calcul différentiel, eſt clair & ne demande que quelques lignes, ſuivant la ſienne eſt obſcur, embrouillé, & occupe des pages entieres. D'ailleurs, le Livre n'eſt pas ſans erreurs, & M. le Marquis *de l'Hôpital* vengea le calcul différentiel, en les relevant; ce qui excita une querelle dont retentit à diverſes repriſes le Journal des Sçavans de 1692.

Parmi les adverſaires du calcul différentiel, ceux qui ſe ſont le plus ſignalés, ſont MM. *Rolle* & *Nieuventiit*. Celui-ci entra le premier dans la lice, & publia en 1694 un Livre où il l'attaquoit (*a*). Il le taxoit de fauſſeté, en ce qu'on y conſidere comme égales des grandeurs qui n'ont à la vérité qu'une différence infiniment petite, mais qui eſt néanmoins réelle.

(*a*) *Conſiderationes circa Analyſis ad quant. inf. parvas applicatæ principia.* Amſtel. 1694. in-8°. *Analyſis infinitorum ſeu curvil. proprietates ex naturâ polyg. deductæ.* Ibid. 1695.

réelle. Il falloit, ſuivant lui, que ces différences fuſſent abſolument nulles ; & comme alors il ne ſçauroit plus y avoir entr'elles aucun rapport, il rejettoit entiérement les ſecondes différences, & celles des ordres ultérieurs. Peu après il publia un autre ouvrage, où il prétendoit conſolider le calcul de *Leibnitz*. Il employoit pour cela un nouveau principe métaphyſique, dont il tiroit des conſéquences fort ſingulieres, & qui le menoient à expliquer le myſtere de la création.

Leibnitz répondit à *Nieuventiit* (*a*). Il faut convenir que ſa réponſe ne préſente pas d'abord une ſolution complette de la difficulté. Car en réduiſant ſes différences, ou infiniment petits, à des incomparables, comme ſeroit un grain de ſable comparé à la ſphere des fixes, il portoit atteinte à la certitude de ſon calcul. Mais l'addition qu'il fit bientôt après à cette réponſe, eſt plus ſatisfaiſante. Il y montre que ce qu'il appelle les différences reſpectives de l'abſciſſe & de l'ordonnée, ne ſont que des rapports entre des quantités finies, rapports qui peuvent être repréſentés par les ordonnées d'une courbe ; & comme celles-ci, (ſi cette nouvelle courbe ne dégénere pas en une ligne parallele à l'axe), auroit leurs différences, ces différences ſeront les ſecondes des ordonnées de la premiere courbe, & ainſi des troiſiemes & quatriemes, &c. ſi par la nature de cette premiere courbe elles ont lieu. Cela ne ſatisfit cependant pas *Nieuventiit*. Il répliqua par un nouvel écrit (*b*), qui de même que les précédens, n'eſt qu'un tiſſu d'abſurdités. Elles furent relevées par M. *Bernoulli* & M. *Herman*, qui montrerent que cet adverſaire du calcul différentiel, ne ſçavoit ce qu'il diſoit.

M. *Rolle* (*c*) eût été pour le calcul différentiel un adverſaire plus redoutable, ſi ſes ſuccès euſſent répondu à ſon ardeur. C'étoit, pour tracer ſon portrait en peu de mots, un Algébriſte habile, & un calculateur des plus intrépides, mais un homme précipité, & à ce qu'on peut conjecturer un peu ja-

(*a*) *Act. Lipſ.* 1694.

(*b*) *Conſid. ſecundæ circa calculi diff. uſum.* Amſtel. 1696. in-8°.

(*c*) Rolle (Michel) né à Ambert dans la baſſe Auvergne, en 1652, mort en 1719. On a de lui un *Traité d'Algebre*, (1692. in-4°.) *une Méthode pour la réſolution des problêmes indéterminés*, (1699. in-4°.) *Mémoires ſur l'inverſe des tangentes*, (1704.) & quelques autres écrits que leur obſcurité a fait tomber dans l'oubli. *Voy.* ſa vie dans l'Hiſt. de l'Acad. Roy. des Sciences, ann. 1719.

loux des inventions d'autrui. Il avoit donné quelques écrits où, au travers de l'obſcurité qui l'accompagna toujours, on entrevit des méthodes aſſez ingénieuſes. A cela près, il paſſa ſa vie à quereller *Deſcartes*, & le calcul différentiel. Il commença à s'élever contre ce dernier en 1701. Il l'attaqua non ſeulement du côté de la certitude rigoureuſe de ſes principes, mais encore il prétendit montrer par divers exemples qu'il induiſoit en erreur, & qu'il étoit en contradiction avec les méthodes connues & admiſes, comme celles de *Deſcartes*, de *Fermat*, &c. Ces prétentions étoient aſſaiſonnées de la confiance la plus grande, & étayées d'un grand appareil de calcul, de ſorte qu'elles étoient tout-à-fait capables d'en impoſer à ceux qui ne pénétroient pas au-delà de la ſuperficie.

Mais le calcul différentiel trouva dans M. *Varignon*, un défenſeur auſſi zélé & intelligent, que *Rolle* étoit ardent & impétueux. M. *Varignon* répondit d'abord avec beaucoup de ſolidité aux objections qui concernent les principes du nouveau calcul. Il donna la véritable notion des différentielles, & montra que ce n'étoient ni des zero abſolus, ni des incomparables, mais les dernieres raiſons des élémens reſpectifs de l'abſciſſe & de l'ordonnée, lorſque décroiſſans continuellement ils s'anéantiſſent enfin. A l'égard des erreurs que *Rolle* imputoit au nouveau calcul, ce fut-là ſurtout que M. *Varignon* triompha. Il fit voir que toutes ſes imputations n'étoient que des effets de ſa précipitation & de ſon inadvertence. Nous nous bornerons à quelques exemples, tirés d'une réponſe manuſcrite de M. *Varignon*, que nous avons eue entre les mains. *Rolle* prenoit une courbe dont l'équation étoit $y - b = (xx - 2ax + aa - bb)^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}$. Il en cherchoit les plus grandes & les moindres ordonnées, en faiſant $dy = 0$, & il trouvoit que le *maximum* cherché répondoit à l'abſciſſe égale à a. Cependant, diſoit-il, il eſt certain que cette courbe a trois ordonnées qui ſont des *maxima* & *minima*. En effet, la regle de M. *Hudde* en donne trois, qui répondent à des abſciſſes qui ſont $a - b$; a, & $a + b$.

Un autre exemple qui arrachoit à *Rolle* de grands cris de victoire, étoit celui-ci. Soit cette équation $y = 2 + \sqrt{4x + \sqrt{4 + 2x}}$. En faiſant $dy = 0$, on trouve $x = -4$, valeur à la-

quelle ne répond qu'une ordonnée imaginaire, de ſorte qu'il n'y a dans cette courbe aucune plus grande ou moindre ordonnée. Mais en faiſant diſparoître les ſignes radicaux, l'on réduit cette équation à celle-ci $y^4 - 8y^3 + 16yy - 12yyx + 48yx - 64x + 4xx = 0$: or ſi l'on y applique la regle de M *Hudde*, on trouvera, diſoit-il, un *maximum* répondant à l'abſciſſe égale à 2. Il ajoutoit que le nouveau calcul étoit en contradiction avec lui-même : car, pourſuivoit-il, ce calcul appliqué à l'équation irrationnelle ci-deſſus, ne donne point ce *maximum*, & appliqué à l'équation rationnelle qui n'en differe que par la forme, il le donne.

Cependant, ni le calcul différentiel, ni la regle de M. *Hudde*, ne ſont en défaut ; c'eſt M. *Rolle* qui ſe trompe de pluſieurs manieres. Sa premiere erreur conſiſte en ce qu'il ne prend pas la regle du calcul différentiel en entier ; car il faut faire non ſeulement dy, mais auſſi $dx = 0$. Or s'il l'eût fait, il eût trouvé dans le premier exemple, les trois *maximo-minima*, que donne la regle de M. *Hudde*. En ſecond lieu, *Rolle* ſe trompoit en donnant à la courbe en queſtion la forme qu'on voit dans la figure 96, n°. 1, au lieu que c'eſt celle du n°. 2, où les points S & V, ont leurs tangentes non paralleles, mais perpendiculaires à l'axe. C'eſt pour cela que la ſuppoſition de $dy = 0$, ne donnoit que le *maximum* répondant à l'abſciſſe AQ : car il eſt de la nature de cette ſuppoſition de ne donner que les points de tangentes paralleles à l'axe. 3°. *Rolle* montroit qu'il connoiſſoit mal la nature & le principe de la regle de M. *Hudde* : car ce point qu'il prenoit pour un point de *maximum* dans le ſecond exemple, n'en eſt pas un. La forme de la courbe de cet exemple, lorſque l'équation eſt délivrée des irrationnalités, eſt celle qu'on voit figure 97, & le point D, que détermine la regle de M. *Hudde*, eſt ſeulement un point d'interſection de deux rameaux, autrement un nœud de la courbe. M. *Rolle* n'eût pas avancé cette objection, s'il eût fait attention que la regle dont nous parlons donne non ſeulement les *maxima* & *minima*, mais auſſi les points d'interſection des branches des courbes, parce que ſa nature eſt de déterminer tous les points de la courbe où il y a deux racines égales ; & que cela arrive auſſi bien dans les points d'interſection que dans ceux de *maxima* ou

Fig. 96.

Fig. 97.

minima. 4°. M. *Rolle* étoit dans l'erreur, lorſqu'il prétendoit que l'équation $y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}$, déſignoit la même courbe que l'équation, $y^4 - 8y^2$ &c. à laquelle elle ſe réduit en faiſant diſparoître les radicaux. Sous la premiere forme elle n'exprime qu'une des branches de la courbe, comme LS; car c'eſt tout ce qu'on peut en tirer, en ſuppoſant à x différentes valeurs déterminées. Mais lorſque les ſignes radicaux ſont chaſſés, alors y a quatre valeurs, ſçavoir $2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}$; $2 + \sqrt{4x} - \sqrt{4 + 2x}$; $2 - \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}$; $2 - \sqrt{4x} - \sqrt{4 + 2x}$; & l'équation rationnelle formée de ces quatre racines, déſigne la courbe à quatre branches de la figure 97, dont deux ſe coupent en D. Le calcul différentiel n'eſt donc point en contradiction avec lui-même : il ne donne pas le point D dans la premiere forme d'équation, puiſqu'il n'y exiſte pas, & il le donne dans la ſeconde. Au reſte, il eſt facile dans le calcul différentiel de reconnoître la nature de ce point: car la regle de ce calcul exigeant pour s'aſſurer de tous les *maxima* & *minima*, qu'on faſſe ſucceſſivement $dy = 0$, & $dx = 0$, lorſque de ces deux ſuppoſitions réſulte une même valeur de l'abſciſſe, on doit en conclurre que le point qui lui répond n'eſt qu'un point d'interſection de quelques branches de la courbe, & non un véritable *maximum* ou *minimum*, & c'eſt ce qui arrive dans l'exemple que nous diſcutons. Ce moyen de diſtinguer les vrais *maxima* & *minima*, d'avec les points d'interſection, a été donné, ce me ſemble, par M. *Guinée* le premier (*a*). Il eſt fondé ſur ce que, dans les points de cette derniere ſorte, dx & dy ont un rapport fini, puiſque les tangentes à ces points ne ſont ni perpendiculaires, ni paralleles à l'axe: dy ne peut donc y être ſuppoſé 0, que dx ne le ſoit auſſi. Les autres objections de M. *Rolle* étoient de la même trempe: mépriſes ſur mépriſes, quelquefois erreurs de calcul, & une confiance extrême; c'étoit-là tout ce que préſentoient ſes Mémoires. Ils n'ont pas tous été imprimés: on n'en trouve qu'un parmi ceux de l'Académie, de 1703. L'on devoit naturellement s'attendre à y rencontrer les objec-

(*a*) Mém. de l'Acad. 1706.

tions les plus ſpécieuſes qu'on puiſſe élever contre le calcul différentiel. Rien néanmoins de cela : on voit M. *Rolle* y renouveller l'objection que nous venons de diſcuter, & faire de grands efforts pour prouver qu'une équation ſous ſa forme irrationnelle eſt abſolument la même, & déſigne la même courbe que lorſqu'elle eſt dégagée des ſignes radicaux. Mais ſes raiſons ſont pitoyables, & ne ſont fondées que ſur une équivoque. L'exemple le plus ſimple ſuffiſoit pour lui fermer la bouche. En effet, quelqu'aveuglé qu'il fût par ſa paſſion contre le calcul différentiel, eût-il oſé dire que $yy = ax$, & $y = \sqrt{ax}$ déſignent complétement la même courbe ; non, ſans doute. Le plus médiocre Analiſte voit du premier coup d'œil que la premiere déſigne une parabole entiere, & que la ſeconde n'en exprime qu'une des branches. Cela n'a rien qui doive nous ſurprendre ; cette ſeconde équation ne contient qu'une des racines de la premiere, qui ſont $y = +\sqrt{ax}$, $y = -\sqrt{ax}$.

Quelque tort qu'eut *Rolle*, cette conteſtation ne laiſſa pas d'occuper l'Académie pendant une partie conſidérable de l'année 1701. Elle étoit alors compoſée de Géometres, pour la plûpart âgés, accoutumés dès long-temps à d'autres méthodes, & par cette raiſon peu amis de la nouvelle. Ainſi les uns virent avec plaiſir cette tempête élevée contre une invention qu'ils n'aimoient pas, & ils ne ſe preſſerent pas de l'appaiſer. D'autres, ſur qui les paſſions & les préjugés avoient plus d'empire, ſe déclarerent contre le nouveau calcul : dans cette circonſtance on crut devoir laiſſer un libre cours à la diſpute, & pour ainſi dire, n'étouffer aucune objection. L'Académie fut donc aſſez long-temps le champ de bataille. *Rolle* entaſſoit objections ſur objections, & quoiqu'il n'y eût preſque pas de coup porté que M. *Varignon* ne fît retomber ſur lui, il crioit toujours victoire. Enfin la conteſtation dégénérant, par les invectives de *Rolle*, en une vraie querelle, M. *Bignon* nomma des Commiſſaires pour la juger. Ce furent le P. *Gouye*, & MM. *Caſſini* & *de la Hire*. Ils ne prononcerent pas, & peut-être leur jugement eût-il été favorable à *Rolle ;* car parmi ces Juges, il y en avoit deux, ſçavoir le P. *Gouye* & M. *de la Hire*, que les partiſans du calcul différentiel auroient pu récuſer. Mais le public, ou du moins les Géometres ont prononcé, & ont ad-

jugé tout l'avantage à M. *Varignon*, & tout le tort à ſon adverſaire.

Cette premiere conteſtation ſembloit finie ou du moins aſſoupie dans l'attente d'un jugement. Mais les adverſaires du nouveau calcul ne purent ſe réſoudre à le voir jouir longtemps de cette eſpece de paix. *Rolle*, leur champion, renouvella bientôt après les hoſtilités, & éleva un nouvel incident ſur la regle des tangentes. Il en donna une à ſa maniere dans le Journal des Sçavans de l'année 1702, & l'appliqua à certains cas particuliers qu'il propoſa, en forme de défi, aux partiſans de la nouvelle méthode. Ces cas, au reſte, étoient adroitement choiſis. Il s'agiſſoit de tirer les tangentes à des points où des branches de courbe s'entrecoupent. Or il arrive ici quelque choſe de ſingulier & d'embarraſſant : on trouve, comme à l'ordinaire, facilement l'expreſſion indéterminée de la ſoutangente, qui eſt alors une expreſſion fractionnaire ; mais lorſque dans cette expreſſion on donne à l'abſciſſe ou à l'ordonnée, la valeur convenable à ce point particulier d'interſection, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent à la fois égaux à zero. C'eſt ce qui arrive, par exemple, dans la fraction $(ax - x\sqrt{ax}) : x - a$. En y faiſant $x = a$, elle devient $\frac{0}{0}$. Que faire dans pareille circonſtance ? On doit la remarque de cette difficulté à M. Jean *Bernoulli*, qui en trouva auſſi le premier la ſolution, & qui la communiqua aux Géometres de Paris, entr'autres à M. *de l'Hôpital*, qui l'a inſérée dans ſon *Analyſe des infiniment petits*, art. 163. (*a*)

Ce fut M. *Saurin* qui ſoutint ici la cauſe du calcul différentiel. Il répondit à *Rolle* en ſatisfaiſant à ſon défi, & il montra que la difficulté en queſtion étoit préciſément prévue & réſolue dans le Livre contre lequel il s'élevoit avec tant de chaleur (*b*). Il fit voir auſſi que la regle de *Rolle* n'étoit elle-même que la regle des tangentes du calcul différentiel, & celle de l'article 163 de *l'Analyſe des infiniment petits*, déguiſ

(*a*) Voy. J. Bernoulli, *perfectio regulæ ſuæ, pro determinando valore fractionis, cujus numerator ac denominator certo caſu evaneſcunt*. Act. Lipſ. ann. 1704. Bernoulli. Op. T. 1. p. 401.

(*b*) M. Saurin a depuis traité plus au long ce cas particulier des tangentes dans un Mémoire inſéré parmi ceux de l'Académie des années 1716 & 1723. On en trouve auſſi un parmi ceux de l'année 1725, qui concerne les queſtions *de maximis & minimis*, & qui eſt une réfutation victorieuſe de celui de Rolle de l'année 1703.

ſée, à l'aide d'un fatras énorme de calcul. *Rolle* répliqua par un prolixe écrit inſéré dans le Journal des Sçavans de 1703, écrit plein de déclamations. M. *Saurin* négligea d'y répondre, mais s'appercevant que ſon adverſaire imputoit ce ſilence à une défaite entiere, il crut en 1705 devoir rabattre cette confiance extrême, en repouſſant ſes déclamations, & le preſſant vivement ſur le fond de la queſtion. *Rolle* répliqua de nouveau par un tiſſu d'invectives, d'aſſertions pleinement démenties par les faits, & s'attribuant toujours la victoire avec un ton & une confiance qui excitent l'indignation. M. *Saurin* lui oppoſa de ſon côté un écrit qui étoit plutôt un factum, qu'une diſcuſſion Mathématique. Enfin il en appella au jugement de l'Académie. M. *Bignon* voulut prendre lui-même connoiſſance de l'affaire, & ſe nomma pour aſſeſſeurs Meſſieurs *Galois* & *de la Hire*, deux Juges peu favorables à la cauſe de M. *Saurin*. Cependant ils n'oſerent prononcer, ou, pour mieux dire, ſans prononcer ſur le fonds, ils ne purent s'empêcher de donner tort à M. *Rolle*. Par l'eſpece de jugement qu'ils rendirent vers la fin de 1705, il lui fut recommandé de ſe mieux conformer aux réglemens de l'Académie, en diſant les choſes avec plus de ménagement, & M. *Saurin* fut *renvoyé à ſon bon cœur*, c'eſt-à-dire, invité à lui pardonner ſes mauvais procédés (*a*). Telle fut la fin de cette conteſtation dans laquelle, pour adoucir nos termes, nous dirons ſeulement que *Rolle* s'eſt fait peu d'honneur auprès des Géometres intelligens. Il eſt vrai qu'il a, à certains égards, mérité ſon pardon auprès de la poſtérité. On lit (*b*) qu'il ſe convertit peu de temps après, & qu'ayant fait ſa profeſſion de foi entre les mains de Meſſieurs *de Fontenelle*, *Varignon* & *Malebranche*, il leur avoua qu'il ne s'étoit porté à attaquer ainſi le calcul différentiel, qu'à l'inſtigation de quelques perſonnes. L'une eſt aſſez connue, l'on ſçait que c'étoit l'Abbé *Galois*, l'autre étoit probablement le P. *Gouye*, qui avoit fortement appuyé les objections de *Rolle* dans un des Journaux de Trévoux. Après cette retraite de *Rolle* qui, ne pouvant ſe paſſer de quereller quelqu'un, s'attacha à chicaner l'analyſe de *Deſcartes*, l'Abbé *Galois* reſta ſeul adverſaire déclaré du calcul différentiel. Mais

(*a*) Nouv. de la Republ. des Lettres. Janv. 1706.
(*b*) *Comm. Epiſt. Leibnitii ac Bernoulli.* T. II, p. 170,

deſtitué des ſecours de ſon champion, & peut-être enfin ébranlé par les réponſes victorieuſes de Meſſieurs *Varignon* & *Saurin*, il commençoit à mollir, lorſque la mort l'enleva. On ne peut voiler plus ingénieuſement le travers qu'il avoit pris ſur ce ſujet, que le fait M. *de Fontenelle* dans ſon éloge hiſtorique. « Le goût de l'Antiquité, dit-il, ce goût ſi difficile à contenir » dans de juſtes bornes, le rendit peu favorable à la Géométrie » de l'infini. On ne peut même le diſſimuler, puiſque nos hiſtoi» res l'ont dit, qu'il l'attaqua ouvertement : en général, il » n'étoit pas ami du nouveau, & il s'élevoit par une eſpece » d'oſtraciſme contre tout ce qui étoit trop éclatant dans un » état libre, tel que celui des Lettres. La Géométrie de l'in» fini avoit ces deux défauts, & ſurtout le dernier. » Ce tour ingénieux eſt digne du célebre Secretaire de l'Académie, mais il ne juſtifie point l'Abbé *Galois*. On n'eſt jamais excuſable d'avoir tort en Géométrie, & de s'oppoſer par paſſion & par jalouſie aux découvertes propres à accélérer le progrès des ſciences. La mort de l'Abbé *Galois* mit entiérement fin à la querelle. Le calcul de *Leibnitz* a été univerſellement adopté, & voici déja plus d'un demi-ſiecle que les Géometres l'emploient à toutes ſortes de recherches, ſans que jamais ſa certitude ſe ſoit démentie en aucun point. Bien loin delà, il n'eſt preſque pas de découverte faite par ſon moyen qui n'ait été confirmée de mille manieres différentes. Ainſi il ne ſçauroit plus y avoir que des ignorans, ou de ces eſprits ſinguliers, occupés à jetter un nuage ſur toutes les connoiſſançes certaines, qui ſoient capables de ſuſpecter la ſolidité de cette méthode. D'ailleurs, ſi les principes du calcul appellé des infiniment petits, ſont de nature à éprouver quelques difficultés, perſonne n'ignore aujourd'hui qu'il eſt abſolument le même dans le fonds, que celui que *Newton* a appellé des fluxions. Or celui-ci n'a rien qui ne ſoit conforme aux principes les plus rigoureux de la Géométrie, comme on l'a montré aſſez au long. L'un & l'autre doivent donc jouir du même degré de certitude.

Fin du Livre VIe de la IVe Partie.

HISTOIRE

HISTOIRE
DES
MATHÉMATIQUES.

QUATRIEME PARTIE,

Où l'on expoſe les progrès de ces Sciences durant le dix-ſeptieme ſiecle.

LIVRE SEPTIEME.

Qui contient les progrès de la Méchanique pendant la derniere moitié de ce ſiecle.

SOMMAIRE.

I. *Les loix du choc des corps & de la communication du mouvement, manquées par Deſcartes, ſont enfin découvertes, & par qui. Expoſition de ces loix, & de la maniere dont on les établit. Vérités & principes remarquables qui en découlent. Elles ſont confirmées par l'expérience en divers lieux.* II. *M. Huyghens enrichit la Méchanique de divers théories nouvelles. Précis de la vie de cet homme célebre. Il applique le pendule à régler le mouvement des Horloges. Belle propriété qu'il décou-*

deſtitué des ſecours de ſon champion, & peut-être enfin ébranlé par les réponſes victorieuſes de Meſſieurs *Varignon* & *Saurin*, il commençoit à mollir, lorſque la mort l'enleva. On ne peut voiler plus ingénieuſement le travers qu'il avoit pris ſur ce ſujet, que le fait M. *de Fontenelle* dans ſon éloge hiſtorique. « Le goût de l'Antiquité, dit-il, ce goût ſi difficile à contenir » dans de juſtes bornes, le rendit peu favorable à la Géométrie » de l'infini. On ne peut même le diſſimuler, puiſque nos hiſtoi» res l'ont dit, qu'il l'attaqua ouvertement : en général, il » n'étoit pas ami du nouveau, & il s'élevoit par une eſpece » d'oſtraciſme contre tout ce qui étoit trop éclatant dans un » état libre, tel que celui des Lettres. La Géométrie de l'in» fini avoit ces deux défauts, & ſurtout le dernier. » Ce tour ingénieux eſt digne du célebre Secretaire de l'Académie, mais il ne juſtifie point l'Abbé *Galois*. On n'eſt jamais excuſable d'avoir tort en Géométrie, & de s'oppoſer par paſſion & par jalouſie aux découvertes propres à accélérer le progrès des ſciences. La mort de l'Abbé *Galois* mit entiérement fin à la querelle. Le calcul de *Leibnitz* a été univerſellement adopté, & voici déja plus d'un demi-ſiecle que les Géometres l'emploient à toutes ſortes de recherches, ſans que jamais ſa certitude ſe ſoit démentie en aucun point. Bien loin delà, il n'eſt preſque pas de découverte faite par ſon moyen qui n'ait été confirmée de mille manieres différentes. Ainſi il ne ſçauroit plus y avoir que des ignorans, ou de ces eſprits ſinguliers, occupés à jetter un nuage ſur toutes les connoiſſances certaines, qui ſoient capables de ſuſpecter la ſolidité de cette méthode. D'ailleurs, ſi les principes du calcul appellé des infiniment petits, ſont de nature à éprouver quelques difficultés, perſonne n'ignore aujourd'hui qu'il eſt abſolument le même dans le fonds, que celui que *Newton* a appellé des fluxions. Or celui-ci n'a rien qui ne ſoit conforme aux principes les plus rigoureux de la Géométrie, comme on l'a montré aſſez au long. L'un & l'autre doivent donc jouir du même degré de certitude.

Fin du Livre VIe de la IVe Partie.

HISTOIRE

HISTOIRE
DES
MATHÉMATIQUES.

QUATRIEME PARTIE,

Où l'on expoſe les progrès de ces Sciences durant le dix-ſeptieme ſiecle.

LIVRE SEPTIEME.

Qui contient les progrès de la Méchanique pendant la derniere moitié de ce ſiecle.

SOMMAIRE.

I. *Les loix du choc des corps & de la communication du mouvement, manquées par Deſcartes, ſont enfin découvertes, & par qui. Expoſition de ces loix, & de la maniere dont on les établit. Vérités & principes remarquables qui en découlent. Elles ſont confirmées par l'expérience en divers lieux.* II. *M. Huyghens enrichit la Méchanique de divers théories nouvelles. Précis de la vie de cet homme célebre. Il applique le pendule à régler le mouvement des Horloges. Belle propriété qu'il décou-*

vre dans la cycloïde à cette occaſion. III. *De la théorie des centres d'oſcillation. Elle n'eſt qu'ébauchée par Deſcartes & Roberval. Huyghens la traite le premier ſuivant ſes vrais principes. Difference des centres d'oſcillation & de percuſſion. Conteſtation élevée entre M. Huyghens & l'Abbé de Catelan, ſur le principe employé par le premier dans cette recherche. MM. Jacques Bernoulli & le Marquis de l'Hôpital prennent le parti d'Huyghens. Sa théorie eſt confirmée de diverſes manieres par les Géometres qui le ſuivent.* IV. *Des forces centrifuges; ancienneté de leur remarque. Découvertes de M. Huyghens ſur leur ſujet. Nouveau pendule qu'elles lui donnent lieu d'imaginer, & ſes propriétés.* V. *Newton étend à toutes les courbes la théorie des forces centrales. Loi générale qui regne dans tous les mouvemens curvilignes autour d'un centre. Découverte du rapport des forces centrales propres à faire décrire à un corps projetté obliquement, des ſections coniques. Expoſition des principes de cette théorie. Des chûtes perpendiculaires, la force accélératrice étant variable. Du problême des trajectoires. Autres recherches de Géométrie & de Méchanique mixtes que nous offre l'ouvrage de Newton.* VI. *De la réſiſtance des milieux au mouvement. Wallis & Newton traitent les premiers ce ſujet. Vérités principales qu'ils découvrent. De la courbe de projection dans un milieu réſiſtant.* VII. *Hiſtoire de divers problêmes célebres de Méchanique, qui furent propoſés vers la fin du dix-ſeptieme ſiecle.* VIII. *De quelques inventions & recherches particulieres de Méchanique dûes à la fin de ce ſiecle.*

I.

Découvertes des loix de la communication du mouvement.

NOus ne pouvions commencer cette partie de notre hiſtoire par un ſujet plus intéreſſant que celui que nous avons à traiter dans cet article. Si quelque effet naturel a dû piquer la curioſité des Méchaniciens, c'eſt ſans doute le choc des corps & la communication du mouvement qui en eſt la ſuite. Il n'eſt rien de plus commun, rien qui ſe paſſe plus fréquemment ſous nos yeux; & quand on y fait réfléxion, l'on diroit volontiers avec M. *de Fontenelle*, qu'il eſt preſque honteux à la Philoſophie de s'être aviſée ſi tard de s'en occuper.

Le célebre *Deſcartes* ſemble avoir ſenti le premier qu'il y a des loix fixes & conſtantes, qui préſident à cette com-

munication du mouvement. Il fit auſſi les premiers efforts pour les déterminer ; mais préoccupé d'un trop vaſte objet, nous voulons dire de ſon ſyſtême général, unique cauſe de ſes mépriſes, il manqua le but, & ſes tentatives ne nous offrent que des erreurs. Les Phyſiciens qui le ſuivirent de plus près, ne furent pas plus heureux ; le P. *Fabri*, qui ſe propoſa le même objet dans ſon Traité *de motu*, ne fit que ſubſtituer erreurs à erreurs ; que pouvoit-on attendre d'un Phyſicien preſque toujours oppoſé à *Galilée*, & qui combattit la plûpart des belles découvertes faites de ſon temps. *Borelli* réuſſit un peu mieux dans ſon Livre *de vi percuſſionis*. Mais faute de notions aſſez exactes du mouvement, il ſe trompa encore dans la plûpart des loix qu'il prétendit aſſigner.

C'eſt au zele de la Société Royale de Londres que nous devons, à certains égards, les premieres découvertes ſolides ſur les loix du choc des corps. Après avoir agité pluſieurs fois ce ſujet dans ſes aſſemblées, elle le propoſa à ceux de ſes membres qui s'étoient le plus adonnés à la Méchanique, les invitant à l'examiner particuliérement, & à lui faire part de leurs réfléxions. Les trois Géometres illuſtres, Meſſieurs *Wallis*, *Wren* & *Huyghens*, s'en occuperent avec ſuccès (*a*), & participerent à l'honneur de la même découverte. *Wallis* communiqua le premier ſon écrit, enſuite *Wren*, & peu de temps après arriva celui de M. *Huyghens*, qui étoit alors dans le continent, & à qui l'on rend la juſtice de remarquer qu'il n'avoit pu avoir connoiſſance de ceux des deux Géometres Anglois. On reconnoît même qu'il n'eût tenu qu'à lui de prévenir ſes deux concurrens, & qu'ils ne partagent avec lui l'honneur de cette découverte, qu'à cauſe de ſa lenteur à la dévoiler. Car on convient qu'il en étoit en poſſeſſion dès le temps de ſon ſecond voyage à Londres, c'eſt-à-dire, en 1663. On ſe borne à prétendre qu'il n'en communiqua rien alors, & qu'il n'en donna que des indices par les ſolutions de quelques problêmes ſur le mouvement.

La méthode du D. *Wallis* eſt la plus directe, & par cette raiſon c'eſt celle que nous nous attacherons principalement à développer. A la vérité, il ne traite dans ſon premier écrit que les loix du choc entre les corps abſolument durs ou mous:

(*a*) *Tranſ. Phil.* ann. 1669. n°. 43. 46.

mais enſuite il a étendu ſa théorie aux corps élaſtiques, dans ſon Traité *de motu*, qui parut en 1670.

Pour établir les loix de la communication du mouvement, il faut d'abord diſtinguer deux ſortes de corps; les uns à reſſort, c'eſt-à-dire, doués de cette faculté de ſe rétablir avec effort dans leur figure primitive, lorſqu'ils l'ont perdue par le choc de quelqu'autre corps; les autres qui en ſont privés. Cette diſtinction eſt très-néceſſaire; car les loix du choc & de la communication du mouvement ſont bien différentes dans les uns & dans les autres. La détermination de celles des derniers, eſt la plus facile, & c'eſt le premier pas à faire pour la ſolution générale du problême.

Wallis prend pour premier principe de cette ſolution, qu'une force appliquée à mettre un corps en mouvement, lui donne une vîteſſe d'autant moindre, qu'il eſt plus grand. Il ſuppoſe auſſi tacitement que la réaction eſt égale à l'action, c'eſt-à-dire, qu'un corps choqué détruit dans le corps choquant autant de mouvement que celui-ci lui en communique.

Ces principes, qui ſont très-conformes à la raiſon, & qu'on ne ſçauroit nier, pour peu qu'on les peſe attentivement, étant admis, qu'on ſuppoſe, dit *Wallis*, un corps porté d'une certaine vîteſſe, en choquer un autre en repos: la même force qui étoit employée dans le mouvement du corps choquant, eſt maintenant employée à mouvoir les deux corps. La vîteſſe commune doit donc être diminuée en même raiſon que la ſomme des maſſes eſt augmentée. Le corps choquant eſt-il double de l'autre, la vîteſſe commune ſera les $\frac{2}{3}$ de ce qu'elle étoit auparavant.

On peut démontrer cette même loi du choc des corps ſans reſſort d'une autre maniere, plus lumineuſe à mon gré, & moins ſujette à conteſtation. Lorſqu'un corps de cette nature en choque un autre en repos, ils doivent après le choc aller enſemble; car il n'y a aucune cauſe de réflection, ni dans l'un, ni dans l'autre, comme on l'a ſuffiſamment établi ailleurs. D'un autre côté la réaction du corps choqué ſur le choquant, étant égale à l'action de celui-ci ſur le premier, autant le corps choqué acquerra de mouvement, autant le corps choquant en perdra. Il ſubſiſtera donc après le choc la même quantité de mouvement, & conſéquemment les deux corps allant enſemble,

la vîteſſe ſera diminuée en même raiſon que la maſſe eſt augmentée.

Qu'arrivera-t'il maintenant lorſqu'un corps en choquera un autre qu'il ſuit & qu'il atteint. Il ſera facile de le déterminer par un raiſonnement ſemblable à celui que nous venons de faire. Il eſt viſible que le corps choquant n'agit ſur l'autre, & ne le frappe qu'avec l'excès de vîteſſe qu'il a ſur lui. Cet excès de vîteſſe multiplié par la maſſe du corps choquant, exprime donc la force ou la quantité de mouvement avec laquelle il le frappe. Or ſuivant ce qu'on a déja fait voir, cette quantité de mouvement ſe répartit ſur les deux maſſes, la vîteſſe diminuant à proportion que leur ſomme augmente. Cette vîteſſe eſt donc celle dont ſera accéléré le corps qui va le plus lentement, & dont ſera retardé celui qui alloit le plus vîte. Ainſi il faudra multiplier celui des corps qui va le plus vîte par ſa vîteſſe reſpective, c'eſt-à-dire, par ſa vîteſſe abſolue, moins celle du corps qu'il ſuit; ce produit étant diviſé par la ſomme des maſſes, donnera la vîteſſe à ajouter au corps le plus lent, ou à ſouſtraire du plus vîte, & l'on aura leur vîteſſe commune.

Faiſons enfin choquer deux mobiles avec des directions contraires. Celui qui aura la plus grande quantité de mouvement, détruira tout celui de ſon antagoniſte, &, par l'effet de la réaction de celui-ci, en perdra autant qu'il en a détruit. Il reſtera donc avec le ſurplus, s'il y en a, comme ſi cet autre eût été en repos, & qu'il l'eût choqué avec ce ſurplus de force ou de mouvement. Ainſi il l'entraînera avec lui, en partageant ce reſte proportionnellement à l'augmentation de la maſſe. Pour trouver la nouvelle vîteſſe commune aux deux corps, il faudra donc multiplier chaque corps par ſa vîteſſe propre, & ôter l'un des deux produits de l'autre, enfin diviſer cette différence par la ſomme des maſſes, on aura la vîteſſe après le choc dans la direction du plus fort.

De la connoiſſance des loix du choc dans les corps ſans reſſort, découle celle des loix du choc entre les corps élaſtiques; quelques conſidérations de plus vont nous en mettre en poſſeſſion. Il n'y a qu'à examiner attentivement ce qui ſe paſſe dans le choc de ces ſortes de corps.

Lorſqu'un corps élaſtique eſt choqué par un autre, le premier effet du choc eſt de commencer à bander leur reſſort.

Au même inſtant le corps choqué commence à prendre un peu de mouvement. Cependant le corps choquant continue à le preſſer ; car il a une vîteſſe plus grande que la ſienne : le reſſort continue à ſe bander, le corps choqué eſt de plus en plus accéléré, & l'autre retardé. Enfin l'un & l'autre ayant la même vîteſſe, le reſſort ceſſe d'être bandé davantage ; les deux corps ſe meuvent enſemble de la même maniere qu'ils feroient s'ils euſſent été ſans reſſort. Mais à cet inſtant le reſſort étant parvenu à ſon plus grand état de tenſion, commence à agir. Or appuyé comme il eſt, en quelque ſorte, ſur les deux corps, il doit les repouſſer en leur diſtribuant également la force avec laquelle il agit. Il leur imprimera donc des degrés de vîteſſe en raiſon réciproque de leurs maſſes ; le corps choqué qui, avant que le reſſort ſe débandât, avoit déja la même vîteſſe qu'il auroit eue ſi les deux corps euſſent été ſans reſſort, ſera accéléré d'autant, ſi la vîteſſe, effet du reſſort, eſt dans la même direction ; le corps choquant, qui dans le même inſtant avoit la même vîteſſe, ſera retardé par la ſouſtraction de la vîteſſe que lui a imprimé le reſſort en ſens contraire.

Il ne s'agit donc plus que de connoître quelle eſt la force avec laquelle le reſſort des deux corps eſt bandé & ſe reſtitue. Or il eſt aiſé de voir que cette force eſt proportionnelle à la vîteſſe reſpective des deux corps avant le choc : car le reſſort ſera doublement comprimé, ſi cette vîteſſe eſt double, trois fois autant, ſi elle eſt triple, &c. Ainſi ce ſera cette vîteſſe reſpective qui, lorſque le reſſort ſe débandera, ſera diſtribuée aux deux corps en raiſon réciproque de leurs maſſes. Voilà tout le méchaniſme du choc & de la communication du mouvement dans les corps élaſtiques. Appliquons ceci à quelques exemples.

Si les deux corps ſont égaux, & mus l'un contre l'autre avec des vîteſſes égales, ils ſeront réfléchis avec des vîteſſes égales. La raiſon en eſt évidente : à l'inſtant où leur reſſort eſt autant bandé qu'il peut l'être, ils ſont en repos ; mais le reſſort ſe débandant, leur diſtribue la vîteſſe reſpective, c'eſt-à-dire, la ſomme de leurs vîteſſes, également, puiſqu'ils ſont égaux. Ils ſeront donc réfléchis avec leur même vîteſſe. Il en arrivera de même ſi deux corps inégaux ſe choquent avec des vîteſſes contraires réciproquement proportionnelles à leurs maſſes. A l'inſtant où le reſſort eſt dans ſon état de

tenſion, ils ſont en repos. Le reſſort en agiſſant leur diſtribue la ſomme de leurs vîteſſes en raiſon réciproque de leur maſſe. Ainſi chacun recevra celle qu'il avoit auparavant.

Mais qu'un corps aille en choquer un autre qui lui eſt égal, & qui eſt en repos, on trouvera, en faiſant le même raiſonnement que ci-deſſus, que le corps choqué prendra la vîteſſe du premier, & que celui-ci ſera réduit au repos. Si deux corps égaux ſe choquent avec des vîteſſes inégales & contraires, ils réjailliront l'un de l'autre en faiſant échange de leurs vîteſſes. Si au contraire l'un pourſuit l'autre, & l'atteint, il lui donnera ſa vîteſſe, & prendra la ſienne. Il ſeroit trop prolixe de détailler de même tous les différens cas. Nous nous bornerons à un ſeul, qui tiendra lieu de tous les autres. Que deux corps ayant l'un 6, l'autre 4 de maſſe, ſe rencontrent avec des vîteſſes contraires, celle du premier étant 3, & celle du ſecond 2. S'ils euſſent été ſans reſſort, leur vîteſſe commune après le choc dans la direction du plus gros, eût été 1. Maintenant ſi l'on diviſe 5, la vîteſſe reſpective avec laquelle ils ſe choquent, en deux parties proportionnelles aux maſſes, ce ſeront 3 & 2. La premiere ſera la vîteſſe du plus petit. Or il avoit déja 1 degré de vîteſſe dans la même direction, ce ſeront donc quatre degrés qu'il aura après le choc. Au contraire, ſi l'on ôte de la vîteſſe un, reſtante au premier, deux de vîteſſe en ſens contraire que lui a imprimé le reſſort, il reſtera un degré de vîteſſe en ſens contraire. Ainſi ils réjailliront l'un de l'autre, le plus gros avec 1 de vîteſſe, & le moindre avec 4. Comme il ſeroit fatiguant de faire à chaque occaſion un pareil raiſonnement, on a dreſſé des formules générales dans leſquelles au lieu des maſſes & des vîteſſes, ſubſtituant leurs valeurs données, on trouve auſſi-tôt ce qui doit arriver après le choc. Ces formules ſont faciles à trouver pour ceux qui auront bien ſaiſis les principes ci-deſſus, & qui ſont un peu verſés dans l'analyſe. On peut au ſurplus recourir à divers Auteurs modernes qui ont traité cette théorie (*a*).

L'écrit du Chevalier *Wren*, s'accorde entiérement avec la théorie que nous venons d'établir; il y a ſeulement cette différence, qu'il n'y eſt queſtion que des corps élaſtiques. Son ex-

(*a*) Voy. *Mem. de l'Acad.* 1706. s'Graveſande, *Elementa Philoſ. Nat.* Deſaguliers, *Cours de Phyſique.* T. II. & ſurtout M. Wolf, *Elem. univ. Math.* T. II, c. 12.

poſition de leurs loix eſt ſurtout remarquable par ſa briéveté & ſa généralité. Que A & B, dit M. *Wren*, ſoient portés l'un contre l'autre, le premier avec la vîteſſe & dans la direction A D, l'autre avec la vîteſſe & dans la direction B D. Que C
Fig. 98. ſoit leur centre de gravité, & qu'on faſſe C E égale à C D; le corps A après le choc ſe mouvra avec la vîteſſe E A, & dans la direction de E en A, & le corps B avec la vîteſſe E B, & dans la direction de E en B. Il eſt facile de voir que cette expoſition renferme tous les cas imaginables. Car ſi le point D eſt placé entre A & B, on a le cas où deux corps viennent ſe choquer avec des directions contraires; s'il eſt placé au-delà de l'un des deux, c'eſt le cas où l'un des corps pourſuit l'autre & l'atteint; lorſqu'il eſt placé ſur un des points A ou B, c'eſt le cas de repos de l'un des deux corps. La ſituation du point E, déſigne de même les directions des corps après le choc. Tombe-t'il entre A & B, ils ſont réfléchis l'un de l'autre, puiſqu'ils marchent avec les directions E A, E B. S'il tombe hors de la ligne A B, les corps ſe ſuivront l'un l'autre. L'un des deux enfin ſera réduit au repos, lorſque ce point tombera ſur A ou ſur B. Nous laiſſons au lecteur intelligent le ſoin de démêler tous ces cas.

L'écrit de M. *Huyghens* n'eſt pas moins élégant que celui de *Wren*. Sa maniere d'expoſer les loix du choc, eſt abſolument la même. Il y a auſſi cette conformité entre ces deux écrits, que leurs Auteurs n'ont conſidéré que les corps élaſtiques. M. *Huyghens* les nomme *durs*, apparemment par oppoſition aux corps mous qui n'ont aucune force pour réſiſter au changement de leur figure ou pour la reprendre: car nous ne croyons pas que, quoique ſectateur de *Deſcartes* en pluſieurs points, il pensât comme ce Philoſophe, qu'une dureté parfaite eſt une cauſe ſuffiſante de réflection.

La méthode qu'a ſuivi M. *Huyghens* en établiſſant ſes loix du choc, n'eſt pas auſſi directe que celle qu'on a expoſée plus haut. On la trouve dans ſon Traité poſthume, *De motu corporum ex percuſſione*. Il ſemble qu'il ait craint d'entrer dans l'analyſe phyſique de ce qui ſe paſſe dans le choc des corps. Au lieu de ſuivre cette méthode, il part de quelques vérités d'expériences qu'il combine ingénieuſement, & dont il tire ſes démonſtrations. Voici une eſquiſſe de ſa maniere de raiſonner.

Que

Que deux corps égaux (& élaſtiques) ſe choquent avec des vîteſſes égales, on ſçait par l'expérience qu'ils ſe réfléchiſſent avec leurs mêmes vîteſſes. Mais que ces deux mêmes corps viennent à ſe choquer avec des vîteſſes inégales, qu'arrivera-t'il ? Pour le trouver, qu'on imagine, dit M. *Huyghens*, un homme dans un bateau tenant de ſes deux mains les fils *a* A, *b* B, auxquels ſont ſuſpendus les corps A & B, & que tandis que ce bateau eſt porté d'un mouvement égal, de C en D, il rapproche ces deux corps avec une égale vîteſſe à ſon égard; ils auroient parcouru chacun la moitié de leur diſtance reſpective, ſi le bateau eût été immobile. Mais en le ſuppoſant ſe mouvoir, le corps A aura parcouru ſeulement A D, & l'autre B D. Tel eſt effectivement leur mouvement réel, & celui qu'ils paroîtroient avoir à quelqu'un qui les conſidéreroit, placé ſur le rivage. Mais perſonne n'ignore que lorſque pluſieurs corps ont un mouvement commun, leurs mouvemens particuliers s'exécutent tout de même que ſi ce mouvement commun n'exiſtoit pas. Les deux corps égaux A & B, étant donc portés l'un contre l'autre avec des vîteſſes égales à l'égard du bateau, ils ſe réfléchiront l'un contre l'autre au point D, avec leurs mêmes vîteſſes; & ſi le bateau étoit rendu immobile au moment du choc, en faiſant D F & D H égales à C A, ils arriveroient en même temps en F & en H : donc le bateau continuant à avancer d'une quantité D E égale à C D, le corps A arrivera de D en G, & le corps B de D en I, en même temps. Or D I = A D, & D G = B D : ainſi les corps A & B égaux auront fait échange de leurs vîteſſes. Tous les autres cas du choc entre des corps égaux, ſe démontrent de la même maniere. A l'égard de ceux de maſſes inégales, M. *Huyghens* commence par démontrer que s'ils ſe choquent l'un l'autre avec des directions contraires, & des vîteſſes réciproquement proportionnelles à leurs maſſes, ils ſe réfléchiront l'un de l'autre avec ces mêmes vîteſſes. Il fait uſage pour cela d'un principe particulier ; ſçavoir, que ſi l'on conçoit que les corps qui vont ſe choquer aient acquis leurs vîteſſes par une chûte perpendiculaire, & qu'après le choc ils ſoient réfléchis en haut avec leurs vîteſſes nouvelles, leur centre de gravité ne ſçauroit remonter à une plus grande hauteur que celle d'où il eſt tombé. La propoſition ci-deſſus étant démontrée, le reſte ne fait plus

Fig. 99.

de difficulté, & ſe démontre facilement, à l'aide de la méthode qu'on a développée à l'égard des corps égaux.

En voilà aſſez ſur le tour de démonſtration employé par M. *Huyghens*. Notre attention doit maintenant ſe porter ſur diverſes vérités remarquables que nous offre cette théorie, & que M. *Huyghens* obſerva le premier. Il ſuit d'abord des loix du choc que nous venons d'expoſer, que *Deſcartes* s'eſt trompé en penſant qu'il y avoit toujours la même quantité de mouvement avant & après le choc. On obſerve au contraire que dans les chocs de corps ſans reſſort, toutes les fois qu'il y a des directions oppoſées, il ſe fait une perte de mouvement. Mais l'uniformité avec laquelle agit toujours la nature, ſe retrouve en ce que, non ſeulement dans ce cas, mais encore dans tous les autres, le centre de gravité commun, ou eſt immobile, ou ſe meut avant & après le choc, avec une vîteſſe uniforme. Ainſi ce n'eſt point, comme *Deſcartes* le prétendoit, la quantité abſolue de mouvement qui reſte invariable, c'eſt ſeulement la quantité de mouvement vers un même côté. Cette loi, la nature l'obſerve auſſi dans le choc des corps élaſtiques. M. *Huyghens* le remarque dans l'écrit qu'il donna à la Société Royale en 1669. Il ne s'y borne même pas au cas de deux corps qui ſe choquent centralement; il dit qu'il peut démontrer que cela arrive quelle que ſoit la maniere dont ils ſe choquent, & quel que ſoit leur nombre. Les démonſtrations des Méchaniciens modernes ne laiſſent aucun doute ſur la vérité de cette propoſition.

Dans les corps ſans reſſort, il ne ſe fait jamais aucune augmentation dans la quantité abſolue du mouvement. Elle peut ſeulement diminuer; mais dans les corps élaſtiques, quelquefois elle eſt moindre, quelquefois plus grande après le choc qu'auparavant.

Il arrive dans le choc des corps élaſtiques un autre phénomene bien remarquable, & obſervé pour la premiere fois par M. *Huyghens*. C'eſt que la ſomme des produits de chaque maſſe par le quarré de ſa vîteſſe, eſt le même avant & après le choc. Cette loi a été appellée par quelques Phyſiciens, *la conſervation des forces vives*, parce que le célebre *Leibnitz* meſure la force des corps en mouvement par le produit de la maſſe & du quarré de la vîteſſe, & qu'il nomme cette force, *force*

vive, à la différence de la force *morte*, ou de la ſimple preſſion, qui n'eſt que comme le produit de la maſſe par la vîteſſe qu'elle auroit ſi le mouvement s'effectuoit. Mais les Méchaniciens qui évitent d'entrer dans la querelle qu'a excité le ſentiment de *Leibnitz*, appellent cette loi, *la loi des forces aſcenſionnelles*, parce que de cette égalité de ſomme entre les produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes avant & après le choc, il ſuit que le centre de gravité d'un ſyſtême de corps, a la puiſſance de remonter à la même hauteur que celle d'où il eſt deſcendu.

M. *Huyghens* termine ſon écrit par une remarque curieuſe, qui mettra auſſi fin à ce que nous avons à dire ſur ce ſujet. La voici : lorſqu'un corps en choque un autre en repos par l'entremiſe d'un tiers d'une grandeur moyenne, il lui communique toujours plus de mouvement, que s'il le frappoit immédiatement; & ce mouvement eſt le plus grand qu'il puiſſe être, lorſque le corps intermédiaire eſt moyen géométrique entre l'un & l'autre. Il y a plus : ce mouvement ſera encore plus grand ſi le corps dont nous parlons eſt choqué par l'entremiſe de deux autres qui avec les deux extrêmes faſſent une proportion géométrique continue. Enfin plus il y aura de moyens proportionnels entre l'un & l'autre, plus grande ſera la vîteſſe du dernier comparée avec celle du premier. Si l'on ſuppoſoit, par exemple, cent corps en proportion double, le plus grand choquant le moindre par l'entremiſe des 98 autres, lui imprimeroit une vîteſſe 2338492188000 fois plus grande que la ſienne, au lieu que s'il l'eût choqué immédiatement, il ne lui eût donné qu'une vîteſſe un peu moindre que double.

Dans tout ce que nous venons de dire ſur le choc des corps à reſſort, nous avons ſuppoſé que ce reſſort étoit parfait, c'eſt-à-dire, qu'il ſe reſtituoit avec la même force que celle par laquelle il avoit été comprimé. Mais comme il n'eſt rien dans la nature qui ſoit doué de la perfection Mathématique, on doutera avec raiſon qu'aucun corps ait un reſſort parfait. La Méchanique cependant ne ſera pas ici en défaut : il eſt aiſé d'appliquer aux corps à reſſort imparfait la théorie précédente; car ſuppoſons un corps dont le reſſort ne ſe rétablit qu'avec les $\frac{15}{16}$ de la force avec laquelle il a été bandé, il ne rendra que les $\frac{15}{16}$ de la vîteſſe avec laquelle il a été choqué. Ainſi au lieu de diſtri-

buer aux corps qui ſe choquent la vîteſſe reſpective entiere en raiſon réciproque des maſſes, ce ſeront ſeulement les $\frac{15}{16}$ de cette vîteſſe qu'il leur faudra diſtribuer de cette maniere.

La théorie précédente n'eſt pas ſeulement appuyée ſur le raiſonnement & ſur l'examen attentif de ce qui ſe paſſe dans le choc des corps; elle eſt auſſi fondée ſur l'expérience. Les écrits de MM. *Wallis*, *Wren* & *Huyghens*, ne furent pas plutôt publics, que les Phyſiciens imaginerent divers moyens de l'éprouver & de la rendre ſenſible aux yeux. M. *Wren* s'en étoit déja aſſuré par des expériences qui n'ont pas été publiées. M. *Mariotte*, qui cultivoit dans le même temps avec grand ſoin la Phyſique expérimentale, ſe propoſa le même objet. La premiere partie de ſon Traité *de la Percuſſion*, (Paris 1677.) eſt occupée à démontrer les loix du choc données ci-deſſus.

Comme la nature n'offre point de corps parfaitement durs, on eſt obligé dans ces expériences de s'en tenir aux corps mous & aux corps à reſſort. Pour les premiers, on prend des balles d'argille molle & fraîche, & pour ceux à reſſort, des balles d'yvoire ou de marbre. On les ſuſpend à des fils de maniere qu'étant dans la perpendiculaire, elles ſe touchent, & qu'elles ſe choquent centralement. Alors, pourvu qu'on ne leur faſſe pas décrire des arcs de plus d'une dixaine de degrés, leurs vîteſſes, quand elles ſont arrivées à la perpendiculaire, ſont ſenſiblement comme les arcs d'où elles ſont tombées. Il eſt donc facile de les faire choquer avec tels degrés de vîteſſe que l'on veut, & de remarquer quels degrés de vîteſſe elles acquierent dans le choc; car cette nouvelle vîteſſe eſt auſſi ſans erreur ſenſible, comme l'arc qu'elle leur fait parcourir en remontant. On trouve par ce moyen un accord ſatisfaiſant entre la théorie ci-deſſus & l'expérience. On voit toujours les boules, ſoit molles, ſoit élaſtiques, s'élever ſenſiblement aux hauteurs que la théorie a déterminées d'avance. La plûpart des Ecrivains de Phyſique expérimentale ont imité M. *Mariotte*; & donnent à la preuve des loix de la communication du mouvement, quelque partie de leur ouvrage. On peut voir ſur ce ſujet M. *Deſaguliers*, M. *s' Graveſande*, M. l'Abbé *Nollet*. Le ſuffrage unanime de ces Phyſiciens, fait de ces loix des vérités d'expérience qu'il n'eſt plus permis de révoquer en doute.

II.

De M. Huyghens.

Il n'eſt perſonne dans le dix-ſeptieme ſiecle, ſi nous en exceptons *Galilée* & *Newton*, à qui la Méchanique ait des obligations plus nombreuſes qu'à M. *Huyghens*. On vient de le voir concourir à l'honneur de la découverte de la loi du choc des corps. Nous lui devons encore l'application du pendule aux horloges; la curieuſe découverte de l'iſochroniſme des chûtes dans la cycloïde; la théorie des centres d'oſcillation, l'une des plus délicates & des plus ſubtiles de la Méchanique; les premiers traits enfin de celle des forces centrales. Comme c'eſt ici l'endroit de notre hiſtoire, où M. *Huyghens* joue le plus grand rôle, c'eſt celui où nous avons remis de donner le précis de ſa vie.

M. *Huyghens*, (Chriſtian) Seigneur de Zelem & de Zulichem, reçut le jour à la Haye, le 14 Avril 1629, de Conſtantin *Huyghens*, Secretaire & Conſeiller des Princes d'Orange. M. Conſtantin *Huyghens*, étoit non ſeulement homme de Lettres, comme le témoignent les Poéſies Latines qu'on a de lui, mais encore verſé dans la Phyſique & les Mathématiques. Il fut le premier Maître de ſon fils, qui commença, dès l'âge de treize ans, à donner des indices de ce génie profond qui devoit un jour le guider dans les recherches les plus obſcures.

Le jeune M. *Huyghens*, deſtiné par ſon pere à l'étude du Droit, fut envoyé en 1645, à l'Univerſité de Leyde. Il y prit les leçons du Profeſſeur *Vinnius*, mais en même temps il y trouva *Schooten*, le Commentateur de *Deſcartes*, qui fortifia ſon goût pour les Mathématiques. Aidé des ſecours de cet habile homme, & plus encore de ſon propre génie, il fit des progrès rapides dans tout ce que la Géométrie de *Deſcartes* a de plus difficile. *Schooten* a donné place dans ſon Commentaire à diverſes obſervations utiles, ouvrage de ce temps de la vie de M. *Huyghens*.

Le fameux Livre du P. *Grégoire de Saint-Vincent*, fut l'occaſion du premier ouvrage public de M. *Huyghens*. Il le réfuta en 1651, par un petit écrit qui ne laiſſe lieu à aucune réponſe ſolide, & auquel les partiſans de *Grégoire de Saint-Vincent* ne répondirent effectivement que par des traits de mauvaiſe hu-

meur. Il publia la même année, ſes *Theoremata de circuli & hyperbolæ quadraturâ*, & en 1654, ſon ingénieux Traité intitulé *De circuli magnitudine inventa nova*, dont nous avons parlé ailleurs. Mais ce ne ſont-là que des eſſais de la jeuneſſe de M. *Huyghens*. Ils ne peuvent entrer en comparaiſon avec les inventions dont il enrichit depuis la Géométrie & l'Analyſe. Telles ſont entr'autres la théorie des développées, dont nous avons déja rendu un compte étendu (*a*) ; & ſes découvertes de Géométrie & de Méchanique mixtes, qui doivent nous occuper une partie de cet article & de quelques-uns des ſuivans. On lui doit conjointement avec Meſſieurs *Paſcal* & *de Fermat*, les premiers traits de la nouvelle ſcience de calculer la probabilité. Il en dévoila les principes en 1657, dans ſon écrit intitulé *De ratiociniis in ludo Aleæ*.

Les autres parties des Mathématiques n'ont pas de moindres obligations à M. *Huyghens*. Nous avons déja annoncé au commencement de cet article, celles que lui a la Méchanique. L'Aſtronomie lui eſt redevable de la meſure exacte du temps dont elle eſt aujourd'hui en poſſeſſion ; de la découverte de l'anneau de Saturne, de celle d'un des ſatellites de cette planete, de la premiere remarque de l'applatiſſement de la terre, depuis ſi heureuſement confirmée par l'obſervation. Perſonne enfin ne porta plus loin que lui l'art de travailler les verres de Téleſcope, ſoit pour la longueur des foyers, ſoit pour l'excellence. Nous nous bornons à ce tableau ſuccinct & imparfait des travaux de M. *Huyghens*. Tous ces différens objets doivent trouver leur place ailleurs, & y ſeront expoſés avec l'étendue convenable.

M. *Huyghens* s'étoit acquis dès l'année 1665, une telle réputation, que Louis XIV voulant fonder dans ſa capitale une Académie des Sciences, le fit inviter, ſous des conditions honorables & avantageuſes, à venir s'établir en France. Il les accepta, & il vint réſider à Paris en 1666. Durant le ſéjour qu'il y fit, il fut un des principaux ornemens de l'Académie Royale des Sciences, dont il enrichit les Regiſtres d'une multitude d'écrits profonds. Il eût peut-être terminé ſa carriere en France, ſans la révocation de l'Edit de Nantes. En vain

(*a*) Voyez l. 1, art. VIII.

tenta-t'on de l'y retenir, en l'assurant qu'il y jouiroit de la même liberté qu'auparavant ; il ne put se résoudre à vivre davantage dans un pays où sa religion alloit être proscrite, & ses freres persécutés. Il prévint l'Édit fatal en se retirant dans sa patrie en 1681.

De retour en Hollande, M. *Huyghens* continua de cultiver ses sciences favorites, & de les enrichir de divers ouvrages. Tels furent son *Astroscopia compendiaria à tubi molimine liberata*, son Traité *de Lumine*, & celui *de Gravitate*. Il eut part aux solutions de quelques-unes des questions célebres que proposerent vers ce temps les Géometres qui faisoient usage du nouveau calcul de *Leibnitz*, telles que celle de la courbe isochrone, & principalement celle de la chaînette. Ce n'est pas un des traits les moins glorieux de la sagacité de M. *Huyghens*, d'avoir pu, presque destitué des secours de ce nouveau calcul qui lui étoit peu familier, surmonter des difficultés de cette nature.

M. *Huyghens* promettoit encore plusieurs années d'une vie utile aux Mathématiques, lorsqu'il fut saisi de la maladie qui termina ses jours. Sa mort arriva le 5 Juin 1695. Il légua par son testament tous ses papiers à la Bibliothéque de Leyde ; priant Messieurs *Burcher de Volder* & *Fullenius*, Mathématiciens habiles, de faire un choix de ce qui étoit en état de voir le jour, & de le publier. Ils s'en acquitterent en 1700, qu'ils publierent un volume posthume des ouvrages de M. *Huyghens*. Depuis ce temps, M. *s' Gravesande* nous a procuré une édition complette des Œuvres de cet homme célebre. Les deux premiers volumes de cette intéressante collection, parurent en en 1724 in-4°, & les deux derniers en 1728.

Application du pendule à régler les horloges.

Parmi les découvertes Méchaniques de M. *Huyghens*, nous en remarquons une principale, & qui semble avoir été le motif & l'occasion de toutes les autres. C'est celle de l'application du pendule à régler le mouvement des horloges. Cette circonstance nous prescrit l'ordre que nous avons à suivre dans l'exposition de ces découvertes.

L'égalité de durée entre les oscillations du pendule étoit un phénomene déja fort connu, lorsque M. *Huyghens* entra dans la carriere des Mathématiques. *Galilée*, qui en avoit fait la premiere observation, avoit aussi eu l'idée de l'appliquer à la

meſure du temps, & quelques Aſtronomes, à ſon imitation, l'avoient employé dans cette vue. Mais faute de moyens commodes pour en compter les vibrations, & en perpétuer le mouvement, cette idée n'avoit pas encore apporté beaucoup d'utilité à l'Aſtronomie. On voit, à la vérité, un Auteur Italien, (M. *Carlo Dati*) revendiquer à *Galilée* ou à ſon fils, l'invention de M. *Huyghens* (*a*). Mais c'eſt une pure aſſertion qui, n'étant revêtue d'aucune preuve, ne mérite pas grande attention. D'ailleurs, quelle apparence qu'une invention ſi utile, ſi facile à mettre en pratique, & ſi recherchée non ſeulement par les Sçavans, mais encore par les Artiſtes, eût reſté pendant près de vingt ans enſevelie dans un pareil oubli. Cela n'eſt aucunement vraiſemblable.

M. *Huyghens* ne s'adonna pas plutôt à l'Aſtronomie, que ſenſible aux avantages que cette ſcience pouvoit tirer du pendule, & aux inconvéniens qui s'y oppoſoient, il travailla à les lever. Le ſuccès répondit à ſes deſirs. Egalement doué du génie de la Méchanique, & de celui de la Géométrie, il imagina une conſtruction d'horloge où le pendule ſervant de modérateur au rouage, ne lui permet qu'un mouvement très-uniforme. Voici une idée de ce méchaniſme. Le pendule qui eſt une verge de fer au bas de laquelle le poids eſt ſuſpendu, communique par ſa partie ſupérieure un mouvement alternatif à un aiſſieu garni de deux petites palettes tellement diſpoſées, qu'à chaque vibration elles ne laiſſent paſſer qu'une dent de la roue avec laquelle elles s'engrenent. Cette roue ne peut donc avoir qu'un mouvement auſſi uniforme que celui du pendule même, & puiſque de ſon mouvement dépend celui de tout le rouage, dont les parties s'engrenent mutuellement, & enfin avec elle, ce rouage eſt contraint de marcher avec la même uniformité que le pendule. Il y a plus : ce rouage, par l'action du poids ou du reſſort qui le met en mouvement, fait un petit effort contre le pendule, & lui communique à peu près la même quantité de mouvement qu'il en perd à chaque vibration par la réſiſtance de l'air, de ſorte qu'au lieu de reſter vingt-quatre heures en mouvement, comme il pourroit faire ſans cela, il ne peut plus s'arrêter que lorſ-

(*a*) *Lettera a'i Philaleti di M. Timauro Antiate.*

que

que le poids ou le reſſort de la machine ceſſera d'agir. M. *Huyghens* fit cette belle découverte vers la fin de l'année 1656, & vers le milieu de 1657, il préſenta aux Etats une horloge de ſa nouvelle conſtruction. Il la dévoila bientôt après par un écrit particulier, & elle a été ſi univerſellement adoptée, que les petites horloges d'appartemens en ont pris le nom de pendules.

Il y avoit dans les premiers ſuccès de cette invention, de quoi ſatisfaire M. *Huyghens*. Mais l'envie de la porter à une plus grande perfection, ne lui permit pas d'en reſter-là. C'eſt à cette ſçavante inquiétude que nous devons les profondes & ſubtiles recherches qu'il mit au jour en 1673, dans ſon fameux ouvrage intitulé *Horologium oſcillatorium.*

M. *Huyghens* conſidéra qu'il pouvoit arriver par diverſes circonſtances que les oſcillations de ſon pendule ne fuſſent pas toujours égales en étendue. Or dans ce cas leur durée n'auroit plus été parfaitement la même : car, nous l'avons déja remarqué, cette égalité de temps entre les oſcillations d'étendue inégale, n'eſt pas entiérement parfaite ; elle n'eſt que ſenſible, & même il faut pour cela qu'elles ſoient aſſez petites. M. *Huyghens* craignit que ces petites différences accumulées, ne fiſſent à la fin une ſomme ſenſible : cette conſidération lui inſpira l'idée de faire enſorte que quelle que fût l'étendue des oſcillations de ſon pendule, elles fuſſent géométriquement égales : or ce problême ſe réduit à déterminer le long de quelle courbe un poids doit rouler, afin que de quelque point que ſa chûte commence, il arrive dans le même temps au plus bas. Il le rechercha, & il trouva que c'étoit la cycloïde qui jouiſſoit de cette propriété. Pour nous expliquer plus clairement, qu'on ſuppoſe une cycloïde telle que A B S renverſée, ou le ſommet en bas, de quelque point A, B, ou C, qu'on laiſſe tomber un corps il arrivera en S dans le même temps (*a*). Les Géometres cherchant à abréger le diſcours, *Fig.* 100.

(*a*) Cette belle vérité, dont la découverte étoit très-difficile, peut être néanmoins facilement démontrée. Elle eſt fondée ſur cette propoſition préliminaire, dont tout lecteur verſé dans la ſcience du mouvement, verra bientôt la démonſtration. *Si un corps eſt pouſſé & accéléré vers un point* S, *par une force qui eſt toujours proportionnelle à la diſtance où il eſt de ce point, de quelqu'endroit qu'il parte, il arrivera à ce point S dans le même temps.* Or c'eſt-là préciſément le cas d'un corps qui roule le long d'une cycloïde. Car la force avec laquelle le corps placé en B, tend vers le point S, eſt toujours comme l'arc B S, qui eſt l'eſpace à parcourir. En effet la tangente en B, eſt parallele à la corde *b* S : or puiſque toutes les cordes D S, *b* S, *c* S, ſont par- *Fig.* 100.

ont depuis donné à cette propriété le nom de *Tautochronisme*, comme qui diroit *l'identité* ou *l'égalité du temps* entre les chûtes. Par la même raiſon on nomme *Tautochrones* les courbes qui jouiſſent de la même propriété dans certaines circonſtances, & ſuivant les différentes hypotheſes. La cycloïde eſt la courbe *Tautochrone* dans l'hypotheſe de l'accélération uniforme des graves, & des directions paralleles. Mais ſi nous ſuppoſons ces directions convergentes à un point, & la force de la peſanteur varier comme la diſtance au centre, ce ſera une épicycloïde. Cette élégante & curieuſe vérité eſt dûe à M. *Newton*.

M. *Huyghens* ayant montré qu'il falloit que le poids du pendule décrivît une cycloïde, afin que ſes oſcillations quelconques fuſſent d'égale durée, il lui reſtoit à exécuter ce méchaniſme. Il imagina pour cela avec beaucoup de ſagacité, que toute courbe pouvoit être décrite par le développement d'une autre, de ſorte qu'afin que le centre du pendule décrivît une cycloïde, il falloit déterminer cette autre courbe, & faire que le fil du pendule s'appliquât ſur elle dans ſes mouvemens. Ce fut-là l'origine de ſa célebre théorie des développées dont nous avons rendu un compte ſuffiſamment étendu (*a*). Nous nous bornons ici à remarquer qu'il trouva que la courbe ſur laquelle ſe devoit appliquer le fil du pendule, étoit encore une cycloïde égale, & poſée ſeulement en ſens contraire, comme on voit dans la figure 100. En conſéquence il ſuſpendit la verge ou la barre de ſon pendule à des fils de ſoie, & il plaça vers le point de ſuſpenſion deux arcs de cycloïde, afin que ces fils s'appliquaſſent ſur ces arcs pendant les oſcillations. Rien de plus ingénieux que tout ce méchaniſme; mais quelque agréables que ſoient pour l'eſprit ces ſubtilités de Géométrie & de Méchanique, on s'eſt apperçu dans la ſuite qu'elles étoient ſuperflues pour la pratique. On a même trouvé dans la ſuſpenſion propoſée par M. *Huyghens*, des inconvéniens qui l'ont fait rejetter, & l'on s'en eſt tenu à ne faire décrire aux pendules que de fort petits arcs. L'expérience a appris qu'il

courues en temps égaux, la force avec laquelle un corps placé au commencement d'une corde quelconque tend à rouler, eſt comme cette corde. Mais les arcs de cycloïde A S, B S, C S, &c. ſont doubles des cordes correſpondantes. Par conſéquent la force accélératrice à un point quelconque, eſt comme l'arc qui reſte à parcourir.

(*a*) Liv. II, art. VIII.

n'en falloit pas davantage pour donner aux horloges une régularité ſuffiſante pour les uſages les plus délicats.

Ne terminons pas cet article ſans faire connoître une propoſition utile & remarquable que nous offre encore cette théorie de M. *Huyghens*. C'eſt que le temps d'une oſcillation entiere d'un poids décrivant une cycloïde, eſt au temps qu'il employeroit à tomber de la hauteur de l'axe de cette cycloïde, comme la circonférence au diametre. Cette vérité mit M. *Huyghens* en état de déterminer avec bien plus de préciſion qu'on n'avoit encore fait, un élément des plus importans de toutes les théories où il eſt queſtion de la chûte des corps, ſçavoir la grandeur de l'eſpace qu'ils parcourent en vertu de leur peſanteur dans un temps donné, comme celui d'une ſeconde. La choſe eſt facile, d'après la propoſition ci-deſſus : car ſuivant la théorie des développées, l'axe D S de la cycloïde eſt la moitié de la longueur du pendule. Or l'on peut connoître avec beaucoup d'exactitude la longueur du pendule à ſecondes. Il eſt, par exemple, ſous la latitude de Paris, de trois pieds, huit lignes & demie. On aura donc par le rapport du diametre à la circonférence, le temps qu'employeroit un corps à tomber de la moitié de la longueur précédente, c'eſt-à-dire, de 18 pouces, 4 lignes $\frac{1}{4}$. Ce temps ſe trouve de 19$'''$ $\frac{1}{10}$. Enfin connoiſſant qu'un corps tombe dans cet intervalle de temps, de la hauteur ci-deſſus, la théorie des mouvemens uniformément accélérés, enſeigne à déterminer quelle hauteur parcourra ce corps en une ſeconde préciſe. Le calcul que nous venons d'indiquer, le donne de quinze pieds, un pouce de Paris.

III.

De la théorie des centres d'oſcillation.

Il n'y auroit aucune difficulté à déterminer la longueur d'un pendule, s'il étoit, comme on l'a tacitement ſuppoſé juſqu'ici, formé d'un poids unique & concentré en un point indiviſible. Mais ce n'eſt là qu'une ſuppoſition mathématique. Tout pendule eſt formé d'un ou même de pluſieurs poids, qui, de même que la verge à laquelle ils ſont ſuſpendus, ont une étendue ſenſible. On peut même mettre en vibration une figure quelconque. Dans un pendule de cette ſorte, quel ſera le point qui déterminera ſa lon-

gueur, & par conſéquent la durée de ſes vibrations. Voilà un problême que préſente naturellement le mouvement des pendules, & dont la conſidération a donné lieu à une des plus délicates & des plus profondes théories de la Méchanique moderne, ſçavoir celle des centres d'oſcillation.

Pour ſe former une idée juſte de cette théorie, on doit ſe repréſenter pluſieurs poids diſtribués le long d'une verge infléxible. Le plus voiſin feroit, comme l'on ſçait, s'il étoit ſeul, ſes oſcillations dans moins de temps que le plus éloigné; mais attachés comme ils ſont par un lien infléxible, ils ſont contraints de ſe mouvoir enſemble, de ſorte qu'ils tempérent mutuellement leurs vîteſſes. Le plus vîte hâte l'autre, & celui-ci retarde le premier. Ainſi il eſt un point moyen, où étant attachés ils feroient leurs oſcillations dans le même temps qu'ils mettent à les faire, placés comme ils ſont à des diſtances inégales du point de ſuſpenſion. C'eſt ce point auquel on a donné le nom de *centre d'oſcillation*, par une raiſon ſemblable à celle qui a fait donner celui de centre de gravité, au point où toute la maſſe du corps concentrée produiroit ſur un appui fixe la même preſſion que diſperſée. Cette recherche offre à l'eſprit géométrique, un vaſte champ de ſpéculations; mais ce n'eſt pas là ſon ſeul mérite. La détermination des centres d'oſcillation eſt néceſſaire pour reconnoître ſans tâtonnement la durée des vibrations d'un pendule quelconque de forme aſſignée, ou pour lui donner la longueur convenable, afin que ſes vibrations ſoit de la durée qu'on demande. Sans la connoiſſance de ce centre, on ignoreroit même la longueur préciſe du pendule qui bat les ſecondes, longueur importante à connoître, puiſqu'elle ſert de baſe à toutes les déterminations de ce genre. Enfin ce que le centre de gravité eſt dans la Statique, le centre d'oſcillation l'eſt à pluſieurs égards dans la Dynamique ou la ſcience du mouvement actuel. Une infinité de queſtions ſur le mouvement des corps exigent la connoiſſance de ce centre.

On ne parvient du moins ordinairement à réſoudre une queſtion dans ſon entier, qu'en s'élevant en quelque ſorte par degrés des cas les plus faciles aux plus difficiles. C'eſt pour cela qu'avant de conſidérer les centres d'oſcillation des ſolides, les Géometres commencent par examiner ceux des grandeurs

plus ſimples, comme les lignes & les ſurfaces. Nous ne pouvons mieux faire que de ſuivre le même ordre dans le récit de leurs recherches & de leurs découvertes.

On peut mettre une figure plane en vibration de deux manieres différentes. Prenons pour exemple un triangle ſuſpendu par ſon ſommet. On pourra en premier lieu, le faire mouvoir de maniere que ſes ordonnées reſtent paralleles à l'horiſon auſſi-bien qu'à la ligne indéfinie paſſant par le point de ſuſpenſion, & que nous nommerons par cette raiſon *axe de ſuſpenſion*. Cette ſorte d'oſcillation eſt la plus ſimple, & on la nomme *in planum*, en plan. Mais on peut encore faire balancer ce triangle de maniere que reſtant toujours dans un même plan, un des angles de ſa baſe s'abaiſſe pendant que l'autre s'éleve. Cette eſpece d'oſcillation ſe nomme *in latus*, de côté. Remarquons dès à préſent qu'il y a une grande différence entre ces deux manieres de faire oſciller une figure. Dans la premiere, le centre d'oſcillation tombe toujours au dedans. Dans la ſeconde, il peut tomber au dehors, c'eſt-à-dire, que le pendule ſimple d'égale durée, peut être beaucoup plus long que l'axe de la figure. Il eſt facile de s'en convaincre par la conſidération ſuivante. Plus un triangle ſuſpendu par le ſommet & mu *de côté*, devient obtus, plus ſes oſcillations doivent devenir longues : car s'il étoit infiniment obtus, ce ne ſeroit plus qu'une ligne droite ſuſpendue par le milieu, & en lui donnant un mouvement, elle ne ceſſeroit de tourner du même côté. Ainſi ſes vibrations ſeroient infinies en durée, & par conſéquent le pendule iſochrone ſeroit d'une longueur infinie. Il en doit être de même de certains ſolides, d'un cône, par exemple, d'un conoïde, ſuſpendus par le ſommet. : car s'ils ſont infiniment obtus, ils ne différeront plus d'un cercle ſuſpendu par ſon centre, dont les oſcillations ſeroient auſſi d'une durée infinie.

La théorie des centres d'oſcillation doit ſa premiere origine aux queſtions que le Pere *Merſenne* propoſoit aux Mathématiciens de ſon temps. Il leur demanda, vers l'an 1646, de déterminer la durée des oſcillations de pluſieurs figures ſuſpendues de différentes manieres, & mues ſoit *en plan*, ſoit *de côté*. *Deſcartes*, *Roberval*, *Huyghens* même quoiqu'encore fort jeune, furent particuliérement invités à cette recherche.

Le problême étoit d'une nature encore trop ſupérieure à la Méchanique de ce temps-là, pour être traité avec beaucoup de ſuccès. *Deſcartes*, *Roberval*, s'y appliquerent néanmoins, & quoiqu'il s'en faille beaucoup qu'ils aient réſolu ſuffiſamment le problême, on ne laiſſe pas d'appercevoir dans leurs tentatives des traits de ſagacité. *Deſcartes* donna la vraie ſolution du cas où une figure plane fait ſes oſcillations *in planum*. Elle s'accorde avec celle de M. *Huyghens*; mais il ſe trompa en ce qui concerne les centres d'oſcillation des ſolides, & même des figures planes qui oſcillent *de côté* : cas bien plus difficiles que le premier qu'il avoit réſolu (*a*).

Roberval fut ici contre ſa coutume un peu plus heureux, & alla plus loin que *Deſcartes* : car non ſeulement il aſſigna le centre d'oſcillation dans les figures mues *en plan*, mais il réuſſit encore à le trouver dans quelques figures mues de côté, comme le ſecteur ſuſpendu par ſon centre, & la circonférence circulaire. Mais deſtitué d'une méthode générale & aſſez ſûre, il ſe trompa dans les autres figures, ſoit planes, ſoit ſolides (*b*). Ce problême éleva entre *Roberval* & *Deſcartes* une conteſtation dans laquelle celui-ci n'eût pas autant la raiſon de ſon côté que dans les autres diſputes qu'ils avoient déja eues enſemble (*c*). A dire vrai, ils avoient tort tous deux; car ils ſe trompoient l'un & l'autre dans les regles générales qu'ils donnoient pour la détermination de ce centre dans les ſolides & les figures oſcillant de côté.

Il eſt à propos de remarquer, avant que d'aller plus loin, au ſujet de ces premieres tentatives pour réſoudre le problême des centres d'oſcillation, qu'on ne l'avoit point encore enviſagé ſous ſon vrai point de vue. *Deſcartes*, *Roberval*, *Merſenne*, *Fabri* (*d*), au lieu du centre d'oſcillation qui leur étoit propoſé, rechercherent le centre de percuſſion, ſuppoſant tacitement qu'ils étoient la même choſe. Le centre d'oſcillation eſt bien, à la vérité, au même point que celui de percuſſion, mais l'une & l'autre queſtion ſont fort différentes, & doivent être traitées d'après des principes qui n'ont rien de commun.

(*a*) Lettr. de Deſcartes. *T. III, p. 487. & ſuiv.*

(*b*) *Merſenni, Reſt. Phyſico-Math.* c. 11, & 12.

(*c*) Lettr. de Deſcartes. *Ibid.*

(*d*) Tract. de motu, Append. Phyſico-Math. *De centro percuſſionis.*

Le centre de percuſſion eſt le point autour duquel tous les efforts des parties d'un corps mis en mouvement, ſont en équilibre, de ſorte que de même qu'un appui qui ſoutient un corps par ſon centre de gravité, en ſupporte tout le poids, ainſi le point ſur lequel eſt appuyé le centre de percuſſion, reçoit tout le choc du corps. Or il eſt aiſé de voir que ce problême eſt bien plus facile que l'autre ; car ſuppoſons pluſieurs poids enfilés par une verge tournant autour d'un centre, il eſt viſible que la quantité de mouvement de chaque poids, ou l'impreſſion qu'il eſt capable de faire contre l'obſtacle qu'il rencontre, eſt le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe qui eſt comme la diſtance au point de rotation. Ainſi les impreſſions de deux poids placés à différentes diſtances de ce point, ſeront comme les produits de leur maſſe par leur diſtance à ce point de rotation. Mais le centre de percuſſion eſt à l'égard de ces impreſſions, ce que le centre de gravité ſeroit à l'égard des poids eux-mêmes. Puis donc que pour avoir le centre de gravité, on multiplie chaque poids par ſa diſtance au point d'appui, qu'on fait une ſomme de tous ces produits, & qu'on la diviſe par la ſomme des poids, il faudra pour trouver le centre de percuſſion, multiplier chaque impreſſion par ſa diſtance au point d'appui, (ce qui revient au même que de multiplier chaque poids par le quarré de ſa diſtance à ce point,) faire une ſomme de tous ces produits, & la diviſer par la ſomme de toutes les impreſſions, c'eſt-à-dire, de tous les produits des poids par leur diſtance au point de rotation. Or celle-ci ne differe point du produit de la ſomme de tous les poids par la diſtance de leur centre de gravité à celui de rotation. On aura conſéquemment le centre de percuſſion en faiſant la ſomme des produits de chaque poids par le quarré de ſa diſtance au centre de rotation, & le diviſant par le produit de la ſomme de tous les poids, & de la diſtance de leur centre de gravité commun à ce point.

Il nous ſera maintenant facile de déterminer les centres de percuſſion dans toutes ſortes de figures mues *en plan* : car ſoit la figure SBA, mue autour du point S, & que ſur cette figure on conçoive un coin ou un onglet cylindrique formé par un plan incliné de 45°, & paſſant par l'axe de rotation ; chaque élément de ce ſolide, comme FI, repréſentera le produit de *Fig.* 101.

l'élément de la figure HF, multiplié par ſa diſtance à l'axe de rotation : tous les élémens de ce ſolide ſeront donc analogues & proportionnels aux impreſſions que feroient ceux de ſa baſe, & par conſéquent le centre de gravité de ce ſolide repréſentera le centre de percuſſion ; & ſi l'on conçoit de ce point tomber une perpendiculaire ſur la baſe, elle y marquera ce centre. Ainſi voilà le problême des centres de percuſſion réduit à la Géométrie pure. C'eſt maintenant à elle à déterminer la grandeur & les centres de gravité de ces ſolides. On verra par ce moyen que le centre de percuſſion d'une ligne droite eſt éloigné du point de rotation des deux tiers de ſa longueur, auſſi-bien que celui du rectangle tournant autour d'un de ſes côtés : car l'onglet cylindrique de la figure, ſe réduit dans le premier cas à un triangle, & dans le ſecond à un priſme triangulaire, dont les centres de gravité ſont placés de maniere que les perpendiculaires qui tombent ſur la baſe la rencontrent en des points éloignés du ſommet des $\frac{2}{3}$ de l'axe. Un triangle iſoſcele tournant autour de ſon ſommet, aura ſon centre de percuſſion aux $\frac{3}{4}$ de ſon axe, parce que le coin en queſtion, devient une pyramide dont le centre de gravité a une ſemblable poſition. On découvrira auſſi facilement par ce moyen quelle eſt la poſition du centre de percuſſion dans le triangle tournant autour de ſa baſe. On le trouvera au milieu de l'axe ; car c'eſt le point où tombe le centre de gravité du coin retranché par un plan paſſant par la baſe de ce triangle.

Nous n'avons conſidéré juſqu'ici que les centres de percuſſion des figures mues *en plan*. Si on les ſuppoſoit ſe mouvoir *de côté*, la détermination de ces centres ſeroit plus difficile. La raiſon s'en préſente ſans peine. Dans ce nouveau cas, chaque partie de l'ordonnée de la figure, a une vîteſſe différente, & par conſéquent fait un effort différent, qui doit être eſtimé, & par ſa diſtance au point de ſuſpenſion, & par l'angle que fait ſon bras de levier avec l'axe d'équilibre. Ainſi le problême devient plus compliqué : on en verra la ſolution lorſque nous traiterons des centres d'oſcillation. En attendant, voici une remarque qui peut ſervir à réſoudre quelques cas de ce problême. Si l'on a pluſieurs poids A, B, C, &c. dans un même plan, & mus de côté, ils agiront de même que s'ils

s'ils étoient tranſportés ſur l'axe d'équilibre aux points *a*, *b*, *c*, *Fig.* 102. &c. où cet axe eſt rencontré par les perpendiculaires A*a*, B*b*, &c. aux bras de levier SA, SB, SC, &c. On peut conclure auſſi-tôt delà, que la circonférence d'un cercle, tournant *de côté* autour d'un de ſes points, a ſon centre de percuſſion à l'extrêmité du diametre. Mais en voilà aſſez ſur le centre de percuſſion. Il eſt facile de voir par ce que nous venons d'en dire, combien il differe dans le fonds de celui d'oſcillation, & combien ſe trompoient ceux qui ayant trouvé le premier, penſoient avoir légitimement déterminé l'autre (*a*).

Il étoit réſervé à M. *Huyghens* de conſidérer pour la premiere fois la queſtion des centres d'oſcillation du vrai côté. Il avoit été conſulté par *Merſenne*, lorſque ce Pere la propoſa. Mais trop jeune encore, & ne faiſant que d'entrer dans la carriere des Mathématiques, il la trouva au deſſus de ſes forces, & ne ſçachant par où l'attaquer, il y renonça. Dans la ſuite, ayant imaginé ſon application du pendule à régler le temps, ce problême ſe préſenta de nouveau à lui. Il s'y appliqua avec de nouvelles forces, & ce qui lui avoit d'abord échappé ne ſe refuſa plus à ſes efforts. Il découvrit un principe propre à la détermination de ces centres; ce qui le mit en poſſeſſion de la belle théorie qu'on lit dans la quatrieme partie de ſon *Horol. oſcillatorium.*

Le principe fondamental de la théorie de M. *Huyghens*, eſt celui-ci. Si un pendule chargé de pluſieurs poids fait une partie de vibration, & qu'alors ces poids dégagés de la verge qui les aſtreint à ſe mouvoir enſemble, ſoient réfléchis perpendiculairement en haut avec leurs vîteſſes acquiſes, leur centre de gravité remontera préciſément à la même hauteur que celle d'où il eſt tombé. Ce principe, au reſte, M. *Huy-*

(*a*) Le D. Wallis, malgré ſa ſagacité, eſt tombé dans cette faute : on le voit (*Tract. de motu, part. III, c. XI.*), après avoir traité du centre de percuſſion, déduire par un ſimple corollaire, tout ce qu'il y a à dire ſur celui d'oſcillation ; &, quoiqu'il n'ait employé aucune conſidération propre à ce dernier, mettre ſa méthode en parallele avec celle de M. Huyghens ; en quoi il ſe trompoit aſſurément. Il ſe trompe auſſi en ce qui concerne le centre de percuſſion des ſolides, qu'il traite comme ſi toutes leurs tranches perpendiculaires à l'axe étoient réduites à leur centre. Ainſi il fixe le centre de percuſſion du cylindre aux $\frac{2}{3}$ de l'axe, celui du cône aux $\frac{4}{5}$: ſuivant la vraie théorie, ils ſont plus éloignés, comme on le verra plus loin. Cette double faute a été commiſe par divers autres Auteurs, comme M. Carré, (*Elémens du calcul intégral*), & M. Stone, (*Traité du calcul intégral*). Tout ce que diſent ces Ecrivains ſur ce ſujet, n'eſt preſque qu'une erreur continuelle.

ghens ne ſe contente pas de le ſuppoſer, comme ſemblent l'avoir penſé ceux qui l'ont trouvé trop obſcur & trop éloigné pour ſervir de baſe à une théorie auſſi délicate. Il le démontre d'après une hypotheſe beaucoup plus claire & moins ſujette à conteſtation, du moins auprès de ceux qui ſont initiés dans les ſolides principes de la Méchanique. C'eſt que lorſque pluſieurs corps tombent, ſoit librement, ſoit agiſſans les uns ſur les autres par l'action de leur peſanteur, & qu'enſuite ils remontent, de quelque maniere qu'ils agiſſent les uns ſur les autres, leur centre de gravité ne ſçauroit s'élever plus haut que le point d'où il eſt deſcendu. S'il en étoit autrement, le mouvement perpétuel, cette chimere de la Méchanique n'en ſeroit plus une. On pourroit imaginer tel méchaniſme qui éleveroit de plus en plus le centre de gravité d'un ſyſtême de corps par leur action propre; ce que les Méchaniciens ſeront toujours fondés à regarder comme abſurde.

Les lecteurs à qui l'Analyſe & la Méchanique ſont familieres, peuvent déja entrevoir comment, à l'aide du principe ci-deſſus, M. *Huyghens* eſt parvenu à déterminer le centre d'oſcillation d'un pendule compoſé. Pour cela il ſuppoſe, ſuivant les loix ordinaires de l'Analyſe, la longueur du pendule ſimple & iſochrone, indéterminée; & d'après cette ſuppoſition, & les principes connus de la Méchanique, il calcule la hauteur dont tombe le centre de gravité durant une demi-vibration, & celle à laquelle ce centre s'éleveroit en ſuppoſant les poids libres & remontans avec leurs vîteſſes acquiſes. Cette ſeconde hauteur égalée à la premiere, lui donne une équation qui détermine la longueur du pendule iſochrone (*a*). Il trouve

(*a*) Nous croyons faire plaiſir aux Géometres, de leur développer davantage cette Analyſe. Pour cet effet, que A, B, C, &c. ſoient les poids ſuſpendus à des diſtances *Fig.* 103. *a*, *b*, *c*, &c. de l'axe de ſuſpenſion. Que *x* ſoit la diſtance du centre O d'oſcillation, & *y* le ſinus verſe de l'arc qu'il décrit dans une demi-vibration; ou la hauteur dont il tombe. Les ſinus verſes des arcs décrits par les poids A, B, C, &c. dans le même temps, ſeront évidemment $\frac{ay}{x}$, $\frac{by}{x}$, $\frac{cy}{x}$, &c. Qu'on multiplie chaque poids par la hauteur dont il tombe, ou le ſinus verſe de ſon arc, & qu'on diviſe la ſomme des produits par la ſomme des poids, ce ſera la hauteur dont eſt tombé le centre de gravité: on aura donc pour cette hauteur ($Aa + Bb + Cc$, &c.) y : ($A + B + C$, &c.) x. Maintenant les hauteurs auxquelles s'élevent des poids remontans, ſont comme les quarrés de leurs vîteſſes. Mais la hauteur à laquelle s'éleveroit le centre d'oſcillation, eſt le ſinus verſe y de ſon arc, parce qu'il jouit de toute ſa liberté. Les hauteurs auxquelles s'éleveront les autres poids ſe-

par ce procédé, que cette longueur eſt celle qui proviendroit en faiſant la ſomme des produits de chaque poids par le quarré de ſa diſtance à l'axe de ſuſpenſion, & diviſant cette ſomme par celui de tous les poids multipliés par la diſtance de leur centre de gravité à ce même axe. Il n'eſt pas beſoin que nous inſiſtions beaucoup à remarquer que s'il y a des poids ſitués de côtés différens de l'axe de ſuſpenſion, il faut ôter la ſomme des produits des uns, de celle des autres, au lieu de les ajouter enſemble. Le plus médiocre Analiſte eſt en état d'en voir la néceſſité & la raiſon.

Cette regle générale pour les centres d'oſcillation étant trouvée, on peut facilement les déterminer dans toutes ſortes de figures. Ce ſera le même procédé que pour le centre de percuſſion. Sur la figure que nous ſuppoſons d'abord oſciller *in planum*, qu'on conçoive un cylindre, coupé par un plan incliné à la baſe de 45°, & paſſant par l'axe de ſuſpenſion : ce ſera de l'invention du centre de gravité de ce coin que dépendra la détermination du centre d'oſcillation de la figure qui lui ſert de baſe : car ſi l'on cherche par la méthode générale des centres de gravité, celui de ce coin, ou plutôt le point de la figure SAB, où tombe la perpendiculaire abaiſſée ſur elle de ce centre, on aura préciſément la même expreſſion. On trouvera qu'il faut multiplier chaque élément de la figure par le quarré de ſa diſtance à l'axe de ſuſpenſion, & diviſer la ſomme de ces produits par celle des momens des poids, qui n'eſt autre choſe que le produit de la ſomme des élémens de la figure par la diſtance de ſon centre de gravité au même axe. Ainſi le centre d'oſcillation de la ligne droite eſt éloigné de l'axe de ſuſpenſion des deux tiers de ſa longueur. Celui du triangle ſuſpendu par le ſommet, & oſcillant *in planum*, ſera éloigné du point de ſuſpenſion des $\frac{3}{4}$ de ſon axe. On en a vu la raiſon dans ce que nous avons dit plus haut ſur le centre de percuſſion. Le cercle, ſuſpendu par un point de ſa circonférence, a ſon centre d'oſcillation aux $\frac{5}{8}$ du diametre. La parabole

ront donc $\frac{aay}{xx}$, $\frac{bby}{xx}$, &c. reſpectivement. Ainſi en multipliant chaque poids par ſa hauteur, & diviſant la ſomme des produits par la ſomme des poids, on aura $(Aaa + Bbb + Ccc, \&c.) y : (A + B + C,$ &c.$) xx$, qui ſera la hauteur à laquelle s'éleveroit le centre de gravité des poids dégagés du lien. Ces deux expreſſions égalées donnent $x = (Aaa + Bbb + Ccc) : Aa + Bb + Cc$, &c.

ſuſpendue par ſon ſommet, l'a aux $\frac{5}{7}$ de ſon axe, &c.

Mais faiſons oſciller une figure plane de côté, ou de maniere qu'elle reſte toujours dans le même plan. La regle de M. *Huyghens* va nous donner auſſi ſon centre d'oſcillation avec guere plus de difficulté que dans le cas précédent: car cette regle veut qu'on prenne la ſomme des produits de chaque particule, comme P, par le quarré de ſa diſtance P S à l'axe de ſuſpenſion, & qu'on diviſe cette ſomme par le *moment* de toutes les particules réduites à leur centre de gravité. Mais le quarré de P S eſt égal à ceux de S R & P R. Conſéquemment le premier produit ſe réduira à deux, dont l'un ſera la ſomme des produits de toutes les parties multipliées par les quarrés de leurs diſtances à l'axe de ſuſpenſion, & l'autre celle des produits de ces mêmes particules par les quarrés de leurs diſtances P R à l'axe. Or nous avons vu que la premiere ſomme eſt repréſentée par le *moment* du coin formé ſur la figure par un plan incliné de 45°, & paſſant par la tangente au ſommet; la ſeconde eſt pour la moitié de la figure, comme S *o* V, le *moment* du coin formé ſur cette moitié par un plan ſemblablement incliné, & paſſant par l'axe; & conſéquemment pour la figure entiere, ce ſera le double de ce *moment*. Ainſi l'un & l'autre étant donnés ou devant être donnés par la Géométrie, on aura le centre d'oſcillation de la figure mue de côté. En ſuivant cette méthode, on trouvera que le centre d'oſcillation du triangle iſoſcele, mu de côté autour du ſommet, eſt éloigné du point de ſuſpenſion des $\frac{3}{4}$ de ſon axe, augmentés de la huitieme partie d'une troiſieme proportionnelle à l'axe & à la baſe. Dans le triangle rectangle ſuſpendu par le milieu de la baſe, il ſe trouve au ſommet. Dans le cercle ſuſpendu par un point de ſa circonférence, on le trouvera aux $\frac{3}{4}$ du diametre.

Fig. 104.

Il nous faudroit entrer dans des détails trop embarraſſans pour ſuivre M. *Huyghens* dans l'application qu'il fait de ſa méthode à l'invention des centres d'oſcillation dans les ſolides. C'eſt pourquoi nous l'abandonnerons ici, nous réſervans de faire connoître ailleurs une méthode plus ſimple, & qui fatigue moins l'imagination. Nous nous bornons à indiquer d'après lui les centres d'oſcillation de quelques ſolides. Dans le cylindre ſuſpendu par le centre d'une de ſes baſes, il eſt

éloigné du point de ſuſpenſion, des $\frac{2}{3}$ de ſon axe, plus de la moitié d'une troiſieme proportionnelle à cet axe & au demi-diametre. Dans le cône ſuſpendu par le ſommet, il eſt aux $\frac{4}{5}$ de l'axe, augmentés de la moitié d'une troiſieme proportionnelle à cet axe, & au demi-diametre de la baſe. Celui de la ſphere ſuſpendue par un point de ſa ſurface, eſt au deſſous de ſon centre, des $\frac{2}{5}$ de ſon rayon. Voici ſeulement encore quelques vérités remarquables que M. *Huyghens* déduit des principes ci-deſſus. 1°. Si autour du centre de gravité d'une figure plane, & de ce point comme centre, on décrit un cercle d'une grandeur quelconque, cette figure ſuſpendue d'un point quelconque de ce cercle, aura ſes oſcillations *de côté* iſochrones. 2°. Le point de ſuſpenſion, & celui d'oſcillation ſont réciproques dans toute figure; c'eſt-à-dire, que ſi une figure ayant ſon point de ſuſpenſion en S, a ſon centre d'oſcillation en O, ſuſpendue du point O, elle aura ſon centre d'oſcillation en S. 3°. Si une figure quelconque ſuſpendue du point S, a ſon centre de gravité en G, & celui d'oſcillation en O, & qu'ayant prolongé l'axe OGS, on prenne un autre point de ſuſpenſion comme *s*, le nouveau centre d'oſcillation ſera en *o*, de ſorte que le rectangle SGO, ſera égal à *s*G*o*. Ainſi le centre d'oſcillation s'approche toujours de celui de gravité en même raiſon que le point de ſuſpenſion s'en éloigne. Cette derniere propoſition eſt utile pour déterminer ſans un nouveau calcul le centre d'oſcillation d'un corps, lorſqu'on en connoît une fois la poſition à l'égard d'une certaine ſuſpenſion. Par exemple, la ſphere ſuſpendue par un point de ſa ſurface à ſon centre d'oſcillation au deſſous de ſon centre de figure & de gravité, des $\frac{2}{5}$ du rayon. Qu'on veuille maintenant la ſuſpendre au bout d'un long filet, pour en former un pendule, & qu'on demande quel ſera ſon centre d'oſcillation; il n'y aura qu'à faire cette analogie : comme la longueur de ce filet eſt au rayon de la ſphere, ainſi les $\frac{2}{5}$ du rayon, à une quatrieme proportionnelle; ce ſera la quantité dont le centre d'oſcillation ſera au deſſous du centre de figure. Par conſéquent lorſqu'on connoîtra le diametre de la ſphere qu'on veut mettre en vibration, & la longueur préciſe que doit avoir un pendule pour battre les ſecondes, par exemple, il ſera facile de trouver la diſtance du centre de la ſphere au point de ſuſpenſion; ou

au contraire ayant la diſtance du centre de la ſphere miſe en vibration, & battant les ſecondes, on connoîtra facilement la longueur préciſe du pendule ſimple & mathématique, qui exécute ſes vibrations dans une ſeconde.

Quoique les découvertes de M. *Huyghens* ſur les centres d'oſcillation ſoient très-conformes à la vérité, il faut cependant convenir qu'elles portent ſur un principe qui, du premier abord, ne préſente pas cette évidence qui arrache le conſentement. Il eſt vrai que plus on y réfléchit, & mieux on connoît les loix que la nature ſuit dans la communication du mouvement, plus on le trouve raiſonnable & digne d'être admis. Mais enfin l'on peut dire qu'il n'eſt pas démontré en toute rigueur, de ſorte qu'il prête matiere à la contradiction. Auſſi en eſſuya-t'il quelques-unes d'un Géometre contemporain que je vois dans quelques endroits décorer du titre d'habile. Je ne ſçais ſur quel fondement; car cette querelle ne me paroît rien moins que propre à le lui confirmer : le récit ſuivant va mettre à portée d'en juger.

Il y avoit environ neuf ans que l'ouvrage de M. *Huyghens* jouiſſoit de l'approbation générale des habiles gens, lorſque l'Abbé *de Catelan* s'aviſa de l'attaquer (*a*). Il accuſa de fauſſeté ſa propoſition fondamentale, ſçavoir que ſi dans un pendule les poids à la fin d'une demi-vibration, par exemple, ſe détachoient & remontoient en haut avec leurs vîteſſes acquiſes, leur centre de gravité s'éleveroit à la même hauteur d'où il étoit tombé. Il prétendoit même qu'il y avoit une impoſſibilité analytique dans ce principe, d'où il concluoit que tout le Traité de M. *Huyghens*, bâti ſur une erreur, ne pouvoit être qu'une erreur continuelle.

Après avoir ainſi ruiné de fond en comble la théorie de M. *Huyghens*, l'Abbé *de Catelan* prétendoit édifier à ſon tour, c'eſt-à-dire, aſſigner les centres d'oſcillation par une méthode plus certaine. Mais à ſon ſeul début, on voit, pour peu qu'on ſoit inſtruit de la nature du problême, qu'il va ſe tromper. Car ce problême lui paroît peu difficile, & en effet moyennant deux faux principes qu'il propoſe avec autant de confiance que des axiomes métaphyſiques, il l'expédie avec une grande fa-

(*a*) Journal des Sçavans 1682. Toutes les pieces de cette querelle ſe trouvent dans le Recueil des Œuvres d'Huyghens.

cilité. L'un de ces principes eſt, que *dans un pendule compoſé, la ſomme des vîteſſes des poids eſt égale à celle des vîteſſes qu'ils auroient eues ſéparément, s'ils euſſent formé chacun un pendule à part.* L'autre, non moins hazardé, étoit que *le temps des vibrations du pendule compoſé, étoit moyen arithmétique entre les temps des vibrations de ſes poids formant chacun ſéparément un pendule ſimple.*

Le problême des centres d'oſcillation eût été effectivement d'une grande facilité, s'il n'eût pas fallu plus d'efforts pour le réſoudre. Mais malheureuſement ces deux prétendus principes ſont faux. Il ſuivroit de l'un & de l'autre, que le centre de gravité des poids du pendule, détachés à la fin d'une demi-vibration, remonteroit plus haut que le point d'où il eſt deſcendu, ce que M. *Huyghens* avoit droit de regarder comme contraire aux loix de la nature, & que ſon adverſaire ne lui conteſtoit pas. Il y a plus, ces deux principes ſe contrarient; ils donnent le centre d'oſcillation à différens points, & ils font remonter le centre de gravité à des hauteurs différentes. Ils ne s'accordent que dans l'abſurdité de le faire remonter plus haut que d'où il eſt deſcendu, ainſi que le remarqua M. *Huyghens* dans ſes réponſes (*a*). Il eût encore pu remarquer que, ſuivant le premier des principes propoſés par l'Abbé *de Catelan*, le centre d'oſcillation ne différeroit pas de celui de gravité; erreur tout-à-fait contraire à l'expérience, & dont ſçurent ſe préſerver les premiers même qui ébaucherent la théorie des oſcillations.

A l'égard de l'impoſſibilité que l'Abbé *de Catelan* objectoit contre la propoſition fondamentale d'*Huyghens*, elle n'étoit fondée que ſur la préoccupation où il étoit que la ſomme des vîteſſes des poids oſcillant ſéparément, devoit reſter la même lorſqu'ils formeroient un pendule compoſé. Mais il n'y a aucune néceſſité que cette ſomme de vîteſſes ſoit conſtamment la même. Cet adverſaire d'*Huyghens* ne devoit pas ignorer, à cette époque, qu'il y a une infinité de cas où une partie de la vîteſſe abſolue & de la quantité de mouvement, s'abſorbe dans l'action mutuelle des corps. Ainſi rien n'étoit plus frêle que ſon prétendu principe, & que l'objection qu'il en tiroit.

(*a*) Journal des Sçavans. 1682 & 1684.

M. *Huyghens* ne fut pas ſeul à ſoutenir ſa cauſe, contre les mauvaiſes objections de ce Mathématicien. Il eut deux ſeconds illuſtres, M. Jacques *Bernoulli*, & le Marquis *de l'Hôpital.* Le premier entreprit d'aſſigner par les principes ordinaires de la Statique, la cauſe pour laquelle, dans le pendule compoſé, la ſomme des vîteſſes des poids eſt moindre qu'elle ne ſeroit s'ils faiſoient leurs oſcillations ſéparément (*a*). Il ébaucha ici la réſolution qu'il donna dans la ſuite du problême des oſcillations par la nature du levier. Mais s'étant trompé dans quelques circonſtances, faute d'une application aſſez réfléchie d'un principe qui eſt très-vrai, cela donna lieu à M. *de l'Hôpital* de le développer davantage. Son raiſonnement eſt ſi propre à éclaircir cette matiere, que nous croyons devoir en donner une idée.

M. *de l'Hôpital* imagine une verge horizontale chargée de deux poids quelconques, & dans l'inſtant où elle commence à tomber par l'action de la peſanteur de ces poids. Tout le monde ſçait que des poids égaux ou inégaux, tombent avec des vîteſſes égales. Dans le premier inſtant de la chûte, les corps A, B, tendent donc à tomber avec la même vîteſſe, & s'ils étoient libres, ils parcourroient des eſpaces égaux, par exemple AC, BD; mais liés comme ils ſont l'un à l'autre, ils ſont contraints de parcourir des eſpaces A*a*, B*b*, proportionnels à leurs diſtances au point d'appui ou de ſuſpenſion S. Ainſi le poids B, qui reſteroit en arriere de la quantité D*b*, eſt accéléré par le poids A, qui agit ſur lui par le bras de levier SB. Or lorſqu'un corps agit ſur un autre par un bras de levier, il y a une partie de la force qui eſt perdue dans la réſiſtance du point d'appui. De même le corps B réagit contre les corps A par un bras de levier, & une partie de ſa force eſt perdue contre la réſiſtance du même point d'appui. Ainſi il y a une partie de la force & par conſéquent de la ſomme des vîteſſes qui eſt perdue dans l'action mutuelle de ces poids pour ſe mettre en vibration; & c'eſt-là la raiſon pour laquelle le centre d'oſcillation eſt toujours plus bas que celui de gravité à l'égard du point de ſuſpenſion.

Fig. 105.

Mais allons plus loin, & examinons d'après ces principes

(*a*) *Narratio controv. inter Hug. & Abb. Catel.* Act. Lipſ. ann. 1686.

quelle

quelle vîteſſe doit prendre le pendule. Le poids A ne tombant pas avec toute ſa vîteſſe naturelle, la force avec laquelle il preſſera le poids B ſera le produit de ſa maſſe par l'excès de ſa vîteſſe naturelle ſur celle qu'il prendra. Or un corps doué de la même force agit ſur un autre avec d'autant moins d'avantage, que celui-ci eſt plus éloigné du point d'appui. Ainſi il faudra, conformément aux regles de la Statique, faire cette analogie, comme S B eſt à S A, ainſi la force du corps A, a l'augmentation de mouvement qu'il produira dans le corps B, augmentation qui n'eſt autre choſe que le produit de la maſſe du corps B par l'excès de vîteſſe qu'il prendra pardeſſus ſa vîteſſe naturelle. En ſuivant cette route, & en employant l'analyſe, on trouve la même vîteſſe pour l'un ou l'autre des poids A ou B, que par la formule de M. *Huyghens*.

On peut auſſi appliquer ce raiſonnement à trouver immédiatement cette formule, & c'eſt ce qu'a fait M. Jacques *Bernoulli*, dans les Actes de Leipſick de l'année 1691 (*a*). Mais comme il n'étoit encore queſtion dans ſon écrit que des poids ſuſpendus le long d'une ligne droite, il a enſuite davantage étendu ſa méthode, dans un Mémoire qu'on lit parmi ceux de l'Académie de l'année 1703. Il y embraſſe le problême dans une plus grande généralité. Il ſuppoſe deux poids ſuſpendus aux deux côtés inégaux d'un angle qui fait ſes vibrations *de côté*; en ſuivant la même méthode, & en analyſant avec beaucoup de ſubtilité l'action d'un corps ſur l'autre, ils parvient à une formule équivalente à celle de M. *Huyghens*. Comme il ſeroit trop long de le ſuivre dans cette pénible route, il nous ſuffira d'inviter le lecteur à lire ſon Mémoire. Dans une ſuite de ce Mémoire, inſérée parmi ceux de l'année 1704, il juſti-

(*a*) Cette méthode de M. Bernoulli l'aîné, nous a paru trop lumineuſe pour nous borner à l'indication ci-deſſus. En voici un exemple ſuffiſant pour mettre les lecteurs ſur la voie. Que *S* ſoit le point de ſuſpenſion d'un pendule. Que les poids A, B ſoient p, q, & les diſtances S A, S B, a & b; que O ſoit le centre d'oſcillation, & S O $= x$. La propriété du centre d'oſcillation eſt de ſe mouvoir avec toute ſa liberté; c'eſt pourquoi ſa vîteſſe O E eſt ſa vîteſſe naturelle, exprimons-là par 1. On aura donc A $a = a : x$, & par conſéquent a C $= (x - a) : x$. Ainſi le *moment* du poids A pour accélérer B, qui eſt par le raiſonnement qu'on a développé plus haut, $p \times a$ C, ſera $(p x - p a) : x$. Réduiſons-le au point B, comme on l'a dit auſſi plus haut. Ce ſera $(a p x - p a a) : b x$. Mais le mouvement produit par ce *moment* dans le poids B, eſt le produit de ce poids par b D, & b D $= (b - x) : x$; ce mouvement eſt donc $(q b - q x) : x$. Ces deux grandeurs égalées donnent $x = (p a a + q b b) : a p + q b$, comme par la regle de M. Huyghens.

fie pleinement *Huyghens* de l'accuſation ou des doutes élevés contre lui, & il montre que le principe qui ſert de baſe à ſa théorie, eſt fort vrai. On y trouve enfin une démonſtration fondée ſur les mêmes principes, de l'identité des centres d'oſcillation & de percuſſion ; identité plutôt ſoupçonnée juſque-là que démontrée.

C'eſt un des caracteres de la vérité, que d'être acceſſible par pluſieurs voies différentes. La découverte de M. *Huyghens*, déduite par MM. Jacques *Bernoulli* & *de l'Hôpital*, d'un principe différent du ſien, a été démontrée de quantité de manieres par divers Géometres poſtérieurs. Une des plus ingénieuſes, eſt celle de M. Jean *Bernoulli* (*a*), & nous croyons par cette raiſon devoir en donner une idée.

Soit un pendule, dit M. *Bernoulli*, chargé de pluſieurs corps tels que A, B, & ſuſpendu par le point S. Que X ſoit un point pris à volonté. Il n'y aura rien de changé dans le mouvement
Fig. 106. de ce pendule, ſi au lieu du corps A, nous ſubſtituons en X une force qui produiſe dans ce point la même vîteſſe qu'y produiſoit le corps ou la force A. Concevons donc ce corps A anéanti, & qu'on ait mis à ſa place au point X la force ci-deſſus que nous déterminerons bientôt. Qu'on en faſſe autant du poids B, & de tous les autres. Nous aurons un pendule ſimple S X iſochrone au pendule compoſé S A B, & qui nous ſervira à trouver le centre d'oſcillation d'une maniere fort facile.

Pour déterminer préſentement quelle force placée en X, équivaut à celle du poids A, il faut conſidérer que cette derniere n'eſt autre choſe que la maſſe A, animée ou miſe en mouvement par la force de la gravité ; force qui produit, comme l'on ſçait, dans tous les corps une vîteſſe initiale conſtante. Nous la nommerons 1 par cette raiſon. Au lieu du poids A, nous pouvons donc concevoir le point A entraîné par une maſſe A, mue avec la vîteſſe 1. Or les loix de la Statique nous apprennent que la force appliquée au point X, & y produiſant la même vîteſſe que la force A, doit être une maſſe telle que $\frac{A \times S A^2}{S X^2}$, animée ou miſe en mouvement avec une vîteſſe

(*a*) Voy. *Act. Lipſ.* & Mem. de l'Académie, ann. 1714.

$\frac{SX}{SA}$ (*a*). La maſſe à ſubſtituer en X, au lieu du poids A, eſt donc $\frac{A \times SA^2}{SX^2}$, mue avec la vîteſſe $\frac{SX}{SA}$. De même celle qui équivaudra au poids B, ſera la maſſe $\frac{B \times BS^2}{SX^2}$, animée de la vîteſſe $\frac{SX}{SB}$. Ainſi voilà notre pendule compoſé, transformé en une eſpece de levier, au point X duquel ſont appliquées diverſes puiſſances agiſſant chacune avec leur vîteſſe propre, & tendant à y produire une certaine vîteſſe réſultante de leur effet réuni. Or l'on ſçait que dans pareil cas, il faut, pour trouver cette vîteſſe réſultante, diviſer la ſomme des momens des puiſſances, par celles des puiſſances elles-mêmes. Cela donnera ici pour la vîteſſe du point X, cette expreſſion $\frac{A \times SA + B \times SB, \&c.}{A \times SA^2 + B \times SB^2, \&c.} SX$. Mais ſi le point X eſt le centre d'oſcillation, ce que nous pouvons ſuppoſer, puiſque SX a été priſe indéterminée, la vîteſſe de ce point ſera égale à celle que la gravité imprime à tous les corps, c'eſt-à-dire à 1; d'où l'on voit qu'en égalant à l'unité la vîteſſe ci-deſſus, on déterminera la ligne SX à être la diſtance du centre d'oſcillation, & on trouvera préciſément la même formule que celle de M. *Huyghens*. Cette méthode, M. *Bernoulli* l'applique auſſi aux pendules dont les poids auroient des peſanteurs qui ne ſeroient pas proportionnelles à leurs maſſes. Tel ſeroit un pendule dont on ſuppoſeroit les poids de différentes gravités ſpécifiques, & plongés dans un fluide. En ſuppoſant que ces poids fuſſent dans le vuide A, B, C, & que le fluide les réduisît à *m* A, *n* B, &c. le centre d'oſcillation ſeroit $A \times SA^2 + B \times BS^2$, &c. diviſé par (*m* A + *n* B, &c) SG. Il faut remarquer ici que G eſt, non le centre de gravité des maſſes A, B, C, &c. mais de *m* A : *n* B, &c. Cela ſe déduit facilement de la méthode précédente. Il n'y a qu'à ſuppoſer chaque maſſe animée par une force qui ſoit à celle de gravité comme *m* ou *n*. &c. à l'unité : tout le reſte eſt abſolument ſemblable.

(*a*) Cela eſt facile à prouver. Car le moment du corps A eſt A × S A; & celui de la force ſubſtituée en X, eſt évidemment $A \times \frac{SA^2}{SX^2} \times \frac{SX}{SA} \times SX$, ſçavoir le produit de la maſſe par la vîteſſe & le bras de levier. Or cette expreſſion ſe réduit à A × S A. Ainſi les momens ſont égaux de part & d'autre, & par conſéquent les mouvemens qu'ils produiſent.

Pendant que M. *Bernoulli* annonçoit cette maniere de réſoudre le problême des centres d'oſcillation, M. *Tailor* y parvenoit de ſon côté par une méthode ſemblable, qu'il publia dans les *Tranſactions* du mois de Mai de l'année 1714. Cette date eſt importante pour porter un jugement ſur l'accuſation que lui intenta M. *Bernoulli*, de s'être paré d'une découverte qui ne lui appartenoit point, en la donnant dans ſon Livre intitulé *Methodus incrementorum*. Il faut convenir qu'en cette occaſion M. *Bernoulli*, & ceux qui écrivirent pour lui, tranſgreſſerent de beaucoup les bornes de la politeſſe, & maltraiterent M. *Tailor* étrangement. Au contraire, celui-ci donna un exemple remarquable de modération : il ſe contenta d'adreſſer quelques plaintes aux Journaliſtes de Leipſick & d'alléguer la date ci-deſſus, qui eſt même antérieure à celle de l'écrit de M. *Bernoulli*. On a répondu que M. *Bernoulli* avoit déja indiqué cette méthode dès l'année 1713. Cela eſt vrai, mais ce qu'il dit ne ſuffit pas pour fruſtrer M. *Tailor* du mérite d'avoir du moins deviné avec beaucoup de ſagacité (*a*).

La ſolution du problême des centres d'oſcillation ſe déduit encore avec une facilité ſinguliere du principe des forces vives, comme l'a montré M. *Bernoulli* dans ſon diſcours ſur *la communication du mouvement*. Ce principe conſiſte en ce que lorſque pluſieurs corps agiſſent les uns ſur les autres par leur peſanteur, la ſomme des produits de chaque maſſe par le quarré de ſa vîteſſe, reſte invariable. Cela s'applique au cas préſent avec une facilité remarquable. La vîteſſe de chaque poids dans le pendule compoſé, eſt de ſa nature comme la diſtance au point de ſuſpenſion. Ainſi le produit de chaque maſſe par le quarré de ſa vîteſſe, eſt $A \times SA^2$, $B \times SB^2$, &c. en conſervant les dénominations précédentes, & leur ſomme eſt $A \times SA^2 + B \times SB^2$, &c. Mais en ſuppoſant la longueur du pendule ſimple & iſochrone égale à x, ſa vîteſſe ou celle du poids placé à cette diſtance du point de ſuſpenſion, ſera comme x; car elle eſt à celle de chaque poids A ou B, en même raiſon que ſa diſtance du point de ſuſpenſion, eſt à la leur. On trouvera par la théorie des pendules ſimples que la vîteſſe de chaque poids oſcillant ſéparément, ſeroit exprimée par $\sqrt{(x \times SA.)}$,

(*a*) On a les pieces de cette querelle dans les Actes de Leipſick, année 1716, 1718, 1719, 1721, 1722. *Voy.* auſſi J. Bern. *Opera*. T. II.

$\sqrt{(X \times SB)}$. La ſomme de chaque maſſe par le quarré de ſa vîteſſe eût donc été $A \times x \times SA + B \times x \times SB$, &c. Or ces ſommes doivent être égales par le principe ; ainſi en les égalant on trouvera la valeur de x, ou de la longueur du pendule ſimple. Elle ſera exprimée par la même formule préciſément que celle que nous avons déja vue ſi ſouvent. Il n'y a au reſte rien que de très-naturel dans cette conformité de ſolution. Car le principe des forces vives, n'eſt autre choſe que celui *des forces aſcenſionnelles*, dont M. *Huyghens* s'eſt ſervi pour la même détermination.

M. *Euler* eſt encore parvenu à déterminer le centre d'oſcillation par une méthode qui lui eſt propre. Elle eſt uniquement fondée ſur un principe de Statique, & elle expédie le problême avec une très-grande briéveté (*a*). M. d'*Alembert* enfin le réſoud d'une maniere très-ſimple, par le moyen du principe lumineux & commode qui ſert de fondement à ſa *Dynamique*. Nous regrettons de ne pouvoir en donner une idée plus développée.

Depuis l'invention des nouveaux calculs, il n'eſt plus queſtion des ſolides & des onglets cylindriques, dont la conſidération étoit néceſſaire à M. *Huyghens* pour déterminer les centres d'oſcillation dans les différentes figures. Le calcul intégral en affranchit & fournit des formules commodes qui ne ſurchargent point l'imagination, comme faiſoit la méthode de M. *Huyghens*. Ces formules ſont faciles à déduire de la regle générale que nous avons démontrée plus haut de tant de manieres. Que l'abſciſſe d'une figure priſe du point de ſuſpenſion ſoit x, & y ſon ordonnée ; $y\,dx$ ſera ſon élément, & par conſéquent le ponduſcule à multiplier par le quarré de la diſtance à l'axe de ſuſpenſion. Ainſi $x\,x\,y\,dx$ ſera le produit, & la ſomme de tous les produits ſemblables, ſçavoir $\int x\,x\,y\,dx$, diviſée par la ſomme des momens ou $\int x\,y\,dx$, ſera la diſtance du centre d'oſcillation. Cela doit s'entendre ſi la figure oſcille *en plan* ; car ſi elle oſcilloit *de côté*, cette formule ſe trouveroit $\int (x\,x + \frac{1}{3} y\,y)\,y\,dx$, le tout diviſé comme à l'ordinaire par $\int x\,y\,dx$. Qu'on ait enfin un ſolide de circonvolution, & que x étant l'abſciſſe, y ſoit l'ordonnée de la figure génératrice,

(*a*) *Comm. Petrop.* T. VII.

on trouve pour la formule de ſon centre d'oſcillation, $\int (xx + \frac{1}{4}yy) y^2 dx$, diviſé de même que ci-devant par la ſomme des momens, qui eſt ici $\int xyy\,dx$. Nous ne nous arrêterons pas à développer par des exemples les uſages de ces formules. Ils n'ont aucune difficulté pour ceux qui ſont un peu familiariſés avec le calcul intégral. Nous renvoyons les autres aux Ecrivains qui traitent de cette théorie. Nous paſſons à celle des forces centrifuges.

IV.

Des forces centrifuges.

C'eſt un phénomene connu dès long-temps des Phyſiciens, que les corps qui ſe meuvent circulairement font un effort pour s'écarter du centre de leur mouvement. L'expérience de la fronde eſt familiere à tout le monde. Des gouttes d'eau qu'on laiſſe tomber ſur la ſurface d'un globe qui tourne rapidement ſur ſon axe, en ſont jettées au loin. Un corps attaché à un fil, & placé ſur une ſurface horizontale, qui tourne rapidement autour d'un point, tend ce fil, & le rompt même, ſi la force qu'il lui oppoſe eſt inférieure à la tenſion qu'il éprouve.

La cauſe de ce phénomene ſe déduit des loix du mouvement. Tout corps en mouvement affecte une direction rectiligne, & ſi quelque obſtacle le force à prendre un chemin curviligne, auſſitôt qu'il en eſt affranchi, il continue ſon chemin ſur la ligne droite tangente au point où cet obſtacle a ceſſé. Il ſeroit facile de le démontrer, ſi l'on n'en étoit pas ſuffiſamment convaincu. Lors donc qu'un corps attaché, par exemple, à un fil, tourne circulairement, à chaque inſtant il tend à s'échapper par la tangente. Mais on ne ſçauroit écarter un corps de ſa direction naturelle, non plus que le mettre en mouvement, ſans en éprouver une réſiſtance en ſens contraire. Le fil auquel le corps eſt attaché, & qui le retient ſur la circonférence, en le retirant vers le centre, éprouvera donc un effort contraire, c'eſt-à-dire, dans la direction du centre à la circonférence. Que ſi au lieu d'un fil, nous ſuppoſons une force quelconque qui agit ſur ce corps en le repouſſant ſur la circonférence, il eſt aiſé de voir que ce ſera la même choſe; cette force éprouvera de la part du corps une réaction, ou un effort en ſens contraire. Cet effort conſidéré comme l'effet de

l'inertie du corps, & comme tendant à l'écarter du centre, eſt nommé *force centrifuge*. La force oppoſée, qui le ramene continuellement dans la route curviligne, eſt appellée *force centripete*. On leur donne le nom commun de *forces centrales*. Dans les mouvemens circulaires, elles ſont égales : car puiſque le corps ne s'approche ni s'éloigne du centre, il eſt néceſſaire que l'une & l'autre ſe contrebalancent exactement ; mais dans les mouvemens ſur d'autres courbes, elles ſe ſurmontent alternativement, & c'eſt-là la cauſe des approches & des éloignemens périodiques de certains corps, comme les planetes, du centre de leurs mouvemens. On ſe bornera ici à ce qui concerne les forces centrifuges dans les mouvemens circulaires.

La connoiſſance de la force centrifuge eſt d'une grande antiquité, & même quelques Philoſophes anciens en avoient fait un des reſſorts du méchaniſme de l'Univers. On a déja remarqué qu'*Anaxagore*, interrogé pourquoi les corps céleſtes, auxquels il attribuoit de la peſanteur, ne tomboient pas ſur la terre, avoit répondu que leur rotation les ſoutenoit, & contrebalançoit leur gravité. C'étoit auſſi le ſentiment de quelques Philoſophes contemporains de *Plutarque*, comme le prouve ſon Livre *De facie in orbe Lunæ*. Au reſte, les idées que les Anciens avoient ſur le mouvement, étoient trop incomplétes, trop peu juſtes, pour qu'il leur fût poſſible de reconnoître la nature & la cauſe de cette force. *Deſcartes* & *Galilée* ſont les premiers qui en ayent donné des idées juſtes. Néanmoins ces Philoſophes illuſtres par d'autres travaux, s'en étoient tenus à une légere ébauche. C'eſt à M. *Huyghens* qu'on doit des recherches plus approfondies ſur ce ſujet intéreſſant. On va préſenter le tableau des principales vérités qu'il découvrit, & qu'il publia dans la cinquieme partie de ſon *Horol. oſcillat.* ſous le titre de *Theoremata de vi centrifugâ*.

Les premieres vérités de la théorie des forces centrifuges, ſe préſentent aſſez naturellement. Il ne faut qu'une médiocre attention pour reconnoître qu'en ſuppoſant la même vîteſſe, plus le cercle que parcourra un mobile ſera petit, plus ſa force centrifuge ſera grande. La raiſon en eſt ſenſible : un petit cercle eſt plus courbe, ou, dans une étendue égale, s'écarte davantage de la direction rectiligne, qu'un plus grand. Le mobile qui le parcourra, ſera donc, dans des inſtans égaux, da-

vantage écarté de la direction rectiligne qu'il affecte, lorſqu'il parcourra le premier de ces cercles. La force qui produit cet effet, doit donc être plus grande. C'eſt encore une vérité facile à appercevoir, que le cercle étant le même, la force centrifuge ſera d'autant plus grande que la vîteſſe le ſera davantage. On le montre par un raiſonnement ſemblable au précédent.

Mais les Mathématiques ne ſe contentent pas de cette maniere de raiſonner vague & ſans préciſion. Quel eſt dans ces différentes circonſtances le rapport des forces centrifuges ? voilà le problême qu'il s'agit de réſoudre, & que M. *Huyghens* réſolut le premier. Il trouva que ſi des cercles égaux ſont décrits par des corps de même maſſe, & avec des vîteſſes inégales, les forces centrifuges ſont comme les quarrés des vîteſſes ; un corps qui ſe meut dans un même cercle avec une vîteſſe triple, tend à s'écarter du centre, ou fait contre la force qui le retient dans la circonférence, un effort neuf fois auſſi grand. Mais ſi deux corps décrivent avec la même vîteſſe des circonférences inégales, leurs forces centrifuges ſont réciproquement comme les rayons ; double, ſi le rayon n'eſt que la moitié, triple, s'il n'eſt que le tiers. En général, quelles que ſoient les vîteſſes de deux corps égaux, & les cercles dans leſquels ils circulent, leurs forces centrifuges ſont en raiſon compoſée de la directe des quarrés des vîteſſes, & de l'inverſe des rayons. Les démonſtrations de ces vérités ſe trouvent aujourd'hui dans preſque tous les Livres de Méchanique un peu relevée : c'eſt pourquoi nous nous bornons à cet énoncé.

Il ne ſuffit pas de connoître les rapports des forces centrifuges, ſuivant les différens degrés de vîteſſe & la grandeur des cercles que décrivent les mobiles : il eſt auſſi important de connoître la quantité abſolue de cette force dans un mobile qui ſe meut avec une vîteſſe déterminée. Cette conſidération eſt une des plus délicates & des plus ſubtiles de la théorie de M. *Huyghens*. Il découvrit qu'un mobile qui circule dans un cercle avec une vîteſſe égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant par un mouvement uniformément accéléré de la hauteur du demi-rayon, auroit une force centrifuge égale à ſa peſanteur.

La force centrifuge combinée avec celle de la peſanteur, donne naiſſance à un genre d'oſcillation que M. *Huyghens* examina

examina dans ſon Traité, & qui lui fournit la matiere de pluſieurs propoſitions curieuſes. Un poids étant ſuſpendu à un fil, au lieu de lui donner un mouvement d'oſcillation dans un plan vertical, comme aux pendules ordinaires, on le fait tourner circulairement, de ſorte que le fil auquel il eſt ſuſpendu décrive une ſurface conique. Ce mobile eſt ainſi ſollicité par deux forces, qui ont des directions contraires : l'une eſt la peſanteur qui tend à le ramener à la perpendiculaire, en le faiſant rouler le long de la courbe qu'il décriroit par une oſcillation ordinaire : l'autre eſt la force centrifuge qui tend à l'écarter de cette perpendiculaire en l'élevant le long de la même courbe. Il y a un point où ces deux forces ſont en équilibre : delà vient que le mobile décrit autour de l'axe une circonférence horizontale, & ſans la réſiſtance de l'air qui, diminuant ſa vîteſſe, diminue auſſi ſa force centrifuge, & fait prévaloir ſa gravité, ce pendule, de même que les pendules ordinaires, continueroit ſa circulation à l'infini.

Cette ſorte de pendule qu'on vient de décrire, a diverſes propriétés dignes d'attention. Nous nous bornerons néanmoins à une des plus remarquables. La voici : Que A B C repréſente la ſurface concave d'un conoïde parabolique, & que *Fig.* 107. F & G ſoient les points de ſuſpenſion de deux pendules circulaires, dont les poids décrivent les cercles D E, H I. Ils mettront, dit M. *Huyghens*, le même temps à faire leurs révolutions, & ce temps ſera égal à celui de deux oſcillations d'un pendule ordinaire, dont la longueur ſeroit égale au demi-parametre de la parabole A B C. M. *Huyghens* tenta de tirer parti de cet iſochroniſme en faveur de l'Horlogerie. Il imagina pour cet effet la conſtruction ſuivante. A C eſt un axe verti- *Fig.* 108. cal tournant fort librement ſur ſes deux pivots, & qui porte une lame de quelque largeur D E F, coupée ſuivant la courbure de la développée de la parabole, qui eſt, comme l'on ſçait, une parabole du troiſieme degré, dont les dimenſions ſont données, celles de la premiere étant connues. Ce même aiſſieu eſt percé d'une fente latérale, qui donne paſſage au fil du pendule, & qui lui permet de ſe hauſſer & de s'abaiſſer, en s'enveloppant ſur la courbe D E F, ou en ſe développant de deſſus elle. Par ce moyen le centre du poids ſe doit toujours trouver dans une ligne parabolique, & conſéquemment ſes vibra-

tions circulaires ſeront toutes égales, & d'une durée connue, ſuivant la propriété qu'on a expoſée plus haut. Ce pendule ſeroit propre à ſervir de modérateur à un horloge, & tournant toujours du même côté, il lui procureroit cet avantage de n'être point ſujet à ce bruit que font les horloges à pendule ordinaire. M. *Huyghens* nous apprend qu'on a conſtruit des horloges de cette eſpece, qui ont eu du ſuccès; nous liſons auſſi qu'on en a fait de ſemblables à Rome (*a*). Cependant l'Horlogerie n'a pas tiré de cette ſeconde invention de M. *Huyghens*, les mêmes avantages que de la premiere. Le pendule ordinaire eſt ſi commode, & remplit ſi bien toutes les vues qu'on ſe propoſe dans cet art, qu'on s'y eſt tenu; & à parler franchement, cette nouvelle conſtruction me paroît plus curieuſe que néceſſaire.

V.

Découvertes de M. Newton ſur les mouvemens curvilignes.

Si la beauté d'une découverte ſe meſure par la ſublimité des objets auxquels elle s'applique, il en eſt peu dans la Méchanique d'auſſi brillantes que celle dont nous allons rendre compte. Il ne faut qu'être initié dans la Philoſophie moderne pour connoître les grandes lumieres que la théorie des mouvemens curvilignes, & des forces centrales a procurées à l'Aſtronomie Phyſique. C'eſt à cette théorie que nous ſommes redevables de la démonſtration des vérités importantes que l'obſervation avoit autrefois appriſes à *Kepler*. C'eſt elle qui nous a mis en poſſeſſion de la loi générale qui regne entre les corps céleſtes, & qui les aſtreint aux mouvemens que nous obſervons. C'eſt d'elle enfin que l'on attend avec fondement la réſolution du problême le plus difficile de l'Aſtronomie, ſçavoir le mouvement de la lune, dont les irrégularités ont occupé ſi longtemps & ſi infructueuſement les Aſtronomes.

Toute la théorie des mouvemens curvilignes ſe réduiſoit, avant le temps de M. *Newton*, à ce que *Galilée* avoit autrefois démontré ſur la courbure du chemin des projectiles, dans la ſuppoſition d'une force agiſſant uniformément, & dans des directions paralleles, & à ce que M. *Huyghens* avoit appris ſur les forces centrales dans les mouvemens circulaires. Mais

(*a*) Leibnit. ac Bern. *Comm. Epiſt.* T. II, p. 325, &c.

M. *Newton* enviſagea le problême des mouvemens curvilignes dans une bien plus grande généralité, & guidé par une profonde Géométrie, il aſſigna les loix ſuivant leſquelles ils s'exécutent. Une partie de ſon immortel Livre *des principes de la Philoſophie naturelle*, eſt occupée à les expoſer, & elles ſont la baſe de toutes ſes découvertes ſur le ſyſtême phyſique de l'Univers. Quelques gênés que nous ſoyons par les bornes de notre plan, nous ne ſçaurions nous refuſer aux détails convenables à une matiere ſi importante.

Lorſqu'un corps eſt projetté dans une certaine direction, & avec une certaine vîteſſe, il ſuivroit, comme on l'a dit ſi ſouvent, une ligne droite, s'il étoit entiérement libre, & affranchi de toute action extérieure. Mais s'il éprouve celle d'une force qui agit ſuivant une direction déterminée, il ſera évidemment contraint de ſe détourner à chaque inſtant de ſa direction ; il décrira enfin une courbe qui variera ſuivant l'intenſité & la direction de la force qu'il éprouvera à chaque point, & ſuivant la vîteſſe & la direction initiale de ſa projection.

Il regne dans tous les mouvemens curvilignes produits par l'action d'une force qui attire vers un point, une loi générale que nous ne devons pas différer davantage de faire connoître. Cette loi déja obſervée par *Kepler* dans les mouvemens des planetes, & que M. *Newton* a le premier démontrée *à priori*, conſiſte dans la proportionnalité conſtante des temps avec les aires décrites par le corps autour du centre des forces. Je m'explique : que S ſoit le centre des forces, c'eſt-à-dire, le point vers lequel la force pouſſe ou attire le corps A, qui a reçu une impulſion oblique A T, & qui, en vertu de ces deux forces combinées, décrit la courbe A B C D. Qu'après le premier intervalle de temps, le corps ſoit en B, à la fin du ſecond en C, à la fin du troiſieme en D, &c, ſi l'on tire les rayons S B, S C, S D, &c, les aires curvilignes A S B, B S C, C S D, &c. ſeront égales ; d'où il ſuit qu'en général un ſecteur quelconque, tel que A S E eſt à un autre A S F, comme le temps mis à aller de A en E, eſt au temps mis à aller de A en F. L'inverſe de cette proportion n'eſt pas moins vraie : nous voulons dire que ſi on obſerve qu'un mobile décrive autour d'un point des aires proportionnelles au temps, l'on doit en conclure que ſon mou- *Fig.* 109.

vement eſt cauſé par une force qui le pouſſe ou l'attire vers ce point.

De ce principe fondamental découlent naturellement quelques autres vérités qu'il eſt à propos de remarquer avant que d'aller loin. Il eſt d'abord facile de voir que plus le corps ſera voiſin du centre des forces, plus il accélérera ſon mouvement, plus l'arc qu'il parcourra ſera grand; car il faudra que le ſecteur qu'il décrit autour de ce centre dans un temps déterminé, regagne en largeur ce qu'il perd dans l'autre dimenſion. Delà vient que les planetes décrivent vers leur moindre diſtance du ſoleil, de plus grands arcs que dans tout autre endroit de leur orbite. Il eſt encore facile de conclure de ce principe, quelle eſt dans les différens points de la route curviligne d'un corps, la vîteſſe avec laquelle il ſe meut. Il n'y a qu'à prendre deux ſecteurs infiniment petits, comme S E *e*, S F *f*, égaux, & par conſéquent décrits dans les temps égaux. Les vîteſſes du mobile en ces différens points E & F, ſeront donc comme les petits arcs E *e*, F *f*, qui à cauſe de leur infinie petiteſſe ſont des lignes droites. Ainſi voilà deux triangles rectilignes égaux, & dont les baſes E *e*, F *f*, ſont par conſéquent réciproquement comme les perpendiculaires tirées de leur ſommet ſur ces baſes prolongées, c'eſt-à-dire, ſur les tangentes aux points E, F, de la courbe. La vîteſſe d'un corps qui décrit une courbe eſt donc à chaque point, en raiſon réciproque de la perpendiculaire tirée du centre des forces ſur la tangente à ce point.

Venons maintenant à expliquer comment on détermine la loi ſuivant laquelle doit croître ou décroître la force centripete pour faire parcourir à un corps une courbe déterminée. Il faut pour cela examiner en général ce qui arrive lorſqu'un corps pouſſé par une force ſemblable combinée avec une impulſion oblique, décrit un arc quelconque de courbe. Prenons un arc infiniment petit, comme B *b*, & tirons du centre vers lequel
Fig. 110. tend le corps, les lignes S B, S *b*. Que B *β* ſoit la tangente en B, les loix du mouvement apprennent que le corps parvenu en B, tend à s'échapper par la tangente B *β*, c'eſt-à-dire, ſuivant la direction du petit côté B b, qu'il vient de décrire; mais pouſſé en ce point B, par la force centrale, au lieu de cette tangente, il décrit le côté B *b* de la courbe. L'effet de cette force eſt donc de faire tomber le corps de *β* en *b*, dans

la direction du rayon *b*S. Ainſi ce ſera du rapport & de la meſure de cet intervalle *βb* dans les différens points de la courbe, que dépendra la meſure de la force centrale dans ces différens points. Mais il y a ici une attention fine & délicate à faire, ſans quoi l'on ſe tromperoit beaucoup dans la détermination préſente.

Si l'action de la force centrale, par laquelle le corps tombe, pour ainſi dire, de *β* en *b*, n'étoit appliquée qu'au commencement du petit inſtant pendant lequel B*b* eſt décrit, la petite ligne *β b* meſureroit elle-même l'intenſité de cette force: car elle ſeroit alors décrite d'un mouvement uniforme; & l'on ſçait que dans les mouvemens uniformes, les forces ſont en raiſon compoſée de la directe des eſpaces, & de l'inverſe du temps. Mais la force centrale agiſſant continuellement ſur le corps, l'eſpace *βb* eſt parcouru d'un mouvement accéléré, & puiſque durant un inſtant infiniment petit, la force centrale peut être conſidérée comme invariable, ce mouvement ſera uniformément accéléré. Or dans les mouvemens uniformément accélérés, les forces ſont comme les eſpaces diviſés par les quarrés des temps. D'un autre côté le temps eſt comme le ſecteur curviligne BS*b*, ou celui qui en differe infiniment peu, *b*S*o*, c'eſt-à-dire, *bo* par S*b*, ou encore comme le rectangle de B*b* par la perpendiculaire SI ſur B*b* prolongée, qui eſt la même choſe que l'aire SB*b*. En réuniſſant toutes ces conſidérations, on trouve que la force centrale à un point quelconque B d'une courbe, eſt comme le petit eſpace *bβ*, diviſé par le quarré du ſecteur S*bo*, ou par celui du rectangle B*b* par SI. Il ne s'agira donc plus que de connoître le rapport de ces grandeurs, rapport toujours donné par la nature de la courbe ſur laquelle on ſuppoſe le corps ſe mouvoir, & l'on aura auſſi-tôt la loi ſuivant laquelle varie la force centrale dans ſes différens points de la courbe, ou les différens éloignemens du centre (*a*).

(*a*) Nous allons donner ici, en faveur des Analiſtes, la maniere de déterminer l'expreſſion de la force centrale. Cela eſt facile, après ce que nous avons dit. Que le rayon SB ſoit *y*, B*b* = *ds*, *bo* = *dx*, *o*B ſera = *dy*. Qu'on tire *b*D perpendiculaire ſur la tangente B*b*. On aura, ſuivant le calcul différentiel, D*β* = *dds*; enſuite, à cauſe de la ſimilitude des triangles *b*D*β*, *bo*B, on trouvera *bβ* = *dsdds* : *dy*. Enfin ſi l'on nomme en général *dt* le petit temps pendant lequel s'exécute la chûte *βb*, on aura pour l'expreſſion de la force centrifuge *dsdds* : *dy dt*^{2}; ce qui, en met-

Après avoir donné cette expreſſion générale, M. *Newton* parcourt différentes eſpeces de courbes, & fait voir quelle eſt la loi que doit ſuivre la force centrale pour forcer un corps à les parcourir. Nous nous attacherons principalement aux ſections coniques, qui fourniſſent les vérités les plus remarquables & les plus utiles pour le ſyſtême de l'Univers. En ſuivant la route que nous venons d'indiquer, il trouve que la force qui fait décrire à un corps une ſection conique, en le pouſſant ou l'attirant vers l'un des foyers, eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance; l'inverſe eſt également vraie, c'eſt-à-dire, que toutes les fois qu'un corps ſollicité vers un point par une force qui varie ſuivant le rapport ci-deſſus, recevra une impulſion oblique à la direction de cette force, la courbe qu'il décrira ſera une des ſections coniques; cela aura même lieu dans le cas où la force, au lieu d'attirer ou de pouſſer vers un point, en écarteroit ſuivant la même loi de la réciprocité des quarrés des diſtances, la courbe décrite ſeroit alors une hyperbole rapportée à ſon foyer extérieur.

Mais quels ſont les cas où une des ſections coniques ſera décrite plutôt qu'une autre? Quand la trajectoire, c'eſt ainſi qu'on nomme la ligne décrite par cette compoſition de forces, ſera-t'elle un cercle, une ellipſe, une parabole, ou une hyperbole? Le voici: d'abord toutes les fois que le corps partira dans une direction perpendiculaire à celle de la force centrale, & que ſa vîteſſe ſera telle que la force centrifuge qui en réſultera ſera égale à la force centripete, il eſt viſible que la trajec-

tant au lieu de dt, ſa valeur ydx, deviendra $dsdds : y^2 dx^2 dy$. Or une courbe quelconque étant donnée, on aura la valeur de ds, dds, dy & dx, de ſorte que toutes les expreſſions différentielles diſparoîtront, & l'expreſſion finie qui reſtera donnera le rapport de la force centrale dans les différens points de la courbe. Dans les ſections coniques, par exemple, le centre des forces étant au foyer, on la trouve, $1 : yy$; ce qui indique que la force eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance. On peut varier cette formule de bien des manieres différentes, ce qu'ont fait M. Varignon, de Moivre, &c. en y faiſant entrer l'expreſſion du rayon de la développée.

La formule $dsdds : dydt^2$ a été employée par M. Varignon à déterminer la force centrale, dans les différentes ſuppoſitions de la maniere dont croît le temps. (Mem. de l'Acad. des Scienc. 1704.) Mais qu'il me ſoit permis de remarquer que M. Varignon a pris une peine fort ſuperflue. Il n'y a qu'une ſeule ſuppoſition poſſible ſur l'accroiſſement du temps, & c'eſt celle qui le fait proportionnel à l'aire décrite. Vouloir examiner ce que ſeroit la force centrale dans les autres ſuppoſitions, c'eſt comme ſi l'on vouloit déterminer les propriétés d'un triangle rectiligne, tel que ſes trois angles ne fuſſent pas égaux à deux droits.

toire ſera un cercle. Or M. *Huyghens* a démontré qu'un corps qui décriroit un cercle avec une vîteſſe égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant, par l'action uniforme de ſa peſanteur, de la hauteur du demi-rayon, auroit une force centrifuge égale à ſa peſanteur. Afin donc qu'un corps décrivît un cercle autour d'un centre de forces, il faudroit qu'il partît avec la vîteſſe acquiſe par une chûte de la hauteur du demi-rayon, ou de la demi-diſtance de ce centre. Eclairciſſons ceci par un exemple. La peſanteur qui fait tomber les corps terreſtres, eſt une force dirigée vers le centre de la terre. Imaginons qu'on laiſſât tomber un corps de la hauteur d'un demi-rayon terreſtre, & que ſa chûte s'accélérât par l'action continue & uniforme d'une peſanteur égale à celle que nous éprouvons ici. Suppoſons enſuite qu'étant arrivé à la ſurface de la terre, ſa vîteſſe fût convertie en horizontale : ce corps ſe ſoutiendroit uniformément & conſtamment à la même diſtance du centre de la terre ; il deviendroit une petite planete, qui feroit ſes révolutions dans un grand cercle terreſtre.

Veut-on à préſent que ce corps décrive une ellipſe autour du centre de force, que nous ſuppoſerons encore celui de la terre. Il le fera dans deux cas. Le premier eſt facile à appercevoir ; c'eſt celui où ce corps partiroit avec une vîteſſe horizontale, moindre que celle qu'il auroit acquiſe en tombant de la hauteur d'un demi-rayon terreſtre. Il eſt en effet évident que ſa trajectoire ne pourroit dans ce cas tomber qu'au dedans du cercle que nous avons vu décrire plus haut. Cette trajectoire ne pouvant être qu'une ſection conique, elle ſera donc néceſſairement une ellipſe, mais une ellipſe ayant ſon centre de forces au foyer le plus éloigné du point A. Le ſecond cas, où l'on verra cette trajectoire devenir une ellipſe, eſt celui où la vîteſſe du corps eſt plus grande que celle qui lui feroit décrire un cercle, quoique moindre que celle qu'il auroit acquiſe en tombant de la hauteur du rayon entier. Il y aura cette *Fig.* 111. différence entre ce cas & le précédent, que dans celui-ci, le centre des forces S ſera le foyer le plus voiſin du point de départ A. Le corps commencera à s'éloigner du centre juſqu'à un point D, qui ſera le terme de ſon plus grand éloignement. Delà il ſe rapprochera du foyer S en revenant au point A,

& ainſi alternativement. Que ſi l'on ſuppoſe la hauteur de la chûte préciſément égale au rayon, le corps changeant ſa vîteſſe acquiſe en horizontale, décrira une parabole ayant ſon foyer en S. Enfin ſi cette hauteur étoit plus grande que le rayon, ce ſeroit une hyperbole, d'autant plus évaſée que la hauteur ſeroit plus grande.

Il ſe préſente ici une difficulté aſſez ſpécieuſe, & capable d'en impoſer à des eſprits à qui la théorie des forces centrales ne ſeroit pas bien familiere. Comment, dira-t'on, ſe peut-il faire qu'un qui part du ſommet d'une ellipſe, le plus éloigné du foyer où eſt le centre de tendance, après être arrivé au point diamétralement oppoſé, ou le plus voiſin de ce centre, commence à s'en éloigner. Il ne s'en eſt approché que par l'action de la force centrale, & cette force eſt d'autant plus grande, qu'il s'en approche davantage : comment donc peut-il s'en éloigner préciſément au point où il reſſent une plus grande impreſſion de cette force que quand il a commencé à s'en approcher. Ne devroit-il pas au contraire toujours continuer à s'approcher de ce foyer, & enfin y tomber. Quelques perſonnes ont donné cette objection comme victorieuſe, & ont cru avoir renverſé d'un ſeul coup, l'immenſe édifice de M. *Newton*. Mais on va voir qu'elle n'eſt fondée que ſur une inadvertence peu excuſable.

En effet, ils auroient raiſon ces adverſaires de *Newton*, s'il n'y avoit point de force centrifuge, & que les corps ſollicités par une force centrale ne décriviſſent pas des aires proportionnelles au temps. Mais cette propriété des mouvemens curvilignes, fait qu'à meſure qu'un corps approche du centre des forces, il ſe meut d'autant plus vîte, & que la force centrifuge augmente de plus en plus. Ce corps peut donc, en vertu de cette accélération ſur la courbe, acquérir une force centrifuge capable de prévaloir ſur celle qui le pouſſe vers le centre, & de l'en écarter. Or c'eſt ce qui arrive dans le cas préſent. Prenons pour exemple une ellipſe dont les deux ſommets ſont éloignés du foyer où réſide le centre des forces dans la raiſon de 1 à 3 ; & faiſons partir le corps du ſommet le plus éloigné. La vîteſſe avec laquelle il doit être projetté pour décrire une demi-ellipſe de cette proportion, eſt celle qu'il auroit

auroit acquiſe en tombant d'une hauteur $= \frac{1}{4}$ de la diſtance S A (*a*) Comme cette hauteur eſt moindre que $\frac{1}{2}$ S A, on voit le corps tomber au dedans du cercle décrit du centre S, conformément à ce qu'on a remarqué plus haut. Que le corps en queſtion ſoit maintenant arrivé en B, il y aura une vîteſſe trois fois auſſi grande qu'au point A; & les hauteurs d'où les vîteſſes différentes ſont acquiſes, étant comme les quarrés de ces vîteſſes, la hauteur d'où le corps auroit acquis la vîteſſe qu'il a au point B, ſeroit $\frac{9}{4}$ S A. Mais la force centripete au point B, étant 9 fois auſſi grande qu'au point A, la vîteſſe précédente que nous avons ſuppoſé être acquiſe par l'action uniforme de la force, telle qu'elle eſt en A, ſera la même que celle que produiroit la force en B par la chûte d'une hauteur 9 fois moindre. C'eſt pourquoi cette hauteur ſeroit $\frac{1}{4}$ S A, ou $\frac{3}{4}$ S B, puiſque S A eſt triple de S B. Il eſt donc clair que l'accélération du corps en B, lui procure une vîteſſe telle qu'il l'auroit acquiſe par l'action de la force en B, & une chûte des $\frac{3}{4}$ S B. Mais on a vu plus haut qu'un corps qui tomboit d'une plus grande hauteur que la moitié de ſa diſtance au centre des forces, devoit parcourir une courbe extérieure au cercle décrit de cette diſtance. Le corps parvenu en B, loin de continuer à s'approcher du point S, commencera donc à s'en éloigner, & il le fera juſqu'à ce que arrivé en A, & ſa force centrifuge ſe trouvant inférieure à ſa force centripete, il ſe rapprochera du point S, & ainſi ſucceſſivement par des oſcillations périodiques analogues, à certains égards, avec celles d'un pendule.

On pourroit encore démontrer cette vérité de la maniere ſuivante. Qu'on imagine que le corps parti de A, & arrivé en B, y rencontre un obſtacle qui le réfléchiſſe dans la direction de la tangente en B, & avec la vîteſſe qu'il a acquiſe à ce point. On ne ſçauroit conteſter qu'il ne revînt par le même chemin au point A. En général, ſi le mouvement de ce corps étoit interrompu dans un point quelconque de ſon orbite par

(*a*) Car Newton a démontré que la vîteſſe d'un corps au ſommet d'une ellipſe, eſt à celle qu'il lui faudroit pour décrire un cercle à la même diſtance du foyer, en raiſon ſoudoublée du parametre P, au double de cette diſtance. Donc les hauteurs qui ſont comme les quarrés des vîteſſes qu'elles produiſent, ſeront ici comme P à 2SA. Or P eſt ici $= 3$, & SA $= 3$. Donc la hauteur propre à faire décrire l'ellipſe, eſt à celle qui fait décrire le cercle, ou $\frac{1}{2}$ S A, comme 3 à 6. Ainſi la premiere eſt $= \frac{1}{4}$ S A, comme nous l'avons dit.

un obſtacle qui le réfléchît dans la direction de la tangente à ce point, avec toute ſa vîteſſe acquiſe, il reviendroit ſur ſes pas, par le même chemin, & en paſſant par des degrés d'accélération ou de retardation, contraires à ceux qu'il avoit éprouvés en venant. Il ſeroit facile de le démontrer rigoureuſement, & l'on en a un exemple dans le mouvement paraboli-lique des projectiles qui eſt réciproque. Il eſt donc évident que le corps parvenu de ſon apogée à ſon périgée, retourneroit par le même chemin de ſon périgée à l'apogée. Par conſéquent il ſera capable, en vertu de ſa vîteſſe & de la force de projection acquiſes en P, de décrire une partie ſemblable de courbe de l'autre côté de l'axe. Il ſeroit ridicule d'accorder l'un & de nier l'autre, puiſque, à la poſition près, tout eſt exactement ſemblable. Il n'eſt donc rien de plus foible que l'objection que nous venons de diſcuter; & quoiqu'elle ait paru ſi preſſante au P. *Caſtel* (*a*), qu'il ait cru de bonne foi avoir porté un coup mortel au ſyſtême de *Newton*, nous oſons dire avec un Ecrivain Anglois, peut-être un peu trop franc, qu'elle fait pitié, & que c'eſt une vraie objection d'écolier. On peut élever, nous n'en diſconviendrons point, contre l'attraction conſidérée philoſophiquement, des difficultés aſſez bien fondées. Mais les propoſitions que M. *Newton* déduit de ce principe, comme hypotheſe, ſur la forme des orbites que décriroient les corps, n'en ſont pas moins des vérités inconteſtables. Les révoquer en doute, c'eſt ſe rendre coupable aux yeux des perſonnes intelligentes dans la Géométrie & la Méchanique, d'une honteuſe précipitation, pour ne rien dire de plus.

On demande dans un Livre preſque récent, & l'ouvrage d'un homme célebre (*b*), ſi, dans la deſcription de ces orbites curvilignes, avec l'attraction ou cette force qui pouſſe ou attire vers un centre déterminé, on admettra la force centrifuge. Cette queſtion, ou plutôt cette objection déguiſée, nous a ſurpris, & nous ne nous attendions pas à la trouver dans ce Livre, d'ailleurs ingénieux, & qui contient la meilleure apologie qu'on puiſſe faire, d'une cauſe déſeſpérée. Faut-il douter que la force centrifuge ne doive être admiſe avec l'attraction

(*a*) De la peſ. univ. des corps. T. II, vers la fin.
(*b*) Théorie des tourb. Carteſiens. Refl. XI.

dans les mouvemens curvilignes. C'eſt par la combinaiſon de la force centrifuge avec la force centripete, que le mobile décrit une courbe plutôt qu'une autre; qu'il s'éloigne & s'approche du centre des forces. La premiere prévaut-elle, comme elle fait dans le ſommet de l'ellipſe le plus voiſin du foyer où réſide la force centrale, le corps s'en éloigne, & il continue à s'en éloigner juſqu'à ce que ſa vîteſſe ſe ſoit aſſez ralentie, auſſi bien que ſa force centrifuge qui en dépend, pour donner la ſupériorité à la force centripete. C'eſt ce qui arrive dans le ſommet de l'ellipſe le plus éloigné du centre des forces. Nous pourrions montrer de même, en ſuivant le mobile, comme pas à pas, dans les différens points de ſon orbite, & en calculant, d'après les principes univerſellement admis, ſa force centrifuge & ſa force centripete à chacun de ces points, qu'il s'éloigne du centre de tendance, ou qu'il s'en rapproche, à proportion que l'une prévaut ſur l'autre. Mais comme il ne nous eſt pas poſſible de nous livrer à tous ces détails ſans tomber dans une prolixité extrême, il nous ſuffira de l'avoir montré à l'égard des deux points principaux que nous venons d'examiner.

Il n'a encore été queſtion juſqu'ici que de la nature des courbes que décrivent des corps ſollicités par des forces centrales en raiſon inverſe du quarré de la diſtance. Il nous faut encore faire connoître une propriété inſigne de ces mouvemens. Lorſque pluſieurs corps attirés vers un centre par une force qui agit ſelon la loi dont nous parlons, décrivent des ellipſes à des diſtances différentes, les quarrés de leurs temps périodiques ſont comme les cubes de leurs diſtances moyennes. C'eſt-là la ſeconde partie de la mémorable découverte de *Kepler*, ſur le mouvement elliptique des planetes. Mais cette découverte de *Kepler* n'étoit que le fruit de ſes obſervations. M. *Newton* lui a donné une nouvelle certitude, &, pour ainſi dire, un nouvel éclat, en établiſſant que ce mouvement elliptique, & ce rapport entre les diſtances & les temps périodiques ſont des ſuites néceſſaires d'un principe unique.

L'ellipſe peut encore être décrite par un corps qui ſe meut autour d'un point dans lequel réſide une force qui attire en raiſon de la diſtance. Mais dans ce cas la force n'eſt pas dans l'un des foyers; elle eſt au centre même. La loi des

temps périodiques eſt remarquable dans le même cas. A quelque diſtance que ſoient les corps circulans, quelles que ſoient les grandeurs des orbites elliptiques qu'ils décrivent, les temps de leurs révolutions ſont égaux. Si une pareille loi régnoit dans notre ſyſtême, toutes les planetes mettroient le même temps à faire leurs révolutions.

La même méthode qui a ſervi à M. *Newton* pour démêler la loi des forces qui font décrire à un corps une ſection conique, lui ſert à reconnoître celle qu'il faudroit pour lui faire parcourir d'autres courbes connues. Il eſt aiſé de le ſentir, puiſqu'il ne s'agit que de démêler le rapport de certaines lignes qui ſont données, dès que la figure & ſes propriétés ſont connues. Ainſi il prouve qu'un corps qui décrit une ſpirale logarithmique autour d'un point, eſt retenu ſur cette courbe par une force qui eſt en raiſon inverſe du cube de la diſtance. Pour décrire un cercle, le centre des forces étant ſur la circonférence, il faudroit que la loi de la force centrale fût la raiſon réciproque de la cinquieme puiſſance de cette diſtance.

Mais ce n'eſt encore là que l'ébauche d'un problême plus général que M. *Newton* ſe propoſe dans le même Livre. Nous venons de voir la maniere de déterminer quelle loi de force centrale, eſt requiſe pour qu'un corps qui décrit une courbe connue, ſoit contraint à ſe tenir ſur ſa circonférence. Il eſt naturel de demander quelle courbe décrira un corps projetté dans une direction & avec une vîteſſe déterminées, & qui eſt ſollicité vers un point par une force centrale, qui agit ſuivant une certaine loi. Le problême, enviſagé de cette maniere, eſt d'une bien plus grande difficulté. Nous imiterons M. *Newton*, qui, avant de le traiter, s'y éleve, ou du moins y conduit ſes lecteurs par degrés, en le faiſant précéder d'un autre un peu plus ſimple.

Il s'agit dans cet autre problême de déterminer la loi d'accélération ſuivant laquelle tombera directement un corps qui éprouvera l'action d'une force variable. *Galilée*, comme l'on ſçait, avoit conſidéré la chûte directe des corps, en ſuppoſant la peſanteur uniforme, & ſa découverte eſt connue de tout le monde. M. *Newton* généraliſe infiniment la queſtion, en montrant la maniere de déterminer ce qui doit arriver dans toutes les ſortes d'hypotheſes qu'on peut former ſur l'action

de la peſanteur ou de la force centrale aux différentes diſtances du centre.

M. *Newton* traite quelques cas de ce problême d'une maniere trop ingénieuſe, pour ne pas nous y arrêter. Mais il falloit s'être élevé auſſi haut qu'il avoit déja fait, pour s'y prendre ainſi. Sa ſolution n'eſt qu'un corollaire de ce qu'il a déja démontré ſur les courbes que décrivent les corps autour d'un centre de forces. Il eſt viſible qu'un corps décrira une courbe d'autant plus applatie, & voiſine de ſon axe, que la force de projection qui ſe combine avec celle de la peſanteur, ſera moindre. Cette courbe ne doit cependant pas changer de nature, tant que la même loi de forces centrales ſubſiſtera : ce ſera toujours une ellipſe, ſi la force eſt comme la diſtance, ou en raiſon inverſe du quarré de la diſtance. La ligne droite, ſuivant laquelle il tombera dans le cas d'une projection nulle, ou infiniment petite, pourra par conſéquent être conſidéréc, comme une ellipſe infiniment applatie ou étroite ; & dans le premier cas, le centre des forces étant toujours au milieu de l'axe, cette ligne que nous avons dit repréſenter l'orbite du corps, ſera partagée également par ce centre, c'eſt-à-dire, que le corps l'ayant atteint, paſſera autant au delà en vertu de ſon accélération, puis reviendra continuant ainſi ſes oſcillations à l'infini. Il n'en arriveroit pas de même ſi la force étoit réciproquement comme le quarré de la diſtance. Car on a vu, ou il eſt aiſé de voir, que plus l'ellipſe s'applatit, plus ſes foyers ſe rapprochent des ſommets. Ainſi lorſqu'elle ſera une ligne droite, ſon foyer & ſon ſommet ſe confondront. Le corps ne paſſera donc point au delà ; on peut même aſſurer qu'il ne rebrouſſera point chemin. Car on ne ſçauroit aſſigner aucune cauſe qui le réfléchiſſe en ſens contraire. Ce phénomene au reſte ne doit point nous ſurprendre ; on en peut facilement rendre raiſon. La force qui eſt réciproquement comme le quarré de la diſtance, devient, lorſque cette diſtance eſt zero, infiniment grande, eu égard à la vîteſſe qu'a le corps parvenu au centre de forces, ou à la force capable de produire cette vîteſſe. Car nous trouvons que celle-ci ſuit ſeulement la raiſon réciproque des diſtances, pendant que l'autre augmente réciproquement comme leurs quarrés. Par conſéquent cette derniere, lorſque la diſtance deviendra o, ſera comme

1 : o^2, & l'autre comme 1 : o, dont la premiere eſt infiniment grande, eu égard à la ſeconde.

Faiſons connoître maintenant la méthode générale qu'enſeigne M. *Newton* pour déterminer dans tous les cas, & ſuivant toutes les hypotheſes qu'on peut faire ſur la loi de la force centrale, les eſpaces, les temps & les vîteſſes reſpectives dans les chûtes rectilignes. La voici : Sur l'axe A C, le long duquel tombe le corps, ſoit élevée à chaque point comme D, une perpendiculaire D E, proportionnelle à l'action de la force centrale en ce point : de tous les ſommets de ces lignes ſe formera une courbe dont l'aire ſervira à meſurer la vîteſſe acquiſe par le corps dans les différens points de la chûte. Car cette vîteſſe en un point quelconque D, ſera à celle qu'il aura en F, comme le côté du quarré égal à l'aire A B D E, au côté du quarré égal à l'aire A B F G. A l'égard des temps employés dans ces chûtes A D, A F, il faudra faire une autre courbe comme A K*d*, dont les ordonnées D K, F L, &c. ſoient réciproquement proportionnelles aux vîteſſes ci-deſſus D H, F I, & les temps employés à parcourir les eſpaces A D, A F, &c. ſeront comme les aires curvilignes, A D K, A F L, &c. (*a*)

Fig. 112.

Nous avons jugé à propos de donner une idée de cette méthode, dans la vue qu'elle ſervît à préparer les lecteurs à cette maniere d'enviſager de ſemblables queſtions, qui eſt très-familiere aux Géometres. Car l'objet des Mathématiques étant

(*a*) Pour démontrer ces vérités, qu'on conçoive l'eſpace A C diviſé en parties inf. petites, dont D *d* ſoit une. Que D E exprime l'intenſité de la force en D, & D H la vîteſſe. Que la force ſoit nommée F, l'eſpace A D = *s*, la vîteſſe = *u*, le temps de la chûte par A D = *t*. Maintenant on ſçait que la vîteſſe produite par une force uniforme, eſt en raiſon compoſée de l'intenſité de cette force & du temps pendant lequel elle agit. Ainſi la force F pouvant être réputée uniforme pendant le petit inſtant *dt*, employé à parcourir D *d* ou *ds*, la vîteſſe produite durant cet inſtant, c'eſt-à-dire, l'incrément *du* de la vîteſſe totale *u*, ſera comme F *dt*. Mais le temps employé à parcourir un eſpace d'un mouvement uniforme, eſt comme cet eſpace directement, & comme la vîteſſe réciproquement ; ainſi *dt* employé à parcourir *ds*, avec la vîteſſe *u*, eſt comme $\frac{ds}{u}$. Et par conſéquent F *dt* = F $\frac{ds}{u}$ = *dv*. Donc F*ds* = *u du*, ou *uu* = 2 ∫ *u ds*. Mais F*ds* exprime l'élément D*e* de l'aire A D E B. Et conſéquemment ∫F*ds* eſt cette aire. Ainſi *u* ou D H, eſt comme la racine de l'aire A B E D.

Quant au temps, ſi l'on fait D K réciproquement proportionnelle à D H, il eſt évident que D K, ou le rectangle D *k* exprimera le temps que le mobile met à parcourir D *d*. L'aire entiere de la courbe A K, exprimera donc le temps que ce mobile met à parcourir tout l'eſpace A D. Ces deux théorêmes doivent être remarqués avec ſoin, comme étant le fondement de toute la théorie de ces ſortes de mouvemens.

de meſurer tout ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution, on repréſente, autant qu'il ſe peut, les grandeurs qu'on conſidere, par des lignes, des courbes, ou des aires qui ſuivent le même rapport. Le problême eſt après cela en quelque ſorte réſolu, ou du moins c'eſt à la Géométrie à faire le reſte. Afin donc d'éclaircir cette méthode, nous allons en faire l'application à quelques cas ſimples & déja connus.

Dans l'hypotheſe de *Galilée*, c'eſt-à-dire, d'une peſanteur uniforme, & partout la même, la force ſera auſſi partout la même. Ainſi, au lieu d'une courbe, on aura une ligne droite B E G. La racine du rectangle A B E D, qui eſt l'ordonnée de la courbe A H I, & qui exprime à chaque point la vîteſſe, ſera donc comme la racine de la hauteur parcourue, & la courbe A H I, ſera une parabole ayant pour équation $HD = \sqrt{(AB \times AD)}$. Quant aux temps, la courbe qui les repréſente par les ſegmens de ſon aire, aura ſon ordonnée D K, réciproquement proportionnelle à H D, ou à $\sqrt{(AD)}$, & ſera une ſorte d'hyperbole ayant pour aſymptotes les lignes A B & A F, infiniment prolongées : néanmoins ſon aire, quoiqu'infiniment prolongée, ne ſera que finie du côté de A B, & par les méthodes connues on trouvera que ſes ſegmens OADK, OAFL, ſont comme les racines des abſciſſes A D, A F, c'eſt-à-dire, des hauteurs. Voilà donc encore les vîteſſes & les temps en raiſon ſoudoublée des eſpaces parcourus, comme *Galilée* le démontroit à ſa maniere. Il faudroit être bien peu ſenſible aux attraits de la vérité, pour ne pas être charmé de cet accord entre les réſultats de méthodes ſi différentes. *Fig.* 113.

Faiſons à préſent la ſuppoſition de la force centrale décroiſſante comme la diſtance au centre. La premiere des courbes ci-deſſus dégénérera évidemment en un triangle qui aura ſon ſommet au centre ; ainſi la vîteſſe ſera toujours meſurée par la racine du trapeſe A B E D, qui eſt proportionnelle à l'ordonnée D H du cercle décrit du centre C par le point A. L'on trouve enfin, à l'aide du calcul intégral, que la courbe des temps qui aura ſes ordonnées réciproquement proportionnelles aux ordonnées D H, aura ſes ſegmens proportionnels aux arcs correſpondans A H. D'où l'on déduira que de quelque point que commence la chûte du corps, il arrivera dans le même temps au centre. On l'eût pu faire facilement de ce qu'on a dit plus *Fig.* 114.

haut, ſçavoir que la trace rectiligne d'un corps dans l'hypothese que nous examinons, peut être conſidérée comme une ellipſe infiniment applatie ayant ſon centre de forces au milieu de ſon grand axe. Or il eſt viſible que le temps de la chûte juſqu'au centre, n'eſt autre choſe que le quart d'une révolution périodique du corps dans cette ellipſe infiniment étroite, & l'on ſçait que dans cette hypotheſe de force centrale, toutes les révolutions quelconques, quelle que ſoit la grandeur des ellipſes, ſont d'égale durée. De quelque point donc que parte le corps, tombant directement au centre des forces, il y arrivera dans le même temps. Comme M. *Newton* a aſſez bien prouvé ailleurs, qu'un corps placé dans l'intérieur de la terre, y éprouveroit une gravitation vers le centre, proportionnelle à ſon éloignement de ce point, on peut tirer de ce que nous venons de dire une conſéquence curieuſe. C'eſt que ſi la terre étoit percée, d'outre en outre, d'une cavité qui permît à un corps d'aller juſqu'au centre, de quelque point au deſſous de la ſurface qu'on le laiſsât tomber, il arriveroit à ce centre dans le même temps.

Nous venons enfin au problême direct des trajectoires, la loi de la force centrale étant donnée. Pour le réſoudre, M. *Newton* commence par démontrer une propoſition préliminaire
Fig. 115. que voici. Si un corps eſt projetté du point S, avec une certaine vîteſſe dans la direction S L, & que par l'action d'une force centrale, qui l'attire vers C, il décrive la courbe S F I, en traçant du centre C l'arc F P, la vîteſſe du corps en F, le long de la courbe, ſera la même que celle qu'il auroit eue en arrivant en P, par une chûte directe du point S, pourvu que cette chûte ait commencé avec une vîteſſe égale à celle de la projection.

Comme nous ſommes obligés de conſidérer ici la courbe S F I, rapportée à des ordonnées convergentes au point C, il faut décrire de ce point par S un arc de cercle ſur lequel on prendra les abſciſſes S H; & on aura la nature de la courbe, ſi l'on peut trouver une équation, ſoit finie, ſoit différentielle entre l'arc S H & C F; car il eſt évident que cette équation étant donnée & conſtruite, à chaque point H on pourra aſſigner le point F qui lui répond, & par conſéquent on aura la trajectoire S F I.

Pour

Pour trouver ce rapport, nous nous ſervirons des conſidérations ſuivantes. En ſuppoſant le rayon C*h*, infiniment proche de CH, de ſorte que H*h*, F*f*, ſoient des arcs infiniment petits, le rapport de CH à CF, ſera celui de H*h* à *g*F; & le petit triangle *g*CF, exprimera le temps pendant lequel *f*F ſera parcouru. D'un autre côté, la loi de la force centrale étant donnée, on aura l'aire de la courbe SPEB, & par conſéquent la vîteſſe en P ou en F. Finalement l'eſpace eſt en raiſon compoſée de la vîteſſe & du temps; par conſéquent on aura une égalité qui, traduite en expreſſion analytique, donnera l'équation entre H*h* & *fg*, ou SH & CF. En nommant ces dernieres lignes x & y, & leurs différentielles reſpectives dx, dy, on trouvera pour l'équation de la trajectoire $dx = 2a^3\,dy : y\sqrt{(2By^2 - 2y^2 \times \int F\,dy - 4a^4)}$. (*a*)

On peut maintenant former telle hypotheſe que l'on voudra ſur la loi de la force centrale. La quantité indéterminée F, qui doit exprimer ſa relation avec y, ſe prête à toutes ces différentes hypotheſes. Si on ſuppoſe la force en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, alors F ſera exprimée

(*a*) Voici l'analyſe entiere de ce problême. Que CS ſoit $= a$ SH $= x$, H*h* $= dx$, CF $= y$, *fg* $= dy$, on trouvera Fg $= y\,dx : a$, & F*f* $= \sqrt{((a^2\,dy^2 + yy\,dx^2) : a^2)}$. Que u ſoit maintenant la vîteſſe du corps en F; & que F déſigne la force centrale, l'élément de l'aire SDEP ſera $= -F\,dy$. Or cet élément eſt, comme l'on a vu dans la note de la page 43, $= u\,du$. Par conſéquent $F\,dy = -u\,du$, & en intégrant $\int F\,dy = B - \frac{uu}{2}$. (On verra plus bas pour quelle raiſon nous ajoutons cette conſtante B). Ainſi $u = \sqrt{(2B - 2\int F\,dy)}$. D'un autre côté, le petit triangle *g*CF, que nous avons dit exprimer le temps, ſera $y^2\,dx : 2a$, ou (parce que le temps ne doit avoir aucune dimenſion, & afin d'obſerver la loi des homogênes) $y^2\,dx : 2a^3$. Or on ſçait que l'eſpace, ſçavoir F*f*, eſt en raiſon compoſée de la vîteſſe & du temps; c'eſt pourquoi égalant l'expreſſion trouvée ci-deſſus pour l'eſpace, avec le produit de celles de la vîteſſe & du temps que nous avons auſſi aſſignées; & traitant l'équation à la maniere ordinaire, on trouvera celle que nous avons donnée.

La raiſon pour laquelle on a fait $u = \sqrt{(2B - 2\int F\,dy)}$, c'eſt que lorſque y eſt égale à a, ou CS, il faut que la vîteſſe ne ſoit pas nulle, mais qu'elle ſoit égale à celle avec laquelle le corps eſt parti au point S. Il faudra donc préliminairement déterminer B, d'après cette condition. Par exemple, ſi l'on ſuppoſe la force en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, c'eſt-à-dire, $aag : yy$; (g étant la force à la diſtance a), on aura $-\int F\,dy = aag : y$. Ainſi u ſera $\sqrt{(2B + 2aag : y)}$. Or en nommant h la hauteur qui auroit produit la vîteſſe de projection en S, par l'action uniformément continuée de la force g, cette vîteſſe eût été trouvée $= \sqrt{(2gh)}$. Donc quand y ſera $= a$, alors u doit être $\sqrt{(2gh)}$. Ainſi l'on a dans ce cas $2B + 2ag = 2gh$; ce qui donne $B = (h - a)g$. Il faudra uſer de ſemblables précautions dans les autres hypotheſes.

par $\frac{1}{yy}$, ou $\frac{aag}{yy}$, en exprimant par g cette force à la distance a. Ainsi $-\int F\,dy$, sera $-\int \frac{aagdy}{yy}$, ou $\frac{aag}{y}$, & l'équation se réduira à celle-ci, $\frac{dx}{a} = 2a^2\,dy : y\sqrt{(2By^2 + 2aagy - 4a^4)}$. Cela signifie que si l'on prend une y ou CP, *ad arbitrium*, & qu'on integre l'expression $2a^2\,dy : y\sqrt{}$ &c. cette intégrale exprimera l'angle que fait le rayon vecteur égal à CP, avec la ligne CA; car $\frac{dx}{a}$ n'est autre chose que la différentielle de cet angle ou de son égal SCH. Or dans le cas présent, l'intégrale de $2a^2\,dy : y\sqrt{}$ &c. est elle-même un angle dont le rayon est donné en quantités déterminées, & le finus en y. Ainsi l'on pourra facilement, & par une construction géométrique, assigner à chaque distance y du centre des forces, l'angle SCH, ou SCF, qui lui convient, & l'on aura la courbe décrite par le mobile.

Mais ce n'est pas assez que de connoître ce rapport entre les ordonnées CF, & leurs distances angulaires avec CS. Comme il ne donne pas une idée aussi distincte de la courbe qu'une équation de la forme ordinaire, ou à ordonnées paralleles, il faut tâcher de remonter à cette équation : cela se pourra toujours, lorsque l'intégrale $2a^2\,dy : y\sqrt{}$ &c. sera un angle ou une portion rationnelle d'angle. La chose n'est pas bien difficile, & nous l'abandonnons à la sagacité de nos lecteurs.

L'équation étant ainsi une fois réduite à exprimer un rapport entre des co-ordonnées, telles que CL, LF, il sera facile de la comparer à celles des courbes connues : dans le cas particulier que nous venons d'examiner, on trouve que la courbe cherchée est toujours une section conique, ayant le centre de forces à un de ses foyers : sçavoir une ellipse, lorsque l'angle CSR étant droit, la hauteur d'où le corps eût dû tomber pour acquérir la vîtesse avec laquelle il part en S, hauteur que nous avons exprimée par h, est moindre que la distance du point de départ au centre de tendance : une parabole, lorsque cette hauteur est égale à cette distance : une hyperbole enfin,

lorſqu'elle la ſurpaſſe, ou que l'attraction ſe change en répulſion.

L'analyſe que nous venons de développer, eſt dûe à M. Jean *Bernoulli* (*a*), & nous l'avons choiſie parce qu'elle eſt plus claire que celle qu'on trouve dans les *Principes*. Il faut néanmoins convenir que M. *Newton* en avoit fait les principaux frais en établiſſant le théorême préliminaire qui lui ſert de baſe. Il faut encore convenir que c'eſt une ſorte de chicane que le reproche que M. *Bernoulli* fait à *Newton* de n'avoir pas aſſez bien démontré que la trajectoire, dans le cas d'une force croiſſante en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, eſt néceſſairement une ſection conique. M. *Newton* ayant déja fait voir que, pour décrire une ſection conique, il faut une force qui ſuive le rapport ci-deſſus, il pouvoit ſe diſpenſer d'entrer dans le détail de la preuve directe. Quant à l'exemple que M. *Bernoulli* emploie pour autoriſer ſon reproche, il y a une diſparité. Il eſt bien vrai que, de ce qu'on a démontré qu'un corps décrivant une ſpirale logarithmique, éprouve l'action d'une force centrale qui eſt réciproquement comme le cube de la diſtance, on ſeroit mal fondé à en conclure que dans cette hypotheſe, tout corps projetté, même obliquement, décrira une pareille courbe. Cela vient de ce que l'angle de la tangente avec un rayon de la ſpirale étant donné, cette courbe eſt entiérement déterminée dans toutes ſes dimenſions : c'eſt pourquoi il n'y a qu'une vîteſſe déterminée de projection dans l'angle donné, qui puiſſe la faire décrire. Mais il n'en eſt pas de même dans les ſections coniques. Le même centre de forces ſubſiſtant, une infinité d'ellipſes, de paraboles & d'hyperboles, peuvent avoir au point de départ la même tangente. Ainſi, quelle que ſoit la vîteſſe de projection, il y aura une ſection conique à laquelle elle conviendra, & qui ſera la courbe que décrira le corps. D'ailleurs, M. *Newton* ayant donné la ſolution du problême, où l'on demande la trajectoire d'un corps projetté avec une certaine vîteſſe, & dans une direction quelconque, la force variant dans le rapport inverſe du cube de la diſtance, cela montre que le cas de la force ſuivant le rapport inverſe du quarré, ne lui auroit guere coûté.

(*a*) Mem. de l'Acad. 1710. & *Op.* T. 1.

On peut parvenir à l'équation de la trajectoire de diverſes manieres. Outre celle qu'on vient de voir, M. *Bernoulli* en a donné une autre. Il nous a auſſi communiqué celle de M. *Herman :* mais celle-ci mene à une expreſſion différentielle, ſi compliquée par le mêlange des indéterminées, qu'à moins d'être prévenu de ce qu'on doit trouver, il ſeroit peut-être impoſſible de les démêler. M. *Varignon* a tiré, avec beaucoup d'adreſſe, la ſolution du même problême, de ſes nombreuſes formules pour les forces centrales (*a*). On peut enfin conſulter ſur ce ſujet le Commentaire qui doit paroître dans peu à la ſuite de la traduction des *Principes*, par Madame la Marquiſe *du Châtelet.*

Il faudroit nous plonger dans des détails trop profonds de pure analyſe, pour développer les cas différens de ce problême. La nature de notre plan nous permet de nous en tenir à indiquer les réſultats. Si l'on ſuppoſe que la force ſoit comme la diſtance, la trajectoire ſe trouve une ellipſe ayant le centre des forces, non à ſon foyer, mais à ſon centre. Fait-on varier la force en raiſon inverſe du cube de la diſtance, & partir le corps obliquement à la direction de la force centrale, & avec une certaine vîteſſe déterminée, il décrira une ſpirale logarithmique ; mais s'il partoit dans une direction perpendiculaire à celle de la force centrale, la trajectoire ſeroit une ſpirale d'une autre eſpece, dont le rapport entre les rayons & les angles de révolutions, dépendroit de la meſure d'un ſecteur hyperbolique ou elliptique. Il eſt à propos de remarquer que dans toutes les hypotheſes où l'on fait varier la gravité dans une raiſon réciproque du cube, ou d'une puiſſance plus élevée de la diſtance, ſi le corps a une fois commencé à s'approcher du centre de forces, il ne ceſſera jamais de s'en approcher de plus en plus. Dans ce cas, il tombera quelquefois à ce centre, quelquefois il s'en approchera ſeulement juſqu'à une certaine diſtance qu'il n'atteindra jamais : c'eſt ce qui arrive dans l'hypotheſe d'une force en raiſon inverſe de la cinquieme puiſſance de la diſtance, lorſqu'un corps eſt lancé dans une direction oblique à celle de la force, & avec une

(*b*) Mem. de l'Acad. 1710.

certaine vîteſſe (*a*) ; au contraire dans les mêmes hypotheſes, un corps qui a commencé à s'éloigner du centre, continue toujours à le faire : & il y a des cas où il ne parviendra jamais qu'à une diſtance finie ; d'autres, & ce ſont les plus fréquens, où il s'éloignera en plus ou moins de révolutions à une diſtance infinie.

De ce que nous venons de dire, il réſulte encore une vérité curieuſe, & d'autant plus digne d'être remarquée, que M. *Newton* en a fait uſage pour expliquer & calculer le mouvement des apſides de la lune. On a vu qu'un corps ſollicité vers un centre par une force qui eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, s'approchera & s'éloignera alternativement de ſon centre de tendance, après une demi-révolution, à moins qu'il ne décrive un cercle. Mais ſi la force eſt réciproquement comme le cube de la diſtance, le corps s'approchera, ou bien s'éloignera ſans ceſſe du centre, c'eſt-à-dire, tendant de ſon périhélie à ſon aphélie, il n'y arrivera jamais, ou au contraire. Si donc nous faiſons croître ou décroître la force centrale en une raiſon plus grande que la réciproque des quarrés des diſtances, & cependant moindre que celle des cubes, le corps commençant à s'éloigner du centre, & partant, par exemple, de ſon périgée, n'arrivera à ſon apogée qu'après plus d'une demi-révolution, & ce ſurplus ſera d'autant plus grand que la loi de la gravité approchera davantage de la réciproque des cubes des diſtances. Dans le cas particulier où la force centrale ſeroit réciproquement comme la puiſſance $\frac{11}{4}$ de la diſtance, le corps partant du périgée, n'attendroit ſon apogée qu'après une révolution entiere, & delà reviendroit dans une révolution complete à ſon périgée, de ſorte que ſon orbite auroit la forme qu'on voit dans la figure 116. Ce ſeroit le contraire, nous voulons dire que le corps partant, par exemple du périgée, atteindroit ſon apogée avant une demi-révolution, & ſeroit de retour à ſon périgée avant une révolution complete, ſi la force centrale ſuivoit un rapport moindre que le réciproque du quarré de la diſtance. Toutes les fois donc qu'avec une force qui eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, ſe mêlera quelque autre force, qui augmentera ou

(*a*) Voy. *Traité des Fluxions* de M. Maclaurin, parag. 878 & ſuiv. Cet ouvrage contient des choſes remarquables ſur ce ſujet, & mérite tout-à-fait d'être conſulté.

qui diminuera la premiere, de telle ſorte que le total ou le reſtant ſuivra une loi qui s'écartera du quarré, le corps décrira une orbite ayant ſon apogée & ſon périgée, diſtans de plus ou de moins qu'une demi-révolution. Si l'on deſire un plus grand détail ſur toutes ces vérités, on doit conſulter l'excellente *Expoſition des découvertes Philoſophiques* de *Newton*, par le célebre M. *Maclaurin*.

Il y auroit dans le Livre de M. *Newton* de quoi nous occuper encore long-temps, ſi nous entreprenions d'entrer ſur tous les points dans des détails ſemblables aux précédens. Mais cela nous meneroit de beaucoup trop loin, & par cette raiſon il nous ſuffira d'indiquer quelques-unes des recherches nombreuſes de Méchanique, répandues dans cet immortel ouvrage. Après avoir déterminé les orbites que décriroient des corps projettés dans les différentes hypotheſes de la force centrale, M. *Newton* examine comment ces différentes hypotheſes affecteront le mouvement des corps qui roulent le long des courbes. Il ſe propoſe à cette occaſion de déterminer celle le long de laquelle un corps devroit tomber, dans le cas d'une force croiſſant comme la diſtance au centre, pour que ſes chûtes quelconques fuſſent d'égale durée. Le réſultat de ſa recherche eſt très-digne d'être remarqué. Il trouve que, dans ce cas, la courbe eſt une épicycloïde, comme dans celui des directions paralleles & de la peſanteur uniforme, c'étoit une cycloïde. Delà M. *Newton* paſſe à examiner quels mouvemens prendront des corps qui s'attirent mutuellement : ce qu'il dit dans cet endroit eſt d'un grand uſage dans le ſyſtême de l'Univers, & c'eſt le fondement de ſes découvertes ſur les mouvemens & les irrégularités de la lune, la préceſſion des équinoxes, &c. Il examine enſuite l'action qu'un corps dont toutes les particules attirent ſuivant une certaine loi, exerce ſur une autre placé dans ſon voiſinage. Il termine enfin ſon premier Livre, en déterminant le chemin des particules de lumiere paſſant d'un milieu dans un autre, d'où il déduit la fameuſe loi de la réfraction, & l'égalité ſi connue des angles d'incidence & de réflection.

Une grande partie du ſecond Livre de M. *Newton* eſt employé à traiter de la réſiſtance des fluides, ou des milieux, au mouvement. Ce doit être l'objet de l'article ſuivant, où l'on

fera connoître les principales vérités de cette théorie. M. *Newton* traite auſſi dans ce Livre du mouvement des fluides, & examine diverſes queſtions qui y ont rapport ; comme les vibrations des fluides élaſtiques, le mouvement des ondes, choſes ſur leſquelles il démontre des vérités également curieuſes & utiles dans la Phyſique. Nous ne dirons rien ici du troiſieme Livre : il appartient tout entier à l'Aſtronomie, ou au ſyſtême Phyſique de l'Univers ; & nous en ferons un extrait aſſez étendu dans un des Livres ſuivans.

VI.

De la réſiſtance des milieux.

Dans tout ce qu'on a dit juſqu'ici, du mouvement & des phénomenes qui ſuivent de ſa compoſition, on n'a fait aucune attention à la réſiſtance du milieu dans lequel il ſe fait. Il étoit néceſſaire de commencer à écarter de la queſtion, cette circonſtance qui en augmente beaucoup la difficulté, ſauf à y revenir dans la ſuite après avoir connu parfaitement ce qui ſe paſſeroit ſi elle n'avoit point lieu. C'eſt par une ſemblable gradation que l'eſprit humain doit ſe conduire pour s'élever à la connoiſſance des phénomenes de la nature. Il lui faut en quelque ſorte décompoſer ſon objet, le conſidérer d'abord ſous l'aſpect le plus ſimple, ſe familiariſer, pour ainſi dire, avec les premieres difficultés, avant que d'entreprendre d'en ſurmonter de plus grandes. C'eſt au moyen de cette marche ſage & prudente que les Mathématiques, s'élevant de recherches en recherches, ont atteint ce point de ſublimité auquel elles ſont aujourd'hui parvenues.

Les premiers fondateurs de la ſcience du mouvement, tels que *Galilée*, *Torricelli*, firent toujours abſtraction de la réſiſtance des milieux. Ce n'eſt pas qu'ils ne préviſſent bien qu'elle devoit apporter quelque changement à leurs déterminations ; mais il n'étoit pas encore temps de s'attacher à cette recherche difficile, & la Méchanique n'avoit pas acquis des forces ſuffiſantes pour s'en tirer avec ſuccès. C'eſt pourquoi *Galilée* appliquant à la pratique ſa théorie ſur les mouvemens des projectiles, ſuppoſe que les corps projettés ont une maſſe conſidérable, & une denſité beaucoup plus grande que celle de l'air.

Il y eut cependant, peu après *Galilée*, quelques Méchaniciens François qui conſidérerent ce qui arriveroit à un corps tombant, non dans le vuide, mais à travers un milieu réſiſtant. Nous trouvons ſur ce ſujet dans les Lettres de *Deſcartes*, (*a*) une remarque fine & propre à confirmer ce que nous avons dit ailleurs ſur les découvertes qu'il eût été capable de faire, ſi moins ambitieux, il ſe fût contenté d'approfondir différentes parties iſolées de la Phyſique. Un des Méchaniciens dont nous parlons, avoit avancé qu'un corps tombant dans un milieu réſiſtant, n'accélére roit ſon mouvement que juſqu'à un certain point, après quoi il tomberoit avec une vîteſſe uniforme. Il y a dans cette propoſition du vrai & du faux, & *Deſcartes* le démêla très-bien. Il montra qu'il y avoit, à la vérité, un certain degré de vîteſſe au-delà duquel le mobile ne paſſeroit jamais, mais qu'il reſteroit un temps infini à l'acquérir. Ainſi ce corps accélérera toujours ſon mouvement, quoique par degrés de plus en plus inſenſibles. Cette doctrine eſt conforme à celle des Géometres qui ont depuis traité la même théorie.

C'eſt à *Newton* & *Wallis* qu'on doit les premieres recherches approfondies ſur la réſiſtance des milieux au mouvement. *Newton* publia le premier ſes recherches ſur ce ſujet, dans ſes *Principes Mathématiques de la Philoſophie Naturelle*. Il y emploie preſque tout le ſecond Livre, & il l'y traite avec cette profondeur qui caractériſe tous ſes écrits. L'ouvrage de *Newton* excita *Wallis*, qui avoit conſidéré de ſon côté le même ſujet, à publier ſes réfléxions. Il les communiqua à la Société Royale, & elles furent inſérées dans les *Tranſactions* de 1687. La matiere n'eſt pas autant approfondie dans cet écrit que dans les Principes. *Wallis* n'embraſſe que l'hypotheſe la plus ſimple, ſçavoir celle de la réſiſtance en raiſon des vîteſſes. Mais ce qu'il dit ne laiſſe pas de faire beaucoup d'honneur à ſa ſagacité. Peu après que le Livre de M. *Newton* eut paru, M. *Leibnitz*, ſur l'extrait qu'il en vit dans les *Actes de Leipſick*, ſe rappella, dit-il, d'anciennes idées qu'il avoit eues ſur ce ſujet, & qu'il avoit déja expoſées douze ans auparavant à l'Académie Royale des Sciences de Paris. Il en forma un écrit qu'il inſéra dans ces *Actes*. M. *Huyghens* enfin expoſa auſſi à

(*a*) Lett. de Deſcart. T. III, Lett. 105.

ſa

ſa maniere, c'eſt-à-dire avec une élégance remarquable, quelques traits de cette théorie à la fin de ſon *Traité de la peſanteur*, qui parut en 1690. Tout ce que ces Auteurs avoient démontré, ou avancé ſans preuve, a enſuite été traité à l'aide des calculs modernes, par M. *Varignon*, dans une ſuite de Mémoires imprimés parmi ceux de l'Académie des années 1707, 1708, 1709 & 1710. Ce ſont d'excellens morceaux, auxquels on pourroit néanmoins à mon gré reprocher une prolixité fatiguante, & tout-à-fait ſuperflue.

On doit conſidérer dans les fluides deux ſortes de réſiſtances, l'une que nous nommerons reſpective avec M. *Leibnitz*, l'autre que nous appellerons abſolue. La premiere, eſt l'effet de l'inertie des parties dont le fluide eſt compoſé. Le corps qui le traverſe ne peut le faire ſans déplacer celles de ces parties qui ſe trouvent ſur ſon chemin, & ſans leur communiquer du mouvement. Il faut par conſéquent qu'à chaque inſtant il perde quelque partie du ſien. Cette perte ſera viſiblement d'autant plus grande, que le milieu ſera plus denſe. Car tout le reſte étant égal, il y aura d'autant plus de maſſe à déplacer dans le même temps. Elle croîtra auſſi à meſure que la vîteſſe ſera plus grande. La choſe eſt ſi évidente, qu'il eſt inutile de nous mettre en frais de raiſonnemens pour le démontrer.

La réſiſtance abſolue a une autre origine. Elle vient de l'adhérence des parties du fluide, adhérence qui ne peut être ſurmontée que par une certaine force déterminée. Il eſt viſible que celle-ci ne dépend point de la vîteſſe. Quelle que ſoit la vîteſſe, grande ou petite, il faut la même force pour ſurmonter cette difficulté, ou pour ſéparer ces parties les unes des autres. De cette eſpece eſt la réſiſtance occaſionnée par le frottement, par la viſcoſité des fluides : on peut encore regarder de cette maniere celle que la peſanteur apporte à l'aſcenſion des corps jettés perpendiculairement en haut, en ſuppoſant qu'elle agiſſe uniformément. Nous commencerons par examiner quelques-uns des phénomenes de la réſiſtance reſpective.

Nous venons de dire que la réſiſtance reſpective des milieux, croît ou décroît, en même temps que la vîteſſe, mais nous n'avons pas voulu dire que ce fût toujours dans le même rapport. Cette relation entre la vîteſſe & la réſiſtance,

ne pouvant guere être connue *à priori*, à cauſe de pluſieurs circonſtances phyſiques, les Géometres ont examiné ce qui arriveroit dans trois hypotheſes différentes. Suivant la premiere, la réſiſtance eſt proportionnelle à la vîteſſe. Un corps mu avec une vîteſſe double, triple, perdra de ſon mouvement ou de ſa vîteſſe une quantité double, triple, &c. Dans la ſeconde, cette réſiſtance ou la perte de mouvement qu'elle opere, eſt proportionnelle au quarré de la vîteſſe. Il y en a enfin une troiſieme, ſuivant laquelle cette réſiſtance eſt proportionnelle à la ſomme du quarré de la vîteſſe, & de la vîteſſe elle-même. De ces hypotheſes la plus probable & la plus phyſique, eſt la ſeconde. Car lorſqu'un corps ſe meut dans un fluide, avec une vîteſſe triple, par exemple, non ſeulement il choque chacune des parties de ce fluide avec une vîteſſe triple, mais il en choque dans le même temps trois fois autant. La perte de mouvement faite dans le même temps, qui, à raiſon du premier chef, eût été trois fois auſſi grande, le ſera donc neuf fois, en y faiſant entrer le ſecond. Ainſi cette hypotheſe paroît la plus conforme aux loix de l'hydraulique. Il n'eſt cependant pas inutile de conſidérer les autres, n'y eût-il que le plaiſir que goûte l'eſprit géométrique dans la découverte d'une vérité purement hypothétique.

Il y a dans le mouvement d'un corps qui traverſe un fluide, trois cas à examiner. Il peut ſe mouvoir, ou en vertu d'une impulſion une fois imprimée, dans lequel cas ſa vîteſſe eût été uniforme, ou en vertu d'une ſuite d'impulſions qui auroient fait varier ſon mouvement ſuivant une certaine loi. Tel eſt le mouvement des corps graves, qui tombant dans le vuide, s'accélereroit uniformément. Ce mobile enfin peut être projetté obliquement à l'horizon : alors ſon mouvement tiendra des deux précédens. Il auroit été uniforme dans le ſens de la direction primitive, & accéléré dans le ſens vertical, ſuivant une certaine loi ; mais la réſiſtance change l'un & l'autre de ces rapports, & la courbe eſt d'une autre nature que dans l'hypotheſe du vuide.

Faiſons d'abord mouvoir le mobile d'un mouvement primitivement uniforme, & ſuppoſons que le milieu réſiſte en raiſon des vîteſſes : nous allons voir décroître celles-ci géométriquement en temps égaux. Pour le rendre ſenſible, imagi-

nons que la réſiſtance du milieu eſt telle qu'à chaque inſtant égal, elle ôte un dixieme de la vîteſſe du mobile. Cette vîteſſe étant donc exprimée par 1, après le premier inſtant elle ſera réduite à $\frac{9}{10}$, & après le ſecond, aux $\frac{9}{10}$ de celle-ci, c'eſt-à-dire, aux $\frac{81}{100}$: à la fin du troiſieme, elle ne ſera plus que les $\frac{729}{1000}$ de la vîteſſe primitive, & ainſi conſécutivement. Or ces grandeurs ſont viſiblement, & par la nature de l'opération, en progreſſion géométrique décroiſſante.

Cette premiere vérité nous met déja en poſſeſſion de quelques conſéquences remarquables. Il eſt viſible que le corps perdant à chaque inſtant des degrés de vîteſſe en progreſſion géométrique décroiſſante, il faudra un nombre infini d'inſtans, ou un temps infini pour réduire le corps au repos. Mais il ne faut pas en conclure que l'eſpace parcouru ſoit infini. En ſuppoſant les inſtans égaux, les eſpaces parcourus dans chacun d'eux, ſont comme les vîteſſes. Or celles-ci décroiſſant géométriquement, leur ſomme, & par conſéquent celle des eſpaces, ne ſera que finie. Dans le cas préſent, l'eſpace parcouru avec la vîteſſe primitive, durant l'un des inſtans égaux dans leſquels nous avons diviſé le temps, étant 1, l'eſpace parcouru durant ce temps infini que durera le mouvement, ſeroit la ſomme de 1, $\frac{9}{10}$, $\frac{81}{100}$, &c. ou 10.

Si, ſelon la coutume des Géometres, nous repréſentons les vîteſſes par des lignes A B, C D, ordonnées ſur un axe, tandis que leurs intervalles repréſenteront les inſtans, la courbe paſſant par le ſommet de ces ordonnées, ſera la logarithmique : car la pro- *Fig.* 116.
priété de cette courbe eſt, comme l'on ſçait, d'avoir ſes ordonnées équidiſtantes, auſſi-bien que leurs différences, en progreſſion géométrique ; de ſorte que les abſciſſes priſes d'un terme fixe, ſont en progreſſion arithmétique. Ainſi le temps croît comme les abſciſſes, qui ſont les logarithmes des ordonnées, & par conſéquent le logarithme de la vîteſſe initiale étant zero, les temps qui répondront aux autres vîteſſes, ſeront comme leurs logarithmes ; d'où il ſuit encore que la vîteſſe ne ſera entiérement anéantie qu'après un temps infini ; car le logarithme de zero eſt infiniment grand. Quant à l'eſpace, il ſera repréſenté par l'aire de la courbe prolongée à l'infini. Or cette aire eſt finie, nouvelle preuve que l'eſpace parcouru par le corps, durant le temps infini qu'il faut pour anéantir ſa vîteſſe, n'eſt que fini.

Qu'on ſuppoſe préſentement un corps dont la vîteſſe eût été uniformément accélérée; & retenant la même hypotheſe, examinons quel ſera ſon mouvement. Nous pouvons nous aider ici d'un raiſonnement & d'un exemple ſemblables aux précédens. Que la vîteſſe qu'imprimeroit la peſanteur au mobile dans un inſtant déterminé, ſoit repréſentée par l'unité, & que la réſiſtance dans le même temps ſoit capable de détruire un dixieme de la vîteſſe du corps. Cette vîteſſe à la fin du premier inſtant, ſeroit donc réduite à $\frac{9}{10}$. Mais durant le ſecond inſtant, la peſanteur eût donné au mobile un nouveau degré de vîteſſe, qui avec celle qu'il avoit au commencement, eût fait $1 + \frac{9}{10}$ ſans la réſiſtance. Donc la réſiſtance réduiſant toute cette vîteſſe aux $\frac{9}{10}$, celle qu'aura le corps à la fin du ſecond inſtant, ſera $\frac{9}{10} + \frac{81}{100}$. Le même raiſonnement montre qu'à la fin du troiſieme inſtant, elle ſera $\frac{9}{10} + \frac{81}{100} + \frac{729}{1000}$, & ainſi continuellement; il ſuffit de jetter les yeux ſur cette ſuite pour voir qu'elle eſt une progreſſion géométrique décroiſſante.

Cette analyſe nous met en état de voir que, dans un temps infini, un corps tombant par l'effet d'une accélération uniforme dans un milieu réſiſtant en raiſon des vîteſſes, n'auroit acquis qu'une vîteſſe finie. Car en ſuppoſant un nombre infini d'inſtans écoulés, la vîteſſe acquiſe ne ſera que la ſomme des termes d'une progreſſion géométrique. Ainſi la vîteſſe du mobile s'accélere toujours; mais comme l'accroiſſement qu'elle reçoit en temps égaux, décroît en progreſſion géométrique, elle approche toujours d'un certain terme ſans jamais l'atteindre, comme *Deſcartes* le remarquoit déja de ſon temps. C'eſt ce que M. *Huyghens*, & quelques autres ont appellé *vîteſſe terminale*. On trouve encore ici, que c'eſt une logarithmique qui ſert à repréſenter les vîteſſes & les autres circonſtances du mouvement de ce corps. Mais au lieu que dans les cas précé-

Fig. 117. dens, c'étoient les ordonnées A B, C D, E F, &c. entre la courbe & ſon aſymptote, qui repréſentoient les vîteſſes, ce ſeront ici leurs reſtes *c* D, *e* F, *g* H, &c. interceptés entre la courbe & la parallele B L, menée par le point B, où l'ordonnée A B eſt égale à la vîteſſe terminale. Les eſpaces enfin parcourus durant les temps B*c*, B*e*, &c. ſeront comme les ſegmens B D*c*, B F*e*, &c. de ſorte que l'eſpace parcouru ſera infini durant un temps infini; ce qui eſt d'ailleurs évident, puiſque la vîteſſe va toujours en croiſſant.

L'analogie de l'hyperbole avec la logarithmique fournit un autre moyen de repréſenter les rapports précédens. C'eſt celui qu'a employé M. *Newton* dans ſes *Principes*. Il y montre que le temps croiſſant comme des aires hyperboliques entre les aſymptotes, les vîteſſes à la fin de ces temps ſont comme les ordonnées qui terminent ces aires. Ceux à qui les propriétés de l'hyperbole ſont familieres, n'auront aucune peine à voir les liaiſons de ceci avec ce qu'on a fait voir ci-deſſus.

Le problême de déterminer la courbe décrite par un corps projetté dans un milieu réſiſtant ſuivant la loi que nous avons ſuppoſée juſqu'ici, tient aux conſidérations précédentes. Il en eſt ici, *à quelques égards*, tout comme ſi le mouvement ſe paſſoit dans le vuide. On peut diviſer le mouvement du corps en deux autres, l'un dans la direction de la force imprimée, & qui eût été uniforme ſans la réſiſtance du milieu; l'autre dans le ſens vertical, qui eût été uniformément accéléré s'il ſe fût fait librement. Or la vîteſſe dans la direction de la force initiale étant donnée, avec l'intenſité de la réſiſtance, on trouvera pour chaque inſtant, la grandeur A C du chemin qu'eût *Fig. 118.* fait le corps s'il n'avoit eu que ce mouvement. On trouvera auſſi de combien le mobile fût tombé perpendiculairement dans ce milieu, après le même intervalle de temps écoulé. Que ce ſoit A M, par exemple: ces deux lignes A C, A M ou C F, ſeront les co-ordonnées de la courbe cherchée, & donneront le point F, où ſe trouvera le corps par l'effet des deux mouvemens combinés. C'eſt-là le principe des ſolutions qu'ont donné de ce problême, MM. *Newton*, *Huyghens*, &c.

La courbe de projection avec telle vîteſſe qu'on voudra, ſeroit dans le vuide d'une étendue infinie: car une parabole s'écarte à l'infini de ſon axe, quelque petit que ſoit ſon parametre. Mais il n'en eſt pas ainſi dans l'hypotheſe préſente: un corps lancé avec une vîteſſe finie, quelque grande qu'elle fût, n'auroit qu'une amplitude finie. Cela ſuit de ce qu'on a remarqué plus haut, qu'un corps auquel on imprimeroit une vîteſſe quelconque, ne parcourroit dans un temps infini qu'un eſpace limité. Ainſi en ſuppoſant que A D, ou A *d* dans la direction imprimée au corps, repréſente cet eſpace, ſi l'on mene la verticale D O, ou *d* O, la courbe s'en approchera ſans ceſſe, ſans jamais l'atteindre. M. *Newton* remarque dans

la ſeconde édition de ſes principes, une maniere fort ſimple de la conſtruire. La ligne AD étant déterminée, comme on vient de le dire, il fait tirer une ligne AB, de telle ſorte que ED ſoit à DB, comme la vîteſſe verticale du corps, à la vîteſſe terminale; après quoi les lignes BG, Bg, &c. étant en progreſſion géométrique, les ordonnées correſpondantes GR, gr, &c. ſont en progreſſion arithmétique, ou leurs logarithmes, celui de BA étant égal à zero. Enſorte qu'on peut conſtruire avec facilité cette courbe par le moyen d'une logarithmique. Cette conſtruction revient, à peu de choſe près, à celle que M. *Bernoulli* a déduite de ſa ſolution générale du problême des trajectoires dans un milieu réſiſtant en raiſon quelconque (*a*).

ou comme la viteſſe imprimée dans le ſens vertical, à celle que le corps acquerroit par une chute infinie dans le milieu.

Il eſt important de remarquer que l'analyſe que nous avons donnée de ce problême, ne peut être d'uſage que dans l'hyp. de la réſiſtance en raiſon des vîteſſes. C'eſt la ſeule qui permette de décompoſer ainſi le mouvement d'un corps en deux autres de directions connues, pour en conclure, ſans erreur, le point où le corps doit ſe trouver. En voici la raiſon : lorſqu'un corps éprouve une réſiſtance, & décrit un eſpace moindre qu'il n'auroit fait ſans cela, afin d'employer ſûrement la décompoſition du mouvement, il faut qu'en diminuant chaque côté du parallélogramme dans le même rapport, la diagonale du nouveau parallélogramme, ſoit & dans la même direction que celle du premier, & diminuée dans le même rapport. Or cela ne peut arriver ainſi que dans l'hypotheſe de la réſiſtance en raiſon des vîteſſes, parce qu'alors chaque côté du parallélogramme qui exprime les vîteſſes, eſt diminué dans le rapport ſimple de ſa grandeur. Dans toute autre hypotheſe, autant de décompoſitions qu'on feroit du mouvement ſimple, autant de diagonales dans des directions & de grandeurs différentes, de ſorte que la nature tomberoit en apparence dans une perpétuelle contradiction avec elle-même. Cette inadvertance a été une ſource d'erreurs pour plus d'un Géometre. Le P. *Pardies*, M. le Chevalier *Renau*, & divers autres, y ſont tombés, & c'eſt ſurtout par-là que péche la théorie de la manœuvre donnée par ce dernier, comme on le verra lorſque nous en rendrons compte.

(*a*) *Act. Erud.* 1719. Bern. *Op.* T. II, p. 400.

Il nous reſte à dire quelque choſe des autres hypotheſes de réſiſtance, & particuliérement de celle où on la ſuppoſe en raiſon doublée de la vîteſſe, qui eſt la plus conforme aux loix de l'hydraulique. Voici quelques-unes des conſéquences les plus importantes de cette derniere hypotheſe.

Lorſqu'un corps pouſſé avec une vîteſſe une fois imprimée, pénetre un milieu qui réſiſte ſuivant la loi que nous venons de dire, ſa vîteſſe diminue, à la vérité, mais moins rapidement que dans l'hypotheſe précédente, & l'eſpace qu'il décrit durant le temps infini qu'il faut pour le réduire au repos, n'eſt plus limité, mais infini. Lorſque le milieu réſiſtoit en raiſon ſimple des vîteſſes, les temps écoulés étant repréſentés par les abſciſſes d'une logarithmique, les vîteſſes qui leur répondoient l'étoient par les ordonnées continuellement décroiſſantes, & l'eſpace parcouru, par l'aire compriſe entre la premiere & la derniere ordonnée; mais dans l'hypotheſe préſente, c'eſt une hyperbole rapportée à ſon aſymptote, qui ſert à repréſenter les temps, les vîteſſes, & les eſpaces. Les temps ſont comme les abſciſſes priſes à commencer de quelque diſtance du centre; les vîteſſes ſuivent le rapport des ordonnées, & les eſpaces celui des aires correſpondantes. Delà ſuit que l'eſpace parcouru dans cette hypotheſe durant un temps infini, quoiqu'avec une vîteſſe continuellement décroiſſante, eſt infini. Car dans l'hyperbole, l'eſpace renfermé entre la courbe & l'aſymptote prolongée infiniment, eſt infini; au lieu que dans la logarithmique, il eſt limité. On pourroit examiner de même ce qui arriveroit dans d'autres hypotheſes quelconques. M. *Varignon* l'a fait avec beaucoup d'étendue, & même une prolixité ſuperflue dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1707. Comme la choſe eſt facile lorſqu'on eſt en poſſeſſion du principe, nous nous en tiendrons ici à l'indiquer au lecteur (*a*).

(*a*) Voici la maniere d'appliquer l'analyſe & le calcul à la théorie préſente. La réſiſtance n'eſt autre choſe qu'une force qui s'oppoſe au mouvement du corps, & dont l'effet eſt la diminution de la vîteſſe de ce corps. Mais on doit ſe rappeller que l'augmentation ou la diminution de vîteſſe produite par une force qui agit uniformément, eſt en raiſon compoſée du temps, & de l'intenſité de cette force. C'eſt pourquoi la réſiſtance étant uniforme dans un inſtant infiniment petit, ſi on la nomme R; le temps t, la vîteſſe u, & ſa diminution inſtantanée $-du$, on aura d'abord $-du = R\,dt$. Si l'on nomme enſuite s l'eſpace parcouru, on aura $ds = u\,dt$, par les raiſons données dans la note de la page 420. Ainſi $dt = ds : u$. Ce ſont les deux équations fondamentales d'où l'on peut dériver tout ce qu'on a dit ci-deſſus.

Un problême qui ſe préſente encore dans cette hypotheſe de réſiſtance, c'eſt celui de déterminer les diverſes circonſtances du mouvement d'un corps projetté perpendiculairement, ou qui tombe verticalement par l'action d'une peſanteur uniforme. M. *Newton* ne manque pas de l'examiner : il trouve que dans le premier cas, les vîteſſes de projection perpendiculaire, étant comme les tangentes d'un cercle de rayon déterminé, les arcs ou les ſecteurs répondant à ces tangentes, ſont comme les temps pendant leſquels ces vîteſſes ſeront détruites. Il en eſt à peu près de même dans le cas des chûtes verticales. Ce ſont des ſecteurs hyperboliques, qui déſignent les temps écoulés depuis le commencement de la chûte, pendant que les vîteſſes acquiſes ſont repréſentées par les portions de la tangente au ſommet, qu'ils interceptent. Il y a donc dans le cas d'une chûte accélérée à travers un milieu qui réſiſte comme nous le ſuppoſons ici, une vîteſſe terminale, à laquelle le mobile n'atteint jamais, quoiqu'il en approche de plus en plus : car à un ſecteur hyperbolique infini, ne répond qu'une tangente finie, puiſqu'elle eſt toute compriſe dans l'angle aſymptotique. Au contraire, un corps projetté perpendiculairement avec une vîteſſe quelconque, même infinie, la perdra dans un temps fini. En effet, à un ſecteur circulaire fini, peut répondre une tangente infinie, comme lorſque ce ſecteur eſt un quart de cercle. Ce ſont là des vérités (*a*) qui ſe préſentent

En effet, qu'on faſſe la réſiſtance proportionnelle au quarré de la vîteſſe, on aura $R = uu$. Ainſi la premiere équation deviendra $dt = -du : uu$; & en intégrant $t = \frac{1}{u} - 1$, en ſuppoſant que 1 ſoit la vîteſſe initiale. (Car t, étant alors égal à zero, il faut que la vîteſſe devienne égale à 1.) Or l'on voit que t exprime alors l'abſciſſe d'une hyperbole entre les aſymptotes, priſe à une diſtance du centre $= 1$; & que la vîteſſe u eſt l'ordonnée. Maintenant à la place de dt, mettons ſa valeur $ds : u$, dans la premiere équation : nous allons avoir $ds = -du : u$, c'eſt-à-dire, s, comme le logarithme de u, ou l'aire hyperbolique interceptée entre la premiere ordonnée, ou la vîteſſe initiale 1, & celle qui exprime la vîteſſe u. Ce qui démontre ce que nous venons de dire ſur les propriétés du mouvement retardé en raiſon des quarrés des vîteſſes.

(*a*) Ces vérités ſe démontrent facilement à l'aide du calcul intégral, & des formules de la note de la page 420. Il faut ſeulement faire attention que quand un mobile tombe à travers un milieu réſiſtant, la force accélératrice eſt la différence de la gravité & de la réſiſtance, & que la force retardatrice, quand il eſt projetté en haut, eſt la ſomme des mêmes forces. Cela n'a beſoin d'aucune preuve. Cela étant, que 1 repréſente la gravité, & uu la réſiſtance, on aura $(1 - uu)\,dt = du$, ou $dt = du : (1 - uu)$. Or l'intégrale du dernier membre de cette équation eſt un ſecteur hyperbolique, dont la tangente eſt u, le demi-diametre tranſverſe étant 1, & l'autre étant déterminé par l'intenſité de la réſiſtance. Ainſi le temps écoulé depuis

ſous

ſous l'air de paradoxes, mais qui n'en ſont pas moins des vérités, & qu'il ne nous ſeroit pas difficile de dépouiller de cet extérieur, à l'aide de certains développemens, ſi nous en avions le loiſir.

Il nous faudroit maintenant parler de la courbe de projection dans un milieu qui réſiſte en raiſon des quarrés des vîteſſes. Mais cette queſtion, qui n'eſt que médiocrement difficile dans l'hypotheſe précédente, l'eſt bien davantage dans celle-ci, & dans toutes les autres. Il ſuffiroit, pour le prouver, de remarquer qu'elle échappa à M. *Newton.* Au lieu de la réſoudre dans la ſeconde ſection du ſecond Livre de ſes Principes, où l'on s'attend à la trouver, il examine quelle loi de denſité variable, permettroit à un corps projetté avec une certaine force, de décrire une courbe déterminée, & il tente par-là de déduire indirectement la ſolution approchante du problême. Dans une autre ſection, il examine quelle force centrale combinée avec une denſité variable, feroit décrire à un corps des ſpirales d'un certain genre autour du centre de forces. Tous ces endroits, nous le remarquerons en paſſant, ſont d'une profondeur digne du génie de *Newton*, malgré quelques fautes d'inadvertence qu'apperçut M. *Bernoulli* (*a*), & qui furent corrigées dans l'édition des *Principes*, faite en 1714. Mais dans cette édition même, ce grand homme ne donna point la ſolution du problême dont nous parlons. Il a cependant été réſolu dans la ſuite. Il nous ſuffira de dire ici, qu'ayant été propoſé en 1718, par *Keil* à M. *Bernoulli*, dans le cours de leurs querelles, celui-ci le réſolut pour la premiere fois dans toute ſa généralité; nous voulons dire, dans quelque hypotheſe de réſiſtance que ce ſoit. M. Nicolas *Bernoulli* en vint auſſi à bout; l'Angleterre enfin en fournit une ſolution qui fut donnée par M. *Tailor.* Comme ce problême mérite une attention particuliere, à cauſe de ſon uſage dans la baliſtique, nous nous réſervons d'en traiter plus au long dans la ſuite.

le commencement de la chûte, étant repréſenté par un ſecteur hyperbolique, la vîteſſe le ſera par la tangente correſpondante. Il eſt aiſé d'appliquer cette analyſe au cas de la projection perpendiculaire d'un corps à travers le même milieu: on aura les mêmes formules, à quelques changemens de ſigne près; changemens qui déſignent des ſecteurs circulaires, au lieu des ſecteurs hyperboliques qu'on vient de trouver.

(*a*) *Act. Erud.* 1713. *Bern. Op.* T. 1, p. 514.

Il y a, comme nous l'avons dit, ſur la réſiſtance des milieux, une troiſieme hypotheſe qui la fait proportionnelle à la ſomme du quarré de la vîteſſe, & de la vîteſſe même. M. *Newton* l'examina auſſi ; mais nous n'entreprendrons pas de le ſuivre, vu les longueurs où cela nous entraîneroit. Les lecteurs verſés dans le calcul intégral, & qui auront ſaiſi les principes expoſés dans la note de la page 439, y ſuppléront facilement. Ils pourront auſſi prendre pour guide M. *Varignon*, qui a traité au long de cette hypotheſe dans ſes divers Mémoires ſur la réſiſtance des milieux, que nous avons indiqués.

Tout ce qu'on a dit juſqu'ici ſur la réſiſtance des milieux, doit s'entendre de celle que nous avons nommée *reſpective*, & qui ſe regle uniquement ſur la vîteſſe. Mais la réſiſtance *abſolue* ſuit d'autres loix ; car ſuivant la notion que nous en avons donnée, c'eſt une force conſtamment la même qui s'oppoſe au mouvement du corps. Ce ſont comme autant de filets doués chacun d'une force déterminée, au travers deſquels le corps a à ſe faire jour. Il doit par conſéquent perdre à chaque fois la même quantité de force quelle que ſoit ſa vîteſſe, d'où il ſuit néceſſairement que cette ſorte de réſiſtance le réduira toujours au repos dans un temps déterminé. Les principes que nous avons donnés pour le calcul général des réſiſtances reſpectives dans toutes les hypotheſes imaginables, peuvent ſervir ici. Il n'y a qu'à prendre pour l'expreſſion de la réſiſtance une quantité conſtante ; on trouvera que la courbe dont les ordonnées expriment les vîteſſes décroiſſantes, ſera un triangle, dont les ſegmens de l'aire repréſenteront les eſpaces parcourus. Ainſi il en ſera préciſément ici de même que dans le cas du mouvement uniformément retardé ; les pertes de vîteſſe ſeront comme les temps écoulés, & dans le même temps que le corps par ſon mouvement retardé auroit perdu toute ſa vîteſſe, il auroit parcouru un eſpace double de celui qu'il parcourt étant empêché par la réſiſtance. Auſſi la peſanteur n'eſt-elle qu'une réſiſtance de la nature de celle que nous examinons. Il eſt à propos de remarquer que M. *Leibnitz*, dans ſon écrit ſur la réſiſtance des milieux, après avoir donné la même notion que nous de la réſiſtance abſolue, trouve néanmoins un réſultat tout oppoſé à celui que nous venons de donner. Mais cela vient de ce que M. *Leibnitz* abandonne en quelque ſorte cette notion, en ſuppo-

ſant, pour analyſer les effets de cette réſiſtance, qu'elle eſt proportionnelle à l'eſpace parcouru; ce qui eſt la même choſe pour l'effet, que s'il eût ſuppoſé la réſiſtance proportionnelle à la vîteſſe. Auſſi, tout ce qu'il dit de celle qu'il nomme *abſolue*, eſt-il la même choſe que ce que les autres ont démontré de la réſiſtance reſpective en raiſon des vîteſſes; & ce qu'il dit de celle qu'il nomme *reſpective*, convient avec ce que l'on démontre de celle qui eſt en raiſon des quarrés des vîteſſes. Mais il ſe trompe en tentant de conſtruire la courbe de projection dans cette hypotheſe. Car il le fait par la décompoſition du mouvement, ce que nous avons dit induire en erreur dans ce cas, & il l'a reconnu dans la ſuite.

La réſiſtance des milieux au mouvement, donne naiſſance à une infinité de recherches profondes & utiles. Quelque hypotheſe en effet qu'on admette, un corps qui ſe meut dans un fluide, y éprouvera une réſiſtance différente, ſuivant ſa figure & ſa direction. Des exemples ſeroient ſuperflus pour éclaircir une choſe auſſi ſimple & auſſi évidente. La conſidération de la figure des corps, & la détermination des rapports de leurs réſiſtances, forment donc une branche eſſentielle de la théorie préſente. M. *Newton* en a donné un eſſai ſuffiſant pour mettre ſur la voie, en examinant la réſiſtance d'un globe mu dans un fluide, & en la comparant avec celle d'un cylindre de même baſe, mu avec la même vîteſſe dans la direction de ſon axe. Il trouve que le dernier de ces corps éprouvera une réſiſtance double de celle du premier; il réſoud auſſi, à cette occaſion, ce problême intéreſſant: quel eſt le ſolide de baſe & de ſommet donnés, qui, mu dans un fluide ſuivant la direction de ſon axe, y éprouvera la moindre réſiſtance poſſible. On en dira quelque choſe de plus dans l'article ſuivant, qui eſt deſtiné à faire l'hiſtoire de divers problêmes célebres ſur leſquels s'exercerent les Méchaniciens de la fin du ſiecle paſſé. Ce que M. *Newton* avoit ébauché ſur les rapports de réſiſtance des corps de diverſes figures, a depuis été étendu par M. Jacques *Bernoulli*, qui a donné dans les Act. de Leipſick 1693, le réſultat de ſes recherches ſur quantité de figures & de ſolides. M. *Bernoulli* a auſſi traité cette matiere dans ſa *nouvelle théorie de la manœuvre*, & M. *Herman* en a fait l'objet d'un chapitre de ſa *Phoronomie*. L'analyſe de ce genre de queſtions, & la maniere

d'y appliquer le calcul, ne ſont guere ſuſceptibles de difficultés, pour ceux qui ſont inſtruits des loix de l'hydraulique, & ſuffiſamment verſés dans le calcul & l'analyſe. D'ailleurs, ſi la place nous le permet, nous en dirons quelque choſe de plus, lorſque nous expoſerons la *théorie de la manœuvre*.

VII.

Hiſtoire de quelques problêmes célebres de Méchanique.

Après avoir rendu compte des principales théories dont s'enrichit la Méchanique durant le dernier ſiecle, nous avons à parler de quelques autres objets particuliers qui appartiennent auſſi à l'hiſtoire de cette ſcience. Tels ſont entr'autres divers problêmes de Méchanique qu'on vit les Géometres ſe propoſer mutuellement, comme par défis, vers la fin de ce ſiecle. Ils méritent à pluſieurs titres une place dans cet ouvrage, & comme très-propres à intéreſſer la curioſité, & comme ayant beaucoup contribué aux progrès de l'analyſe. En effet, quoique des hommes du premier mérite, à la tête deſquels on pourroit mettre *Galilée*, ayent témoigné une grande averſion à être tentés par ces ſortes d'énigmes, leur utilité, lorſqu'elles ſont bien choiſies, & que leur dénouement tient à quelques difficultés particulieres, ne ſçauroit être révoquée en doute. C'eſt intéreſſer adroitement l'amour propre à la réſolution de ces difficultés, & ſouvent ce qui s'étoit refuſé à des recherches occaſionnées par les motifs ordinaires, cede aux efforts réitérés & puiſſans que produit la curioſité, ou le deſir de l'emporter ſur ceux qui courent la même carriere.

Problême de la courbe iſochrone.

Le premier des problêmes qui font l'objet de cet article, eſt celui de la courbe *iſochrone*, & fut propoſé par M. *Leibnitz*. On ſçait qu'un corps livré à ſa peſanteur, parcourt, ſoit dans la perpendiculaire, ſoit ſur un plan incliné quelconque des eſpaces d'autant plus grands en temps égaux qu'il s'éloigne davantage du point où ſa chûte à commencé. On ſçait auſſi qu'un corps met d'autant plus de temps à parcourir la même ligne avec une vîteſſe déterminée, qu'elle eſt plus inclinée à l'horizon. Il y a donc une courbe telle que l'obliquité de ſes différentes parties compenſant la vîteſſe avec laquelle elles ſeroient parcourues, le mobile s'éloignera uniformément de l'horizontale, ou parcourra des eſpaces égaux pris dans le ſens

perpendiculaire : cette courbe eſt celle que M. *Leibnitz* nomma *iſochrone*, & c'eſt à trouver ſa nature que conſiſte le problême dont nous parlons. M. *Leibnitz* le propoſa en 1687 (*a*), dans la vue de rabattre la confiance de quelques Cartéſiens qui, trop attachés à la Géométrie de leur Maître, témoignoient peu d'eſtime pour les nouveaux calculs. Il invita ces Analiſtes à faire ſur ſon problême une épreuve de leurs forces & des reſſources de leur méthode.

Ce que M. *Leibnitz* avoit prévu arriva : aucun de ces trop ſerviles admirateurs des productions de *Deſcartes*, ne réſolut le problême. Il n'y eut que M. *Huyghens* & lui, qui en donnerent à temps des ſolutions. M. *Huyghens* n'employoit pas, à la vérité, le calcul différentiel ; mais ce génie profond & fertile en reſſources, ſçut ſe frayer une route pour arriver à la ſolution du problême, & il la publia bien peu après qu'il eut été propoſé (*b*). Celle de M. *Leibnitz* a tardé davantage, & par des raiſons que nous ignorons, n'a paru qu'en 1689 (*c*) ; ils montrerent que la courbe cherchée n'eſt autre choſe qu'une des paraboles cubiques, ſçavoir celle où le quarré de l'abſciſſe par le parametre eſt égal au cube de l'ordonnée. Cette courbe étant diſpoſée de maniere que ſon axe ſoit parallele à l'horizon, & ſa concavité tournée en haut, tout corps qui tombera d'un point élevé au deſſus de l'axe des $\frac{4}{9}$ du parametre, roulant enſuite le long de la courbe, s'éloignera de l'horizontale également en temps égaux. Quelque temps après que les ſolutions de MM. *Huyghens* & *Leibnitz* eurent paru, M. *Bernoulli* l'aîné, aidé des ſecours du nouveau calcul qu'il commençoit à cultiver, s'y éleva auſſi (*d*). Il en publia l'analyſe, que ni l'un ni l'autre n'avoient laiſſé entrevoir, & par-là il mérite, à quelques égards, de partager avec eux l'honneur d'avoir deviné cette énigme.

Ce problême donna lieu à un autre, qui fut auſſi propoſé par M. *Leibnitz*. Il ne s'agiſſoit plus de déterminer la courbe le long de laquelle devroit rouler un corps pour faire en temps égaux des chûtes égales dans la perpendiculaire. M. *Leibnitz* demanda le long de quelle courbe un corps devoit tomber, afin qu'il s'éloignât d'un point donné proportionnellement au

(*a*) Nouv. de la Républ. des Lettres, Sept. 1687.
(*b*) *Ibid.* Oct. 1687.
(*c*) *Act. Erud.* 1689.
(*d*) Ibid. 1690.

temps. Il lui donna pour cette raiſon le nom d'*iſochrone paracentrique*. Ce changement de condition rend le problême bien plus difficile, & M. *Leibnitz* ne ſe hâtant pas de dévoiler ſa ſolution, pluſieurs années s'écoulerent avant qu'on en vît aucune. Il échappa aux premiers efforts de MM. *Bernoulli*; mais l'aîné de ces illuſtres freres s'étant remis à y ſonger vers l'an 1694, il le réſolut enfin, & il publia peu après ſa ſolution, qui fut auſſi-tôt ſuivie de celles de M. *Leibnitz*, & de M. *Bernoulli* le jeune (*a*). Suivant ces ſolutions, la courbe demandée par M. *Leibnitz* a la forme qu'on voit dans la figure 119. Elle prend ſon origine en A, & coupant ſon axe en P, elle remonte vers l'horizontale qu'elle touche en E. Il en eſt ici de même que dans la courbe iſochrone ſimple. Le corps doit partir au commencement avec une vîteſſe déterminée, qu'on ſuppoſe acquiſe en tombant d'une certaine hauteur, par exemple H A. Cette courbe fait ſur elle-même un repli, & revient ſe couper en P, formant de l'autre côté de l'axe A P, une partie entiérement égale & ſemblable à la premiere. D'où il ſuit qu'un corps partant du point E, avec la vîteſſe initiale acquiſe par la chûte d'une hauteur égale à H A, & roulant de là le long de E P B A, s'approchera uniformément du point A, puis roulant le long de A *b* P *e*, il s'en éloignera ſuivant la même loi. Enfin parvenu au point *e*, il roulera le long de l'horizontale, s'éloignant toujours uniformément du même point. Remarquons encore avec MM. *Leibnitz* & *Huyghens*, qu'à chaque hauteur d'où l'on ſuppoſe la vîteſſe initiale acquiſe, répondent une infinité de courbes qui ſatisfont au problême, ſans en excepter l'horizontale : cette derniere n'eſt en effet que la plus applatie de toutes.

Problême de la chaînette.

Pendant que le problême de la courbe *paracentrique*, étoit ſur le tapis, un autre propoſé par M. Jacques *Bernoulli*, excitoit auſſi les recherches des principaux Géometres de l'Europe. C'eſt le problême ſi connu ſous le nom de la chaînette. Une chaîne, ou une corde infiniment déliée étant ſuſpendue lâchement par ſes extrêmités, M. *Bernoulli* demanda quelle courbure elle prendroit. Ce problême avoit autrefois excité la curioſité de *Galilée*; mais cet homme célebre y avoit échoué,

(*a*) *Act. Erud.* ann. 1694. Bern. *Opera.* Wolf. *Elem. Math.*

ou du moins il avoit jugé fort gratuitement & ſans aucune raiſon ſolide, que cette courbure étoit celle d'une parabole; ce que quelques Mathématiciens (les PP. *Pardies* & *de Lanis*) s'étoient efforcés d'établir par d'amples paralogiſmes. Un Géometre Allemand, nommé Joachim *Jungius* (*a*), avoit, à la vérité, montré le contraire par diverſes expériences ; mais il n'avoit pas donné plus de lumieres ſur la vraie ſolution du problême. Elle exigeoit des reſſources d'analyſe & de calcul dont on ne fut en poſſeſſion que long-temps après.

La nature du problême ne permettoit pas de s'attendre à voir beaucoup de Géometres concourir à l'honneur de le réſoudre. Auſſi n'y en eut-il que quatre ; M. Jacques *Bernoulli*, qui l'avoit propoſé, & ſon frere ; M. *Leibnitz* & M. *Huyghens*. Ils publierent leurs ſolutions dans les Actes de Leipſick (*b*), mais ſans analyſe, apparemment afin de laiſſer encore quelque lauriers à cueillir, à ceux qui viendroient à bout de la deviner. C'eſt ce que tenta de faire quelques années après M. David *Grégori*, en publiant, dans les *Tranſ. Phil.* de 1697, une ſolution de ce problême. Elle a été vivement accuſée de paralogiſme par M. *Bernoulli*. Mais il me ſemble que ce jugement eſt trop rigoureux ; on ne peut, à mon avis, lui imputer que de l'obſcurité, & de l'embarras dans l'application d'un principe très-vrai & très-ſolide.

Nous croyons ne pouvoir nous diſpenſer de mettre ici les lecteurs Géometres un peu ſur la voie de la ſolution de ce curieux & difficile problême. Nous emprunterons pour cela la ſubtile analyſe qu'en a donné M. Jean *Bernoulli* dans *ſes Leçons de calcul intégral*.

Imaginons que la courbe ASE eſt celle qu'on cherche, *Fig.* 119. que S en eſt le ſommet, ou le point le plus bas ; SE, l'axe ; EC, *ec*, deux ordonnées infiniment proches. Il eſt certain, & l'on peut facilement le démontrer par les loix de la Statique, que ſi aux points S & C, on conçoit deux puiſſances retenant la portion de chaînette SC dans ſa poſition, elles éprouveront chacune un effort dans la direction des tangentes SH, CH, & que chacune ſoutiendra la même partie du

(*a*) On a de ce Géometre un Livre imprimé en 1669, ſous le titre ſingulier de *Geometria empirica* (*ſeu experimentalis*). C'eſt apparemment là qu'il examinoit la queſtion de la chaînette.

(*b*) *Act. Erud.* ann. 1691.

poids abſolu de cette portion, que ſi ce poids étoit réuni en H, concours de ces tangentes. D'un autre côté, la puiſſance placée en S, ſera toujours la même, quelle que ſoit la place du point C où l'autre eſt appliquée; car quelle que ſoit la longueur de la portion SC, l'autre SA ne change ni de figure, ni de poſition, comme il eſt aiſé de s'en convaincre par l'expérience; & par conſéquent ſon point extrême S, ou la puiſſance que nous y ſuppoſons, éprouve conſtamment la même traction dans la direction SH. Mais la Statique nous apprend que quand deux puiſſances ſoutiennent de cette ſorte un poids H, ce poids eſt à l'effort de l'une des deux, par exemple S, comme le ſinus de l'angle des directions SHC, ou DHC, au ſinus de l'angle HCD, formé par la direction de l'autre puiſſance avec la verticale, c'eſt-à-dire, comme CD à DH, ou cf à C f. Ainſi nommant a la puiſſance conſtante S : z, la courbe SC, ou le poids H; SE & EC, x & y, & leurs différences reſpectives dx, dy, on aura $z : a :: dx : dy$, ou $z\,dy = a\,dx$, pour l'équation différentielle de la courbe; équation qui traitée avec adreſſe, ſe réduira à celle-ci, $dy = a\,dx : \sqrt{(xx - aa)}$. Ayant donc pris l'indéterminée SE $= x$, & conſtruiſant l'intégrale de $a\,dx : \sqrt{(xx - aa)}$, on aura l'ordonnée correſpondante EC, ou y. Mais cette intégrale dépend de la dimenſion d'une courbe dont les ordonnées ſont données, ou bien de celle d'un ſecteur hyperbolique: on peut auſſi la repréſenter par la longueur d'un arc parabolique, ou enfin par le logarithme d'une quantité variable qu'il eſt facile d'aſſigner; car toutes ces choſes dépendent de la quadrature de l'hyperbole. Ce ſont là les différentes manieres dont s'y prirent pour conſtruire cette courbe, MM. *Huyghens*, *Leibnitz* & *Bernoulli*.

La chaînette eſt, comme l'on voit, une courbe méchanique ou tranſcendante, puiſque ſa conſtruction ſuppoſe la quadrature de l'hyperbole. Mais elle a d'ailleurs diverſes propriétés tout-à-fait remarquables, qu'obſerverent les illuſtres Auteurs des ſolutions dont on a parlé. Voici quelques-unes de ces propriétés. 1°. La chaînette eſt abſolument rectifiable; l'arc SC eſt toujours égal à l'ordonnée correſpondante EF de l'hyperbole équilatere dont le ſommet eſt en S, & le centre ſur l'axe prolongé à la diſtance SV, égale à la quantité déterminée $\frac{1}{2}a$ de l'analyſe précédente. 2°. Cette courbe eſt abſolument quarrable.

rable : l'aire E C S eſt égale au rectangle de E C par E S, moins celui de S V par C F. 3°. De toutes les courbes de même longueur & de même baſe, la chaînette eſt celle dont le centre de gravité eſt le plus bas. La raiſon s'en préſente facilement à ceux qui ſont inſtruits de ce principe méchanique, ſçavoir qu'un corps, ou un ſyſtême de corps, ne ceſſe de deſcendre ou de ſe mouvoir que ſon centre de gravité ne ſoit le plus bas qu'il eſt poſſible. Ainſi de toutes les courbes de même longueur & de même baſe, la chaînette eſt celle qui tournant autour de cette baſe, produira le ſolide de plus grande ſurface. 4°. La courbure de la chaînette eſt enfin celle ſuivant laquelle il faudroit arranger une infinité de petits vouſſoirs pour en former une voûte qui ſe ſoutînt d'elle-même par ſon propre poids.

C'eſt la coutume des Géometres de s'élever de difficultés en difficultés, & même de s'en former ſans ceſſe de nouvelles, pour avoir le plaiſir de les ſurmonter. M. *Bernoulli* ne fut pas plutôt en poſſeſſion du problême de la chaînette, conſidéré dans le cas le plus ſimple, qu'il ſe mit à conſidérer d'autres cas plus compoſés. Il ſe demanda, par exemple, ce qui arriveroit ſi la corde étoit d'une peſanteur inégale, ou inégalement chargée dans toutes ſes parties ; dans quelle raiſon il faudroit que fût cette inégalité, pour que la courbure fût d'une eſpece donnée ; quelle ſeroit cette courbure ſi la corde étoit extenſible par ſon propre poids. Il donna bien-tôt après les ſolutions de tous ces cas (*a*), mais comme il s'en réſerva l'analyſe, on doit recourir aux Œuvres de M. Jean *Bernoulli* (*b*), où on la trouvera. On s'eſt enfin propoſé le problême dans l'hypotheſe des directions convergentes à un point, & de la gravité variable en telle raiſon qu'on voudra de la diſtance au centre ; & M. Jean *Bernoulli* en a donné la ſolution (*c*).

Problême de la courbe élaſtique.

Le problême précédent conduiſit M. *Bernoulli* l'aîné à quelques autres qui lui ſont analogues, & qui ne ſont ni moins curieux ni moins difficiles. Le premier eſt celui de la courbe élaſtique, ou d'un reſſort plié. Il ſuppoſoit une lame élaſtique attachée perpendiculairement à un plan par une de ſes extrê-

(*a*) *Act. Lipſ.* ann. 1691, p. 289.
(*b*) *Lect. calculi integr.* Bern. *Op.* T. III.
(*c*) Ibid. *Op.* T. IV.

Fig. 120. mités, & plié comme l'on voit dans la figure 121, par un poids attaché à l'autre. Il demandoit quelle courbure prendroit ce reſſort, & afin qu'on ne réputât pas ſon problême impoſſible, il annonçoit qu'il en avoit la ſolution, & il conſignoit ſous un logogriphe de lettres tranſpoſées, l'une des principales propriétés de la courbe cherchée. Trois ans s'écoulerent ſans que perſonne répondît à ſon invitation, c'eſt pourquoi il dévoila ſa ſolution en 1694 (*a*). Il n'a pas donné en même temps ſon analyſe, mais on peut conjecturer que c'eſt celle-ci.

Lorſqu'une lame élaſtique diſpoſée, comme on le voit dans la figure, eſt courbée par l'action d'un poids, chaque petite partie eſt écartée de la rectitude, & d'autant plus que l'impreſſion qu'elle éprouve du poids, eſt plus grande. Mais cette quantité de fléxion eſt meſurée par la petite ligne *c k*, perpendiculaire à la courbe, & interceptée entr'elle & la tangente, tandis que l'impreſſion du poids en C, eſt ſuivant les regles de la Statique proportionnelle à l'ordonnée C D. Ainſi *k c* eſt toujours proportionnelle à l'ordonnée C D. Or *k c* eſt, comme l'on ſçait, réciproquement proportionnelle au rayon de la développée en C; d'où il ſuit que ce rayon eſt dans cette courbe réciproquement comme C D. Cette propriété donne l'équation différentielle de l'élaſtique, d'où l'on tire enſuite, quoique non ſans adreſſe, une équation plus ſimple, & la conſtruction de la courbe. M. *Bernoulli* en parcourt au long les propriétés dans l'endroit cité; mais nous ne ſçaurions l'imiter ici: c'eſt pourquoi nous y renvoyons nos lecteurs.

Le ſecond des problêmes que nous avons annoncés, regarde la courbure d'un linge rempli de liqueur. Imaginons un linge, ou une ſurface rectangulaire infiniment fléxible, attachée lâchement par ſes deux côtés oppoſés, à deux lignes paralleles entr'elles & à l'horizon, & de même hauteur. Si l'on remplit ce creux d'une liqueur, que nous ſuppoſons ne pouvoir s'échapper par les côtés, quelle ſera la courbe que formera ce linge? Tel eſt le problême que réſolut M. *Bernoulli*. Il trouva que cette courbe étoit la même que la précédente, dont on auroit placé la baſe horizontalement. En effet, la preſſion qu'exerce ſur chaque portion égale de la courbe, la colonne ver-

(*a*) Voy. *Act. Erud.* ou Jac. Bern. *Opera*.

ticale du fluide DC, eſt proportionnelle à la hauteur. Or on démontre d'après les principes de la Statique, que ſi pluſieurs puiſſances, ainſi appliquées aux différentes parties d'un filet, ſont en équilibre, le ſinus de l'angle formé à chaque endroit où la puiſſance eſt appliquée, eſt comme cette puiſſance. La petite ligne *kc*, qui meſure ici l'écart de la courbe & de la tangente, & qui eſt le ſinus de cet angle, ou de ſon ſupplément, ſera donc ici, comme dans le problême précédent, proportionnelle à CD; & conſéquemment ce ſera la même courbure dans l'un & dans l'autre cas, quoique les cauſes qui la produiſent ſoient bien différentes. M. *Bernoulli* remarquoit une belle propriété de cette courbe, ſçavoir que c'étoit celle de toutes les iſopérimetres dont l'aire avoit ſon centre de gravité le plus bas. Mais cela doit être entendu avec modification, comme il l'a reconnu lui-même dans la ſuite (*a*) : il faut ſeulement dire, que de tous les ſegmens égaux qu'on peut retrancher de différentes figures iſopérimetres, celui qui forme la *lintéaire*, a ſon centre de gravité le plus bas, ou le plus éloigné de ſa baſe. Cela ſuit évidemment de cet axiome méchanique, ſçavoir qu'un ſyſtême de corps qui agiſſent les uns ſur les autres, n'arrive à l'état permanent ou d'équilibre, que lorſque le centre de gravité eſt le plus bas qu'il eſt poſſible. Mais ſi la *lintéaire* ou *l'élaſtique*, n'eſt pas douée de la propriété, d'avoir le centre de gravité de ſon aire, le plus bas qu'il eſt poſſible, elle en a une autre qui n'eſt pas moins belle. C'eſt que le ſolide qu'elle produit en tournant autour de ſa baſe, eſt le plus grand. Ainſi voilà trois courbes, le cercle, la chaînette & la lintéaire, entre leſquelles regne une analogie tout-à-fait remarquable ; la premiere eſt de toutes les iſopérimetres celle qui a la plus grande aire, la ſeconde celle qui produit le ſolide de circonvolution qui a plus grande ſurface, & la troiſieme, celle qui produit le ſolide abſolument le plus grand.

Quelle ſera enfin la courbure d'une voile, ou d'une ſurface infiniment fléxible, qui arrêtée de deux côtés, ſera enflée par le vent ? C'eſt le troiſieme des problêmes analogues que réſolut M. *Bernoulli*. Il faut ici diſtinguer deux cas. Si le vent après avoir choqué la voile, trouve auſſi-tôt une iſſue, la courbe

(*a*) Journal des Sçavans du 23 Juin 1698.

eſt la même que celle de la chaînette ; mais ſi ce fluide y ſéjourne, cette courbe ſera circulaire. La raiſon de cette diſtinction eſt aiſée à ſentir, du moins en partie : dans le dernier cas, le fluide ſéjournant contre la ſurface qu'il pouſſe, ſe diſtribue également en tout ſens, la preſſion qu'il éprouve de celui qui le frappe par derriere ; d'où il réſulte que toutes les parties de la voile ſont également preſſées : elles doivent donc prendre la forme circulaire. Quant à l'autre cas, il faudroit, pour l'analyſer, entrer dans des détails qui nous meneroient trop loin. Les lecteurs pour qui ces matieres ſublimes ont des attraits, me permettront de les renvoyer aux Œuvres de M. Jean *Bernoulli*. On y trouve deux analyſes de ce problême, l'une dans ſes *Leçons de calcul intégral*, l'autre dans ſa *Théorie de la Manœuvre*. La derniere, beaucoup plus ſimple que la premiere, eſt particuliérement remarquable par ſon élégance ; elle eſt fondée ſur le principe lumineux dont nous nous ſommes ſervis ci-deſſus, en parlant de la courbe du linge chargé de liqueur, & qui eſt dû à M. *Bernoulli*, ſçavoir que quand une infinité de puiſſances ſont appliquées perpendiculairement aux points d'un filet, ou d'une ſurface infiniment fléxible, la courbure à chaque point eſt comme la puiſſance qui y eſt appliquée ; & par conſéquent le rayon oſculateur à ce point eſt en raiſon réciproque de cette puiſſance. Cette importante vérité met preſque ſur le champ en poſſeſſion de l'équation différentielle de la courbe, & donne avec une facilité remarquable la ſolution de divers problêmes, qui traités ſuivant une autre méthode, ſeroient beaucoup plus embarraſſans. Il faut voir dans l'ouvrage même de M. *Bernoulli*, l'uſage qu'il en fait pour la réſolution des problêmes de la chaînette, du linge chargé de liqueur, de la voiliere, &c.

Problême de la ligne de la plus courte deſcente.

Parmi les problêmes qui occuperent les Géometres vers la fin du ſiecle paſſé, il en eſt peu qui ſoient plus curieux & plus dignes de remarque, que celui de la plus courte deſcente. Ce fut M. Jean *Bernoulli* qui propoſa celui-ci (*a*). Deux points qui ne ſont ni dans la même perpendiculaire, ni dans la même horizontale, étant donnés, il s'agit de trouver la ligne le long de laquelle un corps roulant de l'un à l'autre, y em-

(*a*) *Act. Erud.* ann. 1696.

ployeroit le moindre temps poſſible. M. *Bernoulli*, lui donne le nom de *Brachyſtochrone*, nom dérivé du Grec (*a*), & qui ſignifie le temps le plus court. On pourroit être tenté d'abord, de penſer que cette ligne eſt la droite menée d'un point à l'autre; mais nous nous hâtons de diſſiper cette erreur, & la choſe eſt facile, à l'aide des réfléxions ſuivantes.

En effet, le temps qu'un corps emploie à tomber d'un point à l'autre, n'eſt pas en raiſon ſimple de la longueur du chemin qu'il parcourt. La détermination de ce temps exige néceſſairement qu'on ait égard à la vîteſſe avec laquelle ce chemin eſt parcouru. Quelque court qu'il ſoit, ſi la vîteſſe eſt très-petite, le mobile y pourra employer beaucoup de temps; d'ailleurs cet eſpace n'eſt pas parcouru d'un mouvement uniforme, mais d'un mouvement continuellement accéléré; & la quantité de cette accélération dépend de la pente de la ligne le long de laquelle ſe meut le corps, & principalement de celle des parties de cette ligne où il commence à ſe mouvoir. Une courbe qui procurera au corps un commencement de chûte verticale, qui enſuite deviendra de plus en plus inclinée, pourra donc lui donner une vîteſſe plus grande qu'il ne faut pour compenſer la longueur du chemin qu'il parcourt; ainſi il ne doit point paroître étonnant qu'un corps qui tombe le long d'une courbe menée d'un point à l'autre, emploie moins de temps à parcourir ce chemin, que s'il fût deſcendu le long de la ligne droite qui les joint.

Ce problême eſt encore un de ceux que *Galilée* avoit tentés. Les vérités que nous venons d'expoſer, ne lui avoient pas échappé, & il avoit prouvé qu'un corps qui rouleroit le long de pluſieurs cordes inſcrites dans un arc de cercle, arriveroit plutôt au bas, que s'il rouloit par la corde de cet arc; de ſorte qu'il démontroit qu'un corps roulant le long de l'arc, employeroit moins de temps dans ſa chûte, qu'en parcourant la corde, ou telle ſuite de cordes qu'on voudroit. Il eſt vrai qu'il concluoit mal-à-propos delà que cet arc de cercle étoit le chemin que le corps devoit parcourir pour arriver d'un point à l'autre dans le moindre temps poſſible. C'étoit une conſéquence précipitée, & qui n'étoit point une ſuite de ſa démonſtration.

(*a*) De βραχυτος, ſurperlatif de βραχὺς, *brevis*, & χρονος, *tempus*.

M. *Bernoulli* n'avoit pas propoſé ce problême ſans être bien aſſuré de ſa poſſeſſion. M. *Leibnitz*, frappé de ſa beauté, ne put, malgré ſes occupations d'un genre tout différent, ſe défendre de s'en occuper, & ne tarda pas à le réſoudre. Il engagea M. *Bernoulli*, qui avoit donné ſix mois aux Géometres pour y travailler, à proroger ce terme encore de ſix mois. Ce délai procura trois autres ſolutions. L'une vint de *Newton*, qui n'eut connoiſſance du problême que vers le commencement de 1697, & qui le réſolut auſſi-tôt. On ſent aiſément que de quelque nature qu'il fût, il ne devoit pas échapper à ce profond génie. Le frere du propoſant, M. *Bernoulli* l'aîné, en donna auſſi une ſolution. Il en vint enfin une de M. le Marquis *de l'Hôpital*, qui indiſpoſé durant les premiers ſix mois, n'avoit pu y donner une attention ſuffiſante, & qui y revint avec ſuccès lors de la prorogation du terme accordé pour le réſoudre (*a*). Ainſi l'Angleterre, la France & l'Allemagne, concoururent à l'honneur d'une découverte ſi curieuſe & ſi difficile. La Hollande ſans doute y eût auſſi eu part, ſi M. *Huyghens* eût vécu : mais il venoit de mourir ; & M. *Hudde*, dont on pouvoit auſſi eſpérer quelque choſe, alors Bourguemeſtre d'Amſterdam, avoit renoncé aux Mathématiques. Au lieu de ſolution, il y eut un Profeſſeur Hollandois, nommé M. *Mackrel*, qui dit que ce problême étoit bon pour des Allemands, mais que ſes compatriotes ne s'en occuperoient pas (*b*). Quelques temps après, c'eſt-à-dire en 1699. M. *Fatio de Duillier*, depuis devenu ſi célebre par ſon enthouſiaſme (*c*), voulut auſſi participer à la gloire de la ſolution de ce problême. C'étoit, on ne peut en diſconvenir, un très-profond Géometre ; mais ceux qui liront les pieces qui ont rapport à la conteſtation aſſez vive qui s'éleva à ce ſujet, verront clairement qu'il vint un peu trop tard pour être fondé à ſe mettre ſur les rangs.

Le problême dont nous parlons n'eſt pas un de ces problê-

(*a*) Voyez toutes ces ſolutions dans les Actes de Leipſick. ann. 1697.

(*b*) *Comm. Phil. Leibn. ac Bern.* T. 1, p. 244.

(*c*) La Géométrie ne met pas toujours à l'abri des travers & des ridicules. M. Fatio de Duillier, en offre un exemple. Il s'aviſa, avec quelques viſionnaires, d'imaginer que l'Evangile ne demandant qu'un grain de foi, pour tranſporter les montagnes & reſſuſciter les morts, il n'étoit pas difficile d'en avoir aſſez pour opérer ces merveilles. Il promit donc à l'Angleterre de reſſuſciter un mort. On prit ces nouveaux Sectaires au mot, le Gouvernement leur en fit donner un qui aux yeux de tout Londres aſſemblé fut ſourd à leur voix. Cette ſcene ridicule ſe paſſa en 172...

mes *de maximis & minimis*, qui ſe réſolvent par les méthodes ordinaires. Il eſt d'un genre plus relevé, & il exige plus d'adreſſe. Comme l'expreſſion même du temps n'eſt pas donnée, puiſque la courbe dont elle dépend eſt préciſément ce qu'on cherche, il faut recourir à un autre moyen, & c'eſt ce qu'il n'eſt pas aiſé de découvrir. M. *Bernoulli*, l'Auteur du problême, en trouva néanmoins deux ſolutions, l'une directe, l'autre indirecte, dont nous donnerons une idée.

Dans la premiere de ces ſolutions, M. *Bernoulli* conſidere, que, puiſque la courbe entiere eſt parcourue dans le moindre temps poſſible, il en doit être de même de chacun de ſes élémens, c'eſt-à-dire, que les deux extrêmités de chacun d'eux, reſtant fixes, leur courbure doit être telle que le mobile les parcoure dans un moindre temps qu'en leur donnant quelqu'autre forme que ce ſoit. Autrement, il eſt évident qu'en ſubſtituant à cette partie de la courbe, celle qui ſeroit parcourue dans un moindre temps, on en auroit une autre qui le ſeroit encore plus promptement, ce qui eſt contre la ſuppoſition. M. *Bernoulli* recherche donc, en conſidérant chaque portion infiniment petite de la courbe comme un arc de cercle, quel devroit en être le rayon, afin que le corps y arrivant avec la vîteſſe déja acquiſe par ſa chûte, le parcoure dans le temps le plus court; & il trouve, à l'aide d'une ligne de calcul, que ce rayon, qui eſt le rayon de la développée à ce point de la courbe, a la propriété connue de celui de la cycloïde. Ainſi il reconnut & il démontra enſuite ſynthétiquement que la cycloïde étoit la courbe cherchée: elle jouiſſoit déja de la propriété du *Tautochroniſme*, c'eſt-à-dire, de procurer à un corps des chûtes d'égale durée, de quelque point qu'il partît. De ſorte que voilà deux propriétés des plus remarquables, réunies dans la même courbe, & très-propres à lui confirmer ſon rang parmi les plus curieux objets de la Géométrie.

La ſeconde ſolution de M. *Bernoulli* procede d'une maniere indirecte, & qui lui fait du moins autant d'honneur que la premiere; car il faut être doué d'un génie extrêmement heureux, pour arriver à une queſtion par une voie auſſi détournée que celle qu'il ſçut ſe frayer. Il ſuppoſe avec *Fermat*, *Huyghens*, & pluſieurs autres, qu'un rayon de lumiere

qui, partant d'un point, va à un autre ſitué dans un milieu de différente denſité, fait toujours ce trajet dans le temps le plus court, & que ſa vîteſſe dans chaque milieu eſt en raiſon réciproque de la denſité. Cela étant un rayon de lumiere qui traverſera un milieu dont la denſité ſera différente à chaque couche, ſe courbera de maniere qu'il ira d'un point à l'autre dans le temps le plus court; ſi donc cette denſité eſt ſuppoſée diminuer dans le même rapport qu'un corps accélere ſon mouvement, c'eſt-à-dire, comme la racine de la hauteur d'où part le corps, la courbe du rayon de lumiere ſera la même que celle de la plus courte deſcente. M. *Bernoulli* applique à ce problême optique, ſon analyſe, & trouve que dans la loi de denſité que nous venons de ſuppoſer, la trajectoire du rayon de lumiere ſeroit une cycloïde; d'où il conclud que cette courbe ſera auſſi celle du plus court trajet d'un point à l'autre. Cette ſeconde ſolution fut celle qu'il publia. M. *Leibnitz*, à qui il communiqua l'une & l'autre, l'engagea par des raiſons particulieres à tenir la premiere cachée. Elle n'a vu le jour qu'en 1718, dans le nouveau Mémoire que M. *Bernoulli* donna à l'Académie des Sciences, ſur le fameux problême des iſopérimetres; c'eſt-là qu'on doit recourir, ou à ſes Œuvres, T. II, p. 266.

Tant de voies différentes peuvent conduire à la ſolution d'un même problême, qu'on ne s'étonnera point que celle de M. Jacques *Bernoulli* ſoit encore différente. Ce ſçavant Géometre ſe ſert de l'obſervation préliminaire dont nous avons fait uſage ci-deſſus, ſçavoir que la propriété de la plus courte deſcente, doit non ſeulement convenir à un arc quelconque fini de la courbe, mais encore à chacune de ſes parties infiniment petites. Deux élémens quelconques de la courbe poſés de ſuite, doivent par conſéquent être ſitués de maniere que le corps qui les parcourt en continuant d'accélérer ſon mouvement, les parcoure dans moins de temps que s'ils euſſent eu toute autre poſition. M. *Bernoulli* réduit ainſi le problême au ſuivant. Deux points A & B, étant donnés, il s'agit de trouver ſur la parallele[+] D E, qui en eſt également diſtante, un point C, tel que A C, étant parcouru avec une certaine vîteſſe *m*, & C B avec une autre *n*, le temps employé à aller de A en B, ſoit le moindre qu'il eſt poſſible. Ce problême analogue à celui de la réfraction, eſt facile. On trouve par le

[+] *à l'horiſon.*

Fig. 121.

moyen

moyen du calcul différentiel, & même ſans ce ſecours, que les ſinus des angles A C D, B C E, doivent être en raiſon réciproque des vîteſſes avec leſquelles C A, C B, ſont parcourues. Mais dans l'hypotheſe d'une courbe parcourue d'un mouvement accéléré uniformément, ces vîteſſes ſuivent le rapport des racines des hauteurs, comme H A, H D, de ſorte qu'il faut que les ſinus des angles formés par deux élémens ſucceſſifs *a c*, *c b*, de la courbe cherchée, ſoient réciproquement comme les racines des hauteurs *h a*, *h c*, ou des abſciſſes. Or cela ſe trouve, avec un peu d'attention, convenir à la cycloïde; d'où il ſuit que cette courbe eſt celle qui ſatisfait au problême. C'eſt ainſi que M. *Bernoulli* l'aîné, procédoit dans ſa ſolution.

Nous ne pouvons pas faire connoître de même, les moyens qu'employerent les autres Géometres qui réſolurent auſſi ce problême, parce qu'ils n'ont rien laiſſé tranſpirer de leur analyſe. *Newton*, *Leibnitz*, M. le Marquis *de l'Hôpital*, ſe contenterent de répondre que la courbe demandée par M. *Bernoulli* le jeune, étoit une cycloïde. Mais ceux qui connoiſſent la Géométrie, ſçavent qu'on n'y devine pas, & que quand on trouve la vérité dans des queſtions auſſi difficiles, c'eſt qu'on a pris un chemin sûr pour y aboutir. Nous ſçavons ſeulement, à l'égard de M. le Marquis *de l'Hôpital*, qu'il employa dans ſon analyſe un moyen aſſez ſemblable à celui dont M. *Bernoulli* s'étoit ſervi pour réſoudre les problêmes de la chaînette, de la voiliere, &c. Sa ſolution eſt auſſi fort générale, & il fit une remarque particuliere, ſçavoir que dans l'hypotheſe de *Baliani*, ſur l'accélération des graves, le cercle ſeroit la courbe de la plus courte deſcente. Mais cette hypotheſe eſt impoſſible, comme on l'a vu ailleurs. Ainſi loin que *Galilée* eut bien deviné, il arrive au contraire, par un hazard ſingulier, qu'il a attribué la propriété de la plus courte deſcente à la courbe qui de toutes eſt la ſeule qui ne ſçauroit l'avoir.

La conſidération des mouvemens curvilignes des corps, conduit à divers autres problêmes du même genre que le précédent, & qui furent auſſi agités entre MM. *Bernoulli*. On pourroit demander, par exemple, *laquelle de toutes les cycloïdes menées d'un point donné ſur l'horizontale, à une ligne verticale, produiroit la chûte du corps la plus prompte de ce point à cette ver-*

ticale. Cette queſtion fut propoſée par M. *Bernoulli* l'aîné, à ſon frere, avec qui il étoit depuis quelque temps en méſintelligence, & ce fut un des premiers actes d'hoſtilité, par leſquels commença la guerre un peu trop vive qu'ils ſe firent l'un à l'autre. Mais ce que M. Jacques *Bernoulli* avoit en vue dans ce défi, n'arriva pas; ſon frere y ſatisfit avec facilité, & en effet cette queſtion n'étoit pas de nature à devoir beaucoup l'embarraſſer. Il trouva que de toutes ces cycloïdes, celle qui ſatisfaiſoit au *minimum* demandé, étoit celle qui rencontroit la verticale à angles droits. Il réſolut même la queſtion bien plus généralement que ſon frere ne l'avoit propoſée, en montrant que quelle que fût la poſition de la ligne à laquelle le corps devoit aller, la cycloïde qui l'y conduiſoit dans le moindre temps, étoit celle qui la rencontroit perpendiculairement. Cette ſolution n'eſt qu'un corollaire facile de celle d'une autre queſtion qu'il s'étoit propoſée ſur ces chûtes curvilignes dans la cycloïde. En ſuppoſant une infinité de cycloïdes de même origine, il avoit recherché quelle courbe terminoit les arcs parcourus dans le même temps, ou la courbe à laquelle arriveroient dans des temps égaux, tous les corps roulans dans ces cycloïdes. C'eſt ainſi que ſi l'on ſuppoſe une infinité de plans inclinés, qui ayent leur origine au même point, & qu'on décrive par ce point un cercle quelconque ayant ſon diametre vertical, ce cercle eſt la courbe à laquelle un corps roulant par un de ces plans quelconques, arrive dans le même temps, de ſorte qu'une infinité de corps roulant le long de ces plans inclinés en nombre infinis, formeroient toujours une circonférence circulaire. M. *Bernoulli* donna à cette courbe le nom de *ſynchrone*, nom formé de deux mots Grecs, qui expriment cette propriété; & il trouva qu'elle coupoit à angles droits toutes ces cycloïdes, d'où il eſt facile de tirer la ſolution ci-deſſus. Car ſi l'on ſuppoſe une ſynchrone quelconque toucher la ligne donnée de poſition, ce point de contact ſera évidemment celui par lequel doit paſſer la cycloïde cherchée, & puiſque celle-ci coupe perpendiculairement la ſynchrone, elle coupera de même la ligne donnée à ce point.

M. Jean *Bernoulli* ne s'en tint pas là : un problême bien plus difficile que les précédens, eſt celui-ci. *De toutes les courbes ſemblables conſtruites ſur un même axe horizontal, & ayant*

le même ſommet, quelle eſt celle dont la portion compriſe entre ce ſommet, & une ligne donnée de poſition, eſt parcourue dans le moindre temps? Son frere content de l'avoir indiqué, ſembloit n'avoir oſé le tenter. M. *Bernoulli* le jeune, en donna la ſolution, & pour enchérir ſur les difficultés de ſon frere, & l'embarraſſer à ſon tour, il le lui rétorqua avec l'addition d'une nouvelle difficulté. Il n'étoit plus queſtion de courbes ſemblables, mais ſeulement du même genre. *Si l'on ſuppoſoit, par exemple, une infinité de demi-ellipſes conſtruites ſur le même diametre horizontal, & ayant leur axe conjugué dans la verticale, quelle ſeroit celle qui ſeroit parcourue dans le moindre temps?* M. Jean *Bernoulli* ajoutoit, qu'il en donneroit la ſolution, ſi ſon frere ne la donnoit pas. A la vérité, nous remarquerons qu'il y eut dans ce défi, de la part de M. *Bernoulli* le jeune, un peu de ſupercherie, s'il eſt permis de parler ainſi. On trouve en liſant ſon commerce épiſtolaire avec *Leibnitz* (*a*), qu'il s'aida des lumieres de ce grand homme, & qu'il tenoit de lui l'artifice analytique qui eſt néceſſaire pour la ſolution de ce problême, ſçavoir une ſorte de différentiation que *Leibnitz* appelloit, *de curvâ in curvam*; ainſi l'on eût pu reprocher à M. Jean *Bernoulli*, de ſe faire fort des armes d'autrui. Mais nonobſtant ce ſecours, il ne fut pas plus heureux à embarraſſer ſon frere que celui-ci l'avoit été dans le même deſſein. M. Jacques *Bernoulli* réſolut ce dernier problême, & conſigna ſa ſolution dans le Journal des Sçavans du 4 Août 1698, ſous un anagramme dont on trouve l'explication dans ſes Œuvres. Il ſatisfit également à divers autres défis de ſon frere, comme l'on peut voir dans les Actes de Léipſick de la même année 1698. C'eût été un ſpectacle tout-à-fait agréable, que celui de ce combat littéraire, ſi l'on eût pu oublier que les rivaux étoient freres, ou qu'ils en euſſent écarté l'aigreur & la vivacité qu'ils y mirent. M. *Saurin* a donné quelques années après dans les Mémoires de l'Académie (*b*), l'analyſe du problême des cycloïdes ou des courbes ſemblables, analyſe que MM. *Bernoulli* avoient ſupprimée; mais je ne ſçache pas qu'on trouve aucune part celle du dernier. Dans la ſuite, M. Jean *Bernoulli* a encore réſolu un problême de ce genre, & qui eſt extrêmement

(*a*) Leibn. ac Bern. *Comm. Phil.* T. 1, p. 319, 330.
(*b*) Ann. 1707.

curieux (*a*). Il ſuppoſe que la longueur de la courbe d'un point à l'autre, eſt déterminée, & il demande quelle doit être ſa nature, afin qu'elle ſoit parcourue dans le moindre temps poſſible. Il aſſigne, à l'aide de la belle théorie qu'il expoſe dans ſon Mémoire ſur les iſopérimetres, l'équation de la courbe cherchée. On voit ici avec plaiſir reparoître la cycloïde quand il le faut. Il n'y a qu'à ſuppoſer que la longueur donnée entre les points aſſignés, ſoit celle d'un arc de cycloïde, ayant ſon origine au point le plus haut, & l'équation générale ſe transforme en celle de la cycloïde; ce qui confirme la belle propriété de cette courbe d'une maniere auſſi ſinguliere que ſatisfaiſante.

Problême du pont-levis.

Voici encore un problême aſſez curieux, qui fut propoſé en France vers le même temps. On ſuppoſe un pont-levis, attaché par une de ſes extrêmités à une corde qui paſſant par deſſus une poulie va aboutir à un contrepoids; il eſt queſtion de déterminer *le long de quelle courbe devroit rouler ce contrepoids, afin d'être toujours en équilibre avec le pont-levis dans toutes ſes ſituations.* Ce problême, dont l'utilité dans l'architecture militaire, ſe préſente facilement, piqua la curioſité de M. le Marquis *de l'Hôpital:* il en rechercha la ſolution, & il la trouva. On la lit dans les Actes de Léipſick de l'année 1695. M. *Bernoulli* le jeune, fit à ce ſujet une remarque curieuſe (*b*). Il obſerva que la courbe en queſtion n'étoit qu'une épicycloïde. Ainſi il eſt facile de la décrire par un mouvement continu, & c'eſt tout ce qu'on pourroit deſirer de plus commode ſi l'on entreprenoit de réduire cette invention en pratique.

Problême du ſolide de la moindre réſiſtance.

Nous croyons devoir encore donner place ici à un problême intéreſſant, quoiqu'il ne ſoit pas préciſément du nombre de ceux que nous avons annoncés au commencement de cet article. C'eſt le problême du ſolide de moindre réſiſtance. On demande quelle eſt la courbure qu'il faudra donner à un conoïde de baſe & de hauteur déterminées, afin que ce ſolide mu dans un fluide, ſuivant la direction de ſon axe, y éprouve une réſiſtance moindre que tout autre de mêmes dimenſions. On doit à M. *Newton* l'idée de ce problême: il le réſoud comme en paſſant, dans un endroit de ſes principes, en donnant

(*a*) Mem. ſur les iſopérimetres. Mem. de l'Acad. 1718.
(*b*) *Act. Erud.* 1695.

une des propriétés de cette courbe ; ſçavoir celle de ſa tangente. Mais ce qu'il dit eſt ſi concis & ſi peu développée, qu'il ſemble avoir voulu laiſſer preſque tout à faire.

Ce motif engagea vers l'année 1699, M. *Fatio*, dont nous avons déja parlé dans cet article, à rechercher une ſolution analytique de ce problême. Il y parvint, mais par une voie extrêmement embarraſſée, & qui le conduit ſeulement à l'expreſſion du rayon de la développée, & à des ſecondes différences. Il publia cette ſolution en 1699, dans un écrit particulier, où il traitoit auſſi le problême de la plus courte deſcente. Un exemplaire de cet écrit ayant été envoyé à M. le Marquis *de l'Hôpital*, il lui parut plus court de rechercher la ſolution du problême, que de ſuivre l'Auteur dans la route ſcabreuſe & obſcure qu'il s'étoit ouverte. L'expreſſion compliquée à laquelle il parvenoit, donnoit d'ailleurs de juſtes motifs de penſer qu'il n'avoit pas pris le vrai chemin. M. *de l'Hôpital*, ſe mit donc à méditer ſur ce problême, & en effet il trouva une ſolution bien plus ſimple, de laquelle il tira avec facilité, & la conſtruction de la courbe, & la propriété que *Newton* avoit déja remarquée. M. Jean *Bernoulli*, auſſi peu ſatisfait de la ſolution de M. *Fatio*, en trouva auſſi une autre qui, à la notation près, eſt la même que celle du Géometre François. Enfin la facilité avec laquelle ces deux Géometres étoient arrivés à l'équation Newtonienne, & à la conſtruction de la courbe dont nous parlons, excita M. *Fatio* à ſe frayer une route plus facile que celle qu'il avoit d'abord tenue. Il y réuſſit, & il donna dans les Actes de Léipſick de 1701, une nouvelle ſolution du problême du ſolide de la moindre réſiſtance, qu'il déduit avec beaucoup d'adreſſe du principe de M. *de Fermat* ſur la réfraction. Pluſieurs années après, ſçavoir en 1713, il deſcendit de nouveau dans la lice à la même occaſion, & il donna dans les *Tranſactions Philoſophiques* un Mémoire où il réduit l'équation différentielle du ſecond ordre à laquelle il étoit parvenu en 1699, à celle de *Newton*. On l'y voit dire qu'il étoit dès-lors en poſſeſſion du moyen de faire cette réduction. Mais n'auroit-on pas été fondé à lui demander, d'où vient qu'il ne l'employa pas en donnant ſa premiere ſolution, & pourquoi il a laiſſé écouler un ſi long intervalle de temps à la compléter. Ne répondre à une difficulté que quinze

ans après qu'elle a été faite, n'eſt-ce pas une forte préſomption qu'on n'avoit pour lors aucune bonne réponſe à faire?

La courbe génératrice du ſolide de moindre réſiſtance a quelques ſingularités dignes d'être remarquées. Premiérement, elle ne prend point naiſſance au ſommet donné A, comme l'on s'y attendroit ſans doute; elle commence toujours
Fig. 122. à un point B, éloigné du point A, d'une certaine quantité AB, qui dépend du rapport des lignes CA, CD; & c'eſt ſeulement la réſiſtance ſur la partie convexe que forme la courbe BD dans ſa circonvolution, qui eſt la moindre qu'il ſoit poſſible; celle qu'éprouveroit la partie plane, ou le cercle dont AB eſt le rayon, n'y eſt point compriſe. Cela doit nous apprendre qu'il n'y a point de courbe joignant le point A & le point D, qui puiſſe être douée de la propriété que nous demandons; c'eſt à peu près ainſi que, lorſqu'on a recherché la courbe iſochrone (*a*), l'analyſe s'eſt en quelque ſorte obſtinée à ne la point faire commencer au ſommet qu'on lui avoit déſigné, ou au commencement de la chûte, mais à une certaine diſtance de ce point.

En ſecond lieu, la courbe dont nous parlons, a en B, un point de rebrouſſement, c'eſt-à-dire, qu'à ce point B prend naiſſance une autre branche B*d*E, faiſant, de même que la premiere avec la ligne AB prolongée, un angle de 30°, & tournant ſa concavité à cette ligne, ou au fluide qu'elle doit choquer. Ceci pourra ſurprendre quelques lecteurs, qui auront de la peine à concevoir comment une ſurface qui préſente au fluide ſa concavité, peut éprouver moins de réſiſtance que toute autre renfermée entre les mêmes termes. Mais qu'on y réfléchiſſe un peu attentivement, & l'on verra le dénouement de cette difficulté. Il importe peu que l'endroit où cette ſurface éprouve le choc le plus fort dans la direction de l'axe, ſoit le plus voiſin du ſommet, comme dans la figure convexe, ou le plus éloigné, comme dans la concave, pourvu que la ſomme de tous les chocs ſoit la moindre qu'il eſt poſſible.

M. *Newton*, remarquant ſans doute l'inconvénient du ſolide ci-deſſus, qui ne jouit de la propriété de la moindre réſiſtance, qu'en n'ayant aucun égard au choc du fluide contre la partie plane, a recherché quelle inclinaiſon doivent avoir les côtés

(*a*) Voyez le Commencement de cet art.

d'un tronc conique, de baſe & de hauteur donnée, afin qu'en comptant le choc du fluide ſur la baſe ſupérieure, la réſiſtance totale ſoit la moindre poſſible (*a*). Il a trouvé qu'il falloit pour cet effet diviſer C A en 2 également, en O, & qu'en faiſant O G = O D, le point G étoit celui où devoient converger les côtés de ce cône, de maniere que ce n'eſt point le cône ayant le ſommet au point A, qui éprouve la moindre réſiſtance, mais le ſolide que nous venons de décrire. Ceci n'a rien qui doive nous étonner : on doit ſentir facilement qu'on peut davantage gagner par l'obliquité & le raccourciſſement des côtés du cône, qu'on ne perd par l'addition de la petite partie plane B E ; & c'eſt ce qui arrive dans le cas préſent. Il en arrive, à certains égards, de même au triangle comparé au trapeze. Si la baſe F D eſt plus grande que la hauteur C A, le triangle F A D, n'eſt plus celui qui éprouveroit la moindre réſiſtance : c'eſt le trapeze dont les côtés inclinés D B, F E, iroient à leur rencontre former un angle droit, ou qui ſont inclinés au fluide d'un angle de 45°. *Fig.* 123. *Fig.* 124.

A l'imitation du problême du ſolide de la moindre réſiſtance, on pourroit avoir l'idée de rechercher quelle ligne ſur une baſe & un axe donné, formeroit la figure plane, qui mue dans la direction de ſon axe, éprouveroit par ſes côtés la moindre réſiſtance. Je ne puis diſſimuler que, l'ayant recherché analytiquement, j'ai été fort ſurpris, & comme fâché de trouver que ce n'étoit qu'une ligne droite ; mais j'en ai vu depuis la raiſon. Elle eſt renfermée dans ce que nous venons de dire ſur le trapeze, ou le triangle de moindre réſiſtance. Les côtés expoſés à l'impulſion du fluide devant toujours faire avec l'axe un angle de 45°, cette ſituation, qui eſt conſtante, montre que tous les élémens de la ligne cherchée doivent être placés de même, & par conſéquent former par leur continuité une ligne droite.

Nous devons à M. *Bouguer* de ſçavantes recherches ſur le problême dont nous venons de nous occuper (*b*), & elles ſont d'autant plus eſtimables, que ce ſçavant Académicien s'eſt attaché à le conſidérer relativement à la navigation. A l'enviſager de ce côté-là, le ſolide ci-deſſus n'eſt qu'une curioſité

(*a*) *Princip.* l. II, ſect. 7.
(*b*) Traité du navire. L. III, ſect. 5.

Mathématique : car outre qu'il ne poſſede la propriété de la moindre réſiſtance qu'en faiſant abſtraction de celle qu'éprouve la portion plane qu'il a au ſommet, de bonnes raiſons ne permettent pas de former une proue de vaiſſeau en conoïde ſur une baſe demi-circulaire. Cette baſe, qui eſt la principale coupe du navire perpendiculairement à ſa longueur, doit avoir une autre forme. Cela a donné lieu à M *Bouguer* de rechercher la ſolution de cet autre problême (*a*), ſçavoir de couvrir une baſe curviligne donnée, d'une ſurface conoïdale qui éprouve le moindre choc poſſible de l'eau qu'elle fend. M. *Bouguer* réſoud auſſi, à cette occaſion, pluſieurs queſtions dont l'objet eſt d'allier, autant qu'il ſe peut, la moindre réſiſtance de la proue, avec diverſes qualités néceſſaires au vaiſſeau. Mais la nature de notre plan, ne nous permet pas d'entrer plus avant dans ces conſidérations. Il nous ſuffira de renvoyer le lecteur à l'excellent ouvrage que nous avons cité.

VIII.

Si l'étendue conſidérable à laquelle ce Livre s'eſt déja accru, ne nous impoſoit pas la loi d'y mettre fin, ce ſeroit ici le lieu de parler de la fameuſe queſtion que *Leibnitz* éleva en 1686, ſur la meſure de la force des corps en mouvement. Mais nous ne pourrions la traiter avec un peu de ſatisfaction pour le lecteur Mathématicien, ſans paſſer bientôt au-delà des bornes que l'abondance de notre matiere nous preſcrit. D'ailleurs, quoique l'origine de cette queſtion célebre doive être rapportée vers la fin du ſiecle paſſé, c'eſt ſurtout dans celui-ci qu'elle a été agitée, & qu'elle a occaſionné l'eſpece de guerre civile qu'on a vu régner pendant quelque temps parmi les Méchaniciens. Ce motif, joint à la conſidération précédente, nous a portés à en différer l'hiſtoire juſqu'à ce que nous ayons atteint cette derniere époque. C'eſt pourquoi nous allons terminer ce Livre en donnant une idée des travaux de divers Méchaniciens célebres dont nous n'avons eu encore aucune occaſion de faire mention.

L'Angleterre nous offre pluſieurs de ces Méchaniciens

(*a*) Mem. de l'Acad. 1733. Traité du navire. *Ibid.*

dignes

de trouver place ici. Tels ſont les Lords *Brouncker* & *Morai*, le Chevalier *Petty*, auteur de quelques vues nouvelles & ingénieuſes ſur la perfection de la navigation & des voitures à roue (*a*) ; le Marquis de *Worceſtre*, auteur du Livre intitulé *Century of inventions*, parmi leſquelles ſe trouve entr'autres l'ébauche de la machine à feu, depuis exécutée par *Savery*, & dont nous parlerons ailleurs plus au long ; le Docteur Robert *Hook* (*b*), & le Chevalier *Wren*. Mais nous nous arrêterons uniquement à ces derniers. Il ſeroit difficile de trouver un homme doué d'un génie plus heureux, & plus fécond dans ce genre que le D. *Hook*. Le détail de ſes inventions & de ſes vues nouvelles, ſeroit d'une prolixité extrême ; les lecteurs doivent recourir à ſes écrits nombreux, qui juſtifieront l'éloge qu'on vient d'en faire. Nous nous bornerons ici à un trait de ſa ſagacité. C'eſt l'application du reſſort à régler le mouvement des montres. Cette invention ſi heureuſe, & qu'on attribue ordinairement à M. *Huyghens*, me paroît légitimement revendiquée par M. *Hook*. On trouve effectivement dans l'hiſtoire de la Société Royale de Londres, (*c*) parmi les titres d'écrits préſentés à cette Société avant qu'elle publiât ſes Tranſactions, on en trouve, dis-je, quelques-uns qui concernent évidemment cette application. Or cette hiſtoire parut en 1668, pluſieurs années avant qu'il fût queſtion en France de rien de ſemblable. M. *Hook* fit, dit-il, (*d*) cette découverte dès l'année 1660, & il la communiqua à MM. *Brouncker* & *Morai*, comme un échantillon de quelques inventions

(*a*) *Tranſ. Phil.* n°. 161, & Hiſt. de la Société Royale.

(*b*) M. Hook naquit à Freshwater le 16 Juillet 1638, vieux ſtyle. Moins favoriſé du côté de la fortune que de celui du génie, il fut obligé, pour faire ſes études, d'entrer dans un des Colléges d'Oxford, en qualité d'Ecolier ſervant. Il ne tarda pas à ſe faire avantageuſement connoître au D. Seth Ward, alors Profeſſeur à Oxford, & aux autres fondateurs de la Société Royale dans laquelle il fut admis en 1661. Le Chevalier Cutler voulant fonder une Chaire de Méchanique, crut ne pouvoir mieux la remplir qu'en engageant M. Hook à l'accepter. Delà vient le nom de *Lectiones Cutlerianæ*, que porte le Recueil d'excellentes leçons qu'il dicta dans cette Chaire. M. Hook fut auſſi Profeſſeur d'Aſtronomie à Gresham. Il mourut le 3 Mars 1703, v. ſt. Voici ſes divers ouvrages par ordre de dattes. *Micrographia*, 1665, in-fol. *An attempt to prove the motion of the earth.* 1674. in-4°. *Animadv. in Mach. cæl. Hevelii*, 1674, in-4°. *Lect. Cutlerianæ*, 1679, in-4°. M. Waller a publié en 1705, ſes Œuvres poſthumes (en Angl. in-fol. 1 vol.) avec ſa vie, à laquelle nous renvoyons le lecteur.

(*c*) Part. 11, ch. 36.

(*d*) Lect. on the Spring.

dont il disoit être en possession, & qui devoient lui donner la solution du fameux problême des longitudes ; mais ne s'étant pas accordé avec ces Messieurs sur les articles de l'espece de société qu'ils devoient contracter entr'eux, il n'a jamais voulu dévoiler son secret, & il l'a emporté avec lui. Nous remarquerons encore que, lorsque M. *Huyghens* publia en 1674, cet usage du ressort, M. *Hook* en fut très-indisposé. Il intenta au Secretaire de la Société Royale; (M. *Oldembourg*) un vif procès, l'accusant de prévarication, & de faire part à des Sçavans étrangers des découvertes dont les Regîstres de la Société Royale étoient les dépositaires : mais il n'étoit pas besoin qu'*Oldembourg* commît cette indiscretion, pour que l'invention dont nous parlons transpirât, puisque le Livre cité plus haut parut en François dès l'année 1669 ; & peut-être fut-ce là que M. *Huyghens* & l'Abbé de *Hautefeuille*, (*a*) qui lui disputa en justice réglée cette découverte, en puiserent la premiere idée. D'ailleurs M. *Huyghens* avoit déja été à diverses reprises en Angleterre, & il est à présumer que dans les séjours qu'il y fit, il s'y informa avec soin des inventions des Sçavans du pays. Quant à ce que dit M. *Waller* qui, dans la vie de M. *Hook*, lui attribue aussi l'usage de la cycloïde, pour rendre le mouvement du pendule parfaitement égal, cela n'est point fondé. Il n'y a rien dans l'ouvrage dont s'appuye M. *Waller*, sçavoir les remarques de *Hook* sur la *Machina Celestis* d'*Hevelius*, qui favorise cette prétention : il s'y agit seulement du pendule circulaire, qui semble encore pouvoir être revendiqué à M. *Hook*. A la vérité, parmi les titres d'écrits cités plus haut, il en a un qui a trait à cette application de la cycloïde. Mais il est probable que cet écrit est de M. *Huyghens* lui-même, qui étoit membre de la Société Royale, & qui fut à Londres en 1665 ; d'ailleurs nous sommes fondés à penser que M. *Hook* n'étoit pas assez profond Géometre pour faire une découverte de cette nature.

Voici encore deux remarques curieuses que nous fournit le Chapitre du Livre cité ci-dessus. Nous y trouvons la premiere idée de l'octant Anglois dont se servent aujourd'hui tous les

(*a*) Voyez le Factum de cet Abbé, dans le Recueil de ses *Œuvres & inventions diverses*. Le procès se termina, M. Huyghens s'étant désisté du privilége dont il sollicitoit l'entérinement.

marins un peu jaloux de l'exactitude, pour prendre les hauteurs en mer. On y rencontre auſſi celle du ſoufflet centrifuge du Docteur *Deſaguliers :* elle y paroît ſous ce titre : *Inſtrument nouveau pour former un jet d'eau en tournant en rond une aîle mobile dans le creux d'un tuyau cylindrique fermé.* Mais nous ignorons quel des membres de la Société Royale en eſt l'Auteur. Cette machine fut de nouveau propoſée avec diverſes autres inventions ingénieuſes, par le D. *Papin*, Profeſſeur à Marpurg, dans un ouvrage intitulé : *Faſciculus Diſſert. Mechan.* (Lipſ. 1689), & elle l'a été encore depuis à diverſes repriſes, entr'autres en 173 :, par M. *Dupui*, qui lui donnoit l'avantage ſur toutes les autres machines propres à élever de l'eau. Un homme célebre par ſon imagination, (le P. *Caſtel*) en fit dans le tems les éloges les plus pompeux. Pour les apprécier au juſte, il faut lire l'examen que M *Deſaguliers* a fait de cette machine dans ſon *Cours de Phyſique expérimentale*, ou plutôt *de Méchanique.*

Le Chevalier Chriſtophe *Wren*, (*a*) ne s'eſt pas ſeulement diſtingué parmi les Méchaniciens, par la découverte de loix du choc, à laquelle il a part avec *Huyghens* & *Wallis :* l'Hiſtorien de la Société Royale fait encore une longue énumération de ſes autres inventions ou recherches méchaniques. De ce nombre ſont une théorie générale des mouvemens; diverſes recherches ſur la réſiſtance des fluides aux corps qui les traverſent, ſur la conſtruction des vaiſſeaux, ſur l'action des rames, des voiles, &c; pluſieurs machines ingénieuſement ima-

(*a*) Le Chevalier Chriſtophe Wren naquit à Londres en 1632, & prit des grades à Oxford en 1650 & 1653. Il n'eſt aucune partie des Mathématiques où il n'ait brillé, & il a fait dans la plûpart, de belles & curieuſes découvertes. On ſe contentera de rappeller ici celles qu'il fit, en 1658, ſur la cycloïde, à l'occaſion des problêmes de M. Paſcal. Il fut fait en 1658, Profeſſeur d'Aſtronomie à Gresham, d'où il paſſa en 1660 à [redacted] Oxford. Mais ſes talens pour l'Architecture le placerent bientôt ſur un théâtre plus brillant. Le Roi Charles II le nomma adjoint au Chevalier Denham, Intendant de ſes Bâtimens, & après la mort de ce Chevalier, M. Wren lui ſuccéda. L'Angleterre lui doit quantité de beaux édifices, entr'autres Saint Paul de Londres, la ſeule Baſilique dans le monde Chrétien qui approche de Saint Pierre de Rome. Mais le morceau de prédilection du Chevalier Wren, eſt ſon clocher de *Ste Mary the bows*, (Sainte Marie aux Arcs), l'un des plus hardis & des plus heureux morceaux en ce genre, écueil de tous les Architectes. Cet homme rare, & néanmoins d'une modeſtie ſinguliere, & même exceſſive, mourut en 1723, & fut enterré à Saint Paul. Je ne connois en Mathématiques qu'un ſeul ouvrage de lui, imprimé à part, & qui eſt une production de ſa jeuneſſe. Il eſt intitulé, *Tractatulus ad periodum jul. ſpectans, &c.* 1651.

ginées pour former des verres de figure hyperbolique, entr'autres une dont on lit la deſcription dans les *Tranſ. Phil.* n°. 59, & qui eſt fondée ſur une propriété remarquable de l'hyperbole; de curieuſes obſervations ſur le mouvement des pendules, & des idées aſſez analogues à celles du D. *Hook*, ſur la cauſe méchanique du mouvement des corps céleſtes; une multitude d'inſtrumens nouveaux, ſoit optiques, ſoit aſtronomiques, comme ſa machine pour deſſiner un payſage ou une figure quelconque, ſans avoir la moindre teinture de deſſein, & qui eſt décrite dans les *Tranſactions*, n°. 60. Je ne dis rien d'une foule de vues nouvelles concernant la perfection de diverſes branches de la Phyſique, parce que ceci n'entre pas dans notre plan. Le Chevalier *Wren*, élevé à la place d'Intendant général des Bâtimens royaux, tourna ſes vues du côté de la partie mathématique de l'Architecture; & profond comme il l'étoit dans la Géométrie & dans la Méchanique, il enrichit cet art de diverſes découvertes utiles. C'eſt du moins ce que l'on peut conjecturer d'après la haute réputation qu'il ſe fit, pour la ſolidité & la hardieſſe de ſes édifices. Mais les occupations de ſa place ne lui ont pas permis de développer tant de choſes intéreſſantes, de ſorte que tout ce que l'on ſçait de ſes inventions ſe réduit preſque à l'indication générale & ſtérile qu'on a vue ci-deſſus. Cela ſuffit néanmoins pour nous faire entrevoir combien cet homme célebre eût enrichi la Méchanique, s'il eût eu le loiſir de ſe livrer à ſon génie, & à ſon goût pour cette ſcience.

Pendant que l'Angleterre cultivoit la Méchanique avec ces ſuccès, la France ne montroit pas moins de zele à hâter les progrès de cette partie des Mathématiques ſi utile & ſi importante. On voit figurer dans cette carriere MM. *Blondel*, *Roberval*, *Perrault*, *Roemer*, *Mariotte*, *Varignon*, *de la Hire*, *Amontons*, *&c.* Ils nous fourniroient chacun la matiere d'un article particulier; mais pour abréger, nous inviterons le lecteur à parcourir l'hiſtoire de l'Académie des Sciences avant ſon renouvellement, & l'on ne fera ici mention que de ceux qui ſe ſont illuſtrés par quelque ouvrage ou quelque invention célebre.

On fait honneur d'une invention de ce genre au fameux M. *Roemer*, Danois de naiſſance, mais alors habitué en France. Elle conſiſte dans l'ingénieuſe idée de former en épicy-

cloïde les dents des roues qui levent ou qui abaiſſent des leviers pour mouvoir de grands poids, comme dans les machines hydrauliques, & autres. On s'étoit, il eſt vrai, déja aviſé de contourner ces dents en lignes courbes; un certain inſtinct méchanique avoit appris qu'il falloit qu'elles euſſent cette forme pour procurer à la puiſſance une action plus égale, & par-là plus avantageuſe ſur le fardeau à enlever : car M. de la *Hire* nous parle dans ſon Traité des épicycloïdes d'une machine exécutée de cette maniere à quelques lieues de Paris par M. *Deſargues*. Mais on ignore quels principes ce Géometre avoit ſuivis dans la deſcription de la courbure de ces dents : M. *Roemer* découvrit que ce devoit être celle d'une épicycloïde. Il fit, à ce que nous conjecturons, cette utile remarque dans un écrit ſur les roues dentées, qu'il lut en 1675, & dont parle l'Hiſtorien de l'Académie. Long-tems après, ſçavoir en 1695, M. de la *Hire* a revendiqué cette invention. Il dit dans la Préface du Traité cité ci-deſſus, qu'il l'avoit trouvée vers l'an 1674, & qu'il l'avoit alors communiquée à Meſſieurs *Auzout*, *Mariotte* & *Picard*, à qui elle plut beaucoup. Nous ne prononcerons point entre l'un & l'autre; nous remarquerons ſeulement que, ſuivant le témoignage de M. *Leibnitz*, (*a*) la prétention de M. de la *Hire* n'eſt pas fondée. M. *Leibnitz* aſſure que durant ſon ſéjour à Paris, M. *Roemer* paſſoit parmi les Sçavans, & entr'autres auprès de M. *Huyghens*, pour l'inventeur de cet uſage de l'épicycloïde, & qu'il n'étoit point queſtion de M. de la *Hire*.

M. *Mariotte*, (*b*) déja recommandable pour avoir été un des premiers qui ayent introduit en France la Phyſique expérimentale, l'eſt auſſi par divers écrits très-utiles ſur la Méchanique. On met dans ce rang ſon Traité de la Percuſſion, où il établit, & par le raiſonnement & par des expériences heureuſement imaginées, les vraies loix du choc des corps, trouvées récemment, & propoſées pour la plûpart ſans démonſtration. On doit encore lui ſçavoir bien du gré de ſon Traité *du mouve-*

(*a*) *Leib. & Bern. comm.* T. II, p. 178.

(*b*) Mariotte, (Pierre) étoit de Dijon ou des environs. La date de ſa naiſſance n'eſt pas connue. Il entra dans l'Académie des Sciences fort peu après ſon inſtitution, & il mourut au mois de Mai de 1684. Ses Œuvres ont été recueillies en 2 vol. in-4°. qui parurent à la Haye en 1717, & de nouveau en 1740.

ment des eaux. C'eſt un ouvrage ſi connu, que cela nous diſpenſe d'en rien dire.

Il eſt peu de Mathématiciens qui aient autant travaillé que M. *Varignon* (*a*) ſur la théorie de la Méchanique, & c'eſt ſurtout par ſes travaux en ce genre qu'il s'eſt illuſtré. Il porta dans cette ſcience cet eſprit de généralité qui le caractériſe; il en ſimplifia divers principes, & réſolut quantité de queſtions qui n'avoient point encore été traitées. Une foule de Mémoires inſérés parmi ceux de l'Académie, juſtifient ce que l'on vient de dire. Ils concernent principalement la doctrine du mouvement, ſoit uniforme, ou varié ſuivant une loi quelconque, ſoit ſe paſſant dans le vuide ou dans un milieu réſiſtant. Cette matiere y eſt traitée avec une grande généralité; mais, qu'on nous permette auſſi de le dire, avec une prolixité exceſſive dans les détails & les exemples. Il ſeroit trop long d'indiquer les ſujets des autres Mémoires: nous nous bornerons à quelques lignes ſur l'ouvrage que M. *Varignon* publia en 1687, ſous le titre de *projet d'une nouvelle Méchanique*. Ce Livre, avec juſtice fort eſtimé des Méchaniciens, lui fit beaucoup d'honneur, à cauſe de l'univerſalité qui y regne. On y trouve toute la Statique déduite d'un principe unique & très-lumineux. Ce principe, depuis ſi connu & ſi employé, ſe réduit à ceci. *Lorſque les puiſſances* A, B, C, *tirant chacune de leur côté, ſe font équilibre autour d'un point* D, *elles ſont entr'elles reſpectivement comme les deux côtés* GD, DF, *& la diagonale* ED, *du parallélogramme fait dans l'angle des directions de deux, & ayant ſon angle* E, *dans la direction de la troiſieme* CD, ou bien chacune de ces puiſſances eſt proportionnelle au ſinus de l'an-

Fig. 124.

(*a*) M. Varignon (Pierre) prit naiſſance à Caen, en 1654. La vue d'un Euclide qu'il rencontra par hazard dans le tems qu'il étudioit en Philoſophie, le tourna du côté de la Géométrie. Il paſſa delà à l'analyſe de Deſcartes, qui le confirma dans ſon goût pour les Mathématiques, & dans le dégoût qu'il avoit conçu pour la Philoſophie de ſon tems. Il vint en 1686 à Paris, avec l'Abbé de Saint-Pierre, qui lui fit une penſion de trois cens livres. Son *projet d'une nouvelle Méchanique*, qu'il publia en 1687, lui valut l'entrée de l'Académie, & une Chaire au Collége Mazarin. M. Varignon fut des premiers qui goûterent la nouvelle Géométrie, appellée *des Infiniment Petits*, & il la défendit avec grand ſuccès contre Rolle & ſes autres ennemis. Ce ſçavant Mathématicien mourut au mois de Décembre 1722. Outre les ouvrages & les écrits dont nous parlons dans cet article, on a de lui une *nouvelle explication de la peſanteur*, (Paris 1695.) qui ne me paroît guere heureuſe, & des *notes* poſthumes *ſur l'analyſe des Infiniment Petits de M. de* l'Hôpital. (Paris. 1724. in-4°.) Voy. ſon éloge dans l'hiſtoire de l'Académie de l'année 1723.

gle formé par les directions des deux autres. M. *Varignon* employe avec ſuccès ce principe réellement fécond & commode, pour réſoudre un grand nombre de queſtions méchaniques d'une maniere nouvelle. Au reſte, nous avons déja obſervé, & la juſtice l'exigeoit, que ce principe avoit été mieux qu'entrevu par *Stevin*, Méchanicien digne d'une plus grande célébrité, & qui écrivoit, près d'un ſiecle auparavant, une Méchanique nouvelle très-eſtimable, & fort ſupérieure à ce qu'on pouvoit attendre de ſon tems. Il faut encore remarquer que le principe ci-deſſus n'eſt proprement que celui de la compoſition du mouvement connu dès long-tems, & étendu à l'équilibre. Car le mouvement actuel ceſſant, dégénere en une ſimple preſſion, & il eſt évident que ce qui eſt vrai du mouvement, doit l'être auſſi de la preſſion. Quand on conſidere ces choſes, il n'y a plus lieu d'être ſurpris que le Pere *Lami* ait eu vers le même tems des idées aſſez ſemblables; (*a*) & les ſoupçons de plagiat qu'éleva contre lui un Journaliſte, peuvent n'être pas fondés. Quoi qu'il en ſoit, c'eſt avec juſtice que les Méchaniciens venus après M. *Varignon*, ſemblent lui avoir déféré la principale part à l'invention de ce principe, en l'appellant par un accord preſque univerſel, le principe de M. *Varignon*. Quant à la *nouvelle Méchanique* annoncée par le Livre dont on a parlé ci-deſſus, elle n'a vu le jour qu'après ſa mort, en 1725, (2. vol. in-4°). On pourroit ſeulement y trouver à redire le défaut ordinaire à ſon Auteur, ſçavoir d'être intariſſable ſur les exemples, & d'envier en quelque ſorte à ſes lecteurs le plaiſir de trouver un ſeul cas qui lui ait échappé.

MM. de la *Hire* & *Amontons* ſont auſſi du nombre de ceux qui ont utilement ſervi la Méchanique vers la fin du ſiecle paſſé. On leur doit à l'un & à l'autre des obſervations importantes ſur la force des hommes & des chevaux, le tems qu'ils peuvent travailler, la vîteſſe avec laquelle ils peuvent ſe mouvoir ſuivant l'effort qu'ils ont à exercer, (*b*) & diverſes autres obſervations ſemblables, élémens néceſſaires pour juger de la poſſibilité & de l'effet d'une machine. On a outre cela de M. de la *Hire* un *Traité de Méchanique* eſtimé, (*c*) &

(*a*) *Voyez* la Lettre du P. Lami à M. Dieulamant. Journal des Sçavans 1687.
(*b*) Mem. de l'Académie 1699 & 1705.
(*c*) Paris. 1695, in-4°.

qui a été inſéré dans le Recueil des ouvrages autrefois adoptés par l'Académie. On y remarque une démonſtration neuve & très-ingénieuſe de la propoſition fondamentale de la Statique; & il a ſur les autres Livres de Méchanique l'avantage de traiter quantité de queſtions de ce genre intéreſſantes & profondes. Remarquons cependant, en faveur de quelques lecteurs, qu'un peu trop de précipitation a quelquefois induit M. de la *Hire* en erreur. On en a un exemple dans la démonſtration de l'iſochroniſme de la cycloïde qu'on lit dans ce Livre; elle n'eſt qu'un vrai paralogiſme, de même que la ſolution du problême de la courbe d'un rayon de lumiere traverſant un milieu inégalement denſe, qu'il a donnée dans les Mémoires de l'Académie de 1702.

M. *Amontons* (*a*) a le premier jetté quelque jour ſur une théorie très-importante de la Méchanique, ſçavoir celle des frottemens; il nous faut par cette raiſon en donner ici une idée abrégée.

Le frottement eſt une réſiſtance occaſionnée par les aſpérités des ſurfaces qui ſe meuvent étant preſſées les unes contre les autres. Concevons un plan horizontal ſur lequel ſoit appliquée une ſurface chargée d'un poids. Dans la rigoureuſe théorie, la plus légere force devroit être capable de l'entraîner, & cela arriveroit ſans doute, ſi ces deux ſurfaces étoient telles qu'on les conçoit dans l'abſtraction géométrique. Mais comme elles ſont hériſſées d'inégalités, les éminences de l'une entrant dans les cavités de l'autre, la puiſſance qui tire ne ſçauroit entraîner le poids ou la ſurface qui le ſoutient, qu'en la ſoulevant un peu: or pour cela il faut une force proportionnée à la quantité du ſoulevement. Voilà la réſiſtance qui naît du frottement.

On voit par là que ſi l'on connoiſſoit la nature & la forme des inégalités dont nous venons de parler, on pourroit calculer le frottement *à priori*. Mais comme l'on ne ſçauroit raiſonnablement aſpirer à cette connoiſſance, il a fallu prendre une autre route, & conſulter l'expérience qui ſeule peut ſervir de flambeau dans des cas ſemblables.

C'eſt cette méthode qu'employa M. *Amontons*, & par ſon

(*a*) Né à Paris en 1663, mort en 1705. Nous renvoyons à l'Hiſtoire de l'Académie, le lecteur curieux de plus grands détails ſur ſa vie & ſes inventions.

moyen,

moyen, il crut pouvoir établir ces deux propoſitions fondamentales (*a*). L'une eſt que la réſiſtance occaſionnée par le frottement, eſt à peu près le tiers de la force qui applique les ſurfaces l'une contre l'autre : la ſeconde, qui eſt une eſpece de paradoxe, eſt que le frottement ne ſuit pas, comme on ſeroit tenté de le croire, le rapport des ſurfaces, mais ſeulement des preſſions. D'après ces principes, M. *Amontons* donna des regles pour calculer la quantité du frottement, & l'augmentation de puiſſance néceſſaire pour le ſurmonter.

Après M. *Amontons*, la théorie du frottement a été principalement cultivée par M. *Parent*, qui y ajouta quelques conſidérations ingénieuſes (*b*). Il a auſſi traité cette théorie dans les Mémoires de l'Académie, ſous le titre de *nouvelle Statique ſans frottement & avec frottement*, piece que les lecteurs peuvent conſulter. M. de *Camus*, Gentilhomme Lorrain, a examiné la même matiere, dans ſon ingénieux Traité *des forces mouvantes*. Il eſt naturel de s'attendre que les ſçavans MM. *Muſchembroeck* & *Deſaguliers*, n'ont pas oublié une partie de la Méchanique ſi intéreſſante, & de ſa nature ſi ſubordonnée à l'expérience. Il réſulte de celles qu'ils ont faites, que le rapport du frottement à la preſſion eſt différent, ſuivant les différentes eſpeces de matieres qui frottent les unes ſur les autres, & qu'il varie du ſixieme au tiers, de ſorte que le rapport établi par M. *Amontons*, eſt trop grand. Mais il n'y a pas d'inconvénient à cela ; car il vaut toujours beaucoup mieux donner trop d'avantage à la puiſſance, que de lui en donner trop peu. M. *Muſchembroeck* n'adopte point non plus la propoſition avancée par M. *Amontons* ; ſçavoir, que le frottement n'augmente pas, quoiqu'on augmente les ſurfaces, pourvu que la preſſion ſoit la même. On voit par les expériences de ce ſçavant Profeſſeur de Leyde, que le frottement a augmenté quand les ſurfaces ont été plus grandes, mais à la vérité beaucoup moins que dans le rapport de ces ſurfaces : cela eſt même néceſſaire, à le conſidérer bien attentivement ; car puiſque le frottement uſe peu à peu les ſurfaces qui ſe frottent, il y a non ſeulement un ſoulevement de l'une ſur l'autre, mais il faut que quelques-unes de leurs aſpérités, dont l'engrainement produit

(*a*) Mémoires de l'Académie 1699.
(*b*) Hiſtoire de l'Académie, 1700, 1704.

le frottement, ſoient briſées dans le mouvement. Ainſi, comme il y en aura davantage de cette derniere eſpece dans une grande ſurface, il y aura auſſi un frottement plus conſidérable. Au reſte, nous ne pouvons diſſimuler qu'il y a encore ſur tout ceci bien de l'incertitude, & même il eſt fort à craindre, vu la nature de la queſtion, que cette incertitude ne ſoit jamais levée, comme il importeroit pour la perfection de la Méchanique.

Il y a dans les machines une autre réſiſtance au mouvement, qui naît de la roideur des cordes. M. *Amontons* eſt encore le premier qui l'ait examinée (*a*). Il a fait dans cette vue des expériences fort bien imaginées. Mais nous renvoyons à ſon Mémoire, ou, ce qui vaut mieux, au cours de Phyſique du Docteur *Deſaguliers*, qui a montré que cet Académicien s'eſt trompé en quelques points, & qui a réformé ſon erreur. M. *Sauveur* a ajouté à cette théorie une remarque ingénieuſe (*b*). Elle concerne l'effet remarquable du frottement d'une corde qui entoure un cylindre. Il montre qu'en ſuppoſant cette corde infiniment flexible, la réſiſtance qui naît de ſon application à la ſurface du cylindre, croît en proportion géométrique, tandis que la circonférence embraſſée par la corde, croît arithmétiquement; de ſorte que ſi un quart de tour équivaut à un effort d'une livre, & un demi-tour à celui de deux, les trois quarts produiront une réſiſtance de quatre livres, un tour entier celle de huit, un tour un quart une de ſeize, enfin deux tours complets produiront une réſiſtance de cent vingt-huit, & ainſi de ſuite. Ceci ſert à rendre raiſon d'une manœuvre familiere aux gens de mer pour lever l'ancre. On ſe contente de faire faire au cable quelques tours ſur l'arbre ou l'aiſſieu du cabeſtan, & de faire tenir le bout oppoſé à celui auquel tient l'ancre, par quelques hommes tirant avec une force médiocre. Cela ſuffit pour appliquer le cable avec tant de force à l'arbre du cabeſtan, qu'il ne ſçauroit gliſſer deſſus, & le cabeſtan en tournant entraîne le poids, ou ſurmonte l'effort de l'ancre tout de même que ſi le bout du cable étoit fixement attaché.

Ce ſeroit ici le lieu de parler des tentatives que fit vers le

(*a*) Mémoires de l'Académie, 1699.
(*b*) Ibid. 1703.

même tems le Chevalier *Renau*, pour fonder une théorie de la *manœuvre des vaiſſeaux*. Mais les ſuccès n'ayant pas répondu à ſes efforts, & cette théorie n'ayant été élevée ſur ſes vrais principes que dans ce ſiecle, nous remettrons à en parler juſqu'à la partie ſuivante de cet ouvrage. C'eſt-là que nous rendrons compte de la conteſtation qui régna d'abord ſur ce ſujet entre *Huyghens* & le Chevalier *Renau*, puis entre le même Chevalier & le célebre Jean *Bernoulli*.

Je n'ai plus à parler que de deux Méchaniciens, qui mettront fin à cet article. Ils ſont tous les deux Italiens. L'un eſt Jean-Alphonſe *Borelli* (*a*), fort connu par ſes divers ouvrages mathématiques, & ſurtout par celui *de motu animalium*. Ce Livre eut un grand ſuccès, & en effet ſon Auteur y déploye beaucoup d'art & de ſagacité dans l'examen qu'il fait du méchaniſme du corps humain, & dans les conjectures qu'il forme ſur les vues différentes du créateur dans l'arrangement & le rapport des parties de cette merveilleuſe machine. Un précis de quelques endroits choiſis de ce Livre ſeroit extrêmement curieux; mais, à notre grand regret, nous ſommes contraints de le ſupprimer. Cet ouvrage au reſte n'eſt pas parfaitement exempt de fautes: quoique habile homme, *Borelli* a quelquefois contredit certains principes de méchanique qu'il croyoit ne pouvoir concilier avec les faits (*b*), & cela l'a entraîné dans quelques erreurs. C'eſt pourquoi la Méchanique & la Phyſiologie même, ayant acquis depuis lui de nouvelles lumieres, ce ſeroit un ouvrage utile, & digne de quelque Méchanicien verſé dans l'Anatomie, que de reprendre le travail de *Borelli*. Celui qui en formeroit l'entrepriſe, trouveroit des vues utiles dans

(*a*) Borelli étoit de Meſſine, où il naquit le 28 Janvier 1608. Il profeſſa long-tems les Mathématiques, d'abord à Meſſine, enſuite à Piſe, où l'appella le grand Duc de Toſcane. Vers la fin de ſes jours, il ſe retira à Rome, dans la Maiſon des Clercs réguliers de Saint Pantaléon, dits *des Ecoles Pies*, chez leſquels il mourut le dernier Décembre 1679. Borelli étoit très-verſé dans toutes les parties des Mathématiques, & ſurtout dans la Géométrie ancienne. Les Géometres lui ſont redevables des trois derniers Livres des Coniques d'Appollonius (Voyez l'Hiſtoire de cette découverte dans l'article d'Appollonius, p. 1, l. 111). Voici ſes principaux ouvrages: *Eucl. reſt.* Piſ. 1658. *Appoll. & Arch. op. compend.* Ibid. 1658. *Appoll. conic. lib. V, VI & VII, ex Arab. verſi cum notis.* Rom. 1661. in-fol. *Theoriæ Medic. Syderum ex cauſis phyſicis deductæ.* 1666. in-4°. *De vi percuſſionis.* 1667. *De mot. nat. à gravit. pendentibus.* 1667. *De motu anim.* Rom. 1681, 1682.

(*b*) *Voyez* le projet d'une nouv. Méchan. de M. Varignon.

les écrits de M. *Parent*, (*a*) qui a redreſſé & perfectionné en quelques points la théorie de *Borelli*. Il lui faudroit auſſi conſulter l'excellente diſſertation de M. Jean *Bernoulli*, ſur le mouvement muſculaire.

M. Dominique *Guglielmini* (*b*) s'eſt rendu célebre par des travaux d'un autre genre. L'extrême importance dont eſt, en Italie, la conduite des eaux & la direction des fleuves lui fit tourner ſes vues de ce côté ; & ſes réflexions ſur ce ſujet ont donné naiſſance à deux ouvrages juſtement réputés pour fondamentaux dans ces matieres. L'un eſt ſon Traité *de aquarum fluentium menſurâ*, où il traite ſçavamment tout ce qui a rapport à l'écoulement des eaux. L'habileté dont il fit preuve par cet ouvrage, lui valut, outre l'honneur d'être chargé de pluſieurs commiſſions importantes, une diſtinction flateuſe de la part de ſa patrie. Boulogne créa en ſa faveur une nouvelle Chaire, qu'on appella d'Hydrométrie. Ce fut pour lui un nouvel engagement de continuer ſes recherches dans ce genre, & il publia en 1697 la premiere partie de ſon célebre Livre *Della natura de' fiumi*, dont la ſeconde parut en 1712, après ſa mort. Cet ouvrage, plus original que le premier, eſt rempli d'une multitude de vues nouvelles, non moins ingénieuſes qu'utiles ; il eſt digne enfin d'être médité par tous ceux qui, ſoit par goût, ou par l'obligation de leurs places, cultivent cette partie de l'Hydraulique. Nous tâcherons de juſtifier cet éloge dans la partie ſuivante de cette hiſtoire, par un précis de ces vues intéreſſantes.

(*a*) Recherch. Mathématiq. Paris. 1708, 3. vol.

(*b*) M. Guglielmini naquit à Boulogne le 27 Septembre 1655 ; il étudia en même tems les Mathématiques ſous Montanari, & la Médecine ſous le fameux Malpighi. En 1686, il fut fait Profeſſeur de Mathématiques dans l'Univerſité de Bologne, d'où il paſſa à celle de Padoue. Peu d'années avant ſa mort, la Médecine qui l'avoit partagé dans ſa jeuneſſe, ſe le revendiqua entiérement, & il changea ſa Chaire de Mathématique pour une de Médecine. Il remplit cette derniere juſqu'à ſa mort arrivée en 1710. Il fut aſſocié étranger de l'Académie Royale des Sciences, & l'on lit ſon éloge dans les Mémoires de 1710, auxquels nous renvoyons. Ses Œuvres hydroſtatiques ont été recueillies en deux vol. in-4°.

Fin du Livre VIIe de la IVe Partie.

HISTOIRE
DES
MATHÉMATIQUES.

QUATRIEME PARTIE,

Comprenant l'hiſtoire des Mathématiques pendant le dix-ſeptieme ſiecle.

LIVRE HUITIEME,

Où l'on rend compte des progrès de l'Aſtronomie durant la derniere moitié de ce ſiecle.

SOMMAIRE.

I. *Découvertes aſtronomiques de M. Huyghens. Il démêle la cauſe des apparences de Saturne, & les explique par un anneau dont il montre que cette planete eſt environnée. Il apperçoit un des ſatellites de Saturne. Les quatre autres ſont découverts dans la ſuite par M. Caſſini. Inventions diverſes dont M. Huyghens enrichit l'Aſtronomie, entr'autres celles de l'application du pendule à l'horloge, du Micrometre, &c.* II. *Fondation de la Société Royale de Londres, & de l'Académie des Sciences de Paris;*

des observatoires de Paris & de Greenwich. III. *M. Cassini appellé en France. Ses découvertes diverses sur la theorie du Soleil, sur celle des Satellites de Jupiter*, &c. IV. *Premieres découvertes dûes aux travaux de l'Académie Royale des Sciences; le Micrometre perfectionné par M. Auzout. Le Téleſcope appliqué au quart de cercle. Ces inventions ſont revendiquées par l'Angleterre, & ſur quel fondement.* V. *La terre méſurée avec exactitude, par M. Picard. Son voyage à Uranibourg.* VI. *Voyage de M. Richer à Cayenne; quel en eſt l'objet & le réſultat. Obſervation ſinguliere qu'il y fait, & conſéquence qu'en tire M. Huyghens, ſçavoir l'applatiſſement de la terre par les pôles.* VII. *La propagation ſucceſſive de la lumiere & ſa vîteſſe découvertes par M. Roemer.* VIII. *Changemens & corrections nombreuſes que l'Académie Royale des Sciences fait à la Géographie, d'après les obſervations.* IX. *De quelques Aſtronomes de la Société Royale de Londres; entr'autres de Meſſieurs Hooke & Wren.* X. *De M. Flamſtead.* XI. *De M. Hallei. Il va à l'Iſle de Sainte Hélene, obſerver les étoiles auſtrales. Il y obſerve auſſi le paſſage de Mercure ſous le Soleil. Méthode qu'il propoſe pour déterminer la parallaxe du Soleil. Ses découvertes ſur la théorie de la Lune. Ses Tables Aſtronomiques.* XII. *M. Newton publie en 1687, ſon fameux Livre des principes Mathématiques de la Philoſophie naturelle. Du principe de la gravitation univerſelle, & de ſon antiquité. De quelle maniere M. Newton l'établit, & quel uſage il en fait. Expoſition & développement de quelques-unes des vérités contenues dans ſon ouvrage.* XIII. *De la théorie des Cometes en particulier. Hiſtoire ſuccincte des penſées des Philoſophes ſur leur ſujet, juſqu'à l'année 1682. Elles ſont enfin reconnues pour des planetes qui ſe meuvent ſur des orbites très-excentriques, & ſenſiblement paraboliques. Quel eſt le premier Auteur de cette découverte, que M. Newton établit d'une maniere lumineuſe dans ſes principes. Confirmation qu'a reçu la théorie de M. Newton des travaux des Aſtronomes poſtérieurs.* XIV. *De divers Aſtronomes dont on n'a point parlé, entr'autres de MM. Hevelius, Mouton, Kirch*, &c.

I.

Découvertes aſtronomiques de M. Huyghens.

GALILÉE, qui le premier tourna un Téleſcope vers Saturne, fut bien étonné de l'appercevoir accompagné de deux globes contigus, & ſans mouvement. Mais quelle fut ſa ſurpriſe lorſque ces prétendus Satellites, qu'il avoit poétiquement comparés à des domeſtiques donnés au vieux Saturne, pour l'aider dans ſa décrépitude, l'abandonnerent bruſquement. Il oſa, à la vérité, prévoir leur retour, & en effet ils reparurent quelques mois après; mais ils ſe préſenterent les années ſuivantes, ſous tant de formes différentes, qu'ils pouſſerent à bout ſes conjectures & celles des Aſtronomes qui le ſuivirent.

Près de quarante ans s'écoulerent, comme dit quelque part M. *Caſſini*, dans l'admiration de ce Protée céleſte, ſans que perſonne réuſsît à le fixer. *Hevelius* lui-même, avec ſes grands Téleſcopes, ne parvint qu'à le voir un peu mieux que ſes prédéceſſeurs, & à fixer aſſez bien le retour périodique des mêmes phaſes: (1) au reſte il ne fut guere plus éclairé ſur leur cauſe. Nous laiſſons à l'hiſtorien à venir de l'Aſtronomie en particulier, le ſoin de faire le récit des diverſes conjectures qu'on propoſa ſur ce ſujet. Les ſeules qui méritent quelque mention, ſont celles de MM. *Roberval* & *Caſſini*. Le premier ſoupçonnoit que le phénomene dont nous parlons, étoit cauſé par un amas de vapeurs qui, s'élevant ſous l'équateur de Saturne, nous réfléchiſſoient ainſi la lumiere : idée aſſez heureuſe, & qui approche aſſez de la vérité pour donner lieu de croire qu'elle a pu aider M. *Huyghens* dans ſa découverte. Quant à M. *Caſſini*, il avoit eu la penſée que Saturne étoit environné d'un eſſain de Satellites fort voiſins les uns des autres, qui tournant autour de lui, produiſoient ces bizarres apparences. Mais ſi tôt qu'il connut l'explication de M. *Huyghens*, il eut la modeſtie & la bonne foi d'abandonner la ſienne. Les hommes de génie ſont ordinairement les premiers, ou à découvrir la vérité, ou à l'embraſſer lorſqu'elle eſt préſentée par d'autres.

(a) *De Saturni nativâ facie.* 1649. Ged. in-fol.

M. *Huyghens* eut enfin l'avantage de découvrir la cauſe des bizarres phénomenes dont Saturne fatiguoit depuis ſi long-tems les Aſtronomes. Aidé de Téleſcopes qui étoient ſon ouvrage, & qui, ſans être d'une longueur extrême, ſurpaſſoient de beaucoup tous ceux qu'on avoit encore faits, il vit Saturne avec beaucoup plus de diſtinction que tous les Aſtronomes qui l'avoient précédé. Ce qui avoit paru à *Galilée* deux globes iſolés, lui parut tenir à cette planete par une longue bande de lumiere. A meſure que Saturne paſſa dans d'autres poſitions à l'égard du Soleil & de la Terre, il vit ſes longues anſes qui n'étoient que des traits de lumiere, s'élargir & prendre la forme des extrêmités d'une ellipſe fort alongée. Delà Saturne pourſuivant ſon chemin, cette ellipſe lui parut continuer à s'élargir, & prendre l'apparence qu'auroit l'intervalle entre deux cercles concentriques vûs obliquement. Ces phénomenes lui apprirent, ou le confirmerent dans l'idée qu'ils étoient produits par un corps plat & circulaire, ſemblable à un anneau. Ce fut en 1655, que M. *Huyghens* fit cette découverte. Il la publia l'année ſuivante ſous des lettres tranſpoſées, qui ſignifioient, ſuivant l'interprétation qu'il en donna dans la ſuite, *Saturnus cingitur annulo tenui, plano, nuſquàm coherente, & ad eclipticam inclinato.*

En effet, ſi l'on ſuppoſe Saturne environné d'un pareil anneau, incliné au plan de ſon orbite, & toujours parallele à lui-même, on rend parfaitement raiſon de toutes les apparences que préſente ſucceſſivement cette planete. Lorſque le Soleil & la Terre étant du même côté, celle-ci ſera élevée le plus qu'il ſe peut ſur le plan de cet anneau, on aura la phaſe où ſes anſes paroiſſent les plus ouvertes. Cela arrive lorſque Saturne eſt vers le 20e degré & demi des Gémeaux & du Sagittaire. Delà Saturne continuant ſon cours, le plan de ſon anneau prolongé paſſera plus près de la terre: il en ſera vu plus obliquement, & ſes anſes ſe rétreciront. Quelque tems après, il y aura une ſituation de Saturne, où le plan de l'anneau rencontrera la Terre ou le Soleil: dans l'un & l'autre cas, il diſparoîtra aux yeux du ſpectateur terreſtre, parce que ſon épaiſſeur étant peu conſidérable, & étant la ſeule partie qui ſe préſente, ou qui eſt éclairée du Soleil, elle ne renverra pas aſſez de lumiere pour frapper nos organes d'auſſi loin. Ainſi

Saturne

Saturne paroîtra parfaitement rond. C'eſt l'aſpect qu'il préſente lorſqu'il eſt vers le vingtieme degré & demi des Poiſſons & de la Vierge. M. *Huyghens* a obſervé qu'alors le diſque paroît traverſé d'un trait de lumiere moins vive, ce qui donne lieu de conjecturer que l'anneau eſt moins propre dans ſon épaiſſeur à réfléchir la lumiere que dans ſon plan, ou que la planete elle-même. Il arrivera encore quelquefois que le plan de l'anneau prolongé, paſſant entre la Terre & le Soleil, cet aſtre en éclairera un côté, tandis que ce ſera l'autre qui ſe préſentera à l'obſervateur terreſtre. Ce ſera une nouvelle cauſe d'occultation, qui pourra occaſionner quelques irrégularités apparentes, mais qu'il ſera toujours facile de prévoir & d'expliquer, en faiſant attention aux circonſtances de la poſition du Soleil & de celle de la terre. Tel eſt le précis de l'explication que M. *Huyghens* donne des phénomenes de Saturne, & qu'il établit au long dans ſon *Syſtema Saturnium :* l'expérience de près d'un ſiecle a montré qu'elle étoit juſte, & même tous les Aſtronomes de ſon tems, frappés de ſa ſimplicité & de ſa juſteſſe, l'adopterent comme par acclamation. Je ne lui connois de contradicteurs qu'Euſtache *Divini*, ou plutôt le P. *Fabri*, qui ſous ce nom publia contre M. *Huyghens*, un écrit aſſez aigre, où il lui conteſtoit ſes obſervations, & propoſoit un autre ſyſtême d'explications (*a*) ; *Huyghens* répliqua, & montra facilement que ce ſyſtême étoit, pour ne rien dire de plus, peu raiſonnable (*b*). Mais ce Pere, d'ailleurs célebre, a mérité ſon pardon de la poſtérité, en adoptant dans la ſuite le ſentiment de M. *Huyghens.* On a ſeulement vu en 1684, un Aſtronome d'Avignon (M. *Gallet*), homme aſſez connu, & même avantageuſement, par quelques obſervations & divers écrits (*c*), prétendre que toutes les apparences de Saturne, auſſi bien que celles de Jupiter n'étoient que des illuſions occaſionnées par les réfractions des verres. Cette idée ſinguliere n'a pas même eu les honneurs d'une réfutation.

L'aſſiduité de M. *Huyghens* à obſerver Saturne, lui valut une autre découverte, ſçavoir celle d'un des Satellites de cette

(*a*) *Brevis annot. in ſyſtema Saturnium C. Hugenii.* Rom. 1669.
(*b*) *Brevis aſſertio ſyſt. ſui.* Hag. 1661.
(*c*) *Aurora Lavenica, ſeu tab. Sol.*

planete. Je dis d'un des Satellites ; car le lecteur n'ignore pas, ſans doute, que Saturne en a cinq. Celui de M. *Huyghens* eſt le quatrieme, en commençant à les compter du plus voiſin. Il commença à l'appercevoir dans le mois de Mars de l'année 1655, & il publia l'année ſuivante ſa découverte par un petit écrit particulier. Il s'eſt davantage étendu depuis ſur ce ſujet dans ſon *Syſtema Saturnium*, dont la premiere partie eſt occupée à faire l'hiſtoire de ſes obſervations. Il y fixe la révolution de cette petite planete à 15 jours, 22 heures, 39 minutes: les obſervations poſtérieures ont appris qu'elle eſt de 15 jours, 22 heures, 41 minutes.

M. *Huyghens* comptoit alors que ce Satellite de Saturne étoit unique ; quelques bons que fuſſent ſes Téleſcopes, il n'avoit pu appercevoir que celui-là. Il ſe perſuada même qu'il ne devoit pas y en avoir davantage. Car tenant encore un peu aux myſtérieuſes propriétés des nombres, il diſoit que les planetes principales n'étant qu'au nombre de ſix, il ne pouvoit pas y avoir plus de ſix planetes ſecondaires ; de ſorte que celle qu'il venoit de découvrir étant la 6e, notre ſyſtême ſe trouvoit complet. Il ſe trompoit néanmoins, & cette découverte qu'il croyoit achevée, n'étoit encore qu'ébauchée. C'eſt le célebre M. *Caſſini*, qui y a mis la derniere main. Il apperçut en 1671, un nouveau Satellite, qui fait ſa révolution en 79 jours, 22 heures, 4 minutes ; c'eſt le cinquieme ou le plus extérieur de tous. Le troiſieme fut découvert en 1672 ; celui-ci ne demeure que 4 jours, 13 heures, 47 minutes. On le nomma alors le premier ; car on crut qu'il n'y en avoit pas davantage ; mais les excellentes lunettes de *Campani*, ont ſervi à en découvrir encore deux autres, l'un qui fait ſa révolution en 2 jours, 17 heures, 41 minutes, & l'autre en 1 jour, 21 heures, 19 minutes. Depuis ce tems, avec quelque inſtrument qu'on ait obſervé Saturne, on ne lui a point apperçu de nouveau Satellite. Mais ç'en eſt bien aſſez : les Saturniens, s'il eſt permis de s'égayer ici, ne ſont pas à plaindre avec leur anneau & leurs cinq Lunes. A la vérité, ils ſont ſi éloignés de la ſource de la lumiere, que nous ſerions injuſtes de leur envier ce petit dédommagement. Au reſte, les Satellites dont nous venons de raconter la découverte, n'ont probablement rien de commun avec ceux que le P. *Rheita*, avoit déja donnés à Saturne dès

l'année 1643. Ce bon Pere, auteur d'un Livre d'Aſtronomie, intitulé : *Oculus Enoch & Eliæ, ſeu radius Sidereo-myſticus*, avoit auſſi prétendu augmenter de cinq le nombre des Satellites de Jupiter. Mais il avoit certainement pris pour des Satellites de Jupiter des fixes voiſines. Il en eſt probablement de même du Satellite qu'il donna à Mars en 1640. Revenons à Saturne.

Depuis qu'on a beaucoup perfectionné les Téleſcopes, ou qu'on en a conſtruit à réflection, on a remarqué dans Saturne diverſes particularités qui avoient échappé à M. *Huyghens*; on a vu ſur ſon diſque diverſes bandes obſcures & paralleles à celle que forme ſon anneau. On a même vu l'ombre de Saturne ſur cet anneau, mais rien n'a pu faire connoître ſi cette planete a un mouvement autour de ſon axe. Cela eſt cependant probable, du moins à en juger par analogie. On peut auſſi conjecturer que ſon anneau a un mouvement ſemblable; car à moins de le ſuppoſer tout d'une piece, & d'une matiere auſſi dure que le rocher, il n'y a qu'un mouvement de rotation qui puiſſe l'empêcher de retomber par parties ſur le globe de Saturne.

Ce n'eſt pas ſeulement l'Aſtronomie théorique qui a des obligations à M. *Huyghens :* deux inventions d'Aſtronomie pratique, le rendront encore à jamais mémorable dans l'hiſtoire de cette ſcience. Car c'eſt à lui qu'elle doit le moyen exact dont nous ſommes aujourd'hui en poſſeſſion pour meſurer le tems, & la premiere ébauche du Micrometre. Le premier de ces objets nous a déja ſuffiſamment occupés dans le Livre précédent : nous remettons à parler du ſecond dans un des articles ſuivans, afin d'y réunir tout ce qu'il y a à dire ſur le le dernier de ces inſtrumens.

Perſonne n'a porté plus loin que M. *Huyghens*, l'art de travailler les verres de Téleſcopes. Perſuadé avec raiſon que le progrès des découvertes céleſtes ſuivroient ceux de cet art, il s'attacha dès ſa jeuneſſe à le perfectionner (*a*); & en effet, il parvint à ſe procurer des verres bien ſupérieurs, ſoit pour la longueur du foyer, ſoit pour l'excellence, à tous ceux qui étoient ſortis juſqu'alors des mains des meilleurs Artiſtes en ce genre. Ce fut avec un Téleſcope de 23 pieds qu'il vit ce

(*a*) Voyez ſon *Comm. de poliendis vitris.* Op. Poſth. T. II.

que, ni Euſtache *Divini* avec ſes Téleſcopes renommés, ni *Hevelius* avec le ſien de 140 pieds, n'avoient pu appercevoir aſſez diſtinctement. Dans la ſuite, il en fit de plus de 100 pieds de foyer. La Société Royale en poſſede un de 123 pieds, & un autre de 120, dont M. *Huyghens* lui fit préſent lors d'un de ſes voyages en Angleterre.

Mais ce n'eſt pas aſſez que d'avoir des objectifs d'une portée auſſi conſidérable. Les Aſtronomes qui ont eu à manier de longs Téleſcopes, ne ſçavent que trop à combien d'inconvéniens ils ſont ſujets. Leur poids, la fléxion des tubes, la difficulté de les diriger, ſont autant d'obſtacles à leur uſage, dès qu'ils paſſent les dimenſions ordinaires. Auſſi cette difficulté d'Aſtronomie pratique, avoit-elle déja occupé bien des Aſtronomes. Rien n'eſt plus heureux au premier abord, que la ſolution qu'en avoit donné un Aſtronome de Toulouſe, (M. *Boffat*) (*a*) : il propoſoit de laiſſer le tube du Téleſcope, immobile, & de lui préſenter l'aſtre par le moyen d'un miroir mobile. Malheureuſement l'épreuve n'a pas répondu à la théorie ; l'expérience a montré que les moindres défectuoſités du miroir troublent tellement l'image, qu'on ne peut attendre delà aucun ſuccès. Quelques autres Aſtronomes, comme MM. *Comiers* (*b*) & *Auzout* (*c*), avoient propoſé de ſupprimer les tuyaux qui ne ſont pas de l'eſſence du Téleſcope ; & ils avoient imaginé des moyens pour diriger l'objectif à l'objet, & ſe mettre avec l'oculaire dans l'éloignement & la ſituation convenables. C'eſt à ce dernier parti que s'en tint M. *Huyghens* ; & il s'attacha à le perfectionner dans ſon *Aſtroſcopia compendiaria à tubi molimine liberata*, qu'il publia en 1684. Cette méthode de M. *Huyghens*, a été miſe en pratique avec aſſez de ſuccès, ſoit par lui-même, ſoit par divers autres Aſtronomes, comme MM. *Pound* & *Bradlei*, lorſqu'ils ſe ſervirent de ſon verre de 123 pieds, pour obſerver Saturne ; ce fut auſſi de cette maniere que s'y prit M. *Bianchini*, lorſqu'il ſe mit à obſerver Venus avec des objectifs de *Campani*, de quelques centaines de palmes. Mais nonobſtant ces ſuffrages, on ne peut diſconvenir, que c'eſt encore quelque choſe de

(*a*) Journal des Sçavans, 1681.
(*b*) Diſcours ſur les Cometes. *Par. 1666, à la fin.*
(*c*) Lett. à l'Abbé Charles, &c.

fort embarraſſant, & le Téleſcope à réflection eſt venu fort à propos nous affranchir de la néceſſité de recourir à ces moyens.

M. *Huyghens* étoit d'un pays trop intéreſſé à la ſolution du problême des longitudes, pour ne pas tourner auſſi de ce côté quelques-unes de ſes vûes. C'étoit en partie l'objet qu'il ſe propoſoit en imaginant ſon horloge à pendule : car le problême dépend, comme l'on ſçait, preſque uniquement de trouver une meſure exacte du tems en mer. Les premiers eſſais furent d'abord aſſez favorables à l'invention de M. *Huyghens*, on en lit le récit dans les *Tranſ. Phil.* de l'année 1665 ; mais les obſervations poſtérieures ont appris, que les moyens qu'il propoſe pour mettre le pendule à l'abri des inégalités occaſionnées par les mouvemens du navire (*a*), ne ſuffiſent pas. M. *Huyghens* en a donc cherché d'autres, & il croyoit à la fin de ſa vie les avoir découverts. Il dit dans les Actes de Léipſick de l'année 1693, qu'il a trouvé une courbe qui ſervira à concilier à ſes pendules le mouvement le plus égal, ſans qu'il puiſſe être troublé par ceux du navire, & il donne l'équation de cette courbe en lettres tranſpoſées. Mais la mort, en l'enlevant, a auſſi enlevé ſon ſecret.

Je ne dis qu'un mot de deux ouvrages poſthumes de M. *Huyghens* : l'un eſt ſon *Authomatum Planetarium*, ou la deſcription d'une machine propre à repréſenter les mouvemens & les périodes des planetes. On y remarque avec plaiſir la maniere ingénieuſe dont M. *Huyghens* parvient, malgré l'incommenſurabilité de ces périodes, à repréſenter leur rapport. Il le fait avec tant d'exactitude, qu'après trente révolutions de la terre, Saturne, par exemple, n'eſt trop avancé dans ſon cercle que d'environ deux minutes & demie. Il ſe ſert pour cela de cette eſpece de fractions appellées *continues*, & dont on a parlé à l'occaſion de la quadrature du cercle de Milord *Brouncker*. Les Anglois qui ont exécuté ces dernieres années pluſieurs de ces inſtrumens, leur ont donné le nom d'*Orreryes*, à cauſe que le premier qui ait été fait chez eux, étoit deſtiné au Comte d'*Orrery*. On les verra probablement quelque jour s'autoriſer de ce nom pour en revendiquer l'invention.

(*a*) *Horol. Oſcill.*

que, ni Euſtache *Divini* avec ſes Téleſcopes renommés, ni *Hevelius* avec le ſien de 140 pieds, n'avoient pu appercevoir aſſez diſtinctement. Dans la ſuite, il en fit de plus de 100 pieds de foyer. La Société Royale en poſſede un de 123 pieds, & un autre de 120, dont M. *Huyghens* lui fit préſent lors d'un de ſes voyages en Angleterre.

Mais ce n'eſt pas aſſez que d'avoir des objectifs d'une portée auſſi conſidérable. Les Aſtronomes qui ont eu à manier de longs Téleſcopes, ne ſçavent que trop à combien d'inconvéniens ils ſont ſujets. Leur poids, la fléxion des tubes, la difficulté de les diriger, ſont autant d'obſtacles à leur uſage, dès qu'ils paſſent les dimenſions ordinaires. Auſſi cette difficulté d'Aſtronomie pratique, avoit-elle déja occupé bien des Aſtronomes. Rien n'eſt plus heureux au premier abord, que la ſolution qu'en avoit donné un Aſtronome de Toulouſe, (M. *Boffat*) (*a*) : il propoſoit de laiſſer le tube du Téleſcope, immobile, & de lui préſenter l'aſtre par le moyen d'un miroir mobile. Malheureuſement l'épreuve n'a pas répondu à la théorie ; l'expérience a montré que les moindres défectuoſités du miroir troublent tellement l'image, qu'on ne peut attendre delà aucun ſuccès. Quelques autres Aſtronomes, comme MM. *Comiers* (*b*) & *Auzout* (*c*), avoient propoſé de ſupprimer les tuyaux qui ne ſont pas de l'eſſence du Téleſcope ; & ils avoient imaginé des moyens pour diriger l'objectif à l'objet, & ſe mettre avec l'oculaire dans l'éloignement & la ſituation convenables. C'eſt à ce dernier parti que s'en tint M. *Huyghens* ; & il s'attacha à le perfectionner dans ſon *Aſtroſcopia compendiaria à tubi molimine liberata*, qu'il publia en 1684. Cette méthode de M. *Huyghens*, a été miſe en pratique avec aſſez de ſuccès, ſoit par lui-même, ſoit par divers autres Aſtronomes, comme MM. *Pound* & *Bradlei*, lorſqu'ils ſe ſervirent de ſon verre de 123 pieds, pour obſerver Saturne ; ce fut auſſi de cette maniere que s'y prit M. *Bianchini*, lorſqu'il ſe mit à obſerver Venus avec des objectifs de *Campani*, de quelques centaines de palmes. Mais nonobſtant ces ſuffrages, on ne peut diſconvenir, que c'eſt encore quelque choſe de

(*a*) Journal des Sçavans, 1681.
(*b*) Diſcours ſur les Cometes. *Par. 1666, à la fin.*
(*c*) Lett. à l'Abbé Charles, &c.

fort embarraſſant, & le Téleſcope à réflection eſt venu fort à propos nous affranchir de la néceſſité de recourir à ces moyens.

M. *Huyghens* étoit d'un pays trop intéreſſé à la ſolution du problême des longitudes, pour ne pas tourner auſſi de ce côté quelques-unes de ſes vûes. C'étoit en partie l'objet qu'il ſe propoſoit en imaginant ſon horloge à pendule : car le problême dépend, comme l'on ſçait, preſque uniquement de trouver une meſure exacte du tems en mer. Les premiers eſſais furent d'abord aſſez favorables à l'invention de M. *Huyghens*, on en lit le récit dans les *Tranſ. Phil.* de l'année 1665 ; mais les obſervations poſtérieures ont appris, que les moyens qu'il propoſe pour mettre le pendule à l'abri des inégalités occaſionnées par les mouvemens du navire (*a*), ne ſuffiſent pas. M. *Huyghens* en a donc cherché d'autres, & il croyoit à la fin de ſa vie les avoir découverts. Il dit dans les Actes de Léipſick de l'année 1693, qu'il a trouvé une courbe qui ſervira à concilier à ſes pendules le mouvement le plus égal, ſans qu'il puiſſe être troublé par ceux du navire, & il donne l'équation de cette courbe en lettres tranſpoſées. Mais la mort, en l'enlevant, a auſſi enlevé ſon ſecret.

Je ne dis qu'un mot de deux ouvrages poſthumes de M. *Huyghens* : l'un eſt ſon *Authomatum Planetarium*, ou la deſcription d'une machine propre à repréſenter les mouvemens & les périodes des planetes. On y remarque avec plaiſir la maniere ingénieuſe dont M. *Huyghens* parvient, malgré l'incommenſurabilité de ces périodes, à repréſenter leur rapport. Il le fait avec tant d'exactitude, qu'après trente révolutions de la terre, Saturne, par exemple, n'eſt trop avancé dans ſon cercle que d'environ deux minutes & demie. Il ſe ſert pour cela de cette eſpece de fractions appellées *continues*, & dont on a parlé à l'occaſion de la quadrature du cercle de Milord *Brouncker*. Les Anglois qui ont exécuté ces dernieres années pluſieurs de ces inſtrumens, leur ont donné le nom d'*Orreryes*, à cauſe que le premier qui ait été fait chez eux, étoit deſtiné au Comte d'*Orrery*. On les verra probablement quelque jour s'autoriſer de ce nom pour en revendiquer l'invention.

(*a*) *Horol. Oſcill.*

L'autre ouvrage poſthume de M. *Huyghens*, eſt ſon *Coſmotheoros ſeu de terris celeſtibus earumque ornatu conjecturæ*, titre qui explique ſuffiſamment l'objet de ce Livre. Mais M. *Huyghens* l'eut rendu bien plus agréable, ſi moins auſtere Philoſophe, il y eut fait uſage des reſſources de la fiction, à l'exemple de *Kepler*, dans ſon *Somnium de Aſtronomia lunari*, ou du Pere *Kircher*, dans ſon *Iter extaticum*. L'idée du célebre Jéſuite, étoit ingénieuſe : il eſt dommage que ſon guide ne ſoit pas un meilleur Philoſophe. On ne ſçauroit toucher à cette matiere ſans ſonger auſſi-tôt à l'ouvrage ingénieux & philoſophique de M. de *Fontenelle*, nous voulons dire ſes *Dialogues ſur la pluralité des Mondes*. Cet ouvrage eſt ſi connu, que ce que nous en dirions ici n'ajouteroit rien à ſa célébrité.

I I.

Fondation des Académies & des obſervatoires de Paris & de Londres.

Il eſt peu de Sciences qui ait un plus grand beſoin de la protection des Souverains, que l'Aſtronomie. Les autres parties des Mathématiques, preſque uniquement l'ouvrage de la théorie & de la méditation, peuvent être cultivées avec ſuccès par des particuliers doués de génie. Mais l'Aſtronomie ne prenant d'accroiſſement qu'à proportion qu'on obſerve, & qu'on obſerve avec plus de préciſion, exige des dépenſes conſidérables en inſtrumens, quelquefois des voyages diſpendieux, des ſecours enfin le plus ſouvent au deſſus des facultés d'un particulier. Sans la magnificence des *Ptolémées*, ſans celle de quelques Princes Orientaux, amateurs de cette ſcience, elle n'eut point fait, ni chez les Grecs, ni chez les Arabes, les progrès qu'on lui vit faire. Sans la protection de *Fréderic*, Roi de Dannemarck, *Tycho-Brahé* n'eut jamais raſſemblé les matériaux précieux que *Kepler* mit depuis en œuvre avec tant de ſuccès.

L'Aſtronomie n'a pas de moindres obligations à *Louis XIV* & à *Charles II*. Ses annales rappelleront toujours avec reconnoiſſance les ſecours & les encouragemens que ces Princes lui ont donnés, & ſurtout la fondation des deux Obſervatoires fameux de Paris & de Londres, élevés ſous leurs auſpices, & d'où ſont ſorties tant de découvertes brillantes. Nous y joindrons auſſi l'établiſſement des deux Académies célebres qui fleuriſſent dans ces capitales. Car quoique toutes les connoiſſances naturelles ſoient du reſſort de ces Académies, il ſemble

que c'eſt ſurtout l'Aſtronomie qui s'eſt reſſentie de leur inſtitution. En effet, ſi l'Aſtronomie exige des ſecours & des dépenſes royales, elle ne demande pas moins ce concours de vues, cette ſucceſſion non interrompue de travaux qu'on ne peut attendre que d'un corps toujours ſubſiſtant, quoique ſes membres ſe renouvellent. C'eſt ce motif qui nous a fait différer juſqu'ici à parler de cette inſtitution, ſi digne de figurer dans cet ouvrage.

C'eſt l'Angleterre, il faut en convenir, qui montra à la France l'exemple de ce genre d'établiſſement. La Société Royale de Londres, aînée de quelques années de l'Académie Royale des Sciences de Paris, date des premiers jours du rappel de *Charles II.* A la vérité, il ſemble que l'idée de ces aſſemblées ſçavantes, l'Angleterre la tenoit de l'Italie & de la France même. Il y avoit depuis pluſieurs années à Florence une Société de Sçavans connue ſous le nom d'*Academia del Cimento*, qui s'addonnoit ſpécialement à la Philoſophie naturelle. Paris avoit vu auſſi dès le tems du P. *Merſenne*, divers particuliers liés par le ſeul amour des Sciences, & ſurtout de la Phyſique & des Mathématiques, tenir des aſſemblées dont l'objet étoit de converſer ſur ces matieres, & de ſe communiquer mutuellement leurs vues & leurs découvertes. Mais comme l'Angleterre ſe défend toujours de rien devoir au continent, encore moins à la France, elle rapporte la naiſſance de la Société Royale, à une autre cauſe. Suivant ſon hiſtoire (*a*), cette Société célebre doit ſon origine aux aſſemblées ſçavantes que tenoient, durant la tyrannie de Cromwel, quelques particuliers retirés à Oxford, & dont pluſieurs étant attachés à la famille du Roi Charles I, cherchoient autant par-là à ſe dérober aux ſoupçons de l'uſurpateur, qu'à contribuer aux progrès des Sciences. Les principaux membres de ces aſſemblées, étoient les Docteurs *Wallis*, *Wilkins*, *Ward*; le célebre *Boile*, Meſſieurs *Rook*, *Wren*, *Petty*. Après le rappel de *Charles II*, pluſieurs d'entr'eux revinrent à Londres, où leur nombre s'accrut de quelques autres amateurs des connoiſſances naturelles, parmi leſquels on diſtingue Milord *Brouncker*, les Cheva-

(*a*) *Hiſt. of. Royal Society.* par M. T. *Sprat.* C'eſt un ouvrage pitoyablement fait en Anglois, & dont on a une traduction Françoiſe encore plus pitoyable. L'ignorance d'un traducteur ne ſçauroit aller plus loin.

liers *Moray*, *Neil*, &c. *Charles II*, qui, malgré ſa diſſipation & ſon penchant au plaiſir, aimoit les Sciences, goûta l'idée de cette Société, & lui accorda en 1660, des Lettres Patentes, par leſquelles il l'érigea en Société Royale, la mettant ſous ſa protection, & ſous celle de ſes ſucceſſeurs. Elle commença en 1665, à publier ſes Mémoires, qui portent le nom de *Tranſactions Philoſophiques*. On ne ſçauroit trop regretter qu'on ait ſongé ſi tard à nous donner cette précieuſe collection dans notre langue, & trop applaudir au deſſein de M. de *Bremond*, qui avoit commencé ce travail (*a*). La mort de cet Académicien n'a pas fait échouer l'entrepriſe; elle eſt aujourd'hui confiée aux ſoins de M. *Demours*, déja fort connu par divers ouvrages importans, & le Public ne tardera pas à voir ſatisfaire ſon impatience ſur la ſuite de cette traduction.

L'Académie Royale des Sciences de Paris, prit naiſſance en 1666. Lorſqu'après la paix des Pyrénées, M. *Colbert* forma le projet d'encourager les Arts, le Commerce & les Sciences, il choiſit ceux qui s'étoient le plus diſtingués par leurs découvertes & leurs talens, pour en former un corps ſur lequel le Roi verſeroit ſes bienfaits d'une façon plus particuliere. Ces premiers Académiciens furent Meſſieurs de *Carcavi*, *Huyghens*, *Roberval*, *Frenicle*, *Auzout*, *Picard* & *Buot*, tous Mathématiciens. On leur adjoignit enſuite des Chimiſtes, des Anatomiſtes, &c, & le Roi leur aſſigna une des ſalles de ſa Bibliothéque, pour y tenir leurs aſſemblées. Chacun ſçait qu'en 1699, cet illuſtre Corps reçut une nouvelle forme, &, pour ainſi dire, une nouvelle exiſtence, avec des aſſurances d'une protection plus marquée de Sa Majeſté. Avant ce tems, l'Académie avoit déja publié à diverſes repriſes quantité de Mémoires & d'écrits qui ont été rédigés en 10 vol. in-4°. & qu'on nomme les anciens Mémoires de l'Académie. On a auſſi ſon hiſtoire, d'abord écrite en Latin, par M. *Duhamel*, ſon Secretaire, & enſuite refaite en François par ſon célebre ſucceſſeur M. de *Fontenelle*, qui y a répandu ces agrémens & cette clarté qu'il ſçavoit ſi bien donner aux matieres les plus abſtraites. Perſonne n'ignore que, depuis ſon renouvellement, l'Académie publie chaque année un volume de ſes Mémoires, avec

(*a*) Il en a donné 2 vol. qui comprennent les années 1734, 1735, 1736, 1737, avec un volume de Tables, depuis le commencement de la Société Royale juſqu'en 1735.

leur

leur extrait, & le récit des événemens les plus remarquables arrivés dans ſon ſein, ſous le titre d'hiſtoire.

Le ſecond établiſſement, uniquement dévoué aux progrès de l'Aſtronomie, eſt celui des Obſervatoires de Paris & de *Gréenwich*. Ici Paris a la primauté; à peine l'Académie des Sciences étoit raſſemblée, que *Louis XIV*, qui vouloit auſſi hâter les progrès de l'Aſtronomie & de la Géographie, appelloit d'Italie le célebre M. *Caſſini*, & ordonnoit la conſtruction d'un Obſervatoire digne de ſa magnificence. Le lieu en fut déſigné dès le milieu de l'année 1667, & les fondemens en furent jettés la même année. Ce magnifique monument de l'Aſtronomie, l'un des chefs-d'œuvres de *Perrault*, & de l'Architecture Françoiſe, eſt trop connu par les gravures, pour nous amuſer à le décrire. L'ouvrage fut conduit avec rapidité, malgré ſa grandeur & la nature de ſa conſtruction, & il fut entiérement achevé en 1675. Sa Majeſté le fournit de nombreux inſtrumens, ouvrages des meilleurs Artiſtes, & depuis lors il n'a ceſſé de produire d'importantes découvertes en Aſtronomie. Cependant, aujourd'hui que les Sçavans ne veulent rien perdre de leurs droits aux agrémens de la ſociété, l'éloignement où eſt cet édifice du centre de la ville, commence à le rendre moins habité. Les Aſtronomes ont trouvé qu'il valoit beaucoup mieux faire des dépenſes en inſtrumens, qu'en bâtimens magnifiques & élevés. Une Tour ſolide, d'excellens inſtrumens, & beaucoup d'aſſiduité à obſerver, ſont tout ce qu'il faut pour les progrès de l'Aſtronomie.

Londres, toujours émule de Paris, comme Paris l'eſt de Londres, ne tarda pas à avoir dans ſes environs un édifice deſtiné aux mêmes travaux. Voici ce qui donna lieu à ſa conſtruction. Vers l'année 1673, un nommé le Sieur de Saint-Pierre, ſe préſenta à la Cour de *Charles II*, annonçant la découverte des longitudes, & il obtint qu'on nommât des Commiſſaires de l'Amirauté pour examiner ſon invention. Ceux-ci travaillant à cet examen, admirent dans leurs aſſemblées divers Mathématiciens habiles, entr'autres M. *Flamſtead*. Cet Aſtronome, encore jeune alors, mais qui avoit déja donné des preuves d'un talent ſupérieur, montra facilement que l'invention propoſée étoit inſuffiſante, parce que ni les Tables

des lieux des fixes, ni la théorie de la Lune, que le Sieur de *Saint-Pierre* employoit, à l'exemple de *Morin*, n'avoient acquis assez de perfection pour pouvoir compter sur elles. Il écrivit sur ce sujet deux lettres, l'une adressée aux Commissaires, l'autre à l'Auteur du projet pour étendre & confirmer davantage ce qu'il avoit dit. Cette affaire fit du bruit à la Cour, par l'intérêt qu'y prenoit la fameuse Duchesse de Porst-mouth, dont le Sieur de *Saint-Pierre* avoit gagné la faveur, & les deux Lettres de *Flamstead* étant tombées entre les mains de *Charles II*, il en fut étonné, & il ordonna aussi-tôt qu'on perfectionnât ces parties de l'Astronomie pour l'utilité de la Marine. On lui représenta que ce travail exigeoit un homme entier, & des secours que l'Astronomie n'avoit point encore eus; sur quoi il ordonna la construction d'un Observatoire, & il choisit lui-même pour y observer, M. *Flamstead*, le nommant son Astronome avec cent guinées d'appointemens. On balança quelque tems sur la situation du nouvel Observatoire. On jetta les yeux sur Chelsea, Hyde-Park, Gréenwich; mais enfin ce dernier fut préféré. C'est un lieu à deux mille de Londres, en descendant la Tamise. Là sur une colline charmante, & où la vue est continuellement recréée par le passage d'une foule de bâtimens, s'éleve l'Observatoire dont nous parlons, plus régulier & commode que magnifique. Les fondemens en furent posés le 10 Août 1675, & il fut achevé en 1679. M. *Flamstead* y a observé depuis ce tems, jusqu'à sa mort qui arriva en 1720. Nous rendrons compte, quand il en sera tems, de ses travaux. Il a eu pour successeur M. *Hallei*, si connu partout où l'Astronomie est en honneur. Sa place est aujourd'hui remplie par M. *Bradley*, non moins célebre que ses deux illustres prédécesseurs, par diverses découvertes mémorables, & entr'autres celle de l'aberration de la lumiere.

III.

De M. Cassini. L'institution de l'Académie Royale des Sciences, & la construction d'un magnifique Observatoire, ne sont pas les seuls encouragemens que l'Astronomie reçut en France, vers le milieu du siecle passé. L'Italie possédoit alors un homme rare

par ſes talens aſtronomiques, & qui s'étoit déja illuſtré par quantité de découvertes, le célebre M. *Caſſini*, en un mot (*a*). *Louis XIV* forma le deſſein de le lui enlever, & d'en enrichir ſes Etats, pour y faire davantage fleurir l'Aſtronomie. Il le fit demander par ſon Ambaſſadeur au Pape *Clément IX*, & au Sénat de Boulogne. L'Italie, qui connoiſſoit tout le prix de cer homme illuſtre, ne conſentit pas facilement à s'en voir privée, & ne le céda à la France que pour ſix ans. Ce fut ſous cette condition que M. *Caſſini* partit pour Paris, où il arriva au commencement de l'année 1669. *Louis XIV* le reçut avec les diſtinctions dont il ſçavoit honorer le mérite, & le décora du titre d'Aſtronome royal. Les ſix années de ſon congé étant ſur le point d'expirer, l'Italie impatiente commençoit à revendiquer ſon bien; mais les bienfaits du Roi fixerent M. *Caſſini* en France, où il a laiſſé une poſtérité qui a dignement ſoutenu, & qui ſoutient encore ce nom célebre. Pour faire connoître toutes les obligations qu'on a à ce grand Aſtronome, il nous faut reprendre les choſes de plus haut, & avant ſon établiſſement en France.

M. *Caſſini* rendit dès l'année 1653 un ſervice ſignalé à l'Aſtronomie. Chacun ſçait combien des obſervations faites avec un gnomon d'une hauteur conſidérable, ſont précieuſes aux Aſtronomes pour la théorie du Soleil. Ces inſtrumens ſont effectivement par leur grandeur preſque les ſeuls capables de fournir la détermination de pluſieurs points délicats de cette théorie, comme la déclinaiſon de l'écliptique, l'entrée du Soleil dans les tropiques, &c. Il y en avoit un à Boulogne, dans l'Egliſe de S. Petrone; mais le P. *Egnazio Dante*, qui l'avoit conſtruit en 1575, n'avoit pu, apparemment à cauſe de quelque ſu-

(*a*) M. Caſſini (Jean-Dominique) naquit à Perinaldo, dans le Comté de Nice, le 8 Juin 1625. Il ſe livra dès ſa tendre jeuneſſe à l'Aſtronomie, avec cette ardeur & ces ſuccès qui caractériſent le génie, de ſorte que le Marquis de Malvaſia lui procura, en 1650, la Chaire d'Aſtronomie vacante à Boulogne, par la mort de Cavalleri. Il vint en France en 1669, appellé par Louis XIV, & il continua durant encore plus de 40 ans à enrichir l'Aſtronomie d'une multitude d'inventions & d'ouvrages curieux. Vers la fin de ſa vie, il eut le même ſort que Galilée, nous voulons dire qu'il perdit ces yeux, qui de même que ceux de ſon célebre compatriote, avoient découvert un nouveau monde, & même un monde bien plus reculé. Il mourut à Paris le 12 Sept. 1712. Le catalogue de tous les écrits qu'il a publiés durant ſa vie ſeroit ſi long, que nous nous en tiendrons à ceux que nous citons dans le cours de cet article. Le lecteur curieux de ces détails de Bibliographie, pourra les raſſembler d'après l'Hiſtoire de l'Académie.

jétion, décrire une méridienne pour y recevoir l'image du Soleil, de ſorte qu'il s'étoit contenté d'une ligne qui en déclinoit de quelques degrés. Son objet n'étoit que de montrer par une obſervation à la portée des moins intelligens, combien l'équinoxe du printems s'écartoit du 21 Mars, auquel il étoit cenſé arriver; ce qui n'exigeoit pas davantage de préciſion qu'il y en mit.

M. *Caſſini*, qui aſpiroit à éclaircir quelques points délicats de la théorie du Soleil, par des obſervations d'une exactitude particuliere, ſaiſit l'occaſion heureuſe qui ſe préſenta en 1653, de changer l'ouvrage de *Dante*, & de conſtruire un gnomon parfait. On travailloit alors à reſtaurer & à augmenter le Temple de S. Petrone. M. *Caſſini* s'adreſſa au Sénat de Boulogne, pour avoir la permiſſion qu'il deſiroit, & il l'obtint. Il traça dans un autre endroit de l'Egliſe une véritable méridienne qui, contre l'attente & le jugement de tout le monde, paſſa entre deux piliers, contre l'un deſquels elle paroiſſoit devoir aller échouer. Heureuſement, M. *Caſſini* en jugea mieux, & pour le bien de l'Aſtronomie, il eut raiſon. Perpendiculairement au deſſus de cette ligne, & à la hauteur de 1000 pouces, ou 125 palmes Boulonois, qui ſont environ 83 pieds de Paris, il plaça horizontalement une plaque de bronze, ſolidement ſcellée dans la voûte, & percée d'un trou circulaire qui a préciſément un pouce de diametre. C'eſt par ce trou qu'entre le rayon ſolaire, qui forme tous les jours à midi ſur la méridienne l'image elliptique du Soleil. Cette élévation conſidérable fait qu'à la variation d'une minute en hauteur, répondent près du ſolſtice d'Eté, 4 lignes, & près de celui d'Hyver, 2 pouces 1 ligne; de ſorte que les moindres inégalités, ſoit dans la déclinaiſon, ſoit dans le diametre apparent du Soleil, ſont extrêmement ſenſibles. Ce magnifique ouvrage, fut achevé en 1656, aſſez à tems pour permettre à M. *Caſſini* de faire l'obſervation de l'équinoxe du Printems, (*a*) à laquelle il avoit invité les Aſtronomes, en leur faiſant part de la conſtruction de ſa nouvelle méridienne, & des travaux qu'il ſe propoſoit d'exécuter par ſon moyen.

Ce que M. *Caſſini* avoit eu en vue, il l'obtint. Ce grand

(*a*) *Obſ. æquin. verſi. ann. 1666. in-fol.*

inſtrument le mit en état de faire à la théorie du Soleil des corrections très importantes, & qui, par leur délicateſſe, échappoient à toutes les autres manieres d'obſerver. Il trouva que la déclinaiſon de l'écliptique devoit être diminuée d'environ une minute & demie, c'eſt-à-dire, qu'au lieu de 23°, 30′, que lui donnoient la plûpart des Aſtronomes, elle n'étoit guere que de 23°, 28′, 30″. Ces obſervations lui apprirent auſſi que l'excentricité, ou la demi-diſtance des foyers de l'orbite ſolaire, étoit moindre que celle de *Kepler*, qui l'avoit faite dans ſes Tables de 1800 parties, dont l'axe entier eſt 100000. M. *Caſſini* lui en aſſigna ſeulement 1700. Il reconnut encore que *Tycho* s'étoit trompé en n'étendant les réfractions ſolaires que juſqu'au 45ᵉ degré d'élévation; & il confirma par l'obſervation, ce qu'une ſolide théorie lui avoit déja appris, ſçavoir que la réfraction s'étend juſqu'au zénith. Il mit enfin hors de conteſtation l'inégalité réelle du mouvement du Soleil, par la comparaiſon exacte du diametre apparent de cet aſtre, & de l'accélération de ſon mouvement dans les divers lieux de ſon orbite. C'étoit un point ſur lequel il y avoit encore parmi les Aſtronomes quelque diviſion; mais lorſque l'oracle de Boulogne, nous voulons dire, la méridienne de Saint Petrone, eut parlé, tous ceux qui balançoient encore, ſe rendirent. M. *Caſſini* dreſſa, d'après tous ces Elémens corrigés, de nouvelles Tables ſolaires, qu'il publia en 1662, avec les Ephémérides du Marquis de *Malvaſia* (*a*). Elles eurent l'avantage de s'accorder mieux que toutes les précédentes avec le mouvement du Soleil. Il l'éprouva à diverſes repriſes par le moyen de ſa méridienne, & M. *Montanari* a atteſté dans un écrit public, que le Soleil ne manqua jamais de paſſer par le point de la méridienne & au moment, marqués par le calcul. M. *Caſſini* a eu depuis l'agrément de voir toutes ces corrections s'accorder de fort près avec les obſervations des Aſtronomes de l'Académie, que le Roi envoya en Amérique & vers l'équateur, quelques années après (*b*).

Le magnifique monument dont nous venons de parler, ne

(*a*) *Epiſt. Aſtron. cum Tabulis, ad March. Malvaſiam, inſertæ ejuſdem Ephemeridibus.* Mutinæ, 1662, in-fol.

(*b*) Elémens de l'Aſtronomie déterminés par M. Caſſini, & vérifiés par le rapport de ſes Tables, avec les obſervations faites à l'Iſle de Cayenne, &c. *Anciens Mem. de l'Acad. T. VII.*

ſçauroit manquer d'intéreſſer les amateurs de l'Aſtronomie; & leur fera ſans doute deſirer d'en ſuivre l'hiſtoire juſqu'à nos jours. Lorſqu'après environ 30 ans de ſéjour en France, M. *Caſſini* alla revoir ſa patrie, il ne manqua pas d'aller reconnoître l'état de ſon gnomon. Il ſe trouva que le cercle de bronze qui lui ſert de ſommet, étoit un peu ſorti de la ligne verticale où il devoit être; & que le pavé ſur lequel étoit tracée la méridienne, s'étoit un peu affaiſſé. M. *Caſſini* rétablit les choſes dans leur ancien état, & M. *Guglielmini* fut chargé pour l'inſtruction de la poſtérité, de décrire les opérations faites dans cette occaſion. C'eſt-là le ſujet du Livre qu'il publia peu après ſous le titre de *la meridiana di S. Petronio reviſta & retirata per le oſſervazioni del S. Dom. Caſſini, &c.* (Bon. in-fol.) Depuis ce tems, M. Euſtache *Manfredi* a de nouveau vérifié & rectifié le gnomon de Saint Petrone. On lit dans les Mémoires de l'Académie de Boulogne, le récit des opérations qu'il fit dans cette vue, avec d'excellentes réflexions ſur ces ſortes d'inſtrumens. Au reſte, dans ces deux vérifications, on ne trouva pas que la poſition de la méridienne eût éprouvé aucun changement; ce qui détruit la conjecture de ceux qui avoient ſoupçonné que cette ligne étoit ſujette à quelque variation. S'il y en a quelqu'une, on peut du moins aſſurer qu'elle eſt ſi lente que dans un ſiecle entier elle n'eſt point perceptible.

Boulogne n'eſt plus la ſeule ville qui jouiſſe de l'avantage d'un inſtrument ſi parfait & ſi utile. Diverſes villes de l'Europe où fleurit l'Aſtronomie, ont depuis imité ſon exemple, entr'autres Rome & Paris. Vers le commencement de ce ſiecle, M. *Bianchini* éleva un gnomon dans la premiere de ces villes. Il eſt placé dans les Thermes de Dioclétien, & il a 37 pieds de haut. Il fait le ſujet de ſon Livre *De numo & gnomone Clementino*, qu'il donna en 1703. Il y en a un autre dans l'Egliſe appellé *Della Maddonna degl' angeli*, l'une de celles qui décorent la place du *Peuple*. Paris a le ſien dans l'Egliſe Saint Sulpice, où il a été conſtruit en 1742, par les ſoins de M. le *Monnier*. Sa hauteur eſt de 73 pieds, & ſa méridienne porte à l'une de ſes extrêmités, une inſcription qui apprendra la hauteur préciſe du Soleil au ſolſtice, obſervée lors de l'érection de ce gnomon, & qui mettra la poſtérité en état de recon-

noître très-certainement ſi la déclinaiſon de l'écliptique eſt variable. Les autres utilités de ce monument, & le détail de ſa conſtruction, ſe trouvent dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1743.

Le gnomon de Saint Petrone ſeroit cependant encore en poſſeſſion d'être le plus haut, & par conſéquent le plus parfait, comme le plus ancien de l'Europe, ſi depuis quelques années on n'avoit pas découvert un monument aſtronomique de ce genre, qui lui enleve ce premier rang. C'eſt le gnomon de l'Egliſe Cathédrale, ou Notre-Dame *del Fiore* de Florence. Il eſt l'ouvrage de Pierre *Toſcanella*, Médecin & Mathématicien du quinzieme ſiecle, qui le conſtruiſit vers l'an 1460. Il conſiſte en une plaque de cuivre percée d'un trou de 22 lignes de diametre, & portée horizontalement en ſaillie par la corniche intérieure de la lanterne du Dôme; ſa diſtance au pavé eſt de 277 pieds de Paris, & cinq pouces; hauteur prodigieuſe, & qui ſurpaſſe celle de tous les autres gnomons de l'Europe, même pris enſemble. L'objet de *Toſcanella*, fut ſans doute de mettre ſes ſucceſſeurs en état de déterminer par-là ſi l'obliquité de l'éclitique étoit invariable: car on voit l'image du Soleil ſolſticial à midi, marquée par un cercle de marbre blanc, incruſté dans le pavé; & cette obſervation, d'abord faite par *Toſcanella*, fut réitérée en 1510, comme il paroît par l'inſcription à demi-effacée qui ſubſiſte encore.

On s'étonnera ſans doute qu'un pareil monument ait reſté depuis ce tems comme inconnu & négligé dans le pays des *Galilée* & des *Viviani*. Ce fut M. de la *Condamine*, qui paſſant à Florence au commencement de 1755, le découvrit en quelque ſorte, & en ſollicita la reſtauration. Ainſi autrefois *Cicéron* ſe trouvant à Syracuſe, fit la découverte du tombeau d'*Archimede*, que ſes ingrats concitoyens avoient oublié, & laiſſé couvrir de ronces & d'épines. Le P. Leonard *Ximenès*, de la Compagnie de Jeſus, chargé de la reſtauration dont nous venons de parler, l'a exécuté heureuſement, & avec toute la dextérité & les ſoins qu'exige une pareille opération. Ce ſçavant Aſtronome & Coſmographe de Sa Majeſté Impériale, s'eſt ſervi la même année de ce gnomon pour obſerver la déclinaiſon de l'écliptique, & la comparer à celle qui avoit été trouvée en 1510. Cette obſervation lui a paru prouver que de-

puis ce tems l'écliptique s'eſt approchée de l'équateur de 1 minute & 16 ſecondes ; ce qui fait 31" ſecondes par ſiecle. Il eſt vrai que ceci ſuppoſe qu'il n'y ait eu depuis 1510 aucun mouvement dans les murs qui portent le ſommet de ce gnomon, ou du moins qu'il n'y en a eu aucun qui ſoit capable d'influer ſur les réſultats. Le P. *Ximenès* le penſe, & il l'établit par des raiſons aſſez ſatisfaiſantes. Cela eſt d'autant plus probable, qu'on penſe aujourd'hui aſſez généralement que l'obliquité de l'écliptique diminue continuellement, & d'environ une demi-minute par ſiecle. On peut voir de plus grands détails ſur toutes ces choſes dans un Mémoire de ce ſçavant Jéſuite ſur la déclinaiſon de l'écliptique, & ſurtout dans ſon curieux Livre *de gnomone Florentino*. Revenons à M. *Caſſini*.

M. *Caſſini* a eu ſur l'hypotheſe elliptique, adoptée par tous les Aſtronomes, une idée dont il eſt à propos de parler ici. Il crut appercevoir encore dans l'ellipſe ancienne, employée par *Kepler*, quelques défectuoſités, & pour y remédier, il en propoſa une autre. Dans cette nouvelle ellipſe il y a, comme dans l'ancienne, deux foyers ; la différence conſiſte en ce que dans celle-ci les lignes tirées de chaque point aux deux foyers, forment une ſomme conſtante, au lieu que dans celle de M. *Caſſini* ces deux lignes forment un produit, qui eſt partout le même. Mais il y a ſur cela diverſes obſervations à faire : la premiere, qui ſurprendra ſans doute le lecteur, c'eſt que, malgré toute ſa ſagacité, M. *Caſſini* ne prenoit pas l'hypotheſe de *Kepler* comme il le falloit. Il ſuppoſoit que *Kepler*, établiſſant le Soleil dans un des foyers de l'ellipſe, faiſoit de l'autre le centre des mouvemens moyens. Or cette ſuppoſition a effectivement le défaut que lui impute M. *Caſſini* ; mais la véritable hypotheſe de *Kepler*, celle où les aires, autour du foyer dans lequel réſide le Soleil, croiſſent comme les tems, n'a pas ce défaut. En ſecond lieu, l'ellipſe de M. *Caſſini* a elle-même des défauts qui ne permettroient pas de l'employer : on trouve qu'elle eſt trop reſſerrée, trop applatie aux environs de l'axe conjugué ; de ſorte que vers les 90 & 270e degrés de diſtance de l'apogée, elle repréſenteroit le Soleil beaucoup trop près. En troiſieme lieu, quand même cette ellipſe ſeroit propre à repréſenter mathématiquement les mouvemens céleſtes, il ne paroit pas que la phyſique pût l'admettre. En effet, la courbe dont nous parlons

lons, d'abord reſſemblante à l'ellipſe ordinaire, c'eſt-à-dire concave de tout côté vers ſon axe quand les deux foyers ne ſont pas trop éloignés l'un de l'autre, devient, lorſque ces foyers ſont éloignés à un certain point, en partie concave, en partie convexe vers cet axe, comme on voit au n° 2. Ces foyers s'éloignent-ils encore, la courbe devient ſemblable à un huit de chiffre, ainſi qu'on voit au n. 3. Après cela les foyers continuant à s'éloigner, elle ſe diviſe en deux ovales conjugués (voyez n. 4); & ces ovales dégénerent enfin en deux points conjugués, lorſque les foyers atteignent les extrêmités de l'axe. On voit par-là que, s'il eſt quelque loi phyſique en vertu de laquelle l'ellipſe dont on vient de parler puiſſe être décrite, cette loi doit être fort compliquée; & quoiqu'il n'y ait point de planete, dont l'excentricité ſoit aſſez grande pour cauſer les bizarreries ci-deſſus, il n'y a aucune vraiſemblance qu'elles euſſent lieu dans quelque hypotheſe d'excentricité que ce ſoit. *Fig.* 125.

Une des principales découvertes ſur leſquelles eſt fondée la grande célébrité de M. *Caſſini*, eſt celle de la vraie théorie des ſatellites de Jupiter. Qui ne s'étonnera effectivement de voir l'eſprit humain oſer entreprendre de calculer les mouvemens de ces petites planetes ſi éloignées de notre portée. De quelles expreſſions *Pline* ſe fût-il ſervi pour caractériſer une pareille entrepriſe; lui qui eſt ſi frappé d'admiration à la vue de celle de dreſſer un catalogue des fixes, qu'il ne peut ſe refuſer au plus véhément enthouſiaſme.

La théorie des ſatellites de Jupiter avoit déja exercé la ſagacité des Aſtronomes. *Galilée*, *Marius*, *Hodierna* (*a*), & Alphonſe *Borelli* (*b*), en avoient fait l'objet de leur travaux, ſans parler de *Reineri*, qui en promettoit des Tables, dont ſa mort précipitée occaſionna la perte. Tous ces Aſtronomes cependant, ſi nous en exceptons *Reineri*, dont les ſuccès nous ſont inconnus, avoient échoué. On doit ſeulement à *Borelli*, la juſtice de remarquer qu'il approcha de la vérité en quelques points. Mais la gloire de démêler la plûpart des véritables élémens de cette théorie, étoit réſervée à M. *Caſſini*. Nouvel Hipparque, il conſtruiſit le premier des Tables aſſez exactes des mouve-

(*a*) *Mediceorum Syd. Ephem. &c.* Panormi. 1656. in-4°.
(*b*) *Theoriæ med. ſyderum ex cauſis Phyſicis deductæ.* Rom. 1666, in-4°.

mens des ſatellites de Jupiter. Elles parurent en 1666 (*a*), & elles étonnerent fort les Sçavans, qui, découragés par le peu de ſuccès de ceux qui avoient déja travaillé ſur ce ſujet, commençoient à déſeſpérer de voir jamais une théorie exacte de ces mouvemens. M. *Picard*, qui compara ces Tables avec les obſervations, trouva entr'elles un accord qui le frappa, & ſouvent plus grand, que M. *Caſſini*, qui n'avoit pas encore donné la derniere main à cette théorie, n'oſoit ſoupçonner. Ce fut principalement ce trait de ſagacité qui attira ſur lui les regards de *Louis XIV*, & qui fit deſirer à ce Prince de poſſéder dans ſes Etats un homme ſi rare. Arrivé en France, M. *Caſſini* continua à travailler à la perfection de ſa théorie. Il y fit quelques légers changemens que lui ſuggérerent les obſervations nombreuſes qu'il fit, & il l'expoſa en 1693, dans un écrit (*b*) qu'on lit parmi les anciens Mémoires de l'Académie, (T. VII). Les détails exceſſifs où il me faudroit entrer pour en donner une idée, m'obligent de renvoyer le lecteur à cet écrit, auquel on ne ſçauroit donner trop d'éloges.

Mais, dira quelqu'un, à quoi peut ſervir la connoiſſance des éclipſes de ces aſtres qui nous ſont ſi étrangers, & qui, par leur petiteſſe & leur éloignement, ſemblent ſi peu faits pour nous. J'ai preſque honte de répondre à une pareille queſtion: cependant il eſt à propos de le faire en faveur de quelques lecteurs peu inſtruits. Oui, leur dirai-je, ces aſtres ſi éloignés, & à peine perceptibles, nous ſont, à bien des égards, plus utiles que notre Lune; c'eſt à eux que nous devons en grande partie, la reſtauration de la Géographie. En effet, comme leurs éclipſes ſont ſi fréquentes, qu'à peine ſe paſſe-t'il un jour qu'on n'en voye un entrer dans l'ombre de Jupiter, ou en ſortir, il eſt aiſé de voir qu'ils fourniſſent incomparablement plus de ſecours que la Lune pour obſerver les longitudes des lieux de la terre. Car pour peu qu'on ait de connoiſſance de la ſphere, on ſçait que pour déterminer la différence de longitude de deux lieux, il ſuffit de connoître la différence du tems compté dans ces deux lieux, au moment d'un phénomene qui

(*a*) *Ephem. Bonon. mediceorum ſyderum.* Bon. 1668, in-fol.

(*b*) Les hyp. & les Tables des ſatellites de Jupiter, réformées ſur de nouvelles obſervations. *Paris*, 1693.

arrive pour l'un & l'autre au même inſtant. Ainſi, que les ſatellites de Jupiter nous appartiennent ou non, peu importe; il ſuffit qu'ils nous offrent fréquemment de ces éclipſes dont nous parlons. Mais la connoiſſance de la théorie de ces aſtres augmente de beaucoup l'utilité dont il nous ſont; il eſt facile de le rendre ſenſible. Si l'on ignoroit cette théorie, il faudroit, pour déterminer la différence de longitude d'un certain lieu avec Paris, avoir un Obſervateur à Paris concerté avec celui qui eſt dans cet autre lieu, afin d'obſerver la même éclipſe d'un ſatellite. Mais ayant des Tables vérifiées par l'expérience, & qui apprendront à quelle minute ſous le méridien de Paris arrive chaque éclipſe des ſatellites, il eſt évident que cela ſuppléera à l'obſervateur placé dans cette ville. Celui qui ſera dans l'autre lieu, n'aura donc qu'à obſerver, & comparer le moment de ſon obſervation à celui du calcul pour le méridien de Paris, il aura l'équivalent d'une obſervation faite ſous ce méridien, & il connoîtra auſſi-tôt la diſtance où en eſt le ſien. Voilà pourquoi les Aſtronomes ont travaillé avec tant de ſoin à ſe procurer la connoiſſance anticipée & exacte de ces éclipſes, à quoi ils ſont parvenus, du moins en ce qui concerne le premier ſatellite, qu'on peut dire aujourd'hui être ſuffiſamment ſoumis au calcul.

M. *Caſſini* revendique encore pluſieurs découvertes des plus curieuſes de l'Aſtronomie-Phyſique Telles ſont celles de la rotation de Jupiter & de Mars ſur leur axe. Les yeux continuellement attachés ſur la premiere de ces planetes, il apperçut enfin une tache dans une des bandes paralleles qui l'environnent, & par la révolution de cette tache, il conclut que le globe de Jupiter tournoit ſur un axe preſque perpendiculaire à ſon orbite, dans 9 heures, 56 minutes (*a*), ce que les obſervations des Aſtronomes poſtérieurs, & les ſiennes propres, ont confirmé, à quelques légeres variations près dans la durée de cette période. Il trouva par un moyen ſemblable, que Mars a une révolution autour de ſon axe en 24 heures, 40 minutes (*b*). Il entrevit auſſi dans Vénus une tache brillante qui lui donna lieu de penſer que ſa révolution étoit à peu

(*a*) *Lett. al Sr Ottavio Falconieri, intorno la varietà delle Macchie oſſ. in Giove è. le loro revoluzioni, &c.* Roma. 1665. in-fol.

(*b*) *Mart. circa prop. axem. revolubilis obſ.* Bon. 1666, infol.

près de la même durée (*a*). Il n'osa cependant prononcer tout-à-fait sur ce sujet, & effectivement M. *Bianchini* a depuis prétendu que cette révolution est de 24 jours, & environ 8 heures, & les Astronomes sont encore partagés. C'est enfin M. *Cassini* qui perfectionna l'intéressante découverte d'*Huyghens* sur le monde de Saturne, en découvrant les quatre satellites restans de cette planete (*b*). Il leur donna les noms de *Sidera Lodoicea*, en honneur du Prince sous le regne & les auspices duquel ces nouveaux astres furent découverts pour la plûpart: mais la postérité n'a pas plus fait d'accueil à ce nom, qu'à celui d'*Astres de Médicis*, que *Galilée* avoit donné aux satellites de Jupiter. On crut devoir transmettre par un monument particulier la mémoire de cet événement remarquable en Astronomie, & l'on frappa à ce sujet une médaille avec ces mots: *Saturni satellites primùm cogniti.*

Il seroit trop prolixe d'entrer dans de pareils détails sur toutes les autres inventions de M. *Cassini.* Ce motif nous fera glisser légérement sur ce qui les concerne. On lui doit, par exemple, la maniere de calculer & de représenter pour tous les habitans de la terre, les éclipses du Soleil par la projection de l'ombre de la Lune sur le disque terrestre; cette méthode, dont *Kepler* avoit donné l'idée, a été perfectionnée par M. *Cassini*, & a depuis été adoptée par tous les Astronomes. M. *Cassini* a aussi donné une méthode fort admirée par divers Astronomes, pour déterminer, à l'aide d'un seul Observateur, la parallaxe d'une planete; mais M. le *Monnier* a remarqué (*c*) depuis que cette méthode avoit été antérieurement proposée par *Morin.* On doit enfin à M. *Cassini* l'application des éclipses de Soleil à trouver les longitudes des lieux de la terre; la découverte de la lumiere Zodiacale, ou de cette athmosphere lumineuse & en forme de lentille couchée dans le plan de l'écliptique, dont notre Soleil est environné; diverses nouvelles périodes chronologiques, propres à concilier les mouvemens du Soleil & de la Lune; enfin son ingénieuse divination des regles de l'Astronomie Indienne. Nous n'en dirons pas davantage. Quant à son hypothese sur le mouvement des Come-

(*a*) *Voyez* le Journal des Sçavans, 1667.
(*b*) Voyez art. 1.
(*c*) Théorie des Cometes.

tes, nous en parlerons avec quelque étendue dans l'article XIII de ce Livre.

IV.

De quelques inventions d'Aſtronomie-pratique.

Les premiers ſoins de l'Académie Royale des Sciences, à cultiver l'Aſtronomie, ſont marqués par deux inventions des plus heureuſes. L'une eſt la perfection du Micrometre, & l'autre l'application du Téleſcope au quart de cercle. Ces deux inventions ne tiennent pas un moindre rang en Aſtronomie, que celle de l'Horloge à pendule. Car s'il eſt eſſentiel à l'Aſtronome d'avoir une meſure exacte du tems, il n'eſt pas moins important pour lui d'avoir le moyen de meſurer avec préciſion les intervalles céleſtes. Ce dernier avantage, il le doit aux inſtrumens dont on vient de parler; ce ſont eux qui l'ont éclairé ſur les élémens les plus délicats de l'Aſtronomie, & qui l'ont mis à portée d'appercevoir divers phénomenes, dont la découverte a jetté de grandes lumieres ſur le ſyſtême phyſique de l'Univers.

La premiere idée & le principe du Micrometre, ſont dûs à M. *Huyghens*. Chacun ſçait qu'au foyer de l'objectif du Téleſcope aſtronomique, il ſe peint une image parfaitement ſemblable à l'objet, & proportionnée à l'angle ſous lequel il paroîtroit à l'œil nu. L'oculaire, comme l'on ſçait encore, eſt tellement diſpoſée, que cette image eſt à ſon foyer, ce qui fait qu'elle eſt diſtinctement apperçue. M. *Huyghens* en conçut l'idée de ſe ſervir de la meſure de cette image pour connoître celle de l'objet, & voici comment il s'y prit. Il plaça au foyer commun de l'objectif & de l'oculaire, une ouverture circulaire, dont il meſura la grandeur apparente, c'eſt-à-dire, le nombre de minutes & de ſecondes qu'elle laiſſoit découvrir dans le Ciel, par le tems qu'une étoile employoit à parcourir ſon diametre. Cette premiere connoiſſance acquiſe, lorſqu'il s'agiſſoit de meſurer le diſque d'une planete, ou la diſtance de deux corps céleſtes, il introduiſoit par une fente latérale faite au Téleſcope, une petite verge de métal d'une largeur ſuffiſante pour couvrir cet intervalle, & cette largeur comparée par le moyen d'une échelle à celle de l'ouverture totale, lui donnoit le diametre apparent de cet objet. Tel fut

le Micrometre qu'employa M. *Huyghens*, & qu'il décrit à la fin de ſon *Syſtema-Saturnium.*

Le Marquis de *Malvaſia*, noble Boulonois, & qui réuniſſoit en même tems trois qualités qui ſe trouvent rarement enſemble, celles de Sénateur, de Capitaine & de ſçavant, alla quelques pas plus loin que M. *Huyghens* (*a*). Il plaça au foyer du Téleſcope un réticule, c'eſt-à-dire, pluſieurs fils ſe croiſant à angles droits, & formant pluſieurs quarrés à chacun deſquels devoit répondre un certain intervalle dans le Ciel. Et comme il pouvoit, ou même qu'il devoit ſouvent arriver que l'objet à meſurer ne comprendroit pas préciſément un ou pluſieurs de ces quarrés, il en diviſa un en pluſieurs autres beaucoup plus petits, comme il avoit diviſé le champ entier de la lunette par les premiers. Il eſt maintenant aiſé de voir que par ce moyen il pouvoit connoître combien d'intervalles entre les filets principaux, & de portions de ces intervalles comprenoit l'objet qu'il vouloit meſurer, & par conſéquent quelle étoit ſa grandeur apparente.

Mais M. *Auzout* (*b*) perfectionna encore cette invention, & la rendit plus propre à des déterminations extrêmement délicates. Il ne conſerva que des filets paralleles avec un tranſverſal qui les coupoit à angles droits, & afin de renfermer toujours l'objet à meſurer entre des filets paralleles, il imagina d'en faire porter un par un chaſſis mobile, gliſſant dans les rainures de celui auquel les autres étoient fixés. Ce chaſſis mobile, on le fait avancer & reculer par le moyen d'une vis portant un index dont les révolutions marquent de combien le fil mobile ſe rapproche ou s'éloigne des fixes. On tourne enſuite cet inſtrument, placé au foyer d'une lunette, vers un petit objet éloigné de quelques centaines de toiſes, dont on a calculé trigonométriquement la grandeur apparente, d'où l'on

(*a*) *Ephemerid.* Pref.

(*b*) On ne ſçait rien concernant la naiſſance & la patrie de M. Auzout. Ce fut, comme on l'a dit ailleurs, un des premiers membres de l'Académie Royale des Sciences; mais depuis l'année 1667, il n'en eſt plus fait aucune mention dans l'hiſtoire de cette Académie. Il étoit à Rome en 1670, comme l'on voit par le n°. 58 de Tranſactions. Il mourut en 1693, ſuivant la liſte chronologique des membres de l'Académie. Il a publié quelques écrits, comme une *Ephéméride de la Comete de 1665*, au Comm. de 1665. Une *Lettre à l'Abbé Charles ſur des obſ. de Campani*, Paris, 1665. Son *Traité du Micrometre*, Paris, 1667. Quelques *remarques ſur une machine de M. Hook.* Ces trois dernieres pieces ont été inſérées dans le volume VI des anciens Mémoires de l'Académie.

conclud celle qui répond à un des intervalles égaux de ſes filets. Après ces préparations, le Micrometre eſt conſtruit, & l'on peut le tourner vers le Ciel, pour y meſurer la grandeur apparente de quelque objet que ce ſoit. Veut-on, par exemple, déterminer le diametre apparent du Soleil, on tourne l'inſtrument de maniere que cet aſtre paroiſſe pendant quelques momens ſuivre la direction de l'un des fils paralleles, & en avançant ou reculant le fil mobile, on fait enſorte que ſon diſque ſoit préciſément compris entr'eux. Alors on examine au moyen de l'index dont nous avons parlé, la diſtance du fil mobile à un des fixes, d'où l'on conclud avec beaucoup de préciſion le diametre apparent de l'aſtre, ou l'intervalle entre les deux aſtres, qu'on veut meſurer. Cette idée ſommaire du Micrometre, ſuffira ici. Le lecteur curieux de plus grands détails, doit conſulter l'écrit que M. *Auzout* publia ſur ce ſujet en 1667, & qu'on trouve parmi les anciens Mémoires de l'Académie (T. VII). Il peut auſſi recourir à divers autres Auteurs, ſurtout à M. de la *Hire*, qui en a expliqué les uſages nombreux dans l'introduction à ſes *Tables Aſtronomiques*. On a imaginé dans la ſuite diverſes nouvelles conſtructions de Micrometres, qui ont été raſſemblées par *Bion* (*a*), & M. *Doppelmayer*, ſon Continuateur. Mais la plus parfaite, & celle qui ſert à un plus grand nombre d'uſages eſt la précédente; & c'eſt, à quelques légers changemens près, celle qu'ont adopté tous les Aſtronomes. Le Micrometre de cette eſpece, avec les additions qu'y a fait le célebre M. *Bradley*, eſt tout ce qu'il y a juſqu'ici de plus parfait. On en lit la deſcription dans la troiſieme partie de l'Optique de M. *Smith*.

C'eſt à M. *Picard* qu'on croit être redevable de l'application du Téleſcope au quart de cercle aſtronomique. On lui aſſocie auſſi M. *Auzout*, & cela eſt fondé ſur le témoignage de M. de la *Hire* (*b*). Cet Académicien, qui avoit vu M. *Picard* & travaillé avec lui, dit que l'ayant queſtionné un jour ſur la date & l'origine de cette invention, il lui avoit répondu que M. *Auzout* y avoit beaucoup de part. Mais pourquoi ne trouve-t'on aucune trace de cet aveu dans le Livre *de la figure de la Terre*, où M. *Picard* fait la deſcription de ſa nouvelle mé-

(*a*) Traité des inſtrumens Mathématiques.
(*b*) Mémoires de l'Académie, 1717.

thode, de maniere à laiſſer du moins croire aux lecteurs qu'il en eſt l'unique Auteur. Quoi qu'il en ſoit, les avantages de cette pratique ſont tels, qu'on peut dire ſans exagération, qu'il en eſt peu de plus heureuſes dans l'Aſtronomie. Tant qu'à l'exemple des Anciens, on ſe ſervit de pinnules ſimples, l'obſervateur n'ayant d'autre ſecours que celui de ſes yeux, avoit une peine extrême, ou plutôt ne pouvoit jamais parvenir, à diſcerner parfaitement le bord de l'aſtre ou de l'objet auquel il miroit. D'ailleurs les étoiles fixes paroiſſent à l'œil nu environnées d'une chevelure qui leur donne un diametre apparent beaucoup plus conſidérable qu'il n'eſt dans la réalité, & qui induiſoit l'obſervateur dans une erreur continuelle. Le Téleſcope adapté au quart de cercle, leve tous ces inconvéniens. Le limbe de l'aſtre, du Soleil par exemple, paroît diſtinctement terminé, & l'on peut juger avec préciſion de l'inſtant auquel il arrive aux fils qui ſe croiſent au foyer de l'objectif. Les étoiles ſont dépouillées de cette chevelure incommode, qui en augmente l'apparence à l'œil nu, & ne paroiſſant que comme des points lumineux, & preſque indiviſibles, leur paſſage par ces fils eſt beaucoup mieux déterminé, ce qui fournit un moyen commode & beaucoup plus exact que ceux qu'on pratiquoit autrefois, pour meſurer leur déclinaiſon & leur aſcenſion droite. Le quart de cercle enfin, garni d'un Téleſcope & d'un Micrometre, ſert à mille déterminations délicates, auxquelles l'inſtrument ancien ne pouvoit atteindre. Auſſi cette invention fut-elle rapidement adoptée par tous les Aſtronomes jaloux de l'exactitude. On ne trouve parmi ceux dont le ſuffrage eſt de quelque poids, que M. *Hevelius* qui lui ait refuſé le ſien. Le motif par lequel il autoriſoit ce refus, étoit qu'il n'y avoit de cette maniere aucune ligne de mire ou aucun axe de viſion. Mais cette prétention étoit malfondée, & même M. *Picard* avoit pris d'avance le ſoin d'établir le contraire. On démontre facilement par les loix de la Dioptrique, que le rayon paſſant par le centre de l'objectif, & allant au point où ſe croiſent les fils placés au foyer commun de l'objectif & de l'oculaire, forme une ligne invariable; de ſorte que ce ne peut être que le point de l'objet qui eſt dans la direction de cette ligne, ou qui en eſt éloigné d'un angle déterminé, qui puiſſe paroître au point où ſe croiſent

ces

ces fils. Il y a donc, lorſque l'inſtrument eſt vérifié, & que le Téleſcope n'éprouve aucun dérangement à l'égard du quart de cercle, il y a, dis-je, une ligne équivalente à celle qui ſeroit menée par les deux ouvertures des pinnules ordinaires, & qui eſt le véritable rayon par lequel l'objet eſt apperçu.

Depuis que l'invention du Micrometre, & l'application du Téleſcope au quart de cercle, ont été enſeignées & employées par les Aſtronomes François, l'Angleterre a fait revivre d'anciens droits ſur l'une & l'autre. Auſſi-tôt après l'annonce du Micrometre faite par M. *Auzout* dans les *Tranſactions Philoſophiques*, M. *Townley*, Aſtronome du pays de Lancaſtre, y mit un écrit où il la revendiquoit à ſon compatriote M. *Gaſcoigne*, qui perdit la vie à la ſuite de *Charles I*, dans la bataille de Marſton-More, qui fut ſi funeſte à ce Prince; & pour juſtifier ſon aſſertion, il a donné dans le n°. 29 des mêmes Tranſactions, la deſcription de la machine de M. *Gaſcoigne*, dont il avoit quelques ébauches, & qu'il avoit perfectionnée. M. *Flamſtead*, qui avoit ramaſſé avec ſoin quantité de papiers & de lettres de MM. *Horocces* & *Gaſcoigne*, rapporte des obſervations de ce dernier, qui confirment le récit précédent. Enfin M. *Gaſcoigne* ne s'étoit pas borné au Micrometre. Il avoit auſſi eu l'idée d'appliquer le Téleſcope au quart de cercle, & il l'avoit exécuté avec ſuccès. C'eſt ce que prouvent clairement divers fragmens de lettres, tirés de ſon commerce aſtronomique avec *Horoxes* & *Crabtree*, & que M. *Derham* a rapportés dans les *Tranſ. Phil.* de l'année 1723. On ne peut donc douter que M. *Gaſcoigne* ne ſoit le premier Auteur de ces deux inventions d'Aſtronomie-pratique. Nous ajouterons encore à l'honneur de Robert *Hook*, qu'il paroît que ce fameux Aſtronome ſe rencontra avec M. *Picard*. *Hook* raconte dans un de ſes ouvrages, que dès l'année 1665, il avoit parlé à *Hevelius* de l'application du Téleſcope aux inſtrumens aſtronomiques, & qu'il l'avoit exhorté à en faire uſage; ſur quoi M. *Hevelius* lui répondit la même année par une lettre adreſſée à la Société Royale, & dans laquelle il rendoit compte des motifs qui lui rendoient cette pratique ſuſpecte. Mais M. *Hook* étoit plus à portée d'être informé par la renommée ou autrement, des ſuccès & des inventions de *Gaſcoigne*, qui jouiſſoit d'une grande réputation dans la Province de Lan-

caſtre. A l'égard de MM. *Auzout* & *Picard*, on ne ſçauroit faire la même obſervation, & il eſt évident que ce qui avoit été précédemment fait en Angleterre, & qui leur étoit certainement inconnu, ne ſçauroit les priver du droit qu'ils ont à cette découverte.

V.

Nouvelle meſure de la terre par M. Picard.

Il eſt inutile de faire ici de nouvelles réfléxions ſur l'utilité d'une meſure exacte de la terre. On a ſuffiſamment montré dans le troiſieme Livre de cette Partie, de quelle importance eſt cette meſure dans la Géographie & dans l'Aſtronomie : d'ailleurs le diametre de la terre étant comme la premiere échelle dont on ſe ſert pour reconnoître les diſtances céleſtes, ſa grandeur étoit à quelques égards le premier élément de l'Aſtronomie : auſſi de tout tems les Aſtronomes ont fait des efforts pour ſe procurer cette connoiſſance ; & ſans remonter au-delà du même ſiecle, on avoit vu pluſieurs hommes célebres entreprendre de grandes opérations pour cet effet.

Il faut cependant l'avouer, & nous le faiſons preſque à regret, malgré ces travaux, la grandeur de la terre n'étoit rien moins que connue avec quelque préciſion. *Snellius* & *Riccioli*, qui ſembloient y avoir pris le plus de ſoin, différoient entr'eux, qui le croira ? de plus de 7000 toiſes ſur la grandeur du degré. Il eſt vrai que les opérations de *Riccioli*, examinées avec un peu d'attention, par un Aſtronome habile dans l'art d'obſerver, préſentoient mille ſujets de les ſoupçonner d'erreurs conſidérables ; mais d'un autre côté, celles de *Snellius*, quoique bien moins ſujettes à de pareils ſoupçons, n'en étoient pas exemptes, & on ignoroit à cette époque les corrections qu'il avoit faites à ſa meſure peu avant ſa mort ; de ſorte que de tous ces travaux il ne réſultoit qu'un pirrhoniſme complet ſur la grandeur même approchée du degré terreſtre.

L'Académie Royale des Sciences ne put voir ſubſiſter plus long-tems des doutes ſur un point ſi important, & l'art d'obſerver ayant été extrêmement perfectionné depuis peu, elle jugea qu'il étoit tems de les éclaircir. M. l'Abbé *Picard* (*a*),

(*a*) M. Picard (Pierre), étoit de la Fléche, mais nous avons en vain recherché l'année

déja célebre par diverſes obſervations très-délicates, fut donc chargé de meſurer de nouveau un degré terreſtre dans les environs de Paris. Il l'entreprit, & il l'exécuta dans les années 1669 & 1670, de la maniere que nous allons dire.

M. *Picard* ſuivit le même procédé que celui que *Snellius* avoit employé dans ſa meſure, & que nous avons décrit en en rendant compte; mais il y apporta des ſoins tels que l'Aſtronomie n'en avoit encore aucun exemple. Il ſe ſervit d'abord d'un ſecteur de dix pieds de rayon ſcrupuleuſement vérifié, dans tous les degrés qui devoient ſervir à ſa meſure. Il étoit garni d'un excellent Téleſcope avec des fils ſe croiſans au foyer de l'oculaire, comme on a dit dans l'article précédent. Il meſura ainſi à Amiens & à Malvoiſine la diſtance d'une étoile de Caſſiopée, qui paſſoit à moins de 10 degrés du zénith, de l'un & de l'autre lieu, & il trouva leur différence de latitude de $1°, 22', 55''$. Quant à ſa meſure trigonométrique, tous les angles de ſes triangles furent vérifiés, & deux meſures réitérées de cette baſe avec le ſoin dont il étoit capable, ne lui donnerent qu'une différence de deux pieds; la premiere meſure ayant été de 5662 toiſes 5 pieds, & la ſeconde de 5663 toiſes 1 pied. C'eſt pourquoi il prit un milieu, & la fixa à 5663 toiſes. Il trouva enfin, après tous ſes calculs, que la diſtance interceptée entre les paralleles d'Amiens & de Malvoiſine étoit de 78850 toiſes, ce qui donne 57060 toiſes par degré. On peut voir le détail de ces opérations dans ſon ouvrage ſur la meſure de la terre, inſéré parmi les anciens Mémoires de l'Académie, T. VII.

Nous avons dit que M. *Picard* avoit pris dans la meſure de ſa baſe & de ſes triangles tous les ſoins dont il fut capable. Mais dans des opérations ſi délicates, il y a tant de précau-

de ſa naiſſance. Il fut un des huit premiers que M. Colbert réunit pour former l'Académie Royale des Sciences. Sa dextérité à obſerver, fut cauſe qu'il eut grande part aux immenſes nivellemens qu'on entreprit pour amener des eaux à Verſailles. Cet Aſtronome célebre mourut en 1684. Il laiſſa pluſieurs ouvrages aſſez avancés, que M. de la Hire prit ſoin de mettre en ordre, & publia en 1693. Ces ouvrages ſont un excellent Traité de Gnomonique, ſous le titre de *Pratique des grands Cadrans*; d'ingénieux *fragmens de Dioptrique*, & ſon *Traité du Nivellement*. On les trouve auſſi dans le T. VI des anciens Mémoires de l'Académie. On lit dans le T. VII ſa *Meſure de la terre*, ſon *Voyage à Uranibourg*, qui avoient paru de ſon vivant, avec quantité d'obſervations aſtronomiques, & géographiques faites en divers lieux du Royaume.

tions à prendre, précautions dont pluſieurs ne ſont ſouvent ſuggérées que par le tems, & les fautes d'autrui, que nous ne porterons aucune atteinte à ſa réputation, en remarquant qu'il ne laiſſa pas de tomber dans quelques erreurs. Les conteſtations élevées dans ces derniers tems au ſujet de la figure de la terre, ayant obligé de ſoumettre ſes opérations à la plus rigide diſcuſſion, on a trouvé (*a*) que (toute compenſation faite de quelques corrections qu'il ne pouvoit pas connoître, comme de l'aberration de la lumiere découverte depuis lui, & de quelques erreurs en ſens contraire dans la détermination de l'amptitude de l'arc entre Paris & Amiens), il s'étoit trompé dans cette détermination d'environ ſept ſecondes par excès. En ſuppoſant donc la meſure géodéſique parfaitement exacte, M. *Picard* eût dû trouver le degré plus long d'environ 120 toiſes; mais par un heureux hazard, il ſe trouve que cette erreur eſt en grande partie compenſée par quelques autres dans ſa meſure géodéſique. En premier lieu, en vérifiant les opérations de M. *Picard*, on a trouvé (*b*) dans les 19 dernieres mille toiſes, une erreur de 26 toiſes, erreur qu'il faut imputer à la hâte avec laquelle il fut obligé de prendre quelques-uns de ſes derniers triangles, ce qui ne lui permit pas de choiſir les plus avantageux, ni d'en vérifier les angles avec aſſez de ſoin. En ſecond lieu, il eſt aujourd'hui reconnu que M. *Picard* s'eſt trompé dans la dimenſion de ſa baſe. Cette ſeconde erreur, d'abord reconnue par MM. *Caſſini*, enſuite vérifiée à diverſes repriſes par eux & M. de la *Caille* (*c*), vient enfin d'être conſtatée par une nouvelle meſure de cette baſe ordonnée par l'Académie, ou, parce que les termes de la baſe de M. *Picard* ne ſont pas connus, par la meſure d'une nouvelle baſe dans la direction de la ſienne, & par la détermination trigonométrique d'un côté du premier triangle de ſa ſuite. Des deux Compagnies d'Académiciens qui ont ſéparément travaillé à cette vérification, l'une, ſçavoir celle compoſée de MM. *Bouguer*, *Camus*, *Caſſini de Thury*, & *Pingré*, ont trouvé (*d*) ce côté, qui eſt la diſtance entre la tour de Montlheri, & le clocher de Brie-Comte-Robert, de 13108 toiſes & quelques pouces, à

(*a*) Degré du méridien entre Paris & Amiens.

(*b*) Méridienne de Paris vérifiée.

(*c*) Ibid.

(*d*) Opérations faites par ordre de l'Académie, &c. 1757, in-8°.

deux pieds près de même que MM. *Caſſini* & de la *Caille*, au lieu que M. *Picard* l'avoit déterminée de 13121 toiſes, 1 pied. Voilà donc ſur une longueur de 13000 toiſes, un erreur de 13; & comme la baſe de M. *Picard* en avoit près de 6000, il en réſulte une erreur ſur cette baſe d'une toiſe par mille. De la meſure de l'autre bande diſcutée par M. le *Monnier* (*a*), il ſuit que cette erreur n'eſt que de quatre pieds & demi. Voilà donc, ſuivant M. *Bouguer*, & ſes collegues, une erreur d'une toiſe par mille, ce qui fait 57 ſur les 57060 toiſes de la longueur trouvée par M. *Picard*, à quoi ajoutant les 26 ci-deſſus, cela fait 83 toiſes, dont cet ancien Académicien eût dû trouver ſon degré plus court. Mais il l'eut dû trouver plus long de 110, par les raiſons qu'on a vues plus haut: ainſi il reſte qu'en total il doit être plus long de 27 toiſes; ce qui le réduit à 57087. Mais ſi nous n'admettons avec M. le *Monnier* qu'une erreur de trois quarts de toiſe par mille, il ſera un peu plus long, ſçavoir de 57100 toiſes. En prenant donc un milieu, car il n'eſt pas poſſible de ſe déterminer entre des opérations faites de part & d'autre avec tant de ſoin, nous réputerons le degré de M. *Picard* de 57095 toiſes.

M. *Picard* finiſſoit à peine ſon grand ouvrage de la meſure d'un degré terreſtre, qu'il entreprit un voyage pour l'utilité de l'Aſtronomie. Afin de ſe ſervir avec quelque ſuccès des obſervations de *Tycho-Brahé*, toujours eſtimées des Aſtronomes, afin d'en lier la chaîne avec celle des modernes, il falloit avoir une connoiſſance plus préciſe de la poſition de ſon obſervatoire. Il y avoit, à la vérité, peu de doute ſur ſa latitude; mais ſa longitude étoit aſſez légitimement ſuſpecte, l'art d'obſerver les éclipſes n'étoit pas encore porté, du tems de *Tycho*, à la préciſion qu'il a atteinte depuis par le moyen des lunettes & des pendules. M. *Picard* partit donc en 1671, pour vérifier la poſition d'Uranibourg. Ce ſéjour d'Uranie, autrefois ſi magnifique, étoit dans un état bien capable d'exciter les regrets d'un amateur de l'Aſtronomie: à peine en ſubſiſtoit-il des veſtiges ſur le terrein, & dans la mémoire des hommes. M. *Picard* parvint cependant après beaucoup de recherches, & à l'aide du plan de *Tycho*, à en reconnoître quelques en-

(*a*) Obſervations faites par ordre du Roi, 1757.

droits où il fixa ſes inſtrumens. Il y trouva la latitude, différente ſeulement d'une minute de celle que *Tycho* lui avoit aſſignée. Quant à la longitude, la différence étoit, comme on l'avoit ſoupçonnée, beaucoup plus conſidérable; elle alloit à quelques degrés.

M. *Picard* fit à Uranibourg une autre obſervation qui étonna beaucoup les Aſtronomes. En relevant les angles de poſition de divers endroits à l'égard de la méridienne d'Uranibourg, & les comparant à ceux que *Tycho* avoit trouvés, il s'apperçut qu'ils étoient différens de 18 minutes; de ſorte que ce célebre Aſtronome paroiſſoit s'être trompé de 18 minutes dans la détermination de ſa méridienne. Cependant c'eſt un peu trop ſe hâter que d'en conclure que *Tycho* ait commis une erreur ſi conſidérable dans une détermination auſſi importante; M. *Picard* lui-même, n'oſe le faire, & il aime mieux conjecturer que ces angles ne devant ſervir qu'à la Carte des environs de l'Iſle d'Huene, ne furent pas pris par *Tycho* avec ſon exactitude ordinaire.

Quoi qu'il en ſoit, cette obſervation de M. *Picard* fit naître alors dans quelques eſprits la penſée que la ligne méridienne pourroit bien être variable. Mais cette conjecture a été détruite par la ſtabilité de celle de Boulogne, dans laquelle M. *Caſſini* ne trouva pas la moindre variation, après plus de 30 ans, non plus que M. *Manfredi*, qui l'a de nouveau vérifiée dans ces derniers tems (*a*). La poſition des Pyramides d'Egypte, qui ſont encore très-exactement orientées, ſuivant le rapport de M. de *Chazelles*, eſt un nouveau motif de croire que cette ligne eſt invariable. Car une poſition ſi exacte ne pouvant être l'effet du hazard, il faut qu'elle ait été autrefois choiſie de deſſein prémédité, & qu'elle ſoit l'ouvrage des anciens Egyptiens. Il y a encore d'autres raiſons qui rendent cette variation peu probable; mais nous les ſupprimons pour abréger.

V I.

Tandis que M. *Picard* étoit à Uranibourg, l'Académie méditoit un autre voyage, dont l'Aſtronomie & la Phyſique

(*a*) *Comm. Acad. Bonon.* T. II.

ont tiré de grandes lumieres. Il s'agiſſoit de déterminer par des obſervations immédiates & plus certaines que toutes celles qu'on avoit encore faites en Europe, divers élémens de la théorie du Soleil, comme la déclinaiſon de l'écliptique, l'entrée de cet aſtre dans l'équateur, ſa parallaxe, &c. Quelque ſoin qu'y euſſent mis juſques-là les Aſtronomes, il reſtoit encore bien des incertitudes ſur ces déterminations délicates, à cauſe de l'obliquité ſous laquelle le Soleil paroît toujours dans ces contrées. Il falloit donc obſerver de quelque endroit de la terre, où cet aſtre paſſant très-peu loin du zénith, ne fût ſujet à aucune réfraction, ni aucune parallaxe ſenſible. Ces avantages, on devoit les trouver aux environs de l'équateur, où le Soleil ne s'écartant jamais du zénith que de 20 à 30°, la parallaxe & la réfraction ne peuvent influer que fort légérement ſur les réſultats. Un pareil voyage préſentoit encore diverſes utilités, entr'autres celle d'obſerver en même tems dans des lieux très-éloignés, les deux planetes Mars & Venus, afin de reconnoître quelle diverſité d'aſpect produiſoit cet éloignement, & de porter par-là quelque jugement ſur leur diſtance à la terre, & celle du Soleil. On pouvoit enfin obſerver ainſi immédiatement la parallaxe de la Lune, élément de ſa théorie ſi important, & qu'on n'avoit pu encore déterminer que par une ſorte de tâtonnement.

Voyage de M. Richer, & découverte à laquelle il donne lieu.

Le voyage dont nous parlons fut donc réſolu, & l'Iſle de Cayenne, ſoumiſe à la domination Françoiſe, fut jugée propre à cet objet: on le propoſa au Roi, qui l'agréa; ſur quoi M. *Richer*, un des Académiciens, fut choiſi pour l'exécuter; & muni d'amples inſtructions ſur tous les points qu'on deſiroit d'éclaircir, il partit vers la fin de 1671, & arriva à Cayenne au mois d'Avril 1672. Il y obſerva d'abord les deux hauteurs ſolſticiales du Soleil de cette année, & il détermina la diſtance des tropiques de 46°, 57′, 4″; ce qui donne pour l'inclinaiſon de l'écliptique à l'équateur 23°, 28′, 32″; c'étoit à 10 ou 12″ près celle que M. *Caſſini* avoit déterminée dans ſes Tables. M. *Richer* obſerva auſſi à Cayenne les deux équinoxes qui s'y firent durant ſon ſéjour, auſſi-bien que les hauteurs méridiennes du Soleil pendant la plus grande partie de l'année 1672, & le commencement de 1673. Toutes ces obſervations ſervirent beaucoup à M. *Caſſini* pour rectifier ſes Tables. Les obſerva-

tions correſpondantes de Mars, diſcutées & comparées avec ſoin, ne donnerent pour cette planete, lorſqu'elle eſt la plus voiſine de la terre, que 25″ de parallaxe horizontale ; d'où l'on conclut que celle du Soleil preſque trois fois auſſi éloigné, eſt ſeulement de 9 à 10″. M. *Richer* obſerva enfin un grand nombre d'étoiles, ſoit de celles qui ne ſont point viſibles en France, ſoit de celles qui s'élevant trop peu ſur l'horizon de ces contrées, y ſont vues trop obliquement, & dont l'obſervation eſt ſujette à de grandes incertitudes, à cauſe de l'inégalité des réfractions. On voit toutes ces obſervations dans le voyage de cet Aſtronome, qui a été inſéré dans le Tome VII des anciens Mémoires de l'Académie.

Mais l'obſervation qui rend principalement mémorable le voyage de M. *Richer*, eſt celle du retardement du pendule à ſecondes qu'il y remarqua. Arrivé à Cayenne, il vit avec étonnement que ſon horloge, quoi qu'il eût donné au pendule la même longueur qu'en France, retardoit tous les jours d'environ deux minutes & demie ſur le mouvement moyen du Soleil, de ſorte qu'il fallut pour l'y faire accorder, raccourcir ce pendule d'une ligne & un quart. Pour plus de certitude, il rapporta ſon pendule ainſi raccourci en France, & alors il ſe trouva en effet qu'il étoit plus court d'une ligne & quelque choſe, que celui qui battoit les ſecondes à l'Obſervatoire de Paris.

On ne fut pas médiocrement étonné en France du phénomene annoncé par M. *Richer*, & on le regarda d'abord comme fort douteux. On croyoit être d'autant mieux fondé à penſer ainſi, que M. *Picard* étant à Uranibourg, n'avoit trouvé aucun changement à faire dans la longueur de ſon pendule, non plus que M. *Roemer* à Londres. Mais quelques années après, MM. *Varin* & *Deshayes* ayant été envoyés en divers lieux de la côte d'Afrique & de l'Amérique, pour y obſerver, ils remarquerent dans les lieux voiſins de l'équateur, la même choſe que M. *Richer*. Il y a plus, ils furent obligés de raccourcir leur pendule d'une quantité plus conſidérable que cet Aſtronome ne l'avoit rapporté. Il n'y a rien en cela qui doive nous étonner ; il eſt au contraire tout-à-fait naturel que M. *Richer*, obſervant pour la premiere fois un phénomene ſi inattendu & ſi ſingulier, fit tous ſes efforts pour l'éluder en quelque ſorte.

M.

Ce retardement du pendule, à meſure qu'on le tranſporte dans des lieux plus voiſins de l'équateur, eſt une obſervation tellement confirmée par le rapport unanime des Aſtronomes, qu'il eſt inutile de nous arrêter davantage à le prouver. Mais c'eſt une mauvaiſe explication que celle qu'ont prétendu en donner quelques Phyſiciens, en diſant que c'eſt un effet de la chaleur du climat qui alonge la verge du pendule, & qui en rend par-là les vibrations plus lentes. Les expériences qu'on a de la dilatation des métaux opérée par la chaleur, apprennent qu'il en faudroit une bien plus conſidérable que celle qu'éprouve la verge d'un pendule, pour cauſer un alongement capable de produire un pareil retardement; & d'ailleurs les Académiciens François, qui ont meſuré la longueur du pendule ſur les montagnes du Pérou, & au milieu d'un air tempéré, ou exceſſivement froid, n'ont pas laiſſé d'obſerver le même phénomene.

Les nouvelles obſervations de Meſſieurs *Varin* & *Deshayes*, ne permettant plus de douter que le pendule à ſecondes ne fût de différentes longueurs dans différentes latitudes, M. *Huyghens* qui, lors de la premiere annonce du phénomene, ne s'étoit pas hâté d'en chercher l'explication, ſe mit à y réfléchir, & il la découvrit. Il vit d'abord que de ce retardement il ſuit que la peſanteur eſt moindre ſous l'équateur, & aux environs, que dans les autres lieux de la terre. Car puiſque le même pendule oſcille plus lentement dans les lieux voiſins de l'équateur, c'eſt-à-dire, que la même maſſe roulant le long du même arc, tombe plus lentement, d'où cela peut-il venir? ſinon de ce que ſa peſanteur eſt moindre. M. *Huyghens* apperçut en même tems une raiſon ſi naturelle de ce phénomene, qu'elle auroit dû, ce ſemble, le faire découvrir *à priori*. La peſanteur, dit-il, étant primitivement la même dans toutes les parties de notre globe, elle ſeroit partout égale, s'il étoit en repos. Mais qu'on lui donne le mouvement de circonvolution que tous les Aſtronomes s'accordent à reconnoître, dès-lors il en naîtra une force centrifuge oppoſée à la peſanteur; & qui la diminuera inégalement dans les divers lieux de la terre; car cette force centrifuge eſt plus grande ſous l'équateur que partout ailleurs, puiſque tous les points de ce cercle parcourant journellement un plus grand eſpace, ſe meuvent

avec plus de vîteſſe. La force centrifuge détruira donc ſous l'équateur une plus grande partie de la peſanteur que partout ailleurs ; & par conſéquent elle en détruira dans chaque lieu une partie d'autant plus grande, qu'il ſera plus voiſin de ce cercle. Ajoutons à cela, que la force centrifuge tendant à écarter les corps dans le ſens perpendiculaire à l'axe de la terre, ſous l'équateur elle eſt directement oppoſée à la peſanteur, au lieu que dans les autres endroits de la terre, elle ne lui eſt oppoſée qu'obliquement. Ainſi, ſelon les loix de la méchanique, toute cette force eſt employée ſous l'équateur à diminuer la peſanteur, & ſous les paralleles à ce cercle, il n'y en a qu'une partie qui contribue à cet effet. Voilà une nouvelle cauſe pour laquelle la peſanteur primitive eſt moins diminuée dans les lieux hors l'équateur que ſous ce cercle. M. *Huyghens*, guidé par ſa théorie des forces centrifuges, trouve que ſous l'équateur, les corps doivent peſer d'une 289e moins que ſi la terre étoit en repos.

Cette conſéquence, quoique bien digne de remarque, n'eſt cependant pas ce qu'il y a de plus mémorable dans la découverte de M. *Huyghens* : allant plus loin, il conclud du phénomene dont nous parlons, que la terre n'eſt point parfaitement ſphérique, comme on l'avoit cru juſqu'alors, mais qu'elle eſt applatie vers les poles, & renflée ſous l'équateur. Cela ſuit du raiſonnement ci-deſſus ; car ſuppoſons pour un inſtant la terre ſphérique & en repos, les directions des graves, telles que celles du pendule, concourront au centre. Mais qu'on donne à notre globe un mouvement de rotation, la force centrifuge qui tend à écarter de l'axe, ſera oblique à la direction de chaque poids, excepté celui qui ſera placé ſous l'équateur. Ainſi chacun de ces poids ſera écarté de ſa direction primitive, & d'autant plus que la force centrifuge lui ſera moins oblique ou ſera plus forte. Les directions des corps graves, hormis celles des poids placés ſous l'équateur & au pole, n'iront donc plus aboutir au même point, mais elles feront avec l'axe de rotation des angles plus aigus que ſi la terre eût été en repos.

Fig. 126. Ce raiſonnement eſt aiſé à ſentir, à l'aide de la figure 126, où les directions primitives ſont marquées par des lignes ponctuées, & les directions actuelles par des lignes pleines. M. *Huyghens* trouvoit que cette déviation du fil à plomb, de la direc-

tion centrale, & perpendiculaire à la ſurface de la terre ſuppoſée ſphérique, étoit vers la latitude de 45°, égale à 5 minutes & 5 ſecondes, erreur conſidérable, & contraire à l'expérience qui nous apprend que les directions des graves ſont perpendiculaires à la ſurface de la terre ou des fluides en repos. Cette ſurface ne ſçauroit donc être ſphérique; mais il faut qu'elle ſoit plus relevée vers l'équateur, ou en forme de ſphéroïde engendré par la révolution d'une ellipſe autour de ſon petit axe.

Il eſt juſte de remarquer que cette curieuſe découverte n'eſt pas moins l'ouvrage de M. *Newton*, que de M. *Huyghens*. Le célebre Philoſophe Anglois y parvenoit vers le même tems, par un raiſonnement peu différent. Il eſt auſſi le premier qui l'ait dévoilée au public dans ſon fameux Livre des *Principes*. M. *Huyghens* ne mit au jour ſes réfléxions ſur ce ſujet, que quelques années après, ſçavoir en 1690, dans ſon Livre *De cauſâ gravitatis*. Il y fixe la quantité de l'applatiſſement de la terre, ou la différence de ſes axes, à une 578e du diametre de l'équateur, & il trouve pour la figure génératrice du ſphéroïde terreſtre, une courbe du quatrieme degré. Mais nous réſervons de plus grands détails ſur ce ſujet pour l'endroit où nous rendrons compte des travaux des modernes pour déterminer la vraie figure de la terre.

VII.

Découverte du mouvement ſucceſſif & de la viteſſe de la lumiere.

Des obſervations continuées long-tems & avec ſoin, ont ordinairement l'avantage de faire appercevoir des phénomenes dont on n'avoit encore aucun ſoupçon; ſouvent même il arrive que ces obſervations conduiſent à une découverte plus intéreſſante que celle dont on cherchoit à s'aſſurer par leur moyen. L'exemple que nous offre cet article, eſt un des plus remarquables.

M. *Caſſini*, & les Aſtronomes de l'Académie, étoient attentifs, depuis pluſieurs années, à obſerver les éclipſes des ſatellites de Jupiter, ſoit dans des vues géographiques, ſoit pour perfectionner la théorie de ces petites planetes. Ces obſervations firent reconnoître une nouvelle inégalité dans le mouvement du premier ſatellite. On remarqua que depuis l'oppoſi-

tion juſques vers la conjonction de Jupiter & du Soleil, les émerſions de ce ſatellite hors de l'ombre, qui ſont les ſeules qu'on puiſſe obſerver, retardoient continuellement ſur le calcul, de ſorte que la différence étoit vers la conjonction d'environ 14 minutes. On obſervoit le contraire après la conjonction, c'eſt-à-dire, que depuis les premieres immerſions qu'on obſerve après la conjonction, juſqu'aux dernieres obſervations de ce genre qu'on peut faire avant l'oppoſition, l'entrée du ſatellite dans l'ombre anticipoit de plus en plus le calcul, la différence allant enfin juſqu'à environ 14 minutes.

On attribue ordinairement à M. *Roemer* (*a*), d'avoir trouvé l'explication également vraiſemblable & ingénieuſe, qu'on donne de ce phénomene. Mais on ſe trompe: on voit par un écrit de M. *Caſſini*, publié au mois d'Août 1675, que c'eſt cet Aſtronome qui en eſt le premier auteur. « Cette ſeconde inéga-» lité, dit-il, paroît venir de ce que la lumiere employe quel-» que tems à venir du ſatellite juſqu'à nous; & qu'elle met en-» viron dix à onze minutes à parcourir un eſpace égal au demi-» diametre de l'orbite terreſtre » (*b*). Cependant quelque tems après, M. *Caſſini* ébranlé par une difficulté dont on parlera bien-tôt, changea de ſentiment. Mais cette explication abandonnée de ſon auteur, M. *Roemer* l'adopta, & la fit valoir d'une maniere qui, malgré les difficultés de M. *Caſſini*, réunit preſque tous les ſuffrages: En voici le précis.

Si la terre reſtoit conſtamment au même point A où elle *Fig.* 127. eſt, lorſqu'on obſerve une des premieres émerſions du ſatellite après l'oppoſition de Jupiter, on verroit toutes ces émerſions

(*a*) M. Roemer (Olaus), naquit à Copenhague, le 25 Septembre 1644, v. ſtyl. Son premier maître fut Eraſme Bartholin, avec lequel il travailla juſqu'en 1671, que M. Picard allant à Uranibourg, lui trouva tant de diſpoſitions pour les Mathématiques, qu'il l'engagea à le ſuivre en France; mais rien n'eſt plus hazardé que ce qu'on lit dans la Préface du *Dictionnaire de Mathématiques*, ſçavoir que M. Picard ne l'employoit qu'à nettoyer ſes verres. M. Roemer vint à Paris ſur un pied plus diſtingué, & ne tarda pas à être penſionné du Roi, & admis dans l'Académie, dont il enrichit les Mémoires de quantité d'inventions méchaniques & aſtronomiques. Il retourna en 1681 dans ſa patrie, où il fut décoré du titre d'Aſtronome du Roi. Il ſe mit alors à travailler à déterminer la parallaxe annuelle des fixes: nous avons rendu compte de ſes tentatives & de ſes prétentions ſur ce ſujet, dans la Part. III, L. IV, art. VII. Il fut fait, en 1705, premier Magiſtrat de Copenhague, & Conſeiller d'Etat, places qu'il remplit avec la ſatisfaction publique, juſqu'à ſa mort, qui arriva le 19 Septembre 1710. On trouve ſa vie à la tête du Livre que M. Horrebow ſon ſucceſſeur, publia en 1725, ſous le titre de *Baſis Aſtronomiæ; &c.* qui eſt une deſcription de l'Obſervatoire, & des inſtrumens de M. Roemer.

(*b*) Hiſtoire de l'Académie. ann. 1675.

arriver au moment indiqué par le calcul. Mais durant l'intervalle de cette émerſion à la ſuivante, la terre paſſe en *a*, & s'éloigne de Jupiter de la quantité *a* A. Si donc la lumiere venant du ſatellite, employe quelque tems à ſe tranſmettre d'un lieu à un autre, elle arrivera plus tard eu *a* qu'en A. Ainſi l'obſervateur terreſtre verra plus tard le retour de la lumiere du ſatellite, que s'il eût reſté en A. A la vérité, cette différence de tems ſera inſenſible d'une émerſion à la ſuivante. Mais quand la terre ſera parvenue au point B de ſon orbite, alors le calcul anticipera le moment de l'obſervation, de tout le tems que la lumiere mettra à parcourir la diſtance A B, preſque égale au diametre de l'orbite terreſtre ; & c'eſt-là préciſément le phénomene qu'on obſerve. Lors au contraire que la terre arrivée en C, commencera à appercevoir les immerſions du même ſatellite dans l'ombre, la terre allant au devant de la lumiere, l'obſervation anticipera de plus en plus le calcul, de maniere que quand le ſpectateur terreſtre ſera en D, il verra l'immerſion plutôt que le calcul ne l'indique, de tout le tems que la lumiere met à aller de D en C.

Cette ingénieuſe explication nous fournit la ſolution d'un des plus curieux problêmes auxquels l'eſprit humain ſemble pouvoir aſpirer ; ſçavoir de déterminer la vîteſſe avec laquelle la lumiere ſe répand dans les eſpaces céleſtes. La quantité de tems dont le calcul des émerſions anticipe le moment de l'obſervation, eſt de 15 à 16′, lorſque la terre eſt dans le point B, l'un des derniers d'où l'on puiſſe appercevoir Jupiter prêt à être caché dans les rayons du Soleil. Delà on conclud, en comparant la corde A B avec le diametre de l'orbite terreſtre, que la lumiere met 16 à 18′, à parcourir cette étendue, d'où il ſuit qu'elle vient du Soleil à nos yeux dans l'eſpace de 8 à 9′. Mais la diſtance de cet aſtre à la terre, eſt d'environ 20000 demi-diametres terreſtres. Ainſi la lumiere en parcourt environ 40 dans une ſeconde : elle ne met qu'une ſeconde & demie à venir de la Lune juſqu'à nous. Cette vîteſſe, quelque prodigieuſe qu'elle ſoit, ne doit pas paroître incroyable à un Philoſophe. Le ſyſtême de l'Univers n'eſt qu'un compoſé de merveilles non moins dignes d'admiration, & auſſi propres à confondre l'eſprit humain.

Le mouvement ſucceſſif de la lumiere a été pendant long-

tems ſujet à deux objections, dont une étoit aſſez preſſante. La premiere eſt de M. *Caſſini*, & c'eſt celle qui lui fit changer de ſentiment, comme on a dit plus haut. Si le mouvement ſucceſſif de la lumiere eſt la cauſe de l'inégalité dont on vient de parler, d'où vient, diſoit-il, n'a-t'elle point lieu à l'égard des trois autres ſatellites ? Leurs éclipſes devroient être ſujettes aux mêmes accélérations & retardemens périodiques que celles du premier, cependant on n'obſerve rien de ſemblable. M. *Maraldi* (*a*), qui, à l'exemple de ſon oncle, rejette ce mouvement de la lumiere, fortifie cette objection de quelques autres, & ſurtout de celle-ci. Si c'étoit ce mouvement qui produisît le phénomene en queſtion, on devroit, diſoit-il, obſerver une troiſieme inégalité, dépendante du lieu de Jupiter dans ſon orbite, & qui feroit retarder les éclipſes de ſes ſatellites, depuis ſon périhélie juſqu'à ſon aphélie, & au contraire avancer depuis ſon aphélie juſqu'à ſon périhélie. Car toutes choſes d'ailleurs égales, la diſtance de Jupiter à la terre, va en croiſſant dans le premier cas, & en décroiſſant dans le ſecond. Et cette différence de tems, ajoute-t'on, ne ſeroit pas inſenſible : en effet, la différence d'éloignement de Jupiter à nous, eſt dans ces deux cas le double de l'excentricité de ſon orbite ; ce qui fait environ une moitié de la diſtance du Soleil à la terre. Ainſi le tems employé par la lumiere à parcourir cette diſtance, étant de huit à neuf minutes, il en faudra environ quatre de plus, Jupiter étant dans ſon aphélie, que lorſqu'il ſera dans ſon périhélie.

Mais ces objections, qui étoient conſidérables du tems de MM. *Caſſini* & *Maraldi*, ſont aujourd'hui ſuffiſamment réſolues. De tous les ſatellites de Jupiter, le premier eſt le ſeul dans lequel on puiſſe démêler cette inégalité particuliere, parce que c'eſt celui dont le mouvement eſt le plus régulier, & le mieux aſſujetti au calcul. Il n'en eſt pas, à beaucoup près, de même des autres. On commet encore, à l'égard de ces derniers, & en uſant même des meilleures tables, des erreurs beaucoup plus grandes que la plus grande équation dépendante du mouvement de la lumiere. D'ailleurs leur entrée dans l'ombre eſt ſi lente, que jointe aux variations qui naiſ-

(*a*) Mémoires de l'Académie, 1707.

ſent de l'inégalité des Téleſcopes, des yeux, & des hauteurs de Jupiter ſur l'horizon, elle rend incertaine à pluſieurs minutes près, le vrai moment de l'immerſion. Ainſi il n'eſt plus ſurprenant qu'on ne puiſſe point y reconnoître d'une maniere déciſive le retardement ou l'accélération que produit le mouvement ſucceſſif de la lumiere.

A l'égard de la ſeconde objection, ſçavoir celle de M. *Maraldi*, elle eſt entiérement réſolue. Depuis que la théorie du premier ſatellite a été rectifiée en pluſieurs points, l'inégalité provenante de l'excentricité de Jupiter, a été parfaitement reconnue; & elle entre au nombre des élémens du calcul, dans toutes les tables modernes. On peut voir entr'autres, ſur cela, celles que M. *Vargentin* a publiées il y a peu d'années, & qui par leur excellence ſont dans une grande eſtime auprès des Aſtronomes. Ajoutons que cette heureuſe découverte, déja ſi conforme à la ſaine Phyſique, vient de recevoir un nouveau degré de certitude, de celle de M. *Bradlei* ſur l'aberration des fixes, dont on rendra compte dans le lieu convenable.

VIII.

Travaux tendans à la perfection de la Géographie.

Pendant qu'on faiſoit les belles découvertes qu'on a expoſées dans les articles précédens, l'Académie des Sciences, toujours attentive à leur principal objet, qui eſt de ſervir à la ſociété, n'oublioit rien pour tirer ce fruit de l'Aſtronomie, en perfectionnant par ſon moyen la Navigation & la Géographie. On voit cette ſçavante Compagnie raſſembler avec ſoin dès ſa naiſſance toutes les obſervations propres à ce grand deſſein, entretenir des correſpondances avec les Obſervateurs les plus habiles répandus dans différens pays, dépêcher enfin quelquefois des Obſervateurs pour éclaircir des points importans de Géographie. Les voyages entrepris par MM. *Picard* & *Richer*, n'étoient pas ſeulement relatifs à l'Aſtronomie; ils avoient auſſi pour objet la Géographie & la Navigation, & de déterminer d'une maniere ſûre la poſition de divers lieux.

Il étoit naturel que l'exécution de ce grand projet commençât par la France; auſſi fût-ce le premier travail que s'impoſa l'Académie avec l'agrément du Miniſtere. On voit dès les années 1671 & 1672, divers Géometres & Obſervateurs diſ-

perſés dans les Provinces, en lever géométriquement le plan, & fixer la poſition des points principaux par des obſervations céleſtes. Mais ce fut en 1679 qu'on commença à mettre plus d'activité dans cette entrepriſe. On réputa qu'il falloit d'abord bien établir les extrêmités du Royaume dans tous les ſens. MM. *Picard* & *de la Hire* furent chargés de ce travail, auquel ils employerent environ deux ans. On peut voir le détail de leurs obſervations & de leurs courſes dans l'Hiſtoire particuliere de l'Académie; il ſuffira ici d'en préſenter le réſultat, qui eſt très-propre à juſtifier l'utilité de ces travaux.

En effet, on ne ſçauroit ſe repréſenter combien de groſſieres erreurs ſe trouvoient dans la Carte de la France, avant que l'Académie eût entrepris de la réformer. Toutes les bornes en étoient conſidérablement déplacées. Les Géographes mettoient entre Breſt & Paris une différence en longitude, de 8°, & 9 à 10 minutes: les obſervations réitérées de MM. *Picard* & *de la Hire*, apprirent qu'elle n'étoit que de 6°, 54′; de ſorte que cette pointe de la Bretagne étoit avancée dans la mer de plus de 30 lieues qu'il ne falloit. Il en étoit à peu près de même de toute la côte de l'Océan. Il y a plus; la latitude de la plûpart des villes méridionales du Royaume, étoit marquée moindre qu'elle n'étoit, & l'erreur qui alloit toujours en croiſſant à meſure qu'on s'éloignoit de la capitale, étoit de plus d'un demi-degré aux frontieres; erreur monſtrueuſe, ſi l'on conſidere avec combien de facilité l'on peut meſurer la latitude d'un lieu. M. *de la Hire* dreſſa une Carte corrigée ſuivant ces obſervations, & où ces différences étoient marquées. Lorſqu'il la préſenta au Roi, ce Prince qui voyoit ſon domaine reſſerré de tout côtés, dit en badinant, que ſon Académie lui témoignoit bien peu de reconnoiſſance, puiſque tandis qu'il la ſoutenoit par ſa protection & ſes dépenſes, elle diminuoit l'étendue de ſa domination. L'Académicien répondit apparemment que la puiſſance d'un Monarque dépendoit moins de cette étendue que du nombre & de l'attachement de ſes ſujets; & qu'en cela Sa Majeſté l'emporteroit toujours ſur tous les autres Princes de l'Europe.

M. *Picard* avoit propoſé en 1681, à M. *Colbert*, une entrepriſe qu'on commença à exécuter en 1683. Les corrections que donnoient les obſervations faites ſur les côtes du Royaume,

&

& de côté & d'autre dans l'intérieur, avoient déja appris qu'il falloit reſſerrer toute l'étendue que lui donnoient les anciennes Cartes à peu près proportionnellement à l'éloignement des lieux à la méridienne ou au parallele de Paris. Cependant cela ne ſuffiſoit pas pour avoir une Carte parfaite ; car l'erreur n'étoit pas toujours proportionnelle à cet éloignement, ni dans le même ſens. C'eſt par cette raiſon qu'on avoit commencé dès l'année 1671, à lever géométriquement la Carte de pluſieurs Provinces du Royaume : mais outre que cette méthode étoit exceſſivement longue, M. *Picard* entrevoyoit des difficultés dans la réunion de toutes ces Cartes, les erreurs particulieres pouvant s'accumuler, & rejetter les extrêmités fort loin de leur poſition véritable. Pour remédier à cet inconvénient, il propoſa de tracer une méridienne, c'eſt-à-dire, de déterminer par des opérations géométriques la poſition de la méridienne de l'Obſervatoire de Paris à travers tout le Royaume. Cette ligne devoit être regardée comme une directrice générale très-commode, pour y rapporter toutes les autres poſitions. Il y avoit dans cette entrepriſe, un autre avantage relatif à la connoiſſance parfaite de la grandeur de la terre. Car au moyen de ces opérations, on devoit avoir avec plus de préciſion la longueur de tout l'arc du méridien, compris dans le Royaume, & par conſéquent la grandeur du degré avec bien plus d'exactitude. M. *Picard* vouloit enfin qu'on partageât toute l'étendue du Royaume en triangles appuyés les uns ſur les autres, & ayant leurs ſommets dans des endroits remarquables, dont la poſition auroit été auſſi pour la plûpart déterminée aſtronomiquement. Ce travail fait, il n'eût plus fallu que lever géométriquement l'intervalle du terrein renfermé dans chacun de ces triangles, & en les aſſemblant on devoit avoir une Carte auſſi parfaite qu'il eſt permis de l'attendre de l'induſtrie humaine.

Ce plan parut raiſonnable & expéditif à M. *Colbert*, & il ordonna à l'Académie de l'exécuter. On ſe mit à l'ouvrage dès le milieu de l'année 1680. M. *Caſſini*, accompagné de MM. *Chazelles*, *Varin*, *Deshayes*, *Sedileau* & *Pernim*, alla du côté du Midi ; & M. de la *Hire*, aidé de MM. *Pothenot* & le *Févre*, tourna du côté du Septentrion. M. *Caſſini* prolongea cette même année la méridienne de 140000 toiſes, ou près

de 70 lieues, & détermina géométriquement, à l'égard de la méridienne de Paris, la poſition de tous les lieux un peu remarquables, qui étoient ſitués dans l'étendue de pays qu'elle traverſoit. M. de la *Hire* en fit autant du côté du Nord, & prolongea la méridienne juſqu'à Dunkerque & Mont-Caſſel. Les choſes en étoient à ce point, lorſque M. *Colbert* mourut. Cette mort ſi funeſte aux beaux Arts, que du moment même où elle arriva, on ceſſa de travailler au plus magnifique monument de l'Architecture Françoiſe, pour n'y ſonger de nouveau qu'après plus de ſoixante-dix ans, interrompit preſque ſubitement le travail de la méridienne; M. *Caſſini* continua néanmoins juſqu'au mois de Novembre les opérations qu'il avoit commencées; il en préſenta le deſſein au Roi, qui les approuva, & les jugea dignes d'être pouſſées juſqu'à l'extrêmité du Royaume; mais diverſes circonſtances en ſuſpendirent la continuation : elle ne fut repriſe que pluſieurs années après, ſçavoir au mois d'Août de l'année 1700. M. *Caſſini*, qui avoit commencé ce travail, le reprit alors, & le pouſſa durant le reſte de cette année & la ſuivante, juſqu'aux Pyrénées. On eut par ce moyen une étendue de plus de ſix degrés du méridien, meſurée géométriquement; d'où l'on conclut la grandeur du degré terreſtre de 57097 toiſes.

Il reſtoit encore à meſurer l'arc du méridien intercepté entre Paris, & l'extrêmité ſeptentrionale du Royaume. Car quoique nous ayons dit que M. de la *Hire* y avoit travaillé en 1680, il n'avoit proprement fait que reconnoître les objets, pour revenir enſuite à des opérations plus exactes. On jugea donc qu'il falloit recommencer ſa meſure, où celle de M. *Picard* s'étoit terminée. M. *Caſſini*, le fils du célebre Dominique *Caſſini*, en fut chargé, & l'exécuta en 1718. On trouva l'arc du méridien intercepté entre Dunkerque & Paris de $2^{\circ}, 45', 50''$; & par la meſure trigonométrique, on conclut la grandeur moyenne du degré dans cette partie de la France, de 56960 toiſes. On peut voir le détail de toutes ces opérations dans le Livre que M. *Caſſini de Thuri*, publia peu après ſur ce ſujet (*a*). Perſonne n'ignore la diviſion que cette meſure occaſionna parmi les Aſtronomes concernant la figure de

(*a*) De la grandeur & de la figure de la terre. Suite des Mémoires pour l'année 1718.

la terre. Mais cela appartient à l'hiſtoire de l'Aſtronomie durant ce ſiecle ; & comme ce doit être la matiere d'un article conſidérable de la partie ſuivante de cet ouvrage, nous n'en dirons pas davantage pour le préſent.

Le zele avec lequel l'Académie travailloit à corriger la Carte du Royaume, ne l'empêchoit pas de porter en même tems ſes vues plus loin, & de jetter les fondemens d'une correction ſemblable dans la Géographie entiere. Ce furent ces vues qui l'engagerent à envoyer en 1681 & 1682, trois Obſervateurs, Meſſieurs *Duglos*, *Varin* & *Deshayes*, obſerver la poſition du Cap-Verd, poſition très-importante pour déterminer en général celle de la côte d'Afrique. Comme l'on ne pouvoit obſerver au Cap-Verd même, on choiſit l'Iſle de Goerée, qui en eſt à la vue, & où la France avoit alors un établiſſement. Les obſervations qu'on y fit montrerent que cette partie de la Géographie n'avoit pas moins beſoin que les autres de correction. On trouva qu'à l'exception de *Blaeu*, tous les Géographes avoient placé cette pointe occidentale de l'Afrique, beaucoup plus à l'oueſt qu'elle n'eſt réellement. Delà Meſſieurs *Varin* & *Deshayes* allerent à la Guadeloupe & à la Martinique ; leurs obſervations confirmerent l'Académie dans la perſuaſion où elle étoit déja, que toutes les longitudes marquées dans les Cartes, à l'égard de l'Obſervatoire de Paris, étoient trop grandes, & d'autant plus erronées, que les lieux étoient plus éloignés ; remarque déja faite par Meſſieurs de *Pereisk* & *Gaſſendi*, à l'égard de l'étendue de la Méditerranée, & qui fut encore confirmée par le voyage, que M. *Chazelles* fit en 1693, dans les Echelles du Levant. On conclut de ces obſervations, qu'il falloit rapprocher de 25 à 30°, les pays extrêmement éloignés, comme les Indes & la Chine. On oſa même dès-lors conſtruire ſur ces principes le grand planiſphere de l'Obſervatoire ; & lorſque M. *Hallei* vint en France, il fut bien étonné de voir que ſur de ſimples conjectures on eût placé auſſi exactement qu'on l'avoit fait, le Cap de Bonne-Eſpérance. Les obſervations qu'il avoit faites en 1677, dans l'Iſle de Sainte Hélene, lui avoient appris que ce Cap étoit de ſept ou huit degrés plus occidental que ne le marquoient les Cartes ordinaires, & c'étoit juſtement la correction qu'on y avoit faite dans le planiſphere.

L'Académie devoit naturellement chercher à vérifier par des obſervations immédiates, ſes conjectures ſur la Carte de l'Aſie. Cela eût certainement valu la peine d'un voyage, s'il n'y avoit pas eu déja, dans cette contrée de la terre, pluſieurs Obſervateurs qu'il ne s'agiſſoit que de diriger & d'inviter à un commerce d'obſervations. Tout le monde ſçait que ce qui a ſoutenu long-tems, & qui ſoutient encore à la Chine les Miſſionnaires Européens, c'eſt leur habileté dans les Mathématiques, & ſurtout dans l'Aſtronomie pour laquelle les Chinois ont une vénération ſinguliere. Auſſi depuis le P. *Ricci* qui s'étoit ouvert l'entrée dans cet Empire, la Compagnie de Jeſus n'y envoyoit preſque que des hommes, qui, au zele évangélique, joignoient de l'habileté dans les Sciences qui y ſont eſtimées. Si leur zele pour la propagation du Chriſtianiſme n'a pas eu le ſuccès qu'ils deſiroient, ils ont eu du moins l'occaſion de procurer à l'Europe des connoiſſances géographiques très-précieuſes.

En effet, ces ſçavans Miſſionnaires n'avoient pas attendu les invitations de l'Académie des Sciences, pour faire une multitude d'obſervations utiles. Malgré leurs travaux apoſtoliques, peu de phénomenes avoient échappé à leur vigilance. Dans le catalogue des éclipſes, dreſſé par le P. *Riccioli*, on en voit un grand nombre obſervées à Goa, à Macao, & au Japon; & ces obſervations comparées avec celles des mêmes phénomenes faites en Europe, avoient déja montré qu'il falloit beaucoup raccourcir l'étendue donnée juſqu'alors à l'Aſie d'Occident en Orient. C'eſt ſur ces fondemens que le Pere *Martini* avoit conſtruit ſes Cartes de la Chine, qu'il publia en 1654, ſous le titre d'*Atlas Sinicus*; & le P. *Couplet*, celles qu'il donna en 1684. Ils s'étoient néanmoins encore trompés de pluſieurs degrés, ſurtout à l'égard de l'extrêmité orientale de la Chine; erreur qu'on excuſera facilement quand on conſidérera qu'il n'eſt pas aiſé de ſecouer tout à coup un ancien préjugé. D'ailleurs l'art d'obſerver n'étoit pas encore porté au point de perfection qu'il a atteint vers la fin du ſiecle paſſé.

L'Académie des Sciences s'adreſſa à ces ſçavans Miſſionnaires pour ſe procurer les lumieres qu'elle deſiroit ſur la deſcription de l'Aſie, & bien-tôt elle reçut d'eux une ample moiſſon d'obſervations de toute eſpece, relatives à l'Aſtronomie ou à

la Géographie de l'Inde, que le Pere *Gouye* publia en 1688, avec des notes, & qui font auſſi partie des anciens Mémoires de l'Académie. Elle eut le plaiſir de voir confirmer ce qu'elle avoit ſoupçonné, ſçavoir qu'il falloit rapprocher l'extrêmité orientale de l'Aſie de 25 à 30°, & proportionnellement les lieux moyens, afin de repréſenter fidellement cette partie du monde. En effet, quelques obſervations d'éclipſes faites à Goa, diminuerent la différence de longitude de cette ville avec Paris, de 23°. Il en fut de même de la ville de Siam. Une autre obſervation faite à Macao, nous rendit plus voiſins de ce port, de 17°. Pekin fut rapproché par la même voie de Paris, de plus de 25 degrés. Toutes ces corrections ſi conſidérables & ſi néceſſaires, ont depuis été confirmées par une multitude d'obſervations, ouvrage des Aſtronomes de la même Société, établis dans l'Inde ou à la Chine. Toujours attentifs à l'avancement de la Géographie & de l'Aſtronomie, ils ne ceſſent d'envoyer des obſervations propres à cet objet; & c'eſt à eux ſeuls que nous devons les connoiſſances exactes que nous avons aujourd'hui de ce vaſte Empire, de la Tartarie occidentale, & des pays adjacens. Les Cartes détaillées qu'ils en ont données, & qu'on voit dans la grande Hiſtoire de la Chine du Pere *Duhalde*, ſont un vrai tréſor en Géographie. Je m'étendrois avec complaiſance ſur les nombreuſes obligations qu'on a à ces ſçavans Miſſionnaires, ſans les raiſons que j'ai ſi ſouvent alléguées pour excuſer ma briéveté ſur certains points.

Quelque démonſtrative que ſoit la méthode employée par l'Académie des Sciences dans cette réformation de la Géographie, elle n'a pas laiſſé de trouver des contradicteurs. On vit entr'autres, en 1690, le célebre Iſaac *Voſſius*, s'élever contre la maniere de déterminer les longitudes des lieux par des obſervations aſtronomiques (*a*). Mais, ſoit dit ſans prétendre déroger au mérite de ce ſçavant, ç'en étoit aſſez de ſon Livre *De naturâ lucis*, pour prouver qu'il avoit beaucoup plus d'érudition que de lumieres philoſophiques; & il pouvoit ſe diſpenſer d'en donner une nouvelle preuve par les vagues déclamations qu'il fait contre l'ouvrage de l'Académie. Que

(*a*) *De longitudin.* 1690. Lond. in-4°.

penſer en effet d'un homme qui dit, *qu'il ne peut ſe perſuader que des planetes ſi éloignées* (il parle des ſatellites de Jupiter) *puiſſent être une meſure des longitudes*, à quoi il ajoute, *que juſqu'à ce qu'on ſçache faire des calculs plus exacts des éclipſes, il vaut beaucoup mieux prendre les longitudes de la terre même ou des Caps, que de les aller chercher dans le ciel.* Ces derniers mots tout-à-fait remarquables, montrent que M. *Voſſius* n'avoit pas une idée claire de ce qu'on appelle longitude en Géographie. Car de quelle utilité ſont les Caps ou la terre même pour déterminer la différence de longitude d'un lieu à un autre. J'ai trop bonne opinion de mes lecteurs pour les amuſer d'une réfutation qui ne ſuppoſe que quelques légeres connoiſſances de la ſphere. Au ſurplus, on peut conſulter là-deſſus l'écrit ſolide que M. *Caſſini* oppoſa à *Voſſius*. On le trouve parmi les anciens Mémoires, T. VII.

IX.

De divers Aſtronomes Anglois.

L'Angleterre ſi féconde en Géometres du premier rang, vers le milieu du ſiecle paſſé, ne l'eſt pas moins en Aſtronomes célebres. On y voit ſucceſſivement fleurir *Seth Ward*, Evêque de Salisbury, *Street*, *Wing*, Jean *Newton*, Robert *Hook*, le Chevalier *Wren*, les célebres *Flamſteed* & *Hallei*, &c. On voit auſſi la Société Royale former dès ſa naiſſance diverſes entrepriſes utiles à l'avancement de l'Aſtronomie, établir & rechercher des correſpondances, faire des amas d'obſervations, & perfectionner en divers points l'art d'obſerver. Que ne lui doit-on pas ſurtout, pour avoir donné naiſſance au véritable ſyſtême du monde? Cette brillante découverte, l'ouvrage de l'immortel Iſaac *Newton*, ſuffiroit ſeule pour rendre mémorable dans l'Hiſtoire des Sciences, la nation qui l'a vu naître, & le Corps dont il fut un des membres.

Le fil naturel de notre ſujet nous a déja conduit à parler de quelques-uns des Aſtronomes que nous venons de nommer, comme *Seth Ward*, *Street*, *Wing*, *&c* (*a*). Nous n'y ajouterons rien, & nous paſſerons à faire connoître les ſervices que les autres ont rendus à l'Aſtronomie.

Robert Hook. Le Docteur Robert *Hook*, eſt recommandable à pluſieurs

(*a*) *Voyez* Liv. III, art. 9.

titres dans cette ſcience. Nous avons déja remarqué qu'il s'eſt rencontré avec M. *Picard* en ce qui concerne l'application de la lunette au quart de cercle. Ses tentatives pour déterminer la parallaxe de l'orbite terreſtre (*a*), mériteroient encore ici une place, ſi elles ne nous avoient pas déja ſuffiſamment occupés (*b*). Nous ne nous arrêterons pour le préſent qu'à quelques idées qu'on trouve à la fin du Livre que nous venons de citer, & qui font extrêmement honneur à cet Aſtronome. En effet, on ne voit nulle part le principe de la gravitation univerſelle, auſſi clairement enoncé, & plus développé avant M. *Newton*, que dans le Livre dont nous parlons. Voici les paroles de M. *Hook*.

J'expliquerai, dit-il, un ſyſtême du monde différent à bien des égards de tous les autres, & qui eſt fondé ſur les trois ſuppoſitions ſuivantes.

1°. Que tous les corps céleſtes ont non ſeulement une attraction ou une gravitation ſur leur propre centre, mais qu'ils s'attirent mutuellement les uns les autres dans leur ſphere d'activité.

2°. Que tous les corps qui ont un mouvement ſimple & direct, continueroient à ſe mouvoir en ligne droite, ſi quelque force ne les en détournoit ſans ceſſe, & ne les contraignoit à décrire un cercle, une ellipſe, ou quelque autre courbe plus compoſée.

3°. Que l'attraction eſt d'autant plus puiſſante que le corps attirant eſt plus voiſin.

Il ajoutoit qu'à l'égard de la loi ſuivant laquelle décroît cette force, il ne l'avoit pas encore examiné, mais que c'étoit une idée qui méritoit d'être ſuivie, & qui pouvoit être très-utile aux Aſtronomes; conjecture heureuſe, & qui s'eſt vérifiée d'une maniere ſi brillante entre les mains de M. *Newton*.

M. *Hook* fit auſſi quelques expériences dans la vue de fortifier les conjectures précédentes (*c*). Il ſuſpendit d'abord une boule à un fil très-long, & après l'avoir miſe en oſcillation, il lui imprima un petit mouvement latéral; il remarqua que cette boule décrivoit une ellipſe, ou une courbe en forme d'ellipſe autour de la ligne verticale. Il attacha enſuite au fil de

(*a*) *An attempt to prove the motion of the earth.*
(*b*) *Voyez* T. 1, p. 548.
(*c*) *Voyez* ſa vie à la tête de ſes Œuvres poſthumes.

cette premiere boule, un autre qui en portoit une plus petite; & après avoir donné à cette derniere un mouvement circulaire autour de la verticale, il mit la premiere en mouvement, comme dans l'expérience précédente. On vit alors que ni l'une ni l'autre ne décrivoit une ellipſe, mais que c'étoit un point moyen entr'elles, & qui ſembloit être leur centre de gravité. D'où il conclut que dans un ſyſtême de planetes, tel que celui de la Terre & de la Lune, c'eſt leur centre de gravité commun qui décrit une ellipſe autour de la planete centrale. Tout cela eſt fort ingénieux; néanmoins M. *Hook* ne faiſoit pas attention que les planetes ne décrivent point des ellipſes dont le centre ſoit occupé par la force attirante: c'eſt au foyer que réſide cette force. On lui en fit l'obſervation, & même on l'excita par la promeſſe d'une récompenſe conſidérable à déterminer quelle loi d'attraction feroit décrire à un corps une ellipſe autour d'un autre immobile, & placé à l'un des foyers. Mais cela tenoit à une Géométrie trop délicate, & cette belle découverte, l'une des plus propres à honorer l'eſprit humain, étoit réſervée à *Newton*.

Wren. Le Chevalier *Wren*, dont on a déja parlé comme Mécanicien, mérite encore ici quelques lignes, à titre d'Aſtronome. On lit dans l'Hiſtoire de la Société Royale, l'énumeration de ſes inventions aſtronomiques. On met dans ce rang divers inſtrumens nouveaux plus ſubtilement diviſés, ou plus commodément ſuſpendus que les autres; diverſes additions faites au Micrometre; des obſervations ſuivies ſur Saturne & ſon Anneau, avec une théorie des apparences de cette planete, écrite, dit-on, avant que celle d'*Huyghens* eût vu le jour, ce qui ſemble dire que M. *Wren* ſe rencontra avec *Huyghens* dans l'heureuſe explication que celui-ci a donnée de ces apparences. On ajoute à cela une Sélénographie complete, & un globe lunaire repréſentant avec tant de vérité les cavités & les éminences de la Lune, que lorſqu'il étoit éclairé & regardé de la maniere convenable, on croyoit voir cette planete telle que la montre le Téleſcope; une théorie de la libration de la Lune; des eſſais pour déterminer la parallaxe annuelle des fixes; la méthode de calculer les éclipſes de Soleil par la projection de l'ombre de la Lune ſur le diſque de la terre; méthode, dit l'Auteur de ſa vie, qu'il avoit imaginée dès l'année 1660;

1660; une hypotheſe enfin ſur le mouvement des Cometes, dont nous parlerons dans un des articles ſuivans. Mais les mêmes raiſons qui nous ont privés de la connoiſſance détaillée de ſes inventions en méchanique, nous privent auſſi de celle de ſes diverſes inventions aſtronomiques.

X.

De M. Flamſtead.

On peut contribuer de deux manieres aux progrès de l'Aſtronomie. L'une conſiſte à obſerver aſſidûment les phénomenes céleſtes, pour les tranſmettre à la poſtérité; l'autre à combiner ces obſervations, & à reconnoître par leurs ſecours les hypotheſes les plus propres pour repréſenter les mouvemens des aſtres, & les prédire à l'avenir. Les progrès de cette derniere partie de l'Aſtronomie, ſont tellement liés à ceux de la premiere, que ſans leur ſecours elle ne ſçauroit faire un ſeul pas aſſuré; enſorte qu'on ne doit guere moins de reconnoiſſance à ceux qui ont laborieuſement raſſemblé ces matériaux précieux, qu'à ceux qui les ont mis en œuvre.

C'eſt principalement par des travaux du premier genre, que M. *Flamſtead* (*a*) s'eſt rendu recommandable. Je dis principalement; car on lui doit quelque choſe de plus que des obſervations, entr'autres deux excellens Ecrits qu'il publia en 1672, ſur l'équation du tems, & ſur la théorie lunaire d'*Horoccius* (*b*), écrits qui montrent qu'il n'étoit pas moins propre à la théorie de l'Aſtronomie, qu'à la partie pratique. On a auſſi de lui une *Doctrine de la Sphere*, ouvrage plus ſublime que ce qu'annonce ce titre, & dont l'objet principal eſt une nouvelle méthode pour calculer les éclipſes de Soleil par la projection de l'ombre de la Lune ſur le diſque de la terre: il ſe trouve dans le

(*a*) M. Jean Flamſtead ou Flamſteed, (car on trouve ſon nom écrit par lui-même de ces deux manieres qui, ſuivant la prononciation Angloiſe, ſont également *Flemſtid*), naquit à Denby, dans le Comté de Derby, le 19 Août 1646, vieux ſtyle. La Sphere de Sacro-Boſco, qui lui tomba par hazard entre les mains, lui inſpira le goût de l'Aſtronomie. Il s'y adonna ſans autre maître que quelques Livres, juſqu'en 1669, qu'il adreſſa à la Société Royale des Ephémérides pour l'année 1670; ce qui le mit en relation avec quantité d'habiles gens. Il continua d'obſerver à Denby, juſqu'à la fin de 1673. Il vint alors réſider à Londres, où il entra dans l'état Eccléſiaſtique, & fut pourvu d'un bénéfice. Peu après il fut nommé, à l'occaſion qu'on a dit dans l'article 11, Aſtronome du Roi, & Directeur de l'Obſervatoire de Greenwich, où il ne ceſſa preſque de vaquer aux obſervations juſqu'à ſa mort. Elle arriva le 30 Décembre 1719, vieux ſtyle.

(*b*) *De equat. temp. diatriba.* L. 1672, in-4.

Syſt. Math. de Jonas *Moore* : mais un goût particulier & une ſorte de devoir le tournerent principalement du côté de l'obſervation. Choiſi par *Charles II*, pour remplir la place d'Aſtronome Royal au nouvel Obſervatoire de Greenwich, il n'y fut pas plutôt inſtallé, qu'il ſongea à remplir les vues de cette inſtitution, qui étoient qu'on s'addonnât en particulier à rectifier les lieux des fixes, & à obſerver la Lune pour fonder une théorie exacte de cette planete à l'uſage de la navigation. Occupé principalement de ces deux objets, M. *Flamſtead* ne laiſſa pas de ramaſſer une foule d'obſervations de toute eſpece. Ce tréſor commença à être dans la poſſeſſion du public en 1712, ſous le titre d'*Hiſtoria celeſtis Britannica*, en un vol. in-fol. qui vit le jour par les ſoins de M. *Hallei*, à qui le travail de cette édition fut confié. Mais comme elle avoit été faite un peu contre le gré de M. *Flamſtead*, cet Aſtronome, d'un caractere un peu difficile & bizarre, ſurtout vers la fin de ſes jours, y trouva diverſes choſes à redire, & en entreprit lui-même une ſeconde qui parut en 1725, après ſa mort. Celle-ci eſt beaucoup plus ample, & eſt en 3 volumes in-fol. Outre les obſervations nombreuſes & de toute eſpece que contient cet ouvrage, on trouve dans le troiſieme volume de curieux prolegomenes ſur l'Hiſtoire de l'Aſtronomie, & un nouveau catalogue des fixes plus complet qu'aucun des précédens. Car il contient les lieux de 3000 étoiles, preſque toutes obſervées par M. *Flamſtead*, & parmi leſquelles il y en a un aſſez grand nombre, qui ne ſont viſibles qu'à l'aide du Téleſcope. On y remarque auſſi un catalogue particulier de 67 étoiles du Zodiaque, obſervées avec des ſoins particuliers, à cauſe qu'elles peuvent être occultées par la Lune & par les planetes.

M. *Flamſtead* ſe propoſoit de publier ſur ces obſervations un nouvel Atlas céleſte, ou de nouvelles Cartes de conſtellations ſemblables à celles que *Bayer* avoit données en 1603. Mais ſa mort interrompit ce projet. Il a depuis été mis en exécution par M. James *Hodgſon*, Aſtronome de la Société Royale, qui publia cet Atlas en 1729, (grand in-fol). C'eſt un préſent dont les Aſtronomes doivent lui ſçavoir un gré extrême. On a auſſi publié à Londres, en une grande planche, les conſtellations du Zodiaque, dans l'obſervation deſquelles M. *Flamſtead* avoit redoublé de ſoins & d'attention. L'importance de

ce morceau a porté M. le *Monnier* à le faire graver de nouveau à Paris, en y faiſant les changemens convenables, à raiſon de la progreſſion des fixes. Cette nouvelle édition du Zodiaque de M. *Flamſtead*, a paru en 1755 (*a*).

XI.

De M. Hallei.

Ce n'eſt pas ſeulement en France que nous voyons le zele pour l'Aſtronomie faire entreprendre de longs & de périlleux voyages dans la vue de hâter ſes progrès. L'Angleterre nous offre auſſi des traits de ce zele ſi digne d'éloges. Il faut même en convenir, c'eſt elle qui ſemble en avoir donné le premier exemple. On avoit déja vu en 1651 un Aſtronome Anglois, nommé *Shakerley*, aller aux Indes orientales, dans le deſſein d'y obſerver le paſſage de Mercure ſous le Soleil, qu'il avoit trouvé par ſes calculs ne devoir être viſible que dans cette partie du monde : il l'y obſerva effectivement, & ſon obſervation eſt la ſeule qu'on ait de cette conjonction viſible du Soleil & de Mercure.

Ce furent des motifs ſemblables qui inſpirerent en 1676 à M. *Hallei* (*b*) le deſſein d'aller à l'Iſle de Sainte-Helene. Perſonne n'ignore quels ſoins les Aſtronomes ſe ſont toujours donnés pour faire l'énumération des étoiles, & en

(*a*) Chez Dheuland.

(*b*) M. Hallei (Edmond) naquit à Londres le 8 Novembre 1656, vieux ſtyle. Il étudia ſous Thomas Gale, & dès ſa jeuneſſe il donna diverſes preuves de ſon ſçavoir en tout genre. Il fit, comme on le raconte dans cet article, en 1677, le voyage de Sainte-Hélene pour y obſerver, & à ſon retour il fut reçu dans la Société Royale de Londres. Peu après il partit pour Dantzick, afin d'y viſiter Hevelius ; après qnoi il parcourut la France & l'Italie, pour y voir les Sçavans. De retour dans ſa patrie, il y fut ſédentaire pendant une quinzaine d'années, après quoi il commença de nouvelles courſes pour la perfection de la Géographie & de la navigation. Telle eſt entr'autres la longue & pénible navigation qu'il entreprit en 1698, pour vérifier ſa théorie des variations de la Bouſſole, & dont il ne revint qu'en 1702, après avoir paſſé quatre fois la Ligne. En 1703, il fut nommé à la Chaire de Géométrie, vacante à Oxford, par la mort de Wallis ; & en 1720, Flamſtead étant mort, il fut nommé à ſa place d'Aſtronome Royal à Greenwich. L'Aſtronomie reprit alors tous ſes droits ſur M. Hallei, qui paſſa le reſte de ſa vie uniquement occupé d'enrichir cette ſcience de ſes obſervations, & de ſes inventions. Il mourut le 26 Janvier 1742. Outre une multitude de Mémoires ſur toutes les branches des Mathématiques & de la Phyſique, qui ſont répandus dans les *Tranſ. Phil.* on a de M. Hallei, les ouvrages ſuivans. *Catal. Stell. Auſtr. &c.* in-4°. 1678. *Apoll. de ſect. rationis & ſpatii.* 1706. in-8°. *Appoll. Conic. l. 8, & Sereni. l. 2.* gr. lat. in-fol. 1708 (édition magnifique), & enfin ſes *Tables célebres.* Voyez l'Hiſtoire de l'Académie de l'année 1742.

déterminer la position avec exactitude. Mais le siege de l'Astronomie ayant toujours été dans des contrées, d'où une grande partie de l'hémisphere austral ne peut être apperçue, on n'avoit sur cette partie du ciel que des connoissances fort incertaines, & les catalogues des étoiles qui y sont répandues, étoient, ou incomplets, ou défigurés par des erreurs sans nombre. M. *Hallei* conçut le dessein d'aller faire une énumération exacte de ces étoiles. L'Isle de Sainte-Helene, située vers le 15e degré de latitude australe, & où la compagnie Angloise des Indes venoit de former un établissement, lui parut propre à ce dessein, & il demanda à y être envoyé. Il étoit encore fort jeune alors, mais il avoit déja commencé à jetter les fondemens de la haute réputation qu'il a depuis acquise, par divers traits de sagacité, entr'autres par la solution directe & géométrique d'un problême qui avoit jusque-là fort occupé les Astronomes, sçavoir, de déterminer dans l'hypothese de *Kepler* les aphélies & l'excentricité des planetes d'après trois observations données. Cette réputation naissante lui avoit valu la connoissance de M. *Williamson*, Secretaire d'Etat, qui affectionnoit les Mathématiques, & de M. Jonas *Moore*, Intendant de l'Artillerie, & lui-même habile Mathématicien. Ils appuyerent sa demande auprès de *Charles II*, qui l'agréa, & qui donna ses ordres pour qu'il eût toutes les commodités convenables à son entreprise. M. *Hallei* partit donc pour Ste Helene au commencement de 1676, & y arriva peu de mois après. Il s'attendoit à y trouver la température d'air la plus favorable aux observations ; mais on l'avoit trompé, & ce ne fut qu'avec bien de la peine, & en saisissant tous les momens favorables avec une assiduité extrême, qu'il vint à bout de son dessein. Il releva, avec un sextant de cinq pieds & demi de rayon, les distances respectives d'environ 350 étoiles, méthode qui lui parut la plus expéditive, & la seule qu'il pût employer dans la circonstance où il se trouvoit. De plusieurs de ces étoiles, qui étoient sans noms, il forma une constellation nouvelle, qu'il nomma le *chêne* de *Charles II* (*Robur Carolinum*) en mémoire de celui sous l'écorce duquel ce Prince, après la déroute de *Worcestre*, échappa à la poursuite de *Cromwell*. M. *Hallei* ne pouvoit effectivement témoigner sa reconnois-

ſance d'une maniere plus noble & plus durable qu'en en gravant les marques dans ce ciel même, que les bienfaits de ce Prince lui donnoient le moyen de mieux connoître.

M. *Hallei* fit à Sainte-Helene une autre obſervation importante, ſçavoir celle du paſſage de Mercure ſous le Soleil, arrivé le 28 Octobre (vieux ſtyle) de l'année 1677. Il eut l'avantage d'en voir l'entrée & la ſortie, ce que ne purent point faire quelques autres obſervateurs Européens, qui virent auſſi ce paſſage, le Soleil n'étant point encore levé pour eux, lorſque Mercure entra dans le diſque de cet aſtre. M. *Hallei* publia toutes ces choſes intéreſſantes en 1679, dans ſon Livre intitulé : *Catalogus ſtellarum Auſtralium, ſeu ſupplementum catalogi Tychonici, &c.* Cet ouvrage contient encore d'excellentes réflexions ſur le mouvement de la Lune, dont nous aurons occaſion d'entretenir le lecteur.

Le paſſage de Vénus ſous le Soleil, que nous attendons le 5 Juin de l'année 1761, a été le ſujet d'une des plus ingénieuſes idées de M. *Hallei.* L'utilité de ces paſſages des planetes inférieures au devant du Soleil, en ce qui concerne la perfection de leur théorie, étoit connue depuis long-tems, & nous en avons donné une idée en rendant compte de la premiere obſervation de ce genre faite en 1631. M. *Hallei* ſçut en tirer un autre uſage, que perſonne n'avoit apperçu avant lui. Il concerne la parallaxe du Soleil, choſe ſi néceſſaire pour connoître la diſtance où nous ſommes de cet aſtre, & la grandeur préciſe de notre ſyſtême. M. *Hallei* a montré que le paſſage de Venus ſous le Soleil, qui doit arriver en 1761, peut donner cette parallaxe, & par conſéquent la vraie diſtance du Soleil, à un 500e près, & cela par une obſervation fort ſimple, ſçavoir celle de la durée de ce paſſage vu de certains endroits de la terre. Cette idée, qu'il avoit déja annoncée en 1691, il l'a davantage développée en 1716, par un écrit particulier. Qu'il eût été agréable pour un Aſtronome auſſi zélé que M. *Hallei*, de pouvoir être témoin d'un ſpectacle ſi rare & ſi précieux pour l'Aſtronomie? Mais ne pouvant raiſonnablement s'en flatter, car il eût fallu aſpirer à une vie plus que ſéculaire, il ne laiſſe pas de prendre part à ce ſpectacle, & d'en aſſurer, autant qu'il eſt en lui, le ſuccès. On le voit exhorter, & même en termes pathétiques, les Aſtronomes qui vivront

alors, à réunir toute leur ſagacité & leurs efforts pour tirer de cette obſervation les fruits qu'on peut en attendre. Nous avons tout lieu de croire que ſes ſouhaits ſeront remplis. L'Aſtronomie eſt trop en honneur aujourd'hui, il y a ſur la ſurface de la terre un trop grand nombre d'obſervateurs répandus de toutes parts, pour croire qu'on manque l'occaſion d'une obſervation ſi rare.

Nous nous contentons de parcourir ici les traits principaux de la ſagacité de M. *Hallei* en Aſtronomie. C'eſt pourquoi, nous ne diſons rien de divers écrits ſur des matieres aſtronomiques qu'on trouve répandus dans les Tranſactions. Nous paſſerons même ici ſur ſa *Théorie de la variation de la Bouſſole*, de même que ſur ſon *Aſtronomie Cométique*, développement précieux de la ſublime théorie de M. *Newton* ſur les Cometes, parce que ces derniers objets ſeront mieux placés ailleurs. Nous nous arrêterons ſeulement encore à ſes travaux ſur la théorie de la Lune.

La perfection de la théorie de la Lune fut un des premiers objets des méditations de M. *Hallei*, lorſqu'il entra dans la carriere de l'Aſtronomie. Dès le tems où il publia ſon catalogue des étoiles auſtrales, il avoit fait diverſes découvertes importantes ſur ce point aſtronomique. Une de ces découvertes eſt que, toutes choſes d'ailleurs égales, la Lune va plus vîte lorſque la terre eſt le plus éloignée du Soleil, que lorſqu'elle eſt périhélie ; c'eſt pourquoi il introduiſit dans le calcul du lieu de la Lune une nouvelle équation dépendante de la diſtance de la terre au Soleil. Il remarqua auſſi l'applatiſſement de l'orbite lunaire, qui ſe fait dans les ſyſigies, ou les conjonctions & oppoſitions, auſſi-bien que quelques autres particularités du mouvement de la Lune. Toutes ces remarques ſe ſont trouvées depuis conformes à la théorie phyſique de cette planete, démontrée par M. *Newton*.

M. *Hallei* ſentit néanmoins, quoiqu'il eût beaucoup ajouté à cette théorie, qu'il reſtoit encore bien des choſes à faire pour l'amener à la perfection déſirée des Aſtronomes. Il ſentoit auſſi que cette perfection n'étoit l'ouvrage, ni d'un ſeul homme, ni d'un ſiecle. Ce motif lui inſpira l'idée d'un autre moyen de ſoumettre au calcul les inégalités de la Lune, que nous allons expliquer.

Les principales & les plus ſenſibles des inégalités de la Lune, ſoit en longitude, ſoit en latitude, dépendent, comme ſçavent les Aſtronomes, de ſa poſition, ſoit à l'égard de ſon apogée & de ſon nœud, ſoit à l'égard du Soleil. Car ce ſont ſes configurations, & celles de ſes nœuds & de ſon apogée avec cet aſtre, qui ſont les cauſes de toutes les bizarreries qui occupent depuis ſi long-tems les Aſtronomes : d'où il ſuit que ſi l'on trouvoit une période qui, en finiſſant, ramenât toutes ces choſes comme elles étoient au commencement, les inégalités de la Lune ſe renouvelleroient enſuite dans le même ordre ; & l'on auroit un moyen facile de les prédire, pourvu qu'on les eût obſervées durant le cours de la période précédente.

L'antiquité, & même l'antiquité la plus reculée, a le mérite de fournir à l'Aſtronomie moderne une période qui, ſi ſi elle ne remplit pas entiérement toutes ces conditions, du moins en approche de fort près. On a obſervé, dit *Pline*, que dans l'intervalle de 223 lunaiſons, les éclipſes de Soleil & de Lune ſe renouvellent dans le même ordre, & ſuivant *Suidas*, cette période fut connue des Caldéens ſous le nom de *Saros*. M. *Hallei* qui avoit beaucoup d'érudition mathématique, avoit remarqué ce trait, & peut-être fut-ce la premiere occaſion de ſonger à ce moyen de rectifier la théorie de la Lune. Quoi qu'il en ſoit, il examina cette période, & par la comparaiſon de diverſes obſervations, il trouva qu'effectivement après l'intervalle de tems ci-deſſus, les phénomenes luniſolaires ſe renouvellent dans le même ordre à moins d'une demi-heure près. Cette erreur vient de ce qu'à la fin de la période, les choſes ne ſont pas rétablies préciſément comme elles étoient au commencement ; car 223 lunaiſons forment 18 ans Juliens, 11 jours, 7 heures $43'$, $45''$, pendant lequel tems l'apogée de la Lune a fait 13° de plus qu'une révolution entiere, & les nœuds, deux révolutions moins 11 degrés. Mais cette différence qui influe un peu ſur le lieu réel de la Lune, & ſur le tems, ne le fait pas ſenſiblement ſur la grandeur des équations ; & de-là vient qu'après l'intervalle d'une période entiere, les différences des lieux calculés avec les lieux réels, ſont ſenſiblement les mêmes.

M. *Hallei* avoit déja conçu dès l'année 1680 le deſſein de

rectifier la théorie de la Lune à l'aide de cette méthode : il observa dans cette vue la Lune pendant 16 mois consécutifs des années 1682, 83 & 84, & il fit l'essai de sa nouvelle invention sur l'éclipse de Soleil du mois de Juillet de 1684, dont il déduisit toutes les circonstances de celle qu'on avoit observée en 1666; & son calcul approcha bien davantage de la vérité, qu'aucun autre déduit des meilleures Tables. Il eut bien desiré pouvoir continuer ses observations durant une période complete de dix-huit ans ; mais traversé par diverses affaires, il ne put commencer à se satisfaire là-dessus, que lorsqu'il fut nommé Astronome Royal, & Directeur de l'Observatoire de Gréenwich, à la place de M. *Flamstead*; ce qui arriva au commencement de 1720. Il reprit le travail dont nous parlons en 1722, & depuis le 3 de Janvier de cette année, jusques fort peu avant sa mort, arrivée en 1742, il ne discontinua presque d'observer la Lune toutes les fois qu'il lui fut possible. Il n'attendit cependant pas l'expiration d'une période entiere pour informer le public de ses travaux. Il lui en rendit compte en 1731, c'est-à-dire, après une demi-période expirée, par un écrit qu'on lit parmi les *Transactions Philosophiques* de cette année. Outre le témoignage extrêmement favorable qu'il rendoit à la théorie physique de M. *Newton*, il y assuroit que par la méthode dont nous parlons, il pouvoit prédire, à une erreur près de deux minutes, le lieu de la Lune, pour un instant quelconque des neuf années suivantes. Il annonça en même tems une chose très-intéressante pour la navigation, sçavoir que cette exactitude étoit suffisante pour déterminer la longitude en mer, sans s'y tromper de plus d'une vingtaine de lieues, aux environs de l'équateur, & de moins dans des latitudes plus grandes.

L'importance de semblables observations pour calculer les lieux de la Lune, a excité divers Astronomes célebres à entreprendre le même genre de travail. Sur l'annonce que M. *Hallei* donna en 1731, de ses succès, & de ceux qu'il attendoit d'une plus longue suite d'observations, M. *Delisle*, alors à Petersbourg, se mit à observer la Lune, ce qu'il a continué 12 ans de suite, sçavoir depuis le mois de Septembre 1734, jusqu'en 1746, pendant lequel intervalle de tems, il a rassemblé plus de 1200 observations de cette espece. Mais M. le *Monnier*

est

eſt celui qui s'eſt livré à ce travail avec le plus de perſévérance. Il a achevé la période de M. *Hallei*, & il en a commencé une ſeconde qui doit être finie, ou approcher de ſa fin. Lorſque ces obſervations précieuſes auront été communiquées au public, on pourra ſe flatter d'avoir déja un moyen aſſez juſte de calculer le lieu de la Lune, en attendant qu'on ait ſuffiſamment réuſſi à ſoumettre au calcul les cauſes phyſiques des irrégularités de cette planete; & c'eſt ce qu'on peut, ſans trop de confiance, eſpérer dans peu des travaux réunis de tant de Géometres profonds qui travaillent ſur ce ſujet. Mais je reviens à M. *Hallei*.

Parmi les obligations nombreuſes de l'Aſtronomie envers cet homme célebre, obligations qu'une hiſtoire particuliere de cette ſcience peut ſeule développer avec l'étendue convenable, nous citerons enfin ſes *Tables aſtronomiques*. Ces tables, le réſultat des vues les plus fines, & d'une multitude d'obſervations combinées avec ſagacité, étoient en partie imprimées dès l'année 1725; mais M. *Hallei* travaillant ſans ceſſe à les perfectionner, ſurtout en ce qui concerne la théorie de la Lune, en différoit de jour à autre la publication lorſqu'il mourut. Elles ont paru depuis, ſçavoir en 1749, & elles ſont juſtement regardées comme les plus parfaites que l'Aſtronomie ait encore produites. Il ſeroit trop long d'en développer tous les avantages, & d'expoſer les principes ſur leſquels elles ſont conſtruites. M. *Deliſle* en a informé le public par deux curieuſes & ſçavantes Lettres (*a*), auxquelles il nous ſuffira de renvoyer le lecteur.

XII.

Découvertes Phyſico-Aſtronomiques de M. Newton.

Rien ne ſeroit plus ſatisfaiſant pour l'eſprit, que la Phyſique céleſte de M. *Deſcartes*, ſi elle eût pu ſoutenir l'épreuve de l'examen & de l'obſervation. Ces tourbillons, c'eſt-à-dire, ces torrens de matiere éthérée, qui, ſuivant l'idée de ce Philoſophe, entraînent les planetes autour du Soleil, préſentent à l'eſprit un méchaniſme intelligible, & qui enchante par ſa ſimplicité: mais cette idée, ſi ſéduiſante au premier coup d'œil, eſt ſujette à tant de difficultés; elle ſe trouve malheu-

(*a*) Lettres de M. Deliſle ſur les Tables de M. Hallei, 1749 & 1750, in-12.

rectifier la théorie de la Lune à l'aide de cette méthode : il observa dans cette vue la Lune pendant 16 mois consécutifs des années 1682, 83 & 84, & il fit l'essai de sa nouvelle invention sur l'éclipse de Soleil du mois de Juillet de 1684, dont il déduisit toutes les circonstances de celle qu'on avoit observée en 1666; & son calcul approcha bien davantage de la vérité, qu'aucun autre déduit des meilleures Tables. Il eut bien desiré pouvoir continuer ses observations durant une période complete de dix-huit ans ; mais traversé par diverses affaires, il ne put commencer à se satisfaire là-dessus, que lorsqu'il fut nommé Astronome Royal, & Directeur de l'Observatoire de Gréenwich, à la place de M. *Flamstead*; ce qui arriva au commencement de 1720. Il reprit le travail dont nous parlons en 1722, & depuis le 3 de Janvier de cette année, jusques fort peu avant sa mort, arrivée en 1742, il ne discontinua presque d'observer la Lune toutes les fois qu'il lui fut possible. Il n'attendit cependant pas l'expiration d'une période entiere pour informer le public de ses travaux. Il lui en rendit compte en 1731, c'est-à-dire, après une demi-période expirée, par un écrit qu'on lit parmi les *Transactions Philosophiques* de cette année. Outre le témoignage extrêmement favorable qu'il rendoit à la théorie physique de M. *Newton*, il y assuroit que par la méthode dont nous parlons, il pouvoit prédire, à une erreur près de deux minutes, le lieu de la Lune, pour un instant quelconque des neuf années suivantes. Il annonça en même tems une chose très-intéressante pour la navigation, sçavoir que cette exactitude étoit suffisante pour déterminer la longitude en mer, sans s'y tromper de plus d'une vingtaine de lieues, aux environs de l'équateur, & de moins dans des latitudes plus grandes.

L'importance de semblables observations pour calculer les lieux de la Lune, a excité divers Astronomes célebres à entreprendre le même genre de travail. Sur l'annonce que M. *Hallei* donna en 1731, de ses succès, & de ceux qu'il attendoit d'une plus longue suite d'observations, M. *Delisle*, alors à Petersbourg, se mit à observer la Lune, ce qu'il a continué 12 ans de suite, sçavoir depuis le mois de Septembre 1734, jusqu'en 1746, pendant lequel intervalle de tems, il a rassemblé plus de 1200 observations de cette espece. Mais M. le *Monnier*

est

eſt celui qui s'eſt livré à ce travail avec le plus de perſévérance. Il a achevé la période de M. *Hallei*, & il en a commencé une ſeconde qui doit être finie, ou approcher de ſa fin. Lorſque ces obſervations précieuſes auront été communiquées au public, on pourra ſe flatter d'avoir déja un moyen aſſez juſte de calculer le lieu de la Lune, en attendant qu'on ait ſuffiſamment réuſſi à ſoumettre au calcul les cauſes phyſiques des irrégularités de cette planete; & c'eſt ce qu'on peut, ſans trop de confiance, eſpérer dans peu des travaux réunis de tant de Géometres profonds qui travaillent ſur ce ſujet. Mais je reviens à M. *Hallei*.

Parmi les obligations nombreuſes de l'Aſtronomie envers cet homme célebre, obligations qu'une hiſtoire particuliere de cette ſcience peut ſeule développer avec l'étendue convenable, nous citerons enfin ſes *Tables aſtronomiques*. Ces tables, le réſultat des vues les plus fines, & d'une multitude d'obſervations combinées avec ſagacité, étoient en partie imprimées dès l'année 1725; mais M. *Hallei* travaillant ſans ceſſe à les perfectionner, ſurtout en ce qui concerne la théorie de la Lune, en différoit de jour à autre la publication lorſqu'il mourut. Elles ont paru depuis, ſçavoir en 1749, & elles ſont juſtement regardées comme les plus parfaites que l'Aſtronomie ait encore produites. Il ſeroit trop long d'en développer tous les avantages, & d'expoſer les principes ſur leſquels elles ſont conſtruites. M. *Deliſle* en a informé le public par deux curieuſes & ſçavantes Lettres (*a*), auxquelles il nous ſuffira de renvoyer le lecteur.

XII.

Découvertes Phyſico-Aſtronomiques de M. Newton.

Rien ne ſeroit plus ſatisfaiſant pour l'eſprit, que la Phyſique céleſte de M. *Deſcartes*, ſi elle eût pu ſoutenir l'épreuve de l'examen & de l'obſervation. Ces tourbillons, c'eſt-à-dire, ces torrens de matiere éthérée, qui, ſuivant l'idée de ce Philoſophe, entraînent les planetes autour du Soleil, préſentent à l'eſprit un méchaniſme intelligible, & qui enchante par ſa ſimplicité: mais cette idée, ſi ſéduiſante au premier coup d'œil, eſt ſujette à tant de difficultés; elle ſe trouve malheu-

(*a*) Lettres de M. Deliſle ſur les Tables de M. Hallei, 1749 & 1750, in-12.

reuſement ſi peu d'accord avec les phénomenes, ou les loix de la Phyſique, malgré les efforts de pluſieurs hommes célebres pour les concilier enſemble (*a*), qu'on eſt forcé de convenir que le ſyſtême de *Deſcartes* n'eſt pas celui de la nature.

M. *Newton* a pris une autre route, & ſur les débris de ce ſyſtême, il en a élevé un nouveau, ſelon nos conjectures, plus ſolide & plus durable. En effet, ſi l'accord toujours ſoutenu d'un ſyſtême avec les phénomenes, non ſeulement conſidérés en gros, mais dans les détails, forme un préjugé avantageux en ſa faveur, on ne peut qu'augurer ainſi de celui de M. *Newton*. En vain ceux qui ſe refuſent aux vérités établies par ce génie immortel, affectent de regarder le changement qu'il a fait dans l'empire philoſophique, comme une révolution paſſagere : nous croyons pouvoir avec confiance eſpérer le contraire. Une théorie établie, comme celle de M. *Newton*, ſur les phénomenes & la Géométrie, n'a rien à craindre des viciſſitudes du tems & des opinions des hommes.

La Phyſique céleſte de M. *Newton* eſt fondée ſur le principe de la gravitation univerſelle : toutes les parties de la matiere, quel que ſoit le méchaniſme ou la cauſe de cet effet, tendent, ſuivant le Philoſophe Anglois, les unes vers les autres, avec une force qui varie en raiſon inverſe du quarré de la diſtance. C'eſt-là la peſanteur que nous éprouvons ſur la ſurface de notre terre, & le reſſort de tous les mouvemens céleſtes, les plus compliqués. Nous expoſerons les preuves qui conduiſent néceſſairement à admettre ce principe, lorſque, ſuivant la nature de notre plan, nous aurons dit quelques mots ſur les traces qu'on en trouve avant M. *Newton*.

Il eſt peu de vérités brillantes, en Phyſique, qui n'ayent été entrevues par les anciens. Cette remarque ſe vérifie en particulier à l'égard du principe de la gravitation univerſelle. Sans fouiller avec M. *Grégori* dans les recoins les plus obſcurs de l'antiquité, nous y trouvons des traces marquées de ce principe. *Anaxagore* donnoit, comme on l'a déja remarqué, aux corps céleſtes, une peſanteur vers la terre qu'il regardoit comme le centre de leurs mouvemens. Ce fut ſurtout un des principes de la Philoſophie de *Démocrite* & d'*Epicure* ; car on le trouve clai-

(*a*) *Voyez* art. VIII, du Livre IV.

rement énoncé dans leur élégant Interprête, le Poëte *Lucrece*. C'eſt de ce principe qu'il tire la hardie conſéquence, que l'Univers eſt ſans bornes. Ecoutons-le lui-même.

Prætereà ſpatium ſummaï totius omne
Undiquè ſi incluſum certis conſiſteret oris,
Finitumque foret, jam copia materiaï
Undiquè ponderibus ſolidis confluxet ad imum;
Nec foret omninò cœlum, neque lumina ſolis;
Quippè ubi materies omnis cumulata jaceret
Ex infinito jam tempore ſubſidendo.

Lorſque le véritable ſyſtême du monde, reſſuſcité par *Copernic*, ſortit de ſes cendres, celui de la gravitation univerſelle jetta auſſi quelques traits de lumiere. Cet Aſtronome célebre n'attribuoit la rondeur des corps céleſtes qu'à la tendance de leurs parties à ſe réunir (*a*). Il n'alla pas, à la vérité, juſqu'à étendre la gravitation d'une planete à l'autre; mais *Kepler*, plus hardi & plus ſyſtématique, alla juſque-là dans ſon *Commentaire ſur les mouvemens de Mars*. Dans la Préface de ce Livre fameux, il fait peſer la Lune vers la terre, & *vice verſâ*; de ſorte, dit-il, que ſi elles n'étoient retenues loin l'une de l'autre par leur rotation, elles s'approcheroient & ſe réuniroient à leur centre de gravité commun. Ce même endroit nous offre pluſieurs autres traits frappans de ce ſyſtême (*b*), & il eſt ſurprenant que *Kepler*, après avoir ſi bien vu ce principe, n'en ait pas fait plus d'uſage, & qu'il ait employé dans ſon explication du mouvement des planetes, des raiſons auſſi peu phyſiques que celles qu'il propoſe.

L'attraction ou la gravitation univerſelle de la matiere, fut auſſi reconnue par quelques Philoſophes François. Suivant M. de *Fermat*, c'étoit-là la cauſe de la peſanteur. Un corps ne tomboit vers le centre de la terre, que parce qu'il ſe prêtoit autant qu'il étoit poſſible à la tendance qu'il avoit vers toutes ſes parties. Il ajoutoit qu'il étoit moins attiré lorſqu'il étoit entre le centre & la ſurface, parce que les parties les plus

(*a*) De Revol. c. 9.
(*b*) Voy. L. IV, art. I,

éloignées de ce centre l'attiroient en ſens contraire, des plus proches; d'où il conclut ce que M. *Newton* a depuis démontré plus rigoureuſement, que dans ce cas la peſanteur décroît, comme la diſtance au centre (*a*). C'étoit encore là le principe fondamental du ſyſtême Phyſico-Aſtronomique que *Roberval* mit au jour en 1644, ſous le nom d'*Ariſtarque* (*b*) de Samos. Dans ce Livre *Roberval* attribue à toutes les parties de matiere dont l'Univers eſt compoſé, la propriété de tendre les unes vers les autres. C'eſt-là, dit-il, la raiſon pour laquelle elles s'arrangent en figure ſphérique, non par la vertu d'un centre, mais par leur attraction mutuelle, & pour ſe mettre en équilibre les unes avec les autres. Remarquons encore qu'Alphonſe *Borelli*, dans ſa théorie des ſatellites de Jupiter (*c*), employoit l'attraction; je le dis d'après M. *Weidler*, (*d*) car il ne m'a pas été poſſible de me procurer ce Livre de *Borelli*, pour vérifier cette remarque. Je ſerois même porté à penſer le contraire, d'après un autre de ſes ouvrages, qui parut peu d'années après (*e*). En effet, il n'y eſt rien moins que partiſan de l'attraction; il la rejette même comme un principe peu conforme à la ſaine Phyſique. *Borelli* auroit changé bien promptement d'opinion & de ſyſtême.

Mais perſonne, avant M. *Newton*, n'a mieux apperçu le principe de la gravitation univerſelle, ni plus approché d'en faire l'application convenable au ſyſtême de l'Univers, que M. *Hook*. Les Philoſophes que nous venons de paſſer en revue, en avoient ſaiſi, les uns une branche, les autres une autre. *Hook* l'embraſſa dans preſque toute ſa généralité. On le voit clairement par le paſſage qu'on a cité dans l'article VIII de ce Livre. Au reſte, il ne put démontrer quelle loi devoit ſuivre cette gravitation dans les différentes diſtances du centre, pour faire décrire aux corps céleſtes des ellipſes ayant la force centrale dans un de leurs foyers. Et c'eſt tout-à-fait ſans raiſon qu'après la découverte qu'en fit M. *Newton*, il prétendit s'en attribuer la gloire ou la partager. Il y a encore bien loin de la conjecture de *Hook*, & des preuves dont il l'étayoit, aux ſubli-

(*a*) Merſ. *Harm. univ. l. 11, Prop. 12.*
(*b*) Ariſt. Samii, *de mundi ſyſtem. lib. ſing.* Pariſ. 1644, in-4°.
(*c*) *Theor. Medic. Planet.* 1666. in-4°.
(*d*) *Hiſt. Aſtr.* l. XV, art. 111.
(*e*) *De mot. nat. à gravit. pendentibus.* 1670.

mes démonſtrations par leſquelles M. *Newton* a depuis établi cette loi de l'Univers.

Tels étoient les progrès du ſyſtême de la gravitation univerſelle, lorſque parut le célebre Philoſophe Anglois. *Pemberton*, qui avoit vécu & converſé avec lui, raconte (*a*) que ce fut en 1666, qu'il commença à ſoupçonner l'exiſtence de ce principe, & à tenter de l'appliquer au mouvement des corps céleſtes. Retiré à la campagne, par l'appréhenſion de la peſte qui régna cette année à Londres & aux environs, ſes méditations ſe tournerent un jour ſur la peſanteur. Sa premiere réflexion fut que cette cauſe qui produit la chûte des corps terreſtres, agiſſant toujours ſur eux à quelque hauteur qu'on les porte, il pouvoit bien ſe faire qu'elle s'étendît beaucoup plus loin qu'on ne penſoit, & même juſqu'à la Lune, & au delà. D'où il tira cette conjecture, que ce pouvoit être cette force qui retenoit la Lune dans ſon orbite, en contrebalançant la force centrifuge qui naît de ſa révolution autour de la terre. Il conſidéra en même tems que quoique la peſanteur ne parût pas diminuée dans les différentes hauteurs auxquelles nous pouvons atteindre, ces hauteurs étoient trop petites pour pouvoir en conclure que ſon action fût partout la même; il lui parut au contraire beaucoup plus probable, qu'elle décroiſſoit à différentes diſtances du centre.

Il reſtoit à découvrir la loi ſuivant laquelle ſe fait cette variation; pour cela il fit cette autre réflexion, ſçavoir que ſi c'étoit la peſanteur de la Lune vers notre globe qui la retînt dans ſon orbite, il en devoit être de même des planetes principales à l'égard du Soleil, des ſatellites de Jupiter à l'égard de cette planete, &c. Or en comparant les tems périodiques des planetes autour du Soleil avec leurs diſtances, on trouve que les forces centrifuges qui naiſſent de leurs révolutions, & par conſéquent les forces centripetes qui les contrebalancent, & qui leur ſont égales, ſont en raiſon inverſe des quarrés des diſtances. Il en eſt de même des ſatellites de Jupiter; d'où il conclut que la force qui retient la Lune dans ſon orbite, devoit être la peſanteur diminuée dans le rapport inverſe du quarré de ſa diſtance à la terre.

(*a*) *A View Sir Iſaac Newton Philoſophy.*

M. *Newton* ne s'en tint pas là ; il fit encore le raiſonnement que voici. Si la Lune eſt forcée de circuler autour de la terre, parce qu'elle tend vers elle avec une peſanteur diminuée dans le rapport ci-deſſus, (c'eſt-à-dire, 3600 fois moindre qu'à la ſurface, puiſque la Lune eſt éloignée du centre de la terre de 60 demi-diametre terreſtres), la chûte qu'elle feroit étant uniquement livrée à cette force, pendant un tems déterminé, celui d'une minute, par exemple, devra être la 3600e partie de l'eſpace que décrivent les corps peſans vers la ſurface de la terre pendant le même tems. Or cette chûte, nous voulons dire, ce dont la Lune s'approcheroit de la terre durant une minute, ſi elle obéiſſoit uniquement à la peſanteur, c'eſt le ſinus verſe de l'arc qu'elle décrit durant ce tems. M. *Newton* compara donc ce ſinus verſe, pour voir s'il ſe trouveroit exactement la 3600e partie de l'eſpace parcouru par les corps graves à la ſurface de la terre durant une minute. Ceci faillit à ruiner de fond en comble l'édifice qu'il commençoit à élever. Comme la meſure aſſez exacte de la terre, priſe par *Norwood* en 1635, lui étoit inconnue, il ſuppoſa avec les Géographes & les Navigateurs de ſa nation, que le degré contenoit 60 milles Anglois. Mais comme au lieu de 60, il en contient environ $69\frac{1}{2}$, il ne trouvoit plus le rapport qu'il falloit pour vérifier ſa conjecture. Bien des Philoſophes ſe fuſſent peu embarraſſé de cette difficulté, & ſe la déguiſant, euſſent continué d'élever leur édifice. Mais cet homme incomparable cherchant la vérité de bonne foi, n'avoit pas pour objet de faire un ſyſtême. Quand il vit qu'un fait renverſoit toutes ſes conjectures, juſqu'alors ſi bien liées, il les abandonna, ou il remit à un autre tems à les examiner.

Ce fut ſeulement en 1676, que M. *Newton* reprit le fil de ſes idées ſur ce ſujet. Il y a apparence que l'ouvrage de *Hook*, dont nous avons parlé plus haut, en fut l'occaſion. Le Livre de la meſure de la terre, par M. *Picard*, voyoit le jour depuis quelques années. M. *Newton* s'en ſervit pour réſoudre ou confirmer la difficulté qui l'avoit d'abord arrêté. Mais quand, au moyen de cette meſure, il eut déterminé exactement les dimenſions de l'orbite lunaire, le calcul lui donna préciſément ce qu'il cherchoit. Car en ſuppoſant, d'après les meilleurs Aſtronomes, la diſtance moyenne de la Lune à la terre de 60

demi-diametres, & le degré terreſtre de 57100 toiſes, on trouve que le ſinus verſe de l'arc décrit par la Lune dans une minute, eſt de 15 pieds $\frac{1}{12}$. Or les corps voiſins de la ſurface de la terre, tombent dans une ſeconde, de cette même hauteur de 15 pieds $\frac{1}{12}$, & par conſéquent dans une minute ou 60 ſecondes, cette chûte ſeroit 3600 fois plus grande. D'où il eſt évident que la chûte de la Lune pendant cet intervalle de tems, eſt 3600 fois moindre que celle des corps terreſtres, & par conſéquent la force qui la produit 3600 fois moindre qu'à la ſurface de la terre. Après cette démonſtration, M. *Newton* n'héſita plus de conclure que la même force qu'éprouvent les corps voiſins de la ſurface de la terre, la Lune l'éprouve dans ſon orbite, & que c'eſt cette force qui l'y retient, & qui l'empêche de s'échapper en ligne droite.

Lorſqu'une fois M. *Newton* ſe fut aſſuré de cette vérité, il rechercha quelle courbe devoit décrire un corps projetté, dans l'hypotheſe rigoureuſe que les directions convergent à un centre, & que la force qui y pouſſe ou attire ce corps, ſuit le rapport inverſe des quarrés des diſtances à ce centre. Il trouva d'abord qu'en général, c'eſt-à-dire quelle que ſoit la loi de la gravitation, les aires décrites par les lignes tirées continuellement du corps au centre de force, ſont proportionnelles au tems. De-là paſſant à l'hypotheſe de la gravitation en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, il découvrit que la courbe décrite dans ce cas, eſt toujours une ſection conique : ainſi lorſqu'elle rentre en elle-même, ce ne peut être qu'un cercle, ou une ellipſe ayant le centre de forces à l'un de ſes foyers. Ce ſont là, ainſi que tout le monde ſçait, deux propriétés du mouvement des planetes autour du Soleil. Il faut donc conclure, avec M. *Newton*, que les planetes ſont retenues dans leurs orbites autour de cet aſtre par une force ſemblable à celle que nous éprouvons ſur la terre, & qui décroît en raiſon réciproque du quarré de la diſtance.

M. *Newton* en étoit là lorſqu'il fit connoiſſance avec M. *Hallei*. Cet ami illuſtre ſentit auſſi-tôt tout le prix de ces belles découvertes, & il l'engagea à les publier dans les *Tranſ. Philoſ.* Mais bien-tôt il alla plus loin, & conjointement avec la Société Royale, il l'exhorta puiſſamment à développer davantage, & à mettre en ordre toutes ces ſublimes

théories qu'il avoit dès-lors ébauchées ſur la méchanique ; & ſur divers points du ſyſtême de l'Univers. Il s'offrit enfin à prendre ſur lui les peines & les ſoins de l'édition. Ce furent ces inſtances, & pour ainſi dire, cette violence qu'il fit au peu de goût qu'avoit *Newton* pour ſe produire, qui hâterent la publication de ſes *principes*. *Newton* n'employa, dit-on, que 18 mois à trouver une grande partie de ce que contient ce Livre immortel, & à le rédiger. Enfin après quelques difficultés élevées par M. *Hooke* qui diſputoit à *Newton* d'avoir le premier démontré les loix de *Kepler*, l'ouvrage parut en 1687 ſous le titre de *Philoſophiæ naturalis principia Mathematica*, in-4°. On remarque que ce Livre, ſi digne d'admiration, ne fut pas d'abord reçu, du moins dans le continent, avec les applaudiſſemens que lui ont donné depuis tous les Philoſophes de l'Europe, & ceux-là même qui n'admettant pas toute ſa doctrine, pouvoient être ſenſibles aux nombreuſes découvertes de tout genre qu'il contient d'ailleurs. On ne doit pas trop s'en étonner : à peine commençoit-on à convenir de toutes parts, que la maniere, du moins intelligible & méchanique, dont *Deſcartes* tentoit d'expliquer les phénomenes de la nature, valût mieux que les mots vuides de ſens qu'on donnoit dans les Ecoles pour des raiſons ; à peine enfin commençoit-on à ſe loger dans l'édifice élevé par le Philoſophe François ; il étoit dur d'être obligé de l'abandonner ſi-tôt. A l'égard de l'Angleterre, ne lui faiſons pas entiérement honneur de la juſtice qu'elle rendit d'abord à *Newton*. Sa qualité d'Anglois, & l'eſpece de haine qu'elle porte à tout mérite qu'elle ne peut pas revendiquer, lui firent faire ſans doute la moitié du chemin.

On voit par l'expoſé que nous avons fait plus haut du progrès des idées de M. *Newton*, que la gravitation univerſelle n'eſt point une pure hypotheſe. C'eſt une vérité de fait, une conſéquence à laquelle le conduit l'analogie & l'examen approfondi des phénomenes. Mais pour établir ceci avec plus d'évidence, il eſt beſoin de faire encore quelques réflexions.

L'hypotheſe des tourbillons une fois ruinée, & elle paroît l'être ſans reſſource après ce qu'on a dit dans le Livre III de cette partie, les corps céleſtes ne ſont point portés par des courans de matiere éthérée, circulans autour du Soleil, ou

ou d'une planete principale. D'un autre côté, la continuité des mouvemens des aſtres, qui ſont toujours les mêmes dans les endroits ſemblables de leurs orbites, eſt pour nous une puiſſante raiſon d'aſſurer que les eſpaces céleſtes ne ſont remplis d'aucune matiere ſenſiblement réſiſtante. Car M. *Newton* a montré qu'un fluide ſemblable à celui dont *Deſcartes* rempliſſoit ces eſpaces, détruiroit dans peu le mouvement des corps qui le traverſeroient. Cependant les Cometes parcourent les eſpaces céleſtes dans toutes les directions imaginables, & avec la même liberté que ſi c'étoit un vuide parfait; d'où il ſuit qu'un pareil fluide n'exiſte point. Et il ne ſerviroit à rien d'imaginer ce fluide atténué à un point exceſſif: un célebre partiſan des tourbillons (*a*) a fait l'aveu que quelle que ſoit ſa ténuité & la diviſion de ſes parties, dès qu'on ſuppoſera la même maſſe, il y aura la même réaction, la même réſiſtance; vérité d'ailleurs ſi conforme aux loix du mouvement, reconnues & avouées de tous les Méchaniciens, qu'à moins de s'en former de nouvelles, on ne ſçauroit la conteſter.

Le mouvement des corps céleſtes eſt donc la ſuite d'un mouvement une fois imprimé. Mais les loix de la méchanique nous apprennent qu'un corps une fois mu, ne s'écarte jamais de la ligne droite, qui eſt la direction primitive qu'il a reçue, à moins que quelque cauſe ne l'en détourne. C'eſt pourquoi, puiſque nous voyons les planetes parcourir autour du Soleil une ligne courbe, il faut néceſſairement qu'à chaque inſtant, elles ſoient détournées par quelque force, de la direction rectiligne. Ajoutons que la direction de cette force tend vers le Soleil. Car l'obſervation a montré que les planetes principales décrivent autour de cet aſtre des aires proportionnelles aux tems; & c'eſt un théorême de Méchanique auſſi inconteſtable que les démonſtrations de la Géométrie, que lorſqu'un corps, en vertu d'une impulſion primitive, décrit autour d'un point des aires proportionnelles au tems, la force qui le détourne de la ligne droite eſt dirigée vers ce point. Ainſi il eſt ſolidement établi que les planetes ne circulent autour du Soleil que par l'action combinée d'une impulſion primitive & latérale, & d'une force ſans ceſſe agiſſante, qui tend à les rapprocher de

(*a*) M. Saurin. *Voyez* Mémoires de l'Académie, 1707.

cet aſtre. Il en eſt de même des planetes ſecondaires, qui circulent autour des principales, & enfin par degrés de toutes les parties dont chacun de ces corps eſt compoſé. Chacune d'elles tend à ſe réunir aux autres, avec une force proportionnelle à ſa maſſe, & *vice versâ*, comme l'aimant & le fer s'attirent mutuellement. Cette force, c'eſt l'attraction Newtonienne, ou la gravitation univerſelle. Peu nous importe, du moins ici, quelle en eſt la nature. Eſt-ce une impulſion réitérée ſur le corps, ou bien une nouvelle propriété de la matiere ? c'eſt ce dont nous ne nous embarraſſerons point. Il nous ſuffira qu'il ſoit démontré qu'il y a dans l'Univers une force qui tend à rapprocher les planetes principales du Soleil, & nous pouvons à cet égard ne pas aller plus loin que M. *Newton* (*a*). Il proteſte en pluſieurs endroits de ſes *principes*, qu'il n'entend par le mot d'attraction, que cette force dont nous venons de parler, quelle qu'en ſoit la nature. « Je me ſers, dit-il, du terme d'attrac-
» tion, pour exprimer d'une maniere générale l'effort que
» font les corps pour s'approcher les uns des autres, ſoit que
» cet effort ſoit l'effet de l'action des corps qui ſe cherchent
» mutuellement, ou ſoit produit par des émanations de l'un
» à l'autre, ou par l'action de l'éther, ou de tel autre milieu
» corporel ou incorporel. Je vais, dit-il encore dans le même
» ouvrage, expliquer les effets de ces forces que je nomme
» *attractions*, quoique peut être, pour parler phyſiquement, il
» fût plus exact de les nommer *impulſions*. »

Mais c'eſt ſurtout dans ſon Optique (*b*) qu'il donne un témoignage authentique & frappant de ſa maniere de penſer à cet égard. On l'y voit tâcher de déduire la cauſe de cette gravitation de l'action d'un milieu ſubtil & élaſtique, qui pénetre tous les corps. Voici cet endroit remarquable. « Ce milieu,
» dit M. *Newton*, n'eſt-il pas plus rare dans les corps denſes
» du Soleil, des Etoiles, des Planetes & des Cometes, que
» dans les eſpaces céleſtes vuides qui ſont entre ces corps-là :
» & en paſſant dans des eſpaces fort éloignés, ne devient-il
» pas continuellement plus denſe, & par-là n'eſt-il pas la
» cauſe de la gravitation réciproque de ces vaſtes corps, & de
» celles de leurs parties vers ces corps mêmes ; chacun d'eux

(*a*) Liv. 1, Sect. XI, *à la fin.* Ibid. Sect. XI, *au commencement.*
(*b*) Optique. *Queſt.* 21 & 22.

» tâchant d'aller des parties les plus denſes vers les plus ra-
» res ?,.... Et quoique l'accroiſſement de denſité puiſſe être ex-
» ceſſivement lent à de grandes diſtances, cependant ſi la for-
» ce élaſtique de ce milieu eſt exceſſivement grande, elle peut
» ſuffire à pouſſer les corps des parties les plus denſes de ce
» milieu vers les plus rares avec toute cette force que nous
» nommons *gravité*. Or que la force de ce milieu ſoit exceſſi-
» vement grande, c'eſt ce qu'on peut inférer de la vîteſſe de
» ſes vibrations. Le ſon parcourt environ 1140 piéds dans
» une ſeconde, & environ cent milles d'Angleterre en ſept à
» huit minutes. La lumiere eſt tranſmiſe du Soleil juſqu'à
» nous dans environ ſept à huit minutes, c'eſt-à-dire, qu'elle
» parcourt une diſtance de près de 70000000 milles d'Angle-
» terre, ſuppoſé que la parallaxe horizontale du Soleil ſoit
» d'environ 12″. Et afin que les vibrations de ce milieu puiſ-
» ſent produire les alternatives de facile tranſmiſſion & de fa-
» cile réflection (c'eſt un phénomene optique dont nous par-
» lerons dans le Livre ſuivant), elles doivent être plus promp-
» tes que la lumiere, & par conſéquent plus de 700000 plus
» promptes que le ſon. Donc la force élaſtique de ce milieu,
» doit être à proportion de ſa denſité plus de 700000 × 700000,
» ou 490000000000 fois plus grande que la force élaſtique
» de l'air, à raiſon de ſa denſité. Car les vîteſſes des vibra-
» tions des milieux élaſtiques ſont en raiſon ſoudoublée des
» élaſticités & des raretés des milieux, priſes enſemble.

» Les Planetes, les Cometes, & tous les corps denſes,
» ajoute M. *Newton*, ne peuvent-ils pas ſe mouvoir plus libre-
» ment, & trouver moins de réſiſtance dans ce milieu éthé-
» rée, que dans aucun fluide qui remplit exactement tout
» l'eſpace ſans laiſſer aucun pore, & qui par conſéquent eſt
» beaucoup plus denſe que l'or ou le vif argent. Et la réſiſtan-
» ce de ce milieu ne peut-elle pas être ſi petite qu'elle ne ſoit
» d'aucune conſidération ? Par exemple, ſi cet éther étoit ſup-
» poſé 700000 fois plus élaſtique que notre air, & plus de
» 700000 fois plus rare, ſa réſiſtance ſeroit plus de 600000000
» fois moindre que celle de l'eau. Et une telle réſiſtance cau-
» ſeroit à peine aucune altération ſenſible dans le mouvement
» des planetes en dix mille ans. Si quelqu'un s'aviſoit de me
» demander comment un milieu peut être ſi rare, qu'il me

» diſe comment dans les parties ſupérieures de l'athmoſphere
» l'air peut être plus de mille fois, cent mille fois plus rare
» que l'or. Qu'il me diſe auſſi comment la friction peut faire
» évaporer d'un corps électrique une exhalaiſon ſi rare & ſi
» ſubtile (quoique ſi puiſſante), qu'elle ne cauſe aucune dimi-
» nution ſenſible dans le poids du corps électrique, & que ré-
» pandue dans une ſphere de plus de deux pieds de diametre,
» elle ſoit pourtant capable d'agiter & d'élever une feuille de
» cuivre ou d'or à plus d'un pied du corps électriſé. Qu'il
» me diſe encore comment la matiere magnétique peut être ſi
» rare & ſi ſubtile, que ſortant d'un aimant, elle paſſe au tra-
» vers d'une plaque de verre ſans aucune réſiſtance ou dimi-
» nution de ſes forces, & pourtant ſi puiſſante, qu'elle faſſe
» tourner une aiguille aimantée au delà du verre. »

Ce long paſſage doit mettre ſuffiſamment M. *Newton* à l'abri de l'accuſation que lui ont intentée quelques-uns de ſes antagoniſtes, ſçavoir de ramener dans la Philoſophie les cauſes occultes ſi juſtement proſcrites par les modernes. Rien n'eſt plus injuſte que cette imputation, M. *Newton* n'eût-il même pas proteſté auſſi ſouvent qu'il l'a fait ſur le ſens qu'il donne au mot d'attraction. Les Anciens étoient répréhenſibles en ce que à chaque phénomene ils employoient une nouvelle propriété. Mais le procédé de *Newton* eſt bien différent : il employe la gravité ou la gravitation univerſelle à expliquer tous les phénomenes céleſtes, & même à en déduire certains qui n'étoient point encore apperçus de ſon tems, & que l'obſervation a depuis vérifiés, comme la nutation de l'axe de la terre. Le Méchanicien qui examine l'action que les corps exercent les uns ſur les autres, en conſéquence de leur gravité, ou de leur mouvement, eſt-il tenu de commencer par connoître ce que c'eſt que la gravité, le mouvement, l'impulſion, &c? Sa vie ſe paſſeroit infructueuſement dans ces diſcuſſions obſcures, & la Méchanique ſeroit encore à naître.

A la vérité, il ſemble que M. *Newton* n'a pas toujours été auſſi ferme dans cette maniere d'enviſager l'attraction ; ſoit, comme l'ont ſoupçonné quelques-uns, qu'il l'affectât ſeulement pour ménager ſes lecteurs, ſoit qu'il ait réellement changé d'avis. Le célebre Roger *Cotes*, dans la Préface qu'il a miſe à la tête de la nouvelle édition des Principes de 1713, édi-

tion faite ſous les yeux de *Newton*, a tranché le mot, & donné la gravitation univerſelle pour une propriété inhérente à la matiere. Quantité d'autres partiſans de la doctrine du Philoſophe Anglois, ont imité *Cotes*, & c'eſt même aujourd'hui l'opinion de la plûpart. Cependant, malgré cette eſpece de défection générale, quelques Newtoniens ont reſté conſtamment attachés à la premiere façon de penſer de leur maître. Je cite entr'autres M. *Maclaurin*. Ce Mathématicien célebre traite fort cavaliérement, & va même juſqu'à qualifier d'ignorans, ceux qui peuvent regarder l'attraction comme une propriété de la matiere (*a*).

Voilà une autorité preſſante : mais outre qu'elle eſt contrebalancée par d'autres qui ont auſſi leur poids, ceux qui font de l'attraction une propriété de la matiere, ſçavent défendre leur ſentiment avec des raiſons aſſez preſſantes. Ils prétendent avec aſſez de juſtice, que ceux qui regardent l'attraction comme un monſtre métaphyſique, ne reſſemblent pas mal au vulgaire, qui traite d'impoſſible tout ce dont il n'a eu précédemment aucune idée, tandis qu'il ne fait pas attention à des phénomenes qui ne lui paroîtroient pas moins ſurprenans, s'il ne les avoit tous les jours ſous les yeux. En effet, connoiſſons-nous mieux la nature de l'impulſion ? Tout ce que nous ſçavons ſur ce ſujet, c'eſt que la matiere étant impénétrable, lorſqu'un corps en choque un autre, il falloit, pour ne pas violer cette loi, ou que le corps choquant s'arrêtât tout court, ou qu'il rebrouſsât chemin, ou que l'un & l'autre ſe diſtribuaſſent, ſuivant un certain rapport, le mouvement qui étoit dans le premier. Mais, diſent-ils, conçoit-on mieux comment ſe fait cette communication du mouvement ? Leurs adverſaires ſont contraints de dire que c'eſt l'Auteur même de l'Univers, qui, en vertu des loix qu'il a établies pour ſa conſervation, meut le corps choqué, & modifie d'une certaine maniere le mouvement du corps choquant. Or en faiſant une pareille réponſe, on fournit aux partiſans de l'attraction une arme pour la défenſe de leur opinion. Car ils ſont également en droit de dire que Dieu, en vertu des loix qu'il s'eſt impoſées pour la conſervation de l'Univers, produit dans les corps cette

(*a*) Expoſition des découvertes Philoſophiques de M. Newton, liv. II, c. I.

tendance, ce mouvement commencé, en quoi consiſte l'attraction. Il n'y a donc dans l'attraction, même considérée comme propriété de la matiere, aucune impoſſibilité métaphyſique; & c'eſt tout ce que prétendent les Philoſophes dont nous parlons. On peut voir dans le *Livre de la figure des Aſtres*, par M. de *Maupertuis*, ce raiſonnement, & divers autres développés avec plus d'étendue, & avec cette préciſion lumineuſe qui caractériſe tous les écrits de cet homme célebre.

M. *Bernoulli* a fait contre l'attraction une difficulté ſpécieuſe, & qui mérite d'être diſcutée. Il prétend que l'attraction ne ſçauroit être en même tems proportionnelle à la maſſe du corps attiré, & ſuivre le rapport inverſe du quarré de la diſtance. « Car, dit-il, (*a*) une particule élémentaire, à un éloi-
» gnement double du corps attirant, en recevroit une force,
» non ſous-quadruple, mais ſous-octuple de celle qu'elle re-
» çoit à une diſtance ſimple; puiſque la denſité ou la multi-
» tude des rayons partant du corps attirant, & qui ſaiſiſſent
» la particule, doit être eſtimée par la quantité de la maſſe,
» & non par celle de la ſurface. D'où il ſuivroit que la force
» de cette attraction diminueroit comme les cubes, & non
» comme les quarrés des diſtances.

Cette difficulté, depuis renouvellée par un habile antagoniſte de l'attraction (*b*), ſeroit effectivement très-preſſante, peut-être même ſans réponſe, ſi les choſes ſe paſſoient comme ces Auteurs le ſuppoſent. Il faut, pour lui conſerver ſa force, que l'attraction ſoit l'effet d'une émanation partant d'un centre, & ſe répandant à l'entour par des lignes en forme de rayons. On le voit ſuffiſamment par l'expoſé même de l'objection. Mais cette maniere de concevoir l'attraction n'eſt fondée que ſur l'analogie de la loi qu'elle ſuit, avec celle ſuivant laquelle décroît la lumiere, à différentes diſtances du point lumineux: & rien n'oblige ceux qui font de l'attraction une propriété inhérente à la matiere; rien, dis-je, ne les oblige à lui aſſigner une pareille cauſe. Au contraire, puiſque cette tendance au mouvement, eſt un effet immédiat de la volonté du Créateur, rien n'empêche que dans chaque particule élé-

(*a*) Nouvelle Phyſique céleſte. §. 42.

(*b*) Diſſertation ſur l'incompatibilité de l'attraction & de ſes différentes loix avec les phénomenes, & ſur les tuyaux capillaires, par le P. Gerdil, Barnabite, de l'inſtitut de Boulogne.

mentaire, elle ne ſoit en raiſon de la maſſe, & qu'elle ne décroiſſe en raiſon réciproque du quarré de la diſtance à chaque autre particule ; & des amas de ces particules élémentaires, ſe formeront des corps qui graviteront les uns vers les autres en raiſon des maſſes, & en raiſon inverſe des quarrés des diſtances.

Nous pourrions diſcuter de la même maniere diverſes autres objections qu'on a élevées contre l'attraction ; mais cet examen ſeroit trop long. Il ſuffira de remarquer que les plus preſſantes & les mieux fondées, ont été raſſemblées par le Pere *Gerdil*, dans l'ouvrage cité ci-deſſus, ouvrage qui par la nature des objections, & par le ton d'égards que l'Auteur obſerve pour les grands hommes dont il combat les ſentimens, mériteroit d'être analyſé par quelque habile Newtonien. Ce n'eſt pas que ce ſçavant Ecrivain révoque en doute l'exiſtence de cette loi, dont M. *Newton* a fait le reſſort de l'Univers : il combat ſeulement le ſentiment de ceux qui font de l'attraction une propriété eſſentielle, ou métaphyſique de la matiere, ou qui, pour expliquer certains phénomenes, prennent la liberté de la faire croître ou décroître, ſuivant d'autres puiſſances que l'inverſe du quarré de la diſtance. Ainſi quand même quelques-unes de ces objections ſeroient ſans réponſe, elles ne porteroient aucune atteinte à la théorie de *Newton ;* elles ne feroient que montrer la néceſſité de recourir à quelque explication méchanique de l'attraction, ſemblable à celle qu'il a lui-même ſoupçonnée.

Après s'être aſſuré par les preuves ci-deſſus de l'exiſtence de cette force, que nous nommons la gravitation univerſelle de la matiere, nous allons développer les principaux phenomenes qui en dérivent. Mais avant que de nous élever dans les eſpaces céleſtes, arrêtons-nous un peu, avec M. *Newton* (*a*), à conſidérer les effets qu'elle produit entre les corps, à raiſon de leur maſſe & de leur figure.

La gravitation univerſelle étant admiſe, il eſt évident que chaque particule de matiere ſera attirée par toutes les autres. Un corps voiſin d'un amas de matiere ſera donc attiré par toutes les particules dont cet amas eſt compoſé, & il tendra vers lui avec une force & une direction, compoſée de toutes

(*a*) Princip. Sect. XII.

les forces & les directions particulieres avec leſquelles il tend vers ces particules. Si la gravitation ſuivoit le rapport des diſtances, M. *Newton* démontre que cette direction compoſée ſeroit celle qui paſſe par le centre de gravité de la maſſe, & la force elle-même ſeroit auſſi proportionnelle à la diſtance de ce centre. Il en eſt de même, à certains égards, lorſque l'attraction ſuit le rapport inverſe des quarrés des diſtances ; mais il faut pour cela que le corps ſoit formé en ſphere, & que cette ſphere ſoit homogene, ou du moins que la denſité ſoit la même à égales diſtances du centre. Dans ces deux cas, un corpuſcule de matiere, placé hors de cette ſphere, tendra vers elle, tout comme ſi toute ſa matiere étoit réunie à ſon centre, & la force avec laquelle il tendra vers cette même ſphere, ſuivra le rapport inverſe du quarré de la diſtance au centre. J'ai dit un corpuſcule de matiere, placé hors de la ſphere : il y a en effet ici une diſtinction à faire ; car ſi ce corpuſcule étoit placé au-dedans d'une ſphere homogene, il graviteroit vers ſon centre avec une force qui ſuivroit le rapport des diſtances au centre. La raiſon de ceci eſt la ſuivante. Le même corpuſcule, placé ſur la ſurface de deux ſpheres inégales, tend vers elles avec des forces qui ſont directemens comme les quantités de leur matiere, & inverſement comme les quarrés des diſtances au centre. Mais les quantités de matiere ſont comme les cubes des rayons de ces deux ſpheres : ainſi les forces ſeront directement comme les cubes des rayons, & inverſement comme les quarrés de ces rayons, c'eſt-à-dire comme les cubes diviſés par les quarrés ; ce qui n'eſt que la raiſon directe des rayons. D'un autre côté M. *Newton* démontre qu'un corpuſcule placé au dedans d'une ſphere creuſe, n'en éprouve aucune action, parce que toutes les attractions particulieres ſe détruiſent mutuellement. Un corps placé dans l'intérieur d'une ſphere, n'éprouvera donc que l'action de la ſphere dont le rayon eſt ſa diſtance au centre ; & par ce que l'on a dit ci-deſſus, la force avec laquelle il ſera attiré, décroîtra comme la diſtance à ce centre.

Après avoir fait connoître de quelle maniere une ſphere attire un corpuſcule placé hors d'elle, il ſera facile de reconnoître comment deux ſpheres s'attirent mutuellement. Il ſuit clairement de ce qu'on vient de dire, que l'action qu'elles exerceront l'une

l'une ſur l'autre ſera la même que ſi toute la maſſe de chacune étoit réduite à ſon centre. Mais, encore une fois, tout ceci n'a lieu que dans le cas où l'attraction eſt comme la diſtance, ou en raiſon inverſe du quarré de cette diſtance; & même dans ce dernier cas, il n'y a que les ſpheres de l'attraction totale deſquelles il réſulte dans leurs différens éloignemens, une attraction qui ſuit la même loi que celle des particules élémentaires dont elles ſont compoſées. Voilà un privilege aſſez remarquable dont jouiſſent les deux loix de l'attraction en raiſon de la diſtance, ou de l'inverſe du quarré de cette diſtance; & s'il nous étoit permis, à nous, foibles mortels, d'entrer dans les vues de la Divinité, ne pourrions nous pas ſoupçonner avec M. de *Maupertuis* (*a*), que ce privilege particulier eſt le motif qui l'a déterminée en faveur de la ſeconde de ces loix plutôt que pour toute autre. Car quoique la premiere en jouiſſe également, & même dans une plus grande étendue, elle a d'ailleurs un inconvénient, ſçavoir qu'un corps en attireroit un autre, d'autant plus qu'ils ſeroient éloignés, ce qui ne paroît pas compatible avec nos idées.

M. *Newton* ne s'eſt pas borné à ces deux ſeules loix d'attraction; il a auſſi porté ſon attention ſur les diverſes loix qu'on peut ſuppoſer dans l'abſtraction mathématique (*b*). Voici entr'autres un théorême curieux qu'il démontre ſur ce ſujet. Si une particule de matiere gravite ſuivant la raiſon réciproque du cube de la diſtance, la force avec laquelle elle ſera attirée dans le contact avec la maſſe attirante, ſera infiniment plus grande qu'à quelque diſtance finie que ce ſoit (*c*). Au reſte cette propoſition, M. *Newton* ne la donne avec pluſieurs autres qu'il démontre dans les ſections ſuivantes, que comme des vérités purement mathématiques. Mais elle a ſuggéré à quelques-uns de ſes ſectateurs l'idée de s'en ſervir, pour rendre raiſon de la dureté des corps. Ils ſuppoſent que les particules de matiere dont les corps ſont compoſés, s'attirent ſuivant la raiſon réciproque des cubes des diſtances, & par-là ils expliquent d'où vient que ces particules étant contigues, adhérent ſi fortement entr'elles, & exigent une grande force pour être ſéparées. Cependant cette explication eſt ſujette à bien des difficultés. En premier

(*a*) Mémoires de l'Académie. 1737.
(*b*) Princip. Liv. 1, Sect. XIII.

lieu, ſi l'on admettoit une pareille loi, deux particules de matiere ne ſeroient plus ſéparables par aucune force finie, dès qu'une fois elles auroient été dans un contact immédiat; ce qui eſt contre l'expérience. A la vérité, on pourroit ſuppoſer que l'attraction diminuât davantage qu'en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, & moins que dans celle du cube, de ſorte qu'au contact, elle fût ſeulement beaucoup plus grande qu'à la plus petite diſtance finie; mais quoique la Géométrie puiſſe trouver ſon compte dans cette ſuppoſition, la ſaine Phyſique pourra-t'elle s'en accommoder? En ſecond lieu, admettre dans le ſyſtême ſolaire, une attraction ſuivant le rapport réciproque des quarrés des diſtances, & enſuite admettre entre les parties des corps ſolides, ou deſtinés à s'unir, une loi d'attraction réciproque au cube, cela n'eſt guere philoſophique. Si la gravitation univerſelle n'eſt pas une chimere, il eſt extrêmement probable que la même loi regne partout. Il faudroit donc en imaginer une qui fût exprimée par une fonction telle que, dans les grandes diſtances, la ſeule raiſon inverſe du quarré de la diſtance eût lieu, & dans les petites celle du cube. La poſſibilité d'une pareille loi a été vivement agitée entre deux Académiciens célebres (*a*). Nous ſommes fort éloignés de vouloir prononcer ſur cette queſtion: elle tient à une métaphyſique trop délicate, & d'ailleurs, *non noſtrum eſt tantas componere lites.* Si cependant il nous eſt permis de dire notre avis, il nous ſemble que c'eſt un peu trop ſe hâter que de faire ainſi de la gravitation univerſelle l'unique principe de tous les phénomenes que nous voyons s'exécuter ſous nos yeux. Si ces phénomenes s'en déduiſoient avec cette facilité qu'on remarque dans d'autres parties de cette théorie, à la bonne heure. Mais faire, avec M. *Keil*, toutes les ſuppoſitions qu'on croit propres à expliquer les phénomenes, c'eſt s'écarter de la route tracée par M. *Newton*, qui déſaprouve entiérement cette maniere de procéder en Phyſique. Il ne ſuffit pas, ſuivant ce grand homme, qu'un fait ſuppoſé puiſſe ſervir à expliquer un phénomene. Il faut avoir été conduit à ce fait par d'autres phénomenes qui en ſoient une preuve directe. On a, il eſt vrai, des preuves très-fortes que certains

(*a*) *Voyez* Mémoires de l'Académie, années 1737 & 1738.

corps ſont doués d'une force qui à une diſtance très-petite, eſt incomparablement plus puiſſante, qu'à une diſtance ſenſible; mais gardons-nous de prononcer ſur la loi de cette force, ou de la confondre avec le principe que l'on a ſi bien prouvé être le reſſort & le modérateur du mouvement des planetes. Ce ſeroit même une précipitation trop peu philoſophique, que de prétendre que cette force ne ſçauroit être l'effet de quelque méchaniſme particulier. Le magnétiſme, qui eſt une de ces ſortes d'attractions qui s'operent à l'aide d'un fluide inviſible (*a*), les attractions & répulſions électriques, dans leſquelles ce fluide ſe décele aux yeux & au tact, doivent nous inſpirer une grande défiance de nos lumieres ſur ce ſujet, & nous porter à n'aller en avant qu'avec une extrême circonſpection. Ces réflexions que j'avois faites avant que de lire l'article *attraction* de l'Encyclopédie, j'ai eu le plaiſir de les voir confirmées par le ſuffrage de l'illuſtre Auteur de cet article, à la lecture duquel nous invitons. Mais il eſt tems de revenir à notre ſujet principal.

Dans tout ce qu'on a dit juſqu'ici ſur le ſyſtême de l'Univers, on a ſuppoſé tacitement, comme on le fait d'ordinaire, que le Soleil ſeul attire à lui les planetes, & d'après ce principe on a fait voir, avec M. *Newton*, que celles-ci décrivent autour de cet aſtre des ellipſes, à l'un des foyers deſquelles il eſt placé. Mais, ſuivant cette théorie, la gravitation eſt réciproque: c'eſt pourquoi, ſi le Soleil attire les planetes, chacune d'elles l'attire à ſon tour, & delà naiſſent quelques aberrations, peu ſenſibles à la vérité, mais deſquelles il eſt cependant à propos de tenir compte (*b*).

Premiérement, le Soleil n'eſt point parfaitement immobile. En ne ſuppoſant, par exemple, qu'une ſeule planete tournant autour de lui, ils décriroient l'un & l'autre dans le même tems, & autour de leur centre de gravité commun, des ellipſes ſemblables. Ajoutons-y maintenant une ſeconde planete, celle-ci ſera attirée, & par la premiere, & par le Soleil; c'eſt pourquoi elle tendra à un point moyen entre deux. Ce point

(*a*) Il me ſemble qu'on ne peut en douter, ſi l'on conſidere qu'un morceau de fer mis dans le ſeul voiſinage de l'aimant, & reſtant ainſi durant un tems convenable, acquiert la vertu magnétique. D'ailleurs le feu interrompt ou arrête l'action du magnétiſme.

(*b*) *Voyez* Princip. Liv. 1, Sect. XI.

ſeroit le centre de gravité de ces deux corps, ſi l'attraction étoit préciſément proportionnelle à la diſtance. Il n'en eſt pas tout-à-fait de même dans la loi d'attraction réciproque aux quarrés des diſtances, parce que dans ce cas un corps qui tend à deux autres à la fois, ne tend pas, comme dans le précédent, à leur centre de gravité. Cependant s'il y a entre ces deux premiers corps une extrême diſproportion, alors le troiſieme tendra ſenſiblement à leur centre de gravité commun, & avec une force réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance à ce centre. Or c'eſt-là le cas du Soleil comparé à toutes les autres planetes priſes enſemble: ſa maſſe ſurpaſſe tellement la leur, comme on le fera voir bien-tôt, que lors même qu'elles ſe trouvent toutes du même côté, le centre de gravité du Soleil & de tous ces corps eſt à peine éloigné de la ſurface de cet aſtre d'un de ſes demi-diametres. D'un autre côté, l'attraction étant réciproque, le Soleil & la premiere planete ſont attirés par la ſeconde, & delà naît encore un mouvement du centre de gravité des deux premiers corps autour de celui des trois.

Ce que nous venons de dire de trois corps, dont deux circulent autour d'un troiſieme qui eſt incomparablement plus gros, ſe doit entendre de tant d'autres qu'on voudra. Ainſi dans notre ſyſtême planétaire, ce n'eſt point autour du centre du Soleil que les planetes font proprement leurs révolutions: c'eſt autour du centre de gravité commun de tout le ſyſtême, & ce centre de gravité eſt le ſeul point immobile; le Soleil lui-même tourne à l'entour de ce point, & s'en éloigne ou s'en approche, ſuivant la ſituation des autres planetes. Mais, comme nous l'avons dit plus haut, la grande ſupériorité de la maſſe du Soleil ſur celles de toutes les planetes réunies enſemble, rend ce mouvement inſenſible. Ainſi, quoique mathématiquement parlant, cette complication d'actions altere un peu la proportionnalité des aires avec les tems dans les orbites planétaires, & la loi réciproque des quarrés des diſtances, elle le fait ſi peu ſenſiblement, que l'effet n'en eſt perceptible qu'après un grand nombre de révolutions. Delà peut venir le mouvement des apſides & des nœuds des planetes, ainſi que M. *Newton* l'a reconnu dans le Sch. de la propoſition XIV, de ſon troiſieme Livre. Nous remarquons ceci

expreſſément, parce que quelques Ecrivains ont donné le mouvement des apſides des planetes principales, comme un phénomene inexplicable dans le ſyſtême de la gravitation univerſelle, & qu'ils ont prétendu tirer delà une objection puiſſante & ſans réplique contre cette théorie. Ils ne l'euſſent jamais faite cette objection, s'ils euſſent un peu mieux connu l'ouvrage de M. *Newton*, & tous les détails de ſon ſyſtême.

Il faut encore remarquer, à l'égard des ſyſtêmes particuliers, par exemple de celui de la terre & de la Lune, un effet de la gravitation réciproque. Ce n'eſt point la terre qui décrit autour du Soleil ſuppoſé immobile, une orbite elliptique : c'eſt le centre commun de gravité, de la Lune & de la terre ; & tandis que la Lune fait une révolution autour de la terre, ou de ce centre, la terre en fait auſſi une autour du même centre. Delà naît une équation à laquelle les Aſtronomes doivent avoir égard dans le calcul du lieu de la terre ; car la maſſe de notre globe étant environ quarante fois plus grande que celle de la Lune, la diſtance du centre de la terre au centre de gravité commun, ſera d'environ un rayon terreſtre & demi ; lors donc que la Lune ſera en quadrature avec le Soleil, le lieu véritable de la terre précédera ou ſuivra le lieu du centre de gravité d'environ un rayon & demi de la terre, & il y aura de l'un à l'autre une différence d'une fois & demi la quantité qui répond à la parallaxe horizontale du Soleil. Et il eſt aiſé de voir que dans les autres poſitions du Soleil, cette correction ſera à la quantité ci-deſſus, comme le ſinus de la diſtance de la Lune aux ſyſigies, eſt au ſinus total.

Nous venons maintenant à une des déterminations les plus ingénieuſes que nous fourniſſe le ſyſtême phyſique de M. *Newton*, ſçavoir la comparaiſon des maſſes du Soleil & des planetes. Meſurer la quantité de matiere contenue dans ces corps ſi éloignés de nous, c'eſt ſans doute un problême qui paroîtra à pluſieurs de nos lecteurs, inſoluble, pour ne pas dire ridicule. Nous les prions cependant de ſuſpendre leur jugement : ils verront que M. *Newton* eſt parvenu à ſa ſolution d'une maniere qui n'eſt pas une conjecture, mais un raiſonnement convaincant (*a*). Eſſayons de la rendre ſenſible.

(*a*) *Princip.* Liv. III, p. 8.

Nous avons déja remarqué qu'un corps qui gravite vers une ſphere, dont toutes les parties attirent en raiſon réciproque des quarrés des diſtances, en éprouve la même action que ſi toute la matiere dont cette ſphere eſt compoſée étoit réduite à ſon centre. Si cette quantité de matiere eſt double, le corps, à même diſtance, éprouvera un effort double, & s'il en éprouve un effort double, on devra en conclure qu'il y a deux fois autant de matiere dans la ſphere attirante. Il ſeroit donc facile de connoître la maſſe du Soleil, ſi nous avions des expériences de la peſanteur des corps ſur la ſurface de cet aſtre, comme nous en avons ſur la ſurface de la terre; mais ſi l'on n'a pas de pareilles expériences, on a préciſément l'équivalent, dès qu'on connoît en demi-diametres ſolaires la diſtance d'une planete tournant autour du Soleil, de Mercure, par exemple, & le tems de ſa révolution. Car la force avec laquelle elle gravite vers le Soleil, eſt donnée par-là, puiſqu'elle eſt proportionnelle au ſinus verſe de l'arc parcouru par Mercure dans un tems déterminé, par exemple, celui d'une ſeconde. Ainſi on connoîtra par un calcul fort ſimple, de combien Mercure tomberoit vers le Soleil dans une ſeconde, s'il étoit livré à l'impreſſion unique de la gravitation; & cette force étant connue à la diſtance du rayon de l'orbite de Mercure, on déterminera facilement ce qu'elle à la ſurface du Soleil, puiſqu'on ſçait que ces forces ſont entr'elles réciproquement comme les quarrés des diſtances. Mais d'un autre côté on connoît l'eſpace qu'un corps parcourt durant une ſeconde en tombant ſur la ſurface de la terre, c'eſt-à-dire, à la diſtance d'un demi-diametre terreſtre : on peut donc trouver par le rapport du demi-diametre de la terre, à celui du Soleil, de combien tomberoit un corps tranſporté à un demi-diametre ſolaire, loin du centre de notre globe. Ainſi nous aurons deux poids également diſtans des centres des deux globes reſpectifs, avec les eſpaces qu'ils parcourroient en même tems, en vertu de l'attraction qu'ils en éprouvent. Il n'y aura donc qu'à comparer ces eſpaces, & leur rapport ſera celui des maſſes attirantes.

Il eſt facile de voir qu'on parviendra par une ſemblable méthode à déterminer le rapport de la maſſe du Soleil, avec celles de Jupiter ou de Saturne. Car ces planetes ont auſſi des ſatellites qui font leurs révolutions à des diſtances connues de

leurs centres, & dans des tems périodiques connus. Or il ne nous en faut pas davantage pour déterminer quel eſpace les corps parcourent en tombant à la ſurface de Jupiter & de Saturne dans un tems donné. Feignons dans une planete quelconque un Aſtronome connoiſſant le ſyſtême de la gravitation univerſelle, & ayant obſervé la diſtance de notre Lune à la terre en demi-diametres terreſtres, il détermineroit de même de combien les corps peſans tombent ici dans un tems déterminé, & par-là le rapport de la maſſe de la terre à celle du Soleil, ou de la planete qu'il habite.

Il y a un autre moyen équivalent, & un peu plus court, de parvenir à la même détermination. C'eſt celui qu'employe M. *Newton :* il eſt également aiſé à concevoir. Plus une planete a de maſſe, plus, à égale diſtance, il faut que la vîteſſe de projection d'un corps ſoit grande, & par conſéquent que ſon tems périodique ſoit court, pour le ſoutenir dans une orbite circulaire, telle que ſont ſenſiblement celles des planetes & de leurs ſatellites. Or on démontre facilement qu'à diſtances égales, les forces, ou la quantité de matiere attirante, ſont réciproquement comme les quarrés des tems périodiques; & qu'à diſtances inégales, ces mêmes maſſes ſont en raiſon compoſée de la directe des cubes des diſtances, & de l'inverſe des quarrés des tems périodiques. Il n'y a donc qu'à connoître les diſtances des ſatellites à leurs planetes principales, & la diſtance de celles-ci au Soleil, auſſi-bien que leurs tems périodiques, & l'on aura par la regle qu'on vient de donner, les rapports des maſſes du Soleil & de ces planetes. C'eſt ainſi que M. *Newton* trouve que les quantités de matieres contenues dans le Soleil, Jupiter, Saturne & la Terre, ſont reſpectivement comme 1. $\frac{1}{1033}$. $\frac{1}{2401}$. $\frac{1}{227512}$. Il compare auſſi leurs denſités, par le rapport connu de leurs volumes, & il trouve qu'elles ſont dans les rapports de 100. $94\frac{1}{2}$. 600. & 401. Il recherche enfin les forces avec leſquelles le même poids tranſporté à la ſurface de ces différens corps, peſeroit ſur eux, & il trouve qu'elles ſont en raiſon de 10000. 943. 529. & 435. A l'égard des autres planetes, comme elles n'ont point de ſatellites, le premier chaînon du raiſonnement qui nous a conduits juſqu'ici, nous manque; & l'on ne ſçauroit

déterminer par une démonſtration mathématique la maſſe qu'elles contiennent. Mais au défaut de cette démonſtration, M. *Newton* recourt à une conjecture aſſez plauſible. Ayant remarqué que les planetes les plus éloignées, dont nous venons de calculer les maſſes, ſont les moins denſes, il en conclud à l'égard des autres, que leur denſité augmente en approchant du Soleil, & à peu près en raiſon des chaleurs qu'elles éprouvent. Ainſi il fait Mercure ſept fois auſſi denſe que la terre, & il raiſonne de même à l'égard de Vénus & de Mars.

Il ne reſte plus que la Lune qui, quoique planete ſecondaire, nous intéreſſe particuliérement, à cauſe de ſa proximité, & des effets qu'elle produit ſur notre globe. Elle n'a aucun ſatellite; nous n'avons aucune expérience de chûtes des corps ſur ſa ſurface. Comment faire pour déterminer ſa maſſe? M. *Newton* y parvient, ou du moins enſeigne le moyen d'y parvenir, à l'aide d'une conſidération tout-à-fait ingénieuſe. Il remarque que les marées dans les ſyſigies ſont cauſées par les forces réunies de la Lune & du Soleil, & au contraire dans les quadratures par la différence de ces forces. Il prend donc quelques obſervations de marées faites dans ces deux circonſtances, & il en conclut le rapport de la force de la lune à celle du ſoleil, comme de 9 à 2. Mais il eſt aiſé de voir que la force de la lune eſt la maſſe de la lune diviſée par le quarré de ſa diſtance à la terre, & la force du ſoleil celle de la maſſe de cet aſtre pareillement diviſée par le quarré de ſa diſtance à notre globe. D'où il fut facile à M. *Newton* d'inférer que la maſſe de la lune eſt à celle de la terre, comme 1 à 40 bien près; & enſuite ayant égard à ſon volume donné par ſon diametre apparent, que ſa denſité eſt à celle de la terre comme 11 à 9 environ. Mais M. Daniel *Bernoulli* (*a*) remarquant que les marées employées par M. *Newton*, ne ſont pas aſſez affranchies des circonſtances étrangeres à l'action pure des deux luminaires, fait quelque changement à cette détermination, & prend pour le rapport des forces moyennes de la Lune & du Soleil, celui de 5 à 2. D'où il ſuivroit, en ſuppoſant la parallaxe du Soleil de 10 ſecondes, que la Lune auroit une

(*a*) Traité ſur le flux & le reflux de la mer. Chap. VI, art. 10.

maſſe

maſſe 72 fois moindre que celle de la terre, & une denſité qui ſeroit à celle de notre globe comme $6\frac{1}{4}$ à 9. Ces rapports fondés ſur une conſidération approfondie de certaines circonſtances des marées, méritent d'être adoptés en attendant qu'on connoiſſe, par des obſervations plus préciſes & plus certaines, la diſtance du Soleil à la terre, & le rapport des marées des ſyſigies à celles des quadratures. On pourroit attendre ce dernier point d'un obſervateur placé à l'Iſle Sainte-Hélene, ou dans celle de Saint-Thomé, qui étant au milieu du vaſte Océan, ſont dans la poſition la plus favorable pour de pareilles obſervations.

Outre les phénomenes généraux que nous venons d'expoſer, il y en a pluſieurs autres particuliers qui dépendent du même principe. C'eſt, par exemple, de l'action du ſoleil que naiſſent les bizarreries du mouvement de la lune, qui ſont depuis ſi long-temps le tourment des Aſtronomes. M. *Newton* a la gloire d'avoir le premier découvert & porté bien loin la théorie phyſique des mouvemens de cette planete. C'eſt cette même cauſe qui produit dans le globe ou le ſphéroïde de la terre, deux mouvemens: l'un par lequel l'interſection équinoxiale de ſon équateur avec l'écliptique anticipe à chaque fois le lieu de la précédente; ce qui fait paroître les étoiles fixes s'avancer dans la ſuite des ſignes, phénomene appellé la préceſſion des équinoxes: l'autre par lequel l'angle de l'écliptique & de l'équateur augmente & diminue alternativement, ce qu'on nomme la Nutation de l'axe de la terre. Le flux & reflux de la mer, phénomene ſi connu, ſe déduit auſſi de la maniere la plus ſatisfaiſante de l'action du ſoleil & de la lune ſur les eaux de l'Océan. Ce ſont là autant de branches de la théorie de la gravitation univerſelle, qui doivent leur naiſſance à M. *Newton*. Chacune d'elles nous fourniroit la matiere d'un article particulier; mais comme ce ſont des Géometres de ce ſiecle qui, aidés des lumieres de ce grand homme, ont donné à ces diverſes théories leur principal accroiſſement, nous différons d'en parler juſqu'à la partie ſuivante de cet ouvrage, dans la vue de préſenter tout à la fois & d'une maniere plus ſatisfaiſante le tableau de leurs progrès. Nous terminerons ce que nous avons encore à dire ſur les découvertes phyſico-aſtronomiques de *Newton*, par l'expoſition de ſa théorie des Cometes.

Nous la ferons ſeulement précéder de quelques mots concernant divers ouvrages auxquels celui de M. Newton a donné lieu.

Les *Principes mathématiques de la philoſophie naturelle*, ſont un ouvrage ſi plein de géométrie ſublime, & ſi peu à la portée du commun des Lecteurs, qu'il étoit à propos que quelqu'un entreprît d'en faciliter l'intelligence. David *Gregory* ſe propoſa cet objet, & publia dans cette vue en 1702 ſon livre intitulé, *Aſtronomiæ phyſicæ ac geometricæ elementa*. C'eſt un ouvrage eſtimable, mais qui n'a pas répondu à l'attente qu'on en avoit conçue : car, en général, ce ne ſont que les *principes* mis dans un ordre un peu différent, & ce qui eſt obſcur & difficile dans ces derniers, ne l'eſt guere moins chez *Gregory*; de ſorte qu'on ne peut pas dire qu'il ait jetté un grand jour ſur cette matiere. Il falloit quelque choſe de mieux pour applanir tous les endroits difficiles des principes; & c'eſt ce que les PP. *Jacquier* & *le Seur*, ſçavans Minimes, ont exécuté très-heureuſement par le Commentaire latin qu'ils ont donné en 1740. Je plaindrois, à la vérité, le Lecteur qui auroit toujours beſoin de ces Guides; mais il eſt fort agréable de les trouver prêts au beſoin. On a auſſi un Commentaire ſur les principaux points de la phyſique céleſte de M. *Newton*, à la ſuite de la traduction françoiſe des *principes*, de Madame la Marquiſe du Châtelet. Le célebre M. *Maclaurin* n'a pas dédaigné d'entreprendre une expoſition des mêmes vérités, propre à en procurer l'intelligence aux Lecteurs qui craignent un grand appareil de géométrie. Cet ouvrage, d'ailleurs original & profond en bien des points, parut en 1748 ſous le titre d'*Expoſition des découvertes philoſophiques de M. le Chevalier Newton*, & nous en avons une très-bonne traduction. Les Lecteurs qui veulent être conduits avec encore plus de facilité depuis les premiers principes de la méchanique, juſqu'aux découvertes les plus difficiles de M. *Newton*, doivent lire l'ouvrage de M. *Pemberton*, d'abord publié à Londres ſous le titre de *A view of ſir Iſaac Newton philoſophy*, & traduit en françois ſous celui d'*Elémens de la philoſophie Newtonienne*. Nous citerons enfin avec éloge les *Inſtitutions Newtoniennes* de M. *Sigorgne*, qui a d'ailleurs vigoureuſement combattu les tourbillons Cartéſiens, dans divers écrits publiés vers l'année 1740.

XIII.

De la théorie des Cometes.

De toutes les parties de l'aſtronomie, celle qui a commencé le plus tard à prendre quelque accroiſſement ſolide, eſt la théorie des Cometes. Ces aſtres ne furent regardés par les Anciens que comme des météores peu différens des feux & des exhalaiſons que nous voyons quelquefois s'enflammer dans l'athmoſphere. Si quelques Philoſophes, comme *Appollonius de Mynde*, & les Pythagoriciens eurent ſur ce ſujet des idées plus juſtes, ces ſemences de la vérité furent étouffées ſous le poids du préjugé, & ſurtout de l'autorité de la phyſique péripatéticienne : de-là vient que l'antiquité a été ſi peu ſoigneuſe à nous tranſmettre des obſervations de ces phénomenes, & nous ne ſçaurions trop regretter qu'elle ait été ſi peu éclairée ſur ce ſujet, lorſque nous conſidérons que ce défaut de matériaux anciens renvoye à pluſieurs ſiecles d'ici la déciſion d'un des points les plus curieux de l'aſtronomie phyſique.

On ne trouve juſqu'à l'époque de *Tycho-Brahé*, qu'erreurs parmi les Philoſophes ſur ce qui concerne les Cometes. Cet homme célebre commença à deſſiller les yeux de ſes Contemporains ſur ce point, par une découverte importante. Il démontra par la petiteſſe de la parallaxe de ces aſtres, qu'ils étoient fort ſupérieurs à la Lune. Il tenta même de repréſenter leur cours en les faiſant mouvoir dans une orbite autour du Soleil, en quoi néanmoins il faut remarquer que ce n'étoit entre ſes mains qu'une hypotheſe purement aſtronomique, & qu'il ne ſoupçonnoit en aucune maniere que ce fûſſent des planetes circum-ſolaires d'une eſpece particuliere. La découverte de *Tycho* fut confirmée par les obſervations, & le ſuffrage de divers Aſtronomes de ſon temps, tels que *Mæſtlin*, *Rothman*, le *Landgrave de Heſſe*, &c. & au commencement du XVIIe ſiecle; elle reçut un nouveau jour des obſervations de *Galilée*, de *Snellius*, de *Kepler*, & de divers autres. Ce fut bientôt une doctrine admiſe & enſeignée par tous les Aſtronomes de quelque poids & de quelque capacité; & les oppoſitions qu'y mirent de ſerviles Péripatéticiens, tels qu'un *Claramonti*, un *Bérigard*, &c. ne firent que mettre dans un grand jour leur ignorance, ou leur peu d'amour pour la vérité.

Les Aſtronomes étant une fois détrompés ſur la place qu'ils devoient aſſigner aux Cometes, il étoit tout-à-fait naturel qu'ils eſſayaſſent de ſoumettre leurs mouvemens au calcul. *Tycho* & *Mæſtlin* en avoient donné l'exemple; il fut ſuivi par *Kepler*. Cet Aſtronome fameux crut pouvoir repréſenter ces mouvemens, en ſuppoſant qu'ils ſe fiſſent dans des lignes droites; il ne put cependant ſe diſſimuler que ſi les Cometes décrivoient des lignes droites, ce n'étoit pas d'un mouvement égal & uniforme. Cela eût dû lui inſpirer l'idée que cette trajectoire étoit curviligne; mais ne voulant pas renoncer à la ligne droite, il fut contraint d'admettre dans les Cometes une accélération & une retardation réelle. *Kepler* enfin, cet homme ſi clairvoyant, & doué d'un génie ſi propre à ſaiſir du premier coup tout ce qui donnoit à l'univers plus de magnificence, d'ordre & d'harmonie, ne fut pas plus éclairé que le vulgaire ſur la nature de ces aſtres. Au lieu de ſoupçonner ce que nous avons aujourd'hui tant de raiſon de tenir pour aſſuré, il ſe borna à les regarder comme de nouvelles productions qui, ſemblables aux poiſſons de l'Océan, ne ſervoient qu'à remplir l'immenſité de l'æther (*a*).

L'hypotheſe qui fait mouvoir les Cometes dans des lignes droites, a été pendant long-temps l'hypotheſe favorite de bien des Aſtronomes. Le D. *Hooke* (*b*) & *Grégori* (*c*) nous la donnent comme du Chevalier *Wren*. Les éphémérides que M. *Auzout* donna au commencement de 1665, pour la Comete qui paroiſſoit alors, étoient calculées ſur ce même principe; & comme elles s'accorderent d'aſſez près avec les obſervations, elles étonnerent beaucoup les Aſtronomes; mais c'eſt ſurtout de M. *Caſſini* que cette hypotheſe tire ſa célébrité. Il en fit le premier eſſai ſur la Comete qui parut en 1652, & il continua à l'appliquer à toutes les autres avec aſſez de ſuccès pour perſuader à bien des gens qu'il avoit ſaiſi la véritable hypotheſe. On lit dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1706, quelques détails ſur la maniere dont il calculoit le mouvement d'une Comete. Il ſuppoſoit qu'elle faiſoit ſon cours, non préciſément dans une ligne droite, mais dans un cercle

(*a*) *De Comet.* lib. 3.
(*b*) *Lib.* de Cometa, *inter lect. cutlerianas.*
(*c*) *Aſtr. Geom. & Phyſ. elementa.* Lib. v.

extrêmement excentrique à la terre, & ſi grand que la partie viſible au ſpectateur terreſtre pût paſſer ſenſiblement pour une ligne droite. Il déterminoit enſuite facilement la poſition de ſa trajectoire après trois obſervations diſtantes entr'elles de quelques jours. Car le problême ſe réduit à ceci : trois lignes comme T A, T B, T C, faiſant entr'elles des angles donnés, tirer une ligne comme A E, dont les parties A B, B C, ſoient entr'elles comme les tems écoulés entre les obſervations. Alors la perpendiculaire T P, déſignoit en P, le point du périgée. Quand il en étoit beſoin, M. *Caſſini* donnoit à ce point un mouvement par lequel il rectifioit les lieux de la Comete conformément aux obſervations. *Fig.* 128.

Mais il y a pluſieurs remarques importantes à faire ſur cette hypotheſe. Il nous ſemble, malgré le reſpect que nous avons, & que tout amateur des Mathématiques doit avoir pour M. *Caſſini*, qu'elle eſt défectueuſe en bien des points, & qu'elle ne méritoit pas la mention réitérée qu'en fait l'ingénieux Secretaire de l'Académie (*a*). En premier lieu, la maniere dont M. *Caſſini* déterminoit les élémens de ſon calcul, montre qu'il établiſſoit la terre comme immobile à l'égard de la trajectoire de la Comete. Or cela ne ſçauroit s'accorder avec le véritable ſyſtême de l'Univers, ſuivant lequel la terre a un mouvement journalier ſur ſon orbite. Si l'on ſuppoſe que le chemin des Cometes ſoit en lui-même rectiligne, leur mouvement devra être regardé comme compoſé de leur mouvement réel ſur cette ligne droite, & du mouvement apparent qui réſulte du tranſport de la terre d'un lieu à un autre. C'eſt de cette maniere, bien plus ingénieuſe & plus conforme aux phénomenes, que le Chevalier *Wren* déterminoit la trajectoire d'une Comete (*b*). Il ſuppoſoit quatre obſervations un peu diſtantes les unes des autres ; enſuite il concevoit dans le plan de l'écliptique, les quatre lignes tirées des quatre lieux de la terre, aux quatre lieux correſpondans de la Comete, réduits à l'écliptique. Il ne s'agiſſoit plus que de placer entre ces quatre lignes, une droite qui fût coupée par elles en ſegmens proportionnels aux intervalles entre les obſervations, problême de Géométrie qu'il réſolvoit. La poſition de cette ligne

(*a*) *Voyez* Hiſt. de l'Acad. 1699, 1702, 1707, &c.
(*b*) *Voyez* Grégori dans l'endroit cité ci-deſſus.

étoit, ſuivant lui, la trajectoire de la Comete réduite au plan de l'écliptique. Il falloit enſuite déterminer ſon inclinaiſon par d'autres obſervations ; après quoi en calculant le mouvement de la Comete ſur cette orbite, & celui de la terre ſur la ſienne, on en concluoit, & la longitude, & la latitude de la Comete, comme l'on fait à l'égard des planetes elles-mêmes.

En ſecond lieu, la trajectoire rectiligne déterminée par la méthode de M. *Caſſini*, ne répond point auſſi pleinement aux obſervations, qu'on l'a publié. Il eſt obligé de convenir lui-même, que, quoiqu'il ſuppoſe le mouvement des Cometes ſe faire dans un grand cercle, cependant elles s'en écartent ſenſiblement au bout d'un tems ; ce qui eſt un phénomene qu'on ne ſçauroit repréſenter dans cette hypotheſe. Car le plan paſſant par une ligne quelconque, & par la terre ſuppoſée immobile, coupera toujours la ſphere des fixes ſenſiblement dans un grand cercle. Ajoutons à cela qu'on a ſouvent vu des Cometes qui de directes ſont devenues retrogrades ou au contraire ; telles furent entr'autres la premiere Comete de 1665, & celles de 1707 & 1737, qui changerent de direction vers la fin de leurs cours. La trace apparente de la Comete de 1744, à travers les fixes, forme différentes ſinuoſités, & eſt par conſéquent bien différente de celle d'un grand ou d'un petit cercle de la ſphere. Or ces phénomenes ne ſçauroient encore être expliqués dans l'hypotheſe de M. *Caſſini*. Celle de *Wren* ou de *Kepler*, peut mieux les repréſenter ; car il eſt aiſé de voir que la poſition de la trajectoire, le mouvement réel de la Comete ſur cette trajectoire, & celui de la terre ſur ſon orbite, peuvent être tels qu'en quelque endroit le mouvement de la Comete paroiſſe changer de direction, & même que ce mouvement paroiſſe aſſez irréguliérement courbe. Mais il y a d'autres raiſons qui portent auſſi à rejetter l'hypotheſe de *Wren*.

Les obſervations que nous venons de faire ſur l'hypotheſe de M. *Caſſini*, montrent ſuffiſamment combien peu l'on devoit compter ſur les retours des Cometes, conjecturés par ce grand Aſtronome. Auſſi de je ne ſçais combien de Cometes, dont on lui voit déterminer les révolutions périodiques (*a*), aucune ne s'eſt montrée de nouveau. Son hypotheſe ſur le mou-

(*a*) Hiſt. & Mém. de l'Acad. 1707, 1708.

vement de ces corps étoit vicieux par les fondemens. J'en dirai de même de celle que M. *Jacques Bernoulli* imagina en 1681, & ſur laquelle il oſa prédire le retour de la fameuſe Comete de cette année, pour le mois de Mai de 1719 (*a*). Beaucoup d'Aſtronomes, dit un Hiſtorien célebre, veillerent durant ce mois pour guéter la Comete, & ne virent rien. Je ne ſçais ſi beaucoup d'Aſtronomes veillerent effectivement ; mais il me ſemble que ſi j'euſſe été de ce temps, la prédiction de M. *Bernoulli* n'auroit pas troublé mon repos. Je doute même que ſi ſon Auteur eût vécu alors, il eût été du nombre de ceux qui veillerent. En effet cette prédiction, & le ſyſtême ſur lequel elle eſt fondée, ne ſont que l'ouvrage d'une jeuneſſe, ingénieuſe à la vérité, mais un peu précipitée.

Je reviens à l'hypotheſe de M. *Caſſini*, pour répondre à une queſtion qui ſe préſente naturellement. Comment ſe peut-il faire, dira quelqu'un, que cette hypotheſe étant fauſſe, ait néanmoins aſſez bien ſatisfait aux obſervations pour pouvoir être réputée pendant un tems pour la véritable ? La réponſe à cette queſtion me paroît facile. Les Cometes, ſuivant le ſyſtême reçu aujourd'hui, ſe meuvent dans des orbites elliptiques ſi alongées, qu'elles approchent beaucoup de la parabole. Or une parabole eſt compoſée de deux branches qui, à une aſſez petite diſtance du ſommet, ne different guere de la ligne droite, & ce ſommet eſt aſſez ſouvent fort voiſin du Soleil. D'un autre côté l'apparition d'une Comete dépendant en partie de la poſition de la terre, il arrive le plus ſouvent qu'on ne l'apperçoit que dans une des deux branches de ſon orbite. Pour rendre ceci ſenſible, ſuppoſons que la parabole B A D repréſente la trajectoire d'une Comete, & que tandis qu'elle deſcend vers le Soleil le long de la branche B A, la terre aille de T en *t*, cette Comete ſera cachée dans les rayons du Soleil ; elle ne frappera les yeux du ſpectateur terreſtre que lorſqu'elle aura dépaſſé les environs de cet aſtre, & qu'elle décrira la partie E D de ſon orbite. Elle paroîtra donc alors ſe mouvoir preſque ſur une ligne droite, puiſque cette partie de parabole ne s'en écarte pas beaucoup, & qu'elle en approche de plus en plus, à meſure qu'on s'éloigne du ſommet. Que s'il arrive qu'on voie

Fig. 129.

(*a*) *Conamen novi ſyſt. Comet.* 1681.

la Comete dans l'une & dans l'autre branche de ſon orbite, ſçavoir d'abord s'allant plonger dans les rayons du Soleil, enſuite s'en éloignant, comme alors on la perd de vue pendant quelque temps, on ne manque pas de la prendre lorſqu'elle reparoît pour une nouvelle. On en a un exemple remarquable dans celle de 1680 & 1681. M. *Caſſini*, & ceux qui ſe ſervirent de l'hypotheſe de la trajectoire rectiligne, en firent deux (*a*), & calculerent leurs mouvemens comme s'ils ſe fuſſent fait ſur deux lignes droites, paſſant l'une & l'autre fort près du Soleil. L'exactitude avec laquelle leurs calculs répondirent à l'obſervation, dut même paroître d'un grand poids en faveur de leur hypotheſe. Car la parabole que décrivoit cette Comete, étant extrêmement alongée, ſes deux branches à peu de diſtance du Soleil devoient s'écarter très-peu de la ligne droite. Auſſi voyons-nous que ce fut principalement en 1680 que M. *Caſſini* étonna la cour & la ville par l'exactitude de ſes prédictions ſur les Cometes. Mais ce triomphe de l'hypotheſe des trajectoires rectilignes, n'avoit pour cauſe que l'heureux concours des circonſtances que nous venons de dire. C'eſt pourquoi il ne fut que paſſager, & cette hypotheſe a cédé la place à une autre incomparablement plus exacte.

En effet, malgré tout ce qu'on a dit en faveur de l'hypotheſe adoptée par M. *Caſſini*, il étoit déja reconnu par les Aſtronomes que la trajectoire des Cometes étoit une ligne courbe, & même courbe vers le Soleil. *Hevelius* le démontre dans ſa *Cométographie*, en faiſant l'examen des éphémérides que M. *Auzout* avoit données pour la Comete du commencement de 1665; il donne même à cette courbure une forme parabolique, quoique ſans rien ſoupçonner de la cauſe phyſique de cette courbure, ni que le Soleil en occupât le foyer. *Hooke*, dans ſon Livre intitulé *Cometa*, appuye encore d'une maniere plus déciſive ſur la courbure des trajectoires des Cometes. Il dit poſitivement qu'il faut ſe refuſer aux témoignages des obſervations, ou reconnoître que le chemin des Cometes eſt concave du côté du Soleil.

Tels étoient les progrès de la théorie des Cometes, lorſque parut celle de 1680, ſujet de tant de terreur pour le vulgaire,

(*a*) Mémoires de l'Académie, 1708.

&

& de tant de recherches & d'admiration pour les Sçavans. Elle fut apperçue & obſervée pour la premiere fois avec exactitude le 4 Novembre V. S. à Cobourg en Saxe, par M. *Gottfried Kirch.* Elle alloit alors en ſe plongeant preſque directement vers le Soleil. Elle accéléra ſon mouvement juſqu'au 30 Novembre, qu'elle fit environ 5° en un jour : elle le retarda enſuite juſqu'à ce qu'on la perdît de vue ; ce qui arriva dans les premiers jours de Décembre. Elle recommença à ſe montrer vers le 22 de Décembre revenant du Soleil, & quelques jours après, elle décrivit environ 5° en un jour. Son mouvement alla depuis toujours en retardant juſqu'au milieu de Mars de l'année 1681, qu'on ceſſa de la voir. Elle coupa l'écliptique en deux points, non diamétralement oppoſés, mais éloignés l'un de l'autre ſeulement de 98°, ſçavoir vers la fin du ſigne de la Vierge & le commencement de celui du Capricorne ; & elle parcourut depuis ſon apparition juſqu'à ſon occultation près de neuf Signes, traînant après elle, à ſon retour du Soleil, une queue qui alla juſqu'à 70° degrés de longueur. On prouve que ce fut la même Comete, par la reſſemblance du noyau ou du corps qui parut le même avant & après ſon paſſage près du Soleil, par celle de ſon cours dont la direction fut la même, & ſurtout par l'accord des obſervations avec les calculs faits par M. *Newton*, d'après cette hypotheſe.

Ce fut une ſorte de bonheur pour l'Aſtronomie que la terre ſe trouvât dans une poſition aſſez avantageuſe pour voir l'approche de cette Comete vers le Soleil, & ſon retour du voiſinage de cet aſtre. Sans cette heureuſe circonſtance, le véritable ſyſtême du mouvement des Cometes, eût peut-être encore tardé long-tems à paroître. La ſingularité de celle dont nous parlons en hâta la naiſſance.

C'eſt d'une petite ville d'Allemagne qu'on vit ſortir les premieres étincelles de ce ſyſtême, comme autrefois l'on avoit vu celui de *Copernic* ſortir d'une petite ville de Pruſſe (Varmie), ſéjour ordinaire de cet homme célebre. Celui à qui l'on eſt redevable de cette belle découverte, eſt G. S. *Doerfell*, Miniſtre à Plaven dans le Voigtland, pays dépendant de la Saxe. Cet Aſtronome trop peu connu, & injuſtement paſſé ſous ſilence par la plûpart des Ecrivains ſur cette partie de l'Aſtronomie, qui ne font mention que de M. *Newton*, fut un des

premiers qui remarquerent la nouvelle Comete. Il l'obſerva avec ſoin depuis le 22 de Novembre juſqu'à la fin de Janvier: il reconnut & il prouva que c'étoit la même qui après s'être approchée du Soleil, & plongée dans ſes rayons, reparut de nouveau en s'en éloignant; & aidé des lumieres d'*Hevélius*, il montra que ſon cours s'étoit fait ſur une parabole ayant le Soleil à ſon foyer. Il fixa la diſtance à laquelle elle paſſa du Soleil, à 7000 parties environ, dont le diametre de l'orbite terreſtre contient cent mille; ce qui differe à la vérité de la détermination de M. *Newton*, qui ne la fait que de 612 de ces parties. Mais cette différence ne doit pas nous étonner, ni faire tort à l'Aſtronome Allemand; car il n'étoit pas naturel d'en attendre quelque choſe d'auſſi exact que de M. *Newton*. *Doerfell* publia en 1681, un Traité (*a*) où il établit au long toutes ces choſes. Mais la langue dans laquelle il étoit écrit, le peu de réputation de ſon Auteur, empêcherent qu'il ne fît dans le monde ſçavant la fortune qu'il méritoit. On n'a commencé à le connoître que long-tems après que M. *Newton* a eu établi les mêmes vérités.

En rapportant ce qu'on vient de lire, nous n'avons pas eu le deſſein de déroger en rien à la gloire de M. *Newton*. Quoique ce grand homme ait été prévenu dans la publication de cette belle découverte, le droit qu'il a ſur elle ne ſçauroit être conteſté. En effet, ce qui n'étoit chez *Doerfell* qu'une hypotheſe purement aſtronomique, eſt chez M. *Newton* une vérité phyſique, une branche de ſon ſyſtême général. Il étoit impoſſible que le Philoſophe Anglois ayant établi la gravitation de toutes les planetes vers le Soleil, & reconnoiſſant, avec tous les Aſtronomes habiles de ſon tems, les Cometes pour des aſtres éternels, ne les ſoumît pas à la même action que les autres corps de l'Univers. Il étoit donc néceſſaire qu'il en fît de véritables planetes circonſolaires; & puiſque tantôt elles paroiſſent, tantôt elles ſe ſouſtraiſent à notre vue par leur éloignement, il ne pouvoit que leur donner des orbites extrêmement excentriques, ou en forme d'ellipſe très-alongée: & comme une pareille ellipſe differe peu d'une parabole dans

(*a*) *Aſtronomiſche bettructung des groſſer Cometen Velcher A. 1680 und 1681, erſchienen, &c. Zu Plaven von G. S. D.* C'eſt-à-dire, *Aſtronomica tractatio Cometæ magni qui A. 1680 & 1681 apparuit, &c.* A Plaven, par G. S. Doerfell.

les environs de ſon ſommet, qui ſont les ſeuls endroits où une Comete ſe montre à nous, il étoit tout naturel que M. *Newton*, pour ſimplifier le calcul, donnât à ces aſtres des orbites paraboliques.

Mais M. *Newton* ne s'en tient pas à ces preuves, quoique déja puiſſantes, de ſon ſyſtême. A l'aide d'une ſubtile & ſublime Géométrie, il enſeigne de quelle maniere on peut, d'après trois obſervations, & dans l'hypotheſe parabolique, déterminer l'orbite d'une Comete. Il applique enſuite cette méthode à celle de 1680; & après avoir déterminé ſon orbite, & l'avoir rectifiée par quelques obſervations, il calcule jour par jour les lieux qu'elle a dû occuper dans le Ciel. On eſt étonné de voir avec combien de préciſion, ce calcul s'accorde avec les obſervations de M. *Flamſtead*. Malgré l'irrégularité extraordinaire du cours de cette Comete, la plus grande différence, ſoit en longitude, ſoit en latitude, n'excede pas deux minutes & demi; ce qui eſt à peine ce qu'on peut faire à l'égard des planetes, & qui excede de beaucoup l'exactitude avec laquelle on a jamais calculé les lieux de la Lune. M. *Newton* en fit de même à l'égard des Cometes des années 1664, 1665 & 1682, & dans l'édition des *Principes*, donnée en 1724, on en trouve cinq calculées de cette maniere, & avec le même ſuccès. Tant de préciſion ne ſçauroit être l'effet du hazard, & il en réſulte en faveur de M. *Newton*, une preuve à laquelle on ne peut ſe refuſer.

Lorſque nous parlons d'une ſi grande exactitude dans les calculs que M. *Newton* donna pour la Comete de 1680, nous avons entendu parler de ceux qu'on lit dans la derniere édition de ſes principes, & qui ont été rectifiés par M. *Hallei*. Dans la premiere édition, il y avoit des différences du calcul avec l'obſervation qui alloient à un demi-degré : mais ces différences ne regardoient que diverſes obſervations qu'on lui avoit envoyées d'Italie, d'Amérique, &c. obſervations dont le peu d'exactitude s'apperçoit aſſez facilement. L'accord du calcul avec les obſervations faites en Angleterre, & que lui fournit *Flamſtead*, étoit incomparablement plus grand. Dans la ſuite M. *Newton* vint à connoître celles qu'avoit faites à Cobourg en Saxe, M. *Gotfried Kirch*, Obſervateur habile, durant le mois de Novembre, & il s'en ſervit pour rectifier davantage

les élémens de ſa théorie. Enfin M. *Hallei* pouſſant la préciſion encore plus loin, a calculé le mouvement de cette Comete dans une orbite elliptique, telle qu'il la faudroit pour que la Comete ne la parcourût que dans 575 ans, & c'eſt ce calcul qui ne differe au plus que de deux minutes & demie de l'obſervation.

Une particularité remarquable, à l'égard de la Comete de 1680, c'eſt qu'elle paſſa dans ſon périgée à une très-petite diſtance du Soleil. Suivant M. *Newton*, elle ne fut alors éloignée de cet aſtre que de 612 parties, dont le rayon de l'orbite terreſtre en contient 100000. Ainſi elle approcha du Soleil 163 fois plus que la terre, & elle reſſentit une chaleur qui ſurpaſſe environ 26000 fois la plus grande que nous éprouvions ici : & comme la chaleur d'un fer rouge n'eſt guere qu'une douzaine de fois plus grande que la chaleur directe d'un Soleil d'été, il s'enſuit que la Comete dont nous parlons éprouva une chaleur au moins deux mille fois plus grande que celle d'un fer rouge. Ceci montre que cette Comete devoit être un corps bien compact, pour n'avoir pas été diſſipée par une chaleur auſſi prodigieuſe ; ce qui ajoute un nouveau degré de force au ſentiment qui en fait des corps éternels. Ajoutons encore que M. *Newton* conjecture que cette Comete & toutes les autres, s'approchant de plus en plus du Soleil à chaque révolution, elles tomberont dans cet aſtre comme pour lui ſervir d'aliment, & rétablir la perte qu'il fait continuellement par la lumiere qu'il nous envoye. Mais ce ſont là des conjectures purement phyſiques, qu'il ne faut point mettre en parallele avec les découvertes aſtronomiques que nous venons d'expoſer, & qui n'en ſeront pas moins des vérités ſolidement établies, quel que ſoit le ſort de ces conjectures. A l'égard de cet ornement ſingulier qui accompagne ordinairement les Cometes, nous voulons dire de leurs queues, voici en peu de mots ce qu'il y a de plus probable ſur ce ſujet.

Nous ne nous arrêterons pas à réfuter l'opinion des Anciens, & de quelques Modernes qui ont fait venir les queues des Cometes, de la réfraction des rayons ſolaires au travers du corps ou du noyau de ces aſtres. Outre que ce noyau eſt viſiblement opaque, on ne voit pas comment ces rayons pourroient être réfléchis à nos yeux par une matiere auſſi ſubtile que l'éther. Auſſi *Kepler* qui avoit d'abord été de ce ſentiment, & qui avoit

même traité de monſtrueux celui qui faiſoit venir ces queues d'une matiere appartenante au corps de la Comete, ſe retracta dans la ſuite. Il attribua alors les queues des Cometes à leur athmoſphere & aux parties les plus volatiles de leurs corps, entraînées par les rayons du Soleil. C'eſt à peu de choſe près l'opinion qu'a embraſſé M. *Newton*, ſi ce n'eſt qu'il compare ces queues à la fumée d'un corps brûlant qui ſe dirige toujours en haut & perpendiculairement s'il eſt en repos, ou obliquement & de côté, s'il eſt en mouvement. De même, dit M. *Newton*, les vapeurs exhalées d'une Comete à ſon approche du périhélie, & après l'avoir paſſé, ſe dirigent du côté oppoſé au Soleil ; mais avec un peu de déflection de côté, à cauſe du mouvement du corps de la Comete.

C'étoit-là tout ce qui s'étoit dit de plus probable ſur l'article des queues des Cometes avant M. *de Mairan*. Cet illuſtre Phyſicien, à qui nous devons une explication ſi ſatisfaiſante de l'aurore boréale (*a*), conjecture, avec beaucoup de vraiſemblance, que les queues des Cometes ſont produites par la matiere de l'athmoſphere ſolaire dont ces corps ſe chargent, lorſqu'ils arrivent à leur périhélie, & qui eſt pouſſée dans une direction oppoſée à celle du Soleil, ſoit par le choc des rayons ſolaires, ſoit par une cauſe ſemblable à celle que M. *Newton* donne de l'aſcenſion des vapeurs dont il compoſe ces queues. En effet, on a remarqué que les Cometes ne commencent à avoir de queue ſenſible, que lorſqu'elles ſont parvenues à une diſtance du Soleil moindre que celle de la terre, ce qui eſt à peu près le demi-diametre de l'athmoſphere ſolaire. Au contraire, celles qui ont paſſé dans leur périhélie à une plus grande diſtance du Soleil, comme celles de 1585, 1718, 1729, 1747, ont été vues ſans queue : mais il faut voir dans l'excellent ouvrage que nous avons cité plus haut, les preuves qui établiſſent cette conjecture. Revenons à la théorie des Cometes.

Après M. *Newton*, il n'eſt perſonne à qui cette partie de l'Aſtronomie ait d'auſſi grandes obligations qu'à l'illuſtre M. *Hallei*. Ce ſçavant Aſtronome donna en 1705, à la Société Royale de Londres, un écrit intitulé *Cometographia, ſeu Aſtro-*

(*a*) Traité phyſique & hiſtorique de l'Aurore Boréale. *Paris*, 1731, 1754, in-4°.

nomiæ Cometicæ Synopſis. Là, en ſuppoſant les méthodes enſeignées par M. *Newton*, pour déterminer la poſition de l'orbite d'une Comete après quelques obſervations, il propoſe des Tables pour en calculer les lieux, pareilles à celles dont les Aſtronomes étoient déja en poſſeſſion pour calculer ceux des planetes. Il a plus fait dans la ſuite, & il en a données d'autres propres à calculer ces lieux dans l'hypotheſe plus exacte d'une orbite elliptique (*a*). Mais voici l'article le plus intéreſſant & le plus curieux du travail de M. *Hallei*. C'eſt le calcul qu'il fit des orbites de 24 Cometes ſur leſquelles il trouva des obſervations de quelque exactitude, & qu'il rédigea en table pour pouvoir en faire la comparaiſon. Il eut le plaiſir de voir vérifier par ce moyen, le ſentiment de ceux qui font des Cometes des aſtres ſujets à des retours périodiques. En effet, l'inſpection de la table dont nous parlons, montre que les Cometes de 1531, 1607, 1682, ont eu à très-peu de différence la même orbite, & des apparitions diſtantes d'environ 75 ans. Elles ont eu leur nœud aſcendant vers le vingtieme degré du Taureau ; leur périhélie ou le point où elles furent les plus voiſines du Soleil, vers le premier degré du Verſeau ; l'inclinaiſon de leur orbite à l'écliptique de 17 à 18° : enfin la diſtance périhélie de celle de 1531, fut de 56700 parties, dont la diſtance moyenne de la terre au Soleil en contient cent mille ; celle de la Comete de 1607, fut de 58618, & celle de la derniere, de 58328. La différence qu'on apperçoit entre la premiere de ces diſtances & les deux dernieres, ne doit pas former une difficulté, parce que les obſervations d'*Appianus*, ſur leſquelles l'orbite de cette Comete a été calculée, ſe reſſentent du peu de progrès qu'avoit encore fait alors l'Aſtronomie pratique, & du peu de ſoin qu'on mettoit à obſerver les Cometes. Ainſi il y a de très-fortes raiſons de penſer que cette Comete a déja paru à diverſes repriſes, & l'on peut avec fondement eſpérer ſon retour cette année 1758. Cette identité de la Comete de 1531, avec celles de 1607 & 1682, paroît d'autant plus vraiſemblable, qu'en remontant encore plus haut de 75 en 75 ou 76 ans, on trouve des Cometes. Il en parut une en 1456, une en 1380, une autre en

(*a*) *Voyez* ſes Tables aſtronomiques.

1305. A la vérité aucun Aſtronome ne nous en a tranſmis d'obſervations capables de nous aſſurer que c'eſt la même ; mais en comparant les circonſtances de leur mouvement remarquées par les Hiſtoriens, avec celles de la Comete que nous attendons, reſpectivement aux différentes ſaiſons de l'année, on trouve qu'elles s'accordent aſſez bien. Comme il eſt important de ſçavoir la route que doit tenir cette Comete, ſuivant les différentes poſitions de notre globe ſur ſon orbite, lorſqu'elle deſcendra dans le voiſinage du Soleil, un Aſtronome a pris ſoin de nous en inſtruire (*a*). M. *Deliſle* a auſſi entrepris ſur ce ſujet un travail fort étendu, qu'il n'a pas encore communiqué, mais qui aura probablement vu le jour avant que cet ouvrage ſoit public.

La Comete dont nous venons de parler eſt celle dont le retour périodique paroît juſqu'ici le mieux établi. Il y en a cependant encore quelques autres dont les mouvemens ont aſſez de reſſemblance pour conjecturer que c'eſt la même. Telle ſont celle de 1661 obſervée par *Hévélius*, & celle de 1532 vue par *Appianus*. Quoiqu'il y ait quelques différences aſſez conſidérables entre les lieux des périhélies & les moindres diſtances de ces Cometes au Soleil, on peut les rejetter ſur la groſſiéreté des obſervations d'*Appianus*. C'eſt pourquoi, ſi la conjecture de M. *Hallei* eſt fondée, cette Comete reparoîtra vers l'année 1780. M. *Hallei* conjecture encore que celle de 1680 a reparu à diverſes fois, à la diſtance de 575 ans. Il ſe fonde ſur ce qu'en 1106, on trouve une Comete dont les apparences ſont aſſez reſſemblantes à celles de 1680. On en avoit auſſi vue une ſemblable l'année 531, & l'an 46 avant Jeſus-Chriſt, avoit paru cette prodigieuſe Comete, ſi célébrée par les Hiſtoriens, & qui ſuivit de près la mort de Jules-Céſar. Mais M. *Hallei* va bien plus loin ; en continuant de rétrograder de 575 en 575 ans, il trouve que la même Comete a dû paroître vers le tems du Déluge univerſel, & il conjecture que c'eſt le moyen dont la divinité s'eſt ſervi pour produire cette horrible cataſtrophe. Car cet aſtre étant accompagné d'une queue immenſe, qui, ſuivant l'idée de M. *Newton*, n'eſt qu'une traînée de vapeurs, il a pu arriver que la terre l'ait rencontrée.

(*a*) Mem. ſur la Comete, qui a paru en 1531, 1607, 1682, & qu'on attend en 1757 ou 1758, &c. par le P. T. *Jamard*, Chanoine Régulier de Sainte Génévieve.

Dans cette ſuppoſition, ces vapeurs ont dû retomber ſur elle, par l'effet de la gravitation univerſelle ; & voilà l'énorme quantité d'eau dont notre globe fut alors inondé, & dont les Commentateurs de l'Ecriture ont tant de peine à trouver le réſervoir. Le célebre *Whiſton*, a appuyé cette explication du Déluge, de toutes ſes forces, & ſemble avoir mérité par-là d'en être réputé l'Auteur, quoiqu'elle ſoit de M. *Hallei*. La hardieſſe de cette conjecture ne doit pas nuire à l'idée que mérite ſi juſtement ce grand Aſtronome. Je remarquerai ſeulement qu'il n'eſt guere croyable qu'un pareil effet dût s'enſuivre de la rencontre de la terre avec la queue d'une Comete. Des vapeurs raréfiées au point de nager dans l'éther, quand elles formeroient un volume égal à celui de l'orbe de la terre, ne feroient certainement pas une quantité d'eau ſuffiſante pour de tels ravages. C'eſt ce qu'il eſt aiſé d'établir, en rappellant ce que M. *Newton* a démontré, ſçavoir qu'un pouce cube d'air, à la diſtance d'un demi-diametre terreſtre, ſeroit raréfié au point d'occuper un eſpace égal à celui de l'orbe de Saturne. Quelle doit donc être la ténuité de l'éther qui remplit les eſpaces céleſtes, & par conſéquent celle des vapeurs qui y nageroient : mais ceci n'eſt pas de mon objet. Terminons ce que nous avons à dire de cette Comete par une autre obſervation curieuſe. Un homme célebre (*a*), a encore conjecturé que cette même Comete parut au tems d'Ogyges, & que c'eſt elle qui donna lieu au phénomene que rapportent avec étonnement quelques Hiſtoriens. Ils racontent que 40 ans environ avant le Déluge d'Ogyges, on vit la planete de Vénus s'écarter de ſa route ordinaire, accompagnée d'une longue queue ; ſur quoi ce ſçavant obſerve judicieuſement, que les hommes de ce tems, encore tout neufs dans la connoiſſance du Ciel, prirent une Comete ſe dégageant des rayons du Soleil, pour Vénus changeant de cours, & ſe revêtant d'une queue. Mais tant de Cometes ont pu donner lieu à cette mépriſe, qu'on ne ſçauroit établir ſur cela rien de certain.

Je crois devoir à peine m'arrêter ſur les conjectures de divers Auteurs qui, d'après les Hiſtoriens, ont cru pouvoir déterminer diverſes autres révolutions périodiques de Comctes.

(*a*) M. Freret. *Voyez* Mémoires de l'Académie des Inſcriptions, T. x.

Ces

Ces apparitions ſont ſi fréquentes, qu'il n'eſt pas difficile, quand on le cherche tant ſoit peu, d'en trouver qui ſoient diſtantes de quelques intervalles égaux; de ſorte qu'on ne peut déduire delà aucune conſéquence pour le retour périodique des Cometes. Si cependant on peut établir quelque conjecture ſur cette comparaiſon, aucune ne ſeroit mieux fondée que celle qui feroit de la Comete de 1686, la même que celle de 1512. Car on en trouve une 174 ans auparavant, en 1338, puis 1165, en 990, en 817, & enfin 870 ans auparavant, c'eſt-à-dire, à la diſtance de cinq fois 174 ans, en l'année 53 avant Jeſus-Chriſt; de maniere que cette Comete auroit une période de 174 ans environ. Je dois cette remarque à M. *Struick* (*a*). Quant aux Cometes de 1737 & de 1536, que M. *Machin* a priſes pour la même dans les *Tranſactions Philoſophiques*, n°. 446, cela n'a aucun fondement, & M. *Machin* s'eſt rétracté lui-même dans le numero ſuivant. En effet, en comparant leurs élémens, on voit qu'elles n'ont rien qui ſe reſſemble. Je n'euſſe rien dit de cette mépriſe, ſi je ne l'avois pas trouvée répétée dans preſque tous les Livres où l'on parle du retour des Cometes.

Une queſtion qu'on pourroit faire, & qui nous a été réellement faite à l'occaſion de la Comete dont on eſpere le retour pour l'année 1758, c'eſt ce qu'on devra penſer de la théorie de M. *Newton*, ſi l'attente des Aſtronomes eſt fruſtrée. Voici ce que je crois qu'on peut raiſonnablement répondre. En premier lieu, il n'eſt pas impoſſible qu'elle ſoit réellement revenue ſans qu'elle ait été apperçue; car ſi elle paſſe par ſon périhélie, tandis que la terre ſera dans le Sagittaire, il ſera aſſez difficile de l'appercevoir. Mais nous n'inſiſterons pas beaucoup ſur cette raiſon, parce que l'attention extraordinaire des Aſtronomes à la guetter, ne lui permettra probablement pas d'échapper à leurs regards. En ſecond lieu, on a de juſtes raiſons de penſer que le mouvement des Cometes peut éprouver de grandes irrégularités. Ce mouvement peut être accéléré ou retardé conſidérablement; leurs nœuds & leur moindre diſtance au Soleil, peuvent être fort changés par l'action des autres Cometes ou planetes dans le voiſinage deſquelles elles

(*a*) Suite de la deſcription des Cometes. *En Holl. Amſterdam*, 1753.

paſſent lorſqu'elles s'éloignent du Soleil, parce que n'ayant alors qu'un mouvement fort lent, elles peuvent éprouver de grands dérangemens. On en a un exemple dans Saturne & Jupiter, qui lorſqu'ils ſont en conjonction, agiſſent ſi fortement l'un ſur l'autre, que leur mouvement en eſt accéléré ou retardé. Ce dérangement aujourd'hui démontré par les obſervations des Aſtronomes, & qui ſuit ſi bien de la théorie de la gravitation, eſt, pour le remarquer en paſſant, une nouvelle preuve des plus frappantes de la vérité de cette théorie.

Enfin, quel que ſoit le ſort de l'opinion du retour des Cometes, ſi la théorie de *Newton* continue à déterminer avec la même préciſion, le cours de celles qui paroîtront de nouveau, il reſtera toujours ceci de vrai, ſçavoir que ces corps décrivent tant qu'ils ſont à notre portée des paraboles ou des ellipſes, peut-être des hyperboles, au foyer deſquelles ſe trouve le Soleil. Car comment ſe pourroit-il faire qu'une hypotheſe fauſſe ſatisfît aux phénomenes obſervés auſſi parfaitement que le fait celle de M. *Newton*. Ainſi dans la ſuppoſition que pendant pluſieurs ſiecles on ne reconnoiſſe aucune ancienne Comete, il y aura lieu de ſoupçonner quelque cauſe qui les empêche de revenir, ou de penſer que leurs révolutions ſont de ſi longue durée qu'un grand nombre de ſiecles ne ſuffiſent pas pour les achever. Peut-être même pourroit-on ſoupçonner que ce ſont des aſtres errans de ſyſtême en ſyſtême, juſqu'à ce que leur direction les faſſe tomber dans quelque Soleil, ou que quelque circonſtance les aſſujettiſſe à un cours régulier, & preſque circulaire comme les planetes.

La théorie des Cometes de M. *Newton*, a eu le même ſort que la Phyſique céleſte dont elle fait partie. Tant que le ſyſtême de *Deſcartes* a diſputé le terrein à celui de *Newton*, on s'eſt retourné de bien des manieres pour échapper à la force des preuves qui dépoſoient en faveur du ſentiment du Philoſophe Anglois. Que n'a-t'on pas fait ſurtout pour éluder l'objection que fournit le mouvement retrograde ou latéral de pluſieurs Cometes, contre les tourbillons Cartéſiens (*a*). Il y auroit même quelque lieu de s'étonner du ſilence qui régnoit alors entre les Aſtronomes François ſur la théorie de *Newton*,

(*a*) Mémoires de l'Académie, année 1731. *Voyez auſſi* 1725, 1727.

ſi l'on ne ſçavoit que *Deſcartes* ſembloit triompher vers ce tems. L'ingénieux Secretaire de l'Académie écrivoit dans l'extrait d'un des Mémoires cités, que le ſyſtême des tourbillons, après tant de difficultés qu'il avoit eſſuyées, paroiſſoit enfin avoir ſatisfait à tout, & n'avoir plus rien à craindre des efforts de ſes antagoniſtes. Mais jamais cri de triomphe ne fut plus voiſin de la déroute entiere. L'applatiſſement de la terre démontré peu d'années après, & l'expoſition lumineuſe que M. de *Maupertuis* fit vers le même tems de la théorie de l'attraction, dans ſon Livre *de la figure des Aſtres*, produiſirent une révolution preſque ſubite & générale dans la maniere de penſer. Depuis ce tems enfin la théorie des Cometes de M. *Newton* a tellement prévalu, que ceux-là même qui depuis pluſieurs années la rejettoient, ſont devenus ſes partiſans. Il eſt ſi rare dans l'empire philoſophique de changer d'avis, qu'il y a peut-être en cela plus de gloire pour eux que s'ils euſſent d'abord adopté le ſentiment de *Newton*. Il y a auſſi cet avantage pour la théorie dont nous parlons, qu'on ne peut pas dire qu'elle ait été admiſe avec trop de précipitation, & ſans examen. Au contraire, il ſemble qu'on peut aſſurer qu'une vérité ne fût jamais plus ſolidement établie que lorſqu'elle s'eſt enfin attiré le ſuffrage des habiles gens qui l'avoient d'abord méconnue & conteſtée.

La théorie de M. *Newton* ſur les Cometes a acquis autant de preuves nouvelles qu'il a paru depuis lors de Cometes. En effet, de toutes celles qu'on a vues dans ce ſiecle, & le nombre en eſt déja aſſez grand, il n'y en a aucune qui n'ait confirmé la vérité de cette théorie. On en a aujourd'hui, outre celles de M. *Hallei*, une quinzaine dont le chemin a été déterminé ſuivant les principes de *Newton*, & le calcul ne s'eſt jamais écarté de l'obſervation, que d'un petit nombre de minutes, rarement au delà de deux ou trois. Il ſuffira de faire ici une brieve hiſtoire de quelques-unes de ces Cometes, ſçavoir de celles qui préſentent quelque choſe de plus remarquable.

Je paſſerai donc légérement ſur les Cometes qu'on vit en 1702, 1706, 1718, &c. & dont les élémens ont été déterminés ſuivant la théorie de *Newton*, par divers Aſtronomes, pour m'arrêter à celle qui parut en 1729. Celle-ci eſt aſſez ſinguliere, ſi ce n'eſt par ſon éclat, du moins par d'autres cir-

conſtances. Elle fut apperçue pour la premiere fois à Niſmes, par le Pere *Sarrabat*, Jéſuite, le 31 Juillet, entre le petit Cheval & le Dauphin. Elle étoit ſi petite & ſi peu lumineuſe, qu'on la perdoit de vue, durant le clair de la Lune. Ce Pere en informa M. *Caſſini*, & les Aſtronomes de l'Académie, qui l'obſerverent depuis la fin d'Août juſqu'au 21 du mois de Janvier de 1730, qu'on ceſſa de l'appercevoir. On lit ces obſervations dans le volume des Mémoires de l'année 1730, & d'après elles M. *Maraldi* a calculé en 1742, la trajectoire parabolique qu'elle décrivit. Pluſieurs autres Aſtronomes l'ont fait auſſi, comme M. l'Abbé de la *Caille*, M. *Deliſle*, M. *Kies*, Aſtronome à Berlin, M. *Struick*, *&c.* Suivant le calcul de M. *Maraldi*, dont les autres différent peu, elle avoit paſſé à ſon périhélie, le 22 Juin, à 23 heures, 54 minutes, tems apparent à Paris; elle fut alors éloignée du Soleil de 416927 parties, dont le rayon de l'orbite terreſtre contient 100000, de ſorte qu'elle paſſa entre l'orbe de Mars & celui de Jupiter, mais beaucoup plus près de ce dernier. Voilà d'où vient qu'elle fut toujours ſi petite & ſi lente; car elle parcourut à peine, pendant ſix mois que dura ſon apparition, une huitaine de degrés, d'abord d'un mouvement direct, enſuite rétrograde à la maniere des planetes ſupérieures. Le calcul s'accorde ſi bien avec les obſervations, que quoiqu'il y en ait une cinquantaine, la différence n'excede pas en longitude trois minutes, & quelques ſecondes en latitude.

Nous paſſons encore ſur pluſieurs autres Cometes, comme celle de 1737, calculée dans les *Tranſ. Phil.* n°. 446; celle de 1739, dont divers Aſtronomes ont auſſi donné les élémens; celle de 1742, & les deux de 1743, pour arriver à celle de 1744, la plus remarquable qui ait paru depuis celle de 1680. Elle fut vue pour la premiere fois à Harlem, par M. *Dirck Klinckenberg*, le 9 Décembre 1742, entre le Bélier & le grand triangle. Peu de jours après, elle fut apperçue à Lauzanne, par M. de *Chezeaux* (*a*), qui donna en 1745 un Traité ſur

(*a*) M. de Chezeaux (Jean-Philippe Loys) petit-fils de M. de Crouzas, né en 1718, dans le pays de Vaux, & mort à Paris, vers la fin de 1751. *Ses Eſſais de Phyſique*, eſpece de Commentaire de quelques endroits de Newton, qu'il compoſa à l'âge de 17 ans, & qui furent imprimés en 1743, (Paris in-12.) donnerent de grandes eſpérances de ce jeune Sçavant, de même que ſon Traité de la Comete de 1744. Mais peu après un excès, de piété le fit donner dans le travers de pré-

cette Comete. Enfin divers autres Aſtronomes l'apperçurent les jours ſuivans, & l'obſerverent juſqu'à ſon occultation dans les rayons du Soleil, qui arriva vers la fin de Février. Au commencement de ſon apparition, elle n'avoit aucune queue du moins perceptible à la vue, mais en approchant du Soleil, elle en prit une qui alla toujours en augmentant pendant ſon approche du périhélie, de ſorte que le 17 Février elle avoit près de 40° de longueur. Elle augmenta encore conſidérablement après le périhélie; car quoiqu'alors on ne pût plus voir le corps de la Comete, on appercevoit le matin, deux heures avant le lever du Soleil, ſa queue débordant l'horizon de 20 à 30°, tandis que le corps étoit encore plongé ſous l'horizon d'autant. Suivant l'obſervation de M. de *Chezeaux*, elle étoit alors partagée en cinq larges bandes, d'où il eſt facile de juger quel étrange ſpectacle elle eût préſenté, ſi la terre eût été dans une ſituation propre à l'appercevoir alors. Quant à la poſition & aux dimenſions de l'orbe de cette Comete, les voici d'après les *Tranſ. Phil.* n°. 474. Son périhélie eſt placé dans le 17e degré un quart de la Balance: elle y paſſa le premier Mars, à huit heures, ſe mouvant ſuivant l'ordre des ſignes, & alors elle ne fut éloignée du Soleil que des 22206 parties, dont le rayon de l'orbite terreſtre en contient 100000. Le plan de ſon orbite faiſoit avec celui de l'écliptique, un angle de 47°, 8′, 56″, & ſon nœud aſcendant vu du Soleil, étoit au 15° $\frac{3}{4}$ du Taureau. Le calcul fait en Angleterre, d'après ces élémens, s'accorde dans la minute avec les lieux obſervés.

Les Cometes dont on vient de parler, ont donné lieu à divers ouvrages. Celle de 1742 eût été peu intéreſſante pour d'autres que les Aſtronomes; mais l'ingénieuſe Lettre de M. de *Maupertuis*, lui donna du luſtre dans le monde. Peu de tems après, M. le *Monnier* publia ſon Livre intitulé *la théorie des Cometes* (in-8°.); on y trouve (outre la traduction de l'*Aſtronomie Cométique* de M. *Hallei*, ouvrage qui méritoit ſi bien de paſſer dans notre langue), une Introduction & un Supplément hiſ-

tendre trouver dans l'Ecriture Sainte le dénouement de divers points d'Aſtronomie-Phyſique très-délicats. C'eſt ce qui fait en partie, l'objet de l'ouvrage publié après ſa mort à Lauzanne, ſous le titre de *Mémoires poſthumes de M. de Chezeaux ſur divers ſujets d'Aſtronomie & de Phyſique, &c.* Lauzanne, 1754, in-4°. *Voyez* ſur ce Sçavant, un article du Mercure de Mars 1754.

toriques, concernant les progrès de cette théorie avant & depuis M. *Newton*, avec diverſes choſes intéreſſantes touchant la perfection du catalogue des fixes, & la théorie du Soleil. A l'occaſion de la Comete de 1744, parurent auſſi divers écrits, entr'autres le Livre de M. de *Chezeaux*, dont nous avons parlé; les *Oſſervazioni intorno la Cometa dell' anno 1744*, de M. *Zanotti*, Profeſſeur de Boulogne; & l'excellent Traité du célebre M. *Euler*, intitulé, *Theoria motûs Planetarum & Cometarum*, où ce ſçavant Géometre traite cette matiere avec cette profondeur & ce ſuccès qui lui ſont ordinaires. Nous ne pouvons mieux faire que de le conſeiller aux lecteurs. Je ne dis rien d'une foule d'autres écrits inſérés parmi les Mémoires des Académies; & dans les Journaux périodiques du tems où on peut les chercher.

Les dernieres Cometes dont les Aſtronomes ayent eu le ſpectacle, & des obſervations ſuffiſantes pour calculer la poſition de leurs orbites, ſont 1°. une en 1746, découverte pour la premiere fois par M. de *Chezeaux*, à Lauſanne, le 13 Août, & enſuite vue de divers autres: elle alloit alors vers ſon périhélie, auquel elle n'a dû arriver que le 28 Février 1747, à 12 heures; & alors elle fut éloignée du Soleil de 229388 parties, dont il y en a 100000 dans le rayon de l'orbite terreſtre. 2°. Les deux qu'on vit à la fois ſur l'horizon au mois de Mai 1748, ſpectacle curieux qu'on n'avoit pas eu depuis long-tems. Leurs orbites ont été calculées par divers Aſtronomes. 3°. Celle enfin qu'on a vue l'année derniere au mois de Septembre. Il y avoit déja près de dix ans qu'aucune Comete ne s'étoit montrée, choſe rare, à en juger par l'hiſtoire de ces apparitions, & qui eût pu faire dire poétiquement, que fatigués des regards curieux des Aſtronomes, ces aſtres ſe déroboient à leur vue. La Comete dont nous parlons eſt en quelque ſorte venue ſoulager leur impatience. Elle fut vue & obſervée pour la premiere fois à la Haye, par M. *Dirck Klinckenberg*, le matin du 16 Septembre; & ſur l'avis qu'il en donna, divers autres Aſtronomes ſe mirent à ſuivre ſon cours, entr'autres M. *Pingré*, de l'Académie Royale des Sciences, à Paris; le Pere *Pezenas*, Jéſuite, à Marſeille; M. de *Ratte*, Secretaire de la Société Royale de Montpellier, qui eſt le dernier qui l'ait perdu de vue le 16 Octobre. Il réſulte de leurs obſervations, que la

route de cette Comete vue de la terre, a été directe, & s'eſt faite dans l'écliptique depuis le dixieme degré de l'Ecreviſſe, juſqu'au commencement de la Balance où elle a diſparu, ſe plongeant dans les rayons du Soleil. M. *Pingré* a calculé, d'après ces obſervations, les élémens de ſon orbite, ſuivant les principes de *Newton*, & a trouvé que ſon nœud aſcendant étoit au 4°, 1′ du Scorpion, ſon périhélie au 2°, 49′ du Lion, & qu'elle a dû y paſſer le 21 Octobre, vers les dix heures du ſoir, à une diſtance du Soleil égale à 33787 parties, dont celle de cet aſtre à la terre en contient 100000; que l'inclinaiſon de ſon orbite étoit de 12°, 48′; enfin que ſon mouvement ſur cette orbite étoit direct. Ces déterminations ont fait le ſujet d'un Mémoire que ce ſçavant Aſtronome a lu à l'aſſemblée publique de l'Académie du mois de Novembre de la même année. On ſçait auſſi que M. *Bradley* a ſuivi les mouvemens de cette Comete avec ſon aſſiduité ordinaire. Mais la circonſtance de la guerre préſente, eſt cauſe qu'on n'a encore en France aucune connoiſſance de ſes obſervations & de ſes calculs.

Depuis que les Aſtronomes ont adopté la théorie de *Newton*, la table de M. *Hallei* s'eſt beaucoup accrue. Au lieu de 24 Cometes que contenoit cette table, & dont les élémens ſont calculés, on a aujourd'hui près du double. M. l'Abbé de la *Caille* en a donné 36 dans ſes *Elémens d'Aſtronomie*; mais M. *Struick*, qui a fait des recherches particulieres ſur l'hiſtoire & la théorie des Cometes, dans un Livre dont on parlera à la fin de cet article, y en a ajouté pluſieurs. Sa table en contient 45, auxquelles ajoutant la derniere, nous en aurons 46 de calculées. Il ne faut cependant pas penſer que toutes ces déterminations ſoient de la même exactitude: il n'y en a guere qu'une trentaine ſur leſquelles on puiſſe compter; mais comme la diſcuſſion des unes & des autres nous meneroit trop loin, nous nous bornerons à quelques obſervations générales qui naiſſent de l'inſpection de ces tables.

En premier lieu, on voit qu'il n'y a pas moins de Cometes retrogrades que de directes, & que leurs orbites coupent l'écliptique ſous toute ſorte d'angles, de ſorte qu'il en réſulte une preuve puiſſante contre les tourbillons qu'on ne ſçauroit concilier avec des directions auſſi contraires & auſſi conſtantes;

mais on s'eſt ſuffiſamment étendu ailleurs ſur ce ſujet : c'eſt pourquoi il eſt inutile d'y rien ajouter de nouveau.

En ſecond lieu, on obſerve que la plûpart des Cometes deſcendent dans la ſphere de l'orbe de la terre, les unes plus, les autres moins ; des 36 Cometes dont on a l'orbite calculée, il n'y en a que ſix dont la moindre diſtance du Soleil, excede celle de la terre à cet aſtre.

En troiſieme lieu, les Cometes n'ont point de Zodiaque fixe, comme l'avoit penſé un homme célebre, qui leur avoit attribué celui qui eſt déſigné par les deux vers ſuivans.

Antinous, Pegaſuſque, Andromeda, Taurus, Orion,
Procyon, atque Hydrus, Centaurus, Scorpius, Arcus.

L'inſpection des tables dont nous parlons, & les obſervations, montrent qu'il n'y a preſque aucune conſtellation dans laquelle, au rapport des Aſtronomes & des Hiſtoriens, on n'ait vu paſſer des Cometes.

En quatrieme lieu, les poſitions & les inclinaiſons ſi différentes avec leſquelles les orbites des Cometes coupent l'écliptique, ſemblent n'être pas l'effet du hazard, & nous donnent lieu d'admirer & de reconnoître la ſageſſe de l'être ſuprême. Si les plans de ces orbites euſſent été dans celui de l'écliptique, ou fort voiſins, toutes les fois qu'une Comete deſcendroit vers le Soleil, ou en reviendroit, nous ſerions expoſés au danger d'en être choqués, ſi malheureuſement notre globe ſe trouvoit arriver en même tems au point d'interſection ; ou du moins, ſuivant *Whiſton*, nous courrions riſque d'être inondés de la queue qu'elle traîne après elle. Mais au moyen de l'inclinaiſon des plans de ces orbites à celui de l'écliptique, il n'y en a aucune qui rencontre celle de la terre. Ce ſeroit à la vérité un ſpectacle bien curieux que celui d'une Comete paſſant à un ou deux diametres de notre globe ; il pourroit même en réſulter dans notre petit ſyſtême des changemens phyſiques qui nous ſeroient avantageux : nous pourrions, ſuivant l'idée ingénieuſe d'un homme célebre, acquérir une nouvelle Lune, ſi quelque Comete paſſoit aſſez près de notre globe pour en reſſentir une attraction ſupérieure à celle du Soleil. Mais à le bien conſidérer, il vaut encore mieux

mieux être privés de ces avantages, & être à l'abri d'un danger auſſi grand que le ſeroit celui qui nous menaceroit, ſi un pareil corps pouvoit nous choquer. De toutes les Cometes, celle qui paroît juſqu'ici pouvoir nous approcher de plus près, c'eſt celle de 1680. M. *Hallei* a trouvé par le calcul que le 11 Novembre 1680, à une heure après-midi, elle fut ſi près de l'orbite terreſtre, qu'elle n'en étoit éloignée que d'environ un demi-diametre ſolaire, ou un peu moins que la diſtance de la Lune à la terre. Mais il n'y avoit encore là aucun danger pour nous : il y eût eu ſeulement matiere à une curieuſe obſervation, ſi la terre ſe fût trouvée dans le point convenable de ſon orbite. Nous pouvons, il eſt vrai, n'en pas être toujours quittes à auſſi bon marché. Suivant le hardi M. *Whiſton*, cette Comete, qui a déja été l'inſtrument de vengeance dont Dieu ſe ſervit pour noyer le genre humain, lorſqu'allant vers ſon périhélie, elle nous atteignit de ſa queue, peut auſſi quelque jour revenant de ſon périhélie, nous inonder de la vapeur ardente de cette même queue, & produire par-là l'incendie univerſel qui doit précéder l'arrivée du ſouverain Juge des hommes. Mais, je le remarquerai encore, on ne doit point juger de la théorie de M. *Newton* par ces idées hardies.

Divers Ecrivains ont travaillé à nous faire l'hiſtoire des Cometes. C'eſt l'objet d'une des diviſions de la *Cométographie* d'*Hévelius*. On a auſſi du Chevalier *Lubienetziki*, un ouvrage intitulé *Theatrum Cometicum*, en trois volumes in-folio ; mais il eſt difficile de ne pas rire de la ſimplicité de ce bon Chevalier, qui nous a plutôt donné une hiſtoire univerſelle à l'occaſion des Cometes, que l'hiſtoire de ces aſtres. Pour remplir le titre d'un pareil ouvrage, il eût fallu rapprocher & combiner les paſſages des divers Hiſtoriens qui ont parlé des Cometes, afin de déterminer par-là, autant qu'il eſt poſſible, les diverſes circonſtances de leur mouvement, & c'eſt ce que n'a point fait le bon Chevalier, qui tire enfin de tout ſon fatras hiſtorique la ridicule conſéquence, que les Cometes ſont d'un heureux préſage pour les bons, & d'un mauvais pour les méchans. M. *Struick* a beaucoup mieux traité ce ſujet dans ſa *Deſcription des Cometes* (*a*), que j'ai déja citée quelquefois.

(*a*) Elle fait partie d'un ouvrage intitulé *Inleeding tot Algemeene Geography*. Amſt. 1740, in-4°. ou *Introduction à la Géogr. univ.* & elle a eu une ſuite ſous le titre de

C'eſt un ouvrage que les Aſtronomes euſſent ſans doute vu avec plaiſir & avec reconnoiſſance, s'il n'étoit pas écrit dans une langue auſſi peu connue des étrangers que la Hollandoiſe.

Avant que de finir cet article, il eſt important de dire un mot ſur un point intéreſſant de cette théorie. C'eſt la maniere de calculer la poſition de l'orbite d'une Comete d'après les obſervations. M. *Newton* en a donnée une dans ſes principes, comme nous l'avons déja dit; mais elle eſt embarraſſée & ſujette à un tâtonnement qu'il ſeroit utile de pouvoir éviter. C'eſt pourquoi divers Géometres ſe ſont attachés à la perfectionner. M. *Bouguer* a donné dans cette vue en 1733, un Mémoire qu'on lit parmi ceux de l'Académie de cette année, & où l'on trouve une méthode directe pour déterminer l'orbite d'une Comete par quelques obſervations de longitude & de latitude. M. *Euler* a beaucoup contribué au même objet, dans ſon Livre que nous avons cité plus haut, auſſi bien que M. *Struick*, dans l'ouvrage dont nous venons de parler. On doit enfin lire d'excellentes réflexions que M. de la *Caille* a données ſur cette matiere dans les Mémoires de l'Académie de 1746.

XIV.

De Divers Aſtronomes.

Il eſt tems de terminer ce Livre, & nous allons le faire ſuivant notre coutume, en raſſemblant ici divers Aſtronomes de mérite, dont le fil de notre matiere ne nous a pas permis de parler, ou de rappeller les travaux avec aſſez d'étendue.

M. Hévélius.

Nous commençons avec juſtice cette énumération par M. *Hévelius* (*a*). Cet homme célebre, l'un de ceux qui, par ſes travaux & ſes écrits, ont le plus ſervi l'Aſtronomie dans le ſiecle

Vervolg van de beſchryving der Staart-Sterren. Ibid. 1750, in-4°. c'eſt-à-dire, *Suite de la deſcription des Cometes.*

(*a*) M. Hévelius (Jean) ou Hevel, naquit à Dantzick, en 1611, le 22 Janvier, vieux ſtyle. Après avoir voyagé quelques années dans les diverſes contrées de l'Europe, & avoir donné quelque tems aux affaires, il ſe livra avec ardeur à l'Aſtronomie par les exhortations de Cruger. Ses travaux en ce genre ne l'occuperent cependant pas tellement qu'il n'eût le tems de remplir les places auxquelles ſa naiſſance l'appelloit. Il fut fait Echevin de Dantzick en 1641, & en 1651 il fut élevé au grade de Sénateur, place qu'il occupa avec diſtinction juſqu'à ſa mort arrivée en 1687. Qu'on joigne cet exemple à ceux de MM. de Witt & Roemer, d'abord Mathématiciens, enſuite Magiſtrats & hommes d'état recommandables, & l'on aura une preuve qu'il n'y a d'incompatibilité entre l'eſprit des affaires & celui des Sciences, que celle qu'y met le peu d'ambition de ceux qui font profeſſion de ces dernieres.

paſſé, commença à s'adonner avec ardeur à cette ſcience vers l'an 1640. Le premier ouvrage par lequel il ſe montra dans le monde ſçavant, eſt ſa deſcription de la Lune, ſous le titre de *Selenographia*, qui parut en 1647, (*Gedani*, in-fol.) ouvrage tout-à-fait remarquable par l'exactitude des repréſentations qu'il nous y a données de cet aſtre, & de ſes taches, ſuivant ſes différentes phaſes. Auſſi ſont-elles gravées par M. *Hévelius* même; & en effet, il n'y avoit qu'un Aſtronome, joignant comme lui le talent de la gravure à ſes autres connoiſſances, qui fût capable de la patience néceſſaire pour amener un pareil travail à ſa perfection. Cependant malgré ces peines, M. *Hévélius* n'a pas eu le plaiſir de voir paſſer en uſage la dénomination qu'il donna aux taches de la Lune. Cet avantage lui a été ravi par le Pere *Grimaldi*, ainſi qu'on l'a lu à la fin du Livre IV.

M. *Hévélius* publia les années ſuivantes divers ouvrages. Dans le premier, intitulé *De motu Lunæ libratorio* (*Gedani*, 1651. in-fol.) & adreſſé en forme de Lettre à *Riccioli*, il explique le mouvement de libration de la Lune, d'une maniere ſatisfaiſante, & qui eſt, je crois, adoptée aujourd'hui par tous les Aſtronomes. Viennent enſuite, une Lettre Latine, ſur les deux Eclipſes de l'année 1654; ſon Livre *De nativa Saturni facie ejuſque phaſibus* en 1656; ſon obſervation du paſſage de Mercure ſous le Soleil, arrivé en 1661, à laquelle il joignit l'écrit d'*Horroxes* ſur le paſſage de Vénus ſous cet aſtre vu en 1639, écrit qui n'avoit encore point vu le jour, avec l'hiſtoire de la nouvelle étoile périodique découverte peu d'années auparavant dans le col de la Baleine, dont il fut un des principaux obſervateurs. On lui doit auſſi divers Traités ſur les Cometes, comme ſon *Prodromus Cometicus*, qui concerne la Comete de 1664; ſa *deſcription de la Comete de 1665*, *&c.* deux Lettres ſur celles de 1672 & 1677; ſa *Cométographie* enfin, (*Ged.* in-fol.) ouvrage fort étendu ſur ce ſujet, & où, quoiqu'il n'ait pas entiérement atteint le but en ce qui concerne la nature de ces aſtres, on ne laiſſe pas de trouver des remarques très-bonnes & très-importantes. Nous en avons dit quelque choſe de plus dans l'article précédent.

Perſonne, après *Tycho-Brahé*, n'eut un obſervatoire mieux fourni en inſtrumens excellens, que M. *Hévélius* : on peut

ajouter que perſonne n'eut plus de dextérité à s'en ſervir ; c'eſt la juſtice que lui rendit M. *Hallei*, au retour de ſon voyage de Dantzick, voyage qu'il avoit fait dans l'unique vue de converſer & de travailler avec cet Aſtronome fameux. M. *Hallei* atteſte qu'ayant obſervé pluſieurs fois avec lui, & à l'aide d'inſtrumens garnis de Téleſcopes, ſuivant la pratique alors preſque récente, tandis que M. *Hévélius* le faiſoit de ſon côté avec les ſiens garnis de ſimples pinnules, il n'y eut jamais une minute entiere de différence entre leurs obſervations. Cependant on ne ſçauroit s'empêcher de taxer un peu M. *Hévélius* d'opiniâtreté, en ce qu'il refuſa toujours d'adopter l'uſage des pinnules téleſcopiques. Mais que ne peut pas la prévention ſur les meilleurs eſprits ! M. *Hévélius* étoit déja fort avancé dans ſa carriere, lorſque parut la nouvelle invention : pour l'adopter, il eût fallu réformer tout ſon obſervatoire, & c'eût été porter une ſorte d'atteinte à ſes obſervations antérieures ; c'eſt pourquoi, malgré la querelle un peu vive que lui fit *Hooke* (*a*), & le ſuffrage des meilleurs Aſtronomes en faveur de cette nouvelle pratique, *Hévélius* tint ferme, & continua d'obſerver à ſa maniere. Il nous a donné la deſcription de ſon obſervatoire & de ſes inſtrumens, dans ſon ouvrage intitulé *Machinæ celeſtis pars prior*, (*Ged.* 1673. in-fol.). Cette premiere partie fut ſuivie en 1679, de la ſeconde, où il communiqua au public ſes obſervations de toute eſpece. Mais celle-ci eſt devenue exceſſivement rare, par le fatal incendie qui détruiſit au mois de Septembre 1680, ſa maiſon, ſon obſervatoire, ſon Imprimerie, &c, & qui lui cauſa une perte de plus 30 mille écus. Cependant peu après, il rétablit ſon obſervatoire, quoique ſur un pied moins brillant qu'auparavant, & s'étant remis à obſerver, il eut en 1685 la matiere d'un nouveau volume d'obſervations. Il y avoit alors 49 ans qu'il travailloit à obſerver, c'eſt pour cela qu'il intitula ce Livre, *Annus climactericus ſeu rerum uranicarum annus quadrageſimus nonus.* Cet ouvrage fut le dernier qu'il publia ; ſa mort qui arriva deux ans après, l'empêcha d'en mettre au jour deux autres qu'il méditoit, & qu'il avoit fort avancés. Ils furent publiés en 1690 (in-fol.), par les ſoins de ſes héritiers. L'un eſt ſon

(*a*) *Animad. in Mach. celeſt. Hevelii.* 1674. in-4°.

Uranographie, intitulée *Firmamentum Sobieſcianum* (in-fol.) parce que ſon deſſein étoit de le dédier au Roi Sobieski. On y trouve 1888 étoiles rédigées en conſtellations, dont pluſieurs ſont de l'invention de M. *Hévélius*, comme la Giraffe, la Renne, l'Ecu de Sobieski, &c. & ont été adoptées par la plûpart des Aſtronomes. L'autre porte le titre de *Prodromus Aſtronomiæ, ſeu tabulæ ſolares & catalogus fixarum.* In-fol.

M. *Hévélius* entretint durant tout le cours de ſa vie une correſpondance très-ſuivie avec la plûpart des Sçavans de l'Europe. On peut juger facilement quelle ample & précieuſe moiſſon de faits & d'obſervations contenoit ce commerce épiſtolaire. Il s'étoit accru à ſa mort juſqu'à dix-ſept volumes in-fol. que M. *Deliſle*, paſſant par Dantzick en 1725, acheta de ſes héritiers, avec quatre volumes d'obſervations. Nous croyons pouvoir apprendre au lecteur curieux de ſuivre la trace de cette précieuſe collection, qu'elle a depuis paſſé entre les mains de M. *Godin*, l'un des Académiciens François qui ont meſuré la terre ſous l'équateur, & dont les talens lui ont mérité d'être appellé en Eſpagne, pour y diriger la nouvelle Ecole de Marine fondée à Cadix en 1750.

M. Mouton.

On me permettra de faire ici honneur à ma patrie, d'un Aſtronome qui, quoique peu connu, ne laiſſoit pas d'être un des plus adroits obſervateurs de ſon tems; il ſe nommoit Gabriel *Mouton* (*a*). On a de cet Aſtronome Lyonnois, un ouvrage ſur les diametres apparens du Soleil & de la Lune (*b*), qu'il s'attacha à déterminer par une longue ſuite d'obſervations. On y trouve les preuves de ce que je viens de dire ſur cet obſervateur : car on l'y voit déployer beaucoup de dextérité dans l'emploi qu'il fait du Téleſcope, & du pendule ſimple alors le ſeul connu, pour parvenir à la détermination ci-deſſus. Il ſemble auſſi avoir montré le premier aux Aſtronomes l'uſage des interpolations, pour remplir dans les tables les lieux moyens entre ceux qu'on a calculés immédiatement, ou pour ſuppléer dans une ſuite d'obſervations à celles qui manquent. C'eſt ce qu'on exécute par le moyen des interpolations avec bien plus d'exactitude que par les parties proportionnelles.

(*a*) Né à Lyon ou aux environs, vers l'an 1618 : il étoit Eccléſiaſtique, & Prêtre d'une des Collégiales de cette ville, où il mourut en 1694.

(*b*) *Obſ. diam. Solis & Lunæ apparentium, &c.* Lugd. 1670. in-4°.

Ce Livre contient encore quelques pieces eſtimables, concernant la hauteur du pole de Lyon, l'équation du tems, la maniere de tranſmettre à la poſtérité toute ſorte de meſures, &c. Cet Aſtronome enfin à qui il ne manqua guere, à notre avis, que d'être placé ſur un théâtre plus brillant, excelloit auſſi dans la Méchanique. Il laiſſa quantité d'écrits qui n'ont pas vu le jour, & que l'ouvrage cité ci-deſſus donne quelque lieu de regretter.

Voici encore quelques Aſtronomes François deſquels il eſt à propos de dire quelques mots. Ce ſont M. *Comiers*, Auteur d'un *Diſcours ſur les Cometes*, & de divers autres écrits & obſervations inſérés dans les Journaux du tems; M. *Gallet*, dont on a diverſes obſervations, & de nouvelles Tables du Soleil & de la Lune, qu'il publia en 1670, ſous le titre d'*Aurora Lavenica*; les PP. *Grandami* & de *Billi*, l'un & l'autre Jéſuite, celui-ci habile Analiſte (*a*), & Auteur de nouvelles Tables appellées *Lodoiceæ*, & de quelques autres ouvrages aſtronomiques; celui-là Auteur de divers écrits ſur les Cometes de 1664 & 1665, & d'une prétendue démonſtration du repos de la terre, dont on a parlé dans la troiſieme Partie, Livre IV; M. *Petit* enfin, Intendant des Fortifications, & homme doué de connoiſſances très-variées, ſoit dans la Phyſique, ſoit dans les Mathématiques. On a de lui des obſervations de la plûpart des phénomenes principaux arrivés de ſon tems, & pluſieurs écrits, entr'autres une diſſertation ſur les Cometes, faite à l'occaſion de celle de 1664, 1665, où il approche, en certains points, aſſez de la vérité: M. *Petit* eut une opinion ſemblable à celle de Dominique *Maria*, le Maître de *Copernic*, qui penſoit que la hauteur du pole avoit diminué dans divers lieux depuis le tems de *Ptolomée*, & il s'efforça de le prouver à l'égard de celle de Paris. Mais c'eſt une opinion précipitée, & qui n'eſt fondée que ſur l'inexactitude des obſervations anciennes.

Il me ſuffira pareillement de faire une légere mention des Aſtronomes qui ſuivent, comme le Pere *Gottigniez*, qui diſputa à M. *Caſſini* quelques-unes de ſes découvertes ſur Jupiter & Mars, & dont on a des obſervations ſur les Cometes de

(*a*) *Voyez* le T. I, p. 454.

1664, 1665 & 1668; *Campani*, qui ſe rendit célebre par la longueur & l'excellence de ſes Téleſcopes, à l'aide deſquels il fit dans le Ciel quelques obſervations remarquables (*a*), &c; Jean-François de *Laurentiis*, Aſtronome de Piſe, Auteur de quelques obſervations de Saturne & de Mars, ſous le titre de *obſ. Saturni & Martis Piſaurienſes*, *&c.* 1672. Nous abandonnons de plus grands détails ſur ces Aſtronomes à une hiſtoire particuliere de l'Aſtronomie.

Il ne nous reſte plus que quelques Aſtronomes Allemands à faire connoître. MM. *Eimmart* & *Vurzelbaur*, ſe préſentent les premiers. Ils firent l'un & l'autre de Nuremberg le ſiege de leur travaux. Lorſque cette ville voulant favoriſer les progrès de l'Aſtronomie, fit conſtruire un obſervatoire, M. *Eimmart*, qui obſervoit déja depuis quelques années dans ſa maiſon, fut choiſi pour habiter ce nouveau monument élevé à Uranie. Il continua d'y obſerver depuis 1678 juſqu'en 1705, qui eſt l'année de ſa mort. Il a communiqué au public quelques-unes de ſes obſervations, ſoit en particulier, ſoit par la voie des Journaux de Léipſick, en quoi il a rendu plus de ſervice à l'Aſtronomie, que par ſon *Ichnographia nova contemplationum de Sole*, *&c.* inutile fatras d'érudition & de mauvaiſe Phyſique ſur la nature du Soleil. Les autres obſervations de M. *Eimmart*, ont reſté manuſcrites. *M. Eimmart.*

M. *Vurzelbaur*, obſervoit auſſi à Nuremberg, dont il étoit citoyen. On a de lui quelques ouvrages, entr'autres deux, l'un intitulé *Uranies Noricæ baſis Aſtronomica, ſeu rationes Solis motus annui ex obſ. ſecul. XV & XVII. habitis*; l'autre concernant la latitude de Nuremberg, ſous le titre de *Uranies Noricæ baſis Geog.* La plûpart de ſes obſervations n'ont pas vu le jour. Au reſte M. *Vulzelbaur* s'eſt fait quelque tort par ſon opiniâtreté à rejetter l'uſage du Téleſcope adapté au quart de cercle. Il eſt bon de le ſçavoir pour apprécier ſes obſervations. Il mourut en 1725. *M. Vurzelbaur.*

M. Godefroi *Kirch* a ſervi utilement l'Aſtronomie, par pluſieurs obſervations inſérées dans les Actes de Léipſick, ou dans les *Miſcellanea Berolinenſia*, T. I. Parmi ces obſervations, celles qu'il fit ſur la Comete de 1680, ſont les plus re- *M. Kirch.*

(*b*) Voyez *Ragguaglio di due nuove oſſerv.* 1665. in-4°.

marquables ; car il eſt le premier, & preſque le ſeul qui l'ait obſervée avec une exactitude ſuffiſante avant ſon occultation dans les rayons du Soleil (*a*). M. *Kirch* fut appellé à Berlin, lors de la fondation de l'Académie Royale de Pruſſe, & décoré du titre d'Aſtronome Royal, qu'il porta juſqu'à ſa mort arrivée en 1710. Le goût qu'avoit M. *Kirch* pour l'Aſtronomie, il l'inſpira à ſon épouſe (Mlle *Winkelmann*), & elle y fit d'aſſez grands progrès pour aider ſon mari dans pluſieurs de ſes travaux aſtronomiques. On voit cependant par un ouvrage Allemand qu'elle publia en 1712, qu'elle n'étoit pas entiérement exempte des rêveries aſtrologiques. M. *Kirch* a eu dans ſon fils (M. Chriſtfrid *Kirch*), un héritier de ſes talens ; ce qui lui mérita en 1720 la place de ſon pere. Il mourut en 1740, laiſſant, ſoit dans les Mémoires de Berlin, ſoit dans les *Tranſactions*, des preuves de ſon habileté en Aſtronomie, & de ſon aſſiduité à obſerver.

(*a*) *Voyez* l'article précédent.

Fin du Livre VIIIe de la IVe Partie.

HISTOIRE

HISTOIRE
DES
MATHÉMATIQUES.

QUATRIEME PARTIE,

Qui comprend l'hiſtoire de ces Sciences durant le dix-ſeptieme ſiecle.

LIVRE NEUVIEME,

Progrès de l'Optique durant la derniere moitié de ce ſiecle.

SOMMAIRE.

I. *Jacques Grégori écrit ſur l'Optique, & entre dans diverſes conſidérations nouvelles ſur ce ſujet. Il tente d'exécuter le Téleſcope à réflection, & il échoue.* II. *Du Docteur Barrow, & de ſes leçons optiques. D'une queſtion intéreſſante qu'il y diſcute.* III. *Découverte de l'inflexion de la lumiere, faite par le P. Grimaldi.* IV. *Des écrits & des inventions de divers Opticiens de ce temps.* V. *M. Newton découvre la differente réfrangibilité de la lumiere; phénomenes & expériences qui établiſ-*

ſent cette découverte. Contradictions qu'elle eſſuye. VI. *Théorie de l'inflexion, de la réfraction & de la réflection, ſuivant M. Newton. Obſervations ſingulieres qu'il fait ſur les couleurs.* VII. *Autre découverte de M. Newton, ſçavoir celle de ſon Téleſcope catadioptrique. Quelle forme il lui donne.* VIII. *L'explication de l'Arc-en-Ciel perfectionnée. Ingénieuſes recherches de M. Hallei ſur ce ſujet.*

I.

On a vu dans le Livre III de cette partie, les nombreuſes & curieuſes découvertes dont l'Optique s'accrut par les ſoins des *Galilée*, des *Képler*, des *Deſcartes*, *&c.* Celui-ci n'eſt pas moins fécond en objets intéreſſans, mais avant que d'en étaler le ſpectacle, il nous faut revenir un peu ſur nos pas, & reprendre les choſes à M. *Deſcartes*, au temps duquel nous avons conduit l'hiſtoire de cette ſcience.

L'Optique ne prit guere d'accroiſſement marqués depuis *Deſcartes*, juſqu'au-delà du milieu du dix-ſeptieme ſiecle. L'invention la plus remarquable qui ſignale cet intervalle de temps aſſez long, eſt celle du Téleſcope terreſtre, qui naquit entre les mains du P. *Rheita*, comme on l'a déja dit. Le ſurplus ſe réduit preſque aux recherches de *Cavalleri* qui, dans une de ſes *Exercitationes* publiées en 1647, pouſſa un peu plus loin que *Képler* la détermination des foyers des verres, en conſidérant ceux à ſphéricités inégales; & à quelques inventions que le P. *Kircher* (*a*) étala, dans ſon *Ars magna lucis & umbræ*, inventions pour la plûpart plus curieuſes qu'utiles ou que relevées, comme ſa Lanterne magique, ſes Horloges à réflection, &c.

Ce fut Jacques *Grégori* qui renoua, pour ainſi dire, le fil des découvertes interrompues depuis M. *Deſcartes*, dans ſon *Optica promota*. Ce Géometre célebre y ouvrit effectivement

(*a*) Le Pere Kircher (Athanaſe) né en 1602, à Geiſſen près de Fulde, enſeigna pendant un grand nombre d'années les Mathématiques dans le Collége des Jéſuites à Rome, où il mourut en 1680. Son ſçavoir extrêmement étendu, lui fit un grand nom; quoiqu'en général on puiſſe dire qu'on trouve dans ſes écrits plus d'érudition & de curioſité que de profondeur. Les ouvrages dûs à ce Sçavant, en Mathématiques, ſont les ſuivans : *Ars magna lucis & umbræ*. Rom. in-fol. 1641. *Primitiæ Gnomonicæ catoptricæ; Iter extaticum Muſurgia univerſalis.*

aux Opticiens une nouvelle carriere, par diverſes conſidérations dans leſquelles il entra le premier, & par diverſes vues ſur la perfection des inſtrumens optiques. Il examina les cauſes de la diſtinction, de la clarté & de l'augmentation reſpectives de ces inſtrumens, & il démontra ſur ces ſujets pluſieurs propoſitions qui ne ſont pas, à la vérité, d'une difficulté conſidérable, mais dont on doit cependant lui ſçavoir gré, puiſqu'elles avoient échappé juſque-là aux Opticiens.

L'endroit par lequel on connoît principalement l'ouvrage de *Grégori*, eſt la découverte du Téleſcope à réflection. Mais il y a peu de perſonne qui ſçachent, & les motifs qui engagerent cet Auteur à tenter cette conſtruction, & celle qu'il avoit imaginée, & qui eſt en grande partie cauſe de ſon peu de réuſſite.

Une des choſes que *Grégori* examinoit dans ſon Optique, étoit la forme des images des objets, produites par les miroirs ou les verres. Il remarquoit que les verres ou les miroirs ſphériques, ne peignent pas dans un même plan les images des objets plans & perpendiculaires à l'axe du Téleſcope, mais que ces images ſont courbes & concaves du côté de l'objectif. Cela lui donna l'idée de chercher à corriger ce défaut, & il trouva que des verres ou des miroirs qui auroient des courbures de ſections coniques, rendroient exactement planes les images des objets plans qui n'auroient pas une trop grande étendue. Dans cette idée, il eut bien voulu ſubſtituer aux verres ſphériques des verres elliptiques ou paraboliques : mais connoiſſant les vains efforts qu'on avoit faits pour en travailler de ſemblables, il ſe tourna du côté des miroirs à réflection qu'il jugea, ſur de fauſſes apparences, plus aiſés à former, & il imagina ſon Téleſcope à réflection. Il le compoſoit conformément à ſes principes, de deux miroirs concaves. L'un parabolique placé au fond du tube, devoit former à ſon foyer l'image des objets ſitués à une grande diſtance, & aux environs de ſon axe prolongé. Ce foyer devoit coincider avec celui d'un miroir elliptique plus petit, qui, recevant les rayons ſortans de cette image, en auroit formée une nouvelle égale & ſemblable à la premiere, à peu de diſtance du fond du miroir parabolique, qui étoit percé à ſon ſommet d'un trou propre à recevoir une oculaire, avec laquelle on auroit conſidéré cette image,

comme cela ſe fait dans les Téleſcopes ordinaires.

Il y a apparence, & M. *Newton* l'indique quelque part, que ce fut cette prédilection mal-à-propos donnée à des miroirs elliptiques ou paraboliques, qui fit échouer M. *Grégori*. Sa théorie ſur l'incurvation des images eſt vraie, à la rigueur; mais les miroirs ou les verres qu'on prend pour objectifs dans les Téleſcopes, ſont de trop petites portions de ſphere, pour que cette incurvation ſoit ſenſible. D'ailleurs *Grégori* étoit dans l'erreur lorſqu'il penſoit qu'il fût plus facile de former un miroir parabolique ou elliptique propre à peindre diſtinctement une image, qu'à former de bons verres d'une forme ſemblable. Auſſi s'épuiſa-t'il en efforts inutiles pour ſe procurer les miroirs qu'il deſiroit, & il ne put parvenir à voir aucun objet diſtinctement. *Newton* conduit par des motifs différens, & ſe bornant à des miroirs ſphériques, eut au contraire le ſuccès que tout le monde ſçait, & dont nous rendrons compte dans un article de ce Livre.

II.

Du D. Barrow.

Voici encore un compatriote de *Grégori*, qui cultiva avec beaucoup de ſuccès la théorie de l'Optique. C'eſt le célebre Iſaac *Barrow*, dont nous avons déja fait mention pluſieurs fois, comme d'un des premiers Géometres de ſon tems. Ses *Leçons Optiques* (*a*) ſont dignes de figurer à côté de ſes *Leçons Géométriques*, avec leſquelles elles virent le jour en 1674. Dans cet ouvrage, M. *Barrow* quittant la route frayée par les autres Opticiens, s'attacha principalement à diſcuter des queſtions qui n'avoient point encore été traitées, ou qui n'étoient pas encore ſuffiſamment éclaircies. De ce nombre eſt entr'autres la théorie des foyers des verres formés de différentes convexités ou concavités combinées d'une maniere quelconque. Hors un petit nombre de cas, comme ceux où les convexités étoient égales, & les rayons paralleles à l'axe, on ne déterminoit les foyers de ces ſortes de verres que par l'expérience. *Barrow* donne la ſolution complete du problême, & enſeigne par une formule fort élégante, à déterminer ces concours dans tous

(*a*) *Is Barrowii Lect. Op.* Cant. 1674, in-4°. *Iterùm* 1729, Lond. in-4°.

les cas, de rayons incidens paralleles, convergens ou divergens. Je ne dis rien d'une multitude d'autres déterminations curieuſes d'Optique & de Géométrie mixte, pour m'arrêter à une queſtion célebre en Optique, & ſur laquelle *Barrow* me paroît avoir jetté aſſez heureuſement quelque jour.

Cette queſtion concerne la détermination du lieu apparent des objets vus par réflection, ou par réfraction. La plûpart des Opticiens avoient pris juſque-là pour principe de cette détermination, que chaque point paroît dans le concours du rayon réfléchi ou rompu avec la perpendiculaire tirée de ce point ſur la ſurface réfringente ou réfléchiſſante. On ſe l'étoit perſuadé, en partie par une eſpece d'analogie tirée de ce que dans les miroirs plans on apperçoit l'objet dans ce concours, en partie par une expérience qui paroiſſoit concluante. Lorſqu'on éleve perpendiculairement ſur une ſurface convexe ou concave une ligne droite, on croit voir ſon image former avec elle une ſeule ligne : il en eſt de même lorſqu'on plonge en partie, & perpendiculairement dans l'eau une ligne droite; la partie plongée paroît, à la vérité, rétrecie en longueur, mais ſon image du moins conſidérée avec une attention médiocre, & dans certaines circonſtances, paroît encore former une ligne droite avec la partie hors du fluide ; ce qui ſemble prouver que chaque point de l'objet eſt vu dans le concours que nous avons dit plus haut.

Ce principe, qui eſt la baſe de toute la catoptrique & la dioptrique anciennes, parut, malgré ces preuves, ſuſpect à M. *Barrow* ; & d'abord à le conſidérer du côté métaphyſique, il y a de grandes raiſons de le ſoupçonner d'erreur. Par quelle cauſe effectivement la perpendiculaire d'incidence auroit-elle la propriété de contenir l'image de l'objet? Ce qui n'a aucune réalité phyſique ne ſçauroit engendrer aucun effet ; & c'eſt là le cas de cette perpendiculaire, qui n'eſt qu'un être imaginaire, ſemblable au centre de la terre, vers lequel, ſi les corps tendent, ce n'eſt pas par l'énergie de ce centre, comme le penſerent ridiculement les Anciens, mais parce que l'action réunie de toutes les parties de la terre imprime au corps une direction moyenne paſſant par ce point. Ainſi voilà déja une grande raiſon de ſe défier de ce principe. Quant aux expérien-

ces ſur leſquelles on tâche de l'appuyer, M. *Barrow* les regarde avec raiſon comme peu déciſives, à cauſe de la difficulté d'appercevoir la courbure de cette ligne. Il prétend même que la derniere expérience ci-deſſus étant faite avec l'attention convenable, n'eſt rien moins que favorable au principe ci-deſſus. Si l'on plonge, dit-il, perpendiculairement dans l'eau, un filet éclatant, dont partie ſoit au-deſſus de la ſurface, & partie au-deſſous, & qu'on regarde obliquement, on verra l'image de la partie plongée dans l'eau, ſe détacher ſenſiblement de celle de la partie extante, qui eſt, ſuivant les regles de la Catoptrique, dans la perpendiculaire. Ainſi il n'eſt point vrai que dans la réfraction, l'image de l'objet paroiſſe dans le concours du rayon rompu prolongé, & de la perpendiculaire; & il faut en juger de même dans le cas de la réflection.

M. *Barrow* a donc cherché un autre principe plus ſolide que le précédent, & il a cru l'avoir trouvé. Il prétend que chaque point de l'objet paroît dans le concours ou la pointe du faiſceau des rayons, qui entrent dans l'ouverture de la prunelle. Ce ſentiment, s'il n'eſt pas le véritable, eſt du moins très-raiſonnable. En effet, nous ne jugeons du lieu d'un objet que par la ſenſation que produit ſur notre œil l'inclinaiſon plus ou moins grande avec laquelle arrivent les rayons deſtinés à peindre l'image ſur la rétine. Car, ſuivant cette inclinaiſon plus ou moins grande, l'œil, par un mouvement naturel, doit s'alonger ou s'applatir pour appercevoir l'objet diſtinctement. Il paroît donc qu'on doit regarder le ſommet de chacun de ces pinceaux, comme le lieu apparent de chaque point de l'objet, & toutes les fois que ces rayons contraints par une réflection ou une réfraction, tomberont ſur un œil avec une divergence particuliere, l'œil jugera le point d'où ils viennent, au ſommet du cône formé par ces rayons prolongés.

Conſéquemment à ce principe, M. *Barrow* recherche dans quel point concourent les rayons infiniment voiſins ſortis de chaque point de l'objet, & qui après une réfraction ou une réflection, vont tomber dans l'œil. Et il trouva que ſi la ſurface réfringente eſt une ſurface plane, & que la réfraction ſe faſſe d'un milieu plus denſe dans un plus rare, ce concours eſt

toujours, à l'égard de l'œil, en deçà de la perpendiculaire d'incidence (*a*). Dans un miroir convexe, il en eſt de même; c'eſt-à-dire, que le concours des rayons infiniment proches, eſt en deçà de cette perpendiculaire: ſi le miroir eſt plan, ce concours eſt dans la perpendiculaire; enfin, il eſt au-delà, ſi le miroir eſt concave. *Barrow* détermine auſſi, d'après ces principes, quelle forme prend l'image d'une ligne droite préſentée de différentes manieres à un miroir ſphérique, ou vue au travers d'un milieu réfringent; ſur quoi il donne diverſes déterminations géométriques, curieuſes & élégantes.

On voit par tout ce que nous venons de dire, que le Docteur *Barrow* toucha de fort près, à la découverte des cauſtiques; car ces courbes ne ſont autre choſe que la ſuite de toutes les images du même point, vu par réflection ou par réfraction de toutes les places différentes que l'œil peut occuper. Il eſt même ſurprenant que ce Géometre, porté comme il étoit d'un goût décidé vers tout ce qui ſe rapprochoit de la Géométrie pure & ſublime, n'ait pas recherché le lieu ou la courbe de tous ces points. Et il ſe pourroit bien faire que ce fût l'inſpection de cet endroit des *Leçons* de *Barrow*, qui eût donné lieu à M. *Tchirnhauſen* d'entrer dans cette conſidération.

Quelque vraiſemblable que ſoit le principe ci-deſſus, la candeur du D. *Barrow* ne lui permet cependant pas de taire une expérience, d'où naît une objection à laquelle il convient lui-même ne ſçavoir que répondre. La voici: qu'on place un objet au-delà du foyer d'un verre, & qu'on applique d'abord l'œil tout contre ce verre: on verra l'objet confuſément, mais il paroîtra à peu près dans ſa place. Qu'on éloigne enſuite l'œil du verre, la confuſion augmentera, & l'objet ſemblera approcher; enfin lorſque l'œil ſera fort près du point de concours, la confuſion ſera extrême, & l'objet paroîtra tout contre l'œil. Or dans cette expérience l'œil ne reçoit que des rayons convergens, & par conſéquent dont le concours, loin d'être au devant, eſt derriere lui. Cependant il apperçoit l'objet au devant, & il juge, ſinon diſtinctement, du moins confuſément de ſa diſtance; ce qui ne paroît rien moins que facile à concilier avec le principe dont nous parlons.

(*a*) Ce problême ſe réſoud aujourd'hui facilement par le calcul différentiel. C'eſt pourquoi nous laiſſons au lecteur le plaiſir d'en chercher la ſolution.

Après avoir beaucoup réfléchi ſur cette difficulté, j'avois imaginé une réponſe que j'ai depuis appris, en liſant l'Optique du D. *Smith*, avoir été faite par le D. *Berckley*, Evêque de Cloyne, dans ſon *Eſſai ſur une nouvelle théorie de la viſion.* Lors, diſois-je, que l'œil reçoit des rayons convergens, alors, comme l'on ſçait, les pinceaux des rayons rompus par les humeurs de l'œil, qui devroient être rencontrés par la rétine préciſément à leur ſommet, le ſont après ce point de réunion : & c'eſt-là ce qui produit la confuſion, chaque point de l'objet ayant alors pour image, non un point, mais un petit cercle. Or cet effet eſt le même que ſi ces rayons venus de l'objet étant trop divergens, les pinceaux formés dans l'œil, euſſent été rencontrés par la rétine avant leur ſommet : cependant dans ce dernier cas, on ne laiſſe pas de juger de la diſtance. On doit donc pouvoir le faire de même dans le premier, quoique les rayons, loin de diverger d'un point placé au devant de l'œil, convergent vers un point au-delà. Car là où l'impreſſion ſur l'organe eſt la même, le jugement doit être le même.

Voilà en ſubſtance le raiſonnement du Docteur *Berckley*. Mais je ne puis diſſimuler une difficulté que fait le Docteur *Smith* (*a*). C'eſt que ſi cette réponſe étoit ſuffiſante, dans l'expérience de *Barrow* l'objet devoit toujours paroître à une diſtance moindre de l'œil, que celle à laquelle on commence à voir les objets diſtinctement. Cependant cela n'arrive pas : l'objet paroît confus, & ſemble paſſer ſucceſſivement par toutes les diſtances moindres que celle où l'œil nu le jugeroit. Ainſi, dit M. *Smith*, il faut chercher une autre ſolution, ou un autre principe ſur la diſtance apparente des objets.

M. *Smith* a pris ce dernier parti, & voici le principe qu'il propoſe, & qu'il tâche d'établir. Il penſe qu'un objet vu par réfraction ou par réflection, paroît toujours à une diſtance d'autant moindre, qu'il eſt plus augmenté (*b*), ou, ce qui eſt la même choſe, qu'on le juge à la même diſtance à laquelle on le jugeroit s'il paroiſſoit à l'œil nu de la même grandeur qu'à travers le verre ou dans le miroir. Ainſi, pour rendre ceci ſenſible par un exemple, lorſqu'à l'aide d'un inſtrument

(*a*) *Syſt. of Opticks.* art. 139, T. II.
(*b*) *Ibid.* & *Remarcks.* art. 178,

optique

optique, on voit l'objet double, il paroîtra rapproché de la moitié. Lors donc que dans l'expérience du Docteur *Barrow*, on regarde au travers d'un verre convexe, un objet ſitué au delà de ſon foyer, l'œil étant tout près du verre, on voit cet objet confuſément, par les raiſons connues de tout le monde; mais on le voit ſenſiblement de la même grandeur, & conſéquemment on le juge à la même diſtance. Eloigne-t'on l'œil du verre, l'apparence de l'objet, quoique de plus en plus confuſe, augmente: il ſemble approcher, juſqu'à ce qu'il paroiſſe tout proche de l'œil.

Voilà l'expérience du D. *Barrow* aſſez heureuſement expliquée, & M. *Smith* prétend que ſon principe ſatisfait de même à toutes les expériences que l'on peut propoſer, mais c'eſt un point ſur lequel je ne ſçaurois être entiérement de ſon avis. Je conviens qu'un objet vu au travers d'un Téleſcope, paroît d'autant plus rapproché, qu'il eſt davantage augmenté, & au contraire; mais lorſque je conſidere un objet au travers d'une ſimple lentille convexe, ou dans un miroir convexe ou concave, je crois appercevoir tout le contraire de ce que prétend M. *Smith*. Tous les Opticiens ont, je penſe, regardé juſqu'ici comme certain que l'image des objets vus dans un miroir convexe, paroiſſent moins éloignés de ſa ſurface que les objets même, & au contraire dans les miroirs concaves. Et la choſe me paroît ainſi, quelqu'effort que je faſſe pour me la repréſenter autrement. Je crois auſſi pouvoir démontrer que lorſqu'on voit un objet au travers d'un verre convexe, on le juge plus éloigné qu'à la vue ſimple. Car qu'on poſe une lentille convexe ſur un papier écrit, ou tel autre objet qu'on voudra, qu'on la retire vers l'œil en regardant au travers, on verra l'objet s'éloigner d'une maniere très-ſenſible, à meſure qu'il ſera davantage groſſi. Que ſi l'on doute encore qu'un objet vu au travers d'une lentille convexe, paroiſſe plus éloigné que vu à l'œil nu, voici une autre expérience qui en convaincra, & qui m'a ſervi à convaincre quelques perſonnes qui s'étoient d'abord décidées pour le contraire. Je les invitai à regarder de haut en bas, au travers d'une pareille lentille, le bord d'une table, & de tâcher enſuite avec le doigt de le toucher. Il n'y en eut aucune qui ne portât le doigt plus bas qu'il ne falloit, loin de le porter plus haut, comme elles auroient dû faire, ſi

elles euſſent jugé l'objet plus proche. Je crois donc, fondé ſur cette expérience qui me paroît déciſive, pouvoir prétendre qu'un verre convexe éloigne plutôt qu'il ne rapproche l'apparence des objets vus au travers. Je crois enfin trouver dans l'expérience rapportée par le D. *Barrow*, pour prouver la fauſſeté de l'opinion qui place le lieu apparent de l'image dans le concours du rayon rompu, & de la perpendiculaire ſur le milieu réfringent; je crois, dis-je, trouver dans cette expérience une nouvelle difficulté qui renverſe le ſyſtême de M. *Smith*. Car, ſuivant ce ſyſtême, lorſqu'on voit obliquement de dehors une eau tranquille, une perpendiculaire à la ſurface de cette eau plongée au dedans, chacune de ſes parties paroît d'autant plus diminuée qu'elle eſt plus profondément placée. Ainſi, ſi chaque partie devoit paroître d'autant plus éloignée qu'elle eſt plus diminuée, les parties les plus baſſes devroient paroître au delà de la perpendiculaire, & l'apparence de la ligne entiere ſeroit une courbe placée au delà de cette perpendiculaire; cependant, ſuivant le Docteur *Barrow*, c'eſt une courbe qui tombe en deçà. C'eſt pourquoi le principe imaginé par M. *Smith*, ne me paroît pas ſatisfaire encore ſuffiſamment aux phénomenes. A la vérité l'objection faite contre celui du D. *Barrow*, reſte encore preſque en entier; mais malgré cette difficulté, nous croyons, à l'exemple de ce Sçavant, devoir nous en tenir à ſon principe, juſqu'à ce qu'on ait trouvé quelque choſe de plus ſatisfaiſant. Je me fonde de même que lui ſur ce que cette difficulté tient à quelque ſecret de la nature, qui n'a pas encore été pénétré, & qui ne le ſera peut-être que lorſqu'on aura fait de nouvelles découvertes ſur la nature de la viſion. *Nimirùm*, dit-il, *in præſenti caſu peculiare quiddam, naturæ ſubtilitati involutum deliteſcit, ægrè fortaſſis niſi perfectius explorato videndi modo detegendum.* Nous finirons auſſi cette diſcuſſion par ces paroles, & en invitant les Opticiens à approfondir davantage une queſtion ſi intéreſſante.

III.

L'Optique ne connoiſſoit encore juſqu'au delà du milieu du ſiecle paſſé, que deux cauſes de changement de direction pour la lumiere; la rencontre des corps opaques qui la fait ré-

fléchir, & le paſſage oblique d'un milieu dans un autre de différente denſité, qui produit ſa réfraction. Si juſqu'à cette époque on eût demandé aux Opticiens ce qui devoit arriver à un rayon de lumiere qui effleureroit un corps ſans le toucher, la réponſe eût paru facile. Aucun n'eût héſité à répondre que ce rayon de lumiere continueroit ſon chemin en ligne droite. Qui eût pu ſoupçonner, ſans le ſecours de l'expérience, que le ſimple voiſinage des corps ſoit pour la lumiere une cauſe de changement de direction.

Découverte de l'inflexion de la lumiere.

C'eſt-là cependant le phénomene que découvrit le Pere *Grimaldi*, & qu'il annonça aux Sçavans en 1666, dans ſon Livre *De lumine, coloribus & Iride.* Ce compagnon des travaux aſtronomiques du Pere *Riccioli*, ayant introduit dans la chambre obſcure par un trou exceſſivement petit, un rayon de lumiere, lui expoſa, nous ignorons dans quelles vues, un cheveu & d'autres corps déliés de cette eſpece. Il fut fort ſurpris à l'aſpect de l'ombre large qu'il leur vit jetter. Il la meſura, auſſi-bien que la diſtance du trou d'où divergeoit la lumiere juſqu'à l'objet, & il s'aſſura par-là que cette ombre étoit beaucoup plus grande qu'elle n'eût dû être, ſi les rayons qui avoient effleuré ces corps, euſſent continué leur route en ligne droite. Il obſerva auſſi que le cercle de lumiere formé par un très-petit trou percé dans une lame déliée de métal, étoit plus grande qu'elle ne devoit être, eu égard à la divergence des rayons ſolaires, & delà il conclut, malgré ſes répugnances, que les rayons de lumiere dans le voiſinage de certains corps, y éprouvent un certain fléchiſſement; c'eſt-là ce qu'il appella du nom de *diffraction*, & que depuis M. *Newton*, qui a répété ces expériences, & qui les a beaucoup plus variées & approfondies, a appellé *inflexion.* Le Pere *Grimaldi* fit encore l'importante remarque de la dilatation du faiſceau des rayons ſolaires, cauſée par le priſme. Mais il ne faut pas en conclure avec un Ecrivain du même corps, qu'il connut la différente réfrangibilité de ces rayons. Il n'en ſoupçonna rien, & cet effet il l'attribua ſeulement à un certain éparpillement irrégulier cauſé par les parties du priſme. L'ouvrage de *Grimaldi*, eſt enfin rempli de quantité d'expériences curieuſes ſur la lumiere & les couleurs. C'en eſt le principal mérite; car ſa Phyſique eſt d'ailleurs du goût de la patrie de cet Auteur, pays,

qui, quoiqu'il ait donné au monde les *Galilée*, les *Torricelli*, *&c.* n'a rien moins été que des premiers à ſecouer le joug d'*Ariſtote*.

IV.

Des écrits & des inventions de divers Opticiens.

Quoique nous touchions de fort près aux découvertes ſublimes dont M. *Newton* a enrichi l'Optique, qu'il nous ſoit permis d'en différer encore pour quelques momens le récit, afin de rendre compte des écrits & des travaux de divers Opticiens ſes contemporains, qui revendiquent ici une place. Cette énumération nous la commençons avec juſtice par M. *Huyghens*. L'Optique, de même que les autres parties des Mathématiques, a des obligations à cet homme célebre. Il s'y étoit beaucoup addonné dans ſa jeuneſſe, & les éditeurs de ſes Œuvres nous apprennent que la plus grande partie de ce que contient ſa *Dioptrique*, eſt l'ouvrage de ce tems de ſa vie. Dans la ſuite, M. *Newton* ayant découvert la différente réfrangibilité de la lumiere, & ouvert par-là aux Opticiens une nouvelle carriere, M. *Huyghens* y entra auſſi le premier, & ajouta à ce Traité diverſes choſes concernant la diſtinction des images dans les inſtrumens optiques. M. *Huyghens* négligea néanmoins toute ſa vie de mettre au jour cet ouvrage. Il n'a paru qu'après ſa mort parmi ſes Œuvres poſthumes. M. *Newton* en faiſoit beaucoup de cas, à cauſe de la méthode purement géométrique, & dans le goût des Anciens, qui regne dans ce Livre. Nous ne pouvons cependant diſſimuler qu'il faudroit avoir du courage pour entreprendre de s'y inſtruire de cette ſcience.

M. *Huyghens* ne ſe borna pas à la théorie de l'Optique. Perſuadé de l'importance de la partie pratique, pour porter plus loin les découvertes céleſtes, il mit lui-même la main à l'œuvre; & aidé de ſon frere aîné, à qui il avoit inſpiré du goût pour les mêmes travaux, il parvint à ſe fabriquer, comme on l'a dit ailleurs, des Téleſcopes fort ſupérieurs à ceux qui étoient ſortis juſque-là des mains des Artiſtes les plus renommés en ce genre. Il ſe fit des objectifs qui avoient juſqu'à 210 pieds du foyer. Sa maniere de travailler ces verres, il l'a expliquée dans ſon *Comment. de vitris poliendis*, qu'on lit parmi ſes Œuvres poſthumes. M. *Huyghens* s'eſt encore fait un nom

parmi les Opticiens, par un ſyſtême fort ingénieux ſur la nature de la lumiere, & la cauſe de la réfraction (*a*). Comme nous l'avons fait connoître, & même développé dans le Livre III, nous nous bornons ici à cette indication; nous ajouterons ſeulement qu'on trouve dans cet écrit, un eſſai ingénieux d'explication, des réfractions ſingulieres que la lumiere éprouve dans le cryſtal d'Iſlande. On a enfin dans le Recueil de ſes Œuvres poſthumes, un Traité *des Couronnes & des Parhélies*, phénomenes que perſonne n'avoit encore réuſſi à expliquer. M. *Huyghens* le fait avec aſſez de ſuccès; il en trouve la cauſe dans des gouttes de neige ſphériques ou cylindriques, environnées d'une couche d'eau ou de glace tranſparente, qui flottent dans l'air; & la maniere aſſez ſatisfaiſante dont il déduit delà les phénomenes ſinguliers de divers parhélies extraordinaires, donne à ſon explication une grande vraiſemblance.

Après les écrits de M. *Huyghens* ſur la Dioptrique, un des meilleurs ouvrages ſur le même ſujet, eſt la nouvelle Dioptrique (*new Dioptrick*) de M. *Molyneux* (*b*), qui vit le jour en 1693, in-4°. Il y regne beaucoup de ſimplicité, & de ſçavoir. Les *Fragmens de Dioptrique* de M. *Picard*, publiés la même année parmi les Mémoires de divers Académiciens, méritent auſſi attention. On a fait cas des *Elémens* Latins de Dioptrique & de Catoptrique que David *Grégory* donna en 1695. Ils ont été réimprimés en 1735, augmentés d'un curieux Appendix, contenant diverſes Lettres de Jacques *Grégory* ſon oncle, & de *Newton*, ſur le Téleſcope à réflection. La *Synopſis Optica*, du Pere *Fabri*, ſeroit un ouvrage utile par ſa clarté & ſa préciſion, ſi ſon Auteur, à ſon ordinaire trop précipité, n'avoit pas donné dans pluſieurs lourdes erreurs. La *Dioptrique oculaire & la viſion parfaite*, du Pere *Chérubin d'Orléans*, Capucin, ſont les deux Tomes d'un ouvrage curieux pour les Artiſtes opticiens. Dans le dernier, ce Pere tâche de mettre en honneur ſon Téleſcope binocle, invention déja propoſée

(*a*) Voy. *Tract. de lumine.*

(*b*) M. Guillaume Molyneux, membre de la Société Royale, naquit à Dublin en 1656, & y mourut en 1698. Outre ſa nouvelle Dioptrique, on a de lui un ouvrage intitulé, *Sciothericum Teleſcopicum* (1687. in-4°.), & quelques Mémoires dans les Tranſactions. Son fils, M. Samuel Molyneux, marchoit ſur ſes traces, lorſqu'il fut fait un des Commiſſaires de l'Amirauté; ce qui a ſuſpendu ſes travaux aſtronomiques & optiques.

par ſon confrere le Pere de *Rheita :* on peut voir ce que nous en avons dit à la fin de l'Article V du Livre III. Je me borne à citer les titres de quelques autres livres d'Optique, comme le *Nervus Opticus* du Pere *Traber ;* l'*Oculus artificialis* de *Zahn*, *&c.* Ces Livres, de même que divers autres que j'omets, n'ont rien de remarquable que quelques curioſités optiques. Je paſſe à des choſes plus intéreſſantes qu'une pareille énumeration.

Vers ce tems, nous voulons dire peu après le milieu du dix-ſeptieme ſiecle, on travailloit de toutes parts avec ardeur à perfectionner les moyens que l'Optique nous fournit, ſoit pour pénétrer dans les Cieux, ſoit pour reconnoître les plus petits objets de la nature. Euſtache *Divini* en Italie ſe fit une grande réputation dans ce genre, *Campani* néanmoins le ſurpaſſa par l'excellence & la longueur de ſes Téleſcopes. Ce furent ces inſtrumens qui montrerent pour la premiere fois à M. *Caſſini* les deux Lunes les plus voiſines de Saturne. Ils furent faits par ordre de Louis XIV, & il y en avoit un de 130, un de 150, & un troiſieme de 205 palmes de foyer ; ce qui revient à environ 86, 100, & 136 de nos pieds. *Campani* en fit peu, à la vérité de cette longueur, mais les Aſtronomes employent tous les jours de moindres objectifs de ce célebre Artiſte, qui ſont dans une très-grande eſtime.

Quelques longs que ſoient les objectifs d'*Huyghens* & de *Campani*, ils le cedent à quelques-uns qu'on fit en France vers le même tems. M. *Auzout* étoit venu à bout de faire un objectif de 600 pieds de foyer (*a*). Mais il ne put avoir le plaiſir de l'eſſayer, par la difficulté de trouver un emplacement convenable. Pierre *Borel*, de l'Académie Royale des Sciences, qu'il ne faut point confondre, comme je l'ai vu faire ſouvent, avec *Borelli*, annonçoit dans les Journaux des années 1676 & 1678, qu'il étoit en poſſeſſion d'une méthode ſûre & aiſée, pour faire des objectifs de Téleſcopes de toutes ſortes de longueurs, même de pluſieurs centaines de pieds de foyer, dont il offroit quelques-uns aux obſervateurs qui voudroient en faire l'acquiſition. M. *Hook* a auſſi propoſé dans ſa Micrographie, une invention propre à travailler des verres d'un foyer ſi long qu'on voudra. Elle ſeroit bonne, ſi tout ce que l'on propoſe

(*a*) Lettre à l'Abbé Charles, &c. *Anc. Mém.* T. I.

dans la théorie étoit également bon dans la pratique ; mais M. *Auzout* fit à ce ſujet des obſervations auxquelles M. *Hook* n'auroit bien répondu que par quelque verre de 300 ou 400 pieds de foyer ſorti de ſa machine. Nicolas *Hartzoecker* enfin, eſt parvenu à ſe procurer des objectifs de 600 pieds de foyer, & même, à ce que j'ai lu quelque part, au delà. Il nous a appris la maniere dont il les travailloit (*a*), & c'eſt, je crois, la ſeule dont on puiſſe former des verres d'une convéxité ſi peu ſenſible. Il ne ſe ſervoit point de baſſins ou de formes de métal, comme avoient fait juſque-là les Opticiens. Il prenoit une plaque de verre plus large d'environ un tiers que le verre qu'il vouloit travailler ; & il la creuſoit un peu par le moyen du ſable & d'un verre beaucoup moins large ; enſuite il commençoit à travailler dans cette eſpece de baſſin le verre qu'il vouloit faire. On ſent aiſément que ce verre & ſon baſſin devoient bien-tôt prendre une forme exactement ſphérique ; car il n'y a que deux ſurfaces ſphériques, ou exactement planes, qui puiſſent s'appliquer continuellement dans tous leurs points, en gliſſant ou frottant l'une ſur l'autre. Il continuoit ainſi à travailler ce verre juſqu'à ce qu'il fût ſuffiſamment préparé au poli, après quoi il le poliſſoit groſſiérement, & en le combinant avec un verre d'un foyer exactement connu, & les expoſant au Soleil, il déterminoit la diſtance de ſon foyer. Cet eſſai lui faiſoit connoître ſi ſon baſſin étoit ſuffiſamment creux, ou s'il l'étoit trop ou trop peu. Dans le premier cas, il n'y avoit plus qu'à remettre le verre dans le baſſin, & à l'adoucir au point néceſſaire pour être ſuſceptible du poli parfait. Dans le ſecond, il redreſſoit le baſſin, ou il le creuſoit davantage, juſqu'à ce que l'eſſai lui montrât que le verre avoit à peu près les dimenſions requiſes. Je dis à peu près ; car il eſt aiſé de voir qu'on ne ſçauroit par ce moyen faire un verre d'un foyer d'une longueur préciſément donnée ; mais comme cela eſt très-peu important, ce n'eſt point une objection contre la méthode que nous venons de décrire. Au reſte, le mérite de toutes ces inventions a beaucoup diminué depuis la découverte du Téleſcope à réflection. Un Téleſcope de cette derniere forme, & d'un petit nombre de pieds, équivaut facilement à un in-

(*a*) Eſſais de Dioptrique.

comparablement plus long de l'ancienne conſtruction. Il eſt même facile de prouver qu'un Téleſcope à réfraction de 1000 pieds de longueur, en ſuppoſant qu'il fût facile de s'en ſervir, égaleroit à peine l'effet de certains Téleſcopes à réflection que l'on conſtruit aujourd'hui. En effet, la moindre oculaire qu'on pût donner à un verre de 1000 pieds, en le ſuppoſant même excellent, ſeroit au moins d'un pied de foyer. Le Téleſcope formé de ces verres ne groſſiroit donc que mille fois en diametre. Or l'on a des Téleſcopes à réflection qui n'ont pas plus de neuf à dix pieds, & qui groſſiſſent juſqu'à 1200 fois, avec une grande diſtinction.

Nous ne nous arrêterons donc pas davantage ſur ces tentatives pour ſe procurer des verres de très-longs foyers, & nous omettrons même à deſſein pluſieurs choſes que nous pourrions encore dire ſur ce ſujet pour paſſer au Microſcope. Il y en a, comme on l'a déja dit, de deux eſpeces, les ſimples & les compoſés. Ces derniers ne nous offrent rien de nouveau ; mais on a fait ſur les premiers quelques obſervations curieuſes qui méritent de trouver place ici.

Les Microſcopes ſimples, ſont, comme l'on ſçait, ceux qui ſont formés d'un ſeul verre d'un foyer très-court, par exemple, de quelques lignes, & au deſſous. Mais comme des lentilles d'un foyer auſſi court, ſont très-difficiles à travailler, divers Opticiens ont pris le parti de leur ſubſtituer de petits globules de verre fondus à la flamme de la lampe d'un émailleur. Il eſt facile de s'en procurer de ſemblables. Un très-petit fragment de verre pur étant préſenté à la flamme bleue d'une bougie, par le moyen d'une aiguille mouillée à laquelle il ſe tient attaché, il ſe fond, & il ſe forme en globule. J'ai remarqué que ce ſont des fragmens de filets d'aigrette qui ſe fondent avec le plus de facilité, & qu'il eſt au contraire quelquefois aſſez difficile de mettre en fuſion des fragmens de glace ordinaire. Lorſqu'on a pluſieurs de ces globules, on choiſit les plus parfaits, ſoit pour la forme, ſoit pour la tranſparence : on en renferme un entre deux minces plaques de cuivre, percées chacune d'un trou un peu moindre que ſon diametre, & voilà un Microſcope ſimple conſtruit. M. *Huyghens* montre dans ſa Dioptrique, qu'un globule d'une dixieme partie de pouce de diametre, groſſit cent fois en largeur

geur le petit objet qu'on regarde à travers ; & comme il eſt aiſé de faire de pareils globules qui aient moins d'une demi-ligne de diametre, on peut avoir, ſans beaucoup de frais, un Microſcope qui groſſiſſe deux à trois cent fois en largeur. Sans l'incommodité d'appliquer certains objets à de pareils Microſcopes, l'Optique n'auroit plus rien à deſirer en ce genre, & l'invention la plus ſimple ſeroit en même tems le comble de la perfection où l'art peut atteindre. Ces difficultés n'ont cependant pas arrêté quelques obſervateurs, *Hartzoecker*, par exemple. C'eſt au moyen de ces verres qu'il vit dans la ſemence des animaux, ces animalcules qui donnerent lieu à un nouveau ſyſtême ſur la génération, qui a été pendant quelque tems en crédit. Quant à *Leewenhoeck*, ſi célebre par ſes obſervations microſcopiques, il n'employoit point de pareils globules dans ſes Microſcopes, comme on l'a dit dans divers Livres. Il ſe ſervoit de lentilles d'un foyer fort court, préférant beaucoup de clarté à un aggrandiſſement extrême. Ce fait nous eſt appris par M. *Folkes*, dans les *Tranſactions Philoſophiques* de 1723.

M. *Gray* (*a*) nous a appris à conſtruire encore à moins de frais d'excellens Microſcopes ſimples ; une très-petite goutte d'eau miſe avec le bec d'une plume dans le trou d'une plaque de cuivre très-mince, s'y arrondira en ſphere, & tiendra lieu d'une de verre. A la vérité, elle groſſira moins, mais il ſera facile de regagner par la petiteſſe ce que l'on perd à cauſe de la différence des matieres. M. *Gray* a fait encore une remarque tout-à-fait curieuſe ſur ce ſujet. Ayant obſervé dans des globules de verre, que les petits corps hétérogenes qu'ils renfermoient, paroiſſoient dans certains cas extraordinairement groſſis & comme s'ils euſſent été dehors, il conjectura qu'une goutte ronde d'eau remplie des petits animaux qu'elle contient quelquefois, les lui feroit appercevoir, de même que le globule de verre lui montroit les corps renfermés dans ſon intérieur. Il le tenta, & cela lui réuſſit au delà de ſes eſpérances. Un petit globule d'eau qui devoit contenir de ces animaux, ayant été placé comme on a dit plus haut, & étant regardé à la lumiere, les lui fit appercevoir ſi prodigieuſement groſſis,

(*a*) *Tranſ. Phil.* n°. 221, 223. *Opt. de Smith.* L. III, c. 18.

qu'il lui fallut chercher pourquoi ils l'étoient tant. Nous en donnerons ici une raiſon ſenſible pour les lecteurs les moins verſés dans la théorie de l'Optique. Il ſuffit de remarquer qu'un ſemblable Microſcope eſt un Microſcope à réflection & à réfraction. La partie antérieure tient lieu d'un miroir concave, qui groſſit les objets placés entre ſa ſurface & le foyer. Ce miroir réfléchit donc vers la partie antérieure de la goutte, les rayons de ces petits objets, comme s'ils venoient de leur image qui eſt beaucoup plus grande qu'eux. On trouve enfin par le calcul que ces objets doivent paroître $3\frac{1}{3}$ auſſi gros que s'ils euſſent été appliqués à la maniere ordinaire au foyer du globule.

On s'étonneroit avec juſtice que parmi les inventions optiques, que nous parcourons dans cet article, nous ne donnaſſions aucune place aux miroirs ardens, dont pluſieurs firent tant de bruit vers le même tems. L'hiſtoire de ces inſtrumens ſinguliers ne peut que bien figurer dans un ouvrage tel que celui-ci. Dans cette vue nous allons raſſembler, d'après différens Auteurs, ce qu'ils nous rapportent de plus mémorable ſur ce ſujet.

Le plus grand miroir ardent qui eût été exécuté avant le milieu du dix-ſeptieme ſiecle, étoit, je crois, celui de *Magin*, qui avoit 20 pouces de diametre. C'étoit déja quelque choſe; mais peu après cette époque, divers Artiſtes & Opticiens allerent beaucoup plus loin. *Septala*, Chanoine de Milan, en fit un dont parle le Pere *Schot* dans ſa Magie naturelle, qui brûloit à quinze pas; & nous liſons dans les *Tranſactions Philoſophiques*, n°. 6, qu'il avoit cinq palmes ou près de trois pieds & demi de diametre. Un autre article des *Tranſactions*, (voyez n°. 40.) nous apprend que *Septala* avoit formé le projet d'en faire un autre de ſept pieds de diametre, peut-être doit-on lire ſept palmes. Quoi qu'il en ſoit, on ne ſçait point, ou du moins je ne trouve nulle part quel a été le ſuccès de cette entrepriſe.

Vers le même tems, il ſortit des mains d'un Artificier de Lyon nommé *Villete*, un miroir qui l'emporte, à certains égards, ſur celui de *Septala*. Il n'avoit que 30 pouces de largeur, mais comme il étoit portion d'une ſphere plus petite, ſçavoir ſeulement de 12 pieds de diametre, il brûloit à trois pieds, & ſon

foyer, qui n'étoit que de la largeur d'un demi-louis de ce tems, étoit beaucoup moindre à proportion de ſa ſurface, que dans celui du ſçavant Milanois, de ſorte que la chaleur y étoit conſidérablement plus grande. Auſſi produiſoit-il des effets ſinguliers, tels que de fondre ou percer en peu de ſecondes les métaux que la Chymie met le plus difficilement en fuſion ; de vitrifier en auſſi peu de tems les pierres ou les terres ſur leſquelles le feu a le moins de pouvoir, comme les creuſets, &c (*a*). *Villette* en fit dans la ſuite un autre de 44 pouces de diametre, qui fut acheté par le Landgrave de Heſſe ; & j'ai oui parler d'un troiſieme porté par *Tavernier* aux Indes, & donné à l'Empereur des Mogols. Le premier que Louis XIV avoit acquis, eſt aujourd'hui dans le Cabinet du Roi au Jardin Royal des Plantes.

Mais quelque remarquable que ſoit ce miroir, il eſt encore au deſſous de celui que fit M. de *Tſchirnhauſen*, vers 1687. Celui-ci avoit près de trois aunes de Léipſick, c'eſt-à-dire, 4 pieds & $\frac{1}{2}$ de diametre, & il brûloit à la diſtance de 12 pieds. Il n'étoit point fait comme les autres, d'une mixtion de métaux fondus, mais d'une lame de cuivre de l'épaiſſeur de deux fois le dos d'un coutcau, ce qui le rendoit léger, eu égard à ſa grandeur. Ses effets étoient prodigieux ; il mettoit ſur le champ le feu au bois, il fondoit les métaux en peu de ſecondes, & il n'y avoit pas juſqu'à l'amiante qu'on répute comme inaltérable au feu, qu'il ne changeât en verre (*b*).

Cependant l'incommodité qu'on éprouve à ſe ſervir d'un miroir cauſtique à réflection, fit tenter à M. de *Tſchirnhauſen* de ſe procurer des lentilles de verre de la même grandeur. Il y réuſſit, & il ſortit enfin de la Verrerie qu'il avoit établie en Saxe, une lentille de verre, de trois pieds de diametre, convexe des deux côtés, & dont le foyer étoit à 12 pieds de diſtance. Il eſt aiſé de ſentir que M. de *Tſchirnhauſen* avoit employé une machine à la travailler. Car elle peſoit, même achevée, 160 livres. Son foyer étoit d'un pouce & demi de largeur, mais pour augmenter la chaleur, on le rétreciſſoit par le moyen d'une ſimple lentille ; alors elle produiſoit des effets de la même nature que les précédens, mais avec beaucoup plus de

(*a*) *Tranſ. Phil.* ann. 1665, n°. 6. Jour. des Sçav. Décembre 1679.
(*b*) *Act. Lipſ.* 1687, 1692.

vîteſſe & d'intenſité. Monſeigneur le Duc d'Orléans l'acheta de M. de *Tſchirnhauſen*, & après s'en être ſervi quelque tems à des opérations chymiques auxquelles il s'amuſoit, comme l'on ſçait, il en fit préſent à l'Académie Royale des Sciences qui le poſſede encore aujourd'hui.

Il y a eu des Artiſtes qui ont imaginé de faire des miroirs ardens à moins de frais. Je lis dans *Wolf* (*a*), qu'un Artiſte habile de Dreſde, nommé *Gærtner*, à l'imitation des miroirs de M. de *Tſchirnhauſen*, en fit de bois, qui produiſirent des effets ſinguliers. La concavité de ce bois étoit apparemment enduite de quelque vernis très-uni, ou couverte de feuilles d'or battu, comme *Traber* dit l'avoir vu faire (*b*). Mais je ne laiſſe pas d'avoir beaucoup de peine à concevoir qu'un vernis, ou des feuilles d'or, puiſſent réfléchir la lumiere avec la force & la régularité ſuffiſante pour produire de tels effets. Ce que dit néanmoins *Zahn* (*c*), eſt bien plus étonnant. Il raconte qu'un Ingénieur de Vienne nommé *Neuman*, fit avec du carton & de la paille collée, un miroir qui fondit les métaux. On peut, malgré ce témoignage, être un peu Pyrrhonien ſur un pareil fait. Nous concevons plus facilement, ou plutôt nous n'avons aucune peine à concevoir, que de petits fragmens de miroirs plans arrangés dans la concavité d'un ſegment ſphérique de bois, puiſſent former un excellent miroir concave. C'eſt-là, ſans doute, la maniere la plus expéditive & la moins coûteuſe qu'on puiſſe imaginer pour ſe faire un grand miroir ardent; & nous ne doutons point, vu la grande vivacité de la réflection qui ſe fait ſur le verre, qu'un miroir ſemblable ne produiſit des effets prodigieux.

M. de *Buffon* vient de renouveller les merveilles des miroirs de M. de *Tſchirnhauſen*. Il a eu l'idée de prendre des glaces de miroir, de les couper circulairement, & enſuite les aſtreignant par les bords, de les rendre concaves, par une preſſion appliquée au centre; cette idée lui a en effet réuſſi, & il s'eſt procuré par-là pluſieurs glaces concaves, qui étant étamées, lui ont donné des miroirs excellens (*d*). Il vient d'en préſenter un au Roi, qui a trois pieds de diametre, & qui produit les mêmes effets que ceux de *Villette* & de M. de *Tſchirnhauſen*. Je ne

(*a*) Elem. Catopt. c. IV.
(*b*) *Nervus Opt.* L. II, c. 12.
(*c*) *Oculus Art.* Fund. 3, Synt. 3, c. 10.
(*d*) Mém. de l'Acad. 1754.

dis rien ici de l'invention des miroirs d'*Archimede*, qu'il nous a rendue. Afin d'éviter les répétitions, je me borne à renvoyer à l'article d'*Archimede*, où ce qui concerne ces miroirs fameux eſt amplement diſcuté, & où l'invention de cet Académicien eſt ſuffiſamment décrite.

V.

Découvertes de M. Newton ſur les couleurs.

Il eſt peu de ſujets qui aient plus long-tems occupé les Phyſiciens, & occaſionné plus de conjectures infructueuſes que les couleurs des corps, & celles dont le priſme paroît teindre les objets ou les rayons de la lumiere. Cette énigme ſi difficile à deviner, étoit réſervé à la ſagacité de M. *Newton*. Le génie de cet homme immortel, n'éclate pas moins dans cette découverte que dans celles dont il a enrichi le ſyſtême phyſique de l'Univers. Il ſemble même, à le conſidérer d'un certain côté, que *Newton* décompoſant la lumiere, & établiſſant des conjectures très-probables ſur les cauſes des couleurs des corps, eſt encore plus merveilleux que calculant les forces qui gouvernent les mouvemens céleſtes. C'eût été, ſans doute, le jugement de *Platon*, lui, qui regardoit comme un attentat ſur les droits de la Divinité que d'entreprendre de ſonder ce myſtere de la nature (*a*).

Nous ne nous arrêterons pas à raſſembler ici les traits qui nous apprennent que les Anciens connurent les phénomenes du priſme. Encore moins en tirerons-nous avec un Auteur moderne (*b*), une ſorte d'induction pour mettre en parallele la Phyſique ancienne avec la nouvelle. Connoître un phénomene, c'eſt être encore bien loin de l'expliquer; & c'eſt dans la découverte de la cauſe que conſiſte ſeulement le mérite du Phyſicien. Or il eſt certain que juſqu'à M. *Newton*, les Phyſiciens ne rendirent aucune raiſon ſatisfaiſante du phénomene dont nous parlons. Les uns avoient cru la trouver dans l'inégalité de l'épaiſſeur du priſme, ou dans la différente ſituation des rayons; ce qui, ſuivant eux, occaſionnoit une altération dans leur mouvement. C'eſt à quoi ſe réduit l'explication de *Deſcartes*, qui faiſoit, comme l'on ſçait, conſiſter les couleurs

(*a*) Timæus.
(*b*) *Voyez* l'origine ancienne de la Phyſique nouvelle,

dans une certaine rotation des globules de la lumiere : il prétendoit aſſigner des raiſons pour leſquelles ce mouvement devoit être accéléré dans les rayons qui paſſoient d'un côté du priſme, & retardé dans les autres ; l'accélération de ce mouvement devoit produire le rouge, & le retardement le bleu ou le violet. Mais ces raiſons ſont ſi arbitraires, qu'il lui eût été également facile d'expliquer le phénomene, s'il eût été tout-à-fait contraire. D'autres Philoſophes trouvoient dans ce paſſage la cauſe d'un certain mêlange d'ombre avec la lumiere, mêlange dont, ſuivant eux, la quantité ſeule compoſoit les couleurs. Tous enfin s'étoient bornés à quelque raiſon vague de cette nature, ſans entrer dans aucun détail. Craignans, ce ſemble, de rencontrer des effets incompatibles avec leur explication, ils s'étoient arrêtés à l'écorce du phénomene, loin de varier leurs expériences, ſeul moyen de forcer, pour ainſi dire, la nature à dévoiler ſon ſecret.

M. *Newton*, dont le talent pour la Phyſique expérimentale, alloit, comme on le verra, de pair avec la ſagacité géométrique, fut ſans doute le premier qui ſçut ainſi queſtionner la nature, & ce fut ce qui le conduiſit à ſa découverte. Il nous raconte lui-même de quelle maniere il ſoupçonna la premiere fois, que les rayons de la lumiere n'étoient pas également réfrangibles. Ayant introduit, par une petite ouverture, un rayon du Soleil dans une chambre obſcure, il le fit paſſer au travers d'un priſme, & il le reçut ſur la muraille oppoſée. Après avoir contemplé avec admiration la vivacité des couleurs de cette image, il s'étonna, dit-il, de la voir extrêmement dilatée, & environ cinq fois plus longue que large. Car il s'attendoit à la voir circulaire, & c'étoit ce qui devoit arriver, ſuivant les loix ordinaires de la réfraction. Frappé de ce phénomene, il en rechercha la cauſe : il en ſoupçonna d'abord pluſieurs, comme les confins de l'ombre & de la lumiere, qui pouvoient agir ſur le rayon, les irrégularités du priſme, &c. Mais il s'aſſura bien-tôt par divers moyens que ces premieres conjectures étoient ſans fondement, & que cette dilatation étoit un effet néceſſaire, & la ſuite de quelque propriété invariable. En réfléchiſſant enfin plus profondément ſur cette expérience, il vint à ſoupçonner que toutes les parties dont ce rayon étoit compoſé, ne ſouffroient pas une égale réfraction. Ce premier

pas fait, il ne lui fut pas difficile de reconnoître qu'elles étoient celles qui éprouvoient la plus grande réfraction, & celles qui ſouffroient la moindre. Il vit bien-tôt que la partie du rayon colorée en rouge, & qui occupoit le bas de l'image, étoit celle qui ſe rompoit le moins, & que celle qui ſe rompoit le plus étoit la partie colorée de violet, & les autres à proportion de leur proximité de l'une ou de l'autre. Mais afin de mettre cette vérité dans un plus grand jour, il faut examiner cette expérience avec plus de détail.

Pour cet effet, que ABC repréſente un priſme à peu près équilateral un angle en bas, & que D G ſoit un faiſceau de lumiere dont les rayons extrêmes DF, EG, ſont ſenſiblement paralleles. Si tous les rayons étoient également réfrangibles, ils ſe romproient tous également en entrant dans le priſme, & ils ſeroient tous contenus dans l'eſpace que comprennent les paralleles F I, G H. La même choſe arriveroit au ſortir du priſme; ils ſeroient renfermés entre les lignes ſenſiblement paralleles I K, H L. Mais on remarque au contraire que ces lignes ſont conſidérablement divergentes, & forment entr'elles un angle de pluſieurs degrés; les rayons extrêmes H L, *i k*, ont donc ſouffert des réfractions inégales, & il eſt aiſé de voir dans cette diſpoſition du priſme, que c'eſt le rayon *i k*, qui donne toujours le violet, qui a été le plus rompu; & le rayon H L, qui l'a été le moins. Or comme ce phénomene eſt conſtant, il faut que le violet, ſous même incidence, ſouffre une plus grande réfraction que le rouge. *Fig.* 129.

Voici donc ce qui arrive à un faiſceau de lumiere, comme D G pénétrant dans le priſme. Chaque filet dont il eſt compoſé, tel que D F, ſe partage, dès ſon entrée, en pluſieurs, comme F I, F *i*, qui ſont ceux qui ont les degrés extrêmes de réfrangibilité, & une multitude d'autres de réfrangibilité moyenne qui occupent l'eſpace intermédiaire. Il en arrive de même à tous les autres dont le faiſceau de lumiere D G eſt compoſé; E G, par exemple, ſe partage en G H, G *h*, & tous les autres qui ont des degrés moyens de réfrangibilité. Ils tombent dans cet état, & déja ſéparés ſur la ſeconde face du priſme; là ceux qui les plus réfrangibles éprouvent de nouveau une plus grande réfraction que ceux qui le ſont le moins; ce qui augmente leur divergence, & hâte la ſéparation. Tous

les rayons qui ſont le moins réfrangibles, & qui le ſont également entr'eux, comme IK, HL, forment une eſpece de bande ſenſiblement égale dans ſa largeur; tous ceux qui le ſont le plus en forment une autre; ceux enfin qui ont des degrés intermédiaires de réfrangibilité en forment une infinité d'autres renfermées entre les précédentes.

Il eſt aiſé de voir par là pourquoi à peu de diſtance du priſme, la lumiere qui le traverſe, eſt ſeulement colorée vers les bords, en bas de rouge, en haut de violet. C'eſt que la ſépation des bandes colorées n'y eſt que commencée. Il n'y a encore que les extrêmes qui ſoient un peu ſéparées; mais qu'on éloigne davantage le carton où l'on reçoit l'image, on verra bien-tôt toutes ces bandes ſe ſéparer les unes des autres, & à 26 pieds environ du priſme, l'image colorée ſera compoſée de ſept couleurs: le *rouge*, l'*orangé*, le *jaune*, le *verd*, le *bleu*, l'*indigo*, le *violet*, toutes inégalement réfrangibles, le *rouge* moins que l'*orangé*, celui-ci moins que le *jaune*, &c. En vain s'attendroit-on à en appercevoir un plus grand nombre en s'éloignant davantage, elles ne font que ſe dilater de plus en plus ſans qu'il en naiſſe aucune nouvelle.

Après cette premiere expérience, qui apprit à *Newton* que la lumiere du Soleil étoit compoſée de ſept couleurs primitives inégalement réfrangibles, il en fit une autre encore plus propre à convaincre de cette inégale réfrangibilité. Il introduiſit dans la chambre obſcure un rayon de lumiere par un trou d'un tiers de pouce de diametre; & le recevant ſur un priſme, il intercepta tout près, par un carton percé d'un trou en G, *Fig.* 130. une partie de la lumiere qui en ſortoit. Le ſurplus paſſant par l'ouverture G, alloit peindre à 12 pieds de diſtance une image colorée ſur un autre carton auſſi percé d'un trou *g*, & derriere ce trou étoit fixé un priſme d'une maniere invariable. Lorſqu'on mettoit le priſme A de maniere que la partie ſupérieure de l'image colorée, ou le violet paſſoit par les trous G, *g*, ce rayon rompu paſſant par le ſecond priſme, alloit donner du violet en N, par exemple; enſuite, à meſure que l'on tournoit le priſme de maniere que l'indigo, le bleu, le verd, &c. paſſoient ſucceſſivement par les ouvertures ci-deſſus, l'image alloit ſe peindre plus bas, & le rouge étoit celui qui occupoit la place la plus baſſe. Il eſt facile de voir ici que l'incidence

cidence de ces différens rayons étoit la même ſur le ſecond priſme, puiſque leur direction étoit fixée par la poſition invariable des deux trous G, *g*; ce ne pouvoit donc être que la différente réfrangibilité de ces rayons qui cauſoit ce phénomene.

Mais M. *Newton* ne s'en tient pas encore là. Son Traité & ſes *Leçons d'Optique* nous fourniſſent une foule d'autres expériences non moins convaincantes, dont nous allons rapporter quelques-unes. 1°. Si l'on peint une bande en travers de deux couleurs, de rouge par exemple, & d'un bleu foncé; qu'on la place ſur un fond noir, & qu'on la regarde enſuite par un priſme poſé parallélement à ſa longueur, & l'angle tourné en haut, on verra le bleu le plus haut, & le rouge en bas, comme ſi les deux portions colorées avoient été coupées & placées à différentes hauteurs. Ce ſera le contraire, ſi l'on regarde à travers le priſme tourné l'angle en bas. Au lieu d'une bande, on peut placer horizontalement ſur un fond noir, un fil compoſé de deux morceaux de différentes couleurs, & on verra de même au travers du priſme les deux portions ſéparées, quoiqu'encore paralleles.

2°. Qu'on enveloppe cette bande peinte de rouge & de bleu foncé, de pluſieurs tours d'un fil de ſoye noire très-déliée, & qu'on l'expoſe à la lumiere d'un flambeau placé vis-à-vis la ſéparation des couleurs. Qu'on ait une large lentille de verre d'environ trois pieds de foyer, & qu'on la place immobile à la même hauteur, & vis-à-vis ce papier coloré, à la diſtance d'environ ſix pieds. Elle peindra, comme ſçavent les Opticiens, à une diſtance d'environ ſix pieds derriere elle, une image qu'on recevra ſur un carton. Or l'on remarquera que tandis que la moitié rouge eſt peinte diſtinctement (ce que l'on connoît aux fils de ſoie ou traits noirs, qui paroiſſent bien marqués & bien terminés), la moitié bleue eſt tellement confuſe, qu'à peine peut-on y diſtinguer ces traits; c'eſt-à-dire, que les différentes portions dans leſquelles ils diviſent cette moitié, ne ſont point diſtinctement terminées. Il faudra pour cela approcher le carton d'environ un pouce & demi, & alors tandis que les portions bleues paroîtront diſtinctement, on ne verra plus les rouges que confuſément. Le foyer des rayons bleus eſt donc plus voiſin que celui des rouges, & par conſéquent ils ont eſſuyé

une plus grande réfraction. M. *Newton* a déterminé ainſi leurs différens degrés de réfrangibilité par des expériences & des calculs qui portent avec eux leur démonſtration (*a*). Le ſinus d'inclinaiſon des rayons paſſant du verre dans l'air, étant 50, le ſinus de réfraction des moins réfrangibles des rayons rouges eſt 77, tandis que le plus réfrangible des rayons violets a pour ſinus de réfraction 78. A l'égard des couleurs moyennes, ce ſont les rapports ſuivans. Les ſinus des rayons rouges ſont depuis 77 juſqu'à $77\frac{1}{8}$, ceux des rayons orangés depuis $77\frac{1}{8}$ juſqu'à $77\frac{1}{5}$, ceux des jaunes entre $77\frac{1}{5}$, & $77\frac{1}{3}$, ceux des verds entre $77\frac{1}{3}$, & $77\frac{1}{2}$; ceux des bleus entre $77\frac{1}{2}$, & $77\frac{2}{3}$, des indigos entre $77\frac{2}{3}$ $77\frac{7}{9}$; enfin ceux des violets entre $77\frac{7}{9}$ & 78.

Juſques ici il ne s'eſt agi que de l'inégale réfrangibilité des rayons de différentes couleurs. Delà naît une autre propriété qui eſt une inégale réfléxibilité. Je m'explique, & je commence à remarquer qu'on n'entend point par-là une inégalité entre les angles d'incidence & de réflection, comme l'ont cru quelques ignorans qui attaquant *Newton* ſans l'avoir lu, lui ont imputé cette penſée. Cette inégale réfléxibilité conſiſte en ceci : lorſqu'un rayon de lumiere paſſe d'un milieu dans un autre moins denſe, il y a une certaine inclinaiſon au-delà de laquelle il ne peut plus pénétrer dans ce ſecond milieu ; car ſi le ſinus d'inclinaiſon eſt tel que le ſinus de réfraction, qui eſt toujours avec lui dans un rapport déterminé, par exemple, comme 3 à 2 en paſſant du verre dans l'air ; s'il arrive, dis-je, que ce ſinus d'inclinaiſon ſoit tel que celui de réfraction devienne plus grand que le ſinus total, il eſt évident qu'alors la réfraction ne ſçauroit ſe faire, & le rayon au lieu de pénétrer dans le ſecond milieu, fut-ce du vuide, ſe réfléchira. Ainſi l'on voit que le rayon le plus réfrangible ſera auſſi le plus réfléxible, c'eſt-à-dire, que ſous une moindre obliquité il ne pourra pénétrer dans le milieu plus rare, tandis que celui qui eſt moins réfrangible, y pénétrera encore. On le démontre auſſi par une expérience facile. On tourne le priſme de maniere que les rayons qui en ſortent effleurent la ſeconde face. Alors en le tournant un peu davantage, on voit d'abord les rayons violets ſe réfléchir contre cette ſeconde face, tandis

(*a*) Optique, liv. 1, p. 1, Prop. VII.

que les autres la pénétrent encore, & paſſent au-delà. Tourne-t'on encore un peu le priſme, on voit le bleu ſe réfléchir, enſuite le verd, le jaune, &c. le rouge eſt enfin le dernier qui le traverſe entiérement, & celui qui a beſoin de la plus grande obliquité pour ſe réfléchir. Mais nous renverrons pour cette expérience à l'ouvrage de M. *Newton*, afin de nous permettre plus d'étendue ſur d'autres plus eſſentielles dans ſa théorie.

Ces expériences ſont celles qui regardent l'inaltérabilité des couleurs produites par le priſme. Lorſqu'une couleur eſt ſuffiſamment ſéparée des autres, (on verra bien-tôt comment cela s'exécute,) ſon paſſage par un nouveau priſme ne la dilate plus: il n'eſt plus de réflection ni de réfraction qui la puiſſe changer, & qui en puiſſe tirer d'autres; ce qui détruit entiérement la conjecture de ceux qui faiſoient conſiſter les couleurs dans une modification de la lumiere acquiſe par la réfraction & la réflection, ou par ſon paſſage à travers un milieu diaphane. *Newton* introduiſit (*a*) dans une chambre bien obſcurcie un rayon de lumiere par un trou d'une ou deux lignes de diametre, & à la diſtance d'environ 12 pieds, il reçut cette lumiere, au travers d'une lentille qui peignoit à une dixaine de pieds, une image blanche & très-diſtinctement terminée. Il intercepta ces rayons avec un priſme placé au delà de la lentille, & au lieu de cette image circulaire, il eut à une certaine diſtance une image diſtinctement terminée de tous les côtés, & qui étoit environ 70 fois plus longue que large. On verra la néceſſité de ce procédé en conſidérant que l'image alongée eſt formée d'une infinité de cercles différemment colorés, dont les centres ſont à côté les uns des autres (voy. fig. 131.), & que moindres ils ſont, moins ils empietent les uns ſur les autres, & plus chaque eſpece de lumiere eſt exempte de mêlange. M. *Newton* préſenta enſuite un papier noir percé d'un trou, ayant un ſixieme de pouce de diametre, & fit paſſer au travers, une des couleurs qu'il reçut ſur un ſecond priſme. Elle n'éprouva aucune altération, le *bleu* reſta toujours bleu, le *verd*, verd, &c. ſans autre différence que celle qui doit ſe trouver dans chacune des couleurs dont les extrêmités approchent toujours de la teinte de leurs voiſines. *Newton* remarque

(*a*) Optique, L. 1, Exp. 11.

encore que l'image du trou formée par ce ſecond priſme, étoit parfaitement circulaire. Il ajoute que lorſqu'on plongeoit dans cette lumiere de petits objets, on les voyoit diſtinctement au travers du priſme, tandis que les mêmes objets plongés dans la lumiere non décompoſée, ne paroiſſoient que confuſément. Mais pour réuſſir dans cette expérience, il y a des précautions à prendre. Il faut que la chambre ſoit bien obſcurcie, afin qu'aucune lumiere latérale & étrangere ne vienne ſe mêler avec celle du rayon qu'on décompoſe. Il faut que le priſme ait ſon angle réfringent au moins de 60°, qu'il ſoit bien exempt de bulles & de veines, & que ſes faces, de même que la lentille, ſoient polies, non à la maniere ordinaire qui ne fait que déguiſer les trous & les ſillons en arrondiſſant leurs bords, mais comme le pratiquent les excellens Artiſtes de Téleſcopes Avec ces ſoins qui ne tendent viſiblement qu'à écarter toutes les circonſtances étrangeres, & toute réfraction irréguliere, on ne manque pas de réuſſir dans cette expérience délicate, & c'eſt faute de les avoir pris que d'habiles Phyſiciens n'ont pu en venir à bout. Nous reviendrons ſur cela avant la fin de cet article. Continuons à développer les différentes parties de la théorie de *Newton*.

Les expériences ci-deſſus nous conduiſent naturellement à reconnoître la nature & la cauſe des couleurs des objets. Elles ſont dans la lumiere qui éclaire ces objets, & ils ne ſont d'une couleur ou d'une autre que parce qu'ils ſont d'une nature à réfléchir plus de rayons de l'une que de l'autre. Le blanc enfin n'eſt que le mêlange intime de toutes les couleurs primitives dans les mêmes proportions que celles qui compoſent la lumiere blanche du Soleil. Des expériences fort curieuſes établiſſent ces faits. 1°. Après avoir formé par le moyen d'un priſme l'image colorée, ſi on la regarde à travers un priſme tourné en ſens contraire, on la voit réduite à la forme circulaire, & de couleur blanche. 2°. Si on reçoit cette image colorée ſur un grand verre lenticulaire, de ſorte que toutes les couleurs aillent ſe confondre en un foyer commun, voilà le blanc éclatant qui renaît; mais ſi l'on intercepte une des couleurs, ce n'eſt plus du blanc, c'eſt un gris qui varie ſuivant la couleur interceptée. 3°. Si l'on préſente à une couleur homogene un corps quelconque, il la prend. A la vérité, ſi ſa

couleur naturelle eſt différente, la nouvelle dont il paroît teint eſt moins éclatante. Cela vient de ce que ce corps eſt peu propre à réfléchir une quantité conſidérable des rayons de la nouvelle couleur. Je dis une quantité conſidérable; en effet, il en réfléchit toujours quelques-uns de toutes les eſpeces parmi ceux de ſa couleur propre, mais en petite quantité, ce qu'on prouve en le regardant au travers du priſme qui la décompoſe. Et c'eſt-là la raiſon pour laquelle il eſt viſible, plongé dans une lumiere qui n'eſt pas de ſa couleur naturelle; car s'il ne réfléchiſſoit abſolument que des rayons de cette couleur, plongé dans un rayon homogene d'un autre, il n'en réfléchiroit aucun, & il paroîtroit abſolument noir. Que ſi l'on ne parvient point à compoſer du blanc, de pluſieurs couleurs matérielles mêlées dans les proportions de celles de l'image colorée, il ne faut pas s'en étonner. Ces couleurs ne ſont jamais ni aſſez intimement mêlées, ni aſſez éclatantes pour qu'on puiſſe comparer ce mêlange avec celui des rayons de la lumiere même. Mais ceci appartient plutôt à la Phyſique qu'aux Mathématiques; cette raiſon & la neceſſité d'abréger, me portent à renvoyer à M. *Newton*, qui dit ſur cela des choſes ſatisfaiſantes.

Quelque bien prouvée que paroiſſe, à ce que j'eſpere, à tout lecteur ſenſé, la théorie précédente, du moins en ce qui concerne la décompoſition des rayons de la lumiere, leur différente réfrangibilité, & l'inaltérabilité des couleurs produites par le priſme, ce ne fut pas ſans diverſes oppoſitions qu'elle s'établit. Lorſque l'écrit de M. *Newton* vit le jour, le Pere *Pardies* fit des objections (*a*). A la vérité, ſur la réponſe de M. *Newton*, ce Pere eut la candeur rare de ſe rendre, & de témoigner qu'il étoit ſatisfait. Mais les autres adverſaires de *Newton* ne ſe rendirent pas auſſi aiſément. Celui qui le fatigua le plus, fut un certain François *Line*, du College Anglois à Liége. Ses difficultés ſont dignes de celui qui plutôt que de reconnoître la peſanteur de l'air, avoit imaginé de petits cordons inviſibles pour ſoutenir le Mercure dans le tube de *Torricelli*. Nous remarquerons même comme une ſingularité, qu'il ne ſçut jamais répéter la premiere & la plus ſimple des expériences du priſme, celle de former l'image colorée & oblon-

(*a*) *Tranſ. Phil.* n°. 81, &c.

gue que *Newton* examine. Cette remarque me diſpenſera d'en dire rien de plus.

C'eſt avec regret que je trouve ici M. *Mariotte* parmi ceux qui ont contribué pendant quelque tems à rendre incertaine & douteuſe la théorie de M. *Newton*. Il ne nia pas, il eſt vrai, la différente réfrangibilité des rayons, mais il rejetta l'inaltérabilité des couleurs, qui forme une partie conſidérable & eſſentielle de cette théorie. Ce qui l'engagea dans ce ſentiment fut qu'il ne put réuſſir dans l'expérience dont nous avons parlé plus haut. Il lui arriva toujours, dit-il, de trouver dans chaque couleur, quoique reçue à une très-grande diſtance du priſme, diverſes autres couleurs, comme dans le rouge, non ſeulement du rouge, mais du jaune & du violet; d'où il conclut que cette inaltérabilité n'étoit pas ſuffiſamment prouvée, ou, pour me ſervir de ſes propres termes, que l'*ingénieuſe hypotheſe de M. Newton ne devoit point être reçue*. Je remarque en paſſant ce terme d'*hypotheſe*, qui paroîtra ſans doute bien ſingulier & bien mal appliqué à des vérités telles que celles qu'enſeignoit M. *Newton*. Mais telle étoit alors la maniere de philoſopher : on croyoit n'être Phyſicien qu'à proportion qu'on imaginoit des hypotheſes mieux liées, & à l'aide deſquelles on expliquoit un plus grand nombre de faits. Je ſuis fort éloigné de blâmer & de rejetter entiérement cette maniere de procéder en Phyſique; elle a eu peut-être quelquefois ſes utilités; mais M. *Newton* n'avoit rien moins prétendu que faire une hypotheſe; il avoit propoſé la différente réfrangibilité de la lumiere, & l'inaltérabilité des couleurs, comme des faits, des vérités démontrées par l'expérience. Auſſi avoit-il failli ſe fâcher contre le Pere *Pardies*, qui dans ſa premiere Lettre s'étoit ſervi du terme d'hypotheſe en parlant de cette théorie.

Je me perſuaderois volontiers que M. *Mariotte* n'avoit point lu l'écrit de M. *Newton*. Car outre qu'il n'auroit pas traité ſa théorie d'hypotheſe, il auroit été plus circonſpect à prononcer, ſur le peu de ſuccès de ſon expérience, le contraire de ce que *Newton* avoit aſſuré. En effet, *Newton* avoit dit expreſſément que, pour réuſſir dans l'expérience de l'inaltérabilité des couleurs, il falloit les ſéparer d'une maniere plus parfaite que celles qu'il avoit juſque-là indiquées. Il ſe propoſoit alors de

publier au premier jour ſon Optique, dans laquelle il devoit détailler la maniere de faire l'expérience délicate dont nous parlons. Mais dès que parut ſon écrit dans les *Tranſactions Philoſophiques*, il vit s'élever de toutes parts tant de chicanes, & de mauvaiſes difficultés, que craignant de commettre ſon repos, il changea de deſſein, & ſupprima cet ouvrage.

Il reſta donc du moins fort douteux pendant long-tems, que les couleurs produites par le priſme fuſſent inaltérables, comme le diſoit M. *Newton*. Enfin parut ſon Optique, ce Livre admirable, & ſi digne d'être conſeillé à tous ceux qui cultivent la Phyſique, comme le plus parfait modele de l'art de faire des expériences. M. *Newton* y dévoila la maniere de décompoſer ſuffiſamment la lumiere pour trouver les couleurs inaltérables. Nous l'avons rapportée plus haut, & il n'y a plus aujourd'hui le moindre doute que lorſqu'on s'y prend de cette maniere, on ne réuſſiſſe. La Société Royale de Londres en a rendu un témoignage authentique, en publiant dans ſon Recueil de l'année 1716, le récit des expériences faites devant elle par M. *Deſaguliers*, & qui réuſſirent auſſi-bien qu'on le pouvoit deſirer.

Ce témoignage étoit bien capable d'enlever tous les ſuffrages; néanmoins on ne laiſſa pas de voir, peu d'années après, un Auteur Italien s'élever contre la théorie de M. *Newton*. M. *Rizzeti*, dans une Lettre adreſſée à M. *Martinelli*, & publiée dans le Journal d'Italie (*a*), déclara qu'il avoit répété ſoigneuſement toutes les expériences de M. *Newton*, & qu'il les avoit trouvé en partie fauſſes, en partie ſans force, par l'omiſſion de quelque circonſtance eſſentielle; enfin qu'il en avoit fait quelques autres qui renverſoient entiérement la théorie du Philoſophe Anglois. Il éludoit, par exemple, l'expérience de la lentille qui peint l'image du papier bleu plus proche que celle du rouge, en imputant cette différence à la différente inclinaiſon des rayons venant de la partie rouge & de la partie bleue; il ajoutoit qu'ayant d'abord fait l'expérience avec le même ſuccès que M. *Newton*, lorſqu'il avoit changé de place le bleu & le rouge, l'un & l'autre s'étoient peints avec les traits noirs, à la même diſtance. De même, après avoir placé

(*a*) T. I, ſupp. voy. *Act. Lipſ.* Supp. T. VIII.

à même hauteur, & parallélement à l'horizon, un parallélogramme peint, moitié en rouge, moitié en bleu, il convenoit que ſi le fond étoit noir, le bleu & le rouge paroiſſoient à différentes hauteurs : mais il ajoutoit que ſi le fond étoit blanc, ils paroiſſoient également élevés ; ce qui ruinoit, diſoit-il, la conſéquence que M. *Newton* tiroit. Parmi les objections qu'il oppoſoit à *Newton*, étoient encore celles ci. Lorſqu'on regarde un cheveu ou un fil de ſoie noire & déliée, & placée en partie ſur un fond rouge, en partie ſur un fond bleu, on le voit diſtinctement ; il en eſt de même lorſque l'on regarde deux fils, l'un rouge, l'autre bleu, placés ſur un fond noir, ou de quelque autre couleur. Il ſemble cependant qu'en admettant la différente réfrangibilité, cela ne pourroit être. Je paſſe pluſieurs autres raiſons, parmi leſquelles je n'en vois aucune où il ſoit queſtion de l'expérience où *Newton* fait paſſer ſucceſſivement par les deux mêmes petites ouvertures, des rayons de différentes couleurs, qui, tombant ſur un priſme immobile, après la réfraction qu'ils y éprouvent, vont ſe peindre à différentes hauteurs. Celle-ci eſt en effet trop peu ſuſceptible de difficulté, & M. *Rizzeti* prend le parti de n'en rien dire.

Mais la théorie de M. *Newton* eut un défenſeur habile dans M. *Richter*. Ses réponſes me paroiſſent ſolides & victorieuſes ; il réitéra l'expérience du carton mi-parti, en diviſant chacune des parties colorées de bleu & de rouge, en pluſieurs portions : or il trouva toujours que les parties bleues avoient leur point de diſtinction plus près que les rouges. Il rendit auſſi une raiſon ſatisfaiſante pourquoi l'expérience de la bande rouge & bleue, vue au travers du priſme, réuſſit différemment lorſque le fond eſt blanc, que lorſqu'il eſt noir. Il montra enfin que les objections tirées de l'égale diſtinction avec laquelle on voit un fil rouge & bleu ſur un fond noir, ou un fil noir ſur un fond en partie rouge, en partie bleu, ne ſont d'aucun poids. En effet, quelle maniere de procéder en Phyſique, que celle de M. *Rizzeti !* Qui vit jamais, pour conſtater un effet naturel, à l'expérience la plus ſimple en ſubſtituer une plus compoſée. Or c'eſt ce que faiſoit cet antagoniſte de *Newton*, en ſubſtituant à la lentille dont l'effet ſur les rayons eſt parfaitement connu, l'œil dont la ſtructure eſt ſi compoſée, & à travers les humeurs duquel nous ne connoiſſons qu'en

qu'en gros le chemin des rayons. Car avons-nous assez de connoissance de la figure de toutes les parties de cet organe merveilleux, pour être assurés qu'elles ne sont pas précisément conformées de maniere à corriger l'aberration provenante de la différente réfraingibilité; & une fois que nous sommes assurés par d'autres voies simples, de cette différente réfrangibilité, n'est-il pas plus raisonnable de soupçonner que l'œil est conformé comme nous venons de dire, que de la contester sur ce que l'œil en est exempt. Rien ne ressemble mieux au procédé de M. *Rizzeti*, que celui d'un homme qui, dans une machine, dont la construction lui seroit à peine connue, ne voyant pas distinctement les forces en raison inverse des vîtesses, prétendroit que cette loi de la Méchanique est une chimere, & rejetteroit les preuves qu'en fournissent toutes les machines simples. Ce fut à peu près là ce que répondit M. *Richter*, & M. *Rizzeti* devoit être content de cette réponse. Mais loin delà: il répliqua; le défenseur de *Newton* répondit de nouveau, &c (*a*). Enfin M. *Rizzeti* revenant à la charge en 1727, publia un Ecrit intitulé, *De luminis affectionibus*, où il réitéra toutes ses assertions précédentes sur la théorie Newtonienne des couleurs. On l'y voit de plus affecter beaucoup de confiance, & s'écarter assez considérablement des égards dûs à *Newton*. Ce fut ce qui engagea M. *Desaguliers* à réitérer en 1728, devant la Société Royale de Londres, les expériences contestées. Elles eurent de nouveau le succès desiré, de même que diverses autres qu'il imagina dans la vue de confirmer les premieres, ou de répondre aux exceptions de M. *Rizzeti*. En voici une de ces dernieres. M. *Desaguliers* fit faire une boîte quadrangulaire, percée au devant d'un trou rond, & dans laquelle deux lumieres cachées pouvoient illuminer fortement le fond oppose, sans qu'il se répandît aucune lumiere dans la chambre. Sur ce fond, & directement au devant de ce trou, étoit une ouverture quarrée divisée en bandes & en cellules, par des fils de soie noire très-déliée. Au devant du trou rond, étoit placée une lentille de quelques pieds de foyer, à la distance d'environ le double de ce foyer. Lorsqu'on plaçoit à l'ouverture quarrée,

(*a*) Voyez *Act. Lipsi. ubi suprà.*

une ſurface teinte de rouge, & qu'on avoit trouvé ſon image diſtincte ſur le carton placé au-delà de la lentille, ſi l'on changeoit cette ſurface en une bleue, l'image n'étoit plus diſtincte, & il falloit approcher le carton. Ici tout eſt ſemblable, & il n'y a aucun lieu à l'objection de M. *Rizzeti*, qui probablement commettoit lui-même la faute qu'il reprochoit à M. *Newton*, ſçavoir de faire tomber les rayons bleus & rouges ſur la lentille, ſous différentes inclinaiſons. D'ailleurs il n'y a abſolument que les rayons venant de l'objet tantôt bleu, tantôt rouge, qui arrivent à la lentille. Quoi de plus concluant, de plus propre à diſſiper tous les doutes ſur la différente réfrangibilité de ces rayons. M. *Deſaguliers* répéta de la même maniere, & avec le même ſuccès, l'expérience du carton mi-parti de rouge & de bleu; il en fit enfin diverſes autres également convaincantes, que je paſſe pour abréger. Je ne ſçais ſi M. *Rizzeti* s'eſt enfin rendu à des preuves répétées avec tant de ſoin & tant d'authenticité: je le ſouhaite, mais je ne puis diſſimuler que le ton qui regne dans ſes écrits me fait craindre le contraire.

Les expériences de M. *Newton* ont eu auſſi en France le ſuccès convenable, depuis que l'art de faire des expériences s'y eſt perfectionné. On doit à la mémoire du Cardinal de Polignac, la juſtice de remarquer que c'eſt ſous ſes auſpices & par ſes ſoins que l'expérience de l'inaltérabilité des couleurs ſéparées par le priſme, a réuſſi pour la premiere fois dans ces contrées. Quoiqu'attaché en général à la doctrine de *Deſcartes*, dont il avoit été autrefois un des premiers défenſeurs, il n'avoit pas laiſſé de goûter la théorie de *Newton* ſur les couleurs. Il n'épargna rien pour vérifier l'expérience ci-deſſus. Il ſe procura à grands frais les priſmes les plus parfaits, moyennant quoi, & en ſuivant le procédé de M. *Newton*, l'expérience réuſſit très-bien entre les mains de M. *Gauger*, l'Auteur, je penſe, du Livre ingénieux *de la Méchanique du feu.* M. de *Polignac* reçut à ce ſujet une lettre de remerciment de *Newton.* Il devoit donner place à cette théorie dans ſon Anti-Lucrece; mais ſa mort, qui ne lui laiſſa pas le tems de mettre la derniere main à ce Poëme, nous a auſſi privés de ce morceau. Depuis ce tems, nous voulons dire celui de l'expérience répétée ſous les auſpices de cet illuſtre Prélat, divers Phyſiciens François l'ont faite, & la font avec le même ſuccès. Il y

a plus de 20 ans, que ceux qui veulent conſtater par leurs propres yeux la vérité de cette expérience & des autres, le peuvent faire chez M. l'Abbé *Nollet*, dont le talent expérimental eſt ſi connu. C'eſt M. l'Abbé *Nollet* qui nous l'apprend lui-même, dans ſes *Leçons de Phyſique*, (T. V, p. 375), & qui dans la note de cette page, remarque que quelques Auteurs l'ont cité mal-à propos, comme ayant trouvé ſur cela *Newton* en défaut. C'eſt, dit-il, un honneur qu'il ne prétend point du tout partager avec le Pere *Caſtel* & l'Auteur de la Chroa-généſie. Ainſi il ne peut plus y avoir d'incredules ſur cette partie des vérités enſeignées par M. *Newton*, que des gens inattentifs, ou prévenus, & incapables d'apprécier les preuves qu'on en donne. On les eût vus dans le ſiecle paſſé nier de même la peſanteur de l'air, & la circulation du ſang.

Quand je réfléchis à l'authenticité du ſuccès des expériences de M. *Newton*, j'ai peine à concevoir d'où vient que quelques perſonnes de mérite, M. du *Fai*, par exemple, ayent pu penſer qu'on pouvoit n'admettre que cinq, ou même trois couleurs primitives (*a*). Sans doute cet Académicien écrivoit cela dans un moment de diſtraction où il ne ſe rappelloit pas ces expériences, ou bien ce qu'il diſoit, il ne l'entendoit que des couleurs matérielles. En effet, avec du bleu & du jaune, par exemple, on compoſe du verd; mais, malgré cela, le vrai verd de la lumiere du Soleil, celui de l'image colorée ſuffiſamment ſéparé des autres couleurs, ne ſe décompoſe point, comme le verd formé du jaune & du bleu. Il en eſt de même de chacune des ſix autres couleurs de cette image. Ainſi il y a dans la lumiere du Soleil, ſept couleurs primitives, quoique des couleurs reſſemblantes à quelques-unes d'entr'elles puiſſent être formées par d'autres mêlangées. Je ne ſçais encore comment l'Auteur de *l'origine ancienne de la Phyſique moderne*, & des *Entretiens Phyſiques*, a pu dans des Livres auſſi récens, ſe prévaloir du peu de réuſſite de M. *Mariotte* dans l'expérience de *Newton*, pour prétendre que les couleurs varient par la réfraction. Pouvoit-il ignorer que cette expérience avoit réuſſi en Francc, par les ſoins de M. de *Polignac*, & qu'à différentes repriſes elle avoit été réitérée d'une maniere authentique en

(*a*) Mémoires de l'Académie, année 1737.

Angleterre. Quant au P. *Caſtel*, l'inſectateur perpétuel de *Newton*, on ſçait aſſez que dans cet homme célebre, l'imagination dominoit toutes les autres facultés; mais ce n'eſt pas avec de l'imagination qu'on combat des vérités établies par des expériences réitérées. Auſſi le P. *Caſtel* n'a-t'il rien moins que porté atteinte à aucune partie de l'édifice Newtonien, & ſon *Optique des couleurs* ne ſéduira, je penſe, aucun de ceux qui ont connoiſſance des faits que nous venons de raconter. S'il eſt encore aujourd'hui quelques contradicteurs de *Newton* en ce point, ce ſont des hommes qui montrent ſi peu de connoiſſance en Phyſique & en Mathématique, qu'on peut leur dire ce que dit *Xénocrate* à un perſonnage ſemblable, *Apage*, *apage*, *anſas Philoſophiæ non habes*.

Nous ne pouvons, à l'occaſion du Pere *Caſtel*, nous empêcher de dire un mot d'une idée à laquelle il a donné de la célébrité. C'eſt l'analogie des couleurs & des tons de la Muſique. Il y a dans l'image colorée que forme le priſme, ſept couleurs, de même qu'il y a ſept tons dans l'octave. Il y a plus: M. *Newton* a remarqué en meſurant avec ſoin les eſpaces occupés par chacune de ces couleurs, qu'ils ſont dans les rapports ſuivans, en commençant par le rouge, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$. Or ces nombres ſont ceux qui répondent continuellement aux différences de longueurs des cordes qui donneroient les accords *ré mi*, *mi fa*, *fa ſol*, *ſol la*, *la ſi*, *ſi ut*, *ut ré*; le rouge répondant à *ré mi*, l'orangé à *mi fa*, &c; de ſorte qu'il ſemble y avoir une game optique, comme il y en a une *muſicale*. M. *Newton* ſe ſert très-ingénieuſement de ces rapports pour déterminer quelle couleur doit réſulter d'un mêlange quelconque de tant d'autres primitives qu'on voudra en doſes données. Mais le Pere *Caſtel* allant bien plus loin, a trouvé dans cette analogie des couleurs & des tons, le fondement d'une muſique optique; & ce ſyſtême expoſé ſous le titre de *Claveſſin oculaire*, & avec l'eſprit & le feu d'imagination dont ſon Auteur étoit ſi bien pourvu, a fait beaucoup de bruit dans ſon tems. Que ne ſe promettoit pas le Pere *Caſtel* de ſon Claveſſin: rien moins qu'un nouveau ſpectacle auſſi délicieux pour la vue, que la plus harmonieuſe muſique, & la mieux exécutée, l'eſt pour les oreilles. Mais malheureuſement pour nos plaiſirs, car nous ne ſçaurions trop les multiplier, cette idée

eſt plus ſéduiſante que juſte, & examinée d'un peu près, elle manque dans tous ſes points. C'eſt ce qu'il me ſeroit facile d'établir, ſans les longueurs où cela m'entraîneroit. Ceux qui en douteront, n'ont qu'à lire un curieux Mémoire de M. de *Mairan*, inſéré dans le Recueil de l'année 1737. Ils ſeront certainement convaincus par les diſparités nombreuſes que ce ſçavant Académicien montre entre l'analogie des ſons & celle des couleurs, que l'entrepriſe du Pere *Caſtel*, eſt plus l'ouvrage de l'imagination, que de cette autre faculté de l'entendement qui peſe & qui réfléchit.

V I.

Théorie de la réflection & de la réfraction ſuivant Newton.

Nous avons maintenant à expliquer les raiſons que M. *Newton* donne de la réflection & de la réfraction. C'eſt-là un point ſur lequel il ne s'écarte pas moins de la doctrine juſqu'alors reçue des Philoſophes, que dans ſon analyſe des couleurs. Nous ferons ici ſans peine un aveu, ſçavoir que cette partie de ſa théorie n'a pas tout-à-fait la même évidence que celle que nous venons de développer. Elle eſt néanmoins fondée ſur des expériences très-ingénieuſes. Ce ſera par elles que nous commencerons, afin de préparer par degrés aux conjectures un peu hardies que forme M. *Newton*.

La premiere de ces expériences eſt celle dont *Grimaldi* ſe ſervoit pour prouver ce qu'il appelloit la *diffraction* de la lumiere. *Newton* fit un trou d'une 42e de ligne à une plaque de métal, & introduiſit par-là un filet de lumiere dans la chambre obſcure. Il expoſa à ce rayon un cheveu, & il remarqua que ſon ombre étoit beaucoup plus grande que celle que pouvoit produire la ſimple divergence des rayons qui l'effleuroient. Meſurée à dix pieds de diſtance, elle lui parut 35 fois plus grande qu'elle ne devoit être en n'ayant égard qu'à cette raiſon. On pourroit dire, & ſans doute quelque Phyſicien l'a dit, que cet effet eſt produit par une certaine atmoſphere des corps, qui rompt les rayons qui la traverſent en les écartant de la perpendiculaire Mais M. *Newton* détruit cette conjecture en remarquant que la même choſe arrive dans les cas où il ne ſemble pas y avoir lieu à une pareille atmoſphere, comme lorſque le cheveu eſt plongé dans l'eau & placé entre deux

glaces. M. *Newton* ſe contente d'en conclure que les rayons qui paſſent à une certaine diſtance du cheveu en ſont repouſſés, quels qu'en ſoit la cauſe & le méchaniſme, & qu'ils le ſont d'autant plus qu'ils en paſſent plus près.

Voilà une expérience qui indique une répulſion de la lumiere exercée par certains corps. En voici une autre qui ſemble dénoter un effet contraire. *Newton* reçoit un rayon de lumiere entre deux lames tranchantes & paralleles. Il les approche l'une de l'autre juſqu'à la diſtance d'un 400e de pouce, & voilà que cette lumiere ſe diviſe en deux parties qui ſe jettant de côté & d'autre dans l'ombre des couteaux, laiſſent entr'elles mêmes une ombre noire & épaiſſe. Il eſt viſible ici que ces rayons ont été dérangés de leurs cours rectiligne à leur approche du tranchant des couteaux, & qu'ils ont été pliés en dedans par une ſorte d'attraction. Delà *Newton* conclut, & il ſemble qu'on ne peut guere en conclure que cela, ſçavoir que les corps ſont doués d'une propriété qui les fait agir ſur la lumiere qui paſſe dans leur voiſinage, tantôt en l'attirant à eux, tantôt en la repouſſant; & comme l'on voit que cette force ne s'exerce qu'à une très-grande proximité, & que ſon action ne ſe fait point appercevoir à une diſtance ſenſible, il eſt encore naturel d'en inférer que ſa nature eſt de croître fort rapidement tandis que la diſtance diminue, c'eſt-à-dire, dans un rapport plus grand que l'inverſe de la diſtance ou de ſon quarré. Car puiſque cette ſorte d'attraction, qu'on nous permette ce terme dans le ſens que lui donne *Newton*, courbe ſi ſenſiblement, & dans un trajet ſi petit, le chemin d'un corpuſcule de lumiere dont la rapidité eſt ſi grande, il eſt aiſé de juger que cette force doit être d'une grande intenſité aux environs du contact. M. *Newton* trouve qu'elle ſurpaſſe pluſieurs milliers de fois celle de la peſanteur, c'eſt-à-dire, la force avec laquelle le même corpuſcule tend vers la terre; & delà il ſuit que cette force doit être de telle nature qu'elle croiſſe avec une grande rapidité tandis que la diſtance diminue, c'eſt-à-dire, dans un rapport beaucoup plus grand que l'inverſe du quarré de la diſtance. En effet, M. *Newton* démontre qu'un corpuſcule qui ſeroit pouſſé ou attiré vers un corps, ſuivant le rapport inverſe du cube, ou d'une plus haute puiſſance de la diſtance à chacune de ces particules, ſeroit attiré au contact

avec une force infinie, tandis qu'à la plus petite distance sensible, cette force ne seroit pas perceptible; ainsi il faut, si nous mesurons cette force qu'exercent les corps sur la lumiere, par une puissance de la distance, il faut, dis-je, qu'elle croisse dans un rapport beaucoup plus approchant de l'inverse du cube que du quarré. Par-là elle sera au contact, & à une très-grande proximité, plusieurs milliers de fois plus grande qu'à une distance tant soit peu perceptible, sans être néanmoins jamais infinie.

C'est de cette action des corps sur la lumiere, (quel qu'en soit le méchanisme, que M. *Newton* n'exclut point), c'est, dis-je, de cette action qu'il déduit les causes de la réfraction, & de la loi constante qu'elle observe. Concevons un rayon de lumiere qui tombe obliquement sur un milieu plus dense, & par conséquent plus attractif que celui dans lequel il se meut. Dès qu'il est arrivé à la distance où commence l'action du corps vers lequel il s'approche, il commence par les loix du mouvement à changer de direction, & à décrire une courbe concave vers le milieu attirant, à peu près comme nous voyons un corps lancé obliquement vers la terre, suivre un chemin concave vers elle, & la rencontrer avec moins d'obliquité que s'il eût suivi sa premiere direction imprimée. Arrivé à la surface même du corps, le corpuscule de lumiere continue encore à décrire un chemin curviligne & concave dans le même sens; car il est encore plus attiré vers l'intérieur que vers l'extérieur, jusqu'à ce qu'il se soit plongé d'une profondeur égale à l'éloignement où cesse l'action du milieu qu'il quitte. Alors toutes les attractions des particules environnantes étant égales, le corpuscule de lumiere continue à se mouvoir par une tangente à la trajectoire ECI, qu'il a décrite *Fig.* 132. en entrant, & cette droite est évidemment moins oblique à la surface réfringente.

On vient de voir un rayon qui en se rompant s'est approché de la perpendiculaire. Supposons pour donner un exemple d'une réfraction qui en éloigne, que ce corpuscule de lumiere traverse le corps, & en sorte pour rentrer dans le premier milieu D. Voici la route qu'il tiendra. Lorsqu'il sera arrivé à une distance de ce milieu, à laquelle l'attraction vers l'intérieur commence à excéder celle qu'il éprouve vers l'extérieur, la ligne qu'il décrira commencera à s'infléchir, & à tourner

ſa convéxité vers la ſurface dont il approche. Arrivé à cette ſurface, il continuera à être plus attiré vers l'intérieur que vers l'extérieur, & cela aura lieu juſqu'à ce qu'il ait pénétré dans le milieu D, à la diſtance où ceſſe l'attraction du milieu F. C'eſt pourquoi durant tout ce trajet, ſon chemin ſera encore convexe du côté du milieu qu'il quitte, & enfin il s'échappera par une tangente à cette courbe, tangente qu'on voit facilement être plus inclinée à la ſurface réfringente. Ainſi le rayon s'écartera de la perpendiculaire; & ſi cette ſurface eſt parallele à celle qu'il a traverſée en entrant, ſes directions à l'entrée & à la ſortie, ſeront paralleles. Cela eſt évident, puiſque ce corpuſcule paſſe en entrant & en ſortant, par les mêmes degrés de courbure, mais ſeulement en ſens contraire. Ajoutons que ſa vîteſſe ſera la même en rentrant dans le même milieu. On le voit auſſi évidemment dans le cas des deux ſurfaces réfringentes paralleles A B, *a b*. Il eſt vrai que lorſqu'elles ne ſont pas paralleles, la choſe n'eſt pas auſſi évidente, parce qu'alors les inclinaiſons à l'entrée & à la ſortie étant différentes, les courbes E C I, *e c i*, ne ſont pas égales & ſemblables. On le démontre néanmoins auſſi dans ce cas d'une maniere qui ne laiſſe aucun doute.

En admettant l'explication que nous venons de donner de la réfraction, on montre facilement pourquoi le ſinus de l'angle d'incidence, & celui de l'angle de réfraction, ſont conſtamment dans un même rapport. *Newton* en donne deux démonſtrations, l'une purement ſynthétique, à la fin du premier Livre de ſes *Principes*, l'autre dans ſon Optique. M. *Clairault* dans un excellent Mémoire qu'il a donné ſur ce ſujet en 1738, & dont on trouve auſſi la ſubſtance dans le Commentaire de Madame la Marquiſe du *Châtelet* ſur *Newton*, a donné à ſa maniere la démonſtration de cette loi. Il a recherché l'expreſſion de la trajectoire décrite par un corpuſcule de lumiere à l'approche d'une ſurface vers laquelle il eſt attiré perpendiculairement, & ſuivant une puiſſance quelconque de la diſtance. Il a enſuite déterminé le rapport des ſinus d'inclinaiſons du premier & du dernier élément de cette courbe, qui ſont les directions du rayon avant & après la réfraction, & il a trouvé que l'inclinaiſon primitive ne changeoit en rien ce rapport, qui ne dépend que de la vîteſſe du rayon incident, de la loi de l'attraction,

l'attraction, & de la denſité des milieux. Ainſi ces choſes étant toujours les mêmes, quoiqu'inconnues, tant que la réfraction ſe fait entre les mêmes milieux, il eſt évident que le rapport des ſinus ci-deſſus ſera conſtant. Paſſons maintenant à la réflection.

La réflection de la lumiere ne ſeroit pas un ſujet de difficultés, ſi elle étoit de la même nature que celle qu'éprouve un corps élaſtique & ſphérique qui frappe une ſurface impénétrable. Les principes ordinaires de la Méchanique ſeroient ſuffiſans pour en expliquer toutes les circonſtances. Mais lorſqu'on examine avec attention toutes les particularités du phénomene, on eſt conduit avec M. *Newton*, à ne plus regarder cette réflection, comme occaſionnée par le choc des particules de la lumiere contre celles des corps. Pluſieurs raiſons établiſſent cette ſorte de paradoxe. D'abord nous avons des exemples d'une réflection qui ſe fait ſans que la lumiere ait à rencontrer davantage de parties ſolides que dans le milieu qu'elle traverſe, ou même aucunes. Qu'on faſſe tomber un rayon ſur un priſme, de maniere qu'au ſortir de ſa ſurface poſtérieure, il ne faſſe que l'effleurer; en tournant encore tant ſoit peu ce priſme, on verra une partie des rayons, comme les bleus, les violets, ſe réfléchir, tandis que les rouges, les orangés, le traverſeront encore. Peut-on dire que les rayons bleus & violets rencontrent ſous la même inclinaiſon tant de parties ſolides, qu'ils ſe réfléchiſſent tous, tandis que les rouges, &c, n'en rencontrent aucunes? Il y a plus: ſi l'on fait cette expérience dans le vuide, c'eſt-à-dire, de ſorte qu'il n'y ait aucun air groſſier contre la ſeconde ſurface réfringente du priſme, la réflection contre cette ſurface ſe fera plus facilement; le rayon qui ſous une certaine obliquité paſſoit encore dans l'air, ne paſſera plus dans le vuide. Mais voici un nouveau phénomene. Si cette ſurface du priſme eſt contigue à de l'eau, ou à une lame de verre, le rayon ne ſe réfléchira plus ſous cette obliquité; il pénétrera dans l'eau ou dans le verre. Le vuide oppoſeroit-il au paſſage de la lumiere, plus de parties ſolides que l'air, que l'eau, que le verre même? Cette derniere expérience montre en même tems, combien peu l'on ſeroit fondé à dire que ce ſont les dernieres parties ſolides du verre qui réfléchiſſent la lumiere; car les corps contigus ne changeroient pas

la diſpoſition de cette derniere ſurface. Ajoutons à cela, que la ſurface des miroirs polis avec le plus de ſoin, n'eſt point aſſez égale pour réfléchir la lumiere avec la régularité & la vivacité que nous remarquons. Outre que le Microſcope nous fait appercevoir dans les miroirs les plus brillans des aſpérités très-irrégulieres, la raiſon nous apprend qu'il n'y a que les plus groſſieres qui puiſſent être enlevées par les moyens qu'on employe en les poliſſant. Si nous avions les yeux du ciron, ou de ces animaux encore plus petits, que le Microſcope fait découvrir, quel ſpectacle nous préſenteroit la ſurface la mieux polie; elle nous paroîtroit ſans doute telle qu'une vaſte plaine ſillonée & hériſſée de rochers preſque contigus, & de toutes les formes imaginables; comment peut-on donc concevoir qu'une ſurface ſi raboteuſe eu égard à la ténuité extrême des particules de la lumiere, pût les réfléchir avec régularité? Mais ſuppoſons encore que cette ſurface fût parfaitement réguliere; il faudroit que tous les corpuſcules de lumiere euſſent une forme ſphérique, & fuſſent doués d'élaſticité. On conçoit avec facilité comment une ſphere élaſtique ſe réfléchira contre un plan, en faiſant l'angle de réflection égal à celui d'incidence. Mais ſi ce corps eſt irrégulier, elliptique, cylindrique, tel enfin que la ligne tirée de ſon centre de gravité au point de contact, ne ſoit point perpendiculaire à la ſurface réfléchiſſante, il n'y aura plus d'égalité entre les angles d'incidence & de réflection. Or qui ſe perſuadera que toutes les particules de la lumiere ſoient élaſtiques & de forme ſphérique? Je n'ignore pas que l'on pourra dire avec *Malebranche*, que ce ſont de petits tourbillons dès-lors ſphériques & élaſtiques; mais c'eſt-là une pure hypotheſe, une ſuppoſition tout-à-fait précaire, & pour laquelle aucun phénomene ne dépoſe. Il n'en eſt pas ainſi des aſſertions de M. *Newton*. Il n'en avance aucune que pluſieurs expériences ou obſervations ne lui en fourniſſent un motif légitime.

La réflection ne ſe fait donc point par le choc des parties de la lumiere contre celles des corps. C'eſt une vérité reconnue aujourd'hui, de ceux-là même qui rejettent le ſurplus du ſyſtême Newtonien ſur la réfraction & la réflection. Quelle eſt donc la cauſe qui nous renvoye la lumiere? La voici, ſuivant M. *Newton*. Pour y arriver par degrés, imaginons un rayon

tombant obliquement ſur la ſurface d'un corps denſe, & tendant à en ſortir pour entrer dans un milieu plus rare qui le rompt en l'éloignant de la perpendiculaire. Il y a une certaine obliquité ſous laquelle la petite courbe E C I, que nous avons vu décrite par le corpuſcule de lumiere, ſera telle que ſon ſommet touchera la ligne L K, qui eſt le terme juſqu'où s'étend l'action du corps ſur la lumiere. Ainſi tout rayon moins oblique pénétrera dans le ſecond milieu; tout autre doit être réfléchi ne pouvant y pénétrer. Car dès que la courbe E C I, touchera la ligne L K, alors, ſuivant les loix de la Méchanique, le corpuſcule qui l'a décrite, ſera obligé d'en décrire une ſemblable & égale I *c e*, par l'action du corps qui l'attirera à lui; tout comme on voit un corps projetté obliquement à l'horizon en montant, décrire après être parvenu au plus haut, une demi-parabole égale & ſemblable à la premiere. Enfin tous les autres rayons plus obliques, ou ayant moins de vîteſſe décriront de ſemblables courbes, mais en pénétrant moins dans le ſecond milieu, ou même ſans l'atteindre. Car le corpuſcule qui décrit la ligne R *m* fort inclinée, n'eſt pas plutôt arrivé à une certaine proximité de la ſurface qui ſépare les deux milieux, que ſon chemin commence à ſe courber par les raiſons expliquées ci-deſſus, & lorſque la direction de ce chemin eſt devenue parallele à cette ſurface comme en *n*, alors le corpuſcule retiré en arriere, décrit une courbe *n o* égale & ſemblable à la premiere *m n*, & arrivé en *o* où ceſſe ſon attraction vers le dehors, il s'échappe par la tangente en *o*, & continue ſa route en ligne droite. C'eſt la ſimilitude de ces courbes de côté & d'autre, qui fait que l'angle de réflection eſt égal à celui d'incidence. Au reſte, tout cela occupe ſi peu d'étendue qu'on peut regarder la réflection & la réfraction, comme ſe faiſant dans un ſeul point. *Fig.* 133.

Nous venons d'expliquer avec ſuccès cette ſorte de réflection, & mettant à part tout attachement aux idées du célebre Philoſophe Anglois, nous penſons qu'il ſeroit difficile d'en rendre d'autre raiſon; mais celle que nous voyons ſe faire ſur la ſurface des corps opaques & polis, eſt-elle de la même nature? On doit le dire dans le ſyſtême que nous expoſons, & voici comment on le rend probable.

Nous avons vu dans les deux expériences rapportées au

commencement de cet article, que les corps agiſſent ſur la lumiere, tantôt en la repouſſant, tantôt en l'attirant fortement à eux. Il eſt à la vérité probable, que ces attractions & répulſions tiennent à un même principe, quel qu'il ſoit, & que ce ne ſont que deux manieres différentes dont la même puiſſance agit ſuivant les circonſtances. Quoi qu'il en ſoit, nous ſommes fondés à admettre dans les corps une puiſſance quelquefois répulſive, à l'égard des rayons de la lumiere. Suppoſons donc un corps dont les particules ſoient douées d'une pareille force. Lorſqu'un corpuſcule de lumiere s'approchera de ſa ſurface, s'il y arrive obliquement, ſon mouvement ſera infléchi, & ſe fera dans une courbe tournant ſa convexité à la ſurface réfléchiſſante, & dès que par l'action de cette force répulſive le corpuſcule de lumiere aura pris une direction parallele à cette ſurface, il ceſſera de s'en approcher, & décrivant une ſeconde courbe ſemblable à la premiere, il s'échappera par une tangente qu'on voit facilement devoir être autant inclinée en ſens oppoſé au plan réfléchiſſant, que la ligne d'incidence. Chaque rayon pénétrera d'autant plus dans le petit eſpace où s'exerce la répulſion, qu'il tombera moins obliquement; & comme cette répulſion croit beaucoup plus rapidement que ne diminue la diſtance, elle pourra avoir la force, non ſeulement de retarder le mouvement du rayon perpendiculaire, mais encore de le repouſſer en arriere. Tout cela eſt entiérement conforme aux loix de la Méchanique, ſi l'on admet le principe ci-deſſus; mais, nous n'en diſconviendrons pas, c'eſt dans ce principe que réſide la difficulté. Car admettre tantôt une puiſſance attractive, tantôt une puiſſance répulſive, c'eſt ce qu'il n'eſt pas aiſé de concilier avec les regles de la ſaine phyſique : & quant à ce que dit quelque part M. *Newton*, que de même que les quantités négatives commencent où finiſſent les poſitives, ainſi la répulſion commence où finit l'attraction, cela me paroît plus mathématique que phyſique, & plus ingénieux que ſolide.

Il me ſemble que pour réſoudre cette difficulté, on pourroit dire que les milieux diaphanes ſont ceux dont la contexture eſt telle qu'ils exercent une plus grande force d'attraction ſur la lumiere; car en admettant cette ſuppoſition, il ſera facile de voir que dans le contact d'un milieu tranſparent

avec un opaque, l'attraction du premier l'emportant ſur celle du dernier, l'excès de l'une ſur l'autre ſera une force équivalente à une répulſion exercée par celui-ci. Cette idée pourroit être davantage développée, & peut être miſe à couvert de diverſes difficultés que j'entrevois. Quoi qu'il en ſoit, M. *Newton* a tenté de rendre une raiſon méchanique de ces attractions & répulſions, dans les queſtions qui terminent ſon Optique. Il conjecture que ces effets pourroient bien être occaſionnés par l'action d'un milieu extrêmement élaſtique, répandu dans tous les corps, & qui remplit même les eſpaces vuides de tout corps ſenſible. Ecoutons-le lui-même dans la queſtion XVIII. « La chaleur, dit-il, n'eſt-elle pas communi-
» quée à travers le vuide par les vibrations d'un milieu beau-
» coup plus ſubtil que l'air, lequel milieu reſte dans le vuide
» après que l'air en eſt pompé? Et ce milieu n'eſt-il pas le
» même que celui qui rompt & qui réfléchit la lumiere, &
» par les vibrations duquel elle échauffe les corps, & eſt
» miſe dans des *accès de facile tranſmiſſion & de facile réfléxion,*
» *&c?* (On verra bien-tôt ce que *Newton* entend par-là). La
» réfraction de la lumiere, continue-t'il dans ſa queſtion
» XIX, ne provient-elle pas de la différente denſité de ce mi-
» lieu éthérée, en différens endroits, la lumiere s'éloignant
» toujours des parties du milieu les plus denſes? Et ſa den-
» ſité n'eſt-elle pas plus grande dans les eſpaces libres & vui-
» des d'air & d'autres corps plus groſſiers, que dans les pores
» de l'eau, du verre, du criſtal, des pierres précieuſes, &c?
» Car lorſque la lumiere paſſe au-delà du verre ou du criſtal,
» & que tombant fort obliquement ſur la ſurface du verre la
» plus éloignée, elle eſt totalement réfléchie, cette réflection
» totale, doit plutôt venir de la denſité & de la vigueur du
» milieu hors du verre & au-delà du verre, que de ſa ra-
» reté & de ſa foibleſſe? Ce milieu, dit-il, encore dans
» la queſtion XX, paſſant de l'eau, du verre, &c, dans
» d'autres corps plus rares, ne devient-il pas toujours plus
» denſe par degré, & ne rompt-il pas par ce moyen, les
» rayons de lumiere, non dans un point, mais en les pliant
» peu à peu en ligne courbe; & la condenſation graduelle de
» ce milieu ne s'étend-elle pas à quelque diſtance des corps,
» & ne produit-elle pas par-là les infléxions des rayons de la

» lumiere qui paſſent près de leurs extrêmités, & à quelque » diſtance ? » Ces endroits & pluſieurs autres ſont propres à juſtifier *Newton* de l'imputation ſi ſouvent répétée contre lui, de recourir à de nouvelles propriétés de la matiere pour expliquer certains phénomenes. Si dans quelques occaſions, il a paru pancher vers l'attraction, conſidérée comme propriété inhérente à la matiere, cela ne doit point nous ſurprendre. Il eſt naturel que dans une diſcuſſion hériſſée de tant de difficultés, quelquefois les unes prépondérent ſur les autres. Et cette eſpece de contradiction, qui indique un embarras à ſe décider, fondé ſur les difficultés qu'on entrevoit de toutes parts, eſt ſans doute plus digne d'un eſprit philoſophique, que la hardie confiance du Philoſophe qu'on met ſouvent en oppoſition avec *Newton*.

Il ſe préſente en ce lieu une queſtion qui mérite que nous en diſions quelques mots. Après avoir vu que les rayons diverſement colorés ſont inégalement réfrangibles, on a demandé quelle pouvoit être la cauſe de cet effet. On s'eſt partagé ſur cela ; les uns l'attribuant à la différente maſſe des particules de la lumiere, les autres à leur différente vîteſſe. Quant à moi, il me ſemble que pour répondre à une pareille queſtion, il faudroit avoir des connoiſſances que nous n'avons point encore. En effet, dans l'hypotheſe même de l'émiſſion de la lumiere, hypotheſe qui n'eſt pas ſans difficultés, il faudroit ſçavoir quelle eſt la nature de cette force, qui détourne la lumiere & produit la réfraction. Car ſi on la fait conſiſter dans une propriété inhérente à la matiere, il faudra dire que la différente réfrangibilité, eſt l'effet de la différente vîteſſe des particules de la lumiere. Ceux qui ont penſé le contraire, ne faiſoient pas attention que ſuivant les principes de la méchanique, un boulet de canon lancé obliquement avec la même vîteſſe & la même direction que la plus petite balle de plomb, ne décriroit pas une autre courbe, du moins en faiſant abſtraction de la réſiſtance de l'air. Or l'un & l'autre cas ſont abſolument ſemblables.

Mais fait-on conſiſter l'attraction dont il s'agit ici, dans l'action d'un fluide élaſtique, comme le ſoupçonne M. *Newton*, le cas ſera bien différent. Alors la différence des maſſes pourra, ou ſeule, ou conjointement avec la différence des

vîteſſes, produire la différente réfrangibilité. Car les particules les plus groſſes, pourront, toutes choſes d'ailleurs égales, être les moins dérangées. Ainſi dans cette ſuppoſition les rayons rouges peuvent être ceux qui ont le plus de maſſe.

Il nous reſte à parler de quelques expériences de M. *Newton*, d'un autre genre que les précédentes, & trop curieuſes pour que malgré l'obligation où nous ſommes d'abréger, nous puiſſions les omettre. Les voici : M. *Newton* prit un verre plan-convexe, & un autre convexe des deux côtés, & ayant ſon foyer à 50 pieds de diſtance. Il appliqua le dernier ſur le côté plan du premier, & les preſſant légérement l'un contre l'autre, il vit ſucceſſivement ſortir du centre divers anneaux colorés qui s'étendoient davantage en diametre, & ſe reſſerroient quant à leur largeur, à meſure qu'il preſſoit, juſqu'à ce que ces verres étant comprimés à un certain point, il ſe fit au centre une tache noire, après quoi il ne parut plus de nouvelles couleurs, & elles s'étendirent ſeulement en largeur & en diametre. Dans cet état l'ordre des couleurs dans chaque anneau allant du centre à la circonférence étoit celui-ci : le premier, *NOIR, bleu, blanc, jaune, rouge ;* le ſecond, *VIOLET, bleu, vert, jaune, rouge ;* le troiſieme, *POURPRE, bleu, vert, jaune, rouge ;* le quatrieme, *VERT, rouge ;* le cinquieme, *BLEU verdâtre, rouge ;* le ſixieme, *BLEU verdâtre, rouge pâle ;* le ſeptieme, *BLEU verdâtre, blanc rougeâtre.* Les mêmes phénomenes, & le même ordre des couleurs paroiſſent avec des verres de quelque convéxité qu'ils ſoient, à moins qu'ils ne ſoient portions de trop petites ſpheres, parce qu'alors ces anneaux colorés ſont trop reſſerrés, & ſe dérobent à la vue ; d'où l'on peut conclure que ce phénomene ne ſçauroit être l'effet du hazard, mais qu'au contraire il dépend d'une cauſe réglée & permanente.

Pour venir à bout de découvrir quelque choſe ſur ce ſujet, M. *Newton* ſe comporta avec ſa ſagacité ordinaire. Il meſura les demi-diametres de ces anneaux dans les endroits où ils paroiſſoient le plus éclatans, & après pluſieurs meſures réitérées, il trouva que leurs quarrés ſuivoient les rapports des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. Au contraire les demi-diametres des intervalles obſcurs entre chacun des anneaux, en commençant par la tache noire du centre, avoient leurs quar

rés dans les rapports des nombres pairs 0, 2, 4, 6, 8, 10, &c. Et comme l'un des verres étoit plan, il ſuit delà que les intervalles de ces verres, ou les épaiſſeurs des pellicules d'air qu'ils comprenoient dans les endroits qui formoient les anneaux lumineux, étoient dans les rapports de ces nombres impairs, tandis que ces épaiſſeurs aux anneaux obſcurs étoient comme les nombres pairs. M. *Newton* calcula enſuite, d'après le diametre de la convéxité de l'objectif ci-deſſus, qui étoit de 101 pieds, quelle étoit l'épaiſſeur réelle de chacune de ces couches d'air, & il trouva que celle de l'endroit le plus lumineux du premier anneau, étoit la 178000e d'un pouce ; par conſéquent celle du lieu le plus brillant du ſecond anneau, trois 178000es, & ainſi de ſuite. Il meſura pareillement les diametres de ces anneaux à chacune des couleurs, d'où par un calcul ſemblable il détermina l'épaiſſeur de la couche d'air réfléchiſſant chaque couleurs, & il en dreſſa une table. Il trouva ſenſiblement les mêmes réſultats, c'eſt-à-dire, les mêmes rapports de largeur, & les mêmes épaiſſeurs, en employant divers autres verres de convéxités connues, & à voir les précautions qu'il y a priſes, on ne ſçauroit douter que ces meſures ne ſoient auſſi exactes qu'il eſt poſſible de l'attendre du plus adroit obſervateur.

M. *Newton* fit enſuite gliſſer entre ſes deux objectifs une goutte d'eau ; cette goutte en y étendant fit reſſerrer les anneaux ſans changer leur ordre, dans le rapport de 7 à 8, d'où réſulte entre les épaiſſeurs de couches d'eau & d'air correſpondantes aux mêmes couleurs, celui de 3 à 4, qui eſt le rapport de la réfraction de l'eau dans l'air. Enfin pour reconnoître les couleurs que forment les pellicules d'un milieu plus denſe, environné de toute part d'un plus rare, il ſe ſervit d'une bouteille d'eau de ſavon ſoufflée avec un chalumeau, divertiſſement connu par tout des enfans, mais qui entre les mains de notre Philoſophe devint l'inſtrument d'une découverte remarquable. Ayant fait une pareille bulle, & l'ayant miſe à l'abri ſous un vaſe de verre très-tranſparent, il obſerva les ſuites de couleurs qui ſe forment ſur ſa ſurface, à meſure que le fluide s'écoulant en bas, elle s'amincit. Il vit les mêmes couleurs en ſens contraire que ci-deſſus, s'étendre annulairement du ſommet de la bulle, vers la circonférence

de

de la baſe où elles s'évanouiſſoient ; de ſorte qu'à meſure qu'elle s'aminciſſoit, elle donnoit par réflection les mêmes couleurs que la couche d'air ou d'eau interceptée entres les objectifs des expériences précédentes. La ſeule différence étoit que ces couleurs dans la bulle d'eau paroiſſoient beaucoup plus vives que dans la couche d'air ou d'eau dont nous venons de parler (*a*).

Les expériences précédentes nous conduiſent avec M. *Newton*, à former des conjectures fort probables ſur la cauſe de la couleur des corps. En effet, puiſque nous avons vu de petites lames d'air, d'eau, de verre, réfléchir différentes couleurs, à proportion qu'elles ſont moins épaiſſes, n'eſt-il pas naturel de faire dépendre la couleur d'un corps de la différente épaiſſeur, & la différente denſité des lames tranſparentes dont il eſt compoſé. Une couleur, par exemple, vive & telle que celle que M. *Newton* nomme du troiſieme ordre, parce qu'elle appartient au troiſieme anneau coloré, ſera produite par des particules qui, ſi elles ſont de la denſité de l'eau, auront une épaiſſeur égale aux 21 cent milliemes d'un pouce. Il ſuit encore des expériences de M. *Newton*, que plus la denſité de la lame réfléchiſſante eſt grande, plus la couleur eſt fixe, & invariable ſous quel angle qu'on la regarde, au lieu que ſi cette lame eſt peu denſe, comme la lame d'air entre deux objectifs, la couleur varie, de ſorte que ceci peut ſervir à rendre raiſon de la fixité & de l'eſpece de mobilité des couleurs de certains corps.

Mais ce n'eſt pas là la conſéquence la plus ſurprenante que nous offrent ces expériences. Elles nous montrent un phénomene fort ſingulier, ſçavoir que chaque rayon de lumiere, à ſon paſſage d'un milieu dans un autre, acquiert une certaine diſpoſition qui fait que tant qu'il reſte dans ce ſecond milieu, il eſt alternativement propre à être réfléchi ou à être tranſmis avec facilité à la rencontre d'un milieu différent, ſoit que cette diſpoſition réſide dans le rayon même, ou qu'elle ſoit l'effet des vibrations de ce milieu ſubtil & infiniment

(*a*) M. Mariotte a connu auſſi ces couleurs produites par des lames minces d'eau, de verre ou de talc ; mais ſes expériences ne ſont pas pouſſées loin comme celles de M. Newton, & les raiſons qu'il en donne ſont bien différentes. On peut lire ſur le même ſujet un Mémoire de M. Mazeas, inſéré dans le Recueil des Mémoires des Sçavans étrangers, T. II. Il eſt intéreſſant par les nouvelles expériences qu'a fait ce Phyſicien ſur ces couleurs & leur production.

élaſtique, auquel M. *Newton* penſe qu'on peut attribuer la cauſe de la réflection, de la réfraction, & même de la gravitation univerſelle. On voit, en effet, par les expériences ci-deſſus qu'un rayon de lumiere eſt réfléchi & tranſmis alternativement ſuivant que l'épaiſſeur de la plaque mince, eſt de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. qu'il eſt tranſmis aux épaiſſeurs 0, 2, 4, 6, &c. & réfléchi par les épaiſſeurs 1, 3, 5, &c. On a vu auſſi que la moindre de ces dernieres, ſçavoir celle qui eſt déſignée par 1, eſt pour une couche d'air entre deux verres, une 178000e d'un pouce. Ainſi il faut dire que ces alternatives de facile réflection ou tranſmiſſion, reviennent à des intervalles qui ne ſont pas plus grands, lorſque la lumiere paſſe du verre dans l'air, qu'une 178000e de pouce, & ces intervalles ſont, en vertu des mêmes expériences, plus courts dans l'eau que dans l'air, dans le rapport de 3 à 4; & encore plus courts dans le verre que dans l'eau, ſçavoir comme 8 à 9, qui eſt la raiſon des ſinus de la réfraction de l'un dans l'autre. Voilà, nous en conviendrons, une propriété bien ſinguliere, & bien capable d'exciter l'étonnement, je l'avouerai même, de faire des incrédules. Mais avant que d'en porter un jugement, il faut conſulter l'ouvrage de M. *Newton*, qui contient une foule d'expériences ſur ce ſujet, dont je n'ai pu donner ici qu'un eſquiſſe. Si l'on n'en revient pas convaincu, on en reviendra du moins pénétré d'admiration, pour le génie qu'on y voit éclater de toutes parts.

M. *Newton* a fait ſur les infléxions de la lumiere, des expériences qui ne ſont pas moins curieuſes, & qui le menent à des réſultats qui ne ſont pas moins extraordinaires. Quelqu'en ſoit le ſort, il ſuit bien certainement de ces expériences que, tout comme les rayons diverſement colorés ont des réfrangibilités inégales, de même ces rayons ſouffrent ſous même inclinaiſon des infléxions inégales; & c'eſt-là ce qui ſépare les couleurs, & qui produit dans l'ombre ces franges ſemblables à l'arc-en-ciel, que M. *Newton* examine avec tant de ſagacité dans ces expériences. Nous ne le ſuivrons pas dans cette partie de ſon ouvrage, parce que nous ne pourrions le faire ſans une exceſſive prolixité. D'ailleurs, c'en eſt aſſez ſur ces matieres, plus phyſiques que mathématiques, & nous allons nous reſſerrer plus étroitement dans les limites de notre

plan, & parler du Téleſcope à réflection, autre découverte de M. *Newton*, pour laquelle il a encore tant de droits à notre reconnoiſſance.

VII.

Du Téleſcope à réflection.

En annonçant le Téleſcope à réflection comme une découverte de M. *Newton*, nous ne prétendons pas qu'avant lui perſonne n'eût eu l'idée d'une pareille conſtruction. Dès qu'on eut remarqué qu'un miroir ſphérique concave, peint à une certaine diſtance de ſa ſurface une repréſentation des objets ſemblable à celle des lentilles convexes, il étoit aſſez naturel d'en conclure qu'un miroir devoit produire le même effet que l'objectif d'un Téleſcope, & d'imaginer cette nouvelle forme. Auſſi avons-nous vu au commencement de ce Livre, Jacques *Grégori* s'efforcer de conſtruire un Téleſcope à réflection; & même long-tems auparavant le Pere *Merſenne* en entretenoit *Deſcartes*, & auguroit de cette diſpoſition quelque degré de perfection pour les Téleſcopes. Mais notre Philoſophe ne goûta point cette idée, & il y trouva même divers inconvéniens (*a*). Il avoit raiſon en un ſens; car ſans la différente réfrangibilité des rayons, qui ne lui étoit point connue, le Téleſcope à réflection n'auroit pas le moindre avantage ſur celui à réfraction. Il n'auroit même pas l'avantage d'accourcir conſidérablement la longueur des lunettes. Car à même diſtance de foyer, les images peintes par un miroir concave & une lentille, ſont de même grandeur; mais pour avoir un miroir de même foyer qu'une lentille plan convexe, il faut que la ſphere dont il eſt portion, ait un diametre quadruple. D'ailleurs la difficulté de donner à un miroir le poli convenable, eſt incomparablement plus grande, que celle de travailler un verre d'égale perfection; d'où l'on peut voir combien peu l'on devoit attendre de cette nouvelle forme de Téleſcope, avant qu'on eut les raiſons qui ont déterminé M. *Newton* à la tenter de nouveau.

Ces raiſons ſont tirées de la différente réfrangibilité de la lumiere, & par conſéquent telles que quand même M. *Newton* n'eut eu aucune connoiſſance de l'ouvrage de *Grégori*,

(*a*) Lett. T. II. Lett. 29 & 32.

elles l'auroient également conduit à cette invention. En effet, *Newton* n'eût pas plutôt fait la découverte de cette nouvelle propriété de la lumiere, qu'il vit qu'il en naiſſoit une nouvelle cauſe de confuſion dans les images formées par les verres lenticulaires, & que cette confuſion, compagne preſque inſéparable de la réfraction, étoit bien plus grande que celle qui eſt cauſée par le défaut de la figure ſphérique, entant qu'elle ne peut réunir les rayons venant d'un point, préciſément dans un autre. Ce fut cette conſidération qui tourna les vues de *Newton* du côté de la réflection, qui n'a pas le même inconvénient que la réfraction. Mais étendons davantage ceci, pour la ſatisfaction du lecteur.

Afin de rendre ſenſible les effets de la différente réfrangibilité de la lumiere en ce qui concerne la diſtinction des images produites par les verres lenticulaires, imaginons deux rayons qui partent d'un point, & qui tombent ſur un pareil verre peu loin de l'axe. Chacun de ces rayons ſe diviſe en pluſieurs autres, dont les plus réfrangibles ont leur foyer le
Fig. 134. plus près de la lentille en F, & les moins réfrangibles en *f*; tous les autres de réfrangibilité moyenne tombent dans l'intervalle entre F & *f*. Si donc on préſente à ces rayons un plan, aux environs de *f* F, ils y formeront une image qui ſera, non un point, mais un cercle; & le plus petit de ces cercles, ou le plus petit eſpace où ces rayons puiſſent être réunis, ſera celui qui aura G I pour diametre. C'eſt-là ce qu'on nomme l'aberration des rayons. Or M. *Newton* ayant montré que les ſinus de réfraction des rayons qui différent le plus en réfrangibilité, ſont comme 77 à 78, on trouve que lorſque les rayons incidens ſont ſenſiblement paralleles, le petit eſpace F*f*, eſt environ la 27e partie de la diſtance du foyer du verre. D'où il ſuit que I F, ou I*f*, qui ſont ſenſiblement égales, ſont environ la 55e de cette diſtance, & par conſéquent le diametre G I du cercle d'aberration eſt environ la 55e partie de celui de l'ouverture du verre.

Voyons préſentement quelle eſt l'aberration cauſée par la figure ſphérique du verre. Cette aberration vient de ce que les rayons également réfrangibles, qui tombent ſur un verre convexe, à quelque diſtance ſenſible de l'axe, vont rencontrer cet axe plus près du verre que le foyer. (Car le foyer n'eſt que le

concours des rayons infiniment proches de l'axe :) & cette différence eſt d'autant plus grande que l'ouverture eſt plus conſidérable. M. *Newton* trouve que dans une lentille plan convexe de 100 pieds de foyer, & de 4 pouces d'ouverture en diametre, la largeur du petit cercle d'aberration, qui naît uniquement du défaut de la ſphéricité, n'eſt que la $\frac{961}{7200000}$ d'un pouce (*a*) ; tandis que celle du cercle d'aberration, cauſée par la différente réfrangibilité, eſt la 55e partie de l'ouverture, ou de quatre pouces. D'où il ſuit que celle-ci eſt 5450 fois plus grande que la premiere. Mais ſi n'ayant égard qu'à la partie la plus denſe de ce cercle, on en réduit avec M. *Newton* le diametre à une 250e de celui de l'ouverture, on trouvera encore que cette aberration eſt 1200 fois plus grande que celle qui naît du défaut connu de la ſphéricité.

On voit par-là que le défaut des Téleſcopes à réfraction, ne vient point de l'inaptitude de la figure ſphérique à réunir les rayons venant d'un même point préciſément dans un autre ; en vain corrigeoit-on l'aberration qui vient de cette cauſe, comme *Deſcartes* tentoit de le faire, en donnant aux verres une figure plus convenable ; on n'en ſeroit pas plus avancé. L'autre eſpece d'aberration, incomparablement plus grande, ſubſiſteroit encore, & il eſt évident que c'eſt elle qui eſt la cauſe de la confuſion des images, & de l'imperfection des Téleſcopes à réfraction.

Ce fut ce motif qui fit ſonger M. *Newton* à ſubſtituer la réflection à la réfraction. Car la réflection n'a point l'inconvénient de cette derniere. Les rayons, quoiqu'inégalement réfrangibles, ſe réfléchiſſent tous à angles égaux avec ceux d'incidence ; de ſorte que la réflection de la lumiere dans les miroirs concaves, eſt exempte de cette aberration qui ſuit néceſſairement le paſſage des rayons à travers les milieux réfringens. Les images formées par ces miroirs, ſont par cette raiſon incomparablement plus nettes & plus diſtinctes que celles que formeroient des lentilles de même foyer. La différence en eſt tout-à-fait frappante, comme l'obſerve M. *Hévélius* (*b*), & qu'il eſt facile à chacun de l'éprouver.

C'eſt en cela que conſiſte l'avantage & le principe du Té-

(*a*) M. Newton donne pour cela une regle qu'on peut voir dans ſon Optique.
(*b*) *Mach. celeſtis.* T. 1, p. 455 & ſuiv.

leſcope à réflection. Car il eſt aiſé de ſentir que ſi l'image formée par le miroir eſt incomparablement plus diſtincte que celle d'un verre, on pourra employer une oculaire d'un foyer beaucoup moindre, & par une ſuite néceſſaire le Téleſcope préſentera les objets conſidérablement plus groſſis. Un Téleſcope à réflection équivaudra à un de l'ancienne forme beaucoup plus grand. Tout ce raiſonnement de M. *Newton* a été parfaitement confirmé par l'expérience. Un Téleſcope de cinq pieds, conſtruit par M. *Hadlei*, ſuivant la forme Newtonienne, ſe trouva égaler en bonté, & même ſurpaſſer le Téleſcope de 123 pieds, dont M. *Huyghens* avoit donné l'objectif à la Société Royale de Londres.

M. *Newton* fit part de cette invention à la Société Royale, bien peu après ſa nouvelle théorie de la lumiere (*a*). Voici la conſtruction qu'il propoſoit, & qui differe en quelques points de celle qui eſt vulgairement uſitée aujourd'hui. ABCD, eſt un tube au fond duquel eſt placé un miroir concave, dont l'axe eſt directement coincidant avec celui du tube. Ce miroir peindroit, comme l'on ſçait, vers ſon foyer l'image de l'objet OM, vers lequel l'axe du Téleſcope eſt tourné; mais un peu avant ce foyer eſt placé un miroir incliné d'un angle de 45°, & qui renvoye l'image ci-deſſus ſur le côté, au devant d'une oculaire d'un très-petit foyer, placée en I. C'eſt à l'aide de de cette lentille que l'œil P conſidere cette image, & il voit l'objet groſſi en raiſon de la longueur du foyer de l'oculaire, à celle du foyer du miroir qui tient lieu d'objectif. M. *Newton*, après bien des peines, parvint à réduire ſon invention en pratique. Il ſe conſtruiſit entr'autres un Téleſcope de cette forme, dont le miroir concave de métal, étoit portion d'une ſphere de 12 pouces $\frac{2}{3}$ de rayon, & avoit par conſéquent ſon foyer à 6 pouces $\frac{1}{3}$. L'oculaire I, avoit entre $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$ de pouce de foyer, & par conſéquent le Téleſcope groſſiſſoit 32 à 38 fois l'objet en largeur; & produiſoit, à quelque défaut de clarté près, le même effet qu'un excellent Téleſcope à réfraction de trois pieds, c'eſt-à-dire, ſix fois auſſi long. Ce défaut de clarté venoit de la difficulté qu'il y a à polir ces miroirs concaves avec aſſez de perfection. M. *Newton* y en trouva

Fig. 135.

(*a*) Voy. *Tranſ. Phil.* n°. 81.

plus qu'on ne croiroit d'abord, auſſi-bien qu'à découvrir une compoſition de métal propre à cet effet. L'expérience lui apprit que les métaux en apparence les plus éclatans, ſont parſemés d'une multitude de pores qui interceptent beaucoup plus de lumiere qu'il ne s'en perd dans ſon paſſage à travers les deux ſurfaces d'un objectif de verre, & que le poli qu'il faut donner au métal pour produire quelque diſtinction, doit être beaucoup plus parfait que celui des verres; car les aberrations qui naiſſent de la réflection irréguliere, ſont, ſuivant M. *Newton*, ſix fois auſſi grandes que celles que produiſent les irrégularités du verre ſur la lumiere rompue.

Lorſque M. *Newton* eut publié, dans les *Tranſactions Philoſophiques*, ſon nouveau Téleſcope, il y eut en France un homme qui prétendit lui en diſputer l'invention. M. *Caſſegrain*, c'eſt le nom de ce rival de *Newton*, inféra dans le Journal des Sçavans de la même année (1672.) diverſes Pieces tendant à prouver qu'avant que le récit de l'invention de M. *Newton* eut paſſé la mer, il avoit imaginé un Téleſcope à réflection, & même ſupérieur à celui du Philoſophe Anglois. La conſtruction de ce Téleſcope étoit fort reſſemblante à celle de *Grégori*, excepté qu'au lieu du miroir concave, recevant la premiere image de celui qui eſt au fond du tube, il propoſoit de ſe ſervir d'un miroir convexe qui devoit réfléchir du côté de l'oculaire, cette image, & l'augmenter davantage. Ce Téleſcope étoit à celui de *Grégori*, à peu près ce que le Téleſcope batavique ou à oculaire concave, eſt au Téleſcope aſtronomique. M. *Caſſegrain* ou ſes partiſans trouvoient cette diſpoſition bien meilleure que celle de *Newton*. Et en effet, à la conſidérer dans la théorie, elle ſemble avoir quelques avantages ſur cette derniere. Car outre que le Téleſcope devient beaucoup plus court, le miroir convexe en diſpergeant les rayons, augmente l'image formée par le premier. M. *Newton* de ſon côté propoſa diverſes obſervations contre la conſtruction de *Caſſegrain*, & tenta de montrer qu'elle étoit ſujette à divers inconvéniens. Mais quelques-unes de ces obſervations iroient également contre la conſtruction de *Grégori*, qui réuſſit aujourd'hui très-bien entre les mains de divers Artiſtes. Comme celle de *Caſſegrain* n'a jamais été éprouvée, nous ne ſçaurions porter un jugement ſur les autres défauts que lui trouve M. *Newton*.

Quoique les eſſais que M. *Newton* avoit fait de ſon invention, fuſſent tout-à-fait propres à encourager les Sçavans & les Artiſtes, il s'eſt écoulé bien des années avant qu'on en ait tiré les avantages qu'elle promettoit, & il n'y a guere plus de 30 ans qu'on a commencé à la mettre en pratique. L'on doit le premier Téleſcope cata-dioptrique d'une longueur un peu conſidérable, à M. *Hadlei*, qui en conſtruiſit en 1718, un de cinq pieds de longueur. Ce Téleſcope égaloit celui de 123 pieds, dont *Huyghens* avoit autrefois donné l'objectif à la Société Royale. Depuis ce tems, divers Artiſtes ont marché ſur les traces de M. *Hadlei*, & ont conſtruit des Téleſcopes encore ſupérieurs. C'eſt ce qu'on verra avec plus d'étendue dans la partie ſuivante de cet ouvrage, où nous donnerons auſſi diverſes choſes intéreſſantes concernant ce Téleſcope & le Microſcope.

VIII.

De l'arc-en-ciel.

Une derniere branche de la théorie de M. *Newton*, qui doit trouver place ici, eſt l'explication de l'arc-en-ciel; car quoique nous ayons vu ailleurs qu'Antoine de *Dominis*, & *Deſcartes* ont découvert le chemin que tient la lumiere dans les gouttes d'eau pour produire ce merveilleux phénomene, il manquoit, comme nous l'avons auſſi déja dit, quelque choſe à leur explication. On voit bien dans celle de *Deſcartes*, pourquoi il doit paroître un arc lumineux, & même deux dans les nuages oppoſés au Soleil; mais on ne voit pas de même pourquoi ils doivent être colorés, & en ſens contraire. La raiſon complette de ce phénomene tient à la différente réfrangibilité de la lumiere, comme on va le montrer.

Il faut ſe rappeller pour cela que la raiſon pour laquelle on voit un arc lumineux d'une grandeur déterminée ſur les nuages pluvieux où ſe réfléchit la lumiere du Soleil, c'eſt que de tous les rayons de cet aſtre qui pénetrent les petites gouttes de pluie, & qui en ſortent après une ou deux réflections, il n'y a que ceux qui tombent ſur ces gouttes avec une certaine inclinaiſon, qui au ſortir ſoient paralleles entr'eux, & capables de porter à un œil placé au loin l'impreſſion de la lumiere. Tous les autres ſont tellement divergens, qu'ils ſont incapables de cet effet. Si la lumiere étoit toute de la même réfrangibilité,

gibilité, & ne portoit pas avec elle les couleurs dans leſquelles M. *Newton* l'a décompoſée, outre que l'arc lumineux ſeroit beaucoup plus étroit, il ſeroit encore ſans couleurs. Mais la différente réfrangibilité des parties différemment colorées de la lumiere étant admiſe, on rend facilement raiſon, & de ces couleurs, & de l'ordre qu'elles gardent entr'elles. Car ſuppoſons une goutte d'eau telle que A, que S B ſoit le petit faiſceau de rayons ſolaires, qui au ſortir de la goutte, doit affecter l'œil du ſpectateur ; ce faiſceau, à ſon entrée dans la goutte, commence à ſe décompoſer en ſes couleurs, & au ſortir de cette goutte, après une réflection & une ſeconde réfraction, il ſe trouve décompoſé en autant de petits faiſceaux diverſement colorés, qu'il y a de couleurs primitives. Mais afin d'éviter la confuſion, nous n'en mettrons que trois, comme D E, *de*, ſ ε, dont le moins réfrangible ſera le rouge, le ſecond le verd, le troiſieme le bleu. Le rayon rouge ſera donc D E, qui fait avec la perpendiculaire A D I de réfraction, le moindre angle ; *de* ſera le verd, & ſ ε le bleu & violet. *Fig.* 136.

Après cette analyſe de ce qui ſe paſſe dans chaque goutte d'eau, il eſt aiſé de ſentir que l'œil qui eſt affecté du rouge d'une des gouttes, ne ſçauroit appercevoir en même tems les autres couleurs ; car les faiſceaux diverſement colorés, étant diverſement inclinés, ne ſçauroient entrer dans le même œil. Celui qui apperçoit le rouge dans une des gouttes, ne peut donc voir le jaune que dans des gouttes inférieures, & le bleu que dans d'autres qui ſont encore au-deſſous. Ainſi le rouge occupera le bord extérieur, le jaune viendra enſuite, & le bleu formera la bande intérieure. Nous avons tâché de rendre cela ſenſible à l'aide de la figure 137. La même figure montre que le contraire doit arriver dans l'arc extérieur, & delà vient que les couleurs y ſont ſituées en ſens oppoſé à celles du premier. *Fig.* 137.

C'eſt auſſi la différente réfrangibilité qui ſert à rendre raiſon de la largeur de chacun de ces arcs. M. *Newton* ayant trouvé que les ſinus de réfraction, des rayons les plus réfrangibles, & des moins réfrangibles, ſont, en paſſant de l'eau de pluie dans l'air, dans le rapport de 185 à 182, le ſinus d'incidence étant 138 ; M. *Newton*, dis-je, a calculé quelle eſt

cette largeur (*a*), & il a trouvé que ſi le Soleil étoit ſans largeur ſenſible, celle de l'arc intérieur ſeroit de 2°, à quoi ajoutant 30′, pour le demi-diametre apparent du Soleil, la largeur totale ſeroit $2° \frac{1}{2}$. Mais comme les couleurs extrêmes, ſurtout le violet, ſont extrêmement foibles, elle ne paroîtra pas excéder deux degrés. Il trouve, d'après les mêmes principes, que la largeur de l'iris extérieure, ſi elle étoit également forte partout, ſeroit de 4°. 20′. Mais il y a encore ici une plus grande déduction à faire à cauſe de la foibleſſe des couleurs de cette iris, & elle ne paroîtra guere que de 3° de largeur.

M. *Hallei* eſt entré le premier dans une recherche fort ingénieuſe concernant l'arc-en-ciel. Il faut en donner ici une idée au lecteur. Nous avons vu que l'arc-en-ciel intérieur eſt formé par des rayons qui ſouffrent deux réfractions, entre leſquelles eſt une réflection. La ſeconde iris eſt formée par deux réfractions, dont la derniere eſt précédée de deux réflections. La nature s'arrête ici, ou plutôt faute d'organes aſſez délicats, nous n'appercevons pas d'autres arcs-en-ciel. Mais où s'arrêtent nos organes, l'eſprit ne s'arrête pas, & c'eſt une queſtion qu'on peut faire, quelles ſeroient les dimenſions des iris qui ſe formeroient par des rayons qui auroient ſouffert 3, 4, 5 réflections, &c, avant que de ſortir de la goutte d'eau. M. *Hallei* l'examine dans les *Tranſactions Philoſophiques* de l'année 1700, où il donne auſſi une méthode directe pour déterminer le diametre de l'iris, le rapport de la réfraction étant connu. Car il faut remarquer que la méthode de M. *Deſcartes*, étoit une ſorte de tâtonnement, & perſonne n'en avoit encore donné d'autre, ſi nous en exceptons M. *Newton*, dans ſon *Traité*, & ſes *Leçons Optiques*, qui n'avoient pas encore vu le jour.

M. *Hallei* examine donc la queſtion plus directement, & il trouve que la premiere iris eſt produite par des rayons incidens dont l'angle d'inclinaiſon eſt tel que l'excès du double de l'angle rompu correſpondant ſur cet angle d'inclinaiſon, eſt le plus grand qu'il eſt poſſible: la ſeconde iris eſt formée par des rayons tels que l'excès du triple de l'angle rompu ſur celui d'inclinaiſon, eſt pareillement le plus grand; la troiſieme, par des

(*b*) Voy. *Lect. Opt.* ad fin.

rayons tellement inclinés à leur entrée, que le quadruple de l'angle rompu ſurpaſſe le plus qu'il eſt poſſible l'angle d'inclinaiſon, &c. en prenant un multiple de l'angle rompu qui ſurpaſſe de l'unité le nombre des réflections. Dès-lors voilà le problême ſoumis à l'art de l'Analiſte; il ne s'agit plus que de déterminer quel eſt l'angle d'inclinaiſon, tel qu'un certain multiple donné de ſon angle rompu correſpondant, le ſurpaſſe d'un excès qui ſoit le plus grand qu'il ſe puiſſe. M. *Hallei* trouve pour ces angles d'incidence & leurs angles rompus correſpondans, une formule fort générale. En nommant i & r, les ſinus des angles d'incidence & rompu, & 1 le ſinus total, le ſinus d'incidence pour la premiere iris, ſera $\sqrt{(\frac{4}{3} - \frac{ii}{3rr})}$, pour la ſeconde $\sqrt{(\frac{9}{8} - \frac{ii}{8rr})}$, pour la troiſieme $\sqrt{(\frac{16}{15} - \frac{ii}{15rr})}$, pour la quatrieme ce ſera $\sqrt{(\frac{25}{24} - \frac{ii}{24rr})}$, &c. La progreſſion eſt facile à appercevoir; car les nombres 4, 9, 16, 25, ſont les quarrés de 2, 3, 4, 5 qui déſignent le nombre des réflections augmenté de 1, & les dénominateurs 3, 8, 15, &c. ſont ces mêmes quarrés diminués de l'unité. Mais l'angle d'incidence des rayons étant donné, il ſera facile de trouver l'angle rompu, puiſque la raiſon de la réfraction eſt donnée; & enfin de ces deux angles il eſt facile de dériver celui ſous lequel le rayon ſortant de la goutte, rencontre le rayon incident (*a*). Or celui-ci, à cauſe de l'immenſe éloignement du Soleil, eſt ſenſiblement parallele à la ligne tirée de cet aſtre, par l'œil du ſpectateur, au centre de l'iris; d'où il ſuit que cet angle meſurera le rayon de l'iris, à compter du point diamétralement oppoſé au Soleil, ſi le nombre des réflections eſt impair, (comme dans la premiere, la troiſieme, la cinquieme iris), ou du Soleil même, ſi ce nombre eſt pair, comme dans la ſeconde, la quatrieme, la ſixieme, &c. C'eſt-là la regle que donne M. *Hallei*, & il trouve par-là que la premiere iris a un rayon de 42°, 30′; la ſeconde de 51°, 55′, l'une & l'autre à compter de l'oppoſite au Soleil, comme l'obſervation l'a déja montré; que la troiſieme, ſi elle paroiſſoit, ſeroit éloignée de cet aſtre,

(*a*) Il n'y a qu'à multiplier l'angle rompu par le nombre des réflections augmenté de l'unité, & en ôter l'angle d'incidence.

de 40°, 20′; la quatrieme de 45°, 33′, &c. Ce peu d'éloignement du Soleil & des arcs-en-ciel de la troiſieme & la quatrieme claſſe, eſt probablement ce qui a empêché juſqu'ici d'en voir aucun. J'omets, pour ne pas tomber dans une trop grande prolixité, diverſes autres choſes intéreſſantes que contient l'écrit de M. *Hallei*. Le même problême a été traité par M. *Herman* (*a*), qui atteſte M. *Bernoulli*, qu'il en avoit trouvé la ſolution, avant que d'avoir pu connoître celle de M. *Hallei*. On en trouve auſſi une ſolution dans les Œuvres du même M. *Bernoulli*. Enfin l'on en lit une qui m'a paru très-claire & très-élégante dans l'Optique de M. le Marquis de *Courtivron*. Voici pour terminer cet article quelques obſervations curieuſes ſur l'arc-en-ciel.

Ce n'eſt pas ſeulement le Soleil qui forme des arcs-en-ciel dans les vapeurs ou les gouttes de pluie qui lui ſont oppoſées. La Lune en produit auſſi quelquefois; il eſt vrai qu'ils ſont fort rares & fort foibles, & l'on doit bien s'y attendre, vu la foibleſſe de ſa lumiere. Les Sçavans nous en ont tranſmis néanmoins quelques obſervations. *Ariſtote* dit en avoir vu deux de ſon tems. Divers autres Auteurs, comme *Gemma Friſius*, *Sennert*, *Snellius*, & le Docteur *Plot*, diſent avoir été témoins du même phénomene. On ſoupçonne, à la vérité, quelques-uns de ces Ecrivains de s'être mépris, & de nous avoir donné pour des arcs en-ciel lunaires, de ſimples halons ou couronnes autour de la Lune, ce qui n'eſt rien moins que rare. Mais depuis le commencement de ce ſiecle, on a des obſervations plus certaines, qui prouvent que la Lune jouit quelquefois du privilege du Soleil. Suivant les *Tranſactions Philoſophiques*, n°. 331, on vit en 1711 un arc-en-ciel lunaire, bien coloré & bien décidé dans le Comté de Derby. M. *Weidler* en a vu un en 1719, foible, & dans lequel les couleurs pouvoient à peine ſe diſcerner. M. *Muſchembroek* en a auſſi vu un en 1729, mais il n'y put diſcerner d'autre couleur que le blanc. L'on en a vu un jaune à Iſſelſtein en 1736 (*b*). On lit enfin dans le Journal de Trévoux du mois d'Août 1738, qu'on en avoit récemment vu un à Dijon très-bien coloré, & ſeulement avec moins de vivacité que ceux que forme le Soleil.

(*a*) Nouvelle de la République des Lettres, 1704.
(*b*) Eſſai de Phyſique de M. Muſchembroeck, p. 819.

M. *Hallei* a fait une fois l'obſervation d'un arc-en-ciel fort extraordinaire (*a*). Outre les deux qu'on voit ſouvent, il y en avoit un troiſieme, qui ayant même baſe que l'intérieur, s'élevoit beaucoup plus, & non ſeulement atteignoit l'extérieur, mais le coupoit en trois portions à peu près égales; il étoit auſſi vif que le ſecond, & avoit ſes couleurs dans le même ordre que le premier. M. *Hallei* ſoupçonne avec raiſon que ce troiſieme arc-en-ciel étoit formé par l'image du Soleil qui ſe peignoit dans une riviere, ſçavoir la D*ee*, qu'il avoit à dos. Et en effet toutes les circonſtances du phénomene s'expliquent très-exactement par-là.

Le phénomene que nous venons de voir eſt plus aiſé à expliquer que le ſuivant, qui eſt auſſi rapporté dans les *Tranſactions* de l'année 1666. Il eſt queſtion de deux arcs-en-ciel, dont l'extérieur au lieu d'être concentrique à l'intérieur, le coupoit latéralement. Je ſoupçonne que l'un étoit produit par le Soleil, l'autre par un parhélie, ou par la réflection de l'image du Soleil ſur un nuage éclatant, dont la poſition de l'obſervateur l'empêchoit de s'appercevoir. On peut voir dans les *Tranſactions Philoſophiques* de l'année 1721, quelques autres obſervations d'arcs-en-ciel extraordinaires, mais dont l'examen nous meneroit trop loin.

Ceux de nos lecteurs qui n'ont pas lu cet ouvrage de ſuite, s'étonneront peut-être de notre ſilence ſur les cauſtiques, courbes célebres de l'invention de M. *de Tſchirnhauſen*. Cette théorie paroît en effet appartenir à l'Optique. Néanmoins quand on y réfléchira plus attentivement, on reconnoîtra que quoiqu'elle tire ſon origine de la réfraction & de la réflection, elle tient encore plus à la Géométrie abſtraite & ſublime. C'eſt par ce motif que nous lui avons donné place dans le Livre VI. de cette Partie, auquel le lecteur trouvera bon que nous le renvoyons.

(*a*) *Tranſ. Phil.* ann. 1698, n°. 240.

Fin du ſecond Volume.

ADDITIONS ET CORRECTIONS du ſecond Volume.

Page 34, *ligne* 37, en réduiſant, *liſez* que d'avoir réduit.

Page 54. Le Traité du triangle arithmétique de M. Paſcal eſt un ouvrage poſthume qui ne parut qu'en 1665.

Page 58, *ligne* 17, le ſinus, *liſez* l'ordonnée.

Page 64, *ajoutez à l'article de Grégoire de Saint-Vincent, ce qui ſuit.* Le P. de *Saint-Vincent* étoit de Bruges, où il naquit en 1584. Il profeſſa long-temps les Mathématiques au College Romain. Il mourut en 1667.

Nous ne quitterons pas la Flandre ſans faire encore mention d'un Géometre de réputation qui y fleuriſſoit vers le même temps. C'eſt le P. Tacquet, Jéſuite. Ce Mathématicien habile, tâcha auſſi de reculer les bornes de la Géométrie dans ſon Livre de *Annularibus & cylindricis*. Je remarquerai cependant qu'il y a dans cet ouvrage beaucoup plus d'affectation à démontrer rigoureuſement des choſes peu difficiles, que de nouvelles vérités, ſurtout après ce que Cavalleri & le P. de Saint-Vincent avoient déja démontré. On doit au P. Tacquet divers Traités, dont la plûpart ont été raſſemblés après ſa mort, en un volume in-folio ſous le titre de *Andreæ Taqueti Antuerpienſis Op. Math.* C'eſt une collection principalement recommandable par ſa clarté. Ce Géometre étoit d'Anvers, où il prit naiſſance vers 1601, & il y mourut en 1660.

Page 76, *ligne* 23, l'éclaircir, *liſez* éclaircir.

Page 80, *ligne* 11, *placés* ſçavoir, *au bout de la ligne.*

Page 108, *ligne* 36, inférieur, *liſez* inférieur au plus haut.

Page 130, *ligne* 2, ſi le lieu, *effacé* ſi.

Page 136, *ligne* 30, $= 0$, *liſez* y. Ce qu'on a dit à la fin de cette page, & dans la ſuivante juſqu'au premier alinea, eſt inutile, & n'eſt fondé que ſur une erreur de calcul. La regle de M. de Fermat, & celle de M. Hudde, donnent également les deux valeurs $x = 0$, $x = 2a$; ce qui apprend qu'il y a deux *maxima* répondans à ces deux abſciſſes, & de ces deux *maxima*, l'un eſt poſitif, & l'autre négatif; ainſi qu'on voit dans la figure 60.

Page 142. La méthode de M. Craig expoſée dans cette page, mérite, à bien des égards, les éloges que nous lui donnons. Cependant nous en avons depuis rencontrée une autre meilleure, & plus commode. C'eſt celle que M. Herman a expoſée dans les *Mémoires de Petersbourg* de l'année 1737, ſous le titre: *De locis Geometricis ad mentem Carteſii conſtruendis.* C'eſt le jugement qu'en ont porté tous ceux à qui je l'ai indiquée.

Page 181, *ligne* 9, trois à quatre, *liſez* 4 à 3.

Page 207, *ligne* 13, de, *liſez* pour.

Page 210. Comme ce qu'on dit ici ſur l'anomalie eſt un peu trop ſuccinct, nous l'allons étendre & l'éclaircir. On a appellé anomalie dans

l'Aſtronomie ancienne, la diſtance du Soleil, ou d'une planete quelconque, à ſon apogée. L'anomalie moyenne étoit cette diſtance vue du centre de l'excentrique, ou l'angle formé par la ligne menée de ce centre à l'apogée, avec la ligne menée du même point à la planete. L'anomalie vraie étoit cette diſtance vue du lieu excentrique occupé par la terre, ou l'angle formé par les deux lignes tirées de la terre, à l'apogée, & à la planete. La différence de ces deux angles, étoit ce qu'on nommoit la *proſtapheresſe*, qu'il falloit tantôt ajouter au lieu moyen, tantôt en ſouſtraire pour avoir le lieu vrai ou apparent. Dans l'Aſtronomie moderne, l'anomalie eſt un peu autre choſe. L'anomalie vraie eſt bien l'angle A S T, formé par la ligne des apſides, & la ligne tirée du foyer à la planete; mais l'anomalie vraie eſt meſurée par le ſecteur A S T A, parce que c'eſt ce ſecteur ſeul qui croiſſant proportionnellement au temps, croit également en temps égaux. C'eſt pourquoi afin de conſerver l'ancienne forme des Tables, on a ſuppoſé l'aire entiere de l'ellipſe égaler 360°, & on a calculé en degrés & parties de degré, l'aire de chaque ſecteur A S T A. Mais comme, en prolongeant l'ordonnée T E juſqu'au cercle, il y a même raiſon de l'ellipſe entiere au cercle, que du ſecteur A S T au ſecteur A S D, delà vient qu'on a pris le rapport du ſecteur A S D au cercle pour l'anomalie moyenne. Ainſi l'anomalie moyenne étant donnée, il s'agit d'abord, pour trouver l'anomalie vraie, de déterminer le ſecteur A S D, qui ſoit au cercle entier, comme le nombre de degrés donné eſt à 360°. Cela exécuté, tout eſt fait; car on aura alors l'angle A S D, & cet angle étant trouvé, on aura A S T, ou l'anomalie vraie, puiſque le rapport de E D à E T eſt donné, ce rapport étant le même que celui du grand au petit axe de l'orbite.

Page 211, *ligne* 13, diſtances, *ajoutez* à ce point.

Page 239, *ligne* 31, trouverent, *liſez* tournerent.

Page 242, *ligne* 28, d'une, *liſez* une.

Page 253, *ligne* 25, que, *liſez* ſçavoir que.

Page 270, *ligne* 35 & 36, du levier, *liſez* de la longueur du bras de levier.

Page 279, *en marge*, de la terre, *liſez* de l'air.

Page 286, *ligne* 17, elle, *liſez* il.

Page 290, *ligne* 30, *ſupprimés* été.

Page 295, *ligne* 28, ne diſons, *liſez* nous ne diſons.

Ibid. divers, *liſez* diverſes.

Page 306, $\frac{1}{1,2.}$, *liſez* $\frac{1}{1.2.} \times \frac{1}{1.6.}$.

Page 310, *ligne* 22, A B *a*, *liſez* B *b a*.

Page 311, *ligne* 1, *b* A, *liſez* B *a*.

Page 320, *ligne pénultieme*, E *e*, *liſez* E *c*.

Page 323, *not. col.* 2, *ligne* 13, *liſez* $\dot{z} : n \propto \frac{n-1}{n}$.

Page 333, *ligne* 11 & 12, au lieu des ſuites $t \pm t^3$, &c. ce ne ſont que les moitiés.

Page 349, *ligne* 30, dès-lors, *liſez* dès leur naiſſance.

Page 359. L'ouvrage de M. de l'Hôpital a eu preſque les honneurs du commentaire. M. Varignon en a éclairci les endroits un peu difficiles par ſes *notes & éclairciſſemens ſur l'analyſe des infinimens petits*, (Paris 1725. in-4°.). M. de Crouzas donna auſſi en 1721, un Commentaire ſur le même ouvrage; mais, ſoit dit ſans déroger au mérite de cet Auteur eſtimable à d'autres égards, c'eſt un très-mauvais Livre, un Livre qui n'eſt bon qu'à donner de fauſſes idées au lecteur qui croiroit s'en aider pour entendre celui de M. de l'Hôpital. Voyez ſur cela une Lettre de M. Jean Bernoulli. *Op. T. IV.*

Page 365, *l.* 16, $y = \sqrt{ax}$. $y = \sqrt{ax}$, *liſ.* $y = \sqrt{ax}$. $y = -\sqrt{ax}$.

Page 377, *ligne* 8, de A en B, *liſez* de C en D.

Page 384. C'eſt dans les *Saggi d'Eſperienze* de l'Académie *de Cimento*, qu'on revendique au fils de Galilée l'application du pendule à regler les Horloges.

Page 413, *ligne* 10, B*b*, *liſez* β*b*.

Page 424, *ligne* 26, F E, *liſez* F P.

Page 425. La courbe S P E D, dont il eſt queſtion dans cette page, eſt celle dont les ordonnées S D, P E, ſont proportionnelles aux forces de peſanteur en S & P, Sur quoi le lecteur eſt renvoyé aux pages 422 *& ſuivantes.*

Page 438, *ligne* 4, CD *liſez* ED.

Page 456, *ligne* 35, parallele, *ajoutez* à l'horizon.

Page 496. Quelques perſonnes ſe ſont aviſées de nommer cette ellipſe la *Caſſinoïde*, voulant par cette terminaiſon grecque, dire en un mot la figure ou la courbe de M. Caſſini. Mais cela eſt tout-à-fait mal imaginé. On dit ſphéroïde, conchoïde, &c. pour dire qui a la reſſemblance d'une ſphere, d'une coquille, &c. C'eſt le ſeul ſens du mot Εἶδος, d'où ces mots & tous leurs ſemblables ſont dérivés. Ainſi la Caſſinoïde ne veut pas dire la courbe de M. Caſſini, mais la figure qui reſſemble à M. Caſſini.

Page 497. *Terminez le premier dlineâ par ces mots.* Cette remarque eſt due à David *Grégori*, qui la fait dans ſes *Aſtronomiæ Phyſicæ & Geometricæ elementa.*

Page 514, *ligne* 37, lettres, *liſez* lignes.

Page 517, *ligne* 30, $9''$, *liſez* $9'$.

Page 557, *ligne* 16, avoir lieu, *liſez* avoir égard.

Page 561, *ligne* 14, *liſez* l'action du Soleil ſur la Lune & la terre.

Page 621, *ligne* 19, celle, *liſez* la néceſſité.

Page 635, *ligne* 18, ci-deſſus L K, *liſez* qui ſépare les milieux.

Ibid. ligne 24, L *m*, *liſez* R *m*.

TABLE

Fig. 3.

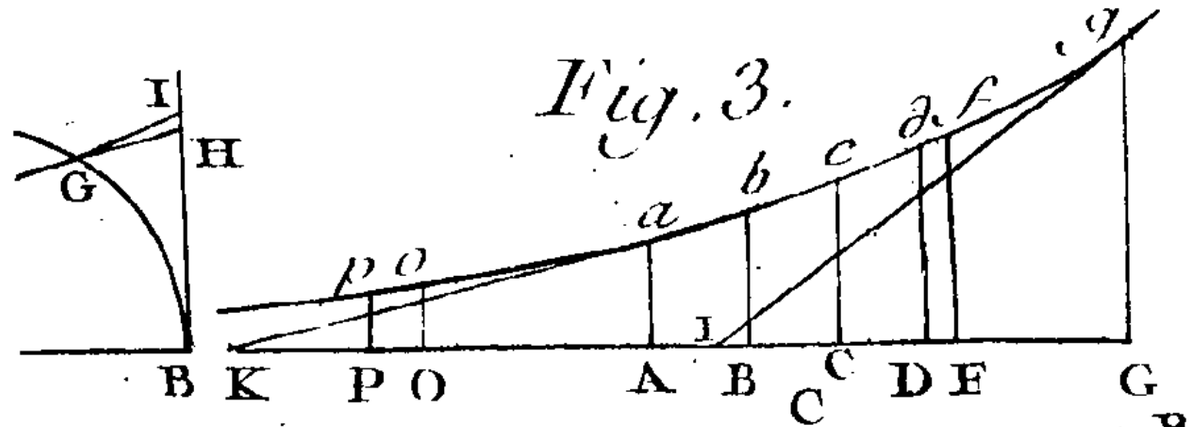
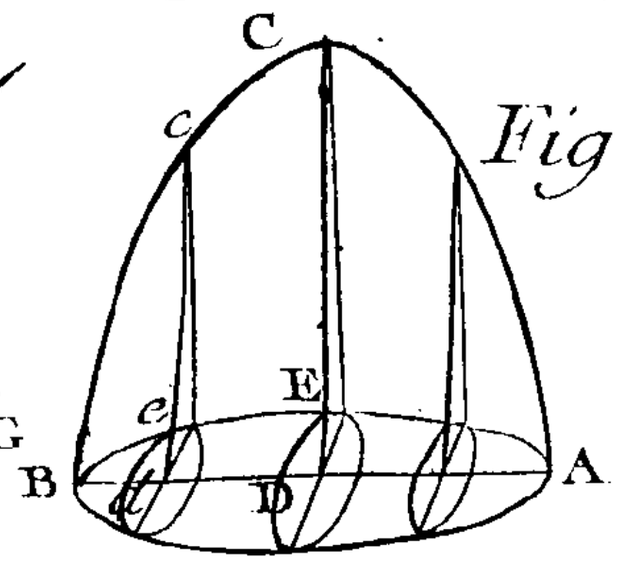
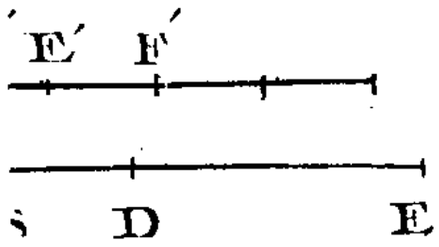


Fig 4





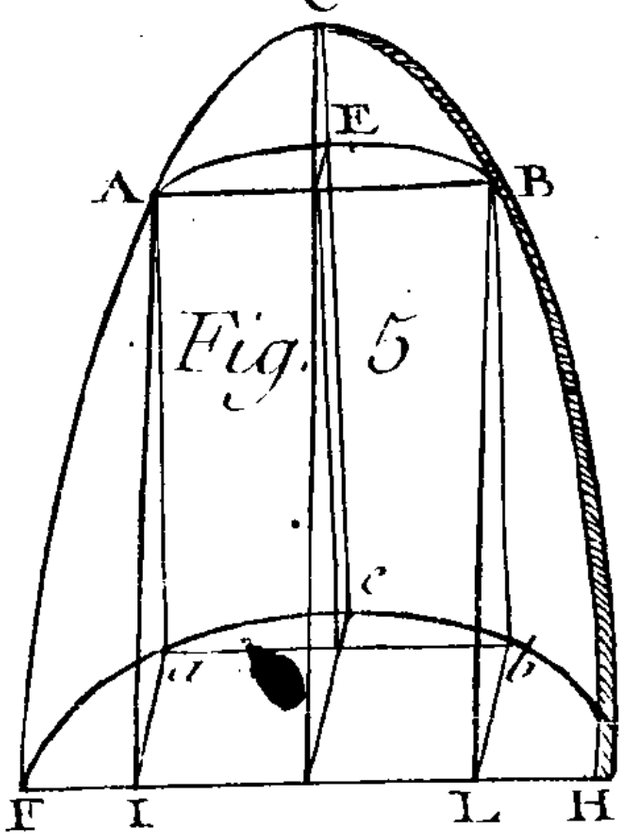
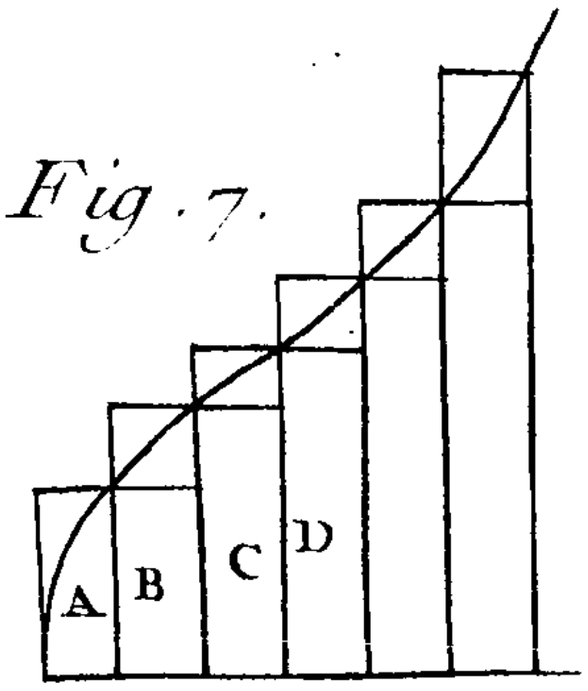
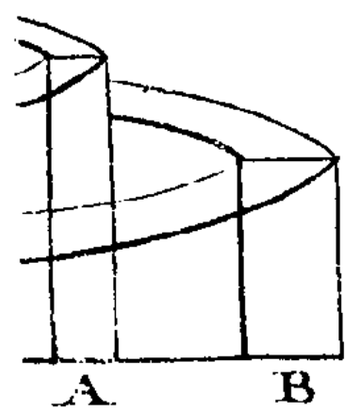


Fig. 5

Fig. 7.





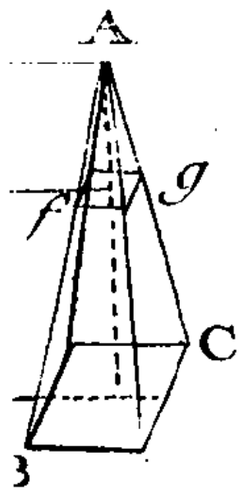


Fig. 9.

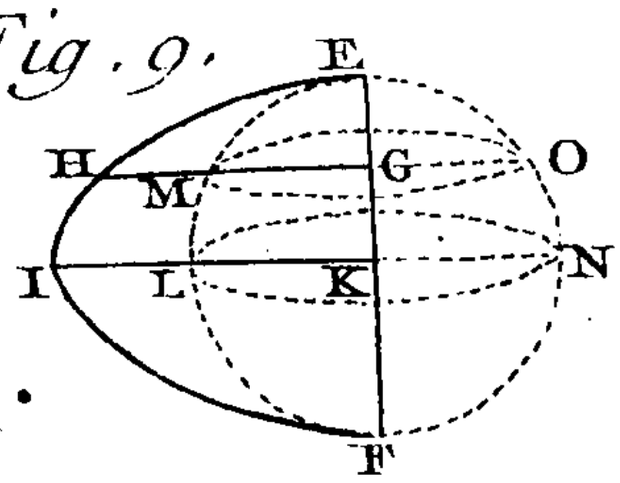
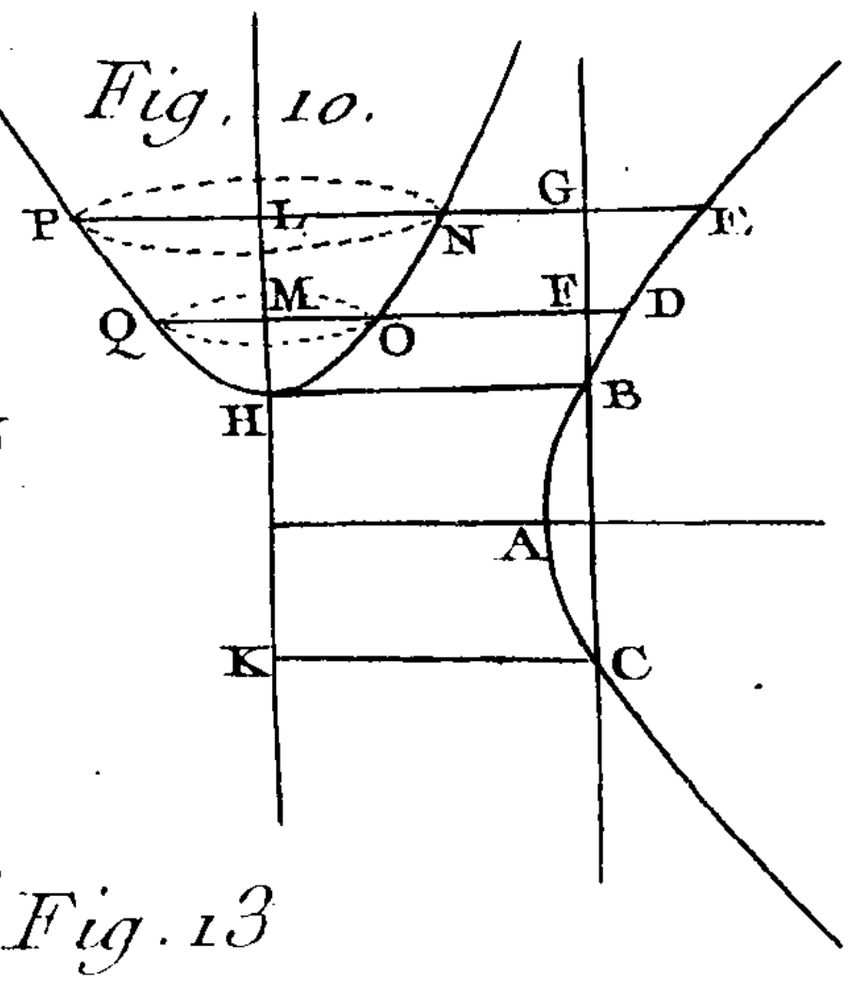


Fig. 10.



D

Fig. 13

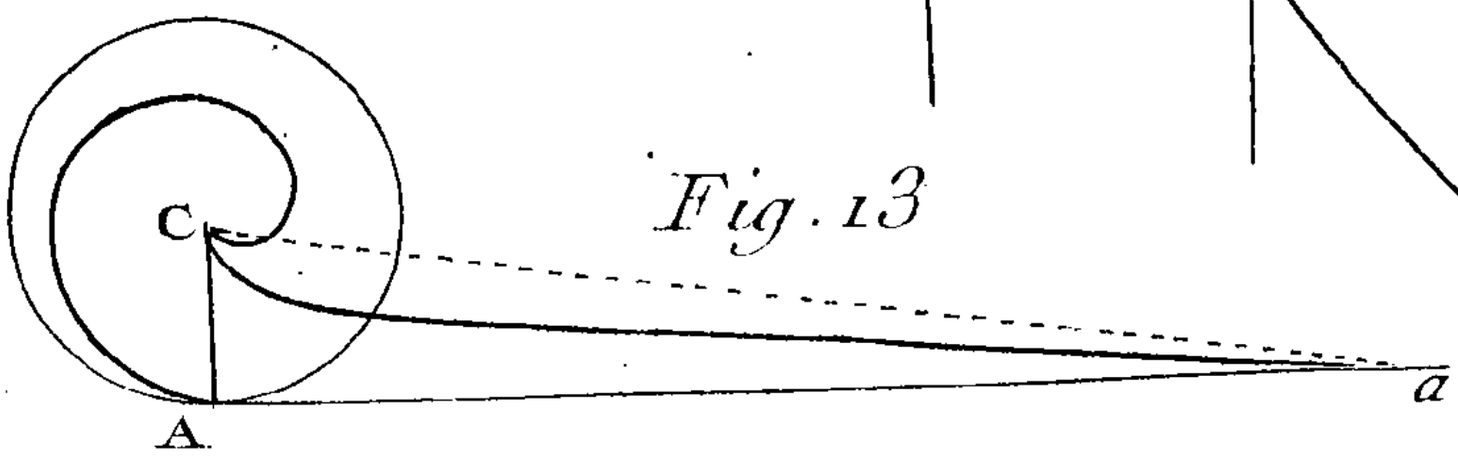


Fig 14

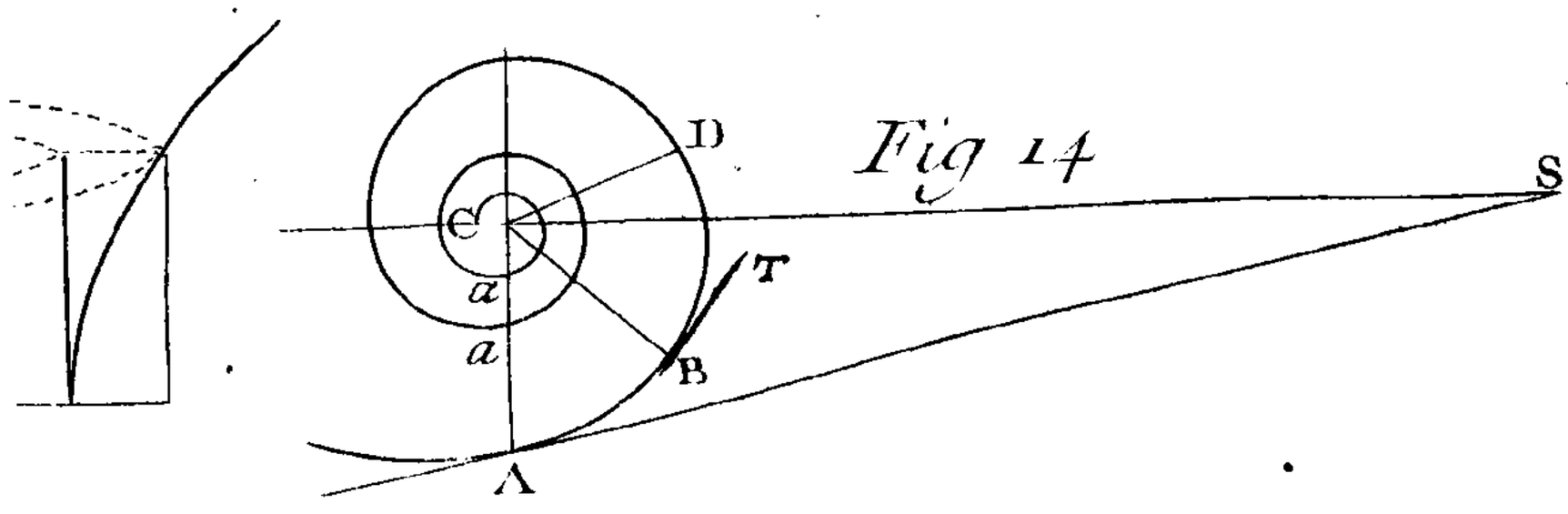


Fig. 1.

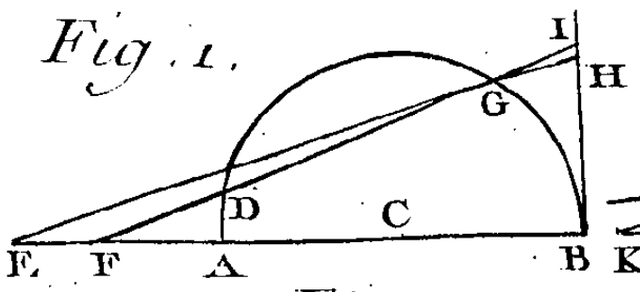


Fig. 3.

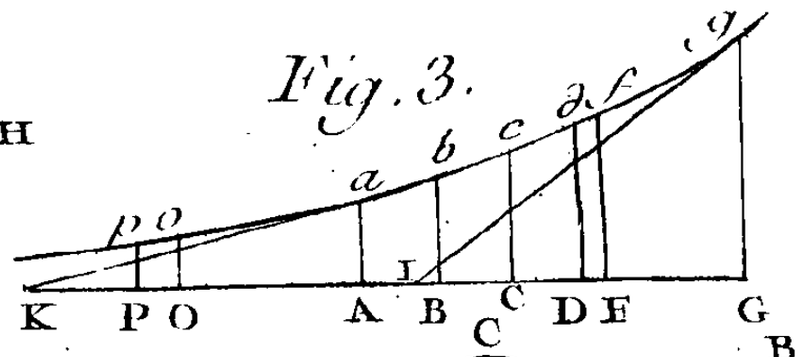


Fig 4

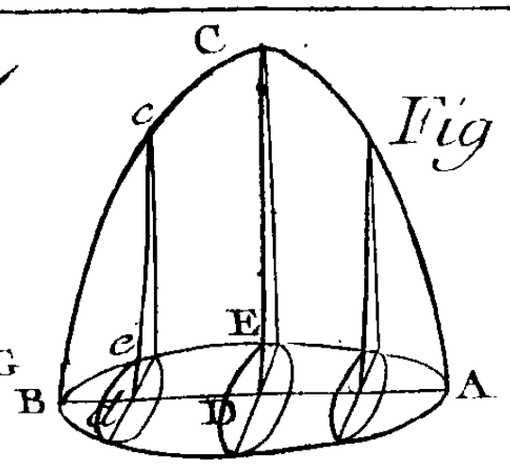


Fig. 2.

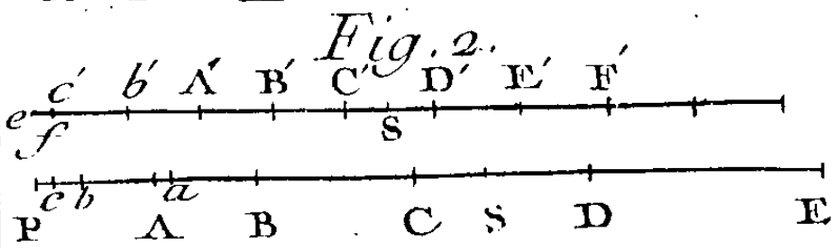


Fig. 5

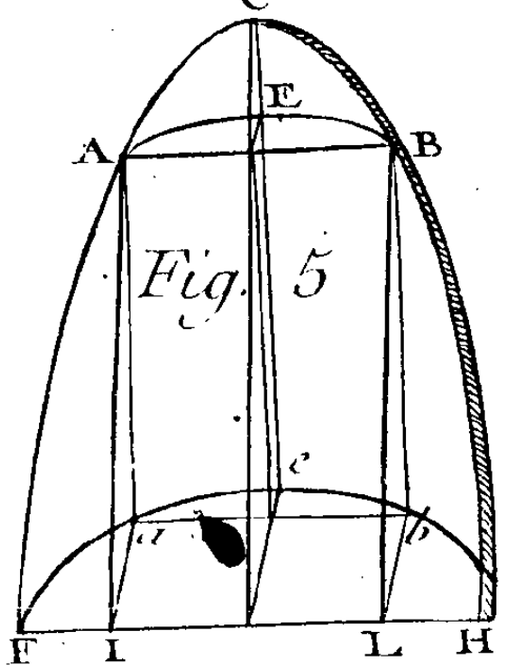


Fig. 7.

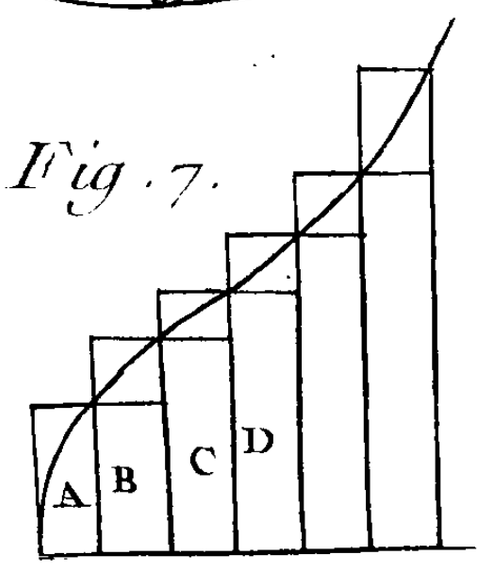


Fig. 6.

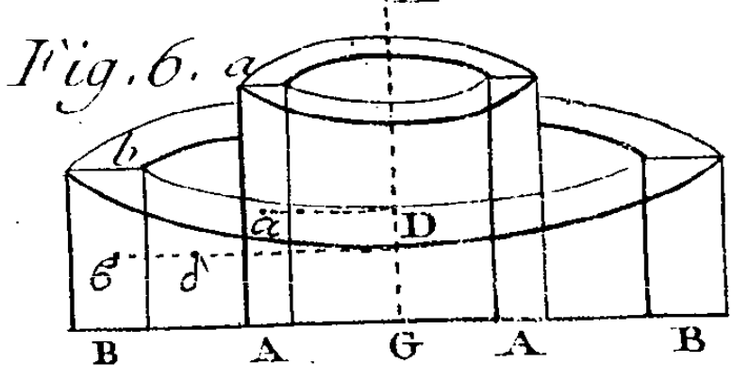


Fig. 8.

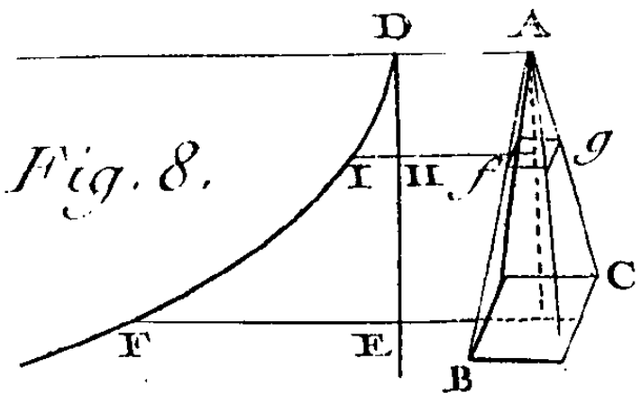


Fig. 9.

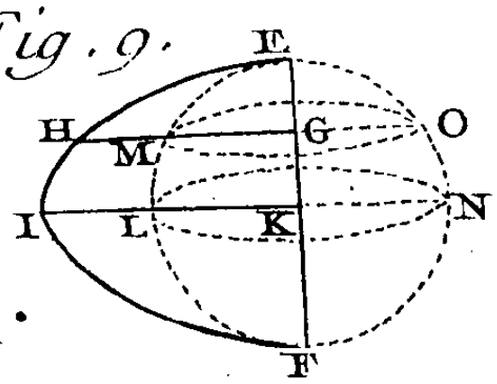


Fig. 10.

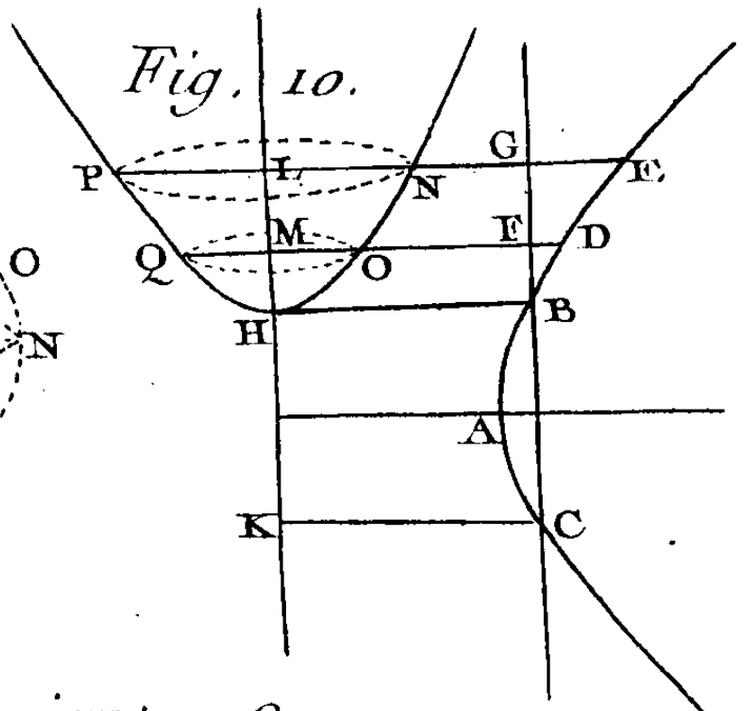


Fig 11

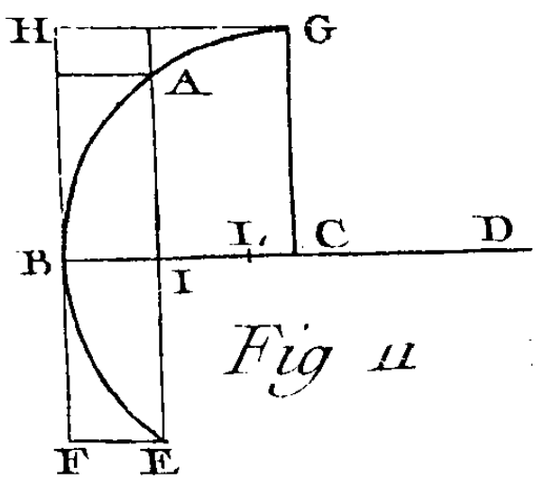


Fig. 13

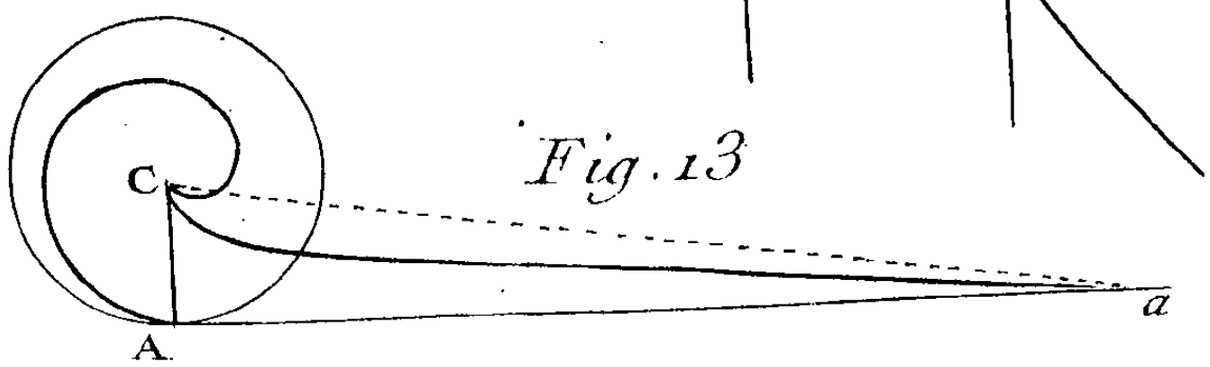


Fig 12

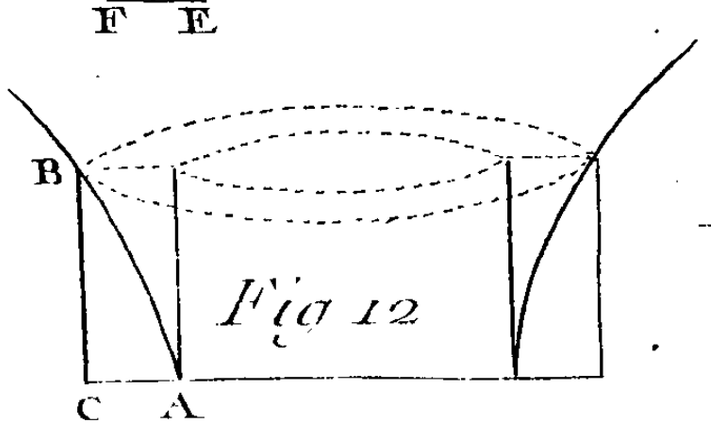


Fig 14

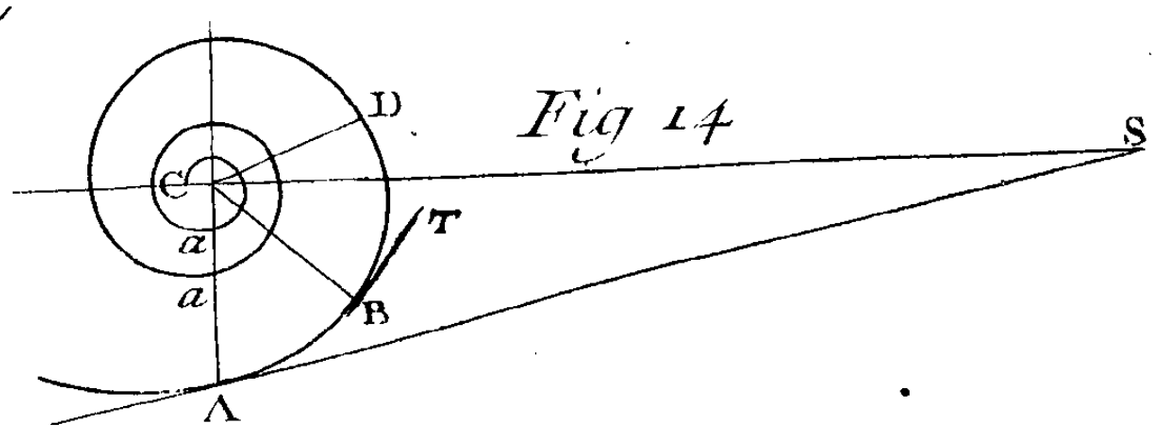


Fig. 15.

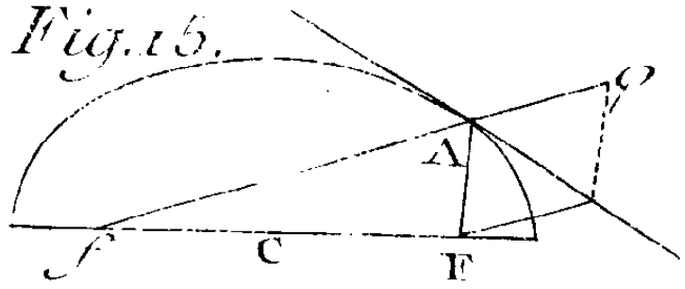
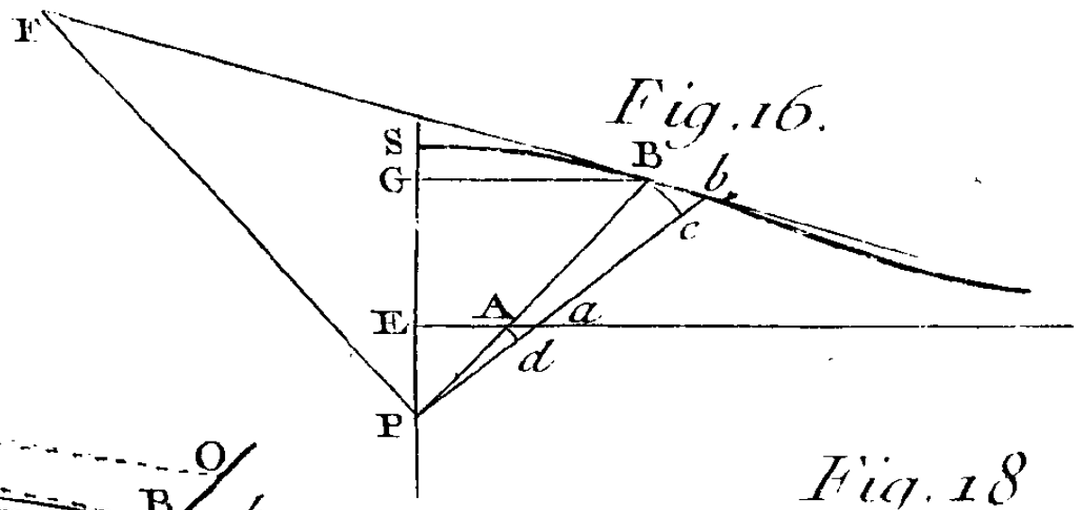


Fig. 16.



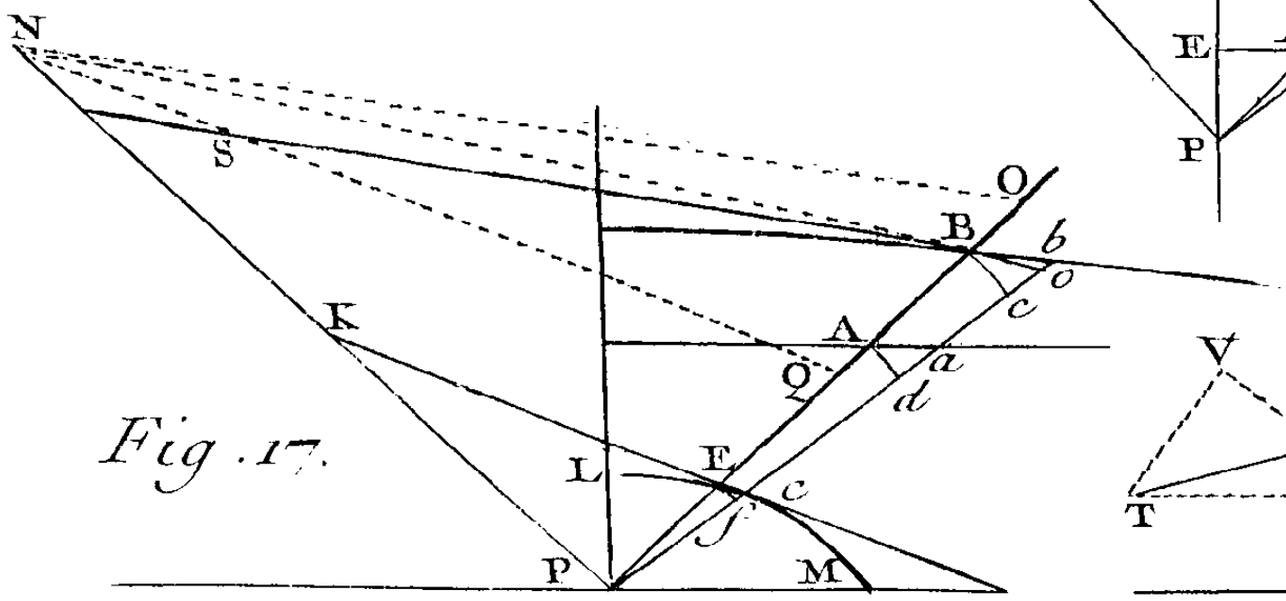
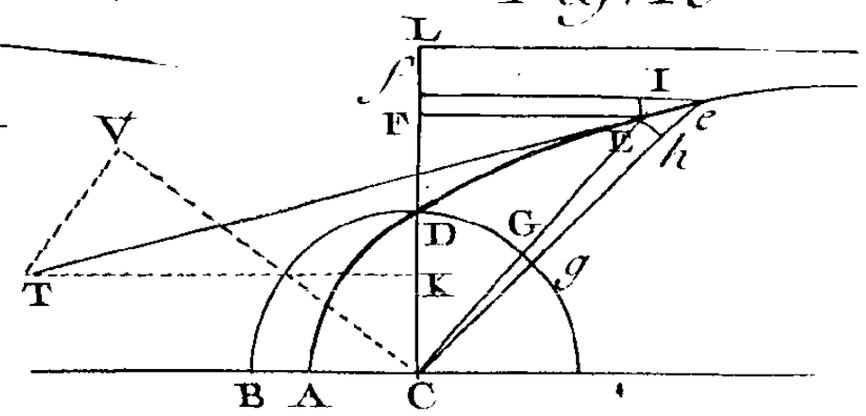


Fig. 17.

Fig. 18



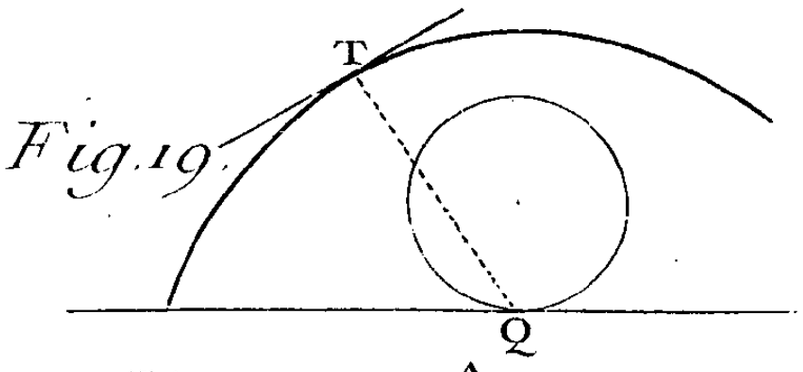


Fig. 19.

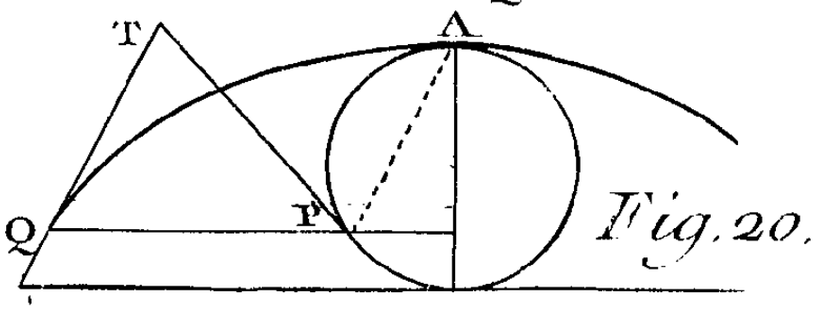


Fig. 20.

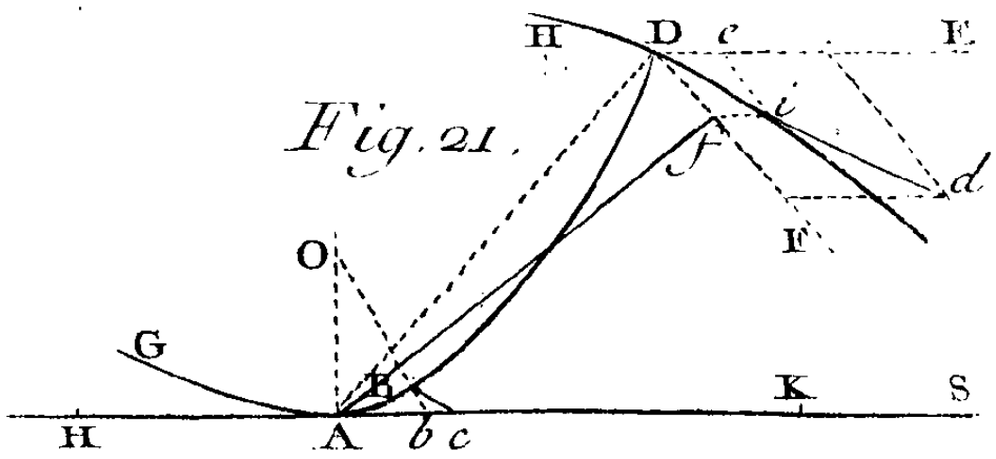
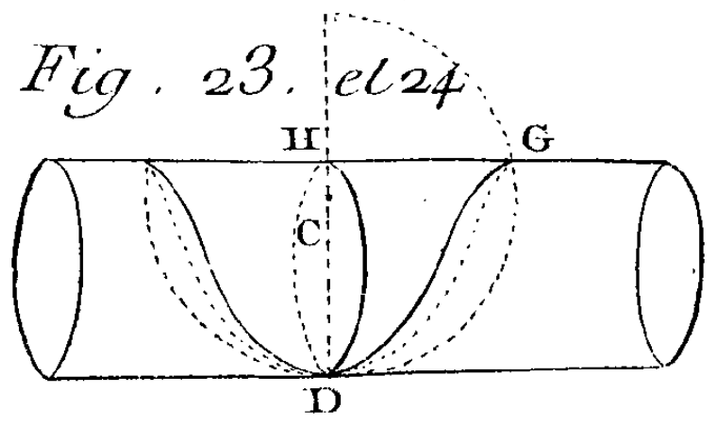


Fig. 21.

Fig. 23. et 24



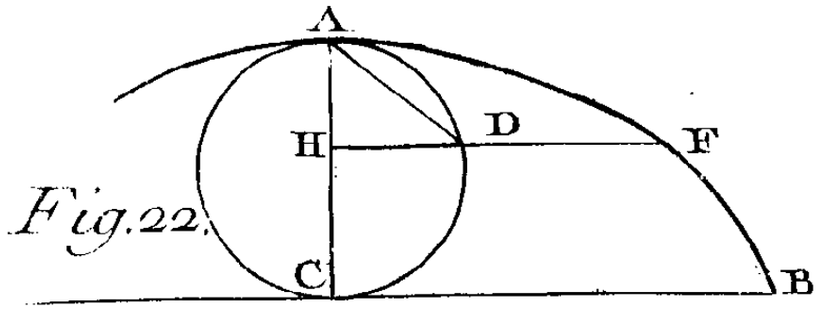


Fig. 22.

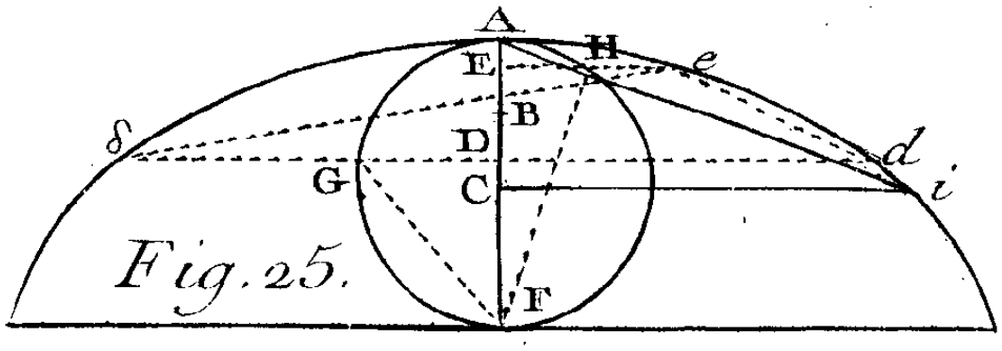


Fig. 25.

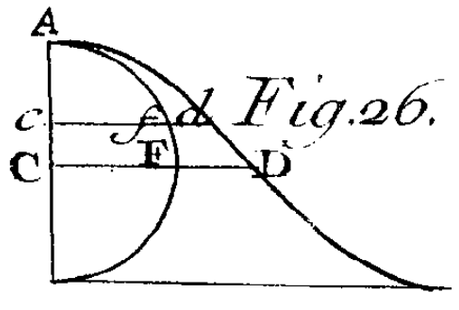


Fig. 26.

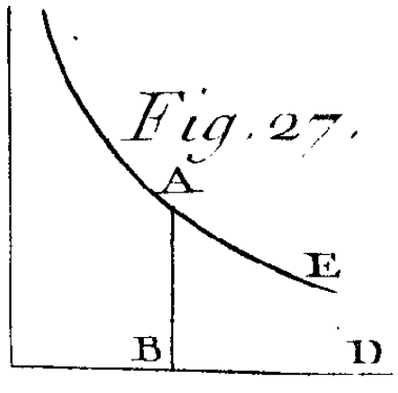


Fig. 27.

Fig. 28.

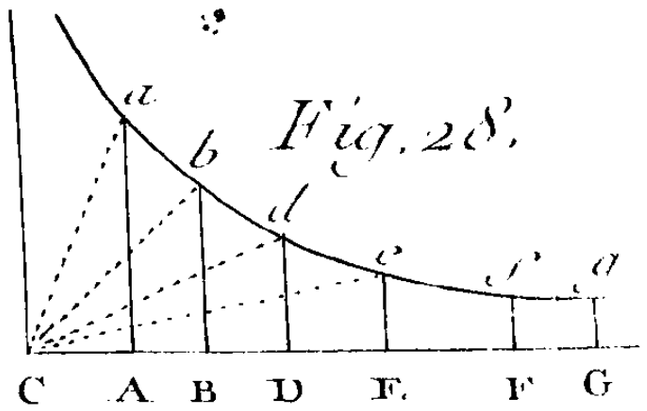


Fig. 29.

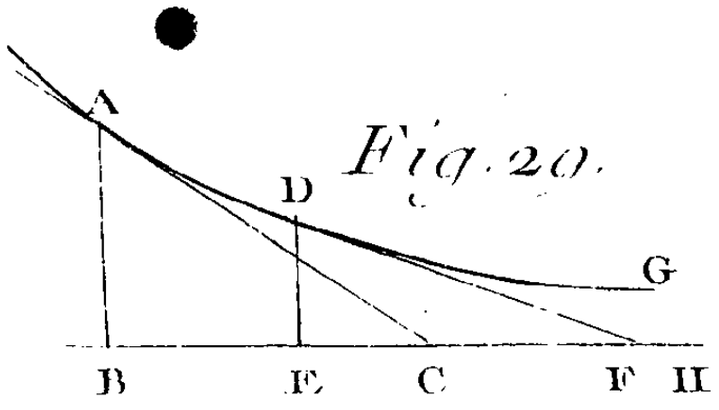


Fig. 31.

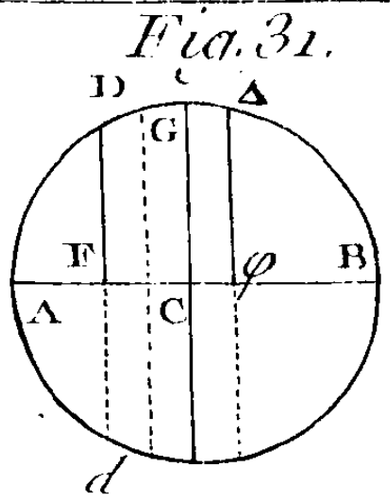


Fig. 30.

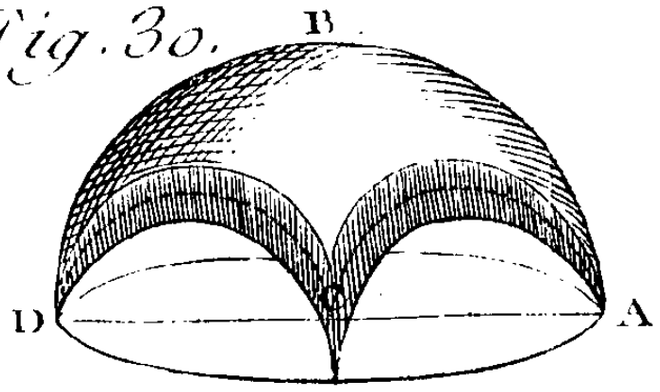


Fig. 32.

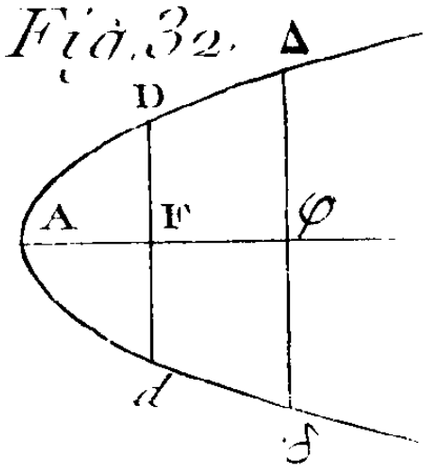


Fig. 34.

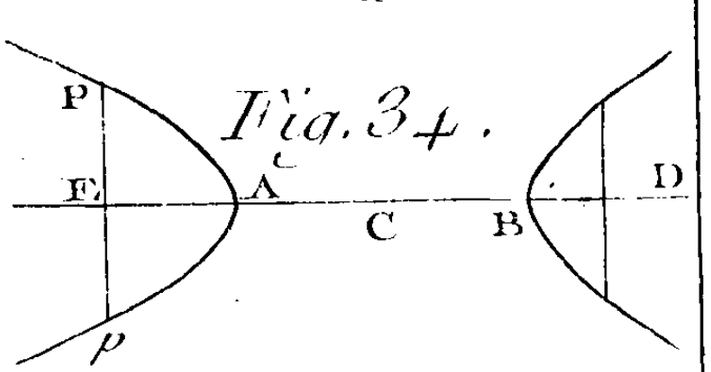


Fig. 33.

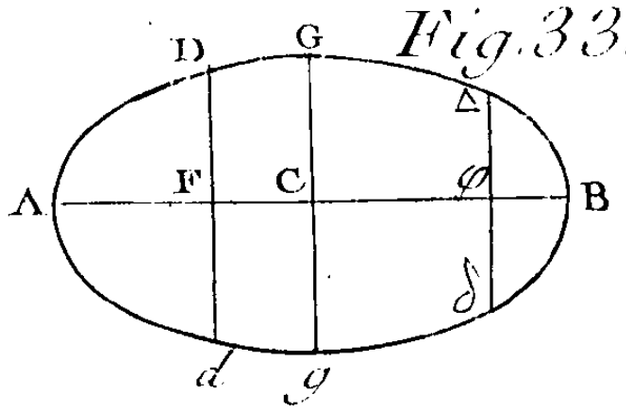


Fig. 36.

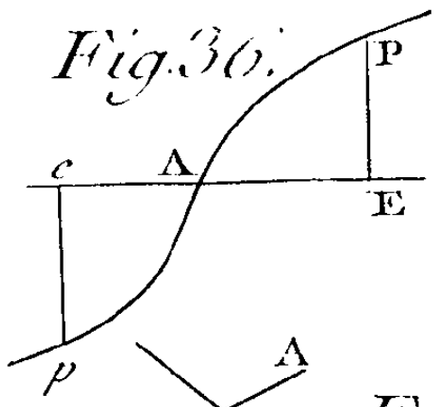


Fig. 35.

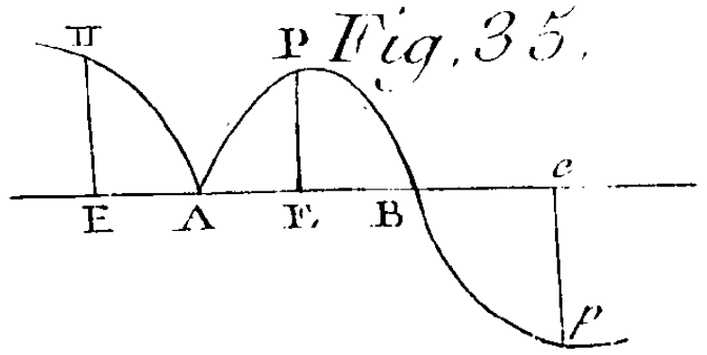


Fig. 38.

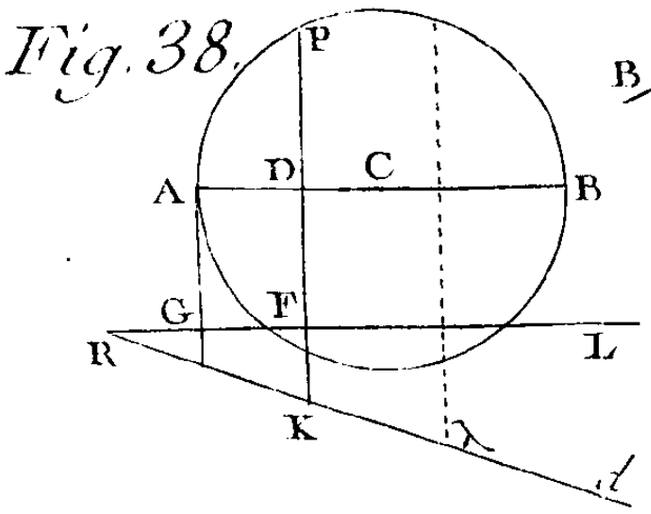


Fig. 39.

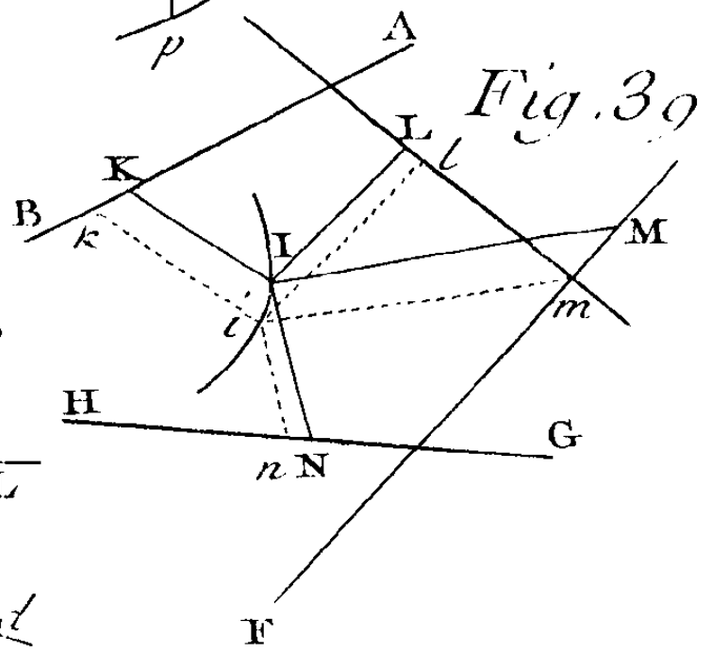


Fig. 37.

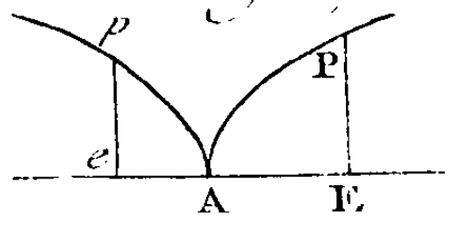


Fig. 40.

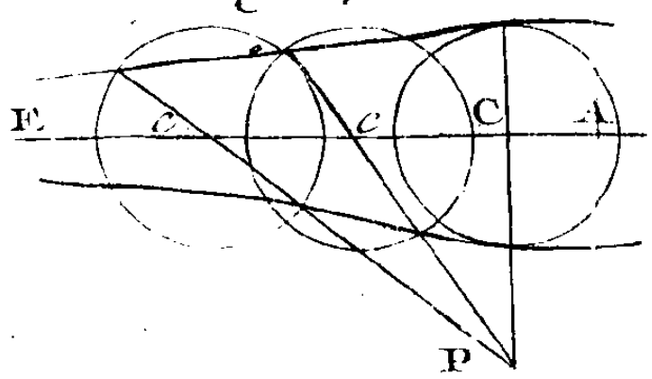
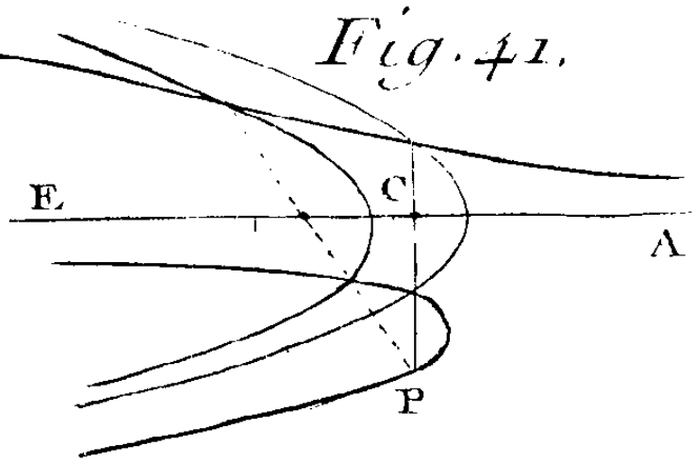
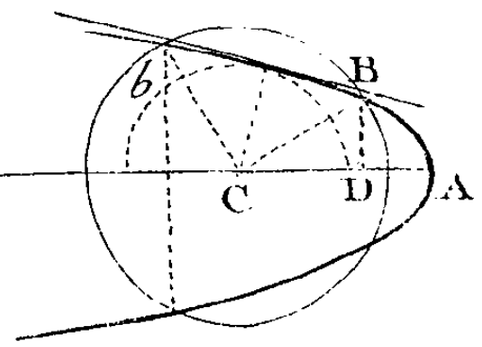


Fig. 41.





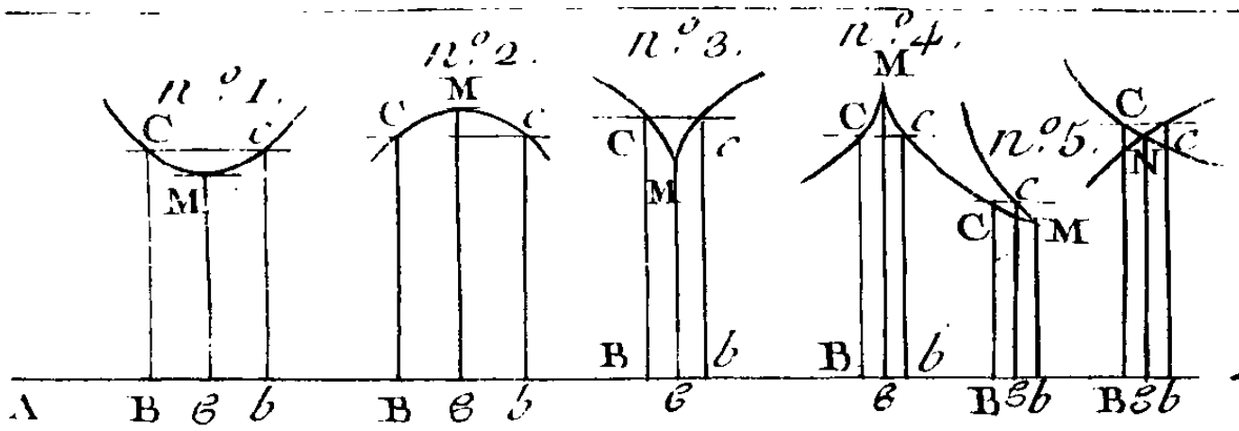


Fig. 44.

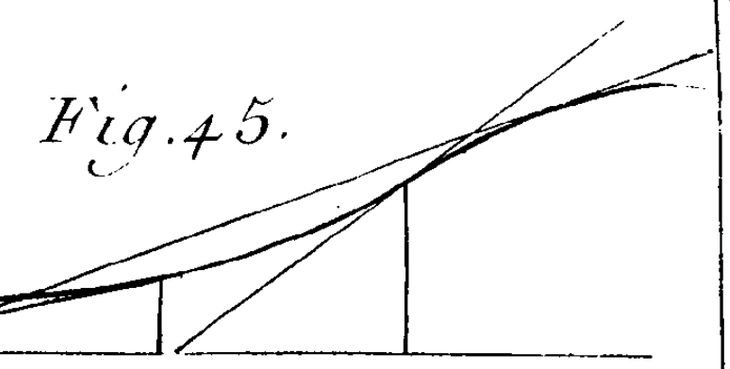


Fig 46. n.o 1.

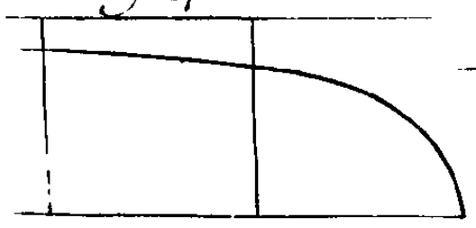


Fig. 47.

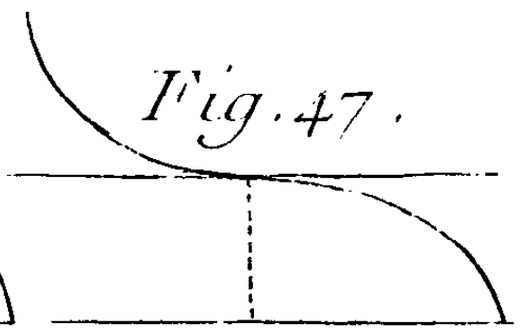


Fig. 45.

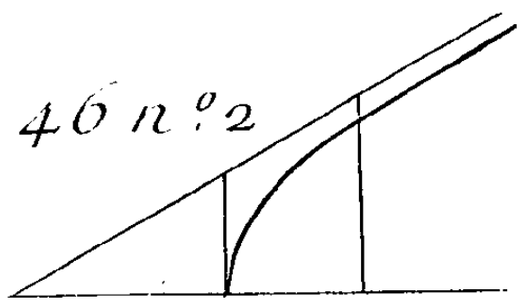


Fig. 48.

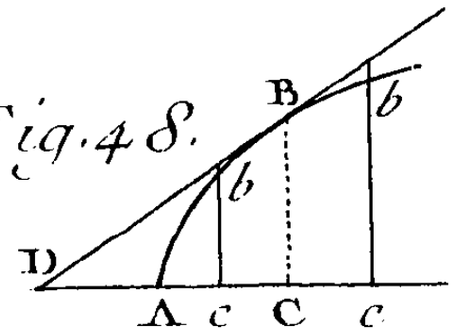


Fig 49

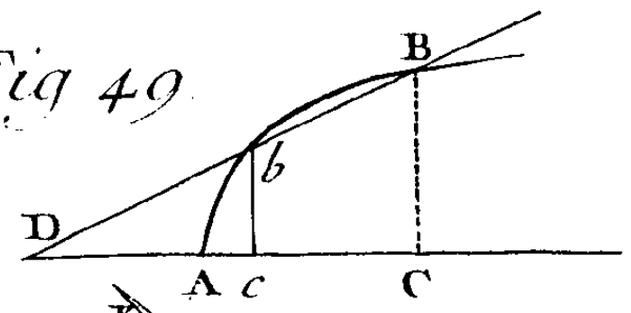


Fig. 50.

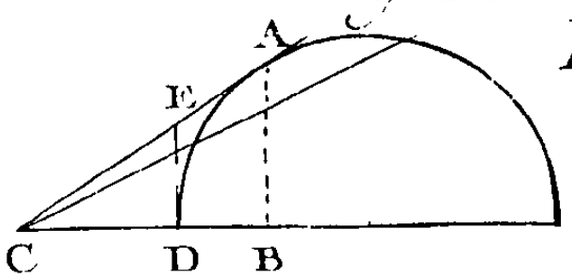
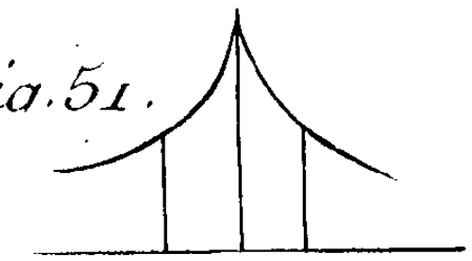


Fig. 51.



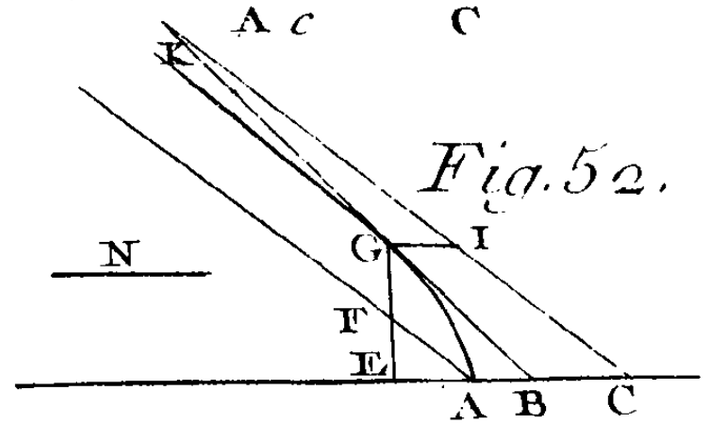


Fig. 52.

Fig. 53

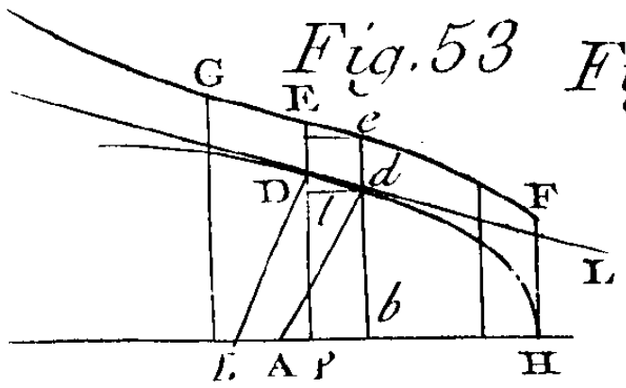
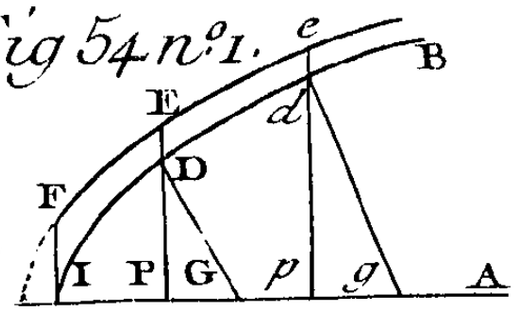


Fig 54 n.o 1.



52. n.o 2.

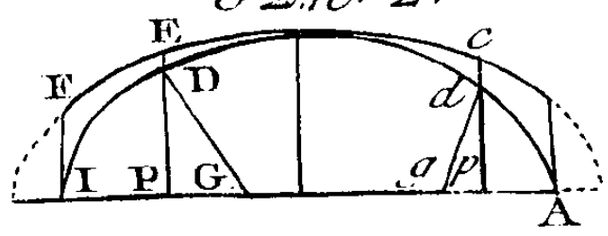


Fig 54. n.o 2.

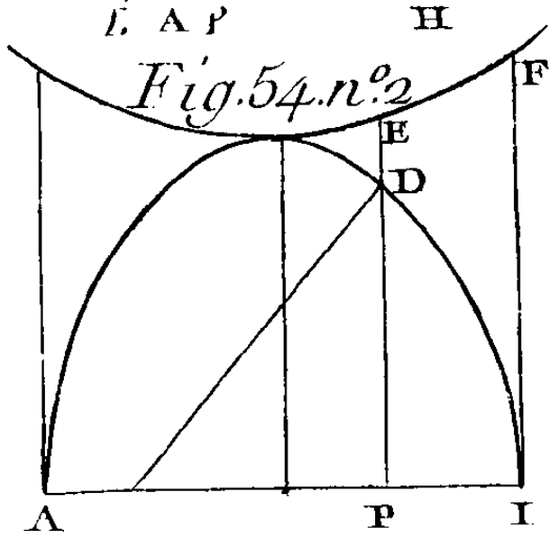
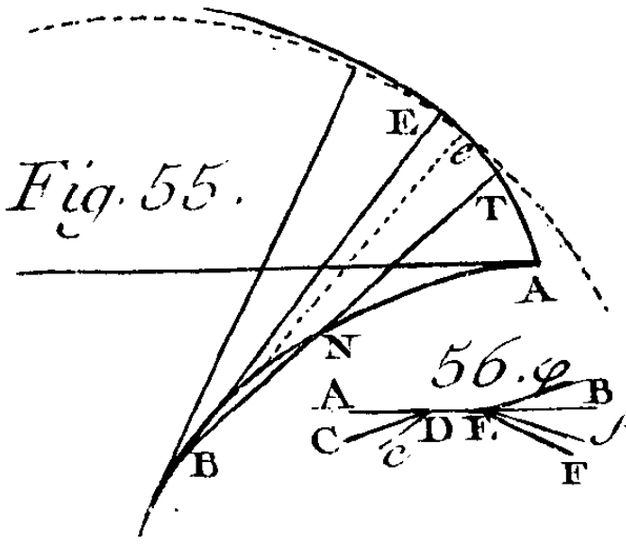


Fig. 55.



56. g

Fig. 57.

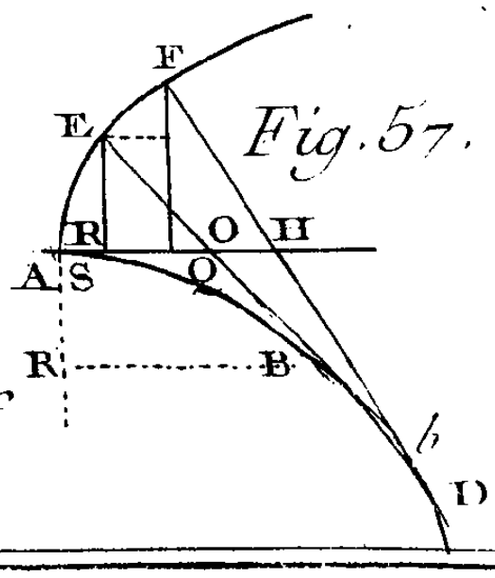


Fig. 58

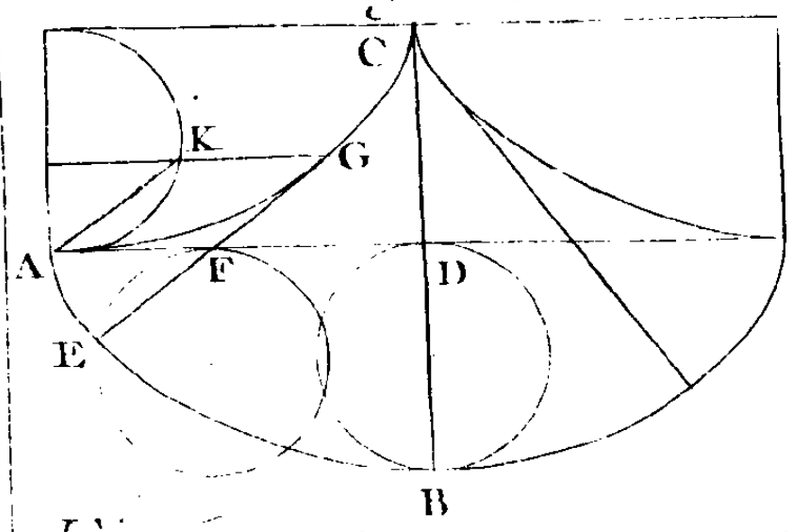


Fig. 59.

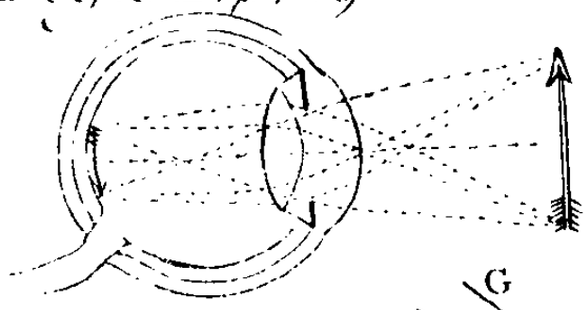


Fig. 62.

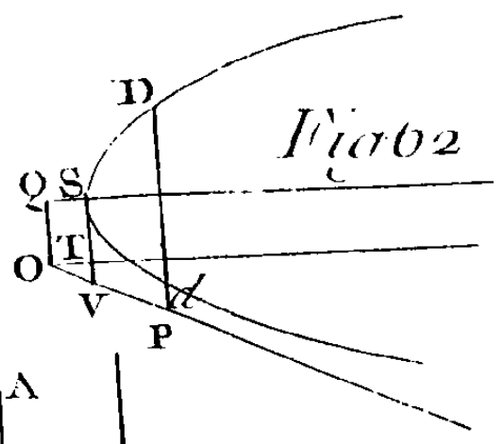


Fig. 50.

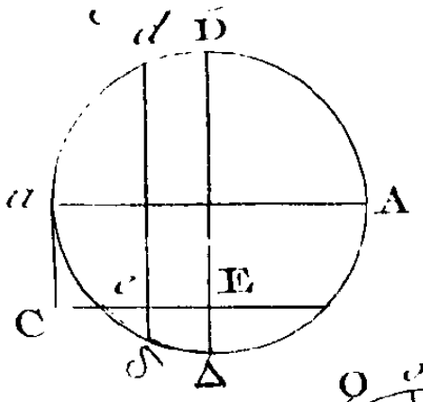
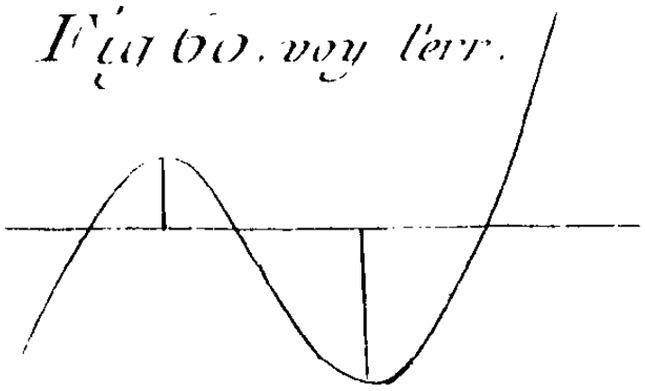
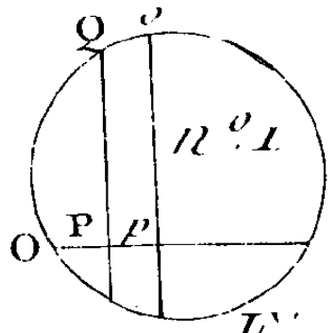


Fig. 60. voy. l'err.





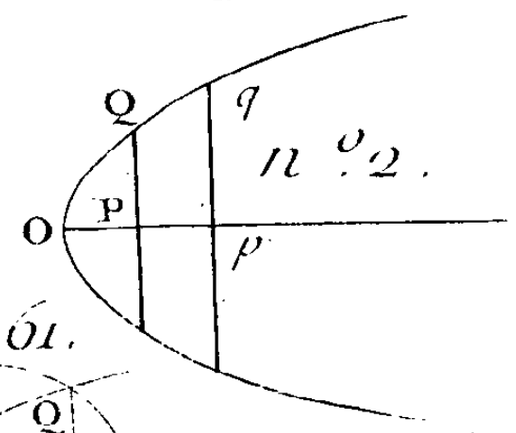


Fig. 61.

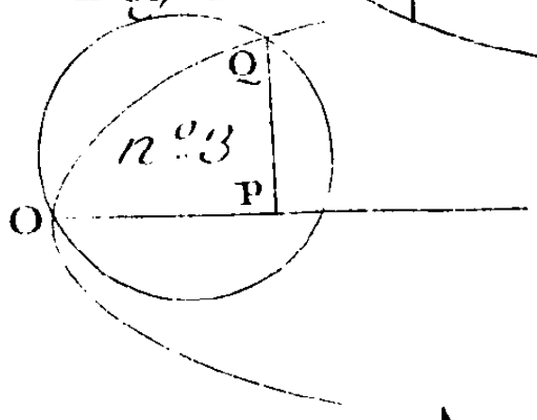
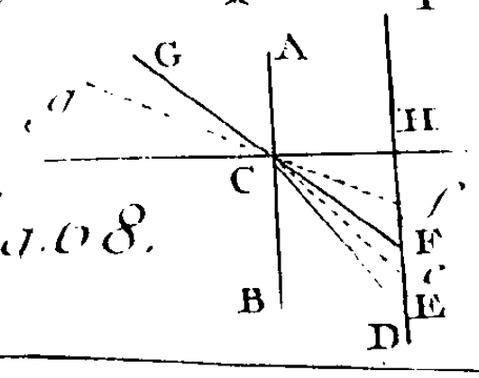


Fig. 68.



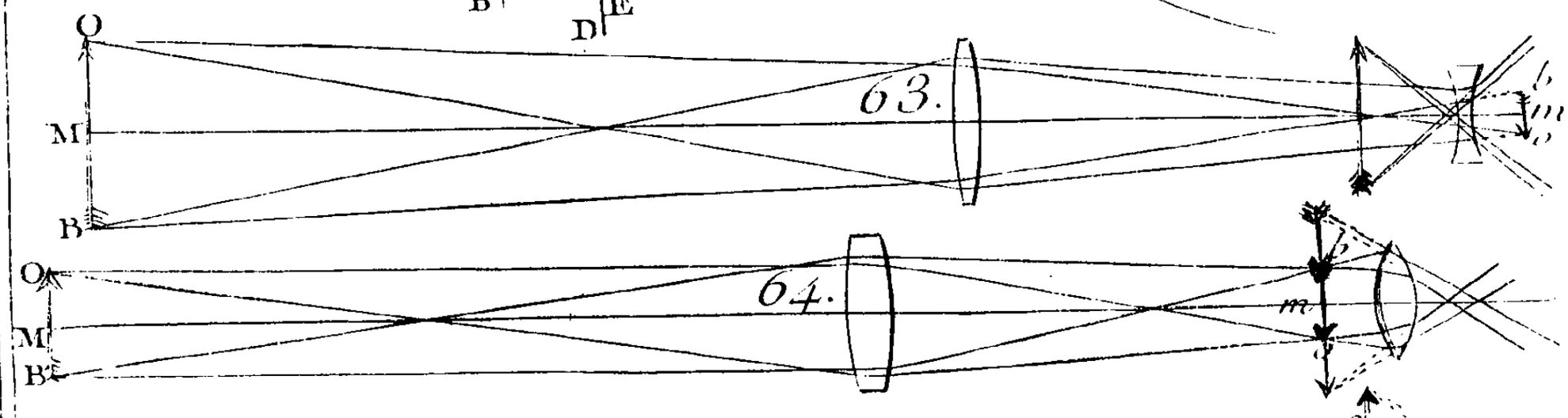
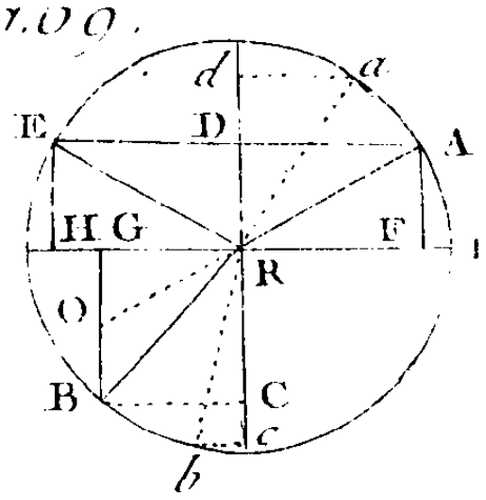
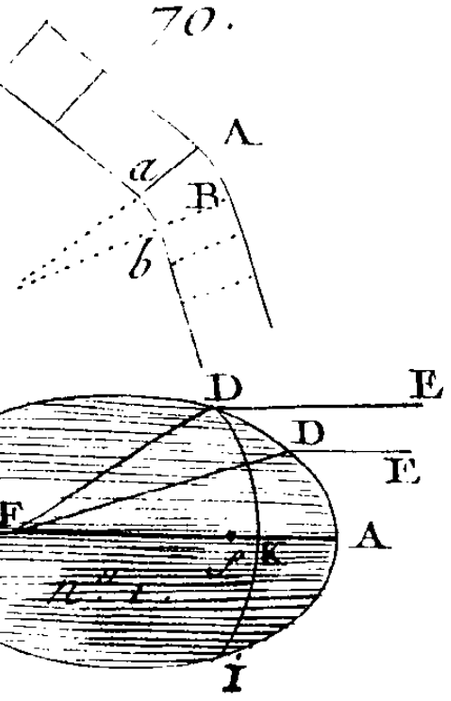


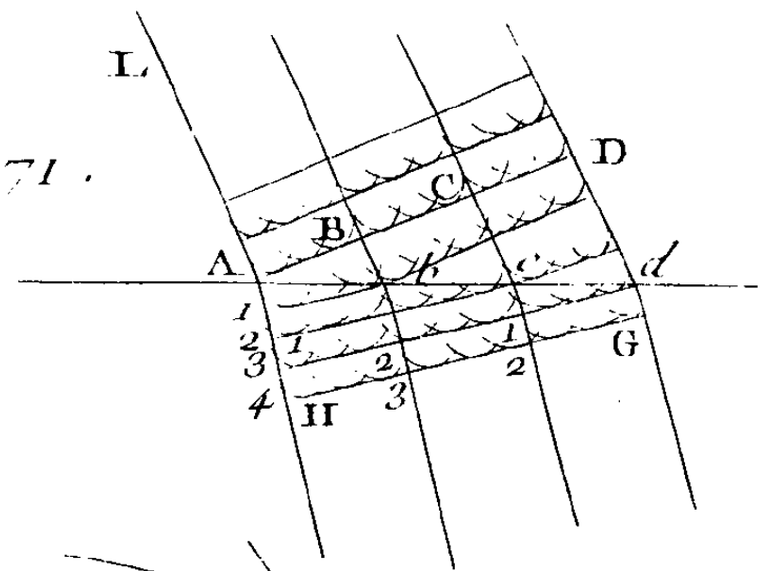
Fig. 69.



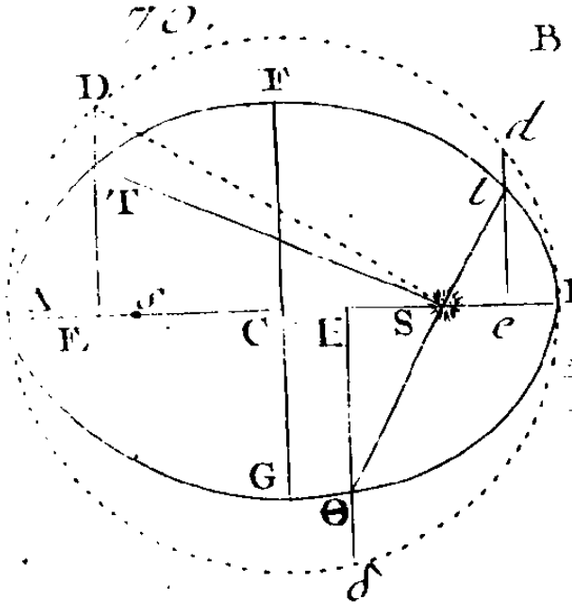
70.



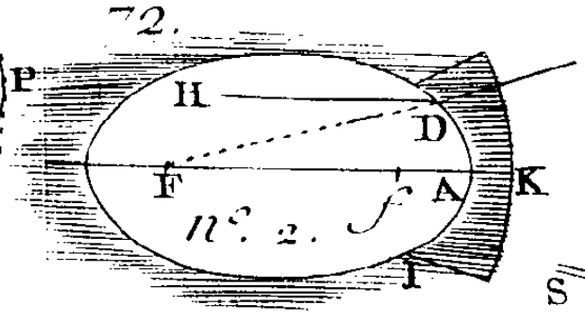
71.

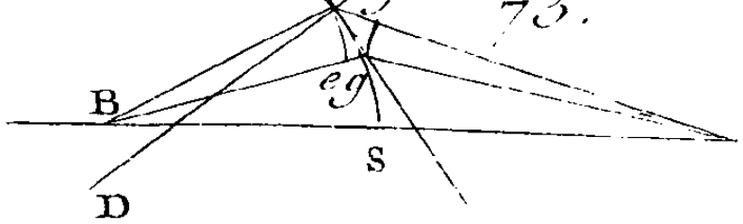


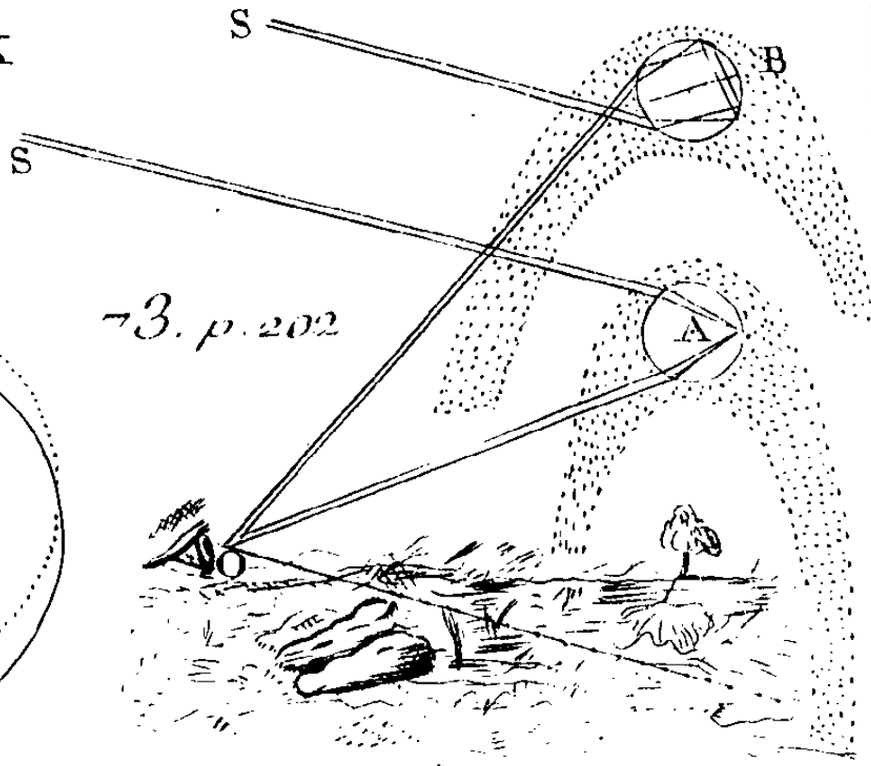
75.



72.

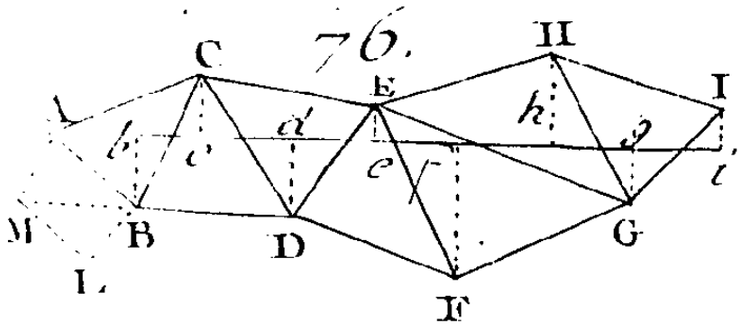




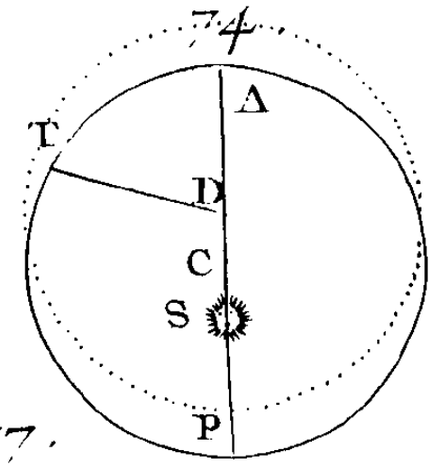


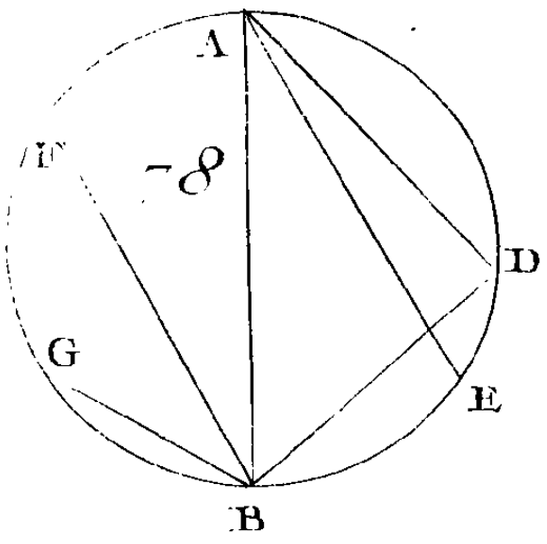
73. p. 202

76.

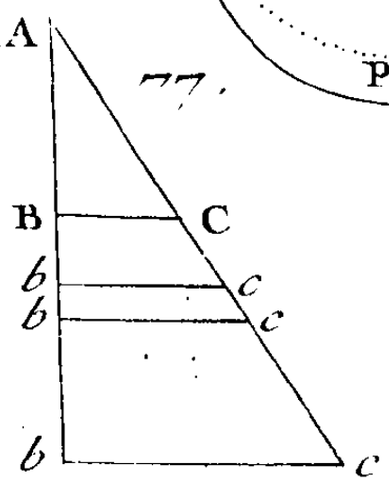


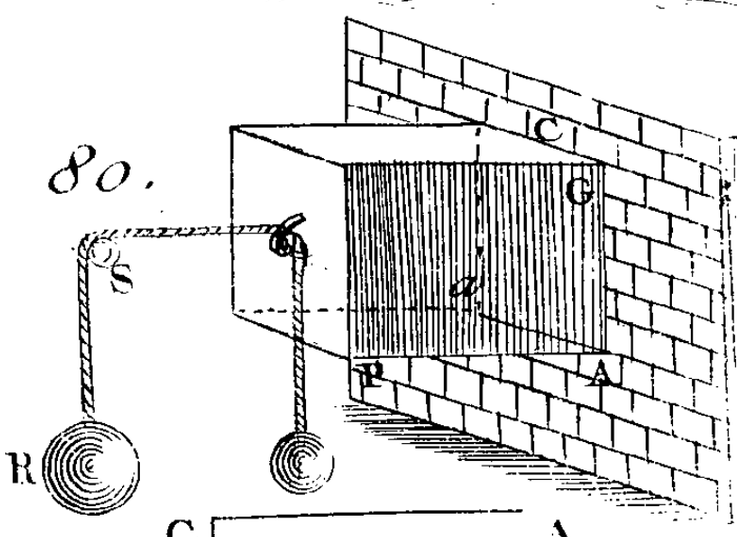
74.





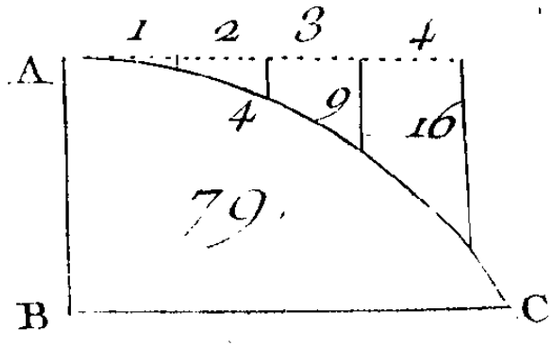
77.



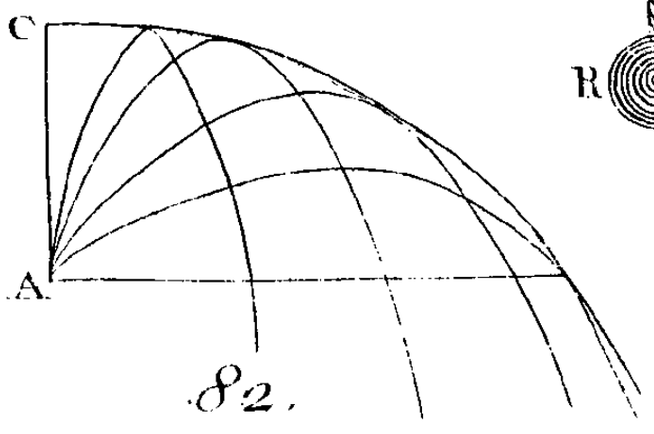


78.

79.



82.



81.

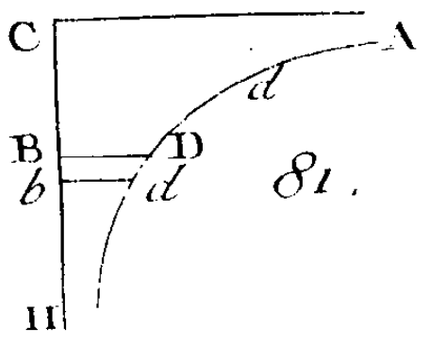
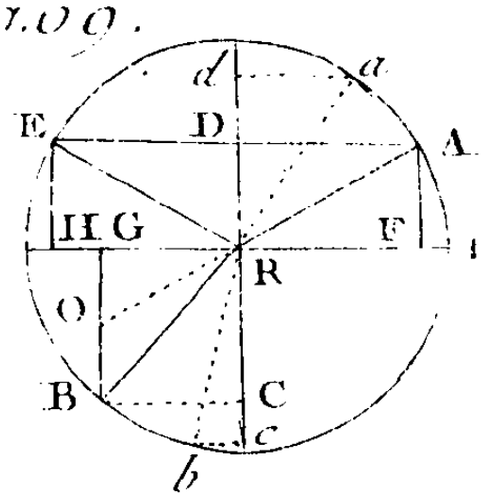
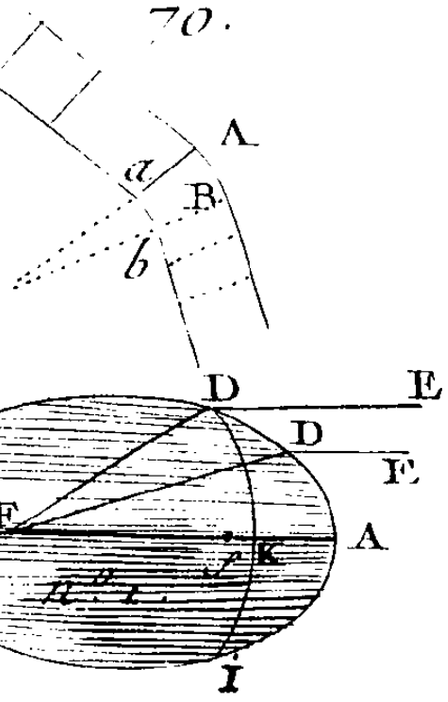


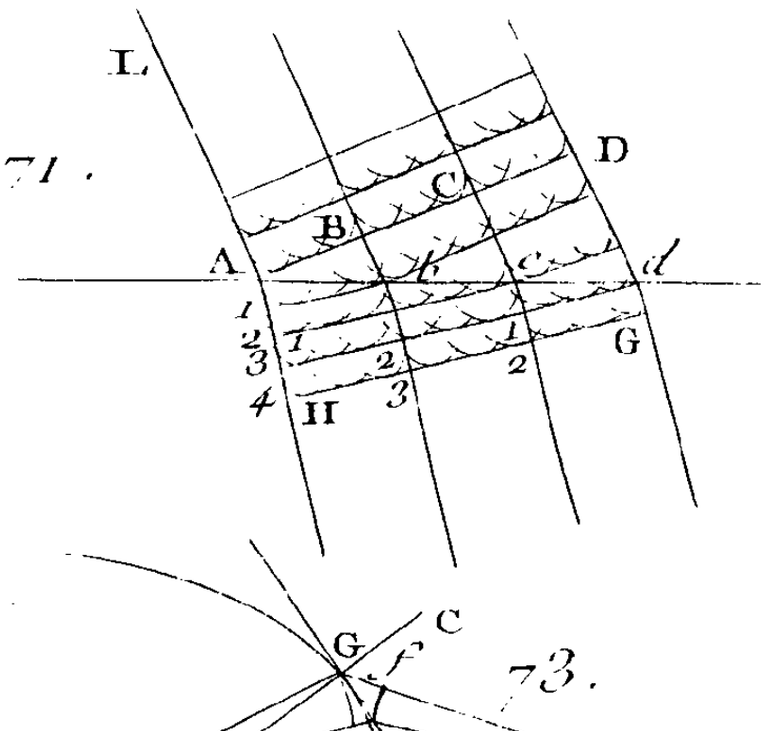
Fig. 69.



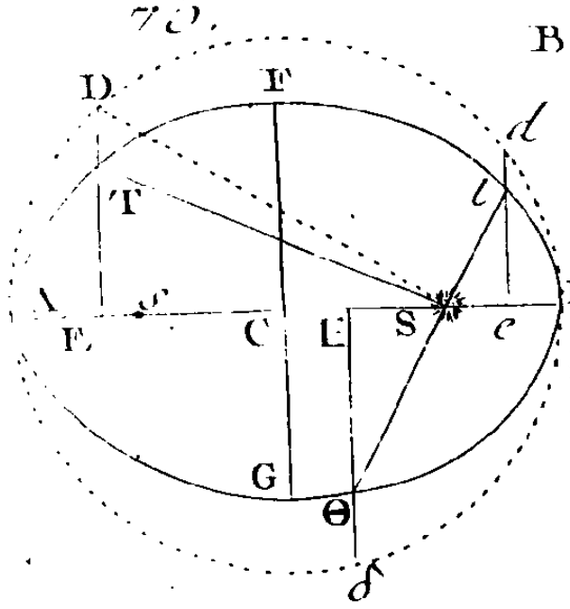
70.



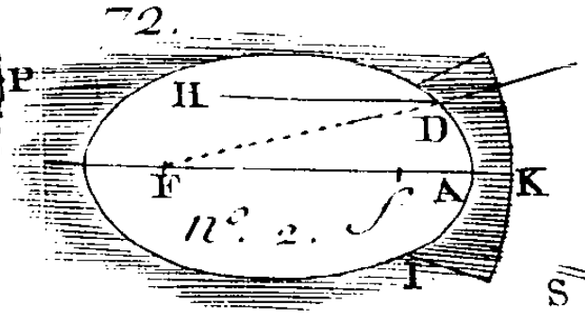
71.



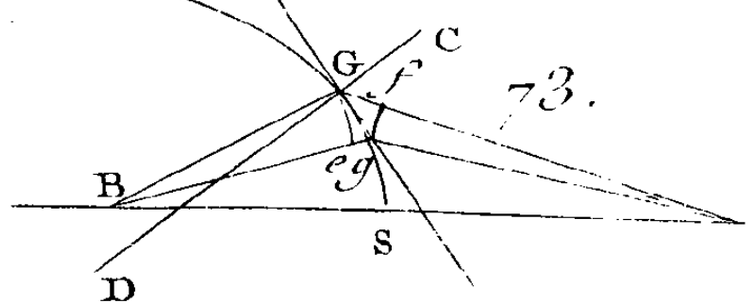
75.

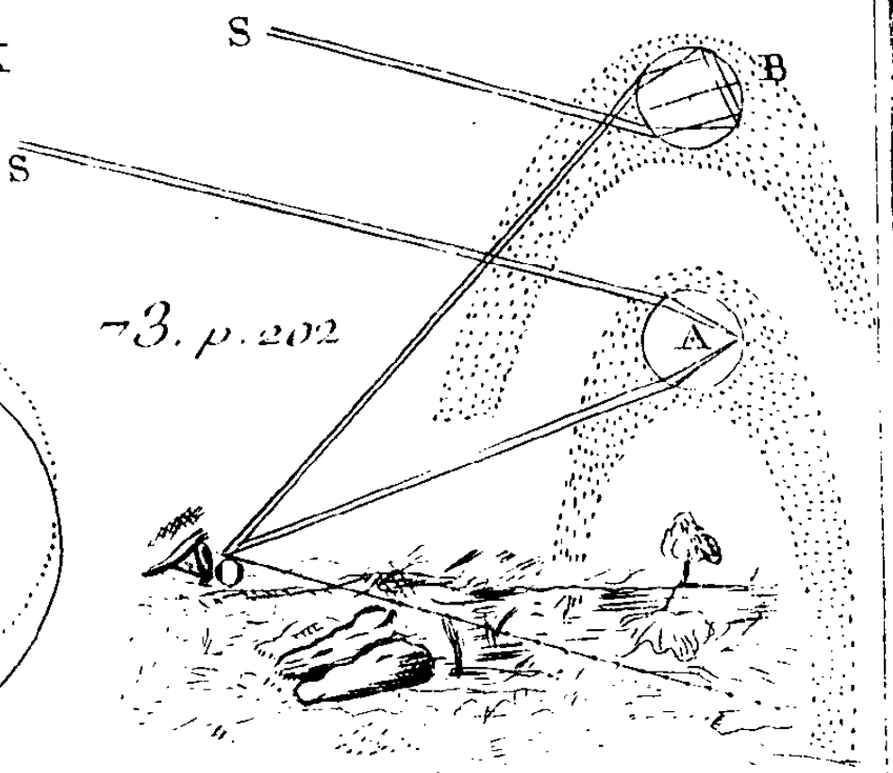


72.



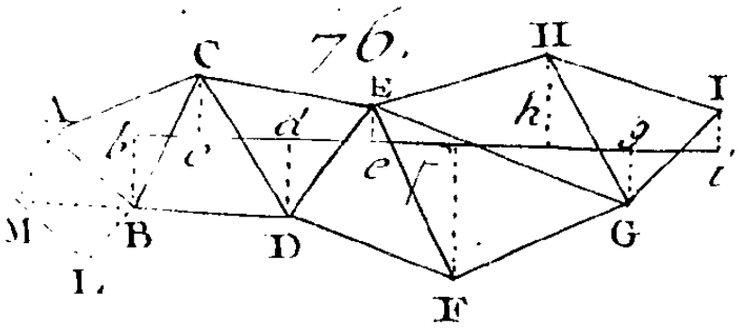
73.



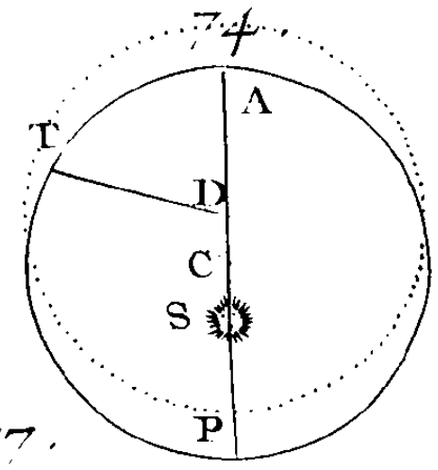


73. p. 202

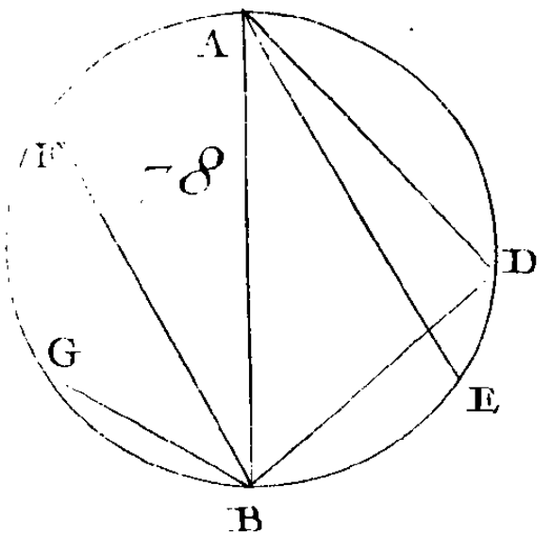
76.



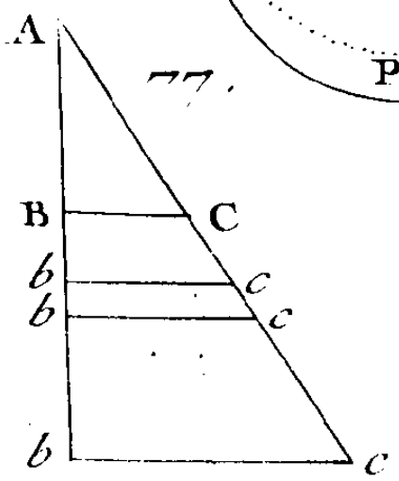
74.



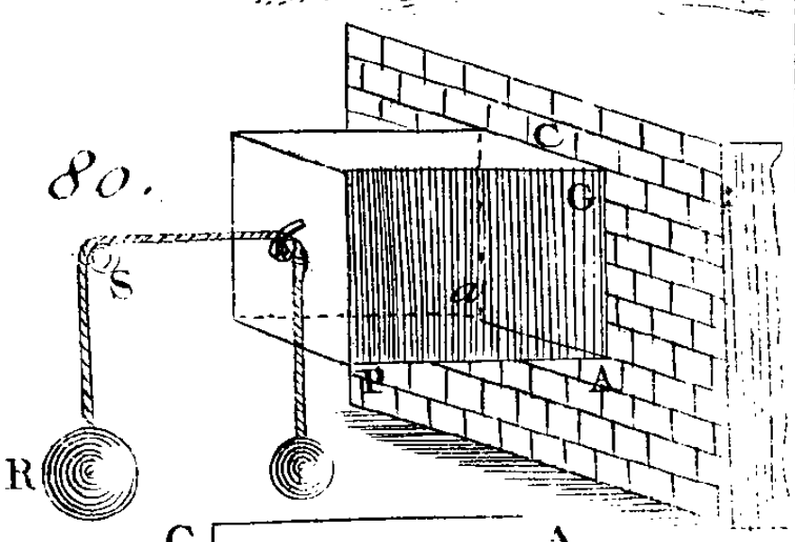
78.



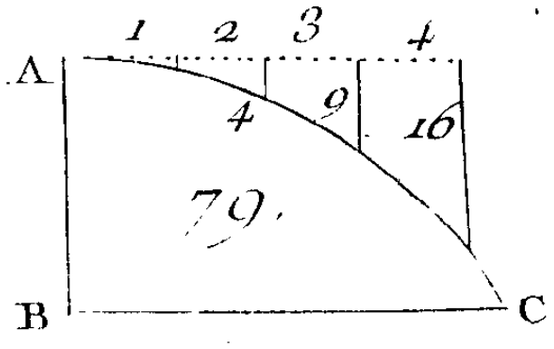
77.



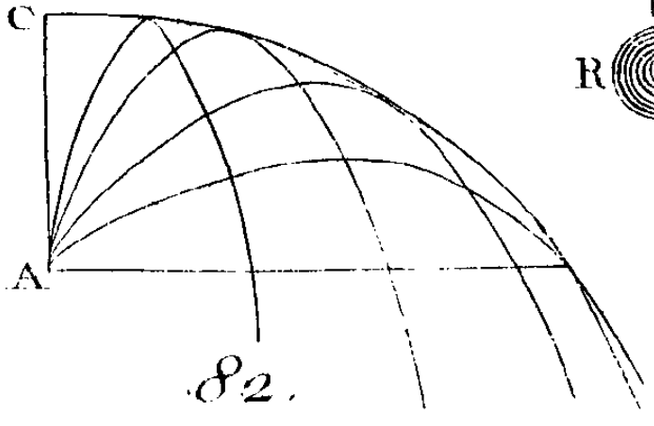
80.



79.



82.



81.

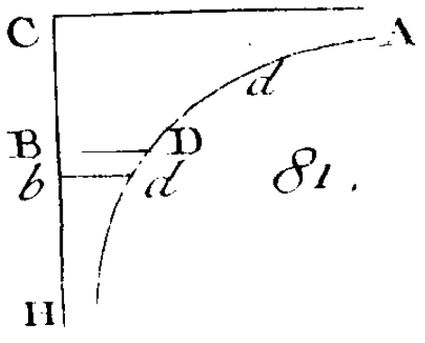


Fig. 83.

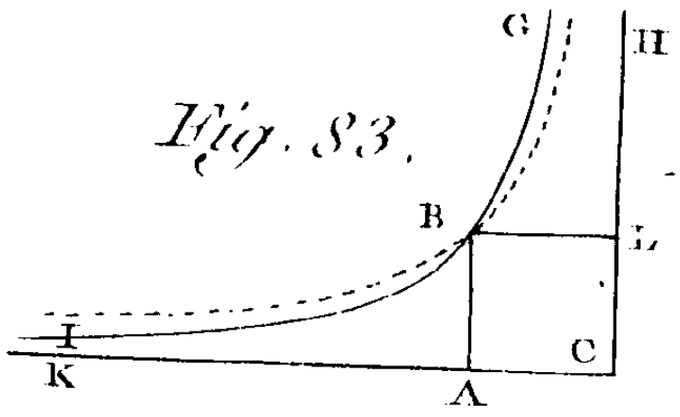


Fig. 85.

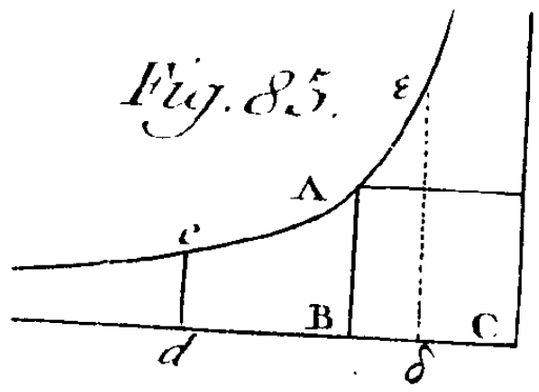


Fig. 86.

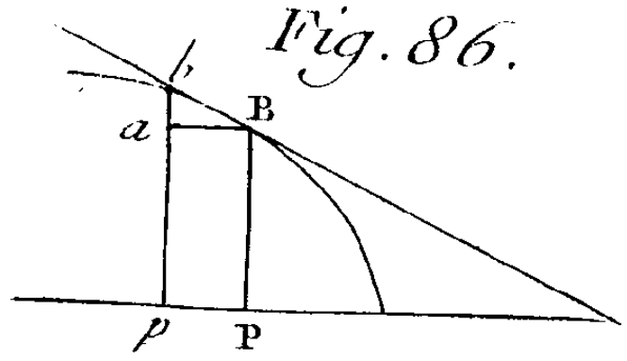
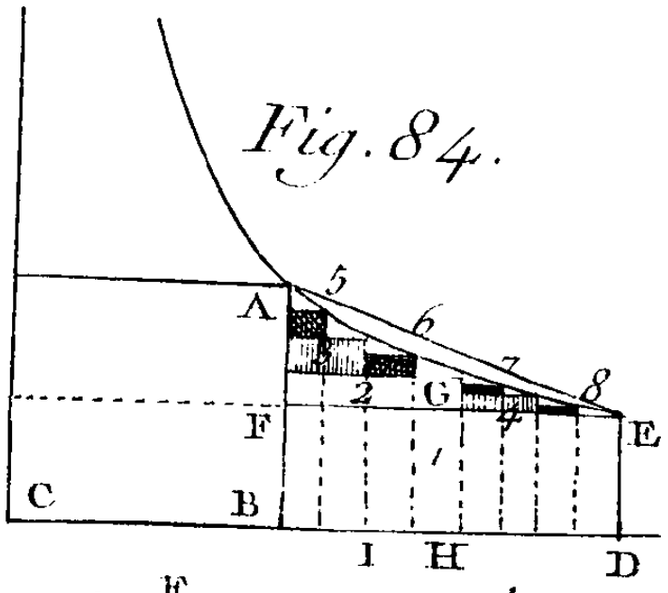


Fig. 84.



87. et 88.

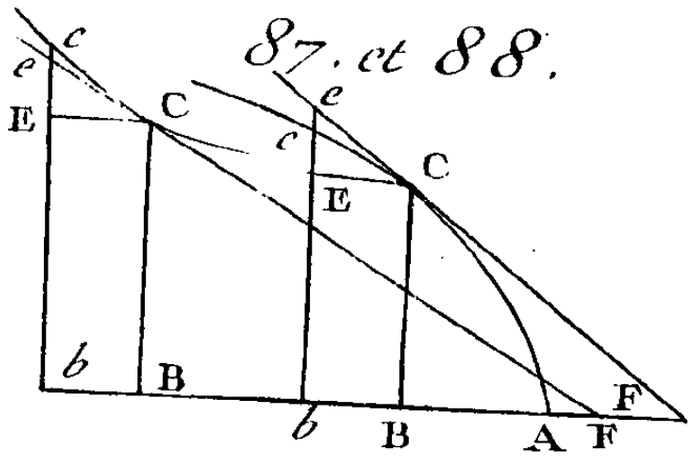
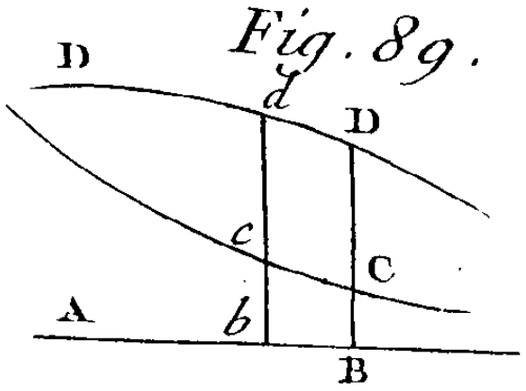


Fig. 89.



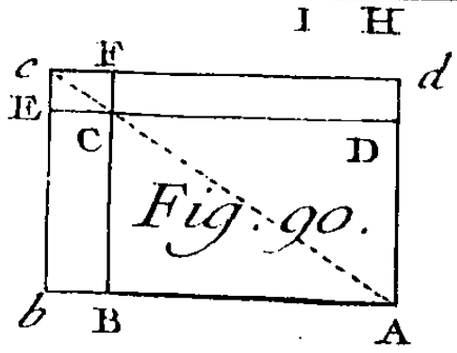


Fig. 90.

Fig. 91.

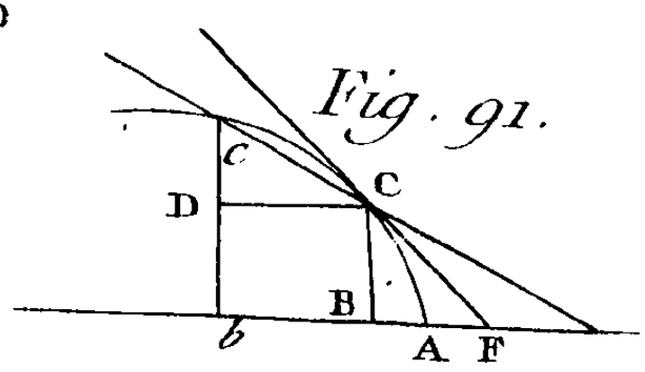


Fig. 93.

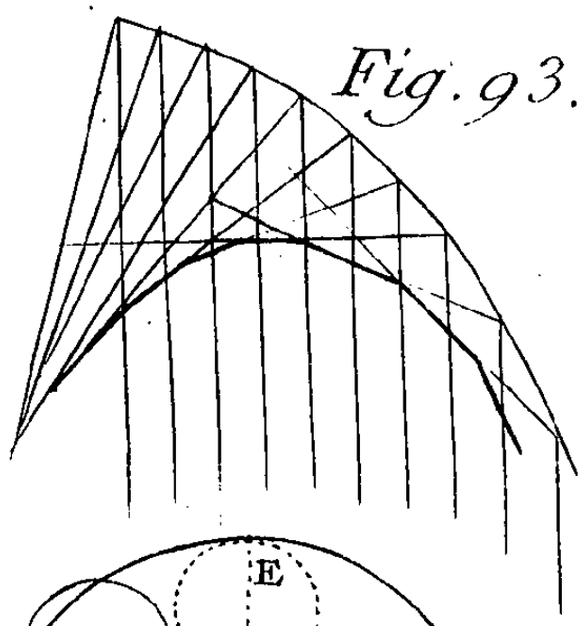


Fig. 92.

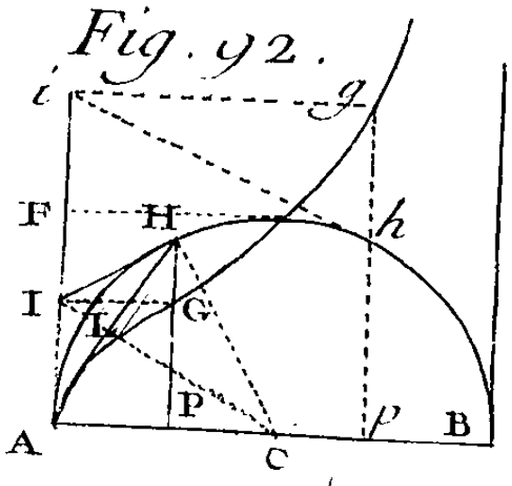
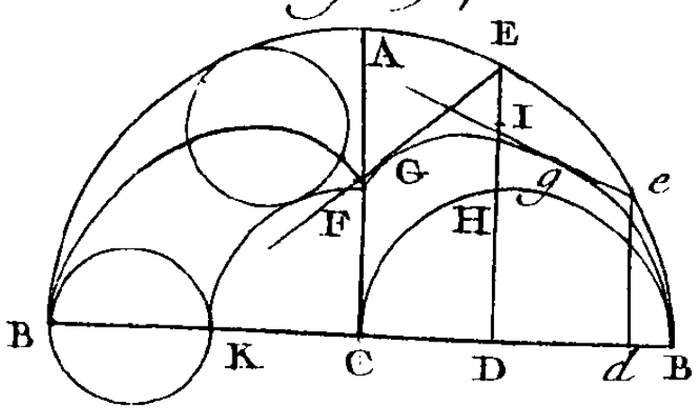


Fig. 94.



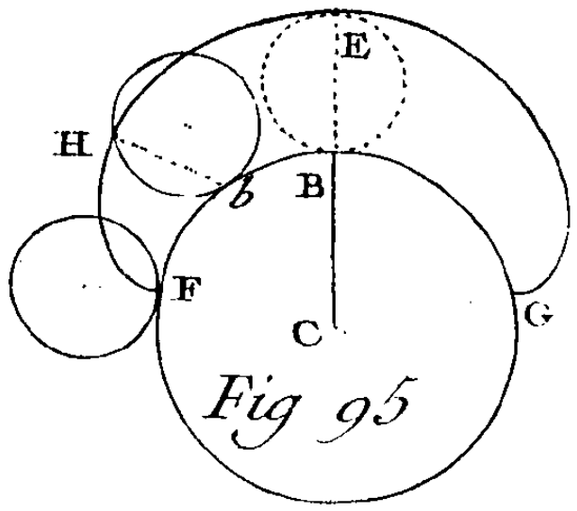
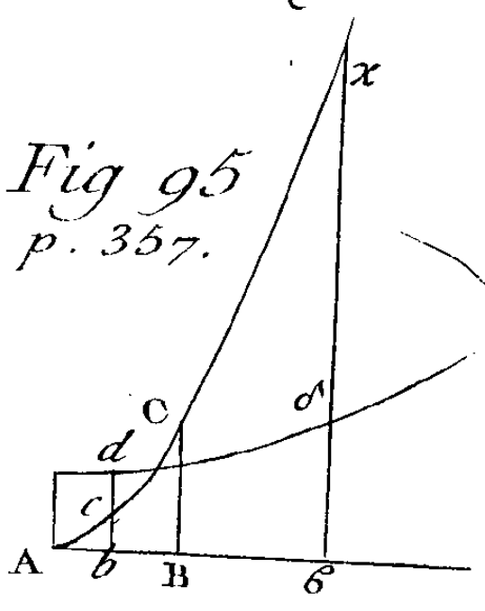


Fig 95



p. 357.

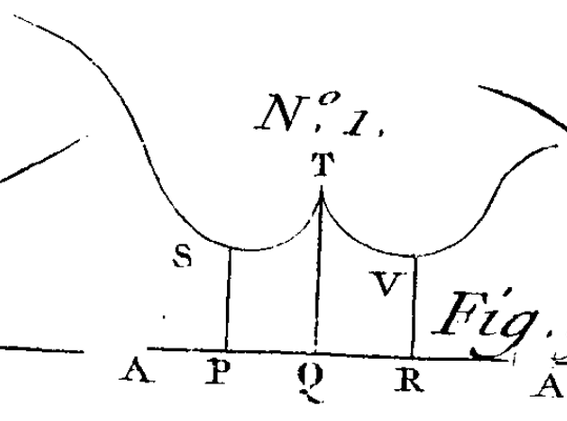
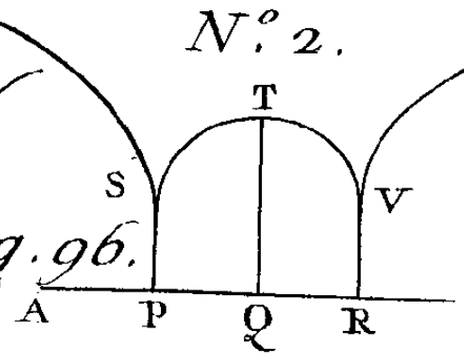


Fig. 96.



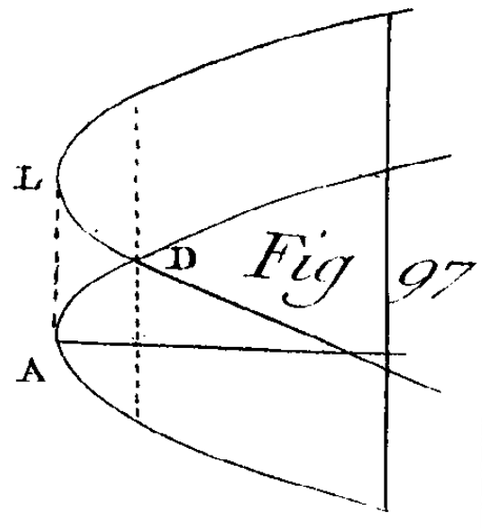


Fig 97

Fig. 83.

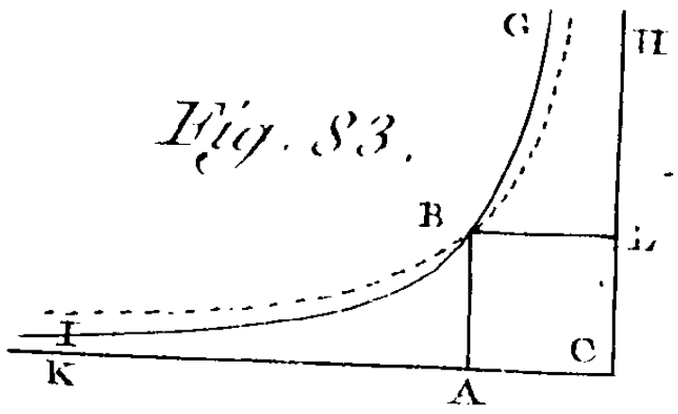


Fig. 84.

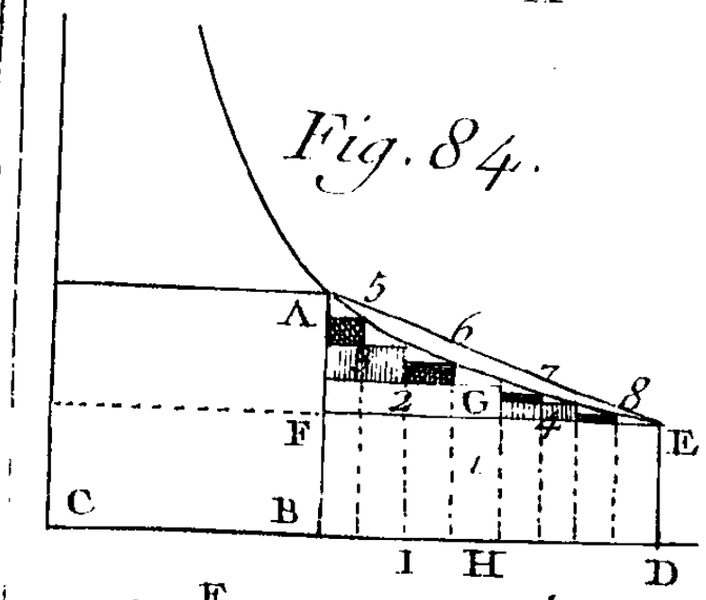


Fig. 85.

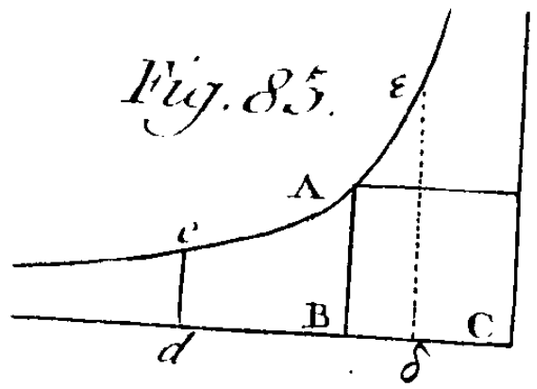
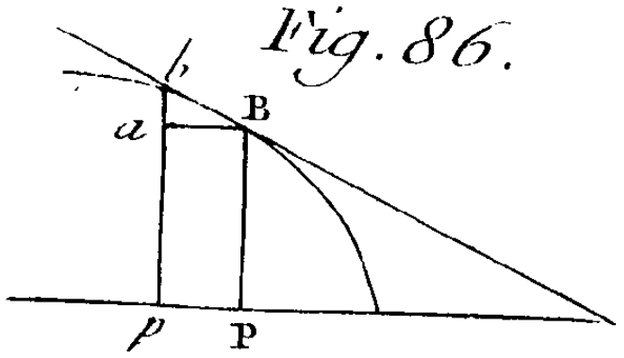


Fig. 86.



87. et 88.

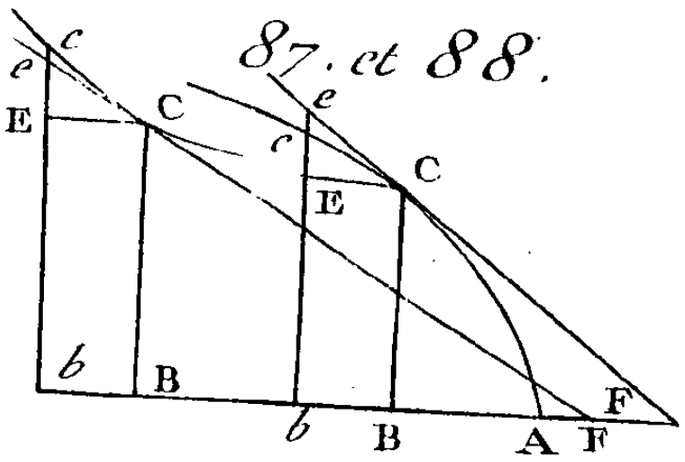


Fig. 89.

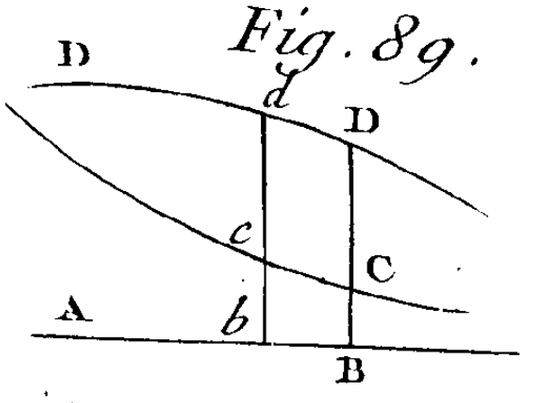


Fig. 90.

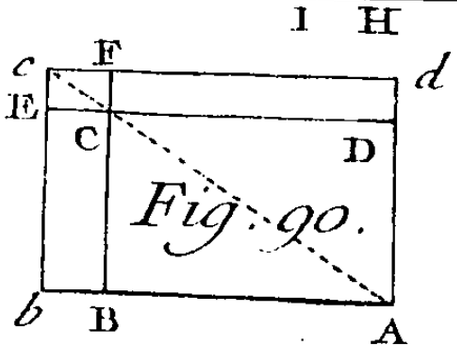


Fig. 91.

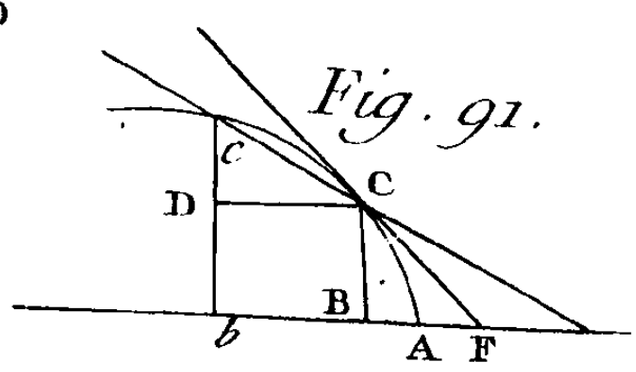


Fig. 93.

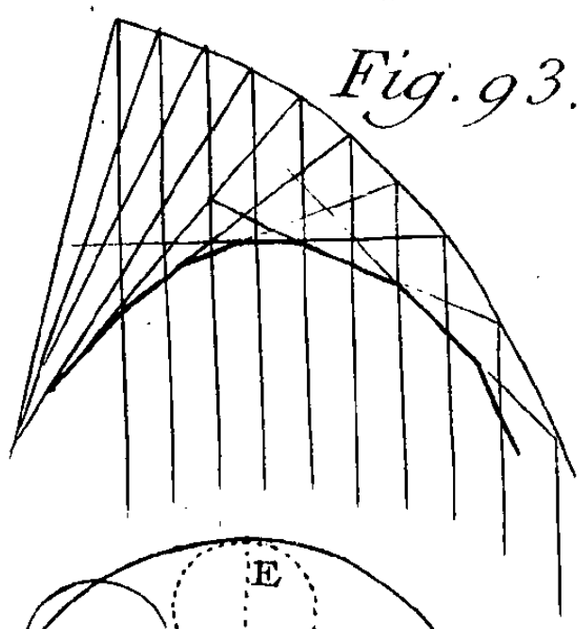


Fig. 92.

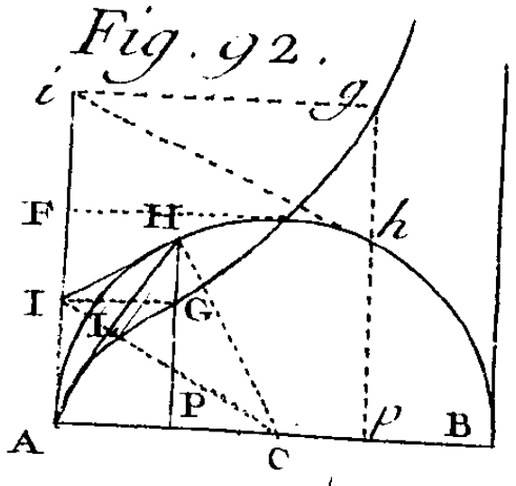
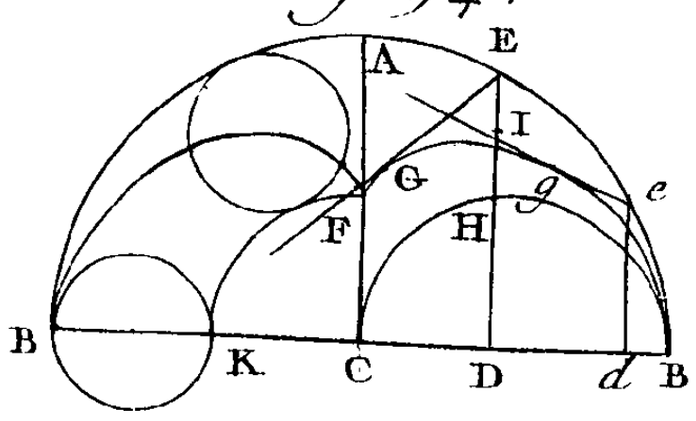


Fig. 94.



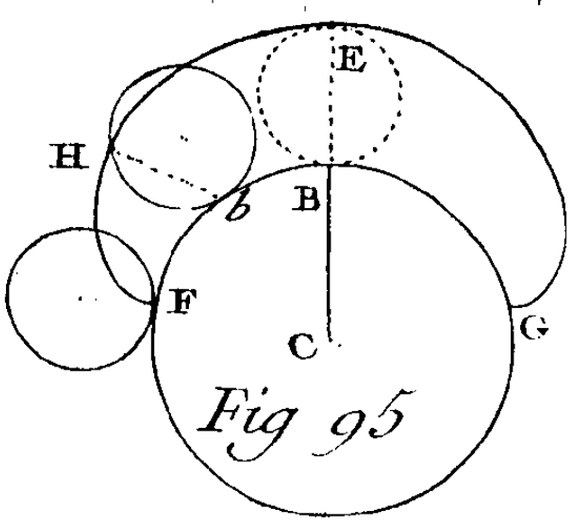
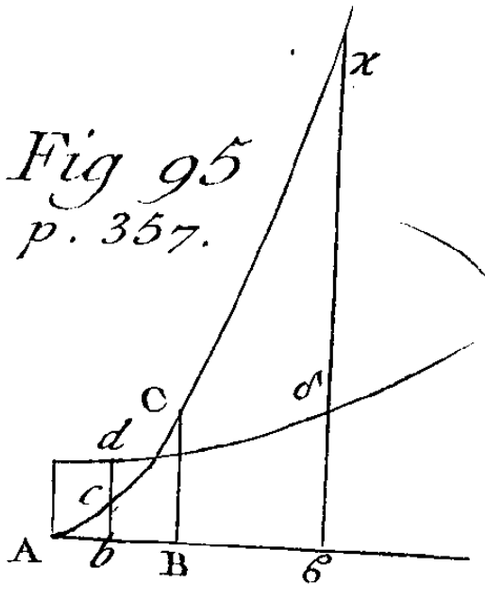


Fig 95

Fig 95
p. 357.



N.° 1.

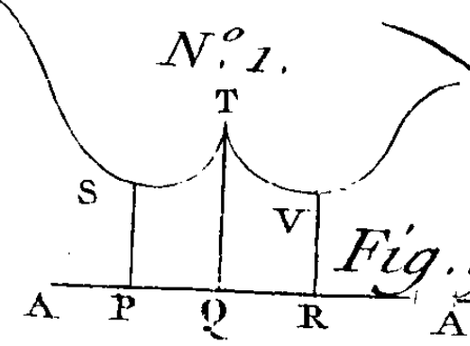
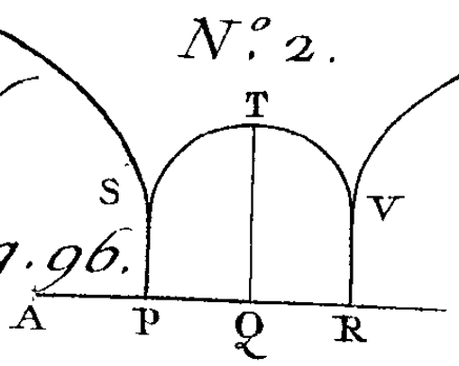


Fig. 96.

N.° 2.



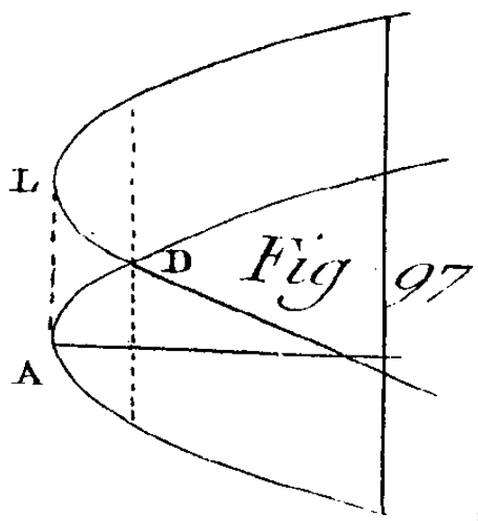
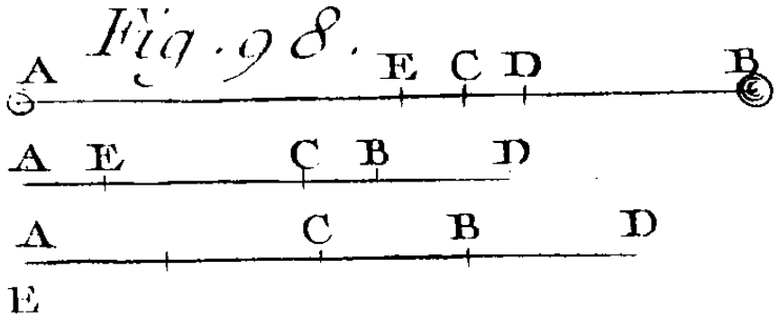
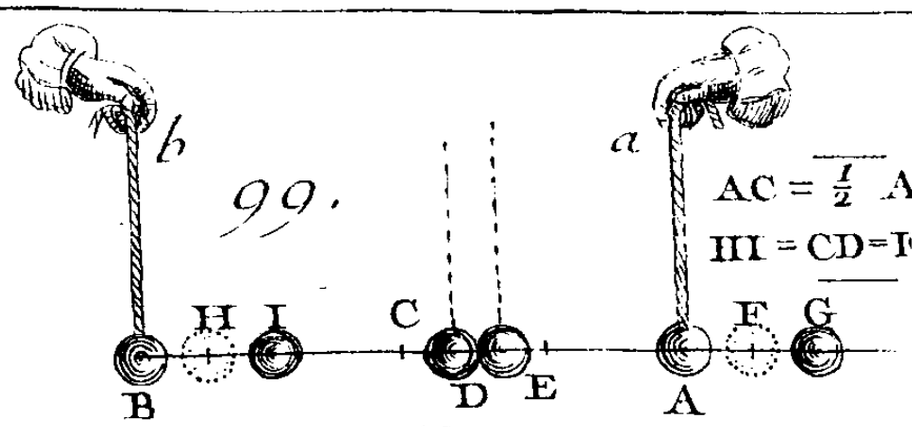
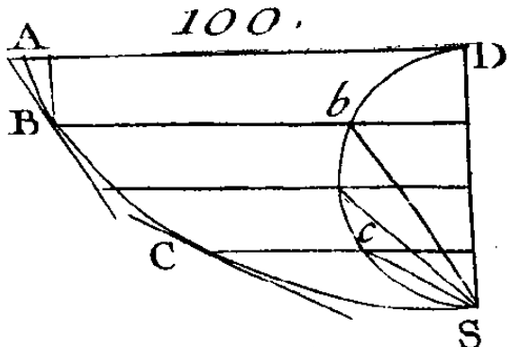


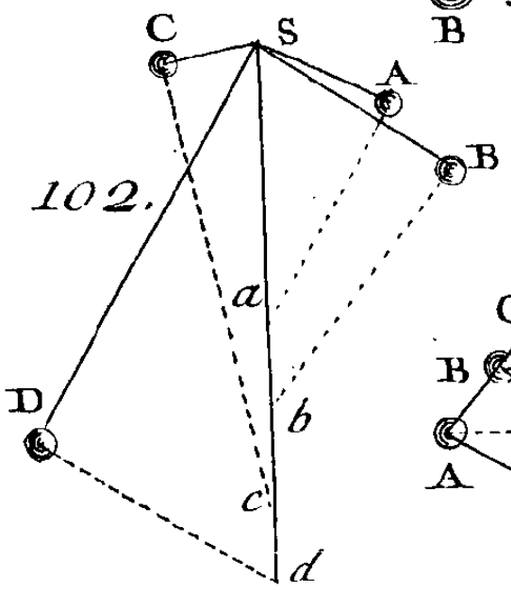
Fig 97

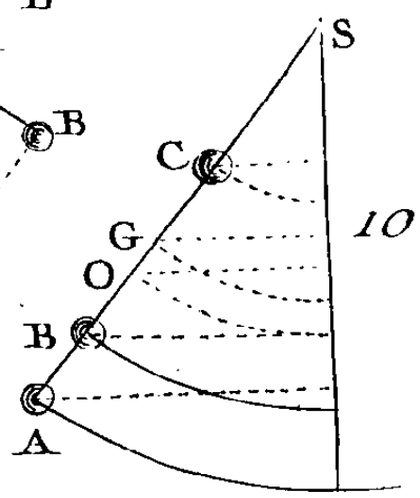
Fig. 98.

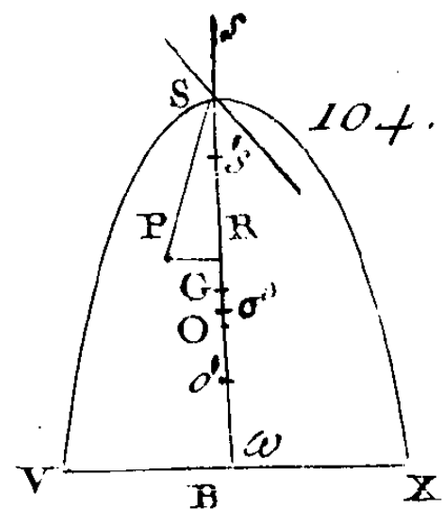

A E C D B
A E C B D
A C B D
E

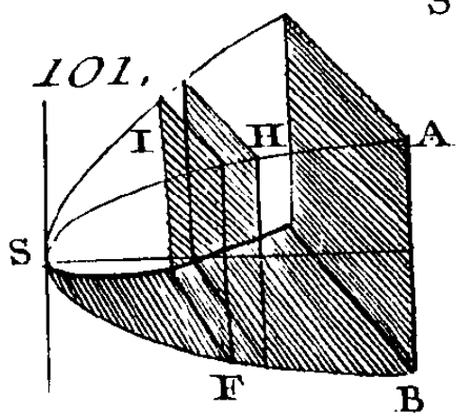

b
99.
a
AC = ½ AB
HI = CD = FG
H I C D E
B
A F G

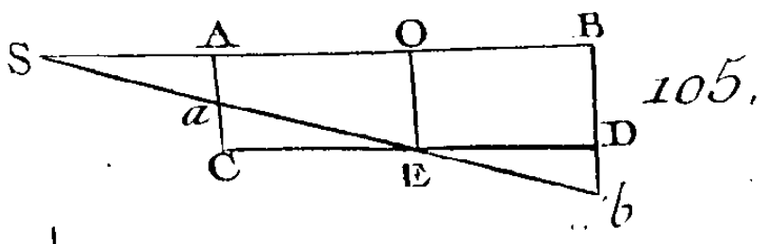

100.
A
D
B
b
c
C
S

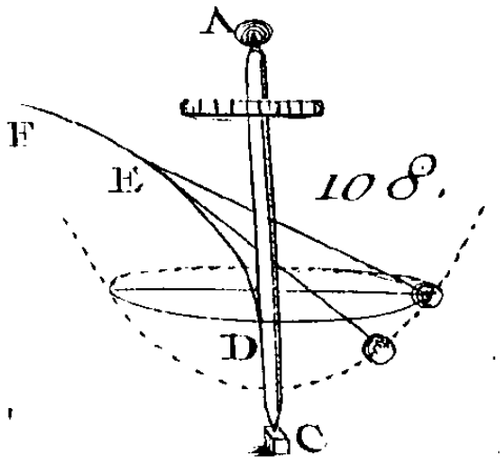

C S A B
102.
a
D
b
c
d

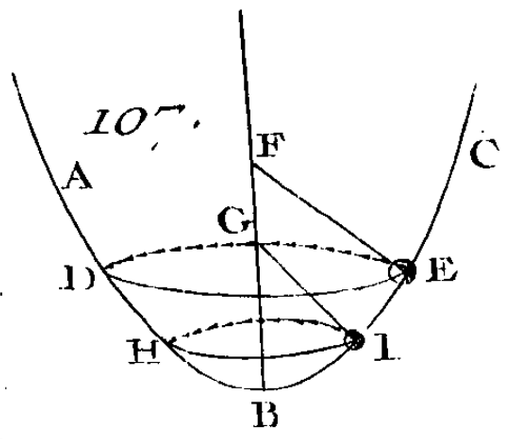

S
C
103.
G
O
B
A

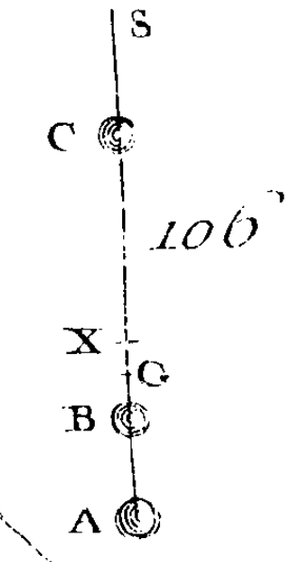

S
104.
S
P R
G
O
o'
ω
V B X

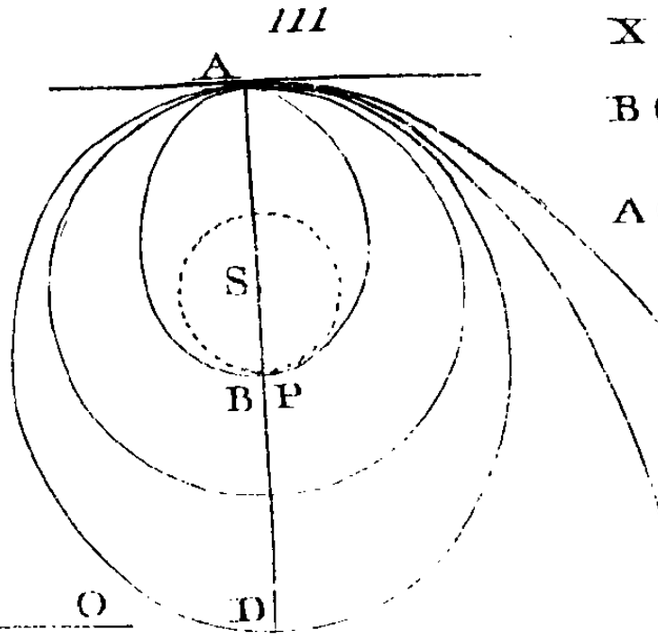

101.
I H A
S
F B

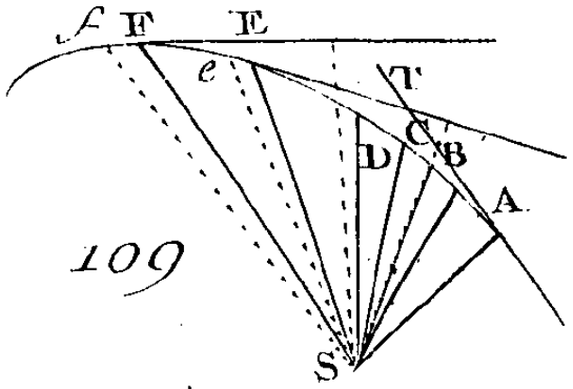

S A O B
105.
a
C E D
b

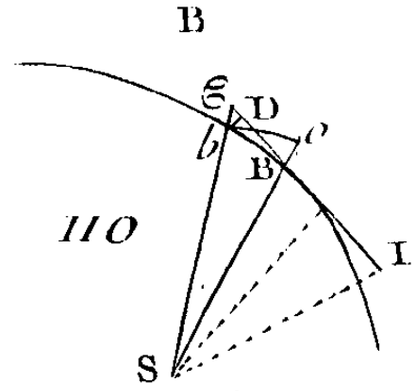

A
F
E
108.
D
C

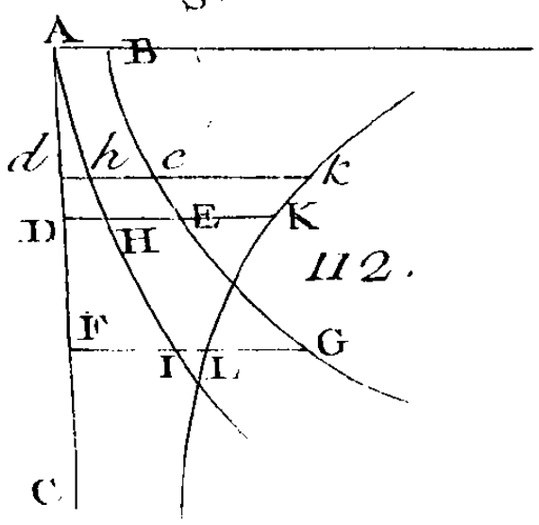

107.
A F C
G
D E
H I
B

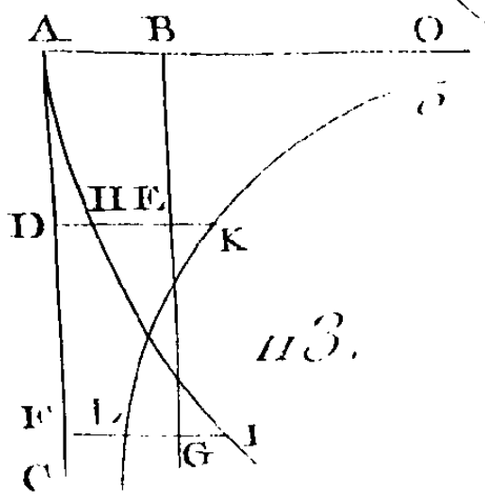

S
C
106
X
G
B
A


111
A
S
B P
D


F E
e
T
C
D B
A
S
109


D
b c
B
I
S
110


A B
d h e k
D H E K
112.
F I L G
C


A B O
D H F K
113.
F L G I
C

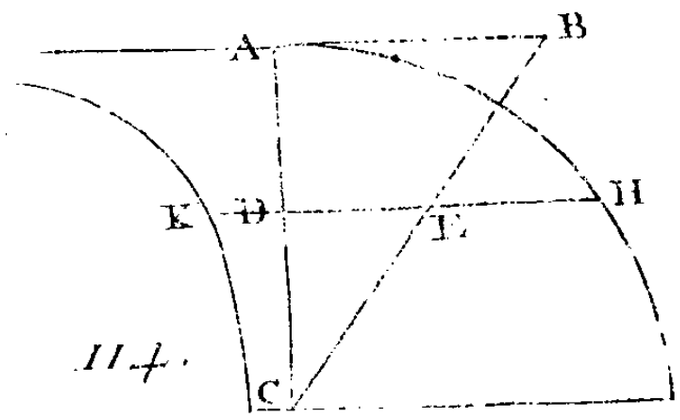

A B
K H E H
C
114.

Fig. 115.

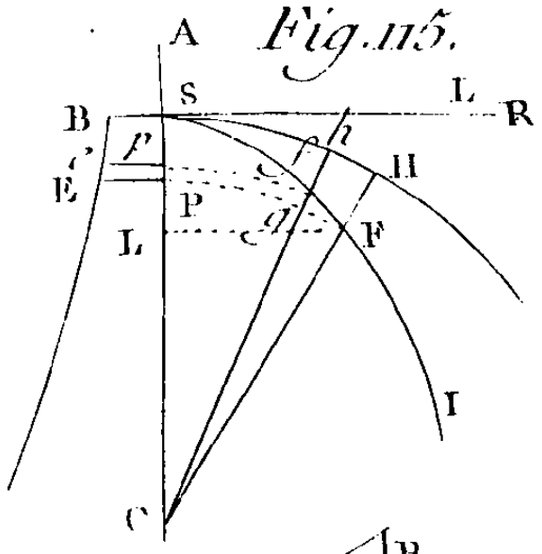


Fig. 116.

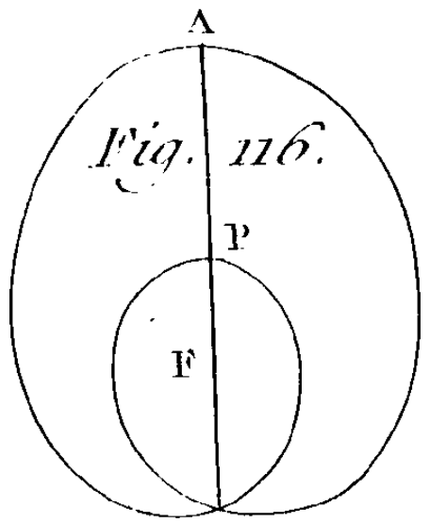


Fig. 116. 2.

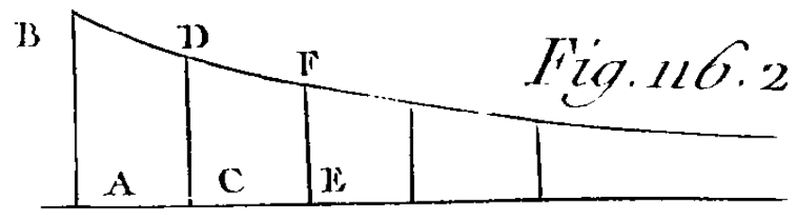
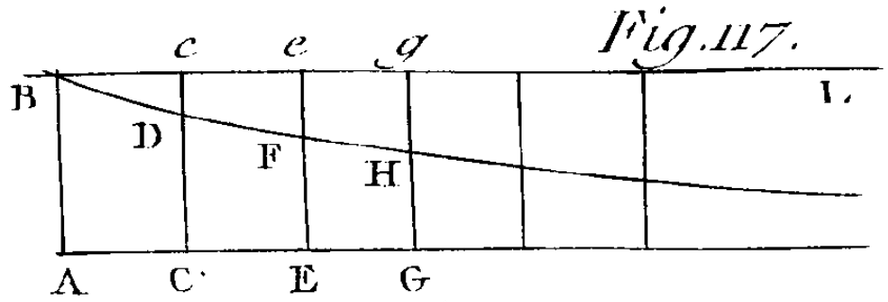


Fig. 117.



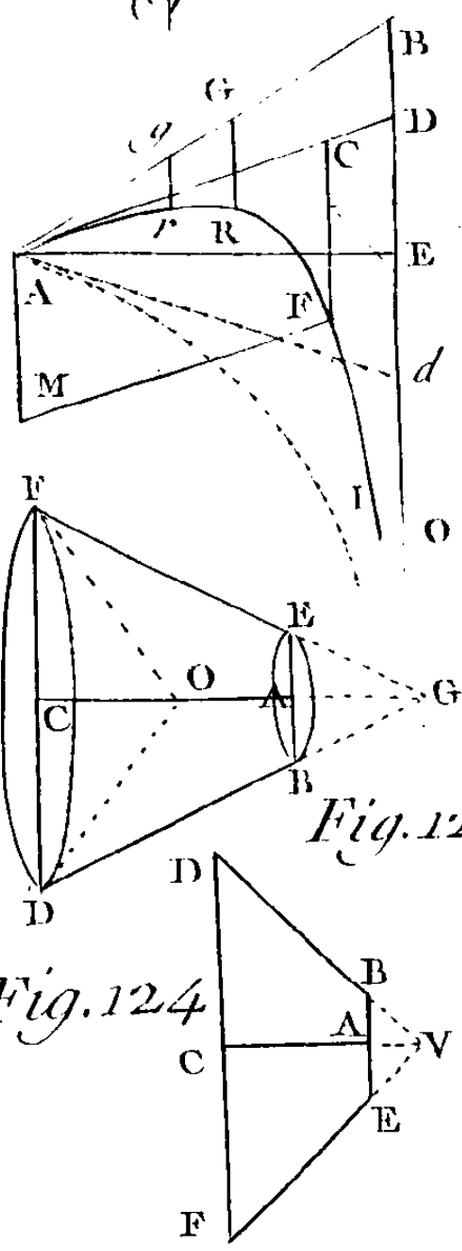


Fig. 119. 2.

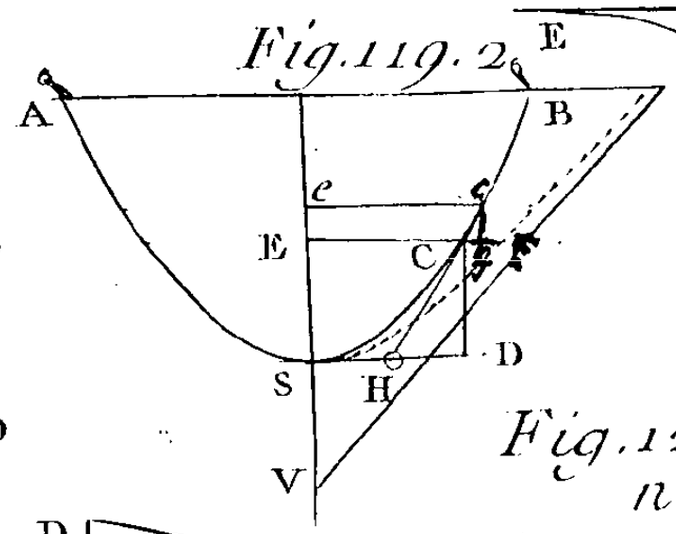


Fig. 119.

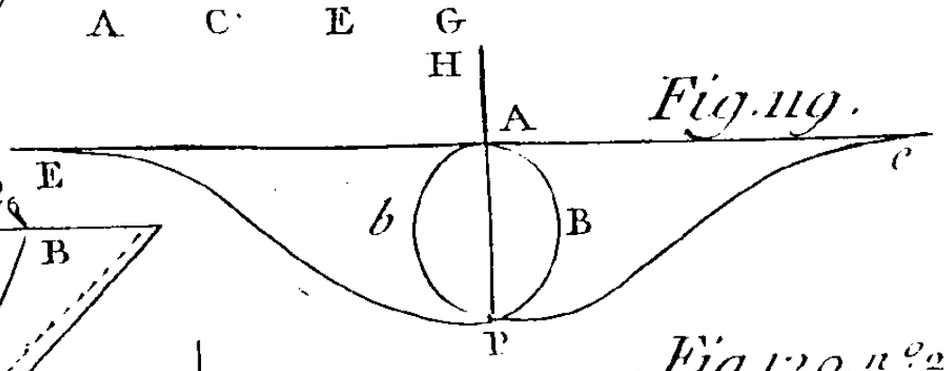


Fig. 120. n.° 2

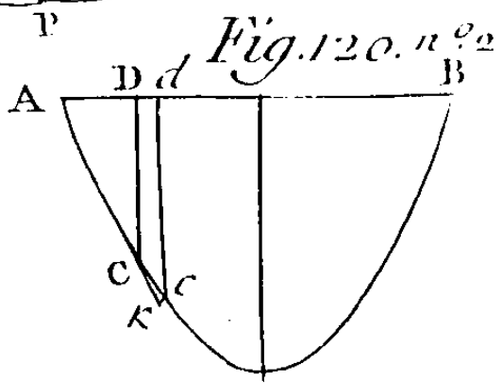


Fig. 120. n.° 1.

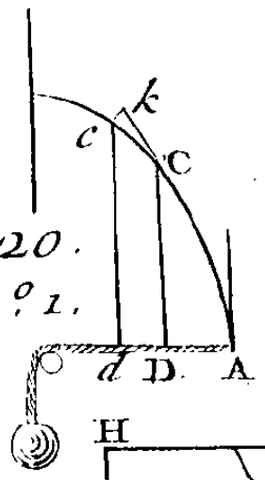
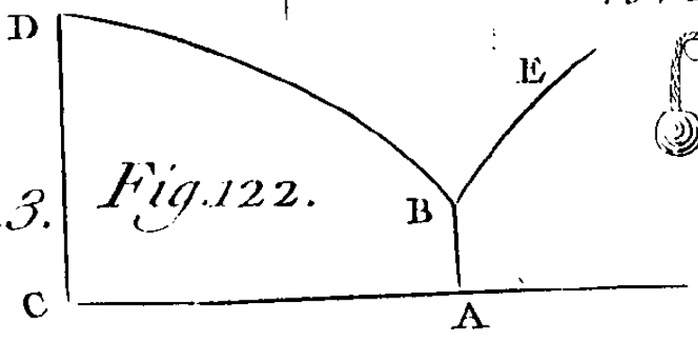


Fig. 123.

Fig. 122.



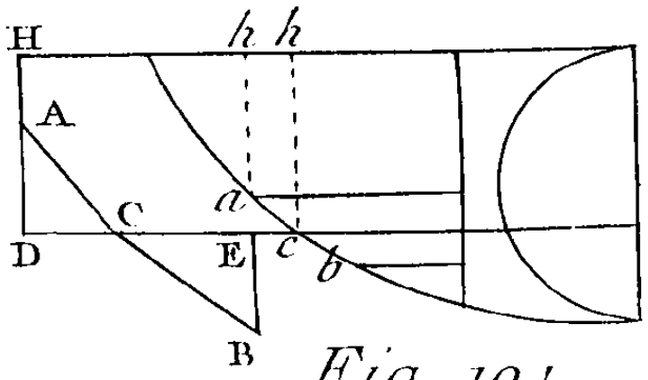
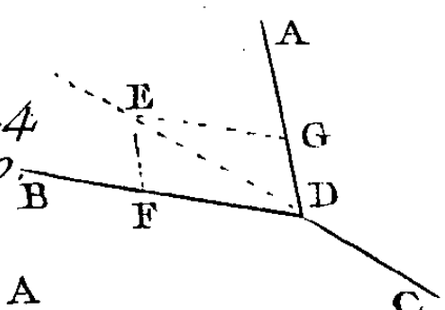


Fig. 121.

Fig. 124

Fig. 124 p. 470.



N.° 5.

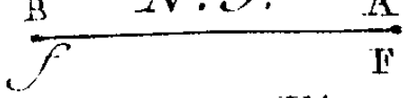
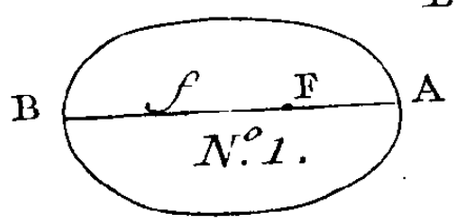
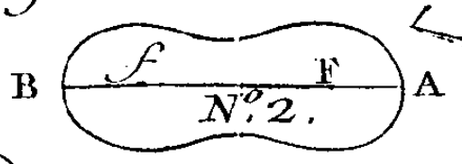
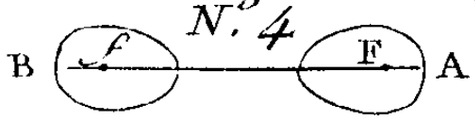


Fig. 125

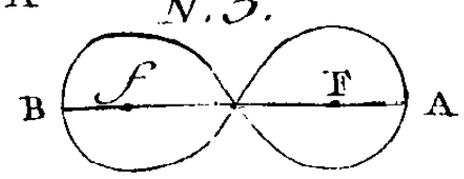




N.° 4



N.° 3.



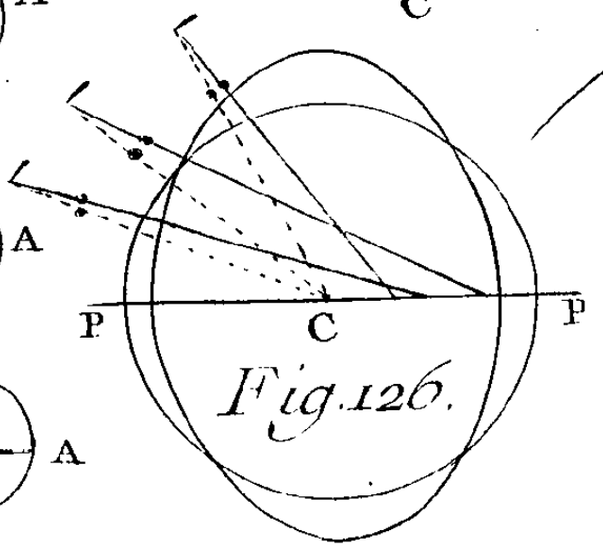


Fig. 126.

Fig. 127.

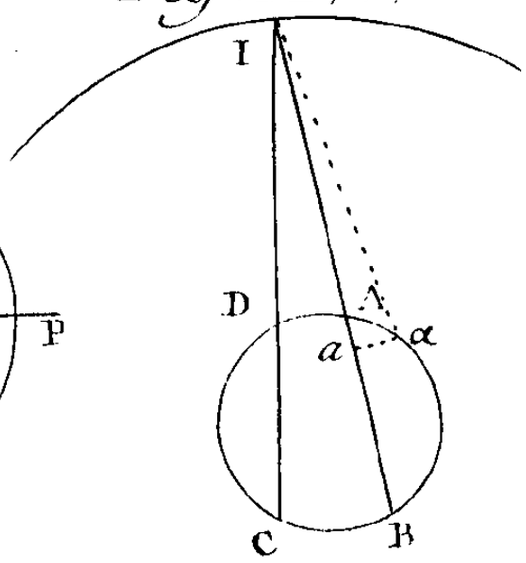


Fig. 129. 2.

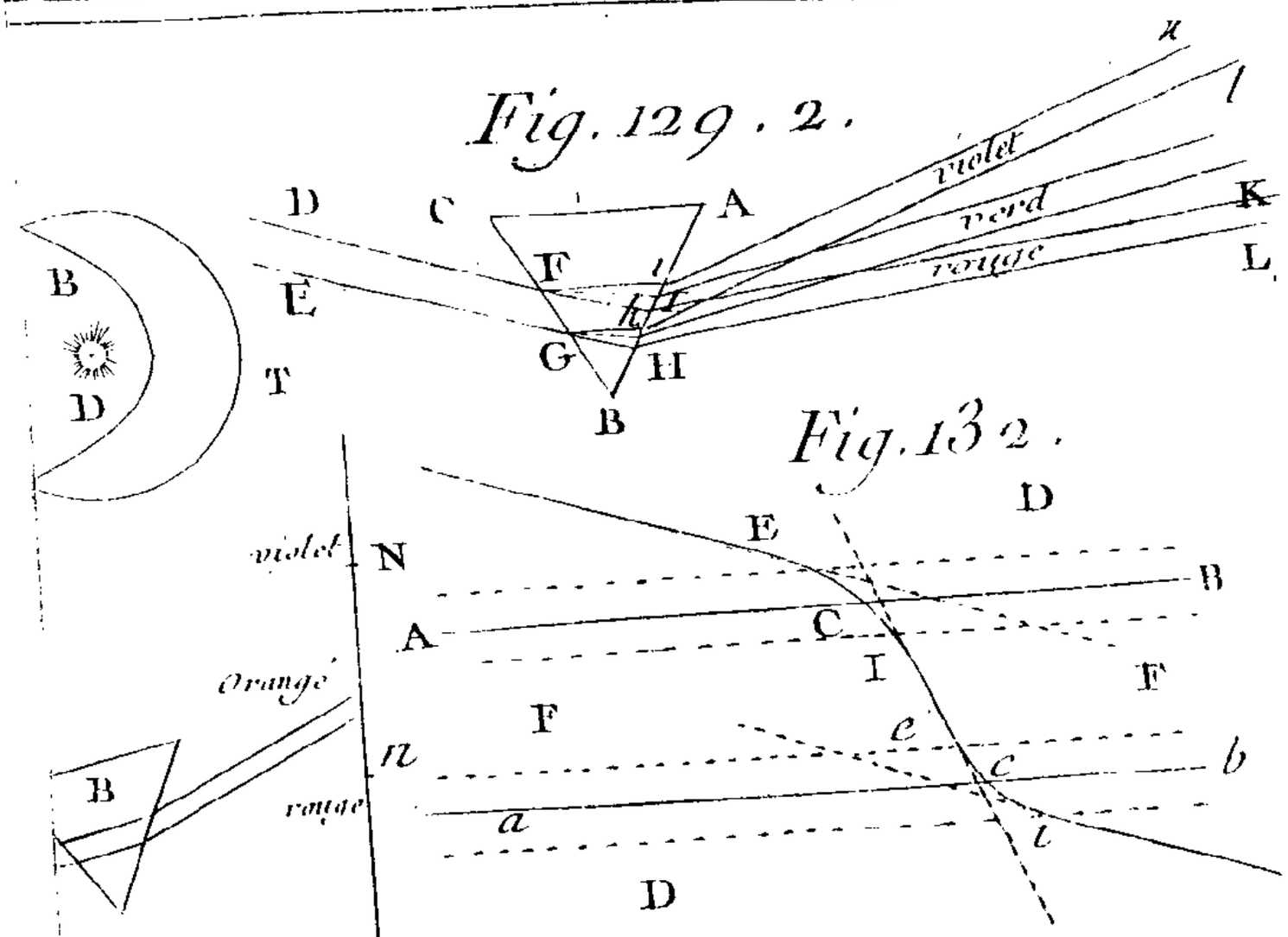

K
l
violet
vert
rouge
K
L
D
C
A
F
E
G
H
B
T
B
D
violet
N
Orangé
rouge
B
Fig. 132.
D
E
B
A
C
I
F
F
e
n
c
b
a
i
D
Fig. 133.
R
E
o
m
e
C
n
c
I
L
K
A
O
M
D
P
137. 2
Fig. 131.
S
B
B.
violet
indigo
bleu
vert
jaune
orange
rouge
bleu
vert
rouge
bleu
vert
rouge
S
E
e
O

Fig. 128.

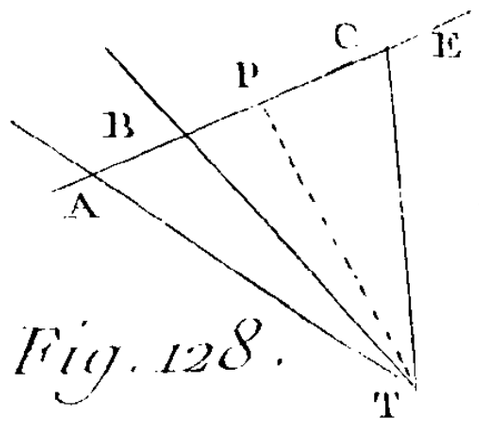


Fig. 129.

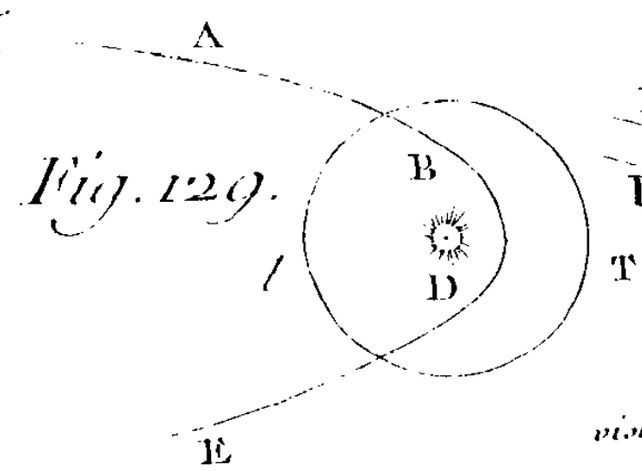


Fig. 129. 2.

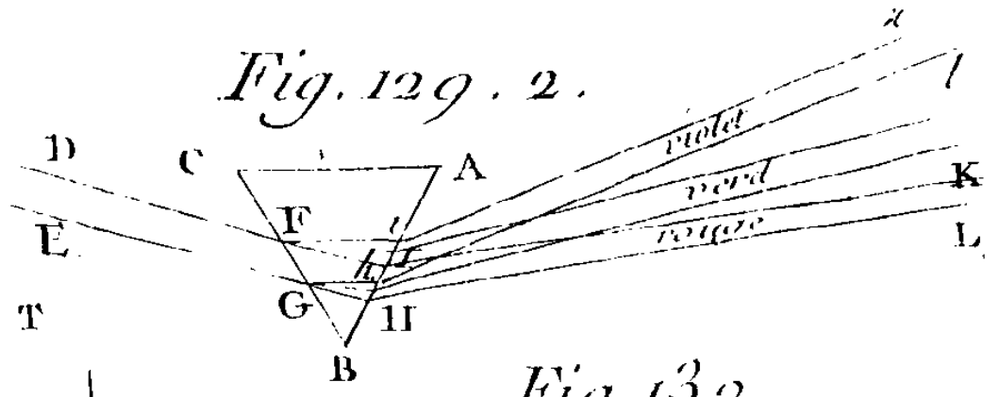


Fig. 130.

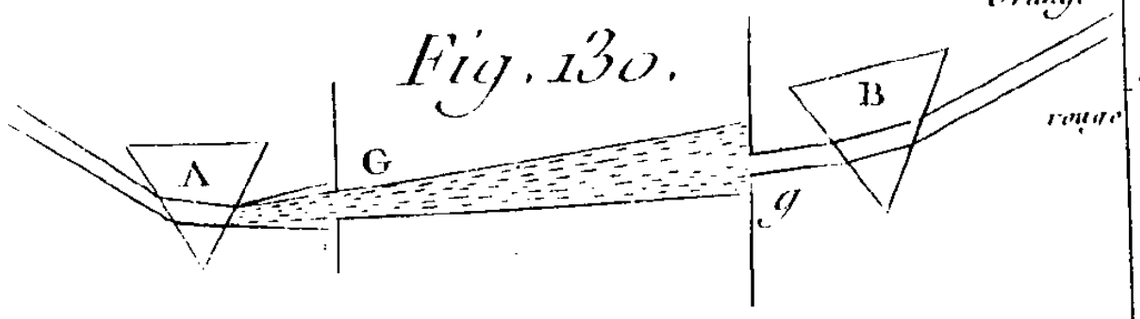


Fig. 132.

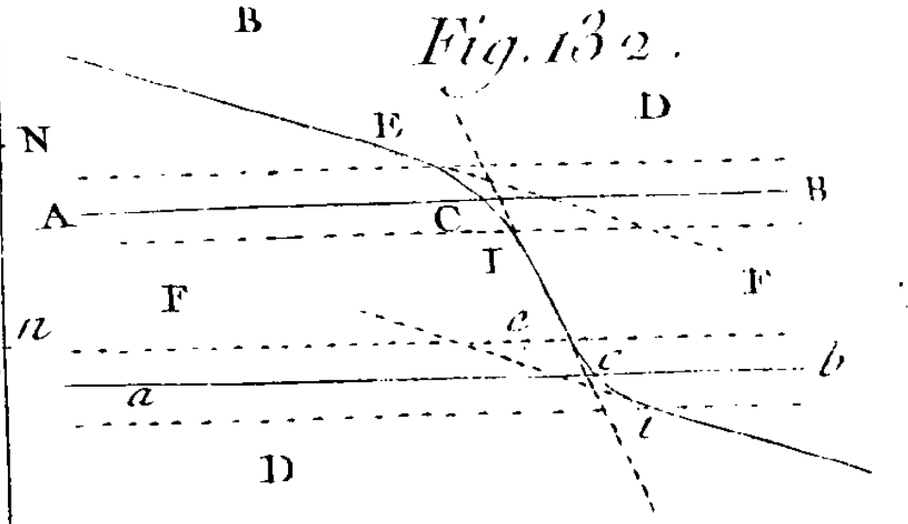


Fig. 133.

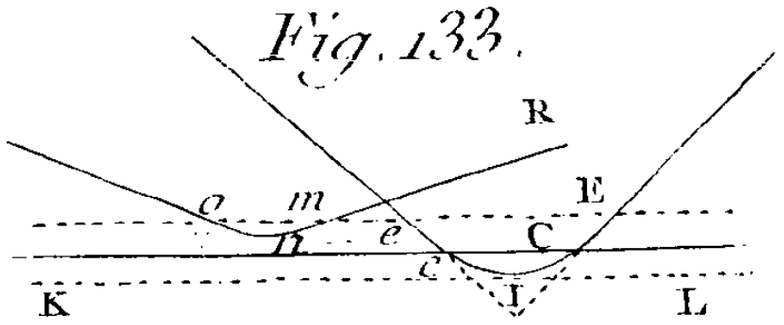


Fig. 134.

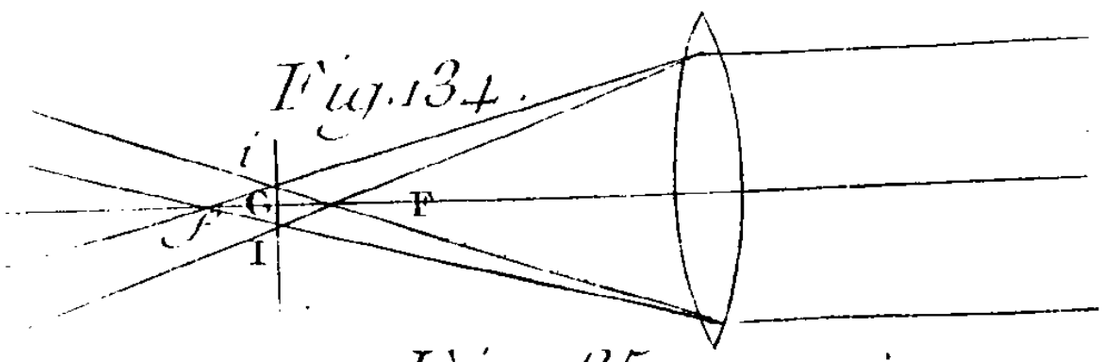
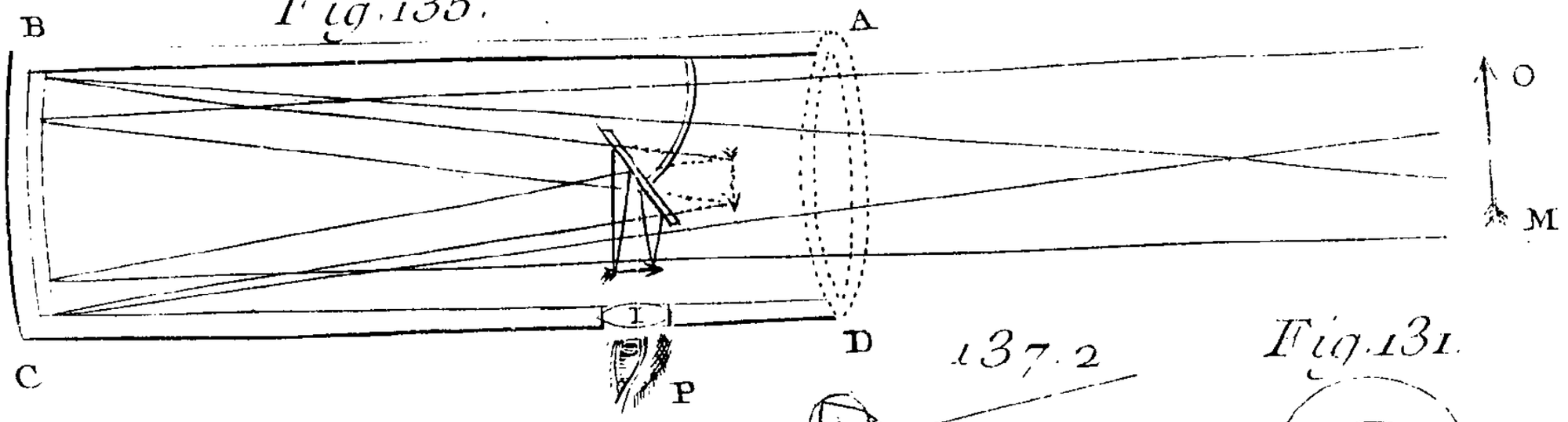


Fig. 135.



137. 2

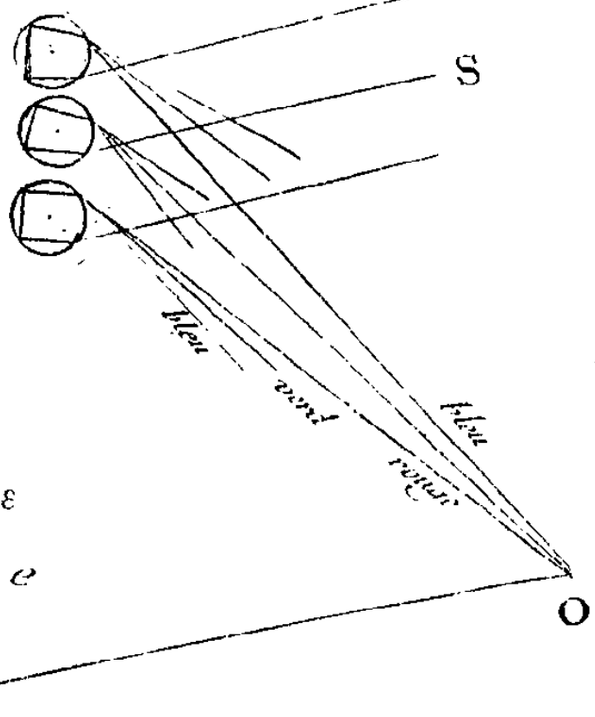
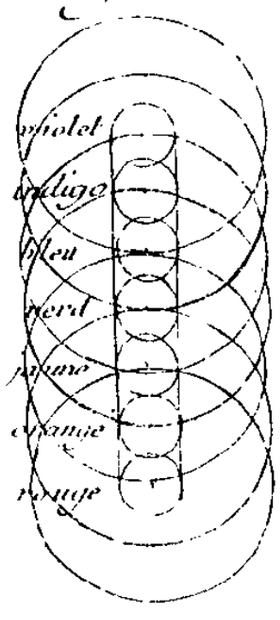
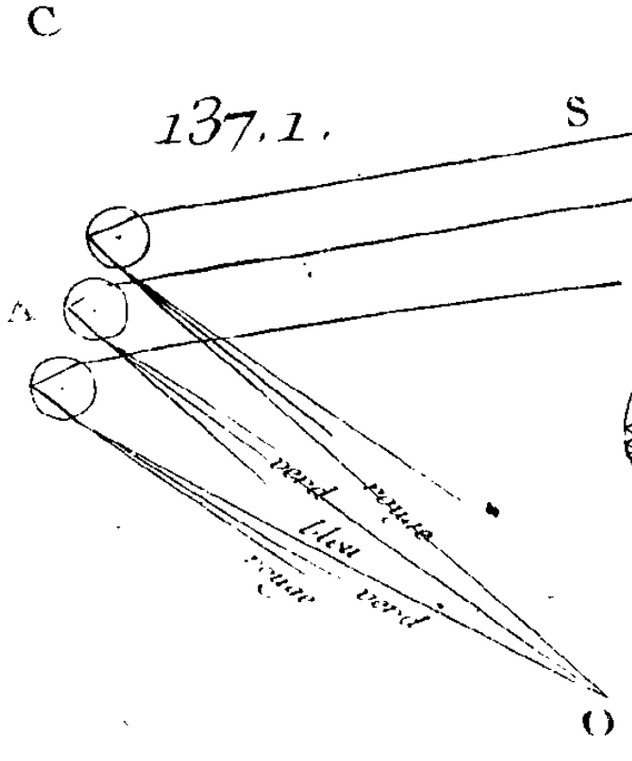


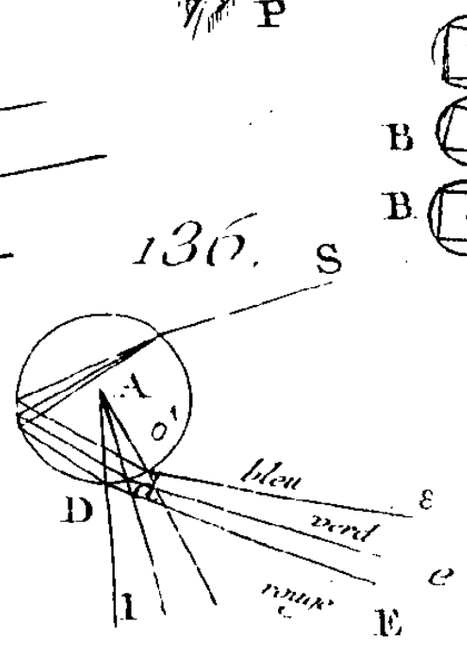
Fig. 131.



137. 1.



136.



TABLE

GENERALE DES MATIERES.

Dans cette Table le chiffre Romain indique le Tome, & le chiffre Arabe la page. Lorſqu'on ne trouve qu'un chiffre Arabe, il ſe rapporte au Romain qui le précede.

A.

Accélération. Voyez mouvement.

Agneſi (Mademoiſelle), écrit ſur l'analyſe. Eloge de ſon ouvrage. II. 155.

Air (la peſanteur de l'). Découverte, & par qui. II. 279 *& ſuiv.* Droit de Deſcartes à cette découverte. 282. Prouvée avec évidence par l'expérience de M. Paſcal. *Ibid.*

Albatenius. Aſtronome Arabe. Sa naiſſance & ſes travaux aſtronomiques. I. 347 *& ſuiv.*

Alfarabius, Mathématicien Arabe. I. 370.

Alfraganus. Aſtron. Arabe. I. 345.

Algebre. Etymologie de ce nom. I. 367. Ce que c'eſt que cette ſcience. 473. Elle eſt connue des Grecs, & en particulier de Diophante. 315. Les Arabes la cultivent; progrès qu'ils y font. 366. Par qui elle eſt tranſplantée en Europe. 441, 476. Ses progrès entre les mains des Italiens juſques vers la fin du ſeizieme ſiecle. 476 *& ſuiv.* Ceux qu'elle doit à Viete. 488 *& ſuiv.* A Harriot. II 76. A Deſcartes. 83. A divers Algébriſtes modernes. 144 *juſqu'à* 159.

Alhazen. Mathématiciens Arabes; l'un traducteur de Ptolomée. I. 304. L'autre Opticien. 352.

Almamoun (le Calife) favoriſe l'Aſtronomie chez les Arabes, & la cultive lui-même. Travaux qu'il ordonne, ou auxquels il a part. I. 342 *& ſuiv.*

Almageſte. Editions & traductions principales de cet ouvrage de Ptolomée. I. 304.

Alpetragius, Aſtron. Arabe. I. 353.

Alphonſe X, Roi de Caſtille, entreprend de rétablir l'Aſtronomie chez les Européens, & avec quels ſuccès. De ſes Tables Alphonſines. I. 418.

Amontons (M.) cultive particuliérement la théorie des frottemens. II. 472.

Analemme, Ancien inſtrument, objet d'un Livre de Ptolomée. I. 306.

Analyſe ancienne. Ce que c'eſt que cette méthode. A qui elle eſt dûe. I. 172. Son uſage éclairci par quelques exemples. *Ibid.*

Analyſe algébrique. *Voyez* Algebre.

Anaxagore de Clazomene, un des Chefs de l'Ecole Ionienne. Ce que lui doivent les Mathématiques. I. 102, 107.
Anaximandre, ſucceſſeur de Thalès, cultive la Géométrie. I. 102. Eſt Auteur de pluſieurs inventions en Aſtronomie. 105.
Anaximene, ſecond ſucceſſeur de Thalès. Opinions ridicules qu'on lui attribue auſſi-bien qu'à quelques autres Philoſophes. Leur défenſe. I. 107 *& ſuiv.*
Angelis (Etienne de), habile Géometre Italien. Ses travaux en Géométrie. II. 69. Sa querelle avec Riccioli ſur le mouvement de la terre. I. 537.
Anomalie. Ce que c'eſt dans l'Aſtronomie. II. Additions. Problême fameux ſur l'anomalie vraie dans l'hypotheſe de Képler, & ſon hiſtoire. II. 210.
Anthemius Trallianus ou de Tralles, Architecte de l'Empereur Juſtinien. Trait curieux ſur les miroirs ardens tiré des écrits de ce Mathématicien. I. 328.
Année. Voyez Calendrier.
Année caniculaire. Hiſtoire de cette ſorte d'année uſitée des Egyptiens. I. 67.
Aphélie. Mauvaiſe objection tirée du mouvement des aphélies des planetes contre l'attraction. II. 556.
Apogée du Soleil. Découverte de ſon mouvement par Albatenius. I. 348.
Appollonius Pergæus ou de Perge, fameux Géometre Grec. Son hiſtoire, & celle de ſes découvertes & de ſes ouvrages. I. 256 *& ſuiv.*
Appianus (Pierre), Aſtronome Allemand, du ſeizieme ſiecle. I. 506.
Approximations de la grandeur du cercle trouvées par divers Géometre. I. 234, 265, 467, 468. II. 305, 317, 332.
Approximations de la valeur des racines des équations. Diverſes méthodes données pour cela par les Géometres. II. 144, 150 *& ſuiv.*
Arabes. Hiſtoire des progrès de ce peuple dans les diverſes parties des Mathématiques. I. Partie II. Liv. I.
Aratus, Auteur d'un Poëme Grec ſur les conſtellations. I. 227.
Archimede. Naiſſance de cet ancien Géometre Grec. Récit de ſes diverſes découvertes géométriques & méchaniques. I. 231 *& ſuiv.* Hiſtoire de ſes miroirs diſcutée. 245. Des autres inventions qu'on lui attribue. 243. De ſes écrits, de leurs éditions & Commentaires principaux. 249.
Arc-en-Ciel. Ignorance des Anciens ſur ce ſujet. I. 630. Antonio de Dominis démêle la cauſe de l'arc-en-ciel intérieur. *Ibid.* Il ſe trompe en ce qui concerne l'arc extérieur. 631. Deſcartes redreſſe de Dominis, & ajoute pluſieurs choſes à ſon explication. II. 201. Elle eſt conduite à ſa perfection par M. Newton. 648. Curieuſes recherches de M. Hallei ſur les arcs-en-ciel. 656.
Architas, Géometre Pyth. De ſes travaux. I. 137.
Ariſtarque de Samos. Son hiſtoire & celle de ſes inventions aſtronomiques. I. 228.
Ariſtée, ancien Géometre Platonicien. I. 203.
Ariſtille, Aſtronome d'Alexandrie. I. 227.
Arithmétique ancienne. Diverſes choſes qui la concernent. I. 119.
Arithmétique moderne. Son origine.

I. 360. Son antiquité parmi nous. *Ibid.* 415.
Arithmétique binaire ou dyadique. Ce que c'eſt. I. 59. Soupçonnée être celle des anciens Chinois. *Voyez* les additions du premier volume.
Armilles, inſtrumens de l'ancienne Aſtronomie. I. 301.
Arſachel, Aſtronome Arabe. I. 351.
Aſcenſionnelles (du principe des forces). II. 272.
Aſymptotes des courbes. Méthode pour les déterminer. II. 108.
Aſtronomie. Son objet, ſes diviſions, & les branches qui en dépendent. I. 13. Origine, & premiers traits de l'hiſtoire de cette ſcience. 53 *& ſuiv.* Conjectures ſur ce qu'elle fut chez les Caldéens. 59. Chez les Egyptiens. 64. Chez les anciens Grecs. 71. Elle eſt tranſplantée en Grece par Thalès. 103. Progrès qu'elle fait entre ſes mains, & celles de divers autres Philoſophes, entr'autres Pythagore. 103, 114. Elle eſt fort cultivée à Alexandrie. 226. Elle fait de grands progrès par les ſoins d'Hipparque. 268. Et enſuite par ceux de Ptolomée. 286 *& ſuiv.* Tableau de l'Aſtronomie pratique chez les Anciens. 299. Elle eſt fort accueillies des Arabes. Son hiſtoire chez ces peuples. Part. II. Liv. I. Son hiſtoire chez les Européens durant les ſiecles du moyen âge. 414, 418. Elle renaît en Europe durant le quinzieme ſiecle, & par les ſoins de qui. 442 *& ſ.* Son hiſtoire durant le XVIe ſiecle. 503. Ses progrès durant la premiere moitié du dix-ſeptieme. II. Livre IV. Et pendant la ſeconde moitié de ce même ſiecle. *Ibid.* L. VIII.
Athélard, Mathématicien Anglois du treizieme ſiecle. Ce qu'on lui doit. I. 417.
Autolicus, ancien Ecrivain Grec ſur l'Aſtronomie. I. 210.
Auzout (Adrien), Aſtronome François du dix-ſeptieme ſiecle, perfectionne le Micrometre, &c. II. 502.

B.

BACHET de Meziriac, commente les queſtions arithmétiques de Diophante. I. 319.
Bâcon (Roger). Son hiſtoire. Diſcuſſion du droit qu'il a à certaines inventions qu'on lui attribue. I. 421 *& ſuiv.*
Bagdadin, ou Mehemet de Bagdad, Géometre Arabe, auteur d'un Traité de Géodéſie. I. 399.
Baker, inventeur d'une certaine regle pour la conſtruction des équations ſolides. II. 143.
Baliani. Son hypotheſe ſur l'accélération du mouvement des corps graves. II. 271. Défaut de cette hypotheſe. 272. Elle eſt réfutée par Gaſſendi & Fermat. 273.
Barlaam (le Moine), Mathématicien Grec du bas Empire. Ses ouvrages. I. 331.
Barrow (Iſaac). Note abrégée contenant la vie de ce Mathématicien, & ſes ouvrages. De ſes *Leçons géométriques*, & en particulier de ſa méthode des tangentes. II. 310. De ſes *Leçons optiques*. De ſon ſentiment ſur le lieu de l'image dans les miroirs, ou à travers un milieu réfringent. 597.
Bayer (Jean). De ſon *Uranométrie*. II. 251.
Beaune (M. de) accueille le premier en France la Géométrie de Deſcartes. II. 120. Eleve le premier la queſtion des tangentes

inverſe. 121. Il travaille ſur les limites des équations. 122.

Bernoulli (Jacques). Abrégé de ſa vie. II. 356. Il accueille le premier dans le continent la nouvelle Géométrie de Léibnitz. Progrès rapides qu'il y fait. 355. Il propoſe le problême de la chaînette, celui de l'élaſtique, de la voiliere, &c. Hiſtoire de ces problêmes. *Ibid.* 446. On verra d'autres choſes concernant ce Mathématicien célebre dans le volume ſuivant.

Bernoulli (Jean), frere cadet du précédent, entre preſqu'en même temps que lui dans la carriere de la nouvelle Géométrie, & y fait des pas rapides. II. 356. Invente le calcul exponentiel. *Ibid.* Aide M. de l'Hôpital à pénétrer dans cette même méthode. 358. Prend le parti de Léibnitz dans ſa querelle avec Newton. 341. Il tâche de concilier les tourbillons de Deſcartes avec les phénomenes. 246. Propoſe le problême de la courbe de la plus courte deſcente. *Ibid.* 452. Ses démêlés avec ſon frere à cette occaſion. 457.

Béroſe, Aſtronome ou Aſtrologue Caldéen établi en Grece. I. 64.

Billy (le Pere de), Jéſuite, cultive avec ſuccès l'analyſe de Diophante. I. 319, 321.

Blaeu (Guillaume Janſon), Géographe Hollandois, meſure la terre. II. 233.

Blanchin ou *Bianchini* (Jean), Aſtronome du quinzieme ſiecle. I. 454.

Boece cultive & tâche de faire fleurir les Mathématiques ſous les Rois Gots. Ses travaux en ce genre. I. 413.

Bombelli (Raphael), Algébriſte Italien, écrit ſur l'Algebre, & y fait des découvertes. I. 485.

Borel (Pierre), Hollandois, recherche l'origine du Téleſcope par voie judiciaire. II. 167 *& ſuiv.*

Borelli (Jean-Alphonſe), Mathématicien Sicilien. Il retrouve trois des quatre derniers Livres des coniques d'Appollonius, & les publie. I. 261. Sa vie abrégée & ſes ouvrages. II. 475. Il écrit ſur les loix du mouvement. *Ibid.* Sur la méchanique des animaux. 476. Sur la théorie de Satellites de Jupiter. 597.

Bouillaud (Iſmael), Aſtronome François. Hiſtoire abrégée de ſa vie & de ſes écrits. II. 253.

Brachyſto-chrone. Voyez deſcente.

Bradley (Jacques). Ses efforts pour déterminer la parallaxe annuelle des fixes, & à quoi ils aboutiſſent. I. 551.

Briggs (Henri), Mathématicien d'Oxford, accueille le premier l'invention des logarithmes, & en publie les premieres Tables. II. 12.

Brouncker (Milord). Suite d'une forme particuliere qu'il trouve pour le cercle. II. 305. Autre ſuite qu'il donne pour l'hyperbole. 306.

Byrge (Juſte), Mathématicien & Méchanicien du Landgrave, invente, au rapport de Képler, les logarithmes, &, ſuivant un autre, le pendule. I. 471, 557.

Buteon, Algébriſte du ſeizieme ſiecle, ſe ſert le premier des Lettres. I. 486, 501. Il réfute les paralogiſmes d'Oronce-Finée. 465.

C.

CABASILLA, Aſtronome du bas Empire. I. 332.

Calcul différentiel, intégral, exponentiel. *Voyez* différentiel, intégral, exponentiel.
Cadrans. Voyez Gnomonique.
Calendrier. Hiſtoire du Calendrier Grec. I. 163. Celle du Calendrier moderne. 581.
Caldéens. Ils paſſent pour les inventeurs de l'Aſtronomie. I. 57. Leurs progrès dans ce genre. Périodes qu'on leur attribue. *Ibid.* 59 & *ſuiv.*
Calippe, Aſtronome Grec. De ſa période. I. 168.
Campanus ou *Campani* de Novarre, Mathématicien du treizieme ſiecle, travaille à relever les Mathématiques oubliées. Ses écrits. I. 416.
Campani, Obſervateur & Artiſte célebre pour les verres de Téleſcopes. II. 6.
Caravagius, Géometre Italien. II. Additions.
Cardan écrit ſur l'Algebre, & y fait quelques découvertes intéreſſantes. I. 481.
Cartes hydrographiques. Leur invention. Leurs différentes ſortes. I. 609 & *ſuiv.*
Caſſini (Dominique). Hiſtoire de cet Aſtronome célebre, de ſes travaux, & de ſes découvertes. II. 491 & *ſuiv.*
Caſſiopée. De la nouvelle étoile qui parut dans cette conſtellation. I. 576 & *ſuiv.*
Caſtel (le P.) attaque Newton ſur divers points, & avec quel ſuccès. II. 428, 628. De ſon claveſſin oculaire. *Ibid.* Eloges outrés qu'il donne à Grégoire de Saint-Vincent. 64.
Caſtelli (Benoît) démêle le premier quelques-uns des vrais principes du cours des fleuves. II. 277.
Catalan (l'Abbé de) déprime le calcul différentiel. II. 360. Sa querelle avec M. Huyghens ſur les centres d'oſcillation. 398.
Cavalleri (Bonaventure). Abrégé de ſa vie. II. 25. De ſa Géométrie des indiviſibles. Précis & eſprit de cette méthode. 26. Querelle qu'il eſſuye à ce ſujet de la part du P. Guldin, &c. 22.
Cauſtiques: ce que c'eſt que les courbes auxquelles on donne ce nom. Leur invention par M. de Tſchirnhauſen. II. 344.
Centre de gravité. Recherches d'Archimede ſur ce centre. I. 241. Progrès de cette théorie. II. 5, 32. Uſage du centre de gravité pour la dimenſion des figures. I. 325. II. 12.
Centres d'oſcillations (théorie des). Hiſtoire & précis de cette théorie. II. 387 & *ſuiv.*
Ceva (Thomas & Jean), Géometres Italiens. II. 72.
Ceulen (Ludolph van). Son approximation de la grandeur du cercle. I. 467.
Chaînette (problême de la). Son hiſtoire. II. 446.
Cheou-king ou *Co-cheou-king*, Aſtronome Chinois. I. 397.
Cherubin (le P.), Auteur d'Optique. II. 605.
Chinois. Hiſtoire des différentes parties des Mathématiques, & entr'autres de l'Aſtronomie chez ce peuple. I. 381 & *ſuiv.*
Choc des corps (loix du). *Voyez* mouvement.
Claramonti (Scipion), Péripatéticien obſtiné, écrit contre Tycho, Képler, Galilée, &c. I. 569.
Clavius (Chriſtophe), Jéſuite, Mathématicien célebre. Caractere de ſes écrits. I. 412. Il expoſe le Ca-

lendrier Romain, & le défend contre ſes adverſaires. 591 & *ſuiv.*
Cléomede, Ecrivain Grec ſur l'Aſtronomie. I. 280.
Cometes (les), reconnues par quelques Anciens pour des planetes. I. 117. Tycho démontre la petiteſſe de leur parallaxe. 568. Progrès de la théorie des Cometes juſqu'à Newton, & juſqu'à nos jours incluſivement. II. 563 & *ſ.*
Commandin (Féderic). Ses travaux Mathématiques. I. 460, 463.
Compas de proportion. Quelques mots ſur ſon inventeur. I. 471.
Conchoïde. Courbe inventée par Nicomede. Sa génération, & ſes uſages. I. 257.
Coniques (ſections). Leur génération, & leur hiſtoire chez les Anciens. I. 178, 257.
Conon de Samos, Géometre ancien. I. 266.
Conſtellations. Origine de nos conſtellations. Divers ſentimens ſur ce ſujet diſcutés. I. 73 & *ſuiv.*
Contingence (angle de). Diverſes querelles élevées ſur ce ſujet entre les Géometres. I. 464.
Copernic (Nicolas). Quelques traits de la vie de cet homme célebre. I. 507. Il remet en honneur l'ancienne opinion du mouvement de la terre, & le vrai ſyſtême de l'Univers. Développement de ſes idées ſur ce ſujet. 508. Avantages & preuves de ce ſyſtême. 511. Hiſtoire des objections & des perſécutions qu'il a eſſuyées. I. 520 & *ſuiv.*
Courbes. Application de l'Algebre à la théorie des courbes. II. 91.
Crabtrée, Aſtronome Anglois. II. 239.
Ctéſibius, Méchanicien d'Alexandrie. Ses inventions. I. 277.
Curtius (Albert), publie les obſervations de Tycho. I. 574.
Cuſa (le Cardinal de), Mathématicien fort peu eſtimable du quinzieme ſiecle. I. 442.
Cycle. Hiſtoire des principaux cycles pour accorder le mouvement du Soleil & de la Lune. I. 165 & *ſuiv.* 588, 597.
Cycloïde, courbe célebre. Son hiſtoire, &c. II. 42. Quelques-unes de ſes propriétés remarquables. *Ibid.* 59, 60.
Cyſſoïde, courbe inventée par Diocles : à quoi il l'employe. I. 328.

D.

DANTE (Egnazio) écrit ſur la perſpective. I. 635. Sa méridienne. II. 491.
Déformation. Jeu d'optique. Quel en eſt l'inventeur, & quels ſont les Auteurs qui en ont écrit. I. 637.
Degré terreſtre. Tentatives des Anciens pour en connoître la grandeur. I. 253, 279. Travaux des Arabes pour le même objet. 343. Ceux des Modernes durant le dix-ſeptieme ſiecle. II. 231 & *ſuiv.* 507.
Démocrite. Ses ouvrages Mathématiques. Traits remarquables de ſa Philoſophie. I. 141.
Deſargues, Géometre contemporain & ami de Deſcartes. II. 61, 469.
Deſcartes. Quelques traits de ſa vie. II. 83. Ses découvertes dans l'analyſe des équations, & ſa défenſe contre Wallis. 84 & *ſuiv.* De ſon application de l'Algebre à la Géométrie. 91 & *ſuiv.* De ſa méthode des tangentes. 103. Progrès de la Géométrie de Deſcartes. 118. De ſa démonſtra-

tion de la loi de la réfraction. Querelle élevée à ce ſujet. 184. De ſes inventions dioptriques. 196. Il perfectionne l'explication de l'arc-en-ciel de de Dominis en pluſieurs points. 201. De ſes tourbillons. 243. De ſes droits aux découvertes de Torricelli & de Paſcal. 282. De ſes loix du choc des corps. Leur fauſſeté développée. 288. De ſon explication de la peſanteur. 292. Ses démêlés avec Roberval ſur les centres d'oſcillation. 390.

Deſchales (le P.) voyez les additions du II. volume.

Deſcente (problême de la courbe de la plus courte). Son hiſtoire. II. 452.

Dettonville. Voyez Paſcal.

Développée. Ce qu'on appelle de ce nom. Précis de cette théorie inventée par M. Huyghens. II. 129.

Différences. Voyez différentiel.

Différentiel (calcul). Expoſition des principes de ce calcul. En quoi il differe de celui de M. Newton, & en quoi il lui reſſemble. II. 352. Ses progrès dans le continent, & à qui ils ſont dûs. 355 *& ſuiv.* Querelles qu'il eſſuye. 360. Récit de la querelle entre Newton & Léibnitz ſur ſa découverte. 333.

Diffraction. Voyez Inflection.

Dinoſtrate, Géometre de l'Ecole de Platon, réputé inventeur de la quadratrice. I. 198.

Diocles. Géometre Grec. Inventeur de la cyſſoïde. I. 328.

Dionyſiodore. Habile Géometre Grec. I. 280.

Diophante. Arithméticien Grec. Dans quel temps il vit. Quel genre de queſtions arithmétiques il traite. I. 315. Il y employe l'Algebre. Précis de ſa méthode. 316 *& ſuiv.* Son épitaphe ſinguliere. 318. Ecrivains qui ont commenté ſon ouvrage, ou qui ont cultivé ce genre de queſtions. 319.

Dioptrique. Foibleſſe de la dioptrique chez les Anciens. I. 625. Ses progrès chez les Modernes entre les mains de Képler, Snellius, Deſcartes, &c. II. Part. IV. Liv. III. Voyez Lumiere.

Divini (Euſtache), Artiſte célebre de verres de Téleſcopes: il écrit contre M. Huyghens. II. 481.

Doerfell (George-Samuel), Aſtronome Saxon, propoſe le premier l'hypotheſe parabolique des Cometes. II. 569.

Donnés. Ce qu'on entend par-là en Géométrie. Ouvrage d'Euclide ſur ce ſujet. I. 225.

Dominis (Marc-Antoine *de*), ébauche la vraie explication de l'arc-en-ciel. I. 630 *& ſuiv.*

Drebbel (Cornelle), Hollandois, découvre, dit-on, le Microſcope. II. 167, 174. Erreur ſur ſon ſujet. *Ibid.* 174.

Duplication du cube (problême de la). Son hiſtoire. Solutions diverſes qu'en donnent les Anciens. I. 186.

Dynamique. Ce que c'eſt. I. 12. *Voyez* pour le ſurplus *Méchanique.*

E.

Eclipses. Quels ſont les premiers qui les aient prédites, & qui ont reconnu leur cauſe. I. 65, 103, 110, 114.

Eclyptique. Qui a reconnu le premier l'obliquité de l'écliptique. I. 103. Divers Philoſophes à qui on fait honneur de cette décou-

verte. *Ibid.* Des diverſes meſures de l'obliquité de l'écliptique chez les Anciens. 106, 209, 255, 345, 346.

Egyptiens. Ils ſe vantent d'avoir donné naiſſance à la Géométrie & à l'Aſtronomie. I. 51, 57. Conjectures ſur les progrès qu'ils avoient faits dans la premiere. 52. Monumens qui nous reſtent de leur ſçavoir en Aſtronomie. 65. Ancienne ſphere Egyptienne tirée d'Aben-Eſra. 86.

Eimmart (Chriſtophe), Aſtronome Allemand. II. 591.

Elaſtique (problême de la courbe). II. 349.

Ellipſe. Propriétés principales de cette courbe. I. 181 *& ſuiv.*

Empedocle, ancien Philoſophe Pythagoricien. Traces prétendues de l'attraction dans les reſtes de ſes écrits. 137.

Epicure. Son mépris pour les Mathématiques. La groſſiéreté & l'ineptie de ſa Phyſique. I. 28.

Epicycle. Cercle mobile dont les Anciens ſe ſervoient pour repréſenter l'inégalité des mouvemens céleſtes. I. 292.

Epicycloïdes. Courbes imaginées à l'imitation de la cycloïde. Leur hiſtoire. II. 547.

Equations algébriques. La ſolution de celles du ſecond degré connue à Diophante. I. 315. Attribuée parmi les Arabes à un certain Ben-Muſa. 368. Canons ou regles de Lucas de Burgo ſur ce ſujet. 477. Hiſtoire de la ſolution de celles du troiſieme degré. 479. Solution de celles du quatrieme. Diverſes méthodes pour cela. 479. Découvertes de Cardan ſur la nature des équations. 482. Celles de Viete. 489 *& ſuiv.* Leur progrès entre les mains d'Harriot. II. 77 *& ſuiv.* Deſcartes les développe davantage, & y ajoute pluſieurs choſes. 85 *& ſuiv.* Ce qu'y ajoutent divers Analiſtes modernes. *Ibid.* 145 *& ſuiv.*

Eratoſtene, ancien Mathématicien Grec. Ses travaux en Géométrie & en Aſtronomie. I. 253.

Etoiles changeantes. Hiſtoire des principales étoiles de cette eſpece. I. 576. II. 216.

Euclide, Géometre célebre. Quelques traits de ſa vie. I. 216. De ſes élémens. 218 *& ſuiv.* Enumération de ſes autres écrits. I. 225.

Euctemon aſſocié à Méton dans la découverte de ſa période. I. 166.

Eudemus, ancien Ecrivain ſur l'hiſtoire de la Géométrie. I. 207.

Eudoxe. Ses travaux dans les divers genres de Mathématiques. I. 197. Pitoyable ſyſtême Phyſico-Aſtronomique qu'on lui attribue. 200.

Eutocius, Mathématicien du ſixieme ſiecle, commente une partie d'Archimede. I. 207.

Exhauſtion (Méthode d'), familiere aux Anciens. Ce que c'eſt. I. 239.

Excentrique (hypotheſe de l'). Une de celles dont les Anciens ſe ſervoient pour repréſenter les inégalités du mouv. des planetes. I. 270.

Exponentiel (calcul). Ses principes & ſon invention. II. 356.

F.

FABRI (Honoré) écrit ſur la Méchanique & les loix du mouvement. II. 371. Contredit M. Huyghens ſur l'anneau de Saturne. 481. Défend *mordicùs* le repos de la terre. Sa déclaration à ce ſujet. I. 541.

Fabricius (David), Aſtron. II. 217.

Fabricius (Jean), rival de Galilée dans la découverte des taches du Soleil. I. 226.

Faille (le P. de la), Jéſuite, écrit ſur les centres de gravité des figures. II. 20.

Fermat (Pierre de), Géometre célebre, & rival de Deſcartes. Ses travaux ſur la Géométrie ancienne. I. 264. Ses découvertes nombreuſes en analyſe. II. 111. Récit de ſa querelle avec Deſcartes ſur ſa regle *de Maximis & Minimis.* 113. Autre querelle qu'il a avec ce Philoſophe ſur la loi de la réfraction. 288.

Fernel (Jean), meſure la terre, & de quelle maniere. II. 231.

Ferrari (Louis) de Boulogne, (& non Louis de Ferrare), découvre la ſolution des équations du quatrieme degré. Sa méthode. I. 484.

Ferreo (Scipion), paſſe pour le premier qui ait réſolu les équations cubiques. I. 479.

Finée (Oronce), méchant Géometre du ſeizieme ſiecle. Ses erreurs multipliées. I. 465, 604.

Flamſtead ou *Flamſteed* (Jean), célebre Aſtronome Anglois, donne lieu à la conſtruction de l'Obſervatoire de Greenwich. II. 490. Son hiſtoire abrégée, & celle de ſes travaux. II. 529.

Fluides. Voyez Hydroſtatique. Hydraulique.

Fluxions (méthode des). Sa découverte par M. Newton. II. 318. Eſprit de cette méthode. 320 & *ſuiv.* Récit de la querelle entre Newton & Léibnitz ſur cette découverte. 330.

Foix (François de) de Candalle, Evêque d'Aires, & Géometre du ſeizieme ſiecle, commente Euclide, & l'augmente de quelques Livres. I. 220, 466.

Fontana (François), Obſervateur Italien. Il revendique l'invention du Téleſcope aſtronomique, & du Microſcope. II. 174.

Foſcarini (le P.), Carme, penche pour Copernic, & donne lieu par un écrit à la perſécution qu'eſſuye Galilée. I. 522.

Fractions continues. Ce que c'eſt. Leur invention & leur utilité. II. 305.

—— décimales. Par qui elles ſont introduites en Mathématiques. I. 450.

Frénicle (M.) de Beſſy, Arithméticien du ſiecle paſſé. Sa méthode ſinguliere pour les problêmes numériques indéterminés. I. 320. il pouſſe fort loin la théorie des quarrés magiques. 335.

G.

GALILEO (Vincenzio) ou *Galilée.* Sa naiſſance, & ſes premieres découvertes. II. 220. Il ſe conſtruit un Téleſcope. 168, 221. Il apperçoit les Satellites de Jupiter, & divers phénomenes céleſtes. 222. Il fait valoir le ſentiment de Copernic. 224. Hiſtoire de la perſécution qu'il eſſuye à ce ſujet. I. 523. Il réforme la ſcience du mouvement. Ses découvertes nombreuſes en ce genre. II. 260 *& ſuiv.*

Gaſcoigne, Aſtronome Anglois du milieu du ſiecle paſſé. On lui fait honneur de l'invention du Micrometre, & du Téleſcope appliqué aux inſtrumens aſtronomiques. II. 505.

Gaſſendi. (Pierre). Son obſervation de Mercure ſous le Soleil. II. 236.

Il réfute ſçavamment l'opinion de Baliani ſur l'accélération des graves. 273.
Gaubil (le P.), Jéſuite, débrouille l'hiſtoire de l'Aſtronomie Chinoiſe. I. 391.
Geber, Aſtronome Arabe, écrit ſur l'Aſtronomie. Ce que lui doit la Trigonométrie ſphérique. I. 352.
Gellibrand, Auteur de Tables de logarithmes. II. 13.
Gemma Friſius, Géometre du ſeizieme ſiecle. I. 472.
Geminus, Géometre & Aſtronome Grec. Ses ouvrages. I. 276.
Géographie. Premiers traits de la Géographie naiſſante. I. 106. Ce qu'elle doit à Hipparque. 275. Et à Ptolomée. 306. Aux Modernes. II. 519.
Géométrie. Son invention. I. 50. A qui les Grecs en doivent la connoiſſance. 100. Progrès chez les Anciens. Liv. III, IV & V, *paſſim*. Chez les Arabes. Part. II, Liv. I, Art. VIII. Ceux qu'elle fait durant le quinzieme ſiecle. Part. III, Liv. II. Durant le ſeizieme. Liv. III. Durant le dix-ſeptieme. Part. IV, Liv. I, II, VI.
Gerbert, depuis Pape ſous le nom de Sylveſtre II, cultive les Mathématiques dans le dixieme ſiecle. I. 415. Fait connoître aux Chrétiens l'Arithmétique Arabe, &c. *Ibid.*
Ghetaldi (Marin) de Raguſe, reſtitue divers ouvrages analytiques d'Appollonius. I. 263.
Gnomon. Son invention. I. 105, 299. Hiſtoire des gnomons les plus célebres de l'Europe. II. 292 & *ſuiv*.
Gnomonique. Ses premiers traits. I. 106. Son hiſtoire ſuivie, & ſes principes. II. 592.
Girard (Albert). Trait curieux ſur cet Analiſte Hollandois, ſervant à l'hiſtoire de l'analyſe des équations. II. 82.
Grandami (le P.), Jéſuite. De ſa prétendue démonſtration du repos de la terre. I. 546.
Grandi (le P. Guy). Quelques-uns de ſes ouvrages, 67 & 71.
Graveſande (M. s'). De ſa Perſpective. I. 636.
Gravitation univerſelle (théorie de la). Anciens traits de cette théorie dans l'Antiquité. I. 111. II. 538. Ses progrès entre les mains de Newton. 541. Ses différentes branches. 561.
Gray (M.). Ses remarques curieuſes ſur les Microſcopes ſimples. II. 609.
Gregori ou *Gregory* (Jacques), célebre Géometre Anglois. Ses écrits géométriques. II. 67. Et ſa querelle avec Huyghens ſur la quadrature du cercle. *Ibid.* Il marche ſur les traces de Newton dans la découverte des nouveaux calculs. 328. Invente le Téleſcope à réflection, & ne peut venir à bout de l'exécuter. 595.
Gregori (David), neveu du précédent. Quelques-uns de ſes ouvrages. II. 562, 605.
Grimaldi (le P.) découvre l'inflection de la lumiere. II. 603. Enleve à Hévélius l'avantage de donner des noms aux taches de la Lune. 256.
Guglielmini, célebre Hydraulicien Italien. Précis de ſa vie & de ſes travaux. II. 476.
Guillaume II du nom, Landgrave de Heſſe, Aſtronome célebre. Ses travaux utiles. I. 553.
Guinée, Ecriv. ſur l'Analyſe. II. 155.
Guldin (le P. Paul), Jéſuite. Sa mé-

thode célebre pour la dimenſion des figures par leurs centres de gravité. II. 19. Intente une querelle à Cavalleri ſur la Géométrie des indiviſibles ; & en eſt un peu maltraité. 22.

H.

Halifax (Jean de), autrement *Sacro-Boſco*, Mathématicien du treizieme ſiecle. I. 417.

Halley (Edmond), célebre Aſtronome Anglois, quelques traits de ſa vie. II. 531. Il va à Sainte-Hélene faire un catalogue des étoiles auſtrales. *Ibid.* Ses idées heureuſes ſur la théorie de la Lune. 534. Sa méthode pour déterminer la parallaxe du Soleil par le paſſage de Vénus attendu en 1761. 533, 242. De ſes Tables. 538.

Harpalus, Aſtronome Grec. I. 166.

Harriot (Thomas), Analiſte Anglois. Précis de ſes découvertes analytiques, & diſcuſſion de celles que lui attribue Wallis. II. 77 *& ſuiv.*

Hartzoecker (Nicolas). Sa maniere de travailler les verres d'un très-long foyer. II. 607.

Hélice. Voyez Spirale.

Hélicon, Aſtronome Grec. I. 206.

Héraclide de Pont, ancien partiſan du mouvement de la terre. I. 116.

Hermann. Sa méthode pour la conſtruction des lieux ſolides. *Voyez* les Additions.

Héron d'Alexandrie, Mathématicien célebre de l'antiquité. De ſes inventions, & de ſes différens écrits. I. 277.

Héron le jeune, mince Géometre du bas Empire. I. 351.

Hévélius (Jean), célebre Aſtronome de Dantzick. Ses travaux & ſon hiſtoire. II. 586.

Heuraet (van), Géometre Hollandois. Sa méthode pour la rectification des courbes. II. 127.

Hipparque, fameux Aſtronome Grec. Récit de ſes inventions en Aſtronomie & en Géométrie. I. 268.

Hippocrate de Chio, Géometre Grec. Son hiſtoire ſinguliere, & ſes inventions en Géométrie. I. 144.

Hire (M. de la), revendique l'application des épicycloïdes à la Méchanique. II. 347, 470. De ſon Traité des épicycloïdes. 347. De ſa Méchanique. 470.

Hodierna, Aſtronome Sicilien, travaille ſur la théorie des Satellites de Jupiter. II. 498.

Hook (Robert), Mathématicien & Phyſicien Anglois. Ses tentatives pour démontrer le mouvement de la terre. I. 548. Revendique l'application du reſſort aux horloges. II. 165. Ses idées ſur le ſyſtême de l'Univers. 527.

Hôpital (le Marquis de l') accueille des premiers la nouvelle Géométrie. En dévoile les principes dans ſon analyſe des infinimens petits. II. 358. De ſon ouvrage poſthume ſur les ſections coniques, & les lieux géométriques. 155.

Horrebow (Pierre), Aſtronome Danois. Ses travaux pour déterminer la parallaxe annuelle des fixes, & leur ſuccès. I. 549.

Horocces (Jérémie), Aſtronome Anglois. Son hiſtoire. Il obſerve le premier le paſſage de Vénus ſur le diſque du Soleil, de l'année 1658. II. 239. Réfute vivement Lansberge. Ses inventions diverſes. *Ibid.*

Horloges ſolaires. Leur invention & leur antiquité dans la Grece.

Voyez Gnomonique.
Horloges à roue. Hiſtoire des Horloges de cette eſpece les plus remarquables. I. 439.
Hoſtane, prétendu Aſtronome Caldéen. I. 58.
Hudde (M.). Ses inventions en Géométrie. II. 125.
Hulſius (Levinus), inventeur du compas de proportion. I. 476.
Huyghens (Chriſtian) de Zulichem. (on prononce *Hughens*), célebre Mathématicien du ſiecle paſſé. Hiſtoire abrégée de ſa vie. II. 381. Il applique le pendule à l'horloge. Sa découverte ſur la cycloïde. 383 *& ſuiv.* Il découvre les loix du choc des corps. 371. Ses découvertes ſur la théorie du centre d'oſcillation. 393. Sur les forces centrifuges. 406. Ses inventions dans la Géométrie ancienne. 66. De ſa théorie des développées. 129. Autres inventions analytiques de M. Huyghens. 136. Ses découvertes aſtronomiques. 480. Ses travaux en Optique. 604.
Hydraulique. Naiſſance & progrès de cette branche de la Méchanique entre les mains de quelques Méchaniciens modernes. II. 277 *& ſuiv.* 284, 467.
Hydrographie. Voyez Navigation.
Hyperbole. Ses propriétés principales. I. 178 *& ſuiv.*
Hydroſtatique. Ses premiers principes trouvés par Archimede. I. 241. Elle fait de nouveaux progrès entre les mains de Stevin. II. 259. De Galilée. 261.
Hypatia, Mathématicienne Grecque. Ses écrits, & ſon triſte ſort. I. 326.
Hypſicle, Mathématicien Grec. Ses écrits. I. 310.
Hyperboliques (eſpaces). Propriété remarquable de ces eſpaces. I. 64.

I.

Jacquier (les PP.) & le *Seur*, commentent Newton. II. 562.
Jans ou *Janſen* (Zacharie), inventeur du Téleſcope & du Microſcope, ſuivant quelques-uns. II. 168.
Ibn-Ionis, Aſtronome Arabe. I. 350.
Jéſuites (les Miſſionnaires) pénetrent à la Chine, & font triompher l'Aſtronomie Européenne ſur la Chinoiſe. I. 399, 400. Obligations que leur a l'Aſtronomie & la Géographie, 401. & II. 524.
Ilekan (Holagu), Prince Tartare, protecteur de l'Aſtronomie. I. 374.
Image (lieu de l') des objets vûs dans les miroirs & par réfraction. Erreur des Anciens ſur ce ſujet. I. 624. Sentiment de Barrow diſcuté. II. 59.
Indéterminées (méthode des), une des inventions analytiques de Deſcartes. II. 87.
Indéterminés (problêmes). Ce que c'eſt. I. 185. Problêmes numériques indéterminés. 316. Auteurs qui excellent dans ce genre d'analyſe. 319.
Indiens. De l'Aſtronomie Indienne. Etat actuel de cette ſcience chez ces peuples. I. 402.
Indiviſibles (méthode des). Son invention. Eſprit de cette méthode, & ſa défenſe. II. 26 *& ſuiv.*
Infini (Géométrie de l'). *Voyez* Infiniment petits.
Infiniment petits. Voyez Différentiel.
Inflexion (point d'). Ce que c'eſt dans la théorie des courbes. II.

107. Méthode de Deſcartes pour les trouver. *Ibid.*
Inflexion de la lumiere. Sa premiere découverte. II. 603. Curieuſes expériences de Newton ſur ce ſujet. 629.
Intégral (calcul). L'inverſe du différentiel. *Voyez* Fluentes. Ses premiers progrès dans le continent, & à qui ils ſont dûs. I. 355, 358.
Interpolations. Ce qu'on entend par là. Uſage qu'en fait Wallis. II. 322. Découverte à laquelle elles conduiſent Newton. 315. Elles ſont appliquées par Mouton à l'Aſtronomie. 589.
Jordanus. Voyez Nemorarius.
Iris. Voyez Arc-en-ciel.
Iſidore, Géometre Grec, Maître d'Hypſicle. I. 310. Autre Géometre de ce nom du bas Empire. *Ibid.* 327.
Iſochrone (problême de la courbe). Son hiſtoire. II. 444.
Jules-Céſar. Il réforme le Calendrier Romain. I. 409.
Jupiter. Découverte de ſes Satellites. II. 222, 229.

K.

KÉPLER (Jean). Hiſtoire abrégée de ſa vie & de ſes écrits. II. 205. De ſes deux fameuſes loix; développement de la maniere dont il eſt conduit à leur découverte. 207. Il tente divers problêmes géométriques très-difficiles, & avec quel ſuccès. *Ibid.* 17.
Kerſey, Analiſte Anglois. Son principal ouvrage. I. 321.
Kirch (MM. Godefried & Chriſtfried), Aſtronomes Allemands. II. 589.
Kircker (le P. Athanaſe), célebre Jéſuite. Il montre la poſſibilité du miroir d'Archimede. I. 246. De ſes écrits, & de quelques-unes de ſes inventions. II. 593.

L.

LAGNI (M. de), travaille beaucoup ſur la réſolution générale des équations, & avec quel ſuccès. II. 150.
Laloubere (le P.), Jéſuite. Ses écrits. Sa querelle avec Paſcal ſur la ſolution des problêmes de la cycloïde. II. 56.
Lami (le P.), publie un principe de Méchanique ſemblable à celui de M. Varignon. II. 465.
Lansberge, Aſtronome Hollandois. II. 262.
Lanterne magique. A qui elle eſt dûe. II. 593.
Laodamas ou *Leadamas*, Géometre Platonicien. I. 196.
Léibnitz (Guillaume-Godefroi), célebre Philoſophe & Mathématicien Allemand. Abrégé de ſa vie. II. 350. Il eſt un des inventeurs du calcul différentiel & intégral. Diſcuſſion de la querelle qu'il a ſur ce ſujet avec M. Newton. 332. Ses recherches ſur la réſiſtance des milieux. 432, 443. Il propoſe le problême de la courbe iſochrone & paracentrique. 444. Il réſoud ceux de la chaînette, de la Brachyſtochrone. 446, 454.
Leontius, Géometre Grec du bas Empire. I. 331.
Leotaud (le P.), Jéſuite; réfute la prétendue quadrature du cercle de Grégoire de Saint-Vincent. II. 65. Sa querelle avec Wallis ſur l'angle de contingence. I. 404.
Leovitius (Cyprianus), Aſtronome du ſeizieme ſiecle. I. 579.
Leucippe, ancien Philoſophe, ab-

ſurdités qu'on lui impute. I. 139.
Lieu. Ce qu'on nomme lieu en Géométrie. Leurs diviſions & leurs uſages. I. 183.
Lilius (Aloyſius), inventeur du projet de la réformation du Calendrier, exécutée en 1582. I. 586.
Logarithme. Ce qu'on entend par-là en Arithmétique ; à qui on en doit l'invention. Développement de leurs utilités, & leurs propriétés. II. 7 *& ſuiv.* Des principaux Auteurs qui en ont traité, ou qui en ont calculé les Tables. 13 *& ſuiv.*
Logarithmique. Quel eſt l'inventeur de cette courbe. II. 14. Ses propriétés les plus remarquables. *Ibid. & ſuiv.*
Logarithmique ſpirale. Invention & propriété fort remarquable dont elle jouït. II. 35.
Longitudes géographiques. Hipparque les détermine par des obſervations d'éclipſes. I. 275. Grande utilité des Satellites du Jupiter pour cette détermination. II. 499.
Longomontanus, Aſtronome du ſiecle paſſé. II. 250. Donné par quelques-uns pour l'inventeur des logarithmes. 11.
Louville (M. de), prétend démontrer la variation de l'obliquité de l'écliptique, par une obſervation de Pytheas. Son raiſonnement examiné. I. 208.
Loxodromie. Ce que c'eſt. Expoſition de cette théorie, & ſon hiſtoire. I. 614.
Ludolph. Voyez Ceulen (van).
Lumiere. Premieres découvertes ſur la propagation de la lumiere. I. 203. Problême curieux ſur la lumiere, & qui en donne le premier la ſolution. 626. Conjectures de Deſcartes ſur la nature de la lumiere, & leur examen. II. 183. Découverte de ſa différente réfrangibilité par M. Newton. 613 *& ſuiv.*
Lune. Premiere ébauche de la théorie de la Lune par Ptolomée. I. 292. Découvertes de Tycho ſur ce ſujet. 571. De la théorie Lunaire d'Horoccius. II. 240. Travaux & idées heureuſes de M. Hallei ſur ce ſujet. 534. De la théorie Newtonienne de la Lune. 561.
Lunulles d'Hippocrate. I. 144.

M.

Maclaurin. De ſon expoſition des découvertes de Newton. II. 562.
Maimon Reſchid, Géometre Perſan. Trait ſingulier ſur lui. I. 379.
Mairan (M. de). Ses recherches ſur la courbe apparente du fond de l'eau. II. 182. Ses conjectures ſur les queues des Cometes. 573.
Manfredi (M. Euſtache). Ses obſervations ſur les tentatives faites pour démontrer la parallaxe des fixes. I. 549.
Manlius, Aſtronome Romain, auquel on attribue la direction de l'Obéliſque élevé par Auguſte dans le Champ de Mars. I. 409.
Maria (Dominique), Aſtronome Boulonois. Opinion ſinguliere qu'il a. I. 454.
Mariotte, Méchanicien François. Ce qu'on lui doit. II. 467.
Mathématiques. Idée de ce que ſont les Mathématiques. Leur objet & leur diviſion. Leur développement métaphyſique. Leur défenſe contre leurs ennemis. I. 1 *& ſuiv.*

Maupertuis (M. de). Ses conjectures ingénieuſes ſur les étoiles périodiques. II. 220. Obligations que lui a la Philoſophie Newtonienne. 569.

Maurolicus (l'Abbé), Géometre Sicilien. Son éloge & ſes travaux en Géométrie. I. 463. Il touche de fort près à la découverte de la maniere dont on apperçoit les objets. 626. Sa ſolution d'un problême curieux ſur la lumiere, propoſé & manqué par Ariſtote. *Ibid.*

Maximis & Minimis (queſtions *de*). Nature de ces queſtions. II. 105. Méthode pour les réſoudre ſuivant les principes de Deſcartes. 106. Autre méthode dûe à M. de Fermat. 112. Perfections qu'elles reçoivent de MM. Hudde, Huyghens & de Sluſe. 133 & *ſuiv.*

Méchanique. Etendue de cette ſcience, & ſes diviſions. I. 12. Peu de progrès qu'elle fait chez les Anciens en ce qui concerne la théorie. 619. Son hiſtoire durant le dix-ſeptieme ſiecle. Part. IV. Liv. V & VII.

Menechme, Géometre Platonicien. Ses inventions en Géométrie. I. 183, 188.

Menelaus d'Alexandrie, Géometre Grec. Ses travaux. I. 285.

Mercator (Nicolas). Belle découverte dûe à ce Géometre. II. 307 & *ſuiv.* Son hypotheſe aſtronomique. 255.

Mercure. Conjonctions apparentes de Mercure & du Soleil. Hiſtoire de ces obſervations. II. 236.

Merſenne. Ce que lui doivent les Mathématiques. II. 284.

Metius (Pierre). Invention remarquable qu'on lui doit. I. 467.

Micrometre. Hiſtoire de cet inſtrument. II. 501 & *ſuiv.*

Microſcope. Sa découverte. II. 173. Différentes eſpeces de Microſcopes, & explication de leur effet. 179. Diverſes choſes remarquables concernant les Microſcopes ſimples. II. 608 & *ſuiv.*

Midorge, Géometre François, II. 61.

Milieux. Théorie de leur réſiſtance. II. 431.

Miroirs d'Archimede. Diſcuſſion de ce qu'on raconte à leur ſujet. I. 245.

Miroirs ardens ou cauſtiques. Hiſtoire des plus fameux qui aient été fabriqués. II. 6.

Mæſtlin (Michel), Aſtronome Allemand. Ce qu'on lui doit. I. 556.

Molieres (Privat de), célebre partiſans des tourbillons Cartéſiens. II. 249.

Molyneux (Guillaume), Opticien Anglois. II. 605.

Moyennes proportionnelles (problême des). Son hiſtoire chez les Anciens. I. 186.

Morin (Jean B.), Aſtronome François. Son hiſtoire abrégée. II. 252. Ses querelles avec Gaſſendi ſur le mouvement de la terre. I. 526.

Morland (le Chevalier), Méchanicien Anglois. II. 465.

Moſcopule (Emmanuel), Arithméticien du bas Empire. Il écrit ſur les quarrés magiques. I. 333.

Mouton (Gabriel), Aſtronome Lyonnois. Ce que lui doit l'Aſtronomie. II. 588.

Mouvement (loix du). Erreur des Anciens ſur ce ſujet. I. 620. Leur découverte par Galilée & Deſcartes. II. 286. Du mouvement accéléré. Découvertes de Galilée ſur ce ſujet. 264 & *ſuiv.* Du mouve-

ment varié ſuivant une loi quelconque. 421 & *ſuiv.* De la communication du mouvement. Erreurs multipliées de Deſcartes ſur ce point. 290 & *ſuiv.* Les loix de cette communication découvertes, & par qui. 371 & *ſuiv.*

Muñoz, Aſtronome Eſpagnol. I. 576.

Munſter (Sébaſtien), Mathématicien Allemand. Ses ouvrages géométriques. I. 472. Il fonde la gnomonique moderne. 604.

Muſique. Hiſtoire de la muſique ancienne. I. 123 & *ſuiv.*

N.

NASSIREDDIN, Mathématicien Perſan. Ses ouvrages. I. 374, 378.

Navigation. Hiſtoire de la navigation ancienne. I. 89. Celle de la moderne juſqu'à la fin du dix-ſeptieme ſiecle. 608.

Nébuleuſe (étoile), découverte dans Andromede. II. 218.

Necepſos, prétendu Roi & Aſtronome Egyptien. I. 60.

Neil (Guillaume) découvre la premiere rectification abſolue de la courbe. II. 304.

Nemorarius (Jordanus), Mathématicien du treizieme ſiecle, I. 417, 621.

Neper (Jean), Baron de Merchiſton en Ecoſſe. Invente les logarithmes. II. 6. Ses autres inventions. 15.

Newton (Jean), Aſtronome Anglois I. 255.

Newton (Iſaac). Vie abrégée de cet homme célebre. II. 311. Précis & développement de ſes découvertes géométriques, & en particulier de ſa méthode des fluxions. 315 & *ſuiv.* Récit de la querelle entre lui ou ſes partiſans, & Léibnitz, au ſujet de cette découverte. 330. Précis de ſes découvertes méchaniques ſur le mouvement curviligne des corps attirés par une force centrale. 410. Sur la réſiſtance des milieux. 432. Développement des idées de Newton ſur le ſyſtême de l'Univers, & la gravitation univerſelle. 541. Maniere méchanique dont il tente d'expliquer l'attraction. 546. Ses découvertes optiques. Celle de la différente réfrangibilité de la lumiere, & de l'inaltérabilité des couleurs. Difficultés qu'eſſuyent ces découvertes. 613. De la théorie Newtonienne de la réfraction, de la réflection, & de l'inflection de la lumiere. 629. Raiſons qui conduiſent Newton à la découverte de ſon Téleſcope catadioptrique ou à réflection; & ſon ſuccès. 644 L'explication de l'arc-en-ciel perfectionné. 648.

Niceron (le P.), Minime. Ce que lui doit l'Optique I. 137.

Nicomaque, Mathématicien Grec. I. 313.

Nicomede, Géometre Grec, inventeur de la conchoïde. I. 267.

Nieuwentiit (M.) écrit contre Léibnitz, & le calcul différentiel. Hiſtoire de cette querelle. II. 361.

Noel (le P.), Jéſuite, Miſſionnaire à la Chine, nous apprend quelques traits de l'Aſtronomie Chinoiſe. I. 402.

Nonius ou *Nuñes* (Pierre), Mathématicien Portugais. Diverſes choſes qu'on lui doit. I. 468. Entr'autres quelques traits de la théorie des Loxodromies. 616.

Norwood (Richard), Mathématicien Anglois. De ſa meſure de la terre exécutée en 1635. II. 233.

O.

O.

OBSERVATOIRE. Hiſtoire des obſervatoires de Paris & de Greenwich. II. 489 & *ſuiv*. De celui d'Uranibourg. I. 575.

Œnopide de Chio, Géometre Grec. I. 143.

Optique. Ce que c'eſt que cette ſcience, & ſes diviſions. I. 13. Lenteur de ſes progrès chez les Anciens. 201, 291. Des divers écrits anciens ſur cette ſcience. 266, 308. Ce qu'elle doit aux Arabes. 370. Ses progrès juſqu'à la fin du ſeizieme ſiecle. 624. Hiſtoire de cette ſcience durant la premiere moitié du dix-ſeptieme ſiecle. II. Liv. III. Suite de cette hiſtoire durant l'autre moitié du même ſiecle. *Ibid*. L. IX.

Oronce Finée. Voyez Finée.

Oſcillation. Voyez Centre d'oſcillation.

Oſculation. Voyez Développée.

Ougthred, Géometre Anglois. Ce qu'on lui doit. II. 76.

Ovales de Deſcartes. II. 198.

Ozanam (M.), un de ceux qui cultivent avec le plus de ſuccès l'analyſe de Diophante I. 321.

P.

PAGAN (Blaiſe de). Son hypotheſe aſtronomique. II. 154.

Pappus d'Alexandrie, Mathématicien Grec. Ses ouvrages, & leur mérite particulier. I. 325. Il prévient Guldin dans la fameuſe découverte de l'uſage du centre de gravité pour la dimenſion des figures. *Ibid*.

Parabole, une des ſections coniques. Ses principales propriétés. I. 180 & *ſuiv*. Sa quadrature trouvée de deux manieres par Archimede. 235.

Paraboles de genres ſupérieurs. Quarrées par Fermat & Roberval les premiers. II. 33.

Paracentrique iſochrone (problême de la). Son hiſtoire. II. 446.

Parallaxe. Eſtimation de la parallaxe de la Lune & du Soleil ſuivant les Anciens. I. 272. Grandeur de la parallaxe du Soleil ſuivant M. Caſſini. II. 550. La parallaxe des Cometes démontrée inſenſible par Tycho & divers autres. I. 568.

Parallactiques (Regles). Inſtrument de l'Aſtronomie ancienne. I. 302.

Parent. Ecrit particuliérement ſur les frottemens. II. 473.

Paſcal (Blaiſe), célebre Géometre François. Son hiſtoire. II. 53. Il propoſe ſes fameux problêmes ſur la cycloïde. Hiſtoire de ce défi. *Ibid*. Il démontre la peſanteur de l'air par la fameuſe expérience de Puy de Dome. 282.

Pelletier (le) du Mans. Sa querelle avec Clavius ſur l'angle de contingence. I. 464.

Pemberton, expoſe les vérités de la PhiloſophieNewtonienne. II. 562.

Pendule. Application du pendule aux Horloges, attribuée à Galilée le fils. Publiée par M. Huygens le premier. II. 384. Autre invention du pendule circulaire par M. Huygens. 409.

Périodes. Diverſes périodes imaginées par les Anciens, entr'autres par les Caldéens. I. 63. De la période ou année caniculaire des Egyptiens. 68. Des diverſes périodes propoſées pour l'arrangement du Calendrier Grec. 164. Périodes de MM. Caſſini, Bianchini, &c. pour le Calendtier

moderne. 597.
Perſans. Ancienne ſphere Perſanne. I. 87. Hiſtoire du Calendrier Perſan. 371. Progrès des Perſans en Aſtronomie. 373 *& ſuiv.* Etat où eſt préſentement cette ſcience chez eux. 378. De leurs principaux Géometres. 379.
Perſeus, Géometre Grec, inventeur de certaines courbes appellées ſpiriques. I. 311.
Perſpective. Une des quatre parties de l'Optique. Développement de ſes principes. I. 632. Des meilleurs Auteurs qui en ont écrit. 636.
Petit (Pierre), Phyſicien & Mathématicien du dix-ſeptieme ſiecle. Il prouve par l'expérience la loi de la réfraction. II. 189. Il réfute Gilbert ſur le mouvement de l'aimant. I. 546.
Phainus, Aſtronome Grec. I. 170.
Phéniciens, réputés inventeurs de l'Arithmétique. I. 46. Et de la navigation. 89.
Philippe d'Opuntium, Géom. Grec. I. 197.
—— de Medmée, autre Géometre Grec. *Ibid.*
Philolaüs, Pythagoricien célebre. I. 137.
Philon de Byſance, Géometre & Méchanicien Grec. Ses travaux. I. 278.
—— de Gadare, Géometre Grec. I. 329.
—— de Thyane, Géometre Grec. I. 312.
Picard (Pierre). Quelques traits de ſa vie. II. 506. Il applique le Téleſcope au quart de cercle. 503. Il meſure un degré terreſtre. 507. Il va à Uranibourg. 509.
Platon. Obligations nombreuſes de la Géométrie envers ce Philoſophe. I. 171. Il invente l'analyſe. 172. On le donne auſſi pour l'inventeur des ſections coniques. 178. Les lieux géométriques ſont inventés dans ſon Ecole. 183. Conte peu judicieux que fait Valere Maxime ſur ſon ſujet à l'occaſion du problême de la duplication du cube. 186.
Pline. Cet Ecrivain eſt ſouvent peu heureux dans ſes conjectures ſur des ſujets Mathématiques. I. 180, 410.
Pluche (M.). Son ſyſtême ſur l'origine des conſtellations grecques. Difficultés contre ce ſyſtême. II. 78 *& ſuiv.*
Plutarque. Il ne ſçait ce qu'il dit en parlant d'Ariſtarque de Samos. I. 110. Il penſe aſſez judicieuſement ſur la nature de la Lune, & la cauſe qui l'empêche de retomber ſur la terre. 112.
Porphyre, Philoſophe & Mathématicien Grec. Ses ouvrages. I. 310.
Porta (Jean-Baptiſte), Napolitain, touche de fort près à la vraie explication de la viſion : en quoi il ſe trompe. I 628. On lui attribue la premiere invention du Téleſcope, & ſur quel fondement. *Ibid.*
Poſſidonius, Philoſophe Grec. Ses travaux divers en Mathématique. I. 278.
Preſtet (le P.), écrit ſur l'Algebre. I. 155.
Proclus. De cet ancien Mathématicien. I. 327.
Projectiles. Erreurs des anciens Phyſiciens ſur leur ſujet. I. 623. Leur vrai chemin découvert par Galilée. II. 267. Des projectiles dans les milieux réſiſtans. 437, 441.
Ptolemée, Aſtronome célebre. Sa naiſſance. Erreur ſur ce ſujet. I.

287. Il met hors de doute le mouvement propre des fixes. 289. Sa théorie de la Lune. 293. Et des autres planetes. 296. De ſes autres écrits nombreux. 305. Trait remarquable ſur la réfraction aſtronomique, & la grandeur apparente des aſtres à l'horizon. 308, 309.

Purbach, Aſtronome Allemand du quinzieme ſiecle. Son hiſtoire & celle de ſes travaux. I. 443.

Pythagore, fonde une nouvelle ſecte philoſophique où les Mathématiques ſont en grand honneur. I. 112. Ses découvertes géométriques, & fable qu'on raconte au ſujet de la principale. 113. Ses dogmes aſtronomiqu s. 115. Deux nouvelles branches des Mathématiques prennent naiſſance dans ſon Ecole. 119 & *ſuiv.*

Pytheas, Aſtronome Marſeillois. Sa défenſe contre Strabon & Polybe. I. 209. Examen de ſon obſervation de l'obliquité de l'écliptique. 210.

Q.

QUADRATRICE. Courbe inventée par Dinoſtrate, & ſes uſages. I. 198.

Quadrature du cercle. Elle eſt tentée par Anaxagore dans ſa priſon. I. 102. Par Hippocrate de Chio. 144. Trait curieux d'Ariſtophane ſur la quadrature du cercle. 172. Archimede le premier donne une meſure approchée du cercle. 234. Elle eſt pouſſée plus loin par quelques Anciens. 215, 329. De quelques Géometres qui ont prétendu avoir trouvé la quadrature du cercle. 442, 463. II. 64. Approximations de Viete, de Metius, de Romanus, de Ludolph à Ceulen. I. 467. Suites différentes données pour la quadrature du cercle par divers Géometres. II. 317, 329, 331.

Quadrature des courbes. Voyez calcul intégral.

Quarrés magiques. Ce que c'eſt. Origine, & hiſtoire de ce genre d'amuſement Mathématique. I. 333 & *ſuiv.*

R.

RACINES des équations. A qui eſt dûe la découverte de leur multiplicité & leur diſtinction en négatives & poſitives. I. 482. *Voyez* Equations.

Ramus (Pierre). Son hiſtoire. Il fonde une Chaire de Mathématiques. I. 465. *Voyez* les Additions.

Raphſon, Analiſte Anglois. Sa Méthode pour l'approximation des racines des équations. II. 151.

Rayon de courbure. *Voyez* Développée.

Rectification. A qui eſt dûe la premiere rectification abſolue de courbe. II. 303. Méthode ingénieuſe pour les rectifications. 127. Méthode plus générale tirée du calcul intégral. 328.

Réflection. Principe général ſur la réflection, & ſon antiquité. I. 213. De la cauſe & du Méchaniſme de la réflection, ſuivant M. Newton. II. 629.

Réflexibilité (inégale) de la lumiere. Ce que c'eſt. II. 628.

Réfraction. Ignorance des Anciens ſur la loi de la réfraction. I. 625. Erreur ſur ce ſujet mal-à-propos attribuée à Alhazen & Vitellion. 371. Découverte de la loi ſui-

vant laquelle ſe fait la réfraction. II. 181. Récit des tentatives pour expliquer cette loi avant M. Newton. 112 *& ſuiv.* Cauſe de la réfraction & de la loi qu'elle obſerve, ſuivant M. Newton. 631.

Réfraction aſtronomique. Elle eſt connue de Ptolémée. I. 308. D'Alhazen. 352. De Bâcon. 423. De Walther. 452. Tycho l'établit d'une maniere plus déciſive. En quoi il ſe trompe. 570. Son erreur rectifiée par M. Caſſini. II. 493.

Réfrangibilité (la différente) de la lumiere, découverte par M. Newton, & comment on l'établit. II. 614. Hiſtoire des conteſtations élevées ſur ce ſujet. 621.

Regiomontanus ou Jean *Muller* de Regiomonte, ou de Konigs-berg, travaille très-utilement dans le quinzieme ſiecle à rétablir les Mathématiques. Récit de ſes divers travaux. I. 445 *& ſuiv.*

Reinhold, Aſtronome Allemand. Ses travaux. I. 335.

Reyneau (le P.), Ecrivain ſur l'Algebre & l'Analyſe. II. 155.

Renau (le Chevalier), tente de fonder une théorie de la manœuvre. II. 475.

Rheita (le P. Schirlæus de); Capucin. Invente le Téleſcope terreſtre. II. 171. Propoſe le Téleſcope binocle. 172. Croit découvrir un Satellite à Mars, & deux nouveaux à Jupiter, &c. 483.

Rheticus (Joachim), premier Apôtre du ſyſtême de Copernic. I. 520.

Ricci (Michel-Ange), Géometre Italien. II. 69.

Riccioli (le P. Jean-Baptiſte), Jéſuite célebre, Aſtronome Italien. Ses travaux & ſes écrits. II. 255. Critique de ſa meſure de la terre. 234.

Richer (M.) eſt envoyé à Cayenne. Obſervations aſtronomiques qu'il y fait. Phénomene qu'il y obſerve, & découverte à laquelle il donne lieu. II. 512.

Richter (M.). *Voyez* Rizzeti.

Rizzeti (M.). Ses oppoſitions à la doctrine de Newton ſur les couleurs. II. 621. Eſt ſolidement réfuté par MM. Richter & Deſaguliers. *Ibid.*

Roberval (Gilles Perſonne de), s'éleve le premier avec Fermat à diverſes nouvelles conſidérations géométriques. II. 32. Il invente une méthode ſemblable à celle de Cavalleri. 34. Il imagine une méthode pour les tangentes, par la compoſition des mouvemens. 37. Il quarre le premier la cycloïde. 44. Il a de vifs démêlés avec Deſcartes concernant d'autres problêmes ſur cette courbe. *Ibid.* Il fait de mauvaiſes objections contre les découvertes analytiques de ce Philoſophe. 119. Son caractere, & quelques traits de ſa vie. 41.

Roemer (M. Olaus), Aſtronome célebre. Quelques traits de ſa vie. II. 516. Il établit le mouvement ſucceſſif de la lumiere. *Ibid.* Uſage qu'il fait des épicycloïdes dans la Méchanique. 470. Il fait de grands efforts pour prouver la parallaxe annuelle des fixes. I. 549.

Rolle (M. Michel). Querelles réitérées qu'il intente au calcul différentiel, & leur hiſtoire. Son caractere. II. 361 *& ſuiv.*

Rothman, un des Aſtronomes du Landgrave de Heſſe. I. 555.

Roulette. Voyez Cycloïde.

S.

Satellites (les) de Jupiter découverts, & par qui. II. 222, 229. De la théorie de leurs mouvemens. 497. Leur utilité dans la Géographie. 499. Découverte de ceux de Saturne. 481, 482.

Saturne. Découverte de ſon anneau. II. 480. Et de ſes Satellites. 482.

Saurin (M.) défend le calcul différentiel contre Rolle. II. 366.

Sauveur. Remarque curieuſe de ſa façon ſur le frottement des cordes enroulées. II. 474.

Scaliger (Joſeph). Ses querelles avec Clavius. Leur motif. I. 30, 592.

Schall (Adam), Jéſuite, Miſſionnaire à la Chine, & Aſtronome, confond les Aſtronomes Chinois. I. 400.

Scheiner (le P. Chriſtophe), rival de Galilée dans la découverte des taches du Soleil. II. 226. Sa vie abrégée, & ſes ouvrages. *Ibid.*

Scheubel, Analiſte & Géometre Allemand. I. 461.

Schickard (Pierre), Aſtronome Allemand. II. 238.

Schooten (François). De ſon Commentaire ſur la Géométrie de Deſcartes. I. 123. De ſes autres écrits. *Ibid.*

Serenus, ancien Géometre Grec. I. 310.

Seur (le P. le), Minime. Commente les principes de Newton avec le P. Jacquier. II. 5.

Sinus. Qui les a introduits dans la Trigonométrie. I. 358. Etimologie de ce mot. *Voyez* les Additions.

Sluſe (René-François de). Sa méthode pour la conſtruction des équations indéterminées. II. 138. Sa méthode des tangentes. 136.

Snellius, Mathématicien Hollandois. Ses travaux géométriques. I. 263. II. 5. Il découvre la vraie loi de la réfraction. II. 181. Il meſure un degré terreſtre. 231. Notice abrégée de ſa vie & de ſes écrits. 180.

Solides. Théorie de la réſiſtance des ſolides. II. 269.

Solides (équations). Leur conſtruction géométrique par M. Deſcartes. II. 98. Autre méthode par M. de Sluſe. 138.

Spirales. Découvertes d'Archimede ſur ces courbes. I. 236.

Spiriques. Autres courbes conſidérées par d'anciens Géometres. I. 311.

Sporus, ancien Géometre Grec. I. 329.

Statique (la). Quel eſt ſon objet I. 8, 12. Son principe reconnu par Ariſtote. 205. Archimede en jette les fondemens. 240. Autres anciens qui la cultivent. 277. Elle fait quelque progrès durant le ſeizieme ſiecle. 621. Son accroiſſement entre les mains de Stevin, Galilée, Deſcartes, &c. II. 258, 260, 284, 285, &c.

Stevin (Simon) de Bruges, enrichit la Statique de quelques découvertes. II. 258.

Stifels, Arithméticien & Algébriſte Allemand. Trait curieux ſur ſon ſujet. I. 501. Il entrevoit l'invention des logarithmes. II. 10.

Suites. A qui ſont dûes les premieres ſuites. II. 305 & *ſuiv.* Nouvelles découvertes de Newton dans cette théorie. 318, 329. Diverſes ſuites données par Newton, Grégori, Léibnitz, pour le cercle & l'hyperb. 317, 329, 331.

Syntheſe. Méthode oppoſée à l'analyſe. I. 172.

T.

Tables aſtronomiques. Qui le premier en a calculées. I. 271. Des Tables faites par les Arabes. 349, 355. Des Tables Ilécaniques ou de Naſſirredin. 375. Des Alphonſines. 419. Des Pruténiques. 533. Des Rudolphines. II. 215. De celles de M. Hallei. 537.

Tables de logarithmes, quels ſont ceux qui y ont travaillé. 12 & *ſuiv*. Les meilleures Tables de ce genre. *Ibid*.

Tacquet (le P.), Jéſuite des Pays-Bas. Ses écrits en Mathématique. II. *Voyez* les Additions.

Tangentes (Méthode des) directe. Roberval en donne une, analogue à celle des fluxions. II. 37. Celles de M. Deſcartes. 103. Celle de M. de Fermat, & querelle qu'elle occaſionne. 113 & *ſuiv*. Additions qu'y font MM. Huyghens, de Sluſe, Tſchirnhauſen. 137. Celle du calcul des fluxions ou différentiel. 321.

Tangentes (Méthode inverſe des). Ce que c'eſt. Qui a élevé le premier cette queſtion. II. 120.

Tartalea ou *Tartaglia* (Nicolò), Mathématicien recommandable du ſeizieme ſiecle. Son hiſtoire. I. 462. Il découvre la réſolution des équations du troiſieme degré. Curieuſe hiſtoire ſur ce ſujet. 479. Il reconnoît une vérité de la théorie du jet des bombes. 623.

Tatius (Achille), ancien Ecrivain d'Aſtronomie. Son peu de diſcernement. I. 312.

Tautochrone (la courbe). Ce que c'eſt. II. 386.

Taylor (M. Brook). Son démêlé avec M. Bernoulli ſur le centre d'oſcillation. II. 404. Il écrit ſur la perſpective. I. 636.

Téleſcope. Hiſtoire de ſa découverte. II. 165.

—— batavique. Son principe, & explication de ſon effet. II. 178.

—— aſtronomique. A qui en eſt dûe l'invention. II. 169. Explication de ſes effets. 178.

—— terreſtre. Quel en eſt l'Auteur. II. 171. Son explication. 179.

—— binocle. Propoſé par le Pere de Rheita. Effet ſingulier qu'il produit. II. 172.

—— à réflection ou catadioptrique. Propoſé par Merſenne. II. 644. Tenté par Grégori ſans ſuccès. 595. Exécuté par M. Newton. 644 & *ſuiv*. Quels ſont les motifs qui le conduiſent à cette découverte. *Ibid*. Ses avantages ſur le Téleſcope à réfraction. *Ibid*.

Terentius (le P. Jean), Jéſuite, Aſtronome & Miſſionnaire à la Chine. I. 399.

Terre (grandeur de la). *Voyez* Degré.

Thalès, tranſplante les Mathématiques en Grece. I. 99. Ses découvertes géométriques. 99, 101. Ses dogmes & ſes inventions aſtronomiques 102.

Thebith ou *Thabet*, célebre Mathématicien Arabe. Ses travaux. I. 357, 446. Viſion qu'il a eue ſur un point d'Aſtronomie. I. 346.

Théodoſe. De ce Mathématicien Grec, & de ſes écrits. I. 281.

Theon d'Alexandrie, commente l'Almageſte, &c. I. 326.

Theon de Smyrne. I. 286.

Theophraſte, ſucceſſeur d'Ariſtote, écrit ſur les Mathématiques, & entr'autres ſur leur hiſtoire. I. 207.

Thius, Aſtronome Grec. I. 329.
Timocharis, ancien Aſtronome Grec. Ce que lui doit l'Aſtronomie. I. 226.
Torricelli. Ses démêlés avec Roberval au ſujet de la cycloïde. II. 49 *& ſuiv.* Ses découvertes de Statique & d'Hydraulique. 278. Il découvre la peſanteur de l'air. 279 *& ſuiv.*
Tourbillons de Deſcartes. Leur examen. II. 243.
Traber (le Pere Zacharie), Auteur d'Optique. II. 6.
Trajectoires (problême des), réſolu par M. Newton. II. 411) 424 & 427.
Trajectoires orthogonales (problême des). Son hiſtoire abrégée. I. 342.
Trigonométrie. Quels ſont les Anciens qui la cultivent. I. 275, 285. Les Arabes la perfectionnent conſidérablement. 358. Purbach & Regiomontanus y ajoutent beaucoup. 444, 449. Mathématiciens du ſeizieme ſiecle qui y travaillent. 470. Inventions de Neper qui la portent fort près de ſa perfection. II. 15.
Triſection de l'angle (problême de la). Solutions ingénieuſes qu'en donnent les Anciens. I. 193.
Tſchirnhauſen (Ehrenfried Walther de). Sa vie & ſon caractere. II. 344. Son invention des cauſtiques. *Ibid. & ſuiv.* Hiſtoire de ſes miroirs & verres ardens. 611.
Tycho-Brahé. Hiſtoire de ſa vie. I. 557. Il perfectionne l'Aſtronomie Pratique. 562. Il travaille à un nouveau catalogue des fixes. 563. De ſon nouveau ſyſtême aſtronomique. 565. Il démontre que les Cometes n'ont qu'une parallaxe inſenſible. 568. Il établit la réfraction aſtronomique. 570. Ses découvertes dans la théorie de la Lune. 571. Ses obſervations nombreuſes. 573. Ses divers écrits. 574. De ſon Obſervatoire d'Uranibourg. 575.

V.

VALERIUS (Lucas), Géometre Italien, fait des progrès dans la théorie des centres de gravité. II. 5.
Varignon (Pierre). Ses travaux en Méchanique. II. 469, 470. Il défend le calcul différentiel contre Rolle. 362.
Ubaldi (Guido), Marquis del Monte, travaille ſur la Méchanique. I. 621. Et ſur la perſpective. 635.
Vénus obſervée ſous le Soleil en 1639. Hiſtoire de cette obſervation fameuſe. II. 240. Avantage qu'on tirera de l'obſervation ſemblable qui aura lieu en 1661. II. 242, 533.
Verbieſt (le P.), Jéſuite, Miſſionnaire à la Chine, & Aſtronome. I. 400.
Verres hyperboliques. Vains efforts pour en travailler, & inutilité de ce travail. II. 200.
Viete (François), Mathématicien célebre du ſeizieme ſiecle. Quelques-uns de ſes travaux géométriques. I. 263, 467. Récit des inventions nombreuſes que lui doit l'analyſe. I. 489, 499. Il attaque à tort le Calendrier Grégorien. 500. Quelques traits de ſa vie. *Ibid.*
Vignole (Egnazio Barrozzi de), écrit ſur la Perſpective. I. 635.
Villemot (l'Abbé de), célebre partiſan des tourbillons Carteſiens. II. 249.
Vincent (Grégoire de Saint-), Jé-

ſuite, Géometre célebre. Quelques-unes de ſes découvertes géométriques II. 64. De ſa prétendue quadrature du cercle. 65.

Viſion. Maurolicus & Porta touchent de fort près à ſa vraie explication. I. 628. Képler la trouve enfin, & la publie. II. 160.

Vitellion, Ecrivain d'Optique. I. 421.

Viviani (Vincent), célebre Géometre Italien. Sa divination ſur les Livres perdus d'Appollonius. I. 261. Il reſtitue pareillement les Œuvres d'Ariſtée l'ancien. II. 70. Problême curieux qu'il propoſe en 1692. 71. Quelques traits de ſa vie. *Ibid.*

Ulacq (Adrien), un des principaux Auteurs des Tables de logarithmes. II. 13.

Ulugh-Beigh, Monarque & Aſtronome Tartare. Obligations que lui a l'Aſtronomie. I. 376 *& ſuiv.*

W.

WALLIS (Jean), célebre Géometre Anglois, invente l'Arithmétique des infinis; découvertes qu'il fait par ſon moyen. II. 299 *& ſuiv.* Son déchaînement contre Deſcartes, & ſa partialité pour Harriot. 82, 85 *& ſuiv.* Ses erreurs multipliées en ce qui concerne l'hiſtoire de l'Algebre. I. 485, 486, 487, 490, 491.

Walther (Bernard), Aſtronome du quinzieme ſiecle, cultive l'Aſtronomie avec ſuccès. I. 452 *& ſuiv.*

Ward (Seth), Aſtronome du dix-ſeptieme ſiecle. Son hypotheſe aſtronomique, & ſes démêlés avec Bouillaud. II. 254.

Weidler (M. Fréderic), écrit l'hiſtoire de l'Aſtronomie. Jugement ſur cet ouvrage. I. Préface.

Werner (Jean), Mathématicien du quinzieme ſiecle. Fait en Géométrie des choſes au deſſus de ſon ſiecle. I. 469. Ses travaux aſtronomiques. 505.

Wing (Vincent), Aſtronome Anglois. Ce qu'on lui doit. II. 253.

Witt (Jean de), célebre Penſionnaire d'Hollande, cultive avec ſuccès la Géométrie. Précis de ſes écrits. II. 124.

Wren (le Chevalier Chriſtophe), trouve la rectification de la cycloïde. II. 57. Ce que lui doivent la Méchanique. 467, l'Aſtronomie, &c. 528.

Wurzelbaur (M.), Aſtronome de Nuremberg. Ses écrits. II. 591.

X.

XÉNOPHANE, Philoſophe Grec. Impertinences qu'on lui attribue, & combien peu elles ſont fondées. I. 140.

Xylander, traducteur & commentateur de Diophante. I. 319.

Y.

YAO, ancien Empereur de la Chine, réputé le fondateur de l'Aſtronomie Chinoiſe. I. 391.

Z.

ZAHN (le P.), Ecrivain d'Optique. II. 606.

Zimmermann, prétend prouver par l'Ecriture le mouvement de la terre. I. 528.

Fin de la Table générale des Matieres.

BIBLIOTHEQUE NATIONALE
DE FRANCE

FIN

V6030

Entier

R 116084

Cde : 702h Volts : 72 oc : 1,5
Date : 30.04.98

Service de la reproduction
PARIS-RICHELIEU