

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`




Digitized by Google

<36609352230014

<36609352230014

Bayer. Staatsbibliothek

F

S

Digitized by Google

2° Math. P. 237 t

Montmort

Digitized by Google

Digitized by Google

(par Raimond de Montmord)

Matheſis. Algebra ſpecialis. Ars combinatoria
& arithmetica probabil. 238 a

R

Digitized by Google

ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.

SECONDE EDITION

Revûe & augmentée de plusieurs Lettres.

A PARIS,

Chez LAURENT LE CONTE, Quay des Augustins, à la Ville de Montpellier.

MDCCXIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Digitized by Google

PREFACE.

IL y a long-temps que les Geometres ſe vantent de pouvoir par leurs methodes découvrir dans les Sciences naturelles, toutes les verités qui ſont à la portée de l'eſprit humain ; & il eſt certain que par le merveilleux alliage qu'ils ont fait depuis cinquante ans de la Geometrie avec la Phyſique, ils ont forcé les hommes à reconnoître que ce qu'ils diſent à l'avantage de la Geometrie n'eſt pas ſans fondement. Quelle gloire ſeroit-ce pour cette Science ſi elle pouvoit encore ſervir à regler les jugemens & la conduite des hommes dans la pratique des choſes de la vie !

L'aîné de Meſſieurs Bernoulli ſi connus l'un & l'autre dans le monde ſçavant, n'a pas cru qu'il fût impoſſible de porter la Geometrie juſqu'à ce point. Il avoit entrepris de donner des Regles pour juger de la probabilité des évenemens futurs, & dont la connoiſſance nous eſt cachée, ſoit dans les Jeux, ſoit dans les autres choſes de la vie où le hazard ſeul a part. Le titre de cet Ouvrage devoit

Digitized by Google

être *De arte conjectandi, l'art de deviner.* Une mort prématurée ne lui a pas permis d'y mettre la derniere main.

Monſieur de Fontenelle & Monſieur Saurin ont donné chacun une courte Analyſe de ce Livre; le premier dans l'Hiſtoire de l'Academie; l'autre dans les Journaux des Sçavans de France. Voici, ſelon ces deux Auteurs, quel étoit le plan de cet Ouvrage. M. Bernoulli le diviſoit en quatre Parties; dans les trois premieres il donnoit la ſolution de divers Problêmes ſur les Jeux de hazard: on devoit y trouver pluſieurs choſes nouvelles ſur les ſuites infinies, ſur les combinaiſons & les changemens d'ordre, avec la ſolution des cinq Problêmes propoſés depuis long-temps aux Geometres par M. Hugens. Dans la quatriéme Partie, il employoit les methodes qu'il avoit données dans les trois premieres, à réſoudre diverſes queſtions morales, politiques & civiles.

Année 1705, page 148. Année 1706, page 81.

On ne nous a point appris quels ſont les Jeux dont cet Auteur déterminoit les partis, ni quels ſujets de politique & de morale il avoit entrepris d'éclaircir; mais quelque ſurprenant que ſoit ce projet, il y a lieu de croire que ce ſçavant Auteur l'auroit parfaitement executé. M. Bernoulli étoit trop ſuperieur aux autres pour vouloir en impoſer, il étoit de ce petit nombre d'hommes rares qui ſont propres à inventer, & je me perſuade qu'il auroit tenu tout ce que promettoit le titre de ſon Livre.

Digitized by Google

Rien ne retarde plus l'avancement des Sciences, & ne met un plus grand obſtacle à la découverte des verités cachées, que la défiance où nous ſommes de nos forces. La plûpart des choſes qui paroiſſent impoſſibles ne le ſont que faute de donner à l'eſprit humain toute l'étendue qu'il peut avoir.

Pluſieurs de mes Amis m'avoient excité, il y a déja long-temps, à eſſayer ſi l'Algebre ne pourroit point atteindre à déterminer quel eſt l'avantage du Banquier dans le Jeu du Pharaon. Je n'avois jamais oſé entreprendre cette recherche, car je ſçavois que le nombre de tous les divers arrangemens poſſibles de cinquante-deux cartes, ſurpaſſe plus de cent mille millions de fois celui des grains de ſable que pourroit contenir le globe de la terre; & il ne me paroiſſoit pas poſſible de démêler, dans un nombre ſi vaſte, les arrangemens qui ſont avantageux au Banquier, d'avec ceux qui lui ſont contraires ou indifferens. Je ſerois encore dans ce préjugé ſi les ſuccès de feu M. Bernoulli ne m'euſſent invité il y a quelques années à chercher les differens hazards de ce Jeu. Je fus plus heureux que je n'avois oſé eſperer, car outre la ſolution generale de ce Problême, j'apperçus les routes qu'il falloit tenir pour en découvrir une infinité de pareils, ou même de beaucoup plus difficiles. Je connus qu'on pouvoit aller fort loin dans ce pays où perſonne n'avoit encore été; je me flattai qu'on pouvoit y

faire une ample recolte de verités également curieuſes & nouvelles : cela me donna la penſée de travailler à fond ſur cette matiere, & le deſir de dédommager en quelque ſorte le Public de la perte qu'il feroit s'il étoit privé de l'excellent Ouvrage de M. Bernoulli. Diverſes reflexions m'ont confirmé dans ce deſſein.

C'eſt particulierement dans les Jeux de hazard que paroît la foibleſſe de l'eſprit humain & la pente qu'il a à la ſuperſtition. Rien n'eſt ſi ordinaire que de voir des Joueurs attribuer leur malheur aux perſonnes qui les approchent, & à d'autres circonſtances qui ne ſont pas moins indifferentes aux évenemens du jeu. Il y en a qui ſe font une loi de ne prendre que des cartes qui gagnent, dans la penſée qu'un certain bonheur leur eſt attaché. D'autres au contraire s'attachent à prendre les cartes perdantes, dans l'opinion qu'ayant pluſieurs fois perdu, il eſt moins vrai-ſemblable qu'elles perdront encore, comme ſi le paſſé pouvoit décider quelque choſe pour l'avenir. Il y en a qui affectent certaines places & certains jours. On en voit qui refuſent de mêler les cartes, ſi ce n'eſt dans certaines ſituations, & qui croiroient perdre infailliblement s'ils s'étoient en cela écartez de leurs regles. Enfin la plûpart cherchent leurs avantages où ils ne ſont pas, ou bien ils les negligent entierement.

On peut dire à peu près la même choſe de la conduite des hommes dans toutes les actions de

Digitized by Google

la vie où le hazard a quelque part. Ce ſont les mêmes préjugés qui les gouvernent, c'eſt l'imagination qui regle leurs démarches, & qui fait naître aveuglément leurs craintes & leurs eſperances. Souvent ils abandonnent un petit bien certain pour courir temerairement après un plus grand bien, dont l'acquiſition eſt comme impoſſible; & ſouvent par trop de défiance ils renoncent à des eſperances conſiderables & bien fondées, pour ſe conſerver un bien dont la valeur n'a point de proportion avec celui qu'ils negligent. Le principe general de ces préjugés & de ces erreurs eſt que la plûpart des hommes attribuant la diſtribution des biens & des maux, & generalement tous les évenemens de ce monde à une puiſſance fatale qui agit ſans ordre & ſans regle, ils croyent qu'il vaut autant s'abandonner à cette Divinité aveugle, qu'on nomme Fortune, que de la forcer à leur être favorable en ſuivant des regles de prudence qui leur paroiſſent imaginaires.

J'ai donc cru qu'il ſeroit utile, non ſeulement aux Joueurs, mais aux hommes en general, de ſçavoir que le hazard a des regles qui peuvent être connues, & que faute de connoître ces regles ils font tous les jours des fautes, dont les ſuites fâcheuſes leur doivent être imputées avec plus de raiſon qu'au deſtin qu'ils accuſent. Je pourrois rapporter en preuve une infinité d'exemples tirés ou des Jeux, ou des autres choſes de la vie dont

Digitized by Google

l'évenement dépend du hazard. Il eſt certain que les hommes ne ſe ſervent point aſſez de leur eſprit pour obtenir ce qu'ils deſirent même avec le plus d'ardeur, & qu'ils ne font point aſſez d'efforts pour ôter à la Fortune ce qu'ils pourroient lui ſouſtraire par les regles de la prudence.

On a cru que cette matiere pourroit exciter la curioſité de ceux même qui en ont le moins pour les connoiſſances abſtraites. L'on aime naturellement à voir clair dans ce qu'on fait, même indépendamment de tout interêt. On joueroit ſans doute avec plus d'agrément ſi l'on pouvoit ſçavoir à chaque coup l'eſperance qu'on a de gagner, ou le riſque que l'on court de perdre. On ſeroit plus tranquile ſur les évenemens du jeu, & on ſentiroit mieux le ridicule de ces plaintes continuelles auſquelles ſe laiſſent aller la plûpart des Joueurs dans les rencontres les plus communes, lorſqu'elles leur ſont contraires.

Si la connoiſſance exacte des hazards du jeu ne ſuffit pas ſeule aux Joueurs pour les faire gagner, elle peut au moins ſervir à leur faire prendre le meilleur parti dans les choſes douteuſes, &, ce qui eſt fort important, à leur apprendre juſqu'à quel point ſont deſavantageuſes pour eux les conditions de certains Jeux que l'avarice & l'oiſiveté introduiſent tous les jours. Pour moi je crois que ſi les Joueurs ſçavoient que lorſqu'ils mettent au Pharaon un louis de treize livres ſur une carte qui a paſſé trois fois, le talon n'étant plus

que

Digitized by Google

que de douze cartes, ils font preciſément la même choſe que s'ils donnoient en pur don une livre un ſol & huit deniers au Banquier, il y en auroit peu qui vouluſſent tenter la Fortune avec tant de deſavantage.

La conduite des hommes fait le plus ſouvent leur bonne ou leur mauvaiſe fortune, & les gens ſages donnent au hazard le moins qu'ils peuvent.

Nous ne pouvons connoître l'avenir, mais nous pouvons toujours dans les Jeux de hazard, & ſouvent dans les autres choſes de la vie, connoître avec exactitude combien il eſt plus probable que certaine choſe arrivera de telle façon plutôt que de toute autre! Et puiſque ce ſont là les bornes de nos connoiſſances, nous devons au moins tâcher d'y atteindre.

Tout le monde ſçait qu'au défaut de l'évidence, nous devons chercher la vrai-ſemblance pour nous approcher de la verité; mais on ne ſçait point aſſez qu'il y a des vrai-ſemblances plus grandes & plus petites à l'infini, & que l'eſprit pour être bon juge, en doit diſtinguer tous les degrés, puiſqu'il arrive ſouvent qu'une choſe étant incertaine, il eſt neanmoins certain & même évident qu'elle eſt vrai-ſemblable, & plus vrai-ſemblable que toute autre.

Il paroît qu'on ne s'eſt point aſſez apperçu juſqu'à preſent qu'on pût donner des regles infaillibles pour calculer les differences qui ſe trouvent entre diverſes probabilités.

* *

On a voulu donner dans cet Ouvrage un eſſai de ce nouvel art, en l'appliquant à une matiere qui a été juſqu'ici dans une grande obſcurité, & qui ne paroît ſuſceptible d'aucune préciſion. On a crû qu'elle étoit plus propre que toute autre à donner de l'eſtime pour l'Analyſe, cet art merveilleux qui eſt la clef de toutes les Sciences exactes, & qui n'eſt apparemment negligé que parcequ'on ne connoît point aſſez l'étendue de ſes uſages ; car au lieu qu'on n'a employé juſqu'ici l'Algebre & l'Analyſe qu'à découvrir des raports conſtans & immuables entre des nombres & des figures, on s'en ſert ici pour découvrir des raports de probabilité entre des choſes incertaines & qui n'ont rien de fixe, ce qui ſemble fort oppoſé à l'eſprit de la Geometrie, & en quelque façon hors de ſes regles. C'eſt ce que fait judicieuſement ſentir l'illuſtre Auteur de l'Hiſtoire de l'Academie dans l'endroit que j'ai déja cité. *Il n'eſt pas ſi glorieux*, dit-il, *à l'eſprit de Geometrie de regner dans la Phyſique que dans les choſes de morale, ſi caſuelles, ſi compliquées, ſi changeantes. Plus une matiere lui eſt oppoſée & rebelle, plus il a d'honneur à la dompter.*

Je diviſe ce Traité en quatre Parties : la premiere renferme une theorie complette des combinaiſons ; je donne dans la ſeconde la ſolution de divers Problêmes ſur les Jeux de cartes qui ſont en uſage ; j'examine d'abord ceux qui ſont de pur hazard, tels que le Pharaon, la Baſſete, le Lanſquenet & le Treize ; je détermine quel eſt l'avantage ou le deſavantage des Joueurs dans toutes les circon-

Digitized by Google

ſtances poſſibles de ces Jeux. Les Geometres trouveront dans la ſolution de ces Problêmes toute la generalité qu'ils pourront ſouhaiter; & les Joueurs y rencontreront des nouveautés fort ſingulieres, dont il leur eſt important d'être inſtruits. L'on s'eſt borné à examiner ces quatres Jeux pour ne point faire un trop gros Volume, & on les a preferés aux autres parce qu'ils ſont plus en uſage, & qu'ils m'ont paru les plus curieux. Le reſte de cette ſeconde Partie contient les ſolutions de divers Problêmes ſur l'Hombre, le Piquet, l'Imperiale, le Brelan, &c. Je n'ai pû traiter ces derniers Jeux avec la même étendue que les précedens, j'en rends raiſon dans les pages 157, 158, 159, 160 & 161.

On trouvera dans la troiſiéme Partie la ſolution de toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur le Quinquenove, le Jeu des trois dez, & le Jeu du hazard. Les deux premiers ſont les ſeuls Jeux de dez qui ſoient en uſage en France, le dernier n'eſt connu qu'en Angleterre. Je donne enſuite des regles pour jouer le plus parfaitement qu'il ſe puiſſe un Jeu dont l'invention eſt ingenieuſe, & qui tient également de deux Jeux de cartes le Her & la Tontine. La perſonne qui m'a appris ce Jeu n'a pû me dire comment on le nomme. Pour ne le point laiſſer ſans nom, je l'ai appellé Jeu de l'Eſperance. On y trouvera auſſi la ſolution de quelques Problêmes aſſez faciles ſur le Jeu du Trictrac. Il y en a un qui peut être de quelque utilité pour les Joueurs.

Digitized by Google

Je finis cette troiſiéme Partie par des Problêmes très generaux ſur les dez, & par des tables qui peuvent être utiles aux Joueurs. J'y ajoûte comme pour ſervir d'Exemples trois Problêmes, il y en a un ſur le Jeu de la premiere Rafle; le ſecond eſt ſur les trois Rafles comptées, le dernier eſt ſur un Jeu dont le Baron de la Hontan fait mention dans le ſecond Tome de ſes Voyages, & qu'il dit être fort en uſage parmi les Sauvages de Canada. Le nom n'en eſt pas magnifique, il s'appelle le Jeu des Noyaux.

On pourra remarquer que tous les differens Jeux de dez qu'on examine dans cette troiſiéme Partie, donnent du deſavantage à celui qui tient le dé, au lieu que dans les Jeux de cartes tels que le Pharaon, la Baſſete, le Lanſquenet, le Treize, celui qui tient les cartes a un avantage conſiderable.

Il eſt à croire que ceux qui ont inventé ces Jeux n'ont point prétendu les rendre entierement égaux, ou, ce qui paroît plus vrai-ſemblable, qu'ils n'en ont point aſſez connu la nature pour en bien diſtribuer les hazards. Dans la pluſpart les conditions ſont ſi inégales pour les Joueurs, qu'on ſeroit bien fondé à ſoutenir qu'on ne peut y gagner avec juſtice, comme ſans doute on ne peut y perdre ſans être duppe.

Quoique dans ce Traité j'aye beaucoup plus en vûe le plaiſir des Geometres que l'utilité des Joueurs, & que ſelon nous ceux qui perdent leur temps au Jeu meritent bien d'y perdre leur argent, je n'ai point négligé en découvrant l'avantage ou

Digitized by Google

le deſavantage des Joueurs, de faire remarquer de quelle maniere il faudroit reformer les Jeux pour les rendre parfaitement égaux.-

Dans la quatriéme Partie je donne la ſolution des cinq Problêmes propoſés par Mr Hugens, & j'en ajoûte pluſieurs autres, dont quelques-uns paroîtront curieux & peut-être aſſez difficiles. Je la termine en propoſant, à l'imitation de M. Hugens, quatre Problêmes aſſez ſinguliers. Mais je crois devoir avertir les Geometres qui auroient la curioſité d'en tenter la ſolution, qu'ils n'y trouveront pas moins de difficulté que dans les plus difficiles Problêmes de calcul integral. Ceux qui ne regarderoient ces queſtions que comme des Problêmes d'Arithmetique, reconnoîtront que ſi elles ſuppoſent moins de connoiſſance en Geometrie, elles demandent peut-être plus d'adreſſe, & certainement beaucoup plus d'exactitude & de circonſpection.

Si je m'étois propoſé de ſuivre en tout le projet de M. Bernoulli, j'aurois dû ajoûter une cinquiéme Partie, où j'euſſe fait l'application des methodes contenues dans les quatre premieres, à des ſujets politiques, œconomiques ou moraux. Ce qui m'en a empêché, c'eſt l'embarras où je me ſuis trouvé de faire des hypotheſes, qui étant appuyées ſur des faits certains, pûſſent me conduire & me ſoûtenir dans mes recherches: Mais n'ayant point eu la commodité de me ſatisfaire entierement là-deſſus, j'ai crû qu'il valoit mieux remettre ce travail à un autre temps, ou en laiſ-

ſer la gloire à quelqu'autre perſonne plus habile que moi, que de dire des choſes ou trop communes ou peu exactes, qui n'euſſent point répondu à l'attente du Lecteur, & à la beauté du ſujet. Je me bornerai à faire remarquer en moins de mots qu'il me ſera poſſible, le rapport qu'il y a entre cette matiere & celle des Jeux, & les vûes qu'il faudroit prendre pour y réuſſir.

A parler exactement, rien ne dépend du hazard; quand on étudie la nature, on eſt bien-tôt convaincu que ſon Auteur agit d'une maniere generale & uniforme, qui porte le caractere d'une ſageſſe & d'une préſcience infinie. Ainſi pour attacher à ce mot *hazard* une idée qui ſoit conforme à la vraye Philoſophie, on doit penſer que toutes choſes étant reglées ſelon des loix certaines, dont le plus ſouvent l'ordre ne nous eſt pas connu, celles-là dépendent du hazard dont la cauſe naturelle nous eſt cachée. Après cette définition on peut dire que la vie de l'homme eſt un jeu où regne le hazard.

Pour faire voir plus préciſément que l'Analyſe des Geometres, & principalement celle qu'on employe dans ce Traité, eſt propre à diſſiper en partie les tenebres qui ſemblent répandues ſur les choſes de la vie civile qui ont rapport à l'avenir, il faut remarquer que de même qu'il y a des Jeux qui ſe reglent par le hazard ſeul, & d'autres qui ſe reglent en partie par le hazard & en partie par l'habileté des Joueurs; ainſi entre les choſes de la vie il y en a dont le

Digitized by Google

ſuccès dépend entierement du hazard, & d'autres auſquelles la conduite des hommes a beaucoup de part; & que generalement dans toutes les choſes de la vie ſur leſquelles nous avons à prendre notre parti, notre déliberation doit ſe reduire, comme dans les paris ſur les Jeux, à comparer le nombre des cas où arrivera un certain évenement, au nombre des cas où il n'arrivera pas; ou, pour parler en Geometre, à examiner ſi ce que nous eſperons multiplié par le degré de probabilité qu'il y a que nous l'obtiendrons, égale ou ſurpaſſe notre miſe, c'eſt à dire les avances que nous devons faire, ſoit peine, ſoit argent, ſoit credit, &c.

Il ſuit de là que les mêmes regles d'Analyſe qui nous ont ſervi à déterminer dans les Jeux les partis des Joueurs & la maniere dont ils doivent conduire leur jeu, peuvent auſſi ſervir à déterminer le juſte degré de nos eſperances dans nos diverſes entrepriſes, & à nous apprendre la conduite que nous devons tenir pour y trouver le plus d'avantage qu'il ſoit poſſible. Il eſt clair, par exemple, que la même methode qui nous a ſervi à déterminer dans quelles circonſtances il eſt à propos à l'Hombre de renoncer aux fiches du ſans-prendre dans l'eſperance de faire la volle, peut être employée, quoique plus difficilement, pour déterminer dans quelles circonſtances de la vie il faut ſacrifier un petit bien dans l'eſperance d'en obtenir un plus grand.

Digitized by Google

Pour continuer cette comparaiſon, il faut remarquer que les mêmes raiſons qui nous empêchent de pouvoir reſoudre toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur les Jeux, empêchent auſſi qu'on ne puiſſe reſoudre celles qu'on peut propoſer ſur les choſes de la vie civile. Ces raiſons ſont de deux ſortes: la premiere eſt l'incertitude où nous ſommes du parti que prendront à notre égard ceux dont les actions doivent regler l'évenement de nos entrepriſes. Le choc d'un corps décide & de la route qu'il doit tenir & de la vîteſſe qu'il doit avoir, car les loix des communications des mouvemens ſont fixes & invariables. Mais les raiſons & les differens motifs que les hommes peuvent avoir pour agir d'une façon plutôt que d'une autre, ne peuvent nous aſſurer de quel côté ils ſe détermineront. Souvent ils ne connoiſſent point leurs interêts, & ſouvent ils ne les ſuivent pas lorſqu'ils les connoiſſent, le caprice les détermine beaucoup plus que la raiſon, & c'eſt toujours deviner que de vouloir juger de ce qui dépend de la liberté des hommes.

La ſeconde cauſe de notre ignorance dans les choſes qui dépendent de l'avenir, eſt fondée ſur ce que les bornes de notre eſprit étant fort étroites, toutes les connoiſſances qui ſuppoſent un trop grand nombre de rapports ſont au deſſus de ſes forces. Or dans pluſieurs Jeux, & dans la plûpart des choſes de la vie, les comparaiſons qu'il faut faire ſont en ſi grand nombre, qu'il n'eſt preſque pas poſſible de les épuiſer.

Déterminer

Déterminer combien vaut le dé entre deux Joueurs égaux au Jeu du Trictrac, & combien vaut la main au Piquet, quelle piece eſt la plus avantageuſe au Jeu des Echets du fou ou du cavalier, & de combien l'une eſt meilleure que l'autre, ce ſont-là des Problêmes dont je tiens la ſolution impoſſible aux hommes. Il en eſt de même, & pour les mêmes raiſons de la plûpart des queſtions de morale & de politique : par exemple, déterminer ſi dans telle & telle circonſtance je dois avoir plus d'égard à la recommandation d'un parent, qu'à la priere d'un certain nombre d'amis : Si un certain commerce eſt avantageux ou préjudiciable à une Nation ; quel doit être le ſuccès d'une négociation & d'une entrepriſe militaire, &c.

Les contrats d'aſſurance qui ſont ſi communs parmi les Marchands, principalement dans les Républiques, n'enrichiſſent pas toujours les aſſureurs ; & les plus habiles Politiques d'Angleterre éprouvent tous les jours à leur perte dans ces groſſes gageures qu'on fait en ce pays-là ſur les évenemens de la guerre, que la prudence des hommes eſt inſuffiſante pour penetrer ſurement dans l'avenir.

Il eſt vrai qu'avec beaucoup de juſteſſe d'eſprit, une grande connoiſſance des faits, & ſurtout des reſſors ſecrets qui donnent le branle & le mouvement aux affaires, on peut découvrir avec aſſez de vrai-ſemblance quel eſt le meilleur parti dans ces gageures : mais il eſt impoſſible d'en venir jamais au point de pouvoir déterminer par le

raport exact de deux nombres combien un parti eſt meilleur que l'autre.

Quelque ſecours que l'eſprit humain puiſſe recevoir de la Geometrie, cette vertu, que l'on nomme prudence, n'aura jamais que des regles incertaines; pour un petit nombre de verités & de principes certains que contiennent la politique & la morale, on y trouve une infinité d'obſcurités impenetrables à l'eſprit humain.

Tout l'uſage qu'on peut tirer de la Geometrie par raport à ces ſortes de Problêmes, conſiſte en ce qu'on peut aſſurer que ceux qui ſe ſeront rendu familiere l'eſpece de Logique dont on fait uſage dans ce Traité, en ſeront plus propres à découvrir les differens degrés de probabilité dans les divers partis qu'on peut prendre ſur les choſes qui regardent la morale, ou ſur celles qui ont rapport à la vie civile, & à éviter l'erreur dans leurs jugemens par l'habitude qu'ils auront acquiſe de diſtinguer le vrai d'avec le vrai-ſemblable, & de ne donner leur conſentement qu'à l'évidence.

Que les hommes en penſent ce qu'ils voudront, il eſt certain que cette force & cette juſteſſe d'eſprit qu'on acquiert dans la recherche des verités abſtraites, s'étend auſſi aux verités ſenſibles, & pour ainſi dire de pratique. L'Analyſe eſt un inſtrument qui ſert à tout quand on le ſçait bien manier. Toutes les verités ſe tiennent entr'elles, & quand on a fait quelque temps eſſai de ſes forces ſur les notions exactes que nous avons des nombres & de l'étendue, on les employe avec

Digitized by Google

plus de succès sur les connnoissances moins exactes qui peuvent être l'objet de notre esprit. Ceux qui ont le mieux écrit sur la Metaphysique, la Physique, peut-être même sur la Medecine & sur la Morale, étoient d'excellens Geometres. L'experience devroit donc convaincre de l'utilité de la Geometrie ceux à qui les raisons ne la peuvent persuader.

Pour terminer ce parallele entre les Problêmes sur les Jeux, & les questions qu'on peut proposer sur les choses œconomiques, politiques & morales, il faut observer que dans ces dernieres comme en celles des Jeux, il y a une espece de Problêmes qu'on pourra resoudre en observant ces deux regles; 1°. borner la question que l'on se propose à un petit nombre de suppositions, établies sur des faits certains; 2°. faire abstraction de toutes les circonstances auſquelles la liberté de l'homme, cet écueil perpetuel de nos connoissances, pourroit avoir quelque part. Il est à croire que M. Bernoulli avoit égard à ces regles dans la quatriéme partie de son Ouvrage, & il est certain qu'avec ces deux restrictions on pourroit traiter plusieurs sujets ou de politique ou de morale avec toute l'exactitude des verités geometriques.

C'est ce qu'a fait admirablement M. Halley dans un Memoire qui se trouve dans les Transactions philosophiques d'Angleterre, num. 196, où ce sçavant Anglois entreprend de déterminer le degré de la mortalité du genre humain. Ce morceau est plein de choses curieuses, dont le

Lecteur verroit ici l'extrait avec plaiſir : Mais cette Préface étant peut-être déja trop longue, je n'en rapporterai qu'une qui eſt traitée par l'Auteur avec beaucoup de fineſſe. C'eſt une methode pour déterminer ſur quel pied ſe doivent regler les rentes à fond perdu. Il donne une Table toute calculée pour les differens âges de cinq en cinq années depuis un an juſqu'à ſoixante & dix. Cette Table fait voir combien étoit avantageux aux Anglois le parti que leur faiſoit alors le Roy Guillaume, en donnant 14 pour cent par année de rente viagere, ce qui eſt à peu près la ſeptiéme partie du fond. On voit par cette Table qu'une perſonne âgée de dix ans n'en devroit avoir que la treiziéme partie, & un homme âgé de trente-ſix ans la onziéme, & enfin que l'interêt de dix pour cent n'eſt dû qu'aux perſonnes âgées de quarante-trois à quarante-quatre ans. Il pouſſe encore cette idée plus loin, & il examine ſur quel pied devroit ſe regler une rente viagere qui ſeroit ſur la tête de deux ou de pluſieurs perſonnes de differens âges.

Cette matiere paroît épuiſée dans le Memoire de M. Halley. On en trouve quelques autres ſemblables maniées aſſez heureuſement, quoiqu'avec moins d'exactitude, dans l'Arithmetique politique du Chevalier Petty. Mais il en reſte pluſieurs autres de cette nature qu'on pourroit traiter avec le même ſuccès & la même utilité pour le Public.

Je crois devoir parler maintenant de deux Geometres illuſtres à qui je dois les premiers vûes que

Digitized by Google

jai eues sur le sujet que je traite. En 1654 M. Pascal resolut ce Problême ; *Deux personnes jouent à un jeu égal en un certain nombre de points ; l'une des deux est supposée avoir plus de points que l'autre : On demande comment elles doivent partager l'argent du Jeu en cas qu'elles veuillent rompre la partie sans la finir.* On peut voir la solution de ce Problême dans un Livre fort court qu'on a trouvé imprimé après sa mort, & qui a pour titre, *Triangle Arithmetique*. Ce grand Homme qui avoit beaucoup médité sur les proprietés des nombres, fait diverses applications de ce triangle aux regles des partis & aux combinaisons.

Le Chevalier de Meré lui avoit proposé ce Problême, il lui en avoit aussi proposé quelques autres sur le dez : Par exemple, déterminer en combien de coups on peut amener une certaine rafle, & quelques autres de cette sorte assez faciles. Ce Chevalier, qui étoit plus bel esprit que Geometre, resolut les Problêmes sur les dez, mais ni lui ni M. de Roberval ne purent resoudre celui des partis. M. Pascal le proposa à M. Fermat avec qui il étoit en commerce d'amitié & de Geometrie, & qui en cette Science n'étoit inferieur qu'à M. Descartes.

Ce Geometre parvint à la solution du Problême par une voye differente de celle de M. Pascal : Il alla même plus loin, & il assura que sa methode étoit generale pour quelque nombre de Joueurs qu'il y eût. M. Pascal ne crut pas qu'elle pût le conduire jusque là, & il tâche de lui faire voir dans une lettre qui se trouve avec quelques autres sur ce sujet

Digitized by Google

dans les Ouvrages posthumes de M. Fermat imprimés à Thoulouze, que sa methode, qu'il reconnoît bonne pour deux Joueurs, n'est pas juste pour un plus grand nombre. On ne voit point dans ce Recueil la réponse de M. Fermat, mais il est certain que le droit étoit de son côté; sa methode est sûre, & s'étend à quelque nombre de Joueurs que ce soit.

A peu près dans ce temps M. Hugens, ce fameux Geometre qui a enrichi toutes les parties des Mathematiques de tant de belles découvertes, ayant entendu parler de ces Problêmes, entreprit de les resoudre, & employa pour en venir à bout, la methode analytique, qui pour l'ordinaire mene plus loin que toute autre. Il fit de ces Problêmes un petit Traité latin qui compose environ une feuille, & se trouve à la fin du Livre de M. Schotten, intitulé, *Exercitationes Geometricæ.*

Quoique cet Auteur n'entreprenne de déterminer les partis des Joueurs dans aucun Jeu de cartes ni de dez, & qu'il se borne à ce qu'il y a de plus facile en cette matiere, & presque aux seuls Problêmes de M. Pascal, on voit par la lettre qu'il écrit à M. Schotten, qu'il estimoit beaucoup ce qu'il donne dans ce petit Ouvrage. *Rien n'est plus glorieux*, dit-il, *à l'art dont nous faisons usage dans ce Traité, que de pouvoir donner des regles à des choses qui étant dépendantes du hazard, semblent n'en reconoître aucune, & par là se soustraire à la raison humaine.* Et il ajoûte: *Je m'assure que ceux qui sçavent juger des choses, reconnoîtront en lisant cet écrit, que le sujet en est*

Digitized by Google

plus ſérieux & plus important qu'il ne paroît, que l'on y poſe les fondemens d'une théorie très belle & très ſubtile, & que les recherches de Diophante, qui n'ont pour objet que des proprietés abſtraites des nombres, ſont & plus faciles, & moins agréables que celles que l'on peut ſe propoſer en cette matiere.

L'Auteur à la fin de ce Traité invite les Geometres à la recherche de cinq Problêmes, dont aucun que je ſçache n'a encore été reſolu. Il y en a trois de ces cinq dont il donne la ſolution, mais ſans analyſe ni démonſtration, & il ne donne point la ſolution des autres.

Comme c'eſt principalement pour les Geometres que j'ai compoſé ce Traité & que pour l'ordinaire les Sçavans ne ſont pas Joueurs, j'ai cru devoir expliquer fort au long les Jeux dont je parle dans cet Ouvrage, & j'ai tâché de n'obmettre aucune circonſtance neceſſaire. Je m'étois propoſé d'abord de mettre en langage ordinaire la ſolution de quelques-uns des Problêmes les plus faciles; tels que ſont ceux de la quatriéme Partie: mais j'ai été contraint d'abandonner ce deſſein, pour n'être point obligé de faire des diſcours infinis que perſonne n'auroit eu la patience de ſuivre. L'uſage de l'Algebre eſt de repreſenter à l'eſprit un grand nombre d'idées ſous des expreſſions fort courtes, & de lui fournir de grandes facilités pour parcourir avec promptitude les rapports des choſes que l'on conſidere. J'ai cru que ne voulant point faire un gros Livre, je ne devois point renoncer à cet avantage; je me ſuis ſeulement attaché à

Digitized by Google

m'expliquer de telle maniere dans la concluſion de chaque Problême, & dans les Corollaires & les Remarques qui ſont à la fin de chaque ſolution, que je pûſſe être entendu de tout le monde, & même des Joueurs.

Comme on n'écrit que pour être lû, j'ai tâché de rendre facile la lecture de cet Ouvrage, & j'ai préferé ſans peine la ſatisfaction du Lecteur à l'eſtime de ces eſprit mediocres, qui n'admirent que ce qui leur coute beaucoup de peine, & ce qui leur paroît au deſſus de leur portée. On trouvera que je me ſuis fort étendu dans les endroits que j'ai cru difficiles, & principalement dans ceux qui devoient répandre leur lumiere ſur pluſieurs veritès. Mais comme je ſçai auſſi que l'utilité d'un Livre de Mathematique conſiſte moins dans les verités qu'il découvre que dans la diſpoſition qu'il donne à l'eſprit d'en découvrir de pareilles, & qu'on acquiert beaucoup plus cette diſpoſition en trouvant ce que l'Auteur a déja trouvé, qu'en le ſuivant pas à pas, j'ai cru que je ne devois point me gêner à expliquer tout en détail, & même à tout démontrer, & qu'il me ſuffiſoit de ne laiſſer aucune difficulté dont on ne pût trouver la ſolution avec une application ſuffiſante. Enfin je me ſuis propoſé d'épargner au Lecteur le travail de l'invention, & de lui en laiſſer en quelque ſorte le plaiſir.

TRAITE'

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

CETTE ſeconde Edition eſt de moitié plus ample que la precedente ; l'ordre en eſt auſſi different. J'ai ramaſſé dans la premiere partie tous les Theorêmes ſur les Combinaiſons qui étoient répandus dans le corps du livre. J'en ai auſſi ajouté quelques-uns. Les principales additions ſont dans la premiere partie & vers la fin de la quatriéme. J'avois obmis dans l'édition precedente les Démonſtrations des plus difficiles Problêmes, dans le deſſein de picquer davantage la curioſité du Lecteur, qui ſouvent croit avoir ſçu ce qu'il apprend ſans peine. Je les ai miſes toutes dans celle-ci à la priere de quelques amis. Celles des Formules ſur le Treize ſe trouveront dans les Notes latines de M. N. Bernoulli. Je n'aurois pu en donner de meilleures.

La cinquiéme partie eſt un Recueil de Lettres que j'ai reçues de Meſſieurs Bernoulli à l'occaſion de cet Ouvrage, & des réponſes que je leur ai faites. Il n'y en a qu'une de M. J. Bernoulli, mais très belle. Les autres ſont de M. N. Bernoulli ſon neveu, digne heritier du ſçavoir geometrique, qui eſt dans cette illuſtre famille.

Il n'eſt pas beſoin que je faſſe ici l'éloge de ces Lettres, elles portent leur recommandation avec elles. On verra que l'on ne peut rien de plus fort en ce genre. J'eſpere que

Digitized by Google

les Geometres me ſçauront gré d'avoir ſacrifié, en inſerant ces Lettres dans ce Livre, la vanité d'Auteur à l'amour que j'ai pour le Public & pour la perfection des Sciences. On trouvera dans ces Lettres & dans les réponſes pluſieurs recherches nouvelles & très difficiles dont on n'a fait aucune mention dans le corps de cet Ouvrage. Il y en a en particulier ſur le Her, jeu que j'explique à la page 278. Les conditions ſingulieres de ce jeu ont donné occaſion à une diſpute entre M. Bernoulli & deux de mes amis, perſonnes de beaucoup d'eſprit. Quoique j'aye enfin pris parti, je n'oſe me perſuader que la verité ſoit de mon côté; le Lecteur en jugera. La queſtion eſt curieuſe, & je me flatte qu'on ne trouvera point inutile ou trop long ce qui a été écrit de part & d'autre ſur ce ſujet.

Je ne ſçai ſi ayant manqué ou plûtôt évité pluſieurs occaſions qui ſe preſentoient naturellement d'allier dans cet Ouvrage la conſideration des Courbes avec la pure Analyſe, je ne dois point craindre qu'on me blâme d'avoir inſeré dans ma Lettre du 8 Juin 1712, des choſes qui ſont de pure Geometrie, & qui n'ont aucun rapport à ce Traité: Mais outre que je me ſuis fait une loi de donner mes Lettres & celles de M.rs Bernoulli telles qu'elles ont été écrites. J'aurois privé le Public de pluſieurs belles choſes que l'on verra dans la réponſe de M. N. Bernoulli du 11 Octobre 1712; cette derniere raiſon a levé entierement mes ſcrupules.

Depuis que j'ai publié cet Eſſai, il a paru deux petits Ouvrages qui ont beaucoup de rapport avec celui ci. L'un a pour titre De arte conjectandi in Jure : *C'eſt une Theſe Latine que M. N. Bernoulli a ſoutenue l'année 1709 à Baſle en prenant le Degré de Licentié en Droit.*

Digitized by Google

Il y a beaucoup de choſes curieuſes & qui meritent d'être lûes. Si l'on n'y trouve pas les mêmes beautés que dans ſes Lettres, c'eſt qu'apparemment le ſujet ne le comporte pas, ou que l'Auteur n'avoit pas encore medité ces matieres auſſi profondément qu'il a fait depuis. L'autre a plus de rapport avec notre Ouvrage, ou plûtôt il eſt formé ſur le même plan; c'eſt un Traité fort court, mais excellent, qui a pour titre, De menſurâ ſortis.

M. Moivre le donna dans les Tranſactions Philoſophiques au commencement de l'année 1711, mais il n'a paru que l'année paſſée. L'Auteur m'a fait l'honneur de m'en envoyer un Exemplaire que je reçus au commencement du mois d'Aouſt de l'année derniere.

M. Moivre a bien jugé que j'aurois beſoin de ſon Livre pour répondre à la Critique qu'il fait du mien dans ſon Avertiſſement. L'intention louable qu'il a eu de relever & de faire valoir ſon Ouvrage, l'a porté à rabaiſſer le mien & à diſputer à mes methodes le merite de la nouveauté. Comme il a cru pouvoir m'attaquer ſans me donner ſujet de me plaindre de lui, je crois pouvoir lui répondre ſans lui donner lieu de ſe plaindre de moi. Mon intention n'eſt point de critiquer ſon Ouvrage; outre qu'il eſt au deſſus de la cenſure, on ſeroit bien fâché d'en diminuer le merite: cela eſt trop éloigné de notre caractere; mais parcequ'il eſt permis de ſe défendre, & de conſerver ſon bien, je me ſuis propoſé de lui répondre: Voici ce que M. de Moivre expoſe dans ſon Avertiſſement.

Huguenius primus, quod ſciam, regulas tradidit ad iſtius generis Problematum ſolutionem quas nuperrimus Autor Gallus variis exemplis pulchrè illuſtravit; ſed non videntur viri clariſſi-

Digitized by Google

mi eâ ſimplicitate ac generalitate uſi fuiſſe, quam natura rei poſtulabat : etenim dum plures quantitates incognitas uſurpant, ut varias colluſorum conditiones repræſentent, calculum ſuum nimis perplexum reddunt ; dumque colluſorum dexteritatem ſemper æqualem ponunt, doctrinam hanc ludorum intra limites nimis arctos continent.

Il ne manque à ces déciſions que de pouvoir être ſoutenues par de bonnes preuves ; mais où M. Moivre en auroit-il pris ? J'ai donné des ſolutions generales par-tout où la nature du Problême l'a permis ou l'a demandé : on peut en faire l'épreuve à l'ouverture du Livre. Il eſt vrai que j'ai donné des ſolutions particulieres des cinq Problêmes de M. Huyguens & de quelques autres ; mais je ne crois pas qu'il ſoit toujours à propos de generaliſer tout, principalement ce qui eſt facile. Des ſolutions particulieres délaſſent le Lecteur, & ne l'inſtruiſent pas moins, lorſque, comme il arrive ſouvent, la ſolution particuliere renferme toute les difficultés de la generale ; ſouvent rien plus facile que de generaliſer, c'eſt une oſtentation de le faire toujours & ſans neceſſité ; j'avoue qu'il arrive ſouvent qu'un exemple particulier réſolu n'apprend pas le chemin de la ſolution generale ; alors il faut s'élever, ſi on le peut, du cas particulier au general ; c'eſt auſſi ce que l'on croit avoir fait preſque par-tout, je m'en rapporte là-deſſus au jugement des Lecteurs.

Je ne comprens point ce que veut dire M. Moivre quand il me reproche d'avoir employé des inconnues où n'en falloit point, & d'en avoir embaraſſé mes calculs : je ne ſçache que le ſeul Problême 5e de M. Huyguens ſur lequel ce reproche puiſſe tomber ; j'employe preſque par-tout la methode des Combinaiſons, & je l'avois mis ſeule en uſage

Digitized by Google

dans la premiere partie qui eſt la plus conſiderable par ſon étendue, & par la difficulté des Problêmes. Si je me ſers quelquefois de l'Analyſe, c'eſt que je crois à propos, & qu'il eſt agreable de tenter differentes voyes, & utile d'ouvrir pluſieurs routes. Si quelquefois ſans me ſervir d'Analyſe j'employe des inconnues où l'on pourroit abſolument s'en paſſer, comme dans le Quinquenove, le Lanſquenet & ailleurs, c'eſt pour ſoulager l'imagination du Lecteur; j'aurois pû en uſer autrement, mais je l'ai fait à deſſein.

Monſieur Moivre me reproche encore qu'en ſuppoſant les forces des Joueurs toujours égales, je renferme la ſcience des probabilités dans les Jeux en des bornes trop étroites; mais outre que la conſideration de cette inégalité eſt aſſés inutile dans la pratique, parcequ'on ne connoît & qu'on ne peut jamais connoître exactement les forces des Joueurs qu'à poſteriori, *fort imparfaitement, & que cela même n'a jamais lieu dans les Jeux de pur hazard. Je ne ſçache aucun Problême dans lequel cette prétendue generalité puiſſe faire difficulté après tout ce que nous avons donné. M. Moivre verra ici par des Lettres, dont la date eſt anterieure à la publication de ſon Livre, que quand je m'en ſuis aviſé elle ne m'a point embaraſſé *.*

Enfin je peux demander à M. Moivre pourquoi il affecte de faire les mêmes reproches à M. Huyguens, en ſuppoſant comme une choſe certaine qu'il eſt le premier qui ait donné des regles pour cette eſpece de calcul, & que je n'ai fait autre choſe que d'en faire des applications.

En toute autre matiere que celle-ci M. Moivre me feroit un honneur que je ne merite point, de me mettre à côté de M. Huyguens; mais comme il ne le fait que pour nous

* Voyés ma Lettre du premier Mars 1711.

Digitized by Google

attribuer les mêmes défauts, & pour dire que je me ſuis borné à faire des applications des regles que donne M. Huyguens, je crois être diſpenſé de le remercier ; qu'il me permette au contraire d'appeller de ſon jugement, & de croire que j'ai mieux employé mon temps qu'il ne le dit.

Je ſuis perſuadé que je n'ai tiré aucun ſecours ou que j'en ai tiré très peu des regles prétendues de M. Huyguens, par la raiſon que je n'y en trouve aucune, ni aucun exemple qui puiſſe en fournir, ſi ce n'eſt peut être la derniere Propoſition ; car la ſolution du Problême où l'on cherche en combien de coups on peut parier à but d'amener ſonnés, ne procedant que par ſaut & en tâtonnant, ne peut ſervir de modele. Celle qui lui donne le parti des Joueurs à qui il manque un nombre inégal de points ſur la partie, a le même défaut. Sa methode, quoique naturelle, ne donne point de ſolution generale, quoique l'on en puiſſe trouver en ſuivant une autre route ; & c'eſt à ces deux Problêmes que ſe borne le Traité de M. Huyguens : ſon Lemme, quoique fort utile, eſt preſque un Axiome, n'étant qu'une regle de ſens commun.

Je n'oſe rechercher quelles raiſons peut avoir eu M. Moivre pour m'envier le petit honneur d'avoir en quelque ſorte approfondi une matiere à peine effleurée, & entierement oubliée depuis ſoixante ans. Je me bornerai à juſtifier ici ce que j'ai avancé dans ma Preface touchant la nouveauté de la matiere que je traite. Comme il plaît à M. Moivre d'en douter, quelques Lecteurs pourroient prendre de-là occaſion de croire que j'ai voulu en impoſer au Public, en donnant pour nouveau ce qui ne l'eſt point, & ce qui ſe trouve ailleurs.

Comme c'eſt principalement cet attrait de la nouveauté

Digitized by Google

qui m'a engagé à écrire, je me propoſe d'entrer dans un détail exact de tout ce qui s'eſt fait ſur cette matiere, ou qui peut y avoir rapport, afin que l'on ſoit en état d'en juger; & comme on pourroit croire que M. Moivre, mieux inſtruit que moi, a eu raiſon d'attribuer les premieres vûes qu'on a eu ſur cette matiere à M. Huyguens plûtôt qu'à M. Paſcal, je mettrai encore le Lecteur en état de prononcer là-deſſus.

Ces faits n'étant point tout à fait perſonnels, & ayant quelque rapport à l'Hiſtoire des Mathematiques, dont le calcul des probabilités & des hazards va peut être devenir une partie conſiderable, je me flate que cette diſſertation ne ſera point deſagreable.

En 1654 on propoſa à M. Paſcal ces deux Problêmes. 1°. Il manque à deux Joueurs un certain nombre de points on demande leurs ſorts. 2°. On demande en combien de coups on peut entreprendre d'amener ſonnés avec deux dés: je ne ſçai par quelle voye M. Paſcal réſolut ce dernier Problême; mais ſa ſolution fut juſte, car il trouva qu'il y a de l'avantage à l'entreprendre en vingt-cinq coups, mais qu'il y a du deſavantage à l'entreprendre en 24 coups, ce qui eſt vrai, & donna pourtant bien du ſcandale à M. le Chevalier de Meré, ami de M. Paſcal, & bel eſprit de ce temps-là, qui ne pouvoit en convenir. Voici les termes de M. Paſcal dans ſa Lettre à M. Fermat du 29 Juillet 1654.

Il me diſoit donc qu'il avoit trouvé fauſſeté dans les nombres par cette raiſon; ſi on entreprend de faire un 6 avec un dé, il y a de l'avantage à l'entreprendre en quatre coups, comme de 671 à 625. Si on entreprend de faire ſonnés avec deux

Digitized by Google

dés, il y a desavantage de l'entreprendre en 24 coups; neanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces de deux dés, comme 4 est à 6 qui est le nombre des faces d'un dé. Voilà quel étoit son grand scandale, qui lui faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes, & que l'Arithmetique se démentoit.

C'est de ce Chevalier & aussi de cette difficulté que M. Pascal veut sans doute parler dans cette même Lettre, page 181 des Oeuvres posthumes de M. Fermat, où l'on trouve ces paroles remarquables d'un homme tel que M. Pascal.

Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnoit fort M. N... il est très bon esprit, mais il n'est pas Geometre; c'est, comme vous sçavés, un grand défaut.

Il y a lieu de croire que M. Pascal avoit résolu ce Problême de la même maniere que M. Huyguens a fait depuis. Si sa solution eût été generale, il l'auroit apparemment donné, & d'ailleurs on ignoroit alors le secret d'employer les logarithmes pour la résolution des égalités, ce qui est neanmoins absolument necessaire pour résoudre ce Problême generalement & methodiquement. Celui des partis lui parut plus difficile, & lui plut si fort, qu'il le proposa à ses amis Messieurs Fermat & Roberval. Il ne paroît pas que ce dernier, fort inferieur à M. Fermat, l'ait résolu : pour M. Fermat il en vint à bout en se servant des Combinaisons. M. Pascal qui n'avoit point suivi cette route en fut tout étonné, & soutint quelque temps qu'elle ne pouvoit conduire à la solution dans le cas de trois ou de plusieurs Joueurs. Cette dispute leur donna lieu de faire

faire diverſes recherches ſur la matiere des Combinaiſons, ils trouverent l'un & l'autre ſur ce ſujet de très beaux Theorêmes. On en voit quelques-uns dans les Oeuvres poſthumes que je viens de citer ; mais M. Paſcal y pénetra le plus avant, c'eſt ce qui paroît par ſon Traité intitulé Triangle Arithmetique, *tout rempli de réflexions & de découvertes ſur les nombres figurés dont je le crois l'inventeur, parcequ'il ne cite perſonne. Comme ce petit Livre eſt aſſés rare, & qu'on y trouve tout ce qu'on ſçavoit avant nous ſur le calcul des hazards & ſur les Combinaiſons, je vais en faire un extrait.*

Ce Livre eſt un Recueil de pluſieurs petits Traités qui furent trouvés imprimés à la mort de M. Paſcal parmi ſes papiers ; entre pluſieurs matieres qu'il y traite, voici celles qui ont le plus de rapport avec la nôtre.

Le premier Traité eſt ſur les nombres figurés en general, il enſeigne leur generation, & en découvre quelques proprietés.

On trouve dans celui qui ſuit, intitulé : des Ordres Numeriques, *tout ce que l'on voit dans la premiere partie de notre Eſſai juſqu'à la page* 16. *Comme M. Paſcal n'employoit point les expreſſions algebriques, ce ſont des canons où nous donnons des formules : le tour de démonſtration eſt auſſi fort different. J'oubliois de dire qu'à l'égard de ce beau Theorême :* Un nombre de quelque ordre que ce ſoit étant multiplié par la racine précedente, & diviſé par l'expoſant de ſon ordre, donne pour quotient le nombre de l'ordre ſuivant qui précede cette racine. *M. Paſcal aſſocie M. Fermat à l'honneur de l'invention.*

Entre tous ces petits Traités il s'en voit deux fort courts

*****

ſur les Combinaiſons, un Latin, l'autre François; preſque tout s'y reduit à réſoudre en pluſieurs façons qui reviennent toutes à la même choſe le Problême qui ſuit, Datis duobus numeris inæqualibus invenire quot modis minor in majore contineatur. *On voit auſſi un petit Traité qui a pour titre :* Uſage du Triangle Arithmetique, pour trouver les puiſſances des binomes & apotomes. *Ce Problême eſt fort curieux, l'Auteur y ajoûte la ſolution de ce beau Problême,* Datis quotcumque numeris in progreſſione à quovis numero inchoante invenire quarumvis poteſtatum eorum ſummam. *On peut comparer ſa ſolution avec celles que l'on trouve ici pages* 19, 21 *&* 63.

Enfin l'Auteur y réſout de trois manieres differentes le Problême des partis entre deux Joueurs qui ont un nombre inégal de points. Ce Problême eſt le premier de cette nature auquel je ſçache qu'aucun Geometre ait jamais penſé : voici ſa premiere methode. Il commence par le cas où un des deux Joueurs joueroit pour un point, l'autre pour deux. Il détermine enſuite le cas où chacun des Joueurs joueroit pour deux points, enſuite le cas où l'un joueroit pour trois points, & l'autre pour deux, & ainſi de ſuite pied à pied, ne pouvant trouver chaque cas que par le moyen de tous les précedens, à commencer par le cas le plus ſimple où il manque à chacun des Joueurs un égal nombre de points, ce qui leur donne à chacun la moitié de ce qui eſt au jeu. Il ſe ſert enſuite pour réſoudre ce même Problême, des Combinaiſons & de ſon Triangle Arithmetique; mais il me ſemble que ces deux methodes n'en font qu'une, les nombres que donnent les Combinaiſons appartenans aux nombres figurés dont le Triangle Arithmetique eſt une eſpece.

Digitized by Google

Depuis ce temps-là pluſieurs perſonnes ont donné des Traités de Combinaiſons, & ont parlé des nombres figurés ; mais je n'en connois aucun qui ait pouſſé ces matieres plus loin que M. Paſcal. Les Auteurs qui en ont écrit ſont, ce me ſemble, le P. Preſtet, le P. Tasquet, M. Wallis. On peut les conſulter. Je ne crois pas qu'on y trouve rien de conſiderable qui aille au de-là des découvertes de M. Paſcal. Il eſt vrai que M. Wallis a fait un ſçavant uſage des nombres figurés pour la quadrature des courbes dans ſon Arithmetique des infinis ; mais cela même lui eſt encore commun avec M. Paſcal qui en a fait un uſage admirable dans ſon Traité de la Roulette. La plus belle Propoſition de l'Arithmetique des infinis, & qui s'exprime ainſi en Latin : Invenire rationem quam habet ſumma ſeriei cujuſvis numerorum figuratorum ab unitate incipientium ad ſummam totidem ultimo æqualium, *n'eſt démontrée que par induction par M.* Wallis : *on la trouvera ici comme Corollaire d'une Propoſition très utile que nous avons réſolu, &, je crois, bien démontrée, page 63. Je dirai par occaſion, ne l'ayant pû dire ailleurs, que dans la ſolution de ce Problême je n'ai fait que ſuivre ſans le ſçavoir, les vûes que l'illuſtre M. de Leibnitz a eu il y a longtemps, pour trouver les ſommes d'une ſuite de nombre qui aura une derniere difference conſtante : c'eſt ce que j'ai appris par le Livre intitulé :* Commercium Epiſtolicum, &c. *imprimé par ordre de Meſſieurs de la Societé Royale d'Angleterre, qui m'ont fait l'honneur de m'en envoyer un Exemplaire au mois d'Avril de cette année. La premiere partie de ce Livre étoit alors imprimée.*

En 1657 M. Huyguens donna ſon Traité intitulé : Ratiocinia de Ludo Aleæ. *On le trouve à la fin du Livre*

Digitized by Google

de M. Chotten, intitulé: Exercitationes Geometricæ. *Je n'ai rien à ajoûter à ce que j'en ai déja dit, je ferai ſeulement obſerver que M. Huyguens lui-même reconnoît qu'il n'a penſé à ces Problêmes qu'à l'occaſion des ſolutions que des Geometres François en avoient déja donné: Voici ſes termes:* Sciendum verò quod jampridem inter præſtantiſſimos tota Gallia Geometras calculus hic fuerit agitatus, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hæc in re tribuat.

Mais outre qu'il eſt conſtant que M. Paſcal eſt le premier qui ait écrit ſur cette matiere, je ne doute point que ceux qui liront le Traité de M. Huyguens d'une part, & de l'autre les Traités & Lettres de M. Paſcal que j'ai indiquées, ne conviennent que Monſieur Paſcal a pouſſé le plus loin cette matiere, puiſqu'ayant réſolus l'un & l'autre les mêmes Problêmes, M. Paſcal, outre la methode de M. Huyguens qu'il a employée pour les partis, a encore mis en uſage celle des Combinaiſons qui eſt beaucoup meilleure, & a donné lieu à de très grandes découvertes.

En 1685 M. Jacques Bernoulli propoſa dans le Journal des Sçavans de France les deux Problêmes qui ſuivent. Deux Joueurs *A* & *B* jouent à qui amenera le premier un certain point. *A* joue d'abord un coup, *B* un coup; enſuite *A* en joue deux, & *B* deux; enſuite *A* en joue trois & *B* trois, & ainſi de ſuite alternativement: ou bien *A* joue d'abord un coup & *B* en joue deux; enſuite *A* en joue trois, enſuite *B* en joue quatre, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'un des deux Joueurs ait gagné, on demande leur ſort.

M. Bernoulli voyant que perſonne pendant l'intervale

Digitized by Google

de cinq années n'avoit entrepris de les réſoudre, en donna la ſolution dans les Journaux de Leipſic au mois de May 1690, mais ſans analyſe & ſans démonſtration. Peu de temps après M. de Leibnitz, vicem reddens, comme il dit, pour rendre la pareille à M. Bernoulli qui avoit donné dans ces Journaux l'Analyſe de la courbe defcenſus æquabilis, en ſe ſervant du calcul integral, entreprit de découvrir le fondement de la ſolution de M. Bernoulli, ce qu'il fit très bien, mais d'une maniere ſuccincte, & qui laiſſe, ce me ſemble, beaucoup à devîner.

Ce ſeroit peut être ici l'occaſion de faire remarquer que la matiere que je traite ne devoit pas être fort familiere aux Geometres, puiſque des Problêmes aſſés faciles en comparaiſon de la plus grande partie de ceux que l'on trouve ici, reſtent tant d'années ſans ſolution, quoique propoſés par des Geometres tels que M. Huyguens & M. Bernoulli. Je pourrois peut-être encore tirer avantage contre M. Moivre de la bonté même de ſon propre Ouvrage, ſi ſuperieur à tout ce que Meſſieurs Huyguens & Paſcal ont donné dans ce genre; mais j'aime mieux laiſſer faire ces réflexions au Lecteur, que de les faire moi-même.

J'ai trouvé dans les Tranſactions Philoſophiques un Memoire dans lequel on ſe propoſe d'eſtimer la probabilité que donne le témoignage des hommes, ſoit qu'il ſoit tranſmis par la voye orale ou par l'écriture; mais que peut-on trouver là-deſſus? Que ſi un oui-dire donne $\frac{a}{b}$ de vraiſemblance, un oui-dire de oui-dire donnera $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ de vraiſemblance, ſi le témoignage du deuxiéme n'eſt pas de même force, & $\frac{aa}{bb}$ s'il a autant d'autant d'autorité, & autres choſes de cette nature, cela eſt vrai & même évident; mais qu'en peut-on conclure, & comment faire l'applica-

tion de ces Theories ? Je crois que cela eſt impoſſible, c'eſt pourtant ce qu'a entrepris, & infiniment au de-là, un ſçavant Geometre Anglois, dont les manieres honneſtes & obligeantes pour moi m'ont prévenu en faveur de ſon cœur, autant que ſes excellens Ouvrages m'ont donné d'eſtime pour ſon eſprit. Le Livre dont je veux parler a pour titre : Philoſophiæ Chriſtianæ Principia Mathematica : *M. Craige en eſt l'Auteur. Cet Ouvrage eſt trop curieux & a trop de rapport à nos matieres pour n'en pas dire ici quelquelque choſe. L'Auteur s'y propoſe principalement de prouver contre les Juifs la verité de l'Hiſtoire de* JESUS-CHRIST, *& de démontrer aux Libertins que le parti qu'ils prennent de préferer les plaiſirs de ce monde ſi minces & de ſi courte durée, à l'eſperance même incertaine des biens promis à ceux qui ſuivront la Loi de l'Evangile, n'eſt pas un parti raiſonnable ni conforme à leurs veritables intereſts.*

Cette derniere partie me paroît bien prouvée ; mais comme elle étoit trop facile, l'Auteur l'a ornée de quantité de beaux & ſçavans Theorêmes, dans leſquels il compare la durée des plaiſirs avec leur intenſité ; mais tout cela n'eſt qu'un jeu de ſçavant Geometre, qui ſe forme des difficultés pour avoir le plaiſir de les ſurmonter.

L'execution de ce que l'Auteur s'eſt propoſé dans la premiere partie eſt certainement impoſſible, & je ne puis croire que l'Auteur ne l'ait bien ſenti, quand de ſes hypoteſes il tire ces conſequences étonnantes. Tanta itaque eſt hodie probabilitas Hiſtoriæ Chriſti quantam habuiſſet ille qui ipſius Chriſti temporibus viva tantum voce eandem à 28 Diſcipulis acciperet. *Et cette autre :* Ergo neceſſe eſt ut veniat Chriſtus antequam elabantur anni 1454 à noſtro tempore, &c.

Digitized by Google

M. Craige a bien vû sans doute que toutes ces consequences n'étoient vrayes qu'en vertu de suppositions arbitraires éloignées de la verité peut-être de moitié, du tiers ou du quart, &c. Je dis peut-être, car quel moyen de le sçavoir? il auroit pû en faisant d'autres hypoteses, également vraisemblables, trouver des nombres fort differens.

Pour moi je trouve le dessein de M. Craige louable & pieux, & l'execution aussi heureuse qu'elle pouvoit l'être; mais je crois cet Ouvrage beaucoup plus propre à exercer des Geometres, qu'à convertir des Juifs ou des incredules. Ce que l'on peut conclure de plus certain après la lecture de cet Ouvrage, c'est que l'Auteur est très subtil, qu'il est grand Geometre, & qu'il a beaucoup d'esprit. La clarté des Mathematiques & la sainte obscurité de la foi sont des choses trop opposées: je ne crois pas que personne réussisse à en faire jamais l'alliage.

En 1679 lorsque le Jeu de la Bassette étoit en regne en France, & sur-tout à la Cour, M. Sauveur sçavant Geometre chercha les hazards de ce Jeu, & en donna des Tables que l'on trouve dans le Journal des Sçavans de cette année: je n'en ai point parlé dans ma premiere Edition, parceque je n'en étois pas instruit. Je répare maintenant avec beaucoup de plaisir la faute que je fis alors involontairement: on ne trouve dans ce Journal que des formules seches sans analyse & sans démonstration. M. Sauveur m'a fait le plaisir de me les communiquer peu de temps après que notre analyse eût été rendue publique, & il y joignit une démonstration de mes formules sur le Treize: tout cela étoit excellent & digne de la réputation qu'il s'est acquise par ses belles découvertes sur la Theorie de la Musique.

Jerôme Cardan a donné un Traité De Ludo Aleæ ; *mais on n'y trouve que de l'érudition & des réflexions morales.*

J'ai appris que M. Hudde & le fameux M. Wit, *Penſionnaire de Hollande, avoient donné des calculs pour les intereſts de rentes viageres qui conviennent à des perſonnes de differens âges. Il y a apparence que ce qu'ils ont donné eſt peu different de ce que j'ai rapporté de M. Halley, & ſuppoſe qu'on ſçache les differens degrés de la mortalité du genre humain. Au reſte cette matiere n'a qu'un rapport fort éloigné avec celle-ci : ce qu'il y a de calcul eſt fort aiſé, & dépend preſque uniquement de la ſolution de ce Problême que M. de Leibnitz a réſolu en 1683 d'une maniere très élegante.* Trouver la valeur préſente d'une ſomme quelconque payable au bout d'un nombre quelconque d'années. *La grande difficulté eſt d'avoir des Tables exactes pareilles à celle dont M. Halley s'eſt ſervi pour fondement de ſes calculs. Il ſeroit à ſouhaiter que les obſervations fuſſent continuées pour un plus grand nombre d'années, & qu'on en fiſt de pareilles dans pluſieurs grandes Villes de l'Europe.*

Caramuel a travaillé ſur le calcul des hazards, mais avec peu de ſuccès ; j'ai lû ſon Traité, intitulé : KYBEIA, *& je ſuis du ſentiment de Monſieur N. Bernoulli qui dit * que cet Ouvrage n'eſt qu'un tiſſu de paralogiſmes.*

*Je finirai cette Diſſertation par une reflexion de l'illuſtre M. de Leibnitz ; elle eſt tirée de ſa Theodicée, ** & confirme ce que nous avons dit dans notre Preface de la nouveauté & de l'importance de la matiere que l'on traite ici.*

L'on ne s'eſt point encore aviſé de cette eſpece

* Voyés page 387.

** Voyés page 411. Diſcours de la Conformité de la Foi avec la raiſon.

de

de Logique qui doit regler le poids des vraiſemblances, & qui ſeroit ſi neceſſaire dans les déliberations d'importance. *Et plus bas :* Il n'y a rien de plus imparfait que notre Logique lorſqu'on va au de-là des argumens neceſſaires ; & les plus excellens Philoſophes de notre temps, tels que les Auteurs de l'Art de penſer, de la Recherche de la verité, & de l'Eſſai ſur l'Entendement, ont été fort éloignés de nous marquer les vrais moyens propres à aider cette faculté qui nous doit faire peſer les apparences du vrai & du faux, ſans parler de l'Art d'inventer, où il eſt encore plus difficile d'atteindre, & dont on n'a que des échantillons fort imparfaits dans les Mathematiques.

L'autorité de M. Leibnitz eſt en ces matieres une preuve preſque complette ; on ſçait qu'il eſt parfaitement inſtruit de l'état des Sciences, & que perſonne ne travaille plus utilement que lui à les perfectionner.

J'ai trouvé dans le premier volume de l'Academie Royale de Berlin, qui parut il y a deux ou trois ans une Diſſertation où ce Sçavant homme parle d'un jeu Chinois qui a beaucoup de rapport avec nos Echets ; il propoſe enſuite des Problêmes ſur un jeu qui a été à la mode en France il y a douze ou quinze ans, qui ſe nomme LE SOLITAIRE. Sœpe notavimus, *dit M. de Leibnitz*, nuſquam homines ingenioſiores eſſe quam in ludicris, atque ideo Ludos Mathematicorum curam mereri non per ſe, ſed artis inveniendi causâ. Ludi caſus fortuiti inter alia proſunt ad æſtimandos probabilitates, &c. *Et il ajoûte à l'occaſion des*

******

vûes qu'il donne pour LE SOLITAIRE. Sed ego ad profectum inventricis artis ludendi artificia detexiſſe non ludum valde exercuiſſe laudarem.

Je ſouſcris en tout à ces réflexions qui me paroiſſent très judicieuſes ; je les ai rapporté à cauſe de l'autorité que M. de Leibnitz s'eſt acquiſe parmi les Gens de Lettres, & qu'il a ſi juſtement merité.

Digitized by Google



TRAITÉ
DES COMBINAISONS.

PREMIERE PARTIE.

DEFINITION.

ON entend quelquefois par ce terme combinaiſon, la maniere dont pluſieurs choſes peuvent être priſes differemment deux à deux. Je lui donnerai ici une ſignification plus étendue, & j'entendrai par ce mot la maniere de trouver generalement toutes les diſpoſitions que peuvent avoir ſoit deux, ſoit pluſieurs choſes, ſelon qu'on les voudra prendre, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq, ou enfin de toutes les manieres poſſibles.

Digitized by Google

PROPOSITION I.

Un nombre de choſes quelconque étant propoſé, par exemple, les lettres a, b, c, d, e, f, g, h, &c. *on demande combien il y a de façons differentes de les prendre, ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, ou enfin de toutes les manieres poſſibles.*

I. POUR réſoudre ce Problême, je me ſervirai de la Table ci-jointe, dont je vais expliquer la formation, & dont je démontrerai enſuite l'uſage par rapport aux combinaiſons.

Table de M. Paſcal pour les combinaiſons.

1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1
1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13
1.3.6.10.15.21.28.36.45.55.66.78
1.4.10.20.35.56.84.120.165.220.286
1.5.15.35.70.126.210.330.495.715
1.6.21.56.126.252.462.792.1287
1.7.28.84.210.462.924.1716
1.8.36.120.330.792.1716
1.9.45.165.495.1287
1.10.55.220.715
1.11.66.286
1.12.78
1.13
1

J'appelle bandes horizontales celles où les chiffres vont de gauche à droite, & bandes perpendiculaires celles où les chiffres vont de haut en bas; j'appelle cellule la poſition d'un chiffre renfermé entre deux points.

La ſeconde bande horiſontale eſt la ſuite des nombres naturels un, deux, trois, quatre, &c.

La troiſiéme bande horizontale eſt formée ſur la ſeconde en cette maniere; 1°, je rétrograde de gauche à

Digitized by Google

droite d'une celule : 2°, pour former le chiffre de chaque celule de cette bande, j'ajoute tous les chiffres qui le précedent à gauche dans la bande ſuperieure horizontale. Ainſi le nombre ſix, troiſiéme chiffre de la troiſiéme bande horizontale, eſt égal à la ſomme du premier, du ſecond & du troiſiéme chiffre de la ſeconde bande horizontale.

La quatriéme bande horizontale ſe forme ſur la troiſiéme en la même maniere que la troiſiéme ſe forme ſur la ſeconde : Ainſi on trouvera que le nombre 20 qui eſt le quatriéme de la quatriéme bande horizontale, eſt égal à la ſomme des quatre chiffres qui le précedent dans la bande ſuperieure horizontale qui eſt la troiſiéme. Il en ſeroit de même de tous les autres chiffres de cette quatriéme bande.

On formera les chiffres qui compoſent les autres bandes horizontales de la même maniere que l'on a formé la ſeconde ſur la premiere, & la troiſiéme ſur la ſeconde, obſervant toujours de rétrograder chaque bande d'une celule avançant vers la droite ; c'eſt ce qu'on pourra aiſément découvrir en conſiderant la table qu'on pourra continuer à l'infini.

Les nombres qui compoſent la premiere bande horizontale ſont appellés nombres du premier ordre, ceux qui compoſent la ſeconde bande horizontale ſont appellés nombres du ſecond ordre, ceux qui compoſent la troiſiéme bande ſont appellés nombres du troiſiéme ordre, &c.

Ces nombres à qui on donne auſſi les noms d'unités, de nombres naturels, nombres triangulaires, pyramidaux, triangulo-pyramidaux, &c. à cauſe de certains rapports qu'ils ont aux triangles, aux pyramides, &c. ont des proprietés fort ſingulieres, que Mrs Fermat, Deſcartes, Paſcal, & pluſieurs autres grands Geometres François & Etrangers ont recherchés avec grand ſoin. Une des principales, & dont il s'agit ici, eſt que par leur moyen on peut trouver tout d'un coup en combien de manieres differentes un nombre quelconque de jettons ou de cartes ou de toute autre choſe, peut être combiné, c'eſt à dire pris ou un à un, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, &c. dans un plus grand nombre de jettons & de cartes.

Digitized by Google

Par exemple, ſi l'on demande en combien de façons differentes ſix choſes differentes peuvent être priſes deux à deux ; on trouvera que le nombre quinze qui répond à la troiſiéme bande horizontale, & à la ſeptieme bande perpendiculaire, eſt le nombre que l'on cherche : & de même ſi l'on veut ſçavoir en combien de façons differentes onze choſes peuvent être priſes quatre à quatre, on trouvera que le nombre 330 qui répond à la cinquiéme bande horizontale & à la douziéme bande perpendiculaire, eſt le nombre que l'on demande. On trouvera de même toutes les autres combinaiſons imaginables, en cherchant le nombre qui répond à une colonne perpendiculaire, dont le quantiéme ſurpaſſe de l'unité le nombre de choſes propoſé, & à une colonne horizontale qui ſoit la troiſiéme ſi les choſes ſe combinent deux à deux, la quatriéme ſi les choſes ſe combinent trois à trois, &c.

M^r Paſcal eſt le premier qui ait découvert cet uſage des nombres de differents ordres, & on peut en voir la démonſtration dans le Traité qu'il a fait intitulé *Triangle Arithmetique*, où il applique ces nombres tant aux combinaiſons, qu'à trouver les partis que doivent faire deux Joueurs, qui jouant en un certain nombre de points à un jeu égal, ont plus ou moins de points.

DEMONSTRATION.

POUR me faire plus facilement entendre, je prens un exemple, & je ſuppoſe que l'on veuille ſçavoir en combien de façons differentes ſix choſes peuvent être priſes, ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq, ou ſix à ſix, ſoient ces ſix choſes quelconques exprimées par les ſix lettres a, b, c, d, f, g.

Premierement il eſt évident que ſi l'on cherche en combien de façons ces ſix lettres peuvent être priſes à une à une, le nombre ſix ſera celui qui ſatisfait au Problême. Or il eſt évident que les termes de la premiere bande horizontale qui précedent le nombre ſix de la ſeconde, étant ajoutés en une ſomme font le nombre ſix.

Suppoſons enſuite que l'on veuille ſçavoir en com-

Digitized by Google

bien de façons differentes ces mêmes lettres peuvent être prises deux à deux. Pour le trouver on observera, 1°, que la lettre *a* peut se combiner avec les cinq suivantes *b*, *c*, *d*, *f*, *g*. 2°. Que la lettre *b* peut se combiner differemment avec les quatre lettres suivantes *c*, *d*, *f*, *g*, ce qui donne quatre combinaisons differentes *bc*, *bd*, *bg*, *bf*; car *ba* feroit bien un arrangement different de *ab*; mais non pas une combinaison differente. 3°. Que *c* ne se combine qu'avec les lettres *d*, *g*, *f*; car *ca*, *cb*, ne feroient point de combinaisons differentes. 4°. Que *d* ne se combine qu'avec les deux lettres *f* & *g*; car *da*, *dc*, *db*, ne feroient point de combinaisons differentes. 5°. Que *f* ne se combine qu'une fois avec *g*; car *fa*, *fb*, *fc*, *fd*, seroient des repetions des combinaisons précedentes, ce qu'il faut observer avec soin; car c'est là le principal fondement de la démonstration.

Toutes ces combinaisons ensemble de six lettres prises deux à deux, sont

ab, *ac*, *ad*, *ag*, *af*
bc, *bd*, *bg*, *bf*
cd, *cg*, *cf*
dg, *df*
fg

dont la somme $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Et par conséquent le nombre 15 qui se trouve dans la septiéme bande perpendiculaire & dans la troisiéme bande horizontale, est la somme des nombres qui le précedent à gauche dans la bande superieure horizontale, & est en même temps le nombre qui exprime en combien de façons differentes six lettres peuvent être prises deux à deux.

Supposons maintenant que l'on veuille trouver en combien de façons differentes ces six lettres peuvent être prises trois à trois.

On remarquera, 1°, que *ab* peut se combiner en quatre façons avec les lettres *c*, *d*, *f*, *g*; *ac* en trois façons, *ad* en deux façons, & *af* seulement d'une façon.

2°. Que *bc* se combine en trois façons avec les lettres *d*, *f*, *g*;

Digitized by Google

bd en deux façons avec les lettres *f* & *g*, & *bf* ſeulement d'une façon avec *g*.

3°. Que *cd* ſe combine en deux façons avec les lettres *f* & *g*, & *cf* ſeulement d'une façon avec *g*.

4°. Il eſt évident que *df* ne peut ſe combiner que d'une façon avec *g*. Toutes ces combinaiſons enſemble de ſix choſes priſes trois à trois, ſont

abc, abd, abf, abg, acd, acf, acg, adf, adg, afg
bcd, bcf, bcg, bdf, bdg, bfg
cdf, cdg, cfg
dfg

dont la ſomme 10 + 6 + 3 + 1 = 20.

Et par conſequent le nombre 20 qui ſe trouve dans la ſeptiéme bande perpendiculaire, & dans la quatriéme bande horizontale, eſt la ſomme des nombres qui le précedent à gauche dans la bande ſupérieure horizontale, & en même temps le nombre qui exprime en combien de façons differentes ſix lettres peuvent être priſes trois à trois. Donc, &c.

Suppoſons encore que l'on veuille ſçavoir en combien de façons differentes ces ſix lettres peuvent être priſes quatre à quatre.

On obſervera, 1°, que *abc* peut ſe combiner en trois façons differentes avec les lettres *d*, *f*, *g*; *abd* en deux façons avec *f* & *g*; *abf* ſeulement avec *g*; que *acd* peut ſe combiner en deux façons avec les lettres *f* & *g*; que *acf* & *adf* ſe combinent ſeulement d'une façon.

2°. Que *bcd* ſe combine en deux façons avec les lettres *f* & *g*, & que *bcf*, *bdf*, & *cdf* ne ſe combinent que d'une façon avec *g*.

Toutes ces combinaiſons enſemble ſont

abcd, abcf, abcg, abdf, abdg, abfg, acdf, acdg, acfg, adfg
bcdf, bcdg, bcfg, bdfg
cdfg

dont la ſomme 10 + 4 + 1 = 15.

Et par conſequent le nombre 15 qui eſt dans la ſeptiéme

Digitized by Google

bande perpendiculaire & dans la cinquiéme bande horizontale, eſt la ſomme des nombres qui le précedent à gauche dans la bande ſuperieure, & en même temps le nombre qui exprime en combien de façons differentes ſix lettres peuvent être priſes quatre à quatre.

Si l'on veut encore ſçavoir en combien de façons differentes ces ſix lettres peuvent être priſes cinq à cinq, on remarquera, 1°, que *abcd* ne peut ſe combiner differemment qu'avec les deux lettres *f* & *g*; *abcf* qu'en une ſeule façon avec *g*; *abdf* en une ſeule façon avec *g*; & *acdf* qu'en une façon avec *g*. 2°. Que *bcdf* ne ſe combine que d'une façon avec *g*.

La ſomme de ces combinaiſons de ſix choſes priſes cinq à cinq, ſera donc *abcdf*, *abcdg*, *abcfg*, *abdfg*, *acdfg*, *bcdfg* = 6.

Et par conſequent le nombre 6 qui eſt dans la ſeptiéme bande perpendiculaire & dans la ſixiéme bande horizontale, eſt la ſomme des nombres qui le précedent dans la bande ſuperieure horizontale, qui eſt celle des nombres du cinquiéme ordre, & eſt en même temps le nombre qui exprime en combien de façons differentes ſix lettres peuvent être priſes cinq à cinq.

Enfin il eſt évident que ſix lettres ne peuvent être priſes que d'une façon de ſix à ſix.

De tout cela il faut conclure que la ſeptiéme colonne perpendiculaire exprime toutes les manieres poſſibles, dont ſix choſes peuvent être priſes ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq, ou ſix à ſix.

On trouvera de même que la huitiéme colonne perpendiculaire exprime toutes les manieres poſſibles dont ſept choſes peuvent être priſes ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq &c. Et enfin que cette Table étant continuée à l'infini, donneroit toutes les manieres poſſibles dont un nombre quelconque de jettons ou de cartes pourroit être pris un un à un, ou deux à deux, ou trois à trois, &c. dans un nombre plus grand de jettons ou de cartes. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Digitized by Google

On tire de la démonſtration précedente une maniere aiſée & courte de former la Table, c'eſt à ſçavoir d'ajouter en une ſomme le chiffre qui précede le nombre cherché à gauche dans la même bande horizontale, & le chiffre qui eſt ſuperieur à celui qui eſt à gauche ; ainſi pour former la troiſiéme bande horizontale, j'ajoute le nombre qui eſt à gauche (c'eſt zero) & le nombre au deſſus, cela me donne un pour le premier terme de cette bande. Pour avoir le ſecond, j'ajoute le nombre 1 qui eſt à la gauche du nombre cherché avec le nombre 2 qui lui eſt ſuperieur, la ſomme $2 + 1 = 3$ ſera le ſecond de la troiſiéme bande horizontale ; le troiſiéme terme de cette bande ſera $3 + 3 = 6$; le quatriéme ſera $6 + 4 = 10$, & ainſi de ſuite. Si l'on veut, par exemple, trouver le nombre qui répond à la neuviéme bande perpendiculaire & à la ſixiéme bande horizontale, j'ajoute 35 à 21, la ſomme qui eſt 56 eſt le nombre cherché.

Cette maniere de conſiderer la formation de cette Table, préſente une nouvelle démonſtration de ſon uſage pour les combinaiſons, qui eſt plus ſimple & plus courte que la précedente.

AUTRE DE'MONSTRATION.

2. SOIT ſuppoſé que l'on veuille prendre cinq choſes par exemple de toutes les manieres poſſibles, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq. Il eſt clair 1°, que cinq choſes *a*, *b*, *c*, *d*, *e* peuvent être priſes deux à deux en autant de façons que quatre choſes ont été priſes en cette maniere, (or les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, ont pû être miſes deux à deux en ſix façons, ſçavoir *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*) & qu'elles peuvent être priſes outre cela en autant de façons que quatre choſes peuvent être priſes une à une, ſçavoir *ae*, *be*, *ce*, *de*, ce qui donne dix combinaiſons de cinq choſes priſes deux à deux. 2°. Cinq choſes peuvent être priſes trois à trois en autant de façons que quatre choſes ont été priſes trois à trois & deux à deux. Or quatre choſes peuvent être priſes trois à trois en quatre façons,

façons *abc*, *acb*, *abd*, *bcd*: & deux à deux en six façons; *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*; donc si l'on ajoute la lettre *e* à ces six dernieres façons differentes, on trouvera que le nombre 10 exprime en combien de façons differentes cinq choſes peuvent être priſes trois à trois, & eſt en même temps la ſomme du nombre qui le précede à gauche, & de celui qui eſt au deſſus de ce nombre. Cette démonſtration s'étend à tous les nombres de la table, & eſt fondée ſur ce qu'un nombre quelconque p peut être pris dans un autre nombre quelconque, mais plus grand, q, en autant de façons que p & $p - 1$ peuvent être pris dans $q - 1$. Or cette propoſition eſt évidente à l'égard du nombre qui eſt à gauche, puiſque le petit eſt contenu dans le plus grand; elle eſt vraie auſſi à l'égard de celui qui eſt ſuperieur au nombre de la gauche, puiſqu'en y joignant la lettre qui n'eſt point entrée dans les combinaiſons qu'exprime le nombre de la gauche, il en fournit de nouvelles, & ſupplée à celles qui manquent au nombre de la gauche. Donc, &c.

REMARQUE.

3. POUR épargner la peine au Lecteur de former des Tables qui puiſſent ſervir à trouver toutes les combinaiſons dont on aura beſoin dans la ſuite, ce qui eſt d'une longueur exceſſive lorſque les combinaiſons que l'on cherche ſont entre de grands nombres. Par exemple, lorſqu'un des nombres étant 49, l'autre eſt 100, il eſt utile & même neceſſaire de trouver quelque formule qui puiſſe donner le nombre cherché ſans avoir beſoin de connoître toutes les combinaiſons poſſibles entre de moindres nombres. C'eſt ce que l'on apprendra par le Lemme qui ſuit.

Digitized by Google

PROPOSITION II.

LEMME.

4. *POUR trouver tout d'un coup tel terme que l'on voudra d'une colonne perpendiculaire quelconque de la Table page 2, continuée à diſcretion, on multipliera celui qui eſt immédiatement au deſſus par l'expoſant de la bande perpendiculaire, moins l'expoſant de la bande horizontale plus un. Ce produit diviſé par l'expoſant de la colonne horizontale moins un donnera le nombre cherché; en ſorte que nommant, par exemple, le premier terme d'une colonne perpendiculaire quelconque* 1, *le ſecond* p, *le troiſiéme* B, *le quatriéme* C, *le cinquiéme* D, &c. *on aura le premier* $= 1$, *le ſecond* $p = 1 \times \frac{p+1-2+1}{2-1}$, *le troiſiéme* $B = p \times \frac{p+1-3+1}{3-1} = p \times \frac{p-1}{2}$, *le quatriéme* $C = B \times \frac{p+1-4+1}{4-1} = B \times \frac{p-2}{3} = p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}$, *le cinquiéme* $D = C \times \frac{p+1-5+1}{5-1} = C \times \frac{p-3}{4} = p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4}$, &c.

Pour démontrer ce Lemme, j'en ferai d'abord appercevoir la verité ſur une des colonnes perpendiculaires de la Table priſe à diſcretion, & après cette induction je prouverai que toutes les autres à l'infini doivent ſuivre cette même loi.

Il eſt viſible en examinant, par exemple, la ſixiéme où $p = 5$, que l'on aura $B = \frac{5 \times 4}{2} = 10$, $C = \frac{10 \times 3}{3} = 10$, $D = \frac{10 \times 2}{4} = 5$, $E = \frac{5 \times 1}{5} = 1$; & qu'ainſi en ſuivant la regle du Lemme, on trouve chaque terme de cette colonne tel que le donne la formation de la Table.

Il faut maintenant prouver que cette regle ayant lieu comme par hazard pour cette colonne, elle a lieu par neceſſité à l'égard des autres.

Soit la colonne ſeptiéme celle que l'on veut examiner, & dont on doit trouver par le Lemme tous les termes conformes à ceux que donne la formation de la Table.

Il eſt clair que le premier de cette bande ſera 1, & que le ſecond ſera $p + 1$, on trouvera par le Lemme que

Digitized by Google

le troiſiéme eſt $\frac{p+1\times p}{2} = 15$, & par la formation de la Table qu'il eſt $p \times \frac{p-1}{2} + p = \frac{pp-p+2p}{2} = \frac{pp+p}{2}$, ce qu'il falloit premierement trouver. Si l'on ſuppoſe maintenant que $p+1$ de la quantité que l'on vient de trouver ſoit changée en p; on trouvera en ſubſtituant p pour $p+1$ dans la quantité $p \times \frac{p+1}{2}$ qu'elle ſe change en celle-ci $p \times \frac{p-1}{2}$ d'où il ſuit qu'on trouvera par ce moyen le troiſiéme terme de la huitiéme bande perpendiculaire $= p \times \frac{p+1}{2} = 21$; & qu'employant toujours le même artifice, on trouveroit ainſi de ſuite, conformément au Lemme, tous les termes de la troiſiéme bande horizontale, tels que les donne la formation de la Table. L'on trouvera auſſi par le Lemme le 4e terme de cette ſeptiéme bande horizontale $= \frac{p+1\times p}{2} \times \frac{p-1}{3} = \frac{p^3-p}{6} = 20$, & par la formation cet autre $\frac{p\times p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} + \frac{p\times p-1}{2} = \frac{p^3-3pp+2p+3pp-3p}{1\times 2\times 3} = \frac{p^3-p}{6}$ qui lui eſt égal. Maintenant ſi l'on ſubſtitue dans cette quantité, p pour $p+1$, elle ſe changera en celle-ci, $p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}$, & en vertu de cette ſuppoſition on trouveroit le quatriéme terme de la huitiéme bande perpendiculaire $= \frac{p^3-p}{6} = 35$, & ainſi on s'aſſurera de la verité du Lemme à l'égard de tous les termes de cette quatriéme bande horizontale.

On trouvera encore par le Lemme le cinquiéme terme de la ſeptiéme bande perpendiculaire $= \frac{p^3-p\times p-2}{4} = \frac{p^4-2p^3-pp+2p}{24} = 15$, & par la formation le même terme ſous cette forme $p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4} + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}$ qui ſe réduit à celle-ci $\frac{p^4-2p^3-pp+2p}{24}$.

Maintenant ſi l'on ſubſtitue dans cette quantité, p à la place de $p+1$, elle ſe changera en celle-ci $p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4}$, qui ſervira à trouver tous les termes de la cinquiéme bande horizontale, ainſi qu'on l'a enſeigné ci-devant.

On trouvera enfin par le Lemme le ſixiéme terme de la ſeptiéme bande perpendiculaire $= \frac{\frac{p^4-2p^3-pp+2p}{24} \times p - 3}{5}$ $= \frac{p^5-5p^4+5p^3+5pp-6p}{120} = 6$, & par la formation ce même terme $= \frac{p \times p-1 \times p-2 \times p-3 \times p-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{p \times p-1 \times p-2 \times p-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{p^5-5p^4+5p^3+5pp-6p}{120}$; & en ſubſtituant comme on a fait ci-devant p à la place de $p+1$, on s'aſſurera que le terme ſuivant, & tous les autres de cette ſixiéme colonne horizontale doivent ſuivre l'ordre qu'enſeigne le Lemme.

COROLLAIRE I.

5. IL ſuit du Lemme précedent que ſi l'on cherche en combien de façons le nombre q peut être pris dans un autre nombre plus grand qui ſoit appellé p, le nombre cherché ſera exprimé par une fraction dont le numerateur ſera égal à autant de produits de p, $p-1$, $p-2$, $p-3$, $p-4$, &c. que q exprime d'unités, & dont le dénominateur ſera compoſé d'un égal nombre de produits des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

COROLLAIRE II.

6. SI l'on veut prendre p ou q dans un nombre exprimé par m, je dis que ſi $p+q=m$, le nombre qui exprimera en combien de façons on peut prendre p dans m ſera le même que celui qui exprime en combien de façons on peut y prendre q. Ainſi, par exemple m étant $= 7$, le nombre qui exprimera en combien de façons on peut prendre trois choſes dans ſept, ſera le même que celui qui exprime en combien de façons on y en peut prendre quatre; & de même le nombre qui exprimera en combien de façons on peut prendre deux choſes dans ſept, ſera le même que celui qui exprime en combien de façons on y en peut prendre cinq; & le nombre qui exprimera en combien de façons on peut prendre une choſe dans ſept, exprimera en combien de façons on y en peut prendre ſix.

Digitized by Google

Il ſuit de-là, 1°, que ſi m exprime un nombre impair, les deux nombres de la colonne perpendiculaire qui ſont les plus éloignés des extremités ſont égaux, & les plus grands entre tous ceux de la colonne ; & que ſi m exprime un nombre pair, celui du milieu ſera le plus grand d'entre tous les nombres de cette colonne. 2°. Que les nombres qui ſont à égale diſtance, ou de celui du milieu ſi m eſt un nombre pair, ou des deux moyens s'il eſt impair, ſeront égaux l'un à l'autre. 3°. On peut obſerver que la ſomme de tous les termes d'une bande perpendiculaire quelconque eſt égale au terme correſpondant d'une progreſſion geometrique double, dont le premier terme ſoit l'unité.

Ainſi, par exemple, on trouvera que le huitiéme terme d'une progreſſion geometrique double qui eſt 128, ſera égal à la ſomme de tous les nombres que contient la huitiéme bande perpendiculaire.

COROLLAIRE III.

7. LE nombre p exprimant la ſuite des nombres naturels, la formule des nombres triangulaires ſera $p \times \frac{p+1}{2}$, celle des nombres pyramidaux ſera $p \times \frac{p+1}{2} \times \frac{p+2}{3}$, celle des nombres triangulopyramidaux ſera $p \times \frac{p+1}{2} \times \frac{p+2}{3} \times \frac{p+3}{4}$, &c. En ſorte que ſi l'on range les nombres de differens ordres de telle maniere que ne rétrogradant point d'un chiffre, comme dans la Table page 2, d'une bande ſuperieure horizontale à la ſuivante, ils faſſent une figure quarrée à la place de la figure triangulaire qu'ils ont dans la Table page 2, ſi l'on veut trouver dans cette nouvelle Table tel nombre figuré que l'on voudra, ſon ordre étant donné avec le quantiéme qu'il y occupe, il n'y aura qu'à ſubſtituer dans cette formule pour p le quantiéme du nombre figuré que l'on cherche, c'eſt ce que je vois démontré fort au long & très ſçavament dans un Livre poſthume de Mr le Marquis de l'Hôpital qui paroît depuis quelque temps, il employe ce Theorême à établir pluſieurs propoſitions curieuſes & nouvelles en Geometrie ; mais la voye qu'il

Digitized by Google

prend pour démontrer ce Lemme eſt tout à fait differente de celle-ci.

En donnant au triangle arithmetique une forme quarrée on a cette table

TABLE II.

1.	1.	1.	1,	1.	1.	1.	1
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36
1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120
1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	330
1.	6.	21.	56.	126.	252.	462.	792

où l'on voit que tout ce qui a été dit ci-devant convient aux nombres renfermés dans ce quarré, & qu'il n'y a point de difference, ſi ce n'eſt que dans cette forme chaque nombre eſt égal à la ſomme de celui qui eſt immédiatement au deſſus & de celui qui eſt à la gauche, ce qui fait que chaque bande perpendiculaire de cette Table eſt la même que la bande tranſverſale correſpondante du triangle arithmetique.

COROLLAIRE IV.

8. DANS l'une & l'autre de ces Tables le generateur eſt l'unité, on peut rendre les proprietés des nombres figurés plus generales, en ſubſtituant des lettres à la place des nombres. Ainſi l'on aura la Table qui ſuit,

TABLE III.

a	a	a	a	a	a
b,	$a+b$,	$2a+b$,	$3a+b$,	$4a+b$,	$5a+b$,
	b,	$a+2b$,	$3a+3b$,	$6a+4b$,	$10a+5b$,
		b,	$a+3b$,	$4a+6b$,	$10a+10b$,
			b,	$a+4b$,	$5a+10b$,
				b,	$a+5b$,
					b,

$6a+b$
$15a+6b$
$20a+15b$
$15a+20b$
$6a+15b$
$a+6b$
b

dont la formation eſt la même, & qui a préciſément les mêmes proprietés, excepté que a n'étant point $= b$, le premier terme de la ſeconde bande horizontale n'eſt point égal à la ſomme de celui qui le précede à gauche, & du chiffre ſuperieur.

Si l'on veut avoir l'expreſſion de chaque terme d'une bande horizontale quelconque p, ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme de chaque rang horizontal, on aura cette ſuite a, $\overline{p-1}\,a+b$, $\frac{p-1.p}{1.2}a+pb$, $\frac{p-1.p.p+1}{1.2.3}a+\frac{p.p+1}{1.2}b$, $\frac{p-1.p.p+1.p+2}{1.2.3.4}a+\frac{p.p+1.p+2}{1.2.3}b$, *&c.* dans laquelle a déſigne le premier terme de la bande tranſverſale p. $\overline{p-1}\,a+b$ déſigne le ſecond terme, $\frac{p-1.p}{1.2}a+pb$. Le troiſiéme, $\frac{p-1.p.p+1}{1.2.3}a+\frac{p.p+1}{1.2}b$. Le quatriéme, &c.

On trouve cette ſuite en ajoutant ſéparément la ſomme des a & celle des b.

Ainſi ſuppoſant $a = 3$ & $b = 1$ on trouvera que la quatriéme bande tranſverſale de la troiſiéme Table eſt 3, 10, 22, 40, 65, & que la Table troiſiéme ſe transforme en celle-ci.

TABLE IV.

3	3	3	3	3	3	3	3
	1	4	7	10	13	16	19
		1	5	12	22	35	51
			1	6	18	40	75
				1	7	25	65
					1	8	33
						1	9
							1

COROLLAIRE V.

9. En obſervant la Table III on s'apperçoit aiſément que la ſomme de chaque bande perpendiculaire eſt double de la précedente : en voici la démonſtration.

Soit ſuppoſé que les lettres $a, c, d, e, f, g, \ldots b$ repréſentent les chiffres qui compoſent une colonne perpendicu-

Digitized by Google

laire quelconque, il eſt certain par la formation de la Table que la colonne perpendiculaire ſuivante ſera a, $a+c$, $c+d$, $d+e$, $e+f$, $f+g$, $g+b$. Or il eſt évident que cette colonne ſera double de la précedente, & il n'en faut excepter que la ſeconde qui n'eſt double de la premiere que lorſque $a=b$; & par conſequent la ſomme d'une bande perpendiculaire, dont le quantiéme eſt n, ſera $2^{n-2}a+2^{n-2}b$.

COROLLAIRE VI.

10. LORSQUE $a=b$, la Table III donne les nombres naturels triangulaires, pyramidaux, triangulo-pyramidaux, &c. mais lorſque a ſurpaſſe b d'une ou de pluſieurs unités, les bandes horizontales forment d'autres ſuites qui peuvent donner lieu à pluſieurs obſervations curieuſes. Voici une des principales.

Lorſque b, étant 1, $a=2$, le troiſiéme rang horizontal eſt une ſuite de nombres quarrés; lorſque $b=1$, & $a=3$, le troiſiéme rang horizontal eſt une ſuite de nombres pentagones 1, 5, 12, 22, 35, 51, &c. lorſque $b=1$, & $a=4$, le troiſiéme rang eſt une ſuite de nombres exagones 1, 6, 15, 28, 45, &c. en ſorte que le troiſiéme rang fournit tous les nombres polygones imaginables, & toujours tels que le nombre des angles du polygone ſoit égal à $a+2$: cela poſé on a une voye fort abregée de démontrer par ce qui précede tout ce que l'on peut déſirer touchant ces nombres polygones. Car, 1°, étant donné le côté, c'eſt à dire le nombre des termes du ſecond rang dont il eſt la ſomme, on trouvera tout d'un coup le polygone correſpondant. On trouvera auſſi la ſomme des nombres polygones, dont le nombre ſoit p, à commencer par l'unité. Ainſi, par exemple, ſi l'on veut avoir le ſixiéme nombre pentagone, on trouvera par la formule $\frac{p-1\times p}{1\cdot 2}a+pb$ que ce nombre eſt 51; & ſi l'on demande la ſomme des ſix premiers nombres pentagones, on trouvera par la formule $\frac{p-1\times p\times p+1}{1\cdot 2\cdot 3}a+\frac{p\times p+1}{1\cdot 2}b$ que cette ſomme eſt 126, en ſubſtituant dans ces deux formules pour p, 6, pour a, 3, & pour b, 1.

Ce

Ce que l'on vient de dire de ce troiſiéme rang horiſontal convient à tous les autres ; mais celui-ci paroît plus remarquable, à cauſe des proprietez de ces nombres polygones. Voici la principale.

Tous les nombres polygones ont un certain rapport aux nombres quarrés. Mr Deſcartes, Fermat, & autres Sçavans Geometres ont trouvé autrefois que tout nombre triangulaire ou exagone (car les nombres exagones ſont les mêmes que les nombres triangulaires pris de deux en deux) étant multiplié par 8, en ajoutant l'unité, devenoit un nombre quarré. J'ai lû dans les Memoires de l'Academie de l'année 1701, page 268, que les nombres pentagones étant multipliés par 24, devenoient nombres quarrés, en y ajoutant l'unité ; & que les nombres eptagones étant multipliés par 40, devenoient nombres quarrés en y ajouant 9.

Quoique cette recherche n'ait apparemment aucune utilité, & ſoit de pure curioſité, j'ai cherché *la Regle pour tous les autres nombres polygones à l'infini.*

	Nombres polygones.	Formules des nomb. polyg.	Formules des quarrés.	Formules des racines.
Nomb. triangulaires	1. 3. 6. 10. 15. 21	$\frac{pp+p}{2}$	$\frac{pq+p}{2} \times 8 + 1$	$2p + 1$
Nomb. quarrés	1. 4. 9. 16. 25. 36	$\frac{2pp+0p}{2}$	$\frac{2pp+0}{2}$	$\frac{2p+0}{2}$
Nomb. pentagones	1. 5. 12. 22. 35. 51	$\frac{3pp-1p}{2}$	$\frac{3pp-p}{2} \times 24 + 1$	$6p - 1$
Nomb. exagones	1. 6. 15. 28. 45. 66	$\frac{4pp-2p}{2}$	$\frac{4pp-2p}{2} \times 8 + 1$	$\frac{8p-2}{2}$
Nomb. eptagones	1. 7. 18. 34. 55. 81	$\frac{5pp-3p}{2}$	$\frac{5pp-3p}{2} \times 40 + 9$	$10p+3$
Nomb. octogones	1. 8. 21. 40. 65. 96	$\frac{6pp-4p}{2}$	$\frac{6pp-4p}{2} \times 12 + 4$	$\frac{12p-4}{2}$
Nomb. enneagones	1. 9. 24. 46. 75. 111	$\frac{7pp-5p}{2}$	$\frac{7pp-5p}{2} \times 56 + 25$	$14p - 5$
Nomb. décagones	1. 10. 27. 52. 85. 126	$\frac{8pp-6p}{2}$	$\frac{8pp-6p}{2} \times 16 + 9$	$\frac{16p-6}{2}$
Nomb. endécagones	1. 11. 30. 58. 95. 141	$\frac{9pp-7p}{2}$	$\frac{9pp-7p}{2} \times 72 + 49$	$18p - 7$
Nomb. dodécagones	1. 12. 33. 64. 105. 156	$\frac{10pp-8p}{2}$	$\frac{10pp-8p}{2} \times 20 + 16$	$\frac{20p-8}{2}$

La premiere de ces quatre colonnes repréſente les nombres polygones juſques & compris les dodécagones.

Digitized by Google

La ſeconde repréſente les formules de ces nombres. La troiſiéme fait voir par quels nombres il faut multiplier chacune de ces formules, & ce qu'il y faut ajouter pour les rendre quarrées. La quatriéme repréſente les racines de la troiſiéme.

Rien n'eſt plus aiſé que d'appercevoir l'ordre de la troiſiéme & de la quatriéme. Il ſuffit de remarquer que dans la troiſiéme la difference qui regne dans les nombres 8, 12, 16, 20, &c. qui doivent multiplier les polygones pairs eſt 4, & qu'il faut y ajouter la ſuite des quarrés 1, 4, 9, 16, 25, &c. & que la difference qui regne dans les nombres 24, 40, 56, 72, &c. qui doivent multiplier les polygones impairs eſt 16, & que l'on y doit ajouter la ſuite des nombres quarrés impairs 1, 9, 25, 49, &c. par là on peut continuer ces Tables à l'infini.

REMARQUE I.

11. LA difference qui regne entre les nombres du premier rang perpendiculaire eſt zero. Entre les nombres du ſecond rang, 1. Entre les nombres du troiſiéme, 3. Entre les les nombres du quatriéme, 6. Entre les nombres du cinquiéme, 10. Entre les nombres du ſixiéme, 15. Entre les nombres du ſeptiéme, 21. Et ainſi de ſuite tous les nombres triangulaires. C'eſt cette proprieté qui m'a fourni la regle que je donne pour les rendre nombres quarrés.

REMARQUE II.

12. IL eſt aiſé de s'appercevoir, en conſiderant le triangle arithmetique, article premier, qu'on peut ayant la ſomme d'une ſuite de nombres triangulaires, trouver la ſomme d'une ſuite de nombres quarrés; car l'on voit que les ajoutant deux à deux, 1 & 3, 3 & 6, 6 & 10, 10 & 15, 15 & 21, 21 & 28, &c. on a la ſuite des nombres quarrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c. d'où il ſuit que pour avoir la ſomme d'une certaine quantité de nombres quarrés, par exemple, des 8 premiers, il faut multiplier par 2 la ſomme des ſept premiers nombres triangulaires, & à ce produit

Digitized by Google

ajouter le huitiéme, & que generalement nommant p le nombre des quarrés, la formule qui en donne la ſomme eſt $\frac{p-1\times p\times p+1}{1.2.3}\times 2+\frac{p\times p+1}{1.2}$, ou $\frac{2p^3+3pp+p}{6}$.

On voit encore que le quarré de chaque nombre triangulaire eſt égal à la ſomme des cubes des nombres naturels précedents; que 9, par exemple, quarré du ſecond nombre triangulaire eſt égal à la ſomme des cubes des deux premiers nombres naturels 1 & 8; & de même que le quarré 36 du troiſiéme nombre triangulaire eſt égal à la ſomme de ces trois nombres 1, 8, 27, qui ſont les cubes des trois premiers nombres naturels, & ainſi de ſuite; en ſorte que la formule qui donne la ſomme des cubes des nombres naturels pris de ſuite eſt $\overline{\frac{p+1}{4}}^2\times pp$. On pourroit en cette ſorte trouver des regles pour la ſomme des autres puiſſances des nombres naturels; mais il vaut mieux proceder à cette recherche d'une maniere generale reglée & methodique comme dans le Problême ſuivant, dont la ſolution a été inſerée dans le Journal des Sçavans au mois de Mars de l'année 1711.

PROPOSITION III.

13. *TROUVER la ſomme d'une ſuite de nombres naturels élevés aux expoſans quelconques.*

Soit B la ſomme d'une ſuite d'autant de nombres naturels élevés au quarré, qu'il y a d'unités dans p, & A la ſomme d'une ſuite d'autant de nombres naturels qu'il y a d'unités dans p, on a par les art. 1, 2, 4, $\frac{B}{2}+\frac{A}{2}=\frac{p\times p+1\times p+2}{1.2.3}=\frac{p^3+3pp+2p}{6}$: donc $\frac{B}{2}=\frac{p^3+3pp+2p}{6}-\frac{A}{2}$, & en ſubſtituant pour A ſa valeur $\frac{pp+p}{2}$, on a $B=\frac{2p^3+3pp+p}{6}$ formule des quarrés.

Soit maintenant C la ſomme d'une ſuite d'autant de nombres naturels élevés au cube, qu'il y a d'unités dans p, on a par les mêmes articles 1, 2, 4, $\frac{C}{6}+\frac{3B}{6}+\frac{2A}{6}=\frac{p^4+6p^3+11pp+6p}{1.2.3.4}$, ou $C=\frac{p^4+6p^3+11pp+6p}{4}-3B-2A$, &

en ſubſtituant pour B ſa valeur $\frac{2p^3+3pp+p}{6}$, & pour A ſa valeur $\frac{pp+p}{2}$, on a $C = \frac{\overline{p+1}^2 \times pp}{4}$ formule des cubes.

Soit encore D la ſomme d'une ſuite d'autant de nombres naturels élevez à la quatriéme puiſſance, qu'il y a d'unités dans p, on aura $\frac{D+6C+11B+6A}{24} = \frac{p \times p+1 \times p+2 \times p+3 \times p+4}{1.2.3.4.5}$ & en ſubſtituant pour C ſa valeur $\overline{\frac{p+1}{4}}^2 \times pp$, pour B ſa valeur $\frac{2p^3+3pp+p}{6}$, pour A ſa valeur $\frac{pp+p}{2}$, on trouvera $\frac{6p^5+15p^4+10p^3-p}{30}$ pour la formule des quarrés quarrés, & ainſi de ſuite pour toutes les autres puiſſances.

COROLLAIRE I.

14. SI l'on ſçait trouver par quelque methode differente de celle dont on vient de ſe ſervir, la ſomme d'une ſuite de nombres naturels dont tous les termes ſoient élevés à un expoſant quelconque, *on pourra trouver par la methode ci-deſſus les formules des nombres figurés qui ſervent aux combinaiſons, & que nous avons déja démontrés article 4.*

Ainſi étant ſuppoſé que l'on ſçache que la formule des nombres quarrés eſt $\frac{2p^3+3pp+p}{6}$, & celle des nombres naturels $\frac{pp+p}{2}$, on trouvera, en faiſant les mêmes raiſonnemens que dans l'article 13, $\frac{A}{2} + \frac{B}{2}$, c'eſt à dire la ſomme des nombres triangulaires, ou la formule des nombres pyramidaux $= \frac{2p^3+3pp+p}{2 \times 6} + \frac{pp+p}{2 \times 2} = \frac{p^3+3pp+2p}{6} = \frac{p.p+1.p+2}{1.2.3}$ comme dans l'article 7. *C Q f. T.* On aura de la même maniere toutes les autres formules des nombres figurés.

M. Johnes, ſçavant Geometre Anglois, employe pour trouver ces formules une methode peu differente de celle-ci dans ſon Traité intitulé : *New Introduction tothe Mathematics*, qui m'eſt tombé depuis peu entre les mains.

COROLLAIRE II.

15. LA ſolution précedente conduit ſans peine à une formule très generale & très ſimple, pour avoir *la ſomme des*

Digitized by Google

termes du ſecond ordre ou rang horizontal de la Table 3, article 8, élevés à un expoſant quelconque, la voici.

Soit n la dimenſion à laquelle ſont élevés tous les termes de la ſuite, $p+1$ le nombre des termes, la ſomme cherchée de la ſuite

b, $b+a$, $b+2a$, $b+3a$, $b+4a$, $b+5a$, *&c.* dont chaque terme ſera élevé à l'expoſant n, ſera exprimée par cette formule $p+1 \times b^n + n \times \frac{pp+p}{2} \times a \times b^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} \times \frac{2p^3+3pp+p}{6} \times a^2 b^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \times \overline{\frac{p+1 \times pp}{4}}^2 \times a^3 b^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \times \frac{6p^5+15p^4+10p^3-p}{30} \times a^4 b^{n-4} +$, *&c.* obſervant que $\frac{pp+p}{2}$, eſt la ſomme des nombres naturels, $\frac{2p^3+3pp+p}{6}$, la ſomme des quarrés, $\overline{\frac{p+1}{4} \times pp}^2$, la ſomme des cubes, &c.

PROPOSITION IV.

16. *TROUVER en combien de façons un nombre de choſes quelconque exprimé par les lettres* a, b, c, d, e, &c. *peut être arrangé differemment.*

Pour découvrir ces arrangemens differens, il faut obſerver que deux lettres a & b peuvent s'arranger en deux façons differentes ab, ba; que trois lettres a, b, c peuvent s'arranger de ſix façons differentes, c'eſt à dire, que trois lettres donnent trois fois plus d'arrangemens que deux lettres, ce qui ſe voit en mettant c dans ab & dans ba à toutes les places qu'il peut avoir, ſçavoir à la premiere, à à la ſeconde & à la troiſiéme : ces ſix arrangemens ſont :

abc	*bac*	*cab*
acb	*bca*	*cba*

On voit de même que quatre lettres a, b, c, d donnent quatre fois plus d'arrangemens poſſibles que les trois a, b, c; puiſque d peut occuper quatre places differentes dans chacun des ſix arrangemens précedens, comme il paroît par la Table ſuivante.

Digitized by Google

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acdb	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acbd	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*

& que generalement ſi l'on nomme p le nombre des lettres qu'on veut arranger de toutes les manieres poſſibles, q, le nombre de tous les divers arrangemens d'un nombre de lettres exprimé par $p - 1$; $pq = p.p - 1.p - 2.p - 3.p - 4$, *&c.* juſqu'à $p - p$, exprimera en combien de façons differentes on peut arranger des lettres dont le nombre ſoit exprimé par p; par exemple, ſi l'on veut ſçavoir en combien de façons ſix choſes peuvent être arrangées differemment, on trouvera $pq = 120 \times 6 = 1.2.3.4.5.6$.

REMARQUE.

17. ON peut tirer de la propoſition précedente les formules des nombres figurés qui ſervent aux combinaiſons, *articles* 4 & 14.

Pour me faire plus facilement entendre, je me ſers d'un exemple, ſoit ſuppoſé que l'on cherche combien il y a à parier que tirant quatre cartes au hazard dans quarante, par exemple dans un Jeu d'Ombre, je tirerai les 4 as. Il eſt évident qu'il m'eſt permis de ſuppoſer que ces 4 as ſe trouveront dans les quatre cartes de deſſus; puiſque j'ai la liberté de les choiſir par tout où je voudrai. Or il eſt clair que nommant m le nombre de tous les arrangemens poſſibles de 40 cartes, j'aurai $\frac{1}{m} \times \frac{m}{40} = \frac{1}{40}$ pour tirer l'as de cœur; puiſque cet as étant à la premiere place, les 39 autres cartes peuvent avoir tous les differens arrangemens imaginables, & de même j'aurai $\frac{1}{m} \times \frac{m}{40} \times \frac{1}{39} = \frac{1}{40.39}$; pour que l'as de cœur ſe trouvant à la premiere place, l'as de

carreau ſoit à la ſeconde, puiſque l'as de cœur étant à la premiere place, & l'as de carreau à la ſeconde, les 38 autres cartes peuvent être arrangées diverſement en autant de façons qu'exprime d'unités un nombre compoſé de 38 produits des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & pour les mêmes raiſons j'ai $\frac{1}{m} \times \frac{m}{40} \times \frac{1}{39} \times \frac{1}{38} = \frac{1}{40.39.38}$ pour amener l'as de trefle à la troiſiéme place; l'as de cœur étant à la premiere, & l'as de carreau à la ſeconde, & $\frac{1}{40.39.38.37}$ pour amener l'as de pic à la quatriéme place, l'as de trefle étant à la troiſiéme, l'as de carreau à la ſeconde, & l'as de cœur à la premiere.

Il eſt encore certain par la propoſition ci-deſſus que le produit des quatre nombres $1.2.3.4 = 24$, exprime tous les divers arrangemens poſſibles des 4 as aux quatre premieres places, j'ai donc $\frac{1.2.3.4}{40.39.38.37}$, pour que les 4 as ſe trouvent être les quatre premieres cartes.

Maintenant ſi je ſuppoſe que la lettre p exprime le nombre de toutes les manieres poſſibles de prendre quatre choſes dans 40. Il eſt évident que j'aurai $\frac{1}{p}$ pour prendre quatre choſes déterminées dans quarante : donc $\frac{1}{p} = \frac{40.39.38.37}{1.2.3.4}$: donc $p = \frac{40.39.38.37}{1.2.3.4}$.

Cet exemple fait voir que ſi je me propoſe de tirer un nombre quelconque exprimé par q de choſes déterminées dans un nombre plus grand appellé p, j'aurai une fraction dont le numerateur ſera compoſé d'autant de produits des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & le dénominateur d'autant de produits des quantités $p.p-1.p-2.p-3.p-4$, *&c.* que q exprime d'unités; en ſorte qu'appellant g le nombre de toutes les manieres poſſibles de prendre q dans p, on a $\frac{1}{g} = \frac{1.2.3.4.5.6, \text{ \&c.}}{p.p-1.p-2.p-3.p-4.p-5 \text{ \&c.}}$ d'où je tire $g = \frac{p.p-1.p-2.p-3.p-4.p-5 \text{ \&c.}}{1.2.3.4.5.6 \text{ \&c.}}$. *Ce qu'il falloit trouver*; & par conſequent me voilà retombé par la methode des changemens d'ordre dans celle des combinaiſons, & dans la formule que nous avons ci-devant démontré, en tenant des routes fort differentes de celle-ci, &c.

Digitized by Google

PROPOSITION V.

SOIT donné un certain nombre p *de carreaux, & un certain nombre* q *de cœurs. Soit supposé que toutes ces cartes dont le nombre est* $p+q$ *soient bien mêlées, & mises en un tas ; on demande combien il y a de hazards pour qu'elles se trouvent arrangées en sorte qu'il se rencontre dessus le tas un certain nombre* n *de carreaux avant qu'il se présente aucun cœur.*

SOLUTION.

18. IL est clair par la proposition précedente que le nombre de tous les divers arrangemens possibles de ces cartes, est $p+q.p+q-1.p+q-2.p+q-3.p+q-4.p+q-5$, *&c.* Maintenant si l'on veut qu'une de ces cartes, par exemple un carreau, se trouve à la premiere place dessus le tas, le nombre des arrangemens differens où cette disposition pourra se trouver, est $p \times p+q-1.p+q-2.p+q-3.p+q-4.p+q-5$, *&c.* puisqu'un des carreaux étant assujetti à se trouver à la premiere place, les autres carreaux & cœurs ont une place de moins à remplir ; mais peuvent encore être arrangés diversement entr'eux de toutes les façons $p+q-1.p+q-2.p+q-3.p+q-4.p+q-5$, *&c.* & de même si l'on veut que deux carreaux au moins se trouvent placés sur le tas avant les cœurs, le nombre de tous les arrangemens differens où cette disposition se trouvera, est $p.p-1 \times p+q-2.p+q-3.p+q-4.p+q-5$, *&c.* puisque deux carreaux étant assujettis à se trouver à la premiere & à la seconde place, les autres cartes peuvent encore être arrangées diversement de toutes les façons $p+q-2.p+q-3.p+q-4.p+q-5$, *&c.* on trouvera par les mêmes raisonnemens que si l'on veut que trois carreaux au moins se trouvent placés sur le tas avant les cœurs ; la formule $p.p-1.p-2 \times p+q-3.p+q-4.p+q-5$, *&c.* donnera le nombre cherché, & ainsi des autres.

PROPOSITION

PROPOSITION VI.

ÉTANT posé ce que dessus, on demande combien il y a d'arrangemens de ces cartes où il ne se trouvera dessus le tas qu'un certain nombre déterminé de carreaux, la carte d'après étant un cœur.

SOLUTION.

19. SI l'on veut, 1°, que la premiere ne soit point un carreau. 2°. ou que la premiere étant un carreau, la seconde soit un cœur. 3°. ou que les deux premieres étant des carreaux, la troisiéme soit un cœur, ou que les trois premieres étant des carreaux, la quatriéme soit un cœur, &c. on aura les formules qui suivent.

$q \times p+q-1 . p+q-2 . p+q-3 . p+q-4 . p+q-5$, &c.

$p \times q \times p+q-2 . p+q-3 . p+q-4 . p+q-5$, &c.

$p \times p-1 \times q . p+q-3 . p+q-4 . p+q-5$, &c.

$p . p-1 . p-2 . \times q . p+q-4 . p+q-5$, &c.

$p . p-1 . p-2 \times p-3 \times q \times p+q-5$, &c.

On voit aisément la suite de ces formules qui doivent toutes être composées d'autant de produits qu'il y a d'unités dans $p+q$.

Il suffit d'en démontrer une. Supposons, par exemple, qu'on veuille sçavoir combien il y a de hazards, pour que les deux premieres cartes de dessus soient des carreaux, la troisiéme étant un cœur. Il est clair qu'il y aura autant d'arrangemens pour ce cas, qu'on en a trouvé ci-dessus pour celui où deux carreaux se trouvent placés sur le tas avant les cœurs, moins celui où trois carreaux se trouvent placés avant les cœurs. On a donc pour le cas cherché $p . p-1 \times p+q-2 . p+q-3 . p+q-4 . p+q-5$, &c.

Digitized by Google

$-p.p-1.p-2\times p+q-3\times p+q-4.p+q-5$, &c. $=p.p-1\times q\times p+q-3.p+q-4.p+q-5$, &c.

C'eſt le même raiſonnement pour tous les autres cas.

PROPOSITION VII.

PIERRE tenant entre ſes mains un nombre quelconque de jettons de toutes couleurs, blancs, noirs, rouges, verts, &c. parie contre Paul, que tirant au hazard un nombre quelconque déterminé de jettons, il en tirera tant de blancs, tant de noirs, tant de rouges, tant de verts, &c. On demande combien Pierre a de hazards pour faire ce qu'il ſe propoſe.

SOLUTION.

20. IL faut multiplier le nombre qui exprime en combien de façons les jettons blancs que Pierre doit prendre au hazard, peuvent être pris differemment dans le nombre de jettons blancs propoſés, par le nombre qui exprime en combien de façons les jettons noirs que Pierre doit prendre au hazard, peuvent être pris differemment dans le nombre entier de jettons noirs propoſés; multiplier enſuite ce produit par le nombre qui exprime en combien de façons differentes les jettons rouges que Pierre ſe propoſe de tirer, peuvent être pris dans les jettons rouges propoſés, multiplier de nouveau ce produit par le nombre qui exprime en combien de façons differentes les jettons verts que l'on demande peuvent être pris dans tous les verts, & ainſi de ſuite, l'on aura le nombre cherché.

Cette ſolution porte avec elle la démonſtration, & n'a aucune difficulté; mais comme ce Theorême ſera dans la ſuite d'un grand uſage, je vais en faire ici l'application ſur un exemple.

Digitized by Google

EXEMPLE.

Pierre tient cinquante-deux jettons entre ſes mains, ſçavoir treize blancs, treize noirs, treize rouges, treize bleus, ou, ce qui revient au même, un jeu entier compoſé de cinquante-deux cartes. On demande en combien de façons differentes il peut tirant quatre cartes au hazard dans ces cinquante-deux, en tirer un carreau, un cœur, un pic & un treſle.

21. S'IL n'y avoit que treize carreaux & treize cœurs, il y auroit cent ſoixante-neuf façons differentes de prendre dans ces vingt-ſix cartes deux cartes de ces deux eſpeces; car chacun des treize carreaux pourroit être pris avec l'as de cœur, ce qui fait treize, ou avec le deux de cœur, ce qui fait encore treize, & ainſi de ſuite chacun des treize carreaux pourroit être pris avec chacun des treize cœurs, ce qui fait 13×13, c'eſt à dire cent ſoixante-neuf façons de prendre un carreau & un cœur dans vingt-ſix cartes.

Préſentement ſi à ces treize carreaux & à ces treize cœurs on ajoute treize treſles, il faudra pour avoir toutes les façons poſſibles de prendre un carreau, un cœur & un treſle dans ces trente-neuf cartes, multiplier par 13 les cent ſoixante-neuf façons précedentes; car chacune de ces cent ſoixante-neuf façons differentes ſe pourra trouver avec l'as de treſle, ce qui fait $13 \times 13 \times 1$, & avec le deux, ce qui fait $13 \times 13 \times 2$, c'eſt à dire trois cens trente-huit façons differentes, & avec le trois, ce qui fait cinq cens ſept façons differentes, & ainſi ſucceſſivement chacune des cent ſoixante-neuf façons précedentes ſe pourra trouver avec chacun des treize treſles, ce qui fait $13 \times 13 \times 13$, c'eſt à dire deux mil cent quatre-vingt-dix-ſept façons differentes de prendre un carreau, un cœur & un treſle dans ces trente-neuf cartes. On obſervera de même que la quatriéme puiſſance de treize exprimera en combien de façons differentes quatre cartes de differentes eſpeces, ſçavoir un carreau, un cœur, un pic & un treſle peuvent être

prises dans les cinquante-deux cartes : Ce seroit le même raisonnement dans toute autre espece. Donc, &c.

DEFINITION.

22. J'APPELLERAI cartes simples les cartes de differentes especes ; carte double, deux cartes de même espece ; par exemple, deux Rois, deux Dames, deux Valets, &c. carte triple, trois cartes d'une même espece ; par exemple, trois as, trois valets, trois dix, &c. carte quadruple, quatre cartes d'une même espece, carte quintuple, cinq cartes d'une même espece, &c.

PROPOSITION VIII.

Soit un nombre de cartes quelconque composé d'un nombre égal d'as, de deux, de trois, de quatre, &c. On demande combien il y a de hazards pour que Pierre tirant entre ces cartes un certain nombre de cartes à volonté, il en tire tant de simples, tant de doubles, tant de triples, tant de quadruples, tant de quintuples, &c.

23. POUR faire entendre plus facilement la solution de ce Problême, j'appellerai m le nombre des cartes dans lesquelles on en veut prendre un certain nombre ; q le nombre de fois que chaque espece de cartes est repetée dans m ; p le nombre des differentes especes de cartes ; en sorte que $q \times p$ soit $= m$: b l'exposant de la carte qui a la plus haute dimension entre celles que l'on se propose de prendre c, d, e, f, &c. l'exposant des autres cartes que l'on veut prendre, dont la dimension est moindre ; en sorte que c exprime un nombre plus petit que b, & d un nombre plus petit que c, & e un nombre plus petit que d, &c.

Je nommerai aussi B le nombre des cartes que l'on demande de la dimension exprimée par b, C le nombre des cartes que l'on demande de la dimension exprimée par c, D le nombre des cartes que l'on demande de la dimension exprimée par d, &c.

Digitized by Google

J'exprimerai auſſi par cette marque $\square^{q}_{b}$ le nombre qui exprime en combien de façons b peut être pris dans q, mettant le plus petit nombre deſſous, & le plus grand deſſus, & entre deux cette marque arbitraire $\square$. Tout cela poſé, voici la methode.

Il faut chercher en combien de façons b peut être pris dans q, élever ce nombre à l'expoſant B, multiplier ce produit par le nombre qui exprime en combien de façons B peut être pris dans p. 2°. Multiplier ce produit par le nombre qui exprime en combien de façons c peut être pris dans q, élever ce nombre à l'expoſant C, & multiplier ce produit par le nombre qui exprime en combien de façons C peut être pris dans $p - B$. 3°. Multiplier les produits précedens par le nombre qui exprime en combien de façons d peut être pris dans q, élever ce nombre à l'expoſant D, & le multiplier par celui qui exprime en combien de façons D peut être pris dans $p - B - C$. 4°. Multiplier tous les produits précedens par le nombre qui exprime en combien de façons e peut être pris dans q, élever ce nombre à l'expoſant E, & le multiplier par celui qui exprime en combien de façons E peut être pris dans $p - B - C - D$, & ainſi de ſuite.

La formule qui donne generalement le nombre cherché, ſera

$$\square^{q}_{b}{}^{B} \times \square^{q}_{c}{}^{C} \times \square^{q}_{d}{}^{D} \times \square^{q}_{e}{}^{E} \times \square^{q}_{f}{}^{F} \times \&c. \times$$

$$\square^{p}_{B} \times \square^{p-B}_{C} \times \square^{p-B-C}_{D} \times \square^{p-B-C-D}_{E} \times \square^{p-B-C-D-E}_{F} \times \&c,$$

Il faut remarquer que cette formule étant appliquée à un cas particulier, ne doit être compoſée que d'autant de produits de chacune de ces deux ſuites, qu'il y a de cartes de differentes dimenſions entre celles que l'on veut prendre.

Exemple I. Si Pierre ſe propoſe de tirer ſept cartes dans cinquante-deux; en ſorte qu'il y en ait trois doubles &

une ſimple, on aura par la formule le nombre cherché

$$= \underset{2}{\square}^{3} \times \underset{1}{\square}^{1} \times \underset{3}{\square} \times \underset{1}{\square} = 6^{3} \times 4 \times 286 \times 10 = 2471040$$

Exemple II. Si Pierre ſe propoſoit de tirer huit cartes dans cinquante-deux, en ſorte qu'il y en eût une triple, deux doubles & une ſimple, on auroit le nombre cherché

$$= \underset{3}{\square}^{1} \times \underset{2}{\square}^{2} \times \underset{1}{\square}^{1} \times \underset{1}{\square} \times \underset{2}{\square} \times \underset{1}{\square} = 4 \times$$

$36 \times 4 \times 13 \times 66 \times 10 = 4942080.$

Exemple III. Si Pierre ſe propoſoit de tirer treize cartes dans deux Jeux entiers compoſés de 104 cartes, en ſorte qu'il y en eût deux quadruples, deux doubles & un ſimple, on auroit pour le nombre cherché

$$\underset{4}{\square}^{2} \times \underset{2}{\square}^{2} \times \underset{1}{\square}^{1} \times \underset{2}{\square} \times \underset{2}{\square} \times \underset{1}{\square} = 70^{2} \times$$

$28^{2} \times 8 \times 78 \times 55 \times 9 = 581430769920000$

DEMONSTRATION.

24. LES produits $\underset{b}{\square}^{q} B \times \underset{c}{\square}^{q} C \times \underset{d}{\square}^{q} D \times \underset{e}{\square}^{q} E \times$ &c. ſont démontrés par la *Propoſ. 7, art. 20*; car il eſt clair que cette Propoſition n'eſt differente de celle-ci, qu'en ce que dans celle-là les ſimples, les doubles, les triples, &c. ſont déterminés à être ou des as, ou des deux, ou des trois, &c. au lieu qu'ils ſont ici indéterminés. A l'égard des autres quantités $\underset{B}{\square}^{p} \times \underset{C}{\square}^{p-B} \times \underset{D}{\square}^{p-B-C} \times$ &c. pour voir qu'ils doivent multiplier les produits précedens, il ſuffit d'obſerver que dans un Jeu de cartes entier où il ſe trouve quatre cartes de chaque eſpece, & des cartes de treize eſpeces differentes. Si l'on demande, par exemple, trois quadruples, cinq doubles & quatre ſimples, il faut multiplier $\underset{b}{\square}^{q} B \left(\underset{4}{\square}^{3}\right)$ par $\underset{B}{\square}^{p} \left(\underset{1}{\square}^{13}\right)$ puiſque ces

trois quadruples peuvent être pris de differentes eſpeces en autant de façons que trois peut être pris dans treize, & qu'enſuite il faut multiplier $\frac{q}{c}D$ $\left(\frac{4}{2}5\right)$ par $\frac{p-B}{c}$ $\left(\frac{10}{5}\right)$ puiſqu'il ne reſte plus que dix eſpeces, parmi leſquelles on puiſſe prendre les cinq doubles, & que ces doubles peuvent être pris en autant de façons que cinq choſes peuvent être priſes dans dix, & ainſi de ſuite; car il eſt clair que le même raiſonnement peut s'appliquer à tous les cas renfermés dans l'énoncé du Problême.

COROLLAIRE.

25. On a ſuppoſé dans le Problême précedent que le nombre des Rois, Dames, Valets, &c. étoit le même. La methode ſerviroit encore ſi ce nombre étoit different, ainſi qu'il paroîtra par cet exemple. J'ai cinq Rois, quatre Dames, deux valets, deux dix, & un as; je parie que tirant quatre cartes au hazard dans ces quatorze, je tirerai deux doubles; le nombre des hazards ſera

$$\frac{2}{2}\times\frac{2}{2}+2\times\frac{2}{2}\times\frac{4}{2}+2\times\frac{2}{2}\times\frac{5}{2}+\frac{4}{2}\times\frac{5}{2}=93.$$

On pourroit donner une formule pour ce Problême ainſi generaliſé; mais elle ſeroit trop obſcure, & trop embaraſſante dans l'application. Il ſuffit d'avoir fait connoître, par un exemple particulier, comment il s'y faudroit prendre dans toutes les eſpeces ſemblables.

Digitized by Google

PROPOSITION IX.

Les coefficiens d'un binome a + b, *élevé à l'expoſant* p, *ſont les mêmes que les bandes perpendiculaires du triangle arithmetique*, art. 1, *& ceux-là même qui expriment les diverſes combinaiſons d'un nombre quelconque de jettons ou de dés qui ont deux faces differentes, l'une appellée* a, *l'autre appellée* b.

27. L'ON voit en conſiderant les bandes perpendiculaires de la Table, *art. 1*, & la Table ſuivante qui repréſente les differentes puiſſances de $a + b$.

$a + b$

$aa + 2ab + bb$

$a^3 + 3aab + 3abb + b^3$

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$a^5 + 5a^4b + 10a^3bb + 10aab^3 + 5ab^4 + b^5$

$a^6 + 6a^5b + 15a^4bb + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

$a^7 + 7a^6b + 21a^5bb + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21aab^5 + 7ab^6 + b^7$

que les nombres dont les bandes perpendiculaires du triangle arithmetique, *art. 1*, ſont compoſés, ſont les mêmes que donne ici la formation des puiſſances d'un binome.

DE'MONSTRATION.

28. ON peut démontrer cette proprieté en pluſieurs façons, en faiſant obſerver, par exemple, que la ſomme d'une bande perpendiculaire quelconque, *art. 1*, étant un terme d'une progreſſion geometrique double. Si l'on appelle le quantiéme de la bande perpendiculaire, *n*, & ſi l'on met pour 2 le binome 1 + 1, on aura toujours la ſomme de tous les termes de cette bande perpendiculaire, égale

égale à tous les termes que donne le binome $1 + 1$, lorſqu'il eſt élevé à la puiſſance $n - 1$; mais il vaut mieux tirer de la nature & de la generation de ces nombres le rapport que l'on veut démontrer. Pour cela ſoit imaginé un nombre quelconque de jettons, 4, par exemple, qui ayent chacun deux faces, l'une blanche, l'autre noire. Il eſt clair par les articles 5 & 20 que le nombre 1, qui eſt le premier de la quatriéme bande perpendiculaire, exprime combien il y a de hazards, pour que jettant ces quatre jettons il ſe trouve quatre blancs. 2°. Que le nombre 4, qui eſt le ſecond de la quatriéme bande perpendiculaire, exprime combien il y a de hazards pour qu'il ſe trouve trois blancs & un noir. 3°. Que le nombre 6, qui eſt le troiſiéme de la quatriéme bande perpendiculaire, exprime combien il y a de hazards pour qu'il ſe trouve deux blancs & deux noirs. 4°. Que le nombre 4, qui eſt le quatriéme de la quatriéme bande perpendiculaire, exprime combien il y a de hazards pour qu'il ſe trouve un blanc & trois noirs. Et enfin que le dernier nombre 1 de cette bande exprime combien il y a de hazards pour qu'il ſe trouve quatre noirs.

Or l'on ſçait que conformément aux regles que preſcrit l'arithmetique pour la multiplication, il faut pour élever $a + b$ à la quatriéme puiſſance, 1°, prendre la quatriéme puiſſance de a & celle de b, (ce qui eſt la même choſe que prendre les quatre blancs & les quatre noirs,) en autant de façons qu'il eſt poſſible. 2°. Qu'il faut prendre le cube de a avec b, & le cube de b avec a en autant de manieres qu'il eſt poſſible; c'eſt encore la même choſe que de prendre trois blancs avec un noir, & trois noirs avec un blanc. 3°. Qu'il faut prendre le quarré de a avec le quarré de b, (ce qui eſt la même choſe que de prendre les deux blancs & les deux noirs,) en autant de façons qu'il eſt poſſible. Enfin il eſt évident que ce rapport qu'on vient de trouver, ſe doit neceſſairement rencontrer, quelque ſoit le degré du binome, & le nombre des jettons que nous ſuppoſons avoir deux faces; & par conſequent il eſt certain que les bandes perpendiculaires du triangle arithmetique donnent

les coefficiens de la formation des puiſſances d'un binome, & qu'ainſi la formule de $\overline{a+b}^{p}$ ſera $a^p + p \times a^{p-1}b + \frac{p.p-1}{1.2} a^{p-2}bb + \frac{p.p-1.p-2}{1.2.3} a^{p-3}b^3 + \frac{p.p-1.p-2.p-3}{1.2.3.4} a^{p-4}b^4 +$ &c. les coefficiens de cette ſuite étant toujours, & par ordre, les mêmes que les termes d'une bande perpendiculaire dont le quantiéme ſoit p, *art. 1. Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

29. ON trouvera en faiſant les mêmes raiſonnemens que ci-deſſus, que generalement *les coefficiens d'un multinome quelconque* q, *élevé à l'expoſant* p, *ſont les mêmes qui expriment les diverſes combinaiſons d'un nombre quelconque* p *de dés, qui ont un nombre quelconque de faces déſigné par* q, ce qui eſt un Theorême nouveau & très important, dont je tirerai dans toute la ſuite de cette premiere Partie de grands uſages pour le calcul des hazards des dés, & pour la theorie des Combinaiſons & des multinomes élevés à des expoſans quelconques,

PROPOSITION X.

Trouver combien on peut amener de coups avec un nombre quelconque p *de dés, dont le nombre de faces* f *ſoit auſſi quelconque.*

SOLUTION.

30. CHACUNE des faces d'un dé pouvant ſe prendre avec toutes les faces du ſecond dé, cela fait le quarré du nombre des faces; & ce dernier nombre, quarré des faces pouvant ſe joindre à chacune des faces du troiſiéme dé, cela fait le cube du nombre des faces, & ainſi de ſuite; ainſi la formule qui donne le nombre cherché eſt f^p.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

31. IL ſuit de cette Propoſition & de l'*art. 29*, que dans un multinome q élevé à l'expoſant p, la ſomme de tous les coefficiens eſt q^p.

COROLLAIRE II.

32. SI l'on veut prendre dans un nombre de lettres quelconque $a, b, c, d, e, f,$ *&c.* toutes les lettres ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, &c. mais en telle ſorte que chacune puiſſe ou ſe prendre ſimple, ou ſe répeter deux fois, trois fois, &c. nommant q le nombre des lettres, & p le nombre de fois que chaque lettre peut être repetée. Le nombre de toutes les combinaiſons poſſibles ſera q^p.

Si l'on demande, par exemple, combien on peut faire de mots avec les quatre lettres a, b, c, d, en les prenant trois à trois, & pouvant les répeter chacune juſqu'à trois fois, on trouvera $4^3 = 64$ pour le nombre cherché. L'on voit que l'on fait ici préciſément la même choſe, qu'en élevant le quadrinome $a+b+c+d$ à la troiſiéme puiſſance, & que c'eſt toujours le même rapport dans toute autre eſpece.

De-là il eſt clair que ſi l'on demande tous les differens mots qu'on peut faire avec un nombre quelconque de lettres q, en les prenant ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, &c. ou enfin p à p en la maniere qu'on a expliqué dans l'exemple ci-deſſus. On aura la ſomme de toutes les puiſſances de q, depuis q juſqu'à q^p, qui ſera $\frac{q^{p+1}-q}{q-1}$

PROPOSITION XI.

Trouver combien on peut amener de coups differens avec un nombre quelconque p *de dés, dont le nombre des faces* f *ſoit auſſi quelconque.*

33. ON a vû par la Propoſition précédente que chaque dé ayant, par exemple, ſix faces, deux dés produiſent

néceſſairement 36 coups, ce qui eſt le quarré de 6, & trois dés 216 coups, ce qui eſt le cube de 6; & quatre dés 1296 coups, ce qui eſt le quarré quarré de 6, &c. mais il faut obſerver que dans les 36 coups que donnent deux dés, il y en a 6 qui ne peuvent arriver que d'une façon, ſçavoir les ſix doublets, & qu'il y en a quinze, ſçavoir, 6 & as, 6 & 2, 6 & 3, 6 & 4, 6 & 5; 5 & as, 5 & 2, 5 & 3, 5 & 4; 4 & as, 4 & 2, 4 & 3; 3 & as, 3 & 2; 2 & as, qui peuvent arriver chacun en deux manieres; car celui des deux dés qui a donné un as, l'autre dé étant un ſix, peut être un ſix, l'autre étant un as, & ainſi des autres. Il eſt donc certain qu'il n'y a que 21 coups differens dans deux dés, quoique réellement il y en ait 36.

On peut remarquer la même choſe pour trois dés. Par ex. as, as & 2 peut arriver en trois façons; car chacun des trois dés pourra être un 2, les deux autres étant des as; & de même as, 2, 3 peut arriver en ſix façons; car l'un des trois dés marquant un as, chacun des deux autres peut être un 2 ou un 3, & l'un des trois dés étant un 2, chacun des deux autres peut être ou un as ou un 3; & enfin l'un des trois dés étant un 3, chacun des deux autres peut être ou un as ou un 2. On voit donc que ſi dans les 216 coups poſſibles de trois dés on ne veut compter as, 2, & 3, as, as, 2, & chacun des autres de cette eſpece, que pour un coup; c'eſt à dire, ne compter qu'une fois tous ceux qui arrivent, ou en trois ou en ſix façons; ce nombre de 216, réduit aux ſeuls coups qui ſont differens les uns des autres, ſera beaucoup moindre. Il s'agit de trouver une formule qui détermine ce nombre de coups differens les uns des autres pour quelque nombre de dés que ce ſoit : la voici.

En nommant f le nombre des faces de chaque dé, on aura le nombre cherché de coups pour un dé $= f$ pour deux dés $= \frac{f.f+1}{1.2}$, pour trois dés $\frac{f.f+1.f+2}{1.2.3}$, pour quatre dés $= \frac{f.f+1.f+2.f+3}{1.2.3.4}$, pour cinq dés $= \frac{f.f+1.f+2.f+3.f+4}{1.2.3.4.5}$, & ainſi des autres; en ſorte que dans deux dés on aura 21 coups differens, dans trois dés 56 coups, dans quatre dés 126 coups, dans cinq dés 252 coups, &c.

Digitized by Google

Ces nombres 6, 21, 56, 126, 252, 462, 792, 1287, & les autres ſuivans compoſent la ſixiéme bande tranſverſale de la Table, *art.* 1. L'on auroit les nombres de la ſeptiéme bande tranſverſale, ſi f étoit $= 7$; & les nombres de la huitiéme bande tranſverſale, ſi f étoit $= 8$, &c.

DE'MONSTRATION.

Il eſt clair que pour ſçavoir combien il y a de coups differens avec un dé, il n'y a qu'à ajouter en une ſomme les ſix premiers nombres de la premiere bande horizontale, *art.* 1, qui eſt compoſée d'unités; & que pour ſçavoir combien il y a de coups differens avec deux dés, il faut ajouter en une ſomme les ſix premiers nombres de la ſeconde bande horizontale; puiſqu'il eſt évident qu'en joignant l'as du deuxiéme dé avec les ſix faces du premier dé on a 6, & le 2 du deuxiéme dé avec les cinq faces du premier où l'as n'eſt point, on a 5; & qu'en joignant le 3 du deuxiéme dé avec les quatre faces du premier où l'as ni le 2 ne ſe trouvent point, on a 4, &c. En ſorte qu'il y a en tout $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ coups differens où chacune des faces peut entrer. $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$, où chacune des faces peut entrer, à l'exception de l'as. $4 + 3 + 2 + 1 = 10$, où chacune des faces peut entrer, à l'exception de l'as & du 2, &c. & qu'ainſi ces nombres qui repréſentent les differens coups poſſibles avec deux dés, ſe forment en la même maniere que les nombres de la ſeconde bande horizontale, *art.* 1.

On remarquera de même pour trois dés, en conſiderant la Table ci-jointe, que l'as du troiſiéme dé ſe joignant

11, 12, 13, 14, 15, 16 = 6
22, 23, 24, 25, 26 = 5
33, 34, 35, 36 = 4
44, 45, 46 = 3
55, 56 = 2
66 = 1

Digitized by Google

aux 21 coups differens de deux dés, donnera 21 coups differens, & que le 2 du troiſiéme dé ſe joignant aux 15 coups de la Table où il n'entre point d'as, donne 15 coups ; & que le 3 du troiſiéme dé ſe joignant aux 10 coups de la Table où il n'entre point d'as ni de 2, donne 10 coups, & ainſi du reſte.

En ſorte que la ſomme de tous les differens coups poſſibles avec trois dés eſt $21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56$, & que ces nombres ſe forment en la maniere que les nombres de la ſeconde bande horizontale du triangle arithmetique, *art. 1.*

Et de même qu'avec quatre dés il y aura 56 coups differens ou chacune des faces pourra entrer. $56 - 21 = 35$ où il n'y aura point d'as, $56 - 21 - 15 = 20$ où il n'y aura ni as ni 2, $56 - 21 - 15 - 10$ où il n'y aura ni as, ni 2, ni 3, &c. en ſorte qu'avec quatre dés la ſomme de tous les differens coups poſſibles ſera $= 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1 = 126$.

Et que ces nombres ſe forment en la même maniere que les nombres de la quatriéme bande horizontale, *art. 1.* C'eſt la même choſe pour tout autre nombre de dés & de faces. Or l'on ſçait que chaque terme d'une bande tranſverſale f eſt égale à la ſomme des f premiers nombres de la bande ſuperieure horizontale : Donc, &c.

COROLLAIRE.

34. IL ſuit de cette Propoſition & de l'*art. 29*, que dans un multinome q élevé à l'expoſant p, le nombre des termes ſera exprimé par cette formule $\frac{q.q+1.q+2.q+3.q+4.q+5}{1.2.3.4.5.6}$, &c. dont il faudra prendre autant de produits qu'il y a d'unités dans p, & qu'ainſi, par ex. dans le ſextinome $a+b+c+d+e+f$ élevé à la ſeconde puiſſance, le nombre 21 exprimera le nombre des termes ; que ce même ſextinome élevé à la troiſiéme puiſſance, en donnera 56 ; qu'étant élevé à la quatriéme puiſſance il en donnera 126, & ainſi de ſuite tous les nombres de la ſixiéme bande tranſverſale, *art. 1.*

Digitized by Google

PROPOSITION XII.

Jettant au hazard un nombre quelconque p *de dés dont le nombre des faces* f *soit auſſi quelconque; trouver combien il y a de coups pour amener un certain nombre fixé & déterminé* q, *d'as.*

SOLUTION.

35. LA formule qui donne le nombre cherché eſt $\overline{f-1}^{p-q} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4} \times \frac{p-4}{5} \times \frac{p-5}{6}$, &c. En ſorte qu'il y ait autant de ces produits qu'il y a d'unités dans q.

Par exemple, ſi l'on veut ſçavoir combien il y a de hazards pour amener préciſément trois as, ni plus ni moins, avec 9 dés ordinaires, on trouvera en ſubſtituant dans la formule pour f, 6, pour p, 9, pour q, 3. $5^6 \times \frac{9}{1} \times \frac{8}{2} \times \frac{7}{3} = 1312500$.

DE'MONSTRATION.

1°. $\overline{f-1}$ doit être élevé à l'expoſant $p-q$; car un certain nombre de dés q étant déterminé à marquer des as, par exemple, à l'excluſion de tous les autres dés, ces autres dés ne peuvent marquer que des deux, des trois, des quatre, &c. ce qui donne $f-1$, ou $\overline{f-1}^2$, ou $\overline{f-1}^3$, ou $\overline{f-1}^4$, &c. ſelon qu'il y aura ou un dé, ou deux dés, ou trois dés, ou quatre dés de reſte, &c. qui par la ſuppoſition ne devront point marquer l'as, puiſque les autres dés peuvent être regardés comme des dés qui auroient ſeulement $\overline{f-1}$ faces, & que l'expoſant $p-q$ déſigne combien il y a de dés qui ſont déterminés à ne point marquer d'as.

Maintenant pour voir que $\overline{f-1}^{p-q}$ doit être multiplié par autant de produits des quantités p, $\frac{p-1}{2}$, $\frac{p-2}{3}$, $\frac{p-3}{4}$, &c. qu'il y a d'unités dans q, il faut obſerver que ſi jettant p dés au hazard, on veut qu'il y en ait q qui marquent des as, les autres dés marquants d'autres points quelconques;

Digitized by Google

on pourra déterminer p dés à marquer des as, en autant de façons que q peut être pris dans p. Or par l'*art.* 5, la formule $\frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \frac{p-3}{4} \cdot \frac{p-4}{5}$, &c. exprime en combien de façons on peut prendre p, ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, &c. Donc, &c.

COROLLAIRE.

36. IL suit de cette Proposition & de l'*art.* 29 que dans un multinome q élevé à l'exposant p, si l'on demande la somme des coefficiens de tous les termes où la lettre a, par exemple, monte à un certain exposant m, on trouvera la somme que l'on cherche, en prenant autant de produits de cette formule $\overline{q-1}^{p-m} \times p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \frac{p-3}{4} \cdot \frac{p-4}{5}$, &c. qu'il y a d'unités dans m.

Si l'on veut sçavoir, par exemple, quelle sera la somme des coefficiens des termes où la lettre a montera à la troisiéme puissance dans le sextinome $a+b+c+d+e+f$ élevé à neuviéme dimension, on trouvera par la formule que le nombre cherché est 1312500.

PROPOSITION XIII.

Jettant au hazard un nombre quelconque p *de dés, dont le nombre de faces* f *soit aussi quelconque, trouver combien il y a de façons d'amener un certain nombre* q *d'as au moins.*

SOLUTION.

37. LA formule pour amener un as au moins avec p dés est $\overline{f-1}^{p-1} \times p + \overline{f-1}^{p-2} \times \frac{p \cdot p-1}{1.2} + \overline{f-1}^{p-3} \times \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1.2.3} + \overline{f-1}^{p-4} \times \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3}{1.2.3.4} +$ &c.

La formule pour amener deux as ou davantage, trois as ou davantage, quatre as ou davantage, &c. est la même, en observant de retrancher le premier terme de la formule dans le cas de deux as, les deux premiers dans le cas

cas de trois as, les trois premiers termes dans le cas de quatre as, &c.

Si l'on demande, par exemple, combien il y a de hazards pour amener un as au moins avec cinq dés ordinaires, c'eſt à dire à ſix faces, on trouvera par la formule 23255 pour le nombre cherché.

Et ſi l'on demande combien il y a de hazards pour amener au moins deux as, on trouvera 7630 pour le nombre cherché.

La démonſtration de ces formules dépend de la Propoſition précedente; car le premier terme de cette ſuite exprime le nombre des hazards qu'il y a pour amener un as préciſément, & le deuxiéme exprime combien il y a de hazards pour amener préciſément deux as, &c. Donc, toute la ſomme exprime combien il y a de hazards pour amener un as au moins, & toute la ſomme moins le premier, combien il y a de hazards pour amener au moins deux as; & toute la ſomme moins les deux premiers, combien il y a de hazards pour amener au moins trois as, &c. Donc, &c.

COROLLAIRE.

38 IL ſuit de cette Propoſition & de l'*art. 29*, que dans un multinome q élevé à l'expoſant p, ſi l'on cherche la ſomme des coefficiens de tous les termes où la lettre a ſe trouve à la premiere puiſſance ou à une puiſſance plus élevée, à la ſeconde puiſſance ou à une puiſſance plus élevée, à la troiſiéme puiſſance ou à une puiſſance plus élevée, &c. la formule ci-deſſus en mettant pour f, q, donnera le nombre cherché.

Ainſi, par exemple, ſi l'on demande la ſomme des coefficiens de tous les termes où il ſe trouvera quelque a, dans le ſextinome $a+b+c+d+e+f$ élevé à la cinquiéme puiſſance, on trouvera par la formule le nombre cherché $=23255$. Et ſi l'on demande la ſomme des coefficiens de tous les termes où la lettre a ſe trouvera, ou à la ſeconde dimenſion, ou à une plus haute dimenſion, on aura 7630.

Digitized by Google

PROPOSITION XIV.

Soit un nombre quelconque p *de dés, dont le nombre de faces* f *ſoit auſſi quelconque, on demande combien il y a de hazards pour que les jettant à volonté, il ſe trouve enſemble tant d'as, tant de deux, tant de trois, &c.*

SOLUTION.

39. SOIT b le nombre des as que l'on ſe propoſe d'amener c, d, e, f, g, &c. le nombre des deux, des trois, des quatre, &c. reſpectivement que l'on ſe propoſe d'amener. J'entendrai ici & dans la ſuite par cette expreſſion abregée $\binom{p}{b}$ le nombre qui exprime en combien de façons b peut être pris dans p. La formule qui donne le nombre cherché eſt

$$\binom{p}{b} \times \binom{p-b}{c} \times \binom{p-b-c}{d} \times \binom{p-b-c-d}{e} \times \binom{p-b-c-d-e}{f} \times \&c.$$

Par exemple, ſi l'on demande combien il y a de hazards ou de façons d'amener avec neuf dés ordinaires un triple, un double & deux ſimples déterminés; par exemple, trois as, deux deux, deux trois, un quatre & un cinq, la formule donne.

$$\binom{9}{3} \times \binom{9-3}{2} \times \binom{9-5}{2} \times \binom{9-7}{1} \times \binom{9-8}{1} = 84 \times 15 \times 6 \times 2 \times 1 = 15120.$$

DEMONSTRATION.

POUR ſçavoir en jettant p dés au hazard, combien il y a de coups pour amener b as; il faut chercher en combien de façons b peut être pris dans p, & enſuite b d'entre les p dés, étant déterminés à être des as, pour ſçavoir combien il y a de hazards pour amener c deux, il faut chercher en combien de façons c peut être pris dans le nombre de dés qui reſte, c'eſt à dire dans $p - b$; & puiſ-

Digitized by Google

que des p dés en voilà $b + d$ déterminés à être des as ou des deux, il faudra encore multiplier ces produits par le nombre qui exprime en combien de façons d trois, peuvent être pris dans $p - b - c$ dés, & ainsi de suite. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

40. IL suit de cette Proposition & de l'*art. 29*, que dans un multinome $q = A + B + C + D + E + F + \&c.$ élevé à l'exposant p, si l'on veut avoir le coefficient d'un terme quelconque, & que l'on nomme b le nombre des A qui doivent entrer dans le terme dont on cherche le coefficient, c le nombre des B, d le nombre des C, &c. La formule ci-dessus donnera le nombre cherché.

Si l'on demande, par exemple, le coefficient du terme $AAABBCCDE$ pris dans un quintinome élevé à la neuviéme puissance, on trouvera par la formule que ce coefficient est 15120.

COROLLAIRE II.

41. LE Corollaire précedent donne la solution de ce Problême : *Etant donné un nombre de lettres quelconque* a, b, c, d, e, f, &c. *dont certaines soient repétées à volonté, trouver en combien de façons differentes elles peuvent être arrangées.* Ainsi, par exemple, si l'on demande le nombre des arrangemens differens de ces lettres *aaabbccde*, la formule précedente donnera 15120 pour le nombre cherché.

Ce rapport, assez curieux ce me semble, que l'on rencontre ici entre ce dernier Problême, *art. 41*, notre Problême des dés, *art. 39*, & celui où l'on cherche les coefficiens d'un terme quelconque d'un multinome q élevé à l'exposant p, *art. 40*, fournit une démonstration complete de la regle qu'on trouve ailleurs pour les Anagrammes.

Digitized by Google

PROPOSITION XV.

Soit un nombre quelconque p *de dés, dont le nombre des faces* f *ſoit auſſi quelconque. On demande combien il y a de hazards pour qu'il ſe trouve tant de ſimples, tant de doubles, tant de triples &c. indéterminés. J'appelle dés ſimples, les dés de differente eſpece, ou qui marquent differens points, dé double deux dés de même eſpece, ou qui marquent les mêmes points; par exemple, double deux ou ternes, &c. dé triple, trois dés de même eſpece, par exemple, trois as ou trois deux, &c. & ainſi dé quadruple, quintuple, ſextuple, &c. quatre, ou cinq, ou ſix dés de même eſpece.*

SOLUTION.

42. COMME dans cette ſuppoſition il peut y avoir pluſieurs multiples également hauts; c'eſt à dire, que pluſieurs d'entre les lettres b, c, d, e, &c, du Problême précedent qui expriment les noms ou les expoſans des multiples, peuvent ici être égales. Soit nommé B le nombre qui exprime combien il y a de multiples du premier expoſant donné, C le nombre qui exprime combien il y a de multiples du ſecond expoſant, D le nombre qui exprime combien il y en a du troiſiéme, &c. La formule qui donne le nombre cherché eſt

$$\frac{p}{1\ldots b} \times \frac{p-b}{1\ldots c} \times \frac{p-b-c}{1\ldots d} \times \frac{p-b-c-d}{1\ldots e} \times \&c. \times \frac{f}{1\ldots B} \times \frac{f-B}{1\ldots C}$$

$$\times \frac{f-B-C}{1\ldots D} \times \frac{f-B-C-D}{1\ldots E} \times \&c.$$

Par exemple, ſi jettant neuf dés au hazard on demande combien il y a de manieres differentes d'amener un quadruple, deux doubles & un ſimple, on aura $b = 4$, $c = 2$, $d =$ encore 2, parcequ'on demande deux doubles, & $e = 1$, on aura auſſi $B = 1$, $C = 2$, & $D = 1$, & partant la formule donnera

Digitized by Google

$$\frac{9}{4} \times \frac{9-4}{2} \times \frac{9-4-2}{2} \times \frac{9-4-2-2}{1} \times \frac{6}{1} \times \frac{6-1}{2} \times \frac{6-1-2}{1} =$$

$126 \times 10 \times 3 \times 1 \times 6 \times 10 \times 3 = 680400.$

Il faut obſerver que la premiere partie de la formule doit avoir autant de termes qu'il y a de multiples, & la ſeconde autant de termes qu'il y de differens multiples.

Cette formule peut encore recevoir une autre forme q

$$\times \frac{f}{B} \times \frac{f-B}{C} \times \frac{f-B-C}{D} \times \frac{f-B-C-D}{E} \times \&c.$$

$$k \times l \times m \times n \times \&c.$$

J'entens par q le nombre de tous les arrangemens poſſibles de p & par $k, l, m, n, \&c.$ les nombres qui expriment tous les divers arrangemens poſſibles, de $b, c, d, e, \&c.$

DE'MONSTRATION.

LA premiere partie de la formule eſt démontrée dans la Propoſition précedente. La démonſtration de la ſeconde partie eſt à peu près la même; car l'on voit bien que le nombre des cas déterminés de la Propoſition précedente doit être multiplié par le nombre des differentes combinaiſons que les multiples peuvent recevoir dans le nombre des faces f. Or quand certaines faces ſont employées par un nombre B de multiples, il ne reſte plus que $f - B$ de faces; & lorſque les autres faces ſont employées par les C, il ne reſte plus que $f - B - C$ de faces, & ainſi du reſte. Donc, &c.

COROLLAIRE.

43. IL ſuit de cette Propoſition & de l'*art.* 29, que dans un multinome $q = A + B + C + D + E + F + \&c$ élevé à l'expoſant p, la formule ci-deſſus donnera la ſomme des coefficiens de tous les termes où les expoſans d'une ou de pluſieurs lettres indéterminément ſeront élevés à la

premiere, ou ſeconde, ou troiſiéme puiſſance, &c. Si l'on demande, par exemple, la ſomme des coefficiens de tous les termes où il y aura une lettre quelconque à la quatriéme puiſſance, deux quelconque à la ſeconde, & une enfin quelconque à la premiere, on trouvera par la formule ci-deſſus la ſomme cherchée = 680400.

PROPOSITION XVI.

Jettant au hazard un nombre quelconque d *de dés, dont le nombre des faces*, f, *ſoit auſſi quelconque, trouver combien il y a de hazards pour amener tel ou tel point*, p, *à volonté.*

SOLUTION.

44. SOIT $p - d + 1 = q$, & ſoit déſigné par cette marque arbitraire $[\overline{q}]$ le nombre figuré de l'ordre d, qui correſpond à q, c'eſt à dire, le premier nombre de l'ordre d, ſi $q = 1$; & le ſecond de l'ordre d, ſi $q = 2$; & le troiſiéme, ſi $q = 3$, &c. la formule $[\overline{q}] - d \times [\overline{q-f}] + \frac{d \cdot d-1}{1 \cdot 2} \times [\overline{q-2f}] - \frac{d \cdot d-1 \cdot d-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times [\overline{q-3f}] + \frac{d \cdot d-1 \cdot d-2 \cdot d-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times [\overline{q-4f}] -$ &c. exprimera le nombre cherché.

Pour faire mieux entendre cette formule, je vais en faire l'application, en donnant dans la Table ſuivante le nombre des hazards qu'il y a pour amener chaque point poſſible avec 8 dés.

nombres à amener.			maniere de les amener.
	8 ou 48	1	
	9 ou 47	8	
	10 ou 46	36	
	11 ou 45	120	
	12 ou 44	330	
	13 ou 43	792	
	14 ou 42	1716	$- 8 \times 1$
	15 ou 41	3432	$- 8 \times 8$
	16 ou 40	6435	$- 8 \times 36$
	17 ou 39	11440	$- 8 \times 120$
	18 ou 38	19448	$- 8 \times 330$
	19 ou 37	31824	$- 8 \times 792$
	20 ou 36	50388	$- 8 \times 1716 + 28 \times 1$
	21 ou 35	77520	$- 8 \times 3432 + 28 \times 8$
	22 ou 34	116280	$- 8 \times 6435 + 28 \times 36$
	23 ou 33	170544	$- 8 \times 11440 + 28 \times 120$
	24 ou 32	245157	$- 8 \times 19448 + 28 \times 330$
	25 ou 31	346104	$- 8 \times 31824 + 28 \times 792$
	26 ou 30	480700	$- 8 \times 50388 + 28 \times 1716 - 56 \times 1$
	27 ou 29	657800	$- 8 \times 77520 + 28 \times 3432 - 56 \times 8$
	28	888030	$- 8 \times 116280 + 28 \times 6435 - 56 \times 36$

Digitized by Google

On voit par cette Table qu'il y a, par exemple, 1708 façons d'amener 14 ou 42 avec 8 dés, & 133288 façons d'amener 27 ou 29, &c.

DE'MONSTRATION.

LORSQUE le nombre des faces de chaque dé n'eſt pas moindre que $p - d + 1$ les nombres figurés de l'ordre d, Table premiere, *art. 1.* donnent toujours le nombre des hazards differens pour amener tel ou tel point.

Pour s'en aſſurer, il faut conſiderer le rapport qui ſe trouve entre la maniere dont ſe forment les differens points avec un, deux, trois dés, &c. & la maniere dont ſe forment les nombres du premier, ſecond, troiſiéme, &c. rang horizontal, *art. 1.* on trouvera aiſément ce rapport dans les Tables ſuivantes.

Premiere Table pour amener avec un dé,

ou 1	ou 2	ou 3	ou 4	ou 5	ou 6	
1	2	3	4	5	6	formation des points.
1	1	1	1	1	1	façons d'amener ces points.

Seconde Table pour amener avec deux dés

ou 2	ou 3	ou 4	ou 5	ou 6	ou 7	ou 8	ou 9	ou 10	ou 11	ou 12	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	1,10	1,11	
	22	23	24	25	26	27	28	29	2,10		
		33	34	35	36	37	38	39			
					44	45	46	47	48		
Formation des points.							55	56	57		
									66		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Façons d'amener ces points.

Troiſiéme Table, pour amener avec trois dés

ou 3	ou 4	ou 5	ou 6	ou 7	ou 8	ou 9	ou 10	ou 11	ou 12	ou 13	ou 14
111	112	113	114	115	116	117	118	119	11,10	11,11	11,12
		122	123	124	125	126	127	128	129	1210	12,11
				133	134	135	136	137	138	139	13,10
						144	145	146	147	148	149
								155	156	157	158
										166	167
			222	223	224	225	226	227	228	229	22,10
					233	234	235	236	237	238	239
							244	245	246	247	248
									255	256	257
											266
Formation des points.											
						333	334	335	336	337	338
								344	345	346	347
										355	356

Façons d'amener ces points.	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78

L'on voit, 1°, par la premiere Table, que le rang des unités exprime toutes les façons d'amener avec un dé ou un as, ou un deux, ou un trois, &c. 2°. Par la ſeconde Table, que les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. expriment toutes les façons d'amener avec deux dés ou deux, ou trois, ou quatre, ou &c. points, dont la raiſon eſt que pour former ces points, on joint l'as du deuxiéme dé avec tous les points qu'on peut amener avec le premier dé, & enſuite le deux

Digitized by Google

deux du deuxiéme dé, avec tous les points qu'on peut amener avec tous les points du premier, excepté l'as ; & enſuite le trois du deuxiéme dé, avec tous les points du premier dé, excepté l'as & le deux, &c. 3°. Par la troiſiéme Table, que les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, &c. expriment toutes les façons d'amener avec trois dés, ou trois, ou quatre, ou cinq, &c. par cette raiſon, que pour former ces points on joint l'as du troiſiéme dé à tous les points de la Table précedente pour deux dés, & enſuite le deux du troiſiéme dé avec tous les points de la Table précedente où l'as ne ſe trouve point, & enſuite le trois du troiſiéme dé, avec tous les points de la Table précedente où il ne ſe trouve ni l'as, ni le deux, & ainſi du reſte.

D'où il eſt évident que cette formation des differens points étant la même que celle des nombres figurés, *art. 1.* c'eſt à dire, dans l'une & dans l'autre une addition réiterée, ces derniers nombres exprimeront toujours toutes les façons d'amener tous les points poſſibles, lorſque les faces des dés ſeront marquées des chifres qui peuvent ſervir à marquer ces points ; car dans les dés ordinaires à ſix faces, on voit que cette regle n'a pas lieu, & qu'il n'y a pas, par exemple, ſept façons d'amener 8 avec 2 dés ; puiſque n'y ayant point de faces marquées d'un 7, il en faut retrancher 17, & qu'il n'y a pas 8 façons d'amener 9, puiſqu'il en faut retrancher les points 18, 27, &c. c'eſt ce que l'on a voulu faire obſerver par les traits qu'on a tiré dans ces Tables, pour faire entendre les coups qu'il faut retrancher dans les dés ordinaires, ce qui ſe peut auſſi appliquer à toute autre ſuppoſition du nombre des faces de chaque dé, comme on le fera voir dans les Corollaires que l'on donnera dans la ſuite.

Il nous reſte donc maintenant, pour achever de démontrer la formule, de faire voir generalement ce qu'il faut retrancher du nombre qui répond au rang perpendiculaire de l'ordre p, & au rang horizontal d : ce nombre eſt le premier terme de notre formule.

Il faut ſouſtraire de ce nombre, le nombre des cas par leſquels il peut arriver que pour la formation du point

donné il faille faire entrer un nombre plus grand que le nombre des faces d'un dé. Or il y a d fois autant de cas pour cela, qu'il y en a pour amener un point exprimé par $p - f$ avec le même nombre de dés; car ſoient exprimés les dés par les lettres A, B, C, D, E, &c. & qu'un de ces dés, par exemple A, ſoit déterminé à porter un point plus haut que le nombre des faces f, il eſt évident que ce dé A, avec les autres dés B, C, D, &c. doit faire outre f, points qui ſont certainement compris dans une des faces du dé A, encore $p - f$ points: donc il faut prendre le nombre de cas qui exprime en combien de manieres on peut amener $p - f$ points, & le multiplier par le nombre des dés; puiſque ce peut être ou le dé A, ou le dé B, ou le dé C, &c. qui ſoit déterminé à porter un point plus haut que le nombre des faces. Or il peut arriver qu'on ait retranché trop, ſçavoir dans les cas où deux dés ſont déterminés à porter chacun un point plus haut que le nombre des faces; & alors il faudra ajouter le nombre des cas pour amener $p - 2f$ points multiplié par $\frac{d \cdot d-1}{1 \cdot 2}$, puiſque deux dés, par exemple, A & B étant déterminés à porter des points plus hauts que f, il ne leur reſte à faire avec les autres dés C, D, E, &c. que $p - 2f$ points; & comme on peut prendre d dés en $\frac{d \cdot d-1}{1 \cdot 2}$ manieres deux à deux, il faut multiplier le nombre des cas pour amener $p - 2f$ points par $\frac{d \cdot d-1}{1 \cdot 2}$. Par la même raiſon quand il pourra arriver que trois dés ſoient déterminés à porter chacun des points plus hauts que f, il faudra encore retrancher le nombre des cas pour amener $p - 3f$ points multiplié par $\frac{d \cdot d-1 \cdot d-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, & encore ajouter le nombre des cas pour amener $p - 4f$ points multiplié par $\frac{d \cdot d-1 \cdot d-2 \cdot d-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, en cas que quatre dés puiſſent, pour former le point donné, porter chacun un point plus haut que le nombre des faces f; & en continuant ainſi alternativement cette addition & cette ſouſtraction, on aura enfin le vrai nombre qui exprime en combien de façons le point donné peut être amené. C. Q. F. D.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

45. ON tire des Tables & de la démonſtration précedente la maniere qui ſuit de former ces nombres.

TABLE.

1	1	1	1	1										
1	1	1	1	1	1									
1	1	1	1	1	1	1								
1	1	1	1	1	1	1	1							
1	1	1	1	1	1	1	1	1						
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					

1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				

1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	

1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35	20	10	4	1
1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	, &c.						
1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	, &c.							
1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	, &c.								
1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	, &c.									
1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	, &c.										

1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735,	&c.					

On voit que dans la conſtruction de ces dernieres Tables, l'on fait préciſément la même choſe que ce que l'on a fait dans les précedentes, lorſqu'on les a échancré par des points pour en retrancher tous les coups où il ſe trouve des 7, 8, 9, &c. & par conſéquent les autres étant démontrées, on voit l'uſage de celle-ci pour trouver par ordre toutes les façons d'amener tel ou tel point avec 3 dès, après avoir trouvé toutes les façons d'amener tel ou tel point avec deux dés, & de même pour trouver toutes les façons d'amener tel ou tel point avec quatre dés, après avoir trouvé toutes les façons dont on peut avoir tous les divers points avec trois dés, &c:

COROLLAIRE II.

46. ON voit par les Tables & la démonſtration précedente, qu'il y a un égal nombre de hazards pour amener les points qui ſont également diſtans du plus grand & du plus petit qu'on puiſſe amener.

COROLLAIRE III.

47. SI l'on demande *en combien de façons on peut amener tel ou tel point avec un certain nombre de dés, dont le nombre de faces ſoit inégal, & tel que l'on voudra*, on trouvera encore le nombre cherché en la même maniere que dans le Corollaire premier. Voici la regle.

Il faut former une Table dont le premier rang horizontal ſoit compoſé d'autant d'unitez que le premier dé a de faces, mettre au deſſous autant de pareils rangs d'unités, en avançant toujours d'une place vers la droite, qu'il y a d'unités dans le nombre des faces du deuxiéme dé. Prendre les ſommes des nombres qui forment les bandes perpendiculaires de cette premiere Table, on aura toutes les façons d'amener tous les divers points poſſibles avec les deux premiers dés. Placer enſuite au deſſous cette ſomme que l'on vient de trouver autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre des faces du troiſiéme dé, en obſervant de rang en rang de rétrograder d'une place vers la droite. La ſomme des bandes perpendiculaires de cette deuxiéme Ta-

Digitized by Google

ble donnera toutes les manieres d'amener les divers points poſſibles avec les trois premiers dés, & ainſi de ſuite.

Par exemple, ſi l'on demande toutes les façons d'amener chacun des points poſſibles avec cinq dés, dont l'un ait ſix faces marquées à l'ordinaire, le deuxiéme ait quatre faces ſeulement marquées d'un as, d'un deux, d'un trois & d'un quatre; le troiſiéme, trois faces marquées d'un as, d'un deux & d'un trois; le quatriéme & le cinquiéme deux faces ſeulement marquées chacun d'un as & d'un deux. On aura cette Table *A*.

a	1	1	1	1	1	1						
		1	1	1	1	1	1					
			1	1	1	1	1	1				
				1	1	1	1	1	1			
b	1	2	3	4	4	4	3	2	1			
		1	2	3	4	4	4	3	2	1		
			1	2	3	4	4	4	3	2	1	
c	1	3	6	9	11	12	11	9	6	3	1	
		1	3	6	9	11	12	11	9	6	3	1
d	1	4	9	15	20	23	23	20	15	9	4	1
		1	4	9	15	20	23	23	20	15	9	4 1
e	1	5	13	24	35	43	46	43	35	24	13	5 1

On voit par cette Table qu'il y a 1. 2. 3. 4. 4. &c. façons d'amener avec les deux premiers dés ou deux, ou trois, ou quatre, ou cinq . . . ou 10.

Et de même avec les trois premiers dés, qu'il y a 1. 3. 6. 9. 11. 12. &c. façons d'amener ou trois, ou quatre, ou cinq, ou ſix . . . ou 13.

Et avec les quatre premiers dés, qu'il y a 1. 4. 9. 15. 20. 23. &c. façons d'amener ou quatre, ou cinq, ou ſix, ou ſept . . . . ou 15.

Et enfin, qu'avec les cinq dés il y a 1. 5. 13. 24. 35. &c. façons d'amener ou cinq, ou ſix, ou ſept . . . . ou 17.

Digitized by Google

La ſomme des nombres de ce dernier rang *e* eſt 288. nombre de tous les coups poſſibles, avec ces cinq dés.

Pour démontrer cette regle, il ſuffit d'obſerver la formation des points dans cet exemple. Or il eſt clair que chaque face du deuxiéme dé pouvant ſe joindre à chacune des ſix faces du premier dé, j'ai pour tous les coups qu'on peut amener avec les deux premiers dés cette Table *B*.

11	12	13	14	15	16			
	21	22	23	24	25	26		
		31	32	33	34	35	36	
			41	42	43	44	45	46
1	2	3	4	4	4	3	2	1

2°. Que chacune des faces du premier & du troiſiéme dé pouvant ſe joindre avec chacun des coups de la Table *B*, on a encore cette Table *C* qui repréſente tous les points qu'on peut amener avec les trois premiers dés.

Points à amener.	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Formation de ces points.	111	112	113	114	115	116					
		121	122	123	124	125	126				
			131	132	133	134	135	136			
				141	142	143	144	145	146		
		211	212	213	214	215	216				
			221	222	223	224	225	226			
				231	232	233	234	235	236		
					241	242	243	244	245	246	
			311	312	313	314	315	316			
				321	322	323	324	325	326		
					331	332	333	334	335	336	
						341	342	343	344	345	346
Maniere de les amener	1	3	6	9	11	12	11	9	6	3	1

puiſqu'il faut prendre trois fois la valeur de *b* dans la

Table *A*, en avançant toujours d'une place vers la droite.

On fera les mêmes raiſonnemens pour trouver toutes les façons d'amener les divers points qu'on peut former avec le quatriéme dé joint aux trois premiers, & enſuite avec le cinquiéme dé joint aux quatre autres; car c'eſt toujours la même choſe; & l'on verra que cette regle que nous donnons ici eſt fondée ſur la formation des points, & qu'elle eſt generale pour quelque nombre de faces que ce ſoit: il ſeroit trop long, & à ce que je crois inutile de s'étendre davantage.

COROLLAIRE IV.

48. LA regle que nous avons donné dans le Corollaire précedent, ſert auſſi à *trouver tous les diviſeurs, ou, ce qui eſt la même choſe, toutes les parties aliquotes d'un produit litteral quelconque.*

Ainſi ſuppoſé que l'on demande le nombre des diviſeurs de cette quantité litterale a^1b^1ccde, en comptant l'unité pour un diviſeur, on trouvera conformément à la regle ordinaire, qui eſt de multiplier entr'eux tous les expoſans augmentés chacun de l'unité, que ce nombre eſt 288 = au produit de toutes les faces de nos cinq dés dans l'exemple du Corollaire précedent; & ſi l'on demande en détail le nombre de ces diviſeurs, on les trouvera dans le dernier rang de la Table *A* Coroll. 3. En ſorte que le nombre 1 qui exprime dans cette Table combien il y a de façons d'amener cinq avec les cinq dés, exprime ici combien il y a de diviſeurs qui n'ayent aucune dimenſion; & le nombre 5 qui exprime dans le Corollaire précedent combien il y a de façons d'amener ſix avec les cinq dés, exprime ici combien dans la quantité a^1b^1ccde il y a de diviſeurs d'une dimenſion; & le nombre 13 qui exprime dans la Table *A* combien il y a de façons d'amener ſept avec les cinq dés, exprime ici combien il y a de diviſeurs de deux dimenſions, &c. Et enfin, que ces nombres 1, 5, 13, 24, 35, 43, 46, 43, 35, 24, 13, 5, expriment tous les diviſeurs de differentes dimenſions que donne la quantité a^1b^1ccde.

Digitized by Google

COROLLAIRE V.

49. IL eſt encore évident par ce qui précede, que les nombres 1, 5, 13, 24, &c. *Tab. A, Coroll. 3.* expriment toutes les differentes manieres dont on peut ne prendre en aucune façon les lettres de cette quantité a^1b^1ccde, ou les prendre une à une, ou les prendre deux à deux, ou les prendre trois à trois, ou les prendre quatre à quatre, &c. & qu'ainſi la methode enſeignée dans le Corollaire 3, donne la maniere de trouver toutes les combinaiſons qu'on peut faire avec un certain nombre de lettres, parmi leſquelles ou toutes ou pluſieurs ſont répetées un certain nombre de fois. Mais il faut obſerver que dans ces combinaiſons les varietés qui proviennent par les changemens de place n'y ſont point comptées; que l'on ne compte, par exemple, *ab* que pour une combinaiſon, quoique lorſqu'il s'agit de les tirer on puiſſe prendre *a* devant *b*, ou *b* devant *a*, ce qui fait deux évenemens.

Si l'on veut avoir égard à la multitude d'évenemens que peuvent produire les arrangemens differens des lettres: on trouvera la Table qui ſuit pour le même exemple.

a^1	1	1	1	1	1					
	1	2	3	4	5	6				
		1	3	6	10	15	21			
			1	4	10	20	35	56		
a^2b^2	1	2	4	8	15	26	41	56	56	
	1	4	12	32	75	156	287	448	504	
		1	6	24	80	225	546	1148	1960	3136
a^2b^2cc	1	3	9	26	71	181	422	889	1652	2464	3136
	1	6	27	104	355	1086.	2954.	7112.	14868.	24640.	34496
a^2b^2ccd	1	4	15	53	175	536	1508.	3843.	8764.	17332.	27776.	34496
	1	8	45	212	875	3216.	10556.	30744.	78876.	173320.	305536.	413952
a^2b^2ccde	1.	5.	23.	98.	387.	1411.	4724.	14399.	39508.	96208.	201096.	340032.	413952

On

On voit aiſément la formation de cette Table, elle n'eſt differente de la Table du Corollaire 3, qu'en ce que dans celle là chaque bande horizontale eſt la même que la premiere; au lieu que dans celle-ci il faut, pour former le deuxiéme rang, multiplier le premier par une ſuite de nombres naturels, c'eſt à dire le premier terme par 1, le deuxiéme par 2, le troiſiéme par 3, &c. & pour former le troiſiéme rang multiplier le premier par une ſuite de nombres triangulaires; c'eſt à dire le premier terme du premier rang par 1, le deuxiéme par 3, le troiſiéme par 6, le quatriéme par 10, &c. & pour former le quatriéme rang, multiplier le premier par une ſuite de nombres pyramidaux; c'eſt à dire le premier terme du premier rang par 1, le deuxiéme par 4, le troiſiéme par 10, le quatriéme par 20, &c. On remarquera ce rapport, en comparant la table ci-deſſus avec la Table du Corollaire 3. La démonſtration de celle-ci ſe tire de ce que les differens ordres des nombres figurés expriment les divers arrangemens poſſibles d'une ſuite des puiſſances de *a* combinées avec les differentes puiſſances de *b*, ce qui eſt aiſé à déduire des art. 17 & 41. Il eſt clair que lorſqu'on a trouvé tous les differens arrangemens que peut former chacune des puiſſances de *a* combinée avec chacune des puiſſances de *b*, & que l'on y veut introduire les differentes puiſſances de *c*, il faut operer ſur les puiſſances de *a* & de *b* priſes enſemble, comme on a fait auparavant pour introduire les puiſſances de *b* dans les puiſſances de *a*, & ainſi de ſuite. On voit dans la Table de ce Coroll. 5, qu'il y a 23 façons de prendre dans la quantité a^1b^3ccde les lettres deux à deux, ayant égard aux arrangemens, 98 façons de les prendre trois à trois, 387 façons de les prendre quatre à quatre, & enfin 1111844 façons de les prendre de toutes les manieres poſſibles.

COROLLAIRE VI.

50. SI l'on veut imaginer que dans notre Problême general, *art. 44 & 47*, les dés ayent un certain nombre *n* de faces blanches, c'eſt à dire qui ne ſoient point marquées,

on trouvera toujours de la même maniere que ci-devant le nombre de façons d'amener tel ou tel point, en observant de multiplier toutes les façons d'amener tel ou tel point par une puiſſance de z qui ſoit égale au nombre de dés qui ne ſont pas employés pour former ce point; par exemple, ſi l'on ſuppoſe quatre dés, l'un marqué d'un as, l'autre d'un deux, l'autre d'un trois, & l'autre d'un quatre, les cinq autres faces de ces quatre dés étant blanches, & que l'on demande combien il y a de façons d'amener zero, c'eſt à dire de n'amener aucun point, on trouvera $5^4 = 625$ pour le nombre cherché; & ſi l'on demande combien il y a de façons d'amener quatre, on trouvera que ce nombre ſe peut former par un trois & un as, auquel cas il ne reſte que deux dés inutiles, & auſſi par un quatre, auquel cas il en reſte trois inutiles. Le nombre des façons pour amener quatre eſt donc $1 \times 5^2 + 1 \times 5^3 = 150$. Voici une Table qui contient tous les autres cas de cet exemple.

Points à amener.		
zero	5^4	
1	1×5^3	Façons d'amener ces points.
2	1×5^2	
3	$1 \times 5^3 + 1 \times 5^2$	
4	$1 \times 5^3 + 1 \times 5^2$	
5	..... 2×5^2	
6	..... $1 \times 5^2 + 1 \times 5$	
7	..... $1 \times 5^2 + 1 \times 5$	
8	..... 1×5	
9	..... 1×5	
10	 1	
	1296	

Cet exemple, quoique ſimple, ſuffit pour faire voir comment il faudroit s'y prendre dans tous les autres cas pareils.

Digitized by Google

REMARQUE.

51. ON pourroit croire que ce seroit la même chose de parier qu'on amenera bezet avec deux dés ordinaires, ou deux as en tirant deux cartes dans douze, qui seroient l'as, le 2, le 3, le 4, le 5 & le 6 de carreau; l'as, le 2, le 3, le 4, le 5 & le 6 de cœur; mais cela n'est pas ainsi. Dans le cas des dés on a un contre trente-cinq; & dans le cas des douze cartes on a un contre soixante & cinq, dont la raison est que dans ce dernier cas outre les 36 combinaisons des cœurs avec les carreaux, il y en a 15 des carreaux entr'eux, & quinze des cœurs entr'eux, ce qui fait en tout 66. Cette consideration nous apprend que pour réduire les Problêmes des cartes aux Problêmes des dés, il ne tient plus qu'à résoudre le Problême qui suit.

PROPOSITION XVII.

Etant donnée une suite de cartes l'as, le deux, le trois, le quatre, &c. de cœur, trouver combien il y a de façons d'amener tel ou tel point en tirant ou une, ou deux, ou trois, ou quatre, &c. cœurs.

SOLUTION.

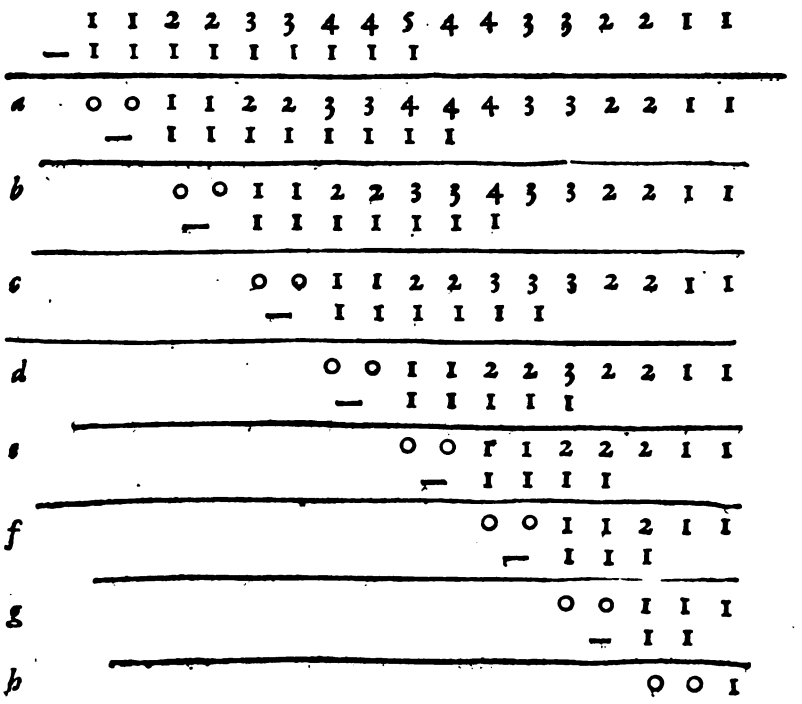
52. VOICI de quelle maniere je procede par ordre.

Je commence par chercher en la maniere qui suit tous les cas où l'on prend deux cartes.

points à amener.	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Formation des points.	12	13	14	15	16	17	18	19	1.10								
		23	24	25	26	27	28	29	2.10								
				34	35	36	37	38	39	3.10							
						45	46	47	48	49	4.10						
								56	57	58	59	5.10					
										67	68	69	6.10				
												78	79	7.10			
														89	8.10		
																	9.10
manière de les amener	1	1	2	2	3	3	4	4	5	4	4	3	3	2	2	1	1

Digitized by Google

Ceci une fois trouvé, j'aurai methodiquement toutes les façons d'amener les divers points poſſibles que trois cartes peuvent donner; car je vois que pour avoir tous les divers coups où il y aura un as, je n'ai qu'à retrancher de la ſomme trouvée toutes les façons du cas précedent où il y avoit un as; & que pour avoir tous les coups où il y aura un deux & point d'as, il faut retrancher de cette difference tous les coups où il y aura un trois ſans as ni deux, & ainſi de ſuite juſqu'à la fin. Alors ajoutant les termes de ces differences qui répondent aux differens points, on aura le nombre des hazards pour amener chaque point en particulier. Voici l'operation pour le cas où l'on prend trois cœurs. Nous avons ſuppoſé ici qu'il y en a ſeulement dix; mais il eſt clair que ce ſeroit la même choſe, s'il y en avoit davantage.



Ajoutant donc toutes ces differences, j'ai la Table qui ſuit.

Points à amener. 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 29 27

1 1 2 2 3 3 4 4 4 3 3 2 2 1 1 = *a*
1 1 2 2 3 3 4 3 3 2 2 1 1 = *b*
1 1 2 2 3 3 3 2 2 1 1 = *c*
1 1 2 2 3 2 2 1 1 = *d*
1 1 2 2 2 1 1 = *e*

Formation des points.

1 1 2 1 1 = *f*
1 1 1 = *g*
1 = *b*

Façons d'amener ces points. 1 1 2 3 4 5 7 8 9 10 10 10 10 9 8 7 5 4 3 2 1 1 = *A*

Nombre de toutes les diverſes manieres poſſibles d'amener tel ou tel point avec trois cœurs.

Et de même pour quatre cartes, en formant la Table ſuivante des ſuites de *A* — *a*, *A* — *a* — *b*, *A* — *a* — *b* — *c*, *A* — *a* — *b* — *c* — *d*, &c. on trouvera en combien de manieres chacun des points poſſibles peut être amené en tirant quatre cœurs dans les dix ſuppoſés. Voici cette Table.

Points à amener. 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34

1 1 2 3 4 5 7 7 8 8 8 7 7 5 4 3 2 1 1
1 1 2 3 4 5 6 6 6 6 5 4 3 2 1 1
1 1 2 3 4 4 5 4 4 3 2 1 1
1 1 2 3 3 3 3 2 1 1
1 1 2 2 2 1 1
1 1 1 1
1

Formation des points.

Façons de les amener 1 1 2 3 5 6 9 10 13 14 16 16 18 16 16 14 13 10 9 6 5 3 2 1 1

On trouvera de la même maniere combien il y a de façons d'amener tel ou tel point, en tirant ou cinq cœurs, ou six cœurs, ou enfin un nombre de cœurs donné.

COROLLAIRE I.

53. CETTE solution jointe à celle de l'*art.* 44 fournit une maniere facile de *trouver toutes les façons d'amener tel ou tel point avec un nombre de cartes donné.* Si l'on demande, par exemple, les differentes façons qu'il y a d'amener tous les divers points possibles avec trente cartes, sçavoir dix carreaux depuis l'as jusqu'au dix, autant de cœurs, autant de trefles. Je cherche d'abord par l'*art.* 44 toutes les manieres dont chaque point peut arriver, chacune des trois couleurs fournissant quelque point; & ensuite par le Problême précedent je cherche combien en fourniront deux cartes quelconques d'une même couleur avec une autre carte d'une autre couleur; & enfin par ce même Problême on aura toutes les diverses façons dont peuvent arriver les points que trois cartes d'une même couleur peuvent donner, ainsi qu'il paroît par la Table suivante, qui fait voir conformément aux regles ci-dessus, toutes les manieres dont on peut amener tel ou tel point avec trente cartes, dix carreaux, dix cœurs & dix pics, depuis l'as jusqu'au dix.

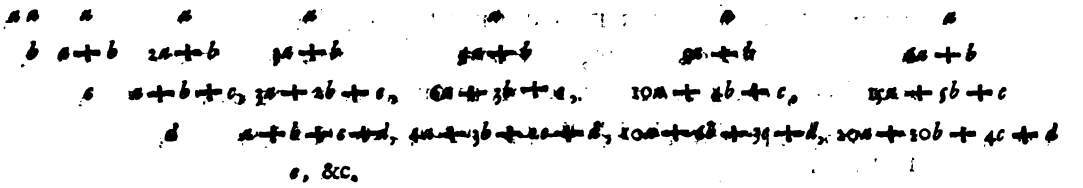
nombres à amener.						Façons d'amener ces points.
3 ou 30	1				= 1	
4 ou 29	3		+ 6 × 1		= 9	
5 ou 28	6		+ 6 × 2		= 18	
6 ou 27	10		+ 6 × 4	+ 3 × 1	= 37	
7 ou 26	15		+ 6 × 6	+ 3 × 1	= 54	
8 ou 25	21		+ 6 × 9	+ 3 × 2	= 81	
9 ou 24	28		+ 6 × 12	+ 3 × 3	= 109	
10 ou 23	36		+ 6 × 16	+ 3 × 4	= 144	
11 ou 22	45		+ 6 × 20	+ 3 × 5	= 180	
12 ou 21	55		+ 6 × 25	+ 3 × 7	= 226	
13 ou 20	66	− 3 × 1	+ 6 × 29	+ 3 × 8	= 261	
14 ou 19	78	− 3 × 3	+ 6 × 32	+ 3 × 9	= 288	
15 ou 18	91	− 3 × 6	+ 6 × 34	+ 3 × 10	= 307	
16 ou 17	150	− 3 × 10	+ 6 × 35	+ 3 × 10	= 315	

Cette methode est un peu longue, mais j'ai de la peine à croire qu'on puisse en trouver une plus courte.

PROPOSITION XVIII.

Trouver la somme d'une suite de nombres figurés quelconque, dont tous les termes soient élevés à un exposant quelconque, soit que ces termes soient pris de suite ou interrompus par des distances égales; ou ce qui est la même chose, trouver la somme d'une suite des nombres qui ayent leur derniere différence constante.

PAR nombres figurés je n'entens pas ici seulement ceux qui composent le triangle arithmetique, *art.* 1, ou ceux de la Table 3, *art.* 8, dans laquelle la lettre *b* est toujours la même, mais plus generalement les nombres exprimés par cette Table.



où les generateurs a, b, c, d, e, &c. peuvent avoir des valeurs quelconques.

SOLUTION I.

54. SOIT p le nombre des termes dont on veut avoir la somme, a le premier terme de la suite dont on cherche la somme, b le second, c le troisiéme, d le quatriéme, e le cinquiéme, f le sixiéme, &c.

Soit aussi $b - a = C$, $c - a + 2C = D$,
$d - a + 3C + 3D = E$, $e - a + 4C + 6D + 4E = F$,
$f - a + 5C + 10D + 10E + 5F = G$, &c. les coefficiens des nombres a, C, D, E, F, G, étant toujours les mêmes que ceux qui se trouvent par la formation des puissances, ou par les bandes perpendiculaires du triangle arithmetique, *art.* 15 soit encore m l'exposant des

termes de la ſuite, n le quantiéme de l'ordre qu'occuperoit la ſuite dont on cherche la ſomme dans la Table ci-deſſus. On aura la ſomme cherchée. $= a^p + \frac{p.p-1}{1.2} C + \frac{p.p-1.p-2}{1.2.3} D + \frac{p.p-1.p-2.p-3}{1.2.3.4} E + \frac{p.p-1.p-2.p-3.p-4}{1.2.3.4.5} E + \frac{p.p-1.p-2.p-3.p-4.p-5}{1.2.3.4.5.6} \times G +$ &c. il faut prendre autant de termes de cette formule, que $m \times \overline{n-1} + 1$ exprime d'unités.

Suppoſé, par exemple, qu'on demande la ſomme des cent premiers nombres triangulaires ou du troiſiéme ordre élevés au quarré, ce qui ſuppoſe dans la Table ci-deſſus $a = b = c = 1$. On a $m = 2, n = 3, m \times \overline{n-1} + 1 = 5$. Les cinq premiers termes de la ſuite ſont $1 + 9 + 36 + 100 + 225$: donc $a = 1, b = 9, c = 36, d = 100, e = 225$. Ces lettres ne déſignent pas ici la même que dans la Table ci-deſſus, & expriment dans la valeur des lettres $C, D, E, F,$ &c. le premier, le deuxiéme, le troiſiéme, le quatriéme terme de la ſuite dont on cherche la ſomme.

Donc $C = b - a = 15$, $D = \overline{c - a + 2C} = 81 - 31 = 50$.

$E = \overline{d - a + 3C + 3D} = 256 - 196 = 60$.

$F = \overline{e - a + 4C + 6D + 4E} = 625 - 601 = 24$.

Ajoutant donc en une ſomme les cinq premiers termes de la formule, & y ſubſtituant pour les lettres C, D, E, F leurs valeurs 15, 50, 60, 24, qui ſont la premiere, deuxiéme, troiſiéme & derniere difference; ſubſtituant encore pour p 100, on trouve 20503333330 pour la valeur cherchée.

Si l'on vouloit avoir une expreſſion algebrique pour ce cas particulier, on trouveroit $\frac{6p^5 + 15p^4 + 10p^3 - p}{30}$, & ce ſeroit une formule pour avoir la ſomme d'un nombre quelconque p de nombres triangulaires élevés au quarré.

On trouveroit de même pour la ſomme des nombres triangulaires élevés au cube, cette formule

$$\frac{252p^7 + 1050p^6 + 2730p^5 + 3150p^4 + 1400p^3 - 8p}{1.2.3.4.5.6.7}$$

Et

Et ſi l'on demande une formule qui donne la ſomme d'une ſuite de nombres pyramidaux élevés au quarré, mais pris de deux en deux. 1^2, 10^2, 35^2, 84^2, 165^2, &c. on aura

$$\frac{1120p^7 + 4480p^6 + 3584p^5 - 2240p^4 - 2800p^3 + 2800pp + 456p}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

Ce Problême a, comme l'on voit, toute l'étendue & toute l'univerſalité poſſible, & ſemble ne rien laiſſer à déſirer ſur cette matiere, qui n'a encore été traitée par perſonne, que je ſçache : j'en avois obmis la démonſtration dans le Journal des Sçavans du mois de Mars 1711. La voici.

DEMONSTRATION.

SOIENT les quantités $a + b + c + d + e + f + g$, &c. dont on veut avoir la ſomme. J'en cherche en la maniere qui ſuit les premieres, deuxiémes, troiſiémes, quatriémes, &c. differences, juſqu'à ce que j'en vienne à une difference qui ſera conſtante, ſi l'on peut avoir la ſomme de la ſuite.

	1. diff.	ſecondes differences.	troiſiémes differences.	quatriémes differences.
a	$b-a$	$c-b-1\times b-a$	$d-c-1\times c-b-1\times c-b-1\times b-a$	$e-d-1\times d-c-1\times d-c-1\times c-b$
b	$c-b$	$d-c-1\times c-b$	$e-d-1\times d-c-1\times d-c+1\times c-b$	$-d-c-1\times c-b-1\times c-b-1\times b-a$
c	$d-c$	$e-d-1\times d-c$	&c.	&c.
d	$e-d$	&c.		
e	&c.			

Et réduiſant ces termes dont l'ordre & la ſuite eſt aiſée à appercevoir, avec les égards qu'il faut avoir aux produits des + & des —, on trouve que les premiers termes des premieres, ſecondes, troiſiémes, &c. differences ſont :

premiere differenee,	$b - a$
ſeconde,	$c - 2b + a$
troiſiéme,	$d - 3c + 3b - a$
quatriéme,	$e - 4d + 6c - 4b + a$
cinquiéme,	$f - 5e + 10d - 10c + 5b - a$
ſixiéme,	$g - 6f + 15e - 20d + 15c - 6b + a$

L'on voit que les coefficiens ſuivent par leur formation le même ordre qu'on a ci-devant obſervé dans la formation des puiſſances, & que les ſignes ſont & doivent toujours être alternativement + & —.

Maintenant ſi l'on nomme la premiere difference cherchée C, la deuxiéme D, la troiſiéme E, la quatriéme F, la cinquiéme G, &c. on tirera en faiſant des égalités.

$$b = a + C$$
$$c = a + 2C + D$$
$$d = a + 3C + 3D + 1E$$
$$e = a + 4C + 6D + 4E + 1F$$
$$f = a + 5C + 10D + 10E + 5F + G$$

D'où il ſuit que pour avoir la ſomme de la ſuite $a + b + c + d + e + f + g$, *&c.* il faut prendre a autant de fois qu'il y a de quantités dont ont cherche la ſomme, c'eſt à dire multiplier a par p. 2°. Qu'il faut multiplier C par la ſomme d'autant de nombres naturels qu'il y a d'unités dans $p - 1$. 3°. Qu'il faut multiplier D par la ſomme d'autant de nombres triangulaires, qu'il y a d'unités dans $p - 2$. 4°. Multiplier E par la ſomme d'autant de nombres pyramidaux qu'il y a d'unités dans $p - 3$, ou ce qui eſt la même choſe, *art.* 4, a par p, C par $\frac{p \cdot p-1}{1.2}$, D par $\frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1.2.3}$, E par $\frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3}{1.2.3.4}$, &c.

Il ne s'agit plus maintenant que de découvrir combien il faut employer de termes de cette ſuite pour avoir la ſomme que l'on cherche, & de faire voir qu'il en faut prendre autant que $m \times n - 1 + 1$ exprime d'unités.

Pour cela il ſuffit d'obſerver que dans les formules des nombres figurés d'un ordre quelconque n, la lettre p qui exprime le quantiéme du nombre figuré, monte juſqu'à une dimenſion exprimée par $n - 1$, & que ces nombres figurés de l'ordre n étant élevés encore à une puiſſance quelconque m, la lettre p aura $m \times n - 1$ pour l'expoſant le plus haut. Or le terme qui a l'expoſant le plus haut s'en va par la premiere difference, & enſuite le terme qui a

pour exposant $m \times n - 2$ par la deuxiéme difference, & ainsi de suite.

Et parconsequent le nombre des termes de la formule qu'il faut employer, étant le même que celui des differences plus le premier, ce nombre est bien exprimé par $\overline{m \times n - 1} + 1$.

AUTRE SOLUTION.

55. TOUTE suite de nombres telle qu'en la décomposant on puisse enfin parvenir à une difference constante, est une certaine bande horizontale de la Table, *art.* 54, dont le quantiéme est toujours égal au nombre des differences plus un ; c'est à dire, par exemple, que si la suite donnée à six differences, cette suite formera la septiéme bande horizontale : cela est évident par la formation des nombres figurés.

Or la valeur des generateurs *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *&c.* de la Table, *art.* 54, étant donnée, on sçait trouver la somme des nombres quelconque d'une bande horizontale quelconque, puisque cette somme par la generation des nombres figurés est toujours exprimée par le nombre qui est à droite dans le rang horizontal inferieur, & par consequent on a la solution de ces deux Problêmes, *étant donné la proprieté d'une suite, c'est à dire la valeur des generateurs* a, b, c, d, e, &c. *Tab.* art. 54, *trouver la somme de cette suite*, aut vice versa, *étant donné autant de termes plus un, que la suite a de differences ; trouver les generateurs ou former le triangle arithmetique auquel cette suite convient.*

Pour résoudre le premier de ces deux Problêmes, soit *p* le nombre des termes de la suite dont on demande la somme, *q* le nombre des differences, on aura cette somme dans le $q + 2$ terme d'une bande perpendiculaire, dont le quantiéme soit $p + q + 1$, & l'on trouvera l'expression de ce terme, en prenant la somme des *a*, celle des *b*, des *c*, &c. en la maniere qu'on l'a enseigné, *art.* 8.

EXEMPLES.

56. SOIT une ſuite de termes exprimée par cette formule algebrique $\frac{2p^4+6p^3+pp}{4}$, qui eſt tirée de celle-ci $\frac{p+2\cdot p+1\cdot p\cdot p-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a+\frac{p+1\cdot p\cdot p-1}{1\cdot 2\cdot 3}b+\frac{p\cdot p-1}{1\cdot 2}c+\frac{p-1}{1}d+e$. dans laquelle $a=54$, $b=-18$, $c=5$, $d=e=4$.

Si l'on ſubſtitue dans l'une ou l'autre de ces deux formules ſucceſſivement pour p, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. on formera cette ſuite,

4 + 49 + 225 + 676 + 1600 + 3249, &c.

On demande une formule qui exprime la ſomme d'un nombre quelconque de termes de cette ſuite.

Cette formule, par l'*art.* 8, eſt $\frac{p+3\cdot p+2\cdot p+1\cdot p\cdot p-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a+\frac{p+2\cdot p+1\cdot p\cdot p-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}b+\frac{p+1\cdot p\cdot p-1}{1\cdot 2\cdot 3}c+\frac{p\cdot p-1}{1\cdot 2}d+\frac{p-1}{1}e+f$.

Et en réduiſant & ſubſtituant pour $a, b, c, d, e,$ &c. leurs valeurs, ſçavoir pour a 54, pour b, — 18, pour c, 5, pour $d=e=f$, 4, on a la formule cherchée $=\frac{27p^5+90p^4+95p^3+30pp-2p}{60}$.

Si l'on demande la ſomme de 10000 premiers termes de la ſuite ci-deſſus 4 + 49 + 225 + &c. on trouvera tout d'un coup, en ſubſtituant dans cette formule pour p, 10000, la ſomme cherchée = 450150015833833333000.

Si l'on demandoit la ſomme d'une ſuite quelconque des termes 4 + 53 + 278 + 954 + 2554 + 5803 + &c. tirés de cette formule $\frac{27p^5+90p^4+95p^3+30pp-2p}{60}$, par la ſuppoſition de p ou = 1, ou = 2, ou = 3, ou = 4, &c. on trouveroit cette ſomme en ſubſtituant dans cette formule $\frac{p+4\cdot p+3\cdot p+2\cdot p+1\cdot p\cdot p-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\times 54+\frac{p+3\cdot p+2\cdot p+1\cdot p\cdot p-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\times -18+\frac{p+2\cdot p+1\cdot p\cdot p-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\times 5+\frac{p+1\cdot p\cdot p-1}{1\cdot 2\cdot 3}\times 4+\frac{p\cdot p-1}{1\cdot 2}\times 4+\frac{p-1}{1}\times 4+4$ pour p le nombre des termes dont on veut avoir la ſomme; & generalement l'expoſant de la plus haute dimenſion dans la formule donnée qui exprime tous les termes dont on veut avoir la ſomme étant q, on aura la ſomme cherchée dans celle qui ſuit.

Digitized by Google

$$\frac{p+q-1.p+q-2.p+q-3.p+q-4.p+q-5\,\&c.}{1.2.3.4.5.\,\&c.}\times a+\frac{p+q-2.p+q-3.p+q-4.p+q-5\,\&c.}{1.2.3.4.\,\&c.}b\times$$
$$+\frac{p+q-3.p+q-4.p+q-5\,\&c.}{1.2.3\,\&c.}c+\frac{p+q-4.p+q-5\,\&c.}{1.2\,\&c.}d+\frac{p+q-5\,\&c.}{1\,\&c.}e+\frac{\&c.}{\&c.}f.$$

En obſervant que le premier terme de cette formule doit avoir autant de produits qu'il y a d'unités dans $q+1$.

57. A l'égard du deuxiéme Problême, *étant donné autant de premiers termes d'une ſuite que la ſuite a de differences, trouver les generateurs, ou former le triangle arithmetique auquel cette ſuite convient.* J'en ferai entendre la ſolution en me ſervant encore de l'exemple précedent.

Soit la ſuite $4+49+225+676+1600$, &c. dont la proprieté eſt renfermée dans cette expreſſion algebrique $\frac{9p^4+6p^3+p^2}{4}$. Je ſuppoſe $a+b+c+d+e=4$, ou (à cauſe de $e=d=4$) $a+b+c+8=49$, $5a+4b+3c+12=225$, $15a+10b+6c+16=676$, & de ces trois égalités je tire par les regles ordinaires $c=5$, $b=-18$, $a=54$.

Ces generateurs étant déterminés, on formera en la maniere ordinaire le triangle arithmetique qui ſuit.

54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54
	−18	36	90	144	198	252	306	360	414	468
		54	126	234	378	576	828	1134	1494	1908
			72	108	144	198	252	306	360	414
				36	72	54	54	54	54	54
					36	18	0	0	0	0
						4	45	176	451	924
							41	131	275	473
								90	144	198
									54	54
										0
							4	45	176	451
								41	131	275
									90	144
										54
										0
								4	45	176
									41	131
										90
										54
										0
									4	45
										41
										90
										54
										0
										4

COROLLAIRE I.

58. TOUTE ſuite arithmetique ou litterale compoſée de produits qui ſeront dans une progreſſion arithmetique, peut être ſommée par les methodes qui précedent, & ſouvent d'une maniere abregée, comme il paroîtra par les deux exemples ſuivans. 1°. Soit à trouver la ſomme de cette ſuite 1. 2. 3. 4 + 3. 4. 5. 6 + 5. 6. 7. 8 + 7. 8. 9. 10 + 9. 10. 11. 12 + &c. on la trouvera après avoir diviſé chaque terme par 24 en la décompoſant en cette maniere.

1
1 + 1 . 14
1 + 4 × 14 + 1 . 13
1 + 10 × 14 + 5 . 13 + 1 . 4
1 + 20 . 14 + 15 . 13 + 4 . 4 + 1 . 3
1 + 35 . 14 + 35 . 13 + 10 . 4 + 5 . 3

Ou plus régulierement en cette ſorte.

1
1 + 1 . 14
1 + 2 . 14 + 1 . 41
1 + 3 . 14 + 3 . 41 + 1 . 44
1 + 4 . 14 + 6 . 41 + 4 . 44 + 1 . 16
1 + 5 . 14 + 10 . 41 + 10 . 44 + 5 . 16

Et de même ſi l'on vouloit avoir la ſomme de cette ſuite $p \cdot p - 1 \cdot p - 2 + p - 3 \cdot p - 4 \cdot p - 5 + p - 6 \cdot p - 7 \cdot p - 8 + p - 9 \cdot p - 10 \cdot p - 11 +$ &c. On pourroit la diſpoſer de la maniere ſuivante.

Digitized by Google

$p^3 - 3pp + 2p$

$p^3 - 12pp + 47p - 60$

$p^3 - 21pp + 146p - 336$

$p^3 - 30pp + 299p - 990$

$p^3 - 39pp + 506p - 2184$

&c.

& trouver la ſomme des coefficiens des p^3, des p^2, des p^1, des p^0, en les décompoſant comme dans l'exemple précedent.

COROLLAIRE II.

59. ON ſçait depuis long-temps que les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. élevés à un expoſant qui ſoit l'unité, ont pour difference conſtante l'unité; que ces nombres élevés au quarré ont pour difference conſtante 1×2. Que ces nombres élevés au cube ont pour difference conſtante $1.2.3 = 6$. M. de Lagny a obſervé plus generalement dans les Memoires de l'Académie de l'année 1705, que les nombres en progreſſion arithmetique quelconque a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, &c. élevés à la puiſſance p, ont pour difference conſtante $1.2.3.4.\ldots.p \times b$. J'ai cherché une regle abregée pour trouver cette derniere difference indépendamment des autres, pour le cas de toutes les diverſes ſuites de la Table 3, *art.* 8, en ſuppoſant chaque terme de la ſuite élevé à un expoſant quelconque. La voici.

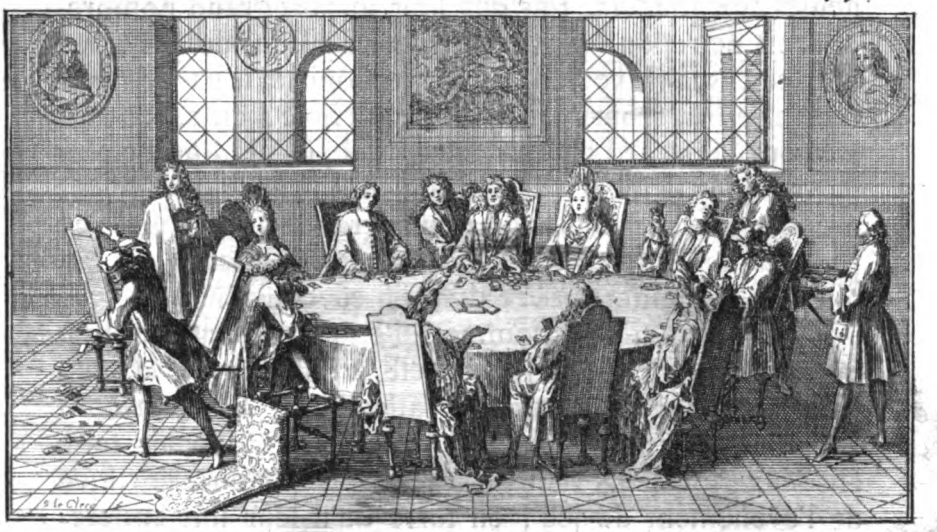
Soit d le nombre des differences, q le quantiéme de l'ordre figuré moins 1, p l'expoſant des termes de la ſuite donnée. La difference conſtante ſera $\frac{\overline{1.2.3.4.5.6.\ldots.d \times a}^{p}}{\overline{1.2.3.\ldots.q}^{p}}$.

Par exemple, ſi l'on demande la difference conſtante des termes du quatriéme ordre élevés au cube. Cette difference ſera $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9\,a^3}{\overline{1.2.3}^3} = 1680$, lorſque $a = 1$.

REMARQUE.

60. LE Problême general que nous avons ici reſolu, peut avoir des uſages pour la quadrature des courbes, & pour la réſolution des égalités. Comme ce n'eſt point ici la place de s'étendre à ces matieres, il ſuffit d'en avertir.

Digitized by Google



PROBLÈMES
SUR
LES JEUX DE HAZARD.

SECONDE PARTIE.

DEFINITION I.

DANS les Jeux, les Gageures & les Loteries, l'argent que risque un Joueur est censé ne lui plus appartenir, car il en a quitté la proprieté; mais en revanche il acquiert un certain droit sur le fond du Jeu, c'est à dire, sur l'argent de la gageure.

Lorsque les conditions du jeu sont également avantageuses aux Joueurs, comme dans le Passe-dix, & un petit nombre d'autres Jeux, ce droit ou l'esperance qu'il fournit est équivalent à la mise de chacun des Joueurs. Mais dans les Jeux, dont les conditions sont inégalement avanta-

Digitized by Google

geuſes aux Joueurs, tels que ſont le plus grand nombre, ce droit ne répond plus exactement à la miſe des Joueurs ; & en ce cas, s'ils veulent ſe retirer & quitter la partie, pour rentrer en la proprieté de quelque choſe, en renonçant à ce que le hazard leur auroit donné, ils ne doivent plus partager également l'argent du jeu, mais ils en doivent prendre une partie plus ou moins grande, ſelon qu'il y a plus ou moins de probabilité que les uns ou les autres gagneront la ſomme entiere dont on eſt convenu.

Cela poſé, ſi l'on nomme a l'argent du jeu, je dirai que le *ſort* de chaque Joueur eſt le juſte degré d'eſperance qu'il a d'obtenir a ; & j'appellerai, *parti*, la convention ou le reglement que des Joueurs doivent faire entr'eux, lorſqu'ils veulent ſe retirer ſans courir le riſque de l'évenement du jeu ; en ſorte qu'il leur ſoit entierement égal, ou de continuer la partie, ou de la rompre.

Ainſi, en ſuppoſant que deux Joueurs ſoient convenus de hazarder chacun une demie piſtole à croix ou pile, ſi l'on nomme la piſtole a, je dirai que le ſort de chacun des Joueurs eſt $\frac{1}{2}a$; & que ſi changeant d'avis ils veulent quitter le jeu, le parti qu'ils ſe doivent faire l'un à l'autre, c'eſt de retirer chacun leur demie piſtole.

DEFINITION II.

Si deux Joueurs veulent jouer ſans avantage ni deſavantage à un jeu dont les conditions ſoient inégales, il faut que celui à qui elles ſont favorables, mette au Jeu plus que l'autre ; & pour parler avec préciſion, il faut que ſa miſe ſoit à celle de l'autre Joueur dans la même raiſon que les divers degrés d'eſperance qu'ils ont de gagner. S'ils jouent but à but, il eſt clair que l'avantage eſt pour l'un de ces Joueurs, & qu'il faut entendre par ce mot, *avantage*, l'excès de ce qu'il attend du hazard ſur ce qu'il met au Jeu. Par exemple, ſi l'on ſuppoſe que Paul pariant but à but un écu contre Pierre, d'amener un doublet du premier coup avec deux dés, on ait trouvé pour le ſort de Pierre $A + \frac{2}{3}A$, A déſignant un écu, cette fraction $\frac{2}{3}A$

Digitized by Google

qui eſt l'excès de l'eſperance ou du ſort de Pierre ſur ſa miſe qui eſt A, exprimera ſon avantage, ou ce que Paul devroit donner à Pierre, ſi après avoir fait cette convention avec lui, il vouloit rompre la gageure; puiſqu'en vertu de la condition de cette gageure, Pierre n'a pas moins de droit ſur les deux tiers de l'écu de Paul, qu'il en a ſur l'écu qu'il a mis au jeu.

Car il faut remarquer que quoiqu'il ſoit très incertain ſi Paul gagnera ou ne gagnera pas, & qu'il n'y ait point de contradiction qu'il gagne mille fois de ſuite, il eſt neanmoins très certain que pour acheter le droit de Pierre, il faudroit lui donner quarante ſols; & que ſi Paul s'obligeoit de jouer trois coups aux conditions précedentes, Pierre pourroit auſſi-bien compter ſur deux écus de profit comme ſur deux écus que Paul lui auroit donné en pur don, à condition qu'il voulût jouer trois fois de ſuite un écu contre lui à croix ou pile.

Quoique ces termes *avantage* & *deſavantage* ſemblent être clairs, parcequ'ils ſont communs & familiers, j'ai cru qu'il étoit à propos, pour ôter toute équivoque, d'expliquer de quelle maniere je les entends; il m'a paru que preſque tout le monde y attachoit de fauſſes idées.

PROPOSITION I.

LEMME.

Le nombre des hazards qui peuvent faire gagner Pierre, & lui donner A, *étant* m; *& le nombre des hazards qui peuvent le faire perdre ou lui donner zero, étant* n, *je dis que s'il n'y a que ces deux ſortes de hazards, & qu'on entende par* A *l'argent du jeu, on aura le ſort de Pierre* $= \frac{mA+n\times 0}{m+n}$.

61. POUR le prouver, ſoit x le ſort de Pierre, y celui de l'autre Joueur qu'on nommera Paul, on aura $x+y=A$. On aura auſſi $x.y::m.n$, car le ſort de chacun de ces Joueurs eſt comme leur eſperance, & cette eſperance eſt proportionnée aux facilités ou aux moyens qu'ils ont de

gagner, c'eſt à dire au nombre de coups qui leur donneront A. De ces deux équations $y = \frac{nx}{m}$ & $x + y = A$, on tirera $x = \frac{Am}{m+n}$ C. Q. f. D.

Ainſi ſuppoſant, par exemple, que Pierre parie contre Paul d'amener un 6 du premier coup avec un dé, ſon ſort ſera $\frac{1 \times A + 5 \times 0}{1+5} = \frac{1}{6}A$, & le ſort de Paul ſera $\frac{5}{6}A$: D'où il ſuit que pour parier également, Pierre devroit mettre un écu au jeu, contre Paul cinq écus, puiſque dans une gageure égale les miſes de deux Joueurs doivent avoir le même rapport que les divers degrés de probabilité ou d'eſperance que chacun des Joueurs a de gagner.

J'aurois pu énoncer ce Lemme plus generalement, la démonſtration eût été la même; mais j'ai apprehendé de rendre obſcure une choſe qui me paroît de la derniere évidence, ſçavoir que le ſort de Pierre eſt le rapport de tous les coups qui lui ſont favorables au nombre de tous les coups poſſibles; ou, ſi l'on veut, que ſon ſort eſt le rapport du degré d'eſperance ou de facilité qu'il a de gagner, au riſque qu'il court de perdre.

REMARQUE.

62. DANS toutes ſortes de Jeux generalement pour avoir le ſort d'un Joueur, il faut diviſer tout ce que chacun des differens hazards lui peut donner de gain ou de perte par la ſomme de tous les hazards poſſibles, l'expoſant de cette diviſion exprimera ſon ſort. Cette regle eſt évidente, mais l'application en eſt ſouvent très difficile, & toujours d'autant plus que les conditions du jeu rendent les hazards favorables & contraires, ou plus compoſés, ou plus difficiles à découvrir.

Comme ces conditions peuvent varier en une infinité de façons, on ne doit pas s'attendre à trouver ici une methode generale qui puiſſe ſervir à réſoudre tous les divers Problêmes qu'on peut imaginer; mais nous pouvons aſſurer que la plus grande partie des Problêmes, même des plus difficiles, pourra être réſolue par les Theorêmes que

Digitized by Google

l'on a donné dans le précedent Traité, & qu'il y en a très peu qui ne puiſſe ſe transformer en quelque Problême de Combinaiſons ſur les cartes ou les dés dépendant de ceux que l'on a réſolus, ce qui eſt fort à remarquer. Les Problêmes qui ne peuvent ſe réſoudre par les méthodes des Combinaiſons, peuvent l'être ordinairemenr par l'Analyſe. On employera dans la ſuite l'une ou l'autre de ces methodes, & quelquefois toutes deux enſemble.

PROBLÊME
SUR LE PHARAON.

Déterminer generalement l'avantage du Banquier par rapport aux Pontes.

63. Les principales regles de ce Jeu ſont, 1°, que le Banquier taille avec un Jeu entier compoſé de cinquante-deux cartes. 2°. Que le Banquier tire toutes les cartes de ſuite, mettant les unes à ſa droite, & les autres à ſa gauche, en commençant par la droite. 3°. Qu'à chaque main, ou à chaque taille, c'eſt à dire de deux en deux cartes, le Ponte a la liberté de prendre une ou pluſieurs cartes, & de hazarder deſſus une certaine ſomme. 4°. Que le Banquier gagne la miſe du Ponte, lorſque la carte du Ponte arrive à la main droite dans un rang impair, & qu'il perd, lorſque la carte du Ponte tombe à la main gauche & dans un rang pair. 5°. Que le Banquier prend la moitié de ce que le Ponte a mis ſur ſa carte, lorſque dans une même taille la carte du Ponte vient deux fois, ce qui fait une partie de l'avantage du Banquier. Et enfin, que la derniere carte qui devroit être pour le Ponte, n'eſt ni pour lui ni pour le Banquier, ce qui eſt encore un avantage pour le Banquier.

Il eſt évident que les conditions de ce Jeu ſont avantageuſes au Banquier. La difficulté eſt de déterminer cet avantage, car il change, & ſelon le nombre des cartes que

Digitized by Google

tient le Banquier, & auſſi ſelon que la carte du Ponte ou n'a point paſſé, ou a paſſé une ou pluſieurs fois.

1°. La carte du Ponte n'étant qu'une fois dans le talon, la difference du ſort du Banquier & du Ponte eſt fondée ſur ce que entre tous les divers arrangemens poſſibles des cartes du Banquier, il y en a un plus grand nombre qui le font gagner, qu'il n'y en a qui le font perdre, la derniere carte étant conſiderée comme nulle ; & dans ce cas il eſt aiſé de s'appercevoir que l'avantage du Banquier augmente à meſure que le nombre des cartes du Banquier diminue.

2°. La carte du Ponte étant deux fois dans le talon, l'avantage du Banquier ſe tire de la probabilité qu'il y a, que la carte du Ponte viendra deux fois dans une même taille: car alors le Banquier gagne la moitié de la miſe du Ponte, excepté le ſeul cas où la carte du Ponte viendroit en doublet dans la derniere taille, ce qui donneroit au Banquier la miſe entiere du Ponte.

3°. La carte du Ponte étant ou trois ou quatre fois dans la main du Banquier, l'avantage du Banquier eſt fondée ſur la poſſibilité qu'il y a, que la carte du Ponte ſe trouve deux fois dans une même taille, avant qu'elle ſoit venue en pur gain ou en pure perte pour le Banquier. Or cette poſſibilité augmente ou diminue, & ſelon qu'il y a plus ou moins de cartes dans la main du Banquier, & ſelon que la carte du Ponte s'y trouve plus ou moins de fois. De tout cela il ſuit que pour connoître l'avantage du Banquier par rapport aux Pontes dans toutes les differentes circonſtances de ce Jeu, il faut découvrir dans tous les differens arrangemens poſſibles des cartes que tient le Banquier, & dans la ſuppoſition que la carte du Ponte s'y trouve, ou une, ou deux, ou trois, ou quatre fois, quels ſont ceux qui le font entierement gagner, quels ſont ceux qui lui donnent la moitié de la miſe du Ponte, quels ſont ceux qui le font perdre, & enfin quels ſont les arrangemens qui ne font ni perdre ni gagner.

Pour reſoudre ce Problême, il eſt à propos de commencer par les cas les plus ſimples, & enſuite paſſant à des cas plus compoſés, il faut chercher quelque loi uniforme, &

Digitized by Google

quelque analogie qui puiſſe ſervir à démêler dans tous les cas poſſibles, les arrangemens qui ſont avantageux au Banquier, ceux qui lui ſont indifferens, & enfin ceux qui lui ſont défavorables.

Cette voye n'eſt pas toujours la plus courte ; mais comme on l'employe ſouvent avec ſuccès, & qu'elle ſe préſente la premiere à l'eſprit, je la ſuivrai ici en détail pour la rendre familiere au Lecteur : il pourra cependant la paſſer ſi elle n'eſt pas de ſon goût. Je donnerai enſuite une autre methode plus recherchée, plus analytique, & d'un uſage infiniment plus étendu.

PREMIERE METHODE.

PREMIER CAS.

On ſuppoſe qu'il reſte quatre cartes entre les mains du Banquier, & que celle du Ponte y eſt un certain nombre de fois. Il s'agit de déterminer quel eſt le ſort du Banquier & celui du Ponte : Par exemple, s'il y a un écu ſur la carte du Ponte, on demande quelle partie de l'écu le Ponte devroit donner au Banquier pour acheter le droit de ſe retirer, & de ne point courir le riſque du jeu ; ou, ce qui revient au même, quel eſt dans ce cas le deſavantage du Ponte, en jouant but à but contre le Banquier.

64. SI l'on veut exprimer les quatre cartes du Banquier par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, on aura tous les arrangemens differens de quatre cartes repréſentés dans la Table ſuivante.

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*

1°. Si l'on ſuppoſe que la carte du Ponte déſignée par

la lettre *a*, soit une fois dans les quatre cartes du Banquier, & que le Ponte ait mis sur sa carte une somme d'argent exprimée par *A*, on remarquera en considerant la Table précedente, qu'il y a douze arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier, six qui le font perdre ou lui donnent 0, & six qui lui sont indifferens.

Ceux qui le font gagner sont :

abcd	*bcad*
abdc	*bdac*
acbd	*cbad*
acdb	*cdab*
adbc	*dbac*
adcb	*dcab*

Ceux qui le font perdre sont :

bacd	*cabd*	*dabc*
badc	*cadb*	*dacb*

Ainsi exprimant le sort cherché par la lettre *s*, on aura

$$s = \frac{12\times 2A + 6\times 0 + 6\times A}{24} = \frac{3}{4}A = A + \frac{1}{4}A.$$

2°. Si l'on suppose que la carte du Ponte se trouve deux fois entre les quatre cartes du Banquier, & que les deux lettres *a* & *b* expriment celle du Ponte, on trouvera que des vingt-quatre arrangemens de la Table, il y en a douze qui donnent $2A$ au Banquier :

acbd	*bcad*	*cdba*
acdb	*bcda*	*cdab*
adbc	*bdac*	*dcba*
adcb	*bdca*	*dcab*

Quatre qui lui donnent $\frac{1}{2}A$, c'est à dire, son écu & la moitié de celui du Ponte :

abcd	*bacd*
abdc	*badc*

Huit

Huit qui le font perdre :

cabd	*dabc*
cadb	*dacb*
cbad	*dbac*
cbda	*dbca*

Ainſi l'on aura $s = \frac{12 \times 2A + 4 \times \frac{5}{2}A + 8 \times 0}{24} = \frac{5}{4}A = A + \frac{1}{4}A$.

3°. Si l'on ſuppoſe que la carte du Ponte ſe trouve trois fois entre les quatre cartes du Banquier, & que les trois lettres *a*, *b*, *c*, expriment celle du Ponte, on trouvera encore le ſort du Banquier $= A + \frac{1}{4}A$; car il y a douze arrangemens qui lui donnent $\frac{3}{2}A$.

abcd	*bacd*	*cabd*
abdc	*badc*	*cadb*
acbd	*bcad*	*cbad*
acdb	*bcda*	*cbda*

Six qui lui donnent $2A$:

adbc	*bdac*	*cdab*
adcb	*bdca*	*cdba*

Six qui le font perdre :

dabc	*dbac*	*dcba*
dacb	*dbca*	*dcab*

On aura donc $s = \frac{12 \times \frac{3}{2}A + 6 \times 2A + 6 \times 0}{24} = A + \frac{1}{4}A$.

4°. Enfin il eſt évident que ſi la carte du Ponte ſe trouvoit quatre fois dans les quatre cartes du Banquier, le ſort du Banquier ſeroit $= A + \frac{1}{2}A$.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

65. IL paroît par la ſolution de ce premier cas, que ſi la miſe du Ponte eſt un écu, il doit donner quinze ſols qui en eſt le quart au Banquier, pour acheter le droit de ſe retirer, ſoit que ſa carte ſoit une fois, ou deux fois, ou trois fois dans les quatre cartes du Banquier.

COROLLAIRE II.

66. CE ſeroit un travail infini de chercher les autres cas de la maniere qu'on a réſolu celui-ci en cherchant dans des Tables les arrangemens favorables & contraires ; car ce nombre devient immenſe dans un plus grand nombre de cartes ; auſſi n'ai-je mis la ſolution précedente, que pour me faire plus facilement entendre dans la ſuite.

Pour réſoudre le cas précedent d'une maniere methodique, & pour en découvrir les hazards par la vûe de l'eſprit, il faut remarquer,

Que ſi la carte du Ponte étoit une fois dans deux cartes, le ſort du Banquier ſeroit $\frac{1}{2}A$: Car des deux arrangemens poſſibles de deux lettres, il y en a un qui donne $2A$, & un qui lui donne A ; & que la carte du Ponte y étant plus d'une fois, le ſort du Banquier ſeroit $2A$, ce qui eſt évident.

Il faut obſerver enſuite que la carte du Ponte étant une fois dans quatre cartes, ſi l'on place les vingt-quatre arrangemens poſſibles de quatre lettres ſur quatre colonnes, dont la premiere commence toute par a, la ſeconde par b, la troiſiéme par c, la quatriéme par d, la premiere colonne donnera $2A$ au Banquier dans tous ſes arrangemens.

Et que partageant chacune des trois autres colonnes en trois colonnes de deux arrangemens, l'une de ces trois dernieres, ſçavoir celle où a occupe la ſeconde place, donnera deux fois zero au Banquier, & chacune des deux autres dernieres donnera au Banquier le même ſort qu'il auroit dans

Digitized by Google

le cas que le Banquier tenant deux cartes, celle du Ponte s'y trouvât une fois, c'eſt à dire $\frac{1}{2}A$, ce qui donne le ſort du Banquier, comme ci-devant $= \frac{1\times 6\times 2A + 3\times 2\times 2\times \frac{1}{2}A}{24}$ $= \frac{30}{24}A = A + \frac{1}{4}A$.

On obſervera de même que la carte du Ponte exprimée par les lettres *a* & *b* étant deux fois dans quatre cartes, ſi l'on conçoit les vingt-quatre arrangemens differens que les quatre cartes peuvent recevoir, poſés ſur quatre colonnes, comme ci-devant, les deux colonnes qui commencent par les lettres *a* & *b*, contiendront chacune quatre arrangemens qui donneront $2A$ au Banquier, & deux arrangemens qui lui donneront $\frac{1}{2}A$: Car dans l'une il y a deux arrangemens où *a* eſt ſuivie de *b*, & dans l'autre il y a deux arrangemens où *b* eſt ſuivie de *a*; & partageant chacune des deux autres colonnes de ſix arrangemens en trois autres de deux arrangemens, il y en aura deux de ces trois qui donneront deux fois zero au Banquier, *a* & *b* y occupant la ſeconde place, & la troiſiéme donnera au Banquier le même ſort qu'il auroit, ſi la carte du Ponte ſe trouvoit deux fois dans deux cartes; & par conſequent on auroit encore, ſelon cette idée, le ſort du Banquier, $= \frac{2\times 4\times 2A + 2\times \frac{1}{2}A + 2\times 2\times 2A}{24} = A + \frac{1}{4}A$.

On remarquera encore que la carte du Ponte exprimée par les lettres *a*, *b*, *c*, étant trois fois dans quatre cartes, les trois colonnes qui commencent par les lettres *a*, *b*, *c*, contiendront chacune deux arrangemens qui donneront $2A$ au Banquier, & quatre arrangemens qui lui donneront $\frac{1}{2}A$, deux quelconques des trois lettres *a*, *b*, *c*, étant de ſuite, & que partageant la derniere colonne qui commence par *d* en trois colonnes de deux arrangemens, chacune des trois donnera deux fois zero au Banquier, en ſorte que ſon ſort ſera encore $\frac{3\times 2\times 2A + 4\times \frac{1}{2}A + 1\times 0}{24}$ $= A + \frac{1}{4}A$.

Enfin il eſt évident que la carte du Ponte exprimée par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, étant quatre fois dans les quatre car-

tes, les quatre colonnes qui commencent par les lettres a, b, c, d, contiendront chacune ſix arrangemens, qui donneront au Banquier $\frac{1}{2}A$, puiſque tous ces differens arrangemens produiront neceſſairement un doublet; doù il ſuit que le ſort du Banquier ſera $A + \frac{1}{2}A$.

Tout cela eſt fondé ſur l'ordre des arrangemens, & s'éclaircira par l'application que j'en ferai aux cas ſuivans.

COROLLAIRE III.

67. QUELQUE nombre de cartes que tienne le Banquier, ſi celle du Ponte ne s'y trouve qu'une fois, l'avantage du Banquier ſera exprimé par une fraction qui aura l'unité pour numerateur, & pour dénominateur le nombre des cartes que tient le Banquier: car ſix cartes, par exemple, pouvant être rangées en 720 façons differentes, il eſt clair que ſi l'on conçoit tous ces arrangemens differens poſés ſur ſix colonnes de cent-vingt arrangemens chacune, en ſorte que dans la premiere la lettre a ſoit par-tout à la premiere place, que dans la ſeconde elle ſoit par-tout à la deuxiéme place, que dans la troiſiéme elle ſoit par-tout à la troiſiéme place, & ainſi de ſuite, la premiere, la troiſiéme & la cinquiéme colonnes donneront $2A$ au Banquier dans tous leurs arrangemens; la ſeconde & la quatriéme lui donneront zero, & la ſixiéme lui donnera A. On auroit donc $s = \frac{3 \times 120 \times 2A + 2 \times 120 \times 0 + 1 \times 120 \times A}{720}$ $= \frac{840}{720}A = A + \frac{1}{6}A$.

Et generalement, ſi l'on nomme p le nombre des cartes du Banquier; m le nombre de tous les arrangemens poſſibles de ces cartes, on aura toujours le ſort du Banquier exprimé par cette formule $s = \frac{\frac{1}{2}p \times \frac{m}{p} \times 2A + \frac{m}{p} \times A}{m}$ $= A + \frac{A}{p}$.

Digitized by Google

SECOND CAS.

L'on ſuppoſe que le Banquier tient ſix cartes, & que celle du Ponte y eſt un certain nombre de fois. On demande quel eſt le ſort du Banquier dans toutes les variations de ce ſecond cas.

68. SOIT ſuppoſé que la carte du Ponte ſe trouve deux fois dans les ſix cartes.

Si ces ſix cartes ſont repréſentées par les ſix lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, en ſorte que deux quelconques, par exemple, *a* & *g* expriment celle du Ponte.

On remarquera, 1°, qu'on peut mettre les ſept cens vingt arrangemens differens que ſix cartes peuvent recevoir ſur ſix colonnes, dont chacune ſera compoſée de ſix vingt rangs perpendiculaires; en ſorte que la premiere colonne commence toute par la lettre *a*, la ſeconde par la lettre *b*, la troiſiéme par la lettre *c*, & ainſi de ſuite.

2°. Que les deux colonnes qui commencent par *a* & par *g*, ont chacune quatre-vingt-ſeize rangs perpendiculaires, qui donnent au Banquier 2*A*, & vingt-quatre qui lui donnent $\frac{1}{2}A$: car chaque rang de ces deux colonnes donne 2*A* au Banquier, à l'exception de ceux où *a* eſt ſuivie de *g* dans la premiere, & où *g* eſt ſuivie de *a* dans la derniere. Or cinq lettres pouvant recevoir 120 differens arrangemens, & chacune ſe trouvant neceſſairement un égal nombre de fois aprés *a* dans la premiere colonne, & après *g* dans la derniere, il eſt évident qu'il faut diviſer 120 par 5, pour avoir tous les doublets dans chacune des deux colonnes qui commencent ou par *a*, ou par *g*. Cette remarque eſt importante pour la ſolution de ce Problême, & il faut s'en ſouvenir dans la ſuite.

La plus grande difficulté, c'eſt de découvrir ce que donnent au Banquier les quatre autres colonnes. Pour le démêler, il faut remarquer d'abord que chacune de ces quatre colonnes donne un ſort égal au Banquier (ce qui eſt évident,) & qu'ainſi il ſuffit d'en examiner une. Soit

Digitized by Google

la colonne qui commence par *b*, celle que l'on veut examiner ; & pour plus de facilité, je la partage en cinq colonnes de vingt-quatre arrangemens chacune.

1	2	3	4	5
bacdfg	*bcadfg*	*bdacfg*	*bfacdg*	*bgacdf*
bacdgf	*bcadgf*	*bdacgf*	*bfacgd*	*bgacfd*
bacfdg	*bcafdg*	*bdafcg*	*bfadcg*	*bgadcf*
bacfgd	*bcafgd*	*bdafgc*	*bfadgc*	*bgadfc*
bacgdf	*bcagfd*	*bdagcf*	*bfagcd*	*bgafcd*
bacgfd	*bcagdf*	*bdagfc*	*bfagdc*	*bgafdc*
badcfg	*bcdafg*	*bdcafg*	*bfcadg*	*bgcadf*
badcgf	*bcdagf*	*bdcagf*	*bfcagd*	*bgcafd*
badfcg	*bcdfag*	*bdcfag*	*bfcdag*	*bgcdaf*
badfgc	*bcdfga*	*bdcfga*	*bfcdga*	*bgcdfa*
badgfc	*bcdgaf*	*bdcgaf*	*bfcgad*	*bgcfad*
badgcf	*bcdgfa*	*bdcgfa*	*bfcgda*	*bgcfda*
bafcdg	*bcfadg*	*bdfacg*	*bfdacg*	*bgdacf*
bafcgd	*bcfagd*	*bdfagc*	*bfdagc*	*bgdafc*
bafdcg	*bcfdag*	*bdfcag*	*bfdcag*	*bgdcaf*
bafdgc	*bcfdga*	*bdfcga*	*bfdcga*	*bgdcfa*
bafgdc	*bcfgad*	*bdfgac*	*bfdgac*	*bgdfac*
bafgcd	*bcfgda*	*bdfgca*	*bfdgca*	*bgdfca*
bagcdf	*bcgadf*	*bdgacf*	*bfgacd*	*bgfacd*
bagcfd	*bcgafd*	*bdgafc*	*bfgadc*	*bgfadc*
bagdcf	*bcgdaf*	*bdgcaf*	*bfgcad*	*bgfcad*
bagdfc	*bcgdfa*	*bdgcfa*	*bfgcda*	*bgfcda*
bagfcd	*bcgfad*	*bdgfac*	*bfgdac*	*bgfdac*
bagfdc	*bcgfda*	*bdgfca*	*bfgdca*	*bgfdca*

Il eſt aiſé de voir, en conſultant cette Table, que la premiere & la cinquiéme colonnes donnent zero au Banquier, puiſque dans la premiere la lettre *a*, & dans la cinquiéme la lettre *g* y tiennent la ſeconde place, & que chacune des trois autres colonnes contient douze arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier, huit qui lui donnent zero, & quatre qui lui donnent $\frac{3}{2}A$, c'eſt à dire, que chacune de ces trois colonnes donne les mêmes hazards qu'on a trouvés pour le Banquier dans le cas précedent, lorſqu'on a ſuppoſé qu'il tenoit quatre cartes, parmi leſquelles celle

Digitized by Google

du Ponte ſe trouvoit deux fois, dont la raiſon eſt que les deux premieres lettres de la ſeconde, troiſiéme & quatriéme colonne de la Table ci-deſſus n'étant point celle du Ponte, il reſte quatre lettres, parmi leſquelles celle qui qui exprime la carte du Ponte ſe trouve deux fois: ce qui ſe réduit manifeſtement à l'article ſecond du cas précedent, où la carte du Ponte ſe trouve deux fois dans quatre cartes.

Ainſi la colonne qui commence par la lettre *b* donnera au Banquier $2 \times 24 \times 0 + 3 \times 8 \times 0 + 12 \times 2A + 4 \times \frac{3}{2}A = 90A$. Or les colonnes de 120 arrangemens qui commencent par *c*, par *d*, & par *f*, donnent la même valeur, & par conſequent pour avoir tous les coups favorables que donnent les quatre colonnes qui ne commencent ni par *a*, ni par *g*, il faut multiplier $90A$ par 4, ce qui fait $360A$; à quoi ajoutant $2 \times 96 \times 2A + 24 \times \frac{3}{2}A = 456A$ pour les coups favorables que donnent les colonnes qui commencent par *a* & par *g*, on aura $\frac{360A + 456A}{720} = \frac{816}{720}A = A + \frac{2}{15}A$ pour le ſort du Banquer dans le cas propoſé.

COROLLAIRE.

69. QUELQUE nombre de cartes que tienne le Banquier, ſi celle du Ponte s'y rencontre deux fois, pour trouver le ſort du Banquier, il faut concevoir tous les arrangemens poſſibles des cartes qu'il tient poſés ſur autant de colonnes qu'il a de cartes; & remarquer enſuite que les deux colonnes qui commencent par les lettres qui expriment la carte du Ponte, donnent chacune $2A$ au Banquier, à l'exception des rangs, où une des lettres qui exprime la carte du Ponte eſt ſuivie de l'autre, leſquels arrangemens donnent $\frac{3}{2}A$.

Pour trouver combien il y a de ces rangs dans chacune des deux colonnes, il faut diviſer tous les arrangemens qui les compoſent par le nombre des cartes moins un; l'expoſant de cette diviſion exprimera le nombre des ar-

Digitized by Google

rangemens qui donnent $\frac{1}{2}A$ dans chacune de ces deux colonnes. Pour déterminer ce que donnent les autres colonnes, on les concevra chacune partagées en autant de colonnes moins une qu'il y a de cartes ; & obſervant un arrangement pareil à celui des deux Tables précedentes, on trouvera qu'il y a toujours deux de ces dernieres colonnes qui donnent zero au Banquier, les deux lettres qui expriment la carte du Ponte y occupant la ſeconde place ; & que chacune des autres égales à celle-ci donnera au Banquier le même ſort qu'il avoit dans le cas précedent, c'eſt à dire dans le cas où le nombre des cartes du Banquier étant moindre de deux, celle du Ponte y étoit deux fois.

C'eſt dans les Remarques de ce Corollaire que conſiſte la ſolution du Problême pour le cas où la carte du Ponte ſe trouve deux fois parmi les cartes du Banquier. J'aurois eu de la peine à bien faire entendre cette methode, ſans en faire l'application à des cas particuliers, & ſans me ſervir de la Table qui ſe trouve, *art. 68*.

GENERALEMENT.

70. QUELQUE nombre de cartes que tienne le Banquier, & quelque nombre de fois que la carte du Ponte ſoit parmi celles du Banquier, on trouvera toujours ſon ſort en cette ſorte. 1°. On cherchera par la méthode de l'*art. 64*, le nombre de tous les differens arrangemens poſſibles des cartes du Banquier. 2°. On ſe repréſentera ces cartes par les lettres a, b, c, d, f, &c. & on ſuppoſera que certaines à volonté déſignent celle du Ponte. 3°. On concevra tous ces arrangemens differens diſtribués ſur autant de colonnes qu'il y aura de cartes ; en ſorte que la premiere commence toute par la lettre a, la ſeconde par la lettre b, la troiſiéme par la lettre c, &c. 4°. On remarquera que les colonnes qui commencent par les lettres qui déſignent la carte du Ponte, donnent $2A$ au Banquier dans tous leurs arrangemens, à l'exception de ceux où deux quelconques d'entre les lettres qui expriment la carte du Ponte, ſe trouvent de ſuite à la premiere & à la ſeconde place ; ceux-ci donneront $\frac{1}{2}A$.

Pour

Pour trouver le nombre de ces arrangemens dans chacune de ces colonnes, on diviſera le nombre des arrangemens dont eſt compoſée chaque colonne par le nombre des cartes du Banquier moins un, & on multipliera l'expoſant par le nombre de fois moins un que la carte du Ponte ſe trouve dans celles du Banquier; ce produit donnera tous les arrangemens de ces colonnes, qui donnent $\frac{1}{2}A$.

A l'égard des autres colonnes qui commencent par des lettres differentes de celles qui expriment la carte du Ponte, il faut, pour y découvrir les arrangemens favorables, les concevoir chacune partagée & ſubdiviſée en autant de colonnes moins une, qu'il y a de cartes, & avoir égard à l'ordre marqué dans les Tables des pages 80 & 86; obſerver que de ces dernieres colonnes il y en a toujours autant qui donnent zero au Banquier, que la carte du Ponte ſe trouve de fois dans celles du Banquier; & que chacune des autres petites colonnes donne au Banquier le même ſort qu'on a trouvé dans le cas qui a précedé; c'eſt à dire dans le cas où le nombre des cartes du Banquier étant moindre de deux, la carte du Ponte s'y trouve un égal nombre de fois.

Ainſi l'on trouvera entre tous les differens arrangemens poſſibles des cartes que tient le Banquier, quels ſont ceux qui lui donnent ou A, ou $2A$, ou $\frac{1}{2}A$, ou zero; par conſequent on aura par cette methode le ſort du Banquier dans tous les cas poſſibles; ce qu'il falloit trouver.

En ſuivant l'eſprit de cette methode, ſi l'on nomme p le nombre des cartes que tient le Banquier, q le nombre de fois que la carte du Ponte eſt dans celles du Banquier, g le ſort du Banquier dans un nombre de cartes exprimé par $p-2$, S le ſort cherché: on aura le ſort du Banquier exprimé par cette formule.

$$S = \frac{\overline{pq-qq} \times 2A + \overline{qq-q} \times \frac{1}{2}A + g \times \overline{p-q} \times \overline{p-q-1}}{p \times \overline{p-1}}$$

On peut trouver par cette formule le ſort du Banquier, quelque nombre de cartes qu'il ait entre les mains, &

quelque nombre de fois que la carte du Ponte y ſoit compriſe. Mais cette formule a cet inconvenient fort grand de ne donner l'avantage du Banquier pour un certain nombre de cartes déſigné par p, que lorſqu'on ſçait déja ſon avantage pour un nombre de cartes qui ſoit $p - 2$. Ainſi cette formule ne peut être utile que pour trouver tous les differens cas les uns après les autres, en commençant par les plus ſimples. En voici une autre, qui donne ſans beaucoup de calcul tous les differens cas en general, & chaque cas en particulier indépendamment les uns des autres.

SECONDE METHODE.

71. SOIT B l'avantage du Banquier à la premiere taille, lorſque le Ponte vient de mettre une carte au jeu, y ſon avantage à la ſeconde, z ſon avantage à la troiſiéme, u ſon avantage à la quatriéme, &c. p & q ſignifiant les mêmes choſes que dans la methode précedente, on trouve $B = \frac{q \cdot q-1}{p \cdot p-1} \times \frac{1}{2}A + \frac{p-q \cdot p-q-1}{p \cdot p-1} y$, $y = \frac{q \cdot q-1}{p-2 \cdot p-3} \times \frac{1}{2}A + \frac{p-q-2 \cdot p-q-3}{p-2 \cdot p-3} z$, $z = \frac{q \cdot q-1}{p-4 \cdot p-5} \times \frac{1}{2}A + \frac{p-q-4 \cdot p-q-5}{p-4 \cdot p-5} u$, $u = \frac{q \cdot q-1}{p-6 \cdot p-7} \times \frac{1}{2}A + \frac{p-q-6 \cdot p-q-7}{p-6 \cdot p-7} s$, &c.

Si l'on ſubſtitue pour y, z, u, s leurs valeurs, on aura cette formule indéfinie $B = 1 + \frac{p-q \cdot p-q-1}{p-2 \cdot p-3} + \frac{p-q \cdot p-q-1 \cdot p-q-2 \cdot p-q-3}{p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5} + \frac{p-q \cdot p-q-1 \cdot p-q-2 \cdot p-q-3 \cdot p-q-4 \cdot p-q-5}{p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5 \cdot p-6 \cdot p-7} + \frac{p-q \cdot p-q-1 \cdot p-q-2 \cdot p-q-3 \cdot p-q-4 \cdot p-q-5 \cdot p-q-6 \cdot p-q-7}{p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5 \cdot p-6 \cdot p-7 \cdot p-8 \cdot p-9}$ &c. le tout multiplié par $\frac{q \cdot q-1}{p \cdot p-1} \times \frac{1}{2}A$.

qui donne l'avantage du Banquier, quelque ſoit la valeur de p & de q. Ainſi, par exemple, ſi $p = 12$, & $q = 3$, la formule donne $B = \frac{10+8+6+4+2}{12 \cdot 11 \cdot 10} \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2}A = \frac{3}{44}A$; & ſi $p = 12$, & $q = 4$, la formule donne $B = \frac{45+28+15+6+1}{10 \cdot 9} \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{12 \cdot 11} \times \frac{1}{2}A = \frac{19}{198}A$; & ſi $p = 12$, & $q = 5$, la formule donne $B = \frac{120+56+20+4}{10 \cdot 9 \cdot 8} \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{12 \cdot 11} \times \frac{1}{2}A = \frac{25}{198}A$.

Digitized by Google

En examinant cette formule on trouve,

1°. Que q étant $= 1$, elle devient $=$ zero ; mais que par les conditions du jeu, à cauſe de la derniere carte qui eſt nulle, il faut ajouter $\frac{A}{p}$.

2°. Que q étant $= 2$, elle devient $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ &c. $\times \frac{2 \times 1}{p \cdot p-1} \times \frac{1}{2} A$. Mais que par les conditions du jeu il faut multiplier la derniere de ces unités par $\frac{2 \cdot 1}{p \cdot p-1}$ par A, & non par $\frac{1}{2} A$.

3°. Que q étant $= 3$, elle devient

$$\frac{p-2+p-4+p-6+p-8+p-10}{p-2} + \text{&c.} \times \frac{3 \times 2}{p \cdot p-1} \times \frac{1}{2} A.$$

4°. Que q étant $= 4$, elle devient

$$\frac{p-2 \cdot p-3+p-4 \cdot p-5+p-6 \cdot p-7+p-8 \cdot p-9}{p-2 \cdot p-3} \text{&c.} \times \frac{4 \times 3}{p \cdot p-1} \times \frac{1}{2} A, \text{ &c.}$$

5°, Que q étant $= 5$, elle devient

$$\frac{p-2 \cdot p-3 \cdot p-4+p-4 \cdot p-5 \cdot p-6 \cdot +p-6 \cdot p-7 \cdot p-8+p-8 \cdot p-9 \cdot p-10}{p-2 \cdot p-3 \cdot p-4} +$$

&c. $\times \frac{5 \cdot 4}{p \cdot p-1} \times \frac{1}{2} A$.

En ſorte que dans chaque ſuite tous les termes ſont compoſés d'autant de produits qu'il y a d'unités dans $q - 2$.

6°. Que ces produits fourniſſent les multiples des nombres figurés de l'ordre $q - 1$, interpoſés de deux en deux, qui correſpondent à des nombres naturels pairs, à commencer par celui qui correſpond à $p - 2$: D'où il ſuit que pour trouver la fraction qui exprime l'avantage du Banquier, on peut ſe faire cette regle.

Le dénominateur contiendra autant de produits des quantités $p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot p - 3$, &c. qu'il y a d'unités dans q. Pour avoir le numerateur il faudra prendre dans le triangle arithmetique, *art. 1*, un rang horizontal, dont le quantiéme ſoit $q - 1$, ajouter en une ſomme tous les termes de ce rang pris de deux en deux, à commencer par celui qui correſpond à $p - 2$; multiplier cette ſomme par autant de produits des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. qu'il y a d'unités dans q, & la multiplier encore par $\frac{1}{2} A$, ayant égard aux deux exceptions marquées ci-deſſus, l'une pour le cas de $q = 1$, l'autre pour le cas de $q = 2$.

Pour réduire cette regle à des formules qui déterminent tout d'un coup, en ſubſtituant pour p ſa valeur, l'avantage du Banquier pour quelque nombre de cartes que

ce ſoit, lorſque la carte du Ponte s'y trouve un certain nombre de fois exprimé par q. Il ſuffira dans le cas de $q = 3$ de trouver la ſomme d'une progreſſion arithmetique; ainſi les trois premiers cas où $q = 1 = 2 = 3$ n'ont nulle difficulté. A l'égard des autres, on a beſoin de la ſolution generale du Problême qui ſuit.

Trouver la ſomme d'une progreſſion dont chaque terme ſoit formé d'autant de produits de quantités qui décroiſſent de l'unité qu'il y a d'unités dans $q - 2$.

72. Si $q = 5$, par exemple, il faut trouver la ſomme de cette progreſſion $p - 2 . p - 3 . p - 4 + p - 4 . p - 5 . p - 6 + p - 6 . p - 7 . p - 8 + p - 8 . p - 9 . p - 10 +$ &c. Et ſi $q = 6$, il faut trouver la ſomme de cette ſuite $p - 2 . p - 3 . p - 4 . p - 5 + p - 4 . p - 5 . p - 6 . p - 7 + p - 6 . p - 7 . p - 8 . p - 9 +$ &c. & ainſi de ſuite, par rapport aux differentes valeurs de q; ce qui eſt la même choſe que de trouver generalement la ſomme des nombres interpoſés de deux en deux dans le triangle arithmetique.

On pourroit en venir à bout aſſés facilement par la methode generale de l'*art.* 54. J'employerai ici une methode plus directe, fondée ſur une proprieté curieuſe des nombres figurés.

LEMME.

Si l'on prend un nombre pair à volonté de nombres figurés d'un ordre quelconque, la ſomme de ceux qui ſe trouvent pairs, c'eſt à dire ceux qui dans la Table 2, art. 7, *ſe trouvent à la ſeconde, quatriéme, ſixiéme, huitiéme, &c. place, eſt égale à l'excès de ceux qui dans le rang ſuivant ſe trouvent correſpondans aux pairs du rang ſuperieur ſur ceux qui ſe trouvent correſpondans aux impairs.*

73. COMME cet expoſé pourroit paroître obſcur, je vais l'éclaircir par un exemple. Soient pris les huit premiers nombres du quatriéme ordre 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120; je dis que la ſomme de ces quatre 4, 20, 56, 120, qui ſont pris à la deuxiéme, quatriéme, ſixiéme, hui-

Digitized by Google

tiéme place eſt égale à l'excès de ceux-ci 5 . 35 . 126 . 330, qui ſont pris à la 2e, 4e, 6e & 8e place du rang inferieur immediatement ſur ceux-ci, 1, 15, 70, 210, qui ſont à la 1re, 3e, 5e & 7e place de ce même rang.

On peut démontrer ainſi en peu de mots cette proprieté.

Soient les nombres d'un ordre quelconque repréſentés par les lettres a, b, c, d, e, f, g, h. Les nombres de l'ordre immédiatement inferieur ſeront par la nature & la formation de ces nombres a, $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d$, $a+b+c+d+e$, $a+b+c+d+e+f$, $a+b+c+d+e+f+g$, $a+b+c+d+e+f+g+h$. Or il eſt évident que retranchant dans ce deuxiéme rang le premier du deuxiéme, il reſte b; & que retranchant le troiſiéme du quatriéme, il reſte d; & que retranchant le cinquiéme du ſixiéme, il reſte f; & que retranchant le ſeptiéme du huitiéme, il reſte h; & ainſi de ſuite, par la neceſſité du rapport qui eſt entre un ordre quelconque & celui qui le ſuit immédiatement.

Pour faire l'application de ce Lemme,

Soit propoſé de trouver la ſomme des nombres du deuxiéme rang pris de deux en deux $2+4+6+8+10$, en nommant g le nombre des termes compris les pairs & les impairs: voici la ſuite de l'operation.

$2+4+6+8+10$ &c. $=\frac{g\cdot g+1}{1\cdot 2}-1-3-5-7-9$ &c. $=\frac{g\cdot g+1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}g-2-4-6-8-10$ &c. Donc en tranſpoſant, $2\times 2+4+6+8+10+$ &c. $=\frac{1}{2}g+\frac{g\cdot g+1}{1\cdot 2}$. Donc $2+4+6+8+10$ &c. $=\frac{1}{4}g+\frac{1}{2}\times\frac{g\cdot g+1}{1\cdot 2}$.

Soit encore propoſé de trouver la ſomme de ces nombres du troiſiéme ordre $3+10+21+36+55$, &c.

On a $3+10+21+36+55$ &c. $=2+4+6+8+10$ &c. $+1+6+15+28+45$ &c. $=\frac{1}{4}g+\frac{1}{2}\times\frac{g\cdot g+1}{1\cdot 2}+1+6+15+28+45$ &c. $=\frac{g\cdot g+1\cdot g+2}{1\cdot 2\cdot 3}-1-6-15-28-45$ &c. $=\frac{g\cdot g+1\cdot g+2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2}\times\frac{g\cdot g+1}{1\cdot 2}+\frac{1}{4}g-3-10-21-36-55$ &c. Donc en tranſpoſant & diviſant par 2. On a $3+10+21+36+55$ &c. $=\frac{1}{2}\times\frac{g\cdot g+1\cdot g+2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{4}\times\frac{g\cdot g+1}{1\cdot 2}+\frac{1}{8}g$.

On trouvera de la même maniere la ſomme des nom-

Digitized by Google

bres du quatriéme ordre correſpondans aux nombres naturels pairs $4 + 20 + 56 + 120 + 220$ &c.

$= \frac{1}{2} \times \frac{g.g+1.g+2.g+3}{1.2.3.4} + \frac{1}{4} \times \frac{g.g+1.g+2}{1.2.3} + \frac{1}{8} \times \frac{g.g+1}{1.2} + \frac{1}{16} g.$

Et la ſomme des nombres du cinquiéme ordre.

$5 + 35 + 126 + 330 + 715$ &c. $= \frac{1}{2} \times \frac{g.g+1.g+2.g+3.g+4}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{4} \times \frac{g.g+1.g+2.g+3}{1.2.3.4} + \frac{1}{8} \times \frac{g.g+1.g+2}{1.2.3} + \frac{1}{16} \times \frac{g.g+1}{1.2} + \frac{1}{32} \times g$, & ainſi du reſte, l'on voit aſſés l'ordre de ces ſuites.

Etant poſé ce que deſſus, on trouvera par ce qui précede, que la ſomme de cette ſuite $g + g - 2 + g - 4 + g - 6 + g - 8$ + &c. eſt $\frac{1}{2} \frac{g \times g+1}{1.2} + \frac{1}{4} g.$

Et que la ſomme de cette ſuite $\frac{g.g-1}{1.2} + \frac{g-2.g-3}{1.2} + \frac{g-4.g-5}{1.2} + \frac{g-6.g-7}{1.2}$ + &c. $= \frac{1}{2} \times \frac{g+1.g.g-1}{1.2.3} + \frac{1}{4} \times \frac{g.g-1}{1.2} + \frac{1}{8} g - 1 + \frac{2}{8}.$

On trouvera de la même maniere que la ſomme de cette ſuite $\frac{g.g-1.g-2}{1.2.3} + \frac{g-2.g-3.g-4}{1.2.3} + \frac{g-4.g-5.g-6}{1.2.3} + \frac{g-6.g-7.g-8}{1.2.3}$, + &c. eſt $= \frac{1}{2} \times \frac{g+1.g.g-1.g-2}{1.2.3.4} + \frac{1}{4} \times \frac{g.g-1.g-2}{1.2.3} + \frac{1}{8} \times \frac{g-1.g-2}{1.2} + \frac{1}{16} \times g - 2.$

Et encore la ſomme de cette ſuite $\frac{g.g-1.g-2.g-3}{1.2.3.4} + \frac{g-2.g-3.g-4.g-5}{1.2.3.4} + \frac{g-4.g-5.g-6.g-7}{1.2.3.4} + \frac{g-6.g-7.g-8.g-9}{1.2.3.4.5} + $ &c. $= \frac{1}{2} \times \frac{g+1.g.g-1.g-2.g-3}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{4} \times \frac{g.g-1.g-2.g-3}{1.2.3.4} + \frac{1}{8} \times \frac{g-1.g-2.g-3}{1.2.3} + \frac{1}{16} \times \frac{g-2.g-3}{1.2} + \frac{1}{32} \times g - 3 + \frac{1}{32}.$

& ainſi de tous les autres. On voit ſans peine l'ordre de ces ſuites.

Il eſt évident par le Lemme ci-deſſus qu'ayant la ſomme des nombres interrompus de deux en deux, & correſpondans aux nombres naturels pairs, on aura auſſi la ſomme de ceux qui correſpondent aux impairs; puiſqu'ayant le tout & une des parties du tout, on a l'autre partie.

Mais en general, voici la regle pour avoir la ſomme des nombres figurés pris de deux en deux, qui correſpondront aux nombres naturels ou pairs ou impairs, & en même temps la démonſtration de la regle.

Digitized by Google

Si l'on demande la ſomme des termes d'un ordre quelconque m pris de deux en deux, dont le premier correſpond à g qui déſigne ici un nombre pair ou impair à volonté. L'on ſçait que dans le rang horizontal inferieur, qui eſt $m + 1$, le terme qui correſpond à $g + 1$ eſt égal à tous les termes de l'ordre m pris de ſuite, depuis la colonne perpendiculaire où ſe trouve g, juſqu'à zero. Concevant donc tous les termes du rang m, à commencer par le terme qui correſpond à g, diviſés en deux parties inégales, dont la plus grande eſt celle que l'on cherche, & dont le premier terme correſpond à g, on a cette plus grande partie $= \frac{1}{2}$ par le terme de l'ordre $m + 1$, qui correſpond à $g + 1$ plus $\frac{1}{2}$ par la difference des deux parties inégales ; & par le Lemme, cette difference eſt la ſomme de tous les termes de l'ordre $m - 1$ pris de deux en deux, à commencer par celui qui correſpond à $g - 1$. Pour avoir la ſomme de ces termes, en faiſant comme ci-deſſus, il faut prendre $\frac{1}{2}$ par le terme de l'ordre m qui correſpond à g, $+ \frac{1}{2}$ par la difference qui eſt la ſomme de tous les termes de l'ordre $m - 2$ pris de deux en deux, à commencer toujours par celui qui eſt $g - 2$, ou correſpond à $g - 2$, en continuant juſqu'à la derniere difference.

Comme cette démonſtration peut paroître un peu abſtraite, je vais tâcher de l'éclaircir par les deux exemples qui ſuivent.

Soit propoſé de trouver dans le quatriéme rang, *Tab. 1.* la ſomme de ces termes.... $120 + 56 + 20 + 4$ qui correſpondent aux nombres naturels .... $10 + 8 + 6 + 4$. Je remarque que cette ſuite eſt plus grande que celle-ci .... $84 + 35 + 10 + 1$, & qu'elle la ſurpaſſe de la ſomme de ces autres nombres .... $36 + 21 + 10 + 3$ qui en eſt la difference. Or l'on ſçait que la plus grande des deux quantités eſt égale à la moitié de la toute, plus à la moitié de leur difference. Concevant donc la ſomme entiere .... $120 + 84 + 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1 = 330$ partagée en ces deux parties inégales. Je dis que la plus grande, qui eſt celle dont on cherche la ſomme, eſt $= \frac{1}{2} \times 330 + \frac{1}{2} \times \overline{36 + 21 + 10 + 3}$; & cherchant de la même

maniere la ſomme de cette ſuite $36 + 21 + 10 + 3$, qui ſurpaſſe cette autre $28 + 15 + 6 + 1$ de la ſuite $8 + 6 + 4 + 2$.

On la trouvera $= \frac{1}{2} \times 120 + \frac{1}{2} \times \overline{8 + 6 + 4 + 2}$; & cherchant encore la ſomme de cette ſuite $8 + 6 + 4 + 2$ plus grande que celle-ci $7 + 5 + 3 + 1$ de la ſuite $1 + 1 + 1 + 1$, on la trouvera $= \frac{1}{2} \times 36 + \frac{1}{2} \times \overline{1 + 1 + 1 + 1}$, & cherchant encore la ſomme de cette derniere ſuite, on la trouve $= \frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 0$, car la difference eſt zero. On aura donc la ſomme cherchée $= \frac{1}{2} \times 330 + \frac{1}{2} \times \overline{36 + 21 + 10 + 3}$ $= \frac{1}{2} \times 330 + \frac{1}{4} \times 120 + \frac{1}{4} \times \overline{8 + 6 + 4 + 2} = \frac{1}{2} \times 330 + \frac{1}{4} \times 120 + \frac{1}{8} \times 36 + \frac{1}{8} \times \overline{1 + 1 + 1 + 1} = \frac{1}{2} \times 330 + \frac{1}{4} \times 120 + \frac{1}{8} 36 + \frac{1}{16} \times 8$, conformément à la formule donnée ci-deſſus $\frac{1}{2} \frac{g+1 \cdot g \cdot g-1 \cdot g-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4} \times \frac{g \cdot g-1 \cdot g-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{8} \times \frac{g-1 \cdot g-2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{16} \times g - 2$.

Soit encore propoſé de trouver dans le cinquiéme rang la ſomme de ces termes $210 + 70 + 15 + 1$, & ſuppoſant pour abreger le diſcours la difference de cette ſuite à cette autre $126 + 35 + 5 + 0$, qui eſt $84 + 35 + 10 + 1 = b$; & la difference de cette ſuite $84 + 35 + 10 + 1$ à cette autre $56 + 20 + 4 + 0$, qui eſt $28 + 15 + 6 + 1 = c$. Et la difference de cette ſuite $28 + 15 + 6 + 1$ à cette autre $21 + 10 + 3 + 0$, qui eſt $7 + 5 + 3 + 1 = d$. Et la difference de cette ſuite $7 + 5 + 3 + 1$ à cette autre $6 + 4 + 2 + 0$, qui eſt $1 + 1 + 1 + 1 = e$; & la difference de cette ſuite $1 + 1 + 1 + 1$ à cette autre $1 + 1 + 1 + 0 = 1$, on aura la ſomme cherchée $= \frac{1}{2} \times 462 + \frac{1}{2} b$ $= \frac{1}{2} \times 462 + \frac{1}{4} \times 210 + \frac{1}{4} e = \frac{1}{2} \times 462 + \frac{1}{4} \times 210 + \frac{1}{8} \times 84 + \frac{1}{8} d = \frac{1}{2} \times 462 + \frac{1}{4} \times 210 + \frac{1}{8} \times 84 + \frac{1}{16} \times 28 + \frac{1}{16} e = \frac{1}{2} \times 462 + \frac{1}{4} \times 210 + \frac{1}{8} \times 84 + \frac{1}{16} \times 28 + \frac{1}{32} \times 7 + \frac{1}{32} \times 1$, conformément à la formule donnée ci-deſſus

$$\frac{1}{2} \times \frac{g+1 \cdot g \cdot g-1 \cdot g-2 \cdot g-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4} \times \frac{g \cdot g-1 \cdot g-2 \cdot g-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{8} \times \frac{g-1 \cdot g-2 \cdot g-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{16} \times \frac{g-2 \cdot g-3}{1 \cdot 2} + \frac{1}{32} \times g - 3 + \frac{1}{32} \times 1.$$

Il eſt à propos d'obſerver que tous les nombres de ces ſuites

ſuites, qui ſont diviſées par differentes puiſſances de 2, ſe trouvent dans la bande tranſverſale, dont le quantiéme eſt $g - m + 2$, & que le premier qui eſt diviſé par la plus petite puiſſance de 2, ſe trouve toujours dans la bande perpendiculaire qui correſpond à $g + 1$, c'eſt à dire, dont le quantiéme eſt $g + 2$.

SUITE DE LA SOLUTION.

74. IL eſt clair par tout ce qui précede, que pour avoir des formules qui expriment l'avantage du Banquier au Pharaon pour toutes les differentes valeurs de q. Il ſuffit de mettre par-tout $p - 2$ à la place de g dans les formules de l'*art.* 73, de les multiplier par autant de nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. qu'il y a d'unités dans q, & encore par $\frac{1}{2}A$, & de les diviſer par $p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3$, &c.

Si l'on veut avoir, par exemple, la formule pour le cas de $q = 3$, en mettant $p - 2$ à la place de g dans la formule $\frac{1}{2} \times \frac{g \cdot g+1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4}g$, on trouvera pour la formule cherchée $\frac{\frac{1}{2}\frac{p-2 \cdot p-1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4}p-2}{p \cdot p-1 \cdot p-2} \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \times \frac{1}{2}A = \frac{3 \times A}{4 \times p-1}$, & de même ſi l'on veut avoir la formule pour le cas de $q = 4$, en mettant $p - 2$ à la place de g dans la formule $\frac{1}{2} \times \frac{g+1 \cdot g \cdot g-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{4} \times \frac{g \cdot g-1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{8} \times g - 1 + \frac{1}{8} \times 1$, on aura pour la formule cherchée

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{p-1 \cdot p-2 \cdot p-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{4} \times \frac{p-2 \cdot p-3}{1 \cdot 2} + \frac{1}{8} \times p - 3 + \frac{1}{8}}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3} \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times \frac{1}{2}A = \frac{2p-5 \times A}{2 \times pp-4p+3}.$$

Voici les principaux cas que j'ai mis en formule $B = \frac{1}{p}$ $C = \frac{2}{2 \times pp-p}$ $D = \frac{3}{4 \times p-1}$ $E = \frac{4}{2 \times pp-4p+3}$ $F = \frac{5}{4} \times \frac{p-2}{pp-4p+3}$ $G = \frac{6}{4} \times \frac{2pp-13p+16}{p^3-9pp+23p-15}$ $H = \frac{7}{8} \times \frac{2pp-12p+19}{p^3-9pp+23p-15}$ $K = \frac{8}{2} \times \frac{4p^3-50pp+176p-153}{p^4-16p^3+86pp-176p+105}$.

La premiere de ces formules exprime l'avantage du Banquier, quand la carte du Ponte ſe trouve une fois dans ſa main. La 2e C exprime ſon avantage lorſqu'elle s'y trouve deux fois. La 3e D exprime ſon avantage lorſqu'elle s'y trouve trois fois, & ainſi des autres.

N.

Si l'on veut avoir une ſuite qui donne l'avantage du Banquier, les valeurs de p & de q étant quelconques, on aura en multipliant le premier terme des ſuites que j'ai donné dans l'*art. 73*, par autant de produits des nombres naturels qu'il y a d'unités dans q; ou, ce qui eſt la même choſe, par $q \cdot q-1 \cdot q-2 \cdot q-3 \ldots q-q$, & encore par $\frac{1}{2}A$; & diviſant par autant de produits des quantités $p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4$, &c. qu'il y a d'unités dans q, on aura, dis-je, en réduiſant terme à terme, & effaçant ce qui ſe trouve de commun au numerateur & au dénominateur, cette formule generale & très ſimple, $\frac{1}{4} \times \frac{q}{p} + \frac{1}{8} \times \frac{q \cdot q-1}{p \cdot p-1} + \frac{1}{16} \times \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2}{p \cdot p-1 \cdot p-2} + \frac{1}{32} \times \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2 \cdot q-3}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3} + \frac{1}{64} \times \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2 \cdot q-3 \cdot q-4}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4} +$ &c. dans laquelle il faut remarquer que lorſque q eſt un nombre impair, il faut prendre autant de termes que $q-1$ exprime d'unités; mais que q étant un nombre pair, il faut prendre autant de termes qu'il y a d'unités dans q, & multiplier le dernier terme par 2.

REMARQUE.

75. ON peut obſerver que dans la methode que nous avons ſuivie, nous avons toujours conſideré les termes pris de deux en deux dont on cherche la ſomme, comme faiſant la plus grande des deux parties inégales qui compoſent le tout; & par conſequent il a toujours fallu y ajouter la moitié de la difference. Maintenant ſi on vouloit conſiderer la ſomme cherchée comme faiſant la plus petite partie de la ſuite non interrompue, il faudroit concevoir cette ſuite entiere augmentée du terme qui correſpond à $g+1$, & ainſi de ſuite de rang en rang; alors on auroit toujours la ſomme que l'on cherche égale à la moitié de la toute, moins la moitié de la difference; & cette toute ſe trouveroit dans le rang horizontal inferieur, celui qui correſpond à $p+2$; en continuant toujours de cette maniere au lieu des termes de la bande tranſverſale dont le quantiéme eſt $g-m+2$, on auroit les termes de la bande perpendiculaire $g+3$, avec les ſignes plus & moins alter-

Digitized by Google

nativement. Cette remarque découvre le fondement de la difference que l'on trouve entre ma formule ci-deſſus, & celle qui ſuit, dont M. Nicolas Bernoulli m'a fait part dans ſa Lettre du 26 Février 1711, qu'on trouvera à la fin de ce Livre.

$$\frac{1}{4} \times \frac{q}{p-q+1} - \frac{1}{8} \frac{q.q-1}{p-q+1.p-q+2} + \frac{1}{16} \times \frac{q.q-1.q-2}{p-q+1.p-q+2.p-q+3}$$
$$- \frac{1}{32} \times \frac{q\ q-1.q-2.q-3}{p-q+1.p-q+2.p-q+3.p-q+4} + \&c.$$

Cette derniere paroît préferable, en ce qu'on n'y employe qu'autant de termes qu'il y a d'unités dans $q - 1$, au lieu que dans la mienne, lorſque q eſt un nombre pair, il faut prendre autant de termes de la ſuite qu'il y a d'unités dans q; & dans ce cas multiplier le dernier terme par 2: cette exception ôte en quelque façon l'uniformité de la formule. Mais cet avantage eſt peut-être compenſé par les ſignes alternatifs & les q qui ſe trouvent au dénominateur dans la formule de M. Bernoulli, & principalement parceque l'on y opere ſur de plus grands nombres. Pour en faire la comparaiſon, ſoit propoſé de trouver la ſomme de ces nombres, par exemple qui ſont du quatriéme ordre, $120 + 56 + 20 + 4 = 200$. On a par ma formule $\frac{1}{2} \times 330 + \frac{1}{4} \times 120 + \frac{1}{8} \times 36 + \frac{1}{16} \times 8$. Et ſelon celle de M. Bernoulli, $\frac{1}{2} \times 495 - \frac{1}{4} \times 220 + \frac{1}{8} \times 66 - \frac{1}{16} \times 12$.

REMARQUE II.

76. J'AI dreſſé deux Tables ſur les quatre premieres formules, *art.* 74, dans le deſſein de faire plaiſir aux Joueurs, & de ſatisfaire leur curioſité. Pour en connoître l'uſage, il faut ſçavoir que dans la premiere le chifre renfermé dans la cellule □ exprime le nombre de cartes que tient le Banquier; & que le nombre qui ſuit, ou la cellule dans la premiere colonne, ou deux points dans les autres colonnes, exprime le nombre de fois que la carte du Ponte eſt ſuppoſée ſe trouver dans la main du Banquier. L'uſage de la ſeconde Table eſt de donner des expreſſions à la verité moins exactes, mais plus ſimples & plus intelligibles aux Joueurs, des fractions qui dans la premiere deſ-

Digitized by Google

gnent avec préciſion l'avantage du Banquier. Il faut ſçavoir pour entendre cette Table, que cette marque $>$ ſignifie excès, & cette autre $<$ défaut; en ſorte que j'entens par $> \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ une quantité plus grande que $\frac{1}{4}$, & plus petite que $\frac{1}{3}$.

On peut faire, par rapport aux nombres de la premiere Table, pluſieurs obſervations aſſés curieuſes. Voici les principales.

COROLLAIRE I.

77. DANS la premiere Table l'avantage du Banquier eſt exprimé dans la premiere colonne par une fraction, dont le numerateur étant toujours l'unité, le dénominateur eſt le nombre des cartes que tient le Banquier.

Dans la ſeconde colonne cet avantage eſt exprimé par une fraction, dont le numerateur étant ſelon la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. le dénominateur a pour difference entre ces termes les nombres 18, 26, 34, 42, 50, 58, dont la difference eſt 8.

Dans la troiſiéme colonne le numerateur étant toujours 3, la difference qui regne dans le dénominateur eſt 8.

Dans la quatriéme colonne la difference étant toujours 4 dans le numerateur, le dénominateur a pour difference entre ſes termes les nombres 24, 40, 56, 72, 88, &c. dont la difference eſt 16.

On peut encore obſerver une autre uniformité aſſés ſinguliere entre les derniers chiffres du dénominateur de chaque terme d'une colonne.

Dans la premiere les derniers chiffres du dénominateur ſont ſelon cet ordre 4, 6, 8, 0, 2 | 4, 6, 8, 0, 2 | &c. Dans la ſeconde ils ſont ſelon cet ordre 2, 0, 6, 0, 2 | 2, 0, 6, 0, 2 | &c. Dans la troiſiéme ils ſont ſelon cet ordre 2, 0, 8, 6, 4 | 2, 0, 8, 6, 4 | &c. Dans la quatriéme ils ſont ſelon cet ordre 6, 0, 0, 6, 8 | 6, 0, 0, 6, 8 | &c. On recherchera avec plaiſir la cauſe de cette uniformité.

Digitized by Google

COROLLAIRE II.

78. ON pourra par le moyen de ces Tables trouver tout d'un coup combien un Banquier a d'avantage ſur chaque carte. On pourra pareillement ſçavoir combien chaque taille complette aura dû, à fortune égale, apporter de profit au Banquier, ſi l'on ſe ſouvient du nombre de cartes qui ont été priſes par les Pontes, des diverſes circonſtances dans leſquelles on les a miſes au jeu, & enfin de la quantité d'argent qu'on a hazardé deſſus. On trouvera apparemment que cet avantage eſt trop conſiderable. On lui donneroit de juſtes bornes en établiſſant que les doublets fuſſent indifferens pour le Banquier & pour le Ponte, ou du moins qu'ils valuſſent ſeulement le tiers ou le quart de la miſe du Ponte. Ainſi ce qui reſteroit d'avantage au Banquier, ſeroit ſuffiſant pour faire préferer aux Joueurs qui entendent leur intereſt, la place de Banquier à celle de Ponte, & ne ſeroit pas aſſés conſiderable, pour que les Pontes en ſouffriſſent beaucoup de préjudice.

COROLLAIRE III.

79. AFIN que le Ponte prenant une carte ait le moins de deſavantage qu'il eſt poſſible, il faut qu'il en choiſiſſe une qui ait paſſé deux fois; car il y auroit plus de deſavantage pour lui, s'il prenoit une carte qui eût paſſé une fois; & plus de deſavantage encore, s'il prenoit une carte qui eût paſſé trois fois; & enfin le plus mauvais choix que puiſſe faire un Ponte, c'eſt de prendre une carte qui n'ait point encore paſſé.

Ainſi l'on trouvera, par exemple, que ſuppoſant *A* égal à une piſtole, l'avantage du Banquier qui ſeroit dix-neuf ſols deux deniers, dans la ſuppoſition que la carte du Ponte fût quatre fois dans douze cartes; & ſeize ſols huit deniers, dans la ſuppoſition qu'elle y fût une fois, n'eſt plus que treize ſols ſept deniers, lorſque dans ces douze cartes celle du Ponte s'y trouve trois fois,

Digitized by Google

& dix ſols ſept deniers lorſqu'elle n'y eſt que deux fois.

On remarquera la même choſe par rapport à tout autre nombre de cartes.

REMARQUE I.

80. LES perſonnes qui n'ont point examiné à fond le Jeu du Pharaon & de la Baſſette, pourroient trouver à redire, que je ne parlaſſe point des maſſes, des parolis, de la paix, des ſept & le *va*, &c. car la plûpart des Joueurs s'imaginent qu'il y a en tout cela bien du myſtere. J'en ai connu qui croyoient avoir de bonnes raiſons pour préferer de mettre quatre Louis ſur une carte ſimple à faire le paroli de deux Louis, ou le ſept & le *va* d'un Louis. J'en ai vû d'autres qui s'étoient perſuadés qu'il étoit très avantageux de faire ſouvent des paix : neanmoins il eſt évident que, puiſque le Ponte a la liberté de prendre à chaque fois qu'il perd ou qu'il gagne une nouvelle carte telle qu'il lui plaît, il ne doit point s'embarraſſer ſi c'eſt ou un ſept & le *va*, ou un paroli, ou une paix, ou une double paix, &c. Car faire le paroli d'un Louis n'eſt autre choſe que de mettre deux Louis ſur une carte, après avoir gagné un Louis ; & faire le ſept & le *va* d'un Louis n'eſt autre choſe que de mettre quatre Louis ſur une carte, après en avoir gagné trois ; & de même faire la paix d'un Louis n'eſt autre choſe que de mettre un Louis ſur une carte, après avoir gagné un Louis ſur cette même carte.

L'on n'a apparemment inventé les parolis, les ſept & le *va*, &c. que pour épargner au Banquier la peine de payer ceux qui ont deſſein de mettre ſur leurs cartes le double de ce qu'ils viennent de gagner : neanmoins il ſeroit plus utile aux Banquiers de prendre ce ſoin, que d'être expoſés, comme ils le ſont, à ce qu'on nomme Alpiou de Campagne.

Pour moi je crois que ſi les Banquiers n'ont point aboli l'uſage de faire ces cornes, dont le grand nombre cauſe dans le Jeu une confuſion qui eſt ſouvent préjudiciable au Banquier, & qui favoriſe les tromperies des Pontes,

Digitized by Google

c'eſt que les Banquiers ont bien vû que la plûpart des hommes ne jugeant point des choſes par raiſon, tel Ponte qui feroit ſans peine le ſept & le *va* d'un Louis, croyant ne hazarder qu'un Louis, ne pourroit ſe réſoudre à mettre quatre Louis ſur une carte ſimple. Outre que pour l'ordinaire c'eſt dans les dernieres cartes, lorſque l'avantage du Banquier eſt le plus conſiderable, que les Pontes ſe piquent & font les parolis, les ſept & le *va*, &c. ce qui les dédommage avec uſure des tromperies auſquelles ils ſont par là expoſés, mais dont ils n'eſt pas d'ailleurs impoſſible de ſe garantir avec beaucoup d'application, & avec l'aide d'un croupier.

REMARQUE II.

81. IL étoit facile aux Joueurs de s'appercevoir que l'avantage du Banquier augmente à proportion que le nombre de ſes cartes diminue; mais il étoit impoſſible de découvrir ſans Analyſe la loi de cette diminution, & ce qui eſt le plus important, de ſçavoir comment cet avantage varie ſelon que la carte du Ponte ſe trouve plus ou moins de fois dans la main du Banquier. Les Joueurs n'euſſent aſſurément jamais pû imaginer que l'avantage du Banquier, par rapport à une carte qui n'a point paſſé, eſt preſque double de celui qu'il a ſur une carte qui a paſſé deux fois, & beaucoup moins encore que ſon avantage, par rapport à une carte qui a paſſé trois fois, eſt à ſon avantage par rapport à une carte qui a paſſé deux fois dans un plus grand rapport que de trois à deux. Les Joueurs trouveront tout cela ſans peine, & peut-être avec quelque ſurpriſe dans les Tables ci-jointes; ils y verront, par exemple, que l'avantage du Banquier qui ne ſeroit qu'environ vingt-quatre ſols ſi le Ponte mettoit ſix piſtoles ou à la premiere taille du jeu, ou ſur une carte qui auroit paſſé deux fois lorſqu'il n'en reſteroit plus que vingt-huit dans la main du Banquier (ces deux cas reviennent à peu près à la même choſe) ſera ſept livres deux ſols, ſi le Ponte met ſix piſtoles ſur une carte qui n'ait point encore paſſé, le talon n'étant plus compoſé que de dix cartes, & que ſon

Digitized by Google

avantage ſeroit préciſément de ſix livres, ſi la carte du Ponte avoit dans ce dernier cas paſſé trois fois. Ainſi toute la ſcience de ce Jeu ſe réduit pour les Pontes à obſerver les deux regles qui ſuivent.

1°. Ne prendre des cartes que dans les premieres tailles, & hazarder ſur le jeu d'autant moins qu'il y un plus grand nombre de tailles paſſées.

2°. Regarder comme les plus mauvaiſes cartes celles qui n'ont point encore paſſé, ou qui ont paſſé trois fois, & préferer à toutes, celles qui ont paſſé deux fois.

En ſuivant ces deux regles, le deſavantage du Ponte ſera le moindre qu'il ſera poſſible.

PROBLEME

Digitized by Google

PHARAON.

$$\beta = * \quad * \quad * \qquad :4 = a + \frac{22950862}{11589084}$$

$$\beta = a + \frac{3}{196}a \qquad :4 = a + \frac{7208829}{3495953}$$

$$\beta = a + \frac{3}{188}a \qquad :4 = a + \frac{276199}{1284228}$$

$$\beta = a + \frac{3}{180}a \qquad :4 = a + \frac{11002}{48955}$$

$$\beta = a + \frac{3}{172}a \qquad :4 = a + \frac{913}{3878}$$

$$\beta = a + \frac{3}{164}a \qquad :4 = a + \frac{79}{319}$$

$$\beta = a + \frac{3}{156}a \qquad :4 = a + \frac{25}{96}$$

$$\beta = a + \frac{3}{148}a \qquad :4 = a + \frac{1349}{4921}$$

$$\beta = a + \frac{3}{140}a \qquad :4 = a + \frac{1139}{3927}$$

$$\beta = a + \frac{3}{132}a \qquad :4 = a + \frac{357}{1159}$$

$$\beta = a + \frac{3}{124}a \qquad :4 = a + \frac{177}{539}$$

$$\beta = a + \frac{3}{116}a \qquad :4 = a + \frac{55}{156}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{108}a \qquad :4 = a + \frac{221}{585}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{100}a \qquad :4 = a + \frac{611}{1495}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{92}a \qquad :4 = a + \frac{473}{1062}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{84}a \qquad :4 = a + \frac{143}{292}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{76}a \qquad :4 = a + \frac{35}{64}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{68}a \qquad :4 = a + \frac{31}{51}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{60}a \qquad :4 = a + \frac{9}{13}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{52}a \qquad :4 = a + \frac{23}{28}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{44}a \qquad :4 = a + \frac{19}{19}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{36}a \qquad :4 = a + \frac{5}{4}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{28}a \qquad :4 = a + \frac{11}{7}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{20}a \qquad :4 = a + \frac{7}{3}a$$

$$\beta = a + \frac{3}{12}a \qquad :4 = a + \frac{1}{1}a$$

Digitized by Google

Digitized by Google

$3 = * * *$

$3 = a + \rangle \frac{1}{66} \langle \frac{1}{65}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{63} \langle \frac{1}{62}$

$3 = a + \frac{1}{60}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{58} \langle \frac{1}{57}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{55} \langle \frac{1}{54}$

$3 = a + \frac{1}{52}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{50} \langle \frac{1}{49}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{47} \langle \frac{1}{46}$

$3 = a + \frac{1}{44}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{42} \langle \frac{1}{41}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{39} \langle \frac{1}{48}$

$3 = a + \frac{1}{36}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{34} \langle \frac{1}{33}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{31} \langle \frac{1}{30}$

$3 = a + \frac{1}{28}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{26} \langle \frac{1}{25}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{23} \langle \frac{1}{22}$

$3 = a + \frac{1}{20}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{18} \langle \frac{1}{17}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{15} \langle \frac{1}{14}$

$3 = a + \frac{1}{12}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{10} \langle \frac{1}{9}$

$3 = a + \rangle \frac{1}{7} \langle \frac{1}{6}$

$3 = a + \frac{1}{4} a$

$4 = a + \rangle \frac{1}{51} \langle \frac{1}{50}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{49} \langle \frac{1}{48}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{47} \langle \frac{1}{46}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{45} \langle \frac{1}{44}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{43} \langle \frac{1}{42}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{41} \langle \frac{1}{40}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{39} \langle \frac{1}{38}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{37} \langle \frac{1}{36}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{35} \langle \frac{1}{34}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{33} \langle \frac{1}{32}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{31} \langle \frac{1}{30}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{29} \langle \frac{1}{28}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{27} \langle \frac{1}{26}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{25} \langle \frac{1}{24}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{23} \langle \frac{1}{22}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{21} \langle \frac{1}{20}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{19} \langle \frac{1}{18}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{17} \langle \frac{1}{16}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{15} \langle \frac{1}{14}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{13} \langle \frac{1}{12}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{11} \langle \frac{1}{10}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{9} \langle \frac{1}{8}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{7} \langle \frac{1}{6}$

$4 = a + \rangle \frac{1}{5} \langle \frac{1}{4}$

$4 = a + \frac{1}{2} a$

Digitized by Google

PROBLÊME
SUR
LE JEU DU LANSQUENET.

Déterminer generalement l'avantage de celui qui a la main, & le ſort des autres coupeurs par rapport aux differentes places qu'ils occupent.

82. On nomme coupeurs ceux qui prennent cartes dans le tour, avant que celui qui a la main ſe donne la ſienne; & carabineurs, ceux qui prennent carte, après que celle de celui qui a la main eſt tirée. On appelle la réjouiſſance la carte qui vient immédiatement après la carte de celui qui a la main. Tout le monde y peut mettre avant que la carte de celui qui a la main ſoit tirée; mais il dépend de lui de tenir ce qu'il veut, pourvû qu'il s'en explique avant que de tirer ſa carte: car s'il la tire ſans rien dire, il eſt obligé de tenir tout ce qu'on y a mis.

Après qu'on a reglé le fond du jeu, celui qui a la main donne des cartes aux coupeurs à commencer par ſa droite, & ces cartes ſe nomment cartes droites, pour les diſtinguer des cartes de repriſe & de réjouiſſance; il ſe donne une carte, & enſuite il tire la réjouiſſance. Cela étant fait, il continue de tirer toutes les cartes de ſuite; il gagne ce qui eſt ſur la carte d'un coupeur, lorſqu'il amene la carte de ce coupeur; & il perd tout ce qui eſt au jeu, lorſqu'il amene la ſienne. Enfin s'il amene toutes les cartes droites des coupeurs avant que d'amener la ſienne, il recommence & continue d'avoir la main, ſoit qu'il ait gagné ou perdu la réjouiſſance. Voilà les regles les plus generales

Digitized by Google

de ce Jeu : En voici quelqu'autres particulieres qui ont rapport au Problême proposé.

1°. Lorsque celui qui a la main, que je nommerai toujours Pierre, donne une carte double à un coupeur, c'est à dire une carte de même espece qu'une autre carte qu'il a déja donnée à un autre coupeur qui est plus à la droite, il gagne le fond du jeu sur la carte perdante, & il est obligé de tenir le double sur la carte double.

2°. Lorsque Pierre donne une carte triple à un coupeur, il gagne ce qui est sur la carte perdante, & il est tenu de mettre quatre fois le fond du jeu sur la carte triple.

3°. Lorsque Pierre donne une carte quadruple à un coupeur, il reprend ce qu'il a mis sur les cartes simples ou doubles ; s'il y en a, il perd ce qui est sur la carte triple de même espece que la quadruple qu'il amene, & il quitte la main sur le champ, sans donner d'autres cartes.

4°. S'il se donne à lui-même une carte quadruple, il prend tout ce qu'il y a sur les cartes des coupeurs, &, sans donner d'autres cartes, il recommence la main.

5°. Lorsque la carte de la réjouissance est quadruple, elle ne va point.

6°. C'est encore un loi du jeu, qu'un coupeur, dont la carte est prise, est obligé de payer le fond du jeu à chaque coupeur qui a une carte devant lui, ce qui s'appelle arroser ; mais il y a cette distinction à faire, que quand c'est une carte droite, celui qui perd paye aux autres cartes droites le fond du jeu, sans avoir égard à ce que la sienne ou la carte droite des autres coupeurs soit simple, double ou triple ; au lieu que quand c'est une carte de reprise, on ne paye & on ne reçoit que selon les regles du parti. Or dans ce Jeu les partis sont de mettre trois contre deux, lorsqu'on a carte double contre carte simple ; deux contre un, lorsqu'on a carte triple contre carte double ; & trois contre un, lorsqu'on a carte triple contre carte simple.

Ces regles étant bien conçues, si l'on veut sçavoir en quoi consiste la difficulté de la premiere partie de ce Pro-

Digitized by Google

blême, qui est de déterminer l'avantage de celui qui a la main, il faut observer :

1°. Que l'avantage d'avoir la main en renferme un autre fort considerable, qui est de conserver à Pierre le droit de tenir les cartes autant de fois qu'il aura amené toutes les cartes droites des coupeurs avant que d'amener la sienne. Or comme cela peut arriver plusieurs fois de suite, quelque nombre de coupeurs qu'il y ait, il faut, en examinant l'avantage de celui qui tient les cartes, avoir égard à l'esperance qu'il a de faire la main un nombre de fois quelconque indéterminément. D'où il suit qu'on ne peut exprimer l'avantage de Pierre que par une suite composée d'un nombre infini de termes qui iront toujours en diminuant.

2°. Que Pierre a d'autant moins d'esperance de faire la main, qu'il y a plus de coupeurs & plus de cartes simples parmi les cartes droites.

3°. Que l'obligation où est Pierre de mettre le double du fond du jeu sur les cartes doubles, & le quadruple sur les cartes triples, diminue l'avantage qu'il auroit en amenant des cartes doubles ou triples avant que de se donner la sienne ; & que son avantage est augmenté par cette autre condition du jeu, qui lui permet de reprendre en entier ce qu'il a mis sur les cartes doubles & triples, lorsqu'il donne à un des coupeurs une carte quadruple.

Ces remarques & quelqu'autres pareilles que j'obmets, peuvent faire connoître que ce Problême est plus composé qu'il ne paroît d'abord.

Pour le résoudre, voici la route que je tiens. J'examine d'abord toutes les dispositions differentes que le jeu peut avoir, avant que Pierre se soit donné sa carte, & je détermine combien il y a de probabilité que chacune des dispositions possibles se trouvera à l'exclusion des autres. Ensuite je cherche quelle est l'esperance de Pierre dans chacune de ces dispositions differentes de se donner une carte ou simple, ou double, ou triple, ou quadruple. En troisiéme lieu, j'examine en particulier ce que chacun des differens rapports de la carte de Pierre à celles des cou-

peurs lui peut donner de gain ou de perte. Enfin après ces recherches, il ne reſte qu'à operer ſelon les regles ordinaires de l'Analyſe. Il ſeroit long & difficile de faire entendre la methode, ſans en faire l'application ſur des cas particuliers : ainſi, ſans m'étendre davantage, je commence comme dans le Problême précedent par le cas le plus ſimple.

PROPOSITION III.

PREMIER CAS.

L'on ſuppoſe qu'il y ait trois coupeurs, Pierre, Paul & Jacques. Paul eſt le premier à la droite, & Jacques le ſecond. On demande combien il y a d'avantage pour Pierre à avoir la main.

83. SOIT le fond du jeu apppellé A.

On remarquera :

1°. Qu'il y a à parier ſeize contre un, que les cartes de Paul & de Jacques ſe trouveront ſimples, lorſque Pierre ſera ſur le point de tirer ſa carte, & un contre ſeize que la carte de Jacques ſe trouvera double.

2°. Que les cartes de Paul & de Jacques étant ſimples, Pierre a ſix coups ſur cinquante pour amener carte double, & par conſequent quarante-quatre ſur cinquante, pour amener carte ſimple.

3°. Que la carte de Jacques étant double, Pierre a deux coups ſur cinquante pour gagner tout, en amenant carte triple, & par conſequent quarante-huit ſur cinquante, pour amener carte ſimple.

4°. Que ſi Pierre amene carte ſimple, les cartes de Paul & de Jacques étant ſimples, ſon ſort eſt $2A$; ce qui eſt évident; mais que ſi Pierre amene carte double, ſon ſort eſt $3A + \frac{1}{5}A$. Car amenant carte double, il prend d'abord $2A$, c'eſt à dire la miſe de celui qui perd & la ſienne propre; & outre cela il a ſa miſe ſur la carte du Joueur qui reſte, & l'avantage d'avoir carte double contre carte ſim-

Digitized by Google

ple : or cet avantage eſt $\frac{1}{5}A$, en voici la preuve. Pierre ayant carte double contre carte ſimple, a trois coups pour gagner, & ſeulement deux coups pour perdre ; ſon ſort ſera donc en ce cas $3 \times 2A + 2 \times 0$ diviſé par 5. Donc ſon ſort ſera $A + \frac{1}{5}A$, & ſon avantage $\frac{1}{5}A$.

5°. Que ſi Pierre amene carte ſimple, la carte de Jacques étant double, ſon ſort eſt $2A - \frac{2}{5}A$. Car c'eſt une loi du jeu, que Jacques ayant carte double eſt en droit de mettre $2A$ ſur ſa carte, & d'obliger Pierre à en mettre autant quoiqu'à ſon deſavantage. On a vû ci-devant que l'avantage de celui qui a carte double contre carte ſimple eſt la cinquiéme partie de la miſe de chacun : or ici la miſe de Jacques étant $2A$, ſon avantage & le deſavantage de Pierre ſera $\frac{2}{5}A$. Il eſt évident que ſi Pierre amenoit carte triple, ſon ſort ſeroit $4A$.

6°. Il faut encore obſerver que Pierre hazarde $2A$, lorſque les cartes de Paul & de Jacques ſont ſimples ; mais qu'il hazarde ſeulement A, lorſque la carte de Jacques eſt double : De tout cela il ſuit que l'avantage qu'a Pierre dans un tour eſt $\frac{16}{17} \times \frac{128}{125}A + \frac{1}{17} \times \frac{87}{125}A = \frac{375}{2125}A = \frac{3}{17}A$.

Maintenant pour ſçavoir ce qu'il faut ajouter à cet avantage pour avoir égard à l'eſperance qu'a Pierre de faire la main, il faut déterminer quel eſt le nombre qui exprime cette eſperance, & le multiplier par l'avantage déja trouvé $\frac{3}{17}A$.

Il eſt clair que cette eſperance eſt differente ſelon toutes les differentes diſpoſitions que peuvent avoir les cartes des trois coupeurs. Ainſi il faut chercher quel degré de probabilité il y a que chacune de ces diſpoſitions poſſibles ſe trouvera, & multiplier chacun des nombres qui les exprime par le degré de probabilité qu'il y a que dans telle & telle diſpoſition Pierre fera la main.

Or je trouve que ſur vingt-deux mille cent differentes diſpoſitions poſſibles des trois cartes de Pierre, Paul & Jacques, il y en a dix-huit mille trois cens quatre, pour que les trois cartes ſoient ſimples ; deux mille quatre cens quatre-vingt-ſeize, pour que la carte de Pierre ſoit double ; mille deux cens quarante-huit, pour que la carte de

Digitized by Google

Jacques ſoit double ; & cinquante-deux pour que celle de Pierre ſoit triple.

Il faut encore obſerver, 1°, que lorſque les trois cartes de Pierre, Paul & Jacques ſont ſimples, il y a à parier un contre deux que Pierre fera la main.

2°. Qu'il y a à parier trois contre deux, lorſque la carte de Pierre eſt double ; & deux contre trois, lorſque la carte de Jacques eſt double.

De tout cela il ſuit que ſi l'on ſuppoſe, pour abreger, $\frac{3}{17}A = b$, l'eſperance qu'a Pierre de faire la main ſera exprimée par cette quantité,

$$\frac{18304 \times \frac{1}{5}b + 2496 \times \frac{3}{5}b + 1248 \times \frac{2}{5}b + 52 \times b}{22100} = \frac{2351}{63375}b.$$

Et par conſequent il eſt clair que ſi la regle du jeu étoit que Pierre continuera d'avoir la main encore une fois ſeulement, lorſqu'il aura gagné toutes les cartes droites. L'avantage de celui qui a la main ſeroit $\frac{3}{17}A + \frac{2351}{63375} \times \frac{3}{17}A$; & que ſi la regle étoit que faiſant les cartes droites une ſeconde fois, il continueroit d'avoir encore une fois la main, ſon avantage ſeroit $\frac{3}{17}A + \frac{2351}{63375} \times \frac{3}{17}A + \frac{2351}{63375} \times \frac{2351}{63375} \times \frac{3}{17}a$; & que generalement la regle du Lanſquenet étant que celui qui a la main continuera de tenir les cartes autant de fois qu'il continuera de faire la main, on aura l'avantage de celui qui a la main exprimé par cette ſuite $\frac{3}{17}A + \frac{2351}{63375} \times \frac{3}{17}A + \frac{2351}{63375} \times \frac{2351}{63375} \times \frac{3}{17}A + \frac{2351^3}{63375} \times \frac{3}{17}A +$ &c. dont la ſomme eſt $\frac{19325}{68408}A$. En ſorte que ſi le jeu eſt aux piſtoles, l'avantage de celui qui a la main ſera de 2 l. 15 ſ. & environ 10 deniers.

REMARQUE.

84. DANS tous les jeux où le Banquier continue d'avoir la même place tant qu'une certaine choſe arrive, après quoi il la perd, l'avantage du Banquier eſt toujours exprimé par une ſuite de termes qui forment une progreſſion geometrique. En ſorte que ſon avantage au 1er coup étant b, & la probabilité qu'il y a qu'il conſervera ſa même place étant c, ſon avantage conſideré generalement par rapport aux

Digitized by Google

hazards qu'il a de conſerver ou de perdre ſa place au bout d'un certain nombre de coups indéterminément, ſera $b + bc + bc^2 + bc^3 + bc^4 + bc^5 +$ &c. dont on ſçait que la ſomme eſt $\frac{b}{1-c}$.

Au reſte cette conſideration n'eſt entierement juſte que dans la ſuppoſition que celui qui a la main aura toujours le même nombre de coupeurs, ce qui n'arrive pas toujours dans la pratique, mais l'erreur qui peut venir de cette ſuppoſition eſt très petite & peut être nulle, parcequ'il y en peut avoir plus ou moins, & que cela ſe compenſe; cependant ſi l'on veut abſolument l'éviter, l'on peut s'en tenir à chercher l'avantage du Banquier, par rapport à chaque main, & dire dans l'exemple ci-deſſus que l'avantage de Pierre dans chaque main eſt $\frac{1}{17}A = 1$ liv. 15 ſ. $3\frac{9}{17}$ deniers.

SECOND CAS.

Je ſuppoſe qu'il y ait quatre coupeurs, le quatriéme ſe nomme Jean.

85. POUR découvrir en combien de manieres differentes les cartes des trois coupeurs, Paul, Jacques & Jean peuvent arriver ou ſimples, ou doubles, ou triples, il faut ſe ſouvenir que dans le cas précedent on a trouvé qu'il y a ſeize contre un à parier que la carte du premier coupeur étant ſimple, celle du ſecond le ſera auſſi; & que les cartes de deux coupeurs étant ſimples, il y a vingt-deux contre trois à parier que la carte ſuivante ſera ſimple. 2°. Que les cartes des deux premiers coupeurs étant ſimples, il y a ſix contre quarante-quatre à parier que la troiſiéme ſera double. 3°. Qu'il y a un contre ſeize à parier que la carte du ſecond coupeur ſera double; & que la carte du ſecond coupeur étant double, il y a deux ſur cinquante pour amener une carte triple, & par conſequent quarante-huit ſur cinquante pour amener carte ſimple.

De tout cela il ſuit:

1°. Que pour déterminer combien il y a à parier que

dans ce cas-ci les cartes des trois coupeurs ſeront ſimples, il faut multiplier le nombre $\frac{22}{25}$ qui exprime le degré de probabilité qu'il y a que les cartes de Paul & de Jacques étant ſimples, celle de Jean le ſera auſſi, par le nombre $\frac{16}{17}$ qui exprime combien il y a de probabilité que celle de Jacques ſera ſimple; ainſi il y a à parier trois cens cinquante deux contre ſoixante & treize, que les cartes des trois coupeurs, Paul, Jacques & Jean ſeront ſimples. 2°. Que pour avoir le nombre qui exprime combien il y a à parier que la carte de Jean ſera double, il faut multiplier $\frac{6}{50}$ par le nombre $\frac{16}{17}$. 3°. Que pour avoir le nombre qui exprime combien il y a de probabilité que celle de Jacques ſera double, & celle de Jean ſimple, il faut multiplier $\frac{1}{17}$ par le nombre $\frac{24}{25}$. 4°. Que la fraction $\frac{1}{17} \times \frac{1}{25}$ exprime combien il y auroit à parier que la carte de Jean ſeroit triple.

Maintenant il faut déterminer quel eſt le ſort de Pierre dans chacune de ces quatre diſpoſitions differentes des cartes des trois Joueurs.

L'on trouvera, 1°, que les cartes de Paul, Jacques & Jean étant ſimples, Pierre ſur quarante-neuf cartes qui reſtent, en a quarante à tirer qui peuvent lui donner carte ſimple, & neuf qui peuvent lui donner carte double. Or le ſort de Pierre lorſqu'il a carte ſimple, les cartes des trois autres coupeurs étant ſimples auſſi, eſt $3A$; & ſon ſort, lorſqu'il a carte double, deux quelconques d'entre les coupeurs ayant carte ſimple, eſt $4A + \frac{2}{5}A$. On aura donc le ſort de Pierre, lorſque les cartes des trois autres coupeurs ſont ſimples, $= \frac{40}{49} \times 3A + \frac{9}{49} \times \overline{4A + \frac{2}{5}A} = \frac{798}{245}A = 3A + \frac{63}{245}A$.

2°. Que la carte de Jean étant double, Pierre a ſur quarante-neuf cartes qui reſtent, quarante-quatre cartes à tirer qui lui peuvent donner carte ſimple, trois cartes qui lui peuvent donner carte double, & enfin deux cartes qui lui peuvent donner carte triple. Or le ſort de Pierre, lorſque ſa carte eſt ſimple, eſt $2A + \frac{3}{5}A$; & ſon ſort, lorſque ſa carte eſt double, eſt $4A$. Enfin ſon ſort, lorſque

ſa

ſa carte eſt triple, eſt $4A + \frac{1}{2}A$. Car Pierre ayant carte triple contre une autre carte ſimple, devroit parier trois contre un pour parier également; & par conſéquent il a trois contre un ſur la ſomme qui eſt couchée ſur la carte qui reſte : Donc, ſi la carte de Jean eſt double, le ſort de Pierre ſera $= \frac{44}{49} \times 2\overline{A + \frac{1}{5}A} + \frac{3}{49} \times 4A + \frac{2}{49} \times 4\overline{A + \frac{1}{2}A}$ $= \frac{687}{245}A = 2A + \frac{197}{245}A$.

On trouvera que le ſort de Pierre ſera le même, c'eſt à dire $2A + \frac{197}{245}A$, lorſque la carte de Jacques ſera double.

3°. On obſervera que la carte de Jean étant triple, Pierre ſur quarante-neuf cartes en a quarante-huit, qui lui donnent carte ſimple contre carte triple, & une ſeulement qui lui donne carte quadruple.

Or le ſort de Pierre, lorſque ſa carte eſt ſimple, eſt $2A$; car il a un coup pour avoir $8A$, & trois coups pour avoir zero. Son ſort, lorſque ſa carte eſt quadruple, eſt $8A$. Donc ſi la carte de Jean eſt triple, le ſort de Pierre ſera $= \frac{48}{49} \times 2A + \frac{1}{49} \times 8A = \frac{104}{49}A = 2A + \frac{6}{49}$.

Il faut encore remarquer que Pierre ne hazarde $3A$ que dans le cas où les cartes de Paul, Jacques & Jean ſont ſimples; qu'il hazarde ſeulement $2A$ dans le cas où la carte, ſoit de Jacques ſoit de Jean eſt double, & ſeulement A dans le cas où la carte de Jean eſt triple.

Tout cela ſuppoſé, l'avantage qu'a Pierre dans chaque main, ſera exprimé par cette quantité,

$$\frac{\overline{352 \times 63 + 72 \times 197 + 55 \times 5 \times A}}{425 \times 245} = \frac{7127}{17 \times 25 \times 49}A = \frac{7527}{20835}A.$$

Il s'agit maintenant de découvrir combien il y a de probabilité que Pierre fera la main. Pour en venir à bout, il faut s'y prendre comme l'on a fait dans le cas précedent; examiner quel eſt le nombre qui exprime chacune des diſpoſitions ſuivantes des quatre cartes. Sçavoir, 1°, que toutes les cartes ſoient ſimples; 2°, que la carte de Pierre ſoit ſimple, l'une des trois autres étant double; 3°, que la carte de Pierre ſoit double, deux autres quelconques étant ſim-

Digitized by Google

ples ; 4°, que la carte de Pierre ſoit double, une des autres étant double ; 5°, que la carte de Jean ſoit triple, celle de Pierre étant ſimple ; 6°, que la carte de Pierre ſoit triple, l'une quelconque des trois autres étant ſimple ; 7°, que la carte de Pierre ſoit quadruple, & enſuite chercher quelle eſt l'eſperance de Pierre de faire la main dans chacune de ces ſept diſpoſitions differentes des quatre cartes.

Or je trouve qu'exprimant l'eſperance qu'a Pierre de faire la main dans les ſept diſpoſitions differentes ci-deſſus marquées par les inconnues x, y, z, u, t, p, l, ſelon l'ordre qu'on vient de leur donner, & déſignant par la lettre b ce qui revient à Pierre de cette eſperance, & par la lettre g, l'avantage de Pierre lorſqu'on ſuppoſe qu'il recommencera une ſeconde fois à tenir les cartes, en cas qu'il faſſe la main dans le premier tour, on aura

$$g = b + \frac{14080x + \overline{2112 + 1056} \times y + 3168z + \overline{72 + 144} \times u}{20825} + \frac{48t + \overline{48 + 96} \times p + 1 \times l}{20825}.$$

On trouvera auſſi $x = \frac{1}{4}b$, $y = \frac{11}{40}b$, $z = \frac{9}{20}b$, $u = \frac{1}{2}b$, $t = \frac{1}{4}b$, $p = \frac{3}{4}b$, $l = b$; & ſubſtituant ces valeurs, on aura

$$g = b + \frac{14080 \times \frac{1}{4}b + 3168 \times \frac{29}{40}b + 216 \times \frac{1}{2}b + 48 \times \frac{1}{4}b + 144 \times \frac{3}{4}b + b}{20825}$$

$= b + - \frac{30229}{104125} = \frac{7327}{20825}A + \frac{30229}{104125} \times \frac{7327}{20825}A$. Donc ſi l'on nomme h l'avantage de Pierre, lorſqu'on ſuppoſe indéterminément qu'il continuera de tenir les cartes juſqu'à ce qu'il ait manqué de faire la main, on aura $h = \frac{7327}{20825}A + \frac{30229}{104125} \times \frac{7327}{20825}A + \overline{\frac{30229}{104125}}^{2} \times \frac{7327}{20825}A + \overline{\frac{30229}{104125}}^{3} \times \frac{7327}{20825}A +$ &c.

Digitized by Google

TROISIE'ME CAS.

L'on ſuppoſe qu'il y ait cinq coupeurs, je nomme le cinquiéme Thomas, & le reſte comme ci-devant.

86. LORSQUE Pierre va tirer ſa carte, voici toutes les diſpoſitions differentes où ſe peuvent trouver les cartes des quatre autres coupeurs.

1°. Les cartes de Paul, Jacques, Jean, Thomas, peuvent ſe trouver ſimples, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition ſe trouvera, eſt $\frac{40}{49} \times \frac{22}{25} \times \frac{16}{17}$.

2°. La carte de Thomas peut ſe trouver ſimple, celle de Jean étant double, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition de cartes ſe trouvera, eſt $\frac{44}{49} \times \frac{3}{25} \times \frac{16}{17}$.

3°. La carte de Thomas peut ſe trouver ſimple, celle de Jacques étant double, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition de cartes ſe trouvera, eſt $\frac{44}{49} \times \frac{24}{25} \times \frac{1}{17}$.

4°. La carte de Thomas peut ſe trouver ſimple, celle de Jean étant triple, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition de cartes ſe trouvera, eſt $\frac{48}{49} \times \frac{1}{25} \times \frac{1}{17}$.

5°. La carte de Thomas peut ſe trouver double, les cartes des deux autres quelconques étant ſimples, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition ſe trouvera, eſt $\frac{9}{49} \times \frac{22}{25} \times \frac{16}{17}$.

6°. La carte de Thomas peut ſe trouver double, celle de Jacques étant double, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition ſe trouvera, eſt $\frac{3}{49} \times \frac{24}{25} \times \frac{1}{17}$.

7°. La carte de Thomas peut ſe trouver double, celle de Jean étant double, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition ſe trouvera, eſt $\frac{3}{49} \times \frac{3}{25} \times \frac{16}{17}$.

Digitized by Google

8°. La carte de Thomas peut ſe trouver triple, la carte de Jean étant ſimple, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition ſe trouvera, eſt $\frac{2}{49} \times \frac{24}{25} \times \frac{1}{17}$.

9°. La carte de Thomas peut ſe trouver triple, la carte de Paul ou de Jacques étant ſimple, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition ſe trouvera, eſt $\frac{2}{49} \times \frac{1}{25} \times \frac{16}{17}$.

10°. La carte de Thomas peut ſe trouver quadruple, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition arrivera, eſt $\frac{1}{49} \times \frac{1}{25} \times \frac{1}{17}$.

Il eſt à propos de remarquer qu'il n'eſt pas toujours neceſſaire de connoître toutes les variations qui peuvent ſe trouver dans la diſpoſition des cartes des coupeurs, car ſuivant la nature du Problême, on peut en confondre certaines, & négliger de les conſiderer ſéparément, ce qui dans certaines rencontres diminue extrêmement le travail de l'eſprit, & abrege la ſolution. Cette remarque eſt très importante pour le Problême qui ſuivra, elle a auſſi lieu dans celui-ci, où il faut obſerver qu'on peut comprendre dans une même fraction le 2e, le 3e & le 5e article; le 6e & le 7e; le 4e, le 8e & le 9e; d'où il ſuit que de toutes les variations qui ſe peuvent trouver entre les diſpoſitions des cartes des quatre coupeurs, il n'y en a que cinq qu'il ſoit à propos de conſiderer : on en déterminera les coefficiens par la *Propoſ. 8, art. 23.* Ainſi nommant x le ſort de Pierre lorſque les cartes des quatre autres coupeurs ſont ſimples,

y ſon ſort, lorſqu'il y en a une double, les deux autres quelconques étant ſimples,

t ſon ſort, lorqu'il y en a deux doubles,

z ſon ſort, lorſqu'il y en a une triple & une ſimple,

p ſon ſort, lorſque la carte de Thomas eſt quadruple.

On aura, par l'*art. 23*, le ſort de Pierre dans chaque main.

$$= \frac{140800x + 63360y + 1920z + 216t + p}{20825}$$

Pour connoître la valeur de x, on remarquera que Pierre

en tirant dans quarante-huit cartes en a trente-six qui lui peuvent donner carte ſimple, & douze qui lui peuvent donner carte double. Or le ſort de Pierre, lorſqu'il a carte ſimple, eſt $4A$; & ſon ſort, lorſqu'il a carte double, eſt $2A + \frac{3}{5} \times 6A$. De là il ſuit que $x = \frac{36}{48} \times 4A + \frac{12}{48} \times \overline{5A + \frac{3}{5}A} = \frac{1056}{240}A = 4A + \frac{2}{5}A$.

Pour déterminer la valeur de y, on remarquera que ſur quarante-huit cartes qui reſtent, il y en a deux qui peuvent donner carte triple à Pierre, ſix qui lui peuvent donner carte double, & par conſequent quarante qui peuvent lui donner carte ſimple. Or le ſort de Pierre, lorſque ſa carte eſt triple, eſt $4A + \frac{3}{4} \times 4A = 7A$; & ſon ſort, lorſque ſa carte eſt double, eſt $5A + \frac{1}{5}A$; & ſon ſort, lorſque ſa carte eſt ſimple, eſt $3A + \frac{3}{5}A$. De tout cela il ſuit que $y = \frac{2}{48} \times 7A + \frac{6}{48} \times \overline{5A + \frac{1}{5}A} + \frac{40}{48} \times \overline{3A + \frac{3}{5}A} = 3A + \frac{113}{120}A$.

On trouvera par de ſemblables raiſonnemens

$z = \frac{1}{48} \times 10A + \frac{3}{48} \times \overline{4A + \frac{2}{3}A} + \frac{44}{48} \times 3A = 3A + \frac{1}{4}A$.

$t = \frac{4}{48} \times 4A + \frac{8}{3}A + \frac{44}{48} \times \frac{2}{5} \times 8A = 3A + \frac{22}{45}A$.

$p = 0$.

De tout cela on peut conclure que l'avantage de Pierre dans chaque main eſt

$14080 \times \frac{2}{5}A + 6336 \times \frac{113}{120}A + 192 \times \frac{5}{4}A + 216 \times \overline{A + \frac{22}{45}A} - A = \frac{12159}{20825}A$.

Pour déterminer l'eſperance qu'a Pierre de faire la main, on fera des raiſonnemens pareils à ceux des deux cas précedens, & l'on trouvera que cette eſperance eſt exprimée par la fraction $\frac{106994}{437325}$. Cela poſé, l'avantage cherché de Pierre ſera $\frac{12159}{20825}A + \frac{106994}{437325} \times \frac{12159}{20825}A + \overline{\frac{106994}{437325}}^{2} \times \frac{12159}{20825}A + \overline{\frac{106994}{437325}}^{3} \times \frac{12159}{20225}A +$ &c.

QUATRIE'ME CAS.

L'on ſuppoſe qu'il y ait ſix coupeurs, je nomme le ſixiéme André, & le reſte comme ci-devant.

87. SI l'on nomme x le ſort de Pierre, lorſque les cartes des cinq coupeurs ſont ſimples,

y ſon ſort, quand l'une des cinq eſt double, les autres étant ſimples.

z ſon ſort, quand il y en a une triple & deux ſimples.

t ſon ſort, quand il y en a deux doubles.

q ſon ſort, quand il y en a une triple & une double.

p ſon ſort, quand le dernier Joueur, qui eſt ici André, a une carte quadruple.

f ſon ſort, quand Thomas, qui eſt le penultiéme Joueur, a une carte quadruple.

On aura, par l'*art. 23*, le ſort de Pierre dans chaque main

$$= \frac{10560x + 8800y + 440z + 990t + 30q + 4p + f}{20825}$$

On trouve auſſi

$$x = 5A + \tfrac{27}{47}A$$
$$y = 5A + \tfrac{26}{235}A$$
$$z = 4A + \tfrac{96}{235}A$$
$$t = 4A + \tfrac{92}{141}A$$
$$q = 3A + \tfrac{227}{235}A$$
$$p = A$$
$$f = 0;$$

ce qui donnera l'avantage de Pierre dans chaque main

$$= \frac{10560 \times \tfrac{27}{47}A + 8800 \times \overline{A + \tfrac{26}{235}A} + 440 \times \overline{A + \tfrac{96}{235}A} + 990 \times \overline{A + \tfrac{92}{141}A} + 30 \times \overline{A + \tfrac{227}{235}A} + 5 \times -A}{20825}$$

$$= \tfrac{170607}{195755}A.$$

On trouvera par des calculs aſſez longs, mais pareils à ceux des cas précedens, que l'eſperance qu'a Pierre de faire la main, eſt exprimée par la fraction $\frac{1899236042}{1047382825}$, en ſorte qu'on aura l'avantage cherché $= \frac{170607}{195755}A$

$$+ \tfrac{1899236042}{1047382825} \times \tfrac{170607}{195755}A + \overline{\tfrac{1899236042}{1047382825}}^{2} \times \tfrac{170607}{195755}A$$
$$+ \overline{\tfrac{1899236042}{1047382825}}^{3} \times \tfrac{170607}{195755}A + \&c.$$

Digitized by Google

CINQUIE'ME CAS.

L'on ſuppoſe qu'il y ait ſept coupeurs.

88. SOIT x l'avantage de Pierre, lorſque les ſix cartes ſont ſimples.

y, quand il y en a une double & quatre ſimples.
z, quand il y en a deux doubles & deux ſimples.
u, quand il y en a trois doubles.
t, quand il y en a une triple & trois ſimples,
r, quand il y en a une triple, une double & une ſimple.
p, quand il y en a deux triples.
q, quand il y en a une quadruple & deux ſimples.
m, quand il y en a une quadruple & une double.

On aura, par l'*art. 23*, l'avantage de Pierre dans chaque main.

$$= 67584x + 95040y + 23760z + 594u + 7040t + 1584r + 12p + 132q + 9m$$

$$195755$$

$$x = \frac{18}{23}A,\ y = \frac{151}{115}A,\ z = \frac{638}{345}A,\ u = \frac{55}{23}A,\ t = \frac{184}{115}A,$$
$$r = \frac{99}{46}A,\ p = \frac{58}{23}A,\ q = -A,\ m = 0.$$

Donc ſi l'on ſubſtitue ces valeurs de x, y, z, &c. on aura l'avantage de Pierre dans chaque main $= 67584 \times \frac{18}{23}A + 95040 \times \frac{151}{115}A + 23760 \times \frac{638}{345}A + 594 \times \frac{55}{23}A + 7040 \times \frac{184}{115}A + 1584 \times \frac{99}{46}A + 12 \times \frac{58}{23}A + 132 \times -A + 9 \times 0.$

$$195755$$

$$= \frac{5465122}{4502365}A = A + \frac{962757}{4502365}A.$$

L'on trouvera que l'eſperance qu'a Pierre de faire la main, eſt exprimée par la fraction $\frac{9171600302577719}{6102195875135235}$, & par conſequent l'avantage cherché ſera

$$\frac{5465122}{4502365}A + \frac{9171600302577719}{6102195875135235} \times \frac{5465122}{4502365}A + \overline{\frac{9171600302577719}{6102195875135235}}^{2} \times \frac{5465122}{4502365}A + \overline{\frac{91716003025771\cdot9}{6102195875135235}}^{3} \times \frac{5465122}{4502365}A + \&c.$$

On pourra ainſi trouver l'avantage de Pierre, en ſuppo-

posant qu'il y ait un plus grand nombre de coupeurs, la methode en seroit la même ; mais les calculs en seroient si longs, & les raisonnemens que supposent les calculs si embarassés, que je crois devoir me dispenser d'aller plus loin ; l'utilité qu'on pourroit tirer d'une Table calculée pour un plus grand nombre de coupeurs ne seroit pas à notre avis assés considerable pour dédommager de la peine qu'elle donneroit.

Je vais présentement donner la solution de l'autre partie du Problême que je me suis proposé sur le Lansquenet, sçavoir de déterminer les divers desavantages des coupeurs qui sont dans des places differentes à la droite & à la gauche de Pierre. La methode que j'employerai aura beaucoup de rapport à la précedente ; ainsi pour la faire entendre je me contenterai d'en faire l'essai & l'application sur un cas particulier tel qu'est celui qui suit.

PROPOSITION IV.

PROBLÊME II.

Déterminer quel est le rapport des differens desavantages de trois coupeurs, Paul, Jacques & Jean, en supposant, comme dans le second cas du Problême précedent, que Pierre quatriéme coupeur tient la main, que Paul est le premier à sa droite, que Jacques suit Paul, & que Jean est à la gauche de Pierre.

89. On a trouvé dans la solution de ce second cas du Problême précedent, *art. 84*, que l'avantage de Pierre dans chaque main étoit exprimé par la fraction $\frac{7327}{208125}$, en sorte que le jeu étant aux pistoles, il doit estimer son avantage trois livres dix sols & quelques deniers. Or il est clair que cet avantage de Pierre tombe en perte sur les autres coupeurs, mais inégalement sur chacun ; en sorte, par exemple, que Paul en porte plus que Jacques, & Jacques plus que Jean.

La difficulté du Problême consiste à découvrir selon quelle

quelle proportion cette perte ou ce desavantage commun se distribue entre chacun des trois coupeurs.

Pour trouver ce rapport je cherche séparément le desavantage de chacun des trois joueurs, & pour cela j'examine toutes les dispositions possibles des quatre cartes droites qui varient le sort de chacun des joueurs, & j'observe dans chacune quel est son desavantage, ayant égard à ce que les arrosemens lui donnent ou lui font esperer de gain ou de perte. Je multiplie chacun des nombres qui exprime les differentes dispositions de cartes qui varient la condition du joueur par l'avantage ou le desavantage qu'elles lui donnent; j'ajoute tous ces produits, & je divise leur somme par 20825, qui est le produit de ces trois nombres 17, 25, 49: l'exposant de cette division exprime le desavantage du joueur.

Trouver le desavantage de Paul.

1°. Quand les cartes des quatre coupeurs sont simples, il n'y a ni avantage ni desavantage pour Paul.

2°. Quand la carte de Pierre est double, celle de Jacques & de Jean étant simples, le desavantage de Paul est exprimé par — $3A$.

3°. Quand la carte de Pierre est double, celle de Paul étant simple, l'avantage de Paul est $\frac{4}{5}A$.

4°. Quand la carte de Jacques est double, le desavantage de Paul est exprimé par — A

5°. Quand la carte de Jean est double, celle de Paul étant en perte, le desavantage de Paul est exprimé par — $2A$.

6°. Quand la carte de Jean est double, celle de Pierre & de Paul étant simples, l'avantage de Paul est $\frac{4}{5}A$.

7°. Quand la carte de Jean est double de celle de Jacques, & la carte de Pierre double de celle de Paul, le desavantage de Paul est exprimé par — A.

8°. Quand la carte de Pierre est triple, celle de Paul étant simple, l'avantage de Paul est $\frac{1}{2}A$.

9°. Quand la carte de Jean est triple, le desavantage de Paul exprimé par — A.

Digitized by Google

Les nombres qui expriment combien il y a de probabilité que chacune de ces diſpoſitions particulieres ſe trouvera, ſont à commencer par la ſeconde, & en continuant avec ordre.

$352 \times 3, 352 \times 6, 24 \times 49, 24 \times 49, 24 \times 44, 24 \times 3, 24 \times 2, 49,$

& par conſequent le deſavantage de Paul ſera exprimé par cette quantité

$$352 \times 3 \times 5 \times -3A + 352 \times 6 \times 4A + 24 \times 49 \times 5 \times -3A + 24 \times 44 \times 4A + 72 \times 5 \times -A + 72 \times 5 \times A + 49 \times 5 \times -A$$

$$\overline{20825 \times 5}$$

qui étant reduite devient $-\frac{21053}{104125}A$; & cette fraction exexprime le deſavantage de Paul.

Trouver le deſavantage de Jacques.

1°. Quand les cartes des quatre coupeurs ſont ſimples, il n'y a ni avantage ni deſavantage pour Jacques.

2°. Quand la carte de Pierre étant double, celles de Paul & de Jean ſont ſimples, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-3A$.

3°. Quand la carte de Pierre étant double, celle de Jacques eſt ſimple, l'avantage de Jacques eſt $\frac{4}{5}A$.

4°. Quand la carte de Jean étant double, celles de Jacques & de Pierre ſont ſimples, l'avantage de Jacques eſt $\frac{4}{5}A$.

5°. Quand la carte de Jean étant double de celle de Paul, la carte de Pierre eſt double de celle de Jacques, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-A$.

6°. Quand la carte de Jean étant double, celles de Paul & de Pierre ſont ſimples, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-2A$.

7°. Quand la carte de Jean étant double, celle de Pierre eſt double de la carte de Paul, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-2A$.

8°. Quand la carte de Jacques étant ſimple, celle de Pierre eſt triple, l'avantage de Jacques eſt $\frac{3}{2}A$.

Digitized by Google

9°. Quand la carte de Paul étant ſimple, celle de Pierre eſt triple, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-2A$.

10°. Quand la carte de Jacques étant double, celles de Jean & de Pierre ſont ſimples, ſon avantage eſt $\frac{3}{5}A$.

11°. Quand la carte de Jacques étant double, celle de Pierre eſt double, l'avantage de Jacques eſt A.

12°. Quand la carte de Jean étant ſimple, celle de Pierre eſt triple, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-3A$.

13°. Quand la carte de Pierre eſt quadruple, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-2A$.

14°. Quand la carte de Pierre étant ſimple, celle de Jean eſt triple, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-2A$.

Les nombres qui expriment combien il y a de probabilité, que chacune de ces diſpoſitions particulieres ſe trouvera, ſont à commencer par la ſeconde, & en continuant avec ordre,

$3\times352,\ 6\times352,\ 24\times44,\ 24\times3,\ 24\times44,\ 24\times3,\ 24\times2,\ 24\times2,$
$24\times44,\ 24\times3,\ 24\times2,\ 1,\ 48,$

& par conſequent le deſavantage de Jacques ſera exprimé par cette quantité

$$3\times352\times-3A+6\times352\times\tfrac{4}{7}A+24\times44\times\tfrac{4}{7}A+24\times3\times-A+24\times44\times-2A+24\times3\times-2A+24\times2\times\tfrac{3}{2}A+24\times2\times-2A+24\times44\times\tfrac{3}{5}A+24\times3A+24\times2\times-3A+1\times-2a+48\times-2A.$$

$$\frac{}{20825}$$

Ce qui étant réduit donne cette fraction $-\frac{12610}{104125}A$, qui exprime le deſavantage de Jacques.

Trouver le deſavantage de Jean.

1°. Quand les cartes des quatre coupeurs ſont ſimples, il n'y a ni avantage ni deſavantage pour Jean.

2°. Quand la carte de Jean étant double, celle de Pierre eſt ſimple, l'avantage de Jean eſt $\frac{3}{5}A$.

3°. Quand la carte de Pierre & celle de Jean ſont ſimples, celle de Jacques étant double, le deſavantage de Jean eſt exprimé par $-\frac{1}{5}A$.

4°. Quand la carte de Pierre étant ſimple, celle de Jean eſt triple, l'avantage de Jean eſt $2A$.

5°. Quand la carte de Pierre étant double, celles de Paul & de Jacques ſont ſimples, le deſavantage de Jean eſt exprimé par $-3A$.

6°. Quand la carte de Pierre étant double, celle de Jean eſt ſimple, l'avantage de Jean eſt $\frac{4}{5}A$.

7°. Quand la carte de Pierre étant double, celle de Jacques eſt double, le deſavantage de Jean eſt exprimé par $-2A$.

8°. Quand la carte de Pierre étant double, celle de Jean eſt double, l'avantage de Jean eſt A.

9°. Quand la carte de Pierre étant triple, celle de Jean eſt ſimple, l'avantage de Jean eſt $\frac{1}{2}A$.

10°. Quand la carte de Pierre étant triple, celle de Paul ou de Jacques ſont ſimples, le deſavantage de Jean eſt exprimé par $-3A$.

11°. Quand la carte de Pierre eſt quadruple, le deſavantage de Jean eſt exprimé par $-4A$.

Les nombres qui expriment la probabilité qu'il y a que chacune de ces diſpoſitions particulieres ſe trouvera, ſont à commencer à la ſeconde, & en continuant avec ordre,

$44\times3\times16,\ 44\times24\times1,\ 48,\ 3\times22\times16,\ 6\times22\times16,\ 3\times24,$
$3\times3\times16,\ 2\times24,\ 2\times3\times16,\ 1,$

Et par conſéquent le deſavantage de Jean ſera

$$44\times3\times16\times\tfrac{3}{5}A+44\times24\times-\tfrac{1}{5}A+48\times2A+3\times22\times16\times$$
$$-3A+6\times22\times16\times\tfrac{4}{5}A+3\times24\times-2A+3\times3\times16\times A$$
$$+2\times24\times\tfrac{1}{2}A+2\times3\times16\times-3A+1\times-4A.$$

$$\frac{}{20825}$$

ce qui étant réduit devient $-\frac{29072}{104125}A$, & cette fraction exprime le deſavantage de Jean.

Digitized by Google

Maintenant si l'on ajoute en une somme les desavantages trouvés des trois joueurs Paul, Jacques & Jean, $\frac{-21053-12610-2972\times A}{20825\times 5}$, on trouvera que leur somme $= -\frac{7327}{20825}A$.

Or on a vû dans le second cas du Problême précedent, que l'avantage de Pierre dans chaque main étoit $\frac{7327}{20825}A$, & par consequent ces deux termes étant comparés se détruisent.

On a donc la juste proportion du desavantage des trois joueurs, & le total de leur desavantage, ainsi qu'on a dû le trouver.

On n'a fait ici attention qu'au desavantage qu'a dans chaque main chacun des trois joueurs Paul, Jacques & Jean. Maintenant si l'on veut avoir égard à ce qui leur survient de desavantage, lorsque l'on suppose que Pierre recommencera à tenir les cartes autant de fois qu'il fera la main, on trouvera le desavantage de Paul,

$$= -1\times\frac{21053}{104125}A+\frac{30229}{104125}\times\frac{21053}{104125}A+\overline{\frac{30229}{104125}}^{2}\times\frac{21053}{104125}A+\overline{\frac{30229}{104125}}^{3}\times\frac{21053}{104125}A+\&c.$$

& celui de Jacques

$$= -1\times\frac{12610}{104125}A+\frac{30229}{104125}\times\frac{12610}{104125}A+\overline{\frac{30229}{104125}}^{2}\times\frac{12610}{104125}A+\overline{\frac{30229}{104125}}^{3}\times\frac{12610}{104125}A+\&c.$$

& celui de Jean

$$= -1\times\frac{2970}{104125}A+\frac{30229}{104125}\times\frac{2972}{104125}A+\overline{\frac{30229}{104125}}^{2}\times\frac{2972}{104125}A+\overline{\frac{30229}{104125}}^{3}\times\frac{2972}{104125}A+\&c.$$

La somme de ces trois suites infinies sera égale à celle qui exprime l'avantage de Pierre; & lui étant comparée, elles se détruiront ayant des signes contraires.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

90. SI l'on veut connoître les valeurs exactes des suites infinies qui expriment l'avantage de celui qui a la main, en supposant que A qui exprime le jeu soit une pistole ou dix livres; on les aura dans cette Table.

Pour trois coupeurs son avantage sera 2 l. 15 s. 10 d. $\frac{490}{903}$.
Pour quatre coupeurs . . . . . 4 l. 19 s. 1 d. $\frac{2569}{3079}$.
Pour cinq coupeurs . . . . . 7 l. 14 s. 7 d. $\frac{4955}{330331}$.
Pour six coupeurs . . . . 10 l. 12 s. 10 d. $\frac{328372137818918}{3357038820472331}$.
Pour sept coupeurs . . . . 14 l. 16 s. 5 d. $\frac{12762103970233}{7756210005311777}$.

Il suit de là que l'avantage de celui qui a la main ne croît pas dans la même raison que le nombre des joueurs, puisque son avantage qui est environ 2 liv. 16 sols, lorsqu'il y a trois coupeurs, est beaucoup plus grand que 5 liv. 12 sols lorsqu'il y a six coupeurs.

COROLLAIRE II.

91. SI l'on suppose que le jeu soit aux pistoles, & qu'il y ait quatre coupeurs Pierre, Paul, Jacques & Jean, ainsi que dans le second Problême, ou dans le second cas du premier, le desavantage de Paul sera 2 l. 16 s. 11 d. $\frac{2343}{3079}$;
le desavantage de Jacques sera . . . 1 l. 14 s. 1 d. $\frac{1689}{3079}$;
le desavantage de Jean sera . . . . . 8 s. 0 $\frac{1616}{3079}$;

Il faut remarquer, 1°, que la somme des trois termes qui expriment les divers desavantages des joueurs est égale à celui-ci 4 liv. 19 s. 1 d. $\frac{2569}{3079}$, qui exprime l'avantage de Pierre; 2°, que le rapport des desavantages de Paul, Jacques & Jean est à peu près comme les nombres 7, 4, 1.

Digitized by Google

COROLLAIRE III.

92. LA probabilité qu'il y a que Pierre fera la main, diminue à meſure qu'il y a un plus grand nombre de coupeurs; & l'ordre de cette diminution depuis trois coupeurs juſqu'à ſept incluſivement, eſt à peu près comme ces fractions, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$.

COROLLAIRE IV.

93. IL ſe trouve ſouvent des coupeurs qui faute de ſçavoir leurs intereſts, ou par une imagination qu'ils ont d'avoir la main malheureuſe, ou enfin pour ne point perdre plus d'argent qu'ils n'ont deſſein d'en hazarder, paſſent leur main, ſans quitter pour cela le jeu. Chaque coupeur ſçaura par le ſecond Problême, combien celui qui renonce à la main lui fait d'avantage.

COROLLAIRE V.

94. IL en eſt de même quand un coupeur quitte le jeu, chacun des autres coupeurs pourra découvrir par le même Problême, combien cela lui eſt avantageux ou préjudiciable.

COROLLAIRE VI.

95. ON trouvera aiſément par tout ce qui précede combien il y a à parier que Pierre fera la main ſelon toutes les differentes diſpoſitions des cartes des coupeurs. Voici une Table que j'ai faite pour divers cas où Pierre qui a la main auroit carte triple.

Digitized by Google

TABLE.

Pierre peut parier

S'il n'y a au jeu qu'une carte ſimple,	3 contre	1
S'il y a deux cartes ſimples,	9 contre	5
S'il y a trois cartes ſimples,	81 contre	59
S'il y a quatre cartes ſimples,	243 contre	211
S'il y a cinq cartes ſimples,	729 contre	727
S'il n'y a qu'une carte double,	2 contre	1
S'il y a une carte ſimple & une double,	7 contre	5
S'il y a deux cartes doubles,	8 contre	7
S'il y a deux ſimples & une double,	67 contre	59
Lorſqu'il y a ſix cartes ſimples,	6561 contre	7271
Lorſqu'il y a une carte ſimple & deux doubles,	59 contre	61

REMARQUE I.

96. C'EST un préjugé commun parmi les Joueurs, que la carte de la réjouiſſance eſt favorable à ceux qui y mettent. Pour ſe deſabuſer de cette opinion, il faut prendre garde que ſi la carte de la réjouiſſance a de l'avantage dans certaines diſpoſitions des cartes des coupeurs, elle a du deſavantage en d'autres, & que cela ſe compenſe toujours exactement.

Suppoſons, par exemple, qu'il y ait trois coupeurs comme dans le premier cas du premier Problême, & que l'argent de la réjouiſſance ſoit nommé $2b$, il eſt bien vrai que l'avantage de la réjouiſſance ſera $\frac{6}{245}b$ lorſque les cartes des trois coupeurs ſeront ſimples, & $\frac{1}{49}b$ lorſque la carte de Jacques ſera double; mais en récompenſe ſon deſavantage ſera $\frac{44}{245}b$ lorſque la carte de Pierre ſera double, & $\frac{24}{49}b$ lorſqu'elle ſera triple.

Multipliant donc ces nombres par ceux qui expriment les differentes probabilités qu'il y a que telle ou telle de ces diſpoſitions ſe rencontrera, on aura $\frac{6\times 32}{245\times 425}b + \frac{24}{49\times 425}b - \frac{44\times 48}{245\times 425}b - \frac{24}{49\times 425}b = 0$; ce qui fait voir qu'il n'y a dans ce cas ni avantage, ni deſavantage pour la carte de la réjouiſſance.

On

On pourra découvrir la même choſe par rapport à tout autre nombre de coupeurs.

REMARQUE II.

97. IL y a un Jeu aſſés connu qu'on nomme la Duppe, c'eſt une eſpece de Lanſquenet renverſé. La difference de ce Jeu à celui du Lanſquenet conſiſte en ce qui ſuit; 1°, celui qui tient la Duppe ſe donne la premiere carte; 2°, celui qui a coupé les cartes eſt obligé de prendre la ſeconde; 3°, les autres Joueurs peuvent prendre ou refuſer la carte qui leur eſt préſentée; 4°, celui qui prend une carte double eſt obligé d'en faire le parti; 5°, celui qui tient la Duppe ne quitte point les cartes, & conſerve toujours la main. La reſſemblance qu'il y a de ce Jeu à celui du Lanſquenet, a fait imaginer aux Joueurs qu'il y a du deſavantage pour celui qui tient la main, & d'autant plus qu'à ce Jeu la main ne change point; au lieu qu'au Lanſquenet chacun la tient à ſon tour. Sur ce fondement ils lui ont donné le nom de la Duppe: mais il ne lui convient nullement; car il eſt aiſé de découvrir que l'égalité eſt parfaite dans ce Jeu, & pour les Joueurs entr'eux, & pour celui qui tient la main à l'égard des Joueurs. Il me ſuffit de faire cette remarque, un peu d'attention en convaincra ceux qui voudront prendre la peine de l'examiner.

Digitized by Google

PROBLÊMES DIVERS SUR LE JEU DU TREIZE.

EXPLICATION DU JEU.

98. Les Joueurs tirent d'abord à qui aura la main. Supposons que ce ſoit Pierre, & que le nombre des Joueurs ſoit tel qu'on voudra. Pierre ayant un jeu entier compoſé de cinquante-deux cartes mêlées à diſcretion, les tire l'une après l'autre, nommant & prononçant un lorſqu'il tire la premiere carte, deux lorſqu'il tire la ſeconde, trois lorſqu'il tire la troiſiéme, & ainſi de ſuite juſqu'à la treiziéme qui eſt un Roy. Alors ſi dans toute cette ſuite de cartes il n'en a tiré aucune ſelon le rang qu'il les a nommées, il paye ce que chacun des Joueurs a mis au jeu, & cede la main à celui qui le ſuit à la droite.

Mais s'il lui arrive dans la ſuite des treize cartes, de tirer la carte qu'il nomme, par exemple, de tirer un as dans le temps qu'il nomme un, ou un deux dans le temps qu'il nomme deux, ou un trois dans le temps qu'il nomme trois, &c. il prend tout ce qui eſt au jeu, & recommence comme auparavant, nommant un, enſuite deux, &c.

Il peut arriver que Pierre ayant gagné pluſieurs fois, & recommençant par un, n'ait pas aſſés de cartes dans ſa main pour aller juſqu'à treize, alors il doit, lorſque le jeu lui manque, mêler les cartes, donner à couper, & enſuite tirer du jeu entier le nombre de cartes qui lui eſt néceſſaire pour continuer le jeu, en commençant par celle où

Digitized by Google

il eſt demeuré dans la précedente main. Par exemple, ſi en tirant la derniere carte il a nommé ſept, il doit en tirant la premiere carte dans le jeu entier, après qu'on a coupé, nommer huit, & enſuite neuf, &c. juſqu'à treize, à moins qu'il ne gagne plûtôt, auquel cas il recommenceroit, nommant d'abord un, enſuite deux, & le reſte comme on vient de l'expliquer. D'où il paroît que Pierre peut faire pluſieurs mains de ſuite, & même qu'il peut continuer le jeu à l'infini.

PROBLÊME.

PROPOSITION V.

Pierre a un certain nombre de cartes differentes qui ne ſont point repetées, & qui ſont mêlées à diſcretion: il parie contre Paul que s'il les tire de ſuite, & qu'il les nomme ſelon l'ordre des cartes, en commençant ou par la plus haute, ou par la plus baſſe, il lui arrivera au moins une fois de tirer celle qu'il nommera. Par exemple, Pierre ayant en main quatre cartes, ſçavoir un as, un deux, un trois & un quatre mêlées à diſcretion, parie que les tirant de ſuite, & nommant un lorſqu'il tirera la premiere, deux lorſqu'il tirera la ſeconde, trois lorſqu'il tirera la troiſiéme, il lui arrivera ou de tirer un as lorſqu'il nommera un, ou de tirer un deux quand il nommera deux, ou de tirer un trois quand il nommera trois, ou de tirer un quatre quand il nommera quatre. Soit conçu la même choſe de tout autre nombre de cartes. On demande quel eſt le ſort ou l'eſperance de Pierre pour quelque nombre de cartes que ce puiſſe être depuis deux juſqu'à treize.

99. SOIENT les cartes avec leſquelles Pierre fait le parti, repréſentées par les lettres a, b, c, d, &c. Si l'on nomme m le nombre des cartes qu'il tient, & n le nombre qui exprime tous les arrangemens poſſibles de ces cartes, la fraction $\frac{n}{m}$ exprimera combien de differentes fois chaque lettre occupera chacune des places. Or il faut

remarquer que ces lettres ne ſe rencontrent pas toujours à leur place utilement pour le Banquier ; par exemple, *a*, *b*, *c* ne donne qu'un coup pour gagner à celui qui a la main, quoique chacune de ces trois lettres y ſoit à ſa place ; Et de même *b*, *a*, *c*, *d* ne donne qu'un coup à Pierre pour gagner, quoique chacune des lettres *c* & *d* y ſoit à ſa place. La difficulté de ce Problême conſiſte donc à démêler combien de fois chaque lettre eſt à ſa place utilement pour Pierre, & combien de fois elle y eſt inutilement.

PREMIER CAS.

Pierre tient un as & un deux, & parie contre Paul, qu'ayant mêlé ces deux cartes, & nommant un lorſqu'il tirera la premiere, & deux lorſqu'il nommera la ſeconde, il lui arrivera ou de tirer un as pour la premier carte, ou de tirer un deux pour la ſeconde carte. L'argent du jeu eſt exprimé par A.

100. DEUX cartes ne peuvent s'arranger que de deux façons differentes : l'une fait gagner Pierre, l'autre le fait perdre : donc ſon ſort ſera $\frac{A+0}{2} = \frac{1}{2}A$.

SECOND CAS.

Pierre tient trois cartes.

101. SOIENT ces trois cartes repréſentées par les lettres *a*, *b*, *c* : on obſervera que des ſix arrangemens differens que ces trois lettres peuvent recevoir, il y en a deux où *a* eſt à la premiere place ; qu'il y en a un où *b* eſt à la ſeconde place, *a* n'étant point à la premiere ; & un où *c* eſt à la troiſiéme place, *a* n'étant point à la premiere, & *b* n'étant point à la ſeconde ; d'où il ſuit qu'on aura $S = \frac{1}{3}A$; & par conſequent que le ſort de Pierre eſt à celui de Paul, comme deux eſt un.

Digitized by Google

TROISIE'ME CAS.

Pierre tient quatre cartes.

102. SOIENT les quatre cartes repréſentées par les lettres a, b, c, d: on obſervera que des vingt-quatre arrangemens differens que ces quatre lettres peuvent recevoir, il y en a ſix où a occupe la premiere place; qu'il y en a quatre où b eſt à la ſeconde, a n'étant pas à la premiere; trois où c eſt à la troiſiéme, a n'étant pas à la premiere, & b n'étant pas à la ſeconde; enfin deux où d eſt à la quatriéme, a n'étant pas à la premiere, b n'étant pas à la ſeconde, & c n'étant pas à la troiſiéme; d'où il ſuit qu'on aura le ſort de Pierre $= S = \frac{6+4+3+2}{24} A = \frac{15}{24} A = \frac{5}{8} A$; & par conſéquent que le ſort de Pierre eſt au ſort de Paul comme cinq à trois.

QUATRIE'ME CAS.

Pierre tient cinq cartes.

103. SOIENT les cinq cartes repréſentées par les lettres a, b, c, d, f: on obſervera que des 120 arrangemens differens que cinq lettres peuvent recevoir, il y en a vingt-quatre où a occupe la premiere place, dix-huit où b occupe la ſeconde, a n'occupant pas la premiere; quatorze où c eſt à la troiſiéme place, a n'étant pas à la premiere place, ni b à la ſeconde; onze où d eſt à la quatriéme place, a n'étant pas à la premiere, ni b à la ſeconde, ni c à la troiſiéme; enfin neuf arrangemens où f eſt à la cinquiéme place, a n'étant pas à la premiere, ni b à la ſeconde, ni c à la troiſiéme, ni d à la quatriéme; d'où il ſuit qu'on aura le ſort de Pierre $= S = \frac{24+18+14+11+9}{120} A = \frac{76}{120} A = \frac{19}{30} A$; & par conſequent que le ſort de Pierre eſt au ſort de Paul comme dix-neuf eſt à onze.

Digitized by Google

GENERALEMENT.

104. Si l'on nomme S le ſort que l'on cherche, le nombre des cartes que Pierre tient étant exprimé par p; g le ſort de Pierre, le nombre des cartes étant $p-1$; d ſon ſort, le nombre des cartes qu'il tient étant $p-2$, on aura $S=\frac{g\times\overline{p-1}+d}{p}$. Cette formule donnera tous les cas, ainſi qu'on les voit réſolus dans la Table ci-jointe.

TABLE.

Si $p=1$, on aura $S=A$.
Si $p=2$, on aura $S=\frac{1}{2}A$.
Si $p=3$, on aura $S=\frac{2}{3}A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{6}A$.
Si $p=4$, on aura $S=\frac{5}{8}A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{8}A$.
Si $p=5$, on aura $S=\frac{19}{30}A=\frac{1}{2}A+\frac{2}{15}A$.
Si $p=6$, on aura $S=\frac{91}{144}A=\frac{1}{2}A+\frac{19}{144}A$.
Si $p=7$, on aura $S=\frac{531}{840}A=\frac{1}{2}A+\frac{111}{840}A$.
Si $p=8$, on aura $S=\frac{3641}{5760}A=\frac{1}{2}A+\frac{761}{5760}A$.
Si $p=9$, on aura $S=\frac{28673}{45360}A=\frac{1}{2}A+\frac{5993}{45360}A$.
Si $p=10$, on aura $S=\frac{28319}{44800}A=\frac{1}{2}A+\frac{5919}{44800}A$.
Si $p=11$, on aura $S=\frac{252\,1223}{3991680}A=\frac{1}{2}A+\frac{527381}{3991680}A$.
Si $p=12$, on aura $S=\frac{10278675\,9}{479001600}A=\frac{1}{2}A+\frac{6328595\,9}{479001600}A$.
Si $p=13$, on aura $S=\frac{1093\,19663}{17297\,2800}A=\frac{1}{2}A+\frac{228\,51263}{17297\,2800}A$.

Cette formule donneroit de même l'avantage de Pierre, ſi l'on ſuppoſoit qu'il y eût un plus grand nombre de cartes de differente eſpece.

REMARQUE I.

105. La ſolution précedente fournit un uſage ſingulier des nombres figurés, car je trouve en examinant la for-

Digitized by Google

mule, que le ſort de Pierre eſt exprimé par une ſuite infinie de termes qui ont alternativement + & —, & tels que le numerateur eſt la ſuite des nombres qui compoſent dans la Table, *art.* 1, la colonne perpendiculaire qui répond à p, en commençant par p, & le dénominateur la ſuite des produits $p \times p - 1 \times p - 2 \times p - 3 \times p - 4 \times p - 5$, &c. en ſorte que ces produits qui ſe trouvent dans le numerateur & dans le dénominateur ſe détruiſans, il reſte pour expreſſion du ſort de Pierre cette ſuite très ſimple $\frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} +$ &c.

Si l'on forme un Logarithmique dont la ſoutangente ſoit l'unité, & que l'on prenne deux ordonnées, dont l'une ſoit l'unité, & l'autre ſoit éloignée de cette premiere d'une quantité égale à la ſoutangente, l'excès de l'ordonnée conſtante ſur la derniere ſera égal à cette ſuite.

Pour le démontrer ſoit la formule generale des ſoutangentes $s = \pm \frac{ydx}{dy}$, la ſoutangente étant nommée s, l'abciſſe x, l'ordonnée y. On ſuppoſera y égale à une ſuite d'expoſans des x affectés de coefficiens indéterminés, par exemple, $= 1 + ax + bxx + cx^3 + dx^4 +$ &c. & prenant de part & d'autre la difference, diviſant enſuite par dx, & multipliant par s, on trouvera $\pm \frac{sdy}{dx} = y = 1 + ax + bxx + cx^3 + dx^4 +$ &c. $= \pm as \pm 2bsx \pm 3csxx \pm 4dsx^3 +$ &c. Si l'on compare les termes omologues de ces deux ſuites, & que l'on tire de cette comparaiſon la valeur des coefficiens a, b, c, d, on auroit $y = 1 \pm \frac{x}{s} + \frac{1xx}{1.2ss} \pm \frac{1x^3}{1.2.3s^3} + \frac{1x^4}{1.2.3.4s^4} \pm$ &c. ce qui fait voir que ſi l'on détermine, y, à être l'ordonnée d'un logarithmique dont la ſoutangente conſtante ſoit $= 1$, on aura l'ordonnée qui correſpond à x pris du côté que les ordonnées diminuent, $= 1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} -$ &c. on peut voir cette démonſtration dans les Actes de Leipſic de l'année 1693, p. 179, où le celebre Mr de Leibnitz réſout ce Problême : *Un logarithme étant donné, trouver le nombre qui lui correſpond.* Or il eſt clair que ſi dans cette ſuite on ſuppoſe $x = 1$, c'eſt à dire égale à la ſoutangente ou à l'ordonnée conſtante,

& qu'on retranche cette ſuite de l'unité, elle deviendra la ſuite du preſent Problême.

On peut encore le démontrer plus ſimplement en cette ſorte. Soit conçue une logarithmique dont la ſoutangente ſoit l'unité ; on prendra ſur cette courbe une ordonnée conſtante $= 1$, & une autre ordonnée plus petite $= 1 - y$, l'on nommera x l'abciſſe compriſe entre ces deux ordonnées, on aura $dx = \frac{dy}{1-y}$, & $x = y + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4$ + &c. & par la methode pour le retour des ſuites, $y = x - \frac{xx}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ — &c. ce qui, en ſuppoſant $x = 1$, devient $= 1 - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ — &c. *C. Q. F. D.*

On peut obſerver que la ſuite

B $\frac{1}{1} - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ + &c.

eſt égale à chacune des trois qui ſuivent *C*, *D*, *F*, leſquelles ſous des formes très differentes ne laiſſent pas d'avoir la même valeur ; en ſorte que tout ce qui convient à la ſuite *B* leur convient auſſi.

C $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{36}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$ + &c. $- 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}$ + &c.

D $\frac{1}{2} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \frac{9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}$ + &c.

F $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$ + &c.
$- \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}$ — &c.

On pourroit faire pluſieurs remarques curieuſes par rapport à ces ſuites ; mais cela nous écarteroit de notre ſujet, & nous meneroit trop loin.

REMARQUE II.

106. LES deux formules des *art.* 104 & 105 apprennent combien celui qui tient les cartes a de hazards pour gagner par quelque carte que ce ſoit ; mais elles ne font point connoître

connoître combien il a de hazards par chaque carte qu'il tire depuis la premiere juſqu'à la derniere. On voit bien que ce nombre des hazards diminue toujours, & qu'il y a, par exemple, plus de hazards pour gagner par l'as que par le deux, & par le trois que par le quatre, &c. Mais on ne tire pas aiſément de ce qui précede la loi de cette diminution, on la trouvera dans cette Table.

1 = 1
0. 1 = 1
1. 1. 2 = 4
2. 3. 4. 6 = 15
9. 11. 14. 18. 24 = 76
44. 53. 64. 78. 96. 120 = 455
265. 309. 362. 426. 504. 600. 720 = 3186
1854. 2119. 2428. 2790. 3216. 3720. 4320. 5040 = 25487

Cette Table fait voir qu'avec cinq cartes, par exemple, un as, un deux, un trois, un quatre & un cinq. Pierre a vingt-quatre façons de gagner par l'as; dix-huit de gagner par le deux n'ayant point gagné par l'as; quatorze de gagner par le trois, n'ayant gagné ni par l'as ni par le deux; onze de gagner par le quatre, n'ayant gagné ni par l'as, ni par le deux, ni par le trois; & enfin qu'il n'a que neuf façons de gagner par le cinq, n'ayant gagné ni par l'as, ni par le deux, ni par le trois, ni par le quatre.

Chaque rang de cette Table ſe forme ſur le précedent d'une maniere très facile. Pour la faire entendre, ſuppoſons encore qu'il y ait cinq cartes. On voit d'abord qu'il y a vingt-quatre façons de gagner par l'as. Cela eſt évident, puiſque l'as étant déterminé à être à la premiere place, les quatre autres cartes peuvent être rangées de toutes les façons poſſibles; & en general il eſt clair que le nombre des cartes étant p, le nombre des hazards pour gagner par l'as eſt exprimé par autant de produits des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. qu'il y a d'unités dans $p - 1$. Cela poſé, $24 - 6 = 18$ me donne les hazards pour gagner par le deux, $18 - 4 = 14$ me donne les hazards

Digitized by Google

pour gagner par le trois, $14 - 3 = 11$ me donne les hazards pour gagner par le quatre ; & enfin $11 - 2 = 9$ me donne les hazards pour gagner par le cinq.

Il en eſt de même pour tout autre nombre de cartes, & generalement chaque nombre de la Table eſt égal à la difference de celui qui eſt à ſa droite & que l'on a déja trouvé, à celui qui eſt immédiatement au deſſus.

On peut encore trouver un ordre reglé dans les nombres 1, 1, 4, 15, 76, 455, &c. qui expriment toutes les manieres de gagner avec un nombre de cartes quelconque : cet ordre eſt viſible dans la Table ſuivante.

$$\overline{0 \times 1} + 1 = 1$$
$$\overline{1 \times 2} - 1 = 1$$
$$\overline{1 \times 3} + 1 = 4$$
$$\overline{4 \times 4} - 1 = 15$$
$$\overline{15 \times 5} + 1 = 76$$
$$\overline{76 \times 6} - 1 = 455$$
$$455 \times 7 + 1 = 3186$$
$$3186 \times 8 - 1 = 25487$$

Ces nombres 1, 1, 4, 15, 76, &c. expriment combien il y a de hazards pour que quelqu'une d'entre les p cartes ſe trouve rangée à ſa place ; c'eſt à dire, par exemple, le 3 à la 3e, ou le 4 à la 4e, ou le 5 à la 5e, &c.

COROLLAIRE I.

107. SOIT p le nombre des cartes, q le nombre des hazards que Pierre a pour gagner lorſque le nombre des cartes eſt $p - 1$. Le nombre des hazards favorables à Pierre eſt exprimé dans cette formule très ſimple $pq \pm 1$; ſçavoir + lorſque p eſt un nombre impair, & — lorſqu'il eſt pair.

COROLLAIRE II.

108. LES nombres 0, 1, 2, 9, 44, 265, &c. qui compoſent la 1re bande perpendiculaire de la Table qui eſt dans la page précedente, expriment le nombre des hazards qu'il y a pour qu'aucune carte ne ſoit à ſa place.

Digitized by Google

PROPOSITION VI.

PROBLÈME.

Pierre tire un certain nombre p *de cartes de ſuite, par exemple, toute la couleur de carreau, en nommant d'abord as, enſuite deux, enſuite trois juſqu'au Roy, Paul lui donnera une piſtole pour chaque carte qu'il amenera à ſon rang : On demande combien Pierre a de hazards pour gagner ou une, ou deux, ou trois, ou quatre, &c. piſtoles.*

SOLUTION.

109. LA formule $1 \times 1 + p \times 0 + \frac{p \cdot p-1}{1 \cdot 2} \times \overline{0+1} + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \overline{0-1+3} + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \overline{0+1-4+4 \cdot 3} + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \times \overline{0-1+5-5 \cdot 4+5 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \times \overline{0+1-6+6 \cdot 5-6 \cdot 5 \cdot 4+6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}$ + &c. donnera le nombre des hazards cherché.

L'ordre de cette ſuite eſt aiſé à appercevoir, & on la peut continuer à l'infini. Le premier terme exprime combien il y a de hazards pour que chaque carte ſe trouve à ſa place. La ſomme des deux premiers exprime combien il y a de hazards pour qu'il s'en trouve au moins $p-1$ à leur rang; la ſomme des trois premiers exprime combien il y a de hazards pour qu'il s'en trouve au moins $p-2$ à leur rang.

En appliquant cette formule au cas de treize cartes, je trouve que ſur les 6227020800 façons differentes dont treize choſes peuvent être arrangées, il y en a pour que

toutes ſe trouvent à leurs places.		1
Pour qu'il y en ait douze,		0
Pour qu'il y en ait onze,		78
Pour qu'il y en ait dix,		572
Pour qu'il y en ait neuf,	préciſément,	6435
Pour qu'il y en ait huit		56628
Pour qu'il y en ait ſept,		454740

Pour qu'il y en ait ſix,		3181464
Pour qu'il y en ait cinq,		19090071
Pour qu'il y en ait quatre,	préciſément	95449640
Pour qu'il y en ait trois,		381798846
Pour qu'il y en ait deux,		1145396460
Pour pour qu'il y en ait une,		2290792933
Pour qu'il y en ait une au moins		3936227868

Et par conſequent ſi Paul s'oblige de donner à Pierre une piſtole pour chaque carte qu'il amenera à ſa place, on aura l'avantage de Pierre en multipliant le premier de ces nombres par 13, le 2e par 12, le 3e par 11, &c.

DEMONSTRATION.

110. LA loi de ces nombres 1, 0, 0 + 1, 0 — 1 + 3, 0 + 1 — 4 + 4 . 3, 0 — 1 + 5. — 5 . 4 + 5 . 4 . 3, &c. ſe tire aiſément de la formule. $B = \overset{\text{impair}}{\text{pair}} \pm 1 \mp p \pm p \cdot p - 1 \mp p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \pm p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot p - 3 \cdot \mp$ &c. car cette ſuite exprimant le nombre des arrangemens où quelqu'une des cartes ſe trouve rangée à ſa place, en employant les ſignes de deſſus lorſque p eſt un nombre impair, & ceux de deſſous quand p eſt un nombre pair. Cette autre ſuite $p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot p - 3 \cdot p - 4$, &c. qui exprime tous les divers arrangemens poſſibles, moins B, exprimera le nombre des arrangemens où aucune carte ne ſe trouvera à ſa place, & donnera les nombres ci-deſſus pour toutes les valeurs de p. Maintenant ſi l'on nomme q le nombre de cartes que l'on ſuppoſe ne devoir point ſe trouver rangées à leur place, le nombre q doit être multiplié par celui qui exprime en combien de façons q peut être pris dans p, puiſqu'étant arrêté qu'il y en aura q qui ne ſeront point rangées à leur place, il eſt indéterminé leſquelles d'entre les p cartes ne ſeront point à leur rang. Or par l'*art.* 5, les formules $p \cdot \frac{p-1}{1 \cdot 2}$, $\frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, $\frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, &c. expriment en combien de façons differentes p cartes peuvent être priſes

Digitized by Google

ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, &c. Donc, &c.

PROPOSITION VII.

Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le Problème précedent, on demande l'avantage de Pierre.

SOLUTION.

111. SON avantage eſt toujours égal à l'unité quelque nombre de cartes qu'il y ait. Cela ſemble paradoxe, cependant la démonſtration en eſt facile. Car il eſt évident que Pierre ayant un nombre quelconque p de cartes exprimées par les lettres b, c, d, e, f, &c. Si l'on conçoit ces lettres rangées ſur p colonnes de 1, 2, 3, 4, 5..... $p-1$ arrangemens, telles que l'une commence par b, la ſeconde par c, la troiſiéme par d, la quatriéme par e, la cinquiéme par f, &c. La colonne qui commence par b donnera $2\times 1.2.3.4.5.....p-1\times A$, & chacune des autres donnera $1.2.3.4.5...p-1A-1.2.3.4.5....p-2\times A$.

Et plus ſimplement encore. Il eſt clair qu'il y a $1.2.3.4.5...p-1$ arrangemens où b ſe trouve à ſa place, & qu'il y en a autant où c ſe trouvera à ſa place; & ainſi des autres.

Et par conſequent nommant C le nombre de tous les differens arrangemens poſſibles, & D le nombre des hazards qu'il y a pour qu'aucune carte ne ſe trouve à ſon rang, A la miſe de Paul, B la miſe de Pierre, l'avantage de Pierre eſt exprimé par $\frac{CA-DB}{C}$, ce qui fait voir que B doit être $\frac{C}{D}A$ pour que le jeu ſoit égal, & que dans le cas de treize cartes & de $B=A$, l'avantage de Pierre eſt $\frac{6227020800A-2290792932A}{6227020800}=61.6ſ.5d.\frac{6419}{72072}$, en ſuppoſant que A exprime une piſtole, & que Pierre la paye à Paul, lorſque tirant les treize cartes il n'en amene aucune à ſon rang.

Digitized by Google

PROPOSITION VIII.

Pierre joue contre Paul aux mêmes conditions que dans le Problème de la Propoſ. 5, *excepté que l'on ſuppoſera ici que Paul ſoit obligé de tenir le jeu, & d'y mettre toujours la même ſomme lorſqu'il a perdu, juſqu'à ce qu'il arrive à Pierre de tirer juſqu'à la derniere carte, ſans en nommer aucune à ſa place. On ſuppoſe auſſi que Pierre recommence toujours en nommant as. On demande quel eſt l'avantage de Pierre.*

PREMIER CAS.

Pierre tient un as & un deux.

112. JE ſuppoſe que Pierre & Paul mettent chacun & mettront chaque fois au jeu une certaine ſomme que je nomme a. J'exprime les deux cartes par deux lettres, ſçavoir l'as par la lettre a, & le 2 par la lettre b. Cela poſé j'examine ce que les deux arrangemens differens ab, ba donnent à Pierre. Or je vois que l'arrangement ba fait perdre Pierre, & que l'autre arrangement ab le met dans une ſituation que je vois à la verité lui être favorable, mais qui m'eſt inconnue ; puiſque Pierre, pour achever, eſt obligé de mêler les cartes, & de retirer. Or en retirant il peut également lui arriver, ou de reperdre ce qu'il auroit déja gagné, ſi les cartes ſe trouvent arrangées ainſi que le repréſente l'arrangement ab ; ou de gagner de nouveau, avec le droit de recommencer, ſi les cartes ſont diſpoſées ainſi que le repréſente l'arrangement ba ; car dans cette diſpoſition il gagneroit par b, ayant à nommer un deux ; & enſuite par a, ayant à nommer un as ; & il auroit encore le droit de continuer le jeu, après avoir mêlé de nouveau les cartes.

Nommant donc B l'avantage cherché de Pierre, x ſon avantage lorſqu'il a amené pour premiere carte un as, on a $B = \frac{1}{2} \times \overline{a + x} + \frac{1}{2} \times -a$, & $x = \frac{1}{2} \times \overline{2a + B} + \frac{1}{2} \times -a$: d'où l'on tire $B = \frac{1}{3}a$.

Digitized by Google

SECOND CAS.

Pierre tient trois cartes, un as, un deux & un trois.

113. ON a ſix arrangemens.

$a+x$	abc	$a+B$	bac	$-a$	cab
$2a+B$	acb	$-a$	bca	$2a+B$	cba

J'appelle x l'avantage de Pierre, lorſqu'en rejouant, après avoir mêlé les cartes, il nomme trois.

Pour le déterminer je fais cette 2e Table.

$-a$	abc	$-a$	bac	$2a+y$	cab
$-a$	acb	$-a$	bca	$a+x$	cba

J'appelle y l'avantage de Pierre, lorſqu'en rejouant, après avoir mêlé les cartes, il nomme deux.

Pour le déterminer je fais cette 3e Table.

$-a$	abc	$2a+y$	bac	$-a$	cab
$a+y$	acb	$a+x$	bca	$-a$	cba

Comparant ces égalités je tire $B = a + \frac{16}{17}a$, $x = -\frac{1}{19}a$, $y = \frac{4}{19}a$.

TROISIE'ME CAS.

Pierre tient quatre cartes, un as, un deux, un trois & un quatre.

114. EN ſuivant la même route que ci-devant, on trouvera l'avantage de Pierre $= \frac{130225}{172279}a$.

Cette methode eſt déja fort longue pour quatre cartes, & devient impraticable pour un plus grand nombre: il faut s'en contenter par proviſion, en attendant qu'on en ait trouvé une meilleure.

Digitized by Google

PROBLÊME
SUR
LE JEU DE LA BASSETE.

EXPLICATION DES REGLES.

115. A Ce Jeu, comme à celui du Pharaon, le Banquier tient un jeu entier composé de cinquante-deux cartes. Après qu'il les a mêlées, & que chaque Joueur ou Ponte a mis une certaine somme sur une carte prise à volonté, le Banquier tourne le jeu, mettant le dessous dessus; en sorte qu'il voit la carte de dessous. Ensuite il tire toutes ses cartes deux à deux jusqu'à la fin du jeu, en commençant par la seconde. Voici les autres regles du jeu.

1°. La premiere carte est pour le Banquier; mais il ne prend que les deux tiers de la mise du Ponte lorsqu'il amene sa carte, & cela s'appelle *facer*. La seconde est entierement pour le Ponte, la troisiéme entierement pour le Banquier, & ainsi de suite alternativement. Il faut remarquer que lorsqu'une carte a gagné ou perdu elle n'appartient plus au jeu, à moins qu'on ne la remette de nouveau. Ainsi, par exemple, la carte du Ponte étant un Roy, si la premiere carte du jeu est une Dame, la seconde un Roy & la troisiéme aussi un Roy, le Banquier qui dit en tirant les cartes, *Roy a gagné*, *Roy a perdu* (cela s'entend des Pontes) perdra la mise du Ponte, quoique naturellement le second Roy l'eût fait gagner, si la premiere carte de la taille n'eût point été un Roy.

2°. Quand les Pontes veulent prendre une carte dans le cours du jeu, il faut que la taille soit basse, c'est à dire, que

que le Banquier les tirant, comme j'ai dit deux à deux, ait posé sa derniere taille ou couple de cartes sur le tapis, en sorte que la carte qui reste découverte soit perdante pour les Pontes. Alors si un Ponte prend une carte, la premiere carte que tirera le Banquier sera nulle à l'égard de ce Ponte, quoiqu'elle soit favorable aux autres Joueurs; si elle vient la seconde, elle sera facée, c'est à dire que le Banquier prendra les $\frac{2}{3}$ de ce que ce Ponte aura mis sur la carte: si elle vient dans la suite, elle sera en pur gain ou en pure perte pour le Banquier, selon qu'elle viendra, ou la premiere, ou la seconde d'une taille.

3°. La derniere carte, qui devroit être pour le Ponte, est nulle.

PROPOSITION IX.

PREMIERE METHODE.

Premier Cas.

L'on suppose que le Banquier ayant six cartes entre les mains, le Ponte en prenne une qui soit une fois dans ces six cartes, c'est à dire dans les cinq cartes couvertes. On demande quel est le sort du Banquier par rapport à cette carte du Ponte. Par exemple, si le Ponte met un écu sur sa carte, on demande à quelle partie de l'écu peut s'évaluer l'avantage du Banquier.

116. Soit le sort cherché exprimé par S, & la mise de Paul par A.

Si l'on conçoit les cent-vingt arrangemens differens que cinq cartes exprimées par les lettres a, b, c, d, f peuvent recevoir, posés sur cinq colonnes, de vingt-quatre arrangemens chacune; on remarquera, 1°, que celle où la lettre a occupe la premiere place, donne A au Banquier. 2°. Que dans chacune des quatre autres colonnes, la lettre a se trouve six fois à la 2e place, six fois à la 3e place, six fois à la 4e, & six fois à la cinquiéme; d'où il suit qu'on

aura $S = \frac{24 \times A + 4 \times 6 \times \frac{5}{3}A + \times 2A + 6 \times 0 + 6 \times A}{120}$

$= \frac{136}{120} = A + \frac{2}{15}A$; & par conſequent ſi A déſigne un écu valant ſoixante ſols, Paul prenant une carte, dans les conditions du préſent Problême, feroit à Pierre le même avantage que s'il lui donnoit huit ſols en pur don.

On peut encore conſiderer la choſe autrement, en prenant garde que de ces cinq colonnes, la premiere donnera $24A$, la ſeconde $24 \times \frac{5}{3}A$, la troiſiéme 24×0, la quatriéme $24 \times 2A$, & la cinquiéme $24A$.

Si la carte que prend le Ponte n'eſt qu'une fois parmi les cartes couvertes du Banquier dont le nombre ſoit exprimé par p, on aura $S = \frac{3Ap + 2A}{3p}$.

SECOND CAS.

L'on ſuppoſe que le Banquier tenant ſix cartes, le Ponte en prend une. Or comme la carte du Ponte ſe peut trouver ou deux fois, ou trois fois, ou quatre fois dans ces ſix cartes, & que cela diverſifie l'avantage du Banquier, il eſt à propos de chercher quel eſt ſon ſort dans toutes les variations de ce ſecond cas. Je commencerai par examiner quel eſt ſon ſort dans la ſuppoſition que la carte du Ponte ſoit deux fois dans la main du Banquier.

117. SOIENT les cinq cartes couvertes du Banquier déſignées par les lettres a, b, c, d, f, dont deux quelconques, par exemple a & f, expriment celle du Ponte. On remarquera, 1°, que les cent-vingt differens arrangemens poſſibles que les cinq cartes peuvent recevoir, étant poſés ſur cinq colonnes de vingt-quatre arrangemens chacune, dont la premiere commence par a, la ſeconde par b, la troiſiéme par c, &c. les deux colonnes qui commencent par a & par f donnent A au Banquier, puiſqu'elles ſont indifferentes pour le Banquier & pour le Ponte. 2°. Que chacune

Digitized by Google

des trois autres colonnes contient douze arrangemens qui donnent au Banquier $\frac{5}{3}A$, ce ſont ceux où a & f ſont à la deuxiéme place ; & quatre arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier, c'eſt à dire qui le font gagner. Cela ſe découvrira aiſément par la Table ci-jointe qui répréſente la ſeconde colonne, qui eſt celle où b tient la premiere place.

bacdf	*bcadf*	*bdacf*	*bfadc*
bacfd	*bcafd*	*bdafc*	*bfacd*
badcf	*bcdaf*	*bdcaf*	*bfcad*
badfc	*bcdfa*	*bdcfa*	*bfcda*
bafcd	*bcfad*	*bdfac*	*bfdac*
bafdc	*bcfda*	*bdfca*	*bfdca*

Il eſt clair que la premiere & la derniere de ces quatre colonnes donnent $\frac{5}{3}A$ au Banquier, & que chacune des deux autres contient deux arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier ; ce ſont ceux-ci, *bcdaf*, *bcdfa*, *bdcaf*, *bdcfa*. On aura donc

$$S = \frac{2 \times 24A + 3 \times 2 \times 6 \times \frac{5}{3}A + 2 \times 2 \times 2A}{120} = \frac{11}{10}A = A + \frac{1}{10}A.$$

2°. Pour trouver quel eſt le ſort du Banquier lorſque la carte que prend le Ponte eſt trois fois dans les cinq cartes du Banquier. On obſervera que des cinq colonnes ſuſdites il y en a trois qui donnent A au Banquier, & deux qui contiennent chacune dix-huit arrangemens qui donnent $\frac{5}{3}A$ au Banquier. Cela n'a pas beſoin de preuve. On aura donc $S = \frac{3 \times 24A + 2 \times 18 \times \frac{5}{3}A}{120} = \frac{132}{120}A = A + \frac{1}{10}A.$

3°. Pour trouver quel eſt le ſort du Banquier lorſque la carte que prend le Ponte eſt quatre fois dans les cinq cartes couvertes du Banquier. On obſervera que des cinq colonnes ſuſdites il y en a quatre qui donnent A au Banquier, & une qui lui donne $\frac{5}{3}A$. On aura donc

$$S = \frac{4 \times 24A + 24 \times \frac{5}{3}A}{120} = A + \frac{2}{15}A.$$

Digitized by Google

TROISIE'ME CAS.

L'on ſuppoſe que le talon étant compoſé de huit cartes, dont la premiere eſt découverte, le Ponte en prend une qui ſoit deux fois dans ces huit cartes. On demande quel eſt le ſort du Banquier par rapport à cette carte.

118. SOIENT exprimées les ſept cartes couvertes par les ſept lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*, dont deux, ſçavoir *a* & *f*, déſignent celle du Ponte. Soit auſſi, comme ci-devant, *S* le ſort cherché, & *A* la miſe de Paul. Cela poſé,

On obſervera, 1°, que poſant les cinq mil quarante arrangemens differens que les ſept lettres peuvent recevoir ſur ſept colonnes de ſept cens vingt arrangemens chacune, la colonne qui commence par *a* & celle qui commence par *f*, donneront chacune *A* au Banquier. 2°. Que ſi l'on conçoit chacune des cinq autres partagée de nouveau en ſix autres de cent-vingt arrangemens chacune, les deux d'entre ces ſix où *a* & *f* occupent la ſeconde place, donneront $\frac{1}{3}A$ au Banquier. 3°. Que les quatre autres colonnes d'entre ces ſix ont chacune quarante-huit arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier. Pour le voir aiſément il faut ſuppoſer qu'une des cinq colonnes ſubdiviſée en ſix autres, eſt celle qui commence par *b*, & conſulter la Table qui a ſervi à la ſolution du cas précedent. On remarquera d'abord que la premiere & la derniere colonne de cette Table étant variée autant qu'il eſt poſſible avec les deux nouvelles lettres *g* & *h*, *a* reſtant à la ſeconde place, elles fourniront chacune cent-vingt arrangemens qui donneront $\frac{1}{3}A$ au Banquier. A l'égard des quatre autres colonnes de cent-vingt arrangemens chacune, dans leſquelles les lettres *c*, *d*, *g*, *h* occuperoient la ſeconde place après *b*, il eſt aiſé de voir qu'il ſuffit d'en examiner une, puiſque toutes les quatre donnent le même ſort au Banquier. Soit la colonne troiſiéme de la Table celle que l'on veut examiner. Il faut prendre garde que chacun des quatre arrangemens *bcadf*, *bcafd*, *bcfad*, *bcfda* étant variés avec les

Digitized by Google

deux nouvelles lettres *g* & *h*, autant qu'il eſt poſſible, en ſorte neanmoins que *c* reſte à la ſeconde place, c'eſt à dire immédiatement après *b*, donnent ſix nouveaux arrangemens qui font gagner le Banquier, & lui donnent 2*A*. Par exemple *bcadf* fournit ceux-ci,

bcgadfh	*bchadfg*
bcgadhf	*bchagfd*
bcgahdf	*bchafgd*

Il en eſt ainſi des trois autres, puiſque *g* étant devant *a* ou *f*, ſe peut trouver en trois differentes places; & que *h* étant devant *a* ou *f*, ſe peut trouver en trois places differentes, *a* ou *f* reſtant toujours à la quatriéme.

On trouvera de même que les deux arrangemens *bcdaf*, *bcdfa* étant variés autant qu'il eſt poſſible avec *g* & *h*, en ſorte neanmoins que *c* ſoit toujours à la ſeconde place, fourniſſent chacun douze arrangemens qui donnent 2*A* au Banquier; car dans *bcdaf*, *g* & *h* peuvent s'arranger en ſix façons avec *d*, & en ſix façons differentes avec *f*, *a* reſtant à la quatriéme place; & de même dans *bcdfa*, *g* & *h* peuvent s'arranger en ſix façons avec *d*, & en ſix façons differentes avec *a*, *f* reſtant toujours à la quatriéme place. De tout cela il ſuit qu'on aura

$$S = \frac{2 \times 720A + 5 \times 2 \times 120 \times \frac{5}{7}A + 4 \times 48 \times 2A}{5040} = \frac{536}{504}A$$

$$= A + \frac{4}{63}A.$$

2°. Pour trouver quel eſt le ſort du Banquier lorſque la carte que prend le Ponte eſt trois fois dans les ſept cartes couvertes du Banquier.

Soient exprimées comme ci-devant les ſept cartes du Banquier par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*, dont trois quelconques, par exemple *a*, *d*, *f*, déſignent la carte du Ponte. Cela poſé,

On obſervera, 1°, que poſant les cinq mille quarante arrangemens differens que les ſept lettres peuvent recevoir ſur ſept colonnes de ſept cens vingt arrangemens chacune,

Digitized by Google

les trois qui commencent par les lettres *a*, *d*, *f* donnent *A* au Banquier, ce qui eſt évident. 2°. Que diſtribuant chacune des quatre autres en ſept colonnes de cent-vingt arrangemens chacune, les trois colonnes d'entre ces ſix où les lettres *a*, *d*, *f* tiendront la ſeconde place, donnent $\frac{1}{3}A$ au Banquier. 3°. Que chacune des trois autres colonnes contiendra trente-ſix arrangemens qui donneront $2A$ au Banquier. Pour s'en aſſurer, on peut conſulter la Table de l'*art. 117*, & remarquer que chacun des arrangemens de la ſeconde colonne de la Table où *b* eſt à la premiere place, & *c* à la ſeconde, ne peut par le mélange des deux nouvelles lettres *g* & *h*, recevoir que ſix arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier, les deux premieres reſtant à leur place. Ce qui paroîtra évident, ſi l'on conſidere que dans les ſix arrangemens

bcadf	*bcdaf*	*bcfad*
bcafd	*bcdfa*	*bcfda*

g ou *h* étant devant l'une des trois lettres *a*, *d*, *f*, *h* ou *g* peuvent s'arranger en trois façons differentes avec les deux dernieres.

Il eſt viſible qu'il en ſeroit de même des trois autres colonnes de cent-vingt arrangemens où les deux premieres lettres ſeroient *bd*, *bg*, *bh*. De tout cela il ſuit qu'on aura

$$S = \frac{3\times 720 + 4\times 3\times 120\times \frac{1}{3}A + 3\times 36\times 2A}{5040} = A + \frac{8}{105}A.$$

3°. Pour trouver quel eſt le ſort du Banquier lorſque le talon étant compoſé de ſept cartes couvertes, le Ponte en prend une qui eſt quatre fois dans ces ſept cartes; on obſervera, 1°, que concevant les cinq mille quarante arrangemens poſſibles de ſept cartes poſés ſur ſept colonnes de ſept cens vingt arrangemens chacune, dont l'une commence par *a*, la ſeconde par *b*, &c. comme ci-devant, il y en aura quatre de ces ſept qui donneront *A* au Banquier. 2°. Que diſtribuant chacune des trois autres ſur ſix colonnes de cent vingt arrangemens chacune, quatre de ces ſix fourniront

Digitized by Google

chacune cent vingt arrangemens qui donneront $\frac{5}{7}A$ au Banquier, & les deux autres vingt-quatre arrangemens chacune qui lui donneront $2A$. On aura donc

$$S = \frac{4 \times 720A + 3 \times \overline{4 \times 120 \times \frac{5}{7}A + 2 \times 24 \times 2A}}{5040} = A + \frac{11}{105}A$$

Il seroit inutile de poursuivre en détail la solution d'un plus grand nombre de cas. On voit assés par les réflexions précedentes, quelles seroient celles qu'il faudroit faire dans la supposition que le Banquier ayant neuf cartes couvertes, le Ponte en prît une. Ainsi, 1°, on trouvera que si la carte du Ponte est deux fois dans ces neuf cartes, on aura

$$S = \frac{2 \times 40320A + 7 \times \overline{2 \times 5040 \times \frac{5}{7}A + 6 \times 2160 \times 2A}}{5040 \times 8 \times 9}$$

$$= \frac{379680}{362880} = A + \frac{5}{108}A.$$

2°. Si la carte du Ponte est trois fois dans les neuf cartes du Banquier, on aura

$$S = \frac{3 \times 40320A + 6 \times \overline{3 \times 5040 \times \frac{5}{7}A + 5 \times 9360 \times 2A}}{362880}$$

$$= \frac{284480}{362880}A = A + \frac{5}{84}A.$$

3°. Enfin si la carte du Ponte est quatre fois dans ces neuf cartes, on aura

$$S = \frac{4 \times 40320A + 5 \times \overline{4 \times 5040 \times \frac{5}{7}A + 4 \times 1584 \times 2A}}{362880}$$

$$= \frac{192640}{362880}A = A + \frac{31}{378}A.$$

Il suit de ce qui précede que si l'on nomme g le sort du Banquier dans un nombre de cartes exprimé par $p - 2$, p le nombre des cartes, q le nombre de fois que la carte du Ponte se trouve dans le talon, on a generalement le sort du Banquier

$$= \frac{q}{p}A + \frac{p-q}{p} \times \frac{q}{p-1} \times \frac{5}{7}A + \frac{q \cdot p-q \cdot p-q-1 \cdot p-q-2}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3} \times 2A$$

$$+ \frac{p-q \cdot p-q-1}{p \cdot p-1} \times g - 1 \times \frac{q}{p-2}A - \frac{p-q-2}{p-2 \cdot p-3} \times q \times \frac{5}{7}A.$$

Digitized by Google

SECONDE METHODE.

119. SOIT B le ſort du Banquier à la premiere taille, y ſon ſort à la ſeconde, z ſon ſort à la troiſiéme, u ſon ſort à la quatriéme, &c. A, la miſe du Ponte, & le reſte comme ci-deſſus:

On trouve $B = \frac{q}{p}A + \frac{p-q}{p} \times \frac{q}{p-1} \times \frac{5}{3}A + \frac{p-q \cdot p-q-1}{p \cdot p-1}y$. $y = \frac{p-q-2\times q}{p-2 \cdot p-3} \times 2A + \frac{p-q-2 \cdot p-3}{p-2 \cdot p-3} \times z$, $z = \frac{p-q-4\times q}{p-4 \cdot p-5} \times 2A + \frac{p-q-4 \cdot p-q-5}{p-4 \cdot p-5} \times u$, $u = \frac{p-q-6\times q}{p-6 \cdot p-7} \times 2A + \frac{p-q-6 \cdot p-q-7}{p-6 \cdot p-7} \times t$, $t =$ &c.

Si l'on ſubſtitue pour y, z, u & t leurs valeurs, on aura cette formule indéfinie:

$B = \frac{q}{p}A + \frac{q \cdot p-q}{p \cdot p-1} \times \frac{5}{3}A + \frac{q \cdot p-q \cdot p-q-1 \cdot p-q-2}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3} \times 2A + \frac{q \cdot p-q \cdot p-q-1 \cdot p-q-2 \cdot p-q-3 \cdot p-q-4}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5} \times 2A + \frac{q \cdot p-q \cdot p-q-1 \cdot p-q-2}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3} \frac{p-q-3 \cdot p-q-4 \cdot p-q-5 \cdot p-q-6}{p-4 \cdot p-5 \cdot p-6 \cdot p-7} \times 2A +$ &c. qui donne le ſort du Banquier, quelques ſoient les valeurs de p & de q. Et faiſant ſur cette formule les mêmes réflexions qu'on a déja faites ſur celle du Pharaon, *art. 71*, on trouvera la démonſtration de la regle qui ſuit.

Il faut ajouter à ces deux termes $\frac{q}{p}$ A $+ \frac{q \cdot p-q}{p \cdot p-1} \times \frac{5}{3}A$ *la ſomme des nombres figurés, qui dans un rang horizontal, dont le quantiéme eſt* q, *répondent à des nombres naturels impairs*, Table 1re, art. 1er, *à commencer par* p — 4; *multiplier cette ſomme par autant de produits des nombres naturels* 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. *qu'il y a d'unités dans* q; *multiplier encore par* 2A, *& diviſer par autant de produits des quantités* p, p — 1, p — 2, p — 3, &c. *qu'il y a d'unités dans* q: *l'on aura le ſort du Banquier.*

Pour trouver ces ſommes, & tirer de cette regle des formules particulieres pareilles à celles que j'ai donné pour le Pharaon, on ſe ſervira ou de la proprieté des nombres figurés dont on parle à la page 92, *art. 73*, ou de la methode,

Digitized by Google

thode, *art.* 54, & l'on aura les formules qui ſuivent.

$B = \frac{2}{3} \times \frac{p+1}{pp-p}$ $C = \frac{3}{2p^3-6pp+4p}$ $D = \frac{4}{3p^3-9pp+6p}$ $E = \frac{5}{}$ &c.

La premiere B exprime l'avantage du Banquier, lorſque la carte du Ponte ſe trouve deux fois dans le talon ; C ſon avantage lorſqu'elle y eſt trois fois ; D ſon avantage lorſqu'elle y eſt quatre fois ; E ſon avantage ſi elle s'y trouvoit cinq fois, &c.

Si l'on veut une formule generale telle que j'en ai donné une pour le Pharaon, *art.* 74, on aura

$$\frac{q \times p-q}{p \cdot p-1} \times \frac{2}{3}a - \times p-q \times p-q-1 \times \frac{1}{2} \times \frac{q}{p \cdot p-1 \cdot p-2}a + \frac{1}{4} \times \frac{q \cdot q-1}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3} + \frac{1}{8} \times \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4} + \frac{1}{16} \times \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2 \cdot q-3}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5} + \frac{1}{32} \times \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2 \cdot q-3 \cdot q-4}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5 \cdot p-6}$$

Pour avoir l'avantage du Banquier, il faut prendre autant de termes de cette ſuite qu'il y a d'unités dans q, avec l'exception qui ſuit ; c'eſt à ſçavoir que le dernier terme, au lieu d'être multiplié comme les précedens négatifs par $p-q \cdot p-q-1$, ne doit l'être que par $p-q-1$, lorſque q eſt un nombre pair ; & par $p-q$, lorſque q eſt un nombre impair ; & qu'il doit avoir au dénominateur les mêmes produits que le terme qui le précede : l'origine & la démonſtration de cette formule ſe découvriront ſans peine dans ce que nous avons donné ſur le Pharaon, *art.* 73.

Il s'agit dans la Baſſete & dans le Pharaon de trouver la ſomme des nombres figurés du triangle arithmetique, *art.* 1, interpoſés de deux en deux, à commencer dans le Pharaon par celui qui correſpond au nombre naturel pair $p-2$; & dans la Baſſete, par celui qui correſpond au nombre naturel impair $p-4$.

Lorſque q n'eſt pas un nombre impair, ce qui arrive ſeulement à la premiere main, lorſque le Banquier tourne le jeu de carte : on eſt dans l'eſpece du Pharaon.

Digitized by Google

REMARQUE I.

120. L'AVANTAGE du Banquier eſt exprimé dans la 1re colonne de la Table ci-jointe par une fraction dont le numerateur eſt toujours le nombre 2, & dont le dénominateur eſt toujours le produit de ces nombres impairs 5, 7, 9, 11, 13, 15, par 3.

Dans la ſeconde colonne les numerateurs ſuivent l'ordre des nombres naturels 3, 4, 5, 6, &c. & les dénominateurs ſont les mêmes que dans la premiere colonne, à l'exception qu'il les faut concevoir multipliés par la ſuite des nombres 2, 3, 4, 5, 6, &c. en ſorte que ſi les numerateurs de la premiere colonne étoient 4, 6, 8, 10, 12, &c. les dénominateurs des deux colonnes ſeroient les mêmes.

Dans la troiſiéme colonne les numerateurs ont pour differences les nombres impairs 5, 7, 9, 11, 13, &c. dont la difference conſtante eſt 2. Les nombres du dénominateur étant diviſés par 3, ſont des nombres pyramidaux pris de deux en deux, dont la premiere difference eſt 75, la 2e 72, & la 3e qui eſt conſtante, 24. Ces dénominateurs peuvent auſſi être conçus ſe former en cette maniere $2 \times 4 \times \overline{4-2}$, $3 \times 6 \times \overline{6-3}$, $4 \times 8 \times \overline{8-4}$, $5 \times 10 \times \overline{10-5}$, $6 \times 12 \times \overline{12-6}$, & ainſi de ſuite.

Dans la quatriéme colonne les numerateurs ont pour premiere difference 42, & pour difference conſtante 16. Les dénominateurs ont pour premiere difference 450, pour ſeconde difference 432, & pour difference conſtante 144.

REMARQUE II.

121. IL ſeroit aiſé de tirer de l'ordre marqué ci-deſſus les mêmes formules que nous avons déja trouvé, ſans entrer dans aucun détail des regles de la Baſſete. Ainſi dans le cas de $q = 3$, on auroit le numerateur $3 + \frac{p-1}{2} \times 5 + \frac{p-1 \cdot p-7}{2 \cdot 2} \times \frac{2}{1 \cdot 2} = \frac{pp-2p-3}{4}$; & le dénominateur $= 30 + \frac{p-1}{2} \times 75 + \frac{p-1 \cdot p-7}{2 \cdot 2} \times \frac{72}{1 \cdot 2} + \frac{p-1 \cdot p-7 \cdot p-9}{2 \cdot 2 \cdot 3} \times \frac{24}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{p^3-3pp+2p}{2}$.

Digitized by Google

REMARQUE III.

122. A Ce Jeu, comme à celui du Pharaon, le plus grand avantage du Banquier eſt quand le Ponte prend une carte qui n'a point paſſé, & ſon moindre avantage eſt quand le Ponte en prend une qui a paſſé deux fois; ſon avantage eſt auſſi plus grand lorſque la carte du Ponte a paſſé trois fois, que lorſqu'elle a paſſé ſeulement une fois.

REMARQUE IV.

123. AU jeu de la Baſſete l'avantage du Banquier eſt moindre qu'au jeu du Pharaon, ce que l'on reconnoîtra aiſément en comparant l'avantage du Banquier au jeu de la Baſſete, lorſque tenant douze cartes le Ponte en prend une qui s'y trouve ou une, ou deux, ou trois, ou quatre fois, avec ſon ſort dans ce même cas au jeu du Pharaon.

L'on trouvera que le Ponte mettant une piſtole ſur ſa carte à la Baſſete, l'avantage du Banquier ſera 13 ſ. 4 d. lorſque la carte du Ponte ſera quatre fois dans les douze cartes du Banquier, 12 ſ. 1 d. lorſqu'elle y ſera une fois, 9 ſ. 8 d. lorſqu'elle y ſera trois fois, & 7 ſ. 3 d. lorſqu'elle y ſera deux fois; au lieu qu'au Pharaon l'avantage eſt 19 ſ. 2 d. $\frac{10}{33}$ dans le premier cas, 16 ſ. 8 d. dans le ſecond, 13 ſ. 7 $\frac{7}{11}$ d. dans le troiſiéme, & 10 ſ. 7 $\frac{3}{11}$ d. dans le quatriéme, ce qui donne 3 liv. 1 denier d'avantage au Banquier pour les quatre cas; au lieu qu'à la Baſſete les quatre enſemble ne donnent que 2 liv. 2 ſ. 4 den. ce qui n'eſt à peu près que les deux tiers de l'avantage du Banquier au jeu du Pharaon.

REMARQUE V.

124. CE jeu eſt préſentement beaucoup moins en uſage que le Pharaon. Les cartes qui ne vont pas, font perdre au jeu quelque choſe de ſa vivacité. D'ailleurs il y a ſou-

Digitized by Google

vent des diſputes pour ſçavoir ſi la carte du Ponte va ou ne va pas. On ne peut remedier à ces inconveniens, qui ſont fondés ſur la nature du jeu ; mais on pourroit rendre ce jeu plus égal en convenant que les cartes facées ne payaſſent que la moitié de la miſe du Ponte, alors l'avantage du Banquier ſeroit fort peu conſiderable, j'ai trouvé que ſi le Banquier ne prenoit qu'un tiers pour les faces, ce jeu lui ſeroit deſavantageux. La plûpart des Remarques qu'on a faites ſur le jeu du Pharaon, peuvent avoir lieu à l'égard de celui-ci, & il ne ſera pas inutile de les conſulter.



Digitized by Google

TABLE POUR LA

5	1 : =	2/15	2 : =	3/30	3
7	1 : =	2/21	2 : =	4/63	3
9	1 : =	2/27	2 : =	5/108	3
11	1 : =	2/33	2 : =	6/165	3
13	1 : =	2/39	2 : =	7/234	3
15	1 : =	2/45	2 : =	8/315	3
17	1 : =	2/51	2 : =	9/408	3
19	1 : =	2/57	2 : =	10/513	3
21	1 : =	2/63	2 : =	11/630	3
23	1 : =	2/69	2 : =	12/759	3
25	1 : =	2/75	2 : =	13/900	3
27	1 : =	2/81	2 : =	14/1053	3
29	1 : =	2/87	2 : =	15/1218	3
31	1 : =	2/93	2 : =	16/1395	3
33	1 : =	2/99	2 : =	17/1584	3
35	1 : =	2/105	2 : =	18/1785	3
37	1 : =	2/111	2 : =	19/1998	3
39	1 : =	2/117	2 : =	20/2223	3
41	1 : =	2/123	2 : =	21/2460	3
43	1 : =	2/129	2 : =	22/2709	3
45	1 : =	2/135	2 : =	23/2970	3
47	1 : =	2/141	2 : =	24/3243	3
49	1 : =	2/147	2 : =	25/3528	3
51	1 : *	*	2 : *	*	3
52	1 : *	*	2 : *	*	3

Digitized by Google

Digitized by Google

PROBLÊMES
SUR LE PIQUET, L'OMBRE, LA TRIOMPHE, LE BRELAN, L'IMPERIALE ET LE QUINZE.

REFLEXIONS
ſur les Jeux qui ne ſont pas de pur hazard.

125. LORSQUE le hazard regne abſolument dans un jeu, on peut toujours déterminer l'avantage ou le deſavantage des Joueurs : les Problêmes précedens en peuvent ſervir de preuve ; & ſi l'on fait attention à la varieté des conditions de ces jeux, & au grand nombre de circonſtances auſquelles il a fallu avoir égard, on reconnoîtra que la plûpart des autres jeux de pur hazard, qu'on connoît ou qu'on peut imaginer, ſe détermineront par des methodes ou ſemblables, ou peu differentes de celles qui ont ſervi à réſoudre les Problêmes précedens.

Il n'en eſt pas de même des jeux où la ſcience du Joueur a part à l'évenement auſſi-bien que le ſort ; car cette ſcience, qui n'en merite pas le nom, n'étant fondée que ſur des regles trompeuſes de vrai-ſemblance, & le plus ſouvent ſur le caprice & la fantaiſie des Joueurs, il eſt impoſſible que les conjectures qu'on forme ſur ces regles, ne participent à leur incertitude. Ainſi la lumiere qui nous a conduit juſqu'ici dans les jeux de pur hazard, nous doit

Digitized by Google

manquer dans la plûpart des queſtions qu'on peut faire ſur les jeux dont les évenemens bons ou mauvais pour les Joueurs, ne dépendent point entierement de la fortune. Il eſt à propos d'éclaircir & de prouver ceci par des exemples.

Un Problême que l'on propoſe ſouvent ſur le Piquet, c'eſt de ſçavoir combien entre deux Joueurs égaux, un premier en carte peut parier de faire des points. On croit communément que cela peut aller à vingt-huit points, & c'eſt ſur ce pied que j'en ai vû faire le parti à de bons Joueurs. Or afin qu'un premier en carte pût réſoudre cette queſtion, il faudroit qu'il ſçût non ſeulement le nombre des diſpoſitions differentes que peuvent recevoir ſes douze cartes, & celles du dernier, & qu'il ſçut encore l'art de comparer tous les changemens qui peuvent arriver à ſes douze cartes lorſqu'il en écartera cinq pour en prendre autant dans le talon, & aux douze cartes du dernier, lorſqu'il en écartera trois pour en prendre trois au talon. Il ſeroit encore neceſſaire qu'il ſçut ce que le dernier doit écarter dans chacune des differentes diſpoſitions poſſibles de ſes douze cartes. Or c'eſt là ce que le premier ne peut ſçavoir, le dernier ne le ſçachant pas lui-même, car il n'y a point de Joueur qui ait des regles fixes & certaines pour toutes les differentes diſpoſitions poſſibles du jeu. Neanmoins ſans cette derniere connoiſſance, la premiere eſt preſque inutile à celui qui eſt premier en cartes, & il ne pourra jamais ſe faire des regles ſûres pour écarter à propos, & enſuite pour bien jouer les cartes.

Suppoſons encore qu'un Joueur veuille examiner ce qui lui eſt le plus avantageux d'écarter une carte majeure, ou une carte de Roy. Il eſt vrai qu'il s'appercevra ſans peine qu'en gardant la carte de Roy, il y a deux cartes qui lui peuvent donner une quinte, contre une s'il garde la quarte majeure; mais il n'en ſçauroit conclure quel parti il doit prendre; car outre que cela dépend de l'état où eſt la partie, il faut qu'il ait égard à la diſpoſition du reſte de ſon jeu, qu'il conſidere ce qu'il a à craindre de ſon adverſaire, il doit penſer à faire les cartes ou à les rendre égales, &c.

Digitized by Google

Or tout cela demande un grand nombre de comparaiſons dont chacune ſeroit la matiere d'un Problême fort compoſé. Ainſi il faut avouer que dans l'examen du détail de ce jeu, la theorie ne peut mener bien loin.

La premiere regle de l'Analyſe, c'eſt qu'on ne peut découvrir ce qui eſt inconnu, que par le moyen de ce qui eſt connu. Or dans les deux queſtions précedentes ce qui eſt connu n'eſt pas ſuffiſant pour découvrir ce qui eſt à trouver.

Il en eſt ainſi de la plûpart des queſtions qu'on peut propoſer ſur le Jeu de l'Ombre, & d'autant plus, qu'on y joue trois avec quarante cartes, & qu'il reſte un plus grand nombre de cartes au talon. C'eſt pourquoi dans la plus grande partie des difficultés qui ſe préſentent ſur ce jeu, il faut ſe contenter de chercher le vrai-ſemblable, & borner ſon étude à approcher de la verité le plus qu'il eſt poſſible. Quoique bien des Joueurs entendent l'art de deviner beaucoup mieux que moi, je ne laiſſerai pas de faire voir par l'exemple qui ſuit, de quelle maniere il s'y faut prendre.

Soit ſuppoſé que Pierre ait fait jouer en pique, qu'il ait quatre mains, & que jouant ſa cinquiéme il lui reſte encore deux triomphes ſûres, & outre cela le Roy de carreau & la Dame de cœur. On demande ſi Pierre doit tenter de faire la volle.

Pour réſoudre exactement ce Problême, il faudroit y faire entrer mille circonſtances dont on ne pourroit calculer la valeur préciſe qu'avec un fort grand travail: mais ſi l'on veut ſe contenter de la vrai-ſemblance, il ſuffira d'obſerver quelles ſont les rencontres principales ou Pierre entreprenant la volle perdroit; quelles ſont celles qui le feroient certainement gagner; & quelles ſont celles auſſi qui rendroient le ſuccès incertain. Ainſi dans le cas préſent on remarquera que Pierre gagnera, ſi le Roy de trefle étant dans une main, le Roy de cœur eſt dans l'autre main avec la garde à carreau; ou ſi les deux Rois étant dans une même main avec la garde à carreau, cette garde n'eſt point dans l'autre main, ou eſt moins avantageuſe.

Digitized by Google

2°. Que Pierre perdra ſi aucun des deux Joueurs n'ayant la garde à carreau, les deux Rois ſont en differente main, ou ſi l'un des deux Joueurs a la garde à carreau & le Roy de trefle, l'autre Joueur ayant le Roy de cœur ſans garde à carreau, ou avec une garde moins avantageuſe que celle qui accompagne le Roy de trefle.

3°. Que ſi les deux Rois ſe trouvent dans une même main, ſans qu'aucun des deux Joueurs ait la garde à carreau, il y aura pour Pierre autant d'eſperance de gagner, que de riſque de perdre.

On pourra en peſant ces raiſons pour & contre, & y faiſant entrer quelques autres circonſtances, par exemple celle-ci, que la garde à carreau peut être ſi baſſe que le Joueur ſe déterminera plûtôt à garder ſon Roy que cette garde; on pourra, dis-je, en examinant combien l'un de ces cas fournit plus de rencontres qu'un autre, tirer de cette comparaiſon des raiſons fort vrai-ſemblables pour ſe déterminer. Pour moi j'avoue que je préfererois de tenter la volle; & quoi qu'apparemment cela n'ait été pratiqué par perſonne, je ſuis perſuadé que ceux qui feront attention ſur ce qui précede, ne ſeront pas fort éloignés de mon ſentiment; il ſe préſente très ſouvent des difficultés de cette nature, & ce ſont autant de Problêmes qu'il faut réſoudre, & réſoudre ſur le champ. C'eſt pourquoi il faut convenir qu'un homme qui a l'eſprit vif & pénétrant, & qui a l'habitude du jeu, a bien plus d'avantage à bien prendre ſon parti dans la plûpart des rencontres de ce jeu, qu'un autre Joueur qui avec autant d'habitude aura l'imagination moins juſte & moins agiſſante; car il ne faut pas moins d'eſprit pour rencontrer le vrai-ſemblable lorſque l'évidence manque, que pour découvrir la verité lorſqu'il eſt poſſible de la trouver.

Le Brelan, & generalement tous les jeux où l'on renvie ſont ſujets aux mêmes inconveniens que le jeu de l'Ombre, & même à de plus grands. Suppoſons, par exemple, qu'il y ait trois Joueurs, Pierre, Paul & Jacques; Pierre paſſe, Paul va du jeu, & Jacques renvie; Paul tient le renvi, & va de tout ce qu'il a devant lui, ce ſera

par

par exemple, 30*A*, le jeu étant *A*. On demande ſi Jacques, que l'on ſuppoſe avoir quarante & un en main, & qui eſt dernier, doit tenir ou abandonner ce qu'il a déja mis au jeu, par exemple 14*A*. Je ſçai que bien des perſonnes n'heſiteroient pas à décider là-deſſus pour ou contre, chacun conſultant ſon humeur plûtôt que l'évidence. Pour moi je crois pouvoir aſſurer qu'il eſt impoſſible de déterminer exactement quel parti Jacques doit prendre ; & ma raiſon eſt qu'il ne ſuffit pas à Jacques pour ſe déterminer avec raiſon, de ſçavoir qu'entre 134596 façons differentes dont les cartes de Pierre & de Paul peuvent être diſpoſées, il n'y en a que 3041 qui puiſſent faire perdre Jacques. Il faudroit qu'il y eût des regles certaines & connues aux deux Joueurs, pour ſçavoir à quelle carte il faut tenir le jeu, & juſqu'où il eſt à propos de tenir ou de pouſſer pour chaque jeu. Alors Jacques pourroit compter que Paul a l'un des jeux qui ont pû lui permettre d'aller de tout, & ſur cela il pourroit à peu près ſe déterminer ; je dis à peu près, car il ne ſeroit pas ſûr que Paul pour lui donner le change, ne pouſsât à un jeu fort inferieur à celui qu'il devroit avoir pour forcer avec raiſon, & par là Jacques ſeroit expoſé à manquer de gagner, & même à perdre ſes avances, lorſqu'il auroit dû gagner.

Ces réflexions & quelques autres pareilles que tout le monde peut faire, ſont ſuffiſantes pour faire connoître qu'il y a en ces matieres des Problêmes qu'il eſt impoſſible de réſoudre, & qu'on ne doit point par conſéquent s'attendre à trouver dans ce Livre. Les exemples ſuivans feront connoître de quelle nature ſont ceux dont la recherche peut être tentée en ces matieres avec eſperance de ſuccès. Je n'en ai mis qu'un petit nombre, & j'ai choiſi entre ceux qui m'ont paru curieux & de quelque uſage pour les Joueurs, ceux que j'ai cru les plus propres à faire connoître l'utilité des Lemmes contenus dans la premiere Partie. Il ſera aiſé de s'appercevoir qu'on peut les appliquer à des recherches plus importantes que ne ſont les nôtres.

Digitized by Google

PROBLÊMES
SUR LE JEU DU PIQUET.
PROPOSITION X.

Pierre eſt dernier au Piquet, & eſt ſuppoſé n'avoir point d'as. On demande quelle eſt ſon eſperance d'en tirer ou un, ou deux, ou trois.

126. On ſçait qu'à ce jeu les Joueurs prennent chacun douze cartes, qu'il en reſte huit au talon, dont le premier prend cinq, & le dernier trois.

Cela poſé, on trouvera par les *art. 17* & *20*, que le ſort de Pierre pour tirer un as dans les trois cartes eſt $\frac{8}{19}$

Que ſon ſort pour en prendre deux eſt $\frac{24}{285}$

Que ſon ſort pour en prendre trois eſt $\frac{1}{285}$

Et par conſequent, que ſon ſort pour en prendre ou un, ou deux, ou trois indéterminément eſt $\frac{29}{57}$

En ſorte qu'il peut parier but à but avec avantage qu'il lui en entrera quelqu'un, puiſque le juſte parti ſeroit 29 contre 28.

Si l'on ſuppoſe que Paul qui eſt premier en carte n'a point de Rois, on trouvera

Que ſon ſort pour en avoir un eſt $\frac{455}{969}$

Que ſon ſort pour en avoir deux eſt $\frac{70}{323}$

Que ſon ſort pour en avoir trois eſt $\frac{10}{323}$

Que ſon ſort pour en avoir quatre eſt $\frac{1}{969}$

Donc ſon ſort pour en avoir quelqu'un indéterminément ſera $\frac{212}{323}$; & par conſéquent il y à parier deux cens trente-deux contre quatre-vingt-onze, environ cinq contre deux, que le premier n'ayant point de Rois, il lui en entrera quelqu'un en cinq cartes.

Digitized by Google

PROBLÊME.

PROPOSITION XI.

Pierre eſt dernier, & eſt ſuppoſé ne point porter de carreau. On demande combien il y a à parier qu'il lui rentrera dans ſes trois cartes de quoi empêcher que Paul qui eſt premier, ne puiſſe avoir de quinte ou au deſſus.

127. On trouvera par les *art.* 17 & 20, qu'il y a deux cens vingt coups differens qui donnent la huitiéme à Paul :

Qu'il y en a 132 qui lui donnent une ſeptiéme,
168 qui lui donnent une ſixiéme,
Et enfin 208 qui lui donnent une quinte ;

Et par conſéquent le juſte parti de la gageure ſeroit 103 contre 182, ce qui ſeroit un peu moins que trois contre cinq.

Si l'on ſuppoſoit que Pierre fût premier en carte, les autres circonſtances du Problême reſtant les mêmes, on trouveroit qu'il y auroit à parier 10433 contre 5071, qu'il rentrera à Pierre dans les cinq cartes de quoi empêcher que Paul ne pût avoir de quinte, ou de ſixiéme, ou de ſeptiéme, ou de huitiéme.

Car dans cette ſeconde ſuppoſition il y aura 792 coups qui donneront une huitiéme à Paul,

990 qui lui donneront une ſeptiéme,
1650 qui lui donneront une ſixiéme,
1639 qui lui donneront une quinte,

Ce Problême & le précedent pourront être utiles aux Joueurs en quelques occaſions, & ſervir à les déterminer, ſoit dans la maniere d'écarter, ſoit à propoſer ou à accepter avec raiſon certains partis, par exemple, de remêler les cartes, de donner des points ou la main. Ils pourront auſſi ſervir de modele pour en réſoudre une infinité de pareils, qui ſeront au moins curieux, s'il ne ſont pas tous utiles.

Digitized by Google

PROBLÊME
SUR LE JEU DE LA TRIOMPHE.
PROPOSITION XII.

Pierre & Paul jouent en cinq points à la Triomphe, ils en ont chacun trois, Pierre eſt premier, il a le Roy & la Dame troiſiéme de triomphe, qui ſera, par exemple de trefle, & un Roy de carreau gardé par le valet: lorſqu'il joue ſon Roy de triomphe pour la premiere carte, Paul lui offre un point. On demande s'il le doit accepter, & quelle eſt, en le refuſant, ſon eſperance de faire la volle.

128. IL faut d'abord examiner en combien de façons differentes il peut arriver que Paul ait la Dame gardée d'un ou de pluſieurs carreaux indéterminément, retrancher de ce nombre celui qui exprime en combien de façons il peut arriver que Paul ait la Dame troiſiéme en carreau, avec une autre Dame gardée de quelqu'autre couleur, & en retrancher encore la moitié du nombre qui exprime en combien de manieres il peut arriver que Paul ait la Dame gardée de carreau, une autre Dame gardée & une cinquiéme carte quelconque d'une autre eſpece. Le nombre qui reſtera, ces ſouſtractions étant faites, ſera celui qui exprime combien il y a de coups qui peuvent empêcher que Pierre ne faſſe la volle.

On trouvera par les *art. 17* & *20*, qu'il y a 3605 pour le premier cas, 72 pour le ſecond, 240 pour le troiſiéme.

On trouvera auſſi que le nombre qui exprime en combien de façons differentes on peut prendre cinq cartes dans vingt-deux, eſt 26334, & par conſequent on aura le ſort de Pierre dans cette fraction $\frac{23041}{26334}$.

Ainſi l'avantage de Pierre en refuſant la propoſition de Paul, ſera exprimé par cette fraction $\frac{4937}{11167}A$. Donc en ſuppoſant que A qui exprime l'argent du jeu fût deux piſtoles,

Digitized by Google

ſi quelqu'un vouloit acheter les droits de Pierre, & ſe mettre en ſa place, il devroit donner à Pierre ſept livres neuf ſols & onze deniers outre ſa miſe.

Il eſt aiſé de voir par là qu'il eſt plus avantageux à Pierre de tenter la volle, que d'accepter un point; car en l'acceptant ſon ſort ne ſeroit que $\frac{3}{4}A$, & même un peu moins, puiſqu'il y a apparence qu'à ce jeu la primauté donne quelque avantage à un Joueur qui a trois points de cinq contre l'autre quatre. Or il eſt évident que $\frac{3}{4}A$ eſt moindre que $\frac{23041}{26434}A$. Donc, &c. Cette ſolution peut s'appliquer à des cas pareils dans le jeu de l'Ombre, & principalement dans l'Ombre à deux.

PROBLÈMES
SUR LE JEU DE L'OMBRE
PROPOSITION XIII.

Pierre fait jouer en noir, & eſt ſuppoſé avoir un nombre quelconque de triomphes. On demande quelle eſperance il a de tirer un certain nombre de triomphes dans les cartes qu'il prend au talon.

PREMIER CAS.

Pierre a trois triomphes, & prend ſix cartes.

129. L'ESPERANCE qu'il a de tirer une triomphe au moins dans ſix cartes, eſt exprimée par la fraction $\frac{30254}{35061}$; ainſi il pourroit parier 30254 contre 4807, ce qui eſt un peu plus de ſix contre un.

L'eſperance qu'il a d'en tirer au moins deux eſt exprimée par la fraction $\frac{366142}{731281}$, en ſorte qu'il y auroit à parier 366142 contre 370139.

Digitized by Google

SECOND CAS.

Pierre a quatre triomphes, & prend cinq cartes.

130. L'ESPERANCE qu'a Pierre de tirer au moins une triomphe dans ces cinq cartes eſt exprimée par la fraction $\frac{18201}{24273}$; ainſi il pourroit parier 18201 contre 6072 à peu près trois contre un.

L'eſperance qu'il a de tirer au moins deux triomphes ſera exprimée par la fraction $\frac{53025}{69911}$; ainſi il pourroit parier 17675 contre 38962.

TROISIE'ME CAS.

Pierre a cinq triomphes, & prend quatre cartes.

131. L'ESPERANCE qu'a Pierre de tirer au moins une triomphe dans quatre cartes, eſt exprimée par la fraction $\frac{4123}{6293}$; ainſi il pourroit parier 4123 contre 2170, un peu moins que deux contre un.

Il ſera facile de réſoudre par les *art. 20* & *23* un grand nombre d'autres Problêmes de même eſpece que celui-ci, leſquels pourroient ſervir à fixer des regles pour ſçavoir à quel jeu il eſt à propos de jouer ou de paſſer, ou de jouer ſans prendre. Il ſuffiroit pour cela de chercher pour les cartes rouges ce que l'on vient de trouver pour les noires, & de faire entrer dans le calcul les Rois, les differens Matadors & les renonces. On pourroit déterminer auſſi à quel jeu il eſt permis de demander gano; mais l'étendue de ces matieres nous oblige à nous donner des bornes. Il ſuffit de marquer le chemin; ainſi je finirai par le Problême ſuivant qui eſt aſſés facile, & pourra être de quelque uſage.

Digitized by Google

PROBLÊME.

PROPOSITION XIV.

Pierre eſt premier en cartes, il a trois Matadors en noir, & cinq autres triomphes quelconques. On demande combien il faut qu'il y ait au jeu pour qu'il lui ſoit plus avantageux de prendre au talon, que de jouer ſans prendre.

132. Je ſuppoſe que chaque Joueur donne une fiche pour le ſans-prendre à celui qui le gagne.

Il faut remarquer que Pierre a trois coups ſur trente-un pour tirer une triomphe, & trois coups ſur trente-un pour tirer un Roy qui ne ſoit pas triomphe, & que dans l'un & l'autre cas la volle lui eſt aſſurée. Cela poſé, ſi l'on nomme f chaque fiche, p ce que Pierre gagneroit en jouant ſans prendre, & b ce qui viendroit à Pierre préciſément de la volle.

Il faudra pour que Pierre ait raiſon de jouer ſans prendre que $6 \times \overline{p - 2f + b} + 25 \times \overline{p - 2f}$ ſoit plus grand que $31p$, & ſi l'on veut ſçavoir en quel cas il lui ſeroit indifférent de prendre ou de jouer ſans prendre, il n'y a qu'à former cette égalité $6 \times \overline{p - 2f + b} + 25 \times \overline{p - 2f} = 31p$, & en tirer ſelon les regles ordinaires $b = \frac{31}{3}f = 10f + \frac{1}{3}f$. D'où il faut conclure que le profit de la volle doit être au moins de dix fiches & ſix jettons, pour que Pierre puiſſe prendre ſans deſavantage; & par conſequent s'il n'y a point de bête au jeu, Pierre prendra ſon parti de prendre ou de ne pas prendre ſelon que ce qui ſera devant chaque Joueur ſera ou plus grand ou moindre que 14 jettons, en ſuppoſant qu'on donne deux fiches pour la volle.

Si l'on jouoit l'augmentation des Matadors, & que les triomphes de Pierre fuſſent trois Matadors, la Dame, le valet, le ſept, le ſix & le cinq, l'équation ſeroit $5 \times \overline{p - 2f + b} + 1 \times \overline{p + 10f + b} + 25 \times \overline{p - 2f} = 31p$, dont on tireroit $b = 8f + \frac{1}{3}f$, c'eſt à dire, qu'il faudroit pour jouer ſans

Digitized by Google

prendre que le profit de la volle fût plus grand que huit fiches & ſix jettons ; & par conſequent ſi, n'y ayant point de bête au jeu, il ſe trouve plus de neuf jettons devant chaque Joueur, Pierre aura raiſon de prendre, & il jouera ſans prendre s'il y en a neuf ou moins que neuf.

Suppoſons maintenant que Pierre ait quatre Matadors ſeptiemes en pic, & deux fauſſes qui ſeront, par exemple, le trois de treſle & le cinq de carreau.

Pour trouver combien il doit y avoir aux tours dans cette ſuppoſition, afin qu'il ſoit plus avantageux à Pierre de prendre pour la volle, que de jouer ſans prendre.

Je remarque d'abord qu'il y a 24 coups qui aſſurent la volle à Pierre ; car il y en a ſix pour prendre deux triomphes, douze pour prendre une triomphe & un Roy, trois pour prendre deux Rois, & trois pour prendre un Roy garde de la Dame.

J'obſerve enſuite qu'il y a 117 coups qui rendent le ſort de Pierre incertain pour la volle, ſçavoir, quand il lui entre un Roy gardé, ou une triomphe avec une fauſſe. J'appellerai dans ce cas ſon eſperance x.

On aura $24 \times \overline{p - 2f + b} + 117x + 324 \times \overline{p - 2f} = 465p$

$$\text{ou } b = \frac{465p - 348p + 696f - 117x}{24}$$

$$\text{ou } b = \frac{696f + 117p - 117x}{24}$$

Si l'on ſuppoſe $x = p - 2f + \frac{1}{5}b$, on aura $b = \frac{4650}{237}f = 19f + \frac{147}{237}f$. On trouvera ainſi differentes valeurs de b ſelon toutes les ſuppoſitions differentes que l'on fera de la valeur de x. Celle qu'on vient de faire ſemble approcher aſſés de la veritable. On pourroit la trouver exactement, mais ce ſeroit un nouveau Problême qui nous meneroit trop loin. Ce Problême eſt plus facile, & d'un uſage plus frequent à l'égard de l'Ombre à deux.

PROBLEME

Digitized by Google

PROBLÈME
SUR LE BRELAN.
PROPOSITION XV.

Pierre, Paul & Jacques jouent au Brelan, Pierre & Paul tiennent le jeu, & Jacques paſſe. La carte qui retourne eſt le Roy de cœur, Pierre eſt premier, il a l'as & le Roy de carreau, & l'as de cœur. Paul a l'as, le neuf & le huit de treſle. Deux des Spectateurs, qui ont vû chacun les jeux de Pierre & de Paul, & n'ont point vû celui de Jacques, diſputent pour ſçavoir lequel des deux Joueurs Pierre & Paul a le plus beau jeu, & le plus d'eſperance de gagner. L'un des deux, nommé Jean, parie pour Pierre : l'autre, nommé Thomas, parie pour Paul. L'argent de la gageure eſt nommé A. *On demande quel eſt le ſort des deux Spectateurs Jean & Thomas, & ce qu'ils devroient mettre chacun au jeu pour parier ſans avantage ni deſavantage.*

133. IL faut remarquer, 1°, que Jean gagnera, ſi les trois cartes de Jacques ſont ou trois cœurs ou trois carreaux. 2°. Qu'il gagnera encore ſi l'une des trois étant un pic ou un treſle, les deux autres ſont ou deux cœurs ou deux carreaux. 3°. Que ſi l'une des trois cartes de Jacques eſt un cœur ou un carreau, les deux autres étant des pics, Jean aura gagné. 4°. Qu'il gagnera encore ſi les trois cartes de Jacques ſont un carreau, un cœur & un pic, & que dans toute autre diſpoſition des cartes de Jacques il a perdu.

Cela poſé, il ne reſte plus qu'à examiner combien il y a d'hazards differens qui donnent chacune de ces quatre diſpoſitions differentes des trois cartes de Jacques. On trouvera par les *art. 20* & *23* qu'il y en a vingt pour la premiere, deux cens vingt pour la ſeconde, deux cens dix

pour la troiſiéme, & cent-ſoixante-quinze pour la quatriéme, & par conſéquent le ſort de Jean ſera $\frac{125}{266}A = \frac{1}{2}A - \frac{4}{133}A$, ce qui fait voir que la condition de Pierre eſt moins avantageuſe que celle de Paul ; & que Jean pour parier également contre Thomas, devroit mettre au jeu 125 contre 141.

PROBLÈME SUR L'IMPERIALE.

PROPOSITION XVI.

Pour avoir un Imperiale au Jeu qui porte ce nom, il faut avoir ou quatre as, ou quatre Rois, ou quatre Dames, ou quatre valets, ou quatre ſept, ou quatriéme majeure, ou carte blanche. On demande combien un Joueur peut parier qu'il lui viendra un Imperiale déterminé, par exemple un Imperiale d'as, ou carte blanche.

134. On connoîtra par les *art. 17*, *20* & *23*, que ſur le nombre 225792840, qui exprime en combien de façons on peut prendre douze cartes dans trente-deux, il y en a 3108105 pour avoir un Imperiale d'as, & 125970 pour avoir carte blanche.

Le ſort d'un Joueur qui pariroit à l'Imperiale ou au Piquet d'avoir carte blanche, ſeroit donc exprimé par la fraction $\frac{323}{578956}$; ainſi il auroit de l'avantage à parier 1 contre 1792, & du deſavantage à parier 1 contre 1791.

Digitized by Google

PROBLÊME
SUR LE QUINZE.

135. Il faudroit bien du diſcours pour expliquer les regles de ce jeu qui eſt une eſpece de Brelan, mais un jeu plus ſubtil & plus fin. Il ſuffira, pour l'intelligence du Problême qui ſuit, de ſçavoir que celui des deux Joueurs qui a le point le plus proche de quinze a gagné; & dans le cas d'égalité, celui qui ne tient pas les cartes. Cela poſé, voici l'eſpece à réſoudre.

PROPOSITION XVII.

Pierre tient les cartes, & a donné à Paul un cinq & un neuf, ce qui fait quatorze. Il s'eſt donné un cinq. Paul a fait, va tout, & Pierre l'a tenu. Paul découvre ſon jeu, & demande à Pierre s'il veut compoſer. On demande la regle du parti.

SOLUTION.

136. Pierre a pour gagner par une carte les dix, les Valets, les Dames & les Rois.

Il a pour gagner par deux cartes, as & 9, 2 & 8, 3 & 7, 4 & 6, 5 & 5,

Il a pour gagner par trois cartes 118, 127, 136, 145, 226, 235, 244, 334.

Il a pour gagner par quatre cartes 1117, 1126, 1135, 1144, 1225, 1234, 1333, 2224, 2233.

Il a pour gagner par cinq cartes 11116, 11125, 11134, 11224, 11233, 12223.

Il a pour gagner par ſix cartes 111124, 111133, 111223, 112222.

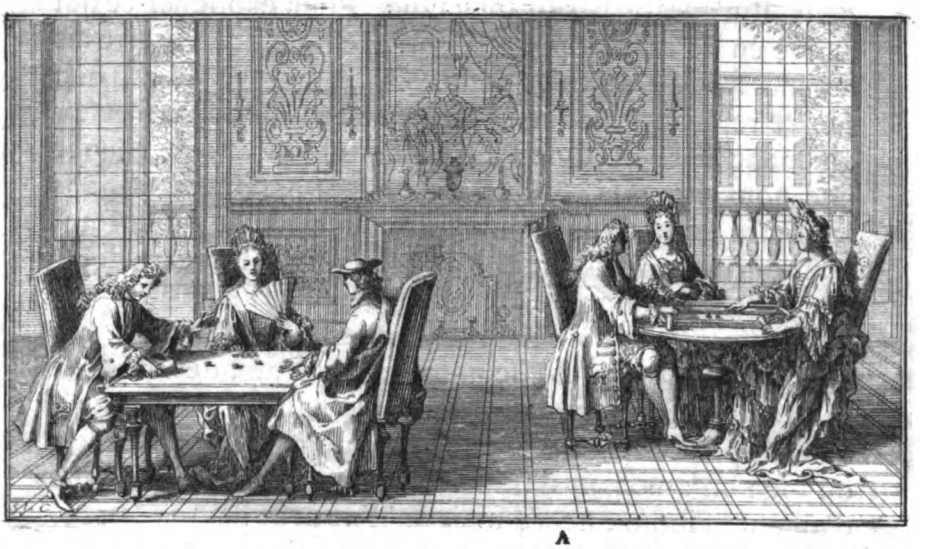
Il a pour gagner par ſept cartes 1111222.

Digitized by Google

Le ſort de Pierre eſt donc par les *art. 20 & 23* $= \frac{715817897}{1801911264}$, ce qui fait voir que le parti de Paul qui a montré 14 eſt le meilleur, & que ſon avantage qui eſt $\frac{186111815}{1801911264}$, eſt à peu près un dixiéme de ce qui eſt au jeu. Si c'eſt dix piſtoles, il faut que Paul en prenne 60 livres 6 ſols 3 den. & Pierre 39 liv. 13 ſols 9 deniers.

Fin de la ſeconde Partie.

Digitized by Google



PROBLÈME
SUR
LE QUINQUENOVE.

TROISIE'ME PARTIE.

EXPLICATION DE CE JEU.

137. ON tire d'abord entre les Joueurs à qui aura le cornet. Suppoſons qu'il tombe à Pierre ; & pour faire entendre le Jeu plus facilement, ſuppoſons qu'il n'y a que deux Joueurs Pierre & Paul. Celui-ci mettra d'abord au jeu une certaine ſomme ; alors Pierre pouſſant les dés voici ce qui arrive. Si Pierre amene cinq ou neuf, il perd, & donne le cornet à Paul. Si Pierre amene ou trois, ou onze, ou un doublet, il tire la miſe de Paul. Celui-ci remet au jeu, & Pierre continue de jouer. Si Pierre n'amene aucun des coups préce-

Digitized by Google

dens, il n'aura ni perdu, ni gagné. Pour expliquer ce qui arrive en ce cas, ſuppoſons, par exemple, que Pierre ait amené ſept du premier coup. On remarquera, 1°, que Pierre rejouant ne pourra gagner cette miſe de Paul qu'en amenant ſept. 2°. Que Paul eſt dans la liberté de riſquer une nouvelle miſe, & que Pierre ſera pareillement dans la liberté de la tenir, ou de ne la pas tenir. 3°. Que Paul pour diſtinguer cette miſe de la précedente, la met deſſous, & qu'elle ſe nomme maſſe. 4°. Que ſi cette maſſe eſt égale à la miſe, elle ſe nomme maſſe au jeu; & que quand elle n'eſt pas la même, elle ſe nomme maſſe aux dés. 5°. Que Pierre ayant accepté cette nouvelle maſſe, il gagnera en amenant le coup ſuivant, ou trois, ou onze, ou doublet, ou bien en amenant dans la ſuite cette chanſe avant que d'amener cinq ou neuf; mais qu'il ne peut gagner la premiere miſe qui eſt dite entrée au jeu, qu'en amenant ſept; & enfin qu'il les perdra toutes deux en amenant ou cinq, ou neuf.

Suppoſons préſentement pour une plus ample explication, que Pierre ayant dit, *Taupe à la maſſe*, amene de ſon ſecond coup huit autrement que par un doublet, c'eſt à dire par ſix & deux, ou par cinq & trois, & que Paul mette au jeu une nouvelle maſſe que Pierre accepte. On remarquera, 1°, que Pierre gagnera cette maſſe en amenant ou trois, ou onze, ou doublet. 2°. Qu'il gagnera la premiere miſe de Paul en amenant ſept, & la ſeconde en amenant huit. 3°. Qu'il perd les deux miſes & la maſſe en amenant ou cinq ou neuf, & qu'alors il cede le cornet à Paul.

Ce que je viens d'expliquer pour un petit nombre de coups, & ſeulement à l'égard de deux Joueurs, doit s'entendre de tout autre nombre de coups & de Joueurs.

Digitized by Google

PROBLÈME

PROPOSITION XVIII.

Pierre & Paul jouent au Quinquenove, & Pierre tient le cornet. Je ſuppoſe que la miſe de Paul ſoit toujours la même, & exprimée par A. *Je ſuppoſe auſſi que Pierre n'acceptera point de maſſe ; mais qu'il ſera obligé de tenir le jeu juſqu'à ce qu'il ait perdu ; après quoi je ſuppoſe le jeu fini. On demande quel eſt à ce jeu l'avantage ou le deſavantage de celui qui a le dé ; ou, ce qui revient au même, combien Pierre devroit demander ou donner à un tiers pour lui ceder le cornet, & lui donner à jouer en ſa place.*

SOLUTION.

138. LE ſort de Pierre, lorſqu'il pouſſe le dé, eſt d'avoir huit coups pour perdre, ſçavoir cinq qui arrive en quatre façons, & neuf qui arrive pareillement en quatre façons ; d'avoir dix coups pour gagner, ſçavoir les ſix doublets, trois, qui arrive en deux façons, & onze, qui arrive pareillement en deux façons ; d'avoir quatre coups pour amener ſix autrement que par doublet, autant pour amener huit autrement que par doublet, deux coups pour amener quatre autrement que par doublet, deux coups pour amener dix autrement que par doublet, & enfin ſix coups pour amener ſept.

Donc ſi je nomme x le ſort de Pierre lorſqu'il a amené huit ou ſix, z ſon ſort lorſqu'il a amené quatre ou dix, y ſon ſort lorſqu'il a amené ſept, q l'avantage ou le deſavantage que Pierre trouve à continuer le jeu lorſqu'il a gagné, & S ſon ſort en general. On aura le ſort cherché de Pierre

$$S = \frac{10 \times 2A + q + 8x + 4z + 6y}{36}$$

Il faut préſentement chercher les valeurs des inconnues x, z, y & q.

Digitized by Google

Pour déterminer la valeur de l'inconnue x, je remarque que Pierre ayant amené du premier coup six sans doublet, il a en rejouant cinq coups pour gagner, huit coups pour perdre, & vingt-trois coups pour rejouer.

On aura donc $x = \frac{5}{13} \times \overline{2A+q}$.

On trouvera de même $z = \frac{3}{11} \times \overline{2A+q}$.

Et $y = \frac{3}{7} \times \overline{2A+q}$.

Maintenant si l'on substitue ces valeurs de x, z, y dans l'égalité proposée, on aura

$$S = \frac{10 \times \overline{2A+q} + 8 \times \frac{5}{13} \times \overline{2A+q} + 4 \times \frac{3}{11} \times \overline{2A+q} + 6 \times \frac{3}{7} \times \overline{2A+q}}{36}$$

$$= \frac{10 \times \overline{2A+q} + \frac{6746}{1001} \times \overline{2A+q}}{36} = \frac{4189}{9009} \times 2A + \frac{4189}{9009} q.$$

Pour connoître la valeur de q, il faut remarquer que si q étoit $= 0$, ce qui arriveroit si Pierre & Paul convenoient que le jeu dût finir aussitôt que Pierre auroit gagné. Alors le sort de Pierre seroit $\frac{8378}{9009} A = A - \frac{631}{9009} A$; d'où il est clair que la quantité $\frac{631}{9009} A$ exprimeroit le desavantage que Pierre auroit à ce jeu.

On observera pareillement que si Pierre & Paul convenoient avant que de jouer, que Pierre ayant gagné une fois, continuera de jouer jusqu'à ce qu'il ait ou gagné de nouveau ou perdu, le desavantage de Pierre seroit $\frac{631}{9009} A + \frac{4189}{9009} \times \frac{631}{9009} A$.

Et que si l'on suppose indéterminément suivant la regle de ce jeu, que Pierre continuera de tenir la Banque jusqu'à ce qu'il ait perdu, son desavantage sera exprimé par cette suite infinie $\frac{631}{9009} A + \frac{4189}{9009} \times \frac{631}{9009} A + \overline{\frac{4189}{9009}}^{2} \times \frac{631}{9009} A + \overline{\frac{4189}{9009}}^{3} \times \frac{631}{9009} A + \overline{\frac{4189}{9009}}^{4} \times \frac{631}{9009} A +$ &c. La somme de cette suite est $= \frac{1}{8} A + \frac{57}{9640} A = 1$ l. 6 s. 2 $\frac{46}{241}$ d. supposé que la mise de Paul fût une pistole.

Et ce seroit là le desavantage de Pierre s'il jouoit contre un Joueur qui à chaque fois qu'il perdroit mît A au jeu, & de qui Pierre ne tînt jamais aucune masse.

Ainsi

Ainſi Pierre peut compter que ſur chaque piſtole qu'un des Joueurs met au jeu, ſoit que ce ſoit un enjeu ou une maſſe, il a pour lui 14 ſ. $\frac{74}{9009}$ de pure perte, ce qui eſt un peu plus que la quinziéme partie de ſa miſe, & un peu moins que la quatorziéme. *Ce qu'il falloit trouver.*

Cet avantage eſt aſſés conſiderable, principalement lorſqu'il y à un grand nombre de Joueurs, pour obliger ceux qui tiennent le dé à refuſer les maſſes, ce qui ôte tout l'agrément de ce jeu. Il ſeroit donc à propos de le réformer en le rendant plus égal, & en donnant un peu d'avantage à celui qui tient le dé, pour l'engager à tenir les maſſes. Pour cela il faudroit convenir que le nombre 4 amené au ſecond coup, gagnât auſſi-bien que 3 & 11. Alors l'avantage de celui qui tient le dé par rapport à la miſe de chaque Joueur, ſeroit exprimé par la fraction $\frac{27}{9009}$, qui eſt à peu près la quatre-vingt-treiziéme partie de l'unité.

PROBLÊME

SUR LE JEU DU HAZARD.

EXPLICATION DE CE JEU.

139. On y joue avec deux dés comme au Quinquenove. Nommons encore Pierre celui qui tient le dé, & ſuppoſons que Paul repréſente les autres Joueurs. Pierre pouſſera le dé juſqu'à ce qu'il ait amené ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 9; celui de ces nombres qui ſe préſentera le premier ſervira de chanſe à Paul, enſuite Pierre recommencera à pouſſer le dé pour ſe donner ſa chanſe. Or les chanſes de Pierre ſont ou 4, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 9, ou 10; en ſorte qu'il en a deux plus que Paul, ſçavoir 4 & 10. Il faut encore ſçavoir ce qui ſuit :

1°. Si Pierre après avoir donné à Paul une chanſe qui ſoit ou 6 ou 8, amene au ſecond coup ou la même chanſe, ou douze, il gagne; mais s'il amene ou bezet, ou deux & as, ou onze, il perd.

2°. S'il a donné à Paul la chanſe de 5 ou de 9, & qu'il amene au coup ſuivant la même chanſe, il gagne; mais s'il amene ou bezet, ou deux & as, ou onze, ou douze, il perd.

3°. S'il a donné à Paul la chanſe de ſept, & qu'il amene le coup ſuivant ou la même chanſe, ou onze, il gagne; mais s'il amene ou bezet, ou deux & as, ou douze, il perd.

4°. Pierre s'étant donné une chanſe differente de celle de Paul, il gagnera s'il amene ſa chanſe avant que d'amener celle de Paul, & il perdra s'il amene la chanſe de Paul avant que d'amener la ſienne.

5°. Quand Pierre & Paul ont perdu, on recommence le jeu, en donnant de nouvelles chanſes; mais Pierre ne quitte le dé pour le donner à celui qui le ſuit, que lorſqu'il a perdu.

6°. S'il y a pluſieurs Joueurs, ils ont tous la même chanſe.

PROBLÊME

PROPOSITION XIX.

On demande quel eſt à ce jeu l'avantage ou le deſavantage de celui qui tient le dé.

140. SOIT ſuppoſé que la miſe de Paul ſoit $\frac{1}{2}A$.

1°. Si la chanſe de Paul eſt 6 ou 8, le ſort de Pierre ſera

$$\frac{6A+8\times\frac{4}{9}A+6\times\frac{6}{11}A+6\times\frac{3}{8}A+\frac{5}{2}A}{36}=\frac{6961}{14256}A.$$

2°. Si la chanſe de Paul eſt 7, le ſort de Pierre ſera

$$\frac{8A+8\times\frac{4}{10}A+6\times\frac{3}{9}A+10\times\frac{5}{11}A}{36}=\frac{244}{495}A.$$

3°. Si la chanſe de Paul eſt ou 5 ou 9, le ſort de Pierre ſera

$$\frac{4A+4\times\frac{1}{2}A+10\times\frac{5}{9}A+6\times\frac{3}{7}A+6\times\frac{6}{10}A}{36}=\frac{1396}{2835}A.$$

Par conſequent le ſort de Pierre ſera

$$\frac{10\times\frac{6961}{14256}A+6\times\frac{244}{495}A+8\times\frac{1396}{2835}A}{24},$$

Et ſon deſavantage ſera

$$\frac{\times\frac{167}{14256}A+6\times\frac{7}{990}A+8\frac{43}{5670}A}{24}=\frac{37}{4032}A.$$

Digitized by Google

Cette fraction qui exprime le desavantage de Pierre par rapport à la mise de Paul, est plus petite que $\frac{1}{108}$, & plus grande que $\frac{1}{109}$.

Mais parceque ce desavantage continue tant que Pierre continue d'avoir le dé, le desavantage de Pierre considéré en general est exprimé par une suite infinie dont la somme est $\frac{37}{2053} A$; en sorte que si $\frac{1}{2} A$ désigne une pistole, il y a 3 s. 8 $\frac{1}{21}$ d. de pure perte pour lui sur chaque pistole, & Pierre pourroit sans desavantage donner 7 s. 2 $\frac{1042}{2053}$ d. à celui qui s'offriroit de tenir le dé en sa place.

REMARQUE I.

141. C'EST la coutume des Joueurs à ce Jeu de ne mettre leur argent que lorsqu'on leur a livré chanse. Or il est évident que cet usage est préjudiciable à celui qui tient le dé; car puisque son desavantage est environ $\frac{1}{85}$, lorsque la chanse des Joueurs est 6 ou 8, & seulement $\frac{1}{111}$ lorsque leur chanse est ou 5 ou 9, & $\frac{1}{141}$ lorsque leur chanse est 7. Il est clair que si les Joueurs connoissoient avec exactitude leur interêt, ils hazarderoient plus d'argent lorsque leur chanse est ou 5 ou 9, que lorsqu'elle est 7; & plus encore lorsqu'elle est 6 ou 8, que lorsqu'elle est 7, ou 5, ou 9. Il seroit donc à propos que les Joueurs missent leur argent au jeu avant que celui qui tient le dé leur eût livré chanse.

REMARQUE II.

142. ON voit que ce jeu est assés égal; mais il le seroit davantage si l'on convenoit que Pierre ayant amené du premier coup 7, gagnât au second coup en amenant ou la même chanse, ou 11, ou 12, & qu'il perdît seulement en amenant ou bezet ou deux & as; car je trouve que par cette réforme celui qui tient le dé auroit de l'avantage; mais ce ne seroit que d'un sol & deux deniers sur chaque pistole, ce qui est peu considerable.

Digitized by Google

PROBLÊMES
SUR LE JEU DE L'ESPERANCE.
EXPLICATION DE CE JEU.

143. ON y joue avec deux dés. Les Joueurs conviennent de prendre un certain nombre de jettons, & tirent enſuite à qui aura le dé. Cela fait, ſi celui qui a le dé amene un as, il donne un jetton à celui qui eſt à ſa gauche; s'il amene un ſix, il met un jetton au jeu; s'il amene ſix & as; & qu'il ait plus d'un jetton, il en payera un à ſa gauche & un au jeu; mais s'il n'en a qu'un, il le mettra au jeu. Dans tous ces cas celui qui a le dé, après avoir payé, cede le cornet à celui qui le ſuit à la droite. S'il amene un doublet, il a la liberté ou de rejouer dans l'eſperance d'amener encore deux doublets de ſuite, ce qui le feroit gagner, ou de ceder le dé à celui qui le ſuit à la droite. S'il amene tout autre coup, c'eſt à dire, s'il n'amene ni as, ni ſix, ni doublets, il cede le cornet, ſans rien payer, à celui qui eſt à ſa droite; enfin celui-là gagne l'argent du jeu, qui le premier amene trois doublets de ſuite, ou qui conſerve quelque jetton, tous les autres Joueurs ayant perdu les leurs.

Il eſt à remarquer que quand on n'a plus de jettons, on ne joue plus, & qu'on ne peut rentrer au jeu (ce qui ſe nomme reſſuſciter) que par le ſecours de celui qu'on a pour voiſin à la droite lorſqu'il amene un as.

Digitized by Google

PROPOSITION XX.

Pierre, Paul & Jacques prennent chacun un jetton, & s'accordent que celui qui reſtera avec quelques jettons, les autres n'en ayant plus, gagnera une certaine ſomme dont ils conviennent. L'on ſuppoſe que Pierre a le dé, que Paul eſt à ſa droite, & Jacques à ſa gauche. On demande quel eſt le ſort des trois Joueurs, c'eſt à dire, quel eſt l'avantage & le deſavantage que donne à chacun la ſituation & la place où il ſe trouve.

144. SOIT A l'argent du jeu, & S le ſort de Pierre au commencement du jeu.

Il faut remarquer d'abord que Pierre pouſſant le dé a ſix coups ſur trente-ſix pour amener un doublet. 2°. Qu'il a deux coups pour amener ſix & as. 3°. Huit coups pour amener un as d'un dé, l'autre dé n'étant ni as ni ſix; ces huit coups ſont as & deux, as & trois, as & quatre, as & cinq, deux & as, trois & as, quatre & as, cinq & as. 4°. Huit coups pour amener un ſix d'un dé, l'autre dé n'étant ni as ni ſix; ces huit coups ſont ſix & deux, ſix & trois, ſix & quatre, ſix & cinq; deux & ſix, trois & ſix, quatre & ſix, cinq & ſix.

Cela poſé, il eſt clair que le ſort de Pierre lorſqu'il va jouer eſt, 1°, d'avoir huit coups, pour que n'ayant rien, Jacques ait deux jettons, & Paul un jetton & le dé, ſçavoir quand Pierre amene un as ſans ſix ni doublet; 2°. d'avoir dix coups, pour que n'ayant rien, Jacques ait un jetton & Paul un jetton & le dé; ſçavoir, quand Pierre amene un ſix ſans doublet; 3°. d'avoir dix-huit coups, pour que Pierre, Paul & Jacques, ayant chacun un jetton, Paûl ait le dé.

Si l'on nomme x le ſort de Pierre dans le premier cas, y ſon ſort dans le ſecond cas, z ſon ſort dans le troiſiéme cas, on aura $S = \frac{8x+10y+18z}{36} = \frac{4x+5y+9z}{18}$.

Pour déterminer x, il faut remarquer que Pierre n'ayant rien, Jacques ayant deux jettons, & Paul ayant un jetton

Digitized by Google

& le dé, le ſort de Pierre lorſque Paul va pouſſer le dé, eſt, 1°, d'avoir huit coups, pour que Paul n'ayant rien, Pierre ait un jetton, & Jacques deux jettons & le dé, ſçavoir, quand Paul amene un as ſans ſix ni doublet; 2°. dix coups qui le font perdre & finiſſent la partie; ſçavoir quand Paul amene un ſix ſans doublet; 3°. d'avoir dix-huit coups pour que Pierre n'ayant rien, Jacques ait deux jettons & le dé, & Paul un jetton.

Si l'on nomme u le ſort de Pierre dans le premier cas, & t ſon ſort dans le troiſiéme, on aura $x = \frac{8u+10\times 0+18t}{36} = \frac{4u+9t}{18}$.

Pour déterminer u, il faut obſerver que Paul n'ayant rien, Pierre ayant un jetton, & Jacques deux jettons & le dé, le ſort de Pierre lorſque Jacques va pouſſer le dé, eſt, 1°, d'avoir deux coups, pour que Jacques n'ayant rien, Paul ait un jetton, & Pierre un jetton & le dé, ſçavoir, quand Jacques amene ſix & as; 2°. huit coups qui remettent le jeu comme au commencement, ſçavoir quand Jacques amene un as ſans ſix ni doublet; 3°. huit coups, pour que Paul n'ayant rien, Jacques ait un jetton, & Pierre un jetton & le dé, ſçavoir quand Jacques amene un ſix ſans as ni doublet; 4°. dix-huit coups, pour que Paul n'ayant rien, Jacques ait deux jettons, & Pierre un jetton & le dé.

Si l'on nomme p le ſort de Pierre dans le premier cas, q ſon ſort dans le troiſiéme cas, r ſon ſort dans le quatriéme cas, on aura $u = \frac{2\times p+8\times 8+8\times q+18r}{36} = \frac{p+4s+4q+9r}{18}$.

Pour déterminer p, ſoit l le ſort de Pierre lorſque Jacques n'ayant rien, Pierre a un jetton, & Paul un jetton & le dé, on aura $p = \frac{10\times 0+8\times y+18l}{36}$. Or $l = \frac{18\times A+18\times p}{36}$. Donc $p = \frac{4y+9\times\frac{A+p}{2}}{18} = \frac{8p+9A+9p}{36}$; d'où l'on tire $p = \frac{8y+9A}{27}$, & $l = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\times\frac{8y+9A}{27} = \frac{18A+4y}{27}$.

Pour déterminer q, ſoit appellé K le ſort de Pierre lorſque Paul n'ayant rien, Pierre a un jetton, & Jacques un jetton & le dé, on trouvera $q = \frac{18\times 0+18\times K}{36}$, & K

Digitized by Google

$= \frac{10\mathcal{A}+8\times\mathcal{P}+18\times\mathcal{Q}}{36}$; d'où l'on tire $q = \frac{5\mathcal{A}+4\mathcal{P}}{27}$. Or on a eu ci-devant $p = \frac{8\mathcal{J}+9\mathcal{A}}{27}$; donc $q = \frac{5\mathcal{A}+4\times\frac{8\mathcal{J}+9\mathcal{A}}{27}}{27}$ $= \frac{171\mathcal{A}+32\mathcal{J}}{27\times27}$.

Il eſt évident que $r = \frac{18\times0+18\times u}{36} = \frac{1}{2}u$.

On aura (en ſubſtituant ces valeurs de p, q, r) $u = 2\times\frac{8\mathcal{J}+9\mathcal{A}}{27}+8\times\mathcal{S}+8\times\frac{171\mathcal{A}+32\mathcal{J}}{27\times27}+18\times\frac{1}{2}u$, ce qui ſe réduit à $u = \frac{688\mathcal{J}+1854\mathcal{A}+5832\mathcal{S}}{1968}$; donc $r = \frac{344\mathcal{J}+927\mathcal{A}+2916\mathcal{S}}{1968}$.

Pour déterminer la valeur de t, il faut remarquer que Pierre n'ayant rien, Paul ayant un jetton, & Jacques deux jettons & le dé, le ſort de Pierre lorſque Jacques va pouſſer le dé, eſt, 1°, d'avoir deux coups pour perdre, ſçavoir quand Jacques amene ſix & as ; 2°. huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Jacques ait un jetton, & Paul deux jettons & le dé, ſçavoir quand Jacques amene un as ſans ſix ni doublet ; 3°. huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Jacques ait un jetton, & Paul un jetton & le dé, ſçavoir quand Jacques amene un ſix ſans as ni doublet ; 4°. dix-huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Jacques ait deux jettons, & Paul un jetton & le dé.

Cela poſé, ſi l'on nomme c le ſort de Pierre dans le ſecond cas, on aura $t = \frac{2\times0+8\times c+8\times\mathcal{J}+18\times x}{36}$. $= \frac{4c+4\mathcal{J}+9x}{18}$.

Pour déterminer la valeur de c, on remarquera que Pierre n'ayant rien, Jacques ayant un jetton, & Paul deux jettons & le dé, le ſort de Pierre lorſque Paul va pouſſer le dé eſt, 1°, d'avoir deux coups, pour que Paul n'ayant rien, Pierre ait un jetton, & Jacques un jetton & le dé, ſçavoir quand Paul amene ſix & as ; 2°. d'avoir huit coups, pour que les trois Joueurs ayent chacun un jetton, Jacques ayant le dé, ſçavoir quand Paul amene un as ſans ſix ni doublet ; 3°. d'avoir huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Paul ait un jetton, & Jacques un jetton & le dé, ſçavoir quand Paul amene un ſix ſans as ni doublet ; 4°. d'avoir dix-huit coups, pour que Pierre

Digitized by Google

n'ayant rien, Paul ait deux jettons, & Jacques un jetton & le dé.

Si l'on nomme le ſort de Pierre dans le ſecond cas m, dans le troiſiéme cas n, dans le quatriéme cas b, on aura

$$c = \frac{2\times K + 8m + 8n + 18b}{36} = \frac{K + 4m + 4n + 9b}{18}.$$

Pour déterminer m, ſoit h le ſort de Pierre lorſque Jacques n'ayant rien, Paul a deux jettons, & Pierre un jetton & le dé, on aura

$$m = \frac{10\times P + 8\times h + 18\times S}{36} = \frac{5P + 4h + 9S}{18}.$$

Pour déterminer h, ſoit B le ſort de Pierre lorſque Jacques n'ayant rien, Pierre a un jetton, & Paul deux jettons & le dé, on aura

$$h = \frac{10\times o + 8\times c + 18\times B}{36} = \frac{4c + 9B}{18}.$$

Pour déterminer B, ſoit D le ſort de Pierre lorſque Jacques n'ayant rien, Paul a un jetton, & Pierre deux jettons & le dé, on aura

$$B = \frac{2\times A + 8\times P + 8\times D + 18b}{36} = \frac{A + 4P + 4D + 9b}{18}.$$

Pour déterminer D, ſoit E le ſort de Pierre lorſque Jacques n'ayant rien, Pierre a deux jettons, & Paul un jetton & le dé, on aura

$$D = \frac{2\times y + 8\times z + 8l + 18\times E}{36} = \frac{y + 4z + 4l + 9E}{18},$$

$$\& \; E = \frac{18\times A + 18D}{36} = \frac{A + D}{2}.$$

Si l'on ſubſtitue les valeurs de E, D, B, h, dans les équations précedentes, on trouvera

$$D = \frac{86y + 387A + 216z}{27\times 27}.$$

$$B = \frac{2A + 8P + 8D + 4c}{27}.$$

$$h = \frac{8c + A + 4P + D}{27}.$$

Et enfin $m = \frac{151P + 243S + 32c + 4A + 16D}{27\times 18}$.

On trouvera auſſi

$$n = \frac{18\times o + 18\times y}{36} = \frac{1}{2}y.$$

$$b = \frac{18\times o + 18\times c}{36} = \frac{1}{2}c.$$

Pour déterminer la valeur de y, il faut remarquer que Pierre.

Digitized by Google

Pierre n'ayant rien, Jacques ayant un jetton, & Paul un jetton & le dé, le ſort de Pierre eſt, 1°, d'avoir huit coups pour que Paul n'ayant rien, Pierre ait un jetton, & Jacques un jetton & le dé, ſçavoir quand Paul amene un as ſans ſix ni doublet; 2°. dix coups pour perdre, ſçavoir quand Paul amene un ſix; 3°. dix-huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Paul ait un jetton, & Jacques un jetton & le dé.

Cela poſé, on aura $y = \frac{8K+10O+18n}{36} = \frac{4K+9n}{18}$; & ſubſtituant dans cette équation pour K ſa valeur $\frac{5A+4P+9T}{18}$, & pour n ſa valeur $\frac{1}{2}y$, on aura

$$y = 4 \times \frac{5A+4\times\frac{8T+9A}{27}+9\times\frac{171A+32T}{27\times 27}+\frac{9}{2}y}{18},$$

$$18$$

d'où l'on tire, en tranſpoſant & réduiſant, $y = \frac{2736}{19171}A$.

Pour déterminer la valeur de z, je remarque que Pierre, Paul & Jacques ayant chacun un jetton, & Paul ayant le dé, le ſort de Pierre eſt, 1°, d'avoir dix coups, pour que Paul n'ayant rien, il ait un jetton, & Jacques un jetton & le dé, ſçavoir quand Paul amene un ſix ſans doublet; 2°. huit coups pour que Paul n'ayant rien, il ait deux jettons, & Jacques un jetton & le dé, ſçavoir quand Paul amene un as ſans ſix ni doublet; 3°. dix-huit coups, pour que Pierre, Paul & Jacques ayant chacun un jetton, Jacques ait le dé.

Si l'on nomme G le ſort de Pierre dans le ſecond cas, on aura $z = \frac{10K+8G+18m}{36} = \frac{5K+4G+9m}{18}$.

Pour déterminer G, je remarque que Paul n'ayant rien, Pierre ayant deux jettons, & Jacques un jetton & le dé, le ſort de Pierre eſt, 1°, d'avoir dix coups pour gagner, ſçavoir quand Jacques amene un ſix ſans doublet; 2°. huit coups, pour que Jacques n'ayant rien, Paul ait un jetton, & Pierre deux jettons & le dé, ſçavoir quand Jacques amene un as, ſans ſix ni doublet; 3°. dix-huit coups, pour que Paul n'ayant rien, Jacques ait un jetton, & Pierre deux jettons & le dé.

Si l'on nomme F le ſort de Pierre dans le dernier cas, on aura $G = \frac{10 \times A + 8 \times D + 18 \times F}{36}$.

Pour déterminer F, ſoit L le ſort de Pierre lorſque Paul n'ayant rien, Pierre a un jetton, & Jacques deux jettons & le dé, on aura,

$$F = \frac{2 \times O + 8 \times L + 8 \times K + 18 \times G}{36} = \frac{4L + 4K + 9G}{18}.$$

On trouvera auſſi

$$L = \frac{8 \times S + 2 \times p + 8 \times q + 18 \times r}{36} = \frac{4S + p + 4q + 9r}{18}.$$

Si l'on ſubſtitue les valeurs de G, de m & K dans l'égalité $z = \frac{5K + 4G + 9m}{18}$, on aura

$$z = \frac{153351A + 160299p + 115263q + 182331S + 6780y + 11664r + 23328c + 17280z}{708598},$$

& ſubſtituant de nouveau pour r ſa valeur $\frac{344y + 927A + 2916S}{19683}$, & pour c ſa valeur

$$\frac{134847A + 519048p + 714092y + 177147q + 708588S + 13824z}{4257657},$$

on trouvera, en tranſpoſant & réduiſant

$$z = \frac{11643201030807915088}{2378002760298882371 7} A.$$

On aura auſſi

$$m = \frac{71170138109933765 14}{2378002760298882371 7} A;$$

& par conſequent

$$S = \frac{50298127611875321 15}{2378002760298882371 7} A.$$

Ainſi le ſort des trois Joueurs Pierre, Paul & Jacques, ſera comme les trois nombres

50298127611875321 15, 71170138109933765 14, 11643201030807915088.

Il faut remarquer que dans ce Problême on n'a pas eu lieu d'examiner s'il étoit avantageux au Joueur de recommencer lorſqu'il amene de ſon coup un doublet, dans l'eſperance d'en amener trois de ſuite; mais cette conſideration auroit lieu, ſi en ſuppoſant (ainſi qu'il ſe fait ſouvent) qu'il ſuffit pour gagner d'amener deux doublets de ſuite, il ſe trouvoit un plus grand nombre de Joueurs ou

Digitized by Google

ſeulement deux Joueurs qui euſſent chacun pluſieurs jettons. On pourroit donner là-deſſus des regles certaines, ainſi que l'on va voir dans le Problême qui ſuit.

PROBLÊME II.

PROPOSITION XXI.

Pierre & Paul ont un nombre quelconque de jettons. L'on demande en quel cas ils doivent recommencer lorſqu'ils amenent un doublet. L'on ſuppoſe qu'ils gagneront en amenant deux doublets de ſuite.

PREMIER CAS.

Pierre & Paul n'ont chacun qu'un jetton, & c'eſt à Pierre à jouer. L'on demande quel eſt ſon ſort.

145. POUR réſoudre ce Problême, il faut faire des ſuppoſitions touchant la maniere de jouer de Pierre & de Paul, car il peut arriver, 1°, que Pierre & Paul recommenceront lorſqu'ils auront un doublet; 2°. qu'ils ne recommencent dans ce cas ni l'un ni l'autre; 3°. que Pierre recommence, & que Paul ne recommence pas; 4°. que Pierre ne recommence pas, & que Paul recommence. Or ſelon toutes ces differentes ſuppoſitions, le ſort de Pierre ſera different.

1°. Si le deſſein de Pierre & de Paul eſt de ne point recommencer lorſqu'ils auront un doublet, le ſort de Pierre ſera $\frac{1}{3}A$, & celui de Paul $\frac{2}{3}A$.

2°. Si le deſſein de Pierre & de Paul eſt de recommencer lorſqu'ils auront un doublet, le ſort de Pierre eſt $\frac{3}{10}A$, & celui de Paul $\frac{7}{10}A$.

3°. Si le deſſein de Pierre eſt de ne pas recommencer, & celui de Paul de recommencer en cas de doublet, ſon ſort ſera $\frac{21}{58}A$, & celui de Paul $\frac{37}{58}A$.

4°. Si le deſſein de Pierre eſt de recommencer, & celui de Paul de ne pas recommencer, ſon ſort ſera $\frac{8}{28}A$, & celui de Paul $\frac{21}{29}A$.

Digitized by Google

Il ſuit de là que Pierre, & par conſequent Paul, doivent ceder le cornet ſans recommencer lorſqu'ils ont amené un doublet.

Pour s'aſſurer ſi Pierre & Paul doivent recommencer lorſqu'ils ont amené un doublet, il ſuffit d'examiner ſi le ſort de Pierre eſt plus grand ou moindre lorſqu'ils recommencent tous deux, que lorſque ni l'un ni l'autre ne recommence.

SECOND CAS.

Pierre a un jetton contre Paul deux jettons, & c'eſt à Pierre à jouer.

146. 1°. SI l'on ſuppoſe que ni Pierre ni Paul ne recommenceront lorſqu'ils auront un jetton contre deux, & qu'ils auront amené un doublet, on trouvera que le ſort de Pierre eſt $\frac{12}{105}A$, & celui de Paul $\frac{86}{105}A$.

2°. Si l'on ſuppoſe qu'ils recommenceront l'un & l'autre lorſqu'ayant un jetton contre deux ils auront amené un doublet, le ſort de Pierre ſera $\frac{1162}{6993}A$, & celui de Paul $\frac{5831}{6993}A$.

TROISIE'ME CAS.

Pierre & Paul ont chacun deux jettons, & Pierre a le dé.

147. 1°. SI l'on ſuppoſe qu'ils ne recommenceront ni l'un ni l'autre lorſqu'ils auront un jetton contre trois, on trouvera le ſort de Pierre $=\frac{30763}{73185}A$, & celui de Paul $\frac{42422}{73185}A$. On trouvera auſſi que le ſort de Pierre lorſqu'il a un jetton contre trois, & que c'eſt à lui à jouer, eſt $\frac{16498}{73185}A$.

2°. Si l'on ſuppoſe qu'ils recommenceront l'un & l'autre lorſqu'ayant un jetton contre trois, ils auront amené un doublet, le ſort de Pierre ſera $\frac{14989417}{354361355}A$, & celui de Paul $\frac{20446718}{354361355}A$.

Il ſuit de là que Pierre ne doit point recommencer, lorſqu'ayant un jetton contre Paul trois jettons, il amene un doublet.

On pourra en cette ſorte examiner ſi Pierre doit ou ceder

Digitized by Google

le dé à Paul, ou recommencer lorſqu'il a un jetton contre quatre, ou deux contre trois; le calcul ſera le même que celui de ce Problême & du précedent, mais la longueur en ſeroit exceſſive; ainſi je ne conſeille à perſonne de le tenter. Il y a beaucoup d'apparence que Pierre doit recommencer & tenter de gagner en amenant deux doublets de ſuite, lorſqu'ayant un jetton contre quatre, il a amené un doublet; car je trouve que dans le troiſiéme & dernier cas, la difference du ſort de Pierre lorſqu'il ne recommence pas, à ſon ſort quand il recommence, eſt $\frac{2344889212}{1469898609}A$, ce qui eſt moins qu'un centiéme.

PROBLÊMES SUR LE TRICTRAC.

148. Il eſt très utile, pour jouer le Trictrac agreablement & avec avantage, de ſçavoir à chaque coup de dé, l'eſperance qu'on a ou de battre, ou de remplir, ou de couvrir quelqu'une de ſes dames par le coup qu'on va jouer. C'eſt auſſi ce que ſçavent aſſés les bons Joueurs; mais ce n'eſt que par une grande application & beaucoup d'exercice qu'on peut en acquerir l'habitude pour les cas qui ſont un peu compoſés. Par exemple, il y a peu de perſonnes qui puiſſent voir d'un coup d'œil que leur petit Jan étant diſpoſé, ainſi que dans le côté *A* du Trictrac, ils ont un coup pour gagner douze points, dix coups pour en gagner huit, trois coups pour en gagner ſix, ſeize coups pour en gagner quatre, & enfin ſix coups pour ne pas remplir. Mais ce qui paſſe extrêmement les connoiſſances ordinaires des Joueurs, & ce qui leur ſeroit neanmoins très important pour bien jouer les dames, & faire des tenues à propos; c'eſt de pouvoir connoître avec exactitude l'eſperance que l'on a de tenir un certain nombre de coups ſans rompre, ou d'arranger ſon jeu de telle ou telle façon, en deux ou pluſieurs coups. On peut découvrir toutes ces choſes par les methodes précedentes: En voici deux exemples fort ſimples, dont le dernier peut avoir quelque utilité.

Digitized by Google

PROBLÈME.

PROPOSITION XXII.

Pierre parie qu'il prendra ſon grand coin en deux coups. On demande ce qu'il doit gager pour que le parti ſoit égal.

149. Il faut remarquer, 1°, que Pierre ne peut gagner qu'en amenant du premier coup de dé l'un de ces quatre coups, ſix cinq, quine ou ſonnés.

2°. Qu'ayant amené l'un de ces quatre coups, il n'a pas encore gagné ; mais qu'ayant amené ſix cinq du premier coup, il doit pour gagner amener encore ſix cinq au ſecond coup ; & qu'ayant amené du premier coup quine, il doit pour gagner amener au ſecond coup ſonnés ; & qu'ayant amené du premier coup ſonnés, il doit pour gagner amener au ſecond coup ou quine ou ſonnés. Il ſuit de tout cela que le ſort de Pierre ſera $\frac{2}{36} \times \frac{2}{36} + \frac{1}{36} \times \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \times \frac{2}{36} = \frac{7}{1296}$; ainſi Pierre pour parier ſans deſavantage, doit mettre au jeu 7 contre 1289, & il auroit de l'avantage à parier 1 contre 186 de prendre ſon grand coin en deux coups.

PROBLÈME.

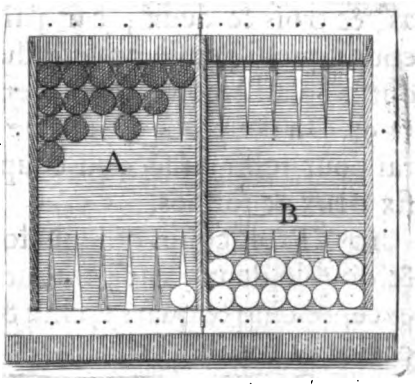
PROPOSITION XXIII.

Mes dames étant diſpoſées ainſi qu'il paroit dans le côté B *du Trictrac, je veux ſçavoir combien je pourrois parier de tenir deux coups ſans rompre.*

150. Les hazards des deux coups ſont ici mêlés enſemble, & ne ſe doivent point conſiderer indépendemment l'un de l'autre. Si avantageux que puiſſe être mon premier coup, il eſt clair que mon ſecond coup peut me faire perdre ; & au contraire ſi deſavantageux qu'il ſoit, il ne m'ôte point l'eſperance de tenir au ſecond coup. La plus grande

Digitized by Google

partie des coups de dé que je peux amener au premier coup, diverſifient mon attente pour l'évenement du ſecond; mais il y en a qui me laiſſent une égale eſperance. Par exemple, il m'eſt indifferent d'amener au premier coup ſonnés ou cinq & as, ou quatre & deux, ſix trois ou cinq & quatre, &c. Pour démêler tout cela, il faut chercher quelle eſt mon eſperance de tenir au ſecond coup dans toutes les differentes ſuppoſitions des differens coups de dé que je peux amener au premier coup. La ſomme de tous ces hazards exprimera mon ſort, on trouvera que j'ai, 1°, deux coups qui me donnent $\frac{1}{36}$, ſçavoir ſix & cinq.



2°. Trois coups qui me donnent $\frac{3}{36}$, ſçavoir ſix quatre & quine, puiſqu'ayant amené ſix quatre ou quine du premier coup, j'ai pour tenir ſonnés & ſix & as.

3°. Quatre coups qui me donnent $\frac{6}{36}$, ſçavoir ſix trois, & cinq & quatre, car j'aurai pour tenir ſonnés, ſix & as, ſix deux & bezet.

4°. Quatre coups qui me donnent $\frac{10}{36}$, ſçavoir ſix deux, & cinq & trois; car j'ai pour tenir ſonnés, ſix & as, ſix, deux, ſix trois, deux & as & bezet.

5°. Deux coups qui me donnent $\frac{12}{36}$, ſçavoir quatre & trois, car j'aurai pour tenir au ſecond coup ſonnés, ſix & as, ſix deux, ſix trois, deux & as, trois & as & bezet.

6°. Quatre coups qui me donnent $\frac{15}{36}$, ſçavoir ſix & as, & cinq & deux; car j'aurai pour tenir ſix & as, ſonnés, ſix deux, bezet, ſix trois, deux & as, ſix quatre, trois & as, & double deux.

7°. Six coups qui me donnent $\frac{21}{36}$, ſçavoir ſonnés, cinq & as, quatre & deux & terne; car j'aurai pour tenir ſonnés, ſix & as, ſix deux, bezet, ſix trois, deux & as, ſix quatre, trois & as, double deux, ſix cinq, quatre & as, trois & deux.

Digitized by Google

8°. Quatre coups qui me donnent $\frac{23}{36}$, ſçavoir quatre & as, & trois & deux ; car j'ai pour tenir tous les mêmes coups que ſi j'euſſe amené du premier coup cinq & as, & outre cela l'eſperance d'amener au ſecond coup cinq & as.

9°. Un coup qui me donne $\frac{8}{36}$, ſçavoir carme ; car j'aurai pour tenir au ſecond coup deux & as, bezet, ſix & as, ſix deux & ſonnés.

10°. Trois coups qui me donnent $\frac{27}{36}$, ſçavoir trois & as, & double deux ; car j'ai tout pour tenir au ſecond coup, excepté cinq & quatre, cinq & trois, quatre & trois, quine, carme & terne.

11°. Deux coups qui me donnent $\frac{32}{36}$, ſçavoir deux & as, car j'aurai tous les coups favorables pour tenir, excepté quine, carme, & cinq & quatre.

12°. Un coup qui me donne $\frac{35}{36}$, c'eſt bezet ; car il n'y aura au ſecond coup que quine contre moi.

Le ſort cherché ſera donc $\frac{565}{1296}$, & le juſte parti de la gageure ſeroit 565 contre 731. On auroit de l'avantage à parier 3 contre 4, & du deſavantage à parier 4 contre 5.

AVERTISSEMENT.

151. IL eſt impoſſible dans la plûpart des ſituations où deux Joueurs peuvent ſe trouver au Trictrac, de déterminer quel eſt leur ſort, & d'eſtimer avec préciſion de quel côté eſt l'avantage ; car outre la varieté prodigieuſe des differentes diſpoſitions poſſibles des trente dames, la maniere ſouvent arbitraire dont les Joueurs conduiſent leur jeu, eſt ce qui décide preſque toujours du gain de la partie. Or tout ce qui dépend de la fantaiſie des hommes n'ayant aucune regle fixe & certaine, il eſt clair qu'on ne peut réſoudre aucune queſtion ſur le Trictrac, à moins que la maniere de jouer ne ſoit déterminée. Le ſeul Problême que l'on puiſſe réſoudre d'une maniere generale ſur le jeu du Trictrac eſt celui-ci : *Trouver le ſort de deux Joueurs qui en ſont au jan de retour, quelque nombre de dames qu'ils ayent encore à paſſer, en quelque endroit qu'elles ſe trouvent placées.* J'en donne ici un Exemple, qui ſuffira pour faire connoître

tre de quelle maniere on pourroit trouver les autres cas plus composés.

PROBLÊME.

PROPOSITION XXIV.

Pierre a les trois dames A, B, C *à lever, & Paul les trois dames* D, E, F; *celui qui le premier aura levé en passant toutes ses dames, gagnera. On suppose que c'est à Pierre à jouer, l'on demande quel est son avantage.*

152. LORSQUE Pierre va jouer, il a vingt-cinq coups pour passer les deux plus reculées *B* & *C*, huit pour passer les Dames *A* & *C*, sçavoir six & as, cinq & as, quatre & as, trois & as; deux coups pour passer les dames *A* & *B*, & un coup seulement pour passer *B*, sçavoir bezet.

Soit nommé *S* le sort de Pierre lorsqu'il va jouer, *x* son sort quand il amene deux & as, & *y* son sort quand il amene du premier coup bezet. On aura $S = \frac{33A+2x+y}{36}$. L'argent du jeu est appellé *A*.

Il s'agit présentement de déterminer les inconnues *x* & *y*; pour en venir à bout, il faut remarquer que Pierre n'ayant plus à lever que la Dame *C*, ne peut ni perdre ni gagner par le coup que jouera Paul; mais que son sort sera different selon tous les differens coups que Paul amenera. Car, par exemple, Paul passant de son premier coup les deux dames *E* & *F*, si Pierre ne passe pas de son second coup la dame *C*, il aura certainement perdu, au lieu qu'il pourroit encore gagner si Paul n'eût passé de son premier coup que les Dames *E* & *D*, ou seulement la Dame *E*.

Soit donc nommé *u* le sort de Pierre, lorsqu'ayant amené du 1er coup deux & as, Paul a passé de son coup les dames *E* & *F*; *h* son sort, quand Paul a passé les dames *D* & *E*; & *t* son sort, quand Paul a passé la dame *E*. On aura $x = \frac{33u+2h+t}{36}$.

Pour connoître la valeur de *u*, on remarquera que Pierre n'ayant plus que la Dame *C* à passer, il a en jouant

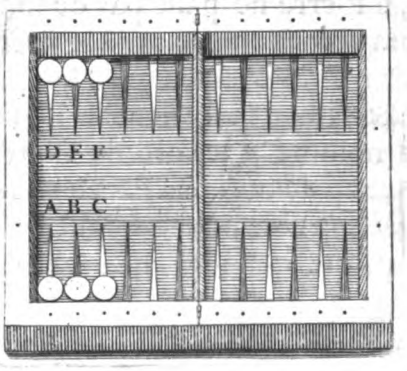
ſon ſecond coup, trente-cinq coups pour gagner.

Pour connoître la valeur de b, on obſervera que Pierre n'ayant plus que la dame C à paſſer, & Paul n'ayant plus que la dame F, Pierre a en jouant de nouveau, trente-cinq coups pour gagner, & un coup pour avoir $\frac{1}{36}A$: car ſuppoſé que Pierre jouant pour la ſeconde fois, amene bezet qui eſt le ſeul coup qui puiſſe l'empêcher de gagner, Paul n'a pas pour cela gagné, il pourra amener auſſi bezet, auquel cas Pierre auroit gagné.

Pour connoître la valeur de t, on prendra garde que Pierre n'ayant plus que la Dame C, & Paul les deux Dames D & F à lever, Pierre a en jouant pour la ſeconde fois, trente-cinq coups pour gagner, & un coup pour avoir $\frac{4}{36}A$: car Pierre ne gagnant pas de ſon ſecond coup, Paul a pareillement quatre coups pour ne pas lever toutes ſes dames, ſçavoir bezet, double deux, deux & as. On aura donc $t = \frac{35}{36}A + \frac{4}{36\times 36}A$. Ayant ainſi déterminé les inconnues u, b, t, ſi on ſubſtitue les valeurs trouvées dans l'équation $x = \frac{33u+2b+t}{36}$, on aura $x = \frac{45366}{46656}A$.

Préſentement il faut déterminer la valeur de y.

Soit nommé q le ſort de Pierre lorſqu'il va jouer ſon ſecond coup, & qu'il lui reſte les dames A & C à lever, & à Paul la ſeule dame D; p ſon ſort lorſqu'il lui reſte à lever les dames A & C, & à Paul la dame F; n ſon ſort lorſqu'il lui reſte à lever les dames A & C, & à Paul les dames D & F. On aura $y = \frac{33q+2p+n}{36}$.



On trouvera par des raiſonnemens ſemblables à ceux qu'on a faits pour trouver la valeur de x, $q = \frac{32}{36}A$, $p = \frac{32}{36}A + \frac{4}{36\times 36}A$, $n = \frac{32}{36}A + \frac{4\times 4}{36\times 36}A$; & par conſequent $y = \frac{41496}{46656}A$. Ayant ainſi déterminé les valeurs de x & de y, on trouvera $S = \frac{46641}{46656}A$.

A

PROBLÈME
SUR LE JEU DES TROIS DEZ
EXPLICATION DES REGLES DE CE JEU.

153. QUOIQUE ce Jeu ſoit ancien & en uſage dans les Académies de Jeu, il n'eſt guere connu que des Joueurs de profeſſion; je crois donc devoir en expliquer avec ſoin toutes les conditions.

On nommera Pierre celui qui tient le dé, & Paul repréſentera les autres Joueurs, dont le nombre eſt indéterminé, ainſi qu'aux Jeux du *Hazard* & du *Quinquenove*.

Pierre pouſſera le dé juſqu'à ce qu'il amene ou 8, ou 9, ou 10, ou 11, ou 12, ou 13, celle de ces chanſes que Pierre amenera ſera ce que l'on nomme la chanſe *droite*, & ſera à peu près pour lui, ce qu'eſt au jeu de la Dupe, pour le Joueur qui a la main, la carte qu'il ſe donne. Enſuite Pierre pouſſe le dé : voici par ordre les principales regles.

1°. La chanſe *droite* étant ou 9, ou 10, ou 11, ou 12, Pierre gagnera au ſecond coup s'il amene chanſe pareille, c'eſt à dire 9 ſi la chanſe *droite* eſt 9, 10 ſi la chanſe *droite* eſt 10, &c. Il gagnera auſſi en amenant 15; mais il perdra s'il amene ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, ou 16, ou 17, ou 18.

2°. Si la chanſe *droite* eſt ou 8, ou 13, Pierre gagnera au ſecond coup en amenant ou chanſe pareille, ou 16; & il perdra s'il amene ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, ou 15, ou 17, ou 18.

3°. Dans tout autre cas que les deux précedens, le nombre que Pierre amenera, après avoir tiré la chanſe *droite*, ſera une chanſe pour la premiere maſſe. Il y a donc pour les maſſes deux chanſes de plus que pour la *droite*, ſçavoir 7 & 14.

4°. Ces deux chanſes étant données, Pierre continuera

Digitized by Google

de pouſſer le dé, & il gagnera la premiere maſſe, s'il en amene la chanſe avant que d'amener la droite; & au contraire il perdra s'il amene la droite avant que d'amener cette chanſe. Dans le premier cas le jeu recommence, & Pierre livre de nouveau une droite & une chanſe à la premiere maſſe, pourvû neanmoins qu'il n'ait pas *tingué*.

Pour apprendre ce que c'eſt que *tinguer*, il faut ſçavoir qu'à ce jeu, ainſi qu'au Quinquenove, les Joueurs peuvent faire des maſſes, & que Pierre les accepte s'il veut, en diſant, *Taupe*. Mais il y a ceci à remarquer, que ſi Pierre en acceptant une maſſe, dit *Taupe & tingue*, la premiere maſſe ne va plus; en ſorte que ſi Pierre amene la droite après avoir tingué, il perd toutes les maſſes qui ont été acceptées, à l'exception de la premiere qui ne va pas, & il tire celle qu'on vient de maſſer. Dans ce cas la droite & la chanſe de la premiere maſſe ſubſiſtent; & ſi Pierre après avoir tingué amene la chanſe de la premiere maſſe, toutes les maſſes deviennent nulles, à l'exception de la droite & de la premiere maſſe qui ſubſiſtent.

5°. Toutes les fois que Pierre perd la premiere maſſe, celui qui ſert le dé à Pierre peut le contraindre à tenir le paroli; & ſi cela arrive une ſeconde fois, à tenir le ſept & le *va*, & enſuite le quinze & le *va*, &c.

6°. Lorſque Pierre perd la premiere maſſe, on lui fixe ou 8, ou 9, ou 10, ou 11, ou 12, ou 13; mais il n'eſt obligé de tenir que 8 ou treize.

Pour faire entendre parfaitement toutes ces regles, je crois qu'il eſt à propos de les appliquer à un exemple. Suppoſons donc que la droite ſoit 13, la premiere maſſe 9, la ſeconde 10, la troiſiéme 11, là-deſſus je fais une maſſe. Pierre dit *Taupe*, & pouſſant le dé il amene 13. Voici ce qui arrivera; 1°. il gagnera ce qui vient d'être maſſé; 2°. il perdra toutes les autres maſſes, & je lui fixerai 13 en faiſant, ſi je veux, le paroli de cette maſſe, enſuite il ſe donnera une chanſe.

Si Pierre au lieu de dire ſimplement *Taupe*, eût dit, *Taupe & tingue*, tout auroit été comme ci-devant, avec cette ſeule difference qu'il n'eût point perdu la premiere

Digitized by Google

masse, & qu'elle seroit restée aussi-bien que la droite.

Supposons maintenant que Pierre amene 9 après avoir dit *Taupe*, il tirera la premiere masse qui est 9, toutes les autres masses s'en iront, & Pierre recommencera le jeu, en tirant une droite au hazard. S'il eût dit *Taupe & tingue*, Pierre n'auroit ni perdu ni gagné, & toutes les chanses eussent été nulles, à l'exception de la premiere qui subsistera avec la droite. Enfin lorsque Pierre amenera ou 10, ou 11 avant que d'amener 13, il gagnera celle de ces masses qu'il amenera avant la droite.

PROBLÊME

PROPOSITION XXV.

On demande quel est à ce jeu l'avantage ou le desavantage de celui qui tient le dé.

154. Soit x le sort de Pierre lorsqu'il amene pour chanse droite 8, ou 13, y son sort lorsqu'il amene ou 9, ou 12, & z lorsqu'il amene 10 ou 11.

S exprimera le sort de Pierre, & A la mise de Paul.

On aura $S = \frac{21x + 25y + 27z}{73}$. On trouvera aussi

$$x = \frac{100A + 50 \times \frac{25}{23}A + 27 \times \frac{9}{4}A}{216} = \frac{19789}{19872}A.$$

$$y = \frac{95A + 42 \times \frac{21}{23}A + 27 \times \frac{27}{13}A + 15 \times \frac{3}{2}A}{216} = \frac{127311}{129168}A.$$

$$z = \frac{101A + 21 \times \frac{7}{4}A + \frac{25 \times 25}{13}A + 30 \times \frac{5}{7}A}{216} = \frac{15147}{26208}A.$$

Par consequent le desavantage de Pierre sera exprimé par cette quantité, $\frac{21 \times \frac{83}{19872}A + 25 \times \frac{2437}{129168}A + 27 \times \frac{3183}{78624}A}{73}$ qui se réduit à cette fraction $\frac{14941093}{660048848}A$ qui est plus grande que $\frac{1}{45}$, & plus petite que $\frac{1}{44}$, & ce seroit là le desavantage cherché, si l'on supposoit que Pierre dût quitter le dé & finir le jeu aussi-tôt qu'il auroit ou gagné ou perdu. Ainsi la premiere masse étant une pistole, il y a sur cette som-

Digitized by Google

me 4 ſols 7 den. de perte pour Pierre lorſqu'il doit tirer ſa droite au hazard. Mais lorſqu'on lui a fixé 8 ou 13, ſon deſavantage par rapport à la premiere maſſe, n'eſt que 10 d. $\frac{5}{207}$. On verra dans les Remarques qui ſuivent quel eſt ſon deſavantage en acceptant des maſſes.

REMARQUE I.

155. IL eſt moins deſavantageux à Pierre d'avoir 8 ou 13 pour chanſe droite, que d'avoir 9 ou 12; & il lui eſt moins deſavantageux d'avoir 9 ou 12, que d'avoir 10 ou 11 : car je trouve que la chanſe droite étant 8 ou 13, le deſavantage de Pierre par rapport à la miſe de Paul, eſt plus grand que $\frac{1}{240}A$, & plus petit que $\frac{1}{239}A$: Que la chanſe droite étant 9 ou 12, le deſavantage de Pierre eſt plus grand que $\frac{1}{154}A$, & moindre que $\frac{1}{153}A$; & enfin que la chanſe droite étant 11 ou 10, ſon deſavantage eſt plus grand que $\frac{1}{25}$, & plus petit que $\frac{1}{24}$.

REMARQUE II.

156. POUVOIR tinguer eſt un privilege que ce jeu accorde à celui qui tient le cornet, par lequel il eſt maître de faire durer long-temps la droite & la premiere maſſe. Il eſt aiſé de s'appercevoir que cet avantage eſt fort peu conſiderable, & a lieu ſeulement lorſque la chanſe de la droite doit arriver plus ſouvent que la chanſe de la premiere maſſe; par exemple, lorſque la droite étant 10 ou 11, la premiere maſſe eſt 8 ou 13. Dans ce cas il vaut mieux tinguer que de tauper ſimplement; mais il ſeroit encore plus à propos de ne point accepter de maſſe.

REMARQUE III.

157. IL n'y a dans ce jeu aucune circonſtance où celui qui tient le cornet ait de l'avantage ſur les Joueurs. Voici la regle qu'il doit ſuivre pour que ſon deſavantage ſoit le moindre qu'il ſera poſſible. Il n'acceptera point de maſſes lorſque la droite ſera 9 ou 12, & encore moins lorſqu'elle ſera 10 ou 11 : car dans le premier cas il a ſur une maſſe d'une piſtole

Digitized by Google

trois sols neuf deniers de perte, & dans le second huit sols deux deniers.

REMARQUE IV.

158. ON voit par les observations précedentes, qu'il s'en manque beaucoup que ce Jeu ne soit ni aussi égal, ni aussi-bien inventé que bien des Joueurs se l'imaginent. Pour le réformer il seroit à propos de regler que 17 fût aussi-bien que 15 un hazard favorable à celui qui tient le cornet, soit que la droite soit ou 9, ou 10, ou 11, ou 12. Par cette réforme le desavantage de Pierre qu'on a trouvé $= \frac{14241\,03}{66004848} A$, sera exprimé par cette fraction $\frac{188071}{66004848} A$, ce qui vaut un peu moins de sept deniers, A désignant une pistole.

PROBLÊME.

PROPOSITION XXVI.

Soit un nombre de dés quelconque. Pierre parie que les jettant au hazard, il en amenera tant d'une espece, tant d'une autre; par exemple, tant de simples, tant de doubles, tant de triples, ou tant de doubles, tant de quadruples, &c. On demande combien il aura de façons differentes d'amener les dés en la maniere qu'il se le sera proposé.

159. ON a donné à la page 44, *art. 42*, la solution de ce Problême : Voici pour l'utilité des Joueurs une Table qui en détermine tous les differens cas depuis deux dés jusqu'à neuf inclusivement. La premiere colonne donne tous les cas déterminés, ce qui fait une espece particuliere du Problême general. La seconde les donne indéterminés conformément à l'énoncé du Problême. Ainsi, par exemple, on trouvera que le nombre 3 exprime combien il y a de façons differentes d'amener bezet & un deux avec trois dés, & le nombre 90 qui est vis à vis à la seconde colonne, combien il y a de façons differentes d'amener un double quelconque avec un simple aussi quelconque; & de même le nombre 12 exprimera combien il y a de manieres differentes d'amener bezet, un deux & un trois

avec quatre dés, & le nombre 720, combien il y en a pour amener un double & deux ſimples indéterminément.

TABLE.

Pour deux dés.

	Déterminés.		Indéterminés.
1°. pour avoir deux ſimples,	2	il y a	30
2°. un doublet,	1		6 coups.

Pour trois dés.

1°. pour avoir trois ſimples,	6	il y a	120
2°. un double & un ſimple,	3		90 coups.
3°. un triple,	1		6

Pour quatre dés.

1°. pour avoir quatre ſimples,	24	il y a	360
2°. un double & deux ſimples,	12		720
3°. deux doubles,	6		90 coups.
4°. un triple & un ſimple,	4		120
5°. un quadruple,	1		6

Pour cinq dés.

1°. pour avoir cinq dés ſimples,	120	il y a	720
2°. un double & trois ſimples,	60		3600
3°. deux doubles & un ſimple,	30		1800
4°. un triple & deux ſimples,	20		1200 coups.
5°. un triple & un double,	10		300
6°. un quadruple & un ſimple,	5		150
7°. un quintuple,	1		6

Pour ſix dés.

1°. pour avoir ſix ſimples,	720	il y a	720
2°. un double & quatre ſimples,	360		10800
3°. deux doubles & deux ſimples,	180		16200
4°. trois doubles,	90		1800
5°. un triple & trois ſimples,	120		7200
6°. un triple, un double & un ſimple,	60		7200 coups.
7°. deux triples,	20		300
8°. un quadruple & deux ſimples,	30		1800
9°. un quadruple & un double,	15		450
10. un quintuple & un ſimple,	10		180
11. un ſextuple,	1		6

Pour

Digitized by Google

Pour ſept dés.

	Déterminés.		Indéterminés.	
1°. pour avoir un double & cinq ſimples,	2520		15120	
2°. deux doubles & trois ſimples,	1260		75600	
3°. trois doubles & un ſimple,	630		37800	
4°. un triple & quatre ſimples,	840		25200	
5°. un triple, un double & deux ſimples,	420		75600	
6°. un triple & deux doubles,	210		12600	
7°. deux triples & un ſimple.	140		8400	
8°. un quadruple & trois ſimples,	210	il y a	12600	coups.
9°. un quadruple, un double & un ſimple,	105		12600	
10. un quadruple & un triple,	35		1050	
11. un quintuple & deux ſimples,	42		2520	
12. un quintuple & un double,	21		630	
13. un ſextuple & un ſimple,	7		210	
14. un ſeptuple,	1		6	

Pour huit dés.

1°. pour avoir deux doubl. & quat. ſimp.	10080		151200	
2°. trois doubles & deux ſimples,	5040		302400	
3°. quatre doubles,	2520		37800	
4°. un triple & cinq ſimples,	6720		40320	
5°. un triple, un double & trois ſimples,	3360		403200	
6°. un triple, deux doubles & un ſimple,	1680		302400	
7°. deux triples & deux ſimples,	1120		100800	
8°. deux triples & un double,	560		33600	
9°. un quadruple & quatre ſimples,	1680		50400	
10. un quadruple, un doubl. & deux ſimpl.	840	il y a	151200	coups.
11. un quadruple & deux doubles,	420		25200	
12. un quadruple, un triple & un ſimple,	280		33600	
13. deux quadruples,	70		1050	
14. un quintuple & trois ſimples,	336		20160	
15. un quintuple, un double & un ſimple,	168		20160	
16. un quintuple & un triple,	56		1680	
17. un ſextuple & deux ſimples,	56		3360	
18. un ſextuple & un double,	28		840	
19. un ſeptuple & un ſimple,	8		240	
20. un octuple,	1		6	

Digitized by Google

Pour neuf dés.

	Déterminés.		Indéterminés.	
1°. pour avoir trois doubles & trois ſimpl.	45360		907200	
2°. quatre doubles & un ſimple,	22680		680400	
3°. un triple, un double & quatre ſimples,	30240		907200	
4°. un triple, deux doubles & deux ſimpl.	15120		2721600	
5°. un triple & trois doubles,	7560		453600	
6°. deux triples & trois ſimples,	10080		604800	
7°. deux triples, un double & un ſimple,	5040		907200	
8°. trois triples,	1680		33600	
9°. un quadruple & cinq ſimples,	15120		90720	
10. un quadruple, un doubl. & trois ſimpl.	7560		907200	
11. un quadruple, deux doubl. & un ſimpl.	3780		680400	
12. un quadruple, un triple & deux ſimpl.	2520		453600	
13. un quadruple, un triple & un double,	1260	il y a	151200	coups.
14. deux quadruples & un ſimple,	630		37800	
15. un quintuple & quatre ſimples,	3024		90720	
16. un quintuple, un double & deux ſimpl.	1512		272160	
17. un quintuple & deux doubles,	756		45360	
18. un quintuple, un triple & un ſimple,	504		60480	
19. un quintuple & un quadruple,	126		3780	
20. un ſextuple & trois ſimples,	504		30240	
21. un ſextuple, un double & un ſimple,	252		30240	
22. un ſextuple & un triple,	84		2520	
23. un ſeptuple & deux ſimples,	72		4320	
24. un ſeptuple & un double,	36		1080	
25. un octuple & un ſimple,	9		270	
26. un noncuple,	1		6	

REMARQUE.

160. SI les jeux de dés ſont en ſi petit nombre, & ſe jouent ſeulement avec deux dés, ou tout au plus avec trois, à la difference des jeux de cartes qui ſe jouent avec un fort grand nombre de cartes, il y a bien de l'apparence que cela vient de ce qu'on n'a pu calculer les hazards qui ſe trouvent entre pluſieurs dés. En effet cela étoit fort difficile. La Table précedente, & celles qu'on trouvera dans les propoſitions qui ſuivent juſqu'à la fin de cette ſeconde Partie, donneront là deſſus toutes les lumieres qu'on pourra ſouhaiter, & ſerviront à ceux qui voudroient inventer des

Digitized by Google

jeux de dés plus variés, & par conſéquent plus agreables que tous ceux qu'on a connus juſqu'à préſent.

PROBLÊME.

PROPOSITION XXVII.

On demande en combien de façons on peut amener un certain nombre ou point déterminé, avec un certain nombre de dés.

161. Tous les Joueurs de Trictrac ſçavent en combien de façons chaque point depuis deux juſqu'à douze, peut s'amener. Mr Hugens en a donné une Table pour deux & pour trois dés; mais on ne peut aller plus loin ſans methode, car cela devient tout d'un coup extrêmement compoſé. On a donné une ſolution très generale de ce Problême à la page 46, *art.* 44. Voici pour l'utilité des Joueurs une Table qui détermine tous les hazards qu'il y a pour amener les divers points poſſibles avec un nombre de dés, depuis deux juſqu'à neuf incluſivement.

TABLE.

Avec deux dés.

Il y a	coups qui donnent
1	2 ou 12
2	3 ou 11
3	4 ou 10
4	5 ou 9
5	6 ou 8
6	7

Avec trois dés.

Il y a	coups qui donnent
1	3 ou 18
3	4 ou 17
6	5 ou 16
10	6 ou 15
15	7 ou 14
21	8 ou 13
25	9 ou 12
27	10 ou 11

Avec quatre dés.

Il y a	coups qui donnent
1	4 ou 24
4	5 ou 23
10	6 ou 22
20	7 ou 21
35	8 ou 20
56	9 ou 19
80	10 ou 18
104	11 ou 17
125	12 ou 16
140	13 ou 15
146	14

Avec cinq dés.

Il y a	coups qui donnent
1	5 ou 30
5	6 ou 29
15	7 ou 28
35	8 ou 27
70	9 ou 26
126	10 ou 25
205	11 ou 24
305	12 ou 23
420	13 ou 22
540	14 ou 21
651	15 ou 20
735	16 ou 19
780	17 ou 18

Digitized by Google

Avec six dés.

Il y a		coups qui donnent	
	1		6 ou 36
	6		7 ou 35
	21		8 ou 34
	56		9 ou 33
	126		10 ou 32
	252		11 ou 31
	456		12 ou 30
	756		13 ou 29
	1161		14 ou 28
	1666		15 ou 27
	2247		16 ou 26
	2856		17 ou 25
	3431		18 ou 24
	3906		19 ou 23
	4221		20 ou 22
	4332		21

Avec sept dés.

Il y a		coups qui donnent	
	1		7 ou 42
	7		8 ou 41
	28		9 ou 40
	84		10 ou 39
	210		11 ou 38
	462		12 ou 37
	917		13 ou 36
	1667		14 ou 35
	2807		15 ou 34
	4417		16 ou 33
	6538		17 ou 32
	9142		18 ou 31
	12117		16 ou 30
	15267		20 ou 29
	18327		21 ou 28
	20993		22 ou 27
	22967		23 ou 26
	24017		24 ou 25

Avec huit dés.

Il y a		coups qui donnent	
	1		8 ou 48
	8		9 ou 47
	36		10 ou 46
	120		11 ou 45
	330		12 ou 44
	792		13 ou 43
	1708		14 ou 42
	3368		15 ou 41
	6147		16 ou 40
	10480		17 ou 39
	16808		18 ou 38
	25488		19 ou 37
	36688		20 ou 36
	50288		21 ou 35
	65808		22 ou 34
	82384		23 ou 33
	98813		24 ou 32
	113688		25 ou 31
	125588		26 ou 30
	133288		27 ou 29
	135954		28

Avec neuf dés.

Il y a		coups qui donnent	
	1		9 ou 54
	9		10 ou 53
	45		11 ou 52
	165		12 ou 51
	495		13 ou 50
	1287		14 ou 49
	2994		15 ou 48
	6354		16 ou 47
	12465		17 ou 46
	22825		18 ou 45
	39303		19 ou 44
	63999		20 ou 43
	98979		21 ou 42
	145899		22 ou 41
	205560		23 ou 40
	277464		24 ou 39
	359469		25 ou 38
	447669		26 ou 37
	536569		27 ou 36
	619569		28 ou 35
	689715		29 ou 34
	740619		30 ou 33
	767394		31 ou 32

Digitized by Google

On trouvera par cette Table que onze, par exemple, s'amene en deux façons avec deux dés, en 27 façons avec trois dés, en 104 façons avec quatre dés, en 205 façons avec cinq dés, &c.

COROLLAIRE.

162. ON peut ſans avantage ni deſavantage jouer avec trois dés au paſſe-dix, & avec cinq dés au paſſe-dix-ſept, & avec ſept dés au paſſe-vingt-quatre, & ainſi de ſuite, en ajoutant toujours 7. Mais il faut remarquer que le nombre des dés étant pair, on ne peut faire de pareil parti, puiſqu'il y a toujours un certain point qu'on peut amener plûtôt que tout autre : avec deux dez, c'eſt 7; avec quatre dés, c'eſt 14; avec ſix dés, c'eſt 21, &c. en ajoutant toujours 7.

REMARQUE.

163. IL faut obſerver que les Joueurs ont établi tant pour le jeu de la Raſle que pour le Paſſe-dix, qu'il n'y auroit de coups bons que ceux où il ſe trouveroit au moins deux dés ſemblables. Je ne peux deviner ce qui a occaſionné cette regle qui ne ſert qu'à amuſer les Joueurs, puiſqu'il y a à chaque coup cinq contre quatre à parier que le coup qu'on va jouer ne ſera pas bon; & je croirois qu'on ne feroit pas mal de l'abolir, en établiſſant que tous les coups fuſſent bons, ou ſi l'on veut (en renverſant la regle ordinaire) que ceux-là ſeuls fuſſent reputés pour bons où tous les dés marqueroient differens points; ainſi on auroit moins de ces coups inutiles qui ennuyent preſque toujours & les Joueurs & les Spectateurs. Au reſte avec l'un ou l'autre de ces changemens le Paſſe-dix ſeroit toujours un jeu égal. La Table précedente le prouve dans la ſuppoſition que tout coup ſoit réputé bon. Je ferai voir dans la ſuite que ce jeu ſeroit encore égal, en ſuppoſant qu'il n'y eût de coups de bons que ceux où tous les dés ſeroient differens, ou bien, ſelon la regle ordinaire de ce jeu, qu'il n'y ait de bons que ceux où il ſe trouve au moins deux dés ſemblables.

Digitized by Google

PROBLÊME.

PROPOSITION XXVIII.

Pierre joue contre Paul au Paſſe-dix & tient le dé, Paul lui propoſe de lui donner un point, à condition que cet as qu'il donne ſervira à rendre les coups bons lorſque Pierre amenera un as d'un de ſes trois dés. On demande ſi Pierre doit accepter ce parti.

164. LA raiſon de douter eſt que ſi ce quatriéme dé qui porte un as, donne à Pierre des coups favorables, qui ſans cela euſſent été contraires ou indifferens, il y en a pluſieurs auſſi entre ceux qui étoient indifferens à Pierre, qui lui deviennent contraires.

On remarquera, 1°, qu'il y a quarante-huit coups qui font gagner Pierre indépendamment de ce quatriéme dé; 2°. Qu'il y en a vingt-quatre qui l'euſſent fait recommencer, & qui par le moyen de ce nouvel as le font gagner. Ces vingt-quatre coups ſont, 6, 4, 1; 6, 5, 1; 6, 3, 1; 5, 4, 1. 3°. Qu'il y en a neuf qui le font gagner, & qui ſans ce quatriéme dé l'euſſent fait perdre. Ces neuf coups ſont 4, 4, 2; 4, 3, 3; 6, 2, 2. 4°. Qu'il y a trente-neuf coups qui le font perdre indépendamment du quatriéme dé, & trente-ſix qui le font perdre à cauſe de ce nouvel as, & qui ſans cela étoient indifferens. Ces trente-ſix coups ſont 1, 4, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 5; 1, 2, 6; 1, 3, 4; 1, 3, 5; en ſorte qu'il reſte ſoixante coups indifferens, ſçavoir, 4, 3, 2; 5, 3, 2; 6, 3, 2; 5, 4, 2; 6, 4, 2; 5, 4, 3; 6, 4, 3; 6, 5, 2; 3, 5, 6; 4, 5 6. Il y auroit donc dans ce parti de l'avantage pour Pierre; mais ce ne ſeroit que de la cinquante-deuxiéme partie de l'argent mis à la gageure.

On peut obſerver que ſi on ne comptoit un point au profit de Pierre que lorſque l'as, repréſenté par le quatriéme dé, ſert à rendre bon un coup qui eût été nul, le parti ſeroit deſavantageux à Pierre, & ſon deſavantage ſeroit préciſément le quadruple de ce qu'eſt ſon avantage dans la ſuppoſition précedente.

Digitized by Google

Ce Problême eſt, comme l'on voit, fort facile, & je ne l'ai mis ici que parcequ'il m'a été propoſé par un de mes amis, qui m'a dit avoir vû ſouvent jouer but à but ſuivant les conditions qu'on a expliquées dans l'énoncé du Problême.

PROBLÊME I.

SUR LE JEU DE LA RAFLE.

PROPOSITION XXIX.

Pierre joue à la premiere Rafle avec un certain nombre de Joueurs à volonté. On demande quel ſera ſon avantage lorſqu'il aura un point quelconque depuis onze juſqu'à dix-huit.

165. Il y a deux ſortes de Jeux de Rafle, ſçavoir la premiere Rafle, & les trois Rafles comptées. Je vais donner ici ce qui regarde la premiere Rafle, le Problême ſuivant ſera ſur les trois Rafles comptées. Voici quelques regles communes à ces deux Jeux. 1°. On y joue avec trois dés. 2°. Tous les coups où il ne ſe trouve pas au moins deux dés ſemblables ſont réputés nuls, & on les recommence. 3°. A ces jeux il n'y a point de primauté, & lorſque deux ou pluſieurs Joueurs ſe trouvent avoir le même point, ils recommencent entr'eux pour voir qui gagnera. Voici quelques autres regles qui ſont particulieres au jeu de la premiere Rafle. 1°. Un Joueur dit qu'il a rafle lorſque les trois dés qu'il a jettés portent tous le même point. 2°. Rafle l'emporte ſur ceux qui n'ont que des points; en ſorte, par exemple, que celui qui aura rafle gagnera au préjudice de celui qui aura 17; hors ce cas celui qui a le plus haut point gagne. 3°. Une rafle plus haute l'emporte ſur une plus baſſe, par exemple rafle de 4 ſur rafle de 3, & rafle de 3 ſur rafle de 2, &c.

La ſolution de ce Problême s'entendra aiſément par un Exemple.

Digitized by Google

Je ſuppoſe donc qu'il y ait trois Joueurs, Pierre, Paul & Jacques : Pierre a déja joué, & a amené onze. On demande s'il a de l'avantage, & quel eſt cet avantage.

Il faut d'abord conſulter la Table, *art. 159*, pour trouver combien il y a de coups bons dans trois dés, c'eſt à dire de coups où il ſe trouve au moins deux dés ſemblables, & combien il y a de ces coups pour amener chacun des differens points en particulier : enſuite il faut employer la methode analytique, examiner par ordre ce qui peut arriver dans les coups de Paul & de Jacques, & ce que les hazards differens de ces deux coups donnent à Pierre d'eſperance, ou de gain ou de perte.

Je trouve qu'il y a trois coups pour amener 17 ou 4, ſix coups pour amener 16 ou 5, quatre coups pour amener 15 ou 6, neuf coups pour amener 14 ou 7, 13 ou 8, 10 ou 11, & enfin ſept coups pour amener 12 ou 9. Cela poſé, voici comme je raiſonne.

Lorſque Paul jouera ſon coup, Pierre perdra ſi Paul amene ou 18 ou 17, ou 16 ou 15, ou 14 ou 13, ou 12, ou raſle d'as, de deux, ou de trois, ce qui fait quarante-deux coups pour perdre. Il y a neuf coups pour que Pierre ſoit but à but avec Paul dans l'attente du coup de Jacques, & quarante-cinq coups pour que Paul amenant un point quelconque au deſſous de onze, Pierre n'ait plus à craindre que le coup de Jacques.

Lorſque Paul a amené un point quelconque au deſſous de onze, le ſort de Pierre eſt d'avoir quarante-cinq coups pour gagner tout ce qui eſt au jeu, & neuf coups pour partager avec Jacques, ſçavoir quand Jacques amene onze.

Si Paul a amené onze, le ſort de Pierre eſt d'avoir quarante-cinq coups pour partager également avec Paul le droit ſur tout ce qui eſt au jeu ; neuf coups pour avoir ſon tiers ſur l'argent qui eſt au jeu ; & enfin d'avoir quarante-deux coups pour perdre.

Si l'on réduit ce raiſonnement ſelon les regles de l'Algebre, on trouvera que le ſort cherché de Pierre eſt $\frac{812}{1024}A$, en ſuppoſant que A exprime la miſe de chaque Joueur, ce qui fait voir que Pierre a du deſavantage, lorſque jouant avec

avec deux Joueurs il a onze. Ce desavantage est tel qu'il pourroit sans perte ni profit donner quarante sols & une fraction de deniers à un Joueur qui voudroit prendre sa place, supposé que *A* qui désigne la mise de chaque Joueur exprime une pistole.

On pourra trouver en cette maniere l'avantage ou le desavantage de Pierre, quelque soit son point, & quelque nombre de Joueurs qu'il y ait. En voici une Table qui donne l'avantage de Pierre, en supposant qu'il ait un point quelconque depuis onze jusqu'à dix-huit, autrement que par une rafle. L'on y suppose, comme ci-dessus, que le jeu soit aux pistoles.

TABLE.

Pour deux Joueurs. Pour trois Joueurs. Pour quatre Joueurs.

	avantage.			avantage.			avantage.		
points.	liv.	sols,	den.	liv.	sols,	den.	liv.	sols,	den.
18	9	17	11	19	13	$9\frac{25}{96}$	29	8	$4\frac{585}{81944}$
17	8	8	9	15	9	$10\frac{71}{128}$	21	6	$11\frac{1119}{3072}$
16	7	10	0	12	19	$3\frac{21}{64}$	14	7	$1\frac{251}{256}$
15	6	11	3	10	11	$6\frac{9}{32}$	12	14	$5\frac{3009}{3072}$
14	5	6	3	7	12	$1\frac{25}{32}$	8	0	$4\frac{599}{1024}$
13	3	8	9	3	11	$3\frac{15}{32}$	2	3	$9\frac{825}{1024}$
12	1	17	6	0	11	$8\frac{5}{8}$			
11		6	3						

On voit par cette Table qu'entre deux Joueurs il y a de l'avantage à avoir onze, & qu'à trois Joueurs il y a du desavantage.

Lorsqu'il y a quatre Joueurs, on n'a de l'avantage que lorsqu'on a au moins treize. Je trouve qu'à douze points il y a sur une pistole une livre douze sols de perte ou de desavantage, ce qui paroît d'abord assés étrange.

J'ai trouvé des personnes d'esprit qui croyoient voir évidemment que puisque c'est un avantage entre deux Joueurs d'avoir onze points, on devoit conclure que ce

Digitized by Google

ſeroit auſſi un avantage tel nombre de Joueurs qu'il y eût. Voici comme ils raiſonnoient. Il eſt vrai que Pierre jouant lui troiſiéme, & ayant onze points, a moitié moins d'eſperance de gagner, que lorſqu'ayant onze points, il n'a affaire qu'à un Joueur; mais en récompenſe il a le double à gagner. Or le produit de $2 \times \frac{1}{2}$ étant $= 1$, il s'enſuit que Pierre ayant onze points, doit avoir de l'avantage, ſoit que le jeu ſoit entre trois Joueurs, ou qu'il ſoit ſeulement entre deux Joueurs. Ils employoient le même raiſonnement pour prouver que l'avantage de celui qui a onze points eſt le même, ſoit qu'il n'y ait que deux Joueurs, ſoit qu'il y en ait quatre, ou un autre nombre quelconque.

Ce raiſonnement eſt ſpecieux; mais il manque en ce que l'on ſuppoſe que l'eſperance que Pierre a de gagner eſt moitié moindre lorſque deux Joueurs ont à jouer après lui, que lorſqu'il n'y en a qu'un : ce qui n'eſt point vrai, quoique fort vrai-ſemblable. On ne peut trop chercher l'évidence en cette matiere, où l'on trouvera plus qu'en toute autre, que les apparences conduiſent à l'erreur.

PROBLÊME II

SUR LE JEU DES TROIS RAFLES COMPTÉES.

PROPOSITION XXX.

Pierre joue contre Paul à qui fera le plus de points en trois raſles comptées, c'eſt à dire, en trois coups tels qu'il ſe trouve au moins un doublet dans les trois dés. Il a amené trente-deux. On demande s'il a de l'avantage, & quel eſt cet avantage.

166. L'ON pourroit réſoudre ce Problême par l'analyſe, en examinant par ordre tous les differens points qu'on peut amener avec un, deux, trois, quatre, &c. juſqu'à neuf dés, & en réjettant tous ceux où dans chaque trois

Digitized by Google

dés il ſe trouveroit trois dés differens les uns des autres, & en exprimant tous ces differens hazards par des inconnues qu'on détermineroit ſelon les regles ordinaires : mais cette voye ſeroit d'une longueur exceſſive, & demanderoit un calcul de pluſieurs mois. L'*art. 44* en fournit une très abregée. Voici une Table qui contient tous les differens hazards qui peuvent arriver, & exprime l'avantage de Pierre pour tous les differens points qu'il aura depuis 32 juſqu'à 54.

TABLE.

points.	diverſes façons de les amener.	avantage.	livres.	ſols.
54 ou 9	1	884735	9	19
53 ou 10	9	884725	9	19
52 ou 11	45	884671	9	19
51 ou 12	147	884479	9	19
50 ou 13	369	883963	9	19
49 ou 14	765	882829	9	19
48 ou 15	1446	880618	9	19
47 ou 16	2484	876688	9	18
46 ou 17	3969	870235	9	16
45 ou 18	5869	860397	9	14
44 ou 19	8433	846095	9	11
43 ou 20	11493	826169	9	6

points.	diverſes façons de les amener.	avantage.	livres.	ſols.
42 ou 21	15027	799649	9	0
41 ou 22	19287	765335	8	13
40 ou 23	23886	722162	8	3
39 ou 24	28668	669608	7	11
38 ou 25	38867	607073	6	17
37 ou 26	38871	534335	6	0
36 ou 27	43171	452293	5	2
35 ou 28	47457	361665	4	1
34 ou 29	50607	263601	2	19
33 ou 30	52551	160443	1	16
32 ou 31	53946	53946	0	12
	447368	Total de toutes les diverſes façons depuis 32 juſqu'à 54.		

Cette Table eſt, comme l'on voit, rangée ſur quatre

colonnes. La premiere déſigne tous les differens points que Pierre peut avoir depuis neuf juſqu'à cinquante-quatre. La ſeconde exprime le nombre de coups differens que peuvent donner les points qui lui répondent dans la premiere colonne. La troiſiéme colonne donne l'avantage de Pierre pour tous les differens points qu'il peut avoir depuis trente-deux juſqu'à cinquante-quatre, en donnant à chacun de ces termes la quantité 894376 pour dénominateur. La quatriéme colonne donne cet avantage en livres & en ſols, en ſuppoſant que le jeu ſoit aux piſtoles, c'eſt à dire, que Pierre ait mis une piſtole au jeu. On a négligé les deniers.

On voit par cette Table que l'avantage d'avoir quelques-uns des differens points depuis cinquante-quatre juſqu'à quarante-deux, ne va qu'à vingt ſols de difference, & que celui d'avoir quelques-uns des nombres depuis cinquante-quatre juſqu'à quarante-huit, ne va qu'à quelques deniers.

On voit au contraire que cette difference change fort conſiderablement dans les nombres qui approchent de trente-deux. On peut découvrir par le raiſonnement que cela doit être à peu près ainſi.

Il paroît par la comparaiſon de cette Table avec celle de l'*art. 159*, pour neuf dés, qu'on auroit plus d'avantage ſi jouant avec trois dés trois coups de ſuite, tous les coups étoient bons indifferemment : car dans ce cas l'avantage d'un Joueur qui auroit pour point trente-deux ſeroit $\frac{767394}{19077696}$, ce qui ſeroit quinze ſols & quelques deniers d'avantage ou de profit, le jeu étant aux piſtoles.

Digitized by Google

PROBLÈME
SUR LE JEU DES SAUVAGES,
APPELLÉ
LE JEU DES NOYAUX.

167. Le Baron de la Hontan fait mention de ce Jeu dans le ſecond Tome de ſes Voyages de Canada, *p. 113*. Voici comme il s'explique :

On y joue avec huit noyaux noirs d'un côté & blancs de l'autre : on jette les noyaux en l'air : alors ſi les noirs ſe trouvent impairs, celui qui a jetté les noyaux gagne ce que l'autre Joueur a mis au jeu : S'ils ſe trouvent ou tous noirs ou tous blancs, il en gagne le double ; & hors de ces deux cas il perd ſa miſe.

PROPOSITION XXXI.

On demande lequel des deux Joueurs a de l'avantage, en ſuppoſant qu'ils mettent également au jeu.

168. Il eſt clair que le Problême des Noyaux ſe réduit à celui-ci. Déterminer combien il y a à parier que jettant au hazard huit dés, qui n'ayent chacun que deux faces, un as & un deux, on amenera ou un as & ſept deux, ou trois as & cinq deux, ou cinq as & trois deux, ou ſept as & un deux, ou deux as & ſix deux, ou quatre as & quatre deux, ou ſix as & double deux.

On trouvera, *art. 27*, qu'il y a, 1°, huit coups ſur 256 pour amener un noir & ſept blancs ; 2°. 56 coups pour avoir trois noirs & cinq blancs ; 3°. 28 coups pour avoir deux noirs & ſix blancs ; 4°. 70 coups pour avoir quatre noirs & quatre blancs. Il eſt évident qu'on ne peut les ame-

Digitized by Google

ner ou tous noirs ou tous blancs que d'une façon. Il ſuit de tout cela que ſi l'argent du jeu eſt appellé A, le ſort de celui qui jette les noyaux ſera $\frac{128 \times A + 2 \times \overline{A + \frac{1}{2}A}}{256}$ & le ſort de l'autre Joueur ſera $\frac{126A + 2 \times \overline{0 - \frac{1}{2}A}}{256}$. Ainſi l'avantage de celui qui jette les noyaux eſt $\frac{3}{256}$; & pour que le jeu fût égal, il faudroit que celui qui jette les noyaux mît au jeu 22 contre l'autre 21.

On peut obſerver que l'inégalité de ce jeu ne porte aucun préjudice à ces Joueurs de l'autre monde, qui ne jouant entr'eux que des choſes dont la proprieté leur eſt commune, doivent être aſſés indifferens pour le gain & pour la perte. Le mépris que ces Peuples ont pour ce que nous eſtimons le plus, eſt une eſpece de paradoxe qu'on ne doit point avancer ſans preuve dans un Livre tel que celui ci. La voici tirée du Baron de la Hontan : *Au reſte*, dit cet agreable Voyageur, *ces jeux ne ſe font que pour des feſtins, & pour quelques autres bagatelles : car il faut remarquer que comme ils haïſſent l'argent, ils ne le mettent jamais de leurs parties. Auſſi peut-on aſſurer que l'interêt n'a jamais cauſé de diviſion entr'eux.*

Je crois devoir ajouter que ce Problême m'a été propoſé par une Dame, qui m'en a donné preſque ſur le champ une ſolution fort juſte, en ſe ſervant de la Table, *art. 1*, mais cette Table ne ſert ici que par hazard, car ſi les noyaux au lieu d'avoir deux faces, en avoient davantage, par exemple quatre, cette Table ne ſeroit point ſuffiſante, & le Problême ſeroit bien moins facile que le précedent, ainſi qu'on pourra le remarquer dans la propoſition ſuivante.

L'on ſuppoſe que les huit noyaux ont chacun quatre faces, ſçavoir une blanche, une noire, une verte & une rouge. Pierre ſera celui qui jette les noyaux, Paul ſera l'autre Joueur

Si les noyaux ayant été jettés au hazard, il ſe trouve des quatre couleurs, Paul donnera B à Pierre. S'il n'y en

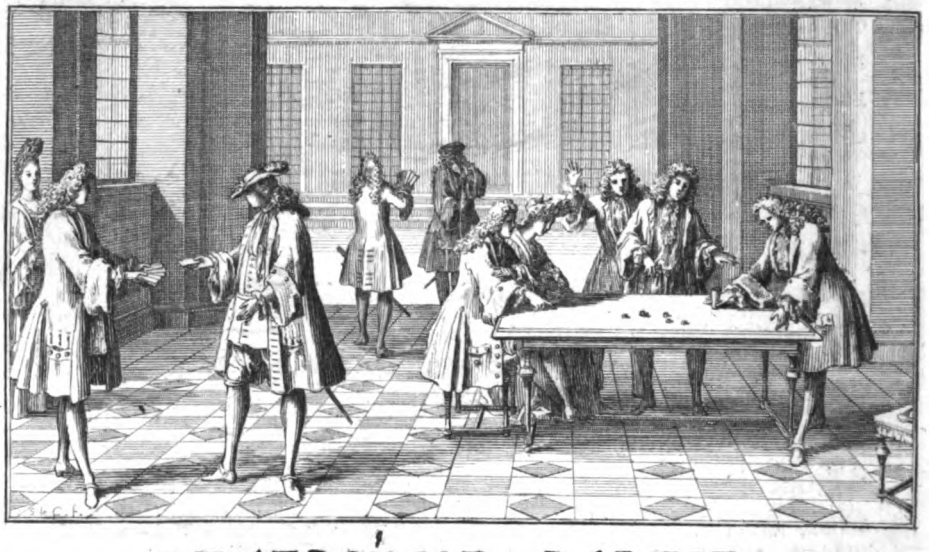
Digitized by Google

a que de trois couleurs, Paul lui donnera $3B$; & s'il n'y en a que d'une ſeule couleur, c'eſt à dire, ſi les huit noyaux ſont ou tous blancs ou tous noirs, ou tous verts ou tous rouges, Paul lui donnera $4B$; enfin s'il n'y en a que de deux couleurs, Pierre donnera à Paul $2A$.

Cela poſé, *on demande de quel côté eſt l'avantage, & quel eſt cet avantage, en ſuppoſant que* A *ait à* B *un rapport quelconque.*

L'on trouvera par les *art. 29 & 42*, que ſi $B = A$, Paul aura de l'avantage à ce jeu; mais ce ne ſeroit que de cette fraction $\frac{233}{16384}$, ce qui n'eſt à peu près que la ſoixante & dixiéme partie de l'unité; & par conſequent afin que la condition de Pierre & celle de Paul fuſſent égales, il faudroit que B fût $= \frac{11592}{11359}A$, c'eſt à dire que Pierre devroit mettre au jeu onze mil cinq cens cinquante-deux contre Paul onze mil trois cens cinquante neuf.

Digitized by Google



QUATRIÈME PARTIE.

Où l'on donne la ſolution de divers Problêmes ſur le hazard, & en particulier des cinq Problêmes propoſés en l'année 1657 par Monſieur Huygens.

PROBLÊME I.

PROPOSITION XXXII.

Pierre & Paul jouent enſemble avec deux dés : Voici les conditions du jeu. Pierre gagnera en amenant ſix, & Paul en amenant ſept. Chacun des deux jouera deux coups de ſuite lorſqu'il aura les dés : cependant Pierre qui commencera n'en jouera qu'un pour la premiere fois. Il s'agit de déterminer le ſort de chacun de ces deux Joueurs, ou l'eſperance que chacun aura de gagner la partie.

SOLUTION.

169. PUISQUE chaque face de l'un des dés ſe peut trouver ſucceſſivement avec toutes les faces de l'autre, il eſt clair que les deux dés peuvent donner trente-ſix coups, & que de ces trente-ſix coups il y en a cinq qui donnent

Digitized by Google

donnent le nombre de six, sçavoir as & cinq, cinq & as, deux & quatre, quatre & deux & terne, & six qui donnent le nombre de sept, sçavoir as & six, six & as, deux & cinq, cinq & deux, trois & quatre, quatre & trois.

Présentement soit nommé A l'argent du jeu, x le sort de Pierre lorsqu'il va jouer son coup, y son sort lorsque Paul va jouer son premier coup, z son sort lorsque Paul va jouer son second coup, & enfin u son sort lorsque le tour de Pierre revenant il va jouer le premier de ses deux coups.

On aura ces quatre égalités, $S = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36}y$, $y = \frac{30}{36}z$, $z = \frac{30}{36}u$, $u = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36}x$; ce qui donne $S = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36} \times \frac{25}{36} \times \overline{\frac{5}{36}A + \frac{31}{36}x}$; d'où l'on tire par réduction & transposition $S = \frac{10355}{22631}A$, ce qui exprime le sort de Pierre; & $A - S = \frac{12276}{22631}A$ qui exprime celui de Paul.

REMARQUE.

170. LA methode analytique qu'on a employée ici est toujours la meilleure & la plus courte, lorsqu'il arrive qu'au bout d'un certain nombre de coups les Joueurs se retrouvent dans le même état où ils étoient auparavant; mais lorsque cela n'arrive point, on tombe dans des suites infinies; & pour les trouver, toute l'adresse consiste à bien observer les conditions du jeu, & à en tirer la Loi de la progression. Par exemple, si l'on supposoit que Pierre jouât d'abord un coup, & Paul deux coups, ensuite Pierre deux coups, & Paul trois coups; ensuite Pierre trois coups, & Paul quatre coups, & ainsi de suite, Paul jouant toujours un coup de plus que Pierre, le sort de Pierre seroit exprimé par une suite dont il seroit fort difficile d'avoir la somme, cette suite seroit $= \frac{b}{f}A + \frac{d \times c^2 \times b}{f^4}A + \frac{d^2 \times c^3 \times b}{f^5}A + \frac{d^3 \times c^3 \times b}{f^9}A + \frac{d^4 \times c^3 \times b}{f^{10}}A + \frac{d^3 \times c^3 \times b}{f^{11}}A + \frac{d^6 \times c^9 \times b}{f^{18}}A + \frac{d^7 \times c^9 \times b}{f^{17}}A + \frac{d^8 \times c^9 \times b}{f^{18}}A + \frac{d^9 \times c^9 \times b}{f^{19}}A + \frac{d^{10} \times c^{14} \times b}{f^{25}}A$ + &c. en supposant $b = 5$, $c = 30$, $d = 31$, $f = 36$.

Il eſt aiſé de remarquer l'ordre de la ſuite, & de la continuer à l'infini, l'expreſſion du ſort de Paul ſeroit la quantité qui manque à la ſuite qui exprime le ſort de Pierre pour valoir A.

Si Pierre & Paul jouent avec un dé, ſelon l'ordre qu'on vient de marquer, à qui le premier amenera un ſix, on aura pour expreſſion du ſort de Pierre une ſuite plus ſimple, ſçavoir $1 - p + p^3 - p^5 + p^8 - p^{11} + p^{15} - p^{19} + p^{24} - p^{29}$ + &c. en ſuppoſant que p ſoit $= \frac{1}{6}$.

GENERALEMENT.

171. SELON quelque ordre que deux Joueurs puiſſent jouer on aura toujours leur ſort exprimé par la regle qui ſuit.

Soit p la fraction qui exprime combien il y a à parier que ce que l'on ſe propoſe n'arrivera point du premier coup. Si Pierre & Paul jouent alternativement, Pierre b coups, Paul c coups, Pierre d coups, Paul e coups, Pierre f coups, Paul g coups, Pierre, &c. & ainſi de ſuite ſelon une loi quelconque, le ſort de Pierre ſera $1 - p^b + p^{b+c} - p^{b+c+d} + p^{b+c+d+e} - p^{b+c+d+e+f}$ + &c. & celui de Paul ſera le complement de l'unité. On peut chercher de pareilles formules pour pluſieurs Joueurs.

Digitized by Google

PROBLÈME II.

PROPOSITION XXXIII.

Trois Joueurs, Pierre, Paul & Jacques jouent enſemble, & s'accordent que tirant l'un après l'autre un jetton au hazard entre douze, dont huit ſeront noirs & quatre ſeront blancs, celui qui le premier aura tiré un jetton blanc gagnera. Voici l'ordre ſelon lequel ils jouent : Pierre tire le premier, Paul tire le ſecond, & Jacques le troiſiéme ; enſuite Pierre recommence, & les autres le ſuivent ſelon leur rang, juſqu'à ce qu'un des Joueurs ait gagné. Il s'agit de trouver ce que chaque Joueur doit mettre au jeu, afin que le parti ſoit égal.

SOLUTION.

172. IL eſt clair que chacun des Joueurs pour parier également & ſans deſavantage, doit mettre au jeu à raiſon du plus ou du moins de droit qu'il a ſur la partie, ou d'eſperance qu'il a de gagner. On voit bien, par exemple, qu'à cauſe de la primauté, Pierre a plus d'avantage en ce jeu que Paul, & Paul plus d'avantage que Jacques, puiſqu'il ſe peut faire que Pierre gagne ſans que Paul & Jacques ayent joué, & auſſi que Paul gagne ſans que le tour de Jacques ſoit venu. Mais combien Pierre a plus d'avantage que Paul, & Paul plus d'avantage que Jacques, & quelle eſt, proportionnellement à ces differens avantages des Joueurs, la difference des avances que chacun doit faire pour compoſer le fond du jeu ? c'eſt ce qu'il faut chercher.

Il faut remarquer d'abord que le ſort d'une perſonne qui parie de prendre un jetton blanc entre douze, dont huit ſont noirs & quatre ſont blancs, eſt d'avoir un contre deux.

Cela ſuppoſé, ſi l'on nomme A l'argent du jeu, S le ſort de Jacques lorſque Pierre va tirer ſon jetton, y ſon ſort lorſque Paul va tirer le ſien, z ſon ſort lorſque c'eſt à lui

à tirer, on aura ces trois égalités $S = \frac{2}{3}y$, $y = \frac{2}{3}z$, $z = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}S$; d'où l'on tirera $S = \frac{4}{19}A$, ce qui exprime le ſort de Jacques.

Pareillement pour trouver le ſort de Pierre, je nomme u ſon ſort lorſqu'il tire ſon jetton, t ſon ſort lorſque Paul tire le ſien, q ſon ſort lorſque Jacques tire ſon jetton. Cela ſuppoſé, j'ai ces trois égalités $u = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}t$, $t = \frac{2}{3}q$, $q = \frac{2}{3}u$; d'où l'on tire $u = \frac{9}{19}A$, ce qui exprime le ſort de Pierre. Or le ſort de Paul étant d'avoir l'argent du jeu, moins la ſomme des juſtes prétentions de Pierre & de Jacques, on aura le ſort de Paul $= A - \frac{4}{19}A - \frac{9}{19}A = \frac{6}{19}A$. Par conſequent ſi l'on veut que le jeu ſoit de dix-neuf écus, il faudra que Pierre en mette neuf, Paul ſix, & Jacques quatre.

REMARQUE.

173. SI le ſens du Problême eſt que chaque Joueur après avoir tiré un jetton ne le remette plus, on trouvera de la même maniere le ſort des trois Joueurs, comme ces trois nombres 77, 53, 35; & ſi l'on veut conſiderer le Problême generalement pour un nombre quelconque de Joueurs, de jettons noirs & de jettons blancs, on aura des ſuites infinies, dont on trouvera les ſommes par les methodes que je donne dans les *art. 54 & 73.*

PROBLÊME III.

PROPOSITION XXXIV.

Pierre parie contre Paul que prenant, les yeux fermés, ſept jettons entre douze, dont huit ſont noirs & quatre ſont blancs, il en prendra trois blancs & quatre noirs. On demande combien Pierre & Paul doivent parier pour que la miſe de chacun ſoit dans la même proportion que leur ſort.

SOLUTION.

174. CE Problême & toutes les eſpeces pareilles ne ſont que des exemples particuliers de la Propoſition 7, *art. 20.* On trouve par la Table, *art. 1*, que huit jettons peuvent

Digitized by Google

être pris en 70 façons differentes 4 à 4; que quatre jettons peuvent être pris differemment quatre fois trois à trois; & enfin que douze jettons peuvent être pris ſept à ſept en 792 façons differentes. On aura donc pour l'expreſſion du ſort de Pierre $\frac{35}{99}$, & par conſequent $\frac{64}{99}$ pour celui de Paul. Si l'on veut que Pierre ait auſſi gagné lorſqu'il prendra quatre blancs & trois noirs, on aura de même, par l'*art. 20*, $\frac{70\times4+1\times56}{792} = \frac{14}{33}$ pour le ſort de Pierre, & en ce cas il faudroit que Paul mît au jeu 19 contre Pierre 14.

PROBLEME IV.

PROPOSITION XXXV.

Pierre parie contre Paul que tirant, les yeux fermés, quatre cartes entre quarante, ſçavoir dix carreaux, dix cœurs, dix pics & dix trefles, il en tirera une de chaque eſpece. On demande quel eſt le ſort de ces deux Joueurs, ou ce qu'ils doivent mettre au jeu pour parier également.

SOLUTION.

175. CE Problême, ainſi que le précedent, n'eſt qu'un cas particulier de la Propoſition 7, *art. 20*, le ſort de Pierre eſt ici exprimé par une fraction dont le numerateur eſt la quatriéme puiſſance de 10, & le dénominateur le nombre qui exprime en combien de façons quatre choſes peuvent être priſes dans quarante; & par conſequent le ſort de Pierre eſt au ſort de Paul :: 10000 . 91390 — 10000 :: 1000 . 8139.

Si lon demandoit combien il y a à parier que Paul tirant treize cartes au hazard dans cinquante-deux, ne tirera pas toute une couleur, on trouveroit qu'il y a à parier 158753389899 contre 1.

Si l'on veut ſçavoir combien il y a à parier que Pierre tirant dix cartes au hazard entre quarante, ſçavoir un as, un deux, un trois, un quatre, un cinq, un ſix, un ſept, un huit, un neuf & un dix de carreau, autant de cœurs

Digitized by Google

de pics & de trefles, il tirera une dixaine complete, on trouvera qu'il y a à parier 1048576 contre 846611952, à peu près 1 contre 808.

PROBLEME V.

PROPOSITION XXXVI.

Pierre & Paul prennent chacun douze jettons & jouent avec trois dés aux conditions qui ſuivent. Si les dés amenent onze, Paul donnera un jetton à Pierre. Si les dés amenent quatorze, Pierre donnera un jetton à Paul. Celui des deux qui le premier aura tous les jettons, gagnera. On demande quel eſt le ſort des deux Joueurs.

SOLUTION.

176. IL faut remarquer d'abord que trois dés donnent deux cens ſeize coups, puiſque deux dés donnent trente-ſix coups, avec chacun deſquels chaque face du troiſiéme dé peut ſe trouver ſucceſſivement. On obſervera enſuite qu'entre ces deux cens ſeize coups il y en a vingt-ſept qui donnent un jetton à Pierre, ſçavoir, ſix quatre & as qui arrive en ſix façons, ſix trois & deux qui arrive en ſix façons; cinq quatre & deux qui arrive en ſix façons; cinq cinq & as qui arrive en trois façons; quatre quatre trois qui arrive en trois facons; trois trois cinq qui arrive en trois facons; & quinze qui donnent un jetton à Paul, ſçavoir ſix cinq trois qui arrive en ſix façons; cinq cinq quatre qui arrive en trois façons; ſix ſix deux qui arrive en trois façons; quatre quatre ſix qui arrive en trois façons Cela poſé, ſoient nommés A l'argent du jeu, x le ſort de Pierre, quand il a douze jettons & Paul douze; $y, z, u, t, r, s, q, p, n, m, o$, ſon ſort, lorſqu'il a gagné à Paul ou un jetton, ou deux jettons, ou trois jettons. ..... ou onze jettons. $k, i, l, h, g, f, e, d, c, b, w$, ſon ſort, lorſqu'il a perdu contre Paul ou un jetton, ou deux jettons, ou trois jettons..... ou onze jettons. On a $x = \frac{27y + 15k + 174x}{216}$, ou ce qui eſt la même choſe $x = \frac{9y + 5k}{14}$.

Digitized by Google

Et de même toutes les autres égalités.

$14y = 9z + 5x$	$14p = 9n + 5q$	$14h = 9l + 5g$
$14z = 9u + 5y$	$14n = 9m + 5p$	$14g = 9h + 5f$
$14u = 9t + 5z$	$14m = 9o + 5n$	$14f = 9g + 5e$
$14t = 9r + 5u$	$14o = 9A + 5m$	$14e = 9f + 5d$
$14r = 9s + 5t$	$14k = 9x + 5i$	$14d = 9e + 5c$
$14s = 9q + 5r$	$14i = 9k + 5l$	$14c = 9d + 5b$
$14q = 9p + 5s$	$14l = 9i + 5h$	$14b = 9c + 5w$
		$14w = 9b + 5 \times$ zero

De toutes ces égalités on tirera

$y = \frac{31381059609A + 39165289355x}{70546348964}$, & $K = \frac{70497520839}{70546348964}x$.

Et par conſequent l'on trouvera $x = \frac{9y + 5K}{14} = \frac{282429536481A + 352487604195x}{987648885496}$, en ſubſtituant pour y & k leurs valeurs en x, & enfin on aura en réduiſant $x = \frac{282429536481}{282673677106}A$, ce qui exprime le ſort de Pierre, & $A - x = \frac{244140625}{282.673677106}$, ce qui exprime le ſort de Paul.

REMARQUE.

177. Il eſt à propos d'obſerver que la voye analytique n'eſt peut-être pas ici la meilleure, puiſqu'on peut découvrir autrement que les ſorts de Pierre & de Paul ſont comme les douziémes puiſſances des nombres 9 & 5, ainſi qu'il a été obſervé par Meſſieurs Bernoulli qui m'en ont averti dans leurs lettres du 17 Mars 1710, & 26 Février 1711, & depuis par M. Moivre dans ſon Traité *de Menſura Sortis*, qui parut l'année paſſée.

Digitized by Google

PROBLÊME.

PROPOSITION XXXVII.

Pierre jouant contre Paul a perdu une certaine ſomme d'argent, & n'ayant pour payer que la moitié de cette ſomme, il lui promet d'acquiter l'autre moitié en un certain nombre de payemens égaux. Paul y conſent, à condition que Pierre y comprendra un certain interêt dont ils conviennent. On demande de combien ſeront ces payemens.

SOLUTION.

178. SOIT x le payement que Pierre doit faire tous les ans à Paul, q le nombre qui exprime ſur quelle ſomme Pierre prend une unité d'interêt par année, a la ſomme qui reſte à payer; ſoit auſſi pour abreger $p = \frac{q}{q+1}$, on aura $x = \frac{a}{p+pp+p^3+p^4+p^5+\&c.}$.

Il faut remarquer que le dénominateur ſera compoſé d'autant de termes que Pierre aura pris d'années pour achever de payer la dette. En ſorte que n exprimant le nombre des années, on a generalement, en prenant la ſomme de la progreſſion geometrique qui eſt au dénominateur, $x = \frac{a \times \overline{p-1}}{p^{n+1}-p}$.

DEMONSTRATION.

179. IL faut obſerver, 1°, que par les conditions du Problême la valeur preſente de x payable dans un an, plus la valeur préſente de x payable dans deux ans, plus la valeur préſente de x payable dans trois ans, plus, &c. doit être $= a$.

2°. Que la valeur préſente de x payable dans un certain nombre d'années n, eſt $x \times p^n$. En voici la preuve.

Lorſque Pierre met une certaine ſomme x à interêt, & que tous les ans il remet de nouveau les interêts avec le principal

principal pour en former d'autres intereſts plus forts, & ainſi de ſuite pendant un certain nombre d'années n; il eſt certain que la quantité $x \times \frac{1}{p}^n$ exprime ce que tous ces intereſts joints au principal fourniſſent à Pierre au bout d'un certain nombre d'années n. Car il eſt clair qu'à la fin de la premiere année l'interêt joint au principal ſera $x \times \frac{1}{p}$, & que pour avoir la ſomme cherchée au bout de la ſeconde année, il faut multiplier par $\frac{1}{p}$ ce que Pierre a mis à interêt au bout de la premiere, c'eſt à dire multiplier $x \times \frac{1}{p}$ par $\frac{1}{p}$.

Or c'eſt la même choſe pour Pierre de ne recevoir x que dans n années, ou de le recevoir comptant, à charge de rendre en même temps tous les interêts pour n années, & par conſequent la valeur de x payable au bout de n années, eſt $x \times p^n$.

Tout cela poſé, il ne s'agit plus que de prendre la ſomme de la progreſſion geometrique qui eſt au dénominateur, & l'on trouve $x = \frac{a \times p - 1}{p^{n+1} - p}$.

Exemple. Si l'on ſuppoſe que Pierre doive dix mil francs à Paul, & qu'il s'oblige de les lui payer en quatre payemens égaux d'année en année, en y comprenant l'interêt de cinq pour cent; on trouvera, en ſubſtituant dans cette formule pour a & p leurs valeurs, que chaque payement doit être de 2820 liv. 2 ſ. 4 d. $\frac{13732}{14481}$.

Ce Problême qui eſt fort facile pour des Geometres, ſeroit apparemment fort embaraſſant pour des Arithmeticiens; & comme il eſt d'un aſſés grand uſage, j'ai jugé à propos de le mettre ici: Je l'ai cherché à l'occaſion d'une queſtion qui me fut faite il y a quelque temps par un de mes amis. La voici.

Il vouloit acheter une Terre dont le principal revenu étoit en bois, il y en avoit cent arpens en coupe reglée, & ils ſe coupoient tous les dix-ſept ans. Il y avoit de vieux chênes parmi les taillis. Un Marchand lui propoſoit de lui donner quatre-vingt livres de l'arpent pendant les dix-ſept années, en coupant les chênes avec les taillis. De plus, le

Vendeur étoit certain par l'estimation des connoisseurs, que les grands chênes étant coupés, le taillis, qui au bout des dix-sept ans seroit revenu plus beau, vaudroit quarante livres l'arpent. Sur cet exposé il me demanda à combien il pouvoit évaluer la proprieté de ces bois, en estimant cette acquisition sur le pied du denier 20. Je trouvai par la formule précedente, qu'elle seroit évaluée selon sa juste valeur, à plus de cent-vingt-cinq mil livres, & à moins de cent-vingt-cinq mil cent livres.

COROLLAIRE.

180. On peut par le Problême précedent résoudre celui qui suit: *Pierre mettant son bien*, a, *à un certain interêt, & ajoutant toujours les interêts au principal, on demande en combien d'années*, n, *il peut en faire la somme* c.

On trouve cette équation $n = \frac{\log. c - \log. a}{\log. p}$.

D'où l'on voit que si Pierre fait valoir son bien au denier 20; en sorte que p soit $= \frac{20}{21}$, il le doublera en plus de 14 ans; mais en moins de 15 ans, car l'on trouve $n = \frac{3010300}{13222193 - 13010300} = 14\frac{43798}{211893}$.

On trouvera de même par cette formule qu'il le rendra triple en 22 ans, quadruple en 29 ans, quintuple en 33 ans, décuple en 47 ans, &c.

PROBLÊME.

PROPOSITION XXXVIII.

Pierre a perdu au jeu contre Paul une certaine somme d'argent, & n'ayant pour payer que la moitié de cette somme, il lui promet de lui donner tous les ans la somme x *jusqu'à entier payement. Paul y consent, à condition que dans ces payemens on y comprendra un certain interêt dont ils conviennent. On demande combien il faudra de ces payemens pour acquiter Pierre.*

SOLUTION.

181. Ce Problême est comme l'on voit l'inverse de la proposition ci-dessus, *article 179*, où il s'agissoit de dé-

Digitized by Google

terminer la valeur de chaque payement, le nombre des payemens étant donné. Pour le réſoudre il ne s'agit que de tirer la valeur n de l'équation trouvée ci-deſſus $x = \frac{a \times p - 1}{p^{n+1} - p}$ ou $p^n = \frac{ap - a + xp}{xp}$, on aura en prenant les logarithmes $n = \frac{\log. ap - a + xp - \log. xp}{\log. p}$.

Exemple. Soit $x = 2820$ $p = \frac{20}{21}$, $a = 10000$, on trouvera $n = 4\ \frac{39}{21189\frac{1}{3}}$, ce qui fait voir qu'au bout de quatre payemens d'année en année, Pierre ſe trouveroit quitte avec Paul.

REMARQUE.

182. LE Problême précedent eſt préciſément le même que celui dont Mr (Jacques) Bernoulli a donné la ſolution ſans analyſe ni démonſtration dans ſon Traité *De Seriebus infinitis*, & qu'il propoſe en cette ſorte.

Titius apud Caium omnia bona ſua fœnori exponit, ea conditione ut ſibi in ſui alimentationem ultra convenientem uſuram, quæ ſola non ſufficeret, partem ſortis tantam reddat quæ unà cum dicta uſura determinatam quandam ſummam de quà conventum eſt conſtituat; quæritur quotannis ſuffectura ſint ejus bona.

Sors integra a, *eadem cum uſura primi anni* b, *penſio annua* c, *id quod elapſo 1° anno ſorti demendum f, numerus annorum quibus bona exhauriuntur* n, *reperitur* $n = \frac{\log. c - \log. f}{\log. b - \log. a}$.

Cette formule appliquée au cas particulier donne $n = \frac{\log. 2820 - \log. 2320}{\log. 10500 - \log. 10000} = \frac{3456249\frac{1}{3} - 3365488\frac{1}{3}}{40211893\frac{1}{3} - 40000000} = 4\ \frac{39}{21189\frac{1}{3}}$.

Si dans notre équation $p^n = \frac{ap - a + xp}{px}$ on ſubſtitue f pour la quantité $x - a \times \frac{1-p}{p}$, & b pour celle-ci $a + \frac{a - ap}{p} = \frac{a}{p}$, elle devient $\frac{c}{f} = \frac{b^n}{a^n}$, ce qui donne la formule de Mr Bernoulli $= \frac{\log. c - \log. f}{\log. b - \log. a}$.

Digitized by Google

PROBLÊME

PROPOSITION XXXIX.

Le nombre qui exprime le rapport du ſort de Pierre à celui de Paul, en ſuppoſant que Pierre parie contre Paul de faire certaine choſe du premier coup, étant donné, on demande quel eſt le nombre qui exprime le ſort de Pierre, en ſuppoſant qu'on lui accorde un certain nombre de coups pour faire la choſe propoſée.

183. Si l'on exprime par l'inconnue x ſon ſort lorſqu'ayant manqué à gagner du premier coup il va rejouer ſon ſecond coup, & y ſon ſort lorſqu'ayant manqué à gagner du ſecond coup il va rejouer ſon troiſiéme coup, & z ſon ſort lorſqu'ayant manqué de gagner à ſon troiſiéme coup, il en va rejouer un quatriéme, &c. employant de ſuite les lettres x, y, z, u, t, r, &c. pour exprimer le ſort inconnu de Pierre à ſon ſecond, troiſiéme, quatriéme, cinquiéme, ſixiéme, ſeptiéme coup, &c. Nommant encore p le nombre des hazards favorables à Pierre ; q le nombre des rencontres favorables à Paul, & ſuppoſant $m = p + q$, on aura le ſort de Pierre au commencement du jeu $= \frac{p}{m} + \frac{q}{m}x$, $x = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}y$, $y = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}z$, $z = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}u$, $u = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}t$, $t = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}r$, &c. & en ſubſtituant toutes ces quantités, on aura le ſort de Pierre exprimé par cette ſuite infinie $S = \frac{p}{m} + \frac{pq}{mm} + \frac{pqq}{m^3} + \frac{pq^3}{m^4} + \frac{pq^4}{m^5} + \frac{pq^5}{m^6} + \frac{pq^6}{m^7}$ + &c. & ajoutant autant de termes de cette ſuite qu'il en ſera neceſſaire pour que S ſoit égale à $\frac{1}{2}$. On concluera que Pierre peut entreprendre la gageure but à but en autant de coups qu'on aura employé de termes de cette ſuite pour trouver $S = \frac{1}{2}$, ou un peu plus grand.

En ſorte que ſi l'on cherchoit, par exemple, en combien de coups on peut parier d'avoir cartes blanches au piquet, en ajoutant un peu plus de douze mil termes de

Digitized by Google

cette ſuite geometrique, on trouveroit S à peu près $= \frac{1}{2}$.

Voici la maniere d'éviter une ſi grande longueur de calcul.

J'obſerve, 1°, que la ſomme de cette ſuite infinie eſt toujours égale à l'unité, puiſqu'il eſt clair que s'il y a quelque poſſibilité que Pierre gagne du premier coup, il y a certitude qu'il gagnera ayant un nombre infini de coups à jouer de ſuite. Je ſubſtitue donc cette fraction $\frac{p}{m-q}$ à la place de l'unité, & j'en fais la diviſion à la maniere numerique, il me vient pour quotient la fraction $\frac{p}{m} + \frac{pq}{mm} + \frac{pqq}{m^3} + \frac{pq^3}{m^4} +$ &c. Je remarque en ſecond lieu qu'en faiſant cette diviſion il y a toujours un reſte qui pour la premiere operation eſt $\frac{pq}{m}$, pour la ſeconde $\frac{pqq}{mm}$, pour la troiſiéme $\frac{pq^3}{m^3}$, pour la quatriéme $\frac{pq^4}{m^4}$, en ſorte que $\frac{p}{m} = \frac{p}{m-q} - \frac{q}{m}$, & $\frac{p}{m} + \frac{pq}{mm} = \frac{p}{m-q} - \frac{qq}{mm}$, & $\frac{p}{m} + \frac{pq}{mm} + \frac{pqq}{m^3} = \frac{p}{m-q} - \frac{q^3}{m^3}$, & $\frac{p}{m} + \frac{pq}{mm} + \frac{pqq}{m^3} + \frac{pq^3}{m^4} = \frac{p}{m-q} - \frac{q^4}{m^4}$; d'où il eſt clair que le nombre des termes de la ſuite que l'on veut ajouter en une ſomme étant h, on aura tous ces termes enſemble égaux à $\frac{p}{m-q} - \frac{q^h}{m^h}$.

De là je tire cette regle, que pour trouver le nombre de coups qui rendroit le ſort de Pierre égal à celui de Paul, il faut que h ait une valeur telle que $\frac{q^h}{m^h}$ ſoit $= \frac{2}{1}$, & par conſequent pour que Pierre parie avec avantage, il faut que m^h ſoit plus grand que q^h, ce qui ſervira de formule.

PREMIER EXEMPLE.

184. SOIT ſuppoſé que l'on cherche en combien de coups Pierre peut parier d'amener ſix avec un dé, il faudra ſubſtituer 6, 5, 1 pour les lettres m, q, p, en ſorte qu'on aura $1 - \frac{5^h}{6^h} = \frac{p}{m-q} - \frac{q^h}{m^h}$, & l'on connoîtra ſans peine que h étant 4, c'eſt à dire, que Pierre ſe propoſant d'a-

Digitized by Google

mener ſix en quatre coups, il y aura de l'avantage pour lui, car $1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296}$; or cette fraction $\frac{625}{1296}$ eſt plus petite que $\frac{1}{2}$ de la quantité $\frac{23}{1296}$ qui exprimera l'avantage de Pierre, en pariant d'amener un ſix avec un dé dans quatre coups. L'on connoîtra auſſi qu'en ſubſtituant 3 pour h, c'eſt à dire, que Pierre ſe propoſant d'amener un ſix en trois coups, il y auroit pour lui du deſavantage, & que ſon deſavantage ſeroit $\frac{17}{216}$.

Il eſt clair que l'expoſant h doit être d'autant plus grand que q eſt plus grand par raport à p, en ſorte que, par exemple, q étant $= 5$, & par conſequent $m = 6$, h doit être $= 4$, & q étant $= 35$, h doit être $= 25$.

SECOND EXEMPLE.

185. SOIT le ſort de Pierre $\frac{1002}{9139}$, on aura $m = 9139$, & $q = 8139$; ſoit ſuppoſé $h = 6$, on trouvera le logarithme du nombre $9139 = 3.9608987$, ce qui étant multiplié par 6 donne 23.76539122 logarithme du nombre 9139 élevé à la ſixiéme puiſſance, & le logarithme du nombre $8139 = 3.9105710$, ce qui étant multiplié par 6 donne 23.4634260 logarithme du nombre 8139 élevé à la ſixiéme puiſſance.

Si l'on cherche les nombres qui correſpondent à ces logarithmes, on trouvera.

$m^6 = 582628954909994978159161$ plus grand que $2 \times q^6 = 581374911690872909930322$.

Ainſi Pierre pariant contre Paul de tirer au hazard quatre cartes de differente couleur dans un Jeu compoſé de 40 cartes, ſon ſort, s'il l'entreprend en ſix coups, ſera à celui de Paul comme

291941499064558523194000, eſt à
290687455845436454965161.

& s'il l'entreprend en cinq coups, comme

280365599917352050000 eſt à
357153773000904846 99.

Digitized by Google

REMARQUE.

186. POUR éviter le tatonnement, il faudra convertir la formule $m^h = 2 \times q^h$ en une autre où h ſoit ſeule dans un des membres de l'égalité, ce qui ſe peut en employant le calcul des exponentiels. Car je trouve qu'elle ſe change en cette autre $h = \frac{\log. 2}{\log. m - \log. q}$, & cette formule où h exprime le nombre de coups que l'on cherche, donnera d'abord la ſolution du Problême propoſé.

Par exemple, ſi l'on veut ſçavoir en combien de coups on peut parier à but d'amener ſonnés avec deux dés, on trouvera en ſubſtituant pour m, 36, & pour q, 35, $h = \frac{3010100}{15563025 - 15440680} = 24 + \frac{14804}{24469}$, ce qui fait voir qu'on l'entreprendroit avec avantage en 25 coups, & avec deſavantage en 24 coups.

Et de même ſi l'on cherche en combien de coups on peut parier à but d'avoir carte blanche au Piquet (voyez l'*art. 134*) on aura, en ſubſtituant dans la formule pour m, 578956, & pour q, 578633, $h = \frac{3010100}{5762645 6 - 5762403 2} = 1241 \frac{522}{606}$, ce qui fait voir qu'on l'entreprendroit avec avantage en 1242 coups, & avec deſavantage en 1241 coups.

Si l'on demande en combien de coups on peut entreprendre d'amener avec ſix dés un as, un deux, un trois, un quatre, un cinq & un ſix, on trouvera par la formule qu'on l'entreprendra avec avantage en 45 coups, & avec deſavantage en 44 coups.

On pourra de même découvrir par cette voye de combien ſera l'avantage ou le deſavantage par rapport à quelque nombre de coups que ce ſoit.

Digitized by Google

PROBLÊME VI.

PROPOSITION XL.

Déterminer generalement les partis qu'on doit faire entre plusieurs Joueurs qui jouent à un jeu égal en plusieurs parties.

187. QUOIQUE ce Problême ſoit le moins difficile de tous ceux qu'on peut ſe propoſer ſur cette matiere lorſqu'il eſt limité à deux Joueurs, & que les conditions du jeu ſont les mêmes pour les Joueurs, il n'a pas laiſſé d'exercer long-temps, à ce qui paroît avec plaiſir, deux Geometres illuſtres, Mrs Fermat & Paſcal. Celui-ci employoit pour en venir à bout la methode analytique ; cette voye ſemble être ici la plus naturelle & la plus facile ; mais elle a le défaut d'être d'une longueur exceſſive, car l'on ne peut trouver la ſolution des cas un peu compoſez qu'on n'ait parcouru tous ceux qui le ſont moins, en commençant par le plus ſimple. Ainſi, par exemple, pour trouver par cette voye le ſort de trois Joueurs Pierre, Paul & Jacques, en ſuppoſant que Pierre joue pour un point, Paul pour deux, & Jacques pour trois, il faudroit examiner quel ſeroit leur ſort, ſi Pierre jouant pour un point, Paul ne jouoit pareillement que pour un point, & Jacques ou pour un, ou pour deux, ou pour trois points ; 2°. quel ſeroit leur ſort ſi Pierre jouant pour deux points, Paul & Jacques jouoient pareillement pour deux points, ce qui retomberoit enſuite dans le cas précedent.

La methode de M. Fermat eſt plus ſçavante, & demande plus d'adreſſe dans ſon application. Il ne l'a employée que pour déterminer les partis entre deux Joueurs. M. Paſcal n'a pas cru qu'elle pût s'étendre à un plus grand nombre. Je ferai voir que la methode de M. Fermat reſout le Problême des partis d'une maniere très generale. Mais pour la faire entendre, & faire connoître les difficultés qu'y trouvoit M. Paſcal, je crois ne pouvoir mieux faire que de rapporter ici ſa Lettre du 24 Aouſt 1654 qui eſt toute

ſur

Digitized by Google

ſur ce ſujet. Elle s'adreſſe à M. Fermat, & ſe trouve dans ſes Ouvrages poſthumes imprimés *in folio* à Toulouſe: L'on y verra l'explication de la methode de M. Fermat pour deux Joueurs, & les doutes de M. Paſcal ſur cette methode lorſqu'on veut l'appliquer à un plus grand nombre. Je donnerai enſuite la ſolution des difficultés de M. Paſcal, & j'appliquerai cette methode à quelques Exemples, qui en feront connoître l'univerſalité.

Lettre de Monſieur Paſcal à Monſieur de Fermat.

Du 24 Août 1654.

MONSIEUR,

Je ne pûs vous ouvrir ma penſée entiere touchant les partis de pluſieurs Joueurs l'ordinaire paſſé, & même j'ai quelque repugnance à le faire, de peur qu'en ceci cette admirable convenance qui étoit entre nous, & qui m'étoit ſi chere, ne commence à ſe démentir, car je crains que nous ne ſoyons de differens avis ſur ce ſujet. Je vous veux ouvrir toutes mes raiſons, & vous me ferez la grace de me redreſſer ſi j'erre, ou de m'affermir ſi j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon & ſincerement, car je ne me tiendrai pour certain que quand vous ſerez de mon côté.

Quand il n'y a que deux Joueurs, votre methode qui procede par les combinaiſons eſt très ſûre: mais quand il y en a trois, je croi avoir démonſtration qu'elle eſt mal juſte, ſi ce n'eſt que vous y procediés de quelqu'autre maniere que je n'entens pas; mais la methode que je vous ai ouverte, & dont je me ſers par-tout, eſt commune à toutes les conditions imaginables de toutes ſortes de partis, au lieu que celle des combinaiſons (dont je ne me ſers qu'aux rencontres particulieres où elle eſt plus courte que

la generale) n'eſt bonne qu'en ces ſeules occaſions, & non pas aux autres.

Je ſuis ſûr que je me donnerai à entendre, mais il me faudra un peu de diſcours, & à vous un peu de patience.

Voici comment vous procedez quand il y a deux Joueurs.

Si deux Joueurs jouant en pluſieurs parties, ſe trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier, & trois au ſecond; pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu ſera décidé abſolument.

Il eſt aiſé de ſupputer que ce ſera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties ſe combinent entre deux Joueurs, & voir combien il y a de combinaiſons pour faire gagner le premier, & combien pour le ſecond, & partager l'argent ſuivant cette proportion. J'euſſe eu peine à entendre ce diſcours là, ſi je ne l'euſſe ſçu de moi-même auparavant, auſſi vous l'aviez écrit dans cette penſée. Donc pour voir combien quatre parties ſe combinent entre deux Joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces) puiſqu'ils ne ſont que deux Joueurs (comme à croix & pile, & qu'ils jettent quatre de ces dés, parcequ'ils jouent en quatre parties; & maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'aſſiettes differentes. Cela eſt aiſé à ſupputer, ils peuvent en avoir ſeize qui eſt le ſecond degré de quatre, c'eſt à dire le quarré; car figurons-nous qu'une des faces eſt marquée *A*, favorable au premier Joueur, & l'autre *B* favorable au ſecond; donc ces quatre dés peuvent s'aſſeoir ſur une de ces ſeize aſſietes.

a a a a	1
a a a b	1
a a b a	1
a a b b	1
a b a a	1
a b a b	1
a b b a	1
a b b b	1
b a a a	1
b a a b	1
b a b a	1
b a b b	1
b b a a	1
b b a b	1
b b b a	1
b b b b	1

Et parcequ'il manque deux parties au premier Joueur toutes les faces qui ont 2 *A* le font gagner; donc il en a onze pour lui; & parcequ'il y manque trois parties au ſecond, toutes les faces où il y a 3 *B* le peuvent faire gagner; donc il y en a 5.

Donc il faut qu'ils partagent la ſomme comme 11 à 5. Voilà votre methode quand il y a deux

Joueurs. Sur quoi vous dites que s'il y en a davantage, il ne ſera pas difficile de faire les partis par la même methode.

Sur cela, Monſieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux Joueurs fondé ſur les combinaiſons, eſt très juſte & très bon. Mais que s'il y a plus de deux Joueurs, il ne ſera pas toujours juſte, & je vous dirai la raiſon de cette difference.

Je communiquai votre methode à nos Meſſieurs, ſur quoi Monſieur de Roberval me fit cette objection.

Que c'eſt à tort que l'on prend l'art de faire le parti ſur la ſuppoſition qu'on joue en quatre parties, vû que quand il manque deux parties à l'un & trois à l'autre, il n'eſt pas de neceſſité que l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou à la verité peut-être quatre.

Et ainſi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juſte ſur une condition feinte qu'on jouera quatre parties, vû que la condition naturelle du jeu eſt qu'on ne jouera plus dès que l'un des Joueurs aura gagné, & qu'au moins ſi cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré.

De ſorte qu'il avoit quelque ſoupçon que nous avions fait un paralogiſme. Je lui répondis que je ne me fondois pas tant ſur cette methode des combinaiſons, laquelle veritablement n'eſt pas en ſon lieu en cette occaſion, comme ſur mon autre methode univerſelle à qui rien n'échape, & qui porte ſa démonſtration avec ſoi, qui trouve le même parti préciſément que celle des combinaiſons, & de plus je lui démontrai la verité du parti entre deux Joueurs par les combinaiſons en cette ſorte.

N'eſt-il pas vrai que ſi deux Joueurs ſe trouvant en cet état de l'hypoteſe qu'il manque deux parties à l'un & trois à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue quatre parties completes, c'eſt à dire qu'on jette les quatre dés à deux faces tous à la fois; n'eſt-il pas vrai, dis-je, que s'ils ont déliberé de jouer les quatre parties, le parti doit être tel que nous avons dit ſuivant la multitude des aſſietes favorables à chacun?

Il en demeura d'accord, & cela en effet est démonstratif; mais il nioit que la même chose subsistât en ne s'astreignant pas à jouer quatre parties; je lui dis donc ainsi:

N'est-il pas clair que les mêmes Joueurs n'étant pas astreints à jouer quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ni avantage s'astreindre à jouer les quatre parties entieres, & que cette convention ne change en aucune maniere leur condition. Car si le premier gagne les deux premieres parties de quatre, & qu'ainsi il ait gagné, refusera-t'il de jouer encore deux parties, vû que s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné; & s'il les perd il n'a pas moins gagné, car ces deux que l'autre a gagné ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, & ainsi il n'y a pas assés de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considerer qu'il est absolument égal & indifferent à l'un & à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entieres; donc puisque ces deux conditions sont égales & indifferentes, le parti doit être tout pareil en l'une & en l'autre: or il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré.

Donc il est juste aussi en l'autre cas. Voilà comment je le démontrai, & si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions vraye & feinte à l'égard de deux Joueurs, & qu'en l'une & en l'autre un même gagnera toujours; & si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre, & jamais deux n'auront leur compte. Suivons la même pointe pour trois Joueurs.

Et posons qu'il manque une partie au premier, qu'il en manque deux au second & deux au troisiéme: pour faire le parti suivant la même methode des combinaisons, il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu sera décidé, comme nous avons fait quand il y avoit deux Joueurs; ce sera en 3, car ils ne sçauroient jouer trois

Digitized by Google

parties ſans que la déciſion ſoit arrivée néceſſairement.

Il faut voir maintenant combien trois parties ſe combinent entre trois Joueurs, & combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre, & combien au dernier, & ſuivant cette proportion diſtribuer l'argent de même que l'on a fait en l'hypoteſe de deux Joueurs.

Pour voir combien il y a de combinaiſons en tout, cela eſt aiſé, c'eſt la troiſiéme puiſſance de 3, c'eſt à dire, ſon cube 27.

Car ſi on jette trois dés à la fois (puiſqu'il faut jouer trois parties) qui ayent chacun trois faces, puiſqu'il y a trois Joueurs, l'une marquée *A* favorable au premier, l'autre *B* pour le ſecond, l'autre *C* pour le troiſiéme.

Il eſt manifeſte que ces trois dés jettés enſemble peuvent s'aſſeoir ſur 27 aſſietes differentes, ſçavoir :

aaa	1		
aab	1		
aac	1		
aba	1		
abb	1	2	
abc	1		
aca	1		
acb	1		
acc	1		3

baa	1		
bab	1	2	
bac	1		
bba	1	2	
bbb		2	
bbc		2	
bca	1		
bcb		2	
bcc			3

caa	1		
cab	1		
cac	1		3
cba	1		
cbb		2	
cbc			3
cca	1		3
ccb			3
ccc			3

Or il ne manque qu'une partie au premier, donc toutes les aſſietes où il y a un *A* ſont pour lui, donc il y en a dix-neuf.

Il manque deux parties au ſecond, donc toutes les aſſietes où il y a 2 *B* ſont pour lui, donc il y en a ſept.

Il manque deux parties au troiſiéme, donc toutes les aſſietes où il y a 2 *C* ſont pour lui, donc il y en a ſept.

Si de là on concluoit qu'il faudroit donner à chacun ſuivant la proportion de 19, 7. 7, on ſe tromperoit trop groſſierement, & je n'ai garde de croire que vous le faſſiez ainſi. Car il y a quelques faces favorables au pre-

Digitized by Google

mier & au ſecond tout enſemble comme *ABB*, car le premier y trouve un *A* qu'il lui faut, & le ſecond 2*B* qui lui manquent, ainſi *ACC* eſt pour le premier & le troiſiéme.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui ſont communes à deux comme valant la ſomme entiere à chacun ; mais ſeulement la moitié.

Car s'il arrivoit l'aſſiete *ACC*, le premier & le troiſiéme auroient même droit à la ſomme, ayant chacun leur compte ; donc ils partageroient l'argent par la moitié ; mais s'il arrive l'aſſiete *AAB*, le premier gagne ſeul, il faut donc faire la ſuppoſition ainſi :

Il y a treize aſſietes qui donnent l'entier au premier, & ſix qui lui donnent la moitié, & huit qui ne lui valent rien.

Donc ſi la ſomme entiere eſt une piſtole,
Il y a treize faces qui lui valent chacune une piſtole.
Il y a ſix faces qui lui valent chacune $\frac{1}{2}$ piſtole.
Et huit qui ne valent rien.
Donc en cas de parti il faut multiplier

13	par une piſtole, qui font	13
6	par un demi, qui font	3
8	par zero, qui font	0
Somme 27		Somme 16

Et diviſer la ſomme des valeurs 16 par la ſomme des aſſietes 27 qui fait la fraction $\frac{16}{27}$, qui eſt ce qui appartient au premier en cas de partis, ſçavoir ſeize piſtoles de vingt-ſept.

Le parti du ſecond & du troiſiéme Joueur ſe trouvera de même.

Il y a 4	aſſietes qui lui valent une piſtole, multipliés	4
Il y a 3	aſſietes qui lui valent $\frac{1}{2}$ piſtole, multipliés	$1\frac{1}{2}$
Et 20	aſſietes qui ne lui valent rien	0
Somme 27.		Somme $5\frac{1}{2}$.

Donc il appartient au ſecond Joueur cinq piſtoles, & $\frac{1}{2}$ ſur vingt-ſept, & autant au troiſiéme, & ces trois ſom-

Digitized by Google

mes $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ & 16 étant jointes, font les vingt-ſept.

Voilà, ce me ſemble, de quelle maniere il faudroit faire les partis par les combinaiſons, ſuivant votre methode, ſi ce n'eſt que vous ayez quelqu'autre choſe ſur ce ſujet que je ne puis ſçavoir.

Mais ſi je ne me trompe ce parti eſt mal juſte.

La raiſon en eſt qu'on ſuppoſe une choſe fauſſe, qui eſt qu'on joue en trois parties infailliblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu là eſt qu'on ne joue que juſqu'à ce qu'un des Joueurs ait atteint le nombre de parties qui lui manque, auquel cas le jeu ceſſe.

Ce n'eſt pas qu'il ne puiſſe arriver qu'on joue trois parties; mais il peut arriver auſſi qu'on n'en jouera qu'une ou deux, & rien de neceſſité.

Mais d'où vient, dira-t'on, qu'il n'eſt pas permis de faire en cette rencontre la même ſuppoſition feinte que quand il y avoit deux Joueurs.

En voici la raiſon.

Dans la condition veritable de ces trois Joueurs il n'y en a qu'un qui peut gagner: car la condition eſt que dès qu'un a gagné, le jeu ceſſe; mais en la condition feinte, deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties: ſçavoir ſi le premier en gagne une qui lui manque, & un des autres deux qui lui manquent; car ils n'auront joué que trois parties, au lieu que quand il n'y avoit que deux Joueurs, la condition feinte & la veritable convenoient pour les avantages des Joueurs en tout, & c'eſt ce qui met l'extrême difference entre la condition feinte & la veritable.

Que ſi les Joueurs ſe trouvant en l'état de l'hypoteſe, c'eſt à dire, s'il manque une partie au premier, & deux au ſecond, & deux au troiſiéme, veulent maintenant de gré à gré, & conviennent de cette condition qu'on jouera trois parties completes, & que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque prendront la ſomme entiere (s'ils ſe trouvent ſeuls qui l'ayent atteint) ou s'il ſe trouve que deux l'ayent atteint, qu'ils la partageront également.

Digitized by Google

En ce cas le parti doit se faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16, le second $5\frac{1}{2}$, le troisiéme $5\frac{1}{2}$, de vingt-sept pistoles, & cela porte sa démonstration de soi-même, en supposant cette condition ainsi.

Mais s'ils jouent simplement à condition non pas qu'on joue necessairement trois parties, mais seulement jusqu'à ce que l'un d'entr'eux ait atteint ses parties, & qu'alors le jeu cesse sans donner moyen à un autre d'y arriver, lors il appartient au premier dix-sept pistoles, au second cinq, au troisiéme cinq de vingt-sept.

Et cela se trouve par ma methode generale, qui détermine aussi qu'en la condition précedente il en faut 16 au premier, $5\frac{1}{2}$ au second, & $5\frac{1}{2}$ au troisiéme, sans se servir des combinaisons, car elle va par-tout seule & sans obstacle.

Voilà, Monsieur, mes pensées sur ce sujet, sur lequel je n'ai d'autre avantage sur vous que celui d'y avoir beaucoup plus médité. Mais c'est peu de chose à votre égard, puisque vos premieres vûes sont plus penetrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laisse pas de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous.

Je crois vous avoir fait connoître par là que la methode des combinaisons est bonne entre deux Joueurs par accident, comme elle l'est aussi quelquefois entre trois Joueurs, comme quand il manque une partie à l'un, une à l'autre, & deux à l'autre; parcequ'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu sera achevé ne suffit pas pour en faire gagner deux; mais elle n'est pas generale, & n'est bonne generalement qu'au cas seulement qu'on soit astreint à jouer un certain nombre de parties exactement.

De sorte que comme vous n'aviez pas ma methode quand vous m'avez proposé le parti de plusieurs Joueurs, mais seulement celle des combinaisons, je crains que nous soyons de sentimens differens sur ce sujet; je vous supplie de me mander de quelle sorte vous procedés en la recherche de ce parti.

Je

Digitized by Google

Je recevrai votre réponſe avec reſpect & avec joye, quand même votre ſentiment me ſeroit contraire. Je ſuis, &c.

Le reſpect que nous avons pour la réputation & pour la memoire de M. Paſcal, ne nous permet pas de faire remarquer ici en détail toutes les fautes de raiſonnement qui ſont dans cette Lettre; il nous ſuffira d'avertir que la cauſe de ſon erreur eſt de n'avoir point d'égard aux divers arrangemens des lettres.

Pour prouver que des vingt-ſept aſſietes differentes que peuvent avoir les trois dés, il y en a dix-ſept qui font gagner Pierre, & cinq qui font gagner chacun des deux autres Joueurs à qui il manque deux points; voici comme il me ſemble qu'on devroit raiſonner.

Les trois Joueurs s'obligent à jouer trois parties, mais à cette condition que ſi Pierre à qui il ne manque qu'un point, le gagne avant que l'un ou l'autre des autres Joueurs ait gagné deux points, il gagnera la partie; & qu'il la perdra ſi l'un ou l'autre Joueur à qui il manque deux points, peut les prendre avant que Pierre en ait pris un. Il eſt évident que cette ſuppoſition revient préciſément à celle du Problême. Or ſelon cette ſuppoſition on trouvera que des vingt-ſept aſſietes des trois dés, il y en a dix-ſept qui feront gagner Pierre, cinq qui feront gagner Paul, & cinq qui feront gagner Jacques, ainſi qu'il paroît par la Table ſuivante.

TABLE.

Pierre.				Paul.	Jacques.
aaa	*abc*	*bab*	*cac*	*bba*	*cca*
aab	*aca*	*bac*	*cba*	*bbb*	*ccc*
aac	*acb*	*bca*		*bbc*	*ccb*
aba	*acc*	*caa*		*bcb*	*cbc*
abb	*baa*	*cab*		*cbb*	*bcc*

Digitized by Google

REMARQUE I.

188. LA regle generale, eſt d'examiner en combien de coups au plus le jeu doit neceſſairement finir ; prendre autant de dés qu'il y a de ces coups, & donner à ces dés autant de faces qu'il y a de Joueurs ; enſuite il ne s'agit plus que de déterminer entre toutes les diſpoſitions poſſibles de ces dés, quelles ſont celles qui ſont avantageuſes & contraires à chacun des Joueurs, ce que l'on trouvera toujours aiſément par les *art. 29* & *42*.

Ainſi, par exemple, en ſuppoſant que Pierre joue pour un point, Paul pour deux, & Jacques pour trois, ſi l'on veut ſçavoir le ſort de chacun de ces trois Joueurs, il faudra pour le découvrir imaginer quatre dés marqués de trois points chacun, par exemple d'un 1, d'un 2 & d'un 3 ; chercher enſuite par nos regles des combinaiſons en combien de façons il ſe peut trouver un as qui précede ou deux 2, ou trois 3, & en combien de façons deux 2 ou trois 3 peuvent préceder les as, ce que donnera la Table ſuivante.

TABLE.

	Pierre.	*Paul.*	*Jacques.*
1, 1, 1, 1	1	0	0
1, 1, 1, 2	4	0	0
1, 1, 1, 3	4	0	0
1, 1, 2, 2	5	1	0
1, 1, 3, 3	6	0	0
1, 1, 2, 3	12	0	0
1, 2, 2, 3	8	4	0
1, 2, 3, 3	12	0	0
1, 2, 2, 2	2	2	0
1, 3, 3, 3	3	0	1
2, 2, 2, 2	0	1	0
2, 2, 2, 3	0	4	0
2, 2, 3, 3	0	6	0
2, 3, 3, 3	0	0	4
3, 3, 3, 3	0	0	1

Digitized by Google

D'où il paroît que ſur quatre-vingt-un coups il y en a cinquante-ſept pour Pierre, dix-huit pour Paul, & ſix pour Jacques.

On peut réſoudre le Problême précedent d'une maniere plus abregée, en faiſant le raiſonnement qui ſuit.

Je remarque que l'on ne feroit tort à aucun de ces Joueurs, ſi on les obligeoit de jouer trois coups à ces conditions. 1°. Que ſi Pierre gagnoit un coup avant que Paul en eût gagné deux, il ſeroit ſenſé avoir gagné la partie. 2°. Que ſi Paul gagnoit deux coups avant que Pierre en eût gagné un, Paul gagneroit. 3°. Que Jacques auroit gagné s'il gagnoit les trois coups. 4°. Que ſi des trois coups Paul en gagnoit un, & Jacques deux, les Joueurs ſe ſépareroient en retirant chacun leur miſe.

Pour calculer tout ceci facilement, on peut, comme ci-devant, imaginer trois dés qui ayent chacun trois faces, que ſur l'une ſoit un as, ſur l'autre un 2, ſur la troiſiéme un 3, & ſuppoſer que ſur les vingt-ſept coups qu'on peut amener avec ces trois dés, tous ceux où il ſe trouvera un as qui précede deux 2, ſeront favorables à Pierre, & que tous ceux où deux 2 précederont les as ſeront pour Paul. On trouvera par les *art. 29* & *42*, qu'il y a dix-huit coups qui donnent A à Pierre, en ſuppoſant que A exprime tout l'argent du jeu, ſçavoir 1, 1, 1, qui arrive en une ſeule façon; 1, 1, 2; 1, 1, 3; 1, 3, 3, chacun en trois façons; 1, 2, 3, qui arrive en ſix façons; & ces deux-ci 1, 2, 2; 2, 1, 2. Qu'il y en a cinq favorables à Paul, ſçavoir 2, 2, 1; 2, 2, 2, & 2, 2, 3 en trois façons; & un ſeul coup qui donne A à Jacques. On trouvera enfin qu'il y a trois coups qui donnent $\frac{1}{3}A$ à chacun des Joueurs, ſçavoir 2, 3, 3.

Il eſt aiſé de remarquer quels ſont les cas où l'on peut abreger en cette ſorte la methode generale.

REMARQUE II.

189. LORSQU'IL y a pluſieurs Joueurs à qui il manque pluſieurs points, la methode qui procede par les combinaiſons & les changemens d'ordre, eſt auſſi longue, &

tombe dans un auſſi grand détail que celle qui procede par l'analyſe, car un même coup de dés pouvant être favorable à differens Joueurs, il paroît qu'on ne peut ſe diſpenſer de conſiderer ce que fournit chaque different coup de dés en particulier, & cet examen ne peut être que fort long & fort embaraſſant ; mais la methode de M. Fermat, outre pluſieurs avantages qu'elle a ſur celle de M. Paſcal, a celui de réſoudre d'une maniere courte & ſimple le Problême en queſtion, lorſqu'il ne s'agit que de deux Joueurs. Voici la ſolution qu'elle fournit.

PROBLÊME.

PROPOSITION XLI.

Soit p *le nombre des points qui manquent à Pierre*, q *le nombre des points qui manquent à Paul. On demande une formule qui exprime le ſort des Joueurs.*

SOLUTION.

190. SOIT $p+q-1=m$, le ſort de Pierre ſera exprime par une fraction dont le dénominateur ſera 2 élevé à l'expoſant m, & dont le numerateur ſera compoſé d'autant de termes de cette ſuite $1+m+\frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}+\frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{m\cdot m-1\cdot m-2\cdot m-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ &c. que q exprime d'unités, le ſort de Paul ſera le complément de l'unité.

Si l'on ſuppoſe que le nombre des hazards que Pierre a pour gagner chaque point, ou ſi l'on veut que ſa force ſoit à celle de Paul comme a à b ; on aura de même le ſort de Pierre en multipliant les termes de cette ſuite qui ſont les coefficiens de la puiſſance m, par les puiſſances de a & de b qui leur conviennent (*art. 27*) ; ainſi la ſuite précedente devient $a^m b^0+ma^{m-1}b+\frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}a^{m-2}bb+\frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}b^3+\frac{m\cdot m-1\cdot m-2\cdot m-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-4}b^4+$ &c. ce qu'il faut continuer juſqu'au nombre de termes exprimé par q, & diviſer par $\overline{a+b}^m$. La formule qui déſigne le ſort de Paul eſt $1\times b^m a^0$

$+ mb^{m-1}a + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} b^{m-2}aa + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^{m-3}a^3$
$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^{m-4}a^4 +$ &c. continuée juſqu'au nombre de termes exprimé par p, & diviſée par $\overline{a+b^m}$.

Par exemple, ſi Pierre joue pour cinq points, & Paul pour trois, la derniere formule donne le ſort de Paul $= b^7 + 7b^{7-1}a + 21b^{7-2}aa + 35b^{7-3}a^3 + 35b^{7-4}a^4$, le tout diviſé par $\overline{a+b^7}$.

DE'MONSTRATION.

LA démonſtration de cette formule eſt fondée, 1°. Sur ce que la partie doit neceſſairement finir en autant de coups moins un qu'il y a d'unités dans la ſomme des points qui manquent de part & d'autre.

2°. Que ſuppoſant m dés dont chacun ait deux faces, l'une blanche, l'autre noire, il y a $\frac{1 \times b^m}{\overline{a+b^m}}$ pour que les jettant au hazard il ſe trouve m faces blanches, $\frac{m \times b^{m-1}a}{\overline{a+b^m}}$ pour qu'il ſe trouve $m-1$ faces blanches & une noire, $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \times \frac{b^{m-2}a^2}{\overline{a+b^m}}$ pour qu'il ſe trouve $m-2$ faces blanches & deux noires, &c. ainſi qu'il eſt démontré, *art. 27.*

3°. Que c'eſt la même choſe de parier que Pierre gagnera p points en m coups, ou de parier que jettant m dés au hazard il amenera p faces blanches.

AUTRE FORMULE.

191. L'ANALYSE m'a encore fourni une autre formule.

Suppoſant les mêmes dénominations que ci-deſſus, je trouve le ſort de Pierre $= \frac{1 \times a^p b^0}{\overline{a+b^p}} + \frac{p \times a^p b^1}{\overline{a+b^{p+1}}} + \frac{p \cdot p+1 \times a^p b^2}{1 \cdot 2 \cdot \overline{a+b^{p+2}}}$
$+ \frac{p \cdot p+1 \cdot p+2 \times a^p b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \times \overline{a+b^{p+3}}} + \frac{p \cdot p+1 \cdot p+2 \cdot p+3 \cdot a^p b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \overline{a+b^{p+4}}} +$ &c. Et de même le ſort de Paul $= \frac{1 \times b^q a^0}{\overline{a+b^q}} + \frac{q \times b^q a^1}{\overline{a+b^{q+1}}} + \frac{q \cdot q+1 b^q a^2}{1 \cdot 2 \times \overline{a+b^{q+2}}}$
$+ \frac{q \cdot q+1 \cdot q+2 b^q a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \overline{a+b^{q+3}}} + \frac{q \cdot q+1 \cdot q+2 \cdot q+3 b^q a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \overline{a+b^{q+4}}} +$ &c.

Digitized by Google

La formule qui exprime le ſort de Pierre aura autant de termes qu'il y a d'unités dans q, & celle qui exprime le ſort de Paul autant de termes qu'il y a d'unités dans p.

Pour démontrer cette ſeconde formule plus facilement, je vais en faire l'application à l'exemple ci-deſſus où Pierre joue pour cinq points & Paul pour trois. Il y a

$\frac{1 \times b^3}{\overline{a+b}^q}$ pour que Paul gagne ſes trois coups de ſuite.

$\frac{4 \times b^3 a}{\overline{a+b}^{q+1}}$ pour que Paul gagne en quatre coups, dont il faut rabattre 1 pour le cas précedent, reſte . . .

$\frac{10 b^3 aa}{\overline{a+b}^{q+2}}$ pour que Paul gagne en cinq coups, dont il faut rabattre $1+3=4$ pour les deux cas précedens, reſte . .

$\frac{20 b^3 a^3}{\overline{a+b}^{q+3}}$ pour que Paul gagne en ſix coups, dont il faut rabattre $1+3+6=10$ pour les cas précedens, reſte . .

$\frac{35 b^3 a^4}{\overline{a+b}^{q+4}}$ pour que Paul gagne en ſept coups, dont il faut rabattre $1+3+6+10=20$ pour les cas précedens, reſte . .

En ſorte que generalement les coefficiens de la ſuite qui exprime le ſort du Joueur à qui il manque q points, ſont les nombres de la bande horizontale, *art. 1*, dont le quantiéme eſt exprimé par q; & les coefficiens de la ſuite qui exprime le ſort du Joueur à qui il manque p points, ſont les nombres de la bande horizontale dont le quantiéme eſt p.

Il eſt aiſé d'obſerver, que les nombres 1, 4, 10, 20, 35, &c. ſe trouvent par la Propoſition 14 & l'*art. 41. 2°*. Que ſi l'on met à même dénomination tous les termes de la ſeconde formule, où le diviſeur $a+b$ ſe trouve élevé à differentes puiſſances, on retrouvera la premiere formule. Ainſi dans l'exemple ci-deſſus multipliant $1b^3$ par $\overline{a+b}^4$, & $3b^3a$ par $\overline{a+b}^3$, & $6b^3aa$ par $\overline{a+b}^2$, & $10b^3a^3 \times \overline{a+b}$, & $15b^3a^4$ par $\overline{a+b}^0$; on aura l'expreſſion du ſort de Paul.

$$\frac{1 \times b^7a^0 + 7b^{7-1}a^1 + 21b^{7-2}a^2 + 35b^{7-3}a^3 + 35b^{7-4}a^4}{\overline{a+b}^7}$$

conformément à la premiere formule.

Digitized by Google

EXEMPLES.

192. *PIERRE joue pour cinq points, & Paul pour six points :* le ſort de Pierre eſt 319 contre 193.

Pierre joue pour quatre points, & Paul pour ſix points : le ſort de Pierre eſt 191 contre 65, ce qui eſt un peu moins que 3 contre 1

Pierre joue pour trois points, & Paul pour ſix points : le ſort de Pierre eſt 219 contre 37, ce qui eſt un peu moins que 6 contre 1.

Pierre joue pour deux points, & Paul pour ſix points : le ſort de Pierre eſt 15 contre 1.

Pierre joue pour un point, & Paul pour ſix points : le ſort de Pierre eſt 63 contre 1.

REMARQUE I.

193. LE ſort de Pierre lorſque $\frac{p}{q} = r$, étant $= A$, il ne s'enſuit pas que c & d exprimant dans une autre partie le nombre des points qui manqueroient à Pierre & à Paul, & la fraction $\frac{c}{d}$ étant encore $= r$, le ſort de Pierre ſoit toujours le même, ou $= A$ même dans le cas de $a = b$. Cette remarque eſt fort importante pour les Joueurs. Car l'on pourroit aiſément croire que le ſort de Pierre eſt le même lorſqu'il joue pour un point & Paul pour deux, ou lorſqu'il joue pour deux points & Paul pour quatre, ou lorſqu'il joue pour trois points & Paul pour ſix. On trouvera par les formules, & on peut auſſi le reconnoître par le ſimple raiſonnement que le ſort de Pierre eſt meilleur dans le dernier cas que dans le précedent ; & generalement $\frac{c}{d}$ étant $= \frac{p}{q}$, le ſort de Pierre ſera toujours d'autant meilleur, que c & d déſigneront de plus grands nombres, par rapport à p & à q ; en ſorte que de ce qu'un Joueur peut donner huit points de ſeize au Billard à un autre Joueur : on ne peut pas conclure qu'il puiſſe ſans deſavantage en donner quatre de huit.

REMARQUE II.

194. IL ſeroit fort à ſouhaiter qu'on pût trouver pour trois Joueurs, quatre Joueurs, &c. des formules pareilles aux précedentes pour deux Joueurs qui déterminaſſent tout d'un

Digitized by Google

coup leur ſort, en ſuppoſant leurs forces égales ou inégales, car le Problême n'eſt pas plus difficile d'une façon que de l'autre ; mais il y a lieu de croire que cette recherche eſt extrêmement difficile, & il y a de l'apparence qu'on ne peut rien ajouter à ce que nous avons donné là-deſſus dans la Remarque, *art. 188.*

PROBLÊME I.

SUR LE JEU DU PETIT PALET OU DE LA BOULE.

PROPOSITION XLII.

Pierre joue avec un certain nombre de palets ou de boules m, *Paul avec un certain nombre de palets ou de boules* n, *la force de Pierre eſt à celle de Paul comme* a *eſt à* b, *ce qui ſignifie que Pierre & Paul jouant chacun avec une boule ou un Palet, il y auroit* a *contre* b *à parier que Pierre approcheroit plus du but que Paul. L'on ſuppoſe qu'il manque à Pierre pour gagner un certain nombre de points* p, *& à Paul un certain nombre de points* q. *On demande le ſort des deux Joueurs.*

SOLUTION.

195. SOIT ſuppoſé d'abord qu'il manque un point à Pierre, & un, ou deux, ou trois, ou quatre, ou cinq, &c. points à Paul. Soit auſſi dans le premier cas le ſort de Paul appellé *A*, dans le 2e *B*, dans le troiſiéme *C*, dans le quatrieme *D*, dans le cinquiéme *E*, &c.

Soit encore le ſort de Paul exprimé par les lettres *F*, *G*, *H*, *I*, *L*, &c. lorſqu'il manque deux points à Pierre pour gagner, & qu'il en manque à Paul ou un, ou deux, ou trois, ou quatre, ou cinq, &c.

Soit encore le ſort de Paul exprimé par les lettres *M*, *N*, *O*, *P*, *Q*, &c. lorſqu'il manque trois points à Pierre pour gagner, & qu'il en manque à Paul ou un, ou deux, ou trois, ou quatre, ou cinq, &c.

Soit

Digitized by Google

$A =$.

$B =$.

$C =$.

$D =$ $\frac{b^4 . n . n-1 .}{g . g - b . g}$

$E = \frac{b^5 . n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4}{g . g-b . g-2b . g-3b . g-4b} + \frac{b^4 . n . n-1 . n-}{g . g-b . g-2b}$

$F =$.

$G =$.

$H =$.

$I =$ $\frac{b^4 . n . n}{g . g-}$

$L = \frac{b^5 . n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4}{g . g-b . g-2b . g-3b . g-4b} + \frac{b^4 . n . n-1 . n}{g . g-b . g-}$

T

$M =$.

$N =$.

$O =$.

$P =$ $\frac{b^4 . n . n-}{g . g-b .}$

$Q = \frac{b^5 . n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4}{g . g-b . g-2b . g-3b . g-4b} + \frac{b^4 . n . n-1 . n-}{g . g-b . g-2b}$

$R =$ $\frac{b . bnA}{g-3}$

$S =$ $\frac{2 . bnB}{g-3}$

$T =$ $\frac{3 . bnC}{g-3}$

$V =$ $\frac{4 . bnD}{g . g-b . g-3}$

$X = \frac{b^5 . n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4}{g . g-b . g-2b . g-3b . g-4b} + \frac{b^4 . n . n-1 . n}{g . g-b . g-2b}$ $\frac{x . bnE}{-3}$

Digitized by Google

Soit encore le ſort de Paul exprimé par les lettres *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, &c. lorſqu'il manque quatre points à Pierre pour gagner, & qu'il en manque à Paul ou un, ou deux, ou trois, ou quatre, ou cinq, &c.

Et ainſi de ſuite. Soit auſſi pour abreger $bn + am = g$, je trouve les formules ci-jointes.

En examinant l'ordre de ces formules, & en les parcourant des yeux, rien n'eſt ſi facile que d'obſerver la maniere de les continuer à l'infini : En voici la démonſtration.

Pour la faire entendre plus facilement, je vais l'appliquer à un exemple.

Soit ſuppoſé que la force de Pierre ſoit à la force de Paul, comme deux eſt à trois, qu'il manque quatre points à Pierre, & cinq points à Paul ; que Pierre joue avec quatre boules, & Paul avec cinq. Pour trouver le ſort de Paul, je réduis le Problême à celui-ci. Soit mis dans une bourſe deux jettons blancs, deux jettons noirs, deux jettons gris, deux jettons bruns. *Item*, trois rouges, trois orangés, trois jaunes, trois verts, trois bleus. Je cherche quel eſt mon ſort, 1°, pour tirer cinq jettons de ces dernieres couleurs avant que d'en tirer quelqu'un des quatre premieres. 2°. Pour en tirer quatre des cinq dernieres couleurs avant que d'en tirer des quatre premieres. 3°. Pour en tirer trois des cinq dernieres couleurs avant que d'en tirer des quatre premieres. 4°. Pour en tirer deux des cinq dernieres couleurs avant que d'en tirer des quatre premieres. 5°. Pour en tirer un des cinq dernieres couleurs avant que d'en tirer des quatre premieres. 6°. Pour tirer un jetton des quatre premieres couleurs avant que d'en tirer des cinq dernieres. 7°. Pour tirer deux jettons des quatre premieres couleurs avant que d'en tirer des cinq dernieres. 8°. Pour tirer trois jettons des quatre premieres couleurs avant que d'en tirer des cinq dernieres.

Le premier cas donne gagné à Paul, le ſecond lui donne *R* puiſqu'il le met dans la ſituation de ne jouer que pour un point, & Pierre pour quatre. Le troiſiéme cas lui donne *S*, puiſqu'il le met dans la ſituation de jouer pour deux points & Pierre pour quatre. Par les mêmes raiſons le quatriéme

Digitized by Google

cas lui donne T, & le cinquiéme lui donne V. On remarquera encore que le ſixiéme lui donne Q, puiſqu'il le met dans la ſituation de jouer pour cinq points, & Pierre ſeulement pour trois; & de même que le ſeptiéme lui donne L, & le huitiéme E. Or dans notre exemple, lorſque je tire d'abord un jetton, je vois que j'ai $\frac{15}{23}$ pour que ce ſoit un jetton des cinq dernieres couleurs: après quoi ſi c'eſt un rouge, par exemple, on ôte les jettons rouges, & il y a $\frac{12}{20}$ pour que je tire un jetton des quatre dernieres couleurs reſtantes, plûtôt que des quatre premieres. Après quoi, ſuppoſé qu'on ait tiré la 2e fois un orangé, j'ai $\frac{9}{17}$ pour tirer un jetton des 3 dernieres couleurs reſtantes jaunes, vertes & bleues avant que d'en tirer des 4 premieres couleurs, & ainſi de ſuite: d'où je tire que le ſort de Paul, pour gagner les cinq points qui lui manquent, eſt $\frac{15.12.9.6.3}{23.20.17.14.11}$. On trouvera par de ſemblables raiſonnemens & par nos regles de combinaiſons que j'ai $\frac{15.12.9.6\times 8}{23.20.17.14\times 11}$ pour qu'après avoir tiré quatre jettons des cinq dernieres couleurs, je tire un jetton des quatre premieres, auquel cas Paul ne gagnant que quatre points, a le ſort exprimé par R. Et de même que j'ai $\frac{15.12.9\times 8}{23.20.17.14}$ pour qu'après avoir tiré trois jettons des cinq dernieres couleurs, je tire un jetton des quatre premieres, auquel cas Paul ne gagnant que trois points, a le ſort exprimé par S, puiſqu'il ſe trouve dans la ſituation de jouer pour deux points, Pierre jouant pour quatre points. Et ainſi de ſuite en continuant, on trouvera que dans l'exemple propoſé le ſort de Paul eſt $\frac{15.12.9.6.3}{23.20.17.14.11} + \frac{15.12.9.6\times 8}{23.20.17.14.11}R + \frac{15.12.9\times 8}{23.20.17.14}S + \frac{15.12\times 8}{23.20.17}T + \frac{15\times 8}{23.20}V + \frac{8\times 15}{23.21}Q + \frac{8.6\times 15}{23.21.19}L + \frac{8.6.4\times 15}{23.21.19.17}E$, conformément à la formule.

En ſorte que le fondement de la methode eſt de concevoir, 1°, autant de differentes couleurs de jettons pour Paul qu'il y a d'unités dans n, & autant de differentes couleurs de jettons pour Pierre qu'il y a d'unités dans m. 2°. Autant de jettons de chacune des couleurs favorables à Paul qu'il y a d'unités dans b, & autant de jettons de cha-

Digitized by Google

cune des couleurs favorables à Pierre qu'il y a d'unités dans *a*. Cette idée étant bien conçue, le reſte n'eſt plus que de calcul.

COROLLAIRE I.

196. ON voit en examinant les formules ci-deſſus qu'elles s'abregent lorſque *m* ou *n* expriment l'unité, tous les termes où il entre des $m - 1$, & des $n - 1$ devenant alors zero; & que *m* étant $= n = 1$, les formules deviennent ſous une autre forme les mêmes que celles de l'*art. 190*, ce qui en donne une nouvelle démonſtration.

COROLLAIRE II.

197. LA methode dont on vient de ſe ſervir pour le cas de deux Joueurs qui jouent avec un nombre quelconque de palets ou de boules, peut être employée pour un nombre indéterminé de Joueurs : En voici un exemple dans le Problême ſuivant.

PROBLÊME II.

Pierre, Paul & Jacques jouent à la boule chacun pour ſoi. Les forces de ces trois Joueurs ſont reſpectivement comme 3, 2, 1, *il manque trois points à Pierre pour gagner, deux points à Paul, & un point à Jacques. Pierre joue avec trois boules, Paul avec deux, Jacques avec une. On demande quel eſt leur ſort, & quelle eſperance chacun des Joueurs a de gagner.*

SOLUTION.

198. SI l'on imagine une bourſe dans laquelle il y ait trois jettons blancs, trois gris, trois iſabelles favorables à Pierre. Deux jettons noirs & deux jettons bruns favorables à Paul. Et enfin un bleu favorable à Jacques. On trouvera, en faiſant les mêmes raiſonnemens que dans

le Problême précedent, les ſorts des trois Joueurs comme les trois nombres 60143391, 22555106, 14916559.

En ſorte que ſi l'argent du jeu eſt une piſtole ou 10 liv. & qu'il en faille faire la répartition entre les trois Joueurs par rapport à l'eſperance que chacun a de gagner

Pierre aura	6 liv.	3 ſ.	3 d.
Paul	2	6	2
Jacques	1	10	7

COROLLAIRE.

199. SI les forces de chacun des trois Joueurs étoient égales, tout le reſte demeurant comme ci-deſſus, on auroit leurs ſorts comme les trois nombres 1581, 1330, 1589; en ſorte que dans cette ſuppoſition

Pierre auroit	3 liv.	10 ſ.	3 d. $\frac{1}{5}$
Paul	2	19	1 $\frac{1}{3}$
Jacques	3	10	7 $\frac{7}{15}$

Il eût aſſurément été fort difficile de deviner que le ſort de Pierre ſe dût trouver meilleur que celui de Paul, & moindre que celui de Jacques; mais moindre ſeulement de la onze cens vingt-cinquiéme partie de l'unité.

S'il manque trois points à Pierre, deux points à Paul, & un point à Jacques, ces trois Joueurs jouant chacun avec une boule, & leurs forces étant comme les nombres 3, 2, 1, reſpectivement, leurs ſorts ſont entr'eux comme les nombres 9, 11, 16. S'ils jouent avec deux boules chacun, leurs ſorts ſont comme ces trois nombres 169, 170, 201. S'ils ont trois boules chacun, leurs ſorts ſont comme ces trois nombres 825, 742, 833. S'ils ont chacun quatre boules, leurs ſorts ſont comme ces trois nombres 1728, 1490, 1633.

Digitized by Google

PROBLÈME III.

Pierre joue pour un point, Paul pour deux, la force de Pierre eſt double de celle de Paul, Pierre joue avec m *boules. On demande quelle doit être la valeur de* n, *c'eſt à dire avec combien de boules Paul doit jouer pour que le parti ſoit égal.*

SOLUTION.

200. ON a par la formule, *art. 195*, $\frac{bbn^2 - bbn + b^2n^2 \times \frac{am}{bn+am}}{bn+am \times bn+am-b}$ $= \frac{1}{2}$, ou $n^3 - 2nnm - 12nmm - 8m^3 + nn + 4mm + 8mn = 0$, en ſubſtituant pour a, 2; & pour b, 1. Maintenant ſi dans cette égalité on ſuppoſe pour m ſucceſſivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. c'eſt à dire, que Pierre joue avec une, ou deux, ou trois, ou quatre, ou cinq, ou ſix boules, &c. on trouvera, en réſolvant l'égalité que Paul n'en doit pas avoir moins que trois, huit, treize, dix-huit, vingt-huit, &c.

Et ſi l'on ſuppoſoit la force de Pierre triple de celle de Paul, on auroit l'égalité $n^3 - 3nnm - 27mmn - 27m^3 + nn + 12nm + 9mm = 0$, qui fait connoître que ſi Pierre joue avec une boule il faut que Paul joue avec ſix; & que ſi Pierre joue avec deux boules, il faut que Paul joue avec treize, &c.

Ce ſera la même choſe pour trouver les forces, le rapport des boules étant donné. Mais l'on aura même pour des cas très ſimples, des égalités extrêmement compoſées, & toujours d'autant plus qu'il manque plus de points aux Joueurs.

COROLLAIRE.

201. LE rapport des points qui manquent à chacun des Joueurs, le rapport des forces, le nombre des palets ou des boules, deux quelconques de ces trois choſes étant données, on déterminera la troiſiéme.

Digitized by Google

REMARQUE.

202. IL arrive ſouvent au petit palet, à la boule, au billard & autres Jeux, que lorſqu'il y a trois Joueurs, il y en a un qui porte les deux autres. On dit que Paul porte Pierre & Jacques au petit palet, lorſqu'il joue deux coups, & qu'il a deux palets contre les autres chacun un, & que ces deux-ci ſont ſocieté d'interêt contre Paul. On peut imaginer ſur cette idée pluſieurs Problêmes curieux, dont on trouvera la ſolution par ce qui précede. En voici un qui ſervira de regle pour les autres.

PROBLÊME IV.

Pierre, Paul & Jacques jouent chacun pour trois points au petit palet, Pierre & Jacques ſont enſemble de ſocieté, & jouent chacun avec un palet. Paul porte les deux, & joue avec deux palets. Les forces des trois Joueurs ſont reſpectivement comme les nombres 3, 2, 1. *On demande ſi Paul a de l'avantage, ou ſi c'eſt la ſocieté de Pierre & de Jacques.*

SOLUTION.

203. SOIT M le ſort de Paul lorſqu'il joue pour un point & Pierre pour trois. N ſon ſort lorſqu'il joue pour deux points & Pierre pour trois. C ſon ſort lorſqu'il joue pour trois points, & Pierre ſeulement pour un. H ſon ſort quand il joue pour trois points, & Pierre pour deux. Soit auſſi conçu qu'il y ait dans une bourſe trois jettons rouges favorables à Pierre, un jetton blanc favorable à Jacques, deux jettons noirs & deux jettons bruns favorables à Paul. On trouvera le ſort de Paul $= \frac{4}{8} \times \frac{2}{6} \times M + \frac{4}{8} \times \frac{4}{6} \times N + \frac{3}{8} \times \frac{1}{5} \times C + \frac{1}{8} \times \frac{3}{7} \times C + \frac{3}{8} \times \frac{4}{5} \times H + \frac{1}{8} \times \frac{4}{7} \times H$. On trouvera auſſi $M = \frac{4013}{4900}$, $N = \frac{3309}{4900}$, $C = \frac{7}{36}$, $H = \frac{151}{420}$, ce qui donne le ſort cherché de Paul $= \frac{2823}{7350}$; en ſorte que ſi l'argent du jeu eſt une piſtole, & qu'on veuille le parta-

ger par rapport à l'avantage ou desavantage de chaque Joueur, il faut que Paul prenne 5 liv. 4 s. $\frac{16}{49}$, d. & les deux associez 4 liv. 15 s. 11 $\frac{11}{49}$ d.

COROLLAIRE I.

204. ON pourroit croire que Pierre & Jacques d'une part & Paul de l'autre, jouant pour un nombre determiné de points, il est indifferent qu'ils jouent avec quelque nombre de boules que ce soit, pourvû que Pierre & Jacques ayant chacun un égal nombre de boules, Paul en ait autant que les deux autres ensemble. Mais cela n'est pas ainsi; car, par exemple, l'avantage de Paul qui est $\frac{26}{1365}$ lorsque la partie étant en deux points, Paul a deux boules contre les autres chacun une, n'est que $\frac{8}{1365}$, lorsque la partie étant encore en deux points, Paul joue avec quatre boules contre Pierre & Jacques chacun deux.

COROLLAIRE II.

205. IL seroit facile de donner, pour ce Problême consideré generalement, des formules à peu près pareilles à celles que j'ai donné pour le Problême 1er, *art. 195*. Ce seroit encore la même methode; mais en voilà assés sur cette matiere, & l'on ne peut tout épuiser.

REMARQUE.

206. IL eût été difficile d'employer pour la solution des Problêmes précedens une autre methode que celle des combinaisons, & des changemens d'ordre. L'Analyse appliquée à ce Problême fait tomber très naturellement dans le parallogisme : c'est ce qui paroîtra par l'exemple qui suit.

Il manque un point à Pierre & un point à Paul, Pierre joue avec deux palets, Paul avec un. On demande le sort de Pierre : pour le trouver par Analyse, voici comme je

raiſonne. Je ſuppoſe d'abord que Paul a joué ſon palet: cela fait, Pierre joue le premier de ces palets. Or il eſt clair que jouant ce premier palet il a $\frac{1}{2}$ pour gagner, en faiſant un meilleur coup que celui de Paul; & $\frac{1}{2}$ pour que ſon premier coup n'étant pas ſi bon que celui de Paul, il n'ait plus d'eſperance que dans ſon ſecond coup. Or par la ſuppoſition les forces étant égales, ſon ſecond palet lui fournit $\frac{1}{2}$ d'eſperance de gagner du ſecond coup, n'ayant point gagné du premier; & par conſequent le ſort de Pierre eſt $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; en ſorte qu'en ſuivant ce raiſonnement il y auroit 3 contre 1 à parier que Pierre gagneroit plûtôt que Paul.

Il eſt clair & très vrai, que dans la theorie le cas d'égalité des boules doit être compté pour rien, & ne change rien au calcul précedent; en ſorte qu'il peut paroître entierement exempt de parallogiſme. Voici neanmoins un autre raiſonnement très convainquant qui donne le rapport des ſorts comme 2 à 1.

J'imagine deux carreaux qui repréſentent les deux palets de Pierre, & un cœur qui repréſente le palet de Paul, & je conçois que le Problême propoſé ſe réduit à découvrir combien il y a à parier que mêlant ces cartes au hazard & tirant une carte, celle qui ſe préſentera la premiere ſera un carreau. Or le ſort de celui qui pariroit de tirer d'abord un carreau, ſeroit viſiblement $\frac{2}{3}$, & non pas $\frac{3}{4}$. Donc, &c.

Ce dernier calcul eſt fondé ſur une idée très juſte & très ſimple. Comment donc accorder cette contrarieté entre deux ſolutions qui ſemblent l'une & l'autre avoir le caractere de l'évidence? La derniere eſt la veritable. En voici une démonſtration qui ne laiſſe aucun doute.

Si l'on ſuppoſoit que Pierre donnât un de ſes deux palets à jouer à un troiſiéme Joueur de même force que lui, il eſt clair que cela ne porteroit aucun préjudice à Paul, & que dans ce cas le ſort de chacun des trois Joueurs ſeroit $\frac{1}{3}$; & par conſequent celui de Pierre $\frac{2}{3}$ lorſqu'il aura le droit de deux Joueurs qui auront chacun un palet; ou, ce qui eſt la même choſe, lorſqu'il aura deux palets. Ainſi le

parallogiſme

paralogiſme ſecret de notre 1re ſolution où nous avons trouvé le ſort de Pierre $= \frac{3}{4}$ eſt fondé ſur ce que dans le raiſonnement analytique on ſuppoſe que lorſque le premier palet de Pierre ne s'eſt pas trouvé ſi bon que celui de Paul ; Paul recommence à jouer ſon palet contre Pierre le ſien, au lieu que dans la regle ordinaire du jeu, celui de Paul qui a déja gagné reſte ; & en y prenant garde, on s'apperçoit bien que cela n'eſt pas indifférent, puiſqu'il eſt à préſumer que le palet de Paul doit déja avoir quelque ſorte de bonté, lorſqu'il s'eſt trouvé meilleur que le premier palet de Pierre ; & qu'ainſi il ne peut ſans deſavantage ôter ſon palet pour le rejouer, puiſqu'il eſt probable qu'il ne fera pas un ſi bon coup.

PROBLÊME

SUR LA LOTERIE DE LORAINE.

PROPOSITION XLIII.

Je fis inſerer ce qui ſuit dans le Journal des Sçavans au mois de Mars de l'année 1711.

Il ſe tira l'année derniere à Paris une Loterie connue ſous le nom de la Loterie de Lorraine, dont le Public n'a pas eu ſujet d'être content. Lorſqu'elle fut publiée je m'apperçus d'abord que l'on couroit riſque d'en être la dupe, & qu'on auroit dû obliger le Directeur de la Loterie à donner bonne & ſuffiſante caution, puiſque ſelon les conditions auſquelles il s'obligeoit, il étoit poſſible qu'il eût à rendre 424950 liv. au delà des 500000 livres qu'il avoit reçues. Je vis en gros que ſon parti n'étoit pas bon, & delà je ſoupçonnai qu'on avoit deſſein d'attrapper l'argent du Public, ce qui eſt arrivé.

Je n'allai pas plus loin alors, & je remis à un temps où j'aurois plus de loiſir à examiner à fond le deſavantage de celui qui tenoit la Loterie. L'ayant trouvé depuis peu, j'ai cru qu'il ne ſeroit pas inutile d'en propo-

» ſer la recherche aux Geometres. Ceux qui ont le plus » d'eſtime pour l'Algébre & l'Analyſe, ne ſçavent point » aſſés combien elle a d'uſage par rapport aux choſes de » la vie civile. Il eſt bon, ce me ſemble, d'en donner ici » une nouvelle preuve; & en même temps, de faire con- » noître aux Magiſtrats qui auroient à décider ſur une ma- » tiere de la nature de celle-ci, qui eſt de leur compétence, » que les Geometres ſont les ſeuls de qui ils puiſſent rece- » voir des déciſions certaines.

REGLES DE LA LOTERIE.

» Les billets étoient de dix ſols, & il y en avoit un mil- » lion. Pour les 500000 livres que recevoit du Public ce- » lui qui tenoit la Loterie, il lui rendoit 425000 livres en » vingt mille lots. Deux conditions faiſoient la nouveauté » & la ſingularité de cette Loterie.

» 1°. Celui qui tenoit la Loterie, pour dédommager le » Public des 75000 liv. qu'il retenoit, s'obligeoit de ren- » dre 25 liv. à chacun de ceux qui ayant pris 50 billets de » ſuite, n'auroient aucun lot dans leurs 50 billets.

» 2°. Voici de quelle maniere ſe tiroit la Loterie. Tous » les billets ou numeros étoient dans une boete, & les bil- » lets noirs dans une autre. On tiroit en même temps un » billet noir & un numero; & après qu'on avoit écrit quel » numero avoit un tel lot, on jettoit dehors le billet noir, » & on remettoit le numero dans la boete aux numeros; en » ſorte que par cette maniere de tirer les lots, un même » numero pouvoit gagner pluſieurs lots, ou même les ga- » gner tous.

PROBLÊME.

EN ſuppoſant que tous ceux qui mettront à la Lote- » rie prendront ou 50 billets, ou 100, ou 150, &c. (cette » ſuppoſition paroît tout à fait recevable;) *On demande quel* » *eſt l'avantage ou le deſavantage de celui qui tient la Loterie?* » Il eſt aiſé d'obſerver, 1°. Que le Directeur de la Loterie » gagnera 75000 liv. ſi tous ceux qui ont mis à la Loterie

Digitized by Google

» ont un lot dans chaque cinquantaine de billets. 2°. Qu'il » perdra 424950 liv. ſi un ſeul de tous ceux qui auront mis » à la Loterie emporte tous les lots. 3°. Qu'il ne perdra » ni ne gagnera, ſi trois mille perſonnes ſeulement n'ont » point de lots dans leurs 50 billets. D'où il ſuit que cette » Loterie eſt une eſpece de jeu de hazard, où celui qui » tient la Loterie peut perdre ou gagner. La ſolution de » ce Problême eſt cachée ſous cette Anagramme 4*a*, 5*e*, » 5*i*, 13*o*, 3*u*, 2*l*, 2*n*, 2*p*, 4*s*, 3*t*, *c*, *d*, *m*, *r*, dont je don- » nerai l'explication quand on le ſouhaitera.

SOLUTION.

207. C'EST la même choſe à la Loterie de Lorraine de ſuppoſer qu'il y a un million de billets à tirer, & 20000 perſonnes qui prennent chacun cinquante billets à 10 ſ. piece, ou de ſuppoſer vingt mille billets, & vingt mille perſonnes qui prennent chacun un billet à vingt-cinq liv. piece cela fera toujours 500000 liv. pour le fond de la Loterie & ne produira aucune difference dans les intereſts de ceux qui y mettent. Ainſi pour la ſimplicité du Problême, nous nous en tiendrons à cette derniere ſuppoſition. Il s'agit donc de ſçavoir combien porte de préjudice à celui qui tient la Loterie la condition à laquelle il s'oblige de rendre 25 liv. à chacun de ceux qui ayant pris un billet n'auront point de lots. Pour réſoudre ce Problême, je me propoſe celui-ci qui n'en eſt pas different.

Je jette au hazard 20000 dés qui ont chacun 20000 faces, l'une marquée d'un as, l'autre d'un deux, l'autre d'un trois, & ainſi de ſuite juſqu'à 20000. On demande combien il y a à parier que je n'amenerai aucun as.

On ſera convaincu que ce Problême eſt le même que celui de la Loterie, ſi l'on obſerve que dans ce dernier il s'agit de ſçavoir combien il y a à parier que tirant vingt mille fois un billet d'entre les 20000, ou ce qui eſt la même choſe, que jettant à la fois les 20000 dés, qui ayent chacun 20000 faces marquées d'un as, d'un deux, d'un trois, &c. il ne ſe trouve aucun billet marqué de mon numero, ou aucun dé dont la face de deſſus ſoit, par exem-

ple, un as. Or cette ſimilitude poſée, l'on ſçait par l'*art. 37*, que mon ſort ſeroit $\frac{20000-1^{20000}}{20000}$, & puiſqu'il y a 20000 perſonnes qui ſont dans le cas de redemander leur argent, c'eſt à dire 25 livres, lorſque leur numero ne vient point dans les 20000 billets, il s'enſuit que le deſavantage de celui qui tient la Loterie, fondé ſur cette condition à laquelle il s'oblige de rendre l'argent à ceux qui n'auront point de lots, ſera $\frac{19999^{20000}}{20000} \times 25 \times 20000$, ce qui par la Table des logarithmes donne 184064 liv. pour le deſavantage cherché.

L'explication de l'Anagramme conſiſte dans ces mots: *20000 moins 1, diviſé par 20000 élevé à la puiſſance 20000.*

PROBLÊME.

PROPOSITION XLIV.

Pierre & Paul prétendent tous les deux à une Charge qui ſe donne à la pluralité des voix. Il y a douze perſonnes qui ont droit de donner leurs voix. Sur ces douze perſonnes Pierre ſçait qu'il y en a trois qui ſeront pour lui, & deux qui ſeront pour Paul, & qu'il a la même eſperance que Paul ſur chacune des ſept voix reſtantes. Dans le temps que l'Election va ſe faire, on vient dire à Pierre que trois des douze perſonnes qui doivent donner leurs voix ſont tombées malades & ne s'y trouveront pas, ſans lui marquer ſi parmi les malades il y en a de ceux qui ſont pour lui, ou de ceux qui ſont pour Paul, ou enfin des ſept autres ſur leſquels il a autant d'eſperance que Paul. Tout cela poſé, on demande quel eſt le ſort de Pierre; c'eſt à dire, qu'elle eſt ſon eſperance d'obtenir la Charge.

SOLUTION.

208. ON voit d'abord par la Table, *art. 1*, que douze choſes peuvent être priſes trois à trois en 220 façons differentes. Pour démêler dans ces 220 façons tous les cas qui peuvent arriver, il faut obſerver ce qui ſuit.

Digitized by Google

1°. Il n'y a qu'une maniere pour que les trois malades ſoient les trois qui devoient être pour Pierre, & dans ce cas il ne peut gagner s'il n'a au moins cinq des voix incertaines, car Paul en a deux dont il eſt aſſuré. Or il y a $\frac{1+7+21}{2^7}$ pour que cela arrive.

2°. Il y a $3 \times 7 = 21$ façons pour que deux de ceux qui devoient être pour Pierre ſoient malades, & une des voix incertaines, auquel cas il faut que Pierre ait au moins quatre des ſix voix incertaines reſtantes, & il y a $\frac{1+6+15}{2^6}$ pour que cela arrive.

3°. Il y a $3 \times 2 = 6$, c'eſt à dire toutes les manieres de prendre trois choſes deux à deux, multipliées par toutes les manieres de prendre deux choſes une à une, pour que les trois malades ſoient deux de ceux qui ſont pour Pierre, & un de ceux qui ſont pour Paul, auquel cas comme il reſte une voix aſſurée à Pierre, une aſſurée à Paul, & les ſept autres ſur leſquelles leur eſperance eſt égale, le ſort de Pierre eſt $\frac{1+7+21+35}{2^7}$.

4°. Il y a $3 \times 21 = 63$, c'eſt à dire toutes les manieres de prendre trois choſes une à une, multipliées par toutes les manieres de prendre ſept choſes deux à deux, pour que les malades ſoient un des trois qui ſont pour Pierre, & deux des voix incertaines, auquel cas le ſort de Pierre eſt $\frac{1+5+10}{2^5}$.

5°. Il y a 3×1 pour que les trois malades ſoient les deux qui ſont pour Paul, & un de ceux qui ſont pour Pierre, & dans ce cas il ſuffit à Pierre d'avoir pour lui trois des ſept voix incertaines, & pour que cela arrive il y a $\frac{1+7+21+35+35}{2^7}$.

6°. Il y a $3 \times 2 \times 7 = 42$ pour qu'il y ait un de ceux qui ſont pour Pierre un de ceux qui ſont pour Paul, & une des voyes incertaines, auquel cas comme il faut à Pierre au moins trois des ſix voix incertaines qui reſtent, ſont ſort eſt $\frac{1+6+15+20}{2^6}$.

7°. Il y a 35 pour que ce ſoit trois des ſept voix incertaines, auquel cas, comme il ſuffit à Pierre d'en avoir deux ſur les quatre qui reſtent, ſon ſort eſt $\frac{1+4+6}{2^4}$.

8°. Il y a $21 \times 2 = 42$ pour que ce ſoit deux des voix incertaines, & un de ceux qui ſont pour Paul, & pour lors

il ſuffit à Pierre d'avoir deux des cinq voix incertaines qui reſtent, & ſont ſort eſt $\frac{1+5+10+10}{2^5}$.

9°. Enfin il y a 7×1 pour que les malades ſoient une des voix incertaines, & les deux qui ſont pour Paul, auquel cas le ſort de Pierre eſt $\frac{1+6+15+20+15}{2^6}$.

Donc en nommant s le ſort de Pierre, c'eſt à dire ſon eſperance d'être élu, on a $s = \frac{1\times 29}{128} + \frac{21\times 22}{64} + 6\times\frac{1}{2} + 63\times\frac{1}{2} + \frac{3\times 99}{128} + \frac{42\times 42}{64} + \frac{35\times 11}{16} + \frac{42\times 26}{32} + \frac{7\times 57}{64}$, le tout diviſé par $220 = \frac{109}{176}$; en ſorte que ſon eſperance d'être élu eſt de 109 contre 67, un plus que trois contre deux.

PROBLÊME.

SUR LE JEU DES OUBLIEUX.

PROPOSITION XLV.

Ce Jeu eſt une eſpece de ferme ou de Banque. L'on écrit ſur des marques les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. *Pierre pouſſe un dé, & continue à le pouſſer juſqu'à ce qu'il ait enlevé ou effacé toutes les marques, en amenant chacun des points qu'elles portent. Il donne un écu à Paul chaque fois qu'il manque à effacer, ce qui arrive lorſqu'il amene un point qui a déja été amené. L'on demande combien Paul doit donner à Pierre pour le dédommager du riſque qu'il court de perdre pluſieurs écus indéterminément.*

SOLUTION.

209. SOIT p le nombre des faces du dé & des marques qu'il doit effacer. La ſomme que Paul doit mettre à la banque pour faire le parti égal, eſt exprimé par cette formule indéfinie

$$\frac{p-1}{1} + \frac{p-2}{2} + \frac{p-3}{3} + \frac{p-4}{4} + \frac{p-5}{5} + \frac{p-6}{6} + \&c. \times A.$$

qui fait voir que ſi le dé eſt un dé ordinaire à ſix faces, & que les marques ſoient 1, 2, 3, 4, 5, 6, Paul doit mettre

Digitized by Google

à la banque $\frac{5}{1} + \frac{4}{2} + \frac{3}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = 8\frac{7}{10} = 26$ liv. 2 ſols, ſi $\mathcal{A} = 3$ livres.

Et que ſi le dé eſt à douze faces (ce que l'on nomme un cochonnet) marquant depuis un juſqu'à douze, Paul doit mettre à la banque $25\frac{55}{2310} = 75$ liv. 14 ſ. 3 d. $\frac{57}{77}$.

DEMONSTRATION.

IL eſt certain, 1°, que le prix de la banque doit être exactement proportionné à ce que Pierre peut payer d'écus à fortune égale. 2°. Que Pierre effacera plus difficilement, & ſera plus dans le riſque de payer, lorſqu'il y aura déja beaucoup de marques effacées, que lorſqu'il y en aura peu; & que la facilité de démarquer va toujours en diminuant depuis la premiere juſqu'à la derniere; en ſorte que le Problême peut ſe réduire à chercher combien Pierre devroit donner d'argent à Paul à chaque coup pour avoir le droit d'effacer tel & tel point ſans jouer; car il eſt clair que ce que Pierre aura dû donner pour acheter le droit d'effacer l'as, le deux, le trois, &c. chacun en particulier juſqu'à p (l'ordre n'y fait rien) ſera juſtement ce que Paul doit mettre à la banque.

Or je vois, 1°, qu'au premier coup Pierre ne doit rien donner pour effacer une marque, car cela ne lui peut manquer.

2°. Que lorſqu'il y a une marque moins que le nombre des faces, ce que Pierre pourroit donner pour acheter le droit d'effacer une 2e marque ſans jouer, eſt bien exprimé par la ſuite infinie $\frac{1}{p} + \frac{1}{pp} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5} +$ &c. puiſqu'il peut arriver une fois, deux fois, trois fois, &c. de ſuite & à l'infini, qu'il amene le nombre effacé.

3°. Que lorſqu'il y a deux marques moins que le nombre des faces, ce que Pierre devroit donner pour acheter le droit d'effacer une troiſiéme marque ſans jouer, eſt exprimé par la ſuite infinie $\frac{2}{p} + \frac{2^2}{p^2} + \frac{2^3}{p^3} + \frac{2^4}{p^4} + \frac{2^5}{p^5} +$ &c. puiſqu'il peut arriver une fois, deux fois, trois fois, &c. de ſuite à l'infini, qu'il amene un des nombres effacés.

Digitized by Google

4°. Par le même raiſonnement je vois que lorſqu'il y a trois nombres d'effacés, ou ce qui eſt la même choſe trois marques moins que le nombre des faces du dé, ce que Pierre devroit donner pour acheter le droit d'effacer une quatriéme marque ſans jouer, eſt exprimé par la ſuite infinie $\frac{3}{p} + \frac{3^2}{p^2} + \frac{3^3}{p^3} + \frac{3^4}{p^4} + \frac{3^5}{p^5}$ + &c. & que generalement nommant m le nombre qui exprime combien le nombre des faces du dé ſurpaſſe celui des marques qui ſont à effacer. Ce que Pierre doit donner pour avoir le droit d'effacer une des marques qui reſtent eſt exprimé par cette progreſſion geometrique $\frac{m}{p} + \frac{m^2}{p^2} + \frac{m^3}{p^3} + \frac{m^4}{p^4} + \frac{m^5}{p^5}$ + &c. dont on ſçait que la ſomme eſt $\frac{m}{p-m}$, en ſorte que ſubſtituant ſucceſſivement pour m les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. on aura la ſuite $\frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-2} + \frac{3}{p-3} + \frac{4}{p-4}$ + &c. dont il faut prendre autant de termes qu'il y a d'unités dans $p - 1$ nombre des faces ou des marques moins un.

COROLLAIRE.

210. ON peut varier en pluſieurs façons les difficultés de ce Problême, en ſuppoſant, par exemple, qu'au lieu d'un dé il y en eût deux ou trois, &c. La methode précedente pourra encore être employée; mais on ne peut éviter un fort long calcul.

REMARQUE.

211. A l'imitation du jeu précedent, on peut imaginer pluſieurs autres banques qui fourniront des difficultés d'une nature ſinguliere: en voici un qu'on m'a appris depuis peu.

Pierre met à la banque un certain nombre d'écus. Paul tient un dé ordinaire, & le pouſſe aux conditions qui ſuivent; 1°. Toutes les fois qu'il amenera un point auſſi haut ou moins haut que le nombre des écus qui reſtent à la banque, il prendra autant d'écus qu'il aura amené de points. 2°. Lorſque le point qu'il amenera ſurpaſſera le nombre d'écus qui reſtent à la banque, il donnera à Pierre autant d'écus que le point qu'il aura amené ſurpaſſera le nombre des

Digitized by Google

des écus qui ſont à la banque. S'il en reſte deux, par exemple, & qu'il amene cinq, il donnera trois écus à Pierre. 3°. Il continuera de pouſſer le dé juſqu'à ce qu'il ne reſte plus d'ecus à la banque. *On demande combien Pierre doit mettre d'écus à la banque.* J'ai trouvé qu'il aura de l'avantage s'il n'y met que dix écus, & qu'il aura du deſavantage s'il y en met onze.

On pourroit pour rendre le jeu plus varié, & le Problême plus difficile, ſuppoſer, 1°, que l'on joue avec pluſieurs dés, par exemple, avec ſix dés qui auroient chacun ſix faces, dont cinq ſeroient blanches, un dé étant marqué d'un as, l'autre d'un deux, l'autre d'un trois, l'autre d'un quatre, l'autre d'un cinq, l'autre d'un ſix. 2°. Que Paul donnera un jetton à Pierre Banquier toutes les fois qu'il amenera face blanche, & qu'il gagnera ou perdra, comme ci-deſſus, lorſque le point qu'il amenera ne ſurpaſſera pas ou ſurpaſſera le nombre des écus qui reſtent à la banque. 3°. Qu'ils joueront alternativement l'un après l'autre, Paul d'abord, enſuite Pierre. 4°. Que Pierre ne gagnera ni ne perdra rien, quand il lui arrivera ou d'amener face blanche ou d'amener un point plus haut que le nombre des écus qui ſe trouveront à la banque, & qu'il tirera comme Paul de l'argent du jeu, lorſque le point qu'il amenera n'excedera point le nombre des écus qui ſont au jeu. La perſonne qui m'a appris ce jeu, m'a dit qu'en Allemagne où ce jeu eſt fort commun, l'uſage eſt de prendre la banque ſur le pied de 60 ou 70 écus. J'ai eu quelque curioſité de découvrir le juſte parti que le Banquier peut faire. J'avois même pouſſé aſſes loin cette recherche qui n'eſt pas d'un travail mediocre; mais ayant perdu les papiers qui contenoient mes calculs, je n'ai pû gagner ſur moi de les recommencer, quoique la matiere ſoit aſſurément fort curieuſe.

Digitized by Google

PROBLÈME.

PROPOSITION XLVI.

Pierre, Paul, Jacques, Jean, &c. jouent avec un dé à qui le premier amenera le plûtôt un as. Comme ils jouent ſelon l'ordre qu'ils ſont ici nommés, ſçavoir Pierre le premier, Paul le 2d, &c. & que les premiers auroient de l'avantage, ſi chaque Joueur jouoit un égal nombre de coups: On demande combien il faut que les derniers en jouent plus que les premiers, afin de compenſer l'avantage que donne la primauté.

SOLUTION.

212. SOIT a le nombre des coups qui font gagner, b le nombre des coups qui ne font point gagner, c le nombre de coups que Pierre doit jouer; x, y, z, u, t, &c. le nombre de coups que doit jouer chacun des autres Joueurs reſpectivement. a eſt ici $= 1$, $b = 5$; l'on ſuppoſe auſſi $c = 2$.

Il eſt clair que Pierre ayant $\frac{1}{6}$ pour gagner du premier coup, il a $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = 1 - \frac{5^2}{6^2}$ pour gagner dans le premier ou dans le deuxiéme coup; & que par la même raiſon il a $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \overline{1 - \frac{5^2}{6^2}} = 1 - \frac{5^3}{6^3}$ pour gagner ou le premier, ou le 2e, ou le 3e coup; en ſorte que le nombre de coups qu'il a à jouer étant c, ſon ſort eſt $1 - \frac{b^c}{a + b^c}$. On trouvera de même que le ſort du 2e eſt $\frac{b^c}{a + b^c} - \frac{b^{x+c}}{a + b^{x+c}}$: en voici la preuve. Lorſque $c = 1$, il eſt évident que le ſort de Paul eſt d'avoir a pour n'avoir rien, & b pour avoir $1 - \frac{b^x}{a + b^x}$ comme l'on vient de le voir. En ſorte qu'en ce cas de $c = 1$, ſon ſort eſt $\frac{b}{a+b} - \frac{b^{x+1}}{a + b^{x+1}}$, & que par la même raiſon lorſque $c = 2$, le ſort de Paul eſt d'avoir a pour n'avoir rien, & b pour avoir le cas que nous

Digitized by Google

venons de trouver pour $c = 1$; c'eſt à dire, pour avoir $\frac{b}{a+b} - \frac{b^{x+1}}{a+b^{x+1}}$, ce qui donne pour le cas de $c = 2$, le ſort de Paul $= \frac{b^2}{a+b^2} - \frac{b^{x+2}}{a+b^{x+2}}$, & generalement ſon ſort $= \frac{b^c}{a+b^c} - \frac{b^{x+c}}{a+b^{x+c}}$.

Cela poſé, il ne s'agit plus que de ſuppoſer le ſort de Pierre égal au ſort de Paul, & de cette égalité tirer la valeur de x.

On aura donc $1 - \frac{b^c}{a+b^c} = \frac{b^c}{a+b^c} - \frac{b^{x+c}}{a+b^{x+c}}$; d'où prenant les logarithmes, & diviſant par $\log. b - \log. a+b$, on tirera

$x = \frac{\log. 2 \times b^c - a+b^c - \log. b^c}{\log. b - \log. a+b}$, ou en changeant les ſignes

$x = \frac{\log. b^c - \log. 2 \times b^c - a+b^c}{\log. a+b - \log. b} = \frac{13979400 - 11461286}{791812} = 3 + \ldots$

en ſubſtituant pour a, 1 ; pour b, 5, & pour c, 2.

Maintenant pour avoir la valeur de y, c'eſt à dire, pour ſçavoir combien le troiſiéme Joueur Jacques doit avoir de coups à jouer, il n'y a qu'à ſubſtituer dans l'expreſſion $\frac{b^c}{a+b^c} - \frac{b^{x+c}}{a+b^{x+c}}$ pour c la ſomme des coups de Pierre & de Paul, c'eſt à dire $c + \frac{\log. b^c - \log. 2 \times b^c - a+b^c}{\log. a+b - \log. b}$, on trouvera en prenant les logarithmes

$y = \frac{\log. 2 \times b^c - a+b^c - \log. 3 \times b^c - 2 \times a+b^c}{\log. a+b - \log. b} = 8 + \ldots$ dans le cas du préſent Problême.

On trouveroit de la même maniere

$z = \frac{\log. 3 \times b^c - 2 \times a+b^c - \log. 4 \times b^c - 3 \times a+b^c}{\log. a+b - \log. b}$, &

$u = \frac{\log. 4 \times b^c - 3 \times a+b^c - \log. 5 \times b^c - 4 \times a+b^c}{\log. a+b - \log. b}$, $t =$ &c.

L'ordre eſt aiſé à appercevoir ; mais dans le cas particulier que l'on s'eſt ici propoſé, on ne peut accorder aſſés de coups à jouer au quatriéme Joueur, pour qu'il puiſſe jouer ſans deſavantage ; quand on lui en donneroit mil, ſon ſort ne pourroit jamais être $\frac{1}{4}$.

PROPOSITION XLVII.

PROBLÊME

Sur la durée des parties que l'on joue en rabattant.

Pierre & Paul jouent en un certain nombre de parties en rabattant ; c'eſt à dire, en ſorte que Pierre ayant devant lui trois jettons par exemple, & Paul trois jettons ; ſi Pierre vient à gagner une partie, Paul lui donne un de ſes jettons, reſtant ainſi avec deux contre Pierre quatre, ainſi du reſte. On demande combien il y a à parier que la partie qui peut durer à l'infini, ſera finie en un certain nombre déterminé de coups au plus.

SOLUTION.

213. SOIT m le nombre des parties qui manquent à Pierre ou des jettons qui ſont devant Paul ; n le nombre des parties qui manquent à Paul ou des jettons qui ſont devant Pierre ; p le nombre qui exprime en combien de coups au plus on veut que la partie ſoit finie ; a & b les forces de Pierre & de Paul. Voici la formule qui exprime combien il y a à parier que Pierre gagnera la partie en p coups au plus.

1re ſuite. $1 \times \overline{a^{p-m} + b^{p-m}} + p \times \overline{a^{p-m-1}b + b^{p-m-1}a}$

$+ \frac{p \cdot p-1}{1 \cdot 2} \times \overline{a^{p-m-2}b^2 + b^{p-m-2}a^2} + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \overline{a^{p-m-3}b^3 + b^{p-m-3}a^3}$

+ &c. le tout multiplié par $\frac{a^m}{a+b^p}$.

2e ſuite $- 1 \times \overline{a^{p-m-2n} + b^{p-m-2n}} - p \times \overline{a^{p-m-1-2n}b + b^{p-m-1-2n}a}$

Digitized by Google

$$-\frac{p\cdot p-1}{1\cdot 2}\times\overline{a^{p-m-2-2n}b^2+b^{p-m-2-2n}a^2}-\frac{p\cdot p-1\cdot p-2}{1\cdot 2\cdot 3}\times$$
$$\overline{a^{p-m-3-2n}b^3+b^{p-m-3-2n}a^3}-\text{&c. le tout multiplié par}\ \frac{a^{m+n}b^n}{\overline{a+b}^p}.$$

3e ſuite. $1\times\overline{a^{p-3m-2n}+b^{p-3m-2n}}+p\times\overline{a^{p-3m-1-2n}b+b^{p-3m-1-2n}a}$
$$+\frac{p\cdot p-1}{1\cdot 2}\times\overline{a^{p-3m-2-2n}b^2+b^{p-3m-2-2n}a^2}+\frac{p\cdot p-1\cdot p-2}{1\cdot 2\cdot 3}\times$$
$$\overline{a^{p-3m-3-2n}b^3+b^{p-3m-3-2n}a^3}+\text{&c. le tout multiplié par}\ \frac{a^{2m+n}b^{n+m}}{\overline{a+b}^p}.$$

4e ſuite. $-1\times\overline{a^{p-3m-4n}+b^{p-3m-4n}}-p\times\overline{a^{p-3m-1-4n}b}$
$$+\overline{b^{p-3m-1-4n}a}-\frac{p\cdot p-1}{1\cdot 2}\times\overline{a^{p-3m-2-4n}b^2+b^{p-3m-2-4n}a^2}$$
$$-\frac{p\cdot p-1\cdot p-2}{1\cdot 2\cdot 3}\times\overline{a^{p-3m-3-4n}b^3+b^{p-3m-3-4n}a^3}-\text{&c.}$$
le tout multiplié par $\frac{a^{2m+2n}b^{2n+m}}{\overline{a+b}^p}$.

Il faut continuer chacune de ces ſuites qui ſont alternativement poſitives & négatives, juſqu'au terme où les puiſſances de a & de b ſont les mêmes dans un même terme.

Pour démontrer cette formule, je vais l'appliquer à un exemple qui me ſervira à mieux faire entendre les réflexions qui doivent ſuivre, & à m'expliquer d'une maniere moins generale & plus intelligible. Soit donc ſuppoſé que Pierre ait deux jettons devant lui, & Paul trois, & qu'ils jouent en rabattant, Pierre parie qu'il gagnera la partie en quinze coups au plus. Si l'on ſubſtitue dans la formule ci-deſſus pour p, 15; pour m, 3; pour n, 2, on trouvera le ſort de Pierre.

$$=a^{15}+15a^{14}b+105a^{13}b^2+455a^{12}b^3+1365a^{11}b^4+3003a^{10}b^5+5005a^9b^6$$
$$+a^3b^{12}+15a^4b^{11}+105a^5b^{10}+455a^6b^9+1365a^7b^8+3003a^8b^7$$
$$-1\times a^{13}b^2-15a^{12}b^3-105a^{11}b^4-455a^{10}b^5-1365a^9b^6$$
$$-1\times a^5b^{10}-15a^6b^9-105a^7b^8-455a^8b^7$$
$$+1\times a^{10}b^5+15a^9b^6$$
$$+1\times a^8b^7$$

Digitized by Google

En ſorte que dans le cas de $a = b$, on trouvera qu'il y a 12393 contre 20375 à parier que Pierre gagnera en quinze coups au plus. On trouvera de même qu'il y a 14213 contre 18555 à parier que Paul gagnera en quinze coups au plus; en ſorte qu'il y a 13303 contre 3081 à parier que la partie ſera finie & décidée en 15 coups au plus.

DE'MONSTRATION.

1°. LA premiere ſuite exprime combien il y a de hazards pour que Pierre en p coups ſe trouve au moins une fois avoir gagné un nombre donné m (3) plus que Paul: cela eſt évident à l'égard de tous les termes où l'expoſant de la lettre a ſurpaſſe l'expoſant de la lettre b d'une quantité ou $= m$, ou plus grande que m; car l'on ſçait par l'*art. 27*, que la formule

$$a^p + pa^{p-1}b + \frac{p \cdot p-1}{1 \cdot 2} a^{p-2}b^2 + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times a^{p-3}b^3 + \&c.$$

exprime toutes les façons d'amener ou p faces blanches, ou $p - 1$ faces blanches, ou $p - 2$ faces blanches, &c. avec un nombre p de dés qui ayent chacun deux faces, l'une blanche exprimée par a, l'autre noire exprimée par b.

Il eſt encore vrai que les autres termes de la ſuite, à commencer depuis $a^m b^{p-m}$ (a^3b^{12}) juſques & compris a^9b^6, expriment tous les hazards qu'il y a pour que Pierre en p coups ſe trouve au moins une fois avoir gagné un nombre donné m de parties plus que Paul: en voici la preuve.

Entre toutes les façons dont on peut amener a^3b^{12}, c'eſt à dire trois faces blanches & douze noires, il n'y a qu'une façon pour que cela arrive, puiſqu'il faut que les trois blanches arrivent les premieres; & de même entre toutes les façons dont on peut amener a^4b^{11}, c'eſt à dire quatre blanches & onze noires, il n'y a que p (15) façons pour que cela arrive; puiſqu'il faut qu'on amene toutes les faces noires, excepté une ſeule après les blanches, ce qui ſe peut faire en p façons differentes; puiſque cette face noire qui n'eſt pas déterminée à être amenée après les blanches, peut être amenée ou à la premiere, ou à la ſe-

Digitized by Google

conde, ou à la troiſiéme, ... ou à la quinziéme place.

On trouvera de même qu'afin que cela arrive avec a^1b^{10}, il y a $\frac{p.p-1}{1.2}$ (105) façons, parceque toutes les noires, excepté deux, ſont déterminées à être amenées après les blanches, & les deux faces qui ne ſont pas déterminées, peuvent ſe prendre deux à deux en $\frac{p.p-1}{1.2}$ façons, & ainſi des autres cas, d'où il ſuit que les coefficiens de ces termes a^p & a^mb^{p-m}, $a^{p-1}b$ & $a^{m+1}b^{p-m-1}$, $a^{p-2}b^2$ & $a^{m+2}b^{p-m-2}$, &c. dans notre exemple a^{15} & a^3b^{12}, $a^{14}b$ & a^4b^{11}, $a^{13}bb$ & a^5b^{10}, &c. doivent être les mêmes.

2°. Il ſe peut faire que Pierre n'ait pas gagné la partie, quoiqu'il ſoit arrivé dans le cours du jeu que Pierre ſe ſoit trouvé avoir gagné m parties plus que Paul; car il peut arriver qu'il ne ſe ſoit trouvé dans cet état qu'après que Paul ſe ſera vû lui-même avoir gagné n parties plus que Pierre.

Notre ſeconde ſuite exprime combien il y a de hazards non ſeulement pour que Pierre gagne m parties plus que Paul, mais auſſi pour que Paul ait gagné ſes n parties avant que Pierre ait gagné ſes m parties.

Pour que cela arrive, il faut qu'on amene au moins n faces noires, & au moins $m+n$ faces blanches; car il faut que Pierre gagne n parties pour rabattre ce que Paul a gagné avant lui, & qu'il gagne encore m parties. Les autres $p-m-n$ faces peuvent être ou blanches ou noires. Or il n'y a qu'un cas pour qu'on amene toutes les autres fois une face blanche, & un pour qu'on amene une face noire; & de même il y a p cas pour qu'on amène toutes les autres fois moins une, une face blanche, & autant pour qu'on amene tous les autres fois moins une, une face noire; & pareillement il y a $\frac{p.p-1}{1.2}$ cas pour qu'on amene toutes les autres fois moins deux une face blanche, & autant pour amener une face noire, & ainſi du reſte, &c.

3°. On trouvera de même que la troiſiéme ſuite exprime combien il y a de hazards pour que Pierre gagne m parties; qu'enſuite Paul rabatte ces m parties, & gagne encore n parties; & qu'enſuite Pierre rabatte les n parties ga-

Digitized by Google

gnées par Paul, & gagne encore m parties.

Cette ſuite & les autres ſuivantes ſe démontreroient de la même maniere. Or il faut remarquer que ſi l'on n'avoit point d'égard aux hazards qu'il y a pour que Paul gagne n parties avant Pierre, la premiere ſuite donneroit la ſolution du Problême, mais comme Paul peut gagner les n parties avant que Pierre gagne les m parties, il faut ajouter la ſeconde ſuite avec les ſignes de —.

Or cette ſuite retranche trop, puiſqu'il peut arriver que Pierre gagne m parties; qu'enſuite Paul rabatte ces m parties, & gagne n parties; que Pierre enſuite rabatte ces n parties, & gagne de nouveau m parties, il faut donc ajouter le nombre des cas par leſquels ceci peut arriver; & retrancher enſuite le nombre des hazards par leſquels il peut arriver que Paul gagne n parties que Pierre rabatte ces n parties, & gagne encore m parties; qu'enſuite Paul rabatte ces m parties, & gagne encore n parties; & qu'enſuite Pierre rabatte ces n parties, & gagne encore m parties; & encore ajouter le nombre des hazards par leſquels il peut arriver que Pierre gagne m parties, enſuite Paul $m + n$ parties, enſuite Pierre $n + m$, enſuite Paul $m + n$, & enfin Pierre $n + m$, & encore retrancher le nombre des hazards par leſquels il peut arriver que Paul gagne n parties; qu'enſuite Pierre en gagne $n + m$, que Paul enſuite en gagne $m + n$, enſuite Pierre $n + m$, enſuite Paul $m + n$, & enfin Pierre $n + m$, & encore ajouter &c. ajoutant & retranchant ainſi tour à tour autant que le Problême le permet les ſuites qui compoſent notre formule.

COROLLAIRE I.

214. ON tire de la formule précedente la regle qui ſuit.

Il faut choiſir une colonne perpendiculaire dont le quantiéme ſoit $p + 2$, *Tab. I*, *art. I*, & dans cette colonne chercher le quantiéme qui correſpond à la quantité $\frac{p+2-m}{2}$, ajouter à ce nombre les ſuperieurs juſqu'à la quantité n, prendre les 9 premiers termes, par exemple, s'il manque neuf parties à Paul, puis en obmettre la quantité m, ajouter

ajouter la quantité n, obmettre la quantité m, & ainſi de ſuite alternativement. Cette regle n'eſt qu'un abregé de la formule précedente : comme l'énoncé en pourroit paroître obſcur, on va l'éclaircir par des exemples.

Premier Exemple. Soit ſuppoſé que Pierre & Paul jouent chacun pour ſept points en rabattant, qu'ils ſoient de force égale, & que l'on demande combien il y a à parier que la partie ne durera pas plus de trente-ſept coups, ſi l'on ſubſtitue dans la formule pour a & b l'unité, pour p 37, pour m, & n, 7, on aura la ſomme de ces termes.

1		— 1	+ 1] × 2
37		— 37	+ 37
666		— 666	
7770		— 7770	× 2
66045		— 66045	
435897		— 435897	
2324784		— 2324784	
10295472	× 2	— 10295472	
38608020		— 38608020	
124403620			
348330136			
854992152			
1852482996			
3562467300			
6107086800			
9364199760			

le tout diviſé par 2^{36}.

Mais ſi l'on prend garde, 1°, que par la formation des nombres figurés la ſomme des f premiers nombres d'une bande perpendiculaire quelconque g eſt égale à deux fois la ſomme des f — 1 premiers nombres de la $\overline{g-1}^{eme}$ bande perpendiculaire, plus le f^{eme} terme de cette $\overline{g-1}^{eme}$ bande perpendiculaire. 2°. Qu'en ſuivant la formule on ajoute & retranche pluſieurs termes qui ſont les mêmes, ce qui eſt inutile ; on verra qu'il eſt beaucoup plus court de prendre conformément à la regle la ſomme de ces termes de la bande perpendiculaire $p + 2$,

1547128656 0
966955410 0
541495029 6
270747514 8
120332228 8
47273375 6
16301164 0

38
1

dont la ſomme eſt 3510233382 7, qu'il faut diviſer par 687194767363 6e puiſſance de 2, pour avoir le ſort de celui qui pariroit que la partie ne durera pas plus de 37 coups.

Second Exemple. Si l'on ſuppoſe $p = 35$ $m = 5$, & $n = 9$, c'eſt à dire que Pierre ait déja gagné deux jettons à Paul, ſi l'on veut ſçavoir la probabilité qu'il y a que Paul gagne la partie en 35 coups au plus, on trouvera ſuivant la regle qu'il faut chercher dans la 37e colonne perpendiculaire du triangle arithmetique, *art.* 1, le $\frac{p+2-n}{2}$ (14e) terme, qu'à ce terme il faut ajouter les quatre ſuivans, ces cinq termes ſont :

2310789600
1251677700
600805296
254186856
94143280

puis en obmettre la quantité n ; c'eſt à dire les 9 ſuivans ; puis en ajouter m, c'eſt à dire les 5 ſuivans qui ſe trouvent être tous zero. En ſorte que le ſort de celui qui pariroit que Paul gagneroit la partie en 35 coups au plus, ſeroit 4511602732 diviſé par la 35e puiſſance de 2.

Il eſt à propos d'obſerver qu'on peut encore abreger le calcul, & n'avoir dans ce cas, par exemple, que trois termes au lieu des cinq ci-deſſus,

3562467300
854992152
94143280

Digitized by Google

en ſe ſervant des termes de la bande perpendiculaire $p + 3$ interpoſés de deux en deux.

Mr (Nicolas) Bernoulli que j'avois invité à travailler ſur ce Problême qui m'avoit paru fort difficile, m'en envoya une ſolution très belle & très generale dans ſa Lettre du 26 Février 1711; & comme la maniere dont elle eſt énoncée m'avoit paru un peu obſcure, il eut la complaiſance de me l'expliquer fort au long dans ſa Lettre du 10 Novembre de la même année; je m'apperçus alors, & le Lecteur le remarquera aiſément, que nous avons ſuivi l'un & l'autre la même route.

Je fus ſurpris en liſant l'année paſſée le Traité de M. Moivre *De Menſurâ Sortis*, de rencontrer une ſolution differente de ce Problême. L'Auteur cherche combien il y a de hazards pour que la partie ne finiſſe pas. Il faut avouer que l'idée qu'il a ſuivie eſt plus ſimple, & qu'elle eſt très ingenieuſe; cependant il eſt certain que la nôtre eſt d'un uſage plus facile, & que le calcul en eſt incomparablement plus court, ſur-tout ſi l'on veut employer les logarithmes, ce qui paroît impoſſible dans la methode de M. Moivre.

J'ai cherché, en me ſervant des logarithmes, quel étoit le ſort de celui qui pariroit que m & n étant $= 9$, la partie ſera finie en 61 parties, & j'ai trouvé en moins d'une heure ce grand nombre 581928 000 000 000 000 diviſé par 2^{60}. Par la methode de M. Moivre il faut élever $1 + 1$ à la 9e puiſſance, & faire 26 multiplications de ce nombre par $1 + 2 + 1$, retranchant les deux derniers termes à chaque operation, ce qui me paroît demander un calcul immenſe.

COROLLAIRE II.

215. LORSQUE les Joueurs n'ont chacun que deux jettons devant eux, la ſolution de ce Problême eſt renfermée dans cette progreſſion geometrique $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ &c. En ſorte que la ſomme des deux premiers exprime combien il y a à parier que le jeu ſera décidé en

quatre parties au plus, & la ſomme des trois premiers exprime combien il y a à parier qu'il ſera décidé en ſix coups au plus, &c.

Et lorſque chacun des Joueurs a trois jettons devant lui, on trouve dans cette formule

$\frac{1}{4} + \frac{3^1}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{3^3}{4^4} + \frac{3^4}{4^5}$ + &c. la raiſon de l'avantage ou du deſavantage qu'il y a à parier que le jeu ſera décidé en un certain nombre de parties quelconque. Le premier terme de cette ſuite exprime le ſort de celui qui pariroit que le jeu ſera décidé en trois coups. La ſomme des deux premiers exprime le ſort d'un Joueur qui pariroit que le jeu ſera décidé en cinq coups. La ſomme des trois premiers exprime le ſort d'un Joueur qui pariroit que le jeu ſera décidé en ſept coups, &c. Mais lorſque le nombre des jettons que chacun des Joueurs a devant lui, eſt plus grand que trois : l'on ne trouve plus la commodité des progreſſions geometriques, & il faut avoir recours à la ſolution précedente.

COROLLAIRE III.

216. SOIT p le nombre qui exprime le quantiéme nombre naturel impair des jettons que chacun des Joueurs a devant lui. J'ai trouvé que la formule $3pp - 3p + 1$ exprime en combien de coups au plus on peut parier avec avantage que la partie ſera finie. Enſorte que, par exemple, chaque Joueur ayant dix-neuf jettons devant lui; en ſubſtituant dans la formule pour p, 10, puiſque le dixiéme nombre naturel impair eſt dix-neuf, on trouve que l'on peut parier avec avantage que la partie ne durera pas plus de 271 coups. J'ai cherché une pareille formule pour le cas où le nombre des parties qui manquent à chacun des Joueurs eſt pair, mais je n'ai pû en trouver.

Digitized by Google

COROLLAIRE IV.

217. VOICI une Table que je m'amuſai à faire il y a quelque temps en voyant jouer une partie de Piquet, c'étoit au grand cent; pour gagner il falloit avoir ſix parties, & l'on jouoit toujours en rabattant de la maniere que nous l'avons expliqué. Il arriva que les Joueurs après avoir joué trente ou quarante parties, l'un ou l'autre approchant de temps en temps du but ſans pouvoir y atteindre, prirent le parti d'y renoncer, & de ſe ſéparer ſans la finir; mais comme l'un des Joueurs avoit trois points ou trois parties marquées devant lui, on convint qu'il étoit juſte de répartir l'argent du jeu (c'étoit huit Louis qui faiſoient alors 128 liv.) le plus également qu'il ſe pourroit; je trouvai que le Joueur qui avoit trois jettons de l'autre Joueur, devoit retirer 96 liv. & l'autre 32 liv.

TABLE.

Pierre a 1 des jettons de Paul, ſon ſort eſt 7 contre 5.
Pierre a 2 jettons de Paul, ſon ſort eſt 2 contre 1.
Pierre a 3 jettons de Paul, ſon ſort eſt 3 contre 1.
Pierre a 4 jettons de Paul, ſon ſort eſt 5 contre 1.
Pierre a 5 jettons de Paul, ſon ſort eſt 11 contre 1.

L'illuſtre M^r (Jean) Bernoulli s'eſt apperçu que les ſorts ſuivoient cet ordre. Voyés ſa Lettre du 17 Mars 1710.

$n + 0$ contre $n - 0$
$n + 1$ contre $n - 1$
$n + 2$ contre $n - 2$
$n + 3$ contre $n - 3$
&c.

M^r (Nicolas) Bernoulli a auſſi tiré de ſa formule generale ce Problême & pluſieurs autres. Voyés ſa Lettre du 26 Février 1711.

Digitized by Google

PROBLÊMES A RÉSOUDRE.

PREMIER PROBLÊME.

SUR LE JEU DU TREIZE.

Déterminer generalement quel eſt à ce jeu l'avantage de celui qui tient les cartes. On trouvera l'explication des regles de ce Jeu aux pages 130 & 131. Voyés les Lettres du 10 Avril & du 19 Novembre 1711.

SECOND PROBLÊME.

SUR LE JEU APPELLÉ LE HER.

218. ON tire d'abord les places, l'on voit enſuite à qui aura la main. Suppoſons que ce ſoit Pierre, & nommons les autres Joueurs Paul & Jacques.

On convient de mettre une certaine ſomme au jeu; chacun des Joueurs prend pour cette ſomme un nombre égal de jettons; & celui-là gagne tout l'argent du jeu qui reſte avec un ou pluſieurs jettons, les autres Joueurs n'en ayant plus. Voici comment le jeu ſe conduit.

Pierre tient un jeu entier compoſé de cinquante-deux cartes, & en donne une à chacun des Joueurs, en commençant par ſa droite; & à la fin de chaque coup celui qui ſe trouve avoir la plus baſſe carte, perd un jetton qu'il met au milieu de la table.

Paul qui eſt le premier à la droite de Pierre, a droit s'il n'eſt pas content de ſa carte, d'en changer avec Jacques, qui ne peut la lui refuſer qu'au ſeul cas qu'il ait un Roy, alors Jacques dit *coucou*. Par ce terme celui qui a un Roy avertit les Joueurs que ſon voiſin de la gauche ayant voulu ſe défaire de ſa carte a été arrêté par la ſienne.

Digitized by Google

Il en eſt de même de Jacques à l'égard de Paul, & de Paul à l'égard de Pierre.

Il faut ſeulement remarquer, 1°, que ſi Pierre n'eſt pas content de ſa carte, ſoit que ce ſoit celle qu'il s'eſt donné d'abord, ou celle qu'il a été contraint de recevoir de Jacques, il peut, n'ayant perſonne avec qui changer, tenter de prendre une meilleure carte en coupant au hazard parmi celles qui lui reſtent en main. 2°. Que s'il arrive que Pierre ayant par exemple un cinq, ne veuille pas s'y tenir, & qu'en coupant il tire par exemple un valet, ſa carte deviendra un valet, & ainſi de toute autre carte, à l'exception du Roy, car Pierre tirant un Roy eſt renvoyé à ſa carte telle quelle ſoit, & il ſe trouve comme s'il ſe fût d'abord tenu à ſa carte.

Tout ce changement de cartes étant fait, chaque Joueur découvre la ſienne, & celui qui ſe trouve avoir la plus baſſe à commencer par l'as, met un jetton au jeu.

S'il ſe rencontre que deux ou pluſieurs Joueurs ayent la même carte, & que ce ſoit la plus baſſe, celui qui a la primauté, c'eſt à dire celui qui eſt le plus proche à la droite de Pierre perd & paye. Ce qui fait voir que l'on doit toujours s'y tenir lorſqu'on a donné au Joueur qui eſt à la gauche une carte pareille à celle qu'on reçoit de lui, de même que ſi on lui en eût donné une plus baſſe.

Le Joueur qui a perdu tous ſes jettons ſort du rang, & les autres continuent le jeu juſqu'à ce que tous, à l'exception d'un ſeul, ayent perdu tous leurs jettons, auquel cas celui qui reſte gagne l'argent de tous les Joueurs, & cela s'appelle en termes de Joueurs *gagner la poulle*.

Voici le Problême dont on demande la ſolution.

Trois Joueurs, Pierre, Paul & Jacques ſont les ſeuls Joueurs qui reſtent, & ils n'ont plus qu'un jetton chacun. Pierre tient les cartes, Paul eſt à ſa droite, & Jacques enſuite. On demande quel eſt leur ſort par rapport à la differente place qu'ils occupent, & avec quelle proportion ſe devroit repartir l'argent de la poulle, ce ſera, par exemple, dix piſtoles, s'ils vouloient la partager entr'eux ſans finir la partie.

Digitized by Google

TROISIÉME PROBLÊME.

SUR LE JEU DE LA FERME.

219. L'ON met la Ferme à prix, & on l'adjuge à celui qui la porte le plus haut ; par exemple, ſi les jettons vallent vingt ſols, on la portera à deux ou trois piſtoles, & le Fermier les mettra ſur la Table. Voici les regles de ce Jeu.

Chacun des Joueurs met un jetton au jeu, enſuite le Fermier leur diſtribue deux cartes, ſçavoir l'une de deſſus, & la ſeconde de deſſous. Ceux d'entre les Joueurs dont les deux cartes font plus que ſeize, donnent autant de jettons au Fermier que les cartes font de points au deſſus de ſeize. Par exemple, ſi Paul qui eſt un des Joueurs reçoit d'abord un neuf, & pour ſa ſeconde carte un dix, cela fait 19, il payera trois jettons au Fermier. Il faut obſerver qu'à ce jeu l'as ne vaut qu'un.

Les Joueurs dont les deux cartes font moins que ſeize ont la liberté de s'y tenir dans la crainte de paſſer ſeize, & de payer au Fermier pour le ſurplus. Ils ont auſſi la liberté de demander de nouvelles cartes dans l'eſperance ou de gagner la Ferme & les tours s'ils peuvent atteindre préciſément le nombre de ſeize, ou du moins d'en approcher en deſſous plus près qu'aucun autre Joueur, auquel cas ils gagneront les tours.

Lorſque tous les Joueurs paſſent le nombre de ſeize, les tours reſtent au jeu, & chaque Joueur y met de nouveau un jetton.

A ce jeu le nombre des Joueurs eſt indéterminé.

L'on y joue avec un jeu de cartes entier, & quelquefois on en ôte les ſix pour éviter que le nombre de ſeize ne ſe rencontre trop ſouvent.

Lorſque deux ou pluſieurs Joueurs ont un égal nombre de points, celui qui eſt le plus à la droite du Fermier eſt le ſeul qui gagne. Ainſi le Fermier ne peut jamais gagner les tours que lorſqu'il a un point plus proche de ſeize qu'aucun

Digitized by Google

qu'aucun autre Joueur ; & s'il avoit ſeize en même temps qu'un autre Joueur, il ne laiſſeroit pas de perdre la Ferme, & l'on feroit une nouvelle enchere. Tout ceci étant expliqué, voici le Problême dont on demande la ſolution.

Etant ſuppoſé un certain nombre déterminé de Joueurs, par exemple, deux Joueurs Pierre & Paul, & que le prix des jettons ſoit de vingt ſols : On demande de combien devroit être le prix de la Ferme, afin qu'on la pût tenir ſans profit ni deſavantage.

QUATRIÉME PROBLÊME.

SUR LE JEU DES TAS.

219. POUR comprendre de quoi il s'agit, il faut ſçavoir qu'après les repriſes d'hombre un des Joueurs s'amuſe ſouvent à partager le jeu en dix tas compoſés chacun de quatre cartes couvertes, & qu'enſuite retournant la premiere de chaque tas, il ôte & met à part deux à deux toutes celles qui ſe trouvent ſemblables, par exemple, deux Rois, deux valets, deux ſix, &c. alors il retourne les cartes qui ſuivent immédiatement celles qui viennent de lui donner des doublets, & il continue d'ôter & de mettre à part celles qui viennent par doublet juſqu'à ce qu'il en ſoit venu à la derniere de chaque tas, après les avoir enlevé toutes deux à deux, auquel cas ſeulement il a gagné.

Il eſt rare que l'on joue de l'argent à ce jeu ; mais on y joue ſouvent des diſcretions, & les Dames ſe plaiſent à juger de l'évenement de certaines badineries qui les intereſſent par le ſuccès qu'elles ont à ce jeu. Il faut obſerver que ce jeu n'eſt point de pur hazard, & que pour y réuſſir il faut de la conduite auſſi-bien que de la fortune.

L'on ſçait qu'il faut décharger les plus gros tas préferablement aux petits ; mais l'on ne ſçait point exactement s'il eſt plus avantageux de décharger deux tas compoſés de trois cartes chacun, ou deux tas dont l'un ſera com-

poſé de quatre cartes, & l'autre de deux. L'on ſçait auſſi qu'il eſt plus facile de faire les tas avec un jeu de Piquet qu'avec un jeu d'Ombre, & avec un jeu d'Ombre qu'avec un jeu entier, ou bien avec deux jeux d'Ombre mêlés enſemble, ce qui feroit les tas de huit cartes. Mais ce que les Joueurs ignorent entierement, c'eſt le degré de facilité qu'il y a de réuſſir dans toutes ces differentes eſpeces. L'on demande une methode generale pour *déterminer quel eſt l'avantage ou le deſavantage de celui qui entreprend de faire les tas, ſoit que ce ſoit avec un jeu de Piquet, ou avec un jeu d'Ombre, ou avec un jeu entier, & qu'elle eſt la maniere de conduire ſon jeu le plus avantageuſement qu'il ſoit poſſible.*

Digitized by Google

CINQUIÉME PARTIE,

CONTENANT PLUSIEURS LETTRES écrites à l'occaſion de cet Ouvrage.

Lettre de M. (Jean) Bernoulli à M. de M...

De Bâle ce 17 Mars 1710.

MONSIEUR,

COMME je n'ai reçu votre beau Livre que long-temps après votre derniere Lettre, j'ai bien voulu differer la réponſe juſqu'à ce que je l'euſſe reçu & lû, pour être en état de vous en dire mon ſentiment. Quoiqu'une fluxion ſur les yeux, dont je ſuis ſouvent incommodé, m'empêche de travailler beaucoup ſur des choſes qui demandent de longs calculs, ſur-tout dans le temps de l'hyver, je n'ai pas laiſſé d'examiner aux heures oiſives les principaux endroits de votre Traité, & de faire moi-même, autant

Digitized by Google

que la foibleſſe de mes yeux me l'a permis, le calcul de la plûpart des Problêmes : J'y ai trouvé effectivement pluſieurs choſes très belles & très curieuſes pour la ſpeculation, & utiles pour l'uſage qu'on en peut tirer dans les occaſions ; mais pour vous faire part des Remarques en particulier que j'ai faites çà & là en liſant votre Ouvrage, puiſque vous le ſouhaités, les voici :

La route generale que vous tenés, qui eſt de chercher d'abord le nombre des cas qu'une telle & telle choſe peut arriver, eſt très ſûre & bonne ; mais il eſt de la prudence du Calculateur de ne pas ſe plonger dans un calcul long & ennuyeux, en multipliant les cas plus qu'il ne faut & au delà de la neceſſité. Par exemple, Pierre parie contre Paul que d'entre 300 jettons (dont il y a également de blancs, de noirs & de rouges) il tirera un jetton blanc ; pour ſçavoir la raiſon de leurs ſorts, je dis qu'il n'eſt pas neceſſaire de dire qu'il y a 100 cas qui font gagner Pierre, & 200 qui le font perdre, voyant évidemment qu'à cauſe de l'indifference ou de l'égale facilité avec laquelle chaque couleur peut être tirée ; ce ne ſont proprement que trois cas à conſiderer ; un pour le blanc, un pour le noir & un pour le rouge : en ſorte qu'il vaut mieux de s'attacher au nombre de diverſes couleurs, qui peuvent arriver avec une égale facilité, qu'au nombre des jettons dont la multitude égale de chaque couleur ne varie aucunement les ſorts des Joueurs, qui eſt toujours comme 1 à 2. Il ſemble cependant que vous n'avez pas obſervé cela avec beaucoup de ſoin : En voici quelques Exemples dans votre Livre. Page 8 (*a*) ſur le Jeu du Pharaon. Pour chercher le ſort du Banquier qui tient quatre cartes entre les mains, parmi leſquelles la carte du Ponte eſt une fois, vous faites le dénombrement de tous les 24 arrangemens des quatre cartes, pour en prendre les favorables au Banquier, ſans faire réflexion que ce ne ſont pas proprement les divers arrangemens, mais ſeulement les diverſes ſituations de la carte du Ponte, entre les autres qui font la diverſité des cas ; ainſi au lieu de vos 24 arrangemens, je

(*a*) Voyés page 80.

Digitized by Google

n'ai que ces quatre variations à conſiderer (je nomme *a* la carte du Ponte, & *b* chacune des autres)

1. *bbba*	3. *babb*
2. *bbab*	4. *abbb*

De ces quatre variations la premiere eſt indifferente au Banquier, la 2e & la 4e le font gagner, & la 3e le fait perdre; ſon ſort ſera donc $= \frac{1 \times A + 2 \times 2A + 1 \times 0}{4} = \frac{5}{4}A$ $= A + \frac{1}{4}A$, tout comme vous avez trouvé. Si la carte du Ponte ſe trouve deux fois entre les cartes du Banquier, il y aura ces ſix variations, au lieu de 24 arrangemens,

1. *bbaa*	3. *abba*	5. *abab*
2. *baba*	4. *baab*	6. *aabb*

La premiere, la troiſiéme & la cinquiéme font gagner le Banquier, la ſeconde & la quatriéme le font perdre, & la ſixiéme lui donne la moitié de la miſe du Ponte, & partant le ſort du Banquier ſera $= \frac{3 \times 2A + 2 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2}A}{6}$ $= \frac{5}{4}A = A + \frac{1}{4}A$, encore comme vous. Si la carte du Ponte ſe trouve trois fois entre les cartes du Banquier, on voit clairement qu'il doit y avoir autant de variations, que lorſque la carte du Ponte n'y eſt qu'une fois; car il n'y a qu'à faire une permutation de lettres *a* en *b*, & *b* en *a*,

1. *baaa*	3. *aaba*
2. *abaa*	4. *aaab*

D'où l'on tire derechef le ſort du Banquier $= A + \frac{1}{4}A$. Par cette maniere de diſtribuer les cas, on voit ſans peine que quelque nombre de cartes que tienne le Banquier exprimé par *p*, ſi celle du Ponte ne s'y trouve qu'une fois, l'avantage du Banquier ſera $\frac{1}{p}A$. Il n'en eſt guere autrement ſi la

Digitized by Google

carte du Ponte ſe trouve plus d'une fois entre les cartes du Banquier; car au lieu de tous les arrangemens qu'il faudroit examiner, & dont le nombre eſt immenſe pour un nombre mediocre de cartes, ici il ne faut que conſiderer le nombre des variations des deux lettres *a* & *b*, qui eſt toujours égal au nombre des combinaiſons que des choſes dont le nombre eſt celui de la carte du Ponte, peuvent être priſes differemment dans le nombre de toutes les cartes; & puis de ces combinaiſons dont le nombre eſt toujours beaucoup plus petit que celui de tous les arrangemens, il ſera facile de choiſir celles qui font gagner ou entierement ou en partie le Banquier, & ainſi de déterminer ſon ſort: par exemple: Donnons au Banquier ſix cartes, entre leſquelles ſuppoſons que la carte du Ponte eſt deux fois. Dans cette ſuppoſition je n'ai que faire d'examiner comme vous faites tous les 720 arrangemens que les ſix cartes peuvent ſubir, me contentant de parcourir ſimplement ces quinze variations poſſibles que la lettre *a* priſe deux fois peut faire avec la lettre *b* priſe quatre fois.

1. *bbbbaa*	4. *babbba*	7. *bbabab*	10. *bbaabb*	13. *baabbb*
2. *bbbaba*	5. *abbbba*	8. *babbab*	11. *bababb*	14. *ababbb*
3. *bbabba*	6. *bbbaab*	9. *abbbab*	12. *abbabb*	15. *aabbbb*

Entre ces quinze variations on en compte ſept qui donnent le tout au Banquier, deux qui lui donnent ſa miſe avec la moitié de la miſe du Ponte, & les ſix autres qui le font perdre; en ſorte que le ſort du Banquier ſera $= \frac{7 \times 2A + 2 \times \frac{1}{2}A + 6 \times 0}{15} = \frac{17}{15}A = A + \frac{2}{15}A$, conformément à ce que vous avez trouvé. Ainſi de même ſi la carte du Ponte eſt trois fois entre les ſix cartes du Banquier, il n'y aura que 20 façons de varier la ſituation de deux lettres *a* & *b* priſe chacune trois fois, qui étant demêlées feront voir que le ſort du Banquier ſera $= A + \frac{1}{20}A$. Suivant ce principe, voici les formules generales que j'ai

trouvées pour quelque nombre de cartes qu'il y ait entre les mains du Banquier, & quelque nombre de fois que la carte du Ponte s'y trouve, ſans ſuppoſer connu le ſort du Banquier dans un nombre de cartes exprimé par $p-2$, comme vous faites dans votre formule generale, que j'ai auſſi trouvée fort aiſément; voici, dis-je, les miennes. Soit $1.2.3.4....p-q=m$, $q+1.q+2.q+3....p=n$, $p-q+1.p-q+2.p-q+3....p=l$, je dis que l'avantage du Banquier, ſi q eſt un nombre pair, ſera exprimé par cette ſuite $\frac{m}{2n}\times 1+\frac{q-1.q}{1.2}+\frac{q-1.q.q+1.q+2}{1.2.3.4}$ $+\frac{q-1.q.q+1..q+4}{1.2.3.4.5.6}+.....\frac{q-1.q.q+1...p-2}{1.2.3.4...p-q}$.

Ou bien par celle-ci :

$\frac{q-1.q}{2l}\times\overline{1.2.3....q-2}+\overline{3.4.5...q+5}.\overline{6.7...q+2}$ $+....\overline{p-q+1.p-q+2....p-2}$. Mais ſi q eſt un nombre impair, on aura pour ledit avantage.

$\frac{q-1.m}{2n}\times 1+\frac{q.q-1}{1.2.3}+\frac{q.q+1.q+2.q+3}{2.3.4.5}+...\frac{q.q+1.q+2...p-2}{2.3.4...p-q}$,

ou bien $\frac{q+1.q}{2l}\times\overline{2.3.4....q-1}+\overline{4.5.6.....q+1}$ $+\overline{6.7.8....q+3}+...\overline{p-q+1.p-q+2...p-2}$;

où il faut remarquer que les nombres p & q peuvent être quelconques, pourvû que q ne ſoit pas moins grand que 3. Si vous voulés prendre la peine, vous pouvés examiner ces formules generales ſi elles s'accordent avec les vôtres que vous donnés pour des cas particuliers, pag. 24 & 25. (*a*)

Au reſte ce que j'ai dit juſqu'ici ſur le Jeu du Pharaon ſe doit auſſi entendre ſur celui de la Baſſette, pag. 66 & ſuivantes, (*b*) ou pareillement pour calculer les cas favorables & les deſavantageux au Banquier, on peut s'épargner la peine d'éplucher tous les arrangemens poſſibles des cartes qui ſont entre les mains du Banquier, en n'employant que les variations des deux lettres *a* & *b*, comme il a été fait ci-deſſus, mais paſſons à d'autres.

Pag. 32. *ligne* 15. (*c*) En parlant de l'avantage d'avoir la main au Jeu du Lanſquenet, vous dites, Monſieur, qu'on

(*a*) Voyés page 97.
(*b*) Voyés page 145.
(*c*) Voyés page 107.

ne peut exprimer cet avantage que par une ſuite compoſée d'un nombre infini de termes, qui iront toujours en diminuant, & qu'on ne pourra jamais avoir la valeur préciſe de l'avantage de Pierre. Il ſemble qu'en écrivant cela vous n'aviés pas encore pris garde, que cette ſuite va toujours en progreſſion geometrique, laquelle par conſequent, quoique continuée à l'infini, fait une ſomme qu'on peut trouver fort aiſément par les regles communes. La ſuite, par exemple, que vous donnés, *pag.* 55, (*a*) eſt ſommable: qu'eſt-il donc beſoin d'approcher de la juſte valeur en ajoutant un grand nombre de termes? puiſqu'on peut trouver au juſte cette valeur dans un moment & ſans peine, étant préciſément $\frac{1125}{4024}$, qui eſt plus grand que $\frac{1}{4}$ ou $\frac{41}{16}$, & par conſéquent en approche plus que de $\frac{4}{17}$ que vous avés mis pour la quantité approchante; mais il ſemble auſſi que vous vous ſoyés enfin apperçu que ce ſont des progreſſions dont on peut donner la ſomme de tous les termes; car à la *page* 51 (*b*) vous donnés les valeurs exactes de l'avantage & du deſavantage des coupeurs. Voici une formule generale qui exprime l'avantage de celui qui a la main dans quelque ſorte de jeu que ce ſoit, & qui recommence à avoir la main autant de fois qu'il gagne juſqu'à ce qu'il perde: Soit nommé a l'avantage qu'il a dans chaque main, m le nombre des cas qui le font gagner, & n le nombre des cas qui le font perdre; je dis que ſon avantage total ſera (en ſuppoſant $\frac{m}{m+n} = p$) = à cette ſuite $a + pa + p^2a + p^3a + p^4a$ &c. dont la ſomme eſt $= \frac{a}{1-p} = \frac{m+n}{n}a = a + \frac{m}{n}a$; on peut trouver la même choſe ſans le ſecours d'une progreſſion par l'Algebre, voici comment. Soit z la miſe de chaque Joueur, & ainſi le fort pour le 1er jeu de celui qui tient la main ſera $\frac{m \times 2z + 2a \times 0}{m+n} = \frac{2mz}{m+n}$, & partant ſon avantage $= \frac{2mz}{m+n} - z = \frac{m+n}{m+n}z = a$; d'où il ſuit que nommant a l'avantage de chaque main, on aura $z = \frac{m+n}{m+n}a$. La miſe des Joueurs étant ainſi trouvée, ſoit x l'avantage total qui conſiſte dans le

(*a*) Voyés page 110. (*b*) Voyés page 126.

droit

droit de Pierre de tenir les cartes autant de fois qu'il gagne, il y aura donc lorſqu'il commence à jouer, m cas qui le font gagner la miſe de ſon antagoniſte, plus l'avantage total de continuer le jeu, ſçavoir $\frac{m+n}{m-n}a + x$, & n cas qui le font perdre ſa miſe, c'eſt à dire qui le font avoir $\frac{-m-n}{m-n}a$; on aura donc cette égalité $x = \frac{m \times \frac{m+n}{m-n}a + x + n \times \frac{-m-n}{m-n}a}{m+n}$; laquelle étant réduite donnera pour l'avantage total $x = \frac{m+n}{n}a = a + \frac{m}{n}a$, tout comme ci-deſſus. Cette voye eſt plus commode que celle par la progreſſion, parcequ'on peut ainſi trouver avec une égale facilité l'avantage de Pierre, en ſuppoſant que Pierre ayant perdu une fois, le jeu ne finiſſe pas encore; mais qu'on le continue à l'infini, la main paſſant alternativement d'un Joueur à l'autre : Soit donc t l'avantage de Pierre qui commence à avoir la main; il y aura m cas qui lui donnent pour gain la miſe de ſon antagoniſte, plus l'avantage de recommencer, ſçavoir $\frac{m+n}{m-n}a + t$, & n cas qui lui ôtent ſa miſe, & qui en même temps le mettent dans l'état où étoit ſon antagoniſte lorſqu'on alloit commencer le jeu; c'eſt à dire qui le font avoir $\frac{-m-n}{m+n}a - t$; d'où il réſulte cette égalité $t = \frac{m \times \frac{m+n}{m-n}a + t + n \times \frac{-m-n}{m-n}a - t}{m+n}$; par la réduction de laquelle on trouve $t = \frac{m+n}{2n}a$, en ſorte que l'avantage de Pierre, en ſuppoſant que le jeu doive être continué à l'infini, n'eſt que la moitié de l'avantage qu'il auroit dans la ſuppoſition que le jeu finiſſe auſſi-tôt qu'il perd la main. Je m'étonne que vous n'ayés pas pris ſoin de déterminer l'avantage dans cette autre ſuppoſition là, comme la plus naturelle & la plus convenable à l'intention des Joueurs, qui ne commencent pas le jeu dans le deſſein de le finir dès que celui qui a le premier la main la perdra; mais plûtôt de faire paſſer le droit de la main d'un Joueur à l'autre un aſſés grand nombre de fois, en ſorte que le jeu peut être cenſé durer à l'infini.

Digitized by Google

Page 59, l. 26. (*a*) La ſuite que vous donnés ici pour déterminer le ſort de Pierre tenant la main au jeu du Treize eſt très belle & très curieuſe, on la tire aiſément de la formule generale de la *page* 58. (*b*) J'ai auſſi trouvé cette formule, avec une autre qui m'a fourni la même ſuite, mais ſans changement de ſignes, & qui ſuppoſe les ſorts des nombres précedens des cartes connus comme vous l'allés voir. Soit S le ſort de Pierre que l'on cherche le nombre des cartes que Pierre tient étant exprimé par n; t le ſort de Pierre le nombre des cartes étant $n - 1$; s ſon ſort le nombre des cartes étant $n - 2$; r le ſort, quand le nombre des cartes eſt $n - 3$, & ainſi de ſuite; on aura $S = \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\ldots \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} - \frac{t}{1} - \frac{s}{1\cdot 2} - \frac{r}{1\cdot 2\cdot 3} - \ldots \frac{o}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$; cela peut paſſer pour un Theorême, votre ſuite étant plus propre pour trouver d'abord la valeur de S.

Page 63, l. 13. (*c*) Vous faites $x = \frac{1}{2} \times \overline{4A + S} + \frac{1}{2} \times A$; mais vous vous trompés, il faut faire $x = \frac{1}{2} \times \overline{4A + S - A} + \frac{1}{2} \times A$; & ainſi l'avantage de Pierre eſt $\frac{1}{3}A$, & non pas $\frac{2}{3}A$: par la même raiſon, *page* 64, *l.* 11 *à fine*, (*d*) ce que vous dites que l'avantage de Pierre ſeroit $2A + \frac{16}{17}A$, n'eſt pas juſte, car je ne trouve que $A + \frac{16}{17}A$.

Page 80. (*e*) Il ne ſemble pas que M. Paſcal lui-même ait compris tout l'uſage de ſa Table; une des plus belles proprietés, dont on ne fait pas mention ici, étant que les bandes perpendiculaires expriment les coefficiens des puiſſances d'un binome, car ſi l'expoſant d'une puiſſance quelconque ſe nomme p, on aura $\overline{a+b}^p = 1a^p + \frac{p}{1}a^{p-1}b + \frac{p\cdot p-1}{1\cdot 2}a^{p-2}b^2 + \frac{p\cdot p-1\cdot p-2}{1\cdot 2\cdot 3}a^{p-3}b^3 + \frac{p\cdot p-1\cdot p-2\cdot p-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{p-4}b^4 +$ &c. ce que j'ai trouvé autrefois par une voye toute particuliere, & j'en ai communiqué la démonſtration à feu M. le Marquis de l'Hôpital: on en voit quelque choſe dans ſon Livre poſthume, à l'endroit que vous allegués, *page* 92.

(*a*) Voyés page 135.
(*b*) Voyés page 134.
(*c*) Voyés page 142.
(*d*) Pag. 145.
(*e*) Pag. 32 & 244.

Digitized by Google

Pages 158 & 159. (*a*) Vous prétendés, Monſieur, d'avoir réſolu le ſecond Problême de Mr Huyguens, ce que vous avés effectué à la verité dans le ſens que vous donnés à ce Problême, qui eſt qu'on doit ſuppoſer que chaque Joueur ayant retiré un jetton noir le remette incontinent dans le pot, pour laiſſer à ſon ſucceſſeur la douzaine de jettons toujours complete, ce qui rend le Problême fort facile, & fait trouver le ſort des trois Joueurs dans la raiſon de 9, 6 & 4, comme vous avés trouvé. Mais il ſemble que Mr Huyguens ait propoſé ce Problême dans un autre ſens qui paroît plus naturel, qui eſt que toutes les fois qu'on tire un jetton noir, il ne ſoit plus remis dans le pot; ſi-bien que le premier tireur ayant manqué en tirant un jetton noir, le ſecond quand il vient à tirer, ne trouve plus que onze jettons; & le ſecond ayant auſſi manqué, le troiſiéme ne trouve plus que dix jettons; & celui-ci ayant pareillement tiré un noir, ne laiſſe que neuf jettons au premier qui doit recommencer à tirer, & ainſi conſécutivement : le Problême étant conçu dans ce ſens, devient un peu plus difficile, & en rend le calcul plus long. Eſſayés-le pour voir ſi vous vous accordés avec moi; j'en ai mis la ſolution après la propoſition dans le Traité *De Ratioc. Lud. aleæ*, il y a bien douze ans; en le conſultant je trouve que j'y ai écrit ces trois nombres 77, 53, 35, pour la raiſon des ſorts des trois Joueurs.

Page 137. (*b*) J'ai trouvé une formule qui s'exprime & ſe fait entendre plus facilement en cette maniere; pour les cas déterminés, le nombre en eſt

$$= \frac{1.2.3.4\ldots p}{1.2.3\ldots b \times 1.2.3\ldots c \times 1.2.3\ldots d \times 1.2.3\ldots e \times \&c.},$$ c'eſt à dire =

à une fraction dont le numerateur eſt le nombre des arrangemens d'une multitude exprimée par p, & le dénominateur le produit des nombres des arrangemens des multitudes exprimées par b, c, d, e, &c. Il eſt remarquable que cette formule exprime juſtement la methode que j'ai trouvée autrefois pour la détermination du coefficient de quelque terme que l'on voudra d'un polynome

(*a*) Voyés pag. 219. (*b*) Voyés pag. 42 & 44.

quelconque élevé à une puiſſance quelconque, ce qui me fut propoſé autrefois par Mr Leibnitz, qui approuva fort la ſolution que je lui en avois donnée, & la trouva utile pour élever promptement un polynome à une haute puiſſance ; car ſoit le polynome $t + x + y + z +$ &c.^{p} dont il faille trouver le coefficient du terme $t^b x^c y^d z^e$ &c. en ſuppoſant $b + c + d + e$ &c. $= p$; je dis que le coefficient cherché ſera comme ci-deſſus

$$\frac{1.2.3.4.....p}{1.2.3...b \times 1.2.3...c \times 1.2.3...d \times 1.2.1...e \times \&c.}$$

Mais pour revenir à la queſtion ſur les dés, & pour ſçavoir combien il y a de cas indéterminés, qu'avec un certain nombre de dés on peut amener tant d'une eſpece, tant d'une autre, &c. Soit nommé la valeur de cette fraction v, il faut multiplier v (ſuppoſant R le nombre des faces de chaque dés) par cette ſuite $R \,.\, R-1 \,.\, R-2 \,.\, R-3$, continuée juſqu'à ce qu'il ait autant de termes, qu'il y a d'expoſans, & diviſer le produit par $1.2.3$ s'il y a trois expoſans égaux, & le diviſer encore par $1.2.3.4$ s'il y en a quatre égaux, & ainſi de ſuite s'il y a d'autres expoſans égaux.

Pages 159 *&* 160. (*a*) Les deux Problêmes que vous mettés ici comme le troiſiéme & le quatriéme, ſont dans le Traité de Mr Huyguens le quatriéme & le troiſiéme ; pour ce qui eſt de celui-là, c'eſt à dire du quatriéme ſelon l'ordre Mr Huyguens, ou du troiſiéme dans votre Livre, il eſt bien réſolu, en tant que Pierre parie que parmi les 7 jettons qu'il va prendre, il s'y en trouvera juſtement 3 blancs ni plus ni moins ; car je trouve auſſi que le ſort de Pierre ſera à celui de Paul dans cette ſuppoſition comme 35 à 64, ou comme 280 à 512 ; mais ſi on veut que Pierre ait gagné auſſi quand il tire les quatre blancs, ce qui paroît être le veritable ſens des paroles de Mr Huyguens *inter quos 3 albi erunt*, où il faut ſuppléer *minimùm*, comme ſi Pierre s'engageoit de tirer trois blancs pour le moins parmi les ſept jettons qu'il prend entre les douze : Ce ſens

(*a*) Voyés pages 220 & 221.

étant donné au Problême, on trouve que les ſorts de Pierre & de Paul ſeront comme 14 & 19.

Page 162. (*a*) La propoſition que vous faites ici du Problême 5e de Mr Huyguens lui donne un ſens tout different, & ce n'eſt plus le même Problême. Pour vous en faire voir la grandiſſime difference, je vais vous donner ici les ſimples ſolutions de l'un & de l'autre propoſé en general. Selon les conditions de Mr Huyguens, ſoit nommé n le nombre des jettons que chaque Joueur prend au commencement, a le nombre des coups qui font gagner Pierre un jetton de Paul, & b le nombre des coups qui font gagner Paul un jetton de Pierre ; je dis que leurs ſorts ſeront comme a^n & b^n ; & ainſi pour le cas particulier qui eſt en queſtion des 3 dés, où $n = 12$, $a = 27$ & $b = 15$; en ſorte que $a . b :: 27 . 15 :: 9 . 5$, je dis que le ſort de Pierre ſera à celui de Paul :: $9^{12} . 5^{12}$ :: 282429536481 . 244140625. Vous n'avés pas obſervé, je croi, que ces deux grands nombres ne ſont autre choſe que la 12e puiſſance de 9 & de 5. Mais ſelon les conditions de votre propoſition, nommons encore n le nombre des jettons qu'un des deux Joueurs doit gagner le premier pour gagner la partie, c'eſt à dire la moitié des jettons que Jacques diſtributeur tient au commencement entre ſes mains ; ſoit auſſi a le nombre des coups favorables à Pierre, & b celui des coups favorables pour Paul. Je trouve que les ſorts des deux Joueurs ſeront exprimés par les deux ſommes des deux moitiés des termes du binome $a + b$ élevé à puiſſance $2n - 1$: par exemple ſi $n = 3$, les ſorts de Pierre & de Paul ſeront comme la ſomme des trois premiers termes & la ſomme des trois derniers termes de $\overline{a+b}^5$, c'eſt à dire comme $a^5 + 5a^4b + 10a^3bb$, & $b^5 + 5b^4a + 10b^3aa$; & ainſi en general ſuppoſant $2n - 1 = p$, ces deux ſuites $a^p + \frac{p}{1}a^{p-1}b^1 + \frac{p \cdot p-1}{1 \cdot 2}a^{p-2}b^2 + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{p-3}b^3 +$ &c. & $b^p + \frac{p}{1}b^{p-1}a^1 + \frac{p \cdot p-1}{1 \cdot 2}b^{p-2}a^2 + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^{p-3}a^3 +$ &c. continuée chacune juſqu'au nombre de termes exprimés par n, donneront la raiſon des ſorts de Pierre & de Paul. Dans notre

(*a*) Voyés page 222.

cas particulier où $n = 12$, & $a . b :: 9 . 5$, il faudroit prendre douze termes de chacune de ces deux suites $9^{23} + \frac{23}{1} 9^{22} 5^{1} + \frac{23 \cdot 22}{1 \cdot 2} 9^{21} 5^{2} + \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3} 9^{20} 5^{3} + \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 9^{19} 5^{4} +$ &c. & $5^{23} + \frac{23}{1} 5^{22} 9^{1} + \frac{23 \cdot 22}{1 \cdot 2} 5^{21} 9^{2} + \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3} 5^{20} 9^{3} + \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 5^{19} 9^{4}$, ce qui produiroit deux nombres si grands, que le premier consisteroit (selon ma conjecture) pour le moins en 25 figures, si vous avés envie de faire le calcul, voilà de la besogne pour exercer votre patience; cependant vous voyés l'extrême difference qu'il y a entre les deux manieres de proposer le Problême cinquiéme de Mr Huyguens; si-bien que ce sont effectivement deux Problêmes tout differens, dont je vous ai résolu chacun generalement. Vous serés peut-être étonné que vos 23 égalités vous fournissent pourtant la même solution de Mr Huyguens, nonobstant que vous proposiés le Problême dans un sens qui le fait, comme je viens de vous le montrer, si different de celui de Mr Huyguens; mais la raison en est, parceque vous suivés effectivement en formant les égalités, les conditions de Mr Huyguens, & non pas celles de votre proposition; car je vois que vous supposés que les sorts des deux Joueurs sont les mêmes lorsqu'il y a une même difference entre le nombre des jettons que l'un a déja gagné, & le nombre des jettons que l'autre a gagné; en sorte que vous supposés, par exemple, que leurs sorts sont les mêmes, soit que Pierre ayant gagné cinq jettons, Paul en ait trois; ou que Pierre ayant deux jettons, Paul n'en ait point: or c'est cette supposition qui n'est pas juste, ne pouvant subsister avec le Problême pris dans le sens que vous lui donnés.

Page 177, ligne 12 & 13. (*a*) *A qui il manque le moins de points.* Cette restriction qu'il doit manquer à Pierre le moins de points est superflue, la regle que vous donnés n'étant pas moins bonne, quand il manque à Pierre le plus de points; il seroit même plus expeditif de supposer que Pierre soit celui à qui il manque plus de points; car

(*a*) Voyés page 244.

Digitized by Google

votre ſuite aura un plus petit nombre de termes qui ſeront par conſequent plûtôt ajoutés en une ſomme que dans l'autre ſuppoſition. Quand au reſte je réſous ce Problême plus generalement, & par une expreſſion plus ſimple & plus naturelle, je l'énonce ainſi : *Pierre & Paul jouent en pluſieurs parties à un jeu inégal où le nombre des cas favorables à Pierre eſt à celui des cas favorables à Paul* :: a . b ; *& après avoir joué quelque temps le nombre des parties qui manquent encore à Pierre ſoit* p, & *le nombre des parties qui manquent à Paul ſoit* q, *on demande la raiſon de leurs ſorts.* Solution. Elevés le binome $\overline{a+b}$ à la puiſſance $p+q-1=r$, le nombre des termes en ſera $p+q$; je dis que la ſomme des premiers termes dont le nombre ſoit q, eſt à la ſomme du reſte des termes dont le nombre ſera p, comme le ſort de Pierre eſt à celui de Paul ; or ces deux ſommes ſont comme il ſuit :

$$a^p + \frac{p}{1}a^{p-1}b^1 + \frac{p\cdot p-1}{1\cdot 2}a^{p-2}b^2 + \frac{p\cdot p-1\cdot p-2}{1\cdot 2\cdot 3}a^{p-3}b^3 + \text{&c.}$$

continué juſqu'au nombre de termes exprimé par q.

Et

$$b^r + \frac{r}{1}b^{r-1}a^1 + \frac{r\cdot r-1}{1\cdot 2}b^{r-2}a^2 + \frac{r\cdot r-1\cdot r-2}{1\cdot 2\cdot 3}b^{r-3}a^3 + \text{&c.}$$

continué juſqu'au nombre de termes exprimé par p.

Suppoſant p & q égaux, nous tombons dans le cas du Problême cinquiéme de Mr Huyguens pris dans le ſens que vous le propoſés, *page 162*, (*a*) ſur lequel je vous ai parlé amplement ci-deſſus.

Page 178, *ligne* 9. (*b*) *Voici une Table.* Je m'étonne que vous n'ayés pas obſervé l'uniformité de cette Table, & la grande facilité avec laquelle on conſtruit une Table generale pour quelque nombre de parties qu'on joue toujours en rabattant ; car ſoit le nombre des parties en leſquelles Pierre & Paul conviennent de jouer n : voici la Table de leurs ſorts.

(*a*) Voyés page 222.

(*b*) Voyés page 277.

Digitized by Google

TABLE.

Si Pierre a nul point, ſont ſort eſt	$n+0$ contre	$n-0$
un point, ...	$n+1$ . .	$n-1$
deux points, ...	$n+2$ . .	$n-2$
trois points, ...	$n+3$ . .	$n-3$
quatre points, ...	$n+4$ . .	$n-4$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n points, ...	$n+n$ . .	$n-n$

Vous voyés que leurs ſorts vont en progreſſion arithmetique, l'une aſcendante, l'autre deſcendante : en effet votre Table que vous avés faite pour le nombre de ſix ſeulement, s'accorde avec la mienne generale ; car le ſort de 7 contre 5 eſt la même choſe que $6+1$ contre $6-1$

2 . . 1	$6+2$ . .	$6-2$
3 . . 1	$6+3$ . .	$6-3$
5 . . 1	$6+4$ . .	$6-4$
11 . . 1	$6+5$ . .	$6-5$

Page 181, ligne 13 (*a*) *Elles ſont abſolument impratiquables.* Au contraire comme c'eſt une progreſſion geometrique, on peut ajouter dans un moment autant de termes qu'on veut par des regles communes qu'on trouve dans tous les Livres d'arithmetique ; ainſi le nombre des termes étant h, je trouve que la ſomme de tous les termes ſera $= \frac{p \times \overline{m^h - q^h}}{m-q \times mh}$; mais pour le reſte, vous faites bien d'employer les logarithmes, je m'en ſuis ſervi utilement dans une pareille occaſion il y a bien douze ans, où il s'agiſſoit de déterminer combien il reſtoit de vin & d'eau

(*a*) Voyés page 182.

mêlé

mêlé enſemble dans un tonneau, lequel étant au commencement tout plein de vin, on en tireroit tous les jours pendant une année une certaine meſure, en le rempliſſant incontinent après chaque extraction avec de l'eau pure. Vous trouverés la ſolution de cette queſtion qui eſt aſſés curieuſe dans ma diſſertation *De Nutritione*, que Mr Varignon vous pourra communiquer. Je fis cette queſtion pour faire comprendre comment on peut déterminer la quantité de vieille matiere qui reſte dans nos corps mêlée avec de la nouvelle qui nous vient tous les jours par la nourriture, pour réparer la perte que nos corps font inſenſiblement par la tranſpiration continuelle.

Mais en voilà bien aſſés, Monſieur, & peut-être plus qu'il ne faut pour vous cauſer de l'ennui ; c'eſt pour cela que je ne vous parle pas des fautes, ſoit de calcul, ſoit d'impreſſion que j'ai rencontrées en quelques endroits ; je vous prie cependant de prendre en bonne part tout ce que j'ai dit juſqu'ici ; c'étoit pour l'amour de la verité que j'ai crû vous devoir communiquer avec ma franchiſe ordinaire mes réflexions, d'autant plus que vous me les avés demandées. Je ne laiſſe pas d'eſtimer votre Livre autant qu'on peut eſtimer un Ouvrage qui fait honneur à ſon Auteur, & qui marque tout enſemble une profonde pénetration d'eſprit, & une patience infatigable à faire de longs & pénibles calculs. Il ſeroit à ſouhaiter que vous vouluſſiés prendre la peine d'étendre votre Livre, & d'en faire un Ouvrage plus ample & plus riche, la matiere ne vous manqueroit pas, ſur-tout ſi vous vouliés entrer dans la morale & la politique, comme mon frere avoit commencé de faire dans ſon Ouvrage, qui ſelon toutes les apparences ne paroîtra jamais. J'entens avec plaiſir que les Mathematiques, malgré les miſeres de la guerre fleuriſſent de plus en plus, & deviennent même en honneur en France. Ici dans nos pays nous ne pouvons pas nous vanter du même bonheur. Depuis le départ de M. Herman je ne ſçai perſonne, excepté mon neveu & très peu d'autres, dont il faille eſperer de grands progrès dans ces ſciences, leſquelles étant conſiderées comme n'être pas *de pane lu-*

Digitized by Google

crando, on les néglige comme des choſes ſeches & peu utiles. Les quatre Problêmes que vous propoſés à la fin de votre Traité ſont curieux; mais le premier me paroît inſoluble pour la longueur du calcul qu'il demanderoit, & que la vie humaine ne ſeroit pas ſuffiſante d'achever : Je n'entens pas le ſens du quatriéme : le ſecond & le troiſiéme me paroiſſent traitables, quoique non ſans beaucoup de peine & de travail, que j'aime mieux vous laiſſer pour apprendre de vous la ſolution; que de travailler long-temps aux dépens de mes occupations ordinaires qui ne me laiſſent guerre de loiſir de m'appliquer à d'autres choſes. Il me tarde de voir la nouvelle Edition de Mr Newton. Il y a long-temps qu'il m'a promis qu'il me l'enverroit dès qu'il ſeroit imprimé; mais du depuis je n'en ai plus rien entendu; quand vous l'aurés reçû, je vous prie de me mander par occaſion ce que vous y aurés trouvé : En attendant je me donne l'honneur de me nommer,

MONSIEUR,

Votre très humble & très
obéiſſant Serviteur,
BERNOULLY.

P. S. mon Neveu qui vous fait ſes Complimens réciproques, vient de me donner ſes Remarques (que je vous envoye ici auſſi) ſur votre Livre que je lui avois prêté : je n'ai pas encore eu le temps de les examiner.

Digitized by Google

Remarques de M. (Nicolas) Bernoulli.

PAG. 23, 24, 25. (*a*) Generaliter, si $q > 2$, prærogativa chartas tenentis est $= \frac{1}{4} \times \frac{q}{p-q+1} - \frac{1}{8} \times \frac{q.q-1}{p-q+1.p-q+2} + \frac{1}{16} \times \frac{q.q-1.q-2}{p-q+1.p-q+2.p-q+3} -$ .. usque ad $\pm \frac{1}{2^q} \times \frac{q\ q-1.q-2 \ldots 2}{p-q+1.p-q+2 \ldots p-1}$ in A.

Pag. 34 *seqq.* (*b*) *Maintenant, &c.* Auctor hic supponit Petro perdente ludum abrumpi, quod contra leges hujus ludi est, continuatur enim ludus, & manus seu privilegium distribuendi chartas transfertur ad Paulum, qui est ad dexteram Petri; unde sequitur, lucro invento non solùm addi debere illud lucrum, quod provênit ex spe retinendi manum, sed ab illo quoque subtrahendum esse damnum, quod metuendum habet Petrus, si manum amiserit. Ad inveniendam igitur sortem Petri, ponatur illa $= x$ (*N. B.* per sortem hic intelligo id quod quis ex adversarii sui pecunia expectandum habet) sors Jacobi $= y$, & sors Pauli $= z$, quibus positis erit $x = \frac{3}{17}A + \frac{2351x + 4024y}{6375}$, quia enim 2351 casus sunt retinendi manum, & 4024 casus illam amittendi, habebit Petrus præter sortem antea inventam $\frac{3}{17}A$, adhuc 2351 casus ad permanendum in eo statu, in quo fuit ab initio ludi, & 4024 casus ad acquirendum y seu sortem damnosam colluforis Jacobi; porrò quia sortes Jacobi & Pauli pro unico tantùm lusu sunt $\frac{-106}{2125}A$ & $\frac{-269}{2125}A$, erit $y = \frac{-106}{2125}A + \frac{2351y + 4024z}{6375}$, & $z = \frac{-269}{2125}A + \frac{2351z + 4024x}{6375}$, quibus æquationibus reductis & posito insuper $x + y + z = 0$, invenietur $x = \frac{161}{1006}A$, $y = \frac{-481}{4024}A$, $z = \frac{-161}{4024}A$.

Nota. In omnibus ludis, qui certò lusionum numero l constare debent, & in quibus quilibet, qui manum tenet, illam si perdit proximo suo ad dextram colluſori cedere tenetur, si numerus lusorum A, B, C, D, &c. sit $= p$,

(*a*) Voyés page 97. (*b*) Voyés page 110.

Digitized by Google

& primus A teneat manum, ſitque B ad ſiniſtram ipſius A, C ad ſiniſtram ipſius B, D ad ſiniſtram ipſius C, &c. & habeant caſus retinendi manum ad caſus illam amittendi rationem ut m ad n, exprimentur ſortes luſorum A, B, C, D, &c. reſpectivæ z, y, x, u, &c. per ſequentes ſeries, nempe

$$z = a + \frac{me+nb}{s} + \frac{mma+2mnb+nnc}{ss} + \frac{m^3a+3mmnb+3mnnc+n^3d}{s^3} + \&c.$$

$$y = b + \frac{mb+nc}{s} + \frac{mmb+2mnc+nnd}{ss} + \frac{m^3b+3mmnc+3mnnd+n^3e}{s^3} + \&c.$$

$$x = c + \frac{mc+nd}{s} + \frac{mmc+2mnd+nne}{ss} + \frac{m^3c+3mmnd+3mnne+n^3f}{s^3} + \&c.$$

$$u = d + \frac{md+ne}{s} + \frac{mmd+mne+nnf}{ss} + \frac{m^3d+3mmne+3mnnf+n^3g}{s^3} + \&c.$$

vel etiam & ita porro

$$z = aq \times \overline{1-r} + bq \times \overline{1-r} \times 1 + \frac{t \cdot 1}{1} + cq \times \overline{1-r} \times \overline{1+\frac{t \cdot 1}{1}} + \frac{tt \cdot 1 \cdot 1-1}{1 \cdot 2} + dq \times \overline{1-r} \times \overline{1+\frac{t \cdot 1}{1}+\frac{tt \cdot 1 \cdot 1-1}{1 \cdot 2}+\frac{t^3 \cdot 1 \cdot 1-1 \cdot 1-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}} + \&c.$$

$$y = bq \times \overline{1-r} + cq \times \overline{1-r} \times 1 + \frac{t \cdot 1}{1} + dq \times \overline{1-r} \times \overline{1+\frac{t \cdot 1}{1}+\frac{tt \cdot 1 \cdot 1-1}{1 \cdot 2}} + eq \times \overline{1-r} \times \overline{1+\frac{t \cdot 1}{1}+\frac{tt \cdot 1 \cdot 1-1}{1 \cdot 2}+\frac{t^3 \cdot 1 \cdot 1-1 \cdot 1-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}} + \&c.$$

$$x = cq \times \overline{1-r} + dq \times \overline{1-r} \times 1 + \frac{t \cdot 1}{1} + eq \times \overline{1-r} \times \overline{1+\frac{t \cdot 1}{1}+\frac{tt \cdot 1 \cdot 1-1}{1 \cdot 2}} + fq \times \overline{1-r} \times \overline{1+\frac{t \cdot 1}{1}+\frac{tt \cdot 1 \cdot 1-1}{1 \cdot 2}+\frac{t^3 \cdot 1 \cdot 1-1 \cdot 1-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}} + \&c.$$

$$u = dq \times \overline{1-r} + eq \times \overline{1-r} \times 1 + \frac{t \cdot 1}{1} + fq \times \overline{1-r} \times \overline{1+\frac{t \cdot 1}{1}+\frac{tt \cdot 1 \cdot 1-1}{1 \cdot 2}} + gq \times \overline{1-r} \times \overline{1+\frac{t \cdot 1}{1}+\frac{tt \cdot 1 \cdot 1-1}{1 \cdot 2}+\frac{t^3 \cdot 1 \cdot 1-1 \cdot 1-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}} + \&c.$$

ubi in qualibet ſerie tot ſumuntur termini, quot ſunt unitates in l; eſt autem $s = m+n$, $q = \frac{s}{n}$, $r = \frac{m^l}{s}$, $t = \frac{n}{m}$, $z+y+x+u+\&c. = 0$. Si $p = 2$, tunc inter ſortes a, b, c, d, e, &c. ut & z, y, x, u, &c. ſemper binæ & binæ ſunt æquales, ut $a = c = e = \&c.$ $b = d = f = \&c.$ $z = x = \&c.$ $y = u = \&c.$ Si $p = 3$, ternæ ſunt æquales, ſi $p = 4$ quaternæ, & ita deinceps.

Digitized by Google

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} \text{ si } l = 1, \left\{\begin{matrix} \text{Si } l \text{ est} = \text{inf.} \\ \text{vel numerus} \\ \text{satis magnus.} \end{matrix}\right\} \text{erit } \begin{matrix} z = y + aq = \frac{q}{p} \times p - 1 \times a + p - 2 \times b + p - 3 \times c + \ldots 0 \\ y = x + bq = \frac{q}{p} \times p - 1 \times b + p - 2 \times c + p - 3 \times d + \ldots 0 \\ x = u + cq = \frac{q}{p} \times p - 1 \times c + p - 2 \times d + p - 3 \times e + \ldots 0 \end{matrix}$$

Page 58 sur le Jeu du Treize. (*a*) Designentur chartæ quas tenet Petrus per litteras *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c. quarum numerus sit n, erit numerus omnium possibilium casuum $= 1.2.3 \ldots n$, numerus casuum ut *a* sit primo loco $= 1.2.3 \ldots n-1$; numerus casuum ut *b* sit secundo, nec tamen *a* primo loco $= 1.2.3.n-1-1.2.3 \ldots n-2$; numerus casuum ut *c* sit tertio loco, nec tamen *a* primo vel *b* secundo $= 1.2.3 \ldots n-1-2 \times 1.2.3 \ldots n-2 + 1.2.3 \ldots n-3$; numerus casuum ut *d* sit quarto, nulla verò præcedentium suo loco $= 1.2.3 \ldots n-1-3 \times 1.2.3 \ldots n-2 + 3 \times 1.2.3 \ldots n-3 - 1.2.3 \ldots n-4$; & generaliter numerus casuum, quibus contingere potest ut charta quæ est ordine m, nulla autem ex præcedentibus sit suo loco, $= 1.2.3 \ldots n-1 - \frac{m-1}{1} \times 1.2.3 \ldots n-2 + \frac{m-1.m-2}{1.2} \times 1.2.3 \ldots n-3 - \frac{m-1.m-2.m-3}{1.2.3} \times 1.2.3 \ldots n-4 + \ldots$ usque ad $\pm \frac{m-1.m-2 \ldots m-m+1}{1.2.3 \ldots m-1} \times 1.2.3 \ldots n-m$, hinc sors lusoris qui in illa demum charta, quæ est ordine m, vincere vult, est $= \frac{1}{n} - \frac{m-1}{1} \times \frac{1}{n.n-1} + \frac{m-1.m-2}{1.2} \times \frac{1}{n.n-1.n-2} - \frac{m-1.m-2.m-3}{1.2.3} \times \frac{1}{n.n-1.n-2.n-3} + \ldots$ usque ad $\pm \frac{m-1.m-2 \ldots m-m+1}{1.2.3 \ldots m-1} \times \frac{1}{n.n-1 \ldots n-m+1}$, & sors lusoris qui ad minimùm in una m chartarum vincere vult $=$ summæ omnium possibilium valorum præcedentis seriei ponendo pro m successivè $1.2.3$ &c. *h. e.* $= \frac{m}{n} - \frac{m.m-1}{1.2} \times \frac{1}{n.n-1} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} \times \frac{1}{n.n-1.n-2} - \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} \times \frac{1}{n.n-1.n-2.n-3} + \ldots$ usque ad $\pm \frac{m.m-1.m-2 \ldots m-m+1}{1.2.3 \ldots m} \times \frac{1}{n.n-1 \ldots n-m+1}$; ego posito $m = n$ sors lusoris est $= 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$ usque ad $\pm \frac{1}{1.2.3 \ldots n}$.

Aliter. Vel *a* est primo loco, vel non est; si *a* sit primo

(*a*) Voyés page 134.

loco, tunc ſors eſt = 1, ſi non ſit, tunc tot caſus habet ad obtinendum 1, quod haberet ſi numerus chartarum eſſet $n - 1$, exceptis illis caſibus, quibus contingit, ut illa charta, cujus locum a ſubiit, viciſſim ſit primo loco, hi enim ipſi non dant 1, ſed duntaxat illam expectationem, quam haberet ſi numerus chartarum eſſet $n - 2$; tot autem ſunt caſus ut hoc contingat, quot variationes admittunt $n - 2$ chartæ, nempè $1 . 2 . 3 \ldots n - 2$; unde poſita ſorte ejus quando numerus chartarum eſt $n - 2 = d$, & g pro ſorte quando numerus chartarum eſt $n - 1$, erunt exiſtente numero chartarum $= n - 1$, ex univerſis $1.2.3 \ldots . n - 1$ caſibus, $1 . 2 . 3 \ldots . n - 1 \times g$ caſus lucrandi (habet enim totum depoſitum ſeu 1 ad valorem expectationis eandem rationem quam numerus omnium caſuum ad numerum caſuum lucrandi) proindè expectatio quam habet ſi a non ſit primo loco eſt $=$

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots . n - 1 \times g - 1 . 2 . 3 \ldots . n - 2 . + 1 . 2 . 3 \ldots n - 2 d}{1 . 2 . 3 \ldots n - 1} =$$

$\frac{n-1 \times g - 1 + d}{n-1}$, cùm igitur ex n caſibus unus duntaxat ſit ut a ſit primo loco, & $n - 1$ caſus ut non ſit, erit ſors quæſita $= \frac{1 \times 1 + n - 1 \frac{n-1 \times g - 1 + d}{n-1}}{n} = \frac{n-1 \times g + d}{n}$. Apparet hinc differentiam inter ſortem quæſitam & eam quam habet, ſi numerus chartarum eſt $n - 1$, eſſe $= \frac{-g+d}{n} =$ differentiæ inter eandem hanc ſortem & eam, quam habet ſi numerus chartarum eſt $n - 2$, ſed negativè ſumptæ & diviſæ per numerum chartarum n, unde cum exiſtente numero chartarum 0 & 1, ſors etiam ſit 0 & 1, erit differentia inter ſortem ſi numerus chartarum ſit 2, & inter præcedentem ſortem, cum nempè numerus chartarum unitate minor eſt, $= -\frac{1}{2}$; ſi numerus chartarum ſit 3, $= +\frac{1}{2.3}$; ſi 4, $= -\frac{1}{2.3.4}$; ſi 5, $= +\frac{1}{2.3.4.5}$, & generaliter ſi numerus chartarum ſit $n = \pm\frac{1}{2.3.4..n}$, adeòque tota ſors $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \ldots$ uſque ad $\pm\frac{1}{2.3.4..n}$.

Pag. 73. (*a*) Alia formula. Si $q < 1$, lucrum chartas

(*a*) Voyés page 153.

tenentis est $= -\frac{1}{3}\frac{q.p-q}{p.p-1} + \frac{1}{2} \times \frac{q}{p} - \frac{1}{4} \times \frac{q.q-1}{p.p-q+1} + \frac{1}{8} \times \frac{q.q-1.q-2}{p.p-q+1.p-q+2} - \frac{1}{16} \times \frac{q.q-1.q-2.q-3}{p.p-q+1.p-q+2.p-q+3} + \ldots\ldots$ usque ad $\pm \frac{1}{2}^{q-1} \times \frac{q.q-1..2}{p.p-q+1.p-q+2..p-2}$ in A. Si $q = 1$, addi debet $\frac{1}{p} \times A$.

Pag. 74. In Tabulæ ultimo casu est error calculi, nam lucrum chartas tenentis quando omnia 4 folia omnibus 52 chartis inversa latent non est $\frac{2453842}{175592235}a$, sed $\frac{454}{32487}a = \frac{2453870}{175592235}a$.

Lettre de M. de M. . . à M. Bernoulli.

A Montmort le 15 Novembre 1710.

Je ne puis vous exprimer, Monsieur, combien je suis sensible à l'honneur que vous m'avés fait d'examiner mon Ouvrage, & de vouloir bien me communiquer vos sçavantes & judicieuses Remarques. J'étois à Paris lorsque j'ai reçu votre Lettre. J'y suis resté environ trois mois hors d'état de vous faire réponse par une infinité de distractions de de diverses occupations. Le loisir de la campagne dont je jouis à présent, m'a permis d'examiner avec soin les matieres qui font le sujet de votre Lettre. Voici, Monsieur, une partie des idées qu'elle me fournit, je les mettrai selon l'ordre que vous avés suivi.

Je conviens, Monsieur, que j'eusse pû ne point entrer dans l'examen de tous les coups favorables indifferens ou contraires au Banquier. J'ai dû sans doute m'appercevoir qu'il y avoit des cas dont la consideration n'étoit point necessaire. Mais dans le premier Problême j'ai crû que la voye la plus longue & la plus détaillée étoit la plus propre à mettre l'esprit du Lecteur dans les voyes de la solution. Vous avés pû remarquer que j'avois des methodes plus belles & plus abregées que celle-ci, en voyant les formules que je donne aux pages 24 & 25. (*b*) Celles que

(*a*) Voyés pag. 153. | (*b*) Voyés pag. 97.

vous donnés, Monsieur, pour exprimer l'avantage du Banquier

$\frac{m}{2n} \times 1 + \frac{q-1 \cdot q}{1 \cdot 2} + \frac{q-q \cdot q+1 \cdot q+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} + q - 1 \cdot q \cdot q + 1 \cdot + \ldots$
$\frac{q-1 \cdot q \cdot q+1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots p-q}$, si q est un nombre pair. Et

$\frac{q-1 \times m}{2n} \times 1 + \frac{q-q-1}{2 \cdot 3} + \frac{q \cdot q+1 \cdot q+2 \cdot q+3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots \frac{q \cdot q+1 \cdot q+2 \ldots q-5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots p-q}$

sont très belles. J'en ai une depuis long-temps peu differente des vôtres, soit que q soit pair ou impair. La voici :

$\frac{1}{p \times p-1} + \frac{p-q \cdot p-q-1}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3} + \frac{p-q \cdot p-q-1 \cdot p-q-2 \cdot p-q-3}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5}$
$+ \frac{p-q \cdot p-q-1 \cdot p-q-2 \cdot p-q-3 \cdot p-q-4 \cdot p-q-5}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5 \cdot p-6 \cdot p-7} +$ &c.

Le tout multiplié par $q \cdot q - 1 \cdot \frac{1}{2}A$.

Page 32. (*a*) J'ai employé dans le Lansquenet & pour le Quinquenove votre suite $a + pa + ppa + p^3a +$ &c. sous les expressions de b & de q, & jai donné très exactement les sommes de ces suites, *pag.* 35, 51 & 112. (*b*)

Page 59. (*b*) Je suis bien aise que vous approuviés la suite $\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} +$ &c. J'ai trouvé bien des choses curieuses sur cette matiere. J'ai trouvé, par exemple, que l'avantage de celui qui tient les cartes sur la mise des Joueurs que j'appelle A, est $\frac{690568237871899897}{2413478176215355625}A$. Je vous ferois part de ma methode, si je ne craignois d'être trop long, je me flate qu'elle seroit de votre goût.

Page 62. (*c*) Il est vrai qu'il y a faute en cet endroit ; je me pardonne cependant cette distraction, & j'aime mieux avoir bronché dans cet endroit qui est facile que dans l'essentiel de quelque methode, ce que je ne me pardonnerois pas si aisément. Je vous remercie de m'en avoir averti, & je m'en corrigerai dans une nouvelle édition. J'ai calculé le cas suivant pour quatre cartes, & j'ai trouvé que A exprimant l'argent du jeu, le sort de celui qui tient les cartes est $\frac{569083255}{752859253}A$.

(*a*) Voyés pag. 110 & 176.
(*b*) Voyés page 135.
(*c*) Voyés pag. 142.

Digitized by Google

Page 80. (*a*) Les proprietés des nombres figurés ſont infinies, j'en ai trouvé quelques-unes neuves & ſingulieres dont je vous ferai part dans la ſuite de cette Lettre. Celle dont vous me parlés que les bandes perpendiculaires expriment les coefficiens des puiſſances, eſt une des plus belles & des plus utiles.

Pages 158 & 159. (*b*) Je ſerois aſſés porté à croire comme vous que le ſens du Problême de M. Huyguens eſt plûtôt celui que vous lui donnés que celui de ma ſolution : j'ai trouvé de même que vous ces trois nombres 77, 53, 35.

Page 137. (*c*) Vos formules pour les cas tant déterminés qu'indéterminés ſont très juſtes, & la remarque que vous faites que celle des déterminés s'applique à la détermination du coefficient d'un terme quelconque eſt très ſubtile : ma formule pour les cas déterminés eſt celle-ci :

$$\frac{p}{b}\times\frac{p-b}{e}\times\frac{p-b-c}{d}\times\frac{p-b-c-d}{e}\qquad\frac{p-b-c-d-e}{f}\quad\&c.$$

J'en ai une auſſi pour les indéterminés un peu plus ſimple, quoique la même, que celle qui eſt dans mon Livre : La voici.

$$\frac{q}{B}\times\frac{q-B}{C}\times\frac{q-B-C}{D}\times\frac{q-B-C-D}{E}\ \&c.\ \times\frac{p}{b}\times\frac{p-b}{c}\times$$

$$\frac{p-b-c}{d}\times\frac{p-b-c-d}{e}\ \&c.$$

le tout diviſé par q^p. J'entens par q le nombre des faces des dés, c'eſt 6 dans les dés ordinaires.

Pages 159 & 160. (*d*) Je ne crois pas que M. Huyguens ait voulu ſous-entendre *minimùm*, comme vous le dites, après ces mots : *Inter quos tres albi erunt* ; en tout cas je n'ai pû le deviner, il m'eût été auſſi facile d'une façon que de l'autre.

Page 162. (*e*) Cette obſervation eſt très importante, &

(*a*) Voyés page 32.
(*b*) Voyés page 220.
(*c*) Voyés pages 42 & 44.
(*d*) Voyés page 221.
(*e*) Voyés page 228.

je vous ſuis très obligé de me l'avoir communiquée. Vous avés parfaitement raiſon, & j'ai tort : Voici la maniere dont je me ſouviens que cela eſt arrivé. J'avois réſolu il y a cinq ou ſix ans les cinq Problêmes de M. Huyguens ; ce ne fut qu'à l'occaſion de l'extrait du Livre de Monſieur votre frere qui ſe trouve dans les Memoires de l'Academie, que je conçus le projet de mon Livre. Ce Livre achevé, je donnai dans la troiſiéme partie ces cinq Problêmes ſans les revoir. Or les réſolvans pour la premiere fois, je les avois réſolus par rapport à l'énoncé latin ; mais étant ſur le point de les faire imprimer, je ne fis autre choſe que de traduire le texte de M. Huyguens ; & le trouvant obſcur, & ne me reſſouvenant plus de la ſolution, je lui donnai un ſens qui ne quadre point avec la ſolution. Il eſt vrai que ces deux grands nombres 282429536481, 244140625 ſont la 12e puiſſance de 9 & de 5 : la rémarque eſt excellente, vos deux ſolutions ſont exquiſes. Je ne puis non plus que vous prendre la peine de réſoudre le Problême ſur le pied de l'énoncé de la propoſition, je me contente de votre ſolution, le calcul en ſeroit trop long.

Page 177. (*a*) J'aurois bien ſouhaité que vous euſſiés trouvé pour trois Joueurs une methode ſimple & facile telle qu'on l'a pour deux. Je n'ai jamais pû en venir à bout, la methode des combinaiſons & la methode analytique ſont d'une longueur inſuportable.

Page 178. (*b*) C'eſt un Problême qui pourroit exciter votre curioſité, que celui où il s'agit de déterminer combien doit durer la partie lorſqu'on joue en rabattant. J'ai donné dans le Corollaire, *page* 184 (*c*) la ſolution du cas où l'on joueroit en trois parties de Piquet : j'ai la ſolution generale de ce Problême. Je vous l'envoirois ſi je croyois qu'elle vous fiſt plaiſir. Monſieur votre neveu, qui me paroît capable par ſon habileté des choſes les plus difficiles, & qui par deſſus cela eſt jeune & a peut-être du loiſir, devroit en chercher la ſolution qui eſt aſſurément digne de lui. J'ai trouvé preſque ſans calcul que le ſort de celui qui

(*a*) Voyés page 242. | (*b*) Voyés page 268. | (*c*) Voyés pag. 276.

Digitized by Google

pariroit que la partie ne durera pas plus de 26 coups, sera $\frac{16607255}{33554432}$, ce qui fait voir qu'il auroit un peu de desavantage, & que celui qui pariroit que la partie ne durera pas plus de 28 coups, sera $\frac{70970250}{133432831}$, qui étant plus grand que $\frac{1}{2}$, fait voir que dans ce cas il y auroit de l'avantage. Je crois aussi avoir trouvé qu'en douze parties il y auroit de l'avantage à parier que le jeu finira en moins de 124, & qu'il y a du desavantage en 122.

Je voudrois bien sçavoir s'il s'est donné la peine d'examiner la Proposition 31; (*a*) je n'ai point donné ma methode, voici la formule.

Soit p le nombre des dés, $[\overline{q}]$ le nombre figuré de l'ordre p qui correspond au quantiéme du point proposé, à commencer depuis le plus petit qu'on puisse amener.

$[\overline{q-6}]$ le nombre figuré de l'ordre p qui correspond au quantiéme moins six du nombre proposé, à commencer depuis le plus petit qu'on puisse amener. $[\overline{q-12}]$ le nombre figuré de l'ordre p qui correspond au quantiéme moins douze du nombre proposé, à commencer depuis le plus petit qu'on puisse amener, &c.

$[\overline{q}] - p \times [\overline{q-6}] + \frac{p \times p-1}{1 \cdot 2} \times [\overline{q-12}] - \frac{p \times p-1 \times p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times [\overline{q-18}] + \frac{p \times p-1 \times p-2 \cdot p-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times [\overline{q-24}]$ — &c. donnera le nombre cherché.

Un de mes amis me proposa il y a quelque temps de chercher par une formule combien il y a de coups pour amener précisément le nombre de 6 ou de 5 avec un certain nombre p de dés. J'ai trouvé pour formule $\overline{m-1}^{p-q}$ multiplié par autant de produits des quantités $p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \frac{p-3}{4} \cdot \frac{p-4}{5}$ &c. qu'il y a d'unités dans q. J'appelle m le nombre des faces des dés, m est 6 dans les dés ordinaires.

Dans la suite de cette Lettre je faisois part à M. Bernoulli de ma methode, pour trouver la somme d'une suite de termes qui ont des differences constantes, & je la finissois en lui expliquant les conditions de la Loterie de Loraine. Comme la methode se trouve dans ce Livre à la page 63, & la solution du Problême de la Loterie à la page 257, je ne repeterai point ici ce que l'on voit ailleurs.

(*a*) Voyés page 46.

Lettre de M. (Nicolas) Bernoulli à M. de M...

De Bâle ce 26 Février 1711.

C'est pour vous remercier, Monsieur, de votre très obligeante Lettre, par laquelle vous avés voulu m'assurer de votre amitié & de votre estime, dont je vous suis infiniment redevable. Mon oncle, à qui ses affaires jusqu'ici n'ont pas permis d'examiner toutes les belles choses dont vous avés rempli la Lettre que vous vous êtiés donné la peine de lui écrire, m'a chargé de le faire & de vous y répondre ; en attendant donc du loisir pour cela, j'ai differé jusqu'ici la réponse que je vous dois.

Je n'ai pas encore tenté la solution generale du Problême sur le Jeu du Treize, parcequ'elle me paroît presque impossible ; c'est aussi pourquoi j'étois fort étonné de ce que vous dites, que vous avés trouvé $\frac{690568237871892897}{2413478176215315625}A$ pour l'avantage de celui qui tient les cartes ; mais en examinant la chose un peu de plus près, je suis tombé dans la pensée, que vous n'avés peut-être résolu generalement ce Problême que dans la supposition, que celui qui tient les cartes ayant gagné ou perdu, le jeu finissoit ; ce qui me confirme dans cette pensée, est que j'ai trouvé pour cette hypothese une formule generale, laquelle appliquée au cas particulier de 52 cartes, donne pour l'avantage de celui qui tient les cartes cette fraction $\frac{99177450342464517}{336245122781588005}A$ qui est un peu plus grande que la vôtre, mais qui a pour dénominateur un nombre composé de presque les mêmes facteurs que celui de la vôtre, ce qui me fait croire que vous avés fait une faute de calcul dans l'application de votre formule : voici la mienne dont je viens de parler. $S = \frac{1}{1} - \frac{n-p}{1\cdot 2 \times n-1} + \frac{n-2p}{1\cdot 2\cdot 3 \times n-2} - \frac{n-3p}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \times n-3} +$ &c. jusqu'à un terme qui soit $= 0$; par p j'entens le nombre de fois que chaque carte differente est repetée, & par n le

Digitized by Google

nombre de toutes les cartes. J'ai aussi calculé le cas pour 4 cartes, dont vous parlés, & j'ai trouvé $\frac{130225}{172279} = \frac{56908325}{75285925}$ comme vous; mais il est à propos d'observer ici, que selon les regles de ce jeu là, il ne faut pas supposer que le jeu soit fini, quand celui qui a la main vient à perdre, car alors il est obligé de ceder la main à un autre, & le jeu continue; c'est pourquoi l'avantage de celui qui tient les cartes étant diminué par le desavantage qu'il a en perdant la main, ne sera dans le cas susdit que $\frac{130225}{344558}$ la moitié de ce qui a été trouvé. Si l'on suppose qu'il y ait plusieurs Joueurs contre celui qui a la main, & que leur nombre soit $= n$, son avantage sera $\frac{130225}{344558} \times n$, & celui des autres Joueurs $\frac{130225}{344558} \times$ ou $n - 2$, ou $n - 4$, ou $n - 6$, &c. selon le rang que chacun occupe par rapport à la droite de celui qui tient la carte. Cette Remarque s'étend sur tous les jeux dans lesquels la main passe de l'un à l'autre; ainsi dans votre premier cas du Lansquenet j'ai trouvé que l'avantage de Pierre n'est que $\frac{161}{1006}A$, le desavantage de Paul $- \frac{163}{4024}A$, & celui de Jacques $\frac{481}{4024}A$.

La formule que vous avés trouvé pour la proposition 31 (*a*) est très juste & très utile pour l'usage. J'ai trouvé la même quoique sous une autre expression par la methode des combinaisons. Le Problême que vous proposés sur les jeux qui se jouent en plusieurs parties en rabattant est fort difficile; neanmoins voyant que vous souhaités que j'en cherche la solution, je m'y suis appliqué, & j'ai trouvé une regle generale pour exprimer le sort de celui qui pariroit qu'un des Joueurs aura gagné en tel nombre de coups qu'on voudra, soit qu'ils jouent à un jeu égal ou inégal, soit que l'un ait déja gagné quelques parties ou non : la voici en peu de mots. Soient les deux Joueurs Pierre & Paul, le nombre des parties qui manquent à Pierre $= m$, le nombre des parties qui manquent à Paul $= n$, leur somme $= m + n = s$, le nombre des cas favorables à Pierre $= p$, le nombre des cas favorables à Paul $= q$, leur somme $= p + q = r$, le nombre des coups $= h = m + 2k$, le

(*a*) Voyés pag. 46.

nombre des fois que s eſt contenu dans $k = t$; cela poſé, je dis que la difference entre la ſomme de toutes les valeurs poſſibles (c'eſt à dire en mettant pour t toutes les valeurs qu'il peut avoir depuis o juſqu'au plus grand) de cette ſuite

$$1 \times \overline{p^{2k-2ts} + q^{2k-2ts}} + h \times \overline{p^{2k-2ts-1}q + q^{2k-2ts-1}p} + \frac{h \cdot h-1}{1 \cdot 2} \times \overline{p^{2k-2ts-2}qq + q^{2k-2ts-2}pp} + \frac{h \cdot h-1 \cdot h-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \overline{p^{2k-2ts-3}p^3 + q^{2k-2ts-3}p^3} + \text{&c. juſqu'à } \frac{h \cdot h-1 \cdot h-2 \cdots h-k+ts+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k-ts} \times pq^{k-ts}$$

le tout multiplié par $\frac{p^{ts+m}q^{ts}}{r^h}$, & la ſomme de toutes les valeurs de celle-ci $1 \times \overline{p^{2k-2ts-2n} + q^{2k-2ts-2n}} + h \times \overline{p^{2k-2ts-2n-1}q + q^{2k-2ts-2n-1}p} + \frac{h \cdot h-2}{1 \cdot 2} \times \overline{p^{2k-2ts-2n-2}qq + q^{2k-2ts-2n-2}pp} + \text{&c. juſqu'à } \frac{h \cdot h-1 \cdot h-2 \cdots h-k+ts+n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k-ts-n} \times pq^{k-ts-n}$, le tout multiplié par $\frac{p^{ts+s}q^{ts+n}}{r^h}$, exprimera le ſort de celui qui pariroit que Pierre gagnera la partie au moins en h coups. Si k eſt plus petit que $ts + n$; c'eſt à dire, ſi après avoir diviſé k par s, le reſte de la diviſion eſt plus petit que n, il ne faut pas dans la derniere ſuite mettre pour t toutes ſes valeurs depuis o juſqu'à t, mais ſeulement juſqu'à $t - 1$. Pour avoir le ſort de celui qui pariroit que Paul la gagnera en h coups, il ne faudra que ſubſtituer dans cette formule les lettres q, p, n, m, au lieu de p, q, m, n. La ſomme de ces deux ſorts enſemble ſera le ſort de celui qui pariroit que la partie ſera décidée en h coups. L'application de cette formule à des cas particuliers, lorſque $p = q = 1$, eſt fort facile; j'ai trouvé auſſi-bien que vous, preſque ſans calcul, que pour ſix parties le ſort de celui qui pariroit que le jeu ſera fini en 26 coups ſera $\frac{16607955}{33554432}$, & en 28 coups $\frac{35485125}{67108864}$, ou $\frac{709702250}{1342177728}$, & non pas $\frac{709702250}{1334328831}$, comme vous avés écrit par erreur; mais pour douze parties j'ai trouvé qu'on peut déja parier avec avantage que le jeu ſera fini en 110, & qu'il y auroit du deſavantage à parier

Digitized by Google

qu'il ſera fini en 108 coups; car le ſort pour ces deux nombres de coups ſera $\frac{129\cdots}{649\cdots}$ & $\frac{810\cdots}{1622\cdots}$, il faut donc que vous vous ſoyiés mépris, puiſque vous dites qu'on ne pourra parier avec avantage que la partie ne ſera décidée qu'en 124 coups. Il faut pourtant avouer qu'il y faut du tatonnement pour trouver quand le ſort ſera $\frac{1}{2}$; c'eſt pourquoi ſi vous avés une meilleure methode que celle là, je vous prie de me la communiquer, & je vous en ſerai beaucoup obligé. Il eſt clair que cette formule, que je viens de donner, ſervira auſſi pour trouver le ſort des Joueurs mêmes; car pour cette fin il ne faudra que ſuppoſer que le nombre des coups ſoit infini, en mettant donc h, k, & $l = inf.$ on trouvera que le ſort de Pierre ſera $= \frac{p^h + q^h \times p^s - p^{s-n}q^n}{r^h \times p^s - q^s} = \frac{p^s - p^m q^n}{p^s - q^s}$; & par conſequent celui de Paul $\frac{p^m q^n - q^s}{p^s - q^s}$, ce que j'ai trouvé autrefois par une voye differente de celle que j'ai ſuivie dans la recherche de ce Problême. Si $m = n$, & $s = 2m$, leurs ſorts ſeront comme $p^{2m} - p^m q^m$ & $p^m q^m - q^{2m}$, ou comme p^m & q^m; & en ſuppoſant $m = 12$, $p = 9$, $q = 5$, on aura 9^{12} & 5^{12} pour les ſorts de Pierre & Paul, qui eſt le cas du Problême cinquiéme de M. Huyguens. Si $p = q$, les ſorts des deux Joueurs ſont comme n & m, ce qui ſe trouve aiſément en diviſant $p^s - p^m q^n$, & $p^m q^n - q^s$ par $p - q$; car on aura par cette diviſion deux progreſſions geometriques, dont le nombre des termes de la 1re ſera $= n$, & celui de la 2e $= m$, & dont les termes, en ſuppoſant $p = q$, deviendront tous égaux. Si $p = q$, & $s = m + n = 12$, on a le cas de la page 178 (*a*) de votre Livre. Votre formule pour trouver combien il y a de coups pour amener préciſément un certain nombre de points avec un certain nombre de dés eſt fort juſte; comme auſſi la methode que vous donnés pour trouver la ſomme des nombres figurés élevés à des puiſſances quelconques; feu mon oncle a donné la même regle dans ſon Traité, non ſeulement pour les nombres figurés élevés à un expoſant quelconque; mais gene-

(*a*) Voyés page 177.

Digitized by Google

ralement pour tous les nombres qui ſont ſemblables aux nombres figurés, c'eſt à dire, qui ont les premieres, ou les ſecondes, ou les troiſiémes, &c. differences égales ; outre cette methode, il y en a encore d'autres, dont en voilà une qui a été trouvée depuis long-temps par mon oncle le vivant ; elle conſiſte dans l'aſſumtion d'une ſuite de termes affectés de coefficiens indéterminés ; par exemple, ſi l'on vouloit avoir la ſomme des nombres triangulaires élevés au quarré, c'eſt à dire la ſomme de tous les $\frac{p \cdot p+1}{1 \cdot 2} \times \frac{p \cdot p+1}{1 \cdot 2}$ ou de tous les $\frac{1}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{4}pp$, je la ſuppoſe égale à $ap^5 + bp^4 + cp^3 + dpp + ep + f$. Pour déterminer les coefficiens inconnus, je mets dans ces deux expreſſions $p+1$ au lieu de p, & j'aurai

$$\left.\begin{array}{r} ap^5 + 5ap^4 + 10ap^3 + 10app + 5ap + a \\ + bp^4 + 4bp^3 + 6bpp + 4bp + b \\ + cp^3 + 3cpp + 3cp + c \\ + dpp + 2dp + d \\ + ep + e \\ + f \end{array}\right\} = \text{à}$$

$\frac{1}{4}\overline{p+1}^4 + \frac{1}{2}\overline{p+1}^3 + \frac{1}{4}\overline{p+1}^2$ + la ſomme de tous les $\frac{1}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{4}pp + 3p + 1 + ap^5 + bp^4 + cp^3 + dpp + ep + f$, en ôtant de part & d'autre $ap^5 + bp^4 + cp^3 + dpp + ep + f$; & en comparant enſuite les termes homogenes, on trouvera $a = \frac{1}{20}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{5}{12}$, $d = \frac{1}{4}$, $e = \frac{1}{30}$, $f = 0$; donc la formule pour la ſomme des nombres triangulaires élevés au quarré ſera $\frac{1}{20}p^5 + \frac{1}{4}p^4 + \frac{5}{12}p^3 + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{30}p = \frac{3p^5 + 15p^4 + 25p^3 + 15pp + 2p}{3 \cdot 4 \cdot 5}$, comme vous avés trouvé. On peut auſſi trouver la ſomme de tels nombres en les réduiſant aux nombres figurés ; par exemple, $\frac{p \cdot p+1}{1 \cdot 2} \times \frac{p \cdot p+1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{4}pp = 6 \times \frac{p \cdot p+1 \cdot p+2 \cdot p+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 6 \times \frac{p \cdot p+1 \cdot p+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{p \cdot p+1}{1 \cdot 2}$; donc la ſomme de tous les $\frac{p \cdot p+1}{1 \cdot 2}^2$ ſera

$= 6$

$= 6 \int \frac{p \cdot p+1 \cdot p+2 \cdot p+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 6 \int \frac{p \cdot p+1 \cdot p+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \int \frac{p \cdot p+1}{1 \cdot 2} = 6 \times \frac{p \cdot p+1 \cdot p+2 \cdot p+3 \cdot p+4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - 6 \times \frac{p \cdot p+1 \cdot p+2 \cdot p+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{p \cdot p+1 \cdot p+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$
$\frac{3p^5+15p^4+25p^3+15pp+2p}{3 \cdot 4 \cdot 5}$, comme ci-devant.

Le Problême que vous avés eu deſſein de propoſer aux Geometres n'a aucune difficulté : voici comment j'ai conçu la choſe. Il s'agit de trouver combien la condition de rendre leurs 25 liv. à ceux qui ayant pris 50 billets n'auroient gagné aucun lot dans leurs 50 billets, donne d'avantage ou de deſavantage à celui qui tient la Loterie, ce qui eſt la même choſe que ſi l'on vouloit chercher le ſort de celui qui entreprendroit d'amener avec 20000 dés à 1000000 faces, dont 50 ſeulement ſont marqués avec des points, d'un ſeul coup au moins une des faces marquées ; or le nombre des cas que cela n'arrivera pas eſt 999950^{20000} & le nombre de tous les cas 1000000^{20000} ; d'où il ſuit que cette condition de rendre l'argent à chacun de ceux qui ne gagnent aucun lot dans leurs 50 billets, vaut $\frac{999950}{1000000}^{20000} \times$ 25 l. ce qui fait en tout $\frac{999950}{1000000}^{20000} \times 500000$ l. = (ce qui ſe trouve par les logarithmes) 184064 liv. & environ dix ſols. Donc le deſavantage du Banquier, qui ne retient que 75000 liv. ſera $109064\frac{1}{2}$ liv. de ſorte qu'il ne ſe faut point étonner ſi celui qui a tenu une telle Loterie a fait banqueroute. On pourra par cette même methode & en deux mots réſoudre la propoſition 44 de votre Livre. (*a*)

Voilà, Monſieur, ce que j'ai trouvé néceſſaire à vous écrire ſur ces matieres, une autrefois quand j'aurai plus de loiſir, je prendrai le plaiſir d'examiner les autres choſes curieuſes de votre Ouvrage. Pour ce qui regarde le Traité de feu mon Oncle, j'ai propoſé l'offre que vous avés faite de faire imprimer ce manuſcrit à mon Couſin le fils du défunt, qui en eſt le maître. J'ai auſſi écrit là deſſus à M. Herman, & je l'ai prié de prendre ſoin que ce manuſcrit fût bientôt imprimé ; mais je n'en ai point encore reçu de réponſe. C'eſt grand dommage que la quatriéme partie de ce Traité, qui devroit être la principale, ne ſoit

(*a*) Voyés page 228.

Digitized by Google

point achevée ; elle n'eſt gueres commencée, & ne contient que cinq chapitres, dans leſquels il n'y a que des choſes generales : ce qui en eſt le plus remarquable eſt le chapitre dernier, où il donne la ſolution d'un Problême fort curieux, qu'il a préferé même à la quadrature du cercle, c'eſt de trouver combien il faut faire d'obſervations pour parvenir à un tel degré de probabilité que l'on voudra, & où il démontre en même temps que par les obſervations ſouvent réiterées on peut découvrir fort au juſte la raiſon qu'il y a entre le nombre des cas où arrivera un certain évenement, & le nombre des cas où il n'arrivera pas. Il ſeroit à ſouhaiter que quelqu'un voulût entreprendre d'achever cette derniere partie, & de traiter à fonds les choſes de politique & de morale ; & comme je ne ſçai perſonne qui ſoit plus capable d'y réuſſir que vous, Monſieur, qui en avés donné des preuves ſi excellentes dans votre Ouvrage, je vous prie de pouſſer les vûes que vous avés ſur cette matiere, vous obligerés beaucoup le Public, & particulierement moi qui ſuis avec bien du reſpect & de l'eſtime,

MONSIEUR,

Votre très humble & très
obéiſſant Serviteur,
N. BERNOULLY.

Digitized by Google

Lettre de M. de M... à M. (Nicolas) Bernoulli.

A Montmort le 10 Avril 1711.

Je ne puis vous exprimer, Monſieur, combien je vous ſuis obligé de la complaiſance que vous avés eu de travailler ſur les matieres qui ſont contenues dans la Lettre que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire. J'aurois bien auſſi à vous feliciter ſur tant de beautés dont elle eſt remplie; mais je ſçai que les Philoſophes n'aiment point les louanges, & ſur-tout ceux qui en meritent autant que vous.

Il faut, Monſieur, que vous ayés mal copié votre formule generale ſur le Treize, car je ne peux y trouver mon compte : voici la mienne. Soit n le nombre des cartes, p le nombre de fois que chaque carte differente eſt répetée; ſoit auſſi $\frac{n}{p} = m$ & $n - m = q$, on aura le ſort cherché $= p^m - mp^{m-1} \times q + 1 + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} p^{m-2} \times q + 1 \cdot q + 2 - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{m-3} \times q + 1 \cdot q + 2 \cdot q + 3 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} p^{m-4} \times q + 1 \cdot q + 2 \cdot q + 3 \cdot q + 4 -$ &c. le tout diviſé par autant de produits des nombres $n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4$ &c. qu'il y a d'unités dans $\frac{n}{p}$.

Nota, 1°. Qu'il faut prendre autant de termes de cette ſuite que m exprime d'unités. 2°. Qu'il faut changer tous les ſignes de cette ſuite quand m eſt un nombre pair.

Ainſi je trouve que le ſort de celui qui tient les cartes au commencement du jeu eſt $\frac{3104046414087255 22}{2413478176215356 25}$, & ſon avantage $\frac{6905682378718989 7}{2413478176215356 25}$. Je ne crois pas qu'il y ait d'erreur dans ce calcul; mais ſurement il n'y en a point dans la methode.

J'admire votre formule pour la durée des parties que l'on joue en rabattant; je ſens qu'elle eſt très juſte, mais je ſuis forcé de vous dire que je ne l'entens point. Vous m'euſſiés fait beaucoup de plaiſir, pour m'en faciliter l'intelligence, d'en faire l'application ſur un exemple: par

exemple, ſur celui où l'on joue en ſix parties, & où l'on trouve qu'il y a de l'avantage à parier qu'elle durera moins de 28 coups. Il eſt vrai que je m'étois trompé dans le dénominateur, vous vous y êtes auſſi trompé par mégarde, il faut 134217728, & non 13421738 : ces ſortes de fautes ſe gliſſent fort aiſément, quand on eſt las d'un long calcul. Je commence à douter auſſi-bien que vous que l'on puiſſe parier avec avantage que jouant en douze parties le jeu ſera fini en 124 parties, & non en 122. J'ai fait ce que j'ai pû pour rappeller mes idées ſur ce Problême qui eſt aſſurément fort difficile & fort abſtrait. Je n'ai pû trouver les papiers où les démonſtrations de ces Problêmes ſont brochées, & je crois qu'ils ſont à Paris : auſſi-tôt que j'y ſerai je vous ferai part de ce que j'ai trouvé ſur cette matiere. Je vous dirai ſeulement que nous avons ſuivi l'un & l'autre un chemin fort different, ce que vous connoîtrés fort aiſément, Monſieur, lorſque vous ſçaurés que ce nombre 70970250 eſt la ſomme de ces ſix 34597290, 20030010, 10015005, 4292145, 1560780, 475020, qui ſont le 7, le 8, le 9, le 10, le 11 & le 12e terme de la 30e bande perpendiculaire. Je trouve ſur un Livre où j'avois mis autrefois quelques remarques qu'il y a $\frac{11103333817}{2\times 2435973816 8}$ à parier que jouant en 7 parties le jeu ſera fini en 37 parties au moins, & $\frac{81181602 73}{2\times 858991459 2}$ qu'elle ſera finie en moins de 35, ce qui fait voir qu'il y a avantage en 37, & deſavantage en 35. Vous pourrés verifier ſur votre formule ſi ce calcul eſt juſte : au reſte votre formule m'étonne pour ſa generalité ; je vois que vous en tirés le mieux du monde le Problême cinquiéme de M. Huyguens, & celui de la page 178. (*a*) Il y a près de deux mois que j'ai envoyé à Paris ma ſolution du Problême pour trouver la ſomme des nombres figurés élevés à un expoſant quelconque, elle a été miſe dans les Journaux de France le 23 Mars de cette année.

L'Anagramme que je donne pour la ſolution du Pro-

(*a*) Voyés page 277.

blême que j'y propoſe ſur la Loterie de Loraine, contient ces mots *20000 moins un diviſé par 20000 élevé à l'expoſant 20000*, ce qui donne une ſolution conforme à la vôtre. Ce Problême m'a toujours paru plus curieux que difficile; neanmoins ſa difficulté eſt telle à mon avis, qu'elle peut arrêter des perſonnes qui ne ſeroient point comme vous & Monſieur votre Oncle des Geometres du premier ordre, & capables des plus grandes choſes: Pluſieurs Geometres de mes amis y ont travaillé inutilement. Au reſte la ſolution de ce Problême n'eſt qu'un cas particulier de la formule que j'ai envoyé à M^r votre Oncle dans ma derniere Lettre $\overline{m-1}^{p-q} \times p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \frac{p-3}{4}$ &c. diviſé m^p; mais outre que l'on n'a pas encore beaucoup penſé à ces ſortes de Problêmes de combinaiſons, il falloit s'aviſer de réduire le Problême de la Loterie à une queſtion de dés.

Vous dites, Monſieur, que vous avés calculé le cas pour quatre cartes, *page* 64, (*a*) & que vous avés trouvé comme moi $\frac{130225}{172279}$; mais vous ajoutés que ſelon les regles de ce jeu il ne faut pas ſuppoſer que le jeu ſoit fini, quand celui qui a la main vient à perdre; car alors, dites-vous, il eſt obligé de ceder la main à un autre. C'eſt pourquoi l'avantage de celui qui tient les cartes étant diminué par le deſavantage qu'il a en perdant la main, ne ſera que $\frac{130225}{344558}$ la moitié de ce qui a été trouvé, & vous ajoutés enſuite; ſi l'on ſuppoſe qu'il y ait pluſieurs Joueurs contre celui qui a la main, & que leur nombre ſoit n, ſon avantage ſera $\frac{130225}{344558} \times n$, & celui des autres Joueurs $\frac{130225}{344558} \times n - 2$, $\frac{130225}{344558} \times n - 4$ &c. ſelon le rang que chacun occupe. Vous étendés enſuite cette remarque ſur le Lanſquenet, & il paroît que vous ſeriés d'avis de l'appliquer à toutes ſortes de jeux. Pour moi je crois avoir des raiſons pour penſer autrement: je vais vous les expoſer. Premierement, à l'égard du Treize, il eſt certain que celui qui quitte la main n'eſt point obligé de continuer à

(*a*) Voyés pag. 143.

jouer, & d'ailleurs il n'eſt pas obligé de mettre la même ſomme au jeu ; au contraire il arrive qu'à ce jeu ceux qui ſe ſont apperçus, comme il eſt facile de s'en appercevoir par la pratique, que l'avantage eſt pour celui qui tient les cartes, tiennent tout lorſqu'ils ont la main, & mettent peu d'argent au jeu lorſqu'ils n'ont pas la main. Il eſt encore à remarquer qu'à ce jeu les miſes augmentent ou diminuent ſans ceſſe auſſi-bien que le nombre des Joueurs, & qu'au Lanſquenet le nombre des Joueurs peut diminuer d'une main à l'autre du même Joueur. En ſorte qu'à mon avis on ne peut rien dire d'utile & de certain ſur ces jeux, qu'en prenant le parti de déterminer à chaque coup l'avantage ou le deſavantage de celui qui tient la main par rapport à un nombre déterminé de miſes des Joueurs. Si j'ai fait entrer dans le Lanſquenet la conſideration de l'eſperance que celui qui tient les cartes a de faire la main : ce n'a été que par élegance, car dans le fond cela n'eſt juſte qu'en ſuppoſant que le nombre des Joueurs ſera toujours le même tant que Pierre aura la main, ce qui eſt incertain. Il ſuffit ce me ſemble pour être inſtruit, auſſi parfaitement qu'il ſoit poſſible, des hazards de ces jeux, par exemple du Lanſquenet, de ſçavoir que par rapport à tel nombre de Joueurs & de miſes il y a tant d'avantage & de deſavantage pour chacun des Joueurs, ſelon les differentes places qu'ils occupent.

Voilà, Monſieur, ce que je croyois devoir oppoſer à vos Remarques & à celles que M. votre Oncle avoit deja faites ſur ce ſujet. Si vous trouvés qu'elles ſouffrent quelque replique, vous me ferés plaiſir de m'en avertir. A propos du Lanſquenet, un de mes amis m'a fait obſerver qu'il pourroit bien y avoir des cas au Lanſquenet où celui qui eſt à la gauche de Pierre auroit de l'avantage. Ce ſoupçon paroît bien fondé, & j'aurois ſouhaité l'approfondir pour le cas de cinq ou de ſix coupeurs ; mais la longueur du calcul m'en a juſqu'ici détourné. Ce même Geometre (*a*) qui eſt un Gentilhomme de beaucoup d'eſprit, m'a propoſé depuis peu & a réſolu un Problême fort joli que voici. *Pierre, Paul & Jacques jouent une poulle*

(*a*) M. de Waldegrave.

Digitized by Google

au Trictrac ou au Piquet. Aprés qu'on a tiré à qui jouera il se trouve que Pierre & Paul commencent. On demande, 1°. Quel est l'avantage de Jacques. 2°. Combien il y a à parier que Pierre ou Paul gagneront plûtôt que Jacques. 3°. Combien la poulle doit naturellement durer de parties. Comme vous ne sçavés peut-être pas ce que c'est que jouer une poulle, je vais vous l'expliquer, rien n'est plus simple. Si Pierre gagne, Jacques entrera à la place de Paul & mettra un écu à la poulle; alors si Pierre gagne, la poulle est finie, & Pierre gagne deux écus. Si Jacques gagne, Paul entre à la place de Pierre. En un mot celui qui entre met toujours un écu au jeu, & celui qui gagne deux parties de suite emporte tout ce qui est à la poulle. Si l'on étoit quatre Joueurs, il faudroit gagner trois parties de suite; & quatre si l'on étoit cinq Joueurs. J'ai trouvé qu'à trois Joueurs l'avantage de Jacques, nommant a la mise de chaque Joueur, étoit renfermé dans cette suite $\frac{3}{2^2}a + \frac{5a}{2^5} + \frac{7a}{2^8} + \frac{9a}{2^{11}} + \frac{11}{2^{14}} +$ &c. $- \frac{a}{2} - \frac{a}{2^3} - \frac{2a}{2^4} - \frac{2a}{2^6} - \frac{3a}{2^7} - \frac{3a}{2^9} - \frac{4a}{2^{10}} - \frac{4a}{2^{12}} - \frac{5a}{2^{13}} -$ &c. ce qui se réduit à cette suite plus simple: $\frac{a}{2^3} + \frac{zero}{2^6} - \frac{a}{2^9} - \frac{2a}{2^{12}} - \frac{3a}{2^{15}} - \frac{4a}{2^{18}} -$ &c. $\frac{a}{8} - \frac{1}{8^2} \times \frac{a}{8} + \frac{2a}{8^2} + \frac{3a}{8^3} + \frac{4a}{8^4} +$ &c. $= \frac{a}{8} - \frac{a}{8^2} \times \overline{m + 2mm + 3m^3 + 4m^4 + 5m^5}$, en supposant $m = \frac{1}{8}$. Or pour trouver la somme de cette suite $m + 2mm + 3m^3 + 4m^4$, &c. où les coefficiens & les exposans sont en progression arihtmetique, j'observe que

$$\begin{aligned}
\frac{m}{1-m} &= m + mm + m^3 + m^4 + m^5 \\
\frac{mm}{1-m} &= \phantom{m + {}} mm + m^3 + m^4 + m^5 \\
\frac{m^3}{1-m} &= \phantom{m + mm + {}} + m^3 + m^4 + m^5 \\
\frac{m^4}{1-m} &= \phantom{m + mm + m^3 + {}} m^4 + m^5
\end{aligned}$$

D'où je conclus que la somme cherchée est égale à celle-ci $= \frac{m}{1-m} + \frac{mm}{1-m} + \frac{m^3}{1-m} + \frac{m^4}{1-m}$ &c. $= \frac{m}{\overline{1-m}^2}$, & par consequent l'avantage de Jacques $\frac{6}{49}$. J'ai encore trouvé que quoiqu'il y ait de l'avantage pour Jacques, il y a cinq

contre 4 à parier que Pierre gagnera la poulle plûtôt que Jacques.

Si l'on veut ſçavoir combien la poulle durera entre trois Joueurs, on trouvera qu'il y a à parier trois contre un qu'elle ne durera pas plus de trois parties, 7 contre 1, 15 contre 1, 31 contre 1, qu'elle ne durera pas plus de 5, 7, 9, parties; j'ai pareillement cherché combien la poulle dureroit entre quatre Joueurs, & j'ai trouvé cette ſuite $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{19}{32}$, $\frac{43}{64}$, $\frac{94}{128}$, $\frac{201}{256}$, $\frac{423}{512}$, $\frac{880}{1024}$, $\frac{1815}{2048}$, $\frac{3719}{4096}$, &c. dont la ſuite n'étoit pas aiſée à remarquer. Jai voulu chercher le ſort des Joueurs lorſqu'il y en a quatre; & auſſi combien durera la poulle lorſqu'il y a cinq ou ſix Joueurs; mais cela m'a paru trop difficile, ou plûtôt j'ai manqué de courage, car je ſerois ſûr d'en venir à bout.

J'ai travaillé pendant quelques jours à réſoudre ce Problême, tirant d'un jeu de cartes un certain nombre de cartes à volonté; ſçavoir en combien de façons on peut amener un certain point. Ce Problême a beaucoup de rapport avec celui des dés à la page 141, (*a*) dont je vous ai envoyé la ſolution; mais il a des difficultés particulieres, & je n'ai pû en venir à bout qu'en ſuppoſant qu'il n'y ait ni valets, ni dames, ni rois.

On m'a envoyé depuis peu de Paris un Livre qui a pour titre, *Traité du Jeu*, c'eſt un Livre de morale. L'Auteur paroît judicieux & écrit bien; mais dans les endroits où il parle de l'uſage de la Geometrie pour déterminer les hazards des Jeux, il me paroît qu'il ſe trompe : En voici un Exemple. L'Auteur cite comme une choſe évidente, qu'un Joueur qui joue deux coups contre l'autre un, doit mettre au jeu deux contre un; cependant il eſt certain que cela eſt faux. Si l'on joue avec un dé dont le nombre de faces ſoit p, j'ai trouvé & vous trouverés très aiſément que l'avantage d'un Joueur, qui jouant deux coups contre l'autre un, parie ſeulement 2 contre un, eſt

$$\frac{\overline{p-1}\times pp-\frac{1}{2}\times 2\times\overline{p-1}^{3}+3\times\overline{p-1}^{2}+p-1}{p^{3}}=\frac{p-1}{2pp},$$

(*a*) Voyés page 46.

ce

ce qui fait voir que l'avantage diminue ſelon que le nombre des faces eſt plus grand ; mais qu'il y a toujours de l'avantage. Pourroit-on dire qu'au petit palet, ou au franc du carreau, cet avantage ſeroit nul à cauſe de la diviſibilité de la matiere à l'infini ?

J'ai entrepris depuis quelque temps d'achever la ſolution des Problêmes que je propoſe à la fin de mon Livre ; je trouve qu'au Her, lorſqu'il ne reſte plus que deux Joueurs Pierre & Paul, l'avantage de Paul eſt plus grand que $\frac{1}{85}$, & moindre que $\frac{1}{84}$. Ce Problême a des difficultés d'une nature ſinguliere. J'ai commencé auſſi le Problême des Tas, & j'ai trouvé que lorſque les Tas ne ſont que de deux cartes, & que les cartes ne ſont que deux as, deux deux, deux trois, deux quatre, &c. le ſort de celui qui parie de faire les Tas eſt exprimé par la formule $\frac{p-1}{2p-1}$, j'appelle p le nombre des Tas. La difficulté ſera beaucoup plus grande dans la ſuppoſition ordinaire de quatre as, quatre deux, quatre trois, &c. & des Tas compoſés de quatre cartes. Il eſt temps de finir cette Lettre. Le plaiſir que je trouve à m'entretenir avec vous ſur ces matieres m'emporte trop loin, & je dois craindre de vous ennuyer. Je vous prie, Monſieur, d'aſſurer M. votre Oncle de la veneration parfaite que j'ai pour lui, & de me croire, Monſieur, avec une eſtime infinie,

Votre, &c.

Poſt ſcript. Je vous envoye le Memoire que j'ai donné dans les Journaux de France ſur la maniere de trouver la ſomme des nombres qui ont une difference conſtante. La methode de M. votre Oncle pour trouver les nombres figurés dont il vous a plu me faire part eſt très belle & très differente de la mienne. Cette maniere d'employer les coefficiens indéterminés dont M. Deſcartes eſt l'inventeur, nous a valu preſque toutes les grandes découvertes qui ont été faites en Geometrie ; mais l'application en eſt

Digitized by Google

ſouvent difficile, & elle n'a encore été employée que par les grands Maîtres. Je propoſe aux Geometres la ſolution du Problême ſur la Loterie de Loraine. Je vous invite, Monſieur, à rendre publique celle que avés trouvée. Comme il ne reſte preſque plus d'exemplaires de mon Livre, je crois que j'en pourrai donner bientôt une nouvelle édition. Lorſque j'y ſerai déterminé, je vous demanderai la permiſſion, & à M. votre Oncle, d'y inſerer vos belles Lettres qui en feront le principal ornement. On me conſeille d'en changer l'ordre & la forme, & de raſſembler dans la premiere Partie toute la Theorie des Combinaiſons. J'ai pareillement deſſein de donner les démonſtrations de quantités de propoſitions & de ſolutions difficiles que j'avois obmiſes à deſſein dans la premiere édition. Vous m'obligerés beaucoup, Monſieur, de me donner votre avis là-deſſus.

Il n'en eſt pas ce me ſemble de ces démonſtrations comme des démonſtrations de Geometrie, celles-ci touchant les nombres & les combinaiſons ſont infiniment plus embarraſſantes, & on peut les avoir très nettement dans l'eſprit ſans pouvoir les mettre ſur le papier. Seriés-vous content, par exemple, de la démonſtration qui ſuit pour la propoſition 14, page 97. (*a*) Vous me faites trop d'honneur, Monſieur, de me croire capable de remplir les vûes qu'avoit feu M. votre Oncle, de traiter par Geometrie les choſes de politique & de morale. Pour moi plus je me tâte & plus je reconnois mon inſuffiſance à cet égard: j'ai quelques idées & quelques materiaux, mais c'eſt encore peu de choſes. Il s'agit de découvrir des verités de pratique & à l'uſage de la ſocieté civile. Il faut ſe fonder ſur des hypotheſes exactes & bien averées, conſerver par-tout cette exactitude dont les Geometres ſe piquent plus que le reſte des autres hommes, tout cela demande une forte tête & un très grand travail. J'ai lû depuis peu un fort beau morceau de M. votre Oncle dans les Memoires de l'Academie de Berlin. Je ſuis étonné de voir les Journeaux de Leipſic ſi dégarnis de morceaux de Mathematiques:

(*a*) Voyés page 44.

Digitized by Google

ils doivent en partie leur réputation aux excellens Memoires que Meſſieurs vos Oncles y envoyoient ſouvent : les Geometres n'y trouvent plus depuis cinq ou ſix ans les mêmes richeſſes qu'autrefois, faites-en des reproches à M. votre Oncle, & permettés-moi de vous en faire auſſi, *Luceat lux veſtra coram hominibus.* Je ſuis, &c.

Lettre de M. (Nicolas) Bernoulli à M. de M...

A Bâle ce 10 Novembre 1711.

MONSIEUR,

Je ſuis tout confus d'avoir ſi long-temps gardé le ſilence, & je ne ſçai preſque comment vous en faire mes excuſes ; je vous dirai ſeulement que je n'ai pas pû plûtôt ſatisfaire au déſir que j'avois de répondre à tous les points de votre Lettre, & de réſoudre les Problêmes que vous m'y propoſés, à cauſe d'autres études & affaires, qui interrompant ſouvent mes calculs, ne me laiſſoient pas tout le temps qui m'étoit néceſſaire pour m'appliquer à nos matieres. Mais voulant enfin m'acquitter de mon devoir, j'ai réſolu de donner congé pour un peu aux autres études, & de rompre à cette heure cet ennuyeux ſilence, que je vous prie de me pardonner, en vous promettant que je tâcherai à l'avenir d'être plus exact & plus régulier. Voici donc, Monſieur, ma réponſe que je ferai auſſi courte qu'il ſera poſſible.

Vous avés raiſon de dire que vous ne trouvés pas votre compte à ma formule pour le Treize, car il s'y eſt gliſſé une erreur ; il faut mettre $S = \frac{1}{1} - \frac{n-p}{1\cdot 2\cdot n-1} + \frac{n-p\cdot n-2p}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n-1\cdot n-2} - \frac{n-p\cdot n-2p\cdot n-3p}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3} +$ &c. au lieu de $S = \frac{1}{1} - \frac{n-p}{1\cdot 2\cdot n-1} + \frac{n-2p}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n-2} - \frac{n-3p}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot n-3} +$ &c. Cette erreur, à ce que je m'en puis ſouvenir, vient de ce qu'en faiſant le calcul j'avois mis ſur la table ſeulement ces der-

niers facteurs des termes de chaque fraction, pour marquer la loi de la progreſſion qu'il y a entre les termes de cette ſuite ; d'où il eſt arrivé qu'enſuite ne me ſouvenant plus de la vraye ſolution, j'ai laiſſé échaper les autres facteurs. Vous verrés que cette formule ainſi corrigée conconviendra exactement avec la vôtre. Le nombre $\frac{690568237871892897}{2413478176215356251}$ que vous donnés pour le cas de $n = 52$ & $p = 4$ n'eſt pas encore le juſte, il faut ſelon votre formule & la mienne $\frac{690568237068692897}{2413478176215356251} = \frac{767298041187443}{2681642418017062}$. La methode dont je me ſuis ſervi pour trouver cette formule eſt la même que celle dont je m'étois ſervi autrefois dans mes Remarques latines pour la réſolution du cas particulier de $p = 1$.

Je ſuis fâché que les ſuites $1 \times \overline{p^{2k-2ts} + q^{2k-2ts}} + h \times \overline{p^{2k-2ts-1}q + q^{2k-2ts-1}p} + \frac{h.h-1}{1.2} \times \overline{p^{2k-2ts-2}qq + q^{2k-2ts-2}pp} + \frac{h.h-1.h-2}{1.2.3} \times \overline{p^{2k-2ts-3}q^3 + q^{2k-2ts-3}p^3}$ + &c. juſqu'à $\frac{h.h-1.h-2\cdots h-k+ts+1}{1.2.3\cdots k-ts} \times pq^{k-ts} \times \frac{p^{ts+m}q^{ts}}{p^h}$, & $1 \times \overline{p^{2k-2ts-2n} + q^{2k-2ts-2n}} + h \times \overline{p^{2k-2ts-2n-1}q + q^{2k-2ts-2n-1}p} + \frac{h.h-1}{1.2} \times \overline{p^{2k-2ts-2n-2}qq + q^{2k-2ts-2n-2}pp}$ + &c. juſqu'à $\frac{h.h-1.h-2\cdots h-k+ts+n+1}{1.2.3\cdots k-ts-n} \times pq^{k-ts-n} \times \frac{p^{ts+s}q^{ts+n}}{p^h}$ que j'ai données pour déterminer la durée des parties que l'on joue en rabattant, ne vous ayent point été aſſés intelligibles. Il eſt dans ces ſortes de matieres quelquefois difficile de ſe faire bien entendre, ſur-tout quand on ne prend pas garde d'éviter toutes les ambiguités qui s'y peuvent rencontrer, comme je croi qu'il m'eſt arrivé ; car il me ſemble que la cauſe pour quoi vous ne m'avés pas entendu, conſiſte uniquement en ce que j'ai dit, qu'il faut mettre pour t toutes les valeurs qu'il peut avoir depuis o juſqu'au plus grand, en quoi il y a un peu d'ambiguité que

Digitized by Google

j'aurois évité en mettant dans la formule pour t une autre lettre, par exemple v, & en disant que dans l'application il faut mettre pour v successivement 0, 1, 2, 3, 4, &c. jusquà t, qui exprime le nombre de fois que s est contenu dans k. Pour vous en donner un plus grand éclaircissement, je vais vous montrer comment j'ai tiré de ces suites une regle generale pour les parties qui se jouent à un jeu égal, laquelle j'appliquerai ensuite à quelques cas particuliers de sept parties. Il est clair que lorsque $p = q = 1$, & $r = p + q = 2$, ces deux suites se changent en celles-ci, $1 \times 2 + h \times 2 + \frac{h \cdot h-1}{1 \cdot 2} \times 2 + \frac{h \cdot h-1 \cdot h-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times 2 +$ &c. jusqu'à $\frac{h \cdot h-1 \cdot h-2 \cdots h-k+vs+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k-vs} \times 1$, le tout divisé par 2^h, & $1 \times 2 + h \times 2 + \frac{h \cdot h-1}{1 \cdot 2} \times 2 + \frac{h \cdot h-1 \cdot h-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times 2 +$ &c. jusqu'à $\frac{h \cdot h-1 \cdot h-2 \cdots h-k+vs+n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k-vs-n} \times 1$. Le tout divisé par 2^h (je mets ici v au lieu de t, par la raison que je viens de dire.) Or les termes de ces suites ne sont autre chose que ceux de la bande perpendiculaire du triangle arithmetique de M. Pascal, dont le quantiéme est exprimé par $h + 1$, multipliés chacun par 2, hormis le dernier; d'où il suit que leurs sommes sont justement les sommes d'autant de termes de la bande suivante, dont le quantiéme est $h + 2$; puisque donc le nombre des termes de la premiere suite est $k - vs + 1$, & celui de la seconde $k - vs - n + 1$, les sommes de toutes les valeurs possibles de ces deux suites, en prenant pour v successivement 0, 1, 2, 3, 4, &c. jusqu'à t, seront $[\overline{k+1}] + [\overline{k-s+1}] + [\overline{k-2s+1}] + [\overline{k-3s+1}]$ + &c. Et $[\overline{k-n+1}] + [\overline{k-s-n+1}] + [\overline{k-2s-n+1}] + [\overline{k-3s-n+1}]$ + &c. Par cette marque arbitraire $[\overline{k+1}]$ j'entens la somme d'autant de premiers termes de la bande perpendiculaire qui respond au quantiéme $h + 2$, qu'il y a d'unités dans $k + 1$. La difference de ces deux sommes $[\overline{k+1}] - [\overline{k-n+1}] + [\overline{k-s+1}] - [\overline{k-s-n+1}] + [\overline{k-2s+1}] - [\overline{k-2s-n+1}] +$ &c. divisée par 2^h exprimera le sort de celui qui parieroit que Pierre gagnera

la partie au moins en h coups. Pour appliquer ceci à quelques cas particuliers; ſuppoſons, par exemple, qu'on joue pour ſept parties, & qu'on veuille ſçavoir combien on pourroit parier au commencement du jeu qu'un des Joueurs, par exemple Pierre, gagnera la partie au moins en 35 coups. L'on aura $m = n = 7$, $s = m + n = 14$, $h = 35 = 7 + 2k$: donc k ſera $= 14$, & $t = 1$; & la formule $[\overline{k+1}] - [\overline{k-n+1}] + [\overline{k-s+1}] -$ &c. diviſée par 2^h ſe changera en celle-ci $[\overline{15}] - [\overline{8}] + [\overline{1}]$ diviſée par 2^{35}, ce qui montre qu'il faut diviſer la ſomme du 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9e & 1er terme de la 37e bande perpendiculaire, c'eſt à dire 8338160273, par 2^{35} pour avoir le ſort de celui qui parieroit que Pierre aura gagné au moins en 35 parties, & qu'il la faut diviſer par 2^{34} pour avoir le ſort de celui qui parieroit que le jeu ſera fini en 35 parties, conformément à votre calcul; mais pour 37 parties je trouve qu'il faut $\frac{35102333827}{2\times 34359738368}$, & non $\frac{35103333817}{2\times 34359738368}$, comme vous avés écrit par mégarde. Si l'on ſuppoſe que $m = 5$, $n = 9$, $s = 14$, & $h = 35$, c'eſt à dire, que Pierre ait déja gagné deux parties, & qu'on veuille ſçavoir la probabilité qu'il y a que Pierre ou Paul gagnera la partie en 35 coups, on trouvera $[\overline{16}] - [\overline{7}] + [\overline{2}]$ diviſé par 2^{35} ou $\frac{139144105449}{34359738368}$ pour le ſort de celui qui parieroit que Pierre gagnera la partie en 35 coups, & $[\overline{14}] - [\overline{9}]$ diviſé par 2^{35} ou $\frac{45116027732}{34359738368}$ pour le ſort de celui qui parieroit que Paul la gagnera en 35 coups. La ſomme de ces deux ſorts $\frac{184260133281}{34359738368}$ exprimera le ſort de celui qui parieroit que la partie ſera décidée en 35 coups, ce qui fait voir qu'il y auroit de l'avantage. Je crois que cela ſuffira pour vous faire entendre le ſens de ma formule : paſſons à d'autres choſes.

Comme vous m'avés invité de rendre publique ma ſolution de votre Problême ſur la Loterie de Loraine, je l'ai envovée à M. Varignon il y a quatre mois pour la faire inſerer dans le Journal des Sçavans, où elle parut le

Digitized by Google

treiziéme Juillet, ce que vous ſçaurés peut-être déja. Pour ce qui eſt de votre ſolution, j'ai remarqué qu'outre que votre Anagramme $4a, 5e, 5i, 130, 3u, 2l, 2n, 2p, 4s, 3.2, c, d, m, r$, ne convient pas exactement à ces mots : *20000 moins un diviſé par 20000 élevé à l'expoſant 20000*, il faut encore ajoûter, *multiplié par 500000* ; car l'Anagramme n'auroit aucun ſens juſte, & ne donneroit point la valeur cherchée 184064. De plus ce que vous dites que la ſolution de ce Problême n'eſt qu'un cas particulier de la formule $m - 1^{p-q} \times p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4} \times$ &c. diviſé par m^p, eſt ſeulement vrai lorſque le nombre qui exprime combien de billets on doit prendre, afin que n'ayant gagné aucun lot dans tous ces billets, on puiſſe reprendre ſon argent, eſt juſtement une partie aliquote du nombre de tous les billets ; car pour réduire les cas où cela ne ſe trouve pas au Problême ſur les dés, pour amener un certain nombre de points, il faudroit ſuppoſer que chaque dé ait pluſieurs faces marquées du point qu'on ſe propoſe d'amener, c'eſt à quoi votre formule ne s'étend point. Mais à quoi ſert-il d'aller chercher ſi loin la maniere de réſoudre ce Problême, ne voit-on pas d'abord & plus aiſément qu'il n'eſt qu'un cas particulier de la propoſition 44 (*a*) de votre Livre ?

Je ſuis ſurpris, Monſieur, de voir vos objections contre mes Remarques ſur les Jeux dans leſquels la main tourne de l'un à l'autre ; il me ſemble que vous avés bien tort de m'oppoſer des choſes qui ſont auſſi-bien contre vous que contre moi ; car ſi vous êtes en état de ſuppoſer, par exemple au Lanſquenet, que le nombre des Joueurs & des miſes ſoit toujours le même, & que le jeu continue tant que Pierre aura la main, pourquoi ne me ſeroit-il pas permis de ſuppoſer encore la même choſe, même après que Pierre aura perdu la main ? Vous dites qu'on ne peut rien dire d'utile & de certain ſur ces Jeux, parceque le nombre des miſes & des Joueurs y peut toujours varier : cela eſt vrai, & c'eſt auſſi la raiſon pourquoi

(*a*) Voyés pag. 228.

on doit faire une certaine hypothese à laquelle on puisse s'en tenir dans le calcul. J'ai donc fait cette hypothese, sçavoir que l'on continue à jouer lorsqu'on vient de perdre la main, parcequ'elle est plus naturelle & plus conforme à ce qui arrive ordinairement, que la vôtre qui suppose que le jeu continue tant que Pierre aura la main, ce qui est une condition qui ne se pratique guere entre les Joueurs, sur-tout quand ils sçavent qu'il est avantageux d'avoir la main. Mais vous m'opposés encore que, par exemple au Treize, celui qui quitte la main n'est point obligé de continuer à jouer, à quoi je réponds qu'un honnête homme s'y doit tenir obligé, quoiqu'on ne soit pas expressément convenu de cela; car il est certain qu'ordinairement on commence le jeu dans le dessein de faire un assés grand nombre de parties, & non de finir aussi-tôt après le 1er coup, ce qui engage tacitement les Joueurs de continuer le jeu pendant un certain temps. Il ne seroit donc pas permis de quitter le jeu après avoir eu l'avantage de la main, à moins qu'on ne veuille passer pour un homme qui songe plûtôt à attraper l'argent des autres qu'à les divertir. Vous voyés par là, Monsieur, que vous n'auriés pas mal fait de faire entrer en consideration, non seulement l'avantage qu'on a en conservant la main; mais aussi le desavantage qu'on a en la perdant.

Comme je n'entends pas bien les regles du Lansquenet, ni ce qu'on appelle réjouissance, arroser, cartes de reprise, &c. je n'ai pû examiner s'il y pouvoit avoir des cas où celui qui est à la gauche de Pierre auroit de l'avantage, comme vous dites qu'il vous a été proposé par un de vos amis. Mais pour ce qui de l'autre Problême que ce Geometre vous a proposé, je l'ai résolu generalement dans tous ses trois points. Soit nommé n le nombre des parties qu'il faut gagner de suite, ou le nombre des Joueurs moins un; Pierre & Paul deux Joueurs qui se suivent immédiatement dans l'ordre de jouer; en sorte que Paul, par exemple, entre au jeu immédiatement après Pierre; a la probabilité qu'il y a que Pierre gagnera la poulle; b la robabilité qu'il y a que Paul la gagnera; A l'avantage ou

le

le desavantage de Pierre ; B l'avantage ou le desavantage de Paul, je trouve generalement $b = \frac{a \times 2^n}{1+2^n}$, & $B = \frac{A+a \times 2^n - nb}{1+2^n}$. La premiere de ces deux équations montre qu'il y a à parier $1+2^n$ contre 2^n que Pierre gagnera la poulle plûtôt que Paul, ce qui donne dans le cas particulier de $n = 2$, cinq contre quatre, ainsi que vous l'avés trouvé. Il est aisé de trouver par ces deux équations ou Theorêmes, l'avantage ou le desavantage de chaque Joueur, & la probabilité que chacun a de gagner la poulle, car la somme des avantages & des desavantages de tous les Joueurs ensemble doit être égale à zero ; comme aussi la somme des probabilités qu'ils ont de gagner la poulle, doit faire une certitude entiere ou 1. Par exemple dans le cas des trois Joueurs ou de $n = 2$, on trouve d'abord que la probabilité de gagner qu'ont le premier & le second, c'est à dire ceux qui jouent les premiers, est $= \frac{5}{14}$, & que celle qu'a le troisiéme ou celui qui entre au jeu le dernier, est $= \frac{2}{7}$, ayant substitué ces valeurs dans la seconde équation, & ayant nommé x l'avantage ou le desavantage du premier, celui du second sera aussi $= x$, & celui du troisiéme $= \frac{x + \frac{5}{14} \times 4 - 2 \times \frac{2}{7}}{5} = \frac{4x + \frac{6}{7}}{5}$, à quoi, si l'on ajoute $2x$, on aura $\frac{14x + \frac{6}{7}}{5} = 0$; d'où l'on tire $x = -\frac{3}{49}$, ce qui fait voir que les deux premiers ont du desavantage, & que l'avantage du troisiéme est $= \frac{6}{49}$, ainsi que vous l'avés trouvé par une voye fort differente de celle-ci. J'ai aussi fait l'application pour les cas de quatre & de cinq Joueurs, & j'ai trouvé que dans une poulle à 4 Joueurs le desavantage des deux premiers est $= -\frac{2700}{12201}$, l'avantage du troisiéme $= \frac{1176}{12201}$, & l'avantage du quatriéme $= \frac{4224}{12201}$; mais à cinq Joueurs le desavantage des deux premiers est $= -\frac{24059828}{1311079601}$, le desavantage du 3^e $= \frac{-1402712}{1311079601}$, l'avantage du quatriéme $= \frac{16789760}{1311079601}$, & celui du cinquié-

me $= \frac{3171608}{11079601}$. Pour ce qui eſt du dernier point de ce Problême, ſçavoir combien la poulle doit naturellement durer de parties, j'en ai trouvé une formule generale qui exprime la probabilité qu'il y a qu'elle ſera décidée au moins en p parties, la voici : $\frac{p+1}{1.2^n} - \frac{p-n.p-n+3}{1.2.2^{2n}} +$

$\frac{p-2n.p-2n+1.p-2n+5}{1.2.3.2^{3n}} - \frac{p-3n.p-3n+1.p-3n+2.p-3n+7}{1.2.3.4.2^{4n}}$

$+ \frac{p-4n.p-4n+1.p-4n+2.p-4n+3.p-4n+9}{1.2.3.4.5.2^{5n}} -$ &c. *

Il faut prendre autant de termes de cette ſuite qu'il y a d'unités dans $\frac{p+n}{n}$. Ou ſi vous aimés mieux des ſuites telles que vous en avés donnés pour trois & quatre Joueurs, voici une methode generale de les trouver. Il faut conſtruire une ſuite de fractions, dont les dénominateurs croiſſent en raiſon double, & dans laquelle le premier terme ſoit $\frac{1}{2}$ élevé à $n-1$, c'eſt à dire, à l'expoſant exprimé par le nombre des Joueurs moins 1, & le numerateur de chaque autre terme la ſomme des numerateurs d'autant de termes précedens qu'il y a d'unités dans $n-1$. Cela étant fait, les ſommes des termes de cette ſuite donneront les termes de la ſuite cherchée ; ſçavoir, le premier terme ſera auſſi le premier de la ſuite cherchée, la ſomme des deux premiers fera le ſecond terme, la ſomme des trois premiers fera le troiſiéme terme, celle des quatre premiers le quatriéme, & ainſi de ſuite. Par cette maniere on trouvera pour cinq Joueurs cette ſuite $\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{8}{32}, \frac{20}{64}, \frac{47}{128}, \frac{107}{256}, \frac{238}{512}, \frac{520}{1024}, \frac{1121}{2048}, \frac{2391}{4096}$, &c. dont les termes ſont les ſommes de celle-ci $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{2}{32}, \frac{4}{64}, \frac{7}{128}, \frac{13}{256}, \frac{24}{512}, \frac{44}{1024}, \frac{81}{2048}, \frac{149}{4096}$, &c. dans laquelle chaque numerateur eſt la ſomme de trois précedens. Je m'étonne qu'en donnant vos deux ſuites pour le cas de trois & de quatre Joueurs vous n'ayés pas obſervé la progreſſion qu'il y a entre ces ſuites,

* *Nota.* Les nombres formés de cette maniere ont pluſieurs propriétés très ſingulieres, Monſieur de Caſſini en a donné quelques-unes, & les a appliqué à la Theorie des Planettes.

Digitized by Google

& qu'au contraire il vous ait paru trop difficile ou trop pénible de les continuer pour un plus grand nombre de Joueurs; mais je ne m'étonne pas que vous ayés trouvé la même difficulté en voulant chercher le ſort des Joueurs, lorſqu'il y en a plus que trois, car il eſt extrêmement difficile de le trouver par la voye des ſuites infinies, comme vous avés fait pour le cas de trois Joueurs; & ſi je n'avois pas trouvé une methode de réſoudre ce Problême par l'analyſe, il m'auroit été abſolument impoſſible d'en venir à bout. J'aurois bien voulu vous faire part de cette methode; mais comme elle ſeroit trop longue pour la mettre ici, & que j'aurois de la peine à me faire bien entendre, je vous laiſſerai le plaiſir de la trouver par vous-même.

Je crois bien, Monſieur, que vous n'avés encore pû réſoudre ce Problême, *tirant d'un jeu de cartes un certain nombre de cartes, ſçavoir en combien de façons on peut amener un certain point à volonté*, qu'en ſuppoſant qu'il n'y ait ni Valets, ni Dames, ni Rois; car ces trois eſpeces de cartes étant comptées pour un dix ou pour quelqu'autre point, font qu'il n'y a pas un égal nombre d'as, de deux, de trois, de quatre, &c. Or il eſt fort mal-aiſé de trouver pour cette ſuppoſition une formule generale; & l'on ne ſçauroit prendre une meilleure route pour réſoudre ce Problême en general, que de chercher premierement toutes les diſpoſitions differentes des nombres qui peuvent former le point propoſé, & enſuite combien il y a de cas ou chacune de ces diſpoſitions en particulier peut arriver: Par exemple, ſi l'on veut ſçavoir combien il y a de cas pour amener le point 12 en trois cartes, il faut chercher d'abord toutes les differentes manieres par leſquelles on peut partager le nombre 12 en trois parties, dont chacune ſoit un nombre entier, on en trouvera douze, ſçavoir 1.1.10; 1.2.9; 1.3.8; 1.4.7; 1.5.6; 2.2.8; 2.3.7; 2.4.6; 2.5.5; 3.3.6; 3.4.5; & 4.4.4. Si l'on veut maintenant ſuppoſer que generalement le nombre des as ſoit $= a$, celui des deux $= b$, celui des trois $= c$, celui des quatre $= d$, &c. on aura

$\frac{a \cdot a-1}{1 \cdot 2} \times k$ pour le nombre qui exprime en combien de façons la premiere de ces diſpoſitions 1 . 1 . 10 peut arriver; $a \times b \times i$ pour le nombre des cas de la ſeconde diſpoſition 1 . 2 . 9; $a \times c \times h$ pour celui de la troiſiéme 1 . 3 . 8; $a \times d \times g$ pour celui de la quatriéme 1 . 4 . 7; $a \times e \times f$ pour celui de la cinquiéme 1 . 5 . 6; $\frac{b \cdot b-1}{1 \cdot 2} \times h$ pour celui de la ſixiéme 2 . 2 . 8, & ainſi de ſuite.

Je trouve fort juſte le ſentiment que vous donnés ſur le Livre intitulé *Traité du Jeu*, dont l'Auteur eſt Mr Barbeyrac, qui eſt à préſent Profeſſeur en Droit à Lauſanne en Suiſſe; mais votre critique ſur l'exemple particulier que vous allegués ne me paroît pas bien fondé. Pour moi je ſuis plûtôt du ſentiment de l'Auteur que du vôtre; car il eſt évident qu'entre deux Joueurs celui qui joue deux coups contre l'autre un, & met auſſi deux écus contre un, peut être conſideré comme deux perſonnes, dont chacune joue un coup, & met au jeu un écu; or comme dans ce dernier cas il n'y a point d'inégalité, il n'y en aura pas non plus dans le premier. Ce que vous avés trouvé que ſi l'on joue avec un dé, dont le nombre des faces ſoit p, à qui amenera le plus haut point, celui qui jouant deux coups contre un, parie ſeulement deux contre un, a de l'avantage, & que cette avantage eſt $\frac{p-1}{2pp}$, vient de ce que vous avés ſuppoſé que chacun retire ſon argent, lorſque celui qui joue deux coups, que je nommerai Pierre, amene un point égal à celui de ſon antagoniſte, qui ſoit appellé Paul, ſoit qu'il le faſſe toutes les deux fois de ſuite, ou ſeulement une fois, au lieu que dans ce dernier cas vous auriés dû ſuppoſer que les deux Joueurs Pierre & Paul partagent l'argent également; car Paul en amenant le même point que Pierre, acquiert le même droit que lui, & Pierre perd la prérogative qu'il avoit auparavant. Si l'on veut neanmoins faire une autre ſuppoſition que celle-là, qui me ſemble être la plus naturelle, ce ſera ſelon cette ſuppoſition que ſe changera auſſi le ſort des Joueurs. Pour le trouver generalement, ſoit nommé x l'avantage de Pierre, y ſon avantage quand il n'amene qu'une fois le même point que Paul, & z ſon avantage lorſqu'il amene toutes les deux fois le même

point que Paul ; on trouvera $x = \frac{2z+2py-2y+p-1}{2pp}$. Si l'on met $z = y = 0$, qui eſt votre hypotheſe, on aura $x = \frac{p-1}{2pp}$, ainſi que vous l'avés trouvé. Si $z = y = -\frac{1}{2}$, c'eſt à dire, ſi l'on ſuppoſe que les Joueurs partagent l'argent du jeu également, quand ils amenent tous deux un point égal, ſoit que Pierre le faſſe une ou deux fois, Pierre aura du deſavantage, & ce deſavantage ſera $= -\frac{1}{2pp}$. Si $z = y = x$, c'eſt à dire ſi l'on ſuppoſe que les Joueurs, après avoir amené le même point, recommencent le jeu, l'égalité trouvée ſe changera en celle-ci $x = \frac{2px+p-1}{2pp}$, ce qui donnera $x = \frac{1}{2p}$. Enfin ſi $z = 0$, & $y = -\frac{1}{2}$, qui eſt la ſuppoſition dont j'ai parlé ci-deſſus, on trouvera $x = 0$, ce qui montre qu'alors Pierre n'auroit ni avantage ni deſavantage, conformément à ce qui a été dit par notre Auteur, qui par conſequent a pû ſoutenir avec raiſon qu'un Joueur qui joue deux coups pendant que l'autre n'en joue qu'un, doit mettre double contre ſimple. Il y a cependant un autre endroit qui fait voir que cet Auteur n'entend pas aſſés bien ces choſes ; c'eſt à la page 122, où il cite fort mal à propos, à ce qui me ſemble, ces paroles de M. de Fontenelle dans l'éloge de feu mon Oncle : *Il eſt à remarquer que ſouvent les avantages ou les forces ſont incommenſurables, de ſorte que les deux Joueurs ne peuvent jamais être parfaitement égalés*, leſquelles ne prouvent pas ce que l'Auteur avoit intention de prouver ; car pour en comprendre bien le ſens, & ce que M. de Fontenelle a voulu dire, il faut ſçavoir que feu mon Oncle a laiſſé, outre le Traité Latin *De Arte conjectandi*, un autre Manuſcrit écrit en François, dans lequel il traite du Jeu de Paume en particulier, & où il a réſolu pluſieurs queſtions que l'on peut former ſur ce Jeu, dont ces deux ſont les principales. 1°. Si l'on ſuppoſe les Joueurs inégaux, on demande quel avantage le plus fort doit accorder à l'autre pour que le jeu ſoit égal ou réciproquement. 2°. Si l'on ſuppoſe que l'un ait accordé un certain avantage, & que par là leur ſort ſoit fait égal, on demande de combien il eſt plus fort, ou quelle raiſon il y a entre leurs habilités ; & c'eſt dans ce dernier Problême qu'il a trouvé que leurs forces ou habilités ſeront in-

Digitized by Google

commenſurables, & qu'on ne ſçauroit exprimer par aucun nombre la raiſon qu'il y a entr'elles. Je m'étonne que vous n'ayés point parlé de ce Jeu dans votre Livre. Il eſt vrai que, la recherche des Problêmes ſemblables n'eſt pas facile, mais elle eſt fort curieuſe, & ne manque pas d'uſage. En voilà quelques-uns dont vous pourrés chercher la ſolution pour voir ſi elle s'accordera avec celle de mon Oncle. 1. *Pierre & Paul jouent à la Paume en quatre parties liées, Pierre eſt deux fois plus habile que Paul, on demande quel avantage Pierre doit accorder à Paul?* 2. *Pierre accorde à Paul demi-trente, on demande de combien il eſt plus habile que Paul?* 3. *Pierre accorde à Paul demi-30, & à Jean quarante-cinq, on demande combien Paul peut accorder à Jean?* 4. *Pierre & Paul jouent enſemble contre Jean, & leurs forces reſpectives ſont comme 1. 2. 3, on demande combien ce dernier peut accorder aux deux premiers?*

J'ai auſſi réſolu le Problême ſur le Her dans le cas le plus ſimple, voici ce que j'ai trouvé. Si l'on ſuppoſe que chacun des Joueurs obſerve la conduite qui eſt la plus avantageuſe pour lui, il faut que Paul ne s'en tienne qu'à une carte qui ſoit plus haute qu'un ſept, & Pierre à une qui ſoit plus haute qu'un huit, & l'on trouvera que dans cette ſuppoſition le ſort de Pierre ſera au ſort de Paul comme 2697 à 2828. Si l'on ſuppoſe que Paul s'en tienne auſſi à un ſept, alors Pierre doit s'en tenir à un huit, & leurs ſorts ſeront encore comme 2697 à 2828. Il eſt neanmoins plus avantageux pour Paul de ne pas s'en tenir à un ſept que de s'y tenir, ce qui eſt une énigme que je vous laiſſe à developper.

Votre formule $\frac{p-1}{2p-1}$ pour le jeu des Tas, lorſque les Tas ne ſont que de deux cartes, & qu'il n'y a que 2 as, 2 deux, 2 trois, 2 quatre, &c. eſt très juſte; mais je voudrois ſçavoir comment vous l'avés trouvée, je ne l'ai encore pû trouver autrement que par induction, en mettant pour le nombre des tas ſucceſſivement 2, 3, 4, 5, &c.

Vous ferés bien, Monſieur, quand vous donnerés une nouvelle Edition de votre Livre d'en changer l'ordre, & de raſſembler dans la premiere partie la matiere des com-

Digitized by Google

binaiſons ; vous y pourrés ajoûter quantité de propoſitions, & traiter cette matiere plus amplement que vous n'avés fait dans la premiere Edition. Mon Oncle, qui vous fait ſes baiſemains, veut bien permettre, & moi j'y conſens auſſi, que vous inſeriés dans cette nouvelle Edition nos Lettres, ſi vous trouvés qu'elles puiſſent donner quelque lumiere à vos belles découvertes. Je trouve fort conforme à la verité ce que vous dites, que les démonſtrations touchant les nombres & les combinaiſons, ſont beaucoup plus embarraſſantes que ne ſont les démonſtrations de Geometrie, & qu'on peut ſouvent plus facilement les avoir dans l'eſprit que les mettre ſur le papier. Je ſuis fort content de la démonſtration que vous donnés dans votre Lettre de la formule, *page 99, Propoſition 14* (*a*).

Mais il n'en eſt pas de même de celle que vous donnés, *page 88*, (*b*) pour démontrer la proprieté la plus principale des nombres figurés ; cette démonſtration, & toutes celles qu'on a données juſqu'ici pour cette fin, quoique très juſtes, font toutes voir qu'on a prévû cette proprieté, & ont beſoin de l'induction, au moins au commencement ; il faut dans ces ſortes de matieres, pour contenter entierement notre eſprit, non ſeulement démontrer qu'ayant trouvé par hazard qu'une certaine proprieté convient, par exemple, aux premiers termes d'une ſuite, elle doive avoir lieu par neceſſité dans les termes ſuivans ; mais il faut encore montrer le chemin par lequel on puiſſe parvenir à la découverte de cette proprieté. Ainſi pour démontrer le Corollaire 4, *page 91*, (*c*) il vous a fallu démontrer auparavant le Lemme précedent ; mais vous ne montrés pas comment vous êtes parvenu à la connoiſſance de ce Lemme, lequel vous n'auriés peut-être pas trouvé, ſi vous n'aviés pas ſçû auparavant les formules des nombres figurés. C'eſt pourquoi je vous ferai part ici d'une methode que j'ai depuis quelques années de trouver les formules & les ſommes des nombres figurés par la pure Analyſe, ſans ſuppoſer rien de connu touchant la forme de leurs expreſ-

(*a*) Voyés page 44.
(*b*) Voyés page 10.
(*c*) Voyés page 15.

ſions. Cette methode eſt fort ſinguliere & d'autant plus curieuſe qu'elle ſe ſert du calcul differentiel, la voici. Soit propoſé de trouver, par exemple, la ſomme des nombres triangulaires, ou la formule des nombres pyramidaux, je multiplie ces nombres 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. par les termes de cette progreſſion geometrique 1, x, xx, x^3, x^4, &c. Cela étant fait j'aurai cette ſuite 1, $3x$, $6xx$, $10x^3$, $15x^4$, &c. laquelle je décompoſe en ces ſuites.

A 1, $2x$, $3xx$, $4x^3$, $5x^4$, &c.
B x, $2xx$, $3x^3$, $4x^4$, &c.
C xx, $2x^3$, $3x^4$, &c.
D x^3, $2x^4$, &c.
E x^4, &c.

Or je trouve de la même maniere que vous avés fait dans votre Lettre pour trouver la ſomme de cette ſuite $m + 2mm + 3m^3 + 4m^4$, &c. qu'en mettant p pour le nombre des termes la ſuite A eſt $= \frac{1 - \overline{p+1}\,x^{p+1} + px^{p+2}}{1 - 2x + xx}$, $B = \frac{x - px^{p+1} + \overline{p-1}\,x^{p+2}}{1 - 2x + xx}$, $C = \frac{xx - :\overline{p-1}\,x^{p+1} + \overline{p-1}\,x^{p+2}}{1 - 2x + xx}$ $D = \frac{x^3 - :\overline{p-2}\,x^{p+1} + \overline{p-3}\,x^{p+2}}{1 - 2x + xx}$, &c. & que la ſomme de toutes ces ſuites $A + B + C + D$, &c. ſera $= \frac{2 - :\overline{pp+3p+2}\,x^{p+1} + \overline{2pp+4p}\,x^{p+2} - :\overline{pp+p}\,x^{p+3}}{2 - 6x + 6xx - 2x^3}$, laquelle en mettant $x = 1$ donnera la ſomme des nombres triangulaires; or dans cette ſuppoſition de $x = 1$ les deux termes de cette fraction s'évanouiſſent; c'eſt pourquoi en me ſervant de la regle de mon Oncle, que feu Monſieur le Marquis de l'Hôpital a inſeré dans ſon Analyſe des infiniment petits, *page* 145; & en differentiant trois fois de ſuite le numerateur & le dénominateur, je trouve pour

pour la ſomme cherchée $\frac{1}{12} \times \overline{p^5 + 3p^4 + p^3 - 3pp - 2px^{p-2}} + \frac{1}{12} \times \overline{2p^5 + 10p^4 + 16p^3 + 8ppx^{p-1}} - \frac{1}{12} \times \overline{p^5 + 7p^4 + 17p^3 + 17pp + 6px^p}$, ou en mettant 1 pour x, & en diviſant enſuite le numerateur & le dénominateur par -2, $\frac{p^3+3pp+2p}{6} = \frac{p \cdot p+1 \cdot p+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, ce qu'il falloit trouver. La formule des nombres pyramidaux étant ainſi trouvée, on trouvera par la même maniere celle des triangulo-pyramidaux, & ainſi de ſuite toutes les formules des nombres figurés. Il ſeroit inutile & trop long d'en faire ici l'épreuve par le calcul. Je finis en vous aſſurant que je ſuis avec toute la conſideration poſſible,

MONSIEUR,

Votre très humble & très obéiſſant Serviteur,
N. BERNOULLY.

Lettre de M. de M... à M. (Nicolas) Bernoulli.

A Paris le premier Mars 1712.

LA Lettre que vous avés pris la peine de m'écrire, Monſieur, datée du 13 Novembre, eſt remplie de choſes admirables. Les affaires que j'ai à Paris ne m'ont point laiſſé depuis que j'y ſuis, & ne me laiſſeront point tant que j'y reſterai la liberté d'eſprit néceſſaire pour examiner toutes les beautés de votre Lettre. Ainſi en attendant que par mon retour à Montmort j'aye recouvré ce loiſir & cette tranquillité d'eſprit que j'eſtime tant, & dont j'ai d'ailleurs abſolument beſoin pour vous ſuivre dans vos méditations

algebriques. Je me bornerai dans celle-ci à vous faire part des réflexions de deux de mes amis que j'ai laiſſé à Montmort, & que j'avois fort invité, en les quittant, à examiner les Problêmes que vous propoſés ſur la Paume, & ce que vous dites touchant le Her; j'y joindrai celles que j'ai faites aſſés legerement ſur quelques endroits de votre Lettre.

Or afin que vous ſçachiés, Monſieur, à qui vous avés à faire, & qui ſont ces Meſſieurs qui pleins d'admiration pour vos talens, oſent cependant ne ſe point ſoumettre à vos déciſions; vous ſçaurés que l'un des deux s'appelle Mr l'Abbé de Monſoury. Nous ſommes voiſins à la campagne, ſon Abbaye n'eſt qu'à une lieue & demie de Montmort. L'autre ſe nomme Mr Waldegrave. C'eſt un Gentilhomme Anglois, frere de feu Milord Waldegrave, qui avoit épouſé une fille naturelle du Roy Jacques. Lorſque je travaillai ſur le Her il y a quelques années, je fis part à M. l'Abbé de Monſoury de ce que j'avois trouvé; mais ni mes calculs ni mes raiſonnemens ne purent le convaincre. Il me ſoutint toujours qu'il étoit impoſſible de déterminer le ſort de Pierre ni celui de Paul, parcequ'on ne pouvoit déterminer à quelle carte Paul devoit s'y tenir, ſans ſçavoir à quelle carte Pierre doit s'y tenir, *& vice verſa*, ce qui faiſoit un cercle, & rendoit à ſon avis la ſolution impoſſible. Il ajoûtoit quantité de raiſonnemens ſubtils qui me firent un peut douter que j'euſſe attrapé la verité. J'en étois là lorſque je vous ai propoſé d'examiner ce Problême, mon but étoit de m'aſſurer par vous de la bonté de ma ſolution, ſans avoir la peine de rappeller mes idées là-deſſus qui étoient entierement effacées. J'ai vû avec plaiſir que vous avés trouvé comme moi que Paul ne pouvoit mieux faire que de ſe tenir à un huit quelque parti que prît Pierre; & que Pierre, lorſque Paul s'y tient, ne pouvoit mieux prendre ſon parti qu'en ſe tenant ſeulement au neuf, quelque parti que Paul eût pris; & que dans cette ſuppoſition que Pierre & Paul priſſent l'un & l'autre le parti qui leur eſt le plus avantageux, le ſort de Paul étoit au ſort de Pierre :: 2828. 2697. L'honneur que votre déciſion a fait.

Digitized by Google

à ma ſolution, a donné lieu à nos Meſſieurs, & ſur tout à M. l'Abbé de Monſoury, d'examiner à fond ce Problême. Voici ce qu'ils m'ont écrit là-deſſus il y a plus d'un mois.

„ Pour vous rendre compte, Monſieur, du jugement „ que M. l'Abbé & moi nous avons oſé prononcer contre „ M. Bernoulli au ſujet de ſa ſolution ſur le Her; il n'eſt „ pas vrai, ſelon nous, que Paul ne doive ſe tenir qu'au „ huit, & Pierre au neuf. Nous prétendons qu'il eſt in- „ different à Paul de changer ou de ſe tenir au ſept, & à „ Pierre de changer ou de ſe tenir au huit. Pour le prou- „ ver, je dois d'abord expoſer leur ſort dans tous les cas. „ Celui de Paul ayant un ſept, eſt $\frac{780}{50\times51}$ lorſqu'il change, „ & lorſqu'il s'y tient ſon ſort eſt $\frac{720}{50\times51}$ ſi Pierre ſe tient „ au huit, & $\frac{816}{50\times51}$ ſi Pierre change au huit. Le ſort de „ Pierre ayant un huit eſt $\frac{150}{23\times50}$ s'il s'y tient, & $\frac{210}{23\times50}$ s'il „ change au cas que Paul ne s'y tienne jamais au ſept; & „ $\frac{350}{27\times50}$ en s'y tenant, & $\frac{314}{27\times50}$ en changeant au cas „ que Paul ſe tienne au ſept, les voici tous de ſuite. Les „ ſorts de Paul $\frac{780\text{ ou }720\text{ ou }816}{50\times51}$, ceux de Pierre $\frac{150\text{ ou }210}{23\times50}$ ou „ $\frac{350\text{ ou }314}{27\times50}$.

„ 720 étant plus au deſſous de 780 que 816 n'eſt „ au deſſus, il ſemble que Paul en doive tirer une raiſon „ pour changer au ſept. J'appelle ce poids qui porte „ Paul à changer *A*; de même Pierre de ſes differens ſorts „ doit tirer une raiſon pour changer au huit, j'appelle ce „ poids *B*. Cela poſé, nous diſons que les mêmes poids „ portent Pierre & Paul également aux deux partis : „ Donc, &c. *A* porte Paul à changer ſon ſept, & par „ conſequent porte Pierre à changer ſon huit; mais ce qui „ porte Pierre à changer ſon huit, porte auſſi Paul à ſe tenir „ à ſon ſept. Donc *A* porte Paul également à changer ſon „ ſept, & à s'y tenir. De même *B* porte Pierre à changer „ ſon huit, & par conſequent Paul à ſe tenir au ſept; mais „ ce qui porte Paul à garder ſon ſept, porte auſſi Pierre „ à garder ſon huit, & par conſequent porte Paul à changer „ ſon ſept. Donc *B* porte Paul également à changer & à

Digitized by Google

„ garder ſon ſept: il en eſt de même de Pierre. Donc les „ mêmes poids portent également, &c. Donc il eſt faux „ que Paul ne doit ſe tenir qu'au huit, & Pierre qu'au „ neuf. Apparemment M. Bernoulli s'eſt contenté de re- „ garder les fractions qui expriment les differens ſorts de „ Pierre & de Paul, ſans faire attention à la probabilité „ de ce que l'autre fera.

Ils ont confirmé dans des Lettres poſterieures ce qu'ils avancent dans celle-ci, & ajoûtent: *Comme nous ne convenons pas avec M. Bernoulli que Paul ne doive ſe tenir qu'au huit & Pierre au neuf; nous n'avons pas cherché l'explication de ſon énigme que nous croyons fondée ſur une fauſſe ſuppoſition.* Ces Meſſieurs m'ont auſſi envoyé de fort longs calculs ſur le premier de vos Problêmes ſur la Paume : ces calculs ſont juſtes; mais comme il y a beaucoup de tâtonnement dans leur methode, & que d'ailleurs il s'en manque beaucoup que le Problême ne ſoit reſolu, je ne les mettrai point ici.

Pour moi, Monſieur, avant que d'en entreprendre la ſolution, j'ai cru devoir vous demander éclairciſſement ſur ce qui ſuit.

1°. Quand vous dites *Pierre eſt deux fois plus habile que Paul*, entendés-vous que Pierre a deux fois plus de facilité que Paul à gagner chaque quinze, ou plus exactement, que les rapports de facilité ſont comme 2 . 1.

2°. Par ce mot, *parties de Paume*, entendés-vous des parties compoſées de ſix jeux? Concevés-vous que lorſque Pierre & Paul ont chacun quarante-cinq, ce qui s'appelle être à deux, on remette neceſſairement en deux quinze, ce qui ſe pratique ici.

3°. Quand vous dites: *On demande quel avantage Pierre doit faire à Paul.* Demandés-vous combien de quinze ou de fractions de quinze Pierre doit accorder à Paul dans chaque jeu? Vous ſçavés que le plus fort donne ſouvent pour s'égaler au plus foible des biſques, des jeux entiers, de ſauver le premier ou le ſecond, de jouer tout d'un côté, &c. tout cela veut être déterminé. Ce ne ſeroit pas la même choſe, par exemple, de donner trois jeux dans cha-

Digitized by Google

que partie de six jeux, ou 30 dans chaque jeu de la même partie.

4°. Le quatriéme Problême que vous énoncés ainsi : *Pierre & Paul jouent ensemble contre Jean, & leurs forces respectives sont comme* 1 . 2 . 3, *on demande combien ce dernier peut accorder aux deux premiers.* Ce Problême, dis-je, ne semble comporter aucune exactitude. Souvent deux personnes moins fortes en particulier que Pierre, pourront jouer sans desavantage avec lui ; & au contraire deux personnes aussi fortes pourront jouer avec desavantage, selon qu'ils sçauront ou ne sçauront pas s'accommoder ensemble, ce qui est un talent particulier indépendant de celui de bien jouer étant seul.

5°. Quand vous dites au second Problême, *Pierre accorde à Paul demi-trente.* Entendés-vous que Paul aura 30 au premier jeu, & ensuite 15, & ainsi de suite 30 & 15 alternativement, ou si Paul commencera par avoir 15, & ensuite 30, &c. ce qui seroit peut-être fort different.

En vous écrivant ceci, Monsieur, j'ai eu la curiosité de faire quelque tentative sur vos quatre Problêmes. Voici le chemin que j'ai fait.

Vous sçavés, Monsieur, que nommant p le nombre des parties qui manquent à Pierre, q le nombre des parties qui manquent à Paul, a le degré de facilité que Pierre a de gagner chaque point ; b le degré de facilité que Paul a de gagner chaque point, & supposant $p + q - 1 = m$, la formule qui exprime le sort de Pierre est $a^m b^0 + m \cdot a^{m-1} b^1 + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 +$ &c. & de même que la formule qui exprime le sort de Paul est $b^m a^0 + m b^{m-1} a + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} b^{m-2} a^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^{m-3} a^3 +$ &c. qu'il faut continuer la premiere suite jusqu'au nombre de termes exprimé par q, & la seconde jusqu'au nombre de termes exprimé par p, & diviser l'une & l'autre par $\overline{a + b}^m$.

J'ai trouvé que si l'on veut que lorsqu'il ne manque plus qu'un point à chacun des deux Joueurs, on remette en deux par neceſſité ; ces mêmes formules peuvent encore

Digitized by Google

ſervir avec les deux reſtrictions qui ſuivent, 1°. m doit être $= p + q - 2$, au lieu que l'on ſuppoſoit $m = p + q - 1$. 2°. Il faut multiplier le dernier terme de la ſuite qui exprime le ſort de Pierre, par $\frac{aa}{aa+bb}$; & le dernier terme de la ſuite qui exprime le ſort de Paul, par $\frac{bb}{aa+bb}$.

Enſuite de ces préliminaires j'ai cherché la ſolution de quelques-uns de vos Problêmes, ou d'autres qui y ont rapport, voici ce que j'ai trouvé. 1°. *Pierre joue contre Paul, & il eſt deux fois plus fort : il lui manque quatre points, on demande combien il en doit manquer à Paul, c'eſt à dire, quelle doit être la valeur de* q, p *étant* $= 4$.

Dans la ſuppoſition ordinaire que l'on ne remette point, on a cette équation $4m^3 - 8mm + 14m + 6 = 3^{m+1}$, dont on peut trouver la racine par l'interſection d'une logarithmique & d'une parabole cubique, je trouve $m = 5 + \frac{57}{210}$, ce qui m'apprend que Pierre doit donner à Paul un point, & $\frac{261}{210}$ ſur le 2e point, ce que j'explique en cette ſorte. L'on mettra trois cens vingt jettons dans une bourſe, dont il y en aura 263 blancs & 57 noirs; & il ſera dit que ſi tirant un jetton au hazard on tire un blanc, Pierre donnera deux points à Paul ſur la partie, & que ſi l'on tire un jetton noir, il ne lui en donnera qu'un. On ne peut rendre les ſorts parfaitement égaux qu'en uſant de cette adreſſe, & c'eſt ſeulement de cette maniere qu'il faut expliquer les fractions de choſes qui ne ſe partagent point des coups, des points, &c.

Si l'on veut ſuppoſer que les Joueurs remettront lorſqu'ils ſeront à deux, c'eſt à dire toutes les fois qu'ils auront chacun trois points, comme c'eſt la regle au jeu de la Paume.

On trouve que dans cette ſuppoſition Pierre doit donner à Paul deux points, & $\frac{11}{224}$ ſur le troiſiéme point, pour que le parti ſoit égal, & c'eſt là, ce me ſemble, la ſolution du premier de vos quatre Problêmes.

2°. *Pierre donne à Paul deux points ſur quatre, & outre cela* $\frac{11}{224}$ *ſur le troiſiéme point, on demande de combien il doit être plus fort que Paul pour lui faire cet avantage, on*

Digitized by Google

trouve que le rapport cherché de ſa force à celle de Paul eſt renfermé dans cette égalité du ſixiéme dégré,

$224a^6 + 830a^5b - 1142a^4bb - 1792a^3b^3 - 1568a^2b^4 - 896ab^5 - 224b^6 = 0.$

D'où l'on tire $a = 2b$.

Si l'on ſuppoſe que *Pierre ait raiſon de donner un point à Paul, & que l'on demande combien il doit être plus fort pour lui faire cet avantage*, b *étant* $= 1$, je trouve $a = 1 + \sqrt{2}$, c'eſt à dire que Pierre doit être plus fort que Paul dans la raiſon de 1 à $\sqrt{2} - 1$; & generalement que ſi $q = 1$, il faut que Pierre ſoit plus fort que Paul dans la raiſon de 1 à $\sqrt[p]{2} - 1$.

3°. J'avois commencé à faire une tentative ſur une eſpece tout à fait pareille au ſecond de vos quatre Problêmes, mais plus ſimple, voici ce que c'eſt.

Pierre joue en deux parties liées contre Paul au petit palet, chacune des parties eſt de deux points. Ils conviennent que Paul aura un point à la premiere partie, qu'il n'en aura point à la ſeconde, c'eſt à dire qu'ils la joueront à but; & qu'à la troiſiéme, ſi le jeu n'eſt pas fini auparavant, Paul aura un point. Cela revient à ce qu'on appelle demi-quinze à la Paume. On demande combien il faut que Pierre ſoit plus fort que Paul pour lui faire cet avantage. J'ai trouvé que ce Problême dépendoit de la réſolution de cette égalité du 7ᵉ degré $a^7 + 7a^6b + 5a^5bb - 21a^4b^3 - 29a^3b^4 - 21a^2b^5 - 7ab^6 - b^7 = 0$, ce qui me meheroit à de fort longs calculs. Votre ſecond Problême en demande encore de plus grands, l'égalité étant plus compoſée; ainſi je vous prie de me dire ſi vous avés quelqu'autre ſecret que moi pour éviter la réſolution de ces égalités. Ma methode a été de tout temps de me repoſer quand j'en ſuis venu à l'équation, & d'en l'aiſſer chercher les racines aux curieux. Je n'en changerai que pour vous plaire au cas que vous témoigniés que vous exigés ce ſacrifice là de moi; je dis ſacrifice, car en verité c'eſt du plus loin qu'il me ſouvienne d'avoir réſolu des égalités qui excedaſſent le quatriéme degré, & il me ſemble que de toutes les occupations c'eſt la moins agreable.

Digitized by Google

4°. J'ai fait encore quelques réfléxions ſur le troiſiéme de vos quatre Problêmes, voici celui que je me ſuis propoſé, qui eſt un peu plus ſimple, mais qui renferme la même difficulté.

Pierre jouant contre Paul en deux points lui en peut donner un, Paul jouant contre Jacques lui en peut donner un, on demande combien Pierre en peut donner à Jacques.

J'ai trouvé qu'il devoit lui donner un point & $8\sqrt{2} - 11$ ſur le ſecond point, ce que j'explique en cette ſorte: Soit ſuppoſé $\sqrt{2} = \frac{1414}{1000}$, je dis que mettant 125 jettons dans une bourſe, dont il en ait 39 noirs & 86 blancs; ſi l'on tire un jetton au hazard, & qu'il ſe trouve blanc, Pierre doit donner un point ſeulement à Paul, & que s'il ſe rencontre noir il lui en doit donner deux. On voit ici l'exemple d'un cas où il eſt abſolument impoſſible de rendre les partis égaux, quelque compenſation que l'on puiſſe imaginer. Voilà, Monſieur, ce que j'ai trouvé fort à la hâte; ſi j'avois eu plus de loiſir pour méditer ces matieres, & faire de longs calculs, j'aurois peut-être mieux réuſſi. Si je me ſuis trompé, faites-moi grace en faveur de mon obéiſſance. Je paſſe maintenant aux autres endroits de votre Lettre.

Votre formule pour le Treize eſt très juſte. Je me ſuis bien douté que l'erreur de la précedente ne pouvoit provenir que de quelque inadvertance en tranſcrivant. L'idée que je me ſuis faite de votre infaillibilité en Geometrie ne m'a pas permis de ſoupçonner que vous euſſiés pû vous tromper dans le fonds d'une methode.

J'entens parfaitement votre formule pour les parties en rabattant; elle avoit aſſurément beſoin d'explication pour être entendue: J'ai vû avec ſurpriſe & admiration qu'elle n'étoit preſque point differente de la mienne. Vous vous en ſerés ſans doute apperçu dans ma derniere Lettre, lorſque je vous ai mandé que ce nombre 70970250 eſt la ſomme de ces ſix 34597290, 20030010, 10015005, 4292145, 1560780, 475020, qui ſont le 7, le 8, le 9, le 10, le 11 & le 12e terme de la 30e bande perpendiculaire. Je ne ſçai s'il ne faut point un 3 au lieu d'un 4 dans ce numerateur

teur 13914410549, je trouve 13914410539: ce nombre eſt formé de la ſomme de ces neuf, & encore de ces deux-ci 36. 1.

5567902560
3796297200
2310789600
1251677700
600805296
254186856
34143280
30260340
8347670

Il ſeroit inutile que je vous rapporte ici ma methode tout au long, elle n'eſt quaſi differente de la vôtre que dans la maniere de l'énoncer, à l'exception que je n'ai eu en vûe que la ſuppoſition des hazards égaux pour l'un & pour l'autre Joueur, au lieu que vous les ſuppoſés dans un rapport quelconque, la voici en abregé. Soit p le nombre des coups, m le nombre des parties qui manquent à Pierre, n le nombre des parties qui manquent à Paul, il faut choiſir une colonne perpendiculaire dont le quantiéme ſoit $p+2$, & dans cette colonne chercher le quantiéme qui correſpond à la quantité $\frac{p+2-m}{2}$; ajoûter à ce nombre les ſuperieurs juſqu'à la quantité n. Prendre les neuf premiers termes, par exemple, s'il manque neuf parties à Paul, puis en omettre la quantité m, ajoûter la quantité n, omettre la quantité m, & ainſi de ſuite alternativement, diviſer ces nombres par 2^p; on aura une fraction qui exprime combien il y a à parier que Pierre gagnera la partie au moins en autant de coups que p exprime d'unités. Si l'on veut avoir pour Paul ce que l'on vient de chercher pour Pierre, il faut mettre par-tout m à la place de n, & n à la place de m.

Votre methode pour trouver les avantages ou deſavantages de ceux qui jouent une poulle au Trictrac, à raiſon de l'ordre ſelon lequel ils entrent au jeu, ne peut être que parfaitement belle. Ce Problême eſt aſſurément fort dif-

ficile. J'ai voulu découvrir comment on pouvoit appliquer votre methode pour trois Joueurs aux cas de quatre ou cinq Joueurs, mais inutilement. La route que vous avés ſuivie eſt apparemment fort écartée. J'y travaillerai ſerieuſement auſſi-tôt que j'aurai du loiſir. Votre ſuite pour déterminer combien la poulle doit naturellement durer de parties eſt très juſte.

Dans l'explication que je vous ai envoyé de mon Anagramme, il faut lire *20000 moins 1 diviſé par 20000 élevé à la puiſſance 20000.* J'avois mis par diſtraction *expoſant* au lieu de *puiſſance* : c'eſt ce qui vous a empêché de l'entendre, car d'ailleurs il eſt clair qu'il faut multiplier ce nombre par 25 × 20000, & cela va ſans dire.

Je ne repliquerai rien à ce que vous me dites ſur les jeux dans leſquels la main tourne, je ne crois pas avoir rien à ajoûter à ce que j'ai déja dit ; au reſte je conviens que votre ſpeculation eſt belle & bonne.

Il ſuffit, Monſieur, pour la juſtification de M. Barbeyrac, que vous approuviés l'endroit que j'ai critiqué ; & c'eſt aſſés qu'il y ait là-deſſus diverſité d'opinions pour qu'il n'ait pas tort. Pour moi, Monſieur, je croirois, & tous ceux à qui j'en ai parlé le croyent auſſi, que Pierre ayant amené dans l'un ou l'autre de ſes deux coups le même point que Paul, on doit ſuppoſer ou qu'ils reprendront chacun leur miſe, ou qu'ils recommenceront tout à fait. Je ſçai bien que cela ne doit pas être ainſi, mais il faut du calcul & du raiſonnement pour trouver que cela ne doit pas être ; & tous ſimples que ſont ces raiſonnemens, je ſuis fort porté à croire qu'aucun de ceux qui ont tenu ce parti ne les a fait ; il faut ſuppoſer pour regle du jeu, non ce qui ſe doit faire, mais ce qui ſe pratique ordinairement entre les Joueurs.

Voici une gageure fort ſemblable à l'eſpece de M. de B. que j'ai vû faire quelquefois. Pierre parie un écu contre Paul de faire une choſe en deux coups, par exemple, de paſſer une balle par un trou ; dans le cas de cette gageure voici ce qui arrive. Si Pierre met dans le trou du premier coup, il ne recommence point le ſecond, parcequ'il n'y a

Digitized by Google

plus rien à gagner, le jeu eſt fini, Pierre a gagné l'écu; s'il joue ſon ſecond coup, ce ſera par divertiſſement, ſans crainte de rien perdre en n'y mettant pas une ſeconde fois, & ſans eſperance de rien gagner en y mettant une ſeconde fois.

Votre démonſtration analytique de la formule des nombres figurés eſt d'une extrême beauté.

Je ne ſçai ſi vous ſçavés qu'on réimprime la Recherche de la verité. Le R. P. Malbranche m'a dit que cet Ouvrage paroîtroit au commencement d'Avril. Il y aura un grand nombre d'additions ſur des ſujets très importans. Vous y verrés entr'autres nouveautés une Diſſertation ſur la cauſe de la peſanteur, qui apparemment fixera les doutes de tant de Sçavans hommes qui ne ſçavent à quoi s'en tenir ſur cette matiere. Il prouve d'une maniere invincible la neceſſité de ſes petits tourbillons pour rendre raiſon de la cauſe de la peſanteur, de la dureté & fluidité des corps & des principaux phenomenes touchant la lumiere & les couleurs; ſa theorie s'accorde le mieux du monde avec les belles experiences que M. Newton a rapporté dans ſon beau Traité *De natura Lucis & Colorum.* Je peux me glorifier auprès du Public que mes prieres ardentes & réiterées depuis pluſieurs années, ont contribué à déterminer cet incomparable Philoſophe à écrire ſur cette matiere qui renferme toute la Phyſique generale. Vous verrés avec admiration que ce grand homme a porté dans ces matieres obſcures cette netteté d'idées, cette ſublimité de genie & d'invention qui brillent avec tant d'éclat dans ſes Traités de Metaphyſique.

Vous ſçavés ſans doute la mort de Monſeigneur le Dauphin, c'eſt une grande perte pour la France, & en particulier pour les Sciences, il les aimoit & les auroit protegé. Je ſuis avec une eſtime infinie,

MONSIEUR,

Votre très humble & très obéiſſant Serviteur R. de M...

Digitized by Google

Lettre de M. (Nicolas) Bernoulli à M. de M...

A Bâle ce 2 Juin 1712.

MONSIEUR,

Je vous écris cette Lettre fort à la hâte, étant ſur le point de partir demain ou après demain pour la Hollande; je ſuis bien fâché que mes affaires ne m'ayent pas permis de répondre plûtôt à l'honneur de votre derniere Lettre, & je le ſuis d'autant plus que je me vois contraint d'abreger la réponſe plus qu'il ne faut pour la matiere ample dont vous m'avés fourni l'occaſion de parler dans votre belle Lettre.

Je ſuis très ſenſible à l'honneur que m'ont fait vos deux Amis, M. l'Abbé d'Orbais & M. de Waldegrave, en examinant ce que je vous ai écrit ſur le Her, & je vous ſuis bien obligé de ce que vous m'avés communiqué leurs ſentimens là-deſſus. Les ſorts qu'ils ont trouvé pour Pierre & Paul ſont très juſtes; mais le raiſonnement par lequel ils veulent prouver qu'il eſt indifferent à Pierre de changer au ſept ou de s'y tenir, & à Paul de changer ou de ſe tenir au huit, ne me peut pas convaincre; car en l'examinant de plus près on trouvera que c'eſt un ſophiſme, & qu'on ne peut pas raiſonner ainſi: *Le poids* A *porte Paul à changer ſon ſept* (lorſqu'il eſt incertain à quoi ſe determinera Pierre,) *& par conſequent porte Pierre à changer ſon huit*, (ſuppoſé que Pierre ſçait que Paul change au ſept;) *mais ce qui porte Pierre à changer ſon huit, porte auſſi Paul à ſe tenir à ſon ſept: Donc* A *porte Paul également à changer ſon ſept & à s'y tenir*; parcequ'on y ſuppoſe deux choſes contradictoires à la fois; ſçavoir, que Paul ſçache & qu'il ignore en même temps quel parti Pierre prendra, & Pierre quel parti Paul prendra. Il eſt bien vrai que le poids *A* porte Paul à changer au ſept. Ayant donc fait cette hy-

Digitized by Google

potheſe que Paul aye la maxime de changer au ſept, il ſuit que Pierre ne pourra mieux faire que de changer au huit; mais on doit s'arrêter là, & ne pas paſſer outre, car il n'eſt pas permis de retourner à Paul & de conclure; donc Paul doit garder ſon ſept, parceque ſelon cette hypotheſe on a déja fixé que Paul ait la maxime de changer au ſept, & que Pierre ne change au huit qu'à condition que Paul change au ſept : Donc Paul ne peut pas changer de maxime & ſe tenir au ſept, ſans que Pierre ne change auſſi la ſienne; de ſorte que ſuivant le raiſonnement de ces Meſſieurs on iroit toujours dans un cercle, ce qui eſt une marque qu'on ne peut rien prouver par là. De plus il eſt clair par le calcul qu'il n'eſt pas indifferent aux Joueurs de changer au ſept ou au huit, ou de s'y tenir; car ſi cela étoit, on trouveroit auſſi les mêmes ſorts pour tous ces cas là; or on trouve par le calcul que leurs ſorts ſont differens ſelon qu'ils ſe tiennent à une telle ou telle carte. Donc il eſt faux que les mêmes poids portent Pierre & Paul également aux deux partis. Si ces Meſſieurs ne ſe contentent pas de cette réponſe, je me donnerai l'honneur de vous écrire à la premiere occaſion plus amplement ſur cela, & de vous faire part de la methode dont je me ſuis ſervi pour réſoudre ce Problême, & j'eſpere que ces Meſſieurs n'y trouveront rien à redire. Je ſuis trop preſſé préſentement pour entrer en détail de toutes ces choſes. Je vous prie d'aſſurer ces deux Meſſieurs de mes très humbles reſpects, & de les remercier de ma part de l'eſtime particuliere qu'ils veulent bien avoir pour moi.

J'ai trouvé une formule generale pour les ſorts des Joueurs, lorſqu'on ſuppoſe que les degrés de facilité qu'ils ont de gagner change alternativement, comme il arrive lorſqu'un Joueur accorde à l'autre ou demi-quinze ou demi-trente, ou quelqu'autre point ſemblable, la voici : Soit p le nombre des parties qui manquent à Pierre, q le nombre des parties qui manquent à Paul, a le degré de facilité que Pierre a de gagner le 1er, 3e, 5e, 7e, &c. jeu; b le degré de facilité que Paul a de gagner le 1er, 3e, 5e, &c. jeu; c le degré de facilité que Pierre a de gagner le 2e, 4e, 6e, &c.

jeu ; d le degré de facilité que Paul a de gagner le 2e, 4e, 6e, &c. jeu ; soit de plus $m + n = p + q - 1$, & $m = n$ si $m + n$ est un nombre pair, & $m = n + 1$ si $m + n$ est un nombre impair ; je dis que le sort de Pierre sera la somme de toutes les valeurs possibles de cette suite : $c^n \times$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdots m-s+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s} a^{m-s} b^s + nc^{n-1} d \times \frac{n \cdot m-1 \cdot m-2 \cdots m-s+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots ms-1} a^{m-s+1} b^{s-1} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} c^{n-2} dd \times \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-s+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s-2} a^{m-s+2} b^{s-2}$$

$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^{n-3} d^3 \times \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-s+4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s-3} a^{m-s+3} b^{s-3} + \&c.$$

le tout divisé par $\overline{a+b}^m \times \overline{c+d}^n$. Cela s'entend en prenant pour s successivement 0, 1, 2, 3, &c. jusqu'à $q - 1$ inclusivement. Si l'on est à deux de jeu, & qu'il faille gagner deux jeux de suite pour gagner la partie, il faut mettre $m + n - 1$, au lieu de $m + n$; & il faut encore multiplier ce qui provient en substituant pour s la derniere valeur $q - 1$ par $\frac{ac}{ac+bd}$. Vous verrés fort aisément que cette formule dans le cas de $a = c$, & $b = d$ conviendra exactement avec la vôtre. J'ai aussi trouvé par-tout les mêmes solutions que vous donnés dans votre Letrre, excepté seulement cette équation $a^7 + 7a^6b + a^5bb - 15a^4b^3 - 29a^3b^4 - 21aab^5 - 7ab^6 - b^7 = 0$, au lieu de laquelle j'ai trouvé celle-ci $a^7 + 7a^6b + 13a^5bb - 21a^4b^3 - 35a^3b^4 - 21aab^5 - 7ab^6 - b^7 = 0$, pour déterminer de combien Pierre doit être plus fort que Paul, afin qu'en jouant en deux parties, dont chacune est de deux points, il lui puisse donner un point au premier jeu, & rien au second ; & si la partie n'est pas finie auparavant, encore un point au troisiéme jeu ; mais je n'ai non plus que vous point d'autre secret pour éviter la résolution de ces égalités que les approximations, & je prendrois aussi pour un sacrifice s'il me falloit chercher les racines de ces sortes d'équations, c'est un travail que je laisse fort volontiers aux curieux.

Pour ce qui est de ma methode pour trouver les avantages ou desavantages de ceux qui jouent une poulle, j'ai cru l'avoir expliquée fort clairement, & je suis fâché que vous ne l'ayés pû appliquer au cas de quatre ou de cinq Joueurs ; je m'en vais donc pour vous l'éclaircir davantage

appliquer les deux Theorêmes que j'ai trouvé au cas des quatre Joueurs. Soient les quatre Joueurs Pierre, Paul, Jacques & Jean, qui entrent au jeu ſelon l'ordre qu'ils ſont rangés ici ; de ſorte que Pierre & Paul jouent d'abord enſemble ; enſuite celui qui aura gagné jouera avec Jacques, & celui qui aura gagné de ces deux là avec Jean, & ainſi de ſuite ; ſoit nommé p la probabilité que Pierre ou Paul a de gagner la poulle, q la probabilité que Jacques a de gagner, & r la probabilité que Jean a de la gagner, x l'avantage de Pierre ou Paul, y l'avantage de Jacques, & z l'avantage de Jean, on aura en ſuppoſant $n = 3$ qui eſt le nombre des parties qu'il faut gagner de ſuite, par le premier Theorême $q = \frac{p \times 2^3}{1+2^3}$, $r = \frac{q \times 2^3}{1+2^3}$, & par le ſecond Theorême $y = \frac{x+p \times 2^3 - 3p}{1+2^3}$, & $z = \frac{y+q \times 2^3 - 3r}{1+2^3}$; or $p + p + q + r$ doit être $= 1$, & $x + x + y + z = 0$; on aura donc ces ſix équations $q = \frac{8p}{9}$, $r = \frac{8q}{9}$, $y = \frac{8x+8p-3q}{9}$, $z = \frac{8y+8q-3r}{9}$, $2p + q + r = 1$, & $2x + y + z = 0$, qui étant comparées enſemble par les methodes ordinaires, donnent $x = -\frac{2700}{22201}$, $y = \frac{1176}{22201}$, & $z = \frac{4224}{22201}$. La route que j'ai ſuivie pour trouver ces deux Theorêmes n'eſt point écartée, je vous la communiquerois volontiers ſi je n'étois pas ſi preſſé, ce qui eſt auſſi la cauſe que je paſſe ſous ſilence les autres endroits de votre Lettre. Je ne ſçai point de nouvelles de ſciences, ſinon que M. de Moivre qui eſt membre de la Societé en Angleterre, fait imprimer à Londres un Livre ſur les Hazards. Comme je crois que vous ſerés curieux d'avoir ce Livre quand il ſera imprimé, & que j'eſpere de paſſer de la Hollande en Angleterre, je tâcherai de vous en procurer un exemplaire.

Au reſte, ſi je peux en mon voyage faire quelqu'autre choſe pour votre ſervice, ou pour celui de vos amis, je vous prie de me le faire ſçavoir. Si vous voulés me faire l'honneur de m'écrire, vous pourrés envoyer vos Lettres à Bâle comme auparavant, on me les fera toujours tenir. Je croi qu'il pourra arriver que je retournerai par la France,

Digitized by Google

auquel cas je me flatterai d'avoir l'honneur de vous voir, & de vous démontrer que je ſuis plus que je ne ſçaurois dire,

MONSIEUR,

Votre très humble & très obeiſſant Serviteur
N. BERNOULLI.

Lettre de M. de M... à M. N. Bernoulli.

A Montmort ce 8 Juin 1712.

LA Lettre que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire, Monſieur, datée du 10 Novembre, m'avoit mis dans un très grand goût d'algebre, & je commençois, ce me ſemble, à être en train, lorſque j'y fis réponſe le premier May 1712. Je me propoſois de travailler fortement ſur votre ſçavante Lettre & avec aſſiduité, dans l'eſperance de trouver quelque choſe qui pût vous faire plaiſir, & me rendre plus digne du commerce de Lettres que vous voulés bien avoir avec moi: une foibleſſe de tête dont je ne peux deviner la cauſe, ne me l'a point permis juſqu'à préſent. J'ai été trois mois ſans oſer penſer, & même ſans pouvoir goûter le plaiſir de la lecture, ce n'eſt que depuis quelques jours que je commence à pouvoir compter ſur ma ſanté.

En liſant votre Lettre & ma réponſe j'ai apperçu dans celle-ci une faute dont j'ai cru devoir vous avertir. Au lieu de cette égalité $a^7 + 7a^6b + a^5bb - 15a^4b^3 - 29a^3b^4 - 21aab^5 - 7ab^6 - b^7 = 0$, il faut $a^7 + 7a^6b + 13a^5bb - 21a^4b^3 - 35a^3b^4 - 21aab^5 - 7ab^6 - b^7 = 0$, dont la racine eſt à peu près 1.77. J'ai encore fait quelques tentatives ſur des Problêmes pareils à ceux que vous me propoſés,

posés, mais toujours inutilement. Je tombe dans des égalités qui me paroissent toujours demander des calculs immenses, dont la difficulté appartient à l'algebre, & qui ne demandent point d'invention. Je suppose donc, Monsieur, que je ne suis point dans la bonne voye par rapport à ces Problêmes, & je vous prie de m'y mettre : en voici un très simple en apparence que je m'etois proposé :

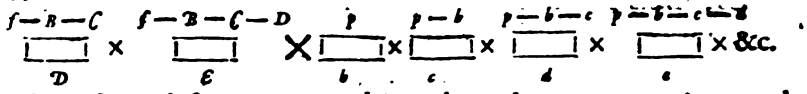
Pierre joue pour trois points, Paul pour deux, & Jacques pour un, leurs sorts étant égaux, on demande quel doit être le rapport de leurs forces.

En nommant leurs forces respectives a, b, c, l'on a, conformément au Problême de la page 175, (*a*) le sort de Pierre $= a^3c + 4a^2b + a^4$, celui de Paul $b^4 + 4a^1b^3 + 4abbc + 6aabb + bbcc + 2cb^3$, celui de Jacques $c^4 + 2cb^3 + 4bc^3 + 5bbcc + 4ac^3 + 8abbc + 12abcc + 6aacc + 12aabc + 3a^3c$, le tout divisé par $\overline{a + b + c}^4$.

Je vois bien qu'en comparant ces égalités, dont chacune $= \frac{1}{3}$, je viendrai à bout de déterminer la valeur des trois inconnues; mais ce ne sera point sans résoudre une égalité fort composée qui demanderoit peut-être 30 heures de calcul, sans compter le risque de se tromper. J'attendrai donc sur toutes ces questions votre secours & vos lumieres. En attendant, & pour remplir le papier, je vais vous faire part de deux remarques assés curieuses, ce me semble, que j'ai faites il y a long-temps à l'occasion de ce Problême.

Monsieur votre Oncle a remarqué fort subtilement que ma formule de la page 137, (*b*) ou la sienne, $\frac{1.2.3.4....p}{1.2.3.b \times 1.2.3.c \times 1.2.3.d \times 1.2.3.e \times}$ &c. pouvoient servir pour la détermination du coefficient de quelque terme que l'on voudra d'un polynome quelconque élevé à une puissance quelconque. Il est assurément fort curieux de voir deux Problêmes si differens réunis sous une même formule; mais la principale commodité de la formule $\frac{f}{B} \times \frac{f-B}{C} \times$

(*a*) Voyés pag. 242. (*b*) Voyés page 44.



eſt de faire diſtinguer combien il y a de termes qui ayent le même coefficient, & où les expoſans des lettres ſoient les mêmes. Pour me faire entendre, ſoit le trinome $a+b+c$ qu'on veut élever à la quatriéme puiſſance, & dont on demande tous les coefficiens : je réduis le Problême à celui-ci ; étant ſuppoſé quatre dés qui ayent chacun trois faces: on demande combien il y a de coups differens pour que les jettant au hazard il ſe trouve ou un quadruple, ou un triple & un ſimple ; ou deux doubles, ou un double & deux ſimples. Or ſi je ſubſtitue dans la formule ci-deſſus pour p, 4, nombre des dés, & pour f, 3, nombre des faces de chaque dé, je trouve pour le premier cas 3×1, pour le 2^c 6×4, pour le 3^c 3×6, pour le 4^c 3×12, dont la ſomme $= 81$, quatriéme puiſſance de 3.

Maintenant pour s'aſſurer que ces deux eſpeces ſont les mêmes, il faut obſerver qu'en élevant le trinome $a+b+c$ à la 4^c puiſſance, on fait préciſément la même choſe que dans le Problême des dés ; c'eſt à dire, qu'on prend la 4^c puiſſance de chacune des trois lettres a, b, c. 2°. Qu'on prend le cube de chacune avec chacune des deux autres autant de fois qu'il eſt poſſible. 3°. Qu'on prend le quarré d'une des trois lettres avec le quarré d'une autre en autant de façons qu'il ſe peut ; & enfin le quarré d'une des trois avec le produit des deux autres, comme l'on ſçait que cela ſe pratique dans la formation des puiſſances qui n'eſt qu'une multiplication réiterée ; ainſi la formule ci-deſſus peut ſervir pour la formation d'un multinome quelconque auſſi-bien, & peut être plus avantageuſement que les formules ordinaires pour les multinomes, leſquelles me paroiſſent n'être toutes qu'une extenſion facile de la formule $\overline{a+b}^m = a^n + \frac{n-0}{1} a^{n-1}b + \frac{n-0}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}bb + \frac{n-0 \times n-1 \times n-2}{1.2.3} a^{n-3}b^3$, + &c. puiſque pour changer cette formule en celle du trinome il ne s'agit que de ſubſtituer dans chaque terme $b+c$ à la place de b, & que de

la même façon la formule du trinome ſe change en une formule pour le quadrinome, &c. ce qui ſaute aux yeux, quoique l'invention de ces formules pour les puiſſances indéfinies des multinomes ait été fort vantée ; mais pour revenir à l'uſage dont je veux parler, on voit qu'il y a trois termes où le coefficient eſt 1 : ce ſont ceux où la lettre eſt à la 4e puiſſance. 2°. Qu'il y a ſix termes où le coefficient eſt 4, & où il ſe trouve un cube avec une lettre ſimple. 3°. Qu'il y en a trois où le coefficient eſt 6, & où il ſe trouve deux quarrés. Enfin, qu'il y en a trois où le coefficient eſt 12, & où il ſe trouve un quarré avec deux lettres ſimples, la partie de la formule qui eſt en lettres majuſcules donne les premiers nombres 3, 6, 3, 3 : la partie de la formule qui eſt en petites lettres donne les autres 1, 4, 6, 12 : Voici ma ſeconde remarque.

Perſonne que je ſçache n'a encore examiné combien de termes produit un multinome quelconque ſelon qu'il eſt élevé à tel ou tel expoſant. La regle eſt celle dont je me ſuis ſervi pour ſçavoir combien de termes doit avoir la formule, page 63, qui donne la ſomme d'une ſuite quelconque de nombres figurés élevés à un expoſant quelconque ; cette regle, dis-je, eſt telle. Pour ſçavoir combien de termes contiendra le multinome q élevé à la puiſſance p, il n'y a qu'à prendre le quantiéme $p + 1$ de l'ordre q des nombres figurés, l'on aura le nombre cherché ; en ſorte que ſi l'on cherche, par exemple, combien un quadrinome élevé à la 8e puiſſance aura de termes, on trouvera 165, 9e nombre du 4e ordre pour le nombre cherché ; & ſi l'on veut ſçavoir combien un quintinome élevé à la 11e puiſſance aura de termes, on trouvera qu'il en aura 1365, ce nombre 1365 eſt le 12e du 5e ordre.

Mr Nicolle me mande que M. P. a lû ces jours paſſés à l'Academie un long Memoire ſur la courbe de M. de Beaune, où il montre que cette courbe eſt une logarithmique, dont les ordonnées ſont avec l'axe des angles de 45 degrés, que ces ordonnées ſont en progreſſion geometrique, pendant que les parties de l'axe ſont en proportion arithmetique, &c. Il donne auſſi la rectification de

cette courbe. Il dit qu'entre un grand nombre de perſonnes qui ont travaillé ſur cette courbe, Mr S. a cru en être le vrai Oedipe (c'eſt ſon expreſſion,) mais qu'il ne l'a pas mieux connu que les autres. Je ne ſçai ce que Mr P. a voulu dire, Mr S. n'a jamais rien donné ſur cette courbe. M. votre Oncle en a donné une conſtruction très élegante par les logarithmes. Je crois auſſi en avoir vû une de M. de l'Hôpital par l'hyperbole; il avoit propoſé aux Geometres d'en trouver la rectification, en ſuppoſant la quadrature de l'hyperbole: Je la donnai en 1703, les myſteres du calcul integral n'étant point encore revelés comme ils le ſont à préſent. Ce qu'a donné M. votre Oncle eſt certainement hors d'atteinte; pour ce qui me regarde je vous prie d'en juger.

Fig. 1. Soit AC, x, Bc, y, l'équation de la courbe eſt $adx = ydy - xdy$, & l'élement $Bb = \frac{dy}{a}\sqrt{yy + aa - 2xy + xx}$, & ſuppoſant $z = y - x$, $Bb = \frac{dz}{a-z}\sqrt{aa+zz} = \frac{2aadz}{a-z\sqrt{aa+zz}} - \frac{adz}{\sqrt{aa+zz}} - \frac{zdz}{\sqrt{aa+zz}}$; d'où je conclus que la valeur de l'arc AB eſt $\frac{2-a}{a}\sqrt{aa+zz} + a - \frac{2}{a}ACHM$, *fig. 2*, $+\frac{32\sqrt{2}}{a}CAM - \frac{32\sqrt{2}}{a}$ d'un triangle hyperbolique déterminé par une abciſſe priſe depuis le centre qui ſoit au demi axe de l'hyperbole :: $\sqrt{2}$. 1.

Voilà, Monſieur, ce que je donnai en 1702 ou 1703, je n'ai point ici le Journal, j'étois alors fort jeune, & j'avois beaucoup d'ardeur pour le nouveau calcul qui n'étoit bien connu que de 5 ou 6 Geometres; depuis ce temps ayant lû dans les Journaux de Leipſic ce que M. votre Oncle a dit de cette courbe, qu'elle eſt du nombre de celles qui peuvent être rectifiées par elles-mêmes, ſemblable en cela à la logarithmique & à la tractoria qui ont auſſi cette proprieté. Je travaillai ſur les vûes que M. votre Oncle m'avoit donné, & je réduiſis la valeur de AB à cette expreſſion $a - \sqrt{aa+zz} + \beta\sqrt{\frac{1}{2}}L\frac{a\sqrt{2aa+2zz}+aa+zz}{a+z\times a\sqrt{2}+a} - a\sqrt{\frac{1}{2}}L\frac{a\sqrt{2aa+2zz}-aa-zz}{a+z\times a\sqrt{2}-a} + \frac{1}{2}aL\frac{a}{z}\sqrt{aa+zz} - a - \frac{1}{2}aL\frac{a}{z}\sqrt{aa+zz} + a$.

Voici deux autres Analyſes que je trouvai en même

temps, & que je fis voir à M. le Marquis de l'Hôpital peu de temps avant ſa mort : l'une eſt la rectification de la logarithmique, l'autre eſt la rectification de la tractoria : M. de l'Hôpital a donné la premiere, M. Huyguens la 2e, toutes les deux ſe trouvent dans les Ouvrages des Sçavans en l'année 1693, mais ſans analyſe ; je vais les mettre ici puiſque l'occaſion s'en préſente naturellement.

Soit dans la logarithmique ACD, *Fig. 6.* une ordonnée conſtante $DL = b$, & une appliquée quelconque variable $CO = y$, on ſçait que l'arc CD compris entre ces deux ordonnées eſt $S - \frac{dy\sqrt{aa+yy}}{y}$. Pour conſtruire cette quantité par la logarithmique même, comme a fait M. le M. de l'Hôpital, il la faut transformer en la maniere qui ſuit :

$$-\frac{dy\sqrt{aa+yy}}{y} = -\frac{aady}{y\sqrt{aa+yy}} - \frac{ydy}{\sqrt{aa+yy}} = -\frac{ydy}{\sqrt{aa+yy}} -$$

$$\frac{aady}{y\sqrt{aa+yy}} \times \frac{\sqrt{aa+yy}-a}{\sqrt{aa+yy}-a} = -\frac{ydy}{\sqrt{aa+yy}} + \frac{a^3dy - aady\sqrt{aa+yy}}{y \times aa+yy - a\sqrt{aa+yy}} =$$

$$-\frac{ydy}{\sqrt{aa+yy}} - \frac{a^3dy + a^3dy + ayydy - aady\sqrt{aa+yy}}{y \times aa+yy - a\sqrt{aa+yy}} = -\frac{ydy}{\sqrt{aa+yy}}$$

$$-\frac{aydy}{aa+yy-a\sqrt{aa+yy}} + \frac{ady}{y}.$$

Or l'integrale de cette quantité eſt $\sqrt{aa+bb} - \sqrt{aa+yy} + aL\sqrt{aa+yy} - a - aL\sqrt{aa+bb} - a - aLy + aLb = \sqrt{aa+bb} - \sqrt{aa+yy} + L\frac{by\sqrt{aa+yy}-ah}{\sqrt{aa+bb}-a} - aLy$, ce qui donne l'élegante conſtruction de M. de l'Hôpital.

Soit AV la courbe appellée tractoria, dont la principale proprieté eſt que ſa tangente eſt toujours conſtante $= AD$, *Fig. 5.* ſoit $AD = a$, $DP = y$, on trouve par l'équation de la courbe, l'arc $Ak = S - \frac{ady}{y}$. Pour conſtruire cette quantité par la tractoria, en ne ſe ſervant que des abciſſes de cette courbe & de lignes droites ;

Je multiplie le numerateur & le dénominateur par $\sqrt{aa+yy}$; j'ajoûte enſuite par $+$ & par $-$, $\frac{4aay^2dy}{aa+yy}$ $\times -\frac{ady}{y}$, ce qui me donne $\frac{a^4-2aayy+y^4}{aa+yy^2} \times -\frac{ady}{y} + \frac{4aaydy}{aa+yy^2} \times -\frac{ady}{y} = +\frac{ady}{y}$, ce qui me fournit la belle conſtruction de M. Huyguens.

Digitized by Google

J'abrege comme vous voyés autant qu'il m'eſt poſſible, & j'obmets la démonſtration des deux conſtructions, parceque je ſçai que tout cela vous eſt facile. Mon deſſein n'eſt point de vous inſtruire, mais plûtôt d'apprendre de vous ſi je ne me ſuis point trompé; il y a long-temps que j'ai perdu de vûe toutes ces fineſſes du nouveau calcul, mais je veux m'y remettre; elles ont leur agrément, je ſerois même porté à croire qu'elles ont auſſi leur utilité.

Je fus très ſurpris ces jours paſſés en liſant une Lettre de M. Paſcal à M. Fermat, dans laquelle ce grand Geometre ne paroît pas être de ce ſentiment: voici ſes paroles qui ſont fort remarquables étant d'un ſi bon Juge.

Pour vous parler franchement de la Geometrie, je la trouve le plus haut exercice de l'eſprit; mais en même temps je la connois pour ſi inutile, que je fais peu de difference entre un homme qui n'eſt que Geometre & un habile Artiſan; auſſi je l'appelle le plus beau métier du monde; mais enfin ce n'eſt qu'un métier: & j'ai ſouvent dit qu'elle eſt bonne pour faire l'eſſai, mais non pas l'emploi de notre force.

Il y a bien du vrai dans cette déciſion un peu humiliante pour les Geometres; mais il eſt certain qu'elle eſt trop ſevere, & qu'elle ſemble donnée plûtôt par ſentiment que par lumiere. Il eſt probable que M. Paſcal n'auroit pas ainſi parlé de cette ſcience quelques années auparavant, lorſqu'elle faiſoit ſa plus forte paſſion; mais écrivant cette Lettre il étoit accablé d'infirmités, & uniquement occupé des idées de la mort & de l'éternité: idées ſerieuſes & triſtes qui ôtent l'éclat à ce qui en a le plus, & ſemblent aneantir pour nous toute la nature.

Quand il ſeroit vrai (ce qui ne l'eſt qu'en partie) que les ſpeculations ſublimes de la Geometrie ſeroient inutiles pour acquerir les biens de ce monde & de l'autre; je ne pourrois pour cela convenir qu'elles fuſſent abſolument inutiles, & ſoutiendrois toujours que, nos devoirs remplis, il n'y a point d'exercice plus raiſonnable & plus honnête, ni d'occupation qui puiſſe fournir de plus ſolides

Digitized by Google

plaisirs. Il est vrai, & il faut en convenir, les plaisirs que l'on reçoit par le corps se font sentir plus vivement à la plûpart des hommes ; mais la dignité de notre nature n'exige-t'elle pas que nous donnions la préference à ceux de l'esprit qui sont plus purs, plus durables, & plus dignes de l'homme.

J'ajoûterai qu'il s'en faut beaucoup que la Geometrie du temps de M. Pascal n'eût les charmes & les avantages qu'elle a aujourd'hui, depuis que l'Analyse de M. Descartes & les nouvelles découvertes nous ont délivré de l'ennuyeuse syntheſe des Anciens, & nous ont mis en état de trouver sans peine des solutions generales, & d'appliquer Geometrie avec succès à l'explication des secrets les plus cachés de la nature.

L'envie de justifier mon goût pour la Geometrie m'emporte trop loin, je ne sçai comment tout ce discours assés inutile a coulé de ma plume. Je finis en vous assurant à l'ordinaire, que je suis plus que personne du monde, Monsieur, Votre, &c.

COMME les constructions des courbes dont j'ai parlé dans cette Lettre sont très élegantes, & que la démonstration en pourroit paroître difficile à ceux qui ne sont pas assés exercés dans ces matieres, j'ai cru qu'on ne seroit point fâché de les trouver ici ; je copierai les constructions de ces deux courbes telles que je les trouve dans l'Histoire des Ouvrages des Sçavans du mois de Février 1693, page 245, & j'y joindrai mes démonstrations.

Construction pour la Logarithmique, Fig. 6.

Il faut mener DL, CO perpendiculaires à l'asymptote, CE perpendiculaire à DL ; & prenant LT dans l'asymptote égale à la soutangente a, joignant les droites TD, TE, faire TV égale à TD, & TI égale à TE ; puis ayant joint VD, lui mener la parallele IK ; & de K où elle rencontre DL, mener KA parallele à l'asymptote, coupant DV

Digitized by Google

en F, CO en X, & la logarithmique en A, alors les droites AX & FK prises ensemble seront égales à la courbe CD.

DE'MONSTRATION.

On a $TD = TV = \sqrt{aa+bb}$, $TE = TI = \sqrt{aa+yy}$, $LV = \sqrt{aa+bb} - a$, $IL = \sqrt{aa+yy} - a$; & à cause des triangles semblables, DVL, KIL on a cette proportion. $VL\ (\sqrt{aa+bb} - a)\ .\ IL\ (\sqrt{aa+yy} - a) :: DL\ (b)\ .\ KL = \frac{b\sqrt{aa+yy} - ab}{\sqrt{aa+bb} - a}$. Ensuite pour trouver FK, les triangles semblables DLV, DKF donneront cette proportion $DL\ (b)\ .\ LV\ (\sqrt{aa+bb} - a) :: DK\ (b - \frac{b\sqrt{aa+yy} - ab}{\sqrt{aa+bb} - a})\ .\ FK = \sqrt{aa+bb} - \sqrt{aa+yy}$, on a aussi KX ou $LO = aLy$.

Par consequent $AX + FK = AK - KX + FK = L.LK - L.LE + FK = L\frac{b\sqrt{aa+yy} - ab}{\sqrt{aa+yy} - a} - aLy + \sqrt{aa+bb} - \sqrt{aa+yy}$, ce qui étoit à construire.

Construction pour la Tractoria, Fig. 5.

Il faut mener KP perpendiculaire sur AD, & ayant décrit un arc de cercle PQ, ayant D pour centre, & pour demi diametre DP, trouver en AB parallele à l'asymptote le point B qui soit centre de la circonference qui passe par A, & touche l'arc PQ, ce qui est aisé. Ensuite ayant mené la droite BD, il faut prendre sur elle $DY = DA$, & du point Y mener une parallele à l'asymptote jusqu'à la courbe en X, alors cette YX sera égale à la courbe AK.

DE'MONSTRATION.

On a selon l'Auteur $DL = \frac{2aay}{aa+yy}$, & par la nature de la *tractoria*, la differentielle de $LX = \frac{-LT \times \text{la diff. de } DL}{DL} = \frac{a^3 - aay}{aa+yy} \times \frac{2a^3dy - 2aayydy}{aa+yy}$, divisé par $\frac{2aay}{aa+yy} = \frac{aa-yy^2}{aa+yy^2} \times \frac{-ady}{y}$, ce qui étant ajoûté à $-\frac{4a^3ydy}{aa+y^2}$ differentielle de LY, donne la differentielle de $YX =$ à la differentielle proposée $-\frac{ady}{y}$; or ces deux differentielles sont égales dans tous les points de la courbe. Donc, &c.

Lettre

Lettre de M. de M... à M. N. Bernoulli.

A Montmort ce 5 Septembre 1712.

MONSIEUR,

Lorſque j'ai reçu la Lettre que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire, datée du 2 Juin, j'étois malade au lit d'une groſſe fievre continue; je la fis voir à M. l'Abbé d'Orbais qui m'étoit venu voir, il prit copie de ce qui regarde le jeu du Her, & l'envoya à ſon ſecond M. de Waldegrave, de qui il reçut réponſe quelques jours après.

M. l'Abbé d'Orbais, que vos raiſons n'avoient point ébranlé, appuyé encore du jugement de M. de Waldegrave, vient de m'écrire ce billet, dont je ſuis ſûr que le ſtile vous plaira.

Liſés, Monſieur, cette Lettre de M. de Waldegrave, elle eſt excellente. On ne pouvoit répondre à M. Bernoulli avec plus de juſteſſe & de préciſion. Oh! que j'ai bien fait de laiſſer parler cet illuſtre Geometre mon allié, je ne me ſerois jamais ſi nettement expliqué; ſi vous lui écrivés, je vous prie de lui marquer que je n'ai rien du tout à ajoûter. Solas admirandi plaudendique partes mihi reliquit. *Au reſte il eſt temps que vous preniés parti dans ce differend, M. de Waldegrave vous y invitoit dans la Lettre que vous m'avés montrée. Vous êtes trop long-temps balancé par le nom de Bernoulli d'un côté, & par nos raiſons de l'autre. Il n'y a pas moyen de vous ſouffrir plus long-temps dans cette ſituation trop prudente à mon avis pour un ſi grand Maître. Je ſalue très humblement les Dames, & vous donne le bon ſoir.*

Digitized by Google

Voilà donc une dispute dans les formes, elle est, ce me semble, fort jolie ; & je me sçai bon gré de l'avoir fait naître ; la question est subtile & toute de raisonnement. Nos Messieurs sont charmés de votre honnêteté & de votre modestie, ils se trouvent très honorés qu'un grand Geometre comme vous, enfin un Bernoulli, veuille rompre une lance avec des Novices comme eux : Ils vous font l'un & l'autre mille complimens.

J'ai reçu au commencement du mois d'Août le Livre de M. Moivre, l'Auteur l'avoit adressé pour moi à M. l'Abbé Bignon qui a eu la bonté de me l'envoyer. Sur ce que vous m'aviés mandé, & sur la maniere dont l'Auteur parle dans la Preface, je m'attendois à toute autre chose ; j'esperois y trouver la solution des quatre Problêmes que je propose à la fin de mon Livre, ou du moins la solution de quelqu'un des quatre, & des nouveautés de cette espece propres à étendre les routes que j'ai ouvertes ; mais vous trouverés que son travail se borne presqu'entierement à résoudre d'une maniere plus generale que je n'ai fait, les questions les plus simples & les plus faciles qui sont dans mon Livre ; par exemple, les cinq Problêmes de M. Huyguens que je n'ai traité sommairement qu'à cause de leur extrême facilité, en comparaison de la plûpart des autres Problêmes qui sont résolus dans mon Livre. Vous trouverés enfin que les questions qu'il traite, qui n'y sont point résolues, le sont dans nos Lettres ; en sorte que je ne crois pas qu'il y ait dans cet Ouvrage, d'ailleurs très bon, rien de nouveau pour vous, & rien qui puisse vous faire plaisir par la singularité, si ce n'est la maniere de trouver qui est souvent nouvelle, & toujours belle & ingenieuse. Voici quelques remarques que j'ai jetté à la hâte sur le papier ces jours passés, lorsque je travaillois à rendre compte de cet Ouvrage à Monsieur l'Abbé Bignon qui m'en avoit demandé mon sentiment. Vous sçavés sans doute que cet illustre Abbé, qui est en France le Protecteur des Sciences & des Sçavans, a une étendue de connoissances bien au-de-là des bornes ordinaires, un très grand goût pour tout ce qui est du ressort de l'esprit, & beaucoup d'ar-

deur pour contribuer à la perfection des Sciences.

Le premier Problême eſt un cas particulier de la formule generale $\overline{m-1}^{q-q} \times p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \frac{p-3}{4} \cdot \frac{p-4}{5}$. &c. dont j'ai fait part à M. votre Oncle dans ma Lettre du 15 Novembre 1710. Cette formule donne le nombre des hazards qu'il y a pour amener préciſément un certain nombre q de ſix, avec un certain nombre p de dés, dont le nombre des faces ſoit m. Dans le cas réſolu par M. Moivre il s'agit de trouver combien il y a de hazards pour n'amener aucun ſix avec 8 dés, ou pour en amener un ſeulement (car c'eſt la même choſe de jetter huit fois de ſuite un dé, ou d'en jetter huit en une fois,) on a donc par ma formule en prenant les dénominations de l'Auteur, qui appelle $a+b$ ce que j'appelle m, & n ce que je nomme p. $\frac{b^n+nb^{n-1}}{a+b^n}$ pour le ſort de celui qui tient ce parti

$\&\frac{1}{a+b^n} \times \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} b^{n-2} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^{n-3} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^{n-4} +$
$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} b^{n-5} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} b^{n-6}$
$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5 \cdot n-6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} b^{n-7} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5 \cdot n-6 \cdot n-7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} b^{n-8}$
$= \frac{a+b^n-b^n-nb^{n-1}}{a+b^n}$ pour celui qui tient le parti contraire, ainſi que l'Auteur l'a trouvé.

Le deuxiéme Problême n'eſt different de celui qu'on trouve réſolu à la page 177 (*a*) de mon Livre, qu'en ce que l'on y fait $a = b$; j'ai ſuppoſé cette formule dans la ſolution de pluſieurs autres Problêmes.

Le troiſiéme Problême ſe trouve réſolu mot pour mot dans ma Lettre du premier Mars 1712.

Le quatriéme Problême eſt une eſpece pareille à la précedente, & comme je l'ai déja remarqué dans ma Lettre du premier Mars 1712, toutes les queſtions ſemblables où il s'agit, en ſuppoſant égaux les ſorts des Joueurs, de déterminer quelle eſt la facilité que chacun des Joueurs a de gagner dans une partie, où l'un aura plus de points que l'autre, n'ont de difficulté que ce qu'on en trouve

(*a*) Voyés page 244.

dans la réſolution des égalités ; car c'eſt toujours la même methode de ſuppoſer l'expreſſion du ſort de chacun des Joueurs $= \frac{1}{2}$ lorſqu'il y a deux Joueurs, $= \frac{1}{3}$ lorſqu'il y en a trois, $= \frac{1}{4}$ lorſqu'il y en a quatre.

Le Problême 5e eſt reſolu à la page 144 (*a*) de mon Livre, & la formule en eſt la même.

Le Lemme qui ſuit eſt fort curieux, mais il eſt tiré de la page 141 (*b*) de mon Livre, & j'en ai envoyé la ſolution à Monſieur votre Oncle dans une formule très generale. Ma Lettre eſt du 15 Novembre 1710.

Les Problêmes 6 & 7 ſont une extenſion très ingenieuſe du Problême 5e. Je ne ſçai ſi les limites marquées par l'Auteur ſont parfaitement juſtes. Je voudrois bien ſçavoir ſi l'on ne pourroit point avoir par une autre voye la ſolution de ce Problême.

Le Problême 8 eſt réſolu de la même maniere qu'à la page 175 (*c*) de mon Livre, & depuis dans ma Lettre du huit Juin 1710 ; mais j'avoue que je ne ſuis point content de ces ſolutions ; c'eſt un grand défaut, ce me ſemble, d'être obligé d'examiner en détail quels ſont dans un même terme les arrangmens de lettres favorables à Pierre, Paul & Jacques, inconvenient qui ne ſe trouve point dans le cas de deux Joueurs, & qu'il faudroit tâcher de ſurmonter dans le cas de pluſieurs.

Le Problême 9 eſt le dernier des cinq propoſés par M. Huyguens. Je me ſuis apperçu en le liſant que M. Moivre avoit obſervé la faute que j'ai faite en mettant un faux énoncé à la tête de ce Problême. J'ai marqué à M. votre Oncle ce qui a donné lieu à cette mépriſe. Le Problême qui ſuit eſt fort bien réſolu, M. votre Oncle en a donné la même ſolution dans la Lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'ecrire, datée du 17 Mars 1710.

Le 11e qui eſt le 2e des cinq propoſés par M. Huyguens eſt réſolu autrement que dans mon Livre page 158 ; (*d*) cela vient de ce que nous en avons differemment compris l'énoncé : je ne ſçai qui de nous deux a pris le veritable

(*a*) Voyés page 237.
(*b*) Voyés page 46.
(*c*) Voyés page 242.
(*d*) Voyés page 219.

Digitized by Google

ſens de l'Auteur. J'ai trouvé que le nombre des jettons noirs étant b, & le nombre des jettons blancs a, le nombre des Joueurs q, les nombres interpoſés de q en q de l'ordre a, des nombres figurés, page 80, (*a*) donneront les ſorts des Joueurs. Cette remarque qui m'a paru curieuſe donne de la facilité pour trouver des formules particulieres, propres à abreger le calcul, & ſans leſquelles il ſeroit impoſſible de trouver les ſorts des Joueurs, lorſque a & b ſont de grands nombres, j'ai trouvé que le nombre des Joueurs, q, étant 3, comme dans le Problême de M. Huyguens, la formule $\frac{1}{6} \times n \times p^3 - 3npp - \frac{n \times n-1}{1 \cdot 2} \times 9pp + 2np + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \times 45p + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times 54p - 1 \times n - 1 \times 10 + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2} \times 46 + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times 63 + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times 27$, diviſée par $\frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, donnoit les ſorts des Joueurs, je ſuppoſe $p = b + q$, & $n = \frac{p}{q}$.

Il faut remarquer que pour trouver par cette formule le ſort de Paul, on doit, 1°, entendre par n une quantité égale au quotient de $p - 1$ diviſé par q. 2°. Qu'il y faut ſubſtituer par-tout $p - 1$, & ſes puiſſances à la place de p, & de ſes puiſſances; & pour le ſort de Jacques, 1°, entendre par n une quantité égale au quotient de $p - 2$ diviſé par q. 2°. Subſtituer par-tout $p - 2$, & ſes puiſſances à la place de p, & de ſes puiſſances. Ainſi ſuppoſant, par exemple, trois Joueurs, 58 jettons noirs & quatre blancs, on aura tout d'un coup les ſorts de Pierre, de Paul & de Jacques comme ces trois nombres 198345, 185745, 173755. Je me ſuis ſervi pour trouver cette formule de la methode que j'ai donné pour trouver la ſomme des nombres figurés interpoſés comme l'on voudra, & élevés à une puiſſance quelconque : cette méthode fournira aiſément des formules pour tous les cas pareils.

Je ne ſçai pourquoi l'Auteur s'eſt donné la peine de réſoudre dans les Propoſitions 12, 13, & 14 de ſon Livre les Problêmes propoſés par M. Huyguens qui ſont déja réſolus dans le mien; car outre que ces Problêmes ſont

(*a*) Voyés page 2.

Digitized by Google

trop faciles pour s'y arrêter de nouveau ; l'Auteur a bien vû par le Corollaire de la page 157 (*a*) que la voye des ſuites infinies ne m'étoit point inconnue, & qu'elle y étoit employée. Si cet Auteur eût voulu pouſſer cette matiere, & nous apprendre des choſes nouvelles, il eût pû chercher la ſomme des ſuites infinies que l'on trouve dans ce Corollaire : c'eſt en cela que conſiſte toute la difficulté de ces ſortes de queſtions.

J'ai fait obſerver à deſſein que cette recherche n'étoit point facile ; & comme il ſe trouve une infinité de ſuites dans leſquelles les expoſans ont leur 2e, 3e, 4e, &c. difference conſtante ; cette découverte ſeroit d'une grande étendue, & d'une extrême utilité.

L'Auteur a donné au 4e Problême de M. Huyguens un ſens different de celui que je lui donne, auſſi trouve-t'il differemment ; pour moi je crois avoir pris le veritable, & il faudroit, ce me ſemble, que le mot *minimùm* ſe trouvât dans l'énoncé, pour que celui de M. Moivre fût préferable. Quoi qu'il en ſoit, rien n'eſt plus indifferent, l'une & l'autre ſolution n'eſt qu'un exemple particulier de ma Propoſition 13, page 94. (*b*)

Le Problême 15 eſt notre Problême de la Poulle dont je vous ai envoyé la ſolution dans ma Lettre du 10 Avril 1711, j'ai été fort ſurpris de trouver ce Corollaire très hazardé de l'Auteur : *Si plures ſint colluſores, ratio ſortium eadem ratiocinatione invenietur.* Vous m'avés fait connoître, Monſieur, que l'application de ce Problême aux cas de quatre & de cinq & de ſix Joueurs étoit infiniment plus difficile que celle qui ſe borne à trois Joueurs. La voye des ſuites infinies que M. Moivre employe, & qui eſt auſſi employée dans ma Lettre, eſt facile pour trois Joueurs, mais abſolument impraticable pour pluſieurs Joueurs.

Les Problêmes 16 & 17 ne ſont que deux cas très ſimples d'un même Problême, c'eſt preſque le ſeul qui m'ait échapé de tous ceux que je trouve dans ce Livre. Quoique l'Auteur faſſe profeſſion dans ſa Préface de generali-

(*a*) Voyés page 217.

(*b*) Voyés page 26.

ſer tout, il me ſemble qu'il auroit pû rendre le Problême plus curieux & d'une plus grande étendue, en ſuppoſant que le nombre des boules de Pierre ſoit n, & le nombre des boules de Paul m, voici ce que j'ai trouvé en liſant le Problême de l'Auteur. Soit A le ſort de Paul quand il lui manque un point, & un point à Pierre; B ſon ſort quand il lui manque deux points & un point à Pierre; C ſon ſort quand il lui manque trois points & un point à Pierre, &c. on a $A = \frac{m}{m+n}$, $B = \frac{m.m-1+m\times n\times A}{m+n.m+n-1}$,

$$C = \frac{m.m-1.m-2+m.m-1\times n\times A+m\times n\times m+n-2\times B}{m+n.m+n-1.m+n-2},$$

$$D = \frac{m.m-1.m-2.m-3+m.m-1.m-2\times n\times A+m.m-1\times n\times m+n-3\times B+m\times n\times m+n-3\times m+n-2\times C}{m+n.m+n-1.m+n-2.m+n-3}$$

$$E = \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4+m.m-1.m-2.m-3\times n\times A}{m.m-1.m-2.n\times m+n-4\times B+m.m-1\times n\times m+n-4\times m+n-3\times C+m\times n\times m+n-4\times m+n-3\times m+n-2\times D}{m+n.m+n-1.m+n-2.m+n-3.m+n-4}$$

$F =$ &c.

On pourroit encore rendre le Problême plus general, en ſuppoſant les forces :: $a.b$, il me ſemble que la ſolution en ſeroit plus difficile.

Le Problême 18 eſt un Problême de combinaiſons, & a beaucoup de rapport avec le premier; auſſi la ſolution de l'un & de l'autre ſe tire-t'elle aiſément de ma formule, & auſſi de la Propoſition 30, page 136, (*a*) qui eſt beaucoup plus generale, & donne combien il y a de hazards pour amener préciſément certaines faces, ce que ne donne pas la formule de l'Auteur; par exemple, ſi l'on veut ſçavoir combien il y a de hazards pour amener en huit coups un as & un deux ſeulement, je trouve qu'il y a 229376 contre 1450240, & generalement, p, étant le nombre des dés, q le nombre des differens points qu'on doit amener, f le nombre des faces de chaque dé, la formule eſt

(*a*) Voyés page 44.

$q \cdot q - 1 \cdot q - 2 \cdot q - 3 \cdot q - 4$. &c. $\times \frac{p}{q} \times \overline{f-q}^{p-q}$.

J'ai encore trouvé que ſi l'on demande combien il y a de coups differens qui puiſſent avec huit dés donner préciſément un as & un deux, ni plus ni moins, le nombre eſt 84 ; & generalement le nombre des faces étant f, le rang $f - 1$ des nombres figurés donnera combien il y a de hazards pour amener préciſément un as. Le rang $f - 2$ des nombres figurés donnera combien il y a de hazards pour amener préciſément un as & un deux. Le rang $f - 3$ des nombres figurés donnera combien il y a de hazards pour amener préciſément un as, un 2 & un 3, &c.

Ainſi l'on trouve, par exemple, que jouant avec des dés qui auroient chacun douze faces, il y a une façon pour amener as & deux avec deux dés, dix façons avec trois dés, 55 avec quatre dés, 220 avec cinq dés, 715 avec ſix dés, 2002 avec ſept dés, 5005 avec huit dés, &c. ces nombres 1, 10, 55, 220, 715, 2002, 5005, &c. appartiennent à l'ordre $f - 2$, des nombres figurés qui en ce cas eſt le 10e.

Le Problême 19 a beaucoup de rapport avec le Problême 5e ; cependant l'Auteur employe une autre methode, elle me paroît fort bien inventée, quoiqu'elle ait peut-être le défaut de ne point donner une ſolution aſſés exacte.

Le reſte du Livre contient ſept propoſitions ſur une matiere extrémement curieuſe à laquelle j'ai le premier penſé; ſçavoir combien doit durer un jeu où l'on joue toujours en rabattant, ce que j'explique dans mon Livre page 178 (*a*), & mieux encore dans mon dernier Corollaire page 184 (*b*) où je donne cette ſuite $\frac{1}{4} + \frac{3^1}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{3^3}{4^4} + \frac{3^4}{4^5}$ + &c. pour déterminer combien il y a à parier que le jeu ſera fini en moins de 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. parties à l'infini. Je finis ce Corollaire par ces paroles : *on trouvera ſans beaucoup de peine des formules pareilles pour les autres cas, & la recherche en paroîtra curieuſe.* La verité eſt cependant que ce Problême n'eſt point du tout facile, même avec le ſecours de la formule particuliere pour le cas de trois parties

(*a*) Voyés page 277. (*b*) Voyés page 276.

ties. Je vois avec plaiſir que M. Moivre eſt venu à bout de ce Problême en entier, & que ſa ſolution s'accorde parfaitement avec les nôtres. Je ſuis fort en peine de ſçavoir comment ce ſçavant Geometre eſt parvenu à cette methode d'élever $a+b$ à la puiſſance n, de retrancher les termes extrêmes de ce produit, & de multiplier encore le reſtant par le quarré de $a+b$, & ainſi de ſuite autant de fois qu'il y a d'unités dans $\frac{1}{2}d$. une ſolution de cette nature me ſurprend, & d'autant plus que l'Auteur qui avoit ſuppoſé égal le nombre des hazards pour Pierre & pour Paul venant à le ſuppoſer dans un rapport quelconque, eſt obligé de prendre une autre route ; au lieu que ſelon vous & ſelon moi la methode eſt la même pour la ſolution generale & particuliere ; cela n'empêche pas que je n'eſtime fort cette découverte, & en general tout ſon Ouvrage, auquel je me felicite davoir donné occaſion, en ouvrant le premier la carriere. Il m'a paru d'abord fort ſingulier qu'il l'ait rempli des mêmes choſes dont nous nous ſommes entretenus dans nos Lettres ; mais il eſt naturel qu'ayant fait ſon Ouvrage ſur le mien, & voulant pouſſer ces matieres, les mêmes idées lui ſoient venues qu'à nous. J'aurois ſeulement ſouhaité, & il me ſemble que l'équité le demandoit, qu'il eût reconnu avec franchiſe ce que j'ai droit de revendiquer dans ſon Ouvrage. Je lui ſuis obligé de quelques expreſſions très honnêtes dont il ſe ſert dans ſa Preface en parlant de moi & de mon Livre ; mais je ne ſçai en verité ſur quoi il ſe fonde quand il dit ... * Je ne puis deviner pour quelles raiſons cet Auteur me fait ces reproches, & quel motif le porte à prononcer contre moi, en ne me laiſſant que le merite d'avoir appliqué à des exemples les prétendues regles de M. Huyguens, j'appelle de ce jugement aux Geometres qui liront ce que M. Huyguens & M. Paſcal, dont l'Auteur ne parle point, ont donné ſur cette matiere.

L'eſperance que vous me donnés, Monſieur, de me faire l'honneur de me venir voir ici, me fait un plaiſir infini ; je me flate que vous ne vous y ennuyerés point, vous y trouverés des perſonnes qui aiment beaucoup les gens

* Voyés l'Avertiſſement.

d'eſprit, & qui vous honorent parfaitement; vous y verrés auſſi une des raretés de la France, une Princeſſe bru de Charles IX. Roy de France, mort il y a 140 ans.

La formule que vous m'avés envoyé pour les ſorts des Joueurs, lorſque l'on ſuppoſe que les degrés de facilité qu'ils ont de gagner changent alternativement eſt extrêmement belle, & je l'ai bien entendue. J'ai auſſi vû avec beaucoup de plaiſir l'application que vous faites de votre methode pour la poulle au cas de quatre Joueurs; je n'en ſçai point encore la démonſtration, j'eſpere l'apprendre de vous. Les Problêmes énoncés dans la Theſe de feu M. votre Oncle ſont tous extrêmement curieux, j'ai déja réſolu les premiers, il me paroît que les derniers demandent un fort grand travail; ſi j'ai le plaiſir de vous poſſeder cet hyver, ce ſera pour moi de l'exercice.

La Recherche de la verité eſt en vente, mais les nouveaux Memoires de l'Academie ne ſont point encore imprimés, lorſqu'ils le ſeront je ferai partir ces Livres par la voye que vous m'avés marqué. Je vous exhorte fort, Monſieur, à vous fournir des nouveautés que vous trouverés en Angleterre. Outre la nouvelle Edition du Livre de M. Newton, que les Geometres & les Philoſophes attendent avec tant d'impatience, on m'a parlé d'un nouveau Traité de calcul integral par M. Ditton; d'un nouveau ſyſtême de Muſique, &c. Informés-vous, je vous prie, ſi l'on imprimera un Commentaire de M. Gregory ſur le Livre de M. Newton, qu'il me fit voir à Oxford il y a quelques années. Je me flate que vous voudrés bien me donner de vos nouvelles lorſque vous en aurés le loiſir, & que vous me ferés la juſtice de croire qu'on ne peut vous honorer plus parfaitement, ni être plus veritablement que je le ſuis.

MONSIEUR,

Votre très humble & très
obéiſſant Serviteur R. de M...

Digitized by Google

Lettre de M. (Nicolas) Bernoulli à M. de M...

A Londres ce 11 Octobre 1712.

Je ſuis bien aiſe, Monſieur, que vous vous ſoyés apperçu avec moi dans votre Lettre du 1er Mars qu'il faut écrire $a^7 + 7a^6b + 13a^5bb - 21a^4b^3 - 35a^3b^4 - 21aab^5 - 7ab^6 - b^7 = 0$; au lieu de l'égalité $a^7 + 7a^6b + a^5bb - 15a^4b^3 - 29a^3b^4 - 21aab^5 - 7ab^6 - b^7 = 0$. La voye que vous ſuivés pour réſoudre des Problêmes pareils à celui pour lequel vous avés trouvé l'équation précedente, me paroît bonne, vous parvenés toujours à des ſolutions que je trouve moi-même, & il me ſemble que vous avés tort de croire qu'on doit attendre une meilleure methode; la réſolution des égalités algebriques eſt inévitable dans ces ſortes de Problêmes; & quand ces réſolutions ſont trop difficiles, il faut ſe contenter des approximations. J'ai trouvé les mêmes ſorts pour les trois Joueurs Pierre, Paul & Jacques, auſquels il manque reſpectivement 3, 2, 1 points: vous avés oublié dans la quantité $b^4 + 4ab^3 + 2b^3c + 4abbc + 6aabb + bbcc$, qui exprime le ſort de Paul, le troiſiéme terme $2b^3c$.

Les Remarques que vous avés faites à l'occaſion des formules pour les cas déterminés & indéterminés de la Propoſition 30 (*a*) de votre Livre, ſont aſſurément très belles, & la regle que vous donnés pour trouver le nombre des termes d'un polynome quelconque élevé à une puiſſance quelconque eſt très juſte. La maniere qu'on tire du Problême des dés pour la formation des termes de ces polynomes, eſt certainement préferable à celles qu'on tire de la formule generale du binome.

Je ne ſçai ſi c'eſt une choſe nouvelle ce que Monſieur Parent a donné dans ſon Memoire. Pour moi j'ai trouvé une démonſtration très courte que la courbe de

(*a*) Voyés page 44.

M. de Beaune n'eſt qu'une logarithmique, dont les ordonnées ſont inclinées ſur l'axe d'un angle de 45 degrés. Comme je crois que vous ſerés bien-aiſe de la voir, la voici en peu de mots : Soit CH (*Fig. 3.*) la courbe de M. de Beaune, AL ſon aſymptote parallele à CI, H un point quelconque de la courbe, la droite GHI parallele à l'axe AE, qui rencontre la ligne CKI en I, par lequel point paſſe la perpendiculaire LIE parallele à l'ordonnée DH, & qui coupe la droite AL en L, & la tangente BH au point M; $AC = CF$ égale à ligne donnée N. On aura par la proprieté de la courbe $CF\ (LI).\ HK\ (HI) ::$ $HD.BD ::$ (à cauſe des triangle BDH, HIM ſemblables) $MI.\ HI$: Donc $MI = LI = CF$, & le point M tombe ſur le point L; & la ligne GL qui eſt la ſoutangente par rapport à l'ordonnée GH priſe ſur l'axe AG, avec qui elle fait un angle de 45 degrés, ſera égale à la conſtante AF: Donc la courbe CH eſt une logarithmique. C. Q. F. D.

Je trouve les integrales que vous donnés pour la rectification de cette courbe très juſtes, tant celles que vous conſtruiſés par les eſpaces hyperboliques, que celle que vous conſtruiſés par la courbe elle-même; je crois pourtant que dans ces dernieres il faut changer les ſignes des logarithmes. Je n'aime pas les rectifications qui ſe font par les eſpaces des courbes, qui ne ſont gueres plus connues que les longueurs des courbes qu'on cherche; je préfere celles qu'on conſtruit par les abciſſes d'une logarithmique, ou par les abciſſes de la courbe donnée elle-même, ſi on le peut. Vous avés bien appliqué cette derniere methode à la courbe de M. de Beaune, à la logarithmique ordinaire & à la tractoria de M. Huyguens. Voici une rectification generale de toutes les logarithmiques, dont les ordonnées font un angle quelconque avec l'aſymptote conſtruite par les mêmes logarithmiques. Soient (*Fig. 4.*) AB (ab) deux ordonnées d'une logarithmique quelconque, AC (ac) les tangentes aux points A (a). Sur les ordonnées AB (ab) prolongées, prenés AE (ae) égales aux tangentes AC (ac), & enſuite EF (ef) & EG (eg) égales à la ſoutangente BC

Digitized by Google

ou bc, & par les points F (f) & G (g) ſoient menées les lignes FH (fh) & GI (gi) paralleles à l'axe BC; je dis que ſi l'angle des ordonnées eſt un angle droit (ce qui arrive dans la logarithmique ordinaire) l'arc Aa compris entre les deux ordonnées AB (ab) eſt égal à $fh - gi - FH + GI + AC - ac$; c'eſt à dire, à la difference de kh & KH plus la difference des tangentes AC & ac. Mais ſi les ordonnées font avec l'axe un angle oblique, ſoit menée la perpendiculaire CD, & des points E (e) ſoient priſes EL (el) égales à BD; par L (l) ſoient tirées les paralleles Lm (lM), & par le point m la ligne mn parallele aux ordonnées, ſur laquelle du point M tombe la perpendiculaire Mo, qui coupe la ligne mn en o; je dis que ſi on retranche la partie no de la ſomme de ces deux differences précedentes, le reſte ſera égal à l'arc Aa. Si l'angle des ordonnées eſt de 45 degrés, la logarithmique eſt la courbe de M. de Beaune, comme je vous ai fait voir, & vous pourrés, s'il vous plaît, chercher ſi cette conſtruction convient avec celle que vous avés trouvée. Pour ce qui eſt de la tractoria, j'ai trouvé que ſi l'on nomme $DI = y$ (*Fig.* 5.), & que l'on prenne generalement $DP = \frac{2a^{n+1}y^n}{a^{2n}+y^{2n}}$, n étant un nombre quelconque affirmatif, & que l'on tire par le point P la ligne PK parallele à l'axe DE, & continuée juſqu'à la circonference du cercle AT dont le rayon eſt AD, & le centre D; l'arc AO ſera égal à la ligne TK diviſée par le nombre n. Quand on prend $n = 1$, la conſtruction convient exactement avec la vôtre. Voilà ce que j'ai trouvé à l'occaſion de vos découvertes. Je m'en vais vous faire part d'une que j'ai faite depuis peu à l'occaſion d'un argument pour la Providence Divine, qu'on a inſeré dans les Tranſactions Philoſophiques. On m'avoit déja parlé de cet argument en Hollande ſans me dire qu'on l'avoit imprimé quelque part. C'eſt un argument tiré de la régularité qu'on obſerve entre les enfans de l'un & de l'autre ſexe qui naiſſent tous les ans à Londres. On prétend que ſi le hazard gouvernoit le

Digitized by Google

monde, il ſeroit impoſſible que les nombres des mâles & des femelles s'approchent de ſi près pendant pluſieurs années de ſuite, qu'ils ont fait depuis 80 ans, & on donne pour raiſon qu'en jettant un grand nombre de jettons, par exemple 10000 au hazard, il eſt fort peu probable que la moitié tombe croix & la moitié pile, & encore beaucoup moins probable que cela arrive un grand nombre de fois de ſuite. Comme on m'a réiteré la même choſe ici, & qu'on m'a demandé mon ſentiment là-deſſus, j'ai été obligé de réfuter cet argument, & de prouver qu'il y a une grande probabilité que le nombre des mâles & des femelles arrive chaque année entre des limites encore plus petits que ceux qu'on a obſervés depuis 80 ans de ſuite. Vous ſentés bien, Monſieur, que ce ſeroit une choſe ridicule, ſi l'on vouloit prouver qu'il eſt fort probable que le nombre des garçons ſera juſtement égal au nombre des filles; mais que la raiſon entre le nombre des uns & des autres approchera fort près de la raiſon d'égalité, eſt ce dont je crois que vous ſerés perſuadé. J'ai trouvé en examinant le Catalogue des enfans nés à Londres depuis 1629 juſqu'à 1710 incluſivement, qu'il y a plus de mâles que de femelles; & qu'en prenant un milieu, la raiſon des mâles aux femelles eſt fort près de la raiſon de 18 à 17, un peu plus grande; d'où je conclus que la probabilité, pour qu'il naiſſe un garçon, eſt à la probabilité pour qu'il naiſſe une fille environ comme 18 à 17, & qu'ainſi entre 14000 enfans, qui eſt à peu près le nombre des enfans qui naiſſent par an à Londres, il y aura environ 7100 mâles & 6800 femelles. Or l'année où il eſt né le plus grand nombre de mâles, par rapport à celui des femelles, a été l'année de 1661, dans laquelle il eſt né 4748 mâles & 4100 femelles; & l'année où il y avoit le plus petit nombre de mâles par rapport à celui des femelles, eſt l'année 1703, dans laquelle il eſt né 7765 mâles & 7683 femelles. Je dis que ces limites ſont ſi grands, qu'on peut parier au moins plus de 300 contre 1 qu'entre 14000 enfans le nombre des mâles & des femelles tombera plûtôt entre ces limites que dehors.

Digitized by Google

J'ai le plaiſir de voir ici ſouvent M. de Moivre qui m'a fait préſent de ſon Livre *De Menſura Sortis*. Il m'a dit qu'il vous en a envoyé auſſi un Exemplaire, & il attend avec impatience votre ſentiment ſur cet Ouvrage. Vous ſerés étonné d'y trouver beaucoup de Problêmes que nous avons réſolus, & entr'autres auſſi celui de la durée des parties en rabattant, lequel il a reſolu d'une maniere, quoique differente de la nôtre, pourtant très belle & très curieuſe. Il a auſſi réſolu le Problême de la Poulle pour trois Joueurs par la voye des ſuites infinies, & il a avancé dans un Corollaire, que ſi le nombre des Joueurs étoit plus grand, on pourroit trouver leurs ſorts par le même raiſonnement. Comme je vous ai fait voir l'impoſſibilité qu'il y a d'en venir à bout par la methode des ſuites infinies, je crois que vous ferés de ce Corollaire le même jugement que j'en ai fait. Je lui ai communiqué les deux Theorêmes que j'ai trouvé, après lui avoir fait ſentir la difficulté d'employer ſa methode, quand le nombre des Joueurs eſt plus grand que trois.

J'eſpere bientôt repaſſer en France, & d'avoir l'honneur de m'entretenir avec vous ſur ces matieres plus agréablement que nous n'avons fait juſqu'ici dans nos Lettres, &c.

Lettre de M. N. Bernoulli à M. de M....

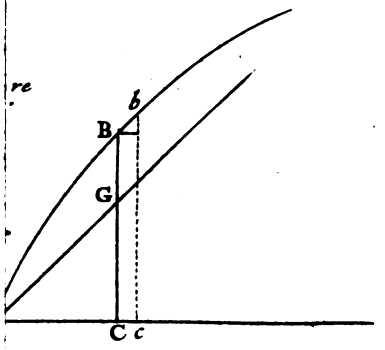
A Bruxelles ce 30 Decembre 1712.

MONSIEUR,

Je n'ai reçu votre derniere Lettre du 5e Septembre que le 27 du mois de Novembre; elle avoit été envoyée à Londres dans le temps de mon retour d'Angleterre en Hollande, & renvoyée depuis de Londres en Hollande;

Digitized by Google

ce long retardement a auſſi fait retarder ma réponſe que voici. Je commence par ce qui regarde notre diſpute ſur le Her. Je n'ai pas le même ſujet, Monſieur, d'admirer & d'applaudir aux réponſes de M. de Waldegrave, comme a fait M. l'Abbé de Monſoury. Je ſçai très bien que tous les raiſonnemens que Paul peut faire pour ſe déterminer à un parti, Pierre les peut auſſi faire pour tourner ce parti au deſavantage de Paul; mais nonobſtant cela, je dis que Paul ne fait pas ſi bien en ſuivant la maxime de garder le ſept, qu'en ſuivant la maxime de changer au ſept, en voici les raiſons: S'il étoit impoſſible de décider ce Problême, Paul ayant un ſept ne ſçauroit quel parti prendre; & pour ſe débarraſſer il ſe commettroit au pur hazard, par exemple, il mettroit dans un ſac un égal nombre de jettons blancs & de jettons noirs, dans le deſſein de ſe tenir au ſept s'il tire un blanc, & de changer au ſept s'il tire un noir; il mettroit, dis-je, un égal nombre de blancs & de noirs; car s'il mettoit un nombre inégal, il ſeroit plus porté pour un parti que pour l'autre, ce qui eſt contre l'hypotheſe. Pierre ayant un huit feroit la même choſe pour voir s'il doit changer ou non. Or chaque Joueur Paul & Pierre ayant la maxime de ſe commettre ainſi au hazard, le ſort de Paul ſera $\frac{774}{50.51}$ qui eſt moindre que $\frac{780}{50.51}$, qui eſt le ſort de Paul lorſqu'il change au ſept; d'où il ſuit que Paul prend un mauvais parti quand il ſe commet au hazard, & qu'il a un meilleur ſort en changeant au ſept. Donc il eſt décidé que Paul doit changer au ſept: En voici une autre démonſtration qui eſt fondée ſur le cercle même qu'on m'oppoſe. Comme on peut toujours démontrer quelque parti que Paul prenne, que c'eſt un mauvais parti, & qu'il auroit mieux fait s'il eût pris le parti contraire, il vaut mieux prendre le parti où l'on riſque le moins; or Paul en changeant au ſept ne riſque que $\frac{36}{50.51}$, au lieu qu'en gardant le ſept il riſque $\frac{60}{50.51}$; donc il vaut mieux changer au ſept. Le raiſonnement qui m'a conduit à la ſolution que je vous ai envoyée dans ma Lettre du 10e Novembre 1711, n'eſt gueres different de celui que je viens



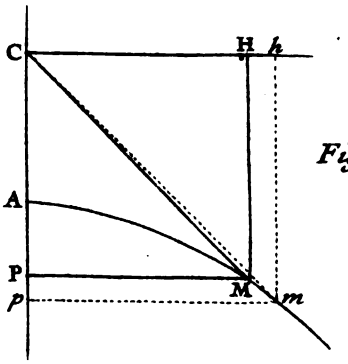
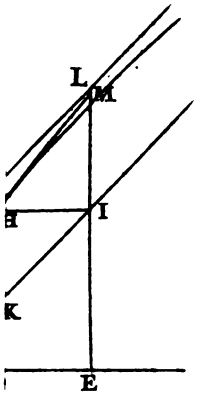


Fig. 2.



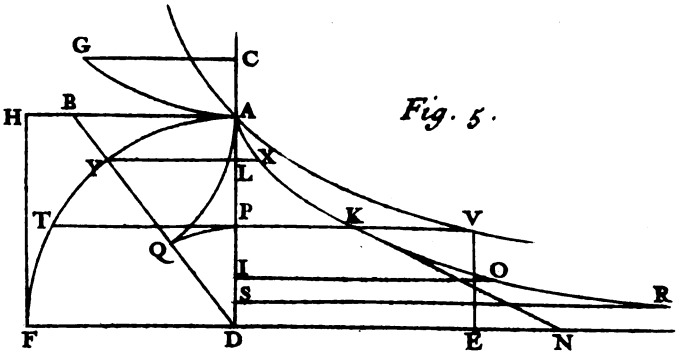


Fig. 5.

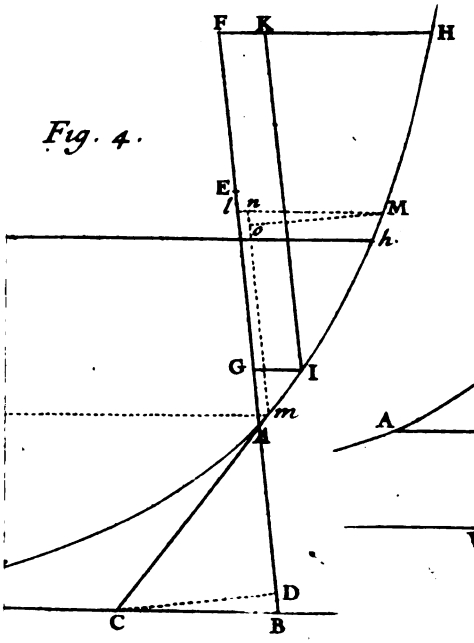


Fig. 4.

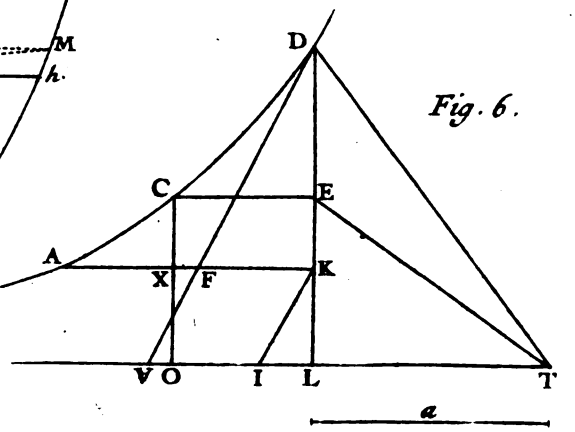


Fig. 6.

Digitized by Google

Digitized by Google

viens de faire. Avant que de vous l'expoſer je veux que vous m'accordiés ce qui ſuit : je tiens pour démontré que ſi Paul ſe tient ou à la maxime de ſe tenir au ſept, Pierre doit ſe tenir au huit ; de même ſi Paul ſe tient ou à la maxime de ſe tenir au huit ſeulement, Pierre doit changer au huit. Donc ſi l'on a démontré que Paul doit ou ſe tenir ou changer au ſept, on a auſſi démontré que Pierre doit ou ſe tenir ou changer au huit ; & ſi l'on eſt convaincu qu'il eſt vrai que Paul doit ſe tenir au ſept, par exemple, on eſt auſſi convaincu qu'il eſt vrai que Pierre doit ſe tenir au huit ; mais on ne peut pas faire le retour de Pierre à Paul ; & en prenant pour fondement que Pierre ſe tient au huit, on ne peut pas, dis-je, en aucune maniere en tirer la concluſion ; donc il eſt vrai que Paul doit changer au ſept ; car s'il eſt certain que Paul doit ſe tenir au ſept, je ne dois plus chercher par une autre voye ce qu'il doit faire, parceque je le ſçai déja ; & un homme eſt ridicule qui ſçachant qu'il doit faire une choſe veut encore douter & chercher par d'autres voyes s'il la doit faire ou non. Cela poſé, voici comment j'ai raiſonné : Paul ayant le deſſein de ſuivre la maxime de garder le ſept, examine ce qui lui peut arriver de pis par rapport au parti que Pierre prendra ; & il trouve que le pis eſt quand Pierre ſe tient au huit, & qu'alors ſon ſort ſera au ſort de Pierre comme 2828 à 2697, ou qu'en nommant l'argent du jeu 1, ſon eſperance ſera $\frac{2828}{5525}$. Enſuite il examine auſſi ce qui lui peut arriver de pis lorſqu'il ſuit la maxime de changer au ſept, & il trouve que le pis eſt lorſque Pierre ſuit la maxime de changer au huit, & qu'alors ſon ſort ſera auſſi $\frac{2828}{5525}$. Donc le ſort de Paul, en ſuivant la maxime de garder le ſept, eſt au moins $\frac{2828}{5525}$, & il eſt quelque choſe de plus lorſque Pierre ſuit la maxime de ſe tenir à une autre carte qu'à un huit. De même le ſort de Paul, en ſuivant la maxime de changer au ſept eſt plus que $\frac{2828}{5525}$, lorſque Pierre a la maxime de ſe tenir à une autre carte qu'à un neuf : Donc le ſort de Paul eſt toujours au moins $\frac{2828}{5525}$, & ce-

qui le doit porter à ſuivre une maxime plûtôt que l'autre, eſt le riſque que Pierre court en ne rencontrant pas juſte. Or ce riſque eſt plus grand lorſque Paul change au ſept, que lorſqu'il ſe tient au ſept : Donc Paul doit changer au ſept plûtôt que s'y tenir ; & par conſequent Pierre doit avoir la maxime de changer au huit ; mais on ne peut pas retourner de Pierre à Paul, & dire ; donc Paul doit avoir la maxime de garder le ſept. Ce cercle choque la Logique, & il eſt impoſſible qu'il ſoit un bon raiſonnement : une propoſition dont on tire une abſurdité eſt fauſſe ; or en tirer ſa contradictoire eſt en tirer une abſurdité ; donc la propoſition eſt fauſſe, & par conſequent ſa contradictoire eſt vraie. Or dans notre cas ſa contradictoire ne ſçauroit être vraie non plus, à cauſe du même cercle ; donc ce cercle eſt ridicule & un faux raiſonnement. On tire de la propoſition *A* ſa contradictoire *B* ; donc la propoſition *A* eſt fauſſe, & la propoſition *B* eſt vraie. De même on tire de la propoſition *B* ſa contradictoire *A* ; donc *B* eſt fauſſe & *A* vraie ; donc ce cercle démontre que deux propoſitions contradictoires ſont & toutes deux vraies & toutes deux fauſſes, ce qui eſt impoſſible ; donc il y a eu une faute dans le raiſonnement, & je n'ai point eu tort, lorſque j'ai dit que nos Meſſieurs ſuppoſent deux choſes contradictoires à la fois en faiſant le cercle. En un mot quand même il ne ſeroit pas vrai que Paul fait mieux de changer que de s'y tenir, ce ne ſeroit pas leur cercle qui le démontreroit. Je crois que vous tomberés d'accord de ceci, & tiendrés cette réponſe ſuffiſante aux objections que M. de Waldegrave & M. l'Abbé de Monſoury m'ont faites. Je ſalue très humblement ces Meſſieurs, & je les remercie de la bonne opinion qu'ils ont de moi.

Je ſuis bien aiſe que vous ayés reçu le Livre de M. de Moivre *De Menſura Sortis*. Il eſt vrai que preſque tous les Problêmes qui y ſont propoſés ſont réſolus ou dans votre Livre ou dans nos Lettres. Comme je ſçavois que M. de Moivre attendoit avec impatience le jugement que vous feriés ſur ſon Livre, j'ai pris la liberté de lui envoyer les

Digitized by Google

principales de vos remarques, j'en toucherai ici quelques-unes.

Le Problême 1er eſt un cas particulier du 2e qui eſt réſolu à la page 177 de votre (*a*) Livre dans le cas de $a=b$; & ainſi j'aimerois mieux tirer la ſolution du Problême 1er de la formule generale qui exprime tous les termes du binome $a+b$ élevé à une puiſſance quelconque, que de la formule $\overline{m-1}^{p-q} \times \frac{q \cdot p-1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ &c.

Les limites que l'Auteur donne pour les Problêmes 5, 6, 7 ſont aſſés juſtes quand q eſt un grand nombre ; nous ſçavons d'ailleurs qu'on peut parier avec avantage d'amener ſonnés en 25 coups, & qu'il y auroit du deſavantage de l'entreprendre en 24 coups ; or multiplions 35 qui eſt la valeur de q par 0.693 qui eſt la premiere limite marquée par l'Auteur, & nous trouverons 24.255.

Je n'ai point examiné les formules que vous donnés à l'occaſion du Problême 11e, la remarque que vous faites qu'on peut trouver la ſolution generale de ce Problême, en cherchant les ſommes des nombres figurés interpoſés comme l'on voudra eſt très juſte ; j'aurois réſolu ce Problême par la même maniere, ou par celle qui m'a ſervi à trouver les Problêmes ſur le Pharaon ou la Baſſete qui ne ſont qu'un cas particulier de celui-ci conſideré generalement. Je ne crois pas qu'on puiſſe trouver la ſomme de ſuites pareilles à celles que vous avés données dans le Corollaire de la page 157 (*b*).

Vous avés fort bien réſolu les Problêmes des boulles pour les cas où il manque un point à l'un des Joueurs, & à l'autre un nombre de points quelconque. Je me ſouviens que M. de Moivre m'a dit lorſque j'étois à Londres, qu'il avoit la ſolution generale de ce Problême.* Le Corollaire 3, *Si dexteritates, &c.* n'eſt pas plus difficile que lorſqu'on ſuppoſe les forces égales ; j'ai trouvé que ſi le nombre des boulles de Paul eſt m, le nombre des boulles de

* Je l'ai envoyée à M. J. Bernoulli dans une Lettre du 20 Septembre 1712. Voyés ici page 248.

(*a*) Voyés page 244.
(*b*) Voyés page 218.

Pierre n, leurs forces comme a à b, la probabilité que Paul gagnera dans un seul tour un nombre de points donné q préciſément ni plus ni moins, ſera $\frac{pb}{m-1 \cdot a+nb} \times \frac{ma}{ma+nb} \times \frac{m-1 \cdot a}{m-1 \cdot a+nb} \times \frac{m-2 \cdot a}{m-2 \cdot a+nb} \times \frac{m-3 \cdot a}{m-3 \cdot a+nb} \times$ &c. il faut prendre autant de produits qu'il y a d'unités dans $q+1$.

Votre formule $q \cdot q-1 \cdot q-2 \cdot$ &c. $\times \frac{p}{1 \cdot 2 \cdot q} \times \overline{f-q}^{p-q}$, ou plus ſimplement $\overline{f-q}^{p-q}$ multiplié par autant de produits $p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot$ &c. qu'il y a d'unités dans q, pour exprimer le nombre des cas pour amener avec un nombre quelconque de dés, un nombre déterminé de differentes faces ni plus ni moins eſt très juſte; mais ce Problême n'eſt pas le même que le 18e Problême de M. de Moivre; car quand on ſe propoſe d'amener, par exemple en huit coups, un as & un deux, on a auſſi gagné quand on amene pluſieurs fois un as & un deux; or ces cas ſont exclus dans votre Problême.

La proprieté que vous obſervés dans les bandes horizontales, qu'elles ſervent pour exprimer tous les coups differens qu'il y a pour amener un nombre déterminé de faces differentes ni plus ni moins eſt très belle; on la tire aiſément de la propoſition 32 de votre Livre (*a*).

La methode de M. de Moivre pour la durée des parties que l'on joue en rabattant eſt très naturelle & fondée ſur ce qu'il faut toujours retrancher les cas par leſquels il peut arriver qu'un des Joueurs gagne les écus de l'autre; la methode quand le nombre des écus de l'un & de l'autre eſt égal, n'eſt differente de celle qu'il employe quand le nombre de leurs écus eſt inégal, qu'en ce que l'on fait dans la premiere deux operations à la fois, à cauſe de l'égalité qu'il y a de part & d'autre. Comme vous ſouhaités fort de voir ma methode & mes démonſtrations pour la poulle, je vais vous les rapporter ici tout au long. J'ai differé un peu cette réponſe que je vous aurois envoyée ſans cela de Hollande, pour me donner

(*a*) Voyés page 35.

le loiſir de rappeller mes idées, & de me mettre en état de vous contenter entierement. C'eſt cette ſolution des trois Problêmes que vous m'avés propoſés ſur la poulle que je préfere à tout ce que j'ai trouvé juſqu'ici dans ces matieres. Voici les raiſonnemens que j'ai faits pour venir à bout de ces trois Problêmes ; je vous les propoſe methodiquement & tout au long dans les deux Tables ſuivantes, afin de me rendre plus intelligible.

PROBLÊME I.

Pluſieurs Joueurs dont le nombre eſt n + 1 *jouent une poulle, on demande quelle eſt la probabilité que chacun a de gagner la poulle.*

SOLUTION. Soit appellé t l'eſperance de gagner qu'a un des deux qui entrent les premiers au jeu, u l'eſperance qu'a celui qui entre le ſecond au jeu, x l'eſperance du troiſiéme, y celle du quatriéme, z celle du cinquiéme, &c. Soit appellé de plus a l'eſperance de gagner la poulle qu'a un Joueur qui entre au jeu, & qui joue contre un qui n'a point encore gagné de parties ; b l'eſperance de celui qui entre au jeu & qui joue contre un qui vient de gagner une partie ; c l'eſperance de celui qui joue contre un qui vient de gagner deux parties ; d l'eſperance de celui qui joue contre un qui vient de gagner trois parties, &c. Soit appellé encore p le ſort ou l'eſperance de celui qui ſort du jeu laiſſant un Joueur qui a gagné une partie ; q le ſort de celui qui ſort du jeu laiſſant un Joueur qui a deux parties ; r le ſort de celui qui ſort du jeu laiſſant un Joueur qui a trois parties, &c. Ceci poſé on aura les équations ſuivantes marquées N° 1, N° 2, N° 3, &c. juſqu'à N° 10 dans la Table 1re. L'équation marquée N° 1, eſt évidente ; car les ſorts ou les eſperances de tous les Joueurs priſes enſemble doivent faire 1 ou une certitude entiere : les autres équations ſe trouvent de la maniere que je vais expliquer. Entre les équations marquées N° 2, on trouve, par exemple $z = \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}d + \frac{1}{4}c + \frac{1}{2}b$; car celui qui entre le cinquiéme au jeu jouera contre un qui aura gagné ou 4, ou 3, ou 2, ou 1 partie ; or,

il y a $\frac{7}{16}$ ou $\frac{1}{8}$ à parier que l'un ou l'autre des deux premiers Joueurs gagne quatre parties de ſuite ; & $\frac{1}{8}$ de probabilité qu'il jouera contre un qui a gagné trois parties, $\frac{1}{4}$ qu'il jouera contre un qui a gagné deux parties, & $\frac{1}{2}$ qu'il jouera contre un qui a gagné une partie ; donc ſon ſort ou $z = \frac{1}{8}e + \frac{1}{8}d + \frac{1}{4}c + \frac{1}{2}b$. Entre les équations N° 3, on trouve, par exemple, $c = \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots . \frac{1}{2^n} \times p + \frac{1}{2^n} \times 1$; car il y a $\frac{1}{2}$ à parier qu'un Joueur qui entre nouvellement au jeu ne gagnera aucune partie, $\frac{1}{4}$ qu'il n'en gagnera qu'une, $\frac{1}{8}$ qu'il n'en gagnera que deux, $\frac{1}{16}$ qu'il n'en gagnera que trois, &c. $\frac{1}{2^n}$ qu'il gagnera toutes les parties qu'il faut moins une, & encore $\frac{1}{2^n}$ qu'il gagnera toutes les parties qu'il faut ; s'il n'en gagne aucune, il laiſſe un Joueur qui a gagné trois parties, puiſqu'on ſuppoſe dans cet exemple qu'il joue contre un Joueur qui a déja gagné deux parties ; s'il en gagne quelques-unes, mais non pas toutes celles qu'il lui faut, il ſort du jeu, laiſſant un Joueur qui a gagné une partie ; donc ſon ſort ou c eſt $= \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^n} \times p + \frac{1}{2^n} \times 1$. Les équations, N° 4, ſe trouvent par un pareil raiſonnement ; car un Joueur qui ſort du jeu laiſſant, par exemple, un Joueur qui a gagné une partie, acquiert l'eſperance ou de celui qui entre le ſecond au jeu, ou de celui qui entre le troiſiéme, ou de celui qui entre le quatriéme, &c. ſelon que le Joueur qu'il a laiſſé au jeu gagne ou une, ou deux, ou trois, &c. parties moins qu'il ne lui faut pour gagner la poulle. Les équations, N° 5, ſe trouvent par la ſouſtraction des équations N° 3 ; & celles N° 6, par la ſouſtraction des équations N° 4. Les équations, N° 7, ſe trouvent en ſubſtituant dans les équations, N° 5, les valeurs trouvées dans les équations N° 6. Les équations, N° 8, ſe trouvent en cherchant les valeurs de a, b, c, d, &c. par les équations N° 2 ; & ces valeurs étant ſubſtituées dans les équations N° 5, on aura les équations N° 9, qui étant comparées avec

Digitized by Google

les équations N° 7, donnent les équations N° 10, & ces dernieres équations fournissent mon premier Theorême.

PROBLÈME II.

Etant posé ce que dans le Problème précedent on demande quel est l'avantage ou le desavantage de chaque Joueur.

SOLUTION. Comme je me suis servi des lettres a, b, c, d, &c. p, q, r, s, &c. t, u, x, y, z, &c. pour exprimer les differentes probabilités que les Joueurs ont de gagner selon les differens états dans lesquels ils se peuvent trouver; ainsi je me servirai des mêmes lettres majuscules A, B, C, D, &c. P, Q, R, S, &c. T, U, X, Y, Z, &c. pour exprimer la portion que chaque Joueur peut prétendre dans ces differens états; je suppose aussi qu'on ne met au jeu que lorsqu'on vient de perdre contre un Joueur, & j'appelle cette mise 1. En suivant des raisonnemens semblables à ceux qu'on a faits dans le Problême précedent, on aura les équations marquées N° 1, N° 2, &c. jusqu'à N° 13 de la Table 2e. Dans les équations N° 2, on a, par exemple $Y = \frac{1}{4}D + \frac{1}{4} \times \overline{C + c} + \frac{1}{2} \times \overline{B + 2b}$; car si celui qui entre le quatriéme au jeu est obligé de jouer contre un qui a gagné trois parties, son esperance est D; s'il est obligé de jouer contre un qui a gagné deux parties, son esperance est $C + c$; j'ajoûte c à C, puisque celui qui entre le quatriéme trouve trois écus mis au jeu, au lieu que C est l'esperance de celui qui joue contre un Joueur qui a deux parties dans la supposition qu'il n'y ait que deux écus au jeu; car les lettres A, B, C, D, E, &c. & P, Q, R, S, &c. signifient les sorts des Joueurs dans les premieres entrées & sorties; il faut donc ajoûter à C la portion qu'il peut prétendre de cet écu de surplus; or comme dans cet état la probabilité de gagner la poulle ou de gagner cet écu, est c, cette portion sera $c \times 1$. Ainsi s'il joue contre un Joueur qui n'a gagné qu'une partie, il faut ajoûter à l'esperance B encore $2b$, car il trouve deux écus de plus au jeu que ne trouve celui qui joue contre

Digitized by Google

un Joueur qui a gagné une partie, & la probabilité de gagner ces deux écus est b, & par conſequent la portion qu'il peut prétendre est $b \times 2$. Le raiſonnement qu'on fait pour les équations, N° 3 & N° 4, eſt tout à fait pareil à celui qu'on vient de faire pour celles de N° 2, & qu'on a fait pour les équations N° 3 & N° 4 du Problême précedent. Les équations, N° 5 & N° 6, ſe trouvent comme dans le Problême précedent. Les équations, N° 7, ſe trouvent en ſubſtituant la premiere équation de N° 3, Table 1re, dans les équations N° 5. Les équations, N° 8, ſe trouvent en ſubſtituant la 1re équation de N° 4, Table 1re, dans les équations N° 6. Les équations N° 9, ſe trouvent en ſubſtituant les équations N° 8, dans les équations N° 7. Les équations N° 10, ſe trouvent encherchant les valeurs de A, B, C, D, &c. par les équations N° 2 de la Table 1 & 2, ou N° 2 de la 2e, & N° 8 de la 1re Table; & ces valeurs étant ſubſtituées dans les équations N° 5, on a les équations N° 11, qui comparées avec les équations N° 9, forment les équations N° 12; & ces équations N° 12, comparées avec les équations N° 10 de la Table 1, donnent les équations N° 13, qui fourniſſent mon ſecond Theorême.

PROBLÊME III.

Etant poſé ce que ci-devant, on demande quelle probabilité il y a que la poulle ſera gagnée préciſément après un nombre de coups donné.

SOLUTION. Soient exprimées par cette ſuite de lettres a, b, c, d, e, f, &c. les probabilités qu'il y a que la poulle ſera finie préciſément en n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, &c. coups; il eſt évident qu'il faut au moins n coups, puiſqu'il faut gagner n parties de ſuite, & que la probabilité pour qu'un des deux premiers Joueurs gagne d'abord les n parties eſt $\frac{1}{2^n-1}$; car il y a pour chacun des deux premiers Joueurs $\frac{1}{2^n}$ à parier; donc a ſera $= \frac{1}{2^n-1}$. Les valeurs des autres lettres ſe trouvent toutes d'une même maniere; par exemple, le ſixiéme terme f eſt égal à $\frac{1}{2}e + \frac{1}{4}d + \frac{1}{8}c$ +

$+\frac{1}{16}b+$ &c. où il faut toujours prendre autant de termes précedens qu'il y a d'unités dans $n-1$; d'où il suit que le premier terme étant donné, on aura tous les suivans. J'en donnerai la démonstration dans un exemple particulier, parceque ce sera la même pour tous les autres cas. Soit, par exemple, le nombre des Joueurs $=5$, on demande quelle probabilité il y a que le jeu sera fini en dix coups précisément. Il est évident que celui qui doit gagner la poulle au 10e coup, doit entrer au jeu après le 6e coup, & qu'il doit gagner quatre coups de suite. Or il peut entrer au jeu trouvant un Joueur qui a gagné ou 1, ou 2, ou 3 parties; s'il trouve un Joueur qui ait gagné une partie, il y a autant à parier que la poulle sera décidée au 9e coup, qu'il y a à parier après qu'il a vaincu son adversaire qu'il la gagnera lui-même au 10e coup; donc avant qu'il ait gagné son adversaire la probabilité qu'il gagnera la poulle sera la moitié de cette esperance, c'est à dire $\frac{1}{2}f$ (j'appelle $g, f, e, d, c,$ &c. la probabilité qu'on gagnera la poulle au 10e, 9e, 8e, 7e, &c. coup). S'il trouve en entrant au jeu un Joueur qui a deux parties, il y a autant à parier que son adversaire gagnera au 8e coup, qu'il y a à parier après qu'il aura vaincu deux de ses adversaires, qu'il gagnera lui-même au 10e coup; or comme la probabilité qu'il gagne deux Joueurs de suite est $\frac{1}{4}$, la probabilité qu'il gagnera la poulle au 10e coup, sera dans ce cas-ci $=\frac{1}{4}e$. Si en entrant au jeu il trouve un Joueur qui ait gagné 3 parties, il y a autant à parier que son adversaire gagnera au 7e coup, qu'il y aura à parier qu'après avoir gagné ses trois premiers adversaires, il gagnera encore le 4e; or il y a $\frac{1}{8}$ à parier qu'il gagne trois adversaires de suite; donc sa probabilité de gagner la poulle au 10e coup dans ce cas-là, sera $=\frac{1}{8}d$; donc toutes ces trois probabilités prises ensemble font $g=\frac{1}{2}f+\frac{1}{4}e+\frac{1}{8}d$; *Ce qu'il falloit démontrer.* On démontre de la même maniere que $f=\frac{1}{2}e+\frac{1}{4}d+\frac{1}{8}c$; $e=\frac{1}{2}d+\frac{1}{4}c+\frac{1}{8}b$; $d=\frac{1}{2}c+\frac{1}{4}b+\frac{1}{8}a$; $c=\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}a$; $b=\frac{1}{2}a$. Or a dans le cas de cinq Joueurs est $=\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{8}$; donc $b=\frac{1}{16}$, $c=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$, $d=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$, $e=\frac{7}{128}$, $f=\frac{15}{256}$, $g=\frac{24}{512}=\frac{3}{64}$, &c. *Ce*

qu'il falloit trouver. La ſomme d'autant de ces termes a, b, c, d, e, f, &c. qu'il y a d'unités dans p, exprimera la probabilité que la poulle ſera finie au moins en $n+p-1$ coups. Si l'on veut avoir une formule pour exprimer cette ſomme, on aura en mettant p pour le nombre des termes $\frac{p+1}{1.2^n} - \frac{p-n.p-n+1}{1.2.2^{2n}} + \frac{p-2n.p-2n+1.p-2n+2}{1.2.3.2^{3n}} - \frac{p-3n.p-3n+1.p-3n+2.p-3n+3}{1.2.3.4.2^{4n}}$ + &c. pour l'expreſſion de cette formule; & la formule pour exprimer un terme quelconque de cette ſuite a, b, c, d, e, &c. dont le quantiéme eſt p, ſera $\frac{1}{2^n} - \frac{p-n+1}{1.2^{2n}} + \frac{p-2n.p-2n+1}{1.2.2^{3n}} - \frac{p-3n.p-3n+1.p-3n+2}{1.2.3.2^{4n}}$ + &c. On trouvera aiſément la démonſtration de ces formules, en ſuppoſant que le numerateur de chaque terme de cette ſuite a, b, c, d, &c. ſoit la ſomme de tous les précedens, au lieu qu'il n'eſt que la ſomme d'autant de précedens qu'il faut gagner de parties de ſuite moins une; & en retranchant enſuite ce que par cette conſideration on aura pris de trop: je crois vous devoir avertir ici en paſſant que dans ma Lettre du 10e Novembre 1711, j'ai appellé p ce que j'appelle ici $n+p-1$. Voilà, Monſieur, tout ce que j'ai à vous communiquer de ma methode pour la poulle, j'eſpere que vous en ſerés content. Je n'ai point communiqué cette methode à M. de Moivre, je crois que s'il l'avoit vû il auroit reconnu que celle qu'il a employée dans ſon Livre pour le cas de trois Joueurs, eſt tout à fait inutile pour les cas d'un plus grand nombre de Joueurs, & qu'ainſi ſes methodes n'ont pas toujours l'avantage d'être auſſi generales qu'il penſe. Je ne ſçai pas ſi M. de Moivre a eu deſſein dans ſa Préface de vous faire autant de reproches que vous le croyés; pour moi je tiens les methodes que vous avés données dans votre Livre aſſés ſuffiſantes pour réſoudre tous les Problêmes generaux de M. Moivre, qui la plûpart ne different des vôtres que dans la generalité des expreſſions algebriques, & je ſuis perſuadé que M. Moivre lui-même vous fera la juſtice de reconnoître que vous avés pouſſé cette

Digitized by Google

matiere beaucoup plus loin que n'ont fait M. Huyguens & M. Pascal, qui n'ont donné que les premiers élemens de la science du hazard, & quaprès eux vous avés été le premier qui ait publié des methodes generales pour ce calcul. Un Jesuite nommé Caramuel, que j'ai cité dans ma These, a voulu pousser ces matieres, & même critiquer M. Huyguens dans le Traité qu'il nomme KYBEIA, & qu'il a inseré dans ses grands Ouvrages de Mathematique; mais comme tout ce qu'il donne n'est qu'un amas de paralogismes, je ne le compte pour rien.

TABLE I. N° 1.

$$\begin{array}{lllllllll} \text{N}^{\text{o}}\ 2 & t+ & t+ & v+ & x+ & y+ & z+ & \&c. = 1 \\ & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \\ & a & a & b\ \tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}b & \tfrac{1}{4}d+\tfrac{1}{4}c+\tfrac{1}{2}b & \tfrac{1}{8}e+\tfrac{1}{8}d+\tfrac{1}{4}c+\tfrac{1}{2}b & \&c. & \end{array}$$

Entre

$$\left.\begin{array}{ll} 0\ a & a = \overline{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\ldots\ \tfrac{1}{2^n}} \times p + \tfrac{1}{2^n} \times 1 \\ 1\ b & b = \overline{\tfrac{1}{2} \times q + \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\ldots\ \tfrac{1}{2^n}} \times p + \tfrac{1}{2^n} \times 1 \\ 2\ c & c = \overline{\tfrac{1}{2} \times r + \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\ldots\ \tfrac{1}{2^n}} \times p + \tfrac{1}{2^n} \times 1 \\ 3\ d & d = \overline{\tfrac{1}{2} \times s + \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\ldots\ \tfrac{1}{2^n}} \times p + \tfrac{1}{2^n} \times 1 \\ 4\ e & \\ \vdots\ \vdots & \end{array}\right\} \text{N}^{\text{o}}\ 3.$$

Sort

$$\left.\begin{array}{ll} 1\ p & p = \tfrac{1}{2^{n-1}} \times v + \tfrac{1}{2^{n-2}} \times x + \tfrac{1}{2^{n-3}} \times y + \tfrac{1}{2^{n-4}} \times z + \ldots \\ 2\ q & q = \tfrac{1}{2^{n-2}} \times x + \tfrac{1}{2^{n-3}} \times y + \tfrac{1}{2^{n-4}} \times z + \ldots \\ 3\ r & r = \tfrac{1}{2^{n-3}} \times y + \tfrac{1}{2^{n-4}} \times z + \ldots \\ 4\ s & s = \tfrac{1}{2^{n-4}} \times z + \ldots \\ \vdots\ \vdots & \end{array}\right\} \text{N}^{\text{o}}\ 4.$$

$$a - b = \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}q = \tfrac{1}{2^n} \times v = t - v \qquad \left.\begin{array}{l} p - q = \tfrac{1}{2^{n-1}} \times v \\ q - r = \tfrac{1}{2^{n-2}} \times x \\ r - s = \tfrac{1}{2^{n-3}} \times y \end{array}\right\} \text{N}^{\text{o}}\ 6.$$

$$b - c = \tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}r = \tfrac{1}{2^{n-1}} \times x = 2v - 2x$$

$$c - d = \tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{2}s = \tfrac{1}{2^{n-2}} \times y = 4x - 4y$$

N° 5. N° 7. N° 9.

$$a = t \qquad \text{N}^{\text{o}}\ 8.$$

$$b = v$$

$$c = 2x - b = 2x - v$$

$$d = 4y - c - 2b = 4y - 2x - v$$

$$\left.\begin{array}{l} v = t \times \dfrac{2^n}{1+2^n} \\ x = v \times \dfrac{2^n}{1+2^n} \\ y = x \times \dfrac{2^n}{1+2^n} \end{array}\right\} \text{N}^{\text{o}}\ 10.$$

Digitized by Google

A Paris ce 23 Janvier 1713.

Je vous envoye le Catalogue des Enfans de chaque ſexe nés à Londres depuis 1629 juſqu'à 1710, avec mes démonſtrations de ce que je vous ai écrit touchant l'argument par lequel on veut prouver que c'eſt un miracle que les nombres des enfans de chaque ſexe nés à Londres ne ſe ſont pas plus éloignés les uns des autres pendant 82 ans de ſuite, & que par le hazard il ſeroit impoſſible que pendant un ſi long-temps ils fuſſent toujours renfermés entre des limites auſſi petites que celles qu'on a obſervées dans le Catalogue de 82 ans. Je prétens qu'il n'y a aucun ſujet de s'étonner, & qu'il y a une grande probabilité pour que les nombres des mâles & des femelles tombent entre des limites encore plus petites que celles qu'on a obſervées. Pour prouver ceci, je ſuppoſe que le nombre de tous les enfans qui naiſſent chaque année à Londres eſt 14000, entre leſquels il devroit naître 7200 mâles, & 6800 femelles, ſi les nombres des enfans de chaque ſexe ſuivoient exactement la raiſon de 18 à 17, qui exprime le rapport entre la facilité de la naiſſance d'un garçon & celle de la naiſſance d'une fille; or comme le nombre des garçons eſt tantôt plus grand, tantôt plus petit que 7200, prenons une limite: Par exemple, l'année 1703, où le nombre des filles a été le plus proche de celui des garçons, il eſt né dans cette année 7765 mâles & 7683 femelles, ce qui en réduiſant la ſomme à 14000, fait 7037 mâles & 6963 femelles; le nombre des femelles a donc ſurpaſſé le nombre 6800 de 163, & le nombre des mâles a été d'autant moindre que 7200. Or je vous prouverai qu'il y a beaucoup à parier qu'entre 14000 enfans, le nombre des mâles ne ſera ni plus grand ni plus petit que 7200 de 163; c'eſt à dire, que la raiſon des mâles aux femelles ne ſera pas plus grande que de 7363 à 6637, ni plus petite que de 7037 à 6963. Pour cette fin imaginons 14000 dés à 35 faces cha-

N° 1.

$+ \quad \&c. = 0$

$\overline{B + 3b}$ &c.

$+ \frac{1}{2^n} \times n$

$\frac{1}{2^n} \times \overline{n+1}$

$\frac{1}{2^n} \times \overline{n+2}$

$+ \frac{1}{2^n} \times \overline{n+3}$ } N° 3.

$\overline{-4} \times z + \ldots$

$$U = \frac{T \times 2^n + t \times 2^n - nu}{1+2^n} \ldots\ldots = \frac{\overline{T+t} \times 2^n - nu}{1+2^n}$$

$$X = \frac{U \times 2^n + v \times \overline{2^{n-1}} - \frac{1}{2} + t \times 2^{n-1} - nx}{1+2^n} \ldots\ldots = \frac{\overline{U+v} \times 2^n - nx}{1+2^n}$$

$$Y = \frac{X \times 2^n + x \times \overline{2^{n-1}} - \frac{1}{2} + v \times \overline{2^{n-2}} - \frac{1}{4} + t \times 2^{n-2} - ny}{1+2^n} = \frac{\overline{X+x} \times 2^n - ny}{1+2^n}$$

N° 12. N° 13.

$+ t \ldots\ldots\ldots\ldots = U - T$

$- \frac{1}{2^n} \times v + t \ldots\ldots = 2X - 2U - v$

$- \frac{1}{2^{n-1}} \times x - \frac{1}{2^n} \times v + t = 4Y - 4X - 2x - v$

N° 11.

$+ p$	$A = T$
$+ \frac{1}{2^{n-1}} \times v + p$	$B = U$ N° 10.
$\frac{1}{2^{n-2}} \times x - \frac{1}{2^{n-1}} \times v + p$	$C = 2X - U - v$
	$D = 4Y - 2X - U - 2x - 2v$

Digitized by Google



Digitized by Google

cun, dont 18 ſoient blanches & 17 noires. Vous ſçavés que les termes du binome $18 + 17$, éleve à 14000, nous donneront tous les cas poſſibles pour amener avec ces 14000 dés tant de faces blanches que l'on voudra ; ſçavoir, le premier terme de tous les cas pour amener toutes faces blanches ; le ſecond, pour amener une face noire & 13999 blanches ; le 3e, pour amener deux faces noires & 13998 blanches, &c. En ſorte que le 6801e terme exprimera tous les cas pour amener préciſément 6800 faces noires & 7200 blanches ; le 6638e terme les cas pour amener 6637 faces noires & 7363 blanches ; & le 6964e terme les cas pour amener 6963 faces noires & 7037 blanches. Il s'agit donc de trouver quel rapport il y a entre la ſomme de tous les termes depuis le 6638e juſqu'au 6964e pris incluſivement, & entre la ſomme de tous les autres termes qui ſont en deçà du 6638e, & en de-là du 6964e. Or comme ces termes ſont furieuſement grands, il faut un artifice ſingulier pour trouver ce rapport : voici comment je m'y ſuis pris. Soit generalement au lieu de 14000 le nombre de tous les enfans $= n$, les facilités de la naiſſance d'un mâle & d'une femelle comme m à f, au lieu de la raiſon 18 à 17 ; & au lieu de la limite 163, ſoit pris une limite quelconque l ; ſoit de plus $p = \frac{n}{m+f}$, ou $n = mp + fp$; dans notre exemple mp eſt $= 7200$, & $np = 6800$. Je cherche premierement par une approximation fort proche le rapport du terme dont le quantiéme eſt $fp + 1$, au terme dont le quantiéme eſt $fp - l + 1$. Par la loi de la progreſſion de ces termes, le terme $fp + 1$ eſt $= \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \ldots \frac{n-fp+1}{fp} \times m^{n-fp} f^{fp}$, & le terme $fp - l + 1$ eſt $= \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \ldots \frac{n-fp+l+1}{fp-l} \times m^{n-fp+1} f^{fp-1}$; donc la raiſon de celui-là à celui-ci eſt comme $\frac{n-fp+l}{fp-l+1} \times \frac{n-fp+l-1}{fp-l+2} \times \frac{n-fp+l-2}{fp-l+3} \times \ldots \frac{n-fp+1}{fp} \times \frac{f}{m}^l$ à 1, ou en mettant np à la place de $n - fp$ cette raiſon eſt comme $\frac{mp+l}{fp-l+1} \times \frac{mp+l-1}{fp-l+2} \times \frac{mp+l-2}{fp-l+3} \times \ldots \frac{mp+1}{fp} \times \frac{f}{m}^l$ à 1 ; je ſuppoſe que les facteurs du premier terme de cette raiſon excepté le dernier $\frac{f}{m}^l$;

ſoient en progreſſion geometrique & leurs logarithmes en progreſſion arithmetique; cette ſuppoſition eſt fort proche de la verité, ſur-tout quand n eſt un grand nombre; la ſomme donc de tous leurs logarithmes ſera $\frac{1}{2}l \times \log.\frac{mp+l}{fp-l+1} + \log.\frac{mp+1}{fp}$, c'eſt à dire la ſomme des logarithmes du premier & dernier facteur, multipliée par la moitié du nombre de tous les termes, à laquelle ſi l'on ajoûte le logarithme de $\frac{f}{m}\Big|^l$, c'eſt à dire $l \times \log.\frac{f}{m}$, on aura $\frac{1}{2}l \times \log.\frac{mp+l}{fp-l+1} + \log.\frac{mp+1}{fp} + l \times \log.\frac{f}{m}$, ou $\frac{1}{2}l \times \log.\frac{mp+l}{fp-l+1} + \log.\frac{mp+1}{mp} + \log.\frac{fp}{mp}$ pour le logarithme de la raiſon cherchée. Et par conſequent la raiſon elle-même ſera comme $\frac{mp+l}{fp-l+1} \times \frac{mp+1}{mp} \times \frac{fp}{mp}\Big|^{\frac{1}{2}l}$ à 1.

Si l'on veut approcher de plus près de la veritable valeur, on pourra partager cette ſuite des facteurs $\frac{mp+l}{fp-l+1} \times \frac{mp+l-1}{fp-l+2} \times \frac{mp+l-2}{fp-l+3} \times$ &c. en pluſieurs parties, & ſuppoſer que les facteurs de chaque partie ſoient en progreſſion geometrique; mais on n'a pas beſoin de le faire, parceque toutes les valeurs qu'on trouvera par ces differentes ſuppoſitions ſeront très peu differentes les unes des autres; & quand même par cette premiere ſuppoſition je ferois cette raiſon un peu plus grande qu'elle n'eſt, cet excès ſeroit fort peu conſiderable par rapport à ce que je negligerai dans la ſuite.

Si l'on prend à cette heure les termes qui precedent immédiatement les termes du quantiéme $fp+1$ & $fp-l+1$; ſçavoir ceux dont le quantiéme eſt fp & $fp-l$, la raiſon de celui-là à celui-ci ſera comme $\frac{mp+l+1}{fp-l} \times \frac{mp+l}{fp-l+1} \times \frac{mp+l-1}{fp-l+2} \times \ldots\ldots \frac{mp+2}{fp-1} \times \frac{f}{m}\Big|^l$ à 1, & par conſequent plus grande que $\frac{mp+l}{fp-l+1} \times \frac{mp+l-1}{fp-l+2} \times \frac{mp+l-2}{fp-l+3} \times \ldots\ldots \frac{mp+1}{fp} \times \frac{f}{m}\Big|^l$ ou $\frac{mp+l}{fp-l+1} \times \frac{mp+1}{mp} \times \frac{fp}{mp}\Big|^{\frac{1}{2}l}$ à 1, puiſque chaque facteur de la premiere ſuite eſt plus grand que le facteur correſpondant de la ſeconde. Par la même raiſon le terme dont le

quantiéme eſt $fp - 1$ aura au terme, dont le quantiéme eſt $fp - l - 1$, une plus grande raiſon que le terme fp au terme $fp - l$; & le terme $fp - 2$ aura au terme $fp - l - 2$ une plus grande raiſon que le terme $fp - 1$ au terme $fp - l - 1$, & ainſi de ſuite en reculant toujours d'un terme juſqu'au premier. C'eſt pourquoi ſi l'on partage tous les termes qui précedent le terme $fp + 1$ en des claſſes, dont chacune contienne un nombre égal de termes exprimé par l, en commençant à compter par le terme dont le quantiéme eſt fp; le premier terme de la premiere claſſe aura au premier terme de la ſeconde claſſe une plus grande raiſon que le terme $fp + 1$ au terme $fp - l + 1$; & le ſecond terme de la premiere claſſe aura au ſecond de la ſeconde claſſe une raiſon encore plus grande; & le troiſiéme de la premiere claſſe au troiſiéme de la ſeconde une raiſon encore plus grande, & ainſi de ſuite; donc auſſi tous les termes de la premiere claſſe pris enſemble auront à tous les termes de la ſeconde claſſe pris enſemble une plus grande raiſon que le terme $fp + 1$ au terme $fp - l + 1$. Et par la même raiſon tous les termes de la ſeconde claſſe auront à tous les termes de la troiſiéme claſſe; *item*, tous les termes de la troiſiéme à ceux de la quatriéme, &c. une plus grande raiſon que le terme $fp + 1$ au terme $fp - l + 1$; c'eſt à dire que $\overline{\frac{mp+1}{fp-l+1} \times \frac{mp+1}{mp} \times \frac{fp}{mp}}^{\frac{1}{2}l}$ à 1. Donc ſi l'on nomme $\overline{\frac{mp+1}{fp-l+1} \times \frac{mp+1}{mp} \times \frac{fp}{mp}}^{\frac{1}{2}l} = q$; & la ſomme des termes de la premiere claſſe $= s$, la ſomme des termes de la ſeconde claſſe ſera plus petite que $\frac{s}{q}$; & la ſomme de la troiſiéme claſſe plus petite que $\frac{s}{qq}$, & celle des termes de la quatriéme claſſe plus petite que $\frac{s}{q^3}$, &c. Donc la ſomme de toutes les claſſes, excepté la premiere, quand même le nombre des claſſes ſeroit infini, ſera plus petite que cette $\frac{s}{q} + \frac{s}{qq} + \frac{s}{q^3} + \frac{s}{q^4}$, continuée à l'infini, c'eſt à dire plus petite que $\frac{s}{q-1}$; d'où il ſuit que la ſomme de la premiere claſſe, c'eſt à dire de tous les termes qui ſont entre le terme $fp + 1$ & le terme $fp - l + 1$, en y compre-

nant auſſi le terme $fp - l + 1$, aura à la ſomme de tous les précedens une raiſon plus grande que $q - 1$ à 1, ou en mettant pour q ſa valeur, que $\overline{\frac{mp+l}{fp-l+1} \times \frac{mp+1}{mp} \times \frac{fp}{mp}}^{\frac{1}{2}l} - 1$ à 1; Par conſequent en mettant m au lieu de f, & f au lieu de m; la ſomme de tous les termes qui ſont entre le terme $fp + 1$ & le terme $fp + l + 1$, en y comprenant le terme $fp + l + 1$, aura à la ſomme de tous les autres ſuivans juſqu'au dernier une plus grande raiſon que $\overline{\frac{fp+l}{mp-l+1} \times \frac{fp+1}{fp} \times \frac{mp}{fp}}^{\frac{1}{2}l} - 1$ à 1. Donc enfin la ſomme de tous les termes depuis le terme $fp - l + 1$ juſqu'au terme $fp + l + 1$, pris incluſivement, ſans compter même le terme $fp + 1$ qui eſt au milieu, aura à la ſomme de tous les autres termes au moins une plus grande raiſon que la plus petite entre ces deux quantités $\overline{\frac{mp+l}{fp-l+1} \times \frac{mp+1}{mp} \times \frac{fp}{mp}}^{\frac{1}{2}l}$ & $\overline{\frac{fp+l}{mp-l+1} \times \frac{fp+1}{mp} \times \frac{mp}{fp}}^{\frac{1}{2}l}$ moins l'unité à l'unité; *ce qu'il falloit trouver.*

Appliquons ceci à cette heure à notre exemple, où $n = 14000$, $mp = 7200$, $fp = 6800$, $l = 163$, & nous trouverons $\frac{1}{2}l \times \overline{\log. \frac{mp+l}{fp-l+1} + \log. \frac{mp+1}{mp} + \log. \frac{fp}{mp}} = \frac{163}{2} \times \overline{\log. \frac{7363}{6838} + \log. \frac{7201}{7200} + \log. \frac{6802}{7200}} = \frac{163}{2} \times 0.0450176 + 0.0000603 - 0.0248236 = 1.6507254$; le nombre de ce logarithme eſt $44\frac{74}{100}$. En mettant fp au lieu de mp, & mp au lieu de fp, nous trouverons $\frac{1}{2}l \times \overline{\log. \frac{fp+l}{mp-l+1} + \log. \frac{fp+1}{fp} + \log \frac{mp}{fp}} = \frac{163}{2} \times \overline{\log. \frac{6963}{7038} + \log. \frac{6801}{6800} + \log. \frac{7200}{6800}} = \frac{163}{2} \times \overline{-0.0046529 + 0.0000639 + 0.0248236} = 1.6491199$; le nombre de ce logarithme eſt $44\frac{58}{100}$; d'où je conclus que la probabilité qu'entre 14000 enfans le nombre des mâles ne ſera ni plus grand que 7363, ni plus petit que 7037, ſera à la probabilité que le nombre des mâles tombe hors de ces limites dans une raiſon

raiſon plus grande au moins que 43 $\frac{58}{100}$ à 1. Donc on peut déja parier avec avantage qu'en 82 fois le nombre des mâles ne tombera pas trois fois hors de ces limites. Or en examinant le Catalogue des enfans nés pendant 82 ans à Londres, vous trouverés que le nombre des mâles a été onze fois plus grand que 7363; ſçavoir en 1629, 39, 42, 46, 49, 51, 59, 60, 61, 69, 76; vous trouverés auſſi aiſément qu'on peut parier plus que 226 contre 1 que le nombre des mâles ne tombera pas en 82 ans onze fois hors de ces limites. Vous devés remarquer auſſi que ſi j'avois pris une autre limite plus grande que 163, mais pourtant plus petite que le plus grand qu'on trouve dans ce Catalogue, j'aurois trouvé une probabilité beaucoup plus grande que 43 à 1, que le nombre des enfans de chaque ſexe tombera chaque année plûtôt entre cette limite que dehors. Donc il n'y a point de ſujet de s'étonner que les nombres des enfans de chaque ſexe ne ſe ſont pas plus éloignés les uns des autres, ce que j'ai voulu démontrer. Je me ſouviens que feu mon Oncle a démontré une ſemblable choſe dans ſon Traité *De Arte conjectandi*, qui s'imprime à préſent à Bâle, ſçavoir, que ſi l'on veut découvrir par les experiences ſouvent réiterées le nombre des cas par leſquels un certain évenement peut arriver ou non, on peut augmenter les obſervations en telle maniere qu'enfin la probabilité que nous ayons découvert le vrai rapport qu'il y a entre les nombres des cas, ſoit plus grande qu'une probabilité donnée. Quand ce Livre paroîtra nous verrons ſi dans ces ſortes de matieres j'ai trouvé une approximation auſſi juſte que lui. J'ai l'honneur d'être avec une parfaite eſtime,

MONSIEUR,

Votre très humble & très obéiſſant Serviteur
N. BERNOULLI.

Digitized by Google

Catalogue des Enfans mâles & femelles nés à Londres depuis 1629 jusqu'à 1710.

	mâles.	*femell.*		*mâles.*	*femell.*
1629	5218	4683	1670	6278	5719
30	4858	4457	71	6449	6061
31	4422	4102	72	6443	6120
32	4994	4590	73	6073	5822
33	5158	4839	74	6113	5738
34	5035	4820	75	6058	5717
35	5106	4928	76	6552	5847
36	4917	4605	77	6423	6203
37	4703	4457	78	6568	6033
38	5359	4952	79	6247	6041
39	5366	4784	80	6548	6299
40	5518	5332	81	6822	6533
41	5470	5200	82	6909	6744
42	5460	4910	83	7577	7158
43	4793	4617	84	7575	7127
44	4107	3997	85	7484	7246
45	4047	3919	86	7575	7119
46	3768	3395	87	7737	7114
47	3796	3536	88	7487	7101
48	3363	3181	89	7604	7167
49	3079	2746	90	7909	7302
50	2890	2722	91	7662	7392
51	3231	2840	92	7602	7316
52	3220	2908	93	7676	7483
53	3196	2959	94	6985	6647
54	3441	3179	95	7263	6783
55	3655	3349	96	7632	7229
56	3668	3382	97	8062	7767
57	3396	3289	98	8426	7626
58	3157	3013	99	7911	7452
59	3209	2781	1700	7578	7061
60	3724	3247	1	8102	7514
61	4748	4107	2	8031	7656
62	5216	4803	3	7765	7683
63	5411	4881	4	6113	5738
64	6041	5681	5	8366	7779
65	5114	4858	6	7952	7417
66	4678	4319	7	8379	7687
67	5616	5322	8	8239	7623
68	6073	5560	9	7840	7380
69	6506	5829	10	7640	7288

Digitized by Google

Lettre de M. de M... à M. N. Bernoulli.

A Paris ce 20 Août 1713.

MADAME la Ducheſſe d'Angoulême mourut à Montmort le 12 de ce mois; quoique cette Princeſſe fût, comme vous ſçavés, dans un âge extrêmement avancé, elle a conſervé ſa raiſon pure & ferme juſqu'au dernier moment. Je ne doute point, Monſieur, que le reſſouvenir des vertus de cette bonne Princeſſe & de l'affection qu'elle vous portoit, ne vous rende ſa perte très ſenſible.

Sa mort, outre la douleur qu'elle m'a cauſé, me donne des ſoins & des peines infinies; il me faut paſſer tout mon temps à ſolliciter les Miniſtres: quelle occupation pour un Philoſophe!

Je ne pourrai point m'entretenir aujourd'hui avec vous de nos matieres geometriques; je n'ai pour cela ni aſſés de loiſir, ni aſſés de tranquillité d'eſprit. Je me bornerai pour remplir cette Lettre, à vous apprendre le peu que je ſçai de nouvelles de Litterature.

Il paroît ici depuis quelques jours un Livre qui fait un fort grand bruit; il a pour titre: *Prémotion Phyſique, ou Action de Dieu ſur les Creatures démontrée par raiſonnement.* L'Auteur anonyme prétend y ſuivre par-tout la methode des Geometres; ce qu'il y a de ſûr, c'eſt qu'on y rencontre à chaque page ces grands mots, *Définition, Axiome, Theorème, Démonſtration, Corollaire, &c.*

Je vous avoue, Monſieur, que je ſouffre de voir la Geometrie ainſi avilie & dégradée, non par rapport aux matieres auſquelles on la tranſporte; mais par l'uſage, ou plûtôt l'abus qu'on en fait, en employant des termes & des regles qui ſont conſacrées pour des verités évidentes, à des obſcurités qui produiſent des monceaux de paralogiſmes. Ce mal eſt devenu fort commun, tout le monde s'en mêle, principalement ceux qui ne ſont point Geo-

metres. Cet uſage me déplaît ſur-tout dans les Livres de Metaphyſique ou de Morale ; Spinoſa ne s'en eſt pas bien trouvé, ſon exemple auroit dû en dégoûter ceux qui l'ont ſuivis. Je ne connois aucun Auteur à qui cette methode ait réuſſi ; elle eſt excellente, mais on ne peut l'employer que ſur des idées nettes & diſtinctes, telles qu'en fourniſſent ſeulement l'Arithmetique & la Geometrie ; pour tout le reſte, une bonne Logique, c'eſt ce qu'il faut ; je crois, Monſieur, que vous êtes de mon avis.

Les ſentimens ſont toujours fort partagés ici ſur la diſpute entre Mr le Chevalier Renault & Mr Huyguens. Le nombre des voix ſemble être contre Mr Renault ; mais il a pour lui le Pere Mallebranche, outre pluſieurs bons Geometres : Il faut bien, Monſieur, que vous & Mr votre Oncle preniés parti dans cette diſpute. Mr le Chevalier Renault a tant de confiance en ſon bon droit, qu'il vous y invite, il m'a dit même qu'il vous en prieroit par Lettre ; La queſtion pour être bien approfondie demande autre choſe que de la Geometrie, elle eſt compliquée de Phyſique, & ſuppoſe les loix du choc des corps.

J'avois prié un de mes Amis qui eſt en Angleterre, & qui eſt habile Geometre, de me mander des nouvelles de la ſeconde Edition du Livre de M. Newton, dont il n'y a point encore d'exemplaire en France. Il m'apprend qu'il y a très peu de propoſitions nouvelles, mais beaucoup d'experiences & de réflexions pour appuyer les principes établis dans ce Livre ; on m'en rapporte quelques-unes, il ſeroit trop long de les mettre ici. On me mande que M. Newton employe preſque par-tout la ſyntheſe & les compoſitions de raiſons comme dans l'ancienne Edition ; ainſi ce ſçavant Ouvrage, le plus admirable qui ſe vit jamais en Geometrie, n'aura pas le merite d'être entendu facilement. C'eſt dommage, il en auroit peu coûté à l'Auteur qui a certainement trouvé tant de belles choſes par analyſe, de les donner comme il les a trouvé ; mais M. Newton, ſûr d'être admiré du Public, ne s'eſt pas ſans doute ſoucié qu'il lui eût obligation.

Enfin on m'apprend que ce ſont toujours les mêmes

Digitized by Google

dogmes ; qu'on y ſuppoſe encore les vertus attractrices tant décriées en France & par-tout, qu'on y prétend prouver & même démontrer le vuide, & qu'on y combat plus que jamais les tourbillons de M. Deſcartes : tout cela, je vous avoue, me met en pays perdu ; je croirois avoir de bonnes démonſtrations que le mouvement en rond des Planettes demande neceſſairement un fluide environnant qui entraîne la Planette, & que le vuide ſuppoſé, la lumiere, & generalement tous les autres phenomenes de la nature, ſont inexplicables. J'ai toujours crû comme choſe certaine qu'il n'y a d'autre force dans la nature que le mouvement ; qu'un corps ne peut aller d'un côté que parcequ'il eſt pouſſé vers ce côté, & qu'il ne peut être mis en mouvement, *niſi à contiguo & moto* ; j'ai toujours regardé ces propoſitions comme des notions communes, comme de vrais axiomes conformes à la raiſon & appuyés par une experience univerſelle : Car, enfin, c'eſt un fait certain à l'égard de tous les corps ſenſibles & qui peuvent tomber ſous nos ſens, qu'un corps qui en choque un autre lui communique toujours du mouvement, & qu'un corps reſtera toujours en repos, s'il ne reçoit du mouvement par le choc d'un autre corps en mouvement. Où eſt la raiſon de croire que cette loi ſi conſtante de la nature ſe dément à l'égard des corps trop petits pour être viſibles ou palpables.

Dérangé comme je le ſuis par l'autorité de M. Newton, & d'un ſi grand nombre de ſçavans Geometres Anglois, je ſerois preſque tenté de renoncer pour jamais à l'étude de la Phyſique, & de remettre à ſçavoir tout cela dans le Ciel ; mais non, l'autorité des plus grands eſprits ne doit point nous faire de loi dans les choſes où la raiſon doit décider. Malgré la diverſité d'opinions qui regnent aujourd'hui entre les Sçavans, je ne deſeſpere pas qu'un jour ils ne ſoient tous d'accord ; mais il faudra pour cela que les Geometres fondent leurs hypotheſes mathematiques ſur les idées d'une ſaine Metaphyſique ; ſans cela un million d'experiences nous avanceront peu dans la connoiſſance de la nature ; ſans cela le plus ſubtile & le plus ſublime uſage de la Geometrie appliquée à la Phyſique, ne four-

Digitized by Google

nira que des Theorêmes : Si l'on veut aller bien & aller loin, on doit certainement recevoir ce principe : *Il ne faut que de la matiere & du mouvement pour tout ce qui eſt dans le monde materiel ; Donc il ne faut chercher la raiſon des phenomenes de la nature, que dans la varieté des figures & la diverſité des mouvemens.* Sur cette idée il n'y a qu'à ſuivre la regle de M. Newton : *Poſitis phœnomenis inveſtigare vires naturæ*, concevant par ce mot *vires*, non des formes abſtraites, mais des loix de mouvemens ou des rapports de vîteſſes qui ſoient des choſes réelles. La Geometrie & la Mechanique ainſi fondée ſur des principes vrais & ſur des experiences certaines, produira des découvertes admirables, & fournira enfin un ſyſtême lié, dans lequel on trouvera l'explication des principaux phenomenes de la nature, ſans être obligé de faire des ſuppoſitions pour chacun en particulier. Les derniers éclairciſſemens que le R. P. Mallebranche a ajoûté dans ſa nouvelle Edition de la Recherche de la verité, ſont une preuve inſigne de la bonté de ce principe que tout corps va du côté vers lequel il eſt pouſſé par celui qui le touche immédiatement. Vous trouverés certainement, Monſieur, qu'il y a plus de verités phyſiques dans ce ſeul morceau, que dans tout ce qui a été donné juſqu'à préſent ſur ces matieres.

On prétend que le cours prodigieuſement rapide des Cometes, & la facilité avec laquelle elles ſemblent traverſer toutes les parties du tourbillon du Soleil eſt une démonſtration contre le plein, & contre les tourbillons de M. Deſcartes ; que dans le ſyſtême Carteſien la Planette doit aller plus vîte dans laphelie & plus lentement dans le perielie, ce qui eſt contraire aux obſervations aſtronomiques, &c. ce ſont des difficultés apparentes, & auſquelles on peut répondre ; mais quand on ne le pourroit pas, on ne devroit pas abandonner pour cela un ſyſtême très beau & très fecond, fondé ſur des idées nettes & vrayes, pour enprendre un qui n'eſt que fiction, & pour lequel il faudroit autant de principes differens qu'il y a de differens phenomenes.

Je voudrois bien ſçavoir quel jugement vous & M^r votre oncle portés du Livre intitulé : *Commercium Epiſtolicum, &c.*

Digitized by Google

que Mrs de la Societé Royale ont fait imprimer pour assurer à M. Newton la gloire d'avoir inventé le premier & seul les nouvelles methodes ; je vous promets le secret si vous l'exigés de moi : tout le monde s'attend ici que M. Leibnits répondra.

Il seroit à souhaiter que quelqu'un voulût prendre la peine de nous apprendre comment & en quel ordre les découvertes en Mathematiques se sont succedées les unes aux autres, & à qui nous en avons l'obligation. On a fait l'Histoire de la Peinture, de la Musique, de la Medecine, &c. Une bonne Histoire des Mathematiques, & en particulier de la Geometrie, seroit un Ouvrage beaucoup plus curieux & plus utile : Quel plaisir n'auroit-on pas de voir la liaison, la connexion des methodes, l'enchaînement des differentes theories, à commencer depuis les premiers temps jusqu'au nôtre où cette science se trouve portée à un si haut degré de perfection. Il me semble qu'un tel Ouvrage bien fait pourroit être en quelque sorte regardé comme l'histoire de l'esprit humain ; puisque c'est dans cette science plus qu'en toute autre chose, que l'homme fait connoître l'excellence de ce don d'intelligence que Dieu lui a accordé pour l'élever au dessus de toutes les autres Creatures.

Il paroît depuis quelques jours un Livre qui a pour titre *Mechanique du Feu* ; lorsque je vous envoyerai ma nouvelle Edition qui s'avance fort, j'y joindrai ce petit Traité où vous trouverés plusieurs choses fort ingenieuses. L'Auteur publia l'année passée une methode de construire des Barometres de toutes sortes de grandeurs : je crois vous avoir donné un petit Ecrit qui contient sa methode avec la démonstration, & il me semble que vous en fûtes content.

Monsieur votre Oncle m'a fait l'honneur de m'écrire qu'il avoit fait mettre dans les Journaux de Leipsic un long Memoire sur les courbes que décrivent les corps jettés dans des fluides : nos Libraires n'auront ce Memoire qu'au commencement de l'année prochaine ; si vous pouviés me l'envoyer imprimé par la Poste, vous me feriés

Digitized by Google

beaucoup de plaiſir ; j'aurois de la curioſité de comparer ſa theorie avec celle de M. Newton : on me mande qu'il l'a retouché.

Quoique cette Lettre ſoit déja très longue, & beaucoup plus ſans doute qu'il ne faudroit, je ne puis me réſoudre à finir ſans vous dire quelque choſe au ſujet de vos deux Lettres, l'une du 11 Octobre 1712, l'autre du 23 Janvier 1713, auſquelles je n'ai pas encore fait réponſe, n'ayant pas eu le temps juſqu'aujourd'hui de les examiner & de les entendre.

Je ſouſcris aux remarques que vous avés faites dans votre Lettre du 5 Septembre 1712 au ſujet de celles que je vous ai envoyé ſur le Livre de M. Moivre.

Vos raiſonnemens ſur le Her n'ont point converti nos Meſſieurs ; ils les trouvent très délies & très ſubtiles, mais ils aſſurent n'être pas convaincus ; & comme je connois leur droiture & leur franchiſe, je peux être leur garant qu'ils diſent ce qu'ils penſent.

Je ſuis charmé de vos deux Problêmes, l'un ſur la poulle, l'autre pour comparer dans une bande perpendiculaire quelconque du triangle arithmetique : *Extremos terminos cum intermediis quibuſcumque.* Tout cela étoit en verité bien difficile & d'un grand travail. Vous êtes un terrible homme ; je croyois que pour avoir pris les devants je ne ſerois pas ſi-tôt ratrappé, mais je vois bien que je me ſuis trompé : je ſuis à préſent bien derriere vous ; & forcé de mettre toute mon ambition à vous ſuivre de loin. Si j'étois d'humeur jalouſe, pour vous eſtimer trop, je vous en aimerois moins ; mais non, Monſieur, & votre ſuperiorité & vos grands talens ne font qu'augmenter mon attachement, & ſi j'oſe me ſervir de ce terme, ma ſincere amitié pour vous,

R. D. M.

Digitized by Google

Extrait d'une Lettre de M. N. Bernoulli à M. de M... du 9 Septembre 1713.

Le Livre de feu mon Oncle vient de ſortir de la preſſe, le Libraire m'a dit qu'il en a envoyé un Exemplaire par la Poſte à M. Koenig; ſi vous êtes curieux de le voir, vous pourrés le faire retirer par quelqu'un de chés M. Koenig, à qui j'en donnerai avis, en attendant que je puiſſe lui envoyer quelqu'autres Exemplaires pour vous & pour mes autres amis de Paris. Il n'y aura gueres rien de nouveau pour vous. J'ai été empêché depuis quelque temps de faire de nouvelles recherches ſur la matiere du hazard, c'eſt pourquoi je ne puis rien vous communiquer; cependant en revanche des Problêmes que vous m'avés propoſés, & dont j'examinerai les ſolutions quand j'aurai du loiſir, je vous en propoſe quelqu'autres qui meritent votre application. *Premier Problême.* *A* & *B* jouent alternativement avec un dé à quatre faces marquées de 0, 1, 2, 3, *A* met une certaine ſomme d'écus au jeu, & commence à jouer; & après avoir amené ou 0, ou 1, ou 2, ou 3 points, il reprend autant d'écus du jeu qu'il a amené de points, & cede le cornet à *B*, qui prend auſſi du reſte autant d'écus qu'il a amené de points; mais s'il amene la face marquée de 0, il paye un écu à *A*; & s'il amene un plus grand nombre de points qu'il ne reſte d'écus au jeu, non ſeulement il ne prend rien, mais il met autant d'écus au jeu qu'il a amené de points de trop, & ils continuent ainſi juſqu'à ce qu'il ne reſte plus rien au jeu; je demande quelle eſt la ſomme que *A* doit mettre au jeu pour que leurs ſorts ſoient égaux. *Second Problême.* Si *B* au lieu de payer un écu à *A* quand il n'amene rien, met un écu au jeu, trouver ce qu'alors *A* doit mettre au jeu. *Troiſiéme Problême.* Deux Joueurs *A* & *B* jouent alternativement avec un dé ordinaire, *A* met un écu au jeu, *B* commence à jouer; s'il amene un nombre pair, il prend cet écu; s'il amene un nombre impair, il met un écu au jeu, enſuite

c'eſt *A* qui joue, lequel en amenant un nombre pair prend un écu au jeu comme *B*; mais il ne met rien au jeu quand il amene un nombre impair, & ils continuent juſqu'à ce qu'il ne reſte plus rien au jeu, toujours avec cette condition, qu'ils prennent l'un & l'autre un écu du jeu quand ils amenent un nombre pair; mais que *B* ſeul met un écu au jeu quand il amene un nombre impair, on demande leurs ſorts. *Quatriéme Problème.* *A* promet de donner un écu à *B*, ſi avec un dé ordinaire il amene au premier coup ſix points, deux écus s'il amene le ſix au ſecond, trois écus s'il amene ce point au troiſiéme coup, quatre écus s'il l'amene au quatriéme, & ainſi de ſuite; on demande quelle eſt l'eſperance de *B*. *Cinquiéme Problème.* On demande la même choſe ſi *A* promet à *B* de lui donner des écus en cette progreſſion 1, 2, 4, 8, 16, &c. ou 1, 3, 9, 27, &c. ou 1, 4, 9, 16, 25, &c. ou 1, 8, 27, 64, &c. au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, &c comme auparavant. Quoique ces Problêmes pour la plûpart ne ſoient pas difficiles, vous y trouverés pourtant quelque choſe de fort curieux: je vous ai déja propoſé le premier dans ma derniere Lettre. Vous me ferés plaiſir de me communiquer enfin votre ſolution du Her, afin que je puiſſe vous donner l'explication de mon Anagramme. Au reſte, Monſieur, je me réjouis de ce que votre ſanté eſt meilleure; mais je vous plains de ce que vous avés perdu votre Princeſſe. J'ai l'honneur d'être avec un attachement inviolable,

MONSIEUR,

Votre très humble & très obéiſſant Serviteur
N. BERNOULLY.

Digitized by Google

Lettre de M. de M. . . à M. N. Bernoulli.

A Paris ce 15 Novembre 1713.

PUISQUE vous ſouhaités, Monſieur, que je vous déclare enfin ce que je penſe de cette fameuſe diſpute ſur le Her, je vais vous obéir.

Il ſemble que nos Meſſieurs ayent prétendu dans le commencement de la diſpute qu'il étoit indifferent à Paul de changer ou de ſe tenir au ſept, & à Pierre de changer ou de ſe tenir au huit, en cela ils auroient fort ſelon moi : vous démontrés fort bien que cette maxime eſt fauſſe ; mais vous ſçavés que dans les converſations qu'ils ont eu avec vous ils ſe ſont expliqués en ſoutenant qu'il étoit impoſſible d'établir aucune maxime pour l'un & l'autre Joueur, & en cela je crois qu'ils ont raiſon. Les deux argumens que vous produiſés contre cette aſſertion dans votre Lettre du 30 Decembre 1712 ne peuvent me convaincre ; je ſuis au contraire perſuadé que la ſolution du Problême eſt impoſſible, c'eſt à dire qu'on ne peut preſcrire à Paul la conduite qu'il doit tenir quand il a un ſept, & à Pierre quand il a un 8. Il eſt très vrai qu'il vaut mieux pour Paul prendre la maxime de changer au 7 que d'en prendre toute autre fixe & determinée. Par cette raiſon que quelqu'autre maxime qu'on veuille déterminer pour Paul, Pierre qui en ſera inſtruit en prendra une qui rendra le ſort de Paul moindre que $\frac{780}{50^{\cdot}1}$; mais il ne s'enſuit pas que Paul doive pour cela renoncer à l'eſperance de rendre ſon ſort meilleur en ſe tenant au 7 qu'en changeant. J'ai crû quelque temps qu'un certain temperament de jettons pour Pierre & pour Paul ſauveroit le cercle, mais j'ai trouvé que l'on y retombe toujours. Suppoſons que l'on ait preſcrit à Paul la maxime de mettre *a* jettons blancs & *b* jettons noirs dans une bourſe, en ſe propoſant de changer au 7, ſi tirant un jetton il ſe trouve blanc, & de s'y tenir ſi tirant un jetton il ſe trouve noir. Pierre qui

ſçaura la maxime de Paul, quelle maxime ſuivra-t'il? Il obſervera que s'il met dans une bourſe c jettons blancs & d jettons noirs, pour enſuite tirant un jetton entre tous ſe déterminer à changer au 8 ou à s'y tenir, ſelon qu'il tirera un jetton blanc ou noir; il obſervera, dis-je, en examinant cette expreſſion generale du ſort de Paul;

$$\frac{2828ac + 2834bc + 2838ad + 2828bd}{13 . 17 . 25 . a + b . c + d}$$

1°. Que le ſort de Paul eſt le même lorſque a eſt infini par rapport à b, & c infini par rapport à d; ou lorſque b étant infini par rapport à a, d eſt infini par rapport à c. 2°. Que a étant infini par rapport à b le ſort de Paul ſera d'autant plus grand que c ſera petit par rapport à d. 3°. Que le ſort de Paul n'eſt jamais meilleur que lorſque d étant très grand par rapport à c, a eſt fort grand par rapport à b, &c. mais tout cela n'apprend le parti que Paul doit prendre que conditionnellement à celui de Pierre, & celui de Pierre que conditionellement à celui de Paul, ce qui fait un cercle. Il me paroît que toutes les raiſons que vous apportés pour prouver que ce cercle n'a pas lieu, & que le retour qui l'amene eſt vicieux; il me paroît, dis-je, que ces raiſons ne prouvent pas ce que vous voulés prouver, mais ſeulement que ce qui tombe dans un pareil cercle eſt impoſſible: car enfin la ſuppoſition que Paul doit ſe faire la maxime de changer au 7 entraîne neceſſairement pour Pierre la maxime de changer au 8; & cette maxime ainſi établie pour Pierre, emporte une démonſtration parfaite que Paul auroit dû prendre la maxime de ſe tenir au 7: cette contradiction ſe tire legitimement & ſans manquer aux regles de la Logique, puiſqu'on doit ſuppoſer que l'un & l'autre Joueur eſt également ſubtile, & ne prendra ſon parti que ſur la connoiſſance qu'il aura du parti que l'autre prendra. Or comme il n'y a point ici de point fixe, la maxime de l'un dépendant de la maxime de l'autre Joueur qui n'eſt pas encore connue, ſitôt qu'on en veut établir une, on tire de cette ſuppoſition une contradiction qui fait connoître qu'on n'a pas dû l'établir.

Digitized by Google

La démonſtration que vous fondés ſur le cercle même qu'on vous oppoſe eſt très ſubtile, mais il eſt aiſé d'y répondre.

Comme on peut (dites-vous) *démontrer quelque parti que Paul prenne, &c.* (*a*)

Il y a ici équivoque dans le commencement, on ne dit point qu'on puiſſe toujours démontrer quelque parti que Paul prenne que c'eſt un mauvais parti, on prétend ſeulement qu'on ne peut établir de maxime. D'ailleurs, Monſieur, il ne ſuffit pas de ſçavoir que Paul peut augmenter ſon ſort de 10 en changeant, & ſeulement de 6, en s'y tenant, lorſque dans les deux cas Pierre prendra un mauvais parti. Il faudroit pour que votre démonſtration fût complette, que vous puſſiés en même temps démontrer que la probabilité pour augmenter ſon ſort de 10 fût à la probabilité pour augmenter ſon ſort de 6 dans un plus grand rapport que 6 à 10, mais c'eſt ce que vous ne ſçauriés prouver : il en eſt de même de votre troiſiéme argument qui commence ainſi (*b*) *Le ſort de Paul eſt toujours* $\frac{2828}{5525}$, &c. (*c*)

Pour moi, Monſieur, de toutes les raiſons qui ſemblent devoir engager Paul à prendre la maxime de changer au 7, j'en conclus ſeulement qu'il fera bien dans la pratique de ſe faire une loi de changer plus ſouvent au ſept que de s'y tenir ; mais combien plus ſouvent il doit changer que s'y tenir, & en particulier ce qu'il doit faire (*hic & nunc*) car c'eſt là principalement la queſtion : le calcul n'apprend rien là-deſſus, & j'en tiens la déciſion impoſſible.

Par cette raiſon évidente que ſi vous établiſſés que Paul doit changer au ſept, Pierre doit ſe faire la maxime de changer au huit, auquel cas Paul qui eſt auſſi habile que Pierre ſçaura qu'il changera au huit, & qu'ainſi il lui convient de prendre la maxime de ſe tenir au ſept, &c. nous revoilà dans le cercle.

En un mot, Monſieur, ſi je ſçai que vous êtes le conſeil de Pierre, il eſt évident que je dois moi Paul me tenir au ſept ; & de même ſi je ſuis Pierre, & que je ſçache

(*a*) Voyés page 376.
(*b*) Voyés page 377.
(*c*) Voyés la fin de cette Lettre.

Digitized by Google

que vous êtes le conſeil de Paul, je dois changer au huit, auquel cas vous aurés donné un mauvais conſeil à Paul.

Plus j'y penſe, & plus je me ſens forcé à penſer là-deſſus comme nos Meſſieurs. Il ne s'enſuit pas pour cela que vous ayés tort, la conſequence ne vaudroit rien ; ſuppoſé donc, Monſieur, que je ſois moi-même dans l'erreur, vous m'obligerés beaucoup de m'en tirer, en me donnant l'explication & la démonſtration de votre anagramme.

Comme cette matiere eſt fort curieuſe & que vous l'avés beaucoup méditée, je ſerois bien-aiſe que vous vouluſſiés bien m'inſtruire en même temps ſur un autre queſtion qui eſt tout à fait du même genre.

Un pere veut donner les étreines à ſon fils & lui dit, je vais mettre dans ma main un nombre de jettons pair ou impair comme je le jugerai à propos : cela fait, ſi vous nommés pair, & qu'il y ait pair dans ma main, je vous donnerai quatre écus ; ſi vous nommés impair, & qu'il y ait pair dans ma main, vous n'aurés rien. Si vous nommés impair, & qu'il y ait impair dans ma main, vous aurés un écu ; ſi vous nommés pair, & qu'il y ait impair dans ma main, vous n'aurés rien. Je demande, 1°, quelle regle il faut preſcrire au pere pour qu'il économiſe ſon argent le mieux qu'il ſoit poſſible. 2°. Quelle regle il faut preſcrire au fils pour qu'il prenne le meilleur parti. 3°. Qu'on détermine quel avantage le pere fait à ſon fils, & à combien on peut évaluer ſes étreines, en ſuppoſant que chacun des deux tiendra la conduite qui lui eſt la plus avantageuſe. Ces queſtions ſont très ſimples, mais je les crois inſolubles ; ſi cela eſt, c'eſt grand dommage, car cette difficulté ſe rencontre en pluſieurs choſes de la vie civile : quand deux perſonnes, par exemple, ayant affaire enſemble, chacun veut ſe regler ſur la conduite de l'autre ; elle a lieu auſſi dans pluſieurs jeux, ſur-tout au Brelan, jeu qui fait maintenant les délices des Dames de Paris : en voici une eſpece. Lorſque les tours ſont gros, que les tours étant par exemple, aux deux ou aux quatre fiches, la paſſe eſt triple ou quadruple ; celui qui eſt dernier croit pouvoir dire du jeu & voler la paſſe, avec une aſſurance preſ-

Digitized by Google

qu'entiere; par la raiſon qu'il eſt à croire que ſi le premier ou le ſecond avoient eu du jeu, ils auroient ouvert la paſſe, ne voulant point s'expoſer à la manquer. D'un autre côté plus les motifs ſont forts pour engager le dernier à aller du jeu, ou même à faire une groſſe vade, plus le premier & le ſecond ſont tentés à paſſer avec beau jeu, dans l'eſperance d'attraper le dernier qui voudroit voler: quelle regle donner là-deſſus? Il eſt impoſſible, ce me ſemble, de rien preſcrire d'aſſuré. Toute l'habileté des plus fins Joueurs ſe réduit à donner à ceux avec qui ils jouent une fauſſe idée de leur maniere de jouer, d'affecter une certaine conduite dans des coups de petite valeur, pour en changer à propos dans les gros coups, & de profiter habilement d'une erreur ou prévention à laquelle ils auront à deſſein donné occaſion. A ce jeu, comme partout ailleurs, les fins ſont quelquefois attrapés; mais il eſt certain qu'à ce jeu il eſt bon de l'être, par la raiſon qu'on a ſouvent affaire à des perſonnes qui ne le ſont point ou qui le ſont moins; car entre Joueurs également fins & clairvoyans, tels que nous ſuppoſons Pierre & Paul dans le jeu du Her: il ſeroit abſolument impoſſible de preſcrire aucune regle dans le cas du Brelan, non plus que pour notre cas du Her.

Les deux derniers de vos cinq Problêmes n'ont aucune difficulté, il ne s'agit que de trouver les ſommes des ſuites dont les numerateurs étant en progreſſion des quarrés cubes, &c. les dénominateurs ſoient en progreſſion geometrique: feu M. votre Oncle a donné la methode de trouver la ſomme de ces ſuites.

Pour ce qui eſt du troiſiéme Problême il eſt beaucoup plus difficile. J'ai été long-temps à m'aſſurer que dans ce parti il n'y avoit ni avantage ni deſavantage pour Pierre; c'eſt pourtant ce que j'ai trouvé auſſi-bien que M. de Waldegrave avec qui j'ai travaillé à ce Problême *conjunctis viribus*. Je ſouhaiterois avoir la ſolution generale de ce Problême en ſuppoſant, par exemple, que *A* mette *m* au jeu, qu'il prenne *n* écus lorſqu'il amene pair, & qu'il mette *r* écus quand il amene impair; que Paul prenne *p* écus quand

il amene pair, & qu'il mette q écus au jeu quand il amene impair; trouver, 1°, le sort de Pierre & de Paul. 2°. Quelle doit être la valeur de m, ou de n, ou de p, ou de q, les autres étant donnés, & dans la supposition que les sorts soient égaux. 3°. Combien il y a à parier que la partie sera finie en tant de coups. Je suis persuadé qu'il n'y a personne aussi capable que vous de surmonter de pareilles difficultés; pour moi, outre que je crois que cela me passe, je vous avoue que je suis las de chercher, & que je suis disposé à goûter pendant quelque temps le doux plaisir de ne rien faire.

Je n'ai point pensé à vos deux premiers Problêmes, en voici un auquel je me suis amusé, parcequ'il n'est pas difficile, & qu'il est, ce me semble, assés curieux.

L'on demande qui de Pierre ou de Paul joue plus gros jeu, & donne plus au hazard de Pierre, qui pendant un mois de trente-un jours met régulierement tous les jours une pistole à la réjouissance, ou la joue à croix-pile; ou de Paul qui se propose d'y mettre trois fois seulement dans le mois, trois pistoles à chaque fois, j'ai trouvé $\frac{300540195}{67108864}a = 44.15.8\frac{324929}{2097152}$ pour la valeur de ce que Pierre hazarde, & $4\frac{1}{2}a = \frac{301989888}{67108864}$ pour ce que Paul hazarde; en sorte que Paul risque plus que Pierre, mais très peu plus: cela n'eût pas été facile à deviner; mais ce qu'il y a, ce me semble, de curieux, c'est que Paul ne risqueroit pas d'avantage en jouant quatre fois à croix-pile qu'en y jouant trois fois; en y jouant une fois une pistole qu'en y jouant deux fois une pistole chaque fois, & generalement qu'on ne hazarde pas plus à jouer m fois à croix-pile qu'à jouer $m + 1$ fois, si m est un nombre impair; j'ai trouvé ce nombre $\frac{300540193}{67108864}$, en multipliant le 1er terme de la 32e bande perpendiculaire du triangle arithmetique par 31, le deuxiéme par 29, le troisiéme par 27, &c. vous en voyés tout d'un coup la raison.

J'ai encore trouvé que l'on peut parier avec avantage que jouant 31 parties de Piquet un écu la partie, sans doute

il n'y aura pas à la fin du mois plus de trois écus de perte ; qu'il y auroit encore de l'avantage de le parier pour 37 parties ; mais qu'il y auroit du desavantage pour 39. Ce qui est singulier & un vrai paradoxe, c'est qu'il y auroit de l'avantage pour 40, 42, & même pour 44 (& peut être 46 parties, je n'en ai point fait le calcul,) vous n'aurés pas de peine à en découvrir la raison.

Vous voyés bien, Monsieur, que ce dernier Problême est une espece particuliere dont la solution dépend de la methode que vous m'avés communiquée dans votre Lettre du 15 Janvier ; mais à l'égard du précedent on aura de la peine à l'y réduire & à trouver une solution generale par les logarithmes : je vois pourtant que cela est possible, si je n'étois accablé d'affaires je l'aurois tenté, je me garde ce plaisir pour un autre temps où je serai moins occupé.

Dans le temps que j'écris cette Lettre, Monsieur, j'en reçois une de M. de Waldegrave ; je veux vous en faire part, parcequ'elle épuise, ce me semble, tout ce qu'on peut dire sur cette matiere. Je lui avois mandé que je travaillois à vous expliquer ce que je pense sur le Her ; il a voulu faire un dernier effort pour assurer son droit & le mettre en évidence. Sa Lettre est du Château de Breviande & du 13 Novembre : en voici l'extrait.

„ a étant $= 3$, & $b = 5$, on voit par la formule (a) que „ si Pierre a la maxime de changer le 8, le sort de Paul „ est $\frac{8484+14170}{13.17.25\times 8} = \frac{11327}{5525\times 4} = \frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525\times 4}$.

„ Et si Pierre a la maxime de garder son huit = „ $\frac{8514+14140}{13.17.25\times 8} = \frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525\times 4}$.

„ Ainsi il est égal dans cette supposition à Pierre de „ changer au huit ou non ; & generalement le sort de „ Paul est toujours $\frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525\times 4}$, lorsque $a = 3$ & $b = 5$, „ quelque valeur qu'on puisse donner aux lettres c & d, „ c'est à dire que son sort sera toujours $\frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525\cdot 4}$, „ quelque parti que prenne Pierre lorsqu'il aura un 8,

(a) Voyés page 404.

„ ſoit de changer ou de garder ſon 8 déterminément, ou „ de ſe commettre à un nombre égal ou inégal de jet- „ tons.

„ Il s'enſuit de-là que le ſort de Paul eſt au moins „ $\frac{2831}{5525} + \frac{3}{5525 \times 4}$, puiſqu'il ne tient qu'à lui de prendre „ trois jettons blancs & cinq noirs ; & ſi Paul tient une „ autre conduite, c'eſt qu'il eſpere rendre ſon ſort encore „ meilleur.

„ Donc M. Bernoulli a eu tort, & vous auſſi, Mon- „ ſieur, ne vous en déplaiſe, de dire autrefois que le ſort „ de Paul étoit au ſort de Pierre :: 2828 à 2697. M. Ber- „ noulli n'avoit pas ſongé apparemment à cette voye de „ jettons, qui effectivement ſemble n'être pas des regles „ ordinaires du jeu ; mais il paroît avoir remarqué depuis „ notre diſpute qu'il n'avoit pas eu raiſon de dire que le „ ſort de Paul étoit $\frac{2828}{5525}$, puiſque dans une de ſes der- „ nieres Lettres il met que le pis qui puiſſe arriver à Paul „ eſt d'avoir $\frac{2828}{5525}$.

„ Il eſt donc certain & démontré que j'ai eu raiſon de „ ſoutenir que dans la ſuppoſition que chacun des Joueurs „ joue le plus avantageuſement qu'il lui ſoit poſſible, les „ ſorts de Paul & de Pierre ne ſont pas ceux que M. Ber- „ noulli a donnés, & que vous avés tenu vrais autrefois ; „ puiſque Paul peut rendre ſon ſort plus grand que $\frac{2828}{5525}$, „ & avoir $\frac{2831}{5525} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{5525}$ quand il voudra s'en conten- „ ter, & (ce qu'il faut remarquer) en mettant plus de „ jettons pour ſe tenir au ſept que pour y changer.

„ Voici donc un des points de la queſtion décidé ; je „ ſuis ſûr que vous en conviendrés & M. Bernoulli auſſi. „ A l'égard de ce que j'ai auſſi ſoutenu qu'on ne pouvoit „ établir de maxime ; quoiqu'il me ſoit impoſſible de le „ démontrer avec la même évidence, je crois n'être pas „ moins bien fondé à le ſoutenir. M. Bernoulli dit que le „ pis qui puiſſe arriver à Paul eſt d'avoir $\frac{2828}{5525}$, & ajoute

Digitized by Google

„ *que ce qui doit le déterminer à changer plûtot qu'à s'y tenir,*
„ *eſt que ſi Pierre prend un mauvais parti, le ſort de Paul*
„ *ſera plus grand lorſqu'il changera au ſept, que lorſqu'il s'y*
„ *tiendra.*

„ Il eſt vrai que dans toute autre ſuppoſition des valeurs „ de a & de b, que celle de $a = 3$ & $b = 5$, Paul peut „ rendre ſon ſort meilleur que dans celle-ci, ſi Pierre prend „ le mauvais parti ; mais auſſi il le rendra plus mauvais ſi „ Pierre prend le bon parti ; & quel moyen y a-t'il de dé- „ couvrir le rapport de probabilité qu'il y a que Pierre „ prendra le bon parti à la probabilité qu'il prendra le „ mauvais, cela me paroît abſolument impoſſible, & fe- „ roit tomber dans le cercle ? Il eſt vrai auſſi que plus „ Paul augmentera la valeur de a, par rapport à b, plus „ il peut approcher ſon ſort de $\frac{2818}{5525}$, qui eſt tout ce qui „ lui peut arriver de plus avantageux ſi Pierre prend „ un mauvais parti, & qu'en augmentant la valeur de b, „ par rapport à a, ſon ſort ne peut jamais paſſer $\frac{2814}{5525}$, & „ de plus que dans l'un & l'autre cas, ſon ſort ne peut ja- „ mais être moindre que $\frac{2828}{5525}$, comme M. Bernoulli l'a „ fort bien remarqué ; mais on ne peut pas conclure de-là „ que Paul doit rendre a infini par rapport à b ; ou ce „ qui eſt la même choſe, qu'il doit changer toujours au „ ſept ; car ſi cette conſequence étoit bonne, Pierre qui „ eſt ſuppoſé auſſi habile que Paul pourroit auſſi conclure „ toutes les fois que Paul ſe ſeroit tenu, qu'il a une carte „ au deſſus du ſept, & par conſequent changeroit infail- „ liblement au huit, & par ce moyen le ſort de Paul ne ſeroit que $\frac{2828}{5525}$, qui eſt ce qui lui peut arriver de plus „ mauvais ; ainſi il auroit mal fait d'avoir pris la maxime „ de changer toujours au ſept, & nous voilà dans le cer- „ cle.

„ J'ai oublié de vous faire obſerver que Pierre a une „ voye pour borner le ſort de Paul à $\frac{2811}{5525} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5525}$, en fai-

„ ſant $c = 5$ & $d = 3$, ce que vous verrés encore avec
„ évidence, en ſubſtituant dans la formule les valeurs c
„ & d. On pourroit croire que comme il ne tient qu'à
„ Pierre de borner le ſort de Paul à $\frac{2811}{5525} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{5125}$; de
„ même qu'il ne tient qu'à Paul de s'aſſurer ce même ſort,
„ Paul devroit faire toujours $a = 3$ & $b = 5$, & Pierre
„ $c = 5$ & $d = 3$, ce qui feroit une maxime conſtante pour
„ l'un & l'autre Joueur; mais il me paroît qu'elle ſeroit
„ mal établie par les raiſons que nous avons dites tant de
„ fois, & que cela ne doit point empêcher Pierre & Paul
„ de jouer au plus fin, dans l'eſperance de rendre chacun
„ ſon ſort meilleur.

On imprime actuellement votre Lettre du 15 Janvier, il n'en reſte plus que trois, l'une de vous que je ne donnerai que par extrait pour les raiſons ci-jointes, je ſuis ſûr que vous les approuverés; une de moi du 20 Août, & celle-ci qui eſt la derniere. J'étois fort porté à croire que ni l'une ni l'autre ne valoient la peine d'être imprimées, ſur-tout la précedente dans laquelle je dis peut-être trop naturellement ce que je penſe, où il ne ſe trouve point d'algebre pour lui ſervir de paſſeport. Monſieur de Waldegrave qui par une bonté infinie prend ſoin de l'impreſſion de mon Livre, veut tout mettre & je le laiſſe faire. Après les Lettres on imprimera la Preface, je ne touche point à l'ancienne; mais j'ajoûte un Avertiſſement exceſſivement long. Les Auteurs ne finiſſent point, & ont toujours mille choſes à dire qu'ils croyent très utiles, mais dont ſouvent on ſe paſſeroit fort bien. Pour ne point courir le riſque de tomber encore dans ce défaut, je finis en vous aſſurant que je vous honore parfaitement, & ſuis de tout mon cœur,

MONSIEUR,

Votre très humble & très
obéiſſant Serviteur R. D. M.

Mes très humbles complimens, s'il vous plaît, à M. votre Oncle, à qui je vous prie de faire voir cette Lettre. M. de Waldegrave me recommande toujours de vous faire les ſiens.

Digitized by Google

Comme dans ces dernieres Lettres on a parlé du Her, j'ai jugé qu'il étoit à propos d'en mettre ici les calculs, pour épargner au Lecteur la peine de les faire.

	Sort de Paul quand il a la maxime de changer au ſept, & Pierre celle de changer au huit.	Pierre a la maxime de ſe tenir au huit.	Sort de Paul quand il a la maxime de ſe tenir au ſept, & Pierre celle de ſe tenir au huit.	Pierre celle de changer au huit.
Roy,	1200	1200	1200 . . .	1200 . . .
Dame,	1052	1058	1058 . . .	1052 . . .
Valet,	888	902	902 . . .	888 . . .
Dix,	724	746	746 . . .	724 . . .
Neuf,	560	590	590 . . .	560 . . .
Huit,	476	434	434 . . .	476 . . .
Sept,	390	390	360 . . .	408 . . .
Six,	444	444	444 . . .	444 . . .
Cinq,	490	490	490 . . .	490 . . .
Quatre,	528	528	528 . . .	528 . . .
Trois,	558	558	558 . . .	558 . . .
Deux,	580	580	580 . . .	580 . . .
As,	594	594	594 . . .	594 . . .
	$\frac{8484}{13\cdot51\cdot25} = \frac{2828}{5525}$	$\frac{8514}{13\cdot51\cdot25} = \frac{2838}{5525}$	$\frac{8484}{13\cdot51\cdot25} = \frac{2828}{5528}$	$\frac{8502}{13\cdot51\cdot25} = \frac{2834}{5525}$

J'ajouterai ici à l'occaſion de ce que j'ai dit au ſujet du Brelan dans cette Lettre quelques calculs que je me ſuis amuſé à faire à la priere d'un Joueur de mes amis : on trouve par l'article 25 que l'on peut parier à chaque coup ſans avantage ni deſavantage.

1°. 1 contre 38, qu'il ſe trouvera un Brelan au moins.

2°. 2 contre 7473, qu'il s'en trouvera au moins deux.

3°. 2 contre 1726723, qu'il s'en trouvera trois.

4°. 1 contre 974, qu'il ſe trouvera le Brelan quatrième.

Digitized by Google

5°. 1 contre 272, qu'il ſe trouvera le Brelan favori. D'où il ſuit par l'article 186 qu'on peut parier avec avantage que le premier cas arrivera en 27 coups
Le ſecond en 2591 coups
Le troiſiéme en 604354 coups
Le quatriéme en 676 coups
Le cinquiéme en 189 coups
} au moins.

C'eſt à dire, par exemple, qu'il y auroit de l'avantage à parier qu'en 27 coups il y aura quelque Brelan, & qu'il y auroit du deſavantage à le parier pour 26 coups. Il en eſt de même des autres cas, ſi ce n'eſt à l'égard du troiſiéme où il ſe peut trouver erreur dans les deux derniers chifres. Il auroit fallu un long travail pour les rendre plus exacts, & cela n'en valoit pas la peine.

Fautes à corriger.

Page 17, ligne 25, au lieu de $10p + 3$, *liſés* $10p - 3$. Page 24, lig. 1re, au lieu de q, lif. p. Pag. 64, lig. 3, au lieu de a^p, lif. ap; lig. 4, au lieu de $\overline{p - 4}E$, lif. $\overline{p - 4}F$; lig. 29, au lieu de la formule $6p^5 +$ &c. lif. $\frac{3p^5+15p^4+25p^3+15pp+2p}{3\cdot 4\cdot 5}$ Page 172, lig. 1re, au lieu de 718837897, liſés 716080847. Ligne 3, au lieu de 186118235, liſés 185875285. Page 229, lig. 24, au lieu de q^h, lif. $2 . q^h$. Pag. 408, ôtés ſans doute.

FIN.

A PARIS,
De l'Imprimerie de J. QUILLAU, Imp. Jur. Lib. de l'Univ. rue Galande, près la rue du Fouarre.

Digitized by Google

APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monſeigneur le Chancelier cette nouvelle Edition du Livre intitulé : *Eſſai d'Analyſe ſur les Jeux de Hazard, &c.* Les changemens qu'on y a faits, & le grand nombre de recherches nouvelles dont on l'a enrichi, l'ont mis dans l'état de perfection, où un Ouvrage comme celui-là, excellent & original dans ſon genre, meritoit d'être porté. Fait à Paris le neuviéme de Novembre 1713.

SAURIN.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu, Roy de France & de Navarre: A nos Amés & feaux Conſeillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Mes des Requeſtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, Salut. Notre cher & bien amé le Sieur de M * * * Nous ayant fait ſupplier de lui accorder nos Lettres de Permiſſion pour l'impreſſion d'un *Eſſai d'Analyſe ſur les Jeux de Hazard*, Nous avons permis & permettons par ces Préſentes audit Sieur M * * * de faire imprimer ledit Livre en telle forme, marge, caractere, en un ou pluſieurs volumes, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de le faire vendre & débiter par tout nôtre Royaume pendant le temps de ſix années conſécutives, à compter du jour de la date deſdites Préſentes. Faiſons

Digitized by Google

défenſes à tous Imprimeurs, Libraires & autres perſonnes de quelque qualité & condition quelles puiſſent être, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance, à la charge que nos Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion dudit Livre ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie; & qu'avant que de l'expoſer en vente il en ſera mis deux Exemplaires dans notre Biblioteque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très cher & feal Chevalier Chancelier de France le Sieur Phelypeaux, Comte de Pontchartrain, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Préſentes : du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Sieur Expoſant ou ſes Ayans cauſe pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ni empêchement. Voulons qu'à la copie deſdites Préſentes, qui ſera imprimée au commencement ou à la fin dudit Livre, foi ſoit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous Actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte, Normande & Lettres à ce contraires: Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Verſailles le 26e jour du mois de Novembre, l'an de grace mil ſept cens treize, & de notre Regne le ſoixante-onziéme. Par le Roy en ſon Conſeil. *Signé*, FOUQUET, *avec paraphe.*

Regiſtré ſur le Livre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, page 682, numero 767, conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrêt du 13 Aouſt 1713. A Paris ce 4 Decembre 1713. Signé, ROBUSTEL, *Syndic.*

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

XXXX XI.86
XXXXX 10/2007

Digitized by Google


Digitized by Google


Digitized by Google



Digitized by Google