THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS.

THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS;

PAR M. LE COMTE LAPLACE,

Pair de France; Grand-Officier de la Légion-d'Honneur; Grand'Croix de l'Ordre de la Réunion; Membre de l'Institut royal et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, d'Italie, etc.

SECONDE ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques et la Marine, quai des Augustins, n° 57.

1814.

THÉORIE ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS.

INTRODUCTION.

Je vais présenter dans cette Introduction, les principes du calcul des probabilités, et les résultats généraux auxquels je suis parvenu dans cet ouvrage, en les appliquant aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité. On peut même dire, à parler en rigueur, que presque toutes nos connaissances ne sont que probables; et dans le petit nombre des choses que nous pouvons savoir avec certitude, dans les sciences mathématiques elles-mêmes, les moyens de parvenir à la vérité, sont fondés sur les probabilités; ensorte que le système entier des connaissances humaines se rattache à la théorie exposée dans cet ouvrage. On verra sans doute avec intérêt, qu'en ne considérant même dans les principes éternels de la raison, de la justice et de l'humanité, que les chances heureuses qui leur sont constamment attachées; il y a un grand avantage à suivre ces principes, et de graves inconvéniens à s'en écarter; leurs chances, comme celles qui sont favorables aux loteries, finissant toujours par prévaloir au milieu des oscillations du hasard. Je desire que les réflexions répandues dans cette Introduction, puissent mériter l'attention des philosophes, et la diriger vers un objet si digne de les occuper.

De la Probabilité.

Tous les événemens, ceux même qui par leur petitesse, semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du soleil. Dans l'ignorance des liens qui les unissent au système entier de l'univers, on les a fait dépendre des causes finales, ou du hasard, suivant qu'ils arrivaient et se succédaient avec régularité, ou sans ordre apparent; mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie qui ne voit en elles, que l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes.

Les événemens actuels ont avec les précédens, une liaison fondée sur le principe évident, qu'une chose ne peut pas commencer d'être, sans une cause qui la produise. Cet axiome connu sous le nom de *principe de la raison suffisante*, s'étend aux actions même les plus indifférentes. La volonté la plus libre ne peut sans un motif déterminant, leur donner naissance; car si toutes les circonstances de deux positions étant exactement les mêmes, elle agissait dans l'une et s'abstenait d'agir dans l'autre, son choix serait un effet sans cause : elle serait alors, dit Leibnitz, le hasard aveugle des épicuriens. L'opinion contraire est une illusion de l'esprit qui perdant de vue, les raisons fugitives du choix de la volonté dans les choses indifférentes, se persuade qu'elle s'est déterminée d'elle-même et sans motifs.

Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers, comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule, les mouvemens des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé, serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre dans la perfection qu'il a su donner à l'astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en mécanique et en géométrie, jointes à celle de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans les mêmes expressions analytiques, les états passés et futurs du système du monde. En appliquant la même méthode à quelques autres objets de ses connaissances, il est parvenu à ramener à des lois générales, les phénomènes observés, et à prévoir ceux que des circonstances données doivent faire éclore. Tous ses efforts dans la recherche de la vérité, tendent à le rapprocher sans cesse de l'intelligence que nous venons de concevoir, mais dont il restera toujours infiniment éloigné. Cette tendance propre à l'espèce humaine, est ce qui la rend supérieure aux animaux; et ses progrès en ce genre, distinguent les nations et les siècles, et fondent leur véritable gloire.

Rappelons-nous qu'autrefois et à une époque qui n'est pas encore bien reculée, une pluie ou une sécheresse extrême, une comète traînant après elle une queue fort étendue, les éclipses, les aurores boréales et généralement tous les phénomènes extraordinaires étaient regardés comme autant de signes de la colère céleste. On invoquait le ciel pour détourner leur funeste influence. On ne le priait point de suspendre le cours des planètes et du soleil : l'observation eût bientôt fait sentir l'inutilité de ces prières. Mais parce que ces phénomènes arrivant et disparaissant à de longs intervalles, semblaient contrarier l'ordre de la nature; on supposait que le ciel les faisait naître et les modifiait à son gré, pour punir les crimes de la terre. Ainsi la longue queue de la comète de 1456 répandit la terreur dans l'Europe, déjà consternée par les succès rapides des Turcs qui venaient de renverser le Bas-Empire; et le pape Callixte ordonna des prières publiques dans lesquelles on conjurait la comète et les Turcs. Cet astre, après quatre de ses révolutions, a excité parmi nous un intérêt bien différent. La connaissance des lois du système du monde, acquise dans cet intervalle, avait dissipé les craintes enfantées par l'ignorance des vrais rapports de l'homme avec l'univers; et Halley ayant reconnu l'identité de la comète, avec celles des années 1531, 1607 et 1682, il annonça son prochain retour pour la fin de 1758 ou le commencement de 1759. Le monde savant attendit avec impatience, ce retour qui devait confirmer l'une des plus grandes découvertes que l'on eût faites dans les sciences, et accomplir la prédiction de Sénèque, lorsqu'il a dit en parlant de la révolution de ces astres qui descendent d'une énorme distance: « Le jour viendra que par une étude suivie de plusieurs siècles, » les choses actuellement cachées paraîtront avec évidence, et la » postérité s'étonnera que des vérités si claires nous aient échappé.» Clairaut entreprit alors de soumettre à l'analyse, les perturbations que la comète avait éprouvées par l'action des deux plus grosses planètes, Jupiter et Saturne: après d'immenses calculs, il fixa son prochain passage au périhélie, vers le commencement d'avril 1759; ce que l'observation ne tarda pas à vérifier. La régularité que l'astronomie nous montre dans le mouvement des comètes, a lieu sans aucun doute, dans tous les phénomènes. La courbe décrite par une simple molécule d'air ou de vapeurs, est réglée d'une manière aussi certaine, que les orbites planétaires : il n'y a de différence entre elles, que celle qu'y met notre ignorance.

La probabilité est relative en partie à cette ignorance, et en partie à nos connaissances. Nous savons que sur trois ou un plus grand nombre d'événemens, un seul doit arriver; mais rien ne porte à croire que l'un d'eux arrivera plutôt que les autres. Dans cet état d'indécision, il nous est impossible de prononcer avec certitude sur leur arrivée. Il est cependant probable qu'un de ces événemens pris à volonté, n'arrivera pas; parce que nous voyons plusieurs cas également possibles qui excluent son existence, tandis qu'un seul la favorise.

La théorie des hasards consiste à réduire tous les événemens du même genre, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire, tels que nous soyons également indécis sur leur existence; et à déterminer le nombre des cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles.

La notion précédente de la probabilité suppose qu'en faisant croître dans le même rapport, le nombre des cas favorables, et celui de tous les cas possibles, la probabilité reste la même. Pour s'en convaincre, que l'on considère deux urnes A et B, dont la première contienne quatre boules blanches et deux noires, et dont la seconde ne renferme que deux boules blanches et une noire. On peut imaginer les deux boules noires de la première urne, attachées à un fil qui se rompt au moment où l'on saisit l'une d'elles, et les quatre boules blanches formant deux systèmes semblables. Toutes les chances qui feront saisir l'une des boules du système noir, amèneront une boule noire. Si l'on conçoit maintenant que les fils qui unissent les boules, ne se rompent point; il est clair que le nombre des chances possibles ne changera pas, non plus que celui des chances favorables à l'extraction des boules noires; seulement, on tirera de l'urne, deux boules à-la-fois; la probabilité d'extraire une boule noire de l'urne, sera donc la même qu'auparavant. Mais alors, on a évidemment le cas de l'urne B, avec la seule différence, que les trois boules de cette dernière urne, sont remplacées par trois systèmes de deux boules invariablement unies. Ici les cas également possibles ne sont pas les extractions des boules; ce sont les chances qui les amènent et dont la somme supposée la même pour chaque urne, est répartie sur six boules dans la première, et sur trois dans la seconde.

Quand tous les cas sont favorables à un événement, sa probabilité se change en certitude, et son expression devient égale à l'unité. Sous ce rapport, la certitude et la probabilité sont comparables, quoiqu'il y ait une différence essentielle entre les deux états de l'esprit, lorsqu'une vérité lui est rigoureusement démontrée, ou lorsqu'il aperçoit encore une petite source d'erreur.

Dans les choses qui ne sont que vraisemblables, la différence des données que chaque homme a sur elles, est une des causes principales de la diversité des opinions que l'on voit régner sur les mêmes objets. Supposons, par exemple, que l'on ait trois urnes A, B, C, dont l'une ne contienne que des boules noires, tandis que les deux autres ne renferment que des boules blanches. On doit tirer une boule de l'urne C, et l'on demande la probabilité que cette boule sera noire. Si l'on ignore quelle est celle des trois urnes, qui ne renferme que des boules noires, ensorte que l'on n'ait aucune raison de croire qu'elle est plutôt C, que B ou A; ces trois hypothèses paraîtront également possibles; et comme une boule noire ne peut être extraite que dans la première, la probabilité de l'extraire est égale à un tiers. Si l'on sait que l'urne A ne contient que des boules blanches, l'indécision ne porte plus alors que sur les urnes B et C, et la probabilité que la boule extraite de l'urne C sera noire, est un demi. Enfin cette probabilité se change en certitude, si l'on est assuré que les urnes A et B ne contiennent que des boules blanches.

C'est ainsi que le même fait récité devant une nombreuse assemblée, obtient divers degrés de croyance, suivant l'étendue des connaissances des auditeurs. Si l'homme qui le rapporte, en est intimement persuadé, et si par son état et son caractère, il inspire une grande confiance; son récit, quelqu'extraordinaire qu'il soit, aura par rapport aux auditeurs dépourvus de lumières, le même degré de vraisemblance, qu'un fait ordinaire rapporté par le même homme, et ils lui ajouteront une foi entière. Cependant si quelqu'un d'eux a eu occasion d'entendre le même fait rejeté par d'autres hommes également respectables, il sera dans le doute; et le fait sera jugé faux, par les auditeurs éclairés qui le trouveront contraire, soit à des faits bien avérés, soit aux lois immuables de la nature.

C'est à l'influence de l'opinion de ceux que la multitude juge les plus instruits, et à qui elle a coutume de donner sa confiance sur les plus importans objets de la vie, qu'est due la propagation de ces erreurs qui, dans les temps d'ignorance, ont couvert la face du monde. L'astrologie nous en offre un grand exemple. Ces erreurs inculquées dès l'enfance, adoptées sans examen, et n'ayant pour base que la croyance universelle, se sont maintenues pendant très-long-temps; jusqu'à ce qu'enfin le progrès des sciences les ait détruites dans l'esprit des hommes éclairés, dont ensuite l'opinion les a fait disparaître chez le peuple même, par le pouvoir de l'imitation et de l'habitude, qui les avait si généralement répandues. Ce pouvoir, le plus puissant ressort du monde moral, établit et conserve dans toute une nation, des idées entièrement contraires à celles qu'il maintient ailleurs avec le même empire. Quelle indulgence ne devons-nous donc pas avoir pour les opinions différentes des nôtres; puisque cette différence ne dépend souvent que des points de vue divers où les circonstances nous ont placés! Éclairons ceux que nous ne jugeons pas suffisamment instruits; mais auparavant, examinons sévèrement nos propres opinions, et pesons avec impartialité, leurs probabilités respectives.

La différence des opinions dépend encore de la manière dont chacun détermine l'influence des données qui lui sont connues. La théorie des probabilités tient à des considérations si délicates, qu'il n'est pas surprenant qu'avec les mêmes données, deux personnes trouvent des résultats différens, surtout dans les questions très-compliquées. Exposons ici les principes généraux de cette théorie.

Principes généraux du Calcul des Probabilités.

Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles. Ier Principe.

Mais cela suppose les divers cas, également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable. Éclaircissons ce principe par un exemple. IIe Principe.

Supposons que l'on projette en l'air, une pièce large et très-mince dont les deux grandes faces opposées, que nous nommerons *croix* et *pile*, soient parfaitement semblables. Cherchons la probabilité d'amener *croix*, une fois au moins en deux coups. Il est clair qu'il peut arriver quatre cas également possibles, savoir, *croix* au premier et au second coup; *croix* au premier coup et *pile* au second; *pile* au premier coup et *croix* au second; enfin *pile* aux deux coups. Les trois premiers cas sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité qui, par conséquent, est égale à $\frac{3}{4}$; ensorte qu'il y a trois contre un à parier que *croix* arrivera au moins une fois en deux coups.

On peut ne compter à ce jeu, que trois cas différens, savoir, *croix* au premier coup, ce qui dispense d'en jouer un second;

pile au premier coup et *croix* au second; enfin *pile* au premier et au second coup. Cela réduirait la probabilité à $\frac{2}{3}$, si l'on considérait avec d'Alembert, ces trois cas, comme étant également possibles. Mais il est visible que la probabilité d'amener *croix* au premier coup est $\frac{1}{2}$, tandis que celle des deux autres cas est $\frac{1}{4}$. Le premier cas est un événement simple qui correspond aux deux événemens composés, *croix* au premier et au second coup, et *croix* au premier coup, *pile* au second. Maintenant, si conformément au second principe, on ajoute la possibilité $\frac{1}{2}$ de *croix* au premier coup, à la possibilité $\frac{1}{4}$ de *pile* arrivant au premier coup et *croix* au second; on aura $\frac{3}{4}$ pour la probabilité cherchée, ce qui s'accorde avec ce que l'on trouve dans la supposition où l'on joue les deux coups. Cette supposition ne change rien au sort de celui qui parie pour cet événement : elle sert seulement à réduire les divers cas, à des cas également possibles.

IIIe Principe. Un des points les plus importans de la Théorie des Probabilités, et celui qui prête le plus aux illusions, est la manière dont les probabilités augmentent ou diminuent par leurs combinaisons mutuelles. Si les événemens sont indépendans les uns des autres, la probabilité de l'existence de leur ensemble, est le produit de leurs probabilités particulières. Ainsi la probabilité d'amener un as avec un seul dé, étant un sixième; celle d'amener deux as en projetant deux dés à-la-fois, est un trente-sixième. En effet, chacune des faces de l'un, pouvant se combiner avec les six faces de l'autre; il y a trente-six cas également possibles, parmi lesquels un seul donne les deux as. Généralement, la probabilité qu'un événement simple et dans les mêmes circonstances, arrivera de suite, un nombre donné de fois, est égale à la probabilité de cet événement simple, élevée à une puissance indiquée par ce nombre. Ainsi les puissances successives d'une fraction moindre que l'unité, diminuant sans cesse; un événement qui dépend d'une suite de probabilités fort grandes, peut devenir extrêmement peu vraisemblable. Supposons qu'un fait qui sans être extraordinaire, n'a aucune probabilité par lui-même, nous soit transmis par vingt témoins, de manière que le premier l'ait transmis au second, le second au troisième, et ainsi de suite. Supposons encore que la probabilité de chaque témoignage soit égale à $\frac{9}{10}$: celle du fait sera moindre qu'un huitième; c'est-à-dire qu'il y aura plus de sept à parier contre un, qu'il est faux. On ne peut mieux comparer cette diminution de la probabilité, qu'à l'extinction de la clarté des objets, par l'interposition de plusieurs morceaux de verre; un nombre de morceaux peu considérable, suffisant pour dérober la vue d'un objet qu'un seul morceau laisse apercevoir d'une manière distincte. Les historiens ne paraissent pas avoir fait assez d'attention à cette dégradation de la probabilité des faits, lorsqu'ils sont vus à travers un grand nombre de générations successives : plusieurs événemens historiques, réputés certains, seraient au moins douteux, si on les soumettait à cette épreuve.

Dans les sciences purement mathématiques, les conséquences les plus éloignées participent de la certitude du principe dont elles dérivent. Dans les applications de l'analyse à la physique, les conséquences ont toute la certitude des faits ou des expériences. Mais dans les sciences morales, où chaque conséquence n'est déduite de ce qui la précède, que d'une manière vraisemblable; quelque probables que soient ces déductions, la chance de l'erreur croît avec leur nombre, et finit par surpasser la chance de la vérité, dans les conséquences très-éloignées du principe.

Quand deux événemens dépendent l'un de l'autre; la probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité du premier événement, par la probabilité que cet événement étant arrivé, l'autre aura lieu. Ainsi, dans le cas précédent de trois urnes A, B, C, dont deux ne contiennent que des boules blanches, et dont une ne renferme que des boules noires; la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne C est $\frac{2}{3}$; puisque sur trois urnes, deux ne contiennent que des boules de cette couleur. Mais lorsqu'on a extrait une boule blanche, de l'urne C; l'indécision relative à celle des urnes qui ne renferme que des boules noires, ne portant plus que sur les urnes A et B; la probabilité d'extraire une boule blanche, de l'urne B est $\frac{1}{2}$; le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$ est donc la probabilité d'extraire à-la-fois des urnes B et C, deux boules blanches. IVe Principe.

On voit par cet exemple, l'influence des événemens passés sur la probabilité des événemens futurs. Car la probabilité d'extraire une boule blanche, de l'urne B, qui primitivement est $\frac{2}{3}$, se réduit à $\frac{1}{2}$, lorsqu'on a extrait une boule blanche, de l'urne C : elle se changerait en certitude, si l'on avait extrait une boule noire, de la même urne. On déterminera cette influence, au moyen du principe suivant, qui est un corollaire du précédent.

V^e Principe. Si l'on calcule *à priori*, la probabilité de l'événement arrivé, et la probabilité d'un événement composé de celui-ci et d'un autre qu'on attend; la seconde probabilité divisée par la première, sera la probabilité de l'événement attendu, tirée de l'événement observé.

Ici se présente la question agitée par quelques philosophes, touchant l'influence du passé sur la probabilité de l'avenir. Supposons qu'au jeu de *croix* et *pile*, *croix* soit arrivé plus souvent que *pile*. Par cela seul, nous serons portés à croire que dans la constitution de la pièce, il existe une cause constante qui le favorise. Ainsi, dans la conduite de la vie, le bonheur constant est une preuve d'habileté, qui doit faire employer de préférence les personnes heureuses. Mais si par l'instabilité des circonstances, nous sommes ramenés sans cesse, à l'état d'une indécision absolue; si, par exemple, on change de pièce à chaque coup, au jeu de *croix* et *pile*; le passé ne peut répandre aucune lumière sur l'avenir, et il serait absurde d'en tenir compte.

VI^e Principe. Chacune des causes auxquelles un événement observé, peut être attribué, est indiquée avec d'autant plus de vraisemblance, qu'il est plus probable que cette cause étant supposée exister, l'événement aura lieu; la probabilité de l'existence d'une quelconque de ces causes, est donc une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement, résultante de cette cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les causes : si ces diverses causes considérées *à priori*, sont inégalement probables, il faut au lieu de la probabilité de l'événement, résultante de chaque cause, employer le produit de cette probabilité, par celle de la cause elle-même. C'est le principe fondamental de cette branche de l'analyse des hasards, qui consiste à remonter des événemens aux causes.

Ce principe donne la raison pour laquelle on attribue les événemens réguliers, à une cause particulière. Quelques philosophes ont cru que ces événemens sont moins possibles que les autres, et qu'au jeu de *croix* et *pile*, par exemple, la combinaison dans laquelle *croix* arrive vingt fois de suite, est moins facile à la nature, que celles où *croix* et *pile* sont entre-mêlés d'une façon irrégulière. Mais cette opinion suppose que les événemens passés influent sur la possibilité des événemens futurs, ce qui n'est point admissible. (en général) Les combinaisons régulières n'arrivent plus rarement, que parce qu'elles sont moins nombreuses. Si nous recherchons une cause, là où nous apercevons de la symétrie; ce n'est pas que nous regardions un événement symétrique, comme moins possible que les autres; mais cet événement devant être l'effet d'une cause régulière, ou celui du hasard, la première de ces suppositions est plus probable que la seconde. Nous voyons sur une table, des caractères d'imprimerie, disposés dans cet ordre, *Constantinople*; et nous jugeons que cet arrangement n'est pas l'effet du hasard, non parce qu'il est moins possible que les autres, puisque si ce mot n'était employé dans aucune langue, nous ne lui soupçonnerions point de cause particulière; mais ce mot étant en usage parmi nous, il est incomparablement plus probable qu'une personne aura disposé ainsi les caractères précédens, qu'il ne l'est que cet arrangement est dû au hasard.

C'est ici le lieu de définir le mot *extraordinaire*. Nous rangeons par la pensée, tous les événemens possibles, en diverses classes; et nous regardons comme *extraordinaires*, ceux des classes qui en comprennent un très-petit nombre. Ainsi, au jeu de *croix* et *pile*, l'arrivée de *croix* cent fois de suite, nous paraît extraordinaire, parce que le nombre presqu'infini des combinaisons qui peuvent arriver en cent coups, étant partagé en séries régulières ou dans lesquelles nous voyons régner un ordre facile à saisir, et en séries irrégulières; celles-ci sont incomparablement plus nombreuses. La sortie d'une boule blanche, d'une urne qui, sur un million de boules, n'en contient qu'une seule de cette couleur, les autres étant noires, nous paraît encore extraordinaire; parce que nous ne formons que deux classes d'événemens, relatives aux deux couleurs. Mais la sortie du n° 79, par exemple, d'une urne qui renferme un million de numéros, nous semble un événement ordinaire; parce que comparant individuellement les numéros, les uns aux autres, sans les partager en classes, nous n'avons aucune raison de croire que l'un d'eux sortira plutôt que les autres.

De ce qui précède, nous devons généralement conclure que plus un fait est extraordinaire, plus il a besoin d'être appuyé de fortes preuves. Car ceux qui l'attestent, pouvant ou tromper, ou avoir été trompés, ces deux causes sont d'autant plus probables que la réalité du fait l'est moins en elle-même. C'est ce que l'on verra particulièrement, lorsque nous parlerons de la probabilité des témoignages.

VIIe Principe. La probabilité d'un événement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'événement observé, par la probabilité que cette cause existant, l'événement futur aura lieu. L'exemple suivant éclaircira ce principe.

Imaginons une urne qui ne renferme que deux boules dont chacune soit ou blanche, ou noire. On extrait une de ces boules, que l'on remet ensuite dans l'urne, pour procéder à un nouveau tirage. Supposons que dans les deux premiers tirages, on ait amené des boules blanches; on demande la probabilité d'amener encore une boule blanche au troisième tirage.

On ne peut faire ici que ces deux hypothèses; ou l'une des boules est blanche, et l'autre, noire; ou toutes deux sont blanches. Dans la première hypothèse, la probabilité de l'événement observé est $\frac{1}{4}$; elle est l'unité ou la certitude dans la seconde. Ainsi, en regardant ces hypothèses, comme autant de causes, on aura par le sixième principe, $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$ pour leurs probabilités respectives. Or si la première hypothèse a lieu, la probabilité d'extraire une boule blanche au troisième tirage est $\frac{1}{2}$; elle égale l'unité, dans la seconde hypothèse: en multipliant ces dernières probabilités, par celles des hypothèses correspondantes, la somme des produits, ou $\frac{9}{10}$ sera la probabilité d'extraire une boule blanche au troisième tirage.

Quand la probabilité d'un événement simple est inconnue, on peut lui supposer également toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'unité. La probabilité de chacune de ces hypothèses, tirée de l'événement observé, est par le sixième principe, une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement dans cette hypothèse, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les hypothèses. Ainsi la probabilité que la possibilité de l'événement est comprise dans des limites données, est la somme des fractions comprises dans ces limites. Maintenant, si l'on multiplie chaque fraction, par la probabilité de l'événement futur, déterminée dans l'hypothèse correspondante; la somme des produits relatifs à toutes les hypothèses sera par le septième principe, la probabilité de l'événement futur, tirée de l'événement observé. On trouve ainsi qu'un événement étant arrivé de suite, un nombre quelconque de fois; la probabilité qu'il arrivera encore la fois suivante, est égale à ce nombre augmenté de l'unité, divisé par le même nombre augmenté de deux unités. En faisant, par exemple, remonter la plus ancienne époque de l'histoire, à cinq mille ans, ou à 1826213 jours, et le soleil s'étant levé constamment dans cet intervalle, à chaque révolution de vingt-quatre heures; il y a 1826214 à parier contre un, qu'il se levera encore demain. Mais ce nombre est incomparablement plus fort pour celui qui connaissant par l'ensemble des phénomènes, le principe régulateur des jours et des saisons, voit que rien dans le moment actuel, ne peut en arrêter le cours.

Buffon, dans son Arithmétique politique, calcule différemment la probabilité précédente. Il suppose qu'elle ne diffère de l'unité, que d'une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est le nombre deux élevé à une puissance égale au nombre des jours écoulés depuis l'époque. Mais la vraie manière de remonter des événemens passés, à la probabilité des causes et des événemens futurs, était inconnue à cet illustre écrivain.

De l'Espérance.

La probabilité des événemens sert à déterminer l'espérance ou la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions: il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans des suppositions qui ne sont que probables. Cet avantage, dans la théorie des hasards, est le produit de la somme espérée, par la probabilité de l'obtenir : c'est la somme partielle qui doit revenir, lorsqu'on ne veut point courir les risques de l'événement, en supposant que la répartition se fasse proportionnellement aux probabilités. Cette répartition est la seule équitable, lorsqu'on fait abstraction de toutes circonstances étrangères; parce qu'avec un égal degré de probabilité, on a un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage, *espérance mathématique*.

VIIIe Principe. Lorsqu'il dépend de plusieurs événemens; on l'obtient, en prenant la somme des produits de la probabilité de chaque événement, par le bien attaché à son arrivée.

Appliquons ce principe à des exemples. Supposons qu'au jeu de *croix* et *pile*, Paul reçoive deux francs, s'il amène *croix* au premier coup, et cinq francs, s'il ne l'amène qu'au second. En multipliant deux francs, par la probabilité $\frac{1}{2}$ du premier cas, et cinq francs, par la probabilité $\frac{1}{4}$ du second cas; la somme des produits, ou deux francs et un quart sera l'avantage de Paul. C'est la somme qu'il doit donner d'avance à celui qui lui fait cet avantage; car pour l'égalité du jeu, la mise doit être égale à l'avantage qu'il procure.

Si Paul reçoit deux francs, en amenant *croix* au premier coup, et cinq francs en l'amenant au second coup, soit qu'il l'ait ou non, amené au premier; alors la probabilité d'amener *croix* au second coup, étant $\frac{1}{2}$; en multipliant deux francs et cinq francs par $\frac{1}{2}$, la somme de ces produits, donnera trois francs et demi pour l'avantage de Paul, et par conséquent pour sa mise au jeu.

IXe Principe. Dans une série d'événemens probables, dont les uns produisent un bien, et les autres, une perte; on aura l'avantage qui en résulte, en faisant une somme des produits de la probabilité de chaque événement favorable, par le bien qu'il procure; et en retranchant de cette somme, celle des produits de la probabilité de chaque événement défavorable, par la perte qui y est attachée. Si la seconde somme l'emporte sur la première, le bénéfice devient perte, et l'espérance se change en crainte.

On doit toujours, dans la conduite de la vie, faire ensorte d'égaler au moins, le produit du bien que l'on espère, par sa probabilité, au produit semblable relatif à la perte. Mais il est nécessaire pour y parvenir, d'apprécier exactement, les avantages, les pertes, et leurs probabilités respectives. Il faut pour cela, une grande justesse d'esprit, un tact délicat, et une grande expérience des choses: il faut savoir se garantir des préjugés, des illusions de la crainte et de l'espérance, et de ces fausses idées de fortune et de bonheur, dont la plupart des hommes bercent leur amour-propre.

L'application des principes précédens, à la question suivante, a beaucoup exercé les géomètres. Paul joue à *croix* et *pile*, avec la condition de recevoir, deux francs, s'il amène *croix* au premier coup; quatre francs, s'il ne l'amène qu'au second; huit francs, s'il ne l'amène qu'au troisième, et ainsi de suite. Sa mise au jeu, doit être par le huitième principe, égale au nombre des coups; ensorte que si la partie continue à l'infini, la mise doit être infinie. Cependant, aucun homme raisonnable ne voudrait exposer à ce jeu, une somme même modique, cinquante francs, par exemple. D'où vient cette différence entre le résultat du calcul, et l'indication du sens commun? On reconnut bientôt, qu'elle tenait à ce que l'avantage moral qu'un bien nous procure, n'est pas proportionnel à ce bien, et qu'il dépend de mille circonstances souvent très-difficiles à définir, mais dont la plus générale et la plus importante est celle de la fortune. En effet, il est visible qu'un franc a beaucoup plus de prix pour celui qui n'en a que cent, que pour un millionnaire. On doit donc dans le bien espéré, distinguer sa valeur absolue, de sa valeur relative. Celle-ci se règle sur les motifs qui le font desirer; au lieu que la première en est indépendante. On ne peut pas donner de principe général, pour apprécier cette valeur relative. En voici cependant un proposé par Daniel Bernoulli, et qui peut servir dans beaucoup de cas. La valeur relative d'une X^e Principe.
somme infiniment petite, est égale à sa valeur absolue divisée par le bien total de la personne intéressée. Cela suppose que tout homme a un bien quelconque dont la valeur ne peut jamais être supposée nulle. En effet, celui même qui ne possède rien, donne toujours à son existence, une valeur au moins égale à ce qui lui est rigoureusement nécessaire pour vivre.

Si l'on applique l'analyse, au principe que nous venons d'exposer; on obtient la règle suivante.

En désignant par l'unité, la partie de la fortune d'un individu, indépendante de ses expectatives; si l'on détermine les diverses valeurs que cette fortune peut recevoir en vertu de ces expectatives, et leurs probabilités; le produit de ces valeurs élevées respectivement aux puissances indiquées par ces probabilités, sera la fortune physique qui procurerait à l'individu, le même avantage moral qu'il reçoit de la partie de sa fortune, prise pour unité, et de ses expectatives; en retranchant donc l'unité, de ce produit; la différence sera l'accroissement de la fortune physique, dû aux expectatives : nous nommerons cet accroissement, *esperance morale*. Il est facile de voir qu'elle coïncide avec l'espérance mathématique, lorsque la fortune prise pour unité, devient infinie par rapport aux variations qu'elle reçoit des expectatives. Mais lorsque ces variations sont une partie sensible de cette unité, les deux espérances peuvent différer très-sensiblement entre elles.

Cette règle conduit à des résultats conformes aux indications du sens commun, que l'on peut à ce moyen, apprécier avec quelqu'exactitude. Ainsi dans la question précédente, on trouve que si la fortune de Paul est de deux cents francs, il ne doit pas raisonnablement mettre au jeu plus de neuf francs. La même règle conduit encore à répartir le danger, sur plusieurs parties d'un bien que l'on espère, plutôt que d'exposer ce bien tout entier au même danger. Il en résulte pareillement, qu'au jeu le plus égal, la perte est toujours relativement plus grande que le gain; car le produit de la fortune prise pour unité, augmentée du gain et élevée à une puissance égale à la probabilité du gain, par cette unité diminuée de la perte, et élevée à une puissance égale à la probabilité de la perte, est toujours moindre que la fortune du joueur avant sa mise au jeu. En supposant par exemple, cette fortune, de cent francs, et que le joueur en expose cinquante au jeu de *croix* et *pile*; sa fortune après sa mise au jeu, peut être en vertu de son expectative, ou de cent cinquante francs, ou seulement de cinquante; la probabilité de chacun de ces deux cas est $\frac{1}{2}$; cette fortune est donc par la règle précédente, égale à la racine carrée du produit de cent cinquante, par cinquante; elle est ainsi réduite à quatre-vingt-sept francs, c'est-à-dire que cette dernière somme procurerait au joueur, le même avantage moral, que l'état de sa fortune après sa mise. Le jeu est donc désavantageux, dans le cas même où la mise est égale au produit de la somme espérée par sa probabilité. On peut juger par là de l'immoralité des jeux dans lesquels la somme espérée est au-dessous de ce produit. Ils ne subsistent que par les faux raisonnemens et la cupidité qu'ils fomentent, et qui portant le peuple à sacrifier son nécessaire, à des espérances chimériques dont il est hors d'état d'apprécier l'invraisemblance, sont la source d'une infinité de maux.

Des Méthodes analytiques du Calcul des Probabilités.

L'application des principes que nous venons d'exposer, aux diverses questions de probabilités, exige des méthodes dont la recherche a donné naissance à plusieurs branches de l'analyse, et spécialement à la théorie des combinaisons, et au calcul des différences finies.

Si l'on forme le produit des binomes, l'unité plus une première lettre, l'unité plus une seconde lettre, l'unité plus une troisième lettre, et ainsi de suite jusqu'à n lettres; en retranchant l'unité de ce produit développé, on aura la somme des combinaisons de toutes ces lettres prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc.: chaque combinaison aura pour coefficient, l'unité. Pour avoir le nombre des combinaisons de ces n lettres prises r à r, on observera que si on suppose les lettres égales entre elles, le produit précédent deviendra la puissance $n^{ième}$ du binome, un plus la première lettre; et le nombre des combinaisons des n lettres prises r à r, sera le coefficient de la puissance $r^{ième}$ de la première lettre, dans le développement de ce binome; on aura donc ce nombre, par la formule connue du binome.

Si l'on veut avoir égard à la situation respective des lettres, dans chaque combinaison; on doit observer qu'en joignant une seconde lettre à la première, on peut la placer au premier et au second rang; ce qui donne deux combinaisons. Si l'on joint à ces combinaisons, une troisième lettre; on peut lui donner dans chaque combinaison, le premier, le second et le troisième rang; ce qui forme trois combinaisons relatives à chacune des deux autres, en tout, six combinaisons. De là, il est aisé de conclure que le nombre des arrangemens différens que l'on peut donner à r lettres, est le produit des nombres depuis l'unité jusqu'à r. Il faut donc pour avoir égard à la situation respective des lettres, multiplier par ce produit, le nombre des combinaisons des n lettres prises r à r; ce qui revient à supprimer le dénominateur du coefficient du terme du binome, qui exprime ce nombre.

Supposons une loterie composée de n numéros, et qu'il en sorte r à chaque tirage ; on demande la probabilité de la sortie de s numéros donnés, dans un tirage. Pour y parvenir, on déterminera d'abord le nombre des combinaisons des autres numéros pris r moins s, à r moins s; car il est clair qu'en ajoutant les s numéros donnés, à chacune de ces combinaisons, on aura la somme de toutes les combinaisons des n lettres prises r à r, et dans lesquels les s numéros donnés entrent. Si l'on divise ce nombre, par celui des combinaisons de toutes les lettres prises r à r; on aura la probabilité demandée. On trouve ainsi que cette probabilité est le rapport du nombre des combinaisons de r lettres prises s à s, au nombre des combinaisons de n lettres prises s à s.

On peut d'après ce théorème, calculer les chances de la loterie de France, et en conclure ses bénéfices. Cette loterie est, comme on sait, composée de 90 numéros, dont cinq sortent à chaque tirage. La probabilité de la sortie d'un extrait donné, est en vertu de ce théorème, égale à $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$; la loterie devrait donc alors pour l'égalité du jeu, rendre dix-huit fois la mise. Le nombre total des combinaisons deux à deux, de 90 numéros est 4005, et il en sort dix à chaque tirage; ainsi la probabilité de la sortie d'un ambe donné est $\frac{10}{4005}$, la loterie devrait donc pour un ambe sorti, rendre quatre cents fois et demie, la mise. On trouve pareillement qu'elle devrait rendre la mise, 11748 fois pour un terne, 511038 fois pour un quaterne, et 43949268 fois pour un quine. La loterie est loin de faire ces avantages aux joueurs.

Supposons encore dans une urne, n boules que l'on puisse également extraire une à une, deux à deux, trois à trois, etc.; on a fait une de ces extractions, et l'on demande la probabilité que le nombre des boules extraites est impair. Il suit de ce qui précède, que si l'on élève le binome, un plus un, à la puissance n; les termes, second, troisième, etc., exprimeront les nombres de combinaisons des n boules, prises une à une, deux à deux, etc.; ainsi la totalité des combinaisons sera la puissance $n^{ième}$ de deux, moins l'unité: la somme des termes second, quatrième, sixième, etc. du développement du binome, sera le nombre des combinaisons impaires: elle sera visiblement, la moitié de la différence des $n^{ième}$ puissances des binomes un plus un, et un moins un; ou la moitié de la $n^{ième}$ puissance de deux. En retranchant l'unité, de cette quantité, on aura le nombre des combinaisons paires; et en divisant ces deux nombres de combinaisons, par leur somme, on aura les probabilités respectives des combinaisons impaires et paires. On voit ainsi qu'il y a de l'avantage à parier plutôt pour un nombre impair de boules extraites, que pour un nombre pair.

Mais la méthode la plus générale et la plus directe de résoudre les questions de probabilité, consiste à les faire dépendre d'équations aux différences. En comparant les états consécutifs de la fonction des variables, qui exprime la probabilité, lorsqu'on fait croître ces variables, de leurs différences respectives; la question proposée fournit le plus souvent, un rapport très-simple entre les divers états de cette fonction. Ce rapport est ce que l'on nomme *équation aux différences ordinaires ou partielles;* ordinaires, lorsqu'il n'y a qu'une variable; partielles, lorsqu'il y en a plusieurs. Donnons en quelques exemples.

Trois joueurs dont les forces sont supposées les mêmes, jouent ensemble aux conditions suivantes. Celui des deux premiers joueurs qui gagne son adversaire, joue avec le troisième, et s'il le gagne, la partie est finie. S'il est vaincu, le vainqueur joue avec l'autre, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un des joueurs ait gagné consécutivement les deux autres; ce qui termine la partie. On demande la probabilité que cette partie sera finie dans un nombre donné de coups. Cherchons d'abord la probabilité qu'elle finira précisément à un coup déterminé, par exemple, au dixième coup. Pour cela, le joueur qui la gagne, doit entrer au jeu au neuvième coup, et le gagner ainsi que le coup suivant. Mais si au lieu de gagner le neuvième coup, il était vaincu par son adversaire; comme celui-ci a déjà gagné l'autre joueur, la partie finirait à ce coup; ainsi la probabilité qu'un joueur entrera au jeu au neuvième coup, et le gagnera, est égale à celle que la partie finira précisément à ce coup; et comme ce joueur doit gagner le coup suivant, pour que la partie se termine au dixième coup, cette dernière probabilité ne sera qu'un demi de la précédente. Il suit de là que si l'on considère cette probabilité, comme une fonction du numéro du coup auquel elle doit finir; cette fonction sera la moitié de la même fonction dans laquelle on a diminué le numéro ou la variable, d'une unité. Cette égalité forme une de ces équations que l'on nomme *équations aux différences finies ordinaires*.

On peut déterminer facilement à son moyen, la probabilité que la partie finira précisément à un coup quelconque. Il est visible que la partie ne peut finir au plutôt, qu'au second coup; et pour cela, il est nécessaire que celui des deux premiers joueurs qui gagne son adversaire, gagne au second coup, le troisième joueur. Ainsi la probabilité que la partie finira à ce coup, est $\frac{1}{2}$. De là, en vertu de l'équation précédente, on conclut que les probabilités successives de la fin de la partie, sont $\frac{1}{4}$ pour le troisième coup, $\frac{1}{8}$ pour le quatrième, etc., et généralement $\frac{1}{2}$ élevé à une puissance moindre de l'unité, que le numéro du coup. Maintenant, si l'on prend la somme de toutes ces puissances, depuis la première jusqu'à cette dernière inclusivement; on aura la probabilité que la partie sera terminée dans le nombre de coups indiqué par ce numéro, égale à l'unité moins la dernière de ces puissances de $\frac{1}{2}$.

Considérons encore le premier problème que l'on ait résolu sur les probabilités, et que Pascal proposa de résoudre à Fermat. Deux joueurs A et B, dont les adresses sont égales, jouent ensemble à cette condition que celui qui le premier aura vaincu l'autre un nombre donné de fois, gagnera la partie, et emportera la somme des mises au jeu. Après quelques coups, les joueurs conviennent de se retirer sans avoir terminé la partie; on demande de quelle manière ils doivent se partager cette somme. Il est visible que leurs parts doivent être proportionnelles à leurs probabilités respectives de gagner la partie; la question se réduit donc à déterminer ces probabilités. Elles dépendent évidemment des nombres de points qui manquent à chaque joueur, pour atteindre le nombre donné; ainsi la probabilité de A est une fonction de ces deux nombres que nous regarderons comme autant de variables. Si les deux joueurs convenaient de jouer un coup de plus (convention qui ne change en rien leur sort); ou A le gagnerait, et alors le nombre des points qui lui manque, serait diminué d'une unité; ou le joueur B gagnerait ce nouveau coup, et alors le nombre des points qui manquent à ce dernier joueur, serait diminué d'une unité; mais la probabilité de chacun de ces cas est $\frac{1}{2}$; la fonction cherchée est donc égale à la moitié de cette fonction dans laquelle on diminue d'une unité, la première variable, plus à la moitié de la même fonction dans laquelle on diminue la seconde variable, d'une unité. Cette égalité est une de ces équations que l'on nomme *équations aux différences partielles.*

On peut déterminer à son moyen, les probabilités de A, en partant des plus petits nombres, et en observant que la probabilité ou la fonction qui l'exprime, est égale à l'unité, lorsqu'il ne manque aucun point au joueur A, ou lorsque la première variable est nulle; et que cette fonction devient nulle avec la seconde variable. En supposant ainsi qu'il ne manque qu'un point au joueur A, on trouve que sa probabilité est $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, etc., suivant qu'il manque à B, un point, ou deux, ou trois, etc. Généralement, elle est alors égale à l'unité, moins $\frac{1}{2}$ élevé à une puissance égale au nombre des points qui manquent à B. On supposera ensuite qu'il manque deux points au joueur A, et l'on trouvera sa probabilité égale à $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{16}$, etc., suivant qu'il manque à B, un point, ou deux, ou trois, etc. On supposera encore qu'il manque trois points au joueur A, et ainsi de suite.

Cette manière d'obtenir les valeurs successives d'une quantité, au moyen de son équation aux différences, est longue et pénible; et les géomètres ont cherché des méthodes pour avoir la fonction générale des variables qui satisfait à cette équation, ensorte que l'on n'ait besoin pour chaque cas particulier, que de substituer dans cette fonction, les valeurs correspondantes des variables. Considérons cet objet d'une manière générale. Pour cela, concevons une suite de termes disposés sur une ligne horizontale, et tels que chacun d'eux dérive des précédens, suivant une loi donnée : supposons cette loi exprimée par une équation entre plusieurs termes consécutifs, et leur indice, ou le nombre qui indique le rang qu'ils occupent dans la série : cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies à un seul indice variable*. L'ordre ou le degré de cette équation, est la différence du rang de ses deux termes extrêmes. On peut, à son moyen, déterminer successivement les termes de la série, et la continuer indéfiniment ; mais il faut pour cela, connaître un nombre de termes de la série, égal au degré de l'équation. Ces termes sont les constantes arbitraires de l'expression du terme général de la série, ou de l'intégrale de l'équation aux différences.

Concevons maintenant, au-dessus des termes de la série précédente, une seconde série de termes disposés horizontalement ; concevons encore, au-dessus des termes de la seconde série, une troisième série horizontale, et ainsi de suite à l'infini, et supposons les termes de toutes ces séries, liés par une équation générale entre plusieurs termes consécutifs, pris tant dans le sens horizontal, que dans le sens vertical, et les nombres qui indiquent leur rang dans les deux sens. Cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies partielles à deux indices variables*.

Concevons pareillement au-dessus du plan qui renferme les séries précédentes, un second plan renfermant des séries semblables, dont les termes soient placés respectivement au-dessus de ceux que contient le premier plan. Concevons ensuite au-dessus de ce second plan, un troisième plan renfermant des séries semblables, et ainsi à l'infini. Supposons tous les termes de ces séries, liés par une équation entre plusieurs termes consécutifs, pris tant dans le sens de la longueur, que dans les sens de la largeur et de la profondeur, et les trois nombres qui indiquent leur rang dans ces trois sens. Cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies partielles à trois indices variables*.

Enfin, en considérant la chose d'une manière abstraite et indépendante des dimensions de l'espace, concevons généralement un systeme de grandeurs qui soient fonctions d'un nombre quelconque d'indices variables, et supposons entre ces grandeurs, leurs différences relatives à ces indices et les indices eux-mêmes, autant d'équations qu'il y a de ces grandeurs; ces équations seront aux différences finies partielles à un nombre quelconque d'indices variables.

On peut à leur moyen, déterminer successivement ces grandeurs. Mais de même que l'équation à un seul indice, exige que l'on connaisse un certain nombre de termes de la série; de même l'équation à deux indices exige que l'on connaisse une ou plusieurs lignes de séries, dont les termes généraux peuvent chacun être exprimés par une fonction arbitraire d'un des indices. Pareillement, l'équation à trois indices exige que l'on connaisse un ou plusieurs plans de séries, dont les termes généraux peuvent être exprimés chacun par une fonction arbitraire de deux indices, et ainsi de suite. Dans tous ces cas, on pourra, par des éliminations successives, déterminer un terme quelconque des séries. Mais toutes les équations entre lesquelles on élimine, étant comprises dans un même système d'équations générales; toutes les expressions des termes successifs que l'on obtient par ces éliminations, doivent être comprises dans une expression générale, fonction des indices qui déterminent le rang du terme. Cette expression est l'intégrale de l'équation proposée aux différences, et sa recherche est l'objet du calcul intégral. Parmi les méthodes imaginées pour y parvenir, celle qui me paraît être la plus générale et la plus simple, est fondée sur la considération *des fonctions génératrices* dont voici l'idée.

Si l'on conçoit une fonction A d'une variable, développée dans une série ascendante par rapport aux puissances de cette variable; le coefficient de l'une quelconque de ces puissances sera fonction de l'indice ou exposant de cette puissance. A est ce que je nomme *fonction génératrice* de ce coefficient, ou de la fonction de l'indice.

Maintenant, si l'on multiplie la série A, par une fonction linéaire de la variable, telle, par exemple, que l'unité plus deux fois cette variable; le produit sera une nouvelle fonction génératrice dans laquelle le coefficient d'une puissance quelconque de la variable, sera égal au coefficient de la même puissance dans A, plus au double du coefficient de la puissance inférieure d'une unité. Ainsi la fonction de l'indice dans le produit, égalera la fonction de l'indice dans A, plus le double de cette même fonction dans laquelle l'indice est diminué de l'unité. Cette fonction de l'indice dans le développement du produit, peut ainsi être envisagée, comme une dérivée de la fonction de l'indice dans A, dérivée que l'on peut exprimer par une caractéristique placée devant cette dernière fonction. La dérivation indiquée par la caractéristique, dépend de la fonction multiplicateur, que nous désignerons généralement par B, et que nous supposerons développée comme A, par rapport aux puissances de la variable.

Si l'on multiplie de nouveau par B, le produit de A par B, ce qui revient à multiplier A par le carré de B; on formera une troisième fonction génératrice dans laquelle le coefficient d'une puissance quelconque de la variable, sera une dérivée semblable du coefficient correspondant dans le premier produit; on pourra donc l'exprimer par la même caractéristique placée devant la dérivée précédente, et alors cette caractéristique sera deux fois écrite devant le coefficient correspondant dans la série A; mais au lieu de l'écrire ainsi deux fois, on lui donne pour exposant, le nombre deux.

En continuant de cette manière, on voit généralement que si l'on multiplie A par une puissance $n^{ième}$ de B; on aura le coefficient d'une puissance quelconque de la variable dans le produit, en plaçant devant le coefficient correspondant de A, la caractéristique avec n pour exposant.

Supposons que B soit l'unité divisée par la variable; alors dans le produit de A par B, le coefficient d'une puissance de la variable, sera le coefficient de la puissance supérieure d'une unité dans A; d'où il suit que dans le produit de A par la puissance $n^{ième}$ de B, ce coefficient sera celui de la puissance supérieure d'un nombre n d'unités dans A.

Si B est égal à, moins un plus l'unité divisée par la variable; alors dans le produit de A par B, le coefficient de la variable sera le coefficient de la puissance supérieure d'une unité dans A, moins le coefficient de cette puissance; il sera donc la différence finie de ce dernier coefficient dans lequel on fait varier l'indice, de l'unité. Ainsi dans le produit de A par la puissance $n^{ième}$ de B, le coefficient sera la différence $n^{ième}$ du coefficient correspondant dans A.

B étant une fonction de la variable, et C étant une autre fonction de la même variable; on pourra considérer B, comme une fonction de C, développée dans une série ordonnée par rapport aux puissances de C; le produit de A par cette série, sera donc identiquement égal au produit de A par B; et les coefficiens d'une même puissance de la variable, seront identiquement égaux dans ces deux produits. Mais le premier de ces coefficiens est formé d'une suite de termes correspondans aux produits de A par les diverses puissances de C. Dans le produit de A par C, ce coefficient est une nouvelle dérivée du coefficient correspondant dans A, dérivée que nous exprimerons par une nouvelle caractéristique placée devant ce dernier coefficient. En changeant donc les diverses puissances de C, dans cette nouvelle caractéristique affectée d'exposans égaux à ceux de ces puissances, et placée devant le coefficient correspondant de A; en multipliant ensuite par ce coefficient, le terme indépendant de C, dans la série précédente; on aura le coefficient relatif au produit de A par le développement de B, suivant les puissances de C. Si l'on égale ce coefficient, à celui qui est relatif au produit de A par B, et qui est exprimé par la première caractéristique placée devant le coefficient correspondant de A; on aura l'expression de la dérivée indiquée par cette caractéristique, dans une série ordonnée suivant les exposans de la nouvelle caractéristique. On voit que pour former cette série, c'est-à-dire pour repasser des fonctions génératrices à leurs coefficiens, il suffit de substituer dans B considéré comme fonction de C, la nouvelle caractéristique, à la place de C; de développer ensuite B, dans une série ordonnée par rapport aux puissances de cette caractéristique; enfin d'écrire le coefficient d'une puissance indéterminée de la variable dans A, à la suite de chaque puissance de la caractéristique, et après le premier terme de la série. Ainsi ce coefficient étant une fonction quelconque de l'indice de la puissance de la variable; la transformation d'une dérivée de cette fonction, indiquée par une première caractéristique, dans une série ordonnée par rapport aux exposans successifs de la caractéristique d'une nouvelle dérivée de la même fonction, se réduit aux opérations algébriques du développement des fonctions en séries.

Si l'on suppose B égal à l'unité divisée par la variable, et C égal à cette fraction moins un; B sera égal à l'unité plus C, et le produit de A par la $n^{ième}$ puissance de B, sera égal au produit de A par le développement de la puissance $n^{ième}$ du binome, un plus C; or le coefficient d'une puissance quelconque de la variable, dans le produit de A par B élevé à la $n^{ième}$ puissance, est, comme on l'a vu, le coefficient de la puissance supérieure de n unités, dans A; et ce même coefficient dans le produit de A par une puissance de C, est la différence du même ordre, du coefficient correspondant dans A; une fonction quelconque de l'indice augmenté de n, est donc égale aux coefficiens des termes du développement de la puissance $n^{ième}$ du binome, multipliés respectivement par la fonction elle-même, et ses différences successives; ce qui donne l'interpolation des séries, au moyen des différences de leurs termes successifs.

B étant toujours supposé égal à l'unité divisée par la variable, et C étant une fonction quelconque de cette variable; C sera la même fonction du quotient de l'unité divisée par B. Si de là on tire l'expression de la puissance $n^{ième}$ de B, dans une série développée suivant les puissances de C; on aura en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens, une fonction quelconque de l'indice augmenté de n, égale à une série dont le premier terme sera le premier terme de la série précédente, multiplié par la fonction elle-même; et dont les suivans seront ceux de la même série, dans lesquels, au lieu des puissances de C, on écrit les mêmes puissances de la caractéristique relative à C, suivies de la fonction. Si l'on suppose un des termes de cette nouvelle série, égal à zéro; tous les termes suivans seront nuls, et la somme des termes précédens sera l'expression de la fonction de l'indice augmenté de l'indéterminée n; cette expression sera l'intégrale complète de l'équation aux différences, indiquée par l'égalité du terme de la série, à zéro; on a ainsi la méthode la plus simple d'intégrer ce genre d'équations.

Concevons présentement que A soit une fonction de deux variables, (ce que nous allons dire, s'étend à un nombre quelconque de variables). En la développant dans une série ordonnée par rapport aux puissances de ces variables, et à leurs produits; le coefficient du produit de deux puissances quelconques dans ce développement, sera une fonction des indices de ces puissances, dont A sera la fonction génératrice.

Si l'on multiplie A par une autre fonction B de ces deux variables; le coefficient des deux mêmes puissances dans le produit, sera une fonction dérivée du coefficient précédent, dérivée que l'on pourra exprimer par une caractéristique placée devant ce coefficient. On verra, comme ci-dessus, que le coefficient correspondant, dans le produit de A par une puissance quelconque de B, sera exprimé par cette caractéristique, toujours placée devant le coefficient relatif à A, et à laquelle on donne pour exposant, celui de la puissance de B. De là résultent des théorèmes analogues à ceux qui sont relatifs à une seule variable. On pourra développer d'une manière semblable, une fonction quelconque des deux indices augmentés respectivement des nombres n et n', dans une série ordonnée par rapport aux puissances d'une caractéristique, placées devant la fonction sans accroissement d'indices; et dont le premier terme est cette fonction elle-même. Si l'un des termes de cette série, est égal à zéro; tous les termes suivans le seront pareillement, et la somme des termes précédens sera l'expression de la fonction des deux indices augmentés respectivement des indéterminées n et n': cette expression sera l'intégrale de l'équation aux différences finies partielles, donnée par cette égalité.

Il existe toujours une fonction des variables, telle qu'en la développant en série, les coefficiens des produits de leurs puissances ont entre eux, la relation donnée par une équation aux différences partielles. Cette fonction que j'ai nommée *fonction génératrice* de l'équation proposée, est souvent facile à obtenir: toutes les manières de la développer en série, donneront l'intégrale de cette équation, sous des formes diverses plus ou moins commodes selon les circonstances.

Si l'on a une série ordonnée par rapport aux puissances d'une variable, et telle que le coefficient de chaque puissance soit, par exemple, la moitié du coefficient de la puissance précédente; on pourra concevoir l'intervalle des deux premiers termes, rempli d'une infinité de termes dans lesquels les puissances de la variable croîtront par degrés infiniment petits, depuis zéro jusqu'à l'unité;

et auront des coefficiens arbitraires. Les intervalles des termes consécutifs suivans, seront pareillement remplis d'une infinité d'autres termes, mais dépendans des premiers, de manière que le coefficient d'une puissance de la variable, soit la moitié du coefficient de la puissance moindre d'une unité. Le plus communément, on suppose les intervalles des premiers termes de chaque série, remplis par des ordonnées paraboliques; alors les autres intervalles sont remplis d'ordonnées semblables, liées aux précédentes, par la loi générale de la série qui renferme ainsi toutes les puissances entières et fractionnaires de la variable.

Supposons maintenant que A soit une série semblable, et que B soit égal à, moins un plus l'unité divisée par une puissance i entière ou fractionnaire de la variable. En représentant par un plus C, l'unité divisée par la variable; B sera égal à la quantité suivante, moins un plus la puissance i du binome un plus C. Si l'on multiplie par A, la puissance $n^{ième}$ de cette quantité; on aura un produit identiquement égal à celui de A par la puissance $n^{ième}$ de B. Si l'on développe ces puissances; on repassera des fonctions génératrices, aux coefficiens, 1° en changeant la puissance $n^{ième}$ de B, multipliée par A, dans la différence $n^{ième}$ de la fonction de l'indice, relative à A, i étant l'accroissement de l'indice; 2° en changeant pareillement le produit de A par une puissance de C d'un ordre quelconque, dans une différence du même ordre, de la même fonction de l'indice, l'unité étant l'accroissement de l'indice. On aura donc la différence $n^{ième}$ d'une fonction quelconque de l'indice dont i est l'accroissement, exprimée par une série des différences de la même fonction, dans lesquelles l'unité est l'accroissement de l'indice. On peut ainsi transformer la caractéristique relative à un accroissement de l'indice, dans une série de caractéristiques relatives à un autre accroissement.

On voit dans tout ce qui précède, que les opérations algébriques relatives aux transformations des fonctions, se transportent aux caractéristiques, en leur donnant pour exposans, ceux des quantités qui leur correspondent. Cette analogie remarquable et féconde des puissances et des caractéristiques, avait été aperçue par Leibnitz dans les expressions différentielles. Lagrange, en suivant cet aperçu de Leibnitz dans tous ses développemens, en a tiré des formules aussi curieuses qu'utiles pour l'analyse, mais sans en donner les démonstrations qu'il regardait comme difficiles. La théorie des fonctions génératrices ne laisse rien à desirer à cet égard, et de plus elle étend à des caractéristiques quelconques, l'analogie que ces deux grands géomètres n'avaient observée que relativement aux puissances et aux différences.

Si l'on suppose les accroissemens des indices, infiniment petits; les résultats relatifs à leurs accroissemens finis, subsisteront toujours, et se simplifieront en rejetant les infiniment petits d'un ordre supérieur à celui que l'on conserve. Ces passages du fini à l'infiniment petit, ont l'avantage d'éclairer les points délicats de l'analyse infinitésimale, qui ont été l'objet de grandes discussions parmi les géomètres. C'est ainsi que j'ai démontré la possibilité d'introduire des fonctions discontinues, dans les intégrales des équations aux différentielles partielles; pourvu que la discontinuité n'ait lieu que pour les différentielles des fonctions, de l'ordre de ces équations. Les résultats transcendans du calcul sont, comme toutes les abstractions de l'entendement, des signes généraux dont on ne peut connaître la véritable étendue, qu'en remontant par l'analyse métaphysique, aux idées élémentaires qui y ont conduit; ce qui présente souvent de grandes difficultés; car l'esprit humain en éprouve moins encore à se porter en avant, qu'à se replier sur lui-même.

Le passage du fini à l'infiniment petit, répand un grand jour sur la métaphysique du calcul différentiel. On voit clairement par ce passage, que ce calcul n'est que la comparaison des coefficiens des mêmes puissances des différentielles, dans le développement en série, de fonctions identiquement égales des indices augmentés respectivement de différentielles indéterminées. Les quantités que l'on néglige comme étant d'un ordre d'infiniment petits, supérieur à celui que l'on conserve, et qui semblent par cette omission, ôter à ce calcul la rigueur de l'algèbre, ne sont que des puissances de ces différentielles, d'un ordre supérieur à celui des puissances dont on compare les coefficiens, et qui par là, doivent être rejetées de cette comparaison; ensorte que le calcul différentiel a toute l'exactitude des autres opérations algébriques. Mais dans ses applications à la géométrie et à la mécanique, il est indispensable d'introduire le principe des limites. Par exemple, la soutangente d'une courbe étant la limite géométrique de la sousécante, ou la ligne dont celle-ci approche sans cesse, à mesure que les points d'intersection de la sécante et de la courbe se rapprochent; l'expression analytique de la soutangente, doit être pareillement la limite de l'expression analytique de la sousécante; elle est, par conséquent, égale au premier terme de cette dernière expression développée suivant les puissances de l'intervalle qui sépare les deux points d'intersection.

On peut encore envisager la tangente, comme la droite dont l'équation approche le plus de celle de la courbe, près du point de contingence. L'ordonnée de cette courbe, étant une fonction de l'abscisse; si à partir de ce point, on fait croître l'abscisse, d'une quantité indéterminée, et qu'on développe la fonction suivant les puissances de cette indéterminée; il est visible que la somme des deux premiers termes de ce développement, sera l'ordonnée de la droite la plus approchante de la courbe; conséquemment, elle sera l'ordonnée de la tangente : le coefficient de l'indéterminée dans le second terme, exprimera le rapport de l'ordonnée à la soutangente. Il est facile de prouver par le principe des limites, que toute autre droite menée par le point de contingence, entrerait dans la courbe près de ce point.

Cette manière singulièrement heureuse de parvenir à l'expression des soutangentes, est due à Fermat qui l'a étendue aux courbes transcendantes. Ce grand géomètre exprime par la caractéristique E, l'accroissement de l'abscisse; et en ne considérant que la première puissance de cet accroissement, il détermine exactement comme on le fait par le calcul différentiel, les soutangentes des courbes, leurs points d'inflexion, les *maxima* et *minima* de leurs ordonnées, et généralement ceux des fonctions rationnelles. On voit même par sa belle solution du problème de la réfraction de la lumière, en supposant qu'elle parvient d'un point à un autre dans le temps le plus court, et qu'elle se meut dans les divers milieux diaphanes avec différentes vitesses, on voit dis-je, qu'il savait étendre sa méthode, aux fonctions irrationnelles, en se débarrassant des irrationnalités, par l'élévation des radicaux aux puissances. On doit donc regarder Fermat, comme le véritable inventeur du calcul différentiel. Newton a depuis rendu ce calcul, plus analytique, dans sa Méthode des Fluxions; et il en a simplifié et généralisé les procédés, par son beau théorème du binome. Enfin presqu'en même temps, Leibnitz a enrichi le calcul différentiel, d'une notation qui en indiquant le passage du fini à l'infiniment petit, réunit à l'avantage d'exprimer les résultats rigoureux de ce calcul, celui de donner les premières valeurs approchées des différences et des sommes des quantités; notation qui s'est adaptée d'elle-même au calcul des différentielles partielles. La langue de l'analyse, la plus parfaite de toutes les langues, étant par elle-même un puissant instrument de découvertes; ses notations, lorsqu'elles sont nécessaires et heureusement imaginées, sont des germes de nouveaux calculs. Ainsi, la simple idée qu'eut Descartes, d'indiquer les puissances représentées par des lettres, en écrivant vers le haut de ces lettres, les nombres qui expriment les degrés de ces puissances, a donné naissance au calcul exponentiel; et Leibnitz a été conduit par sa notation, à l'analogie singulière des puissances et des différentielles. Le calcul des fonctions génératrices, qui, comme on l'a vu, donne la véritable origine de cette analogie, offre tant d'exemples de ce transport des puissances aux caractéristiques, qu'il peut encore être envisagé comme le calcul exponentiel des caractéristiques.

On est souvent conduit à des expressions qui contiennent tant de termes et de facteurs, que les substitutions numériques y sont impraticables. C'est ce qui a lieu dans les questions de probabilité, lorsque l'on considère un grand nombre d'événemens. Cependant il importe alors d'avoir la valeur numérique des formules, pour connaître avec quelle probabilité, les résultats que les événemens développent en se multipliant, sont indiqués. Il importe surtout d'avoir la loi suivant laquelle cette probabilité approche sans cesse de la certitude qu'elle finirait par atteindre, si le nombre des événemens devenait infini. Pour y parvenir, je considérai que les intégrales définies de différentielles multipliées par des facteurs élevés à de grandes puissances, donnaient par l'intégration, des formules composées d'un grand nombre de termes et de facteurs. Cette remarque me fit naître l'idée de transformer dans de semblables intégrales, les expressions compliquées de l'analyse et les intégrales des équations aux différences. Je remplis cet objet par une méthode qui donne à-la-fois, la fonction comprise sous le signe intégral, et les limites de l'intégration. Elle offre cela de remarquable, savoir, que cette fonction est la fonction même génératrice des expressions et des équations proposées; ce qui rattache cette méthode, à la théorie des fonctions génératrices dont elle est le complément. Il ne s'agissait plus ensuite que de réduire l'intégrale définie, en série convergente. C'est ce que j'obtins par un procédé qui fait converger la série, avec d'autant plus de rapidité, que la formule qu'elle représente est plus compliquée; ensorte qu'il est d'autant plus exact, qu'il devient plus nécessaire. Le plus souvent, la série a pour facteur, la racine carrée du rapport de la circonférence au diamètre : quelquefois elle dépend d'autres transcendantes dont le nombre est infini.

Une remarque importante, qui tient à la grande généralité de l'analyse, et qui permet d'étendre cette méthode, aux formules et aux équations aux différences, que la théorie des probabilités présente le plus fréquemment, est que les séries auxquelles on parvient, en supposant réelles et positives, les limites des intégrales définies, ont également lieu dans le cas où l'équation qui détermine ces limites, n'a que des racines négatives ou imaginaires. Ces passages du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire, dont j'ai fait le premier usage, m'ont conduit encore aux valeurs de plusieurs intégrales définies singulières, que j'ai trouvées ensuite directement. On peut donc considérer ces passages, comme des moyens de découvertes, pareils à l'induction et à l'analogie employées depuis long-temps par les géomètres, d'abord avec un extrême réserve, ensuite avec une entière confiance; un grand nombre d'exemples en ayant justifié l'emploi. Cependant il est toujours utile de confirmer par des démonstrations directes, les résultats obtenus par ces divers moyens.

J'ai nommé *calcul des fonctions génératrices*, l'ensemble des méthodes précédentes : ce calcul sert de fondement à la théorie des probabilités, exposée dans cet ouvrage.

APPLICATIONS DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

Des Jeux.

Les combinaisons que les jeux présentent, ont été l'objet des premières recherches sur les probabilités. Dans l'infinie variété de ces combinaisons, plusieurs d'entre elles se prêtent avec facilité au calcul : d'autres exigent des calculs plus difficiles; et les difficultés croissant à mesure que les combinaisons deviennent plus compliquées, le desir de les surmonter et la curiosité ont excité les géomètres à perfectionner de plus en plus, ce genre d'analyse. On a vu précédemment que l'on pouvait facilement déterminer par la théorie des combinaisons, les bénéfices d'une loterie. Mais il est plus difficile de savoir en combien de tirages on peut parier un contre un, par exemple, que tous les numéros seront sortis. n étant le nombre des numéros, r celui des numéros sortans à chaque tirage, et i le nombre inconnu de tirages; l'expression de la probabilité de la sortie de tous les numéros, dépend de la différence finie $n^{\text{ième}}$ de la puissance i du produit de r nombres consécutifs. Lorsque le nombre n est considérable, la recherche de la valeur de i, qui rend cette probabilité égale à $\frac{1}{2}$, devient impossible, à moins qu'on ne convertisse cette différence, dans une série très-convergente. C'est ce que l'on fait heureusement par la méthode ci-dessus indiquée, pour les approximations des fonctions de très-grands nombres. On trouve ainsi que la loterie étant composée de dix mille numéros dont un seul sort à chaque tirage; il y a du désavantage à parier un contre un, que tous les numéros sortiront dans 95767 tirages, et de l'avantage à faire le même pari pour 95768 tirages. A la loterie de France, ce pari est désavantageux pour 85 tirages, et avantageux pour 86 tirages.

Considérons encore deux joueurs A et B jouant ensemble à *croix* et *pile*, de manière qu'à chaque coup, si *croix* arrive, A donne un jeton à B qui lui en donne un, si *pile* arrive; le nombre des jetons de B est limité : celui des jetons de A est illimité; et la partie ne doit finir que lorsque B n'aura plus de jetons. On demande plus petit nombre de jetons. Sa probabilité de gagner la partie augmente, si les joueurs conviennent de doubler, de tripler leurs jetons; et elle devient $\frac{1}{2}$ ou la même que la probabilité de l'autre joueur, dans le cas où les nombres de leurs jetons deviendraient infinis, en conservant toujours le même rapport.

On peut corriger l'influence de ces inégalités inconnues, en les soumettant elles-mêmes aux chances du hasard. Ainsi au jeu de *croix* et *pile*, si l'on a une seconde pièce que l'on projette chaque fois avec la première; et que l'on convienne de nommer constamment *croix*, la face amenée par cette seconde pièce; la probabilité d'amener *croix* deux fois de suite, avec la première pièce, appro~~chera beaucoup plus~~ d'un quart, que dans le cas d'une seule pièce. Dans ce dernier cas, la différence est le carré du petit accroissement de possibilité que l'inégalité inconnue donne à la face de la première pièce, qu'elle favorise : dans l'autre cas, cette différence est le quadruple produit de ce carré, par le carré correspondant relatif à la seconde pièce.

Que l'on jette dans une urne, cent numéros depuis un jusqu'à cent, dans l'ordre de la numération, et qu'après avoir agité l'urne, pour mêler ces numéros, on en tire un; il est clair que si le mélange a été bien fait, les probabilités de sortie des numéros, sont les mêmes. Mais si l'on craint qu'il n'y ait entre elles, de petites différences dépendantes de l'ordre suivant lequel les numéros ont été jetés dans l'urne; on diminuera considérablement ces différences, en jetant dans une seconde urne, ces numéros suivant leur ordre de sortie de la première urne, et en agitant ensuite cette seconde urne, pour mêler ces numéros. Une troisième urne, une quatrième, etc., diminueraient de plus en plus ces différences déjà insensibles dans la seconde urne.

De la probabilité des témoignages.

La plupart de nos jugemens étant fondés sur la probabilité des témoignages, il est bien important de la soumettre au calcul. La chose, il est vrai, devient souvent impossible, par la difficulté d'apprécier la véracité des témoins, et par le grand nombre de circonstances dont les faits qu'ils attestent, sont accompagnés. Mais on peut dans plusieurs cas, résoudre des problèmes qui ont beaucoup d'analogie avec les questions que l'on se propose, et dont les solutions peuvent être regardées comme des approximations propres à nous guider, et à nous garantir des erreurs et des dangers auxquels de mauvais raisonnemens nous exposent. Une approximation de ce genre, lorsqu'elle est bien dirigée, est toujours préférable aux raisonnemens les plus spécieux. Essayons donc de donner quelques règles générales pour y parvenir.

On a extrait un seul numéro, d'une urne qui en renferme mille. Un témoin de ce tirage, annonce que le n° 79 est sorti; on demande la probabilité de cette sortie. Supposons que l'expérience ait fait connaître que ce témoin trompe une fois sur dix, ensorte que la probabilité de son témoignage soit $\frac{9}{10}$. Ici, l'événement observé est le témoin attestant que le n° 79 est sorti. Cet événement peut résulter des deux hypothèses suivantes, savoir, que le témoin énonce la vérité, ou qu'il trompe. Suivant le principe que nous avons exposé sur la probabilité des causes, tirée des événemens observés, il faut d'abord déterminer *à priori*, la probabilité de l'événement dans chaque hypothèse. Dans la première, la probabilité que le témoin annoncera le n° 79, est la probabilité même de la sortie de ce numéro, c'est-à-dire $\frac{1}{1000}$. Il faut la multiplier par la probabilité $\frac{9}{10}$ de la véracité du témoin; on aura donc $\frac{9}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Si le témoin trompe, le n° 79 n'est pas sorti; et la probabilité de ce cas est $\frac{999}{1000}$. Mais pour annoncer la sortie de ce numéro, le témoin doit le choisir parmi les 999 numéros non sortis; et comme il est supposé n'avoir aucun motif de préférence pour les uns plutôt que pour les autres, la probabilité qu'il choisira le n° 79 est $\frac{1}{999}$; en multipliant donc cette probabilité, par la précédente, on aura $\frac{1}{1000}$ pour la probabilité que le témoin annoncera le n° 79, dans la seconde hypothèse. Il faut encore multiplier cette probabilité, par la probabilité $\frac{1}{10}$ de l'hypothèse elle-même; ce qui donne $\frac{1}{10000}$ pour la probabilité de l'événement, relative à cette hypothèse. Présentement, si l'on forme une fraction dont le numérateur soit la probabilité relative à la première hypothèse, et dont le dénominateur soit la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses ; on aura par le sixième principe, la probabilité de la première hypothèse, et cette probabilité sera $\frac{9}{10}$, c'est-à-dire la véracité même du témoin. C'est aussi la probabilité de la sortie du n° 79. La probabilité du mensonge du témoin et de la non-sortie de ce numéro est $\frac{1}{10}$.

Si le témoin voulant tromper, avait quelqu'intérêt à choisir le n° 79 parmi les numéros non-sortis ; s'il jugeait, par exemple, qu'ayant placé sur ce numéro une mise considérable, l'annonce de sa sortie augmentera son crédit; la probabilité qu'il choisira ce numéro, ne sera plus, comme auparavant, $\frac{1}{999}$; elle pourra être alors $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc., suivant l'intérêt qu'il aura d'annoncer sa sortie. En la supposant $\frac{1}{9}$, il faudra multiplier par cette fraction, la probabilité $\frac{999}{1000}$, pour avoir dans l'hypothèse du mensonge, la probabilité de l'événement observé, qu'il faut encore multiplier par $\frac{1}{10}$; ce qui donne $\frac{111}{10000}$ pour la probabilité de l'événement dans la seconde hypothèse. Alors la probabilité de la première hypothèse, ou de la sortie du n° 79, se réduit par la règle précédente, à $\frac{9}{120}$. Elle est donc très-affaiblie par la considération de l'intérêt que le témoin peut avoir à annoncer la sortie du n° 79. Le bon sens nous dicte que cet intérêt doit inspirer de la défiance. Mais le calcul en apprécie l'influence avec exactitude.

La probabilité *à priori* du numéro énoncé par le témoin, est l'unité divisée par le nombre des numéros de l'urne : elle se transforme en vertu du témoignage, dans la véracité même du témoin ; elle peut donc être affaiblie par ce témoignage. Si, par exemple, l'urne ne renferme que deux numéros, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la probabilité *à priori* de la sortie du n° 1 ; et si la véracité d'un témoin qui l'annonce est $\frac{4}{10}$; cette sortie en devient moins probable. En effet, il est visible que le témoin ayant alors plus de pente vers le mensonge que vers la vérité ; son témoignage doit diminuer la probabilité du fait attesté, toutes les fois que cette probabilité égale ou surpasse $\frac{1}{2}$. Mais s'il y a trois numéros dans l'urne, la probabilité *à priori* de la sortie du n° 1, est accrue par l'affirmation d'un témoin dont la véracité surpasse $\frac{1}{3}$.

Supposons maintenant que l'urne renferme 999 boules noires et une boule blanche, et qu'une boule en ayant été extraite, un témoin du tirage annonce que cette boule est blanche. La probabilité de l'événement observé, déterminée *à priori*, dans la première hypothèse, sera ici, comme dans la question précédente, égale à $\frac{9}{10000}$. Mais dans l'hypothèse où le témoin trompe, la boule blanche n'est pas sortie, et la probabilité de ce cas est $\frac{999}{1000}$. Il faut la multiplier par la probabilité $\frac{1}{10}$ du mensonge, ce qui donne $\frac{999}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé, relative à la seconde hypothèse. Cette probabilité n'était que $\frac{1}{10000}$ dans la question précédente : cette grande différence tient à ce qu'une boule noire étant sortie, le témoin voulant tromper, n'a point de choix à faire parmi les 999 boules non sorties, pour annoncer la sortie d'une boule blanche. Maintenant, si l'on forme deux fractions dont les numérateurs soient les probabilités relatives à chaque hypothèse, et dont le dénominateur commun soit la somme de ces probabilités; on aura $\frac{9}{1008}$ pour la probabilité de la première hypothèse, et de la sortie d'une boule blanche, et $\frac{999}{1008}$ pour la probabilité de la seconde hypothèse, et de la sortie d'une boule noire. Cette dernière probabilité est fort approchante de la certitude : elle en approcherait beaucoup plus encore, et deviendrait $\frac{999999}{1000008}$, si l'urne renfermait un million de boules dont une seule serait blanche; la sortie d'une boule blanche devenant alors beaucoup plus extraordinaire. On voit ainsi comment la probabilité du mensonge croît à mesure que le fait devient plus extraordinaire.

Nous avons supposé jusqu'ici que le témoin ne se trompait point; mais si l'on admet encore la chance de son erreur, le fait extraordinaire devient plus invraisemblable. Alors au lieu de deux hypothèses, on aura les quatre suivantes, savoir, celle du témoin ne trompant point et ne se trompant point; celle du témoin ne trompant point, et se trompant; l'hypothèse du témoin trompant et ne se trompant point; enfin celle du témoin trompant et se trompant. En déterminant *à priori* dans chacune de ces hypothèses, la probabilité de l'événement observé; on trouve par le sixième principe, la probabilité que le fait attesté est faux, égale à une fraction dont le numérateur est le nombre des boules noires de l'urne, multiplié par la somme des probabilités que le témoin ne trompe point et se trompe, ou qu'il trompe et ne se trompe point, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté de la somme des probabilités que le témoin ne trompe point et ne se trompe point, ou qu'il trompe et se trompe à-la-fois. On voit par là, que si le nombre des boules noires de l'urne est très-grand, ce qui rend extraordinaire, la sortie de la boule blanche; la probabilité que le fait attesté n'est pas, approche extrêmement de la certitude.

En étendant cette conséquence, à tous les faits extraordinaires; il en résulte que la probabilité de l'erreur ou du mensonge du témoin, devient d'autant plus grande, que le fait attesté est plus extraordinaire. Quelques auteurs ont avancé le contraire, en se fondant sur ce que la vue d'un fait extraordinaire étant parfaitement semblable à celle d'un fait ordinaire, les mêmes motifs doivent nous porter à croire également le témoin, soit qu'il affirme l'un ou qu'il affirme l'autre de ces faits. Le simple bon sens repousse une aussi étrange assertion: mais le calcul des probabilités, en confirmant l'indication du sens commun, apprécie de plus, l'invraisemblance des témoignages sur les faits extraordinaires.

On insiste, et l'on suppose deux témoins également dignes de foi, dont le premier atteste qu'il a vu mort, il y a quinze jours, un individu que le second témoin affirme avoir vu hier, plein de vie. L'un ou l'autre de ces faits n'offre rien d'invraisemblable. La résurrection de l'individu est une conséquence de leur ensemble; mais les témoignages ne portant point directement sur elle, ce qu'elle a d'extraordinaire ne doit point affaiblir la croyance qui leur est due. (*Encyclopédie, art. certitude*).

Cependant, si la conséquence qui résulte de l'ensemble des témoignages était impossible, l'un d'eux serait nécessairement faux; or une conséquence impossible est la limite des conséquences extraordinaires, comme l'erreur est la limite des invraisemblances; la valeur des témoignages, qui devient nulle dans le cas d'une conséquence impossible, doit donc être très-affaiblie dans celui d'une conséquence extraordinaire. C'est en effet, ce que le calcul des probabilités confirme.

Pour le faire voir, considérons deux urnes A et B dont la première contient un million de boules blanches, et la seconde, un million de boules noires. On tire de l'une de ces urnes, une boule que l'on remet dans l'autre urne dont on extrait ensuite une boule. Deux témoins, l'un du premier tirage, et l'autre du second, attestent que la boule qu'ils ont vu extraire, est blanche. Chaque témoignage pris isolément, n'a rien d'invraisemblable; et il est facile de voir que la probabilité du fait attesté, est la véracité même du témoin. Mais il suit de l'ensemble des témoignages, qu'une boule blanche a été extraite de l'urne A au premier tirage, et qu'ensuite, mise dans l'urne B, elle a reparu au second tirage; ce qui est fort extraordinaire; car cette urne renfermant alors une boule blanche sur un million de boules noires, la probabilité d'en extraire la boule blanche est $\frac{1}{1000001}$. Pour déterminer l'affaiblissement qui en résulte dans la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins; nous remarquerons que l'événement observé est ici l'affirmation par chacun d'eux, que la boule qu'il a vu extraire, est blanche. Représentons par $\frac{9}{10}$ la probabilité qu'il énonce la vérité, ce qui peut avoir lieu dans le cas présent, lorsque le témoin ne trompe point et ne se trompe point, et lorsqu'il trompe et se trompe à-la-fois. On peut former les quatre hypothèses suivantes.

1°. Le premier et le second témoin disent la vérité. Alors, une boule blanche a d'abord été extraite de l'urne A, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2}$, puisque la boule extraite au premier tirage a pu sortir également de l'une ou l'autre urne. Ensuite, la boule extraite mise dans l'urne B a reparu au second tirage: la probabilité de cet événement est $\frac{1}{1000001}$; la probabilité du fait énoncé est donc $\frac{1}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{9}{10}$ et $\frac{9}{10}$ que les témoins disent la vérité; on aura $\frac{81}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette première hypothèse.

2°. Le premier témoin dit la vérité, et le second ne la dit point, soit qu'il trompe et ne se trompe point, soit qu'il ne trompe point et se trompe. Alors une boule blanche est sortie de l'urne A au premier tirage, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2}$. Ensuite cette boule ayant été mise dans l'urne B, une boule noire en a été extraite: la probabilité de cette extraction est $\frac{1000000}{1000001}$; on a donc $\frac{1000000}{2000002}$ pour la probabilité de l'événement composé. En la multipliant par le produit des deux probabilités $\frac{9}{10}$ et $\frac{1}{10}$ que le premier témoin dit la vérité, et que le second ne la dit point; on aura $\frac{9000000}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse.

3°. Le premier témoin ne dit pas la vérité, et le second l'énonce. Alors une boule noire est sortie de l'urne B au premier tirage, et après avoir été mise dans l'urne A, une boule blanche a été extraite de cette urne. La probabilité du premier de ces événemens est $\frac{1}{2}$, et celle du second est $\frac{1000000}{1000001}$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{1000000}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{9}{10}$, que le premier témoin ne dit pas la vérité, et que le second l'énonce; on aura $\frac{9000000}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, relative à cette hypothèse.

4°. Enfin, aucun des témoins ne dit la vérité. Alors une boule noire a été extraite de l'urne B au premier tirage; ensuite ayant été mise dans l'urne A, elle a reparu au second tirage : la probabilité de cet événement composé est $\frac{1}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10}$ que chaque témoin ne dit pas la vérité; on aura $\frac{1}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Maintenant, pour avoir la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins, savoir, qu'une boule blanche a été extraite à chacun des tirages; il faut diviser la probabilité correspondante à la première hypothèse, par la somme des probabilités relatives aux quatre hypothèses; et alors on a pour cette probabilité $\frac{81}{18000082}$, fraction extrêmement petite.

Si les deux témoins affirmaient, le premier, qu'une boule blanche a été extraite de l'une des deux urnes A et B; le second, qu'une boule blanche a été pareillement extraite de l'une des deux urnes A′ et B′, en tout semblables aux premières; la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins serait le produit des probabilités de leurs témoignages ou $\frac{81}{100}$, c'est-à-dire, cent quatre-vingt mille fois au moins, plus grande que la précédente. On voit par là, combien dans le premier cas, la réapparition au second tirage, de la boule blanche extraite au premier, conséquence extraordinaire des deux témoignages, en affaiblit la valeur.

Nous n'ajouterions point foi au témoignage d'un homme qui nous attesterait qu'en projetant cent dés en l'air, ils sont tous retombés sur la même face. Si nous avions été nous-mêmes spectateurs de cet événement, nous n'en croirions nos propres yeux, qu'après en avoir scrupuleusement examiné toutes les circonstances, pour être bien sûrs qu'il n'y a point eu de prestige. Mais après cet examen, nous ne balancerions point à l'admettre, malgré son extrême invraisemblance; et personne ne serait tenté pour l'expliquer, de recourir à une illusion produite par un renversement des lois de la vision. Nous devons en conclure que la probabilité de la constance des lois de la nature, est pour nous, supérieure à celle que l'événement dont il s'agit, ne doit point avoir lieu; probabilité supérieure elle-même à celle de la plupart des faits historiques que nous regardons comme incontestables. On peut juger par là, du poids immense de témoignages nécessaires pour admettre une suspension des lois naturelles; et combien il serait abusif d'appliquer à ce cas, les règles ordinaires de la critique. Tous ceux qui sans offrir cette immensité de témoignages, étayent ce qu'ils avancent, de récits d'événemens contraires à ces lois, affaiblissent plutôt qu'ils n'augmentent la croyance qu'ils cherchent à inspirer; car alors ces récits rendent très-probable, l'erreur ou le mensonge de leurs auteurs. Mais ce qui diminue la croyance des hommes éclairés, accroît souvent celle du vulgaire; et nous en avons donné précédemment la raison.

Il y a des choses tellement extraordinaires, que rien ne peut en balancer l'invraisemblance. Mais celle-ci, par l'effet d'une opinion dominante, peut être affaiblie au point de paraître inférieure à la probabilité des témoignages; et quand cette opinion vient à changer, un récit absurde admis unanimement dans le siècle qui lui a donné naissance, n'offre aux siècles suivans, qu'une nouvelle preuve de l'extrême influence de l'opinion générale, sur les meilleurs esprits. Deux grands hommes du siècle de Louis XIV, Racine et Pascal, en sont des exemples frappans. Il est affligeant de voir avec quelle complaisance, Racine, ce peintre admirable du cœur humain, et le poëte le plus parfait qui fut jamais, rapporte comme miraculeuse, la guérison de la jeune Perrier, nièce de Pascal, et pensionnaire à l'abbaye de Port-Royal : il est pénible de lire les raisonnemens par lesquels Pascal cherche à prouver que ce miracle devenait nécessaire à la religion, pour justifier la doctrine des religieuses de cette abbaye, alors persécutées par les Jésuites. La jeune Perrier était depuis trois ans et demi, affligée d'une fistule lacrymale : elle toucha de son œil malade, une relique que l'on prétendait être une des épines de la couronne du Sauveur, et elle se crut à l'instant, guérie. Quelques jours après, les médecins et les chirurgiens constatèrent la guérison, et ils jugèrent que la nature et les remèdes n'y avaient eu aucune part. Cet événement arrivé en 1656, ayant fait un grand bruit, « tout Paris se porta, dit » Racine, à Port-Royal. La foule croissait de jour en jour, et Dieu » même semblait prendre plaisir à autoriser la dévotion des peuples, » par la quantité de miracles qui se firent en cette église. » A cette époque, les miracles et les sortiléges ne paraissaient pas encore invraisemblables, et l'on n'hésitait point à leur attribuer les singularités de la nature, que l'on ne pouvait autrement expliquer.

Cette manière d'envisager les effets extraordinaires se retrouve dans les ouvrages les plus remarquables du siècle de Louis XIV, dans l'Essai même sur l'entendement humain, du sage Locke qui dit en parlant des degrés d'assentiment : « quoique la commune expé» rience et le cours ordinaire des choses aient avec raison, une » grande influence sur l'esprit des hommes pour les porter à » donner ou à refuser leur consentement à une chose qui leur » est proposée à croire; il y a pourtant un cas où ce qu'il y a » d'étrange dans un fait, n'affaiblit point l'assentiment que nous » devons donner au témoignage sincère sur lequel il est fondé. » Lorsque des événemens surnaturels sont conformes aux fins que » se propose celui qui a le pouvoir de changer le cours de la na» ture, ils peuvent être d'autant plus propres à trouver créance » dans nos esprits, qu'ils sont plus au-dessus des observations ordi» naires, ou même qu'ils y sont plus opposés. » Les vrais principes de la probabilité des témoignages, ayant été ainsi méconnus des philosophes auxquels la raison est principalement redevable de ses progrès; j'ai cru devoir exposer avec étendue, les résultats du calcul sur cet important objet.

Ici se présente naturellement la discussion d'un argument fameux de Pascal, que Craig, mathématicien anglais, a reproduit sous une forme géométrique. Des témoins attestent qu'ils tiennent de la Divinité même, qu'en se conformant à telle chose, on jouira, non pas d'une, ou de deux, mais d'une infinité de vies heureuses. Quelque faible que soit la probabilité des témoignages, pourvu qu'elle ne soit pas infiniment petite, il est clair que l'avantage de ceux qui se conforment à la chose prescrite, est infini; puisqu'il est le produit de cette probabilité, par un bien infini; on ne doit donc point balancer à se procurer cet avantage.

Cet argument est fondé sur le nombre infini de vies heureuses promises au nom de la Divinité, par les témoins; il faudrait donc faire ce qu'ils prescrivent, précisément parce qu'ils exagèrent leurs promesses au-delà de toutes limites, conséquence qui répugne au bon sens. Aussi le calcul nous fait-il voir que cette exagération même affaiblit la probabilité de leur témoignage, au point de la rendre infiniment petite, ou nulle. En effet, ce cas revient à celui d'un témoin qui annoncerait la sortie du numéro le plus élevé, d'une urne remplie d'un grand nombre de numéros dont un seul a été extrait, et qui aurait un grand intérêt à annoncer la sortie de ce numéro. On a vu précédemment combien cet intérêt affaiblit son témoignage. En n'évaluant qu'à $\frac{1}{2}$ la probabilité que si le témoin trompe, il choisira le plus grand numéro; le calcul donne la probabilité de son annonce, égale à une fraction dont le numérateur est le double de la probabilité de son témoignage, considérée *à priori* ou indépendamment de l'annonce, et dont le dénominateur est le produit du nombre des numéros de l'urne, par l'unité diminuée de cette dernière probabilité. Pour assimiler ce cas, à celui de l'argument de Pascal; il suffit de représenter par les numéros de l'urne, tous les nombres possibles de vies heureuses, ce qui rend le nombre de ces numéros, infini; et d'observer que si les témoins trompent, ils ont le plus grand intérêt pour accréditer leur mensonge, à promettre une éternité de bonheur. L'expression précédente de la probabilité de leur témoignage, devient alors infiniment petite. En la multipliant par le nombre infini de vies heureuses promises, l'infini disparaît du produit qui exprime l'avantage résultant de cette promesse ; ce qui détruit l'argument de Pascal.

Considérons présentement la probabilité de l'ensemble de plusieurs témoignages sur un fait déterminé. Pour fixer les idées, supposons que ce fait soit la sortie d'un numéro d'une urne qui en renferme cent, et dont on a extrait un seul numéro. Deux témoins de ce tirage, annoncent que le nº 1 est sorti; et l'on demande la probabilité résultante de l'ensemble de ces témoignages. On peut former ces deux hypothèses : les témoins disent la vérité; les témoins trompent. Dans la première hypothèse, le nº 1 est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{100}$. Il faut la multiplier par le produit des véracités des témoins, véracités que nous supposerons être $\frac{9}{10}$ et $\frac{7}{10}$; on aura donc $\frac{63}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Dans la seconde, le nº 1 n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{99}{100}$. Mais l'accord des témoins exige alors qu'en cherchant à tromper, ils choisissent tous deux le numéro 1, sur les 99 numéros non sortis; la probabilité de ce choix est le produit de la fraction $\frac{1}{99}$ par elle-même ; il faut ensuite multiplier ces deux probabilités ensemble, et par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ que les témoins trompent ; on aura ainsi $\frac{1}{330000}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse. Maintenant on aura la probabilité du fait attesté ou de la sortie du nº 1, en divisant la probabilité relative à la première hypothèse, par la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses; cette probabilité sera donc $\frac{2079}{2080}$; et la probabilité de la non sortie de ce numéro et du mensonge des témoins sera $\frac{1}{2080}$.

Si l'urne ne renfermait que les numéros 1 et 2; on trouverait de la même manière, $\frac{21}{22}$ pour la probabilité de la sortie du nº 1, et par conséquent $\frac{1}{22}$ pour la probabilité du mensonge des témoins, probabilité quatre-vingt-quatorze fois au moins, plus grande que la précédente. On voit par là, combien la probabilité du mensonge des témoins diminue, quand le fait qu'ils attestent est moins probable en lui-même. En effet, on conçoit qu'alors l'accord des témoins, lorsqu'ils trompent, devient plus difficile, à moins qu'ils ne s'entendent, ce que nous supposons ici ne pas avoir lieu.

Dans le cas précédent où l'urne ne renfermant que deux numéros, la probabilité *à priori* du fait attesté est $\frac{1}{2}$; la probabilité résultante des témoignages, est le produit des véracités des témoins, divisé par ce produit ajouté à celui des probabilités respectives de leur mensonge.

Il nous reste à considérer l'influence du temps, sur la probabilité des faits transmis par une chaîne traditionnelle de témoins. Il est clair que cette probabilité doit diminuer à mesure que la chaîne se prolonge. Si le fait n'a aucune probabilité par lui-même; celle qu'il acquiert par les témoignages, décroît suivant le produit continu de la véracité des témoins. Si le fait a par lui-même, une probabilité; si, par exemple, ce fait est la sortie du n° 1 d'une urne qui en renferme un nombre fini, et dont il est certain qu'on a extrait un seul numéro; ce que la chaîne traditionnelle ajoute à cette probabilité, décroît suivant un produit continu, dont le premier facteur est le rapport du nombre des numéros de l'urne moins un, à ce même nombre; et dont chaque autre facteur est la véracité de chaque témoin, diminuée du rapport de la probabilité de son mensonge, au nombre des numéros de l'urne moins un; ensorte que la limite de la probabilité du fait, est celle de ce fait considéré *à priori* ou indépendamment des témoignages, probabilité égale à l'unité divisée par le nombre des numéros de l'urne.

L'action du temps affaiblit donc sans cesse, la probabilité des faits historiques, comme elle altère les monumens les plus durables. On peut, à la vérité, la ralentir, en multipliant et conservant les témoignages et les monumens qui les étayent. L'imprimerie offre pour cet objet, un grand moyen malheureusement inconnu des anciens. Malgré les avantages infinis qu'elle présente; les révolutions physiques et morales dont la surface de ce globe sera toujours agitée, finiront, en se joignant à l'effet inévitable du temps, par rendre douteux après des milliers d'années, les faits historiques aujourd'hui les plus certains.

Craig a essayé de soumettre au calcul, l'affaiblissement graduel des preuves de la religion chrétienne : en supposant que le monde doit finir à l'époque où elle cessera d'être probable, il trouve que cela doit arriver, 1454 ans après le moment où il écrit. Mais son analyse est aussi fautive, que son hypothèse sur la durée du monde est bizarre.

Les jugemens des tribunaux peuvent être assimilés aux témoignages, en considérant chaque juge, comme un témoin qui atteste la vérité de son opinion. Supposons le tribunal composé de trois juges. Si le jugement qu'ils prononcent, est rendu à l'unanimité, et si chacun d'eux mérite la même confiance; la probabilité de ce jugement sera la troisième puissance de la véridicité des juges, divisée par cette puissance ajoutée à la troisième puissance de leur faillibilité. Si le jugement n'est rendu qu'à la pluralité; sa probabilité sera cette véridicité elle-même, que l'on peut déterminer par l'expérience, en observant sur un très-grand nombre de jugemens, combien ont été rendus à l'unanimité. Si, par exemple, le rapport du second au premier de ces nombres, est celui de 7 à 16; on trouve par une analyse dont nous exposerons ci-après les principes, que la véridicité de chaque juge est $\frac{3}{4}$, et que la probabilité d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité est $\frac{27}{28}$.

L'analyse confirme encore, ce que dicte le simple bon sens, savoir, que la bonté des jugemens est d'autant plus probable, que les juges sont plus nombreux et plus éclairés; il importe donc que les tribunaux d'appel remplissent ces deux conditions. Les tribunaux de première instance, plus rapprochés des justiciables, leur offrent l'avantage d'un premier jugement déjà probable, et dont souvent ils se contentent, soit en transigeant, soit en se désistant de leurs prétentions. Mais si l'importance et l'incertitude de l'objet en litige, déterminent un plaideur à recourir au tribunal d'appel; il doit trouver dans une plus grande probabilité d'obtenir un jugement équitable, plus de sûreté pour sa fortune, et la compensation des embarras et des frais qu'une nouvelle procédure entraîne. C'est ce qui n'avait point lieu dans l'institution de l'appel réciproque des tribunaux de département, institution par là très-préjudiciable aux intérêts des citoyens.

Des choix et des décisions des assemblées.

La probabilité des décisions d'une assemblée dépend de la pluralité des voix, des lumières et de l'impartialité des membres qui la composent. Tant de passions et d'intérêts particuliers y mêlent si souvent leur influence, qu'il est impossible de soumettre au calcul, cette probabilité. Il y a cependant quelques résultats généraux dictés par le simple bon sens, et que le calcul confirme. Si, par exemple, l'assemblée est très-peu éclairée sur l'objet soumis à sa décision; si cet objet exige des considérations délicates, ou si la vérité sur ce point est contraire à des préjugés reçus, ensorte qu'il y ait plus d'un contre un à parier que chaque votant s'en écartera; alors la décision de la majorité sera probablement mauvaise, et la crainte à cet égard sera d'autant plus juste, que l'assemblée sera plus nombreuse. Il importe donc à la chose publique, que les assemblées n'aient à prononcer que sur les objets à la portée du plus grand nombre : il lui importe que l'instruction soit généralement répandue, et que de bons ouvrages fondés sur la raison et l'expérience, éclairent ceux qui sont appelés à décider du sort de leurs semblables ou à les gouverner, et les prémunissent d'avance contre les faux aperçus et les préventions de l'ignorance. Les savans ont de fréquentes occasions de remarquer que les premiers aperçus trompent souvent, et que le vrai n'est pas toujours vraisemblable.

Il est difficile de connaître et même de définir le vœu d'une assemblée, au milieu de la variété des opinions de ses membres. Essayons de donner sur cela, quelques règles, en considérant les deux cas les plus ordinaires, l'élection entre plusieurs candidats, et celle entre plusieurs propositions relatives au même objet.

Lorsqu'une assemblée doit choisir entre plusieurs candidats qui se présentent pour une ou plusieurs places du même genre; ce qui paraît le plus simple est de faire écrire à chaque votant sur un billet, les noms de tous les candidats, suivant l'ordre du mérite qu'il leur attribue. En supposant qu'il les classe de bonne foi, l'inspection de ces billets fera connaître les résultats des élections, de quelque manière que les candidats soient comparés entre eux; ensorte que de nouvelles élections ne peuvent apprendre rien de plus à cet égard. Il s'agit présentement d'en conclure l'ordre de préférence, que les billets établissent entre les candidats. Imaginons que l'on donne à chaque électeur, une urne qui contienne une infinité de boules au moyen desquelles il puisse nuancer tous les degrés de mérite des candidats : concevons encore qu'il tire de son urne, un nombre de boules proportionnel au mérite de chaque candidat, et supposons ce nombre écrit sur un billet, à côté du nom du candidat. Il est clair qu'en faisant une somme de tous les nombres relatifs à chaque candidat, sur chaque billet, celui de tous les candidats qui aura la plus grande somme, sera le candidat que l'assemblée préfère; et qu'en général, l'ordre de préférence des candidats, sera celui des sommes relatives à chacun d'eux. Mais les billets ne marquent point le nombre des boules que chaque électeur donne aux candidats : ils indiquent seulement que le premier en a plus que le second, le second plus que le troisième, et ainsi de suite. En supposant donc au premier, sur un billet donné, un nombre quelconque de boules, toutes les combinaisons des nombres inférieurs, qui remplissent les conditions précédentes, sont également admissibles; et l'on aura le nombre de boules, relatif à chaque candidat, en faisant une somme de tous les nombres que chaque combinaison lui donne, et en la divisant par le nombre entier des combinaisons. Si ces nombres sont très-considérables, comme on doit le supposer pour qu'ils puissent exprimer toutes les nuances du mérite; une analyse fort simple fait voir que les nombres qu'il faut écrire sur chaque billet à côté du dernier nom, de l'avant-dernier, etc., peuvent être représentés par la progression arithmétique 1, 2, 3, etc. En écrivant donc ainsi sur chaque billet, les termes de cette progression, et ajoutant les termes relatifs à chaque candidat sur ces billets; les diverses sommes indiqueront par leur grandeur, l'ordre de préférence qui doit être établi entre les candidats. Tel est le mode d'élection, qu'indique la Théorie des Probabilités. Sans doute, il serait le meilleur; si chaque électeur inscrivait sur son billet, les noms des candidats, dans l'ordre du mérite qu'il leur attribue. Mais les intérêts particuliers et beaucoup de considérations étrangères au mérite, doivent troubler cet ordre, et faire placer quelquefois au dernier rang, le candidat le plus redoutable à celui que l'on préfère; ce qui donne trop d'avantage aux candidats d'un médiocre mérite. Aussi l'expérience a-t-elle fait abandonner ce mode d'élection, dans les établissemens qui l'avaient adopté.

L'élection à la majorité absolue des suffrages réunit à la certitude de n'admettre aucun des candidats que cette majorité rejetterait, l'avantage d'exprimer le plus souvent, le vœu de l'assemblée. Elle coïncide toujours avec le mode précédent, lorsqu'il n'y a que deux candidats. A la vérité, elle expose à l'inconvénient de rendre les élections interminables. Mais l'expérience a fait voir que cet inconvénient est nul, et que le desir général de mettre fin aux élections, réunit bientôt la majorité des suffrages sur un des candidats.

Le choix entre plusieurs propositions relatives au même objet, semble devoir être assujéti aux mêmes règles, que l'élection entre plusieurs candidats. Mais il existe entre ces deux cas, cette différence, savoir, que le mérite d'un candidat n'exclut point celui de ses concurrens; au lieu que si les propositions entre lesquelles il faut choisir, sont contraires, la vérité de l'une exclut la vérité des autres. Voici comme on doit alors envisager la question.

Donnons à chaque votant, une urne qui renferme un nombre infini de boules; et supposons qu'il les distribue sur les diverses propositions, en raison des probabilités respectives qu'il leur attribue. Il est clair que le nombre total des boules, exprimant la certitude, et le votant étant par l'hypothèse, assuré que l'une des propositions doit être vraie; il répartira ce nombre en entier, sur les propositions. Le problème se réduit donc à déterminer les combinaisons dans lesquelles les boules seront réparties, de manière qu'il y en ait plus sur la première proposition du billet, que sur la seconde; plus sur la seconde que sur la troisième, etc.; à faire les sommes de tous les nombres de boules, relatifs à chaque proposition dans ces diverses combinaisons; et à diviser cette somme, par le nombre des combinaisons : les quotiens seront les nombres de boules, que l'on doit attribuer aux propositions sur un billet quelconque. On trouve par l'analyse, qu'en partant de la dernière proposition, pour remonter à la première; ces quotiens sont entre eux, comme les quantités suivantes : 1° l'unité divisée par le nombre des propositions; 2° la quantité précédente augmentée de l'unité divisée par le nombre des propositions moins une; 3° cette seconde quantité augmentée de l'unité divisée par le nombre des propositions moins deux; et ainsi du reste. On écrira donc sur chaque billet, ces quantités à côté des propositions correspondantes; et en ajoutant les quantités relatives à chaque proposition, sur les divers billets ; les sommes indiqueront par leur grandeur, l'ordre de préférence que l'assemblée donne à ces propositions.

Des Lois de la Probabilité, qui résultent de la multiplication indéfinie des événemens.

Au milieu des causes variables et inconnues que nous comprenons sous le nom de *hasard*, et qui rendent incertaine et irrégulière, la marche des événemens; on voit naître à mesure qu'ils se multiplient, une régularité frappante qui semble tenir à un dessein, et que l'on a considérée comme une preuve de la providence qui gouverne le monde. Mais en y réfléchissant, on reconnaît bientôt que cette régularité n'est que le développement des possibilités respectives des événemens simples, qui doivent se présenter plus souvent, lorsqu'ils sont plus probables. Concevons, par exemple, une urne qui renferme des boules blanches et des boules noires; et supposons qu'à chaque fois que l'on en tire une boule, on la remette dans l'urne pour procéder à un nouveau tirage. Le rapport du nombre des boules blanches extraites, au nombre des boules noires extraites, sera le plus souvent très-irrégulier dans les premiers tirages; mais les causes variables de cette irrégularité, produisent des effets alternativement favorables et contraires à la marche régulière des événemens, et qui se détruisant mutuellement dans l'ensemble d'un grand nombre de tirages, laissent de plus en plus apercevoir le rapport des boules blanches aux boules noires contenues dans l'urne, ou les possibilités respectives d'en extraire une boule blanche et une boule noire à chaque tirage. De là résulte le théorème suivant.

La probabilité que le rapport du nombre des boules blanches extraites, au nombre total des boules sorties, ne s'écarte pas de la possibilité d'extraire une boule blanche à chaque tirage, au-delà d'un intervalle donné, approche indéfiniment de la certitude, par la multiplication indéfinie des événemens, quelque petit que l'on suppose cet intervalle.

Ce théorème indiqué par le bon sens, était difficile à démontrer par l'analyse. Aussi l'illustre géomètre Jacques Bernoulli qui s'en est occupé le premier, attachait-il une grande importance à la démonstration qu'il en a donnée. Le calcul des fonctions génératrices, appliqué à cet objet, non-seulement démontre avec facilité ce théorème; mais de plus il donne la probabilité que le rapport des événemens observés, ne s'écarte que dans certaines limites, du vrai rapport de leurs possibilités respectives.

On peut tirer du théorème précédent, cette conséquence qui doit être regardée comme une loi générale, savoir, que les rapports des effets de la nature, sont à fort peu près constans, quand ces effets sont considérés en grand nombre. Ainsi, malgré la variété des années, la somme des productions pendant un nombre d'années, considérable, est sensiblement la même; ensorte que l'homme, par une utile prévoyance, peut se mettre à l'abri de l'irrégularité des saisons, en répandant également sur tous les temps, les biens que la nature distribue d'une manière inégale. Je n'excepte pas de la loi précédente, les effets dus aux causes morales. Le rapport des naissances annuelles à la population, et celui des mariages aux naissances, n'éprouvent que de très-petites variations : à Paris, le nombre des naissances annuelles a toujours été le même à peu près; et j'ai ouï dire qu'à la poste, dans les temps ordinaires, le nombre des lettres mises au rebut par les défauts des adresses, change peu chaque année.

Il suit encore de ce théorème, que dans une série d'événemens, indéfiniment prolongée, l'action des causes régulières et constantes doit l'emporter à la longue, sur celle des causes irrégulières. C'est ce qui rend les gains des loteries, aussi certains que les produits de l'agriculture; les chances qu'elles se réservent, leur assurant un bénéfice dans l'ensemble d'un grand nombre de mises. Ainsi des chances favorables et nombreuses étant constamment attachées à l'observation des principes éternels de raison, de justice et d'humanité, qui fondent et maintiennent les sociétés; il y a un grand avantage à se conformer à ces principes, et de graves inconvéniens à s'en écarter. Que l'on consulte les histoires et sa propre expérience; on y verra tous les faits venir à l'appui de ce résultat du calcul. Considérez les avantages que la bonne-foi a procurés aux gouvernemens qui en ont fait la base de leur conduite, et comme ils ont été dédommagés des sacrifices qu'a pu leur coûter une scrupuleuse exactitude à tenir leurs promesses : quel immense crédit au dedans! quelle prépondérance au dehors! Voyez au contraire, dans quel abîme de malheurs, les peuples ont été souvent précipités par l'ambition et la perfidie de leurs chefs. Toutes les fois qu'une grande puissance enivrée de l'amour des conquêtes, aspire à la domination universelle; le sentiment de l'indépendance produit entre les nations injustement attaquées, une coalition dont elle devient presque toujours la victime. Pareillement, au milieu des causes variables qui étendent ou resserrent les divers états; les limites naturelles, en agissant comme causes constantes, doivent finir par prévaloir. Il importe donc à la stabilité comme au bonheur des empires, de ne pas les étendre au-delà de ces limites dans lesquelles ils sont ramenés sans cesse par l'action de ces causes; ainsi que les eaux des mers, soulevées par de violentes tempêtes, retombent dans leurs bassins par la pesanteur. C'est encore un résultat du calcul des probabilités, confirmé par de nombreuses et funestes expériences. L'histoire traitée sous le point de vue de l'influence des causes constantes, unirait à l'intérêt de la curiosité, celui d'offrir aux hommes, les plus utiles leçons. Quelquefois on attribue les effets inévitables de ces causes, à des circonstances accidentelles qui n'ont fait que développer leur action. Il est, par exemple, contre la nature des choses, qu'un peuple soit à jamais gouverné par un autre, qu'une vaste mer ou une grande distance en sépare. On peut affirmer qu'à la longue, cette cause constante se joignant sans cesse aux causes variables qui agissent dans le même sens, et que la suite des temps développe, finira par en trouver d'assez fortes pour rendre au peuple soumis, son indépendance naturelle, ou pour le réunir à un état puissant qui lui soit contigu.

Dans un grand nombre de cas, et ce sont les plus importans de l'analyse des hasards, les possibilités des événemens simples sont inconnues, et nous sommes réduits à chercher dans les événemens passés, des indices qui puissent nous guider dans nos conjectures sur les causes dont ils dépendent. En appliquant l'analyse des fonctions génératrices, au principe exposé ci-devant, sur la probabilité des causes, tirée des événemens observés; on est conduit au théorème suivant.

Lorsqu'un événement simple ou composé de plusieurs événemens simples, tel qu'une partie de jeu, a été répété un grand nombre de fois; les possibilités des événemens simples, qui rendent ce que l'on a observé, le plus probable, sont celles que l'observation indique avec le plus de vraisemblance : à mesure que l'événement observé se répète, cette vraisemblance augmente et finirait par se confondre avec la certitude, si le nombre des répétitions devenait infini.

Il y a ici deux sortes d'approximations; l'une d'elles est relative aux limites prises de part et d'autre, des possibilités qui donnent au passé, le plus de vraisemblance : l'autre approximation se rapporte à la probabilité que ces possibilités tombent dans ces limites. La répétition de l'événement composé accroît de plus en plus cette probabilité, les limites restant les mêmes : elle resserre de plus en plus l'intervalle de ces limites, la probabilité restant la même : dans l'infini, cet intervalle devient nul, et la probabilité se change en certitude.

Si l'on applique ce théorème, au rapport des naissances des garçons à celles des filles, observé dans les diverses parties de l'Europe; on trouve que ce rapport partout à peu près égal à celui de 22 à 21, indique avec une extrême probabilité, une plus grande facilité dans les naissances des garçons. En considérant ensuite qu'il est le même à Naples qu'à Pétersbourg, on verra qu'à cet égard, l'influence du climat est insensible. On peut donc soupçonner contre l'opinion commune, que cette supériorité des naissances masculines subsiste dans l'orient même. J'avais en conséquence invité les savans français envoyés en Égypte, à s'occuper de cette question intéressante; mais la difficulté d'obtenir des renseignemens précis sur les naissances, ne leur a pas permis de la résoudre.

Le rapport des naissances des garçons à celles des filles, différant très-peu de l'unité; des nombres même assez grands de naissances observées dans un lieu, pourraient offrir à cet égard, un résultat contraire à la loi générale, sans que l'on fût en droit d'en conclure que cette loi n'y existe pas. Pour tirer cette conséquence, il faut employer de très-grands nombres, et s'assurer qu'elle est indiquée avec une grande probabilité. Buffon cite, par exemple, dans son Arithmétique politique, plusieurs communes de Bourgogne, où les naissances des filles ont surpassé celles des garçons. Parmi ces communes, celle de Carcelle-le-Grignon présente sur 2009 naissances pendant cinq années, 1026 filles et 983 garçons. Quoique ces nombres soient considérables, cependant ils n'indiquent une plus grande possibilité dans les naissances des filles, qu'avec la probabilité $\frac{9}{10}$; et cette probabilité plus petite que celle de ne pas amener *croix* quatre fois de suite, au jeu de *croix* et *pile*, n'est pas suffisante pour rechercher la cause de cette anomalie qui, selon toute vraisemblance, disparaîtrait, si l'on suivait pendant un siècle, les naissances dans cette commune.

Les registres des naissances, que l'on tient avec soin pour assurer l'état des citoyens, peuvent servir à déterminer la population d'un grand empire, sans recourir au dénombrement de ses habitans, opération pénible et difficile à faire avec exactitude. Mais il faut pour cela, connaître le rapport de la population aux naissances annuelles. Le moyen d'y parvenir, le plus précis, consiste 1° à choisir dans l'empire, des départemens distribués d'une manière à peu près égale sur toute sa surface, afin de rendre le résultat général, indépendant des circonstances locales; 2° à dénombrer avec soin, pour une époque donnée, les habitans de plusieurs communes dans chacun de ces départemens; 3° à déterminer par le relevé des naissances durant plusieurs années qui précèdent et suivent cette époque, le nombre moyen correspondant des naissances annuelles. Ce nombre divisé par celui des habitans, donnera le rapport des naissances annuelles à la population, d'une manière d'autant plus sûre, que le dénombrement sera plus considérable. Le gouvernement convaincu de l'utilité d'un semblable dénombrement, a bien voulu en ordonner l'exécution, à ma prière. Dans trente départemens répandus également sur toute la France, on a fait choix des communes qui pouvaient fournir les renseignemens les plus précis. Leurs dénombremens ont donné 2037615 individus pour la somme totale de leurs habitans au

23 septembre 1802. Le relevé des naissances dans ces communes pendant les années 1800, 1801 et 1802, a donné

Naissances.	Mariages.	Décès.
110312 garçons. 105287 filles.	46037.	103659 hommes. 99443 femmes.

Le rapport de la population aux naissances annuelles est donc $28\frac{352845}{1000000}$; il est plus grand qu'on ne l'avait estimé jusqu'ici. En multipliant par ce rapport, le nombre des naissances annuelles en France, on aura la population de ce royaume. Mais quelle est la probabilité que la population ainsi déterminée, ne s'écartera pas de la véritable, au-delà d'une limite donnée? En résolvant ce problème, et appliquant à sa solution, les données précédentes, j'ai trouvé que le nombre des naissances annuelles en France, étant supposé d'un million, ce qui porte sa population à 28352845 habitans; il y a près de trois cent mille à parier contre un, que l'erreur de ce résultat n'est pas d'un demi-million.

Le rapport des naissances des garçons à celles des filles, qu'offre le relevé précédent, est celui de 22 à 21; et les mariages sont aux naissances, comme trois est à quatorze.

A Paris, les baptêmes des enfans des deux sexes s'écartent un peu du rapport de 22 à 21. Depuis 1745, époque à laquelle on a commencé à distinguer les sexes sur les registres des naissances, jusqu'à la fin de 1784, on a baptisé dans cette capitale, 393386 garçons et 377555 filles. Le rapport de ces deux nombres est à peu près celui de 25 à 24; il paraît donc qu'à Paris, une cause particulière rapproche de l'égalité, les baptêmes des deux sexes. Si l'on applique à cet objet, le calcul des probabilités; on trouve qu'il y a 238 à parier contre un, en faveur de l'existence de cette cause, ce qui suffit pour en autoriser la recherche. En y réfléchissant, il m'a paru que la différence observée tient à ce que les parens de la campagne et des provinces, trouvant quelqu'avantage à retenir près d'eux les garçons, en avaient envoyé à l'hospice des Enfans-Trouvés de Paris, moins relativement aux filles, que suivant le rapport des naissances des deux sexes. C'est ce que le relevé des registres de cet hospice m'a prouvé. Depuis le commencement de 1745 jusqu'à la fin de 1809, il y est entré 163499 garçons, et 159405 filles. Le premier de ces nombres n'excède que d'un trente-huitième, le second qu'il aurait dû surpasser au moins d'un vingt-quatrième. Ce qui confirme l'existence de la cause assignée, c'est qu'en n'ayant point égard aux enfans trouvés, le rapport des naissances des garçons à celles des filles, est à Paris, comme dans le reste de la France, celui de 22 à 21.

La constance de la supériorité des naissances des garçons sur celles des filles, à Paris et à Londres, depuis qu'on les observe, a paru à quelques savans, être une preuve de la providence sans laquelle ils ont pensé que les causes irrégulières qui troublent sans cesse la marche des événemens, aurait dû plusieurs fois, rendre les naissances annuelles des filles, supérieures à celles des garçons.

Mais cette preuve est un nouvel exemple de l'abus que l'on a fait si souvent des causes finales, qui disparaissent toujours par un examen approfondi des questions, lorsqu'on a les données nécessaires pour les résoudre. La constance dont il s'agit, est un résultat des causes régulières qui donnent la supériorité aux naissances des garçons, et qui l'emportent sur les anomalies dues au hasard, lorsque le nombre des naissances annuelles est considérable. La recherche de la probabilité que cette constance se maintiendra pendant un long espace de temps, appartient à cette branche de l'analyse des hasards qui remonte des événemens passés, à la probabilité des événemens futurs; et il en résulte qu'en partant des naissances observées depuis 1745 jusqu'en 1784, il y a près de quatre à parier contre un, qu'à Paris les naissances annuelles des garçons surpasseront constamment pendant un siècle, les naissances des filles; il n'y a donc aucune raison de s'étonner que cela ait eu lieu pendant un demi-siècle.

Donnons encore un exemple du développement des rapports constans que les événemens présentent, à mesure qu'ils se multiplient. Concevons une série d'urnes disposées circulairement, et renfermant, chacune, un très-grand nombre de boules blanches et noires : les rapports des boules blanches aux noires, dans ces urnes, pouvant être très-différens à l'origine, et tels, par exemple, que l'une de ces urnes ne renferme que des boules blanches, tandis qu"une autre ne contient que des boules noires. Si l'on tire une boule de la première urne, pour la mettre dans la seconde; qu'après avoir agité cette seconde urne, afin de bien mêler la boule ajoutée, avec les autres, on en tire une boule pour la mettre dans la troisième urne, et ainsi de suite jusqu'à la dernière urne dont on extrait une boule, pour la mettre dans la première, et que l'on recommence indéfiniment cette série de tirages; l'analyse des probabilités nous montre que les rapports des boules blanches aux noires, dans ces urnes, finiront par être les mêmes et égaux au rapport de la somme de toutes les boules blanches, à la somme de toutes les boules noires contenues dans les urnes. Ainsi par ce mode régulier de changement, l'irrégularité primitive de ces rapports, disparaît à la longue, pour faire place à l'ordre le plus simple. Maintenant si entre ces urnes, on en intercale de nouvelles dans lesquelles le rapport de la somme des boules blanches, à la somme des boules noires qu'elles contiennent, diffère du précédent; en continuant indéfiniment, sur l'ensemble de ces urnes, les extractions que nous venons d'indiquer; l'ordre simple établi dans les anciennes urnes sera d'abord troublé, et les rapports des boules blanches aux boules noires deviendront irréguliers; mais peu à peu, cette irrégularité disparaîtra pour faire place à un nouvel ordre, qui sera enfin celui de l'égalité des rapports des boules blanches aux boules noires contenues dans les urnes. On peut étendre ces résultats, à toutes les combinaisons de la nature, dans lesquelles les forces constantes qui animent les êtres dont elles sont formées, établissent des modes réguliers d'action et de changement.

Les phénomènes qui semblent le plus dépendre du hasard, présentent donc en se multipliant, une tendance à se rapprocher sans cesse, de rapports fixes; de manière que si l'on conçoit de part et d'autre de chacun de ces rapports, un intervalle aussi petit que l'on voudra, la probabilité que le résultat moyen des observations tombe dans cet intervalle, finira par ne différer de la certitude, que d'une quantité au-dessous de toute grandeur assignable. On peut ainsi par le calcul des probabilités, appliqué à un grand nombre d'observations, reconnaître l'existence de ces rapports. Mais avant que d'en rechercher les causes, il est nécessaire, pour ne point s'égarer dans de vaines spéculations, de s'assurer qu'ils sont indiqués avec une probabilité qui ne permet point de les regarder comme des anomalies dues au hasard. La théorie des fonctions génératrices donne une expression très-simple de cette probabilité, que l'on obtient en intégrant le produit de la différentielle de la quantité dont le résultat déduit d'un grand nombre d'observations s'écarte de la vérité, par une constante moindre que l'unité, dépendante de la nature du problème, et élevée à une puissance dont l'exposant est le rapport du carré de cet écart, au nombre des observations. L'intégrale prise entre des limites données, et divisée par la même intégrale étendue à l'infini positif et négatif, exprimera la probabilité que l'écart de la vérité, est compris entre ces limites. Telle est la loi générale de la probabilité des résultats indiqués par un grand nombre d'observations.

Du Calcul des Probabilités, appliqué à la recherche des phénomènes et de leurs causes.

Les phénomènes de la nature sont le plus souvent enveloppés de tant de circonstances étrangères, un si grand nombre de causes perturbatrices y mêlent leur influence; qu'il est très-difficile, lorsqu'ils sont fort petits, de les reconnaître. On ne peut alors y parvenir, qu'en multipliant les observations; afin que les effets étrangers venant à se détruire, les résultats moyens mettent en évidence ces phénomènes. On conçoit par ce qui précède, que cela n'a lieu rigoureusement que dans le cas d'un nombre infini d'observations: dans tout autre cas, les phénomènes ne sont indiqués par les résultats moyens, qu'avec une probabilité d'autant plus forte, que les observations sont en plus grand nombre, et dont il importe d'apprécier la valeur.

Prenons pour exemple, la variation diurne de la pression de l'atmosphère à l'équateur où elle est le plus sensible, et le plus facile à reconnaître, les changemens irréguliers du baromètre y étant plus considérables. On remarqua bientôt dans les hauteurs qu'il indique, une petite oscillation diurne dont le *maximum* a lieu vers neuf heures du matin, et le *minimum* vers quatre heures du soir : un second *maximum* a lieu vers onze heures du soir, et le second *minimum* vers quatre heures du matin : les oscillations de la nuit sont moindres que celles du jour, dont l'étendue est de deux millimètres. L'inconstance de nos climats n'a point dérobé cette variation à nos observateurs, quoiqu'elle y soit moins sensible qu'entre les tropiques. En appliquant l'analyse des probabilités, aux observations nombreuses et précises faites par Ramond, pendant plusieurs années consécutives ; je trouve qu'elles indiquent l'existence et la quantité de ce phénomène, de manière à ne laisser aucun doute. La période de sa variation étant d'un jour solaire ; sa cause est évidemment la chaleur que le soleil communique aux diverses parties de l'atmosphère ; quoiqu'il soit presqu'impossible d'en calculer les effets. Cet astre agit encore par son attraction, sur ce fluide : il y produit avec la lune, des oscillations semblables à celles du flux et du reflux de la mer, oscillations dont j'ai déterminé les lois dans la Mécanique céleste, et qui seront, un jour, reconnues par des observations nombreuses faites à l'équateur avec d'excellens baromètres.

On peut encore par l'analyse des probabilités, vérifier l'existence ou l'influence de certaines causes dont on a cru remarquer l'action sur les êtres organisés. De tous les instrumens que nous pouvons employer pour connaître les agens imperceptibles de la nature, les plus sensibles sont les nerfs, surtout lorsque des causes particulières exaltent leur sensibilité. C'est par leur moyen, qu'on a découvert la faible électricité que développe le contact de deux métaux hétérogènes ; ce qui a ouvert un champ vaste aux recherches des physiciens et des chimistes. Les phénomènes singuliers qui résultent de l'extrême sensibilité des nerfs dans quelques individus, ont donné naissance à diverses opinions sur l'existence d'un nouvel agent que l'on a nommé *magnétisme animal*, sur l'action du magnétisme ordinaire et l'influence du soleil et de la lune, dans quelques affections nerveuses ; enfin sur les impressions que peut faire naître la proximité des métaux ou d'une eau courante. Il est naturel de penser que l'action de ces causes est très-faible, et qu'elle peut être facilement troublée par un grand nombre de circonstances accidentelles. Ainsi, parce qu'elle ne s'est point manifestée dans quelques cas, on ne doit pas rejeter son existence. Nous sommes si éloignés de connaître tous les agens de la nature, et leurs divers modes d'action; qu'il ne serait pas philosophique de nier les phénomènes, uniquement parce qu'ils sont inexplicables dans l'état actuel de nos connaissances. Seulement, nous devons les examiner avec une attention d'autant plus scrupuleuse, qu'il paraît plus difficile de les admettre; et c'est ici que le calcul des probabilités devient indispensable, pour déterminer jusqu'à quel point il faut multiplier les observations ou les expériences, afin d'obtenir en faveur des agens qu'elles indiquent, une probabilité supérieure aux raisons que l'on peut avoir d'ailleurs, de ne pas les admettre.

Le calcul des probabilités peut faire apprécier les avantages et les inconvéniens des méthodes employées dans les sciences conjecturales. Ainsi, pour reconnaître le meilleur des traitemens en usage dans la guérison d'une maladie, il suffit d'éprouver chacun d'eux sur un même nombre de malades, en rendant toutes les circonstances parfaitement semblables. La supériorité du traitement le plus avantageux se manifestera de plus en plus, à mesure que ce nombre s'accroîtra; et le calcul fera connaître la probabilité correspondante de son avantage. Le même calcul s'étend encore aux objets de l'économie politique, pour laquelle les opérations des gouvernemens sont autant d'expériences en grand, propres à les éclairer sur la conduite qu'ils doivent tenir dans les cas semblables à ceux qui se sont déjà présentés. Tant de causes imprévues ou cachées ou inappréciables influent sur les institutions humaines; qu'il est impossible d'en juger *à priori*, les résultats. Une longue suite d'expériences développe les effets de ces causes, et indique les moyens de remédier à ceux qui sont nuisibles. On a souvent fait à cet égard, des lois sages; mais parce que l'on avait négligé d'en conserver les motifs, plusieurs ont été abrogées comme inutiles, et il a fallu pour les rétablir, que de fâcheuses expériences en aient fait de nouveau, sentir le besoin. Il est donc bien important de tenir dans chaque branche de l'administration publique, un registre exact des résultats qu'ont produits les divers moyens dont on a fait usage. Appliquons aux sciences politiques et morales, la méthode fondée sur l'observation et le calcul, méthode qui nous a si heureusement servi dans les sciences naturelles. Ne changeons qu'avec une circonspection extrême, nos anciennes institutions et les usages auxquels nos opinions et nos habitudes se sont depuis long-temps pliées. Nous connaissons bien par l'expérience du passé, les inconvéniens qu'ils présentent; mais nous ignorons quelle est l'étendue des maux que leur changement peut produire.

La considération des probabilités, étendue a l'astronomie, peut servir à reconnaître la cause des anomalies observées dans les mouvemens célestes, et à démêler les petites inégalités enveloppées dans les erreurs dont les observations sont susceptibles. Ce fut en comparant entre elles toutes ses observations; que Ticho-Brahé reconnut la nécessité d'appliquer à la lune, une équation du temps, différente de celle que l'on appliquait au soleil et aux planètes. Ce fut encore dans le résultat d'observations nombreuses, que Mayer aperçut pour la lune, une diminution dans le coefficient de l'inégalité de la précession, relatif aux autres corps célestes. Mais comme cette diminution ne semblait pas résulter de la gravitation universelle; la plupart des astronomes la négligèrent dans leurs calculs. Ayant soumis à l'analyse des probabilités, un grand nombre d'observations lunaires choisies dans cette vue, et que Bouvard voulut bien calculer à ma prière; elle me parut indiquée avec une si forte probabilité, que je crus devoir en rechercher la cause. Je vis bientôt qu'elle ne pouvait être que l'ellipticité du sphéroïde terrestre, négligée jusqu'alors dans la théorie du mouvement lunaire, comme ne devant y produire que des termes insensibles : j'en conclus que ces termes deviennent sensibles par les intégrations successives des équations différentielles. Je déterminai donc ces termes par une analyse particulière, et je découvris d'abord l'inégalité du mouvement lunaire en latitude, qui est proportionnelle au sinus de la longitude de la lune, et qu'aucun astronome n'avait encore aperçue. Je reconnus ensuite au moyen de cette inégalité, que la théorie de la pesanteur donne en effet la diminution indiquée par Mayer, dans l'équation de la précession, applicable à la lune. La quantité de cette diminution, et le coefficient de l'inégalité précédente en latitude, sont très-propres à fixer l'aplatissement de la terre. Ayant fait part de mes recherches, à Burg qui s'occupait alors à perfectionner les tables de la lune, par la comparaison de toutes les bonnes observations; je le priai de déterminer avec un soin particulier, ces deux quantités. Par un accord très-remarquable, les valeurs qu'il a trouvées, donnent à la terre, le même aplatissement $\frac{1}{305}$, aplatissement qui diffère peu du milieu conclu des mesures des degrés du méridien et du pendule; mais qui, vu l'influence des erreurs des observations et des causes perturbatrices, sur ces mesures, me paraît plus exactement déterminé par ces inégalités lunaires.

Le calcul des probabilités m'a conduit pareillement à la cause des grandes irrégularités de Jupiter et de Saturne. En comparant les observations modernes aux anciennes, Halley trouva une accélération dans le mouvement de Jupiter, et un ralentissement dans celui de Saturne. Pour concilier les observations, il assujétit ces mouvemens, à deux équations séculaires de signes contraires, et croissantes comme les carrés des temps écoulés depuis 1700. Euler et Lagrange soumirent à l'analyse, les altérations que devoit produire dans ces mouvemens, l'attraction mutuelle des deux planètes. Ils y trouvèrent des équations séculaires; mais leurs résultats étaient si différens, que l'un d'eux, au moins, devait être erroné. Je me déterminai donc à reprendre ce problème important de la mécanique céleste, et je reconnus l'invariabilité des moyens mouvemens planétaires; ce qui fit disparaître les équations séculaires introduites par Halley, dans les tables de Jupiter et de Saturne. Il ne restait ainsi, pour expliquer les grandes irrégularités de ces planètes, que les attractions des comètes auxquelles plusieurs astronomes eurent effectivement recours, ou l'existence d'une inégalité à longue période, produite dans les mouvemens des deux planètes par leur action réciproque, et affectée de signes contraires, pour chacune d'elles. Un théorème que je trouvai sur les inégalités de ce genre, me rendit cette inégalité, très-vraisemblable. Suivant ce théorème, si le mouvement de Jupiter s'accélère, celui de Saturne se ralentit, ce qui est déjà conforme à ce que Halley avait remarqué; mais de plus, l'accélération de Jupiter, résultante du même théorème, est au ralentissement de Saturne, à très-peu près dans le rapport des équations séculaires proposées par Halley. En considérant les moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne, il me fut aisé de reconnaître que deux fois celui de Jupiter, ne surpasse que d'une très-petite quantité, cinq fois celui de Saturne. La période d'une inégalité qui aurait cet argument, serait d'environ neuf siècles. A la vérité, son coefficient serait de l'ordre des cubes des excentricités des orbites; mais je savais qu'en vertu des intégrations successives, il acquiert pour diviseur, le carré du très-petit multiplicateur du temps dans l'argument de cette inégalité, ce qui peut lui donner une grande valeur; il me parut donc très-probable que cette inégalité a lieu. La remarque suivante accrut encore sa probabilité. En supposant son argument nul, vers l'époque des observations de Ticho-Brahé; je vis que Halley avait dû trouver par la comparaison des observations modernes aux anciennes, les altérations qu'il avait indiquées; tandis que la comparaison des observations modernes entre elles, devait offrir des altérations contraires, et pareilles à celles que Lambert avait conclues de cette comparaison. L'existence de cette inégalité me parut donc extrêmement vraisemblable, et je n'hésitai point à entreprendre le calcul long et pénible, nécessaire pour m'en assurer. Elle fut entièrement confirmée par le résultat de ce calcul qui, de plus, me fit connaître un grand nombre d'autres inégalités dont l'ensemble a porté les tables de Jupiter et de Saturne, à la précision des observations mêmes.

Ce fut encore au moyen du calcul des probabilités, que je reconnus la loi remarquable des mouvemens moyens des trois premiers satellites de Jupiter, suivant laquelle la longitude moyenne du premier, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième est rigoureusement égale à la demi-circonférence. L'approximation avec laquelle les moyens mouvemens de ces astres satisfont à cette loi depuis leur découverte, indiquait son existence avec une vraisemblance extrême; j'en cherchai donc la cause, dans l'action mutuelle de ces trois corps. L'examen approfondi de cette action, me fit voir qu'il a suffi qu'à l'origine, les rapports de leurs moyens mouvemens aient approché de cette loi, dans certaines limites, pour que leur action mutuelle l'ait établie et la maintienne en rigueur.

On voit par là, combien il faut être attentif aux indications de la nature, lorsqu'elles sont le résultat d'un grand nombre d'observations; quoique d'ailleurs, elles soient inexplicables par les moyens connus. L'extrême difficulté des problèmes relatifs au système du monde, a forcé les géomètres de recourir à des approximations qui laissent toujours à craindre que les quantités négligées n'aient une influence sensible. Lorsqu'ils ont été avertis de cette influence, par les observations; ils sont revenus sur leur analyse : en la rectifiant, ils ont toujours retrouvé la cause des anomalies observées; ils en ont déterminé les lois, et souvent, ils ont devancé l'observation, en découvrant des inégalités qu'elle n'avait pas encore indiquées. Ainsi l'on peut dire que la nature elle-même a concouru à la perfection des théories fondées sur le principe de la pesanteur universelle; et c'est, à mon sens, une des plus fortes preuves de la vérité de ce principe admirable.

L'un des phénomènes les plus remarquables du système du monde, est celui de tous les mouvemens de rotation et de révolution des planètes et des satellites, dans le sens de la rotation du soleil, et à peu près dans le plan de son équateur. Un phénomène aussi remarquable n'est point l'effet du hasard : il indique une cause générale qui a déterminé tous ces mouvemens. Pour avoir la probabilité avec laquelle cette cause est indiquée; nous observerons que le système planétaire tel que nous le connaissons aujourd'hui, est composé d'onze planètes et de dix-huit satellites. On a reconnu les mouvemens de rotation du soleil, de six planètes, des satellites de Jupiter, de l'anneau de Saturne, et d'un de ses satellites. Ces mouvemens forment avec ceux de révolution, un ensemble de quarante-trois mouvemens dirigés dans le même sens; or on trouve par l'analyse des probabilités, qu'il y a plus de quatre mille milliards à parier contre un, que cette disposition n'est pas l'effet du hasard; ce qui forme une probabilité bien supérieure à celle des événemens historiques sur lesquels on ne se permet aucun doute. Nous devons donc croire, au moins avec la même confiance, qu'une cause primitive a dirigé les mouvemens planétaires; surtout si nous considérons que l'inclinaison du plus grand nombre de ces mouvemens à l'équateur solaire, est fort petite.

Un autre phénomène également remarquable du système solaire, est le peu d'excentricité des orbes des planètes et des satellites, tandis que ceux des comètes sont très-alongés : les orbes de ce système n'offrant point de nuances intermédiaires entre une grande et une petite excentricité. Nous sommes encore forcés de reconnaître ici l'effet d'une cause régulière : le hasard n'eût point donné une forme presque circulaire aux orbes de toutes les planètes et de leurs satellites; il est donc nécessaire que la cause qui a déterminé les mouvemens de ces corps, les ait rendus presque circulaires. Il faut encore que les grandes excentricités des orbes des comètes résultent de l'existence de cette cause, sans qu'elle ait influé sur les directions de leurs mouvemens; car on trouve qu'il y a presque autant de comètes rétrogrades, que de comètes directes, et que l'inclinaison moyenne de tous leurs orbes, approche très-près d'un demi-angle droit, comme cela doit être, si ces corps ont été lancés au hasard.

Quelle que soit la nature de la cause dont il s'agit; puisqu'elle a produit ou dirigé les mouvemens des planètes, il faut qu'elle ait embrassé tous ces corps; et vu les distances qui les séparent, elle ne peut avoir été qu'un fluide d'une immense étendue : pour leur avoir donné dans le même sens, un mouvement presque circulaire autour du soleil, il faut que ce fluide ait environné cet astre, comme une atmosphère. La considération des mouvemens planétaires nous conduit donc à penser qu'en vertu d'une chaleur excessive, l'atmosphère du soleil s'est primitivement étendue au-delà des orbes de toutes les planètes, et qu'elle s'est retirée successivement jusqu'à ses limites actuelles.

Dans l'état primitif où nous supposons le soleil, il ressemblait aux nébuleuses que le télescope nous montre composées d'un noyau plus ou moins brillant, entouré d'une nébulosité qui, en se condensant à la surface du noyau, doit le transformer, un jour, en étoile. Si l'on conçoit par analogie, toutes les étoiles formées de cette manière; on peut imaginer leur état antérieur de nébulosité, précédé lui-même par d'autres états dans lesquels la matière nébuleuse était de plus en plus diffuse, le noyau étant de moins en moins lumineux et dense. On arrive ainsi, en remontant aussi loin qu'il est possible, à une nébulosité tellement diffuse, que l'on pourrait à peine en soupçonner l'existence.

Tel est, en effet, le premier état des nébuleuses que Herschel a observées avec un soin particulier, au moyen de ses puissans télescopes, et dans lesquelles il a suivi les progrès de la condensation, non sur une seule, ces progrès ne pouvant devenir sensibles pour nous, qu'après des siècles, mais sur leur ensemble; à peu près comme on peut dans une vaste forêt, suivre l'accroissement des arbres sur les individus de divers âges, qu'elle renferme. Il a d'abord observé la matière nébuleuse répandue en amas divers, dans les différentes parties du ciel dont elle occupe une grande étendue. Il a vu dans quelques-uns de ces amas, cette matière faiblement condensée autour d'un ou de plusieurs noyaux peu brillans. Dans d'autres nébuleuses, ces noyaux brillent davantage, relativement à la nébulosité qui les environne. Les atmosphères de chaque noyau, venant à se séparer par une condensation ultérieure, il en résulte des nébuleuses multiples formées de noyaux brillans très-voisins, et environnés, chacun, d'une atmosphère: quelquefois, la matière nébuleuse en se condensant d'une manière uniforme, a produit les nébuleuses que l'on nomme *planétaires*. Enfin, un plus grand degré de condensation transforme toutes ces nébuleuses, en étoiles. Les nébuleuses classées d'après cette vue philosophique, indiquent avec une extrême vraisemblance, leur transformation future en étoiles, et l'état antérieur de nébulosité, des étoiles existantes. Les considérations suivantes viennent à l'appui des preuves tirées de ces analogies.

Depuis long-temps, la disposition particulière de quelques étoiles visibles à la vue simple, a frappé des observateurs philosophes. Mitchel a déjà remarqué combien il est peu probable que les étoiles des Pléïades, par exemple, aient été resserrées dans l'espace étroit qui les renferme, par les seules chances du hasard; et il en a conclu que ce groupe d'étoiles, et les groupes semblables que le ciel nous présente, sont les effets d'une cause primitive, ou d'une loi générale de la nature. Ces groupes sont un résultat nécessaire de la condensation des nébuleuses à plusieurs noyaux; car il est visible que la matière nébuleuse étant sans cesse attirée par ces noyaux divers; ils doivent former à la longue un groupe d'étoiles, pareil à celui des Pléïades. La condensation des nébuleuses à deux noyaux forme semblablement des étoiles très-rapprochées tournant l'une autour de l'autre, pareilles à celles dont Herschel a déjà considéré les mouvemens respectifs. Telles sont encore la soixante-unième du Cygne et sa suivante, dans lesquelles Bessel vient de reconnaître des mouvemens propres, si considérables et si peu différens, que la proximité de ces astres entre eux, et leur mouvement autour de leur centre commun de gravité, ne doivent laisser aucun doute. Ainsi, l'on descend par les progrès de condensation de la matière nébuleuse, à la considération du soleil environné autrefois d'une vaste atmosphère, considération à laquelle on remonte, comme on l'a vû, par l'examen des phénomènes du système solaire. Une rencontre aussi remarquable donne à l'existence de cet état antérieur du soleil, une probabilité fort approchante de la certitude.

Mais comment l'atmosphère solaire a-t-elle déterminé les mouvemens de rotation et de révolution des planètes et des satellites? Si ces corps avaient pénétré profondément dans cette atmosphère, sa résistance les aurait fait tomber sur le soleil; on est donc conduit à croire avec beaucoup de vraisemblance, que les planètes ont été formées aux limites successives de l'atmosphère solaire qui en se resserrant par le refroidissement, a dû abandonner dans le plan de son équateur, des zônes de vapeurs, que l'attraction mutuelle de leurs molécules a changées en divers sphéroïdes.

J'ai développé avec étendue, dans mon Exposition du Système du Monde, cette hypothèse qui me paraît satisfaire à tous les phénomènes que ce système nous présente.

Dans cette hypothèse, les comètes sont étrangères au système planétaire. En attachant leur formation, à celle des nébuleuses; on peut les regarder comme de petites nébuleuses à noyaux, errantes de systèmes en systèmes solaires, et formées par la condensation de la matière nébuleuse répandue avec tant de profusion dans l'univers. Les comètes seraient ainsi par rapport à notre système, ce que les aérolithes sont relativement à la terre, à laquelle ils paraissent étrangers. Lorsque ces astres deviennent visibles pour nous, ils offrent une ressemblance si parfaite avec les nébuleuses, qu'on les confond souvent avec elles; et ce n'est que par leur mouvement, ou par la connaissance de toutes les nébuleuses renfermées dans la partie du ciel où ils se montrent, qu'on parvient à les en distinguer. Cette supposition explique d'une manière heureuse, la grande extension que prennent les têtes et les queues ~~des comètes;~~ à mesure qu'elles approchent du soleil, et l'extrême rareté de ces queues qui malgré leur immense profondeur, n'affaiblissent point sensiblement l'éclat des étoiles que l'on voit à travers.

Lorsque de petites nébuleuses parviennent dans la partie de l'espace où l'attraction du soleil est prédominante, et que nous nommerons *sphère d'activité* de cet astre; il les force à décrire des orbes elliptiques ou hyperboliques. Mais leur vitesse étant également possible suivant toutes les directions, elles doivent se mouvoir indifféremment dans tous les sens et sous toutes les inclinaisons à l'écliptique; ce qui est conforme à ce que l'on observe.

La grande excentricité des orbes cométaires, résulte encore de l'hypothèse précédente. En effet, si ces orbes sont elliptiques, ils sont très-alongés; puisque leurs grands axes sont au moins égaux au rayon de la sphère d'activité du soleil. Mais ces orbes peuvent être hyperboliques, et si les axes de ces hyperboles ne sont pas très-grands par rapport à la moyenne distance du soleil à la terre, le mouvement des comètes qui les décrivent, paraîtra sensiblement hyperbolique. Cependant sur cent comètes dont on a déjà les élémens, aucune n'a paru se mouvoir dans une hyperbole; il faut donc que les chances qui donnent une hyperbole sensible, soient extrêmement rares par rapport aux chances contraires.

Les comètes sont si petites, que pour devenir visibles, leur distance périhélie doit être peu considérable. Jusqu'a présent cette distance n'a surpassé que deux fois, le diamètre de l'orbe terrestre, et le plus souvent, elle a été au-dessous du rayon de cet orbe. On conçoit que pour approcher si près du soleil, leur vitesse au moment de leur entrée dans sa sphère d'activité, doit avoir une grandeur et une direction, comprises dans d'étroites limites. En déterminant par l'analyse des probabilités, le rapport des chances qui dans ces limites, donnent une hyperbole sensible, aux chances qui donnent un orbe que l'on puisse confondre avec une parabole; j'ai trouvé qu'il y a six mille au moins, à parier contre l'unité, qu'une nébuleuse qui pénètre dans la sphère d'activité du soleil, de manière à pouvoir être observée, décrira ou une ellipse très-alongée, ou une hyperbole qui par la grandeur de son axe, se confondra sensiblement avec une parabole, dans la partie que l'on observe; il n'est donc pas surprenant que jusqu'ici, l'on n'ait point reconnu de mouvemens hyperboliques.

L'attraction des planètes, et peut-être encore la résistance des milieux éthérés, a dû changer plusieurs orbes cométaires, dans des ellipses dont le grand axe est moindre que le rayon de la sphère d'activité du soleil; ce qui augmente les chances des orbes elliptiques. On peut croire que ce changement a eu lieu pour la comète de 1682, la seule dont on ait jusqu'à présent, déterminé la révolution.

Des milieux qu'il faut choisir entre les résultats d'un grand nombre d'observations.

La recherche de ces milieux est très-importante dans la philosophie naturelle; et l'analyse qu'elle exige, est la plus délicate et la plus épineuse de toute la théorie des probabilités. Les observations et les expériences les plus précises sont toujours sujettes à des erreurs qui influent sur la valeur des élémens que l'on veut en déduire. Pour faire disparaître ces erreurs, autant qu'il est possible, en les détruisant les unes par les autres; on multiplie les observations dont le résultat moyen est d'autant plus exact, que leur nombre est plus considérable. Mais quelle est la manière la plus avantageuse de former ce résultat moyen? De quelle erreur ce résultat est-il encore susceptible? C'est ce que l'analyse des probabilités peut seule faire connaître; et voici ce qu'elle nous apprend.

Pour fixer les idées, supposons que l'on cherche à déterminer par l'observation, la grandeur apparente d'un disque vu d'une distance donnée. Si l'on a pris un grand nombre de mesures du disque avec des instrumens semblables, et à une même distance de ce disque; on aura sa grandeur moyenne apparente, en divisant la somme de toutes les mesures partielles, par le nombre de ces mesures. Pour avoir l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, sur ce résultat; nous observerons que cette erreur est la somme des produits de chaque erreur possible, par sa probabilité. Une erreur, soit positive, soit négative, devant être considérée comme une perte au jeu, on doit évaluer l'erreur moyenne, comme on évaluerait une perte moyenne. En déterminant par l'analyse des fonctions génératrices, l'expression de cette erreur; on trouve qu'elle a pour facteur, une quantité dépendante de la loi de probabilité des erreurs de chaque mesure. Cette loi nous est inconnue : seulement, il est naturel d'admettre que les erreurs négatives sont aussi probables que les positives; il semble donc impossible d'évaluer cette erreur moyenne. Mais en déterminant par la même analyse, la somme des carrés des erreurs des observations; j'ai reconnu qu'elle a le même facteur. De là, j'ai conclu la règle suivante.

Si l'on prend les différences entre le résultat moyen de toutes les mesures, et chacune d'elles; l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur ce résultat, est une fraction dont le numérateur est la racine carrée de la somme des carrés de ces différences, et dont le dénominateur est le produit du nombre des mesures, par la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon.

On a ainsi le résultat moyen le plus avantageux, et l'on peut en apprécier l'exactitude. Pour rapporter ensuite ce résultat, à la distance donnée; il suffit de le multiplier par le rapport inverse de cette distance, à celle d'où les mesures ont été prises.

Supposons maintenant que l'on ait pris ces mesures, à différentes distances; et que l'on veuille toujours en conclure la grandeur apparente du disque vu d'une distance donnée. Il est clair que l'erreur de chaque observation aura d'autant moins d'influence, que l'observation aura été faite plus près du disque; il est encore facile de voir que chaque mesure observée, moins son erreur, doit être égale à la grandeur que l'on cherche, multipliée par le rapport de la distance donnée, à la distance d'où la mesure a été prise. En considérant la grandeur cherchée, comme une inconnue; chaque mesure observée donnera une équation du premier degré dont le premier membre sera le produit de l'inconnue, par ce rapport; et dont le second membre sera la mesure observée, moins son erreur. Si l'on ajoute toutes ces équations, leur ensemble formera une équation finale qui, en supposant nulle, la somme des erreurs de toutes les observations, donnera une valeur de l'inconnue, à laquelle toutes les observations auront concouru, et qui par là, doit avoir une grande précision. C'est la règle que l'on suit communément; mais elle ne donne pas le résultat le plus avantageux, celui qui ne laisse à craindre que la plus petite erreur moyenne. Pour avoir ce résultat, on doit observer que toutes les manières possibles de combiner les équations précédentes, afin d'obtenir une équation finale du premier degré, qui détermine l'inconnue, reviennent à les multiplier, chacune, par un facteur, et à les ajouter ensuite sans avoir égard aux erreurs des observations. En prenant donc pour ces facteurs, des constantes arbitraires, et cherchant l'expression analytique de l'erreur moyenne du résultat donné par l'équation finale; il faut déterminer les constantes, ensorte que cette erreur soit un *minimum*. On trouve alors que chaque constante est égale au coefficient de l'inconnue, dans l'équation partielle qu'elle multiplie; la valeur de l'inconnue, donnée par l'équation finale, est ainsi exprimée par une fraction qui a pour numérateur, la somme des produits du coefficient de l'inconnue dans chaque équation partielle, par la mesure observée correspondante; et pour dénominateur, la somme des carrés de tous ces coefficiens. Si l'on prend ensuite les différences entre les mesures observées, et les produits successifs de ce résultat par les coefficiens de l'inconnue dans les équations partielles; l'erreur moyenne qu'il laisse encore à craindre, sera la racine carrée d'une fraction dont le numérateur est la somme des carrés de ces différences, et dont le dénominateur est le produit de ces trois quantités, savoir, le nombre des observations, la somme des carrés des coefficiens de l'inconnue, dans les équations partielles, et la circonférence dont le rayon est l'unité.

Il est facile de voir que si l'on élève au carré, l'expression de l'erreur de chaque mesure, tirée de l'équation partielle correspondante; si l'on rend ensuite, un *minimum*, la somme de ces carrés, en y faisant varier l'inconnue; l'équation du *minimum* donnera pour cette inconnue, la valeur précédente.

Dans un grand nombre de cas, et spécialement en astronomie, les élémens que l'on veut déterminer, sont déjà connus à fort peu près, et n'ont besoin que de légères corrections que l'on cherche à obtenir par des observations nombreuses et précises. Pour cela, on regarde chaque observation, comme une fonction des élémens. En substituant dans cette fonction, la valeur approchée de chaque élément, plus sa correction considérée comme une inconnue; en développant ensuite, la fonction, dans une série ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de ces inconnues, et négligeant, vu leur petitesse, les carrés et ces produits; enfin, en égalant la série, à l'observation diminuée de son erreur; on forme une équation du premier degré entre ces inconnues. C'est ce que l'on nomme *équation de condition*. On combine ensuite ces équations de condition, de manière à les réduire à un nombre d'équations finales, égal à celui des inconnues. La résolution de ces équations donne les valeurs des inconnues, ou les corrections des divers élémens.

La manière la plus générale de former ces équations finales, consiste à multiplier chacune des équations de condition, par un facteur indéterminé : la somme de ces produits, en y supposant nul, tout ce qui est relatif aux erreurs des observations, donnera une première équation finale. Un second système de facteurs donnera une seconde équation finale, et ainsi des autres. L'analyse des fonctions génératrices donne l'expression de l'erreur moyenne à craindre sur la correction de chaque élément, obtenue par la résolution de ces équations finales. Si l'on détermine les facteurs, par la condition que chacune de ces expressions soit un *minimum*; on trouve que le premier système de facteurs est formé des coefficiens de la première inconnue, dans chaque équation de condition; que le second système est formé des coefficiens de la seconde inconnue, etc.; d'où il est facile de conclure que les corrections des élémens, les plus avantageuses, sont généralement, comme dans le cas d'une seule variable, celles que l'on obtient, lorsqu'on rend un *minimum*, la somme des carrés des erreurs de chaque observation, en y faisant varier successivement les corrections inconnues. Dans ce cas général, l'analyse donne l'expression de l'erreur moyenne à craindre encore sur chaque élément; mais quoique très-simple, cette expression ne peut pas être comprise sans le secours de l'algèbre.

Nous avons supposé fort grand, le nombre des observations; et la règle précédente est d'autant plus exacte, que ce nombre est plus considérable. Mais dans le cas même où il est petit, il paraît naturel d'employer la même règle qui dans tous les cas, offre un moyen simple d'obtenir sans tâtonnement, les corrections que l'on cherche à déterminer.

Cette règle peut servir encore à comparer la précision de diverses tables astronomiques d'un même astre. Ces tables peuvent toujours être supposées réduites à la même forme, et alors elles ne diffèrent que par les époques, les moyens mouvemens, et les coefficiens des argumens; car si l'une d'elles contient un argument qui ne se trouve point dans les autres, il est clair que cela revient à supposer nul dans celles-ci, le coefficient de cet argument. Maintenant, si l'on rectifiait ces tables, en les comparant à la totalité des bonnes observations; elles satisferaient, par ce qui précède, à la condition que la somme des carrés des erreurs soit un *minimum*; les tables qui comparées à un nombre considérable d'observations, approchent le plus, de cette condition, méritent donc la préférence.

Des Tables de mortalité, et des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques.

La manière de former les tables de mortalité, est très-simple. On prend sur les registres des naissances et des morts, un grand nombre d'enfans que l'on suit pendant le cours de leur vie, en déterminant combien il en reste à la fin de chaque année de leur âge, et l'on écrit ce nombre vis-à-vis de l'année finissante. Mais comme dans les deux premières années de la vie, la mortalité est très-rapide; il faut pour plus d'exactitude, indiquer dans ce premier âge, le nombre des survivans à la fin de chaque demi-année.

Si l'on divise la somme des années de la vie de tous les individus inscrits dans une table de mortalité, par le nombre de ces individus, et si de ce quotient, on soustrait une demi-année; on aûra la durée moyenne de la vie, que l'on trouve ainsi de vingt-huit ans et demi à peu près. Cette soustraction ne doit avoir lieu, que dans le cas où la table n'indique point le nombre des vivans à la fin de la première demi-année: elle est fondée sur ce que la mortalité pouvant être supposée uniformément répandue sur la première année; la partie de la durée moyenne de la vie, correspondante à cette année, n'est que la moitié de celle qui aurait lieu, si la mort ne frappait les individus qu'à la fin de l'année. La durée moyenne de ce qui reste encore à vivre, lorsqu'on est parvenu à un âge quelconque, se détermine en faisant une somme des années qu'ont vécu au-delà de cet âge, tous les individus qui l'ont atteint; en la divisant par le nombre de ces individus, et en retranchant une demi-année, de ce quotient. Ce n'est point au moment de la naissance, que la durée moyenne de la vie, est la plus grande; c'est lorsqu'on a échappé aux dangers de la première enfance, et alors elle est d'environ quarante-trois ans. La probabilité d'arriver à un âge quelconque, en partant d'un âge donné, est égale au rapport des deux nombres d'individus indiqués dans la table, à ces deux âges.

La précision de ces résultats exige que pour la formation des tables, on emploie un très-grand nombre de naissances. L'analyse donne alors des formules très-simples pour apprécier la probabilité que les nombres indiqués dans ces tables ne s'écarteront de la vérité, que dans d'étroites limites. On voit par ces formules, que l'intervalle des limites diminue, et que la probabilité augmente, à mesure que l'on considère plus de naissances; ensorte que les tables représenteraient exactement la vraie loi de la mortalité, si le nombre des naissances employées devenait infini.

Une table de mortalité est donc une table des probabilités de la vie humaine. Le rapport des individus inscrits à côté de chaque année, au nombre des naissances, est la probabilité qu'un nouveau-né atteindra cette année. Comme on estime la valeur de l'espérance, en faisant une somme des produits de chaque bien espéré par la probabilité de l'obtenir; on peut également évaluer la durée moyenne de la vie, en ajoutant les produits de chaque année par la probabilité d'y arriver. Ainsi en formant une suite de fractions dont le dénominateur commun est le nombre des nouveau-nés de la table, et dont les numérateurs sont les nombres inscrits à côté de chaque année; la somme de toutes ces fractions sera la durée moyenne de la vie, dont il faut pour plus d'exactitude, retrancher une demi-année; ce qui conduit au même résultat que la règle précédente. Mais cette manière d'envisager la durée moyenne de la vie, a l'avantage de faire voir que dans une population stationnaire, c'est-à-dire telle que le nombre des naissances égale celui des morts; la durée moyenne de la vie est le rapport même de la population aux naissances annuelles; car la population étant supposée stationnaire, le nombre des individus d'un âge compris entre deux années consécutives de la table, est égal au nombre des naissances annuelles, multiplié par la demi-somme des probabilités d'atteindre ces années; la somme de tous ces produits sera donc la population entière; or il est aisé de voir que cette somme divisée par le nombre des naissances annuelles, coïncide avec la durée moyenne de la vie, telle que nous venons de la définir.

Il est facile au moyen d'une table de mortalité, de former la table correspondante de la population supposée stationnaire. Pour cela, on prend des moyennes arithmétiques entre les nombres de la table de mortalité correspondans aux âges, zéro et un an, un et deux ans, deux et trois ans, etc. La somme de toutes ces moyennes est la population entière : on l'écrit à côté de l'âge zéro. On retranche de cette somme, la première moyenne; et le reste est le nombre des individus d'un an et au-dessus : on l'écrit à côté de l'année 1. On retranche de ce premier reste, la seconde moyenne; ce second reste est le nombre des individus de deux années, et au-dessus : on l'écrit à côté de l'année 2; et ainsi de suite.

Tant de causes variables influent sur la mortalité, que les tables qui la représentent, doivent changer suivant les lieux et les temps. Les divers états de la vie offrent à leur égard, des différences sensibles relatives aux fatigues et aux dangers inséparables de chaque état, et dont il est indispensable de tenir compte dans les calculs fondés sur la durée de la vie. Mais ces différences n'ont pas encore été suffisamment observées. Elles le seront, un jour; alors on saura quel sacrifice de la vie, chaque profession exige, et l'on profitera de ces connaissances, pour en diminuer les dangers.

La salubrité plus ou moins grande du sol, sa température, les mœurs des habitans, et les opérations des gouvernemens ont sur la mortalité, une influence considérable. Mais il faut toujours faire précéder la recherche de la cause des différences observées, par celle de la probabilité avec laquelle cette cause est indiquée. Ainsi le rapport de la population aux naissances annuelles, que l'on à vu s'élever en France, à vingt-huit et un tiers, n'est pas égal a vingt-cinq dans l'ancien duché de Milan. Ces rapports établis l'un et l'autre, sur un grand nombre de naissances, ne permettent pas de révoquer en doute, l'existence dans le Milanais, d'une cause spéciale de mortalité, qu'il importe au gouvernement de ce pays, de rechercher et de faire disparaître.

Le rapport de la population aux naissances s'accroîtrait encore, si l'on parvenait à diminuer ou à éteindre quelques maladies dangereuses et très-répandues. C'est ce que l'on a fait heureusement pour la petite vérole, d'abord par l'inoculation de cette maladie; ensuite d'une manière beaucoup plus avantageuse, par l'inoculation de la vaccine, découverte inestimable de Jenner qui par là s'est rendu l'un des plus grands bienfaiteurs de l'humanité.

La petite vérole a cela de particulier, savoir que le même individu n'en est pas deux fois atteint, ou du moins, ce cas est si rare, que l'on peut en faire abstraction dans le calcul. Cette maladie à laquelle peu de monde échappait avant la découverte de la vaccine, est souvent mortelle et fait périr un septième de ceux qu'elle attaque. Quelquefois, elle est bénigne, et l'expérience a fait connaître qu'on lui donnait ce dernier caractère, en l'inoculant sur des personnes saines, préparées par un bon régime, et dans une saison favorable. Alors le rapport des individus qu'elle fait périr, aux inoculés, n'est pas un trois-centième. Ce grand avantage de l'inoculation, joint à ceux de ne point altérer la beauté, et de préserver des suites fâcheuses que la petite vérole naturelle entraîne souvent après elle, la fit adopter par un grand nombre de personnes. Sa pratique fut vivement recommandée; mais ce qui arrive presque toujours dans les choses sujettes à des inconvéniens, elle fut vivement combattue. Au milieu de cette dispute, Daniel Bernoulli se proposa de soumettre au calcul des probabilités, l'influence de l'inoculation sur la durée moyenne de la vie. Manquant de données précises sur la mortalité produite par la petite vérole, aux divers âges de la vie; il supposa que le danger d'avoir cette maladie et celui d'en périr, sont les mêmes à tout âge. Au moyen de ces suppositions, il parvint par une analyse délicate, à convertir une table ordinaire de mortalité, dans celles qui auraient lieu, si la petite vérole n'existait pas, ou si elle ne faisait périr qu'un très-petit nombre de malades; et il en conclut que l'inoculation augmenterait de trois ans au moins, la durée moyenne de la vie; ce qui lui parut mettre hors de doute, l'avantage de cette opération. D'Alembert attaqua l'analyse de Bernoulli, d'abord sur l'incertitude de ses deux hypothèses; ensuite, sur son insuffisance, en ce que l'on n'y faisait point entrer la comparaison du danger prochain quoique très-petit, de périr par l'inoculation, au danger beaucoup plus grand, mais plus éloigné, de succomber à la petite vérole naturelle. Cette considération qui disparaît, lorsque l'on considère un grand nombre d'individus, est par là, indifférente aux gouvernemens, et laisse subsister pour eux, les avantages de l'inoculation; mais elle est d'un grand poids pour un père de famille qui doit craindre, en faisant inoculer ses enfans, de voir bientôt périr ce qu'il a de plus cher au monde, et d'en être cause. Beaucoup de parens étaient retenus par cette crainte, que la découverte de la vaccine a heureusement dissipée. Par un de ces mystères que la nature nous offre si fréquemment, le vaccin est un préservatif de la petite vérole, aussi sûr que le virus variolique, et il n'a aucun danger : il n'expose à aucune maladie, et ne demande que très-peu de soins. Aussi sa pratique s'est-elle promptement répandue, et pour la rendre universelle, il ne reste plus à vaincre que l'inertie naturelle du peuple, contre laquelle il faut lutter sans cesse, même lorsqu'il s'agit de ses plus chers intérêts.

Le moyen le plus simple de calculer l'avantage que produirait l'extinction d'une maladie, consiste à déterminer par l'observation, le nombre d'individus d'un âge donné, qu'elle fait périr, chaque année, et à le retrancher du nombre des morts au même âge. Le rapport de la différence, au nombre total d'individus de l'âge donné, serait la probabilité de périr à cet âge, si la maladie n'existait pas. En faisant donc une somme de ces probabilités depuis la naissance jusqu'à un âge quelconque, et retranchant cette somme de l'unité; le reste sera la probabilité de vivre jusqu'à cet âge, correspondante à l'extinction de la maladie. La série de ces probabilités sera la table de mortalité, relative à cette hypothèse; et l'on en conclura par ce qui précède, la durée moyenne de la vie. C'est ainsi que Duvilard a trouvé l'accroissement de la durée moyenne de la vie, dû à l'inoculation de la vaccine, de trois ans au moins. Un accroissement aussi considérable en produirait un fort grand dans la population, si d'ailleurs, elle n'était pas restreinte par la diminution relative des subsistances.

C'est principalement par le défaut des subsistances, que la marche progressive de la population est arrêtée. Dans toutes les espèces d'animaux et de végétaux, la nature tend sans cesse à augmenter le nombre des individus, jusqu'à ce qu'ils soient au niveau des moyens de subsister. Dans l'espèce humaine, les causes morales ont une grande influence sur la population. Si le sol, par de faciles défrichemens, peut fournir une nourriture abondante à des générations nouvelles; la certitude de faire vivre une nombreuse famille, encourage les mariages, et les rend plus précoces et plus féconds. Sur un sol pareil, la population et les subsistances doivent croître à-la-fois en progression géométrique. Mais quand les défrichemens deviennent plus difficiles et plus rares; alors l'accroissement de la population diminue : elle se rapproche continuellement de l'état variable des subsistances, en faisant autour de lui, des oscillations, à peu près comme un pendule dont on promène d'un mouvement retardé, le point de suspension, oscille autour de ce point, par sa pesanteur. Il est difficile d'évaluer le *maximum* d'accroissement de la population : il paraît d'après quelques observations, que dans de favorables circonstances, la population de l'espèce humaine pourrait doubler, tous les quinze ans. On estime que dans l'Amérique septentrionale, la période de ce doublement est de vingt-cinq années. Dans cet état de choses, la population, les naissances, les mariages, la mortalité, tout croît suivant la même progression géométrique dont on a le rapport constant des termes consécutifs, par l'observation des naissances annuelles à deux époques.

Une table de mortalité, représentant les probabilités de la vie humaine; on peut déterminer à son moyen, la durée des mariages. Supposons pour simplifier, que la mortalité soit la même pour les deux sexes; on aura la probabilité que le mariage subsistera un an, ou deux, ou trois, etc.; en formant une suite de fractions dont le dénominateur commun, est le produit des deux nombres de la table, correspondans aux âges des conjoints, et dont les numérateurs sont les produits successifs des nombres correspondans à ces âges augmentés d'une année, de deux, de trois, etc. La somme de ces fractions, augmentée d'un demi, sera la durée moyenne du mariage, l'année étant prise pour unité. Il est facile d'étendre la même règle, à la durée moyenne d'une association formée de trois ou d'un plus grand nombre d'individus.

Des bénéfices et des établissemens qui dépendent de la probabilité des événemens.

Rappelons ici ce que nous avons dit en parlant de l'espérance. On a vu que pour avoir l'avantage qui résulte de plusieurs événemens simples, dont les uns produisent un bien, et les autres une perte; il faut ajouter les produits de la probabilité de chaque événement favorable, par le bien qu'il procure, et retrancher de leur somme, celle des produits de la probabilité de chaque événement défavorable, par la perte qui y est attachée. Mais quel que soit l'avantage exprimé par la différence de ces sommes, un seul événement composé de ces événemens simples, ne garantit point de la crainte d'éprouver une perte réelle. On conçoit que cette crainte doit diminuer lorsque l'on multiplie l'événement composé. L'analyse des probabilités conduit à ce théorème général.

Par la répétition d'un événement avantageux, simple ou composé, le bénéfice réel devient de plus en plus probable, et s'accroît sans cesse : il devient certain, dans l'hypothèse d'un nombre infini de répétitions ; et en le divisant par ce nombre, le quotient ou le bénéfice moyen de chaque événement, est l'espérance mathématique elle-même, ou l'avantage relatif à l'événement. Il en est de même de la perte qui devient certaine à la longue, pour peu que l'événement soit désavantageux.

Ce théorème sur les bénéfices et les pertes, est analogue à ceux que nous avons donnés précédemment sur les rapports qu'indique la répétition indéfinie des événemens simples ou composés ; et comme eux, il prouve que la régularité finit par s'établir dans les choses même, les plus subordonnées à ce que nous nommons *hasard*.

Lorsque les événemens sont en grand nombre, l'analyse donne encore une expression fort simple de la probabilité que le bénéfice réel sera compris dans des limites déterminées, expression qui rentre dans la loi générale de la probabilité, que nous avons donnée ci-dessus, en parlant des probabilités qui résultent de la multiplication indéfinie des événemens.

C'est de la vérité du théorème précédent, que dépend la stabilité des établissemens fondés sur les probabilités. Mais pour qu'il puisse leur être appliqué, il faut que ces établissemens, par de nombreuses affaires, multiplient les événemens avantageux.

On a fondé sur les probabilités de la vie humaine, divers établissemens, tels que les rentes viagères et les tontines. La méthode la plus générale et la plus simple de calculer les bénéfices et les charges de ces établissemens, consiste à les réduire en capitaux actuels. L'intérêt annuel de l'unité, est ce que l'on nomme *taux de l'intérêt*. A la fin de chaque année, un capital acquiert pour facteur, l'unité plus le taux de l'intérêt ; il croît donc suivant une progression géométrique dont ce facteur est la raison. Ainsi par l'effet du temps, il devient immense. Si, par exemple, le taux de l'intérêt est $\frac{1}{20}$ ou de cinq pour cent; le capital double à fort peu près en quatorze ans, quadruple en vingt-neuf ans, et dans moins de trois siècles, il devient deux millions de fois plus considérable.

Un accroissement aussi prodigieux a fait naître l'idée de s'en servir, pour amortir la dette publique. Si l'on crée un premier fonds d'amortissement que l'on place sans cesse avec les intérêts, sur les effets publics, en profitant surtout des momens de baisse; et si, lorsque les besoins de l'état obligent à faire des emprunts, on en consacre une partie, à l'accroissement du fonds d'amortissement; il est visible que ces opérations auront le double avantage d'accroître ce fonds, et de soutenir le crédit et les effets publics; et qu'à la longue, la caisse d'amortissement absorbera une grande partie de la dette nationale. D'heureuses expériences ont pleinement confirmé ces avantages. Mais la fidélité dans les engagemens et la stabilité, si nécessaires au succès de pareils établissemens, ne peuvent être bien garanties, que par un gouvernement représentatif.

Il résulte de ce qui précède, que le capital actuel équivalent à une somme qui ne doit être payée qu'après un certain nombre d'années, est égal à cette somme multipliée par la probabilité qu'elle sera payée à cette époque, et divisée par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, élevée à une puissance exprimée par le nombre de ces années.

Il est facile d'appliquer ce principe, aux rentes viagères sur une ou plusieurs têtes, et aux caisses d'épargne et d'assurance d'une nature quelconque. Supposons que l'on se propose de former une table de rentes viagères, d'après une table donnée de mortalité. Une rente viagère payable au bout de cinq ans, par exemple, et réduite en capital actuel, est par ce principe, égale au produit des deux quantités suivantes, savoir, la rente divisée par la cinquième puissance de l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et la probabilité de la payer. Cette probabilité est le rapport inverse du nombre des individus inscrits dans la table, vis-à-vis de l'âge de celui qui constitue la rente, au nombre inscrit vis-à-vis de cet âge augmenté de cinq années. En formant donc une suite de fractions dont les dénominateurs sont les produits du nombre de personnes indiquées dans la table de mortalité, comme vivantes à l'âge de celui qui constitue la rente, par les puissances successives de l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et dont les numérateurs sont les produits de la rente, par le nombre des personnes vivantes au même âge augmenté successivement d'une année, de deux années, etc., la somme de ces fractions sera le capital requis pour la rente viagère à cet âge.

Supposons maintenant qu'une personne veuille, au moyen d'une rente viagère, assurer à ses héritiers, un capital payable à la fin de l'année de sa mort. Pour déterminer la valeur de cette rente, on peut imaginer que la personne emprunte en viager à une caisse, ce capital divisé par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et qu'elle le place à intérêt perpétuel à la même caisse. Il est clair que ce capital sera dû par la caisse, à ses héritiers, à la fin de l'année de sa mort; mais elle n'aura payé, chaque année, que l'excès de l'intérêt viager sur l'intérêt perpétuel. La table des rentes viagères fait donc connaître ce que la personne doit payer annuellement à la caisse, pour assurer ce capital après sa mort.

Les assurances maritimes, celles contre les incendies et les orages, et généralement tous les établissemens de ce genre, se calculent par les mêmes principes. Un négociant a des vaisseaux en mer, il veut assurer leur valeur et celle de leur cargaison, contre les dangers qu'ils peuvent courir : pour cela il donne une somme à une compagnie, qui lui répond de la valeur estimée de ses cargaisons et de ses vaisseaux. Le rapport de cette valeur à la somme qui doit être donnée pour prix de l'assurance, dépend des dangers auxquels les vaisseaux sont exposés, et ne peut être apprécié que par des observations nombreuses sur le sort des vaisseaux partis du port pour la même destination.

Si l'assureur ne donnait à la compagnie d'assurance, que la somme indiquée par le calcul des probabilités, cette compagnie ne pourrait pas subvenir aux dépenses de son établissement; il faut donc qu'il paie d'une somme plus forte, le prix de son assurance. Mais alors quel est son avantage? C'est ici que la considération de l'espérance morale devient nécessaire. On conçoit que le jeu le plus égal devenant, comme on l'a vu précédemment, désavantageux, parce qu'il échange une mise certaine, contre un bénéfice incertain; l'assurance par laquelle on échange l'incertain contre le certain, doit être avantageuse. C'est en effet, ce qui résulte de la règle que nous avons donnée ci-dessus pour déterminer l'espérance morale, et par laquelle on voit de plus jusqu'où peut s'étendre le sacrifice que l'on doit faire à la compagnie d'assurance, en conservant toujours un avantage moral. Cette compagnie peut donc en procurant cet avantage, faire elle-même un grand bénéfice, si le nombre des assureurs est très-considérable, condition nécessaire à son existence durable. Alors son bénéfice devient certain, et ses espérances mathématique et morale coïncident. Car l'analyse conduit à ce théorème général, savoir, que si les expectatives sont très-nombreuses, les deux espérances approchent sans cesse l'une de l'autre, et finissent par coïncider dans le cas d'un nombre infini d'expectatives.

Parmi les établissemens fondés sur les probabilités de la vie humaine, les plus utiles sont ceux dans lesquels, au moyen d'un léger sacrifice de son revenu, on assure l'existence de sa famille pour un temps où l'on doit craindre de ne plus suffire à ses besoins. Autant le jeu est immoral, autant ces établissemens sont avantageux aux mœurs, en favorisant les plus doux penchans de la nature. Le Gouvernement doit donc les encourager et les respecter dans ses vicissitudes; car les espérances qu'ils présentent, portant sur un avenir éloigné, ils ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute inquiétude sur leur durée.

Disons un mot des emprunts. Il est clair que pour emprunter en perpétuel, il faut payer, chaque année, le produit du capital par le taux de l'intérêt. Mais on peut vouloir acquitter ce capital, en paiemens égaux faits pendant un nombre déterminé d'années, paiemens que l'on nomme *annuités*, et dont on obtient ainsi la valeur. Chaque annuité, pour être réduite au moment actuel, doit être divisée par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et élevée à une puissance égale au nombre des années après lesquelles on doit payer cette annuité. En formant donc une progression géométrique dont le premier terme est l'annuité divisée par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et dont le dernier est cette annuité divisée par la même quantité élevée à une puissance égale au nombre des années pendant lesquelles le paiement doit avoir lieu;

la somme de cette progression sera équivalente au capital emprunté; ce qui détermine la valeur de l'annuité. Si l'on veut faire un emprunt viager; on observera que les tables de rentes viagères donnant le capital requis pour constituer une rente viagère, à un âge quelconque; une simple proportion donnera la rente que l'on doit faire à l'individu dont on emprunte un capital. On peut calculer par ces principes, tous les modes possibles d'emprunt.

Des illusions dans l'estimation des probabilités.

L'esprit a ses illusions, comme le sens de la vue; et de même que le toucher rectifie celles-ci, la réflexion et le calcul corrigent également les premières. La probabilité fondée sur une expérience journalière, ou exagérée par la crainte et l'espérance, nous frappe plus qu'une probabilité supérieure, mais qui n'est qu'un simple résultat du calcul. Ainsi nous ne craignons point pour de faibles avantages, d'exposer notre vie, à des dangers beaucoup moins invraisemblables que la sortie d'un quine à la loterie de France; et cependant personne ne voudrait se procurer les mêmes avantages, avec la certitude de perdre la vie, si ce quine arrivait.

Nos passions, nos préjugés, et les opinions dominantes, en exagérant les probabilités qui leur sont favorables, et en atténuant les probabilités contraires, sont des sources abondantes d'illusions dangereuses.

Les maux présens et la cause qui les fait naître, nous affectent beaucoup plus, que le souvenir des maux produits par la cause contraire, et nous empêchent d'apprécier avec justesse, la probabilité des moyens propres à nous préserver des uns et des autres. C'est ce qui porte alternativement vers le despotisme et vers l'anarchie, les peuples sortis de l'état du repos, dans lequel ils ne rentrent jamais qu'après de longues et cruelles agitations.

Cette impression vive que nous recevons de la présence des événemens, et qui nous laisse à peine remarquer les événemens contraires observés par d'autres, est une cause principale d'erreurs, dont on ne peut trop se garantir. Nous croyons voir, par exemple, avec évidence, la vérité d'un fait attesté par des hommes dont nous avons souvent reconnu la véracité, surtout lorsqu'il est accompagné de circonstances qui viennent à l'appui de leur témoignage, et que nous avons pris soin de vérifier nous-mêmes. Accoutumés à nous conduire d'après de semblables preuves, et n'ayant jamais été trompés par elles, nous les regardons comme infaillibles; et s'il s'agit d'un délit, nous ne balançons point à condamner l'individu qu'elles inculpent. Cependant, les récits des Causes célèbres suffisent pour nous convaincre que les preuves morales les plus fortes sont toujours susceptibles d'erreurs. Nous devrions donc alors nous abstenir de juger. Mais si les preuves sont telles que les inconvéniens de l'erreur à craindre, multipliés par sa petite probabilité, donnent un produit très-inférieur au danger qui résulterait de l'impunité du crime; le jugement est commandé par l'intérêt de la société : quelquefois même, dans un danger imminent, cet intérêt exige que le magistrat se relâche des formes sagement établies pour la sûreté de l'innocence.

Les coïncidences de quelques événemens remarquables, avec les prédictions des astrologues, des devins et des augures, avec les songes, avec les nombres et les jours réputés heureux ou malheureux, etc., ont donné naissance à une foule de préjugés encore très-répandus. On ne réfléchit pas au grand nombre de non-coïncidences qui n'ont fait aucune impression, ou que l'on ignore. Cependant, c'est le rapport seul des unes aux autres, qui peut donner la probabilité des causes auxquelles on attribue les coïncidences. Si ce rapport était connu, l'expérience confirmerait sans doute, ce que le bon sens et la raison nous dictent à l'égard de ces préjugés. Ainsi le philosophe de l'antiquité, auquel on montrait dans un temple, pour exalter la puissance du dieu qu'on y adorait, les *ex-voto* de tous ceux qui après l'avoir invoqué, s'étaient sauvés du naufrage, faisait une question conforme au calcul des probabilités, en demandant combien de personnes, malgré cette invocation, avaient péri.

C'est principalement au jeu, qu'une foule d'illusions entretient l'espérance, et la soutient contre les chances défavorables. La plupart de ceux qui mettent aux loteries, ne savent pas combien de chances sont à leur avantage, combien leur sont contraires.

Ils n'envisagent que la possibilité, pour une mise légère, de gagner une somme considérable; et les projets que leur imagination enfante, exagèrent à leurs yeux, la probabilité de l'obtenir. Ils seraient sans doute, effrayés du nombre immense des mises perdues, s'ils pouvaient les connaître; mais on prend soin au contraire, de donner aux gains, une grande publicité.

Lorsqu'à la loterie de France, un numéro n'est pas sorti depuis long-temps; la foule s'empresse de le couvrir de mises. Elle juge que le numéro resté long-temps sans sortir, doit au prochain tirage, sortir de préférence aux autres. Une erreur aussi commune me paraît tenir à une illusion, par laquelle on se reporte involontairement à l'origine des événemens. Il est, par exemple, très-peu vraisemblable qu'au jeu de *croix* et *pile*, on amènera *croix*, dix fois de suite. Cette invraisemblance qui nous frappe encore, lorsqu'il est arrivé neuf fois, nous porte à croire qu'au dixième coup, *pile* arrivera. Cependant loin de nous faire juger ainsi; le passé, en indiquant dans la pièce, une plus grande pente pour *croix* que pour *pile*, rend le premier de ces événemens, plus probable que l'autre : il augmente, comme on l'a vu, la probabilité d'amener *croix* au coup suivant. Une illusion semblable persuade à beaucoup de monde, que l'on peut gagner sûrement à la loterie, en plaçant chaque fois, sur un même numéro jusqu'à sa sortie, une mise dont le produit surpasse la somme de toutes les mises. Mais quand même de semblables spéculations ne seraient pas souvent arrêtées par l'impossibilité de les soutenir; elles ne diminueraient point le désavantage mathématique des spéculateurs, et elles accroîtraient leur désavantage moral; puisqu'à chaque tirage, ils exposeraient une plus grande partie de leur fortune.

Par une illusion contraire aux précédentes, on cherche dans les tirages passés, les numéros le plus souvent sortis, pour en former des combinaisons sur lesquelles on croit placer sa mise avec avantage. Mais vu la manière dont le mélange des numéros se fait à la loterie; le passé ne doit avoir sur l'avenir, aucune influence. Les sorties plus fréquentes d'un numéro ne sont que des anomalies du hasard : j'en ai soumis plusieurs au calcul, et j'ai constamment trouvé qu'elles étaient renfermées dans les limites que la supposition d'une égale possibilité de sortie de tous les numéros, permet d'admettre sans invraisemblance.

Dans une longue série d'événemens du même genre, les seules chances du hasard doivent quelquefois offrir ces veines singulières de bonheur ou de malheur, que la plupart des joueurs ne manquent pas d'attribuer à une sorte de fatalité. Il arrive souvent dans les jeux qui dépendent à-la-fois du hasard et de l'habileté des joueurs, que celui qui perd, troublé par sa perte, cherche à la réparer par des coups hasardeux qu'il éviterait dans une autre situation: il aggrave ainsi son propre malheur, et il en prolonge la durée. C'est cependant alors, que la prudence devient nécessaire, et qu'il importe de se convaincre que le désavantage moral attaché aux chances défavorables, s'accroît par le malheur même.

Le sentiment par lequel l'homme s'est placé long-temps, au centre de l'univers, en se considérant comme l'objet spécial des soins de la nature, porte chaque individu à se faire le centre d'une sphère plus ou moins étendue, et à croire que le hasard a pour lui des préférences. Soutenus par cette opinion, les joueurs exposent souvent des sommes considérables, à des jeux dont ils savent que les chances leur sont contraires. Dans la conduite de la vie, une semblable opinion peut quelquefois avoir des avantages; mais le plus souvent, elle conduit à des entreprises périlleuses et funestes. Ici, comme en tout, les illusions sont dangereuses, et la vérité seule est généralement utile.

Un des grands avantages du calcul des probabilités, est d'apprendre à se défier des premiers aperçus. Comme on reconnaît qu'ils trompent souvent, lorsqu'on peut les soumettre au calcul; on doit en conclure que sur d'autres objets, il ne faut s'y livrer qu'avec une circonspection extrême. Prouvons cela par des exemples.

Une urne renferme quatre boules noires ou blanches, mais qui ne sont pas toutes de la même couleur. On a extrait une de ces boules, dont la couleur est blanche, et que l'on a remise dans l'urne pour procéder encore à de semblables tirages. On demande la probabilité de n'extraire que des boules noires, dans les quatre tirages suivans.

Si les boules blanches et noires étaient en nombre égal, cette probabilité serait la quatrième puissance de la probabilité $\frac{1}{2}$ d'extraire une boule noire à chaque tirage; elle serait donc $\frac{1}{16}$. Mais l'extraction d'une boule blanche au premier tirage, indique une supériorité dans le nombre des boules blanches de l'urne; car si l'on suppose dans l'urne, trois boules blanches et une noire, la probabilité d'en extraire une boule blanche est $\frac{3}{4}$; elle est $\frac{2}{4}$, si l'on suppose deux boules blanches et deux noires; enfin, elle se réduit à $\frac{1}{4}$, si l'on suppose trois boules noires et une blanche. Suivant le principe de la probabilité des causes, tirée des événemens, les probabilités de ces trois suppositions sont entre elles, comme les quantités $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$; elles sont par conséquent égales à $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$. Il y a ainsi cinq contre un à parier que le nombre des boules noires est inférieur, ou tout au plus égal à celui des blanches. Il semble donc que d'après l'extraction d'une boule blanche au premier tirage, la probabilité d'extraire de suite quatre boules noires, doit être moindre que dans le cas de l'égalité des couleurs, ou plus petite qu'un seizième. Cependant cela n'est pas, et l'on trouve par un calcul fort simple, cette probabilité plus grande qu'un quatorzième. En effet, elle serait la quatrième puissance de $\frac{1}{4}$, de $\frac{2}{4}$ et de $\frac{3}{4}$, dans la première, la seconde et la troisième des suppositions précédentes sur les couleurs des boules de l'urne. En multipliant respectivement chaque puissance, par la probabilité de la supposition correspondante, ou par $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ et $\frac{1}{6}$; la somme des produits sera la probabilité d'extraire de suite, quatre boules noires. On a ainsi pour cette probabilité, $\frac{29}{384}$, fraction moindre que $\frac{1}{14}$. Ce paradoxe s'explique en considérant que l'indication de la supériorité des boules blanches sur les noires, par le premier tirage, n'exclut point la supériorité des boules noires sur les blanches, supériorité qu'exclut la supposition de l'égalité des couleurs. Or cette supériorité quoique peu vraisemblable, doit rendre la probabilité d'amener de suite, un nombre donné de boules noires, plus grande que dans cette supposition, si ce nombre est considérable; et l'on vient de voir que cela commence, lorsque le nombre donné est égal à quatre.

Considérons encore une urne qui renferme plusieurs boules blanches et noires. Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une boule blanche et une noire. On peut alors parier avec égalité, d'extraire une boule blanche, dans un tirage. Mais si l'urne renferme trois boules dont deux soient noires; il semble que pour l'égalité du pari, on doit donner deux tirages à celui qui parie d'extraire la boule blanche : on doit en donner trois, si l'urne renferme trois boules noires et une blanche, et ainsi du reste; ensorte que pour compenser par le nombre des tirages, l'inégalité des chances, il faut donner autant de tirages qu'il y a de chances contraires : on suppose toujours qu'après chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne. Mais il est facile de se convaincre que ce premier aperçu est erroné. En effet, dans le cas de deux boules noires sur une blanche, la probabilité d'extraire de l'urne, deux boules noires en deux tirages, est la seconde puissance de $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{9}$; mais cette probabilité ajoutée à celle d'amener une boule blanche en deux tirages, est la certitude ou l'unité; puisqu'il est certain que l'on doit amener deux boules noires, ou au moins une boule blanche; la probabilité de ce dernier cas est donc $\frac{5}{9}$ fraction plus grande que $\frac{1}{2}$. Il y aurait plus d'avantage encore à parier d'amener une boule blanche en cinq tirages, lorsque l'urne contient cinq boules noires et une blanche; ce pari est même avantageux en quatre tirages : il revient alors à celui d'amener six en quatre coups, avec un seul dé.

Le chevalier de Meré, ami de Pascal, et qui fit naître le calcul des probabilités, en excitant ce grand géomètre à s'en occuper, lui disait « qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette » raison. Si l'on entreprend de faire six avec un dé, il y a de l'avantage » à l'entreprendre en quatre coups, comme de 671 à 625. Si l'on » entreprend de faire sonnés avec deux dés, il y a désavantage » à l'entreprendre en 24 coups. Néanmoins 24 est à 36 nombre » de faces de deux dés, comme 4 est à 6 nombre des faces d'un » dé. Voilà, écrivait Pascal à Fermat, quel était son grand scan- » dale, qui lui faisait dire hautement, que les propositions n'étaient » pas constantes et que l'arithmétique se démentait..... Il a très-bon » esprit; mais il n'est pas géomètre : c'est, comme vous savez, un » grand défaut. » Le chevalier de Meré trompé par une fausse analogie, pensait que dans le cas de l'égalité des paris, le nombre des coups doit croître proportionnellement au nombre de toutes les chances possibles, ce qui n'est pas exact, mais ce qui approche d'autant plus de l'être, que ce nombre est plus grand.

Je mets encore au rang des illusions, l'application que Leibnitz et Daniel Bernoulli ont faite du calcul des probabilités, à la sommation des séries. Si l'on réduit la fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est l'unité plus une variable, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de cette variable; il est facile de voir qu'en supposant la variable égale à l'unité, la fraction devient $\frac{1}{2}$, et la suite devient, *plus un, moins un, plus un, moins un, etc.* En ajoutant les deux premiers termes, les deux suivans, et ainsi du reste, on transforme la suite dans une autre dont chaque terme est zéro. Grandi, jésuite italien, en avait conclu la possibilité de la création; parce que la suite étant toujours égale à $\frac{1}{2}$, il voyait cette fraction naître d'une infinité de zéros, ou du néant. Ce fut ainsi que Leibnitz crut voir l'image de la création, dans son Arithmétique binaire où il n'employait que les deux caractères zéro et l'unité. Il imagina que l'unité pouvait représenter Dieu; et zéro, le néant; et que l'Être Suprême avait tiré du néant, tous les êtres, comme l'unité avec le zéro, exprime tous les nombres dans ce système. Cette idée plut tellement à Leibnitz, qu'il en fit part au jésuite Grimaldi, président du tribunal des mathématiques à la Chine, dans l'espérance que cet emblême de la création convertirait au christianisme, l'empereur d'alors qui aimait particulièrement les sciences. Je ne rapporte ce trait, que pour montrer jusqu'à quel point les préjugés de l'enfance peuvent égarer les plus grands hommes.

Leibnitz toujours conduit par une métaphysique singulière et très-déliée, considéra que la suite, *plus un, moins un, plus un, etc.* devient l'unité ou zéro, suivant que l'on s'arrête à un nombre de termes, impair ou pair; et comme dans l'infini, il n'y a aucune raison de préférer le nombre pair à l'impair, on doit, suivant les règles des probabilités, prendre la moitié des résultats relatifs à ces deux espèces de nombres, et qui sont zéro et l'unité; ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la valeur de la série. Daniel Bernoulli a étendu depuis, ce raisonnement à la sommation des séries formées de termes périodiques. Mais toutes ces séries n'ont point, à proprement parler, de valeurs : elles n'en prennent que dans le cas où leurs termes sont multipliés par les puissances successives d'une variable moindre que l'unité. Alors, ces séries sont toujours convergentes, quelque petite que l'on suppose la différence de la variable à l'unité; et il est facile de démontrer que les valeurs assignées par Bernoulli, en vertu de la règle des probabilités, sont les valeurs mêmes des fractions génératrices des séries, lorsque l'on suppose dans ces fractions, la variable égale à l'unité. Ces valeurs sont encore les limites dont les séries approchent de plus en plus, à mesure que la variable approche de l'unité. Mais lorsque la variable est exactement égale à l'unité, les séries cessant d'être convergentes : elles n'ont de valeurs, qu'autant qu'on les arrête. La coïncidence remarquable de cette application du calcul des probabilités, avec les limites des valeurs des séries périodiques, suppose que les termes de ces séries sont multipliés par toutes les puissances consécutives de la variable. Mais ces séries peuvent résulter du développement d'une infinité de fractions différentes, dans lesquelles cela n'a pas lieu. Ainsi la série, *plus un, moins un, plus un, etc.* peut naître du développement d'une fraction dont le numérateur est l'unité plus la variable, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté du carré de la variable. En supposant la variable égale à l'unité, ce développement se change dans la série proposée, et la fraction génératrice devient égale à $\frac{2}{3}$; les règles des probabilités donneraient donc alors un faux résultat; ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnemens, surtout dans les sciences mathématiques, que la rigueur de leurs procédés doit éminemment distinguer.

Des divers moyens d'approcher de la certitude.

L'induction, l'analogie, des hypothèses fondées sur les faits et rectifiées sans cesse par de nouvelles observations, un tact heureux donné par la nature et fortifié par des comparaisons nombreuses de ses indications avec l'expérience; tels sont les principaux moyens de parvenir à la vérité.

Si l'on considère avec attention, la série des objets de même nature; on aperçoit entre eux et dans leurs changemens, des rapports et des lois qui se manifestent de plus en plus, à mesure que la série se prolonge, et qui, en s'étendant et se généralisant sans cesse, conduisent enfin au principe dont ils dépendent. Mais souvent ces lois et ces rapports sont enveloppés de tant de circonstances étrangères, qu'il faut une grande sagacité pour les démêler, et pour remonter à ce principe : c'est en cela que consiste le véritable génie des sciences. L'analyse et la philosophie naturelle doivent leurs plus importantes découvertes, à ce moyen fécond que l'on nomme *induction*. Newton lui a été redevable de son théorème du binome et du principe de la gravitation universelle. Il est difficile d'apprécier la probabilité de ses résultats. Elle se fonde sur ce que les rapports et les lois les plus simples, sont les plus communs : c'est ce qui se vérifie dans les formules de l'analyse, et ce que l'on retrouve dans les phénomènes naturels, dans la cristallisation, et dans les combinaisons chimiques. Cette simplicité de lois et de rapports ne paraîtra point étonnante, si l'on considère que tous les effets de la nature, ne sont que les résultats mathématiques d'un petit nombre de lois immuables.

Cependant l'induction, en faisant découvrir les principes généraux des sciences, ne suffit pas pour les établir en rigueur. Il faut toujours les confirmer par des démonstrations, ou par des expériences décisives; car l'histoire des sciences nous montre que l'induction a quelquefois conduit à des résultats inexacts. Je citerai pour exemple, un théorème de Fermat sur les nombres premiers. Ce grand géomètre qui avait profondément médité sur leur théorie, cherchait une formule qui ne renfermant que des nombres premiers, donnât directement un nombre premier plus grand qu'aucun nombre assignable. L'induction le conduisit à penser que deux élevé à une puissance qui était elle-même une puissance de deux, formait avec l'unité, un nombre premier. Ainsi deux élevé au carré, plus un, forme le nombre premier cinq : deux elevé à la seconde puissance de deux, ou seize forme avec un, le nombre premier dix-sept. Il trouva que cela était encore vrai pour la huitième et la seizième puissance de deux, augmentée de l'unité; et cette induction appuyée de plusieurs considérations arithmétiques, lui fit regarder ce résultat, comme général. Cependant il avoue qu'il ne l'avait pas encore démontré. En effet, Euler a reconnu que cela cesse d'avoir lieu pour la trente-deuxième puissance de deux, qui augmentée de l'unité, donne 4294967297, nombre divisible par 641.

Le chancelier Bacon, promoteur si éloquent de la vraie méthode philosophique, a fait de l'induction, un abus bien étrange, pour prouver l'immobilité de la terre. Voici comme il raisonne dans le *Novum Organum*, son plus bel ouvrage. Le mouvement des astres, d'orient en occident, est d'autant plus prompt, qu'ils sont plus éloignés de la terre. Ce mouvement est le plus rapide pour les étoiles : il se ralentit un peu pour Saturne, un peu plus pour Jupiter, et ainsi de suite, jusqu'à la lune et aux comètes les moins élevées. Il est encore perceptible dans l'atmosphère, surtout entre les tropiques, à cause des grands cercles que les molécules de l'air y décrivent; enfin il est presqu'insensible pour l'Océan; il est donc nul pour la terre. Mais cette induction prouve seulement que les astres ont des mouvemens propres, contraires au mouvement réel ou apparent qui emporte toute la sphère céleste d'orient en occident, et que ces mouvemens paraissent plus lents pour les astres plus éloignés; ce qui est conforme aux lois de l'optique. Bacon aurait dû être frappé de l'inconcevable vitesse qu'il faut supposer aux astres pour accomplir leur révolution diurne dans l'hypothèse de la terre immobile, et de l'extrême simplicité avec laquelle sa rotation explique comment des corps aussi distans les uns des autres, que les étoiles et les planètes, semblent tous assujétis à cette révolution. Quant à l'Océan et à l'atmosphère, il ne devait point assimiler leur mouvement à celui des astres, qui sont détachés de la terre; au lieu que l'air et la mer faisant partie du globe terrestre, ils doivent participer à son mouvement ou à son repos. Il est singulier que Bacon porté aux plus grandes vues, par son génie, n'ait point été entraîné par l'idée majestueuse que le système de Copernic offre de l'univers. Il pouvait cependant trouver en faveur de ce système, de fortes analogies, dans les découvertes de Galilée, qui lui étaient connues. Il a donné pour la recherche de la vérité, le précepte, et non l'exemple. Mais en insistant avec toute la force de la raison et de l'éloquence, sur la nécessité d'abandonner les subtilités insignifiantes de l'école, pour se livrer aux observations et aux expériences, et en indiquant la vraie méthode de s'élever aux causes générales des phénomènes; ce grand philosophe a contribué aux progrès immenses que l'esprit humain a faits dans le beau siècle où il a terminé sa carrière.

L'analogie est fondée sur la probabilité que les choses semblables ont des causes du même genre, et produisent les mêmes effets. Plus la similitude est parfaite, plus grande est cette probabilité. Ainsi nous jugeons sans aucun doute, que des êtres pourvus des mêmes organes, exécutant les mêmes choses, et communiquant ensemble, éprouvent les mêmes sensations, et sont mus par les mêmes desirs. La probabilité que les animaux qui se rapprochent de nous par leurs organes, ont des sensations analogues aux nôtres, quoiqu'un peu inférieure à celle qui est relative aux individus de notre espèce, est encore excessivement grande; et il a fallu toute l'influence des préjugés religieux, pour faire penser à quelques philosophes, que les animaux sont de purs automates. La probabilité de l'existence du sentiment décroît, à mesure que la similitude des organes avec les nôtres, diminue; mais elle est toujours très-forte, même pour les insectes. En voyant ceux d'une même espèce, exécuter des choses fort compliquées, exactement de la même manière, de générations en générations, et sans les avoir apprises; on est porté à croire qu'ils agissent par une sorte d'affinité, analogue à celle qui rapproche les molécules des cristaux, mais qui se mêlant au sentiment attaché à toute organisation animale, produit avec la régularité des combinaisons chimiques, des combinaisons beaucoup plus singulières : on pourrait peut-être, nommer *affinité animale*, ce mélange des affinités électives et du sentiment. Quoiqu'il existe beaucoup d'analogie entre l'organisation des plantes et celle des animaux; elle ne me paraît pas cependant suffisante pour étendre aux végétaux, la faculté de sentir; comme rien n'autorise à la leur refuser.

Le soleil faisant éclore par l'action bienfaisante de sa lumière et de sa chaleur, les animaux et les plantes qui couvrent la terre; nous jugeons par l'analogie, qu'il produit des effets semblables sur les autres planètes; car il n'est pas naturel de penser que la matière dont nous voyons l'activité se développer en tant de façons, est stérile sur une aussi grosse planète que Jupiter qui, comme le globe terrestre, a ses jours, ses nuits et ses années, et sur lequel les observations indiquent des changemens qui supposent des forces très-actives. Cependant ce serait donner trop d'extension à l'analogie, que d'en conclure la similitude des habitans des planètes, et de la terre. L'homme fait pour la température dont il jouit, et pour l'élément qu'il respire, ne pourrait pas, selon toute apparence, vivre sur les autres planètes. Mais ne doit-il pas y avoir une infinité d'organisations relatives aux diverses constitutions des globes de cet univers? Si la seule différence des élémens et des climats, met tant de variété dans les productions terrestres; combien plus doivent différer, celles des diverses planètes et de leurs satellites. L'imagination la plus active ne peut s'en former aucune idée; mais leur existence est très-vraisemblable.

Nous sommes conduits par une forte analogie, à regarder les étoiles, comme autant de soleils doués ainsi que le nôtre, d'un pouvoir attractif proportionnel à la masse et réciproque au carré des distances. Car ce pouvoir étant démontré pour tous les corps du système solaire, et pour leurs plus petites molécules; il paraît appartenir à toute la matière. Déjà, les mouvemens des petites étoiles que l'on a nommées *doubles* à cause de leur rapprochement, paraissent l'indiquer: un siècle au plus d'observations précises, en constatant leurs mouvemens de révolution les unes autour des autres, mettra hors de doute, leurs attractions réciproques.

L'analogie qui nous porte à faire de chaque étoile, le centre d'un système planétaire, est beaucoup moins forte que la précédente; mais elle acquiert de la vraisemblance, par l'hypothèse que nous avons proposée sur la formation des étoiles et du soleil; car dans cette hypothèse, chaque étoile ayant été comme le soleil, primitivement environnée d'une vaste atmosphère; il est naturel d'attribuer à cette atmosphère, les mêmes effets, qu'à l'atmosphère solaire, et de supposer qu'elle a produit en se condensant, des planètes et des satellites.

La méthode la plus sûre qui puisse nous guider dans la recherche de la vérité, consiste à s'élever par la voie de l'induction, des phénomènes particuliers, à des rapports de plus en plus étendus, jusqu'à ce que l'on arrive enfin à la loi générale dont ils dérivent. Ensuite on vérifie cette loi, soit par des expériences directes, lorsque cela est possible, soit en examinant si elle satisfait aux phénomènes connus; et si par une rigoureuse analyse, on les voit tous découler de cette loi, jusque dans leurs moindres détails; si d'ailleurs ils sont très-variés et très-nombreux; la science alors acquiert le plus haut degré de certitude et de perfection, qu'elle puisse atteindre. Telle est devenue l'astronomie, par la découverte de la pesanteur universelle. L'histoire des sciences fait voir que cette marche lente et pénible de l'induction, n'a pas toujours été celle des inventeurs. L'imagination impatiente de remonter aux causes, se plaît à créer des hypothèses; et souvent, elle dénature les faits, pour les plier à son ouvrage : alors, les hypothèses sont dangereuses. Mais quand on ne les envisage que comme des moyens de lier entre eux les phénomènes, pour en découvrir les lois; lorsqu'en évitant de leur attribuer de la réalité, on les rectifie sans cesse par de nouvelles observations; elles peuvent conduire aux véritables causes, ou du moins, nous mettre à portée de conclure des phénomènes observés, ceux que des circonstances données doivent faire éclore.

Si l'on essayait toutes les hypothèses que l'on peut former sur la cause des phénomènes; on parviendrait par voie d'exclusion, à la véritable. Ce moyen a été employé avec succès : quelquefois on est arrivé à plusieurs hypothèses qui expliquaient également bien tous les faits connus, et entre lesquelles les savans se sont partagés, jusqu'à ce que des observations décisives aient fait connaître la véritable. Alors il est intéressant pour l'histoire de l'esprit humain, de revenir sur ces hypothèses, de voir comment elles parvenaient à expliquer un grand nombre de faits, et de rechercher les changemens qu'elles doivent subir, pour rentrer dans celle de la nature. C'est ainsi que le système de Ptolémée, qui n'est que la réalisation des apperences célestes, se transforme dans l'hypothèse du mouvement des planètes autour du soleil, en y rendant égaux et parallèles à l'orbe solaire, les cercles et les épicycles que Ptolémée fait décrire annuellement, et dont il laisse la grandeur, indéterminée. Il suffit ensuite, pour changer cette hypothèse dans le vrai système du monde, de transporter en sens contraire, à la terre, le mouvement apparent du soleil.

Il est presque toujours impossible de soumettre au calcul, la probabilité des résultats obtenus par ces divers moyens : c'est ce qui a lieu pareillement pour les faits historiques. Mais l'ensemble des phénomènes expliqués ou des témoignages, est quelquefois tel, que sans pouvoir en apprécier la probabilité, on ne peut raisonnablement se permettre aucun doute à leur égard. Dans les autres cas, il est prudent de ne les admettre qu'avec beaucoup de réserve.

Notice historique sur le Calcul des Probabilités.

Depuis long-temps, on a déterminé dans les jeux les plus simples, les rapports des chances favorables ou contraires aux joueurs : les enjeux et les paris étaient réglés d'après ces rapports. Mais personne avant Pascal et Fermat, n'avait donné des principes et des méthodes pour soumettre cet objet au calcul, et n'avait résolu des questions de ce genre, un peu compliquées. C'est donc à ces deux grands géomètres qu'il faut rapporter les premiers élémens de la science des probabilités, dont la découverte peut être mise au rang des choses remarquables qui ont illustré le dix-septième siècle, celui de tous les siècles qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain. Le principal problème qu'ils résolurent tous deux par des voies différentes, consiste, comme on l'a vu précédemment, à partager équitablement l'enjeu, entre des joueurs dont les adresses sont égales, et qui conviennent de quitter une partie, avant qu'elle finisse; la condition du jeu étant que pour gagner la partie, il faut atteindre le premier, un nombre donné de points. Il est clair que le partage doit se faire proportionnellement aux probabilités respectives des joueurs, de gagner cette partie, probabilités qui dépendent des nombres de points qui leur manquent encore. La méthode de Pascal est fort ingénieuse, et n'est au fond, que l'emploi de l'équation aux différences partielles relative à ce problème, pour déterminer les probabilités successives des joueurs, en allant des nombres les plus petits aux suivans. Cette méthode est limitée au cas de deux joueurs: celle de Fermat, fondée sur les combinaisons, s'étend à un nombre quelconque de joueurs. Pascal crut d'abord qu'elle devait être, comme la sienne, restreinte à deux joueurs; ce qui établit entre eux, une discussion à la fin de laquelle Pascal reconnut la généralité de la méthode de Fermat.

Huyghens réunit les divers problèmes que l'on avait déjà résolus, et en ajouta de nouveaux, dans un petit Traité, le premier qui ait paru sur cette matière, et qui a pour titre, *De Ratiociniis in ludo aleæ*. Plusieurs géomètres s'en occupèrent ensuite : Huddes et le grand pensionnaire Witt en Hollande, et Halley en Angleterre, appliquèrent le calcul, aux probabilités de la vie humaine; et Halley publia pour cet objet, la première table de mortalité. Vers le même temps, Jacques Bernoulli proposa aux géomètres, divers problèmes de probabilité dont il donna depuis, des solutions. Enfin il composa son bel ouvrage intitulé *Ars conjectandi*, qui ne parut que sept ans après sa mort arrivée en 1706. La science des probabilités est beaucoup plus approfondie dans cet ouvrage, que dans celui d'Huyghens; l'auteur y donne une théorie générale des combinaisons et des suites, et l'applique à plusieurs questions difficiles, concernant les hasards. Cet ouvrage est encore remarquable par la justesse et la finesse des vues, par l'emploi de la formule du binome dans ce genre de questions, et par la démonstration de ce théorème, savoir, qu'en multipliant indéfiniment les observations et les expériences; le rapport des événemens de diverses natures, qui doivent arriver, approche de celui de leurs possibilités respectives, dans des limites dont l'intervalle se resserre de plus en plus, et devient moindre qu'aucune quantité assignable. Ce théorème est très-utile pour reconnaître par les observations, les lois et les causes des phénomènes. Bernoulli attachait avec raison, une grande importance à sa démonstration qu'il dit avoir méditée pendant vingt années.

Dans l'intervalle de la mort de Jacques Bernoulli, à la publication de son ouvrage; Montmort et Moivre firent paraître deux traités sur le calcul des probabilités. Celui de Montmort a pour titre, *Essai sur les Jeux de hasard :* il contient de nombreuses applications de ce calcul, aux divers jeux. L'auteur y a joint dans la seconde édition, quelques lettres dans lesquelles Nicolas Bernoulli donne des solutions ingénieuses de plusieurs problèmes difficiles, de probabilité. Le traité de Moivre, postérieur à celui de Montmort, parut d'abord dans les Transactions Philosophiques de l'année 1711. Ensuite l'auteur le publia séparément, et il l'a perfectionné successivement dans les trois éditions qu'il en a données. Cet ouvrage est principalement fondé sur la formule du binome; et les problèmes qu'il contient, ont, ainsi que leurs solutions, une grande généralité. Mais ce qui le distingue, est la théorie des suites récurrentes, et leur usage dans ces matières. Cette théorie est l'intégration des équations linéaires aux différences finies à coefficiens constans, intégration à laquelle Moivre parvient d'une manière très-heureuse. Comme il est toujours intéressant de connaître la marche des inventeurs; je vais exposer celle de Moivre, en l'appliquant à une suite récurrente dont la relation entre trois termes consécutifs est donnée. D'abord, il considère la relation entre les termes consécutifs d'une progression géométrique, ou l'équation à deux termes, qui l'exprime. En la rapportant aux termes inférieurs d'une unité, il la multiplie dans cet état, par un facteur constant, et il retranche le produit, de l'équation primitive. Par là, il obtient une relation entre trois termes consécutifs de la progression géométrique. Moivre considère ensuite une seconde progression géométrique dont la raison des termes, est le facteur même qu'il vient d'employer. Il diminue pareillement d'une unité, l'indice des termes, dans l'équation de cette nouvelle progression : dans cet état, il la multiplie par la raison des termes de la première progression, et il retranche le produit, de l'équation primitive; ce qui lui donne entre trois termes consécutifs de la seconde progression, une relation entièrement semblable à celle qu'il a trouvée pour la première progression. Puis il observe que si l'on ajoute terme à terme, les deux progressions; la même relation subsiste entre trois quelconques de ces sommes consécutives. Il compare les coefficiens de cette relation, à ceux de la relation des termes de la suite récurrente proposée; et il trouve pour déterminer les rapports des termes consécutifs des deux progressions, une équation du second degré dont les racines sont ces rapports. Par là, Moivre décompose la suite récurrente, en deux progressions géométriques multipliées, chacune, par une constante arbitraire qu'il détermine au moyen des deux premiers termes de la suite récurrente. Ce procédé est au fond, celui que Lagrange a depuis employé pour l'intégration des équations linéaires aux différences à coefficiens constans.

Très-peu de temps avant ces recherches de Moivre, Taylor avait donné dans son excellent ouvrage intitulé *Methodus incrementorum*, la manière d'intégrer l'équation linéaire aux différences du premier ordre, avec un coefficient variable, et un dernier terme fonction du seul indice. C'est donc à ces deux illustres géomètres, que l'on est redevable de la considération et de l'intégration de ce genre d'équations. A la vérité, les relations des termes consécutifs des progressions arithmétiques et géométriques, ne sont que les cas les plus simples des équations linéaires aux différences. Mais on ne les avait pas envisagés sous ce point de vue, l'un de ceux qui se rattachant à des théories générales, ont conduit à ces théories, et sont par là, de véritables découvertes.

Moivre a repris dans son ouvrage, le théorème de Jacques Bernoulli sur la probabilité des résultats donnés par un grand nombre d'observations. Il ne se contente pas de faire voir, comme Bernoulli, que le rapport des événemens qui doivent arriver, approchera sans cesse de celui de leurs possibilités respectives; il donne de plus une expression élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rapports, sera contenue dans des limites données. Pour cela, il détermine le rapport du plus grand terme du développement d'une puissance très-élevée du binome, à la somme de tous ses termes; et le logarithme hyperbolique de l'excès de ce terme, sur les termes qui en sont très-voisins. Le plus grand terme étant alors le produit d'un nombre considérable de facteurs; son calcul numérique devient impraticable. Pour l'obtenir par une approximation convergente, Moivre fait usage d'un théorème de Stirling sur le terme moyen du binome élevé à une haute puissance, théorème remarquable, surtout en ce qu'il introduit la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon, dans une expression qui semble devoir être étrangère à cette transcendante. Aussi Moivre fut-il singulièrement frappé de ce résultat que Stirling avait déduit de l'expression de la circonférence en produits infinis, expression à laquelle Wallis était parvenu par une singulière analyse qui contient les germes de la théorie si curieuse et si utile des intégrales définies.

Plusieurs savans parmi lesquels on doit distinguer Deparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maure, Simpson, Sussmilch, Price et Duvillard, ont réuni un grand nombre de données précieuses sur, la population, les naissances, les mariages et la mortalité. Ils ont donné des formules et des tables relatives aux rentes viagères, aux tontines, aux assurances, etc. Mais dans cette courte notice, je ne puis qu'indiquer ces travaux estimables, pour m'attacher aux idées originales. De ce nombre, est la distinction des espérances mathématique et morale, et le principe ingénieux que Daniel Bernoulli a donné pour soumettre celle-ci à l'analyse. Telle est encore l'application heureuse qu'il a faite du calcul des probabilités, à l'inoculation. On doit surtout, placer au nombre de ces idées originales, la considération directe des possibilités des événemens, tirées des événemens observés. Jacques Bernoulli et Moivre supposaient ces possibilités, connues; et ils cherchaient la probabilité que le résultat des expériences à faire, approchera de plus en plus de les représenter. Bayes, dans les Transactions Philosophiques de l'année 1763, a cherché directement la probabilité que les possibilités indiquées par des expériences déjà faites, sont comprises dans des limites données; et il y est parvenu d'une manière fine et très-ingénieuse, quoiqu'un peu embarrassée. Cet objet se rattache à la théorie de la probabilité des causes et des événemens futurs, conclue des événemens observés; théorie dont j'exposai quelques années après, les principes, avec la remarque de l'influence des inégalités qui peuvent exister entre des chances que l'on suppose égales. Quoique l'on ignore quels sont les événemens simples que ces inégalités favorisent; cependant cette ignorance même accroît souvent, la probabilité des événemens composés. En généralisant l'analyse et les problèmes concernant les probabilités, je fus conduit au calcul des différences finies partielles que Lagrange a traité depuis, par une méthode fort simple, et dont il a fait d'élégantes applications à ce genre de problèmes. La théorie des fonctions génératrices, que je donnai vers le même temps, comprend ces objets, parmi ceux qu'elle embrasse, et s'adapte d'elle-même et avec la plus grande généralité, aux questions de probabilité, les plus difficiles. Elle détermine encore par des approximations très-convergentes, les valeurs des fonctions composées d'un grand nombre de termes et de facteurs; et en faisant voir que la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon entre le plus souvent dans ces valeurs, elle montre qu'une infinité d'autres transcendantes peuvent également s'y introduire.

On a encore soumis au calcul, la probabilité des témoignages, les votes et les décisions des assemblées électorales et délibérantes. Tant de passions, d'intérêts divers et de circonstances compliquent les questions relatives à ces objets, qu'elles sont presque toujours insolubles. Mais la solution de problèmes plus simples, et qui ont avec elles beaucoup d'analogie, peut souvent répandre de grandes lumières sur ces questions difficiles.

L'une des plus intéressantes applications du calcul des probabilités, concerne les milieux qu'il faut choisir entre les résultats des observations. Plusieurs géomètres s'en sont occupés, et Lagrange a publié dans les Mémoires de Turin, une belle méthode pour déterminer ces milieux, quand la loi des erreurs des observations est connue. J'ai donné pour le même objet, une méthode fondée sur un artifice singulier qui peut être employé avec avantage dans d'autres questions d'analyse, et qui en permettant d'étendre indéfiniment dans tout le cours d'un long calcul, les fonctions qui doivent être limitées par la nature du problème, indique les modifications que chaque terme du résultat final doit recevoir en vertu de ces limitations. Mais ces méthodes supposent connue, la loi des erreurs des observations; ce qui n'est pas. Heureusement, j'ai trouvé que si les observations sont en grand nombre, la recherche des milieux que l'on doit choisir, devient indépendante de cette loi. On a vu précédemment, que chaque observation fournit une équation de condition, du premier degré, qui peut toujours être disposée de manière que tous ses termes soient dans le premier membre, le second étant zéro. L'usage de ces équations est une des causes principales de la grande précision de nos tables astronomiques; parce que l'on a pu ainsi faire concourir un nombre immense d'excellentes observations, à la détermination de leurs élémens. Lorsqu'il n'y a qu'un seul élément à déterminer, Côtes avait prescrit de préparer les équations de condition, de sorte que le coefficient de l'élément inconnu fût positif dans chacune d'elles, et d'ajouter ensuite toutes ces équations, pour former une équation finale d'où l'on tire la valeur de cet élément. La règle de Côtes fut suivie par tous les calculateurs. Mais quand il fallait déterminer plusieurs élémens; on n'avait aucune règle fixe pour combiner les équations de condition, de manière à obtenir les équations finales nécessaires : seulement, on choisissait pour chaque élément, les observations les plus propres à le déterminer. Ce fut pour obvier à ces tâtonnemens, que Legendre et Gauss imaginèrent d'ajouter les carrés des premiers membres des équations de condition, et d'en rendre la somme un *minimum*, en y faisant varier chaque élément inconnu : par ce moyen, on obtient directement autant d'équations finales, qu'il y a d'élémens. Mais les valeurs déterminées par ces équations, méritent-elles la préférence sur toutes celles que l'on peut obtenir par d'autres moyens? C'est ce que le calcul des probabilités pouvait seul apprendre. Je l'appliquai donc à cet objet important, et je fus conduit par une analyse délicate, à la règle que je viens d'indiquer, et qui réunit ainsi à l'avantage de faire connaître par un procédé régulier, les élémens cherchés, celui d'en donner les valeurs les plus avantageuses, ou qui ne laissent à craindre que les plus petites erreurs possibles.

On voit par cet Essai, que la théorie des probabilités n'est au fond, que le bon sens réduit au calcul : elle fait apprécier avec exactitude, ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte. Si l'on considère les méthodes analytiques auxquelles cette théorie a donné naissance, la vérité des principes qui lui servent de base, la logique fine et délicate qu'exige leur emploi dans la solution des problèmes, les établissemens d'utilité publique qui s'appuient sur elle, et l'extension qu'elle a reçue et qu'elle peut recevoir encore, par son application aux questions les plus importantes de la philosophie naturelle et de l'économie politique; si l'on observe ensuite que dans les choses mêmes qui ne peuvent être soumises au calcul, elle donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugemens, et qu'elle nous apprend à nous garantir des illusions qui souvent nous égarent; on verra qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations, et dont les résultats soient plus utiles.

Plan de l'Ouvrage.

Je donne dans mon ouvrage, l'analyse mathématique des résultats que je viens de présenter dans cette Introduction. Il est divisé en deux livres. Le premier a pour objet, le calcul des fonctions génératrices, qui sert de fondement à ma Théorie des Probabilités. Ce livre est divisé lui-même en deux parties : l'une renferme la théorie des fonctions génératrices, et l'autre contient la théorie des approximations des formules fonctions de grands nombres. Le rapprochement de ces deux théories montre avec évidence, que la seconde n'est qu'une extension de la première; et qu'elles doivent être considérées comme deux branches d'un même calcul. Les principes du calcul des probabilités et leur application aux questions les plus générales et les plus utiles que l'on puisse se proposer sur cette matière, sont l'objet du second livre, dans lequel je me suis spécialement attaché à déterminer la probabilité des causes et des résultats indiqués par un grand nombre d'observations, et à chercher les lois suivant lesquelles cette probabilité approche de ses limites, à mesure que les événemens se multiplient : c'est dans ces recherches, que le calcul des fonctions génératrices trouve ses applications les plus importantes.

THÉORIE ANALYTIQUE DES PROBABILITÉS.

LIVRE PREMIER.

CALCUL DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

PREMIÈRE PARTIE.

Des Fonctions génératrices.

Les grandeurs considérées en général, s'expriment communément par les lettres de l'alphabet, et c'est à Viète qu'est due cette notation commode qui transporte à la langue analytique, les alphabets des langues connues. L'application que Viète fit de cette notation, à la géométrie, à la théorie des équations et aux sections angulaires, forme une des époques remarquables de l'histoire des Mathématiques. Des signes très-simples expriment les corrélations des grandeurs. La position d'une grandeur à la suite d'une autre, suffit pour exprimer leur produit. Si ces grandeurs sont la même, ce produit est le carré ou la seconde puissance de cette grandeur. Mais au lieu de l'écrire deux fois, Descartes imagina de ne l'écrire qu'une fois, en lui donnant le nombre 2 pour exposant; et il exprima les puissances successives, en augmentant successivement cet exposant, d'une unité. Cette notation, en ne la considérant que comme une manière abrégée de représenter ces puissances, semble peu de chose; mais tel est l'avantage d'une langue bien faite, que ses notations les plus simples sont devenues souvent la source des théories les plus profondes; et c'est ce qui a eu lieu pour les exposans de Descartes. Wallis qui s'est attaché spécialement à suivre le fil de l'induction et de l'analogie, a été conduit par ce moyen, à exprimer les puissances radicales, par des exposans fractionnaires; et de même que Descartes exprimait par les exposans 2, 3, etc., les puissances secondes, troisièmes, etc. d'une grandeur; il exprima ses racines secondes, troisièmes, etc. par les exposans fractionnaires $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. En général, il exprima par l'exposant $\frac{m}{n}$, la racine n d'une grandeur élevée à la puissance m. En effet, suivant la notation de Descartes, cette expression a lieu dans le cas où m est divisible par n; et Wallis, par analogie, l'étendit à tous les cas. Il remarqua ensuite que la multiplication des puissances d'une même grandeur, revient à ajouter les exposans de ces puissances, qu'il faut retrancher dans leur division; ensorte que l'exposant $n-m$ indique le quotient de la puissance n d'une grandeur, divisée par sa puissance m; d'où il suit que ce quotient devenant l'unité, lorsque m est égale à n, toute grandeur ayant zéro pour exposant, est l'unité même. Si m surpasse n, l'exposant $n-m$ devient négatif, et le quotient devient l'unité divisée par la puissance $m-n$ de la grandeur. Wallis supposa donc généralement que l'exposant négatif $-\frac{m}{n}$ exprime l'unité divisée par la racine $n^{ième}$ de la grandeur élevée à la puissance m.

Ce fut dans son ouvrage intitulé *Arythmetica infinitorum*, que Wallis exposa ces remarques qui le conduisirent à sommer x^n, x étant supposé formé d'une infinité d'élémens pris pour unité; ce qui, suivant les notations actuelles, revient à intégrer la différentielle $x^n dx$. Il fit voir que cette intégrale prise depuis x nul, est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ce qui lui donna l'intégrale d'une suite formée de différentielles semblables.

En considérant ainsi l'intégrale $\int dx.(1-x^{\frac{1}{n}})^s$, lorsque n et s sont des nombres entiers, et lorsqu'elle est prise depuis x nul jusqu'à $x=1$, il trouva qu'elle est égale à $\frac{1.2.3.....n}{s+1.s+2....s+n}$. Si les indices n et s sont fractionnaires et égaux à $\frac{1}{2}$, cette intégrale exprime le rapport de la surface du cercle au carré de son diamètre. Wallis s'attacha donc à interpoler le produit précédent, dans le cas où n et s sont des nombres fractionnaires; problème entièrement nouveau à l'époque où cet illustre Géomètre s'en occupa, et qu'il parvint à resoudre par une méthode fort ingénieuse qui contient les germes des théories des interpolations et des intégrales définies, dont les géomètres se sont tant occupés, et qui sont l'objet d'une grande partie de cet ouvrage. Il obtint de cette manière, l'expression du rapport de la surface du cercle au carré de son diamètre, par un produit d'une infinité de facteurs, qui donne des valeurs de plus en plus approchées de ce rapport, à mesure que l'on considère un plus grand nombre de ces facteurs; résultat l'un des plus singuliers de l'analyse. Mais il est remarquable que Wallis qui avait si bien considéré les indices fractionnaires des puissances radicales, ait continué de noter ces puissances, comme on l'avait fait avant lui. On voit la notation des puissances radicales, par les exposans fractionnaires, employée pour la première fois, dans les lettres de Newton à Oldembourg, insérées dans le *Commercium Epistolicum*. En comparant par la voie de l'induction dont Wallis avait fait un si bel usage, les exposans des puissances du binome, avec les coefficiens des termes de son développement, dans le cas où ces exposans sont des nombres entiers; il détermina la loi de ces coefficiens, et il l'étendit par analogie, aux puissances fractionnaires et aux puissances négatives. Ces divers résultats fondés sur la notation de Descartes, montrent l'influence d'une notation heureuse sur toute l'analyse.

Cette notation a encore l'avantage de donner l'idée la plus simple et la plus juste des logarithmes qui ne sont en effet, que les exposans entiers et fractionnaires d'une même grandeur dont les diverses puissances représentent tous les nombres. Mais l'extension la plus importante que cette notation ait reçue, est celle des exposans variables; ce qui constitue le calcul exponentiel, l'une des branches les plus fécondes de l'analyse moderne. Leibnitz a indiqué le premier, dans les Actes de Leipsic pour 1682, les transcendantes à exposans variables, et par là il a complété le système des élémens dont une fonction finie peut être composée. Car toute fonction finie explicite se réduit en dernière analyse, à des grandeurs simples, ajoutées ou soustraites les unes des autres, multipliées ou divisées entr'elles, élevées à des puissances constantes ou variables. Les racines des équations formées de ces élémens, en sont des fonctions implicites. C'est ainsi que c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, le logarithme de a est la racine de l'équation transcendante $c^x - a = 0$. On peut considérer encore les quantités logarithmiques, comme des fonctions exponentielles dont les exposans sont infiniment petits. Ainsi $X \log X'$ est égal à $\frac{X'^{Xdx} - 1}{dx}$. Toutes les modifications de grandeur que l'on peut concevoir aux exposans, se trouvent donc représentées par les quantités exponentielles, algébriques et logarithmiques. Ces quantités et leurs fonctions embrassent par conséquent, toutes les fonctions finies explicites ; et les racines des équations formées de fonctions semblables, embrassent toutes les fonctions finies implicites.

Ces quantités sont essentiellement distinctes : l'exponentielle a^x, par exemple, ne peut jamais être identique avec une fonction algébrique de x. Car toute fonction algébrique est réductible dans une série descendante de la forme $k.x^n + k'.x^{n-n'} +$ etc. : or il est facile de démontrer que a étant supposé plus grand que l'unité, et x étant infini, a^x est infiniment plus grand que kx^n, quelque grands que l'on suppose k et n. Pareillement, il est aisé de voir que dans le cas de x infini, x est infiniment plus grand que $k(\log x)^n$. Les fonctions exponentielles, algébriques et logarithmiques d'une variable indéterminée, ne peuvent donc pas rentrer les unes dans les autres : les quantités algébriques tiennent le milieu entre les exponentielles et les logarithmiques ; les exposans, lorsque la variable est infinie, pouvant être considérés comme infinis dans les exponentielles, finis dans les quantités algébriques, et infiniment petits dans les quantités logarithmiques.

On peut encore établir en principe, qu'une fonction radicale d'une variable, ne peut pas être identique avec une fonction rationnelle de la même variable, ou avec une autre fonction radicale. Ainsi $(1+x^6)^{\frac{1}{4}}$, est essentiellement distinct de $(1+x^3)^{\frac{1}{3}}$, et de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Ces principes fondés sur la nature même des fonctions, peuvent être d'une grande utilité dans les recherches analytiques, en indiquant les formes dont les fonctions que l'on se propose de trouver, sont susceptibles, et en démontrant leur impossibilité dans un grand nombre de cas; mais alors il faut être bien sûr de n'omettre aucune des formes possibles. Ainsi la différentiation laissant subsister les quantités exponentielles et radicales, et ne faisant disparaître les quantités logarithmiques, qu'autant qu'elles sont multipliées par des constantes; on doit en conclure que l'intégrale d'une fonction différentielle ne peut renfermer d'autres quantités exponentielles et radicales, que celles qui sont contenues dans cette fonction. Par ce moyen, j'ai reconnu que l'on ne peut pas obtenir en fonction finie explicite ou implicite de la variable x, l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^2+6x^4}}$. J'ai démontré pareillement que les équations linéaires aux différences partielles du second ordre entre trois variables, ne sont pas le plus souvent, susceptibles d'être intégrées sous une forme finie; ce qui m'a conduit à une méthode générale pour les intégrer sous cette forme, lorsqu'elle est possible. Dans les autres cas, on ne peut obtenir une intégrale finie, qu'au moyen d'intégrales définies.

Leibnitz ayant adapté au calcul différentiel, une caractéristique très-commode, il imagina de lui donner les mêmes exposans qu'aux grandeurs; mais alors, ces exposans, au lieu d'indiquer les multiplications répétées d'une même grandeur, indiquent les différentiations répétées d'une même fonction. Cette extension nouvelle de la notation cartésienne, conduisit Leibnitz à ce théorème remarquable, savoir, que la différentielle $n^{ième}$ d'un produit xyz. etc., est égale à $(dx+dy+dz+\text{etc})^n$, pourvu que dans le développement de ce polynome, on applique à la caractéristique d, les exposans des puissances de dx, dy, dz, etc., et qu'ainsi l'on écrive $d^rx.d^{r'}y.d^{r''}z$.etc., au lieu de $(dx)^r.(dy)^{r'}.(dz)^{r''}$.etc., en ayant soin de changer d^0x, d^0y, d^0z, etc., en x, y, z, etc. Ce grand Géomètre observa de plus, que ce théorème subsiste, en y supposant n négatif, pourvu que l'on change les différentielles négatives en intégrales. Lagrange a suivi cette analogie singulière des puissances et des différences, dans tous ses développemens; et par une suite d'inductions très-fines et très-heureuses, il en a déduit des formules générales aussi curieuses qu'utiles, sur les transformations des différences et des intégrales les unes dans les autres, lorsque les variables ont des accroissemens finis divers, et lorsque ces accroissemens sont infiniment petits. Son mémoire sur cet objet, inséré dans le Recueil de l'Académie de Berlin pour l'année 1772, peut être regardé comme une des plus belles applications que l'on ait faites, de la méthode des inductions. La théorie des fonctions génératrices étend à des caractéristiques quelconques, la notation cartésienne : elle montre en même temps, avec évidence, l'analogie des puissances et des opérations indiquées par ces caractéristiques; et nous allons voir tout ce qui concerne les séries, et l'intégration des équations linéaires aux différences, en découler avec une extrême facilité.

CHAPITRE

CHAPITRE PREMIER.

Des Fonctions génératrices, à une variable.

1. Soit y_x une fonction quelconque de x; si l'on forme la suite infinie

$$y_0 + y_1.t + y_2.t^2 + y_3.t^3 \ldots\ldots + y_x.t^x + y_{x+1}.t^{x+1} \ldots\ldots + y_\infty.t^\infty;$$

on peut toujours concevoir une fonction de t, qui développée suivant les puissances de t, donne cette suite : cette fonction est ce que je nomme *fonction génératrice* de y_x.

La fonction génératrice d'une variable quelconque y_x, est donc généralement une fonction de t, qui développée suivant les puissances de t, a cette variable pour coefficient de t^x; et réciproquement, la variable correspondante d'une fonction génératrice, est le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction suivant les puissances de t; ensorte que l'exposant de la puissance de t, indique le rang que la variable y_x occupe dans la série que l'on peut concevoir prolongée indéfiniment à gauche, relativement aux puissances négatives de t.

Il suit de ces définitions, que u étant la fonction génératrice de y_x, celle de y_{x+r} est $\frac{u}{t^r}$; car il est visible que le coefficient de t^x dans $\frac{u}{t^r}$ est égal à celui de t^{x+r} dans u; par conséquent il est égal à y_{x+r}.

Le coefficient de t^x dans $u.\left(\frac{1}{t} - 1\right)$ est donc égal à $y_{x+1} - y_x$, ou à la différence des deux quantités consécutives y_{x+1} et y_x, différence que nous désignerons par $\Delta.y_x$, Δ étant la caractéristique des différences finies. On a donc la fonction génératrice de la différence finie d'une quantité variable, en multipliant par $\frac{1}{t}-1$, la fonction génératrice de la quantité elle-même. La fonction génératrice de la différence finie de $\Delta.y_x$, différence que l'on désigne par $\Delta^2.y_x$, est ainsi $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$; celle de la différence finie de $\Delta^2.y_x$ ou $\Delta^3.y^x$, est $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^3$; d'où l'on peut généralement conclure que la fonction génératrice de la différence finie $\Delta^i.y_x$ est $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$.

Pareillement, le coefficient de t^x dans le développement de

$$\cancel{u.\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\frac{e}{t^3}\ldots\ldots+\frac{q}{t^n}\right)}$$

est

$$a.y_x+b.y_{x+1}+c.y_{x+2}+e.y_{x+3}\ldots\ldots+q.y_{x+n};$$

en nommant donc $\nabla.y_x$ cette quantité, sa fonction génératrice sera

$$u.\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\ldots\ldots+\frac{q}{t^n}\right).$$

Si l'on nomme $\nabla^2.y_x$ ce que devient $\nabla.y_x$ lorsqu'on y change y_x dans $\nabla.y_x$; si l'on nomme pareillement $\nabla^3.y_x$ ce que devient $\nabla^2.y_x$ lorsqu'on y change $\nabla.y_x$ dans $\nabla^2.y_x$, et ainsi de suite; leurs fonctions génératrices correspondantes seront

$$u.\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\ldots\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^2;$$
$$u.\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\ldots\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^3;$$
etc.;

et généralement la fonction génératrice de $\nabla^i.y_x$ sera

$$u.\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\ldots\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^i.$$

De là il est facile de conclure généralement que la fonction génératrice de $\Delta^i.\nabla^i.y_{x+r}$ est

$$\frac{u}{t^r}.\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\ldots\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^i.\left(\frac{1}{t}-1\right)^i.$$

On peut généraliser encore ces résultats, en supposant que $\nabla.y_x$

représente une fonction quelconque linéaire finie ou infinie, de y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, etc.; que $\nabla^2.y_x$ soit ce que devient $\nabla.y_x$, lorsqu'on y change y_x dans $\nabla.y_x$; que $\nabla^3.y_x$ soit ce que devient $\nabla^2.y_x$, lorsqu'on y change $\nabla.y_x$ dans $\nabla^2.y_x$, et ainsi de suite; u étant la fonction génératrice de y_x, $u.s^i$ sera la fonction génératrice de $\nabla^i.y_x$, s étant ce que devient $\nabla.y_x$, lorsqu'on y change y_x dans l'unité, y_{x+1} dans $\frac{1}{t}$, y_{x+2} dans $\frac{1}{t^2}$, etc. Cela est encore vrai, lorsque i est un nombre négatif, ou même fractionnaire et incommensurable, en faisant toutefois à ce résultat, des modifications convenables.

Représentons par Σ la caractéristique des intégrales finies, et nommons z la fonction génératrice de $\Sigma^i.y_x$, u étant la fonction génératrice de y_x; $z.\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$ sera par ce qui précède, la fonction génératrice de y_x. Mais cette fonction doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives de t, se réduire à u qui ne renferme que des puissances positives de t, si l'on n'étend l'intégrale multiple $\Sigma^i.y_x$ qu'aux valeurs positives de x; on aura donc alors

$$z.\left(\frac{1}{t}-1\right)^i = u + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} \ldots\ldots + \frac{F}{t^i};$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{u.t^i + A.t^{i-1} + B.t^{i-2} + C.t^{i-3} \ldots\ldots + F}{(1-t)^i},$$

A, B, C..... F étant des constantes arbitraires qui répondent aux i constantes arbitraires qu'introduisent les i intégrations successives de $\Sigma^i.y_x$.

En faisant abstraction de ces constantes, la fonction génératrice de $\Sigma^i.y_x$ est $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-i}$; ensorte que l'on obtient cette fonction génératrice, en changeant i dans $-i$, dans la fonction génératrice de $\Delta^i.y_x$; $\Delta^{-i}.y_x$ est donc alors égale à $\Sigma^i.y_x$; c'est-à-dire que les différences négatives se changent en intégrales. Mais si l'on a égard aux constantes arbitraires, il faut, en passant des puissances positives de $\frac{1}{t}-1$ à ses puissances négatives, augmenter u de la série $\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} +$ etc., prolongée jusqu'à ce que le nombre de ses termes soit égal à l'exposant de ces puissances. On peut appliquer des considérations semblables, à la fonction génératrice de $\nabla^i.y_x$.

On voit par ce qui précède, de quelle manière les fonctions génératrices se forment de la loi des variables correspondantes. Voyons maintenant comment les variables se déduisent de leurs fonctions génératrices. s étant une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, si l'on développe s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, et que l'on désigne par $\frac{k}{t^n}$ un terme quelconque de ce développement; le coefficient de t^x dans $\frac{ku}{t^n}$, sera $k.y_{x+n}$; on aura donc le coefficient de t^x dans $u.s^i$, coefficient que nous avons désigné précédemment par $\nabla^i.y_x$, 1°. en substituant dans s, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$; 2°. en développant ce que devient alors s^i suivant les puissances de y_x, et en transportant à l'indice x, l'exposant de la puissance de y_x; c'est-à-dire, en écrivant y_{x+1} au lieu de $(y_x)^1$; y_{x+2} au lieu de $(y_x)^2$, etc.; et en multipliant les termes indépendans de y_x, et qui peuvent être censés avoir $(y_x)^0$ pour facteur, par y_x. Lorsque la caractéristique ∇ se change en Δ, s est, par ce qui précède, égal à $\frac{1}{t}-1$; on a donc alors

$$\Delta^i.y_x = y_{x+i} - i.y_{x+i-1} + \frac{i.(i-1)}{1.2}.y_{x+i-2} - \text{etc.}$$

Si au lieu de développer s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$, et que l'on désigne par $k.\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$, un terme quelconque de ce développement; le coefficient de t^x dans $ku.\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ sera $k.\Delta^n.y_x$; on aura donc $\nabla^i.y_x$; 1°. en substituant dans s, Δy_x au lieu de $\frac{1}{t}-1$, ou, ce qui revient au même, $1+\Delta.y_x$ au lieu de $\frac{1}{t}$; 2°. en développant ce que devient alors s^i suivant les puissances de $\Delta.y_x$, et en appliquant à la caractéristique Δ, les exposans des puissances de $\Delta.y_x$, c'est-à-dire en écrivant $\Delta.y_x$ au lieu de $(\Delta.y_x)^1$, $\Delta^2.y_x$ au lieu de $(\Delta.y_x)^2$, etc., et en multipliant par $(\Delta . y_x)^0$, ou, ce qui est la même chose, par y_x les termes indépendans de $\Delta . y_x$.

Généralement, si l'on considère s comme une fonction de r, r étant une fonction de $\frac{1}{t}$, telle que le coefficient de t^x dans ur, soit $\square . y_x$; on aura $\nabla^i . y_x$, en substituant dans s, $\square . y_x$ au lieu de r; en développant ensuite s^i suivant les puissances de $\square . y_x$, et en appliquant à la caractéristique $\square$, les exposans de $\square . y_x$, c'est-à-dire, en écrivant $\square . y_x$ au lieu de $(\square . y_x)$, $\square^2 . y_x$ au lieu de $(\square . y_x)^2$, etc.; et en multipliant par y_x les termes indépendans de $\square . y_x$.

Le développement de $\nabla^i . y_x$ par une série ordonnée suivant les variations successives $\square . y_x$, $\square^2 . y_x$, etc., se réduit donc à la formation de la fonction génératrice de y_x, au développement de cette fonction, suivant les puissances d'une fonction donnée; enfin, au retour de la fonction génératrice ainsi développée, aux coefficiens variables correspondans; les exposans des puissances du développement de la fonction génératrice, devenant ceux de la caractéristique de ces coefficiens. On voit ainsi l'analogie des puissances avec les différences, ou avec toute autre combinaison des coefficiens variables consécutifs. Le passage de ces coefficiens à leurs fonctions génératrices, et le retour de ces fonctions développées aux coefficiens, constituent le *calcul des fonctions génératrices*. Les applications suivantes en feront connaître l'esprit et les avantages.

De l'interpolation des suites à une variable, et de l'intégration des équations différentielles linéaires.

3. Toute la théorie de l'interpolation des suites se réduit à déterminer, quel que soit i, la valeur de y_{x+i}, en fonction des termes qui précèdent ou qui suivent y_x. Pour cela, on doit observer que y_{x+i} est égal aux coefficiens de t^{x+i} dans le développement de u, et par conséquent égal au coefficient de t^x dans le développement de $\frac{u}{t^i}$; or on a

$$\frac{u}{t^i} = u . \left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i = u . \left\{ \begin{array}{l} 1 + i . \left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{i.(i-1)}{1.2} . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \\ + \frac{i.(i-1).(i-2)}{1.2.3} . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^3 + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

De plus, le coefficient de t^x, dans le developpement de u, est y_x; ce coefficient dans le développement de $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)$, est $\Delta.y_x$; dans le développement de $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$, il est égal à $\Delta^2.y_x$, et ainsi de suite; l'équation précédente donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens,

$$y_{x+i}=y_x+i.\Delta.y_x+\frac{i.(i-1)}{1.2}.\Delta^2.y_x+\frac{i.(i-1).(i-2)}{1.2.3}.\Delta^3.y_x+\text{etc.}$$

Cette équation ayant lieu quel que soit i, en le supposant même fractionnaire, sert à interpoler les suites dont les différences successives vont en décroissant.

Si l'on a l'équation aux différences finies

$$\Delta^n.y_x=0;$$

la série précédente se termine, et l'on a, quel que soit i, en faisant x nul,

$$y_i=y_0+i.\Delta.y_0+\frac{i.(i-1)}{1.2}.\Delta^2.y_0\ldots\ldots+\frac{i.(i-1)\ldots\ldots(i-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}.\Delta^{n-1}.y_0.$$

C'est l'intégrale complète de l'équation proposée aux différences, y_0, $\Delta.y_0,\ldots\ldots\Delta^{n-1}.y_0$ étant les n constantes arbitraires de cette intégrale.

Toutes les manières de développer la puissance $\frac{1}{t^i}$, donnent autant de manières différentes d'interpoler les suites. Soit, par exemple,

$$\frac{1}{t}=1+\frac{\alpha}{t^r};$$

en développant $\frac{1}{t^i}$ suivant les puissances de α, par la formule (p) du n° 21 du second livre de *la Mécanique céleste*, on aura

$$\frac{u}{t^i}=u.\left\{\begin{array}{l}1+i.\alpha+\frac{i.(i+2r-1)}{1.2}.\alpha^2+\frac{i.(i+3r-1).(i+3r-2)}{1.2.3}.\alpha^3\\+\frac{i.(i+4r-1).(i+4r-2).(i+4r-3)}{1.2.3.4}.\alpha^4+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

α étant égal à $t^r.\left(\frac{1}{t}-1\right)$, le coefficient de t^x dans le développement de $u\alpha$ est, par le n° 2, $\Delta . y_{x-r}$; ce même coefficient dans $u.\alpha^2$ est $\Delta^2 . y_{x-2r}$, et ainsi de suite. L'équation précédente donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens,

$$y_{x+i} = y_x + i.\Delta . y_{x-r} + \frac{i.(i+2r-1)}{1.2}.\Delta^2 . y_{x-2r}$$
$$+ \frac{i.(i+3r-1).(i+3r-2)}{1.2.3}.\Delta^3 . y_{x-3r} + \text{etc.}$$

4. Voici maintenant une méthode générale d'interpolation, qui a l'avantage de s'appliquer, non-seulement aux séries dont les différences des termes finissent par être nulles, mais encore aux séries dont la dernière raison des termes est celle d'une suite quelconque récurrente.

Supposons d'abord que l'on ait

$$t.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 = z; \qquad (1)$$

et cherchons la valeur de $\frac{1}{t^i}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de z. Il est clair que $\frac{1}{t^i}$ est égal au coefficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$. Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $1 - \theta . t$, on aura celle-ci

$$\frac{1-\theta . t}{1-\theta.\left(\frac{1}{t}+t\right)+\theta^2}.$$

L'équation (1) donne

$$\frac{1}{t} + t = 2 + z;$$

ce qui change la fraction précédente dans celle-ci,

$$\frac{1-\theta . t}{(1-\theta)^2 - z.\theta};$$

or on a

$$\frac{1}{(1-\theta)^2 - z.\theta} = \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{z\theta}{(1-\theta)^4} + \frac{z^2\theta^2}{(1-\theta)^6} + \text{etc.};$$

d'ailleurs le coefficient de θ^r dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^s}$, est

$$\frac{s.(s+1).(s+2)\ldots.(s+r-1)}{1.2.3\ldots.r},$$

d'où il suit que le coefficient de θ^i est, 1°. $i+1$, dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^2}$; 2°. $\frac{i.(i+1).(i+2)}{1.2.3}$, dans le développement de $\frac{\theta}{(1-\theta)^4}$; 3°. $\frac{(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3)}{1.2.3.4.5}$, dans le développement de $\frac{\theta^2}{(1-\theta)^6}$, et ainsi du reste; donc si l'on nomme Z le coefficient de θ^i dans le développement de la fonction

$$\frac{1}{(1-\theta)^2-z.\theta};$$

on aura

$$Z=i+1+\frac{i.(i+1).(i+2)}{1.2.3}.z+\frac{(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3)}{1.2.3.4.5}.z^2$$
$$+\frac{(i-2).(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3).(i+4)}{1.2.3.4.5.6.7}.z^3+\text{etc.},$$

ou

$$Z=(i+1).\left\{1+\frac{[(i+1)^2-1].z}{1.2.3}+\frac{[(i+1)^2-1].[(i+1)^2-4].z^2}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}\right\};$$

si l'on nomme ensuite Z' le coefficient de θ^i, dans le développement de

$$\frac{\theta}{(1-\theta)^2-z.\theta};$$

on aura Z' en changeant i en $i-1$ dans Z, ce qui donne

$$Z'=i.\left\{1+\frac{(i^2-1).z}{1.2.3}+\frac{(i^2-1).(i^2-4).z^2}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}\right\};$$

on aura ainsi $Z-t.Z'$ pour le coefficient de θ^i dans le développement de la fraction

$$\frac{1-\theta.t}{(1-\theta)^2-z\theta};$$

ce sera par conséquent l'expression de $\frac{1}{t^i}$; partant

$$\frac{u}{t^i}=u.(Z-t\,Z').$$

Cela

Cela posé, le coefficient de t^x dans $\frac{u}{t^i}$, est y_{x+i}. Ce même coefficient, dans un terme quelconque de $u.Z$, tel que $k.u.z^r$, ou $k.u.t^r.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{2r}$ est, par le n°. 2, $k.\Delta^{2r}.y_{x-r}$. Dans un terme quelconque de $u.t.Z'$, tel que $k.u.t.z^r$ ou $k.u.t^{r+1}.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{2r}$, ce coefficient est $k.\Delta^{2r}.y_{x-r-1}$; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices à leurs coefficiens,

$$y_{x+i}=(i+1).\left\{\begin{array}{l} y_x+\frac{[(i+1)^2-1]}{1.2.3}.\Delta^2.y_{x-1} \\ \quad +\frac{[(i+1)^2-1].[(i+1)^2-4]}{1.2.3.4.5}.\Delta^4.y_{x-2}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$
$$-i.\left\{y_{x-1}+\frac{(i^2-1)}{1.2.3}.\Delta^2.y_{x-2}+\frac{(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5}.\Delta^4.y_{x-3}+\text{etc.}\right\}.$$

On peut donner les formes suivantes à l'expression précédente. Soit Z'' ce que devient Z' lorsqu'on y change i dans $i-1$; et par conséquent, ce que devient Z lorsqu'on y change i dans $i-2$. L'équation

$$\frac{1}{t^i}=Z-t.Z'$$

donnera

$$\frac{1}{t^{i-1}}=Z'-t.Z'';$$

par conséquent,

$$\frac{1}{t^i}=\frac{Z'}{t}-Z''.$$

En ajoutant ces deux valeurs de $\frac{1}{t^i}$, et prenant la moitié de leur somme, on aura

$$\frac{1}{t^i}=\tfrac{1}{2}.Z-\tfrac{1}{2}.Z''+\tfrac{1}{2}.(1+t).\left(\frac{1}{t}-1\right).Z';$$

or on a

$$\tfrac{1}{2}.Z-\tfrac{1}{2}.Z''=1+\frac{i^2}{1.2}.z+\frac{i^2.(i^2-1)}{1.2.3.4}.z^2+\frac{i^2.(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5.6}.z^3+\text{etc.}$$

partant

$$\frac{u}{t^i}=u.\left\{1+\frac{i^2}{1.2}.t.\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+\frac{i^2.(i^2-1)}{1.2.3.4}.t^2.\left(\frac{1}{t}-1\right)^4+\text{etc.}\right\}$$
$$+\frac{i}{2}.u.(1+t).\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{t}-1+\frac{(i^2-1)}{1.2.3}.t.\left(\frac{1}{t}-1\right)^3 \\ \quad +\frac{(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5}.t^2.\left(\frac{1}{t}-1\right)^5+\text{etc.}\end{array}\right\};$$

d'où l'on conclut, en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens,

$$
\begin{aligned}
y_{x+i}=y_x+\frac{i^2}{1.2}.\Delta^2.y_{x-1}+\frac{i^2.(i^2-1)}{1.2.3.4}.\Delta^4.y_{x-2}& \\
+\frac{i^2.(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5.6}.\Delta^6.y_{x-3}+\text{etc.}& \\
+\frac{i}{2}.(\Delta.y_x+\Delta.y_{x-1})+\frac{i}{2}.\frac{(i^2-1)}{1.2.3}.(\Delta^3.y_{x-1}+\Delta^3.y_{x-2})& \\
+\frac{i}{2}.\frac{(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5}.(\Delta^5.y_{x-2}+\Delta^5.y_{x-3})+\text{etc.}&
\end{aligned}
$$

Cette formule sert à interpoler entre un nombre impair $2x+1$ de quantités équidistantes; l'intervalle commun qui les sépare étant pris pour unité, y_x est la moyenne des grandeurs $y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots y_{2x}$; et i est la distance de y_{x+i} à cette moyenne. L'expression précédente est alors symétrique relativement à ces grandeurs; car $\Delta^2.y_{x-1}$, par exemple, est egal à $y_{x+1}-2y_x+y_{x-1}$, et $\Delta.y_x+\Delta.y_{x-1}$ est égal à $y_{x+1}-y_{x-1}$. Ainsi les quantités placées au-dessus et au-dessous de la moyenne y_x, entrent de la même manière dans cette expression.

Si l'on change i en $i+1$ dans la dernière expression de $\frac{u}{t^i}$, et si l'on en retranche cette expression elle-même; on aura l'expression de $\frac{u}{t^{i+1}}-\frac{u}{t^i}$, ou de $\frac{u}{t^i}.\left(\frac{1}{t}-1\right)$; en divisant ensuite cette valeur par $\frac{1}{t}-1$, on aura

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{t^i}=\frac{u}{2}.(1+t).&\left\{\begin{array}{l}1+\frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]}{1.2}.t.\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 \\ \quad +\frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}].[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}]}{1.2.3.4}.t^2.\left(\frac{1}{t}-1\right)^4+\text{etc.}\end{array}\right\} \\
+(i+\tfrac{1}{2}).u.t.\left(\frac{1}{t}-1\right).&\left\{\begin{array}{l}1+\frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]}{1.2.3}.t.\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 \\ \quad +\frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}].[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}]}{1.2.3.4.5}.t^2.\left(\frac{1}{t}-1\right)^4+\text{etc.}\end{array}\right\}.
\end{aligned}
$$

En repassant des fonctions génératrices aux coefficiens, on aura

$$y_{x+i}=\tfrac{1}{2}.(y_x+y_{x-1})+\frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]}{1.2}.\tfrac{1}{2}.(\Delta^2.y_{x-1}+\Delta^2.y_{x-2})$$
$$+\frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}].[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}]}{1.2.3.4}.\tfrac{1}{2}.(\Delta^4.y_{x-2}+\Delta^4.y_{x-3})+\text{etc.}$$
$$+(i+\tfrac{1}{2}).\left\{\begin{array}{l}\Delta.y_{x-1}+\frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]}{1.2.3}.\Delta^3.y_{x-2}\\ \quad+\frac{[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}].[(i+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}]}{1.2.3.4.5}.\Delta^5.y_{x-3}+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Cette formule sert à interpoler entre un nombre pair $2x$ de quantités équidistantes, y_{x-1} et y_x étant les deux quantités moyennes. Elle est disposée d'une manière symétrique relativement aux quantités également distantes du milieu de l'intervalle qui sépare les quantités extrêmes : ce milieu est l'origine des valeurs de $i+\frac{1}{2}$, qui sont positives au-dessus, et négatives au-dessous.

Toutes ces expressions de y_{x+i} sont identiques, et telles que si l'on conçoit une courbe parabolique dont i soit l'abscisse, et y_{x+i} l'ordonnée, et dont l'équation soit celle qui donne l'expression de y_{x+i}; cette courbe passera par les extrémités des ordonnées y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, etc.; y_{x-1}, y_{x-2}, etc. On peut ainsi, en prenant les différences finies successives d'un nombre quelconque de coordonnées, faire passer une courbe parabolique par les extrémités de ces coordonnées.

5. Supposons généralement

$$z=a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\frac{e}{t^3}\ldots\ldots+\frac{p}{t^{n-1}}+\frac{q}{t^n};\qquad (a)$$

on aura

$$\frac{1}{t^n}=\frac{z-a}{q}-\frac{b}{qt}-\frac{c}{qt^2}\ldots\ldots-\frac{p}{qt^{n-1}};$$

ce qui donne

$$\frac{1}{t^{n+1}}=\frac{z-a}{qt}-\frac{b}{qt^2}-\frac{c}{qt^3}\ldots\ldots-\frac{p}{qt^n};$$

éliminant $\frac{1}{t^n}$ du second membre de cette équation, au moyen de la proposée (a), on aura

$$\frac{1}{t^{n+1}}=-\frac{p.(z-a)}{q^2}+\frac{pb+q.(z-a)}{q^2.t}+\text{etc.}$$

Cette expression de $\frac{1}{t^{n+1}}$ ne renferme que des puissances de $\frac{1}{t}$ d'un ordre inférieur à n. En la multipliant par $\frac{1}{t}$, on aura une expression de $\frac{1}{t^{n+2}}$, qui renfermera la puissance $\frac{1}{t^n}$; mais en éliminant encore cette puissance, au moyen de la proposée (a), on réduira l'expression de $\frac{1}{t^{n+2}}$ à ne contenir que des puissances de $\frac{1}{t}$ inférieures à n. En continuant ainsi, on parviendra à une expression de $\frac{1}{t^i}$, qui ne renfermera que des puissances de $\frac{1}{t}$ moindres que n, et qui sera par conséquent de cette forme

$$\frac{1}{t^i} = Z + \frac{1}{t}.Z^{(1)} + \frac{1}{t^2}.Z^{(2)} \ldots\ldots + \frac{1}{t^{n-1}}.Z^{(n)},$$

Z, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, etc. étant des fonctions rationnelles et entières de z, dans lesquelles la plus haute puissance de z ne surpasse pas $\frac{i-n}{n}$.

Cette manière de déterminer $\frac{1}{t^i}$ serait très-pénible, si i était un grand nombre; elle conduirait d'ailleurs difficilement à l'expression générale de cette quantité. On y parviendra directement de la manière suivante.

[illegible]t égal au coefficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$. Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par

$$(a-z).\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} \ldots\ldots + p.\theta + q;$$

et si dans le numérateur on substitue au lieu de z, sa valeur $a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} +$ etc., on aura

$$\frac{b.\theta^{n-1}.\left(1-\frac{\theta}{t}\right) + c.\theta^{n-2}.\left(1-\frac{\theta^2}{t^2}\right) + e.\theta^{n-3}.\left(1-\frac{\theta^3}{t^3}\right)\ldots\ldots + q.\left(1-\frac{\theta^n}{t^n}\right)}{\left(1-\frac{\theta}{t}\right).(a.\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} \ldots + p.\theta + q - z.\theta^n)};$$

en divisant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $1 - \frac{\theta}{t}$, elle devient

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} + e.\theta^{n-3} \ldots\ldots + q \\ + \frac{\theta}{t}.(c.\theta^{n-2} + e.\theta^{n-3} \ldots\ldots\ldots\ldots + q) \\ + \frac{\theta^2}{t^2}.(e.\theta^{n-3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q) \\ + \text{etc.} \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t^{n-1}}.q \end{array}\right\}}{a.\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} \ldots\ldots + p.\theta + q - z.\theta^n}.$$

La recherche du coefficient de θ^t dans le développement de cette fraction, se réduit à déterminer, quel que soit r, le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction

$$\frac{1}{a.\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} \ldots\ldots + p.\theta + q - z.\theta^n}.$$

Pour cela, considérons généralement la fraction $\frac{P}{Q}$, P et Q étant des fonctions rationnelles et entières de θ, la première étant d'un ordre inférieur à la seconde. Supposons que Q ait un facteur $\theta - \alpha$ élevé à la puissance s, ensorte que l'on ait

$$Q = (\theta - \alpha)^s.R,$$

R étant une fonction rationnelle et entière de θ. On pourra décomposer la fraction $\frac{P}{Q}$ en deux autres $\frac{A}{(\theta-\alpha)^s} + \frac{B}{R}$, A et B étant des fonctions rationnelles et entières de θ; la première, de l'ordre $s-1$, et la seconde, d'un ordre inférieur à R; car il est visible qu'en substituant pour A et B, des fonctions de cette nature, avec des coefficiens indéterminés; en réduisant ensuite les deux fractions au même dénominateur, qui devient alors égal à Q; en égalant enfin la somme de leurs numérateurs à P; la comparaison des puissances semblables de θ, donnera autant d'équations qu'il y a de coefficiens indéterminés. Cela posé, l'équation

$$\frac{A}{(\theta-\alpha)^s} + \frac{B}{R} = \frac{P}{(\theta - \alpha)^s.R}$$

donne

$$A = \frac{P}{R} - \frac{B.(\theta - \alpha)^s}{R}.$$

Si l'on considère A, B, P et R comme des fonctions rationnelles et entières de $\theta - \alpha$, A sera une fonction de l'ordre $s - 1$, et par conséquent il sera égal au développement de $\frac{P}{R}$, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de $\theta - \alpha$, pourvu que l'on s'arrête à la puissance $s - 1$ inclusivement. Soit donc

$$\frac{P}{R} = u_0 + u_1.(\theta - \alpha) + u_2.(\theta - \alpha)^2 + \text{etc.};$$

on aura

$$\frac{A}{(\theta - \alpha)^s} = \frac{u_0}{(\theta - \alpha)^s} + \frac{u_1}{(\theta - \alpha)^{s-1}} + \frac{u_2}{(\theta - \alpha)^{s-2}} + \text{etc.};$$

en rejetant les puissances négatives de $\theta - \alpha$; $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$ est, par conséquent, égal au coefficient de t^{s-1} dans le développement de la fonction

$$\frac{u_0 + u_1.t + u_2.t + \text{etc.}}{\theta - \alpha - t}.$$

Si l'on nomme P' et R' ce que deviennent P et R lorsqu'on y change $\theta - \alpha$ en t, ou, ce qui revient au même, θ en $t + \alpha$; on aura

$$\frac{P'}{R'} = u_0 + u_1.t + u_2.t^2 + \text{etc.};$$

partant $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$ est égal au coefficient de t^{s-1} dans le développement de

$$\frac{P'}{R'.(\theta - \alpha - t)};$$

il est donc égal à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(s-1).dt^{s-1}}.d^{s-1}.\frac{P'}{R'.(\theta - \alpha - t)},$$

pourvu que l'on suppose t nul après les différentiations. Maintenant, le coefficient de θ^r dans

$$\frac{P'}{R'.(\theta - \alpha - t)}$$

étant égal à

$$-\frac{P'}{R'.(\alpha+t)^{r+1}},$$

ce même coefficient dans

$$\frac{1}{1.2.3.....(s-1).dt^{s-1}}.d^{s-1}.\frac{P'}{R'.(\theta-\alpha-t)}$$

sera

$$-\frac{1}{1.2.3.....(s-1).dt^{s-1}}.d^{s-1}.\frac{P'}{R'.(\alpha+t)^{r+1}},$$

t étant supposé nul après les différentiations; cette dernière quantité est donc le coefficient de θ^r dans le développement de $\frac{A}{(\theta-\alpha)^s}$. Si l'on restitue dans P' et R', $\theta-\alpha$ au lieu de t, ce qui les change en P et R, on aura

$$\frac{d^{s-1}.\frac{P'}{R'.(\alpha+t)^{r+1}}}{dt^{s-1}}=\frac{d^{s-1}.\frac{P}{R.\theta^{r+1}}}{d\theta^{s-1}},$$

pourvu que l'on suppose $\theta=\alpha$, après les différentiations dans le second membre de cette équation; la fonction

$$-\frac{1}{1.2.3....(s-1)}.\frac{d^{s-1}.\frac{P}{R.\theta^{r+1}}}{d\theta^{s-1}}$$

est donc, avec cette condition, le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{A}{(\theta-\alpha)^s}$.

Il suit de là que si l'on suppose

$$Q=a.(\theta-\alpha)^s.(\theta-\alpha')^{s'}.(\theta-\alpha'')^{s''}.\text{ etc.},$$

le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{P}{Q}$, sera

$$-\frac{1}{1.2.3.....(s-1).d\theta^{s-1}}.d^{s-1}.\left(\frac{P}{a\theta^{r+1}.(\theta-\alpha')^{s'}.(\theta-\alpha'')^{s''}.\text{etc.}}\right)$$
$$-\frac{1}{1.2.3....(s'-1).d\theta^{s'-1}}.d^{s'-1}.\left(\frac{P}{a\theta^{r+1}.(\theta-\alpha)^{s}.(\theta-\alpha'')^{s''}.\text{etc.}}\right)$$
$$-\frac{1}{1.2.3....(s''-1).d\theta^{s''-1}}.d^{s''-1}.\left(\frac{P}{a\theta^{r+1}.(\theta-\alpha)^{s}.(\theta-\alpha')^{s'}.\text{etc.}}\right)$$
$$-\text{ etc.},$$

en faisant $\theta = \alpha$ dans le premier terme; $\theta = \alpha'$ dans le second terme; $\theta = \alpha''$ dans le troisième terme, et ainsi de suite.

Maintenant, soit

$$V = a.(\theta - \alpha).(\theta - \alpha').(\theta - \alpha'').\text{etc.}$$

En développant la fraction

$$\frac{1}{V - z.\theta^n}$$

dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de z, on aura

$$\frac{1}{V} + \frac{z.\theta^n}{V^2} + \frac{z^2.\theta^{2n}}{V^3} + \frac{z^3.\theta^{3n}}{V^4} + \text{etc.}$$

le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{1}{V^s}$ est, par ce qui précède, égal à

$$-\frac{1}{1.2.3....(s-1).a^s.d\theta^{s-1}}.d^{s-1}.\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha')^s.(\theta-\alpha'')^s.\text{etc.}} \\ +\frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha)^s.(\theta-\alpha'')^s.\text{etc.}} \\ +\frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha)^s.(\theta-\alpha')^s.\text{etc.}} \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}; \qquad (o)$$

pourvu qu'après les différentiations, on suppose $\theta = \alpha$ dans le premier terme; $\theta = \alpha'$ dans le second terme; $\theta = \alpha''$ dans le troisième terme, etc. S'il n'y a qu'un seul facteur $\theta - \alpha$, la fonction renfermée entre les deux parenthèses, se réduit à $\frac{1}{\theta^{r+1}}$, θ devant être changé en α après les différentiations, ce qui réduit la quantité (o) à

$$(-1)^r.\frac{(r+1).(r+2).(r+3)....(r+s-1)}{1.2.3....(s-1).a^s}.\frac{1}{\alpha^{r+s}}.$$

Si dans l'expression de V, quelques-uns des facteurs $\theta - \alpha$, $\theta - \alpha'$, etc., sont élevés à des puissances plus hautes que l'unité; par exemple, si $\theta - \alpha$ est élevé à la puissance m; il sera élevé à la puissance $-ms$ dans $\frac{1}{V^s}$; et alors il faut changer le premier terme

de

de la quantité (o) dans le suivant,

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(ms-1).a^s}\cdot\frac{d^{ms-1}}{d\theta^{ms-1}}\cdot\frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha')^{s'}.(\theta-\alpha'')^{s''}.\text{etc.}};$$

et dans les autres termes, il faut changer $(\theta-\alpha)^s$, dans $(\theta-\alpha)^{ms}$.

Représentons généralement par $Z_r^{(s-1)}$, la quantité (o); le coefficient de θ^i, dans le développement de la fraction $\frac{1}{V-z.\theta^n}$, sera

$$Z_i^{(0)}+Z_{i-n}^{(1)}.z+Z_{i-2n}^{(2)}.z^2+Z_{i-3n}^{(3)}.z^3+\text{etc.};$$

on aura donc pour le coefficient de θ^i, dans le développement de la première fraction de la page 21, ou pour la valeur de $\frac{1}{t^i}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^i}=\;&b.[Z_{i-n+1}^{(0)}+z.Z_{i-2n+1}^{(1)}+z^2.Z_{i-3n+1}^{(2)}+z^3.Z_{i-4n+1}^{(3)}+\text{etc.}]\\
&+c.[Z_{i-n+2}^{(0)}+z.Z_{i-2n+2}^{(1)}+z^2.Z_{i-3n+2}^{(2)}+z^3.Z_{i-4n+2}^{(3)}+\text{etc.}]\\
&+e.[Z_{i-n+3}^{(0)}+z.Z_{i-2n+3}^{(1)}+z^2.Z_{i-3n+3}^{(2)}+z^3.Z_{i-4n+3}^{(3)}+\text{etc.}]\\
&+\text{etc.}\\
&+\frac{1}{t}.\left\{\begin{array}{l}c.[Z_{i-n+1}^{(0)}+z.Z_{i-2n+1}^{(1)}+z^2.Z_{i-3n+1}^{(2)}+\text{etc.}]\\+e.[Z_{i-n+2}^{(0)}+z.Z_{i-2n+2}^{(1)}+z^2.Z_{i-3n+2}^{(2)}+\text{etc.}]\\+\text{etc.}\end{array}\right\}\\
&+\frac{1}{t^2}.\left\{\begin{array}{l}e.[Z_{i-n+1}^{(0)}+z.Z_{i-2n+1}^{(1)}+z^2.Z_{i-3n+1}^{(2)}+\text{etc.}]\\+\text{etc.}\end{array}\right\}\\
&+\text{etc.}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{1}{t^{n-1}}.q.[Z_{i-n+1}^{(0)}+z.Z_{i-2n+1}^{(1)}+z^2.Z_{i-3n+1}^{(2)}+\text{etc.}]
\end{aligned}\qquad (A)$$

Présentement, si l'on désigne par $\nabla.y_x$ la quantité

$$a.y_x+b.y_{x+1}+c.y_{x+2}\ldots\ldots+q.y_{x+n};$$

par $\nabla^2.y_x$, ce que devient $\nabla.y_x$ lorsqu'on y change y_x dans $\nabla.y_x$; par $\nabla^3.y_x$, ce que devient $\nabla^2.y_x$ lorsqu'on y change $\nabla.y_x$ dans

$\nabla^2 . y_x$, et ainsi de suite. Il est visible par le n° 2, que le coefficient de t^x dans le développement de $\frac{u.z^s}{t^r}$, sera $\nabla^r . y_{x+r}$; en multipliant donc l'équation précédente par u, et en ne considérant dans chaque terme que le coefficient de t^x, c'est-à-dire, en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens; on aura

$$\begin{aligned}
y_{x+i} = {} & y_x \;.\; [b.Z^{(0)}_{i-n+1} + c.Z^{(0)}_{i-n+2} + e.Z^{(0)}_{i-n+3} \ldots + q.Z^{(0)}_{i}] \\
& + \nabla . y_x . [b.Z^{(1)}_{i-2n+1} + c.Z^{(1)}_{i-2n+2} + e.Z^{(1)}_{i-2n+3} \ldots + q.Z^{(1)}_{i-n}] \\
& + \nabla^2 . y_x . [b.Z^{(2)}_{i-3n+1} + c.Z^{(2)}_{i-3n+2} + e.Z^{(2)}_{i-3n+3} \ldots + q.Z^{(2)}_{i-2n}] \\
& + \text{etc.} \\
& + y_{x+1} . [c.Z^{(0)}_{i-n+1} + e.Z^{(0)}_{i-n+2} \ldots + q.Z^{(0)}_{i-1}] \\
& + \nabla . y_{x+1} . [c.Z^{(1)}_{i-2n+1} + e.Z^{(1)}_{i-2n+2} \ldots + q.Z^{(1)}_{i-n-1}] \; ; \qquad (B) \\
& + \text{etc.} \\
& + y_{x+2} . [e.Z^{(0)}_{i-n+1} \ldots + q.Z^{(0)}_{i-2}] \\
& + \nabla . y_{x+2} . [e.Z^{(1)}_{i-2n+1} \ldots + q.Z^{(1)}_{i-n-2}] \\
& + \text{etc.} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + q . y_{x+n-1} . Z^{(0)}_{i-n+1} + q . \nabla . y_{x+n-1} . Z^{(1)}_{i-2n+1} + q . \nabla^2 . y_{x+n-1} . Z^{(2)}_{i-3n+1} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Cette formule servira à interpoler les suites dont la dernière raison des termes est celle d'une suite récurrente; car il est clair que dans ce cas, $\nabla . y_x$, $\nabla^2 . y_x$, etc. vont toujours en diminuant, et finissent par être nuls dans l'infini.

6. La formule (B) s'arrête lorsque l'on a $\nabla^r . y_x = 0$, r étant un nombre entier positif quelconque; et alors l'expression précédente de y_{x+i} devient l'intégrale de l'équation aux différences finies $\nabla^r . y_i = 0$; ce qui est analogue à ce qu'on a vu dans le n° 3. relativement à l'équation $\Delta^r . y_i = 0$. Supposons $\nabla . y_i = 0$, ou, ce qui revient au même,

$$0 = a . y_i + b . y_{i+1} + c . y_{i+2} \ldots + q . y_{i+n};$$

si l'on fait x nul dans la formule (B) du numéro précédent, elle devient

$$\begin{aligned}y_i = {} & y_0.[b.Z^{(0)}_{i-n+1}+c.Z^{(0)}_{i-n+2}+e.Z^{(0)}_{i-n+3}\ldots+q.Z^{(0)}_{i}]\\ & +y_1.[c.Z^{(0)}_{i-n+1}+e.Z^{(0)}_{i-n+2}\ldots\ldots\ldots\ldots+q.Z^{(0)}_{i-1}]\\ & +y_2.[e.Z^{(0)}_{i-n+1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+q.Z^{(0)}_{i-2}]\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +q.y_{n-1}.Z^{(0)}_{i-n+1},\end{aligned}$$

$y_0, y_1, y_2 \ldots . y_{n-1}$ sont les n premières valeurs de y_i; ce sont les n constantes arbitraires que l'intégrale de l'équation $\nabla . y_i = 0$ introduit.

La valeur de $Z^{(0)}_{i-n+1}$ est égale à

$$-\frac{1}{a.\alpha^{i-n+2}.(\alpha-\alpha').(\alpha-\alpha'').\text{etc.}}-\frac{1}{a.\alpha'^{i-n+2}.(\alpha'-\alpha).(\alpha'-\alpha'').\text{etc.}}-\text{etc.}$$

Ainsi V étant égal à $a.(\theta-\alpha).(\theta-\alpha').(\theta-\alpha'')$.etc.; le premier de ces termes devient

$$-\frac{\alpha^{n-2}}{\alpha^i.\frac{dV}{d\theta}},$$

pourvu que l'on change θ en α dans $\frac{dV}{d\theta}$; en n'ayant donc égard qu'au terme multiplié par $\frac{1}{\alpha^i}$, l'expression précédente de y_i deviendra

$$y_i = -\frac{1}{\alpha^{i+1}.\frac{dV}{d\theta}}.\left\{\begin{array}{l} y_0.(b.\alpha^{n-1}+c.\alpha^{n-2}+e.\alpha^{n-3}\ldots\ldots+q)\\ +y_1.(c.\alpha^{n-1}+e.\alpha^{n-2}\ldots\ldots+q.\alpha)\\ +y_2.(e.\alpha^{n-1}\ldots\ldots+q.\alpha)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +y_{n-1}.q.\alpha^{n-1}\end{array}\right\}.$$

En changeant successivement dans le second membre de cette équation, α en α', α'', etc., et réciproquement; on aura autant de termes qui, ajoutés au précédent, formeront l'expression complète de y_i.

Nommons k la fonction comprise entre les deux parenthèses, ensorte que ce second membre soit $-\frac{k}{\alpha^{i+1}.\frac{dV}{d\theta}}$. Si les deux racines

α et α' sont égales, V sera de cette forme $(\theta-\alpha)^2.L$. On supposera que α et α', au lieu d'être rigoureusement égaux, diffèrent infiniment peu, et que l'on a $\alpha' = \alpha + d\alpha$. Alors la somme des deux termes de y_i relatifs aux racines α et α' sera

$$-\frac{1}{d\alpha}\cdot\left(\frac{k'}{\alpha'^{i+1}.L'}-\frac{k}{\alpha^{i+1}.L}\right),$$

k' étant ce que devient k lorsqu'on y change α en α'; L et L' étant ici, ce que devient L lorsqu'on y change θ en α et α'. Cette quantité est donc égale à

$$-\frac{d.\frac{k}{\alpha^{i+1}.L}}{d\alpha};$$

mais on a

$$L = \tfrac{1}{2}.\frac{d^2V}{d\theta^2},$$

θ devant être changé en α après les différentiations. La somme des termes de l'expression de y_i, relatifs aux deux racines égales est donc

$$-\frac{d}{1.2.d\alpha}\cdot\frac{k}{\alpha^{i+1}.\frac{ddV}{d\theta^2}}.$$

On trouvera de la même manière, que si V contient trois facteurs égaux, la somme des termes de l'expression de y_i relatifs à ces trois facteurs est

$$-\frac{d^2}{1.2.1.2.3.d\alpha^2}\cdot\frac{k}{\alpha^{i+1}.\frac{d^3V}{d\theta^3}};$$

et ainsi de suite. $Z_i^{(0)}$ étant, par ce qui précède, le coefficient de θ^i dans le développement de $\frac{1}{V}$; il en résulte que y_i est le coefficient de θ^i dans le développement de la fonction

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} \quad y_0.(b.\theta^{n-1}+c.\theta^{n-2}\ldots\ldots+q) \\ +y_1.(c.\theta^{n-1}+e.\theta^{n-2}\ldots\ldots+q) \\ +y_2.(e.\theta^{n-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+q) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +y_{n-1}.q.\theta^{n-1} \end{array}\right\}}{a.\theta^n+b\theta^{n-1}+c.\theta^{n-2}\ldots\ldots+p.\theta+q}.$$

Cette fonction est donc la fonction génératrice de y_i ou de la variable principale de l'équation aux différences $\nabla . y_i = 0$. La formule (B) du n° précédent, donnera pareillement la valeur de y_i, ou l'intégrale complète de l'équation aux différences $\nabla^2 . y_i = 0$: y_0, $\nabla . y_0$; y_1, $\nabla . y_1$; .... y_{n-1}, $\nabla . y_{n-1}$ seront les $2n$ arbitraires de cette intégrale. Le cas des racines égales se résoudra de la même manière que ci-dessus. On aura par la même formule, l'intégrale des équations aux différences $\nabla^3 . y_i = 0$, $\nabla^4 . y_i = 0$, etc., ce qui montre l'analogie qui existe entre l'interpolation des suites et l'intégration des équations aux différences.

Soit $y_i = y'_i + y''_i$, et supposons que u' soit la fonction génératrice de y'_i, et u'' celle de y''_i, u étant celle de y_i; on aura $u = u' + u''$. Soit encore

$$u'' = \frac{\lambda}{z^s},$$

z ayant la signification que nous lui avons donnée dans le n° 5; et nommons X_i le coefficient de t^i dans le développement de λ; on aura par le n° 2,

$$X_i = \nabla^s . y''_i.$$

Maintenant on a, par le n° 5,

$$\frac{1}{z^s} = \frac{t^{ns}}{(a.t^n + b.t^{n-1} + c.t^{n-2} \ldots + q)^s};$$

or le coefficient de t^i, dans le développement du second membre de cette équation, est égal à celui de θ^{i-ns} dans le développement de

$$\frac{1}{(a.\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} \ldots + q)^s};$$

et par le n° précédent, ce coefficient est égal à $Z^{(s-1)}_{i-ns}$; donc le coefficient de t^i dans le développement de $\frac{\lambda}{z^s}$, sera

$$X_{i-ns}.Z^{(s-1)}_0 + X_{i-ns-1}.Z^{(s-1)}_1 + X_{i-ns-2}.Z^{(s-1)}_2 \ldots + X_0.Z^{(s-1)}_{i-ns},$$

ou $\Sigma . X_r . Z^{(s-1)}_{i-ns-r}$, l'intégrale étant prise relativement à r, depuis $r = 0$

jusqu'à $r = i - ns + 1$; ce sera la valeur de y''_i. Cela posé, si dans la formule (B) du n° précédent, on suppose $\nabla^s . y_i = 0$; elle donnera, en observant que $y_i = y'_i + y''_i$,

$$
\begin{aligned}
y_i + \Sigma . X_r . Z^{(s-1)}_{i-ns-r} = y_0 . [& b.Z^{(0)}_{i-n+1} + c.Z^{(0)}_{i-n+2} \ldots\ldots + q.Z^{(0)}_{i}] \\
& + \nabla . y_0 . [b.Z^{(1)}_{i-2n+1} + c.Z^{(1)}_{i-2n+2} \ldots\ldots + q.Z^{(1)}_{i-n}] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \nabla^{s-1} . y_0 . [b.Z^{(s-1)}_{i-sn+1} + c.Z^{(s-1)}_{i-sn+2} \ldots\ldots + q.Z^{(s-1)}_{i-sn+n}] \\
& + y_1 . [c.Z^{(0)}_{i-n+1} \ldots\ldots + q.Z^{(0)}_{i-1}] \\
& + \nabla . y_1 . [c.Z^{(1)}_{i-2n+1} \ldots\ldots + q.Z_{i-n-1}]; \qquad (C) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \nabla^{s-1} . y_1 . [c.Z^{(s-1)}_{i-sn+1} \ldots\ldots + q.Z_{i-sn+n-1}] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + q.Z^{(0)}_{i-n+1} . y_{n-1} + q.Z^{(1)}_{i-2n+1} . \nabla . y_{n-1} \ldots\ldots \\
& \qquad \ldots\ldots + q.Z^{(s-1)}_{i-sn+1} . \nabla^{s-1} . y_{n-1}
\end{aligned}
$$

y_0, $\nabla . y_0$, ... $\nabla^{s-1} . y_0$; y_1, $\nabla . y_1$, etc. étant les ns arbitraires de l'intégrale de l'équation $\nabla^s . y_i = 0$, ou

$$\nabla^s . y'_i + \nabla^s . y''_i = 0;$$

or $\nabla^s . y''_i$ étant égale à X_i, cette équation devient

$$0 = \nabla^s . y'_i + X_i;$$

on aura donc, par la formule précédente, l'intégrale des équations linéaires aux différences finies dont les coefficiens sont constans, dans le cas où elles ont un dernier terme fonction de i.

(L'intégrale définie, relative à r $\Sigma . X_r . Z^{(s-1)}_{i-ns-r}$, peut être facilement transformée dans une suite d'intégrales indéfinies, relatives à i ; car l'expression générale de $Z^{(s-1)}_{i-ns-r}$ est formée de ns termes de la forme $I . r^{\mu} . \alpha^r$, I étant une fonction de i indépendante de la variable r; l'intégrale précédente est donc composée d'intégrales de la forme $I . \Sigma r^{\mu} . \alpha^r . X_r$; cette dernière intégrale devant être prise depuis r nul la différence d^{r-1} étant prise en ne faisant varier que h, et en substituant après les différentiations, f au lieu de h dans le premier terme, f' au lieu de h dans le second terme, et ainsi de suite. Nommons $X^{(r-1)}.dx'$ la quantité précédente; on aura, à l'infiniment petit près, μ étant un nombre fini,

$$Z^{(r-1)}_{i\pm\mu} = Z^{(r-1)}_{i-1} = X^{(r-1)}.dx'.$$

D'ailleurs on a $y_x = \varphi(\varpi)$; et la caractéristique Δ des différences finies doit se changer dans la caractéristique d des différences infiniment petites; ensorte que l'équation

$\vdash \Delta y_x = y_{x+1} - y_x$, $x+1 = \frac{\varpi}{\partial x'} + \frac{\partial x'}{\partial x'}$)

h. comm.

$y_{x+1} = \varphi(\varpi + \partial x')$

$\Delta y_x = \partial\varphi(\varpi)$.

$$\nabla . y_x = a . y_x + b . y_{x+1} + c . y_{x+2} + \text{etc.},$$

ou, ce qui revient au même, celle-ci

$$\nabla . y_x = a'' + \frac{b''}{dx'} . \Delta . y_x + \frac{c''}{dx'^2} . \Delta^2 y_x + \text{etc.}$$

devient, en y changeant dx' en $d\varpi$,

$$\nabla . y_x = a'' + b'' . \frac{d.\varphi(\varpi)}{d\varpi} + c'' . \frac{d^2.\varphi(\varpi)}{d\varpi^2} \ldots\ldots + q'' . \frac{d^n.\varphi(\varpi)}{d\varpi^n}.$$

L'expression de y_{x+i} trouvée dans le n° précédent, deviendra donc

$$\begin{aligned}
\varphi(\varpi + x') = {} & \varphi(\varpi) . \left(b'' . X^{(0)} + c'' . \frac{dX^{(0)}}{dx'} + e'' . \frac{d^2X^{(0)}}{dx'^2} \ldots + q'' . \frac{d^{n-1}.X^{(0)}}{dx'^{n-1}}\right) \\
& + \nabla . \varphi(\varpi) . \left(b'' . X^{(1)} + c'' . \frac{dX^{(1)}}{dx'} + e'' . \frac{d^2X^{(1)}}{dx'^2} \ldots + q'' . \frac{d^{n-1}.X^{(1)}}{dx'^{n-1}}\right) \\
& + \nabla^2 . \varphi(\varpi) . \left(b'' . X^{(2)} + c'' . \frac{dX^{(2)}}{dx'} + e'' . \frac{d^2X^{(2)}}{dx'^2} \ldots + q'' . \frac{d^{n-1}.X^{(2)}}{dx'^{n-1}}\right) \\
& + \text{etc.} \\
& + \frac{d.\varphi(\varpi)}{d\varpi} . \left(c'' . X^{(0)} + e'' . \frac{dX^{(0)}}{dx'} \ldots\ldots + q'' . \frac{d^{n-2}.X^{(0)}}{dx'^{n-2}}\right) \\
& + \frac{d.\nabla.\varphi(\varpi)}{d\varpi} . \left(c'' . X^{(1)} + e'' . \frac{dX^{(1)}}{dx'} \ldots\ldots + q'' . \frac{d^{n-2}.X^{(1)}}{dx'^{n-2}}\right) \\
& + \text{etc.} \\
& + \frac{d^2.\varphi(\varpi)}{d\varpi^2} . \left(e'' . X^{(0)} \ldots\ldots + q'' . \frac{d^{n-3}.X^{(0)}}{dx'^{n-3}}\right) \\
& + \frac{d^2.\nabla.\varphi(\varpi)}{d\varpi^2} . \left(e'' . X^{(1)} \ldots\ldots + q'' . \frac{d^{n-3}.X^{(1)}}{dx'^{n-3}}\right) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

. . . .

$$+q''.\frac{d^{n-1}.\varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}}.X^{(0)}+q''.\frac{d^{n-1}.\nabla.\varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}}.X^{(1)}$$
$$+q''.\frac{d^{n-1}.\nabla^2.\varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}}.X^{(2)}+\text{etc.}$$

Cette formule servira à interpoler les suites dont la dernière raison des termes est celle d'une équation linéaire aux différences infiniment petites à coefficiens constans.

Si l'on a

$$\nabla^{i}.\varphi(\varpi+x')=0,$$

la formule se termine et donne la valeur de $\varphi(\varpi+x')$, ou l'intégrale de l'équation différentielle précédente ; $\varphi(\varpi)$, $\frac{d.\varphi(\varpi)}{d\varpi}$, etc. ; $\nabla.\varphi(\varpi)$, $\frac{d.\nabla.\varphi(\varpi)}{d\varpi}$, etc. ; $\nabla^2.\varphi(\varpi)$, $\frac{d.\nabla^2.\varphi(\varpi)}{d\varpi}$, etc. étant les ns arbitraires de l'intégrale.

Supposons que l'on ait l'équation différentielle

$$0=\nabla^{i}.\varphi(\varpi+x')-V_{x'},$$

$V_{x'}$ étant une fonction donnée de x'; il faut, par le n° 6, ajouter à l'expression précédente de $\varphi(\varpi+x')$, le terme $\int V_r.X^{(i-1)}_{x'-r}.dr$, $X^{(i-1)}_{x'}$ étant la même fonction de x' que $X^{(i-1)}$. L'intégrale relative à r, doit être prise depuis $r=0$ jusqu'à $r=x'$. Cette intégrale définie peut, par le numéro cité, être transformée en intégrales indéfinies relatives à x'.

De la transformation des suites.

9. La théorie des fonctions génératrices peut servir encore à transformer les suites en d'autres qui suivent une loi donnée. Considérons la suite infinie

$$y_0+y_1.\alpha+y_2.\alpha^2\ldots\ldots+y_x.\alpha^x+\text{etc.};\qquad (V)$$

et nommons, comme ci-dessus, u la somme de la série infinie

$$y_0+y_1.\alpha t+y_2.\alpha^2t^2\ldots\ldots+y_x.\alpha^xt^x+\text{etc.};$$

le coefficient de t^x dans le développement de la fraction $\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$, sera égal à la somme de la suite proposée (V), prise depuis le terme $y_x.\alpha^x$ inclusivement, jusqu'à l'infini. Soit généralement z une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, et nommons $\Pi.y_x.\alpha^x$ le coefficient de t^x dans uz. Les coefficiens de t^x dans $u.z^2$, $u.z^3$, etc. seront $\Pi^2.y_x.\alpha^x$, $\Pi^3.y_x.\alpha^x$, etc. Cela posé, on multipliera le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$ par $k-z$, et l'on prendra pour k ce que devient z lorsqu'on y fait t égal à l'unité; $k-z$ sera divisible alors par $1-\frac{1}{t}$. Soit

$$h+\frac{h^{(1)}}{t}+\frac{h^{(2)}}{t^2}+\frac{h^{(3)}}{t^3}+\text{etc.}$$

le quotient de cette division; on aura

$$\begin{aligned}\frac{u}{1-\frac{1}{t}}=&\frac{u.h}{k}.\left(1+\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}+\frac{z^3}{k^3}+\text{etc.}\right)\\&+\frac{u.h^{(1)}}{kt}.\left(1+\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}+\text{etc.}\right)\\&+\frac{u.h^{(2)}}{kt^2}.\left(1+\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}+\text{etc.}\right)\\&+\text{etc.};\end{aligned}$$

ce qui donne, en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens,

$$\begin{aligned}S.y_x.\alpha^x=&\frac{h.y_x.\alpha^x}{k}+\frac{h.\Pi.(y_x.\alpha^x)}{k^2}+\frac{h.\Pi^2.(y_x.\alpha^x)}{k^3}+\text{etc.}\\&+\frac{h^{(1)}.y_{x+1}.\alpha^{x+1}}{k}+\frac{h^{(1)}.\Pi.(y_{x+1}.\alpha^{x+1})}{k^2}+\text{etc.}\\&+\frac{h^{(2)}.y_{x+2}.\alpha^{x+2}}{k}+\frac{h^{(2)}.\Pi.(y_{x+2}.\alpha^{x+2})}{k^2}+\text{etc.}\\&+\text{etc.}\end{aligned}$$

Le signe S désigne la somme des termes depuis x inclusivement, jusqu'à l'infini. Supposons maintenant

$$z=a+\frac{b}{\alpha t}+\frac{c}{\alpha^2t^2}+\frac{e}{\alpha^3t^3}+\text{etc.};$$

on aura

$$\Pi.(y_x.\alpha^x)=\alpha^x.(a.y_x+b.y_{x+1}+c.y_{x+2}+e.y_{x+3}+\text{etc.}).$$

En désignant par $\nabla.y_x$ la quantité $ay_x+by_{x+1}+$ etc.; on aura

$$\Pi.(y_x.\alpha^x)=\alpha^x.\nabla.y_x;$$

et généralement on aura

$$\Pi^r.(y_x.\alpha^x)=\alpha^x.\nabla^r.y_x.$$

On a ensuite

$$k=a+\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}+\frac{e}{\alpha^3}+\text{etc.};$$

ce qui donne

$$h=\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}+\frac{e}{\alpha^3}+\text{etc.},$$

$$h^{(1)}=\frac{c}{\alpha^2}+\frac{e}{\alpha^3}+\text{etc.}$$

$$h^{(2)}=\frac{e}{\alpha^3}+\text{etc.}$$

etc.;

on aura donc

$$\begin{aligned}S.y^x.\alpha^x=&\frac{\left(\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}+\frac{e}{\alpha^3}+\text{etc.}\right)}{k}.\alpha^x.\left(y_x+\frac{\nabla.y_x}{k}+\frac{\nabla^2.y_x}{k^2}+\text{etc.}\right)\\ &+\frac{\left(\frac{c}{\alpha}+\frac{e}{\alpha^2}+\text{etc.}\right)}{k}.\alpha^x.\left(y_{x+1}+\frac{\nabla.y_{x+1}}{k}+\frac{\nabla^2.y_{x+1}}{k^2}+\text{etc.}\right)\\ &+\frac{\left(\frac{e}{\alpha}+\text{etc.}\right)}{k}.\alpha^x.\left(y_{x+2}+\frac{\nabla.y_{x+2}}{k}+\frac{\nabla^2.y_{x+2}}{k^2}+\text{etc.}\right)\\ &+\text{etc.}\end{aligned}$$

En faisant $x=0$, on aura une transformée de la suite proposée, dont les termes suivront une autre loi; et si les quantités $\nabla.y_x$, $\nabla^2.y_x$, etc. vont en décroissant, cette suite sera convergente. Elle se terminera, toutes les fois que l'on aura $\nabla^r.y_x=0$; ce qui aura lieu lorsque la proposée sera une suite récurrente. On aura donc ainsi la somme des suites récurrentes, à compter d'un terme quelconque $y_x.\alpha^x$, et par conséquent on aura aussi la somme de leurs termes, comprise entre deux termes quelconques $y_x.\alpha^x$ et $y_{x'}.\alpha^{x'}$.

Théorèmes sur le développement des fonctions et de leurs différences, en séries.

10. En appliquant à des fonctions particulières, les principes généraux exposés dans le n° 1, on aura une infinité de théorèmes sur le développement des fonctions, en séries. Nous allons présenter ici les plus remarquables.

On a généralement

$$u.\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^n = u.\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n.$$

Or il est clair que le coefficient de t^x dans le premier membre de cette équation, est la différence $n^{ième}$ de y_{x}, x variant de i; car ce coefficient dans $u.\left(\frac{1}{t^i}-1\right)$ est $y_{x+i}-y_x$ ou $'\Delta.y_x$, en désignant par la caractéristique $'\Delta$, les différences finies, lorsque x varie de la quantité i; d'où il est facile de conclure que ce même coefficient, dans le développement de $u.\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^n$ est $'\Delta^n.y_x$. D'ailleurs si l'on développe $u.\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n$ suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$, les coefficiens de t^x dans les développemens de $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)$, $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$, etc. sont, par le n° 2, $\Delta.y_x$, $\Delta^2.y_x$, etc.; ensorte que ce coefficient, dans $u.\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n$, est $[(1+\Delta.y_x)^i-1]^n$, pourvu que dans le développement de cette quantité, on applique à la caractéristique Δ, les exposans de puissances de $\Delta.y_x$, et qu'ainsi au lieu d'une puissance quelconque $(\Delta.y_x)^r$, on écrive $\Delta^r.y_x$; on aura donc avec cette condition,

$$'\Delta^n.y_x = [(1+\Delta.y_x)^i-1]^n; \qquad (1)$$

Si l'on désigne par la caractéristique $'\Sigma$, l'intégrale finie, lorsque x varie de i; $'\Sigma^n.y_x$ sera, par le n° 2, le coefficient de t^x dans le développement de la fonction $u.\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^{-n}$, en faisant abstraction des constantes arbitraires que l'intégration introduit; or on a

$$u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-n}=u.\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^{i}-1\right]^{-n};$$

de plus, le coefficient de t^x dans $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-r}$ est $\Sigma^r.y_x$, en faisant abstraction des constantes arbitraires; ce coefficient dans $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{r}$ est $\Delta^r.y_x$; on aura donc

$$'\Sigma^n.y_x=[(1+\Delta.y_x)^i-1]^{-n}; \qquad (2)$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique à la caractéristique Δ, les exposans des puissances de $\Delta.y_x$; que l'on change les différences négatives en intégrales, et que l'on substitue y_x au lieu de $\Delta^0.y_x$; et comme ce développement renferme l'intégrale $\Sigma^n.y_x$, qui peut être censée renfermer n constantes arbitraires; l'équation (2) est encore vraie, en ayant égard aux constantes arbitraires.

On peut observer que cette équation se déduit de l'équation (1), en faisant dans celle-ci, n négatif, et en y changeant les différences négatives en intégrales; c'est-à-dire, en écrivant $'\Sigma^n.y_x$ au lieu de $'\Delta^n.y_x$ dans le premier membre; et généralement dans le développement du second membre, $\Sigma^r.y_x$ au lieu de $\Delta^{-r}.y_x$.

Les équations (1) et (2) auraient également lieu, si x, au lieu de varier de l'unité dans $\Delta.y_x$, variait d'une quantité quelconque ϖ, pourvu que la variation de x dans $'\Delta.y_x$ soit égale à $i\varpi$. En effet, il est clair que si dans y_x on fait $x=\frac{x'}{\varpi}$, x' variera de ϖ, lorsque x variera de l'unité; $\Delta.y_x$ se changera dans $\Delta.y_{x'}$, la variation de x' étant ϖ; et $'\Delta.y_x$ se changera dans $'\Delta.y_{x'}$, la variation de x' étant $i\varpi$. Maintenant si après avoir substitué ces quantités dans les équations (1) et (2), on suppose ϖ infiniment petit et égal à dx'; $\Delta.y_{x'}$ se changera dans la différence infiniment petite $dy_{x'}$. Si de plus on fait i infini, et $idx'=\alpha$, α étant une quantité finie; la variation de x' dans $'\Delta.y_{x'}$, sera α; on aura donc

$$'\Delta^n.y_{x'}=[(1+dy_{x'})^i-1]^n; \qquad (q)$$

$$'\Sigma^n.y_{x'}=\frac{1}{[(1+dy_{x'})^i-1]^n};$$

or

or on a

$$\log(1+dy_{x'})^i = i.\log(1+dy_{x'}) = i.dy_{x'} = \alpha.\frac{dy_{x'}}{dx'};$$

ce qui donne

$$(1+dy_{x'})^i = c^{\alpha.\frac{dy_{x'}}{dx'}},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on a donc

$$'\Delta^n.y_{x'} = \left(c^{\alpha.\frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1\right)^n, \qquad (3)$$

$$'\Sigma^n.y_{x'} = \frac{1}{\left(c^{\alpha.\frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1\right)^n}; \qquad (4)$$

en ayant soin d'appliquer à la caractéristique d, les exposans des puissances de $dy_{x'}$; de changer les différences négatives en intégrales, et la quantité $d^0.y_{x'}$ en $y_{x'}$.

On peut donner à l'équation (3) cette forme singulière qui nous sera utile dans la suite.

$$'\Delta^n.y_{x'} = \left(c^{\frac{\alpha}{2}.\frac{dy_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2}.\frac{dy_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'}}\right)^n.$$

En effet, elle donne

$$'\Delta^n.y_{x'} = c^{\frac{n\alpha}{2}.\frac{dy_{x'}}{dx'}}.\left(c^{\frac{\alpha}{2}.\frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2}.\frac{dy_{x'}}{dx'}}\right)^n.$$

Considérons un terme quelconque du développement de $\left(c^{\frac{\alpha}{2}.\frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2}.\frac{dy_{x'}}{dx'}}\right)^n$, tel que $k\left(\frac{dy_{x'}}{dx'}\right)^r$. En le multipliant par $c^{\frac{n\alpha}{2}.\frac{dy_{x'}}{dx'}}$, et développant cette dernière quantité, on aura

$$k.\frac{d^r}{dx'^r}.\left[y_{x'} + \frac{n\alpha}{2}.\frac{dy_{x'}}{dx'} + \left(\frac{n\alpha}{2}\right)^2.\frac{d^2y_{x'}}{1.2.dx'^2} + \text{etc.}\right];$$

cette quantité est égale à $k.\frac{d^r.y_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'^r}$; d'où il est facile de conclure

$$c^{\frac{n\alpha}{2}.\frac{dy_{x'}}{dx'}}.\left(c^{\frac{\alpha}{2}.\frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2}.\frac{dy_{x'}}{dx'}}\right)^n = \left(c^{\frac{\alpha}{2}.\frac{dy_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2}.\frac{dy_{x'+\frac{n}{2}}}{dx'}}\right)^n = {}'\Delta^n.y_{x'}.$$

Si dans les équations (1) et (2), on suppose encore i infiniment petit et égal à dx; on aura

$$'\Delta^n . y_x = d^n . y_x; \quad '\Sigma^n . y_x = \frac{1}{dx^n} . \int^n y_x . dx^n;$$

on a d'ailleurs

$$(1 + \Delta . y_x)^i = c^{dx . \log(1 + \Delta . y_x)} = 1 + dx . \log(1 + \Delta . y_x);$$

les équations (1) et (2) deviendront ainsi

$$\frac{d^n . y_x}{dx^n} = [\log(1 + \Delta . y_x)]^n, \qquad (5)$$

$$\int^n . y_x . dx^n = \frac{1}{[\log(1 + \Delta . y_x)]^n}. \qquad (6)$$

On peut observer ici une analogie singulière entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales. L'équation

$$'\Delta . y_x = c^{\alpha . \frac{dy_x}{dx}} - 1 \qquad (o)$$

est la traduction du théorème connu de Taylor, lorsque, dans le développement de son second membre, suivant les puissances de $\frac{dy_x}{dx}$, on applique à la caractéristique d, les exposans de ces puissances. En élevant les deux membres de cette équation à la puissance n, et appliquant aux caractéristiques $'\Delta$ et d, les exposans des puissances de $'\Delta . y_x$ et de dy_x, on aura l'équation (3), d'où résulte l'équation (4), en changeant les différences négatives en intégrales.

L'équation précédente donne

$$c^{\alpha . \frac{dy_x}{dx}} = 1 + {}'\Delta . y_x.$$

En prenant les logarithmes de chaque membre, on aura

$$\alpha . \frac{dy_x}{dx} = \log(1 + {}'\Delta . y_x); \qquad (r).$$

Supposant ensuite $\alpha = 1$, ce qui change $'\Delta . y_x$ dans $\Delta . y_x$, et élevant les deux membres de cette équation, à la puissance n, on aura l'équation (5), pourvu que l'on applique les exposans des puissances, aux caractéristiques. On aura l'équation (6), en faisant n négatif, et changeant les puissances négatives en intégrales.

Si dans l'équation précédente (r), on change α dans i, on aura

$$\frac{dy_x}{dx} = \log(1 + {}'\Delta . y_x)^{\frac{1}{i}};$$

et si l'on y suppose $\alpha = 1$, on aura

$$\frac{dy_x}{dx} = \log(1 + \Delta . y_x).$$

La comparaison de ces deux valeurs de $\frac{dy_x}{dx}$, donne

$$\log(1 + \Delta . y_x) = \log(1 + {}'\Delta . y_x)^{\frac{1}{i}};$$

d'où l'on tire

$${}'\Delta . y_x = (1 + \Delta . y_x)^i - 1.$$

En élevant chaque membre à la puissance n, et appliquant les exposans des puissances, aux caractéristiques ; on aura l'équation (1), d'où résulte l'équation (2), en changeant les différences négatives en intégrales. Les équations (1), (2), (3), (4), (5) et (6) résultent donc du théorème de Taylor, mis sous la forme de l'équation (o), en transformant cette équation suivant les règles de l'analyse, pourvu que dans les résultats on applique aux caractéristiques, les exposans des puissances, que l'on change les différences négatives en intégrales, et que l'on substitue la variable elle-même y_x, au lieu de ses différences zéro.

Cette analogie des puissances positives avec les différences, et des puissances négatives avec les intégrales, devient évidente par la théorie des fonctions génératrices. Elle tient, comme on l'a vu, à ce que les produits de la fonction u, génératrice de y_x, par les puissances de $\frac{1}{t^i} - 1$ sont les fonctions génératrices des différences finies successives de y_x, x variant d'une quantité quelconque i; tandis que les quotiens de u, divisés par ces mêmes puissances, sont les fonctions génératrices des intégrales de y_x.

En considérant, au lieu du facteur $\frac{1}{t^i} - 1$ et de ses puissances, les puissances d'une fonction quelconque rationnelle et entière de $\frac{1}{t}$, on peut en conclure des théorèmes analogues aux précédens, sur les *dérivées* successives des fonctions. Je nomme *dérivée* d'une fonction y_x, toute quantité qui en dérive, telle que $a.y_x + b.y_{x+1} + e.y_{x+2} +$ etc. En regardant ensuite cette fonction dérivée comme une nouvelle fonction que je désigne par y'_x; la quantité $a.y'_x + b.y'_{x+1} + e.y'_{x+2} +$ etc. sera une seconde dérivée de la fonction y_x; et ainsi de suite. Lorsque la fonction $a.y_x + b.y_{x+1} +$ etc. devient $-y_x + y_{x+1}$, la dérivée devient une différence finie.

Maintenant on a

$$u.\left(a + \frac{b}{t} + \frac{e}{t^2} + \frac{h}{t^3} + \text{etc.}\right)^n$$

$$= u.\left[a + b.\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{1}{dx}} + e.\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{2}{dx}} + \text{etc.}\right]^n; \qquad (q)$$

on a ensuite généralement, par le n° 2, en désignant par $\nabla.y_x$ la quantité $a.y_x + b.y_{x+1} + c.y_{x+2} +$etc., $\nabla^n.y_x$ pour le coefficient de la fonction génératrice du premier membre de cette équation; de plus on a

$$u.\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{r}{dx}} = u.\left[1 + \frac{r}{dx}.\left(\frac{1}{t^{dx}} - 1\right) + \frac{r^2}{1.2.dx^2}.\left(\frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^2 + \text{etc.}\right].$$

Le second membre de cette équation est la fonction génératrice de

$$y_x + r.\frac{dy_x}{dx} + \frac{r^2}{1.2}.\frac{d^2y_x}{dx^2} + \text{etc.},$$

ou de $c^{r.\frac{dy_x}{dx}}$; en appliquant à la caractéristique d les exposans des puissances de $\frac{dy_x}{dx}$, et écrivant y_x au lieu de $\left(\frac{dy_x}{dx}\right)^0$. De là on conclut que sous les mêmes conditions, le second membre de l'équation (q) est la fonction génératrice de

$$\left[a + b.c^{\frac{dy_x}{dx}} + e.c^{\frac{2\,dy_x}{dx}} + h.c^{\frac{3\,dy_x}{dx}} + \text{etc.}\right]^n;$$

et qu'ainsi cette équation donne, en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens,

$$\nabla^n . y_x = \left[a + b . c^{\frac{dy_x}{dx}} + e . c^{\frac{2\,dy_x}{dx}} + h . c^{\frac{3\,dy_x}{dx}} + \text{etc.}\right]^n. \qquad (7)$$

On peut ainsi obtenir une infinité de résultats semblables. Nous nous bornerons au suivant, qui nous sera utile dans la suite. $u . \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)^n$ est la fonction génératrice de

$$y_{x+\frac{n}{2}} - n . y_{x+\frac{n}{2}-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2} . y_{x+\frac{n}{2}-2} - \text{etc.},$$

ou de $\Delta^n . y_{x-\frac{n}{2}}$. De plus on a

$$u . \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)^n = u . \left[\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{1}{2dx}} - \left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{-\frac{1}{2dx}}\right]^n;$$

d'où l'on tire, en repassant par l'analyse précédente, des fonctions génératrices aux coefficiens,

$$\Delta^n . y_{x-\frac{n}{2}} = \left(c^{\frac{dy_x}{2dx}} - c^{-\frac{dy_x}{2dx}}\right)^n.$$

11. Je n'ai considéré jusqu'ici, qu'une seule fonction y_x de x; mais la considération du produit de plusieurs fonctions de la même variable, conduit à divers résultats curieux et utiles d'analyse. Soit u une fonction de t, et y_x le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction; soit u' une fonction de t', et y'_x le coefficient de t'^x dans le développement de cette fonction; soit encore u'' une fonction de t'', et y''_x le coefficient de t''^x dans son développement; et ainsi de suite. Il est clair que $y_x . y'_x . y''_x$. etc. sera le coefficient de $t^x . t'^x . t''^x$. etc. dans le développement du produit $u . u' . u''$. etc.; ce produit sera donc la fonction génératrice de $y_x . y'_x . y''_x$. etc. La fonction génératrice de $y_{x+1} . y'_{x+1} . y''_{x+1}$, etc. $- y_x . y'_x . y''_x$. etc., ou de $\Delta . y_x . y'_x . y''_x$. etc. sera ainsi

$$u . u' . u''. \text{etc.} \left(\frac{1}{t . t' . t''. \text{etc.}} - 1\right);$$

et la fonction génératrice de $\Delta^n . y_x . y'_x . y''_x$.etc. sera

$$u . u' . u'' . \text{etc} . \left(\frac{1}{t . t' . t'' . \text{etc.}} - 1\right)^n .$$

On prouvera, comme dans le n° 2, que la fonction génératrice de $\Sigma^n . y_x . y'_x . y''_x$.etc. sera

$$u . u' . u'' . \text{etc.} \left(\frac{1}{t . t' . t'' . \text{etc.}} - 1\right)^{-n};$$

c'est-à-dire que l'on peut changer n en $-n$ dans la fonction génératrice de $\Delta^n . y_x . y'_x$.etc., pourvu que l'on change Δ^{-n} dans Σ^n.

Appliquons ces résultats à deux fonctions y_x et y'_x. La fonction génératrice de $\Delta^n . y_x . y'_x$ sera $u.u' . \left(\frac{1}{t.t'} - 1\right)^n$. On peut la mettre sous cette forme

$$u.u' . \left[\frac{1}{t} - 1 + \frac{1}{t} . \left(\frac{1}{t'} - 1\right)\right]^n;$$

en la développant, elle devient

$$u . u' . \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n + \frac{n}{t} . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1} . \left(\frac{1}{t'} - 1\right) \\ \quad + \frac{n . (n-1)}{1 . 2 . t^2} . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-2} . \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^2 + \text{etc.} \end{array} \right\};$$

les fonctions

$$u.u' . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n; \; u.u' . \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1} . \left(\frac{1}{t'} - 1\right); \; u.u' . \frac{1}{t^2} . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-2} . \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^2; \text{ etc.};$$

sont respectivement génératrices des produits $y'_x . \Delta^n y_x$; $\Delta . y'_x . \Delta^{n-1} . y_{x+1}$; $\Delta^2 . y'_x . \Delta^{n-2} . y_{x+2}$; etc. L'équation

$$u.u' . \left(\frac{1}{t.t'} - 1\right)^n = u.u' . \left[\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n + \frac{n}{t} . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1} . \left(\frac{1}{t'} - 1\right) + \text{etc.}\right]$$

donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens,

$$\Delta^n . y_x . y'_x = y'_x . \Delta^n . y_x + n . \Delta . y'_x . \Delta^{n-1} . y_{x+1}$$
$$+ \frac{n . (n-1)}{1 . 2} . \Delta^2 . y'_x . \Delta^{n-2} . y_{x+2} + \text{etc.} \qquad (8)$$

En changeant n dans $-n$, on aura

$$\Sigma^n . y_x . y'_x = y'_x . \Sigma^n . y_x - n . \Delta . y'_x . \Sigma^{n+1} . y_{x+1} + \frac{n.(n+1)}{1.2} . \Delta^2 . y'_x . \Sigma^{n+2} . y_{x+2} - \text{etc.} \qquad (9)$$

En général, on a

$$u.u'.u''.\text{etc.}\left(\frac{1}{t.t'.t''.\text{etc.}} - 1\right)^n$$
$$= u.u'.u''.\text{etc.}\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right).\left(1+\frac{1}{t'}-1\right).\left(1+\frac{1}{t''}-1\right).\text{etc.}-1\right]^n;$$

ce qui donne, en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens,

$$\Delta^n . y_x . y'_x . y''_x . \text{etc.} = [(1+\Delta).(1+\Delta').(1+\Delta'').\text{etc.}-1]^n; \qquad (10)$$

pourvu que dans chaque terme du développement du second membre de cette équation, on place immédiatement après chaque caractéristique Δ, Δ', Δ'', etc., respectivement y_x, y'_x, y''_x, etc., et qu'on multiplie ce terme par le produit des fonctions dont il ne contient point la caractéristique. Ainsi dans le cas de trois variables, on écrira, au lieu de Δ^r, la quantité $y'_x . y''_x . \Delta^r . y_x$; au lieu de $\Delta^r . \Delta'^{r'}$, on écrira $y''_x . \Delta^r . y_x . \Delta'^{r'} . y'_x$; au lieu de $\Delta'^{r'} . \Delta''^{r''}$, on écrira $y_x . \Delta'^{r'} . y'_x . \Delta''^{r''} . y''_x$; et ainsi du reste.

En faisant n négatif, l'équation (10) subsiste encore, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales.

Dans le cas des différences infiniment petites, les caractéristiques Δ, Δ', Δ'', etc. se changent en d, d', d'', etc. L'équation (10) devient ainsi, en négligeant les différentielles d'un ordre supérieur, relativement à celles d'un ordre inférieur,

$$d^n . y_x . y'_x . y''_x . \text{etc.} = (d + d' + d'' + \text{etc.})^n.$$

Cette équation développée donne, relativement à deux fonctions y_x et y'_x,

$$d^n . y_x . y'_x = y'_x . d^n y_x + n . dy'_x . d^{n-1} y_x + \frac{n.(n-1)}{1.2} . d^2 y'_x . d^{n-2} y_x + \text{etc.}$$

En faisant n négatif, les différences négatives se changeant en intégrales, on aura

$$\int^n.y_x.y'_x.dx^n = y'_x.\int^n y_x.dx^n - n.\frac{dy'_x}{dx}.\int^{n+1}y_x.dx^{n+1}$$
$$+\frac{n.(n+1)}{1.2}.\frac{d^2y'_x}{dx^2}.\int^{n+2}y_x.dx^{n+2} - \text{etc.}$$

On a

$$u.u'.u''.\text{etc.}\left(\frac{1}{t^i.t'^i.t''^i.\text{etc.}}-1\right)^n.$$
$$=u.u'.u''.\text{etc.}\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i.\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)^i.\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)^i.\text{etc.}-1\right]^n;$$

en désignant donc par ${}^i\Delta^n.y_x.y'_x.y''_x.\text{etc.}$, la différence finie du produit $y_x.y'_x.y''_x.\text{etc.}$, lorsque x varie de i; l'équation précédente donnera, en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens,

$${}^i\Delta^n.y_x.y'_x.y''_x.\text{etc.} = [(1+\Delta)^i.(1+\Delta')^i.(1+\Delta'')^i.\text{etc.}-1]^n; \qquad (11)$$

en observant les conditions prescrites ci-dessus relativement aux caractéristiques Δ, Δ', Δ'', etc., et à leurs puissances. Cette dernière équation subsiste encore, en faisant n négatif, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales.

Supposons

$$x=\frac{x'}{dx'}; \quad i=\frac{\alpha}{dx'};$$

y_x, y'_x, etc. deviendront des fonctions de x', que nous désignerons par $y_{x'}$, $y'_{x'}$, etc.; l'équation (11) donnera ainsi la suivante, en observant que les caractéristiques Δ, Δ', etc. se changent en d, d', etc., et que l'on a

$$(1+dy_{x'})^{\frac{\alpha}{dx'}} = c^{\alpha.\frac{dy_{x'}}{dx'}},$$

$${}^i\Delta^n.y_{x'}.y'_{x'}.y''_{x'}.\text{etc.} = \left(c^{\alpha.\frac{dy_{x'}}{dx'}+\alpha.\frac{dy'_{x'}}{dx'}+\alpha.\frac{dy''_{x'}}{dx'}+\text{etc.}}-1\right)^n; \qquad (12)$$

équation qui subsiste encore en faisant n négatif, et changeant les différences négatives en intégrales.

Ne considérons que deux variables y_x et y'_x, et supposons $y'_x = p^x$, on aura

$$(1+\Delta')^i = p^x + i.\Delta.p^x + \frac{i.(i-1)}{1.2}.\Delta^2.p^x + \text{etc.};$$

or

or on a généralement, x variant de l'unité,

$$\Delta^r.p^x = p^x.(p-1)^r;$$

on aura donc

$$(1+\Delta')^i = p^i.p^x.$$

L'équation (11) deviendra ainsi

$$'\Delta^n.p^x.y_x = p^x.[p^i.(1+\Delta.y_x)^i - 1]^n; \qquad (13);$$

en faisant n négatif, on aura

$$'\Sigma^n.p^x.y_x = \frac{p^x}{[p^i.(1+\Delta.y_x)^i-1]^n} + a.x^{n-1} + b.x^{n-2} + \text{etc.}; \qquad (14)$$

a, b, etc. étant des constantes arbitraires dues à l'intégration n fois répétée de $p^x.y_x$. J'ajoute ici ces constantes, au second membre de l'équation précédente ; parce qu'elles ne sont implicitement renfermées dans son premier terme, que lorsque $p=1$.

Si l'on fait dans les deux équations précédentes, $x=\frac{x'}{dx'}$; $i=\frac{a}{dx'}$; $p=1+dx'.\log h$; on aura

$$'\Delta^n.h^{x'}.y_{x'} = h^{x'}.\left[h^a.c^{a.\frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1\right]^n; \qquad (15)$$

$$'\Sigma^n.h^{x'}.y_{x'} = \frac{h^{x'}}{\left[h^a.c^{a.\frac{dy_x}{dx'}}-1\right]^n} + a'.x'^{n-1} + b'.x'^{n-2} + \text{etc.} \qquad (16)$$

Si dans les équations (13) et (14), on suppose i infiniment petit et égal à dx; $'\Delta^n.p^x.y_x$ se changera dans $d^n.p^x.y_x$, et $'\Sigma^n.p^x.y_x$ se changera dans $\frac{1}{dx^n}.\int^n.p^x.y_x.dx^n$; on aura ensuite

$$p^i.(1+\Delta.y_x)^i = c^{dx.\log[p.(1+\Delta.y_x)]};$$

on aura donc

$$[p^i.(1+\Delta.y_x)^i - 1]^n = dx^n.\{\log[p.(1+\Delta.y_x)]\}^n;$$

et les équations (13) et (14) deviendront

$$\frac{d^n.p^x.y_x}{dx^n} = p^x.\{\log[p.(1+\Delta.y_x)]\}^n; \qquad (17)$$

$$\int^n.p^x.y_x.dx^n = \frac{p^x}{\{\log.[p.(1+\Delta.y_x)]\}^n} + a.x^{n-1} + b.x^{n-2} + \text{etc.} \qquad (18)$$

CHAPITRE II.

Des fonctions génératrices à deux variables.

12. Nommons u une fonction de t et t'; supposons qu'en la développant suivant les puissances de t et t', elle donne la suite infinie

$$\begin{array}{l} y_{0,0} + y_{1,0}.t + y_{2,0}.t^2 \ldots + y_{x,0}.t^x + y_{x+1,0}.t^{x+1} \ldots\ldots + y_{\infty,0}.t^\infty \\ + y_{0,1}.t' + y_{1,1}.t.t' + y_{2,1}.t^2.t' \ldots + y_{x,1}.t^x.t' + y_{x+1,1}.t^{x+1}.t' \ldots + y_{\infty,1}.t^\infty.t' \\ + y_{0,2}.t'^2 + y_{1,2}.t.t'^2 + y_{2,2}.t^2.t'^2 \ldots + y_{x,2}.t^x.t'^2 + y_{x+1,2}.t^{x+1}.t'^2 \ldots + y_{\infty,2}.t^\infty.t'^2 \\ + \text{etc.} \end{array}$$

le coefficient de $t^x.t'^{x'}$ sera $y_{x,x'}$; u sera donc la fonction génératrice de $y_{x,x'}$.

Si l'on désigne par la caractéristique Δ, les différences finies, lorsque x seul varie de l'unité, et par la caractéristique ${}'\Delta$, les différences lorsque x' seul varie de la même quantité; la fonction génératrice de $\Delta.y_{x,x'}$ sera, par le n° 1, $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)$, et celle de ${}'\Delta.y_{x,x'}$ sera $u.\left(\frac{1}{t'}-1\right)$; d'où il est facile de conclure que la fonction génératrice de $\Delta^i.{}'\Delta^{i'}.y_{x,x'}$ sera $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^i.\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}$.

En général si l'on désigne par $\nabla.y_{x,x'}$ la quantité

$$\begin{array}{llll} A.y_{x,x'} + B.y_{x+1,x'} + C.y_{x+2,x'} & + \text{etc.} \\ \qquad + B'.y_{x,x'+1} + C'.y_{x+1,x'+1} & + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + C''.y_{x,x'+2} & + \text{etc.} \\ & + \text{etc.}; \end{array}$$

Si l'on désigne pareillement par $\nabla^2.y_{x,x'}$ une fonction dans laquelle

$\nabla . y_{x, \bar{x}'}$ entre de la même manière que $y_{x, x'}$ dans $\nabla . y_{x, x'}$; si l'on désigne encore par $\nabla^3 . y_{x, x'}$ une fonction dans laquelle $\nabla^2 . y_{x, x'}$ entre de la même manière que $y'_{x, x'}$ dans $\nabla . y_{x, x'}$, et ainsi de suite; la fonction génératrice de $\nabla^n . y_{x, x'}$ sera

$$u . \left\{ \begin{array}{l} A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{etc.} \\ \quad + \frac{B'}{t'} + \frac{C'}{t.t'} + \text{etc.} \\ \qquad\quad + \frac{C''}{t'^2} + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\quad + \text{etc.} \end{array} \right\}^n;$$

partant, la fonction génératrice de $\Delta^i . {}'\Delta^{i'} . \nabla^n . y_{x, x'}$ sera la fonction génératrice précédente, multipliée par $\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i . \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$.

s étant supposée une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$; si l'on développe s^i suivant les puissances de ces variables, et que l'on désigne par $\frac{k}{t^m . t'^{m'}}$, un terme quelconque de ce développement; le coefficient de $t^x . t'^{x'}$ dans $\frac{k.u}{t^m . t'^{m'}}$ étant $k . y_{x+m, x'+m'}$, on aura celui de $t^x . t'^{x'}$ dans $u . s^i$, ou, ce qui revient au même, on aura $\nabla^i . y_{x, \bar{x}'}$, 1°. en substituant dans s, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$, $y_{x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'}$; 2°. en développant ce que devient alors $u . s^i$ suivant les puissances de y_x et de $y_{x'}$, et en appliquant respectivement aux indices x et x' les exposans de ces puissances, c'est-à-dire en écrivant au lieu d'un terme quelconque, tel que $k . (y_x)^m . (y_{x'})^{m'}$, $k . y_{x+m, x'+m'}$, et par conséquent $k . y_{x, x'}$ au lieu du terme tout constant k, ou $k . (y_{x'})^0 . (y_{x'})^0$.

Si au lieu de développer s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$ et de $\frac{1}{t'} - 1$, et que l'on désigne par $k . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^m . \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{m'}$ un terme quelconque de ce développement; le coefficient de $t^x . t'^{x'}$ dans $k.u. \left(\frac{1}{t} - 1\right)^m . \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{m'}$ étant $k . \Delta^m . {}'\Delta^{m'} . y_{x, x'}$; on aura $\nabla^i . y_{x, x'}$, 1°. en substituant dans s,

$\Delta . y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t} - 1$, et $'\Delta . y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'} - 1$; 2°. en développant alors s^i suivant les puissances de $\Delta . y_{x,x'}$ et $'\Delta . y_{x,x'}$; et en appliquant aux caractéristiques Δ et $'\Delta$, les exposans de ces puissances, c'est-à-dire en écrivant, au lieu d'un terme quelconque, tel que $k . (\Delta . y_{x,x'})^m . ('\Delta . y_{x,x'})^{m'}$, celui-ci $k . \Delta^m . '\Delta^{m'} . y_{x,x'}$; et par conséquent $k . y_{x,x'}$ au lieu du terme constant k.

Soit Σ la caractéristique des intégrales finies relatives à x, et $'\Sigma$ celle des intégrales finies relatives à x'; soit de plus z la fonction génératrice de $\Sigma^i . '\Sigma^{i'} . y_{x,x'}$; on aura $z . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i . \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$ pour la fonction génératrice de $y_{x,x'}$. Cette fonction doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives ou nulles de t et de t', se reduire à u; on aura ainsi, par le n° 2,

$$z . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i . \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'} = u + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t^3} \ldots\ldots + \frac{q}{t^i} + \frac{a'}{t'} + \frac{b'}{t'^2} + \frac{c'}{t'^3} \ldots\ldots + \frac{q'}{t'^{i'}},$$

$a, b, c \ldots\ldots q$ étant des fonctions arbitraires de t', et $a', b', c' \ldots\ldots q'$ étant des fonctions arbitraires de t; partant

$$z = \frac{u . t^i . t'^{i'} + a . t^{i-1} . t'^{i'} + b . t^{i-2} . t'^{i'} \ldots + q . t'^{i'} + a' . t^i . t'^{i'-1} + b' t^i . t'^{i'-2} \ldots + q' . t^i}{(1-t)^i . (1-t')^{i'}}.$$

De l'interpolation des suites à deux variables, et de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles.

13. $y_{x+i, x'+i'}$ est évidemment égal au coefficient de $t^x . t^{x'}$ dans le développement de $\frac{u}{t^i . t'^{i'}}$; or on a

$$\frac{u}{t^i . t'^{i'}} = u . \left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i . \left(1 + \frac{1}{t'} - 1\right)^{i'};$$

on aura donc par le numéro précédent,

$$y_{x+i, x'+i'} = (1 + \Delta . y_{x,x'})^i . (1 + '\Delta . y_{x,x'})^{i'};$$

en développant le second membre de cette équation, on aura

$$y_{x+i,\,x'+i'} = y_{x,x'} + i\,.\,\Delta\,.\,y_{x,x'} + \frac{i.(i-1)}{1.2}.\Delta^2.y_{x,x'} + \text{etc.}$$
$$+ i'.{}'\Delta\,.\,y_{x,x'} + i.i'.\Delta\,.{}'\Delta\,.\,y_{x,x'} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{i'.(i'-1)}{1.2}.{}'\Delta^2.y_{x,x'} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Supposons maintenant qu'au lieu d'interpoler suivant les différences de la fonction $y_{x,x'}$, on veuille interpoler suivant d'autres lois. Pour cela, soit

$$z = A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \frac{D}{t^3} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{B'}{t'} + \frac{C'}{t.t'} + \frac{D'}{t^2.t'} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{C''}{t'^2} + \frac{D''}{t.t'^2} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{D'''}{t'^3} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Si l'on fait

$$A + \frac{B'}{t'} + \frac{C''}{t'^2} + \frac{D'''}{t'^3} + \text{etc.} = a;$$
$$B + \frac{C'}{t'} + \frac{D''}{t'^2} + \text{etc.} = b;$$
$$C + \frac{D'}{t'} + \text{etc.} = c;$$
$$\text{etc.};$$

on aura pour z une expression de cette forme

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots + \frac{l}{t^n}.$$

Nous supposerons ici que le coefficient l de la puissance la plus élevée de $\frac{1}{t}$ est constant ou indépendant de t', et que cette puissance est égale ou plus grande que la somme des puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$ dans chacun des autres termes de z. Il est facile de conclure de l'équation précédente, comme dans le n° 5, les valeurs successives de $\frac{1}{t^{n+1}}, \frac{1}{t^{n+2}}, \frac{1}{t^{n+3}}$, etc., en fonctions de a, b, c, etc. et z; et il est visible que dans chaque terme de l'expression de $\frac{1}{t^i}$, la puissance la plus élevée de $\frac{1}{t}$ sera moindre que n, et la somme des puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$ ne surpassera pas i.

Considérons maintenant la formule (A) du n° 5, et supposons qu'en développant suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$, la quantité

$$\begin{aligned}&b.Z^{(0)}_{i-n+1} + bz.Z^{(1)}_{i-2n+1} + \text{etc.}\\
&+ c.Z^{(0)}_{i-n+2} + cz.Z^{(1)}_{i-2n+2} + \text{etc.}\\
&+ e.Z^{(0)}_{i-n+3} + ez.Z^{(1)}_{i-2n+3} + \text{etc.}\\
&+ \text{etc.},\end{aligned}$$

on ait

$$\begin{aligned}&M + N.z + \text{etc.} + \frac{1}{t'}.(M^{(1)} + N^{(1)}.z + \text{etc})\\
&+ \frac{1}{t'^2}.(M^{(2)} + N^{(2)}.z + \text{etc.})\ldots + \frac{1}{t'^i}.M^{(i)};\end{aligned}$$

les puissances ultérieures de $\frac{1}{t'}$ disparaissent d'elles-mêmes dans ce développement, puisque l'expression de $\frac{1}{t^i}$ ne doit point les contenir. Supposons pareillement qu'en développant la quantité

$$\begin{aligned}&c.Z^{(0)}_{i-n+1} + cz.Z^{(1)}_{i-2n+1} + \text{etc.}\\
&+ e.Z^{(0)}_{i-n+2} + ez.Z^{(1)}_{i-2n+2} + \text{etc.}\\
&+ \text{etc.},\end{aligned}$$

on ait

$$M_1 + N_1.z + \text{etc.} + \frac{1}{t'}.(M_1^{(1)} + N_1^{(1)}.z + \text{etc.})\ldots + \frac{1}{t'^{i-1}}.M_1^{(i-1)}.$$

Supposons encore qu'en développant la quantité

$$\begin{aligned}&e.Z^{(0)}_{i-n+1} + \text{etc.}\\
&+ \text{etc.},\end{aligned}$$

on ait

$$M_2 + N_2.z + \text{etc.} + \frac{1}{t'}.(M_2^{(1)} + N_2^{(1)}.z + \text{etc.}) \ldots\ldots + \frac{1}{t'^{\,i-2}}.M_2^{(i-2)};$$

et ainsi de suite. La formule (A) du n° 5 donnera

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^i} = {} & M + N.z + \text{etc.} \\
& + \frac{1}{t'}.(M^{(1)} + N^{(1)}.z + \text{etc.}) \\
& + \frac{1}{t'^2}.(M^{(2)} + N^{(2)}.z + \text{etc.}) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{t'^i}.M^{(i)} \\
& + \frac{1}{t}.\left\{\begin{array}{l} M_1 + N_1.z + \text{etc.} \\ + \frac{1}{t'}.(M_1^{(1)} + N_1^{(1)}.z + \text{etc.}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{1}{t'^{\,i-1}}.M_1^{(i-1)} \end{array}\right\} \\
& + \frac{1}{t^2}.\left\{\begin{array}{l} M_2 + N_2.z + \text{etc.} \\ + \frac{1}{t'}.(M_2^{(1)} + N_2^{(1)}.z + \text{etc.}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{1}{t'^{\,i-2}}.M_2^{(i-2)} \end{array}\right\} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{t^{n-1}}.\left\{\begin{array}{l} M_{n-1} + N_{n-1}.z + \text{etc.} \\ + \frac{1}{t'}.(M_{n-1}^{(1)} + N_{n-1}^{(1)}.z + \text{etc.}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{1}{t'^{\,i-n+1}}.M_{n-1}^{(i-n+1)} \end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

Cela posé, si l'on nomme $\nabla.y_{x,x'}$ la quantité

$$\begin{aligned}
A.y_{x,x'} + B.y_{x+1,x'} + C.y_{x+2,x'} & + \text{etc.} \\
+ B'.y_{x,x'+1} + C'.y_{x+1,x'+1} & + \text{etc.} \\
+ C''.y_{x,x'+2} & + \text{etc.} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

le coefficient de $t^x . t'^{x'}$ dans le développement de $\frac{u.z^\mu}{t^r.t'^{r'}}$ sera, par le numéro précédent, $\nabla^\mu . y_{x+r,\,x'+r'}$; l'équation précédente donnera par conséquent, en la multipliant par u, et en passant des fonctions génératrices à leurs coefficiens,

$$y_{x+i,\,x'} = \left\{\begin{array}{l} \quad M.y_{x,\,x'} + N.\nabla.y_{x,\,x'} + \text{etc.} \\ + M^{(1)}.y_{x,\,x'+1} + N^{(1)}.\nabla.y_{x,\,x'+1} + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + M^{(i)}.y_{x,\,x'+i} \end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} \quad M_1.y_{x+1,\,x'} + N_1.\nabla.y_{x+1,\,x'} + \text{etc.} \\ + M_1^{(1)}.y_{x+1,\,x'+1} + N_1^{(1)}.\nabla.y_{x+1,\,x'+1} + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + M_1^{(i-1)}.y_{x+1,\,x'+i-1} \end{array}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} \quad M_{n-1}.y_{x+n-1,\,x'} + N_{n-1}.\nabla.y_{x+n-1,\,x'} + \text{etc.} \\ + M_{n-1}^{(1)}.y_{x+n-1,\,x'+1} + N_{n-1}^{(1)}.\nabla.y_{x+n-1,\,x'+1} + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + M_{n-1}^{(i-n+1)}.y_{x+n-1,\,x'+i-n+1} \end{array}\right\}.$$

14. Si l'on suppose $\nabla.y_{x,\,x'} = 0$, l'équation précédente donnera, en y faisant $x = 0$,

$$\begin{aligned} y_{i,\,x'} = {} & M.y_{0,\,x'} + M^{(1)}.y_{0,\,x'+1} + M^{(2)}.y_{0,\,x'+2} \ldots + M^{(i)}.y_{0,\,x'+i} \\ & + M_1.y_{1,\,x'} + M_1^{(1)}.y_{1,\,x'+1} + M_1^{(2)}.y_{1,\,x'+2} \ldots + M_1^{(i-1)}.y_{1,\,x'+i-1} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + M_{n-1}.y_{n-1,\,x'} + M_{n-1}^{(1)}.y_{n-1,\,x'+1} \ldots\ldots\ldots + M_{n-1}^{(i-n+1)}.y_{n-1,\,x'+i-n+1}; \end{aligned}$$

$M^{(r)}$, $M_1^{(r)}$, $M_2^{(r)}$, etc. étant des fonctions de i et de r. L'expression précédente de $y_{i,\,x'}$ peut être mise sous cette forme très-simple,

$$y_{i,\,x'} = \Sigma . \left\{\begin{array}{c} M^{(r)}.y_{0,\,x'+r} + M_1^{(r-1)}.y_{1,\,x'+r-1} + M_2^{(r-2)}.y_{2,\,x'+r-2} \\ \ldots + M_{n-1}^{(r-n+1)}.y_{n-1,\,x'+r-n+1} \end{array}\right\}; \quad (\lambda)$$

l'intégrale

l'intégrale étant prise depuis $r=0$ jusqu'à $r=i+1$ par rapport au premier terme, depuis $r=1$ jusqu'à $r=i+1$ par rapport au second terme, et ainsi de suite. Cette expression de $y_{i,x'}$ sera l'intégrale complète de l'équation $\nabla . y_{i,x'}=0$, ou

$$\begin{aligned} 0 = A.y_{i,x'} + B.y_{i+1,x'} &+ C.y_{i+2,x'} \ldots\ldots + l.y_{i+n,x'} \\ + B'.y_{i,x'+1} &+ C'.y_{i+1,x'+1} \ldots\ldots \\ &+ C''.y_{i,x'+2} \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ h.y_{i,x'+n}. \end{aligned}$$

Il est visible que $y_{0,x'}$, $y_{1,x'}$, $y_{2,x'}$, ... $y_{n-1,x'}$ sont les n fonctions arbitraires qu'introduit l'intégration de l'équation $\nabla . y_{i,x'}=0$. Pour les déterminer, il faut connaître immédiatement, ou du moins pouvoir conclure des conditions du problème, les n premiers rangs verticaux de la table suivante :

$$\begin{array}{llllll} y_{0,0}, & y_{1,0}, & y_{2,0}, & y_{3,0} \ldots\ldots y_{i,0}, & y_{i+1,0} \ldots\ldots y_{\infty,0} \\ y_{0,1}, & y_{1,1}, & y_{2,1}, & y_{3,1} \ldots\ldots y_{i,1}, & y_{i+1,1} \ldots\ldots y_{\infty,1} \\ y_{0,2}, & y_{1,2}, & y_{2,2}, & y_{3,2} \ldots\ldots y_{i,2}, & y_{i+1,2} \ldots\ldots y_{\infty,2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots ; \quad (Q) \\ y_{0,x'}, & y_{1,x'}, & y_{2,x'}, & y_{3,x'} \ldots\ldots y_{i,x'}, & y_{i+1,x'} \ldots\ldots y_{\infty,x'} \\ y_{0,x'+1}, & y_{1,x'+1}, & y_{2,x'+1}, & y_{3,x'+1} \ldots y_{i,x'+1}, & y_{i+1,x'+1} \ldots y_{\infty,x'+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{0,\infty}, & y_{1,\infty}, & y_{2,\infty}, & y_{3,\infty} \ldots\ldots y_{i,\infty}, & y_{i+1,\infty} \ldots\ldots y_{\infty,\infty}. \end{array}$$

Dans un grand nombre de problèmes, les n premiers rangs verticaux sont donnés par des équations aux différences finies linéaires, et par conséquent par une suite de termes de la forme $A.p^{x'}$. Supposons que l'expression de $y_{0,x'}$ contienne le terme $A.p^{x'}$; la partie correspondante de $y_{i,x'}$ donnée par la formule (λ) sera

$$A.p^{x'}.(M + M^{(1)}.p + M^{(2)}.p^2 \ldots\ldots + M^{(i)}.p^i);$$

mais la fonction

$$M + \frac{M^{(1)}}{t'} + \frac{M^{(2)}}{t'^2} \ldots\ldots + \frac{M^{(i)}}{t'^i}$$

est le développement de

$$b.Z^{(0)}_{i-n+1} + c.Z^{(0)}_{i-n+2} + \text{etc.}$$

suivant les puissances de $\frac{1}{t}$; en changeant donc dans cette dernière quantité, $\frac{1}{t}$ en p, et nommant P ce qu'elle devient alors; on aura $A.P.p^{x'}$ pour la partie de $y_{i,x'}$ qui répond au terme $A.p^{x'}$. Il suit de là que si la valeur de $y_{0,x'}$ est égale à $A.p^{x'}+A'.p'^{x'}+A''.p''^{x'}+$ etc., et que l'on nomme P', P'', etc., ce que devient P, en y changeant p dans p', p'', etc.; on aura pour la partie correspondante de $y_{i,x'}$,

$$A.P.p^{x'}+A'.P'.p'^{x'}+A''.P''.p''^{x'}+\text{etc.}$$

On trouvera pareillement que si la valeur de $y_{1,x'}$ est exprimée par $B.q^{x'}+B'.q'^{x'}+B''.q''^{x'}+$ etc.; et si l'on nomme Q, Q', Q'', etc., ce que devient la quantité

$$c.Z^{(0)}_{i-n+1}+e.Z^{(0)}_{i-n+2}+\text{etc.}$$

lorsqu'on y change successivement $\frac{1}{t}$ en q, q', q'', etc.; la partie correspondante de $y_{i,x'}$ sera

$$B.Q.q^{x'}+B'.Q'.q'^{x'}+B''.Q''.q''^{x'}+\text{etc.},$$

et ainsi de suite. La réunion de tous ces termes donnera l'expression de $y_{i,x'}$, la plus simple à laquelle on puisse parvenir.

15. La valeur de $y_{i,x'}$ donnée par la formule (λ) du numéro précédent, dépendant de la connaissance de $M^{(r)}$, $M_1^{(r-1)}$, etc.; il est visible que ces quantités seront connues, lorsque l'on aura le coefficient de $\frac{1}{t^r}$ dans le développement de $Z^{(0)}_i$; tout se réduit donc à déterminer ce coefficient. On a par le n° 5,

$$\begin{aligned}Z^{(0)}_i = &-\frac{1}{a.\alpha^{i+1}.(\alpha-\alpha').(\alpha-\alpha'').\text{etc.}}\\ &-\frac{1}{a.\alpha'^{i+1}.(\alpha'-\alpha).(\alpha'-\alpha'').\text{etc.}}\\ &-\frac{1}{a.\alpha''^{i+1}.(\alpha''-\alpha).(\alpha''-\alpha').\text{etc.}}\\ &-\text{etc.},\end{aligned}$$

α, α', α'', etc. étant fonctions de $\frac{1}{t'}$. Si l'on fait $\frac{1}{t'}=s$, et que l'on différentie l'expression précédente de $Z_i^{(0)}$, n fois de suite par rapport à s, on aura avec l'équation précédente, $n+1$ équations, au moyen desquelles, en éliminant les puissances indéterminées $\frac{1}{\alpha^{i+1}}$, $\frac{1}{\alpha'^{i+1}}$, $\frac{1}{\alpha''^{i+1}}$, etc., on parviendra à une équation linéaire entre $Z_i^{(0)}$, $\frac{dZ_i^{(0)}}{ds}$, $\frac{d^2Z_i^{(0)}}{ds^2}$, etc., dont les coefficiens seront fonctions de α, α', α'', etc., et de leurs différentielles prises par rapport à s; or il est clair que α, α', α'', etc. doivent entrer de la même manière dans ces coefficiens que l'on pourra ainsi obtenir en fonctions rationnelles et entières des coefficiens de l'équation qui donne les valeurs de α, α', α'', etc., et des différences de ces coefficiens, et par conséquent en fonctions rationnelles de s. En faisant ensuite disparaître les dénominateurs de ces fonctions, on aura une équation linéaire entre $Z_i^{(0)}$ et ses différentielles, équation dont les coefficiens seront des fonctions rationnelles et entières de s. Cela posé, considérons un terme quelconque de cette équation, tel que $k.s^m.\frac{d^\mu.Z_i^{(0)}}{ds^\mu}$, et nommons λ_r le coefficient de $\frac{1}{t'^r}$ dans le développement de $Z_i^{(0)}$ suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$; ce coefficient dans le développement de $k.s^m.\frac{d^\mu Z_i^{(0)}}{ds^\mu}$ sera

$$k.(r+\mu-m).(r+\mu-m-1).(r+\mu-m-2)\ldots\ldots\ldots(r-m+1).\lambda_{r+\mu-m}.$$

En repassant ainsi des fonctions génératrices à leurs coefficiens, l'équation entre $Z_i^{(0)}$ et ses différences, donnera une équation entre λ_r, λ_{r+1}, etc., dont les coefficiens seront des fonctions rationnelles de r, et dont l'intégrale sera la valeur de λ_r.

Il suit de là que l'intégration de toute équation linéaire aux différences finies partielles, dont les coefficiens sont constans, dépend, 1°. de l'intégration d'une équation linéaire aux différences finies dont les coefficiens sont variables; 2°. d'une intégrale *définie*.

L'intégrale définie dont dépend la valeur de $y_{i,x'}$ dans la formule (λ) est relative à r, et doit s'étendre jusqu'à $r=i+1$.

Relativement à l'équation aux différences partielles du premier ordre

$$\begin{aligned}0=A.y_{i,x'}+B.y_{i+1,x'}\\+B'.y_{i,x'+1},\end{aligned}$$

on a

$$Z_i^{(0)}=-\frac{1}{a.\alpha^{i+1}};$$

on a de plus

$$a=A+B'.s,$$

$$\alpha=-\frac{B}{a};$$

ce qui donne

$$Z_i^{(0)}=-\frac{(A+B'.s)^i}{(-B)^{i+1}};$$

d'où l'on tire cette équation différentielle

$$0=\frac{dZ_i^{(0)}}{ds}.(A+B'.s)-i.B'.Z_i^{(0)};$$

ce qui donne l'équation aux différences finies

$$0=(r+1).A.\lambda_{r+1}-(i-r).B'.\lambda_r;$$

on a ensuite

$$M^{(r)}=B.\lambda_r.$$

La formule (λ) du numéro précédent deviendra donc

$$y_{i,x'}=B.\Sigma.\lambda_r.y_{0,x'+r},$$

L'intégrale finie étant prise depuis $r=0$ jusqu'à $r=i$. C'est l'intégrale complète de l'équation précédente aux différences partielles du premier ordre.

L'équation aux différences en λ_r donne en l'intégrant,

$$\lambda_r=\frac{H.i.(i-1).(i-2)\ldots\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots.r}.\frac{B'^r}{A^r},$$

H étant une constante arbitraire ; et le dénominateur étant l'unité, lorsque r est nul. Pour déterminer cette constante, on observera que le coefficient indépendant de $\frac{1}{t'}$ dans $Z_i^{(0)}$ est $-\frac{A^i}{(-B)^{i+1}}$; c'est la valeur de λ_0, et par conséquent de H; on aura donc

$$y_{i,x'} = -\Sigma . \frac{i.(i-1).(i-2)\ldots\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots r} . \frac{A^{i-r}.B'^r}{(-B)^{i+1}} . y_{0,x'+r}.$$

En passant du fini à l'infiniment petit, la méthode précédente donnera l'intégrale des équations linéaires aux différences infiniment petites partielles dont les coefficiens sont constans, 1°. en intégrant une équation linéaire aux différences infiniment petites; 2°. au moyen d'une intégrale définie. Mais ce n'est pas ici le lieu de m'étendre sur cet objet que j'ai considéré ailleurs avec étendue.

On doit faire ici une remarque importante relative au nombre des fonctions arbitraires que renferme l'expression générale de $y_{i,x'}$. Ce nombre, dans la formule (λ) du numéro précédent, est égal à n; mais il devient plus petit dans le cas où la valeur de z du n° 13 ne renfermant que des puissances de $\frac{1}{t}$ moindres que n, la plus haute puissance n' de $\frac{1}{t'}$ a un coefficient constant ou indépendant de $\frac{1}{t}$. Alors en suivant l'analyse précédente, et déterminant à son moyen la valeur de $\frac{1}{t'^{x'}}$, comme nous avons déterminé celle de $\frac{1}{t^i}$; en repassant ensuite des fonctions génératrices à leurs coefficiens, on parviendra à une formule analogue à la formule (λ); seulement, l'intégrale définie, au lieu de s'étendre jusqu'à $r = i + 1$, devra s'étendre jusqu'à $r = x' + 1$. Cette nouvelle expression de $y_{i,x'}$, ne dépendra plus que des n' fonctions arbitraires $y_{i,0}$, $y_{i,1}$, $y_{i,2}, \ldots y_{i,n'-1}$; et tandis que la première suppose la connaissance des n premiers rangs verticaux de la table (Q) du n° 14; celle-ci n'exige que la connaissance des n' premiers rangs horizontaux de la même table. Ainsi les n fonctions arbitraires $y_{0,x'}$, $y_{1,x'}$, $y_{2,x'}, \ldots y_{n-1,x'}$ de la formule (λ) n'équivalent qu'à n' fonctions arbitraires distinctes. En effet, l'équation proposée aux différences partielles, donne $y_{i,n'}$ au moyen des valeurs de $y_{i\pm r,0}$, $y_{i\pm r,1}, \ldots y_{i\pm r,n'-1}$, r étant un nombre entier. Elle donne pareillement $y_{i,n'+1}$ au moyen de $y_{i\pm r,0}$, $y_{i\pm r,1}, \ldots y_{i\pm r,n'}$, et éliminant $y_{i\pm r,n'}$ au moyen de son expression, on a $y_{i,n'+1}$ au moyen de $y_{i\pm r,0}, y_{i\pm r,1}, \ldots y_{i\pm r,n'-1}$; en continuant ainsi, on voit que l'expression générale de $y_{i,x'}$ ne dépend que des arbitraires $y_{i\pm r,0}, y_{i\pm r,1}, \ldots\ldots y_{i\pm r,n'-1}$; on peut donc, au moyen des n' premiers rangs horizontaux de la table (Q), former tous ses rangs verticaux qui sont, chacun, des fonctions de x', dans lesquelles i est invariable.

En passant du fini à l'infiniment petit, on voit avec évidence, que le nombre des fonctions arbitraires des équations aux différentielles partielles, peut être moindre que le plus haut degré de la différentielle dans ces équations.

16. Quoique les formules données dans les n° 13 et 14, aient une grande généralité, il y a cependant quelques cas qui n'y sont pas compris. Ces cas ont lieu, lorsque l'équation $z=0$ donne l'expression de $\frac{1}{t}$ en $\frac{1}{t'}$ par une suite infinie, ce qui arrive toutes les fois que la plus haute puissance de $\frac{1}{t}$ est multipliée par une fonction rationnelle de $\frac{1}{t'}$. Pour avoir alors l'expression de $y_{x,x'}$ en termes finis, il est nécessaire de recourir à quelques artifices d'analyse que nous allons exposer, en les appliquant à l'équation suivante,

$$z=\frac{1}{t.t'}-\frac{a}{t'}-\frac{b}{t}-c; \qquad (a)$$

Cette équation donne

$$\frac{1}{t}=\frac{\frac{a}{t'}+c+z}{\frac{1}{t'}-b};$$

par conséquent

$$\frac{u}{t^x.\,t'^{x'}}=\frac{u.\left(\frac{a}{t'}+c+z\right)^x}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^x.\,t'^{x'}}.$$

En développant le second membre de cette dernière équation, et repassant des fonctions génératrices aux coefficiens, on aura l'expression de $y_{x,x'}$; car cette quantité est le coefficient de $t^0.t'^0$ dans le développement de la fonction génératrice $\frac{u}{t^x . t'^{x'}}$; et le coefficient $t^0 . t'^0$ dans un terme quelconque du développement du second membre, tel que $u . \frac{k . z^\mu}{t'^{x'+r}}$, est $\nabla^\mu . y_{0, x'+r}$, $\nabla . y_{x, x'}$ étant le coefficient de la fonction génératrice $u . z$, coefficient qui est ici égal à

$$y_{x+1, x'+1} - a . y_{x, x'+1} - b . y_{x+1, x'} - c . y_{x, x'}.$$

Si l'on a $o = \nabla . y_{x, x'}$, les coefficiens des termes affectés de z disparaîtront, et alors on aura l'expression de $y_{x, x'}$ en fonction de $y_{0, x'}$, $y_{0, x'+1}$, $y_{0, x'+2}$, etc.; Cette expression sera l'intégrale de l'équation

$$o = y_{x+1, x'+1} - a . y_{x, x'+1} - b . y_{x+1, x'} - c . y_{x, x'}. \qquad (b)$$

Pour avoir cette expression, z peut être considéré comme nul, puisque l'on ne doit avoir égard qu'aux termes indépendans de z; l'équation (a) devient ainsi

$$o = \frac{1}{t . t'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c;$$

c'est ce que je nomme *équation génératrice* de l'équation (b) aux différences partielles. En effet, on obtient cette dernière équation en multipliant la précédente par u, et repassant des fonctions génératrices aux coefficiens.

L'expression que l'on obtient par l'analyse précédente pour $y_{x, x'}$, est une suite infinie. On parviendra de cette manière à une expression finie. Reprenons la valeur de $\frac{u}{t^x . t'^{x'}}$, et donnons-lui cette forme

$$\frac{u}{t^x . t'^{x'}} = \frac{u . \left(\frac{1}{t'} - b + b\right)^{x'} . \left[c + ab + a . \left(\frac{1}{t'} - b\right)\right]^x}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^x}.$$

Si l'on développe le second membre de cette équation, par rapport aux puissances de $\frac{1}{t'} - b$, on aura

$$\frac{u}{t^x . t'^{x'}} = u . \left\{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + x' . b . \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} + \frac{x' . (x'-1)}{1.2} . b^2 . \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-2} + \text{etc.}\right\}$$
$$\times \left\{a^x + x . (c + ab) . \frac{a^{x-1}}{\frac{1}{t'} - b} + \frac{x . (x-1)}{1.2} . (c + ab)^2 . \frac{a^{x-2}}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^2} + \text{etc.}\right\}.$$

Soit

$$V = a^x,$$
$$V^{(1)} = x'.b.a^x + x.(c+ab).a^{x-1},$$
$$V^{(2)} = \frac{x'.(x'-1)}{1.2}.b^2.a^x + x'.x.b.(c+ab).a^{x-1} + \frac{x.(x-1)}{1.2}.(c+ab)^2.a^{x-2},$$
$$V^{(3)} = \frac{x'.(x'-1).(x'-2)}{1.2.3}.b^3.a^x + \frac{x'.(x'-1)}{1.2}.x.b^2.(c+ab).a^{x-1}$$
$$+ x'.\frac{x.(x-1)}{1.2}.b.(c+ab)^2.a^{x-2}$$
$$+ \frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2.3}.(c+ab)^3.a^{x-3},$$

etc.;

on aura

$$\frac{u}{t^x.t'^{x'}} = u.\left\{\begin{array}{l} V.\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'} + V^{(1)}.\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-1} + V^{(2)}.\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-2} \ldots + V^{(x')} \\ + \dfrac{V^{(x'+1)}}{\frac{1}{t'}-b} + \dfrac{V^{(x'+2)}}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^2} \ldots\ldots + \dfrac{V^{(x'+x)}}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^x} \end{array}\right\}.$$

Or l'équation

$$\frac{1}{t.t'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c = 0$$

donne

$$\frac{1}{\frac{1}{t'}-b} = \frac{\frac{1}{t}-a}{c+ab};$$

partant

$$\frac{u}{t^x.t'^{x'}} = u.\left\{\begin{array}{l} V.\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'} + V^{(1)}.\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-1} \ldots\ldots + V^{(x')} \\ + \dfrac{V^{(x'+1)}}{c+ab}.\left(\frac{1}{t}-a\right) + \dfrac{V^{(x'+2)}}{(c+ab)^2}.\left(\frac{1}{t}-a\right)^2 \ldots + \dfrac{V^{(x'+x)}}{(c+ab)^x}.\left(\frac{1}{t}-a\right)^x \end{array}\right\}.$$

Pour repasser maintenant des fonctions génératrices aux coefficiens, nous observerons, 1°. que le coefficient de $t^0.t'^0$ dans $\frac{u}{t^x.t'^{x'}}$, est $y_{x,x'}$; 2°. que ce même coefficient, dans un terme quelconque, tel que $u.\left(\frac{1}{t'}-b\right)^r$, ou $u.b^r.\left(\frac{1}{bt'}-1\right)^r$, est $b^r.{}'\Delta^r.\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right)$, la caractéristique ${}'\Delta$ des différences se rapportant à la variabilité de x', et cette variable devant être supposée nulle après les différentiations;

tions; 3°. que ce coefficient dans $u.\left(\frac{1}{t}-a\right)^r$, est $a^r.\Delta^r.\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)$, la caractéristique Δ se rapportant à la variabilité de x, et cette variable devant être supposée nulle après les différentiations; on aura donc avec ces conditions,

$$y_{x,x'}=V.b^{x'}.'\Delta^{x'}.\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right)+V^{(1)}.b^{x'-1}.'\Delta^{x'-1}.\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right)\ldots\ldots+V^{(x')}y_{0,0}$$
$$+\frac{a}{c+ab}.V^{(x'+1)}.\Delta.\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)+\frac{a^2}{(c+ab)^2}.V^{(x'+2)}.\Delta^2.\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{a^x}{(c+ab)^x}.V^{(x'+x)}.\Delta^x.\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right);$$

c'est l'intégrale complète de l'équation (b) aux différences partielles. Il est clair que cette intégrale suppose que l'on connaît le premier rang horizontal et le premier rang vertical de la table (Q) du n° 14.

17. L'expression précédente de $y_{x,x'}$ offre cela de remarquable, savoir, que les caractéristiques Δ et $'\Delta$ des différences finies, ont pour exposans, les variables x et x'. En voici un autre exemple. Considérons l'équation aux différences partielles

$$0=\Delta^n.y_{x,x'}+\frac{a}{\alpha}.\Delta^{n-1}.'\Delta.y_{x,x'}+\frac{b}{\alpha^2}.\Delta^{n-2}.'\Delta^2.y_{x,x'}+\text{etc.},$$

la caractéristique Δ se rapportant à la variable x dont l'unité est la différence, et la caractéristique $'\Delta$ se rapportant à la variable x' dont α est la différence. L'équation génératrice correspondante sera, par le numéro précédent,

$$0=\left(\frac{1}{t}-1\right)^n+\frac{a}{\alpha}.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-1}.\left(\frac{1}{t'^\alpha}-1\right)+\frac{b}{\alpha^2}.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-2}.\left(\frac{1}{t'^\alpha}-1\right)+\text{etc.}$$

Cette équation donne les n suivantes

$$\frac{1}{t}-1=\frac{q}{\alpha}.\left(1-\frac{1}{t'^\alpha}\right),$$
$$\frac{1}{t}-1=\frac{q'}{\alpha}.\left(1-\frac{1}{t'^\alpha}\right),$$
$$\frac{1}{t}-1=\frac{q''}{\alpha}.\left(1-\frac{1}{t'^\alpha}\right),$$
etc.

q, q', q'', etc. étant les n racines de l'équation

$$0 = z^n - a.z^{n-1} + b.z^{n-2} - \text{etc.}$$

L'équation

$$\frac{1}{t} - 1 = \frac{q}{\alpha}.\left(1 - \frac{1}{t'^{\alpha}}\right)$$

donne

$$\frac{u}{t^x.t'^{x'}} = \frac{u}{t'^{x'}}.\left(1 + \frac{q}{\alpha} - \frac{q}{\alpha}.\frac{1}{t'^{\alpha}}\right)^x$$

$$= \frac{u}{t'^{x'}}(-1)^x.\left\{\begin{array}{l}\frac{q^x}{\alpha^x}.\frac{1}{t'^{\alpha x}} - x.\frac{q^{x-1}}{\alpha^{x-1}}.\left(1 + \frac{q}{\alpha}\right).\frac{1}{t'^{\alpha(x-1)}} \\ + \text{etc.}\end{array}\right\}.$$

En repassant des fonctions génératrices aux coefficiens, on aura

$$y_{x,x'} = (-1)^x.\left\{\frac{q^x}{\alpha^x}.y_{0,x'+\alpha x} - x.\frac{q^{x-1}}{\alpha^{x-1}}.\left(1 + \frac{q}{\alpha}\right).y_{0,x'+\alpha(x-1)} + \text{etc.}\right\}.$$

Le second membre de cette équation peut être mis sous la forme

$$\left(1 + \frac{\alpha}{q}\right)^{x + \frac{x'}{\alpha}}.\left(-\frac{q}{\alpha}\right)^x.{}'\Delta^x.\left[\left(\frac{q}{\alpha + q}\right)^{\frac{x'}{\alpha}}.y_{0,x'}\right].$$

En désignant donc par la fonction arbitraire $\varphi(x')$ la quantité $\left(\frac{q}{\alpha + q}\right)^{\frac{x'}{\alpha}}.y_{0,x'}$, l'expression de $y_{x,x'}$ deviendra

$$y_{x,x'} = \left(1 + \frac{\alpha}{q}\right)^{x + \frac{x'}{\alpha}}.\left(-\frac{q}{\alpha}\right)^x.{}'\Delta^x.\varphi(x').$$

Cette valeur satisfait donc à l'équation proposée aux différences partielles. Il est visible que chacune des racines q', q'', etc., fournit une valeur semblable, dans laquelle on peut introduire une autre arbitraire. Nous désignerons par $\varphi_1(x')$, $\varphi_2(x')$, etc. ces nouvelles arbitraires. La réunion de toutes ces valeurs satisfera à l'équation proposée, parce qu'elle est linéaire, et cette réunion en sera l'intégrale complète qui est ainsi,

$$y_{x,x'} = \left(1+\frac{\alpha}{q}\right)^{x+\frac{x'}{\alpha}} \cdot \left(-\frac{q}{\alpha}\right)^{x} \cdot {}'\Delta^{x} \cdot \varphi(x')$$
$$+\left(1+\frac{\alpha}{q'}\right)^{x+\frac{x'}{\alpha}} \cdot \left(-\frac{q'}{\alpha}\right)^{x} \cdot {}'\Delta^{x} \cdot \varphi_1(x')$$
$$+ \text{etc.}$$

Si l'on suppose α infiniment petit et égal à dx'; si l'on observe d'ailleurs que

$$\left(1+\frac{dx'}{q}\right)^{x+\frac{x'}{dx'}} = c^{\frac{x'}{q}},$$

comme il est facile de s'en convaincre, en prenant les logarithmes de chaque membre de cette équation, on aura

$$y_{x,x'} = c^{\frac{x'}{q}} \cdot (-q)^{x} \cdot \left(\frac{d^{x} \cdot \varphi(x')}{dx'^{x}}\right) + c^{\frac{x'}{q'}} \cdot (-q')^{x} \cdot \left(\frac{d^{x} \cdot \varphi_1(x')}{dx'^{x}}\right) + \text{etc.};$$

c'est l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles finies et infiniment petites,

$$0 = \Delta^{n} \cdot y_{x,x'} + a \cdot \Delta^{n-1} \cdot \left(\frac{d \cdot y_{x,x'}}{dx'}\right) + b \cdot \Delta^{n-2} \cdot \left(\frac{d^{2} \cdot y_{x,x'}}{dx'^{2}}\right) + \text{etc.}$$

Toutes les équations aux différences partielles que nous avons examinées jusqu'ici, n'ont point de dernier terme indépendant de la variable principale. Si elles en avaient, on y aurait égard, et l'on intégrerait ces équations par la méthode que nous avons donnée pour cet objet, relativement aux équations aux simples différences, et qu'il est facile d'appliquer aux équations à différences partielles.

Théorèmes sur le développement en séries, des fonctions de plusieurs variables.

18. Si l'on applique aux fonctions de plusieurs variables, la méthode du n° 11; on aura sur le développement de ces fonctions en séries, des théorèmes analogues à ceux du n° 10. Considérons

la fonction génératrice $u.\left[\frac{1}{t.t'.t''.\text{etc.}}-1\right]^n$, et donnons-lui cette forme

$$u.\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right).\left(1+\frac{1}{t'}-1\right).\left(1+\frac{1}{t''}-1\right).\text{etc.}-1\right]^n;$$

u étant supposé une fonction de t, t', t'', etc., dans le développement de laquelle $y_{x,x',x'',\text{etc.}}$ est le coefficient de $t^x.t'^{x'}.t''^{x''}.$etc. Ce coefficient dans le développement de $u.\left[\frac{1}{t.t'.t''.\text{etc.}}-1\right]^n$ sera $\Delta^n.y_{x,x',x'',\text{etc.}}$, x, x', x'', etc. étant supposés varier de l'unité dans $y_{x,x',x'',\text{etc.}}$. Ce même coefficient, dans le développement de la fonction génératrice

$$u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^r.\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}.\left(\frac{1}{t''}-1\right)^{r''}.\text{etc.},$$

sera

$$'\Delta^r.''\Delta^{r'}.'''\Delta^{r''}.\text{etc}.y_{x,x',x'',\text{etc.}},$$

les caractéristiques $'\Delta$, $''\Delta$, $'''\Delta$, etc. se rapportant respectivement aux variables x, x', x'', etc.; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices à leurs coefficiens,

$$\Delta^n.y_{x,x',x'',\text{etc.}}=\left\{\begin{matrix}(1+'\Delta.y_{x,x',x'',\text{etc.}}).(1+''\Delta.y_{x,x',x'',\text{etc.}})\\ \times(1+'''\Delta.y_{x,x',x'',\text{etc.}}).\text{etc.}-1\end{matrix}\right\}^n;$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique aux caractéristiques $'\Delta$, $''\Delta$, etc., les exposans des puissances de $'\Delta.y_{x,x',x'',\text{etc.}}$, $''\Delta.y_{x,x',x'',\text{etc.}}$, etc.

En changeant n dans $-n$, la même équation subsiste encore, pourvu que l'on change, comme dans les nos 10 et 11, les caractéristiques Δ, $'\Delta$, $''\Delta$, etc., lorsqu'elles ont un exposant négatif, en intégrales finies correspondantes, les signes Σ, $'\Sigma$, $''\Sigma$, etc. étant les caractéristiques des intégrales, correspondantes aux caractéristiques Δ, $'\Delta$, $''\Delta$, etc. des différences.

Il est clair que $u.\left[\frac{1}{t^i.t'^{i'}.t''^{i''}.\text{etc.}}-1\right]^n$ est la fonction génératrice de la différence finie $n^{\text{ième}}$ de $y_{x,x',x'',\text{etc.}}$, x variant de i, x' variant de i', x'' variant de i'', etc.; or on a

$$u.\left[\frac{1}{t^i.t'^{i'}.t''^{i''}\text{etc.}}-1\right]^n = u.\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i.\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}.\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)^{i''}.\text{etc.}-1\right]^n,$$

en désignant donc par $\overline{\Delta}$ la caractéristique des différences, lorsque x varie de i, x' de i', x'' de i'', etc.; et par $\overline{\Sigma}$, la caractéristique intégrale correspondante, on aura

$$\overline{\Delta}^n.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}} = [(1+{}'\Delta.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}})^i.(1+{}''\Delta.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}})^{i'}.\text{etc}-1]^n,$$

$$\overline{\Sigma}^n.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}} = \frac{1}{[(1+{}'\Delta.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}})^i.(1+{}''\Delta.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}})^{i'}.\text{etc.}-1]^n};$$

pourvu que dans le développement du second membre de ces équations, on applique aux caractéristiques $'\Delta$, $''\Delta$, etc., les exposans des puissances de $'\Delta.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}}$, $''\Delta.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}}$, etc., et que l'on change les différences négatives en intégrales. On peut ainsi se dispenser d'indiquer les arbitraires que l'intégrale finie $\overline{\Sigma}^n$ doit introduire, parce qu'elles sont censées renfermées dans les intégrales que donne le développement de son expression.

Les deux équations précédentes ont encore lieu, en supposant que dans les différences $'\Delta.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}}$, $''\Delta.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}}$, etc., x, x', x'', au lieu de varier de l'unité, varient d'une quantité quelconque ϖ; pourvu que dans la différence $\overline{\Delta}.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}}$, x varie de $i\varpi$, x' de $i'\varpi$, x'' de $i''\varpi$, etc. Maintenant si l'on suppose ϖ infiniment petit, les différences $'\Delta.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}}$, $''\Delta.y_{x,\,x',\,x'',\,\text{etc.}}$, etc., se changeront, la première dans $dx.\left(\frac{dy_{x,\,x',\,\text{etc.}}}{dx}\right)$, la seconde dans $dx'.\left(\frac{dy_{x,\,x',\,\text{etc.}}}{dx'}\right)$, etc. De plus, si l'on fait i, i', i'', etc. infiniment grands, et tels que l'on ait

$$idx = \alpha, \quad i'dx' = \alpha', \quad \text{etc.};$$

on aura

$$(1+{}'\Delta.y_{x,\,x',\,\text{etc.}})^i = \left\{1+dx.\left(\frac{dy_{x,\,x',\,\text{etc.}}}{dx}\right)\right\}^{\frac{\alpha}{dx}} = c^{\alpha.\left(\frac{dy_{x,\,x',\,\text{etc.}}}{dx}\right)},$$

c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On aura pareillement

$$(1+{}''\Delta.y_{x,\,x',\,\text{etc.}})^{i'} = c^{\alpha'.\left(\frac{dy_{x,\,x',\,\text{etc.}}}{dx'}\right)},$$

et ainsi de suite; partant

$$\overline{\Delta}^n . y_{x,x',\text{etc.}} = [c^{\alpha.\left(\frac{dy_{x,x',\text{etc.}}}{dx}\right)+\alpha'.\left(\frac{dy_{x,x',\text{etc.}}}{dx'}\right)+\text{etc.}} - 1]^n,$$

$$\overline{\Sigma}^n . y_{x,x',\text{etc.}} = \frac{1}{[c^{\alpha.\left(\frac{dy_{x,x',\text{etc.}}}{dx}\right)+\alpha'.\left(\frac{dy_{x,x',\text{etc.}}}{dx'}\right)+\text{etc.}} - 1]^n};$$

x variant de α, x' de α', etc., dans les deux premiers membres de ces équations.

Si au lieu de supposer ϖ infiniment petit, on le suppose fini, et i infiniment petit et égal à dx; si l'on suppose encore i', i'', etc. infiniment petits et respectivement égaux à dx', dx'', etc., on aura

$$(1+{}'\Delta . y_{x,x',\text{ etc.}})^i = (1+{}'\Delta . y_{x,x',\text{ etc.}})^{dx} = 1+dx.\log(1+{}'\Delta . y_{x,x',\text{etc.}});$$

on aura pareillement

$$(1+{}''\Delta . y_{x,x',\text{etc.}})^{i'} = 1+dx'.\log(1+{}''\Delta . y_{x,x',\text{etc.}});$$
etc.

d'ailleurs $\overline{\Delta}^n . y_{x,x',\text{etc.}}$ se change alors dans $d^n . y_{x,x',\text{etc.}}$; on aura donc

$$d^n . y_{x,x',\text{etc.}} = [dx.\log(1+{}'\Delta . y_{x,x',\text{etc.}}) + dx'.\log(1+{}''\Delta . y_{x,x',\text{etc.}}) + \text{etc.}]^n;$$

équation qui en faisant n négatif, subsiste encore, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales. Ces divers résultats sont analogues à ceux que nous avons trouvés dans le nº 10, relativement aux fonctions d'une seule variable; et l'on y retrouve l'analogie que nous avons observée entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales.

Considérations sur le passage du fini à l'infiniment petit.

19. Le passage du fini à l'infiniment petit, consiste à négliger les différences infiniment petites, par rapport aux quantités finies, et généralement les infiniment petits d'un ordre supérieur, relativement à ceux d'un ordre inférieur. Cette omission semble ôter à ce passage, la rigueur géométrique; mais pour se convaincre de son entière exactitude, il suffit de le considérer comme le résultat de

la comparaison des puissances homogènes d'une variable indéterminée, dans le développement des termes d'une équation qui subsiste, quelle que soit cette indéterminée; car il est clair que les termes affectés de la même puissance, doivent se détruire mutuellement.

Pour rendre cela sensible par un exemple, considérons l'équation suivante que donne l'équation (q) du n° 10, en y faisant $n=1$,

$$'\Delta . y_{x'} = (1 + dy_{x'})^{\frac{\alpha}{dx'}} - 1,$$

$'\Delta$ est la caractéristique des différences finies, x' variant de α, et d est la caractéristique des différences, x' variant de dx'. L'équation précédente développée donne, en appliquant conformément à l'analyse du numéro cité, les exposans des puissances de $dy_{x'}$ à la caractéristique d,

$$'\Delta . y_{x'} = \frac{\alpha}{dx'} . dy_{x'} + \frac{(\alpha^2 - \alpha dx')}{1.2.dx'^2} . d^2 y_{x'} + \text{etc.},$$

$dy_{x'}$ est égal à $y_{x'+dx'} - y_{x'}$. Supposons qu'en développant la fonction de $x'+dx'$, représentée par $y_{x'+dx'}$, on ait

$$y_{x'+dx'} = y_{x'} + dx' . y'_{x'} + dx'^2 . z_{x'} + \text{etc.};$$

on aura

$$dy_{x'} = dx' . y'_{x'} + dx'^2 . z_{x'} + \text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$d^2 y_{x'} = dx' . dy'_{x'} + dx'^2 . dz_{x'} + \text{etc.}$$

Développons pareillement $y'_{x'+dx'}$, $z_{x'+dx'}$, etc. suivant les puissances de dx', et supposons que l'on ait

$$y'_{x'+dx'} = y'_{x'} + dx' . y''_{x'} + dx'^2 . s_{x'} + \text{etc.},$$

$$z_{x'+dx'} = z_{x'} + dx' . z'_{x'} + \text{etc.};$$

on aura

$$dy'_{x'} = dx' . y''_{x'} + dx'^2 . s_{x'} + \text{etc.},$$

$$dz_{x'} = dx' . z'_{x'} + \text{etc.};$$

partant

$$d^2 . y_{x'} = dx'^2 . y''_{x'} + dx'^3 . s_{x'} + \text{etc.}$$
$$+ dx'^3 . z'_{x'} + \text{etc.};$$

L'expression précédente de $'\Delta . y_{x'}$ deviendra ainsi,

$$'\Delta . y_{x'} = \alpha . y'_{x'} + \frac{\alpha^2}{1.2} . y''_{x'} + \text{etc.}$$
$$+ dx' . \left\{ \begin{array}{l} \alpha . (z_{x'} - \frac{1}{2} y''_{x'} + \text{etc.}) \\ + \alpha^2 . (s_{x'} + z''_{x'} + \text{etc.}) \\ + \text{etc.} \end{array} \right\} ; \quad (o)$$
$$+ dx'^2 . \text{etc.}$$

dx' étant indéterminé, les termes indépendans de dx' doivent être égalés séparément entre eux ; on a donc

$$'\Delta . y_{x'} = \alpha . y'_{x'} + \frac{\alpha^2}{1.2} . y''_{x'} + \text{etc.}$$

Maintenant, $y'_{x'}$ est le coefficient de dx' dans le développement de $y_{x'+dx'}$; c'est ce que l'on désigne dans le Calcul différentiel, par $\frac{dy_{x'}}{dx'}$. Pareillement $y''_{x'}$ est le coefficient de dx' dans le développement de $y'_{x'+dx'}$; c'est ce que l'on désigne par $\frac{dy'_{x'}}{dx'}$, ou par $\frac{d^2y_{x'}}{dx'^2}$, et ainsi de suite; en substituant donc dans l'équation précédente, $y_{x'+\alpha} - y_{x'}$ au lieu de $'\Delta . y_{x'}$, on aura le théorème suivant,

$$y_{x'+\alpha} = y_{x'} + \alpha . \frac{dy_{x'}}{dx'} + \frac{\alpha^2}{1.2} . \frac{d^2y_{x'}}{dx'^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} . \frac{d^3y_{x'}}{dx'^3} + \text{etc.}$$

Considéré comme résultat de la comparaison des termes indépendans de dx', ce théorème ne laisse aucun doute sur son exactitude rigoureuse, et il est visible par l'analyse précédente, que cette comparaison revient à négliger les termes multipliés par dx' et ses puissances, relativement aux quantités finies; cette omission n'ôte donc rien à la rigueur du Calcul différentiel. Mais on voit de plus, *à priori*, que les termes affectés de la même puissance de l'indéterminée dx', doivent se détruire mutuellement, ce que l'on peut vérifier *à posteriori*; ainsi ce que l'on néglige comme infiniment petit est rigoureusement nul; ensorte que l'omission des infiniment petits, relativement aux quantités finies, n'est au fond qu'un moyen facile d'éliminer les termes superflus qui doivent disparaître dans le résultat final.

Ce

Ce rapprochement du calcul aux différences finies, et du calcul différentiel, met en évidence la rigueur des résultats de ce dernier calcul, et donne sa vraie métaphysique; mais ses applications à l'étendue, à la durée et au mouvement, supposent de plus, le principe des limites. On peut, par un rapprochement semblable, éclaircir divers points de l'analyse infinitésimale, qui ont été des sujets de contestation parmi les géomètres: telle est la discontinuité des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations aux différences partielles. Ceux qui ont rejeté cette discontinuité, se fondaient sur ce que l'analyse ordinaire des différences infiniment petites, suppose que les différentielles successives d'une fonction, doivent être infiniment petites relativement aux précédentes, ce qui n'a point lieu lorsque la fonction est discontinue. Pour éclaircir cette question délicate, il faut la considérer dans les différences finies, et observer ce qui arrive dans le passage de ces différences aux différences infiniment petites.

Prenons pour exemple l'équation suivante aux différences finies partielles

$$(y_{x+1,x'}-2y_{x,x'}+y_{x-1,x'})-(y_{x,x'+1}-2y_{x,x'}+y_{x,x'-1})=0; \quad (a)$$

son équation génératrice est, par le n° 16,

$$t.\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-t'.\left(\frac{1}{t'}-1\right)^2=0;$$

et en suivant l'analyse donnée précédemment, il est facile d'en conclure que l'intégrale complète de l'équation proposée (a) est

$$y_{x,x'}=\varphi(x+x')+\psi(x-x'),$$

$\varphi(x+x')$ étant une fonction arbitraire de $x+x'$, et $\psi(x-x')$ étant une fonction arbitraire de $x-x'$. Il est facile d'ailleurs de s'assurer que cette valeur satisfait à la proposée, et qu'elle en est l'intégrale complète, puisqu'elle renferme deux fonctions arbitraires.

Supposons présentement que dans la table suivante,

$$\begin{array}{l} y_{0,0},\ y_{1,0},\ y_{2,0},\ y_{3,0}\ldots\ldots y_{n-1,0},\ y_{n,0} \\ y_{0,1},\ y_{1,1},\ y_{2,1},\ y_{3,1}\ldots\ldots y_{n-1,1},\ y_{n,1} \\ y_{0,2},\ y_{1,2},\ y_{2,2},\ y_{3,2}\ldots\ldots y_{n-1,2},\ y_{n,2}; \quad (Z) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{0,\infty},\ y_{1,\infty},\ y_{2,\infty},\ y_{3,\infty}\ldots\ldots y_{n-1,\infty},\ y_{n,\infty} \end{array}$$

on connaisse les deux premiers rangs horizontaux compris entre les deux colonnes verticales extrêmes

$$y_{0,0},\ y_{0,1},\ y_{0,2}\ldots\ldots y_{0,\infty}$$
$$y_{n,0},\ y_{n,1},\ y_{n,2}\ldots\ldots y_{n,\infty};$$

et que l'on connaisse de plus tous les termes de ces deux colonnes; on pourra déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$ qui tombent entre ces colonnes. Car si l'on veut former le troisième rang horizontal, on observera que l'équation (a) donne

$$y_{x,x'+1}=y_{x+1,x'}+y_{x-1,x'}-y_{x,x'-1}.$$

En faisant dans cette dernière équation, $x'=1$, et successivement $x=1$, $x=2$, $x=3\ldots\ldots x=n-1$, on aura les valeurs de $y_{1,2}$, $y_{2,2}, y_{3,2}\ldots\ldots y_{n-1,2}$, ou le troisième rang horizontal, au moyen des deux premiers rangs horizontaux. On formera de la même manière, le quatrième rang horizontal, et ainsi de suite à l'infini. Mais si l'on veut déterminer les valeurs de $y_{x,x'}$ qui tombent hors de la table (Z), les conditions précédentes ne suffisent pas, et il faut leur en ajouter d'autres.

Reprenons l'intégrale

$$y_{x,x'}=\varphi(x+x')+\psi(x-x');$$

et supposons que le second rang horizontal qui détermine une des deux fonctions arbitraires, soit tel que l'on ait

$$\psi(x-x')=\varphi(x-x');$$

on aura

$$y_{x,x'}=\varphi(x+x')+\varphi(x-x').$$

En faisant $x'=0$, on a $\varphi(x)=\frac{1}{2}.y_{x,0}$; partant

$$y_{x,x'}=\tfrac{1}{2}.y_{x+x',0}+\tfrac{1}{2}.y_{x-x',0}.$$

Il est facile de voir que cette équation satisfait à l'équation proposée (a); mais elle n'en est qu'une intégrale particulière qui répond au cas où le second rang horizontal se forme du premier, au moyen de l'équation

$$y_{x,1}=\tfrac{1}{2}.y_{x+1,0}+\tfrac{1}{2}.y_{x-1,0}.$$

Tant que $x+x'$ sera égal ou moindre que n, et que $x-x'$ sera positif ou nul; on aura la valeur de $y_{x,x'}$, au moyen du premier rang horizontal. Mais lorsque x croissant, $x+x'$ deviendra plus grand que n, ou lorsque $x-x'$ deviendra négatif; il faudra déterminer les valeurs de $y_{x+x',0}$ et de $y_{x-x',0}$, au moyen des deux colonnes verticales extrêmes. Supposons que tous les termes de ces colonnes soient nuls, et que l'on ait ainsi $y_{0,x'}=0$ et $y_{n,x'}=0$. En faisant x nul dans l'équation

$$y_{x,x'} = \tfrac{1}{2}\cdot y_{x+x',0} + \tfrac{1}{2}\cdot y_{x-x',0},$$

on aura

$$y_{-x',0} = -y_{x',0}.$$

En faisant ensuite $x=n$ dans la même équation, on aura

$$y_{n+x',0} = -y_{n-x',0}.$$

Si l'on change ensuite dans cette dernière équation x' en $n+x'$, on aura

$$y_{2n+x',0} = -y_{-x',0} = y_{x',0};$$

en changeant encore x' dans $n+x'$, on aura

$$y_{3n+x',0} = y_{n+x',0} = -y_{n-x',0};$$

et généralement, on aura

$$y_{2rn+x',0} = y_{x',0},$$
$$y_{(2r+1)n+x',0} = -y_{n-x',0}.$$

On pourra ainsi, au moyen de ces deux équations, continuer les valeurs de $y_{x,x'}$ à l'infini, du côté des valeurs positives de x, et l'on en conclura celles qui répondent à x négatif, au moyen de l'équation

$$y_{-x',0} = -y_{x',0}.$$

De là résulte la construction suivante. Représentons les valeurs de $y_{x,0}$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$, par les ordonnées menées aux angles d'un polygone dont l'abscisse soit x, et dont les deux extrémités, que je désigne par A et B, aboutissent aux points où $x=0$ et $x=n$. On portera ce polygone depuis $x=n$ jusqu'à $x=2n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avait depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$; c'est-à-dire, une position telle, que les parties qui étaient au dessus de l'axe des abscisses x, se trouvent au-dessous, le point B restant d'ailleurs dans cette seconde position, à la même place que dans la première, et le point A répondant ainsi à l'abscisse $x = 2n$. On placera ensuite ce même polygone, depuis $x = 2n$ jusqu'à $x = 3n$, en lui donnant une position contraire à la seconde, et par conséquent semblable à la première, de manière que le point A, dans cette troisième position, conserve la place qu'il avait dans la seconde, et qu'ainsi le point B réponde à l'abscisse $x = 3n$. En continuant de placer ainsi ce polygone alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses; les ordonnées menées aux angles de cette suite de polygones, seront les valeurs de $y_{x,o}$ qui répondent à x positif.

Pareillement, on placera ce polygone depuis $x = o$ jusqu'à $x = -n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avait depuis $x = o$ jusqu'à $x = n$, A restant d'ailleurs à la même place dans ces deux positions. On placera ensuite ce polygone depuis $x = -n$ jusqu'à $x = -2n$, en lui donnant une position contraire à la seconde, le point B conservant la même place, et ainsi de suite à l'infini. Les ordonnées de ces polygones représentent les valeurs de $y_{x,o}$, qui répondent à x négatif. On aura ensuite la valeur de $y_{x,x'}$ en prenant la demi-somme des deux ordonnées qui répondent aux abscisses $x + x'$ et $x - x'$.

Cette construction géométrique est générale, quelle que soit la nature du polygone que nous venons de considérer. Elle servira à déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$, comprises depuis $x = o$ jusqu'à $x = n$, et depuis $x' = o$ jusqu'à $x' = \infty$, pourvu que l'on ait $y_{o,x'} = o$, et $y_{n,x'} = o$, et que d'ailleurs le second rang horizontal de la table (Z) soit tel, que l'on ait

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2}.y_{x+1,o} + \tfrac{1}{2}.y_{x-1,o}.$$

On a par ce qui précède,

$$y_{x,x'+n} = \tfrac{1}{2}.y_{x+x'+n,o} + \tfrac{1}{2}.y_{x-x'-n,o};$$

de plus,

$$y_{x+x'+n,o} = -y_{n-x-x',o}, \quad y_{x-x'-n,o} = -y_{n-x+x',o};$$

donc

$$y_{x,x'+n} = -\tfrac{1}{2}.y_{n-x-x',o} - \tfrac{1}{2}.y_{n-x+x',o} = -y_{n-x,x'};$$

il suit de là que dans la table (Z), le $(n+x')^{ième}$ rang horizontal, est le $x'^{ième}$ rang pris avec un signe contraire et dans un ordre renversé; ensorte que le terme $r^{ième}$ du rang $(n+x')^{ième}$ est le même que le terme $(n-r)^{ième}$ du $x'^{ième}$ rang pris avec un signe contraire. On a ensuite

$$y_{x,\,2n+x'} = \tfrac{1}{2}\cdot y_{2n+x+x',\,0} + \tfrac{1}{2}\cdot y_{x-x'-2n,\,0};$$

on a d'ailleurs, par ce qui précède,

$$y_{2n+x+x',\,0} = y_{x+x',\,0};$$

$$y_{x-x'-2n,\,0} = -y_{2n+x'-x,\,0} = -y_{x'-x} = y_{x-x'};$$

partant

$$y_{x,\,2n+x'} = \tfrac{1}{2}\cdot y_{x+x',\,0} + \tfrac{1}{2}\cdot y_{x-x',\,0} = y_{x,\,x'};$$

d'où il suit que le $(2n+x')^{ième}$ rang horizontal est exactement égal au $x'^{ième}$ rang.

Considérons présentement les vibrations d'une corde tendue, dont la figure initiale soit quelconque, pourvu qu'elle soit très-rapprochée dans tous ses points, de l'axe des abscisses. Nommons x l'abscisse, t le tems, $y_{x,t}$ l'ordonnée d'un point quelconque de la corde, après le tems t. Concevons de plus l'abscisse x partagée dans une infinité de parties égales à dx, et que nous prendrons pour unité; ce qui revient à considérer x comme un nombre infini. Cela posé, on aura par les principes de dynamique,

$$\left(\frac{ddy_{x,t}}{dt^2}\right) = \frac{a^2}{dx^2}\cdot(y_{x+1,\,t} - 2y_{x,\,t} + y_{x-1,\,t});$$

a étant un coefficient constant dépendant de la tension et de la grosseur de la corde. Si l'on fait $t = \frac{x'}{a}$; on aura $dt = \frac{dx'}{a}$, et $y_{x,t}$ deviendra une fonction de x et de x', que nous désignons par $y_{x,\,x'}$; or la grandeur de dt étant arbitraire, on peut la supposer telle, que la variation de x' soit égale à celle de x, que nous avons prise pour l'unité; l'équation précédente devient ainsi

$$y_{x,\,x'+1} - 2y_{x,\,x'} + y_{x,\,x'-1} = y_{x+1,\,x'} - 2y_{x,\,x'} + y_{x-1,\,x'},$$

x et x' étant ici des nombres infinis. Cette équation est la même que celle que nous venons de considérer; ainsi la construction géométrique que nous avons donnée précédemment, peut-être

r et s étant des nombres entiers positifs, s pouvant être nul; c'est-à-dire que la différentielle de cette quantité doit être infiniment petite par rapport à cette quantité elle-même. Cette condition est indispensable pour que l'équation différentielle proposée puisse subsister; parce que toute équation différentielle partielle suppose que les différentielles partielles de $y_{x,x'}$ dont elle est formée, et divisées par les puissances respectives de dx et de dx', sont des quantités finies et comparables entre elles; mais rien n'oblige d'admettre la même condition relativement aux différences de $y_{x,x'}$ de l'ordre n ou d'un ordre supérieur. En prenant pour fonctions arbitraires, les différences les plus élevées des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale d'une équation aux différences partielles; cette intégrale ne renfermera plus alors que des fonctions arbitraires et leurs intégrales successives qui sont continues, parce qu'en général l'intégrale $\int ds . \varphi(s)$ est continue dans le cas même où la fonction $\varphi(s)$ ne l'est pas. La condition précédente se réduit donc à ce que la différence $(n-1)^{ième}$ de chaque fonction arbitraire soit continue, c'est-à-dire que sa différentielle soit infiniment plus petite. Il ne doit donc point y avoir de saut entre deux tangentes consécutives de la courbe qui représente la fonction arbitraire de l'intégrale d'une équation aux différentielles partielles du second ordre; ainsi dans le problème des cordes vibrantes que nous venons de discuter, il est nécessaire et il suffit que deux élémens quelconques contigus de la figure initiale de la corde, forment entre eux un angle infiniment peu différent de deux angles droits. Il ne doit point y avoir de saut entre deux rayons osculateurs consécutifs de la courbe qui représente la fonction arbitraire continue dans l'intégrale, si l'équation aux différences partielles est du troisième ordre; et ainsi de suite.

Considérations générales sur les fonctions génératrices.

20. Il est souvent utile de connaître la fonction génératrice d'une quantité donnée par une équation aux différences finies, ordinaires ou partielles; parce que l'analyse offrant divers moyens pour développer les fonctions en séries, on peut ainsi obtenir d'une manière fort simple, la valeur de la quantité cherchée. Il résulte

du

du n° 5, que la quantité y_x, donnée par l'équation aux différences finies

$$0 = a.y_x + b.y_{x+1} + c.y_{x+2} \ldots\ldots + p.y_{x+n-1} + q.y_{x+n},$$

est le coefficient de t^x dans le développement de la fonction

$$\frac{A + B.t + C.t^2 \ldots\ldots + H.t^{n-1}}{a.t^n + b.t^{n-1} + c.t^{n-2} \ldots\ldots + p.t + q},$$

$A, B, C, \ldots. H$ étant des constantes arbitraires. En effet, si l'on compare cette fonction à celle-ci,

$$y_0 + y_1.t + y_2.t^2 \ldots\ldots + y_x.t^x + y_{x+1}.t^{x+1} \ldots\ldots + y_\infty.t^\infty;$$

on aura, en faisant disparaître le dénominateur, et en vertu de l'équation aux différences en y_x,

$$\begin{aligned} A + B.t + C.t^2 \ldots\ldots + H.t^{n-1} = {} & t^{n-1}.(b.y_0 + c.y_1 + \text{etc.}) \\ & + t^{n-2}.(c.y_0 + e.y_1 + \text{etc.}) \\ & + \text{etc.}; \end{aligned}$$

en égalant ensuite les puissances homogènes de t, on aura les valeurs de A, B, C, etc. au moyen des n valeurs $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$; on aura donc ainsi la fonction génératrice de y_x.

Si l'on suppose $\Sigma^i.y_x = y'_x$, on aura $y_x = \Delta^i.y'_x$; et alors l'équation

$$0 = a.y_x + b.y_{x+1} + c.y_{x+2} \ldots\ldots + q.y_{x+n},$$

devient

$$0 = a.\Delta^i.y'_x + b.\Delta^i.y'_{x+1} \ldots\ldots + q.\Delta^i.y'_{x+n};$$

ce qui donne en intégrant,

$$a.y'_x + b.y'_{x+1} \ldots\ldots + q.y'_{x+n} = M.x^{i-1} + N.x^{i-2} + \text{etc.},$$

M, N, etc. étant des constantes arbitraires. Par le n° 2, u étant la fonction génératrice de y_x, celle de y'_x est

$$\frac{u.t^i + A'.t^{i-1} + B'.t^{i-2} + \text{etc.}}{(1-t)^i};$$

la fonction génératrice de y'_x ou de la quantité donnée par l'équation précédente en y'_x est donc

$$\frac{(A+B.t+C.t^2\ldots+H.t^{n-1}).t^i+(A'.t^{i-1}+B'.t^{i-2}+\text{etc.}).(a.t^n+b.t^{n-1}\ldots\ldots+q)}{(1-t)^i.(a.t^n+b.t^{n-1}+c.t^{n-2}\ldots\ldots+p.t+q)}.$$

Concevons maintenant que a, b, c, etc. soient des fonctions rationnelles et entières de t' de l'ordre n, et que A, B, C, etc. soient des fonctions arbitraires de la même quantité; y_x sera fonction de x et de t'. En la développant par rapport aux puissances de t', nous nommerons $y_{x,x'}$ le coefficient de $t'^{x'}$ dans ce développement. Cela posé, si l'on suppose

$$\begin{aligned}
a &= a'.t'^n + b'.t'^{n-1} + c'.t'^{n-2} + \text{etc.},\\
b &= a''.t'^n + b''.t'^{n-1} + c''.t'^{n-2} + \text{etc.},\\
c &= a'''.t'^n + \text{etc.},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

L'équation différentielle précédente en y_x donnera, en comparant les coefficiens de la puissance $t'^{x'+n}$, l'équation suivante aux différences partielles en $y_{x,x'}$,

$$\begin{aligned}
0 = a'.y_{x,x'} &+ b'.y_{x,x'+1} + c'.y_{x,x'+2} + \text{etc.}\\
&+ a''.y_{x+1,x'} + b''.y_{x+1,x'+1} + \text{etc.}\\
&\qquad + a'''.y_{x+2,x'} + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad + \text{etc.};
\end{aligned}$$

la fonction génératrice de la variable $y_{x,x'}$ de cette équation sera donc

$$\frac{A+B.t+C.t^2\ldots\ldots+H.t^{n-1}}{\begin{array}{l}a'.t^n.t'^n+b'.t^n.t'^{n-1}+c'.t^n.t'^{n-2}+\text{etc.}\\ \quad+a''.t^{n-1}.t'^n+b''.t^{n-1}.t'^{n-1}+\text{etc.}\\ \qquad+a'''.t^{n-2}.t'^n+\text{etc.}\\ \qquad\qquad+\text{etc.}\end{array}}$$

A, B, C, etc. étant des fonctions arbitraires de t', elles donneront par leur développement, les fonctions arbitraires qui doivent entrer dans l'expression de $y_{x,x'}$.

On peut encore déterminer les fonctions génératrices des équations aux différences finies, dans lesquelles les coefficiens sont variables. Considérons pour cela l'équation aux différences

$$\begin{aligned}
0 = \;& a.y_x+b.y_{x+1}+c.y_{x+2}\ldots\ldots+q.y_{x+n}\\
&+x.(a'.y_x+b'.y_{x+1}+c'.y_{x+2}\ldots\ldots+q'.y_{x+n})\\
&+x^2.(a''.y_x+b''.y_{x+1}+c''.y_{x+2}\ldots\ldots+q''.y_{x+n})\\
&+\text{etc.}
\end{aligned}$$

Si l'on nomme u la fonction génératrice de y_x, on aura, en vertu de l'équation précédente,

$$\begin{aligned}
&u.\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\ldots\ldots+\frac{q}{t^n}\right)\\
&+t.\frac{d}{dt}.\left\{u.\left(a'+\frac{b'}{t}+\frac{c'}{t^2}\ldots\ldots+\frac{q'}{t^n}\right)\right\}\\
&+t.\frac{d}{dt}.\left\{t.\frac{d}{dt}.\left\{u.\left(a''+\frac{b''}{t}+\frac{c''}{t^2}\ldots\ldots+\frac{q''}{t^n}\right)\right\}\right\}\\
&+\text{etc.}\\
&=A+B.t+C.t^2\ldots\ldots+H.t^{n-1},
\end{aligned}$$

$A, B, C, \ldots\ldots H$ étant des constantes arbitraires qui dépendent des valeurs de $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots y_{n-1}$. En effet, si l'on substitue dans cette équation, la valeur précédente de u en série; on voit qu'en vertu de l'équation différentielle proposée, tous les coefficiens de la même puissance de t, disparaissent lorsque cette puissance est égale ou plus grande que n; et la comparaison des puissances inférieures donnent un nombre n d'équations qui déterminent les constantes A, B, C, etc., au moyen des valeurs $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$.

L'équation différentielle précédente n'est intégrable généralement, que dans le cas où elle est du premier ordre, et alors les coefficiens de l'équation aux différences finies en y_x ne renferment que la première puissance de x: dans ce dernier cas, on peut obtenir la fonction génératrice u par des quadratures.

21. La connaissance des fonctions génératrices des équations différentielles, donne l'expression des intégrales de ces équations, au moyen de quadratures définies. Reprenons pour cela, l'équation

$$u=y_0+y_1.t+y_2.t^2\ldots\ldots+y_x.t^x+y_{x+1}.t^{x+1}\ldots\ldots+y_\infty.t^\infty.$$

Substituons dans ses deux membres, $c^{x\varpi\sqrt{-1}}$ au lieu de t^x, c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; et nommons U, ce que devient alors u. En multipliant l'équation par $c^{-x\varpi\sqrt{-1}}d\varpi$, et intégrant, on aura

$$\int U.d\varpi.c^{-x\varpi\sqrt{-1}}=\int d\varpi.\left\{\begin{array}{l}y_0.c^{-x\varpi\sqrt{-1}}+y_1.c^{-(x-1)\varpi\sqrt{-1}}\ldots\ldots\\ \qquad\qquad\ldots+y_x+y_{x+1}.c^{\varpi\sqrt{-1}}+\text{etc}\end{array}\right\}.$$

Si l'on substitue pour $c^{\pm r\varpi\sqrt{-1}}$, sa valeur $\cos r\varpi\pm\sqrt{-1}.\sin r\varpi$, et si l'on prend l'intégrale depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$, 2π étant la circonférence, le second membre se réduit à $2\pi . y_x$; on a donc

$$y_x = \frac{1}{2\pi} . \int U . d\varpi . (\cos x\varpi - \sqrt{-1} . \sin x\varpi)$$

mais cette formule a l'inconvénient d'introduire des imaginaires dont on peut se débarrasser de la manière suivante.

Considérons l'équation

$$\begin{aligned} 0 = a y_x + b . y_{x+1} \ldots\ldots\ldots + q . y_{x+n} \\ + x . (a' . y_x + b' . y_{x+1} \ldots + q' . y_{x+n}); \end{aligned}$$

et supposons

$$y_x = \int t^{-x-1} . T . dt,$$

T étant une fonction de t qu'il s'agit de déterminer, ainsi que les limites de l'intégrale. En substituant pour y_x cette valeur dans l'équation différentielle en y_x, et observant que l'on a

$$x . \int t^{-x-1} dt . \frac{T}{t^r} = - t^{-x} . \frac{T}{t^r} + \int t^{-x} . d . \left(\frac{T}{t^r}\right),$$

ce qui fait disparaître le coefficient variable x; on aura

$$\begin{aligned} 0 = & - T . t^{-x} . \left(a' + \frac{b'}{t} \ldots\ldots + \frac{q'}{t^n}\right) \\ & + \int t^{-x-1} . dt . \left\{ \begin{aligned} & T . \left(a + \frac{b}{t} \ldots\ldots + \frac{q}{t^n}\right) \\ & + t . \frac{d}{dt} . \left[T . \left(a' + \frac{b'}{t} \ldots\ldots + \frac{q'}{t^n}\right)\right] \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \qquad (h)$$

En égalant à zéro la partie sous le signe $\int$, on aura

$$\begin{aligned} 0 = T . \left(a + \frac{b}{t} \ldots + \frac{q}{t^n}\right) \\ + t . \frac{d}{dt} . \left[T . \left(a' + \frac{b'}{t} \ldots + \frac{q'}{t^n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Cette équation intégrée donne T en fonction de t. Elle est la même que l'équation différentielle en u du numéro précédent, en négligeant dans celle-ci le terme indépendant de u. La valeur de T est donc la partie de u qui est indépendante de ce terme.

Pour avoir les limites de l'intégrale $\int t^{-x-1} . T . dt$, on égalera à zéro la partie hors du signe $\int$, dans l'équation (h); ce qui donne

$$0 = T . t^{-x} . \left(a' + \frac{b'}{t} \ldots\ldots + \frac{q'}{t^n}\right).$$

Cette équation est satisfaite en supposant t infini, et en le supposant égal à l'une des racines de l'équation

$$o = a' + \frac{b'}{t} \ldots + \frac{q'}{t^n};$$

on aura ainsi $n+1$ limites de l'intégrale $\int t^{-x-1}.T.dt$; en multipliant ensuite chaque intégrale comprise entre une de ces limites, et les n autres limites, par une constante arbitraire; la somme de ces produits sera la valeur complète de y_x.

On peut étendre cette méthode, aux équations à différences partielles finies et infiniment petites, comme nous le ferons voir dans la seconde partie de ce Livre.

On voit par ce qui précède, l'analogie qui existe entre les fonctions génératrices des variables, et les intégrales définies au moyen desquelles ces variables peuvent être exprimées. Pour la rendre encore plus sensible, considérons l'équation

$$y_x = \int T.dt.t^{-x},$$

T étant une fonction de t, et l'intégrale étant prise dans des limites déterminées. On aura, x variant de α

$$\Delta.y_x = \int T.dt.t^{-x}.\left(\frac{1}{t^\alpha} - 1\right),$$

et généralement,

$$\Delta^i.y_x = \int T.dt.t^{-x}.\left(\frac{1}{t^\alpha} - 1\right)^i;$$

en faisant i négatif, la caractéristique Δ se change dans le signe intégral Σ. Si l'on suppose α infiniment petit et égal à dx; on aura $\frac{1}{t} = 1 + dx.\log.\frac{1}{t}$; on aura donc, en observant qu'alors $\Delta^i.y_x$ se change dans d^iy_x,

$$\frac{d^iy_x}{dx^i} = \int T.dt.t^{-x}.\left(\log.\frac{1}{t}\right)^i.$$

On trouvera de la même manière, et en adoptant les dénominations du n° 2,

$$\nabla^i.y_x = \int T.dt.t^{-x}.\left(a + \frac{b}{t} \ldots + \frac{q}{t^n}\right)^i.$$

Ainsi la même analyse qui donne les fonctions génératrices des dérivées successives des variables, donne les fonctions sous le signe $\int$, des intégrales définies qui expriment ces dérivées. La caractéristique ∇^i n'exprime, à proprement parler, qu'un nombre i d'opérations consécutives; la considération des fonctions génératrices réduit ces opérations à des élévations d'un polynome à ses diverses puissances; et la considération des intégrales définies donne directement l'expression de $\nabla^i.y_x$, dans le cas même où l'on supposerait i un nombre fractionnaire.

Mais le grand avantage de cette transformation des expressions analytiques, en intégrales définies, est de fournir une approximation aussi commode que convergente, de ces expressions, lorsqu'elles sont formées d'un grand nombre de termes et de facteurs; c'est ce qui a lieu dans la théorie des probabilités, quand le nombre des événemens que l'on considère est très-grand. Alors le calcul numérique des résultats auxquels on est conduit par la solution des problèmes, devient impraticable, et il est indispensable d'avoir pour ce calcul, une méthode d'approximation d'autant plus convergente, que ces résultats sont plus compliqués.

Leur expression en intégrales définies, procure cet avantage, et celui de donner les lois suivant lesquelles la probabilité des résultats indiqués par les événemens, approche de la certitude à mesure que les événemens se multiplient, lois dont la connaissance est l'un des objets les plus intéressans de la théorie des probabilités. Ce fut à l'occasion d'un problème de ce genre, dont la solution dépendait de l'expression du terme moyen du binome élevé à une grande puissance, que Stirling transforma cette expression dans une série très-convergente : son résultat peut être regardé comme une des choses les plus ingénieuses que l'on ait trouvées sur les suites. Il est surtout remarquable, en ce que dans une recherche qui semble n'admettre que des quantités algébriques, il introduit une quantité transcendante, savoir, la racine carrée du rapport de la circonférence au diamètre. Mais la méthode de Stirling, fondée sur un théorème de Wallis, et sur l'interpolation des suites, laissait à desirer une méthode directe qui s'étendît à toutes les fonctions composées d'un grand nombre de termes et de facteurs. Telle est la méthode dont je viens de parler, et que j'ai donnée d'abord dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1778, et ensuite avec plus d'étendue, dans les Mémoires de la même académie, pour l'année 1782. Le développement de cette méthode va être l'objet de la seconde Partie de ce Livre, et complettera ainsi le Calcul des fonctions génératrices.

Les séries auxquelles cette méthode conduit, renferment le plus souvent, la racine carrée du rapport de la circonférence au diamètre; et c'est la raison pour laquelle Stirling l'a rencontrée dans le cas particulier qu'il a considéré; mais quelquefois elles dépendent d'autres transcendantes dont le nombre est infini.

Les limites des intégrales définies que cette méthode réduit en séries convergentes, sont, comme on vient de le voir, données par les racines d'une équation que l'on peut nommer *équation des limites*. Mais une remarque très-importante dans cette analyse, et qui permet de l'étendre aux fonctions que la théorie des probabilités présente le plus souvent, est que les séries auxquelles on parvient, ont également lieu dans le cas même où, par des changemens de signe dans les coefficiens de l'équation des limites, ses racines deviennent imaginaires. Ces passages du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire, dont les premières applications ont paru, si je ne me trompe, dans les Mémoires cités, m'ont conduit dans ces Mémoires, aux valeurs de plusieurs intégrales définies, qui offrent cela de remarquable, savoir, qu'elles dépendent à-la-fois de ces deux transcendantes, le rapport de la circonférence au diamètre, et le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On peut donc considérer ces passages, comme des moyens de découvertes, pareils à l'induction dont les géomètres font depuis long-tems usage. Mais ces moyens, quoique employés avec beaucoup de précautions et de réserve, laissent toujours à desirer des démonstrations de leurs résultats. Leur rapprochement des méthodes directes, servant à les confirmer et à faire voir la grande généralité de l'analyse, et pouvant par cette raison, intéresser les géomètres; j'ai insisté particulièrement sur ces passages qu'Euler considérait en même tems que moi, et dont il a fait plusieurs applications curieuses, mais qui n'ont paru que depuis la publication des Mémoires cités.

SECONDE PARTIE.

THÉORIE DES APPROXIMATIONS DES FORMULES QUI SONT FONCTIONS DE TRÈS-GRANDS NOMBRES.

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration par approximation, des différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances.

22. On vient de voir que l'on peut toujours ramener à l'intégration de semblables différentielles, les formules données par la théorie des fonctions génératrices. Nous allons donc nous occuper d'abord avec étendue, de l'approximation de ce genre d'intégrales.

Si l'on désigne par u, u', u'', etc. et φ, des fonctions quelconques de x, et par s, s', s'', etc., de très-grands nombres; toute fonction différentielle qui renferme des fonctions élevées à de grandes puissances, sera comprise dans le terme $\varphi dx \,.\, u^s \,.\, u'^{s'} \,.\, u''^{s''} \,.$ etc. Pour avoir en série convergente, son intégrale prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \theta$, on fera

$$\varphi \,.\, u^s \,.\, u'^{s'} \,.\, u''^{s''} \,.\, \text{etc.} = y;$$

et en désignant par Y ce que devient y lorsqu'on y change x en θ, on supposera

$$y = Y \,.\, c^{-t},$$

c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On aura ainsi

$$t = \log \frac{Y}{y}.$$

Si l'on considère x comme une fonction de t donnée par cette équation; on aura, en supposant dt constant,

$$x = \theta + t.\frac{dx}{dt} + \frac{t^2}{1.2}.\frac{ddx}{dt^2} + \frac{t^3}{1.2.3}.\frac{d^3x}{dt^3} + \text{etc.},$$

t devant être supposé nul après les différentiations, dans les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{ddx}{dt^2}$, etc. On a généralement

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{1}{dt}.d.\frac{1}{dt}.d.\frac{1}{dt}.\ldots.d.\frac{dx}{dt};$$

la caractéristique différentielle se rapportant à tout ce qui la suit, et dt pouvant varier d'une manière quelconque dans le second membre de cette équation; de plus, si l'on différentie l'expression précédente de t en y, et si l'on désigne $-\frac{ydx}{dy}$ par v, on aura $dt = \frac{dx}{v}$; on aura donc

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{v.d.v.d.v\ldots dv}{dx^{n-1}},$$

dx étant supposé constant dans le second membre de cette équation. Ainsi, en nommant U ce que devient v lorsqu'on y change x en θ; la valeur de $\frac{d^n x}{dt^n}$ qui répond à $x = \theta$, ou, ce qui revient au même, à $t = 0$, sera égal à

$$\frac{U.d.U.d.U\ldots dU}{d\theta^{n-1}};$$

on aura donc

$$x = \theta + U.t + \frac{U.dU}{1.2.d\theta}.t^2 + \frac{U.d.U.dU}{1.2.3.d\theta^2}.t^3 + \text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$dx = U.dt.\left(1 + \frac{dU}{d\theta}.t + \frac{d.U.dU}{1.2.d\theta^2}.t^2 + \text{etc.}\right);$$

par conséquent

$$\int y\,dx = UY.\int dt.c^{-t}.\left(1 + \frac{dU}{d\theta}.t + \frac{d.U.dU}{1.2.d\theta^2}.t^2 + \text{etc.}\right).$$

Si l'on prend l'intégrale depuis $t=0$ jusqu'à t infini, on aura généralement

$$\int t^n dt.c^{-t} = 1.2.3.\ldots.n;$$

partant

$$\int y\,dx = UY.\left(1 + \frac{dU}{d\theta} + \frac{d.U.dU}{d\theta^2} + \frac{d.U.d.U.dU}{d\theta^3} + \text{etc.}\right);$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis $x=\theta$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini.

Nommons Y' et U', ce que deviennent y et u lorsqu'on y change x en θ'; on aura pareillement

$$\int y\,dx = U'Y'.\left(1 + \frac{dU'}{d\theta'} + \frac{d.U'.dU'}{d\theta'^2} + \frac{d.U'.dU'.dU'}{d\theta'^3} + \text{etc.}\right);$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x=\theta'$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. En retranchant donc ces deux équations l'une de l'autre, on aura

$$\left.\begin{aligned}\int y\,dx = UY.&\left(1 + \frac{dU}{d\theta} + \frac{d.U.dU}{d\theta^2} + \frac{d.U.d.U.dU}{d\theta^3} + \text{etc.}\right)\\ - U'Y'.&\left(1 + \frac{dU'}{d\theta'} + \frac{d.U'.dU'}{d\theta'^2} + \frac{d.U'.d.U'.dU'}{d\theta'^3} + \text{etc.}\right)\end{aligned}\right\}; \qquad (A)$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis $x=\theta$ jusqu'à $x=\theta'$, ensorte que la considération de t disparaît dans cette formule. Si θ et θ' étaient primitivement renfermés dans y, il ne faudrait faire varier que les quantités θ et θ' qu'introduisent dans U et U', les changemens de x en θ et θ' dans la fonction v.

La formule (A) sera très-convergente, si v ou $-\frac{y\,dx}{dy}$ est une très-petite quantité; or y étant, par la supposition, égal à $\varphi.u^s.u'^{s'}.u''^{s''}.$ etc.; on a

$$v = -\frac{1}{\frac{s\,du}{u\,dx} + \frac{s'du'}{u'dx} + \frac{s''du''}{u''dx} + \text{etc.} + \frac{d\varphi}{\varphi\,dx}}.$$

Ainsi dans le cas où s, s', s'', etc. sont de très-grands nombres, v sera fort petit; et si l'on fait $\frac{1}{s} = \alpha$, α étant une fraction très-petite, la fonction v sera de l'ordre α, et les termes successifs de la formule (A) seront respectivement des ordres α, α^2, α^3, etc.

Cette formule cesserait d'être convergente, si la supposition de $x = \theta$ rendait très-petit le dénominateur de l'expression de v. Supposons, par exemple, que $(x-a)^\mu$ soit un facteur de ce dénominateur; il est clair que les termes successifs de la formule (A) sont respectivement divisés par $(\theta-a)^\mu$, $(\theta-a)^{2\mu+1}$, $(\theta-a)^{3\mu+2}$, etc., et deviendront très-considérables, si θ est peu différent de a; la convergence de cette formule exige donc que $(\theta-a)^\mu$, $(\theta'-a)^\mu$ soient plus grands que α; elle ne peut conséquemment être employée dans l'intervalle où $(x-a)^\mu$ est égal ou moindre que α; mais dans ce cas, on pourra faire usage de la méthode suivante.

23. Si l'on nomme Y ce que devient y lorsqu'on y change x en a; il est visible que $(x-a)^\mu$ étant un facteur de $-\frac{dy}{ydx}$, ou, ce qui revient au même, de $\frac{d.\log\frac{Y}{y}}{dx}$; $(x-a)^{\mu+1}$ sera un facteur de $\log\frac{Y}{y}$. Soit donc

$$y = Y.c^{-t^{\mu+1}},$$
$$v = \frac{x-a}{(\log Y - \log y)^{\frac{1}{\mu+1}}};$$

on aura

$$x = a + vt,$$

v ne devenant point infini, par la supposition de $x = a$. Si l'on désigne ensuite par U, $\frac{d.U^2}{dx}$, $\frac{d^2.U^3}{dx^2}$, etc. ce que deviennent v, $\frac{dv^2}{dx}$, $\frac{d^2.v^3}{dx^2}$, etc., lorsqu'on y change x en a après les différentiations; on aura, par la formule (p) du n° 21 du second Livre de *la Mécanique céleste*,

$$x = a + U.t + \frac{d.U^2}{1.2.dx}.t^2 + \frac{d^2.U^3}{1.2.3.dx^2}.t^3 + \text{etc.};$$

ce qui donne

$$\int ydx = Y.\int dt.c^{-t^{\mu+1}}.\left(U+\frac{d.U^2}{dx}.t+\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2}.t^2+\text{etc.}\right); \qquad \text{(B)}$$

cette formule pourra être employée dans tout l'intervalle où x diffère très-peu de a; elle peut conséquemment servir de supplément à la formule (A) du numéro précédent; mais au lieu d'être ordonnée, comme elle, par rapport aux puissances de α, elle ne l'est que par rapport aux puissances de $\alpha^{\frac{1}{\mu+1}}$; car il est visible que dans ce dernier cas, v n'est que de l'ordre $\alpha^{\frac{1}{\mu+1}}$.

Pour déterminer plus facilement les quantités U, $\frac{d.U^2}{dx^2}$, etc., supposons

$$\log Y - \log y = (x-a)^{\mu+1}.[A+B.(x-a)+C.(x-a)^2+\text{etc.}].$$

Nous aurons, en changeant x en a après les différentiations,

$$A = -\frac{d^{\mu+1}.\log y}{1.2.3\ldots.(\mu+1).dx^{\mu+1}},$$

$$B = -\frac{d^{\mu+2}.\log y}{1.2.3\ldots.(\mu+2).dx^{\mu+2}},$$

etc.

Nous aurons ensuite, quel que soit r,

$$v^r = [A+B.(x-a)+C.(x-a)^2+\text{etc.}]^{-\frac{r}{\mu+1}};$$

d'où il est facile de conclure en développant cette expression de v^r, et nommant $Q.(x-a)^{r-1}$ le terme de ce développement, qui a pour facteur $(x-a)^{r-1}$,

$$\frac{d^{r-1}.U^r}{1.2.3\ldots.(r-1).dx^{r-1}} = Q.$$

La formule (B) ne présente plus ainsi d'autres difficultés que celles qui résultent de l'intégration des quantités de la forme $\int t^r dt.c^{-t^{\mu+1}}$; et l'on a généralement,

$$\int t^n.dt.c^{-t^{\mu+1}} = -\frac{c^{-t^{\mu+1}}}{\mu+1}.\left\{\begin{array}{l} t^{n-\mu}+\frac{(n-\mu)}{\mu+1}.t^{n-2\mu-1}+\frac{(n-\mu).(n-2\mu-1)}{(\mu+1)^2}.t^{n-3\mu-2} \\ \ldots+\frac{(n-\mu).(n-2\mu-1)\ldots(n-r\mu+\mu-r+2)}{(\mu+1)^{r-1}}.t^{n-r\mu-r+1} \end{array}\right\}$$
$$+\frac{(n-\mu).(n-2\mu-1)\ldots(n-r\mu-r+1)}{(\mu+1)^r}.\int t^{n-r\mu-r}.dt.c^{-t^{\mu+1}};$$

r étant égal au quotient de la division de n par $\mu+1$, si la division est possible, ou au nombre immédiatement inférieur, si elle ne l'est pas. La détermination de l'intégrale $\int y dx$ dépend donc des intégrales de cette forme

$$\int dt.c^{-t^{\mu+1}},\ \int t.dt.c^{-t^{\mu+1}},\ldots\int t^{\mu-1}.dt.c^{-t^{\mu+1}}.$$

Il n'est pas possible d'obtenir exactement ces intégrales par les méthodes connues; mais il sera facile dans tous les cas, d'avoir leurs valeurs approchées.

24. Nous aurons principalement besoin dans la suite, de la valeur de $\int y dx$, prise pour tout l'intervalle compris entre deux valeurs consécutives de x, qui rendent y nul; nous allons conséquemment exposer les simplifications dont cette valeur est alors susceptible. La variable y ayant été supposée, dans le numéro précédent, égale à $Y.c^{-t^{\mu+1}}$, il est visible que les deux valeurs de x qui rendent y nul, rendent également nulle la quantité $c^{-t^{\mu+1}}$; ce qui exige que $\mu+1$ soit un nombre pair, et que l'une des valeurs de x réponde à $t=-\infty$, et l'autre à $t=\infty$; Y est donc alors le *maximum* de y, compris entre ces valeurs. Soit $\mu+1=2i$; si l'on prend l'intégrale $\int t^{2n+1}.dt.c^{-t^{2i}}$, depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, sa valeur sera nulle; car il est clair que les élémens de cette intégrale, qui répondent aux valeurs négatives de t, sont égaux et de signe contraire à ceux qui répondent aux mêmes valeurs prises positivement. L'intégrale $\int t^{2n}.dt.c^{-t^{2i}}$ est égal à $2\int t^{2n}.dt.c^{-t^{2i}}$, cette dernière intégrale étant prise depuis t nul

jusqu'à t infini; et dans ce cas, on a par le numéro précédent,

$$\int t^{2n}.dt.c^{-t^{2i}} = \frac{(2n-2i+1).(2n-4i+1)\ldots.(2n-2ri+1)}{(2i)^r}.\int t^{2n-2ri}.dt.c^{-t^{2i}};$$

r étant égal au nombre entier du quotient de la division de n par i. Soit donc, en prenant les intégrales depuis t nul jusqu'à t infini,

$$\begin{aligned} k &= \int dt.c^{-t^{2i}}, \\ k^{(1)} &= \int t^2.dt.c^{-t^{2i}}, \\ k^{(2)} &= \int t^4.dt.c^{-t^{2i}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k^{(i-1)} &= \int t^{2i-2}.dt.c^{-t^{2i}}; \end{aligned}$$

la formule (B) du numéro précédent deviendra

$$\begin{aligned} \int y\,dx = {} & 2k.Y.\left\{U + \frac{1}{2i}.\frac{d^{2i}.U^{2i+1}}{1.2.3\ldots 2i.dx^{2i}} + \frac{(2i+1)}{4i^2}.\frac{d^{4i}.U^{4i+1}}{1.2.3\ldots 4i.dx^{4i}} + \text{etc.}\right\} \\ & + 2k^{(1)}.Y.\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + \dfrac{3}{2i}.\dfrac{d^{2i+2}.U^{2i+3}}{1.2.3\ldots.(2i+2).dx^{2i+2}} \\ \qquad + \dfrac{3.(2i+3)}{4i^2}.\dfrac{d^{4i+2}.U^{4i+3}}{1.2.3\ldots.(4i+2).dx^{4i+2}} + \text{etc.} \end{array}\right\} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 2k^{(i-1)}.Y.\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^{2i-2}.U^{2i-1}}{1.2.3\ldots(2i-2).dx^{2i-2}} + \dfrac{(2i-1)}{2i}.\dfrac{d^{4i-2}.U^{4i-1}}{1.2.3\ldots(4i-2).dx^{4i-2}} \\ + \dfrac{(2i-1).(4i-1)}{4i^2}.\dfrac{d^{6i-2}.U^{6i-1}}{1.2.3\ldots.(6i-2).dx^{6i-2}} + \text{etc.} \end{array}\right\}; \end{aligned}$$

Cette formule est la somme d'un nombre i de suites différentes, décroissantes comme les puissances de α, puisque U est de l'ordre $\alpha^{\frac{1}{2i}}$, et multipliées respectivement par les transcendantes k, $k^{(1)}$, etc., qu'il est, par conséquent, important de connaître; mais il suffit pour cela d'en connaître un nombre égal au plus grand nombre entier compris dans $\frac{i}{2}$.

Considérons pour cela, la double intégrale

$$\iint ds.dx.c^{-s(1+x^n)},$$

les intégrales étant prises depuis s et x nuls jusqu'à leurs valeurs infinies. En l'intégrant d'abord par rapport à s, elle se réduit à

$$\int \frac{dx}{1+x^n};$$

mais cette dernière intégrale est $\frac{\pi}{n.\sin\frac{\pi}{n}}$, n étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire, on a donc

$$\iint ds.dx.c^{-s.(1+x^n)} = \frac{\pi}{n.\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Intégrons maintenant cette double intégrale, d'abord par rapport à x. En faisant $sx^n = t^n$, elle devient

$$\int \frac{ds.c^{-s}}{s^{\frac{1}{n}}}.\int dt.c^{-t^n},$$

et si l'on fait $s = t^n$, on aura

$$n.\int dt.c^{-t^n}.\int t^{n-2}.dt.c^{-t^n} = \frac{\pi}{n.\sin\frac{\pi}{n}},$$

les intégrales étant prises depuis t nul jusqu'à t infini. Si l'on change n dans $\frac{n}{r-1}$, cette équation devient

$$n^2.\int dt.c^{-t^{\frac{n}{r-1}}}.\int t^{\frac{n}{r-1}-2}.dt.c^{-t^{\frac{n}{r-1}}} = \frac{(r-1)^2.\pi}{\sin\left(\frac{r-1}{n}\right).\pi},$$

et si dans cette nouvelle équation, on change t dans t^{r-1}, on aura

$$n^2.\int t^{r-2}.dt.c^{-t^n}.\int t^{n-r}.dt.c^{-t^n} = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{r-1}{n}\right).\pi}. \quad \text{(T)}$$

On aura, au moyen de cette formule, en y faisant $n = 2i$, toutes les valeurs de k, $k^{(1)}, \ldots\ldots k^{(i-1)}$, lorsque l'on en connaîtra la moitié, si i est pair, ou la moitié moins un demi, si i est impair.

En faisant $n = 2$ et $r = 2$, cette formule donne ce résultat remarquable

$$\int dt . c^{-t^2} = \tfrac{1}{2} . \sqrt{\pi}.$$

25. On peut en vertu de la généralité de l'analyse, étendre les résultats précédens, au cas où t est imaginaire. Considérons l'intégrale $\int dx . \cos rx . c^{-a^2x^2}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini. On peut la mettre sous cette forme

$$\tfrac{1}{2} . \int dx . c^{-a^2x^2+rx . \sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2} . \int dx . c^{-a^2x^2-rx . \sqrt{-1}};$$

L'intégrale $\int dx . c^{-a^2x^2+rx . \sqrt{-1}}$ est égale à

$$c^{-\frac{r^2}{4a^2}} . \int dx . c^{-\left(ax-\frac{r\sqrt{-1}}{2a}\right)^2},$$

Si l'on fait

$$t = ax - \frac{r\sqrt{-1}}{2a},$$

elle devient

$$\frac{c^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{a} . \int dt . c^{-t^2}:$$

ici l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -\frac{r\sqrt{-1}}{2a}$ jusqu'à t infini, parce que ces deux limites répondent à x nul et à x infini.

En faisant r négatif dans cette formule, on aura l'expression de l'intégrale $\int dx . c^{-a^2x^2-rx\sqrt{-1}}$; mais dans ce cas, les limites de l'intégrale relative à t sont $t = \frac{r\sqrt{-1}}{2a}$, et t infini; la réunion de ces deux intégrales est donc égale à

$$\frac{c^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{a} . \int dt . c^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$; car la première intégrale ajoute à la seconde, ce qui lui manque pour former la moitié de l'intégrale prise entre les deux limites infinies; or cette dernière intégrale est $\frac{c^{-\frac{r^2}{4a^2}} . \sqrt{\pi}}{a}$; on a donc

$$\int dx . \cos rx . c^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} . c^{-\frac{r^2}{4a^2}}$$

L'analyse

L'analyse qui vient de nous conduire à ce résultat, est fondée sur le passage du réel à l'imaginaire; car on y traite les intégrales relatives à t et prises entre deux limites, dont une est imaginaire et l'autre est infinie, comme si ces limites étaient toutes réelles. Mais on peut parvenir à ce résultat de la manière suivante.

Nommons y l'intégrale $\int dx.\cos rx.c^{-a^2x^2}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini; on aura

$$\frac{dy}{dr}=-\int xdx.\sin rx.c^{-a^2x^2}$$
$$=\frac{1}{2a^2}.\sin rx.c^{-a^2x^2}-\frac{r}{2a^2}.\int dx.\cos rx.c^{-a^2x^2};$$

on aura donc, en prenant l'intégrale depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\frac{dy}{dr}+\frac{r}{2a^2}.y=0.$$

L'intégrale de cette équation est

$$y=B.c^{-\frac{r^2}{4a^2}};$$

B étant une constante arbitraire que l'on déterminera en observant que r étant nul, on a

$$y=B=\int dx.c^{-a^2x^2}.$$

Cette dernière intégrale est, par le numéro précédent, $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$; donc $B=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$; par conséquent

$$\int dx.\cos rx.c^{-a^2x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}.c^{-\frac{r^2}{4a^2}};$$

ce qui est conforme au résultat trouvé ci-dessus par le passage du réel à l'imaginaire.

En différentiant $2n$ fois par rapport à r, on aura

$$\int x^{2n}dx.\cos rx.c^{-a^2x^2}=\pm\frac{\sqrt{\pi}}{2a}.\frac{d^{2n}}{dr^{2n}}.c^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

le signe $+$ ayant lieu si n est pair, et le signe $-$ si n est impair.

Cette dernière équation différentiée par rapport à r, donne

$$\int x^{2n+1}.dx.\sin rx.c^{-a^2x^2} = \mp \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.\frac{d^{2n+1}}{dr^{2n+1}}.c^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

En intégrant une fois par rapport à r, l'expression de $\int dx.\cos rx.c^{-a^2x^2}$, on aura

$$\int \frac{dx.\sin rx}{x}.c^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.\int dr.c^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

Lorsque a est nul, $\frac{r}{a}$ devient infini, et l'intégrale $\int \frac{dr}{2a}.c^{-\frac{r^2}{4a^2}}$ prise depuis r nul, devient $\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}$; donc

$$\int \frac{dx.\sin rx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

26. On peut de là conclure les valeurs de quelques intégrales définies singulières auxquelles j'ai été conduit, comme on le verra dans la suite, par le passage du réel à l'imaginaire.

Considérons la double intégrale

$$\iint 2dx.ydy.c^{-y^2.(1+x^2)}.\cos rx,$$

les intégrales étant prises depuis x et y nuls jusqu'à x et y infinis. En l'intégrant d'abord par rapport à y, elle devient

$$\int \frac{dx.\cos rx}{1+x^2}.$$

Intégrons-la maintenant par rapport à x. On a par le numéro précédent,

$$\int dx.\cos rx.c^{-y^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2y}.c^{-\frac{r^2}{4y^2}};$$

ce qui donne

$$\iint 2ydy.dx.\cos rx.c^{-y^2.(1+x^2)} = \sqrt{\pi}.\int dy.c^{-y^2-\frac{r^2}{4y^2}}.$$

Il s'agit maintenant d'avoir cette dernière intégrale prise depuis y nul jusqu'à y infini.

Pour cela, donnons-lui cette forme,

$$c^r.\int dy.c^{-\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2}.$$

r étant supposé positif, la quantité $\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2$ a un *minimum* qui répond à $y=\sqrt{\frac{r}{2}}$; ce qui donne $2r$ pour ce *minimum*; soit donc

$$y=\tfrac{1}{2}.z+\tfrac{1}{2}.\sqrt{z^2+2r};$$

y devant s'étendre depuis $y=0$ jusqu'à $y=\infty$, z doit s'étendre depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=\infty$. Cette valeur de y donne

$$dy=\tfrac{1}{2}.dz+\tfrac{1}{2}.\frac{zdz}{\sqrt{z^2+2r}}.$$

En prenant les intégrales depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=\infty$, on a

$$\int dz.c^{-z^2}=\sqrt{\pi};\quad \int\frac{zdz.c^{-z^2}}{\sqrt{z^2+2r}}=0;$$

on a donc

$$\int dy.c^{-\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2}=\int dy.c^{-z^2-2r}=c^{-2r}\int\tfrac{1}{2}.dz.c^{-z^2}=\frac{c^{-2r}.\sqrt{\pi}}{2};$$

partant

$$\int dy.c^{-y^2-\frac{r^2}{4y^2}}=\frac{c^{-r}.\sqrt{\pi}}{2}.$$

On aura généralement par la même analyse, l'intégrale

$$\int y^{\pm 2n}.dy.c^{-y^2-\frac{r^2}{4y^2}},$$

prise depuis y nul jusqu'à y infini, et par conséquent aussi dans les mêmes limites, l'intégrale

$$\int x^{\pm\frac{n}{2}}.dx.c^{-ax-\frac{b}{x}},$$

a et b étant positifs. Cela posé, on aura

$$\iint 2ydy.dx.\cos rx.c^{-y^2.(1+x^2)}=\frac{\pi}{2c^r};$$

on a donc

$$\int\frac{dx.\cos rx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2c^r}.$$

En différentiant par rapport à r on a

$$\int \frac{x dx . \sin rx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2c^r};$$

de là il est facile de conclure la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{(a+bx).dx.\cos rx}{m+2nx+x^2},$$

prise depuis $x = -\infty$ jusqu'à x infini, le dénominateur n'ayant point de facteurs réels en x du premier degré. Si l'on fait

$$x = -n + x' . \sqrt{m-n^2},$$

cette intégrale devient, en supposant

$$\frac{a-bn}{\sqrt{m-n^2}} = a',$$

$$\int \frac{(a'+bx').dx'.[\cos(rx'.\sqrt{m-n^2}).\cos rn + \sin(rx'.\sqrt{m-n^2}).\sin rn]}{1+x'^2}.$$

Cette intégrale doit être prise comme celle relative à x, depuis $x' = -\infty$ jusqu'à $x' = \infty$; or l'intégrale $\int \frac{x'dx'.\cos(rx'.\sqrt{m-n^2})}{1+x'^2}$ prise dans ces limites, est nulle; parce que ses élémens négatifs détruisent ses élémens positifs correspondans; il en est de même de l'intégrale $\int \frac{dx'.\sin(rx'.\sqrt{m-n^2})}{1+x'^2}$; la fonction intégrale précédente se réduit donc à

$$\int \frac{[a'.\cos rn.\cos(rx'.\sqrt{m-n^2}) + b.\sin rn.\sin(rx'.\sqrt{m-n^2})]x'.dx'}{1+x'^2}.$$

On a par ce qui précède,

$$\int \frac{dx'.\cos(rx'.\sqrt{m-n^2})}{1+x'^2} = \pi.c^{-r.\sqrt{m-n^2}}.$$

En différentiant cette expression par rapport à r, on a

$$\int \frac{x'dx'.\sin(rx'.\sqrt{m-n^2})}{1+x'^2} = \pi.c^{-r.\sqrt{m-n^2}};$$

on a donc

$$\int \frac{(a+bx).dx.\cos rx}{m+2nx+x^2} = (a'.\cos rn + b.\sin rn).\pi.c^{-r.\sqrt{m-n^2}}.$$

On trouvera par la même analyse,

$$\int \frac{(a+bx).dx.\sin rx}{m+2nx+x^2} = (b\,.\cos rn - a'.\sin rn).\pi.c^{-r.\sqrt{m-n^2}}.$$

Si l'on différentie la première de ces deux équations, $i-1$ fois par rapport à m, et ensuite $2s$ fois par rapport à r, on aura l'expression de l'intégrale

$$\int \frac{x^{2s}.dx.(a+bx).\cos rx}{(m+2nx+x^2)^i}. \qquad (i)$$

Maintenant M et N étant des fonctions rationnelles et entières de x, le degré de la première étant supposé plus petit que celui de la seconde, et N étant supposé n'avoir aucun facteur réel du premier degré; on pourra, comme on sait, décomposer l'intégrale $\int \frac{M}{N}.dx.\cos rx$, en différens termes de la forme (i); on aura donc généralement l'expression de cette intégrale définie.

On aura de la même manière, la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{M}{N}.dx.\sin rx.$$

27. Reprenons maintenant la formule (B) du nº 23. Le cas de $\mu+1=2$ étant le plus ordinaire, nous allons exposer ici les formules qui y sont relatives. La formule (B) devient dans ce cas,

$$\int y dx = Y.\int dt.c^{-t^2}.\left\{\begin{array}{l} U+t.\frac{d.U^2}{dx}+\frac{t^2}{1.2}.\frac{d^2.U^3}{dx^2} \\ +\frac{t^3}{1.2.3}.\frac{d^3.U^4}{dx^3}+\text{etc.}\end{array}\right\}; \qquad (b)$$

ici l'on a

$$t=\sqrt{\log Y-\log y}, \quad v=\frac{x-a}{\sqrt{\log Y-\log y}},$$

Y étant le *maximum* de y, et a étant la valeur de x qui correspond à ce *maximum*; U, $\frac{dU}{dx}$, etc. sont ce que deviennent v, $\frac{dv}{dx}$, etc., lorsqu'on y change x en a. Cette formule donne, en l'intégrant depuis $t=T$ jusqu'à $t=T'$,

$$\begin{aligned}\int y dx = Y.\left(U+\tfrac{1}{2}.\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2}+\frac{1.3}{2^2}.\frac{d^4.U^5}{1.2.3.4.dx^4}+\text{etc.}\right).\int dt.c^{-t^2}\\ +\frac{Y}{2}.c^{-T^2}.\left(\frac{d.U^2}{dx}+\frac{T.d^2.U^3}{1.2.dx^2}+\frac{(T^2+1).d^3.U^4}{1.2.3.dx^3}+\text{etc.}\right);\\ -\frac{Y}{2}.c^{-T'^2}.\left(\frac{d.U^2}{dx}+\frac{T'.d^2.U^3}{1.2.dx^2}+\frac{(T'^2+1).d^3.U^4}{1.2.3.dx^3}+\text{etc.}\right)\end{aligned} \quad (c)$$

l'intégrale $\int dt.c^{-t^2}$ étant prise depuis $t=T$ jusqu'à $t=T'$, et l'intégrale $\int y dx$ étant prise depuis la valeur de x qui convient à $t=T$, jusqu'à celle qui convient à $t=T'$.

Si l'on suppose $T=-\infty$ et $T'=\infty$, on aura généralement

$$T^n.c^{-T^2}=0, \quad T'^n.c^{-T'^2}=0.$$

On a d'ailleurs par le n° 24, $\int dt.c^{-t^2}=\sqrt{\pi}$; la formule précédente devient ainsi

$$\int y dx = Y.\sqrt{\pi}.\left(U+\tfrac{1}{2}.\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2}+\frac{1.3}{2^2}.\frac{d^4.U^5}{1.2.3.4.dx^4}+\text{etc.}\right), \quad (d)$$

l'intégrale $\int y dx$ étant prise entre les valeurs de x qui rendent y nul, et Y étant le *maximum* de y, compris entre ces valeurs. Les différens termes de cette formule se détermineront facilement par le n° 23, et l'on aura

$$U=\frac{1}{\sqrt{-\frac{d^2.\log y}{2dx^2}}};$$

x devant être changé en a, après les différentiations. On a

$$d^2.\log y=\frac{ddy}{y}-\frac{dy^2}{y^2};$$

la supposition de $x=a$ fait disparaître dy; on aura donc

$$\frac{d^2.\log y}{dx^2}=\frac{ddY}{Y.dx^2},$$

Y et $\frac{ddY}{dx^2}$ étant ce que deviennent y et $\frac{ddy}{dx^2}$, lorsqu'on y change x en a. Ainsi, en ne considérant dans la formule (d) que le premier terme de la série, on aura à très-peu près

$$\int y\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}\,.\,Y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-\frac{ddY}{dx^2}}}.$$

Cette expression de $\int y\,dx$ sera d'autant plus approchée, que les facteurs de y seront élevés à de plus hautes puissances.

La formule (c) renferme l'intégrale indéfinie $\int dt.c^{-t^2}$ prise depuis $t=T$ jusqu'à $t=T'$; ce qui revient à la prendre depuis $t=0$ jusqu'aux limites T et T', et à retrancher la première intégrale de la seconde. Il n'est pas possible d'obtenir en termes finis, l'intégrale prise depuis t nul; mais on l'obtiendra d'une manière fort approchée, si T est peu considérable, par la série suivante :

$$\int dt.c^{-t^2} = T - \frac{T^3}{3} + \frac{1}{1.2}.\frac{T^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}.\frac{T^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4}.\frac{T^9}{9} - \text{etc.}$$

Cette série a l'avantage d'être alternativement plus petite ou plus grande que l'intégrale, suivant que l'on s'arrête à un terme positif ou négatif. Ce genre de séries que l'on peut nommer *séries-limites*, a ainsi l'avantage de faire connaître les limites des erreurs des approximations. On a encore

$$\int dt.c^{-t^2} = T.c^{-T^2}.\left(1 + \frac{2T^2}{1.3} + \frac{(2T^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2T^2)^3}{1.3.5.7} + \text{etc.}\right).$$

Ces deux séries finissent toujours par être convergentes, quelle que soit la valeur de T; mais leur convergence ne commence qu'à des termes éloignés du premier, si $2T^2$ a une valeur considérable; il convient donc de ne les employer que pour des valeurs égales ou moindres que quatre. Pour de plus grandes valeurs, on pourra faire usage de la série suivante, qui donne la valeur de l'intégrale $\int dt.c^{-t^2}$ depuis $t=T$ jusqu'à t infini,

$$\int dt.c^{-t^2} = \frac{c^{-T^2}}{2T}.\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2.T^4} - \frac{1.3.5}{2^3.T^6} + \text{etc.}\right).$$

Cette série est encore une série-limite. En la retranchant de $\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}$, valeur de l'intégrale $\int dt.c^{-t^2}$ prise depuis t nul jusqu'à t infini, on aura la valeur de l'intégrale prise depuis t nul jusqu'à $t=T$.

Mais la série a l'inconvénient de finir par être divergente : on obvie à cet inconvénient, en la transformant en fraction continue, comme je l'ai fait dans le dixième Livre de *la Mécanique céleste*, où j'ai trouvé qu'en faisant $q = \frac{1}{2T^2}$, on a, l'intégrale étant prise depuis $t = T$ jusqu'à l'infini,

$$\int dt.c^{-t^2} = \frac{c^{-T^2}}{2T} \cdot \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 + \cfrac{4q}{1 + \cfrac{5q}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

Pour faire usage de cette expression, il faut réduire la fraction continue

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \text{etc.}}}}$$

en fractions alternativement plus grandes et plus petites que la fraction entière. Les deux premières fractions sont $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1+q}$; les numérateurs des fractions suivantes sont tels, que le numérateur de la fraction $i^{ième}$ est égal au numérateur de la fraction $(i-1)^{ième}$, plus au numérateur de la fraction $(i-2)^{ième}$, multiplié par $(i-1).q$; les dénominateurs se forment de la même manière. Ces fractions successives sont

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1+q}, \quad \frac{1+2q}{1+3q}, \quad \frac{1+5q}{1+6q+3q^2}, \quad \frac{1+9q+8q^2}{1+10q+15q^2}, \text{ etc.}$$

Lorsque q ou $\frac{1}{2T^2}$ sera égal ou moindre que $\frac{1}{4}$, ces fractions donneront d'une manière prompte et approchée, la valeur de la fraction entière.

28. On peut facilement étendre l'analyse précédente aux doubles, triples, etc. intégrales. Pour cela, considérons la double intégrale $\int y dx dx'$, y étant une fonction de x et de x', qui renferme des facteurs

facteurs élevés à de grandes puissances. Supposons que l'intégrale relative à x' doive être prise depuis une fonction X de x jusqu'à une autre fonction $X'+X$ de la même variable. En faisant $x'=X+tX'$, l'intégrale $\int ydxdx'$ se changera dans celle-ci, $\int yX'.dx.dt$; l'intégrale relative à t devant être prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$: on peut donc réduire ainsi l'intégrale $\int ydx.dx'$ à des limites constantes et indépendantes des variables qu'elle renferme. Nous supposerons qu'elle a cette forme, et que l'intégrale relative à x est prise depuis $x=\theta$ jusqu'à $x=\varpi$, et que l'intégrale relative à x' est prise depuis $x'=\theta'$ jusqu'à $x'=\varpi'$. Cela posé, en nommant Y ce que devient y lorsqu'on y change x et x' en θ et θ'; on fera

$$y=Y.c^{-t-t'};$$

en supposant ensuite

$$x=\theta+u, \quad x'=\theta'+u';$$

on réduira $\log\frac{Y}{y}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de u et de u', et l'on aura une équation de cette forme

$$M.u+M'.u'=t+t',$$

dans laquelle M est la partie du développement en série, de $\log\frac{Y}{y}$, qui renferme tous les termes multipliés par u, et M' est l'autre partie qui renferme les termes multipliés par u', et qui sont indépendans de u. On partagera l'équation précédente, dans les deux suivantes :

$$M.u=t, \quad M'.u'=t';$$

d'où l'on tirera celles-ci, par le retour des suites,

$$u=N.t, \quad u'=N'.t',$$

N étant une suite ordonnée par rapport aux puissances de t et de t', et N' étant uniquement ordonnée par rapport aux puissances de t' et étant indépendante de t; ces deux suites sont très-convergentes, si y renferme des facteurs très-élevés. Maintenant on a $dx.dx'=du.du'$; de plus on a

$$du=\left(\frac{d.Nt}{dt}\right).dt+\left(\frac{d.Nt}{dt'}\right).dt',$$

$$du'=\left(\frac{d.N't'}{dt'}\right).dt';$$

mais dans le produit $du.du'$, la différentielle du est prise en faisant u' constant, ce qui rend t' constant, ou $dt'=0$; on a donc

$$du=\left(\frac{d.Nt}{dt}\right).dt;$$

par conséquent

$$du.du'=\left(\frac{d.Nt}{dt}\right).\left(\frac{d.N't'}{dt'}\right).dt.dt';$$

ce qui donne

$$\int y\,dx.dx'=Y.\int\left(\frac{d.Nt}{dt}\right).\left(\frac{d.N't'}{dt'}\right).dt.dt'.c^{-t-t'}.$$

Il est facile d'intégrer les divers termes du second membre de cette équation, puisqu'il ne s'agit que d'intégrer des termes de la forme $\int t^n.dt.c^{-t}$.

Si l'on prend l'intégrale relative à t', depuis t' nul jusqu'à t' infini, et que l'on nomme Q le résultat de l'intégration; on aura

$$\int y\,dx'=Y.Q,$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x'=\theta'$ jusqu'à la valeur de x', qui répond à t' infini. Si l'on change ensuite dans Y et Q, θ' en ϖ', et que l'on nomme Y' et Q', ce que deviennent alors ces quantités; on aura

$$\int y\,dx'=Y'.Q',$$

l'intégrale étant prise depuis $x'=\varpi'$ jusqu'à la valeur de x', qui répond à t' infini.

En nommant R et R' les intégrales $\int Q\,dt$ et $\int Q'dt$ prises depuis t nul jusqu'à t infini; on aura

$$\int y\,dx.dx'=YR-Y'R',$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x'=\theta'$ jusqu'à $x'=\varpi'$, et l'intégrale relative à x étant prise depuis $x=\theta$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. Si dans Y, R, Y', R', on change θ dans ϖ, et que l'on nomme Y_1, R_1, Y'_1, R'_1 ce que deviennent alors ces quantités; on aura

$$\int y\,dx.dx'=Y_1.R_1-Y'_1.R'_1,$$

l'intégrale relative à x' étant prise entre les limites θ' et ϖ', et l'intégrale relative à x étant prise depuis $x=\varpi$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini; on aura donc

$$\int y\,dx\,.\,dx' = YR - Y'R' - Y_1R_1 + Y'_1R'_1,$$

l'intégrale relative à x étant prise entre les limites θ et ϖ, et l'intégrale relative à x' étant prise entre les limites θ' et ϖ'.

Cette formule répond à la formule (A) du n° 22, qui n'est relative qu'à une seule variable; elle a, comme elle, l'inconvénient de ne pouvoir s'étendre aux intervalles voisins du *maximum* de y. Il faut, pour ces intervalles, employer une méthode analogue à celle du n° 23. Ainsi, en supposant que dans l'intervalle compris entre θ et ϖ, y devienne un *maximum* relativement à x, ensorte que la condition de ce *maximum* ne fasse disparaître que la différenticlle de y, prise par rapport à x; on fera

$$y = Y.c^{-t^2-t'},$$

Y étant la valeur de y qui convient à ce *maximum* et à $x'=\theta'$; et si dans l'intervalle compris entre les limites des intégrations relatives à x et à x', y devient un *maximum*; on fera

$$y = Y.c^{-t^2-t'^2}.$$

Comme nous aurons besoin principalement dans la suite, de l'intégrale $\int y\,dx\,.\,dx'$ prise entre les limites de x et de x' qui rendent y nul, nous allons discuter ce cas.

Considérons l'intégrale $\int y\,dx\,.\,dx'$, y étant une fonction de x, x', qui renferme des facteurs élevés à de grandes puissances. Si l'on nomme a, a' les valeurs de x, x' qui répondent au *maximum* de y, et que l'on nomme Y ce *maximum*; on fera

$$y = Y.c^{-t^2-t'^2};$$

en supposant ensuite

$$x = a+\theta, \quad x' = a'+\theta';$$

on substituera ces valeurs dans la fonction $\log\frac{Y}{y}$, et en la développant dans une suite ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de θ, θ'; on aura une équation de cette forme

$$M.\theta^2 + 2N.\theta\theta' + P.\theta'^2 = t^2 + t'^2.$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$M.\left(\theta + \frac{N}{M}.\theta'\right)^2 + \left(P - \frac{N^2}{M}\right).\theta'^2 = t^2 + t'^2;$$

on fera donc

$$t = \theta.\sqrt{M} + \frac{N.\theta'}{\sqrt{M}}, \quad t' = \theta'.\sqrt{P - \frac{N^2}{M}}.$$

En différentiant ces équations, on aura des différentielles de cette forme

$$dt = L.d\theta + I.d\theta',$$
$$dt' = L'.d\theta + I'.d\theta'.$$

Maintenant on a

$$\int y\,dx.dx' = \int y.d\theta.d\theta';$$

dans le produit $d\theta.d\theta'$, $d\theta$ est pris en supposant θ' constant, et alors on a

$$dt = L.d\theta;$$

ensuite dt' doit être pris en regardant t constant, dans le produit $dt.dt'$; alors on a

$$o = L.d\theta + I.d\theta',$$
$$dt' = L'.d\theta + I'.d\theta';$$

ce qui donne

$$dt' = \frac{(LI' - L'I)}{L}.d\theta';$$

on a donc

$$dt.dt' = d\theta.d\theta'.(LI' - L'I);$$

par ce moyen, l'intégrale $\int y\,d\theta.d\theta'$ est transformée dans celle-ci,

$$Y.\int \frac{dt.dt.c^{-t^2-t'^2}}{LI' - L'I}.$$

Le dénominateur $LI' - L'I$ est une fonction de θ et de θ' que l'on réduira en fonction de t et de t', au moyen des valeurs de t et de t' en θ et θ'. On obtiendra ainsi l'intégrale précédente dans une suite de termes de la forme $\int t^n . t'^{n'} . dt . dt' . c^{-t^2-t'^2}$; les intégrales étant prises depuis t et t' égaux à $-\infty$, jusqu'à leurs valeurs infinies positives. Ces intégrales sont nulles, lorsque l'un des deux nombres n et n' est impair; et dans le cas où ils sont tous deux pairs, n étant égal à $2i$, et n' à $2i'$, on a

$$\int t^{2i} . t'^{2i'} . dt . dt' . c^{-t^2-t'^2} = \frac{1.3.5....\overline{2i-1}.1.3.5....\overline{2i'-1}}{2^i . 2^{i'}} . \pi.$$

Si les puissances auxquelles les facteurs de y sont élevés, sont très-grandes; alors on a, à très-peu près,

$$M = -\frac{\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}{2Y}, \quad 2N = -\frac{\left(\frac{ddY}{dxdx'}\right)}{Y}, \quad P = -\frac{\left(\frac{ddY}{dx'^2}\right)}{2Y},$$

$\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddY}{dxdx'}\right)$, $\left(\frac{ddY}{dx'^2}\right)$ étant ce que deviennent $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dxdx'}\right)$ et $\left(\frac{ddy}{dx'^2}\right)$ lorsqu'on y change x et x' en a et a'; l'intégrale $\int y dx . dx'$. devient ainsi à fort peu près,

$$\frac{2\pi . Y^2}{\sqrt{\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)\left(\frac{ddY}{dx'^2}\right) - \left(\frac{ddY}{dxdx'}\right)^2}}.$$

CHAPITRE II.

De l'intégration par approximation, des équations linéaires aux différences finies et infiniment petites.

29. On a vu dans le n° 22, que les intégrales des équations linéaires aux différences entre une variable s, dont la différence finie est supposée constante, et une fonction y_s de cette variable, peuvent être mises sous la forme $y_s = \int x^s . \varphi dx$, φ étant une fonction de x de la même nature que la fonction génératrice de l'équation proposée aux différences, et l'intégrale étant prise dans des limites déterminées de x. En supposant s un très-grand nombre, on aura par l'analyse précédente, une valeur très-approchée de cette intégrale, et par conséquent de y_s. Mais cette méthode d'approximation étant très-importante dans la théorie des probabilités, nous allons la développer avec étendue.

Considérons l'équation aux différences finies

$$S = A.y_s + B.\Delta.y_s + C.\Delta^2.y_s + \text{etc.}, \qquad (1)$$

A, B, C, etc. étant des fonctions rationnelles et entières de s, auxquelles nous donnerons cette forme :

$$A = a + a^{(1)}.s + a^{(2)}.s.(s-1) + a^{(3)}.s.(s-1).(s-2) + \text{etc.},$$
$$B = b + b^{(1)}.s + b^{(2)}.s.(s-1) + b^{(3)}.s.(s-1).(s-2) + \text{etc.},$$
$$C = e + e^{(1)}.s + e^{(2)}.s.(s-1) + e^{(3)}.s.(s-1).(s-2) + \text{etc.},$$
etc.;

$\Delta.y_s$ est la différence finie de y_s, s étant supposé varier de l'unité; $\Delta^2.y_s$, $\Delta^3.y_s$, etc. sont les seconde, troisième, etc. différences de y_s; et S est une fonction de s. Cela posé, représentons y_s par $\int x^s.\varphi dx$, φ étant une fonction de x qu'il faut déterminer, ainsi que les limites de l'intégrale. En désignant x^s par δy, on aura

$$\Delta . y_s = \int \delta y . (x-1) . \varphi dx, \quad \Delta^2 . y_s = \int \delta y . (x-1)^2 . \varphi dx, \quad \text{etc.};$$

on aura ensuite

$$s . x^s = x . \frac{d . \delta y}{dx}, \quad s . (s-1) . x^s = x^2 . \frac{d^2 . \delta y}{dx^2}, \quad \text{etc.};$$

l'équation (1) aux différences, devient ainsi

$$S = \int \varphi dx . \left\{ \begin{array}{l} \quad \delta y . [a + b . (x-1) + e . (x-1)^2 + \text{etc.}] \\ + \frac{x . d . \delta y}{dx} . [a^{(1)} + b^{(1)} . (x-1) + e^{(1)} . (x-1)^2 + \text{etc.}] \\ + \frac{x^2 . d^2 . \delta y}{dx^2} . [a^{(2)} + b^{(2)} . (x-1) + e^{(2)} . (x-1)^2 + \text{etc.}] \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Au lieu de faire y_s égal à $\int x^s . \varphi dx$, on peut le supposer égal à $\int c^{-sx} . \varphi dx$; alors on a

$$\Delta . y_s = \int c^{-sx} . (c^{-x}-1) . \varphi dx, \quad \Delta^2 . y_s = \int c^{-sx} . (c^{-x}-1)^2 . \varphi dx, \quad \text{etc.}$$

De plus, si l'on désigne c^{-sx} par δy, on aura

$$s . c^{-sx} = -\frac{d . \delta y}{dx}, \quad s^2 . c^{-sx} = \frac{d^2 . \delta y}{dx^2}, \quad \text{etc.};$$

en mettant donc les coefficiens de l'équation (1) sous cette forme,

$$\begin{aligned} A &= a + a^{(1)} . s + a^{(2)} . s^2 + \text{etc.}, \\ B &= b + b^{(1)} . s + b^{(2)} . s^2 + \text{etc.}, \\ C &= e + e^{(1)} . s + e^{(2)} . s^2 + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

cette équation prendra la forme

$$S = \int \varphi dx . \left\{ \begin{array}{l} \quad \delta y . [a + b . (c^{-x}-1) + e . (c^{-x}-1)^2 + \text{etc.}] \\ - \frac{d . \delta y}{dx} . [a^{(1)} + b^{(1)} . (c^{-x}-1) + e^{(1)} . (c^{-x}-1)^2 + \text{etc.}] \\ + \frac{d^2 . \delta y}{dx^2} . [a^{(2)} + b^{(2)} . (c^{-x}-1) + e^{(2)} . (c^{-x}-1)^2 + \text{etc.}] \\ - \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

En représentant généralement y_s par $\int \delta y . \varphi dx$, les deux formes que l'équation (1) prend dans les suppositions de $\delta y = x^s$ et de $\delta y = c^{-sx}$, seront comprises dans la suivante

$$S = \int \varphi dx . \left(M . \delta y + N . \frac{d . \delta y}{dx} + P . \frac{d^2 . \delta y}{dx^2} + Q . \frac{d^3 . \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right),$$

M, N, P, Q, etc. étant des fonctions de x indépendantes de la variable s, qui n'entre dans le second membre de cette équation, qu'autant que δy et ses différences en sont fonctions.

Maintenant, pour y satisfaire, on intégrera par parties, ses différens termes; or on a

$$\int \frac{d . \delta y}{dx} . N\varphi . dx = \delta y . N\varphi - \int \delta y . d(N\varphi),$$

$$\int \frac{d^2 . \delta y}{dx^2} . P\varphi . dx = \frac{d . \delta y}{dx} . P\varphi - \delta y . \frac{d . (P\varphi)}{dx} + \int \delta y . \frac{d^2 . (P\varphi)}{dx},$$

etc.;

l'équation précédente devient ainsi

$$\begin{aligned} S = \int \delta y . dx . &\left(M\varphi - \frac{d . (N\varphi)}{dx} + \frac{d^2 . (P\varphi)}{dx^2} - \frac{d^3 . (Q\varphi)}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ C + \delta y . \left(N\varphi - \frac{d . (P\varphi)}{dx} + \frac{d^2 . (Q\varphi)}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{d . \delta y}{dx} . \left(P\varphi - \frac{d . (Q\varphi)}{dx} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{d^2 . \delta y}{dx^2} . (Q\varphi - \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.}, \end{aligned}$$

C étant une constante arbitraire.

Puisque la fonction φ doit être indépendante de s, et par conséquent de δy, on doit égaler séparément à zéro, la partie de cette équation, affectée du signe $\int$; ce qui partage l'équation précédente dans les deux suivantes,

$$0 = M\varphi - \frac{d . (N\varphi)}{dx} + \frac{d^2 . (P\varphi)}{dx^2} - \frac{d^3 . (Q\varphi)}{dx^3} + \text{etc.}, \qquad (2)$$

$S =$

$$S = C + \delta y.\left(N\varphi - \frac{d.(P\varphi)}{dx} + \frac{d^2.(Q\varphi)}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d.\delta y}{dx}.\left(P\varphi - \frac{d.(Q\varphi)}{dx} + \text{etc.}\right); \qquad (3)$$
$$+ \frac{d^2.\delta y}{dx^2}.(Q\varphi - \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.}$$

La première de ces équations sert à déterminer la fonction φ; et la seconde détermine les limites dans lesquelles l'intégrale $\int \delta y.\varphi dx$ est comprise.

On peut observer que l'équation (2) est l'équation de condition qui doit avoir lieu, pour que la fonction différentielle

$$\left(M.\delta y + N.\frac{d.\delta y}{dx} + P.\frac{d^2.\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right).\varphi dx$$

soit une différentielle exacte, quel que soit δy; et dans ce cas, l'intégrale de cette fonction est égale au second membre de l'équation (3); φ est donc le facteur en x seul qui doit multiplier l'équation

$$0 = M.\delta y + N.\frac{d.\delta y}{dx} + P.\frac{d^2.\delta y}{dx^2} + \text{etc.},$$

pour la rendre intégrable. Si φ était connu, on pourrait abaisser cette équation d'un degré; et réciproquement, si cette équation était abaissée d'un degré, le coefficient de δy, dans sa différentielle divisée par Mdx, donnerait une valeur de φ; cette équation et l'équation (2) sont conséquemment liées entre elles, de manière qu'une intégrale de l'une donne une integrale de l'autre.

La valeur de φ étant supposée connue, on aura celle de y, au moyen d'une intégrale définie. L'intégration de l'équation (1) aux différences finies, est donc ainsi ramenée à l'intégration de l'équation (2) aux différences infiniment petites, et à une intégrale définie.

Considérons présentement l'équation (3), et faisons d'abord $S=0$. Si l'on suppose que δy, $\frac{d.\delta y}{dx}$, $\frac{d^2.\delta y}{dx^2}$, etc. deviennent nuls, au moyen d'une même valeur de x, que nous désignerons par h, et qui soit indépendante de s; il est clair qu'en supposant C nul, cette valeur satisfera à l'équation (3), et qu'ainsi elle sera une des limites entre lesquelles on doit prendre l'intégrale $\int \delta y . \varphi dx$. La supposition précédente a lieu visiblement, dans les deux cas de $\delta y = x^{s}$ et de $\delta y = c^{-sx}$; dans le premier cas, l'équation $x = 0$, et dans le second cas, l'équation $x = \infty$, rendent nulles les quantités δy, $\frac{d.\delta y}{dx}$, $\frac{d^2.\delta y}{dx^2}$, etc. Pour avoir d'autres limites de l'intégrale $\int \delta y . \varphi dx$, on observera que ces limites devant être indépendantes de s, il faut dans l'équation (3), égaler séparément à zéro, les coefficiens de δy, $\frac{d.\delta y}{dx}$, etc.; ce qui donne les équations suivantes,

$$
\begin{aligned}
0 &= N\varphi - \frac{d.(P\varphi)}{dx} + \frac{d^2.(Q\varphi)}{dx^2} - \text{etc.}, \\
0 &= P\varphi - \frac{d.(Q\varphi)}{dx} + \text{etc.}, \\
0 &= Q\varphi - \text{etc.}, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Ces équations sont au nombre i, si i est l'ordre de l'équation différentielle (2); on pourra donc éliminer, à leur moyen, toutes les constantes arbitraires de la valeur de φ, moins une; et l'on aura une équation finale en x, dont les racines seront autant de limites de l'intégrale $\int \delta y . \varphi dx$. On cherchera par cette équation, un nombre de valeurs différentes de x, égal au degré de l'équation différentielle (1). Soient q, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, etc. ces valeurs; elles donneront autant de valeurs différentes de φ, puisque les constantes arbitraires de φ, moins une, sont déterminées en fonctions de ces valeurs. On pourra ainsi représenter les valeurs de φ, correspondantes aux limites q, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, etc., par $B.\lambda$, $B^{(1)}.\lambda^{(1)}$, $B^{(2)}.\lambda^{(2)}$, etc.; B, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, etc. étant des constantes arbitraires; et l'on aura pour la valeur complète de y_s,

$$y_s = B.\int \delta y . \lambda . dx + B^{(1)} . \int \delta y . \lambda^{(1)} . dx + B^{(2)} . \int \delta y . \lambda^{(2)} . dx + \text{etc.};$$

l'intégrale du premier terme étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = q$, celle du second terme étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = q^{(1)}$, et ainsi du reste. On déterminera les constantes B, $B^{(1)}$, etc., au moyen d'autant de valeurs particulières de y_s.

Supposons maintenant que dans l'équation (3), S ne soit pas nul. Si l'on prend l'intégrale $\int \delta y . \varphi dx$ depuis $x = h$ jusqu'à x égal à une quantité quelconque p; il est clair que l'on aura $C = 0$, et que S sera ce que devient la fonction

$$\begin{aligned} &\delta y . \left(N\varphi - \frac{d.(P\varphi)}{dx} + \text{etc.}\right) \\ &+ \frac{d.\delta y}{dx} . (P\varphi - \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.}, \end{aligned}$$

lorsqu'on y change x en p. Ainsi pour le succès de la méthode précédente, il est nécessaire que S ait la forme de cette fonction. Faisons, par exemple, $\delta y = x^s$, et

$$S = p^s . [l + l^{(1)} . s + l^{(2)} . s . (s-1) + l^{(3)} . s . (s-1) . (s-2) + \text{etc.}];$$

en comparant cette valeur de S à la précédente, on aura

$$\begin{aligned} l &= N\varphi - \frac{d.(P\varphi)}{dx} + \text{etc.}, \\ l^{(1)} . p &= P\varphi - \text{etc.}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

x devant être changé en p dans les seconds membres de ces équations dont le nombre est égal au degré de l'équation différentielle (2). On pourra donc, à leur moyen, déterminer les constantes arbitraires de la valeur de φ; et si l'on désigne par ψ, ce que devient φ, lorsqu'on a ainsi déterminé ses arbitraires, on aura

$$y_s = \int x^s . \psi dx.$$

De là et de ce que l'équation (1) est linéaire, il est facile de conclure que si S est égal à

$$\begin{aligned} &p^s . [l + l^{(1)} . s + l^{(2)} . s . (s-1) + \text{etc.}] \\ &+ p_1^s . [l_1 + l_1^{(1)} . s + l_1^{(2)} . s . (s-1) + \text{etc.}] \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

En nommant ψ', etc., ce que devient ψ lorsqu'on y change successivement p, l, $l^{(1)}$, etc., en p_1, l_1, $l_1^{(1)}$, etc., en p_2, etc.; on aura

$$y_s = \int x^s . \psi dx + \int x^s . \psi' dx + \text{etc.};$$

la première intégrale étant prise depuis $x=h$ jusqu'à $x=p$, la seconde étant prise depuis $x=h$ jusqu'à $x=p_1$, etc. Cette valeur de y_s ne renferme aucune constante arbitraire; mais en la joignant à celle que nous avons trouvée précédemment pour le cas de S nul, on aura l'expression complète de y_s.

30. Supposons maintenant que l'on ait un nombre quelconque d'équations linéaires aux différences finies entre un pareil nombre de variables y_s, y'_s, y''_s, etc., et dont les coefficiens soient des fonctions rationnelles et entières de s. Faisons alors

$$y_s = \int x^s . \varphi dx, \quad y'_s = \int x^s . \varphi' dx, \quad y''_s = \int x^s . \varphi'' dx, \quad \text{etc.};$$

ces diverses intégrales étant prises entre les mêmes limites déterminées et indépendantes de s. Nous aurons

$$\Delta . y_s = \int x^s . (x-1) . \varphi dx, \quad \Delta^2 . y_s = \int x^s . (x-1)^2 . \varphi dx, \quad \text{etc.};$$
$$\Delta . y'_s = \int x^s . (x-1) . \varphi' dx, \quad \Delta^2 . y'_s = \int x^s . (x-1)^2 . \varphi' dx, \quad \text{etc.};$$
$$\text{etc.}$$

Les équations dont il s'agit, pourront ainsi être mises sous les formes suivantes,

$$S = \int x^s . z dx, \quad S' = \int x^s . z' dx, \quad S'' = \int x^s . z'' dx, \quad \text{etc.},$$

S, S', S'', etc. étant des fonctions de s seul, et z, z', z'', etc., étant des fonctions rationnelles et entières de la même variable, et de x, φ, φ', φ'', etc., dans lesquelles φ, φ', etc., sont sous une forme linéaire.

Considérons d'abord l'équation

$$S = \int x^s . z dx,$$

on a

$$z = Z + s . \Delta . Z + \frac{s.(s-1)}{1.2} . \Delta^2 . Z + \frac{s.(s-1).(s-2)}{1.2.3} . \Delta^3 . Z + \text{etc.};$$

la caractéristique Δ des différences finies étant relative à la variable s, et Z, $\Delta.Z$, etc. étant ce que deviennent z, $\Delta.z$, etc., lorsqu'on y suppose $s=0$. On aura donc

$$S=\int x^s.dx.\left(Z+s.\Delta.Z+\frac{s.(s-1)}{1.2}.\Delta^2.Z+\text{etc.}\right).$$

Si l'on fait $x^s=\delta y$, on aura

$$sx^s=x.\frac{d.\delta y}{dx},\quad s.(s-1).x^s=x^2.\frac{d^2.\delta y}{dx^2},\quad \text{etc.};$$

l'équation précédente devient ainsi

$$S=\int dx.\left(Z.\delta y+x.\Delta.Z.\frac{d.\delta y}{dx}+\frac{x^2.\Delta^2.Z}{1.2}.\frac{d^2.\delta y}{dx^2}+\text{etc.}\right);$$

d'où l'on tire en intégrant par parties, comme dans le numéro précédent, les deux équations suivantes,

$$0=Z-\frac{d.(x.\Delta.Z)}{dx}+\frac{d^2.(x^2.\Delta^2.Z)}{1.2.dx^2}-\text{etc.},\qquad (a)$$

$$\left.\begin{aligned}S=C+\delta y.&\left(x.\Delta.Z-\frac{d.(x^2.\Delta^2.Z)}{1.2.dx}+\text{etc.}\right)\\ &+\frac{d.\delta y}{dx}.\left(\frac{x^2.\Delta^2.Z}{1.2}-\text{etc.}\right)\\ &+\text{etc.}\end{aligned}\right\},\qquad (b)$$

C étant une constante arbitraire. L'équation

$$S'=\int x^s.z'dx,$$

traitée de la même manière, donnera

$$0=Z'-\frac{d.(x.\Delta.Z')}{dx}+\frac{d^2.(x^2.\Delta^2.Z')}{1.2.dx^2}-\text{etc.},\qquad (a')$$

$$\left.\begin{aligned}S'=C'+\delta y.&\left(x.\Delta.Z'-\frac{d.(x^2.\Delta^2.Z')}{1.2.dx}+\text{etc.}\right)\\ &+\frac{d.\delta y}{dx}.\left(\frac{x^2.\Delta^2 Z'}{1.2}-\text{etc.}\right)\\ &+\text{etc.}\end{aligned}\right\},\qquad (b')$$

les équations $S''=\int x^s.z''dx$; $S'''=\int x^s.z'''dx$, etc., produiront des équations semblables, que nous désignerons par (a''), (b''); (a''') (b'''); etc.

Les équations (a), (a'), (a''), etc. détermineront les variables φ, φ', φ'', etc. en fonction de x; et les équations (b), (b'), (b''), etc. détermineront les limites dans lesquelles on doit prendre les intégrales $\int x^s.zdx$, $\int x^s.z'dx$, etc. L'une de ces limites est $x=0$. Pour avoir les autres, on supposera d'abord S, S', S'', etc. nuls; les constantes C, C', C'', etc. seront par conséquent nulles dans les équations (b), (b'), etc., puisque la supposition de $x=0$ rend nuls les autres termes de ces équations. En égalant ensuite séparément à zéro, les coefficiens de δy, $\frac{d.\delta y}{dx}$, etc. dans ces mêmes équations, on aura les suivantes,

$$0 = x.\Delta.Z - \frac{d.(x^2.\Delta^2.Z)}{1.2.dx} + \text{etc.},$$
$$0 = \frac{x^2.\Delta^2.Z}{1.2} - \text{etc.},$$
$$\text{etc.};$$
$$0 = x.\Delta.Z' - \frac{d.(x^2.\Delta^2.Z')}{1.2.dx} + \text{etc.},$$
$$0 = \frac{x^2.\Delta^2.Z'}{1.2} - \text{etc.},$$
$$\text{etc.};$$
$$\text{etc.}$$

On éliminera, au moyen de ces équations, toutes les constantes arbitraires, moins une, des valeurs de φ, φ', φ'', etc., et l'on arrivera à une équation finale en x, dont les racines seront les limites des intégrales $\int x^s.\varphi dx$, $\int x^s.\varphi' dx$, etc. On déterminera autant de ces limites qu'il est nécessaire, pour que les valeurs de y_s, y'_s, etc. soient complètes.

Supposons maintenant que S ne soit pas nul, et qu'il soit égal à

$$p^s.[l + l^{(1)}.s + l^{(2)}.s.(s-1) + \text{etc.}].$$

En faisant $C=0$ dans l'équation (b), et en y mettant x^s au lieu de δy, on aura

$$p^s.[l+l^{(1)}.s+l^{(2)}.s.(s-1)+\text{etc.}] = x^s.\left(x.\Delta.Z - \frac{d.(x^2.\Delta^2.Z)}{1.2.dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ s.x^s.\left(\frac{x.\Delta^2.Z}{1.2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

d'où l'on conclut d'abord $x=p$, ensorte que les intégrales $\int x^s.\varphi dx$, $\int x^s.\varphi' dx$, etc., doivent être prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=p$. La comparaison des coefficiens de s, $s.(s-1)$, etc., donnera ensuite autant d'équations entre l, $l^{(1)}$, etc., et les constantes arbitraires des expressions de φ, φ', etc. L'égalité à zéro de ces mêmes coefficiens, dans les équations (b'), (b''), etc., donnera de nouvelles équations entre ces arbitraires que l'on pourra ainsi déterminer au moyen de toutes ces équations. On aura, par ce procédé, les valeurs particulières de y_s, qui satisfont au cas où S', S'', etc. étant nuls, S a la forme que nous venons de lui supposer, ou, plus généralement, est égal à un nombre quelconque de fonctions de la même forme.

Pareillement, si l'on suppose que S, S'', etc. étant nuls, S' est la somme d'un nombre quelconque de fonctions semblables, on déterminera les valeurs particulières de y_s, y'_s, etc., qui satisfont à ce cas, et ainsi du reste. En réunissant ensuite toutes ces valeurs, à celles que l'on aura déterminées dans le cas où S, S', etc. sont nuls; on aura les expressions complètes de y_s, y'_s, etc.. correspondantes au cas où S, S', etc. ont les formes précédentes.

Il est facile d'étendre cette méthode aux équations aux différences infiniment petites, ou en partie finies, et en partie infiniment petites, et dans lesquelles les coefficiens des variables principales et de leurs différences, sont des fonctions rationnelles de s, que l'on peut toujours rendre entières, en faisant disparaître les dénominateurs. Si l'on désigne, comme ci-dessus, par y_s, y'_s, etc., les variables principales de ces équations, et si l'on fait

$$y_s=\int x^s.\varphi dx, \quad y'_s=\int x^s.\varphi' dx, \quad \text{etc.};$$

on aura

$$\frac{dy_s}{ds}=\int x^s.\varphi dx.\log x \ , \quad \frac{d^2y_s}{ds^2}=\int x^s.\varphi dx.(\log. x)^2, \quad \text{etc.};$$

$$\Delta.y_s=\int x^s.(x-1).\varphi dx, \quad \Delta^2.y_s=\int x^s.(x-1)^2.\varphi dx \ , \quad \text{etc.};$$

etc.;

$$\frac{dy'_s}{ds}=\int x^s.\varphi' dx.\log x, \quad \text{etc.};$$

etc.

Les équations proposées prendront ainsi les formes suivantes,

$$S = \int x^s . z dx, \quad S' = \int x^s . z' dx, \quad \text{etc.}$$

En les traitant par la méthode précédente, on déterminera les valeurs de φ, φ', etc. en fonctions de x, et les limites des intégrales $\int x^s . \varphi dx$, $\int x^s . \varphi' dx$, etc.

En faisant

$$y_s = \int c^{-sx} . \varphi dx, \quad y'_s = \int c^{-sx} . \varphi' dx, \quad \text{etc.};$$

on parviendrait à des équations semblables. Dans plusieurs circonstances, ces formes de y_s, y'_s, etc. seront plus commodes que les précédentes.

31. La principale difficulté que présente l'application de la méthode précédente, consiste dans l'intégration des équations différentielles linéaires qui déterminent φ, φ', φ'', etc. en x. Les degrés de ces équations ne dépendent point de ceux des équations aux différences en y_s, y'_s, etc.; ils dépendent uniquement des puissances les plus élevées de s, dans leurs coefficiens. En ne considérant donc qu'une seule variable y_s, l'équation différentielle en φ sera d'un degré égal au plus haut exposant de s, dans les coefficiens de l'équation aux différences en y_s. L'équation différentielle en φ ne sera ainsi résoluble généralement que dans le cas où ce plus haut exposant est l'unité. Développons ce cas fort étendu.

Représentons l'équation différentielle en y_s par la suivante,

$$0 = V + s . T,$$

V et T étant des fonctions linéaires de la variable principale y_s et de ses différences, soit finies, soit infiniment petites. Si l'on fait

$$y_s = \int \delta y . \varphi dx,$$

δy étant égal à x^s, ou à c^{-sx}; elle deviendra

$$0 = \int \varphi dx . \left(M . \delta y + N . \frac{d . \delta y}{dx} \right);$$

M et N étant des fonctions de x; on aura donc, en intégrant par

par parties comme dans le numéro précédent, les deux équations suivantes,

$$o = M.\varphi - \frac{d.(N\varphi)}{dx},$$
$$o = C + N\varphi.\delta y.$$

La première donne en l'intégrant,

$$\varphi = \frac{H}{N}.c^{\int \frac{M}{N}.dx},$$

H étant une constante arbitraire. Supposons C nul dans la seconde équation; $x = o$ ou $x = \infty$ sera l'une des limites de l'intégrale $\int \delta y.\varphi dx$, suivant que l'on prend x^s ou c^{-sx} pour δy. On déterminera les autres limites, en résolvant l'équation $o = N\varphi.\delta y$.

Appliquons à cette intégrale, la méthode d'approximation du n° 23. Si l'on désigne par a, la valeur de x, donnée par l'équation

$$o = d.(N\varphi.\delta y),$$

et par Q, ce que devient la fonction $N\varphi.\delta y$, lorsqu'on y change x en a; on fera

$$N\varphi.\delta y = Q.c^{-t^2},$$

ce qui donne

$$t = \sqrt{\log Q - \log\,(N\varphi) - \log \delta y}.$$

$\log \delta y$ est de l'ordre s; si l'on suppose s très-grand, et si l'on fait $\frac{1}{s} = \alpha$, α sera un très-petit coefficient. La quantité sous le radical prendra cette forme $\frac{(x-a)^2}{\alpha}.X$, X étant une fonction de $x - a$ et de α; on aura donc, par le retour des suites, la valeur de x en t, par une série de cette forme,

$$x = a + \alpha^{\frac{1}{2}}.ht + \alpha.h^{(1)}.t^2 + \alpha^{\frac{3}{2}}.h^{(2)}.t^3 + \text{etc.}$$

Maintenant, y, étant égal à $\int \delta y.\varphi dx$, si l'on substitue dans cette intégrale, au lieu de $\varphi.\delta y$, sa valeur $\frac{Q.c^{-t^2}}{N}$, elle deviendra $Q.\int \frac{dx}{N}.c^{-t^2}$; et si dans $\frac{dx}{N}$, on substitue pour x, sa valeur précédente en t, on aura y_s par une suite de cette forme,

$$y_s = a^{\frac{1}{2}}.Q.\int dt.c^{-t^2}.[l + a^{\frac{1}{2}}.l^{(1)}.t + a.l^{(2)}.t^2 + a^{\frac{3}{2}}.l^{(3)}.t^3 + \text{etc.}],$$

les limites de l'intégrale relative à t, devant se déterminer par la condition qu'à ces limites, la quantité $N\phi.\delta y$, ou son équivalente $Q.c^{-t^2}$, soit nulle; d'où il suit que ces limites sont $t = -\infty$ et $t = \infty$; on aura donc par le n° 24,

$$y_s = a^{\frac{1}{2}}.Q.\sqrt{\pi}.\left(l + \frac{1}{2}.a.l^{(2)} + \frac{1.3}{2^2}.a^2.l^{(4)} + \frac{1.3.5}{2^3}.a^3.l^{(6)} + \text{etc.}\right).$$

Cette expression a l'avantage d'être indépendante de la détermination des limites en x, qui rendent nulle la fonction $N\phi.\delta y$; ensorte qu'elle subsiste dans le cas même où cette fonction, égalée à zéro, n'a point de racines réelles; elle subsiste encore dans le cas de s négatif. Cette remarque analogue à celle que nous avons faite dans le n° 25, et qui tient, comme elle, à la généralité de l'analyse, est très-remarquable en ce qu'elle donne le moyen d'étendre la formule précédente, à un grand nombre de cas auxquels la méthode qui nous y a conduits, semble d'abord se refuser.

Cette formule ne renferme que la constante arbitraire H, et par conséquent, elle n'est qu'une integrale particulière de l'équation différentielle proposée en y_s, si cette équation est d'un ordre supérieur à l'unité. Pour avoir dans ce cas, l'intégrale complète, il faudra chercher dans l'équation $o = d(N\phi.\delta y)$, autant de valeurs différentes de x, qu'il y a d'unités dans cet ordre. Soient a, a', a'', etc. ces valeurs; on changera successivement dans l'expression précédente de y_s, a en a', a'', etc., et H en H', H'', etc.; on aura autant de valeurs particulières qui renferment chacune une arbitraire, et dont la somme sera l'expression complète de y_s.

Quand les coefficiens de la proposée en y_s renferment des puissances de s supérieures à l'unité; on peut quelquefois décomposer cette équation en plusieurs autres qui ne renferment que cette première puissance. Si l'on a, par exemple, l'équation

$$y_{s+1} = M.y_s,$$

M étant une fonction rationnelle et entière de s; on mettra cette fonction sous la forme

$$\frac{q.(s+b).(s+b').(s+b'').\text{etc.}}{(s+f).(s+f').(s+f'').\text{etc.}};$$

on fera ensuite

$$z_{s+1}=q.(s+b).z_s\,,\quad z'_{s+1}=(s+b').z'_s\,,\quad \text{etc.};$$
$$t_{s+1}=(s+f).t_s\quad,\quad t'_{s+1}=(s+f').t'_s\,,\quad \text{etc.}$$

Il est facile, par ce qui précède, de déterminer z_s, t_s, etc. en intégrales définies, et de réduire ces intégrales en séries convergentes, lorsque s est un grand nombre. On aura ensuite

$$y_s=\frac{z_s.z'_s.\text{etc.}}{t_s.t'_s.\text{etc.}}.$$

Dans plusieurs cas où l'équation différentielle en φ étant d'un ordre supérieur au premier, ne peut être intégrée rigoureusement, on peut déterminer φ par une approximation très-convergente; en substituant ensuite cette valeur de φ dans l'intégrale $\int x^s.\varphi dx$, on peut obtenir d'une manière fort approchée la valeur de cette intégrale.

32. L'analyse exposée dans les numéros précédens, s'étend encore aux équations à différences partielles, finies et infiniment petites. Pour cela, considérons d'abord l'équation linéaire aux différentielles partielles dont les coefficiens sont constans. En désignant par $y_{s,s'}$ la variable principale, s et s' étant les deux variables dont elle est fonction; et représentant cette équation par celle-ci, $V=0$, V étant une fonction linéaire de $y_{s,s'}$ et de ses différences partielles; on y supposera

$$y_{s,s'}=\int x^s.x'^{s'}.\varphi dx,$$

φ étant une fonction de x; alors l'équation $V=0$ prend cette forme

$$0=\int M.x^s.x'^{s'}.\varphi dx,$$

M étant une fonction de x et de x', sans s ni s'. En égalant donc

M à zéro, on aura la valeur de x' en x, et cette valeur substituée dans l'intégrale $\int x^s . x'^{s'} . \varphi dx$, donnera l'expression générale de $y_{s,s'}$, dans laquelle φ est une fonction arbitraire de x; les limites de l'intégrale étant indépendantes de x, mais d'ailleurs arbitraires. Si l'équation proposée $0 = V$, est de l'ordre n, il faudra, au moyen de l'équation $M = 0$, déterminer un nombre n de valeurs de x' en x. La somme des n valeurs de $\int x^s . x'^{s'} . \varphi dx$ qui en résulteront, et dans lesquelles on pourra mettre pour φ des fonctions arbitraires différentes de x, sera l'expression complète de $y_{s,s'}$.

Il résulte de ce que nous avons dit dans la première partie de ce Livre, que l'équation $M = 0$ est l'équation génératrice de l'équation proposée $V = 0$.

Considérons présentement l'équation aux différences partielles

$$0 = V + s . T + s' . R,$$

dans laquelle V, T, et R sont des fonctions quelconques linéaires de $y_{s,s'}$ et de ses différences partielles, soit finies, soit infiniment petites. Si l'on y suppose, comme ci-dessus,

$$y_{s,s'} = \int x^s . x'^{s'} . \varphi dx,$$

x' étant une fonction de x qu'il s'agit de déterminer. On aura une équation de cette forme

$$0 = \int x^s . x'^{s'} . \varphi dx . (M + N . s + P . s'),$$

M, N et P étant des fonctions de x et de x', sans s ni s'; or on a

$$\frac{d . (x^s . x'^{s'})}{dx} = x^s . x'^{s'} . \left(\frac{s}{x} + \frac{s' dx'}{x' dx}\right);$$

donc si l'on détermine x' par cette équation

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{P . dx}{Nx},$$

on aura

$$x^s . x'^{s'} . (N . s + P . s') = Nx . \frac{d . (x^s . x'^{s'})}{dx};$$

par conséquent, si l'on désigne $x^s . x'^{s'}$ par δy, et si l'on suppose que l'on a substitué dans M et N pour x' sa valeur en x,

on aura

$$o = \int \varphi dx . \left(M . \delta y + Nx . \frac{d.\delta y}{dx} \right).$$

Cette équation intégrée par parties, comme dans les numéros précédens, donne les deux suivantes,

$$o = M\varphi - \frac{d.(Nx.\varphi)}{dx};$$

$$o = Nx . \varphi . \delta y.$$

La première détermine φ en x, et la seconde donne les limites de l'intégrale $\int \delta y . \varphi dx$.

Cette valeur de $y_{,,\prime\prime}$ ne renfermant point de fonction arbitraire, elle n'est qu'une intégrale particulière de l'équation proposée aux différences partielles. Pour la rendre complète, on observera que l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{Pdx}{Nx},$$

qui détermine x' en x, est $x' = Q$, Q étant une fonction de x, et d'une constante arbitraire que nous désignerons par u; en représentant donc par ψ, une fonction arbitraire de u, l'équation proposée aux différences partielles sera satisfaite par cette valeur de $y_{,,\prime\prime}$,

$$y_{,,\prime\prime} = \int\int x^{s} . Q^{s'} . \psi dx . du;$$

l'intégrale relative à x étant prise entre les limites déterminées par l'équation $o = N\varphi . \delta y$, et l'intégrale relative à u étant prise entre des limites quelconques. Cette valeur de $y_{,,\prime\prime}$ sera donc l'intégrale complète de l'équation proposée aux différences partielles, si celle-ci est du premier ordre; mais si elle est d'un ordre supérieur, il faudra, au moyen de l'équation $o = N\varphi . \delta y$, déterminer autant de valeurs de x en u, qu'il y a d'unités dans cet ordre. La réunion des valeurs de $y_{,,\prime\prime}$ auxquelles on parviendra, sera l'expression complète de $y_{,,\prime\prime}$

CHAPITRE III.

Application des méthodes précédentes, à l'approximation de diverses fonctions de très-grands nombres.

PARMI les diverses fonctions auxquelles ces méthodes peuvent s'appliquer, je vais considérer les produits des nombres, les développemens des polynomes, et les différences infiniment petites et finies des fonctions, ces diverses quantités étant celles qui se présentent le plus souvent dans l'analyse des hasards.

De l'approximation des produits composés d'un grand nombre de facteurs, et des termes des polynomes élevés à de grandes puissances.

33. Proposons-nous d'intégrer l'équation aux différences finies

$$0 = (s+1).y_s - y_{s+1}.$$

Si l'on y suppose

$$y_s = \int x^s.\varphi dx;$$

on aura, en désignant x^s par δy,

$$0 = \int \varphi dx.\left[(1-x).\delta y + x.\frac{d\delta y}{dx}\right];$$

d'où l'on tire en intégrant par parties, suivant la méthode précédente, les deux équations suivantes,

$$0 = \varphi.(1-x) - \frac{d.(x\varphi)}{dx},$$
$$0 = x^{s+1}.\varphi.$$

La première équation donne, en l'intégrant,

$$\varphi = A.c^{-x};$$

et la seconde donne, pour déterminer les deux limites de l'intégrale $\int x^s.\varphi dx$,

$$0 = x^{s+1}.c^{-x};$$

ces limites sont par conséquent $x = 0$ et $x = \infty$. Ainsi l'on a

$$y_s = A.\int x^s dx.c^{-x},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à x infini, et A étant une constante arbitraire.

Pour avoir cette intégrale en série, on déterminera, conformément à la méthode exposée dans le n° 23, la valeur de x, qui rend $x^s.c^{-x}$ un *maximum*; cette valeur est s. On fera donc, suivant la méthode citée,

$$x^s.c^{-x} = s^s.c^{-s}.c^{-t^2}.$$

En supposant $x = s + \theta$, cette équation devient

$$\left(1 + \frac{\theta}{s}\right)^s.c^{-\theta} = c^{-t^2};$$

partant

$$t^2 = -s.\log\left(1 + \frac{\theta}{s}\right) + \theta = \frac{\theta^2}{2s} - \frac{\theta^3}{3s^2} + \frac{\theta^4}{4s^3} - \text{etc.};$$

ce qui donne par le retour des suites

$$\theta = t.\sqrt{2s} + \frac{2}{3}.t^2 + \frac{t^3}{9.\sqrt{2s}} + \text{etc.};$$

par conséquent

$$dx = d\theta = dt.\sqrt{2s}.\left(1 + \frac{4t}{3.\sqrt{2s}} + \frac{t^2}{6.s} + \text{etc.}\right);$$

la fonction $\int x^s.\varphi dx.c^{-x}$ deviendra donc

$$s^s.c^{-s}.\int dt.c^{-t^2}.\sqrt{2s}.\left(1 + \frac{4t}{3.\sqrt{2s}} + \frac{t^2}{6.s} + \text{etc.}\right).$$

L'intégrale relative à x devant être prise depuis x nul jusqu'à x infini, l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. En intégrant comme dans le n° 30, on aura

$$y_s = A.s^{s+\frac{1}{2}}.c^{-s}.\sqrt{2\pi}.\left(1 + \frac{1}{12.s} + \text{etc.}\right).$$

On peut déterminer fort simplement le facteur $1+\frac{1}{12 s}+$ etc. de cette manière. Désignons-le par

$$1+\frac{B}{s}+\frac{C}{s^2}+\text{etc.};$$

ce qui donne

$$y_s=A.s^{s+\frac{1}{2}}.c^{-s}.\sqrt{2\pi}.\left(1+\frac{B}{s}+\frac{C}{s^2}+\text{etc.}\right).$$

En substituant cette valeur de y_s dans l'équation proposée

$$y_{s+1}=(s+1).y_s;$$

on aura

$$\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s+\frac{1}{2}}.c^{-1}.\left(1+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2}+\text{etc.}\right)=1+\frac{B}{s}+\frac{C}{s^2}+\text{etc.},$$

ou

$$\left(1+\frac{B}{s}+\frac{C}{s^2}+\text{etc.}\right).\left[c^{1-(s+\frac{1}{2}).\log\left(1+\frac{1}{s}\right)}-1\right]$$
$$=-\frac{B}{s^2}+\frac{(B-2C)}{s^3}-\text{etc.};$$

or on a

$$1-\left(s+\frac{1}{2}\right).\log\left(1+\frac{1}{s}\right)=1-\left(s+\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{2s^2}+\frac{1}{3s^3}-\frac{1}{4s^4}+\text{etc.}\right)$$
$$=-\frac{1}{12.s^2}+\frac{1}{12.s^3}-\text{etc.}$$

On aura donc, en observant que $c^{-\frac{1}{12.s^2}+\text{etc.}}=1-\frac{1}{12.s^2}+$ etc.,

$$\left(1+\frac{B}{s}+\frac{C}{s^2}+\text{etc.}\right).\left(-\frac{1}{12.s^2}+\frac{1}{12.s^3}-\text{etc.}\right)=-\frac{B}{s^2}+\frac{B-2C}{s^3}-\text{etc.};$$

ce qui donne, en comparant les puissances semblables de $\frac{1}{s}$,

$$B=\frac{1}{12},\quad C=\frac{1}{288},\quad \text{etc.};$$

donc

$$y_s=A.s^{s+\frac{1}{2}}.c^{-s}.\sqrt{2\pi}.\left(1+\frac{1}{12.s}+\frac{1}{288.s^2}+\text{etc.}\right).$$

Ce

On déterminera la constante arbitraire A, au moyen d'une valeur particulière de y_s; en supposant, par exemple, que s étant égal à μ, on ait $y_s = Y$; on aura

$$Y = A . x\int x^\mu dx . c^{-x};$$

ce qui donne

$$A = \frac{Y}{\int x^\mu dx . c^{-x}};$$

par conséquent,

$$y_s = \frac{Y . s^{s+\frac{1}{2}} . c^{-s} . \sqrt{2\pi}}{\int x^\mu dx . c^{-x}} . \left(1 + \frac{1}{12 . s} + \frac{1}{288 . s^2} + \text{etc.}\right). \qquad (q)$$

Voyons maintenant de quelle nature est la fonction y_s. Pour cela, il faut intégrer l'équation aux différences finies

$$y_{s+1} = (s+1) . y_s.$$

On trouve facilement que son intégrale est

$$y_s = Y . (\mu+1) . (\mu+2) . (\mu+3) . \,.\,.\,.\, s;$$

on aura donc, en comparant cette expression à la formule (q),

$$(\mu+1) . (\mu+2) . (\mu+3) . \,.\,.\,.\,.\, s$$
$$= \frac{s^{s+\frac{1}{2}} . c^{-s} . \sqrt{2\pi} . \left(1 + \frac{1}{12 . s} + \frac{1}{288 . s^2} + \text{etc.}\right)}{\int x^\mu dx . c^{-x}}. \qquad (q')$$

Si l'on fait $\mu = 0$, on aura $\int x^\mu dx . c^{-x} = 1$; partant

$$1 . 2 . 3 \ldots . s = s^{s+\frac{1}{2}} . c^{-s} . \sqrt{2\pi} . \left(1 + \frac{1}{12 . s} + \frac{1}{288 . s^2} + \text{etc.}\right).$$

Si l'on fait $\mu = \frac{m}{n}$, m étant moindre que n; on aura

$$s = s' + \frac{m}{n},$$

s' étant un nombre entier; ainsi

$$s^{s+\frac{1}{2}} = \left(s' + \frac{m}{n}\right)^{s' + \frac{m}{n} + \frac{1}{2}} = s'^{\,s' + \frac{m}{n} + \frac{1}{2}} . c^{\left(s' + \frac{m}{n} + \frac{1}{2}\right) . \log\left(1 + \frac{m}{ns'}\right)};$$

or on a

$$\left(s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right).\log\left(1+\frac{m}{ns'}\right)=\left(s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right).\left(\frac{m}{ns'}-\frac{m^2}{2n^2s'^2}+\text{etc.}\right)$$
$$=\frac{m}{n}+\frac{(m^2+mn)}{2n^2s'}+\text{etc.}$$

On a d'ailleurs, en faisant $x=t^n$,

$$\int x^{\frac{m}{n}}.dx.c^{-x}=\frac{m}{n}.\int x^{\frac{m}{n}-1}.dx.c^{-x}=m.\int t^{m-1}dt.c^{-t^n},$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis $t=0$ jusqu'à t infini. En substituant ces valeurs dans la formule (q'), elle donnera

$$m.(m+n).(m+2n)\ldots\ldots(m+s'n)$$
$$=\frac{n^{s'}.s'^{\,s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}}.c^{-s'}.\sqrt{2\pi}.\left(1+\frac{n^2+6mn+6m^2}{12.n^2s'}+\text{etc.}\right)}{\int t^{m-1}dt.c^{-t^n}};\qquad (q'')$$

ensorte que la valeur approchée du produit des termes de la progression arithmétique m, $m+n$, $m+2n$, etc. dépend des trois transcendantes c, π et $\int t^{m-1}dt.c^{-t^n}$.

Si dans cette équation on fait pour plus de simplicité $n=1$, ce qui change m en μ, et si l'on observe que $\int t^{\mu-1}dt.c^{-t}=\frac{1}{\mu}.\int t^{\mu}dt.c^{-t}$; on aura

$$(1+\mu).(2+\mu)\ldots(s'+\mu)$$
$$=s'^{\,s'+\mu+\frac{1}{2}}.c^{-s'}.\sqrt{2\pi}.\frac{\left(1+\frac{1+6\mu+6\mu^2}{12.s'}+\text{etc.}\right)}{\int t^{\mu}dt.c^{-t}}.$$

En changeant μ dans $-\mu$, on aura

$$(1-\mu).(2-\mu)\ldots\ldots(s'-\mu)$$
$$=s'^{\,s'-\mu+\frac{1}{2}}.c^{-s'}\sqrt{2\pi}.\frac{\left(1+\frac{1-6\mu+6\mu^2}{12.s'}+\text{etc.}\right)}{\int t^{-\mu}dt.c^{-t}}.$$

En multipliant ces deux équations, l'une par l'autre, on aura

$$(1-\mu^2).(4-\mu^2)\ldots(s'^2-\mu^2)=\frac{s'^{\,2s'+1}.c^{-2s'}.2\pi.\left(1+\frac{1+6\mu^2}{6.s'}+\text{etc.}\right)}{\int t^{-\mu}dt.c^{-t}.\int t^{\mu}dt.c^{-t}}.$$

L'équation (T) du n° 24 donne

$$n^3.\int t^{n+r-2}dt.c^{-t^n}.\int t^{n-r}dt.c^{-t^n}=\frac{(r-1).\pi}{\sin\left(\frac{r-1}{n}\right).\pi}.$$

En faisant $n=1$ et $\mu=r-1$, on a

$$\int t^{\mu}dt.c^{-t}.\int t^{-\mu}dt.c^{-t}=\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi};$$

on a donc

$$\sin\mu\pi=\tfrac{1}{2}.\mu.(1-\mu^2).(4-\mu^2)\ldots(s'^2-\mu^2).\left(1-\frac{(1+6\mu^2)}{6s'}+\text{etc.}\right).s'^{-2s'-1}.c^{2s'}.$$

Si l'on fait μ infiniment petit, cette équation donne

$$2\pi=1^2.2^2.3^2\ldots.s'^2.\left(1-\frac{1}{6s'}+\text{etc.}\right).s'^{-2s'-1}.c^{2s'};$$

divisant donc l'équation précédente par celle-ci, on aura

$$\sin\mu\pi=\mu\pi.(1-\mu^2).\left(1-\frac{\mu^2}{4}\right).\left(1-\frac{\mu^2}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{\mu^2}{s'^2}\right).\left(1-\frac{\mu^2}{s'}+\text{etc.}\right).$$

Si l'on fait s' infini, on a pour l'expression de $\sin\varphi$, φ étant égal à $\mu\pi$, le produit infini

$$\varphi.\left(1-\frac{\varphi^2}{\pi^2}\right).\left(1-\frac{\varphi^2}{2^2.\pi^2}\right).\left(1-\frac{\varphi^2}{3^2.\pi^2}\right).\left(1-\frac{\varphi^2}{4^2.\pi^2}\right).\text{etc.};$$

l'expression de $\sin\varphi$ est ainsi décomposable dans une infinité de facteurs; ce que l'on sait d'ailleurs.

En supposant φ imaginaire et égal à $\varphi'.\sqrt{-1}$, $\sin\varphi$ devient $\frac{c^{-\varphi'}-c^{\varphi'}}{2\sqrt{-1}}$; on a donc

$$c^{\varphi'}-c^{-\varphi'}=2\varphi'.\left(1+\frac{\varphi'^2}{\pi^2}\right).\left(1+\frac{\varphi'^2}{2^2.\pi^2}\right).\left(1+\frac{\varphi'^2}{3^2.\pi^2}\right)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\left(1+\frac{\varphi'^2}{s'^2.\pi^2}\right).\left(1+\frac{\varphi'^2}{s'.\pi^2}+\text{etc.}\right);$$

et en faisant s' infini, on voit que $c^{\varphi'}-c^{-\varphi'}$ est égal au produit infini

$$2\varphi'.\left(1+\frac{\varphi'^2}{\pi^2}\right).\left(1+\frac{\varphi'^2}{2^2.\pi^2}\right).\text{etc.}$$

On aura, par un procédé semblable, le produit continu de facteurs dont le terme général est une fonction rationnelle entière ou fractionnaire de s. Mais l'expression à laquelle on parviendra, pourra contenir d'autres transcendantes dépendantes d'intégrales définies de la forme $\int x^{\mu} dx . c^{-x}$.

On peut observer ici que ces produits étant mis sous la forme $\int x^{s} . \varphi dx$; leur différentiation par rapport à la variable s, présente une idée claire, et alors on a pour cette différentielle, $\int x^{s} . \varphi dx . \log x$.

Les expressions de y_s données par les formules (q) et (q') du numéro précédent, ont encore lieu suivant la remarque du n° 30, dans le cas où s et μ sont négatifs, quoique dans ce cas, l'équation

$$o = x^{s+1} . c^{-x},$$

qui détermine les limites de l'intégrale définie qui représente la valeur de y_s, n'ait pas plusieurs racines réelles. Si dans la formule (q) du numéro précédent, on change s dans $-s$, et μ dans $-\mu$, elle devient

$$y_{-s} = \frac{Y . \sqrt{-1} . c^{s} . \sqrt{2\pi} . \left(1 - \frac{1}{12 . s} + \frac{1}{288 . s^2} - \text{etc.}\right)}{(-1)^{s} . s^{s - \frac{1}{2}} . \int \frac{dx . c^{-x}}{x^{\mu}}},$$

Y étant la valeur de y_s qui répond à $s = -\mu$. Toute la difficulté se réduit à intégrer $\int \frac{dx . c^{-x}}{x^{\mu}}$. Pour y parvenir, il faut suivre le même procédé dont on a fait usage pour réduire en série, l'intégrale $\int \frac{c^{-x} . dx}{x^{s}}$. On fera donc

$$x = -\mu + \varpi . \sqrt{-1},$$

$-\mu$ étant la valeur de x donnée par l'équation

$$o = \frac{c^{-x}}{x^{\mu}};$$

on aura ainsi

$$\int \frac{dx . c^{-x}}{x^{\mu}} = \frac{c^{\mu} . \sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}} . \int \frac{d\varpi . c^{-\varpi . \sqrt{-1}}}{(\mu - \varpi . \sqrt{-1})^{\mu}}.$$

L'intégrale relative à x devant s'étendre entre les deux limites qui rendent nulle la quantité $\frac{c^{-x}}{x^{\mu}}$, il est clair que l'intégrale relative à ϖ doit s'étendre depuis $\varpi = -\infty$ jusqu'à $\varpi = \infty$; en réunissant donc les deux quantités $\frac{c^{-\varpi.\sqrt{-1}}}{(\mu-\varpi.\sqrt{-1})^{\mu}}$ et $\frac{c^{\varpi.\sqrt{-1}}}{(\mu+\varpi.\sqrt{-1})^{\mu}}$, qui répondent aux mêmes valeurs de ϖ, affectées de signes contraires, on aura

$$\int \frac{dx.c^{-x}}{x^{\mu}} = \frac{c^{\mu}.\sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}}.\int d\varpi.\left\{\begin{array}{l} \cos\varpi.\frac{(\mu+\varpi.\sqrt{-1})^{\mu}+(\mu-\varpi.\sqrt{-1})^{\mu}}{(\mu^2+\varpi^2)^{\mu}} \\ +\sqrt{-1}.\sin\varpi.\frac{(\mu-\varpi.\sqrt{-1})^{\mu}-(\mu+\varpi.\sqrt{-1})^{\mu}}{(\mu^2+\varpi^2)^{\mu}} \end{array}\right\},$$

l'intégrale relative à ϖ étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \infty$. Si l'on développe les quantités sous le signe $\int$, les imaginaires disparaissent, et il ne reste qu'une fonction réelle que nous désignerons par $Qd\varpi$; on aura ainsi

$$\int \frac{dx.c^{-x}}{x^{\mu}} = \frac{c^{\mu}.\sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}}.\int Qd\varpi;$$

partant

$$y_{-i} = \frac{Y.c^{s-\mu}.\sqrt{2\pi}.\left(1-\frac{1}{12.s}+\frac{1}{288.s^2}-\text{etc.}\right)}{(-1)^{s-\mu}.s^{s-\frac{1}{2}}.\int Qd\varpi}.$$

Voyons présentement quelle fonction de s est y_{-i}. Pour cela, reprenons l'équation primitive

$$0 = (s+1).y_s - y_{s+1};$$

en y changeant s dans $-s$, et faisant $y_{-i} = u_s$, elle devient

$$0 = (s-1).u_s + u_{s-1};$$

équation dont l'intégrale est

$$u_s = \frac{(-1)^{s-\mu}.Y}{\mu.(1+\mu).(2+\mu)\ldots\ldots(s-1)} = y_{-i},$$

Y étant comme ci-dessus, égal à $y_{-\mu}$. Si l'on compare cette expression de y_{-s} à la précédente, et si l'on observe que $s-\mu$ est un nombre entier, et qu'ainsi l'on a $(-1)^{2s-2\mu}=1$; on aura

$$\frac{1}{(\mu+1).(\mu+2)\ldots(s-1)}=\frac{\mu.\sqrt{2\pi}.c^{s-\mu}.\left(1-\frac{1}{12.s}+\frac{1}{288.s^2}-\text{etc.}\right)}{s^{s-\frac{1}{2}}.\int Q d\varpi}.$$

En divisant les deux membres de cette équation par s, et les renversant ensuite, on aura

$$(\mu+1).(\mu+2).(\mu+3)\ldots s=\frac{s^{s+\frac{1}{2}}.c^{\mu-s}}{\mu.\sqrt{2\pi}}.\left(1+\frac{1}{12.s}+\text{etc.}\right).\int Q d\varpi.$$

Si l'on compare cette équation à la formule (q') du numéro précédent, on a ce résultat remarquable,

$$\int Q d\varpi=\frac{2\mu.\pi.c^{-\mu}}{\int x^{\mu}dx.c^{-x}}; \qquad (O)$$

Je suis parvenu à cette équation générale, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1782, par l'analyse précédente, fondée, comme on voit, sur le passage du réel à l'imaginaire. En faisant successivement dans Q, $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, etc., on aura les valeurs d'un nombre infini d'intégrales définies; ainsi dans le cas de $\mu=1$, l'équation (O) donne

$$\int\frac{d\varpi.(\cos\varpi+\varpi.\sin\varpi)}{1+\varpi^2}=\frac{\pi}{c},$$

formule que j'ai donnée pareillement dans les Mémoires cités. Cette formule et toutes celles du même genre, peuvent se vérifier par les formules du n° 26; car on a par ce numéro,

$$\int\frac{d\varpi.\cos\varpi}{1+\varpi^2}=\frac{\pi}{2c}=\int\frac{\varpi.d\varpi.\sin\varpi}{1+\varpi^2}.$$

Nous observerons ici, comme dans les Mémoires cités, que $\int\frac{dx.c^{-x}}{x^{\mu}}$ étant égal à $\frac{c^{\mu}.\sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}}.\int Q d\varpi$; on a, en substituant au lieu de $\int Q d\varpi$, sa valeur donnée par l'équation (O),

$$\int\frac{dx.c^{-x}}{x^{\mu}}=\frac{2\mu.\pi.(-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}}{\int x^{\mu}dx.c^{-x}}=\frac{2\pi.(-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}}{\int x^{\mu-1}dx.c^{-x}},$$

la première intégrale étant prise entre les deux valeurs imaginaires de x qui rendent nulle la quantité $\frac{c^{-x}}{x^\mu}$, et les deux autres intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini ; ce qui donne un moyen facile de transformer dans celles-ci, les intégrales $\int \frac{dx.\sin x}{x^\mu}$ et $\int \frac{dx.\cos x}{x^\mu}$.

34. Considérons maintenant l'équation générale

$$0 = (a' + b's).y_{s+1} - (a+bs).y_s.$$

Si l'on fait

$$\frac{a}{b} = n, \quad \frac{a'}{b'} = n' + 1, \quad \frac{b}{b'} = p;$$

elle prend cette forme

$$0 = (n' + s + 1).y_{s+1} - (n+s).p.y_s.$$

Supposons

$$y_s = \int x^{s-1}.\varphi dx;$$

nous aurons, en intégrant par parties,

$$0 = x^s.\varphi.(x-p) + \int x^{s-1}.[\varphi dx.(n'x - np) + (p-x).d\varphi].$$

Cette équation donne pour déterminer φ, la suivante,

$$0 = (n'x - np).\varphi dx + (p-x).d\varphi;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\varphi = A.x^n.(p-x)^{n'-n},$$

A étant une constante arbitraire. On aura ensuite pour déterminer les limites de l'intégrale, l'équation

$$0 = x^s.\varphi.(p-x),$$

ou

$$0 = x^{n+s}.(p-x)^{n'+1-n}.$$

Ces limites sont donc $x = 0$ et $x = p$, si $n + s$ et $n' + 1 - n$ sont des quantités positives. Ainsi l'on aura, en prenant l'intégrale dans ces limites,

$$y_s = A.\int x^{n+s-1} dx.(p-x)^{n'-n}.$$

On déterminera la constante A, au moyen d'une valeur particulière de y_s. Soit y_μ cette valeur; on aura

$$A=\frac{y_\mu}{\int x^{n+\mu-1}.dx.(p-x)^{n'-n}};$$

par conséquent,

$$y_s=\frac{y_\mu.\int x^{n+s-1}.dx.(p-x)^{n'-n}}{\int x^{n+\mu-1}.dx.(p-x)^{n'-n}}.$$

Intégrons présentement l'équation proposée aux différences en y_s. Son intégrale est

$$y_s=\frac{(n+\mu).(n+\mu+1)..........(n+s-1)}{(n'+\mu+1).(n'+\mu+2).........(n'+s)}.y_\mu.p^{s-\mu}.$$

Dans cette expression, comme dans toutes celles formées de produits, les facteurs du numérateur ne commencent que pour la valeur de s qui rend le dernier facteur égal au premier, ce qui a lieu ici lorsque s est égal à $\mu+1$; il en est de même des facteurs du dénominateur. Pour la valeur de s égale à μ, le numérateur et le dénominateur se réduisent à l'unité qui est censée les multiplier l'un et l'autre. Si l'on compare les deux expressions précédentes de y_s, on aura

$$\frac{(n+\mu).(n+\mu+1)....(n+s-1)}{(n'+\mu+1).(n'+\mu+2)...(n'+s)}.p^{s-\mu}=\frac{\int x^{n+s-1}.dx.(p-x)^{n'-n}}{\int x^{n+\mu-1}.dx.(p-x)^{n'-n}}.$$

Faisons $p-x=pu^2$; le second membre de cette équation deviendra

$$p^{s-\mu}.\frac{\int u^{2n-2n'+1}.du.(1-u^2)^{n+s-1}}{\int u^{2n-2n'+1}.du.(1-u^2)^{n+\mu-1}},$$

les intégrales étant prises depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$, parce que ces limites répondent aux limites $x=p$ et $x=0$. On a donc

$$\frac{(n+\mu).(n+\mu+1)....(n+s-1)}{(n'+\mu+1).(n'+\mu+2)...(n'+s)}=\frac{\int u^{2n'-2n+1}.du.(1-u^2)^{n+s-1}}{\int u^{2n'-2n+1}.du.(1-u^2)^{n+\mu-1}}.$$

Supposons $n=\frac{1}{2}$, $n'=0$ et $\mu=1$; si l'on observe que

$$\int du.\sqrt{1-u^2}=\tfrac{1}{4}\pi;$$

on

on aura

$$\frac{(s+1).(s+2)\ldots\ldots 2s}{1.2.3\ldots\ldots s}=\frac{2^{2s+1}}{\pi}.\int du.(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}.$$

Le premier membre de cette équation est le coefficient du terme moyen ou indépendant de a, du binome $\left(\frac{1}{a}+a\right)^{2s}$; on aura donc au moyen des méthodes précédentes, ce coefficient, par une approximation rapide, lorsque s est un grand nombre. Pour cela, nous ferons

$$\frac{1}{s-\frac{1}{2}}=\alpha, \quad 1-u^2=c^{-\alpha t^2};$$

ce qui donne

$$u=\sqrt{1-c^{-\alpha t^2}}$$

et

$$\int du.(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}=\int du.c^{-t^2}.$$

Supposons

$$\sqrt{1-c^{-\alpha t^2}}=\alpha^{\frac{1}{2}}.t.[1+\alpha.q^{(1)}.t^2+\alpha^2.q^{(2)}.t^4+\alpha^3.q^{(3)}.t^6+\text{etc.}].$$

En prenant les différences logarithmiques des deux membres de cette équation, on aura

$$\frac{1+3\alpha.q^{(1)}.t^2+5\alpha^2.q^{(2)}.t^4+7\alpha^3.q^{(3)}.t^6+\text{etc.}}{t+\alpha.q^{(1)}.t^3+\alpha^2.q^{(2)}.t^5+\alpha^3.q^{(3)}.t^7+\text{etc.}}=\frac{\alpha t.c^{-\alpha t^2}}{1-c^{-\alpha t^2}};$$

et ce dernier membre est égal à

$$\frac{1-\alpha.t^2+\frac{\alpha^2}{1.2}.t^4-\frac{\alpha^3}{1.2.3}.t^6+\text{etc.}}{t.\left(1-\frac{\alpha.t^2}{1.2}+\frac{\alpha^2.t^4}{1.2.3}-\frac{\alpha^3.t^6}{1.2.3.4}+\text{etc.}\right)}.$$

On aura donc en comparant cette quantité au premier membre, et réduisant au même dénominateur; l'équation générale

$$0=2i.q^{(i)}-\frac{(2i-3)}{1.2}.q^{(i-1)}+\frac{(2i-6)}{1.2.3}.q^{(i-2)}-\frac{(2i-9)}{1.2.3.4}.q^{(i-3)}$$
$$+\frac{(2i-12)}{1.2.3.4.5}.q^{(i-4)}-\text{etc.},$$

$q^{(0)}$ étant égal à l'unité. Si l'on fait successivement dans cette équation, $i=1$, $i=2$, $i=3$, etc.; on aura les valeurs successives $q^{(1)}$,

$q^{(2)}$, $q^{(3)}$, etc.; et l'on trouvera

$$q^{(1)} = -\frac{1}{4}, \quad q^{(2)} = \frac{5}{96}, \quad \text{etc.}$$

On aura ensuite

$$\int du.(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.\int dt.c^{-t^2}[1+3a.q^{(1)}.t^2+5a^2.q^{(2)}.t^4+7a^3.q^{(3)}.t^6+\text{etc.}].$$

L'intégrale relative à u devant être prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$, l'intégrale relative à t doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini; on aura donc par le n° 27

$$\int du.(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\sqrt{a\pi}.\left\{1+\frac{1.3}{2}.a.q^{(1)}+\frac{1.3.5}{2^2}.a^2.q^{(2)} + \frac{1.3.5.7}{2^3}.a^3.q^{(3)}+\text{etc.}\right\};$$

partant

$$\frac{(s+1).(s+2).(s+3)\ldots 2s}{1.2.3.\ldots.s} = \frac{2^{2s}}{\sqrt{(s-\frac{1}{2}).\pi}}.\left\{1+\frac{1.3}{2}.a.q^{(1)}+\frac{1.3.5}{2^2}.a^2.q^{(2)} + \frac{1.3.5.7}{2^3}.a^3.q^{(3)}+\text{etc.}\right\}.$$

Ainsi l'on aura par une suite très-convergente, le terme moyen ou indépendant de a, du binome $\left(\frac{1}{a}+a\right)^{2s}$.

On parviendra plus simplement à ce résultat, par la méthode suivante, qui peut s'étendre à un polynome quelconque.

35. Nommons y_s, le terme moyen ou indépendant de a, du binome $\left(\frac{1}{a}+a\right)^{2s}$, ou, ce qui revient au même, le terme indépendant de $c^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement du binome $(c^{\varpi\sqrt{-1}}+c^{-\varpi\sqrt{-1}})^{2s}$. Si l'on multiplie ce développement par $d\varpi$, et qu'on l'intègre depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi=\frac{1}{2}\pi$; il est facile de voir que cette intégrale sera $\frac{1}{2}\pi.y_s$, et qu'ainsi on a

$$y_s = \frac{2}{\pi}.\int d\varpi.(c^{\varpi\sqrt{-1}}+c^{-\varpi\sqrt{-1}})^{2s}.$$

En effet, en développant le binome renfermé sous le signe $\int$, et substituant au lieu de $c^{\pm 2r\varpi\sqrt{-1}}$, sa valeur $\cos 2r\varpi \pm \sqrt{-1}.\sin 2r\varpi$, on aura le terme moyen du binome, plus une suite de cosinus de l'angle 2ϖ et de ses multiples; en les multipliant par $d\varpi$, et les intégrant, cette suite se transformera dans une suite de sinus de l'angle 2ϖ et de ses multiples, sinus qui sont nuls aux deux limites $\varpi=0$ et $\varpi=\frac{1}{2}\pi$. Il ne restera ainsi dans l'intégrale que le terme moyen du binome, multiplié par $\frac{1}{2}\pi$. Cela posé, si l'on substitue au lieu du binome $c^{\varpi\sqrt{-1}}+c^{-\varpi\sqrt{-1}}$, sa valeur $2.\cos\varpi$, on aura

$$y_s=\frac{2^{2s+1}}{\pi}.\int d\varpi.(\cos\varpi)^{2s};$$

en supposant $\sin\varpi=u$, on aura

$$y_s=\frac{2^{2s+1}}{\pi}.\int du.(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}},$$

l'intégrale étant prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$; ce qui coïncide avec ce que l'on a trouvé dans le numéro précédent.

Considérons maintenant le trinome $\left(\frac{1}{a}+1+a\right)^s$, et nommons y_s le terme moyen ou indépendant de a, dans le développement de ce trinome. Ce terme sera le terme indépendant de $c^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement du trinome $(c^{\varpi\sqrt{-1}}+1+c^{-\varpi\sqrt{-1}})^s$; on aura conséquemment, en appliquant ici le raisonnement qui précède,

$$y_s=\frac{1}{\pi}.\int d\varpi.(1+2.\cos\varpi)^s;$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=\pi$. La condition du *maximum* de la fonction $(1+2.\cos\varpi)^s$ donne $\sin\varpi=0$; ensorte que les deux limites de l'intégrale, $\varpi=0$ et $\varpi=\pi$, répondent à des *maxima* de cette fonction; on partagera donc l'intégrale précédente dans les deux suivantes,

$$\int d\varpi.(1+2.\cos\varpi)^s,\quad (-1)^s.\int d\varpi.(2.\cos\varpi-1)^s;$$

la première de ces intégrales étant prise depuis ϖ nul jusqu'à la valeur de ϖ, qui rend nulle la quantité $2.\cos\varpi+1$; et la seconde intégrale étant prise depuis $\varpi=0$, jusqu'à sa valeur qui rend nulle la quantité $2.\cos\varpi-1$.

Pour obtenir la première intégrale en série convergente, on fera

$$(1+2.\cos\varpi)^s = 3^s.c^{-t^2};$$

en supposant $\alpha = \frac{1}{s}$, extrayant la racine s de chaque membre, et développant $\cos\varpi$ et $c^{-\alpha t^2}$, on aura

$$3-\varpi^2+\frac{\varpi^4}{12}-\text{etc.} = 3-3\alpha t^2+\frac{3\alpha^2t^4}{2}-\text{etc.};$$

d'où l'on tire par le retour des suites,

$$\varpi = \alpha^{\frac{1}{2}}t.\sqrt{3}.\left(1-\frac{\alpha t^2}{8}+\text{etc.}\right);$$

partant,

$$\int d\varpi.(1+2.\cos\varpi)^s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}}.\int dt.c^{-t^2}.\left(1-\frac{3t^2}{8.s}+\text{etc.}\right).$$

L'intégrale relative à t doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini ; on aura donc

$$\int d\varpi.(1+2.\cos\varpi)^s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}}.\sqrt{\pi}}{2.\sqrt{s}}.\left(1-\frac{3}{16.s}+\text{etc.}\right).$$

On trouvera de la même manière

$$\int d\varpi.(2.\cos\varpi-1)^s = \frac{\sqrt{\pi}}{2.\sqrt{s}}.\left(1-\frac{5}{16.s}+\text{etc.}\right);$$

on aura donc

$$y_s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{2.\sqrt{s\pi}}.\left(1-\frac{3}{16.s}+\text{etc.}\right)+\frac{(-1)^s}{2.\sqrt{s\pi}}.\left(1-\frac{5}{16.s}+\text{etc.}\right).$$

s étant supposé un très grand nombre, cette quantité se réduit à très-peu près à $\frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{2.\sqrt{s\pi}}$. C'est l'expression fort approchée du terme moyen ou indépendant de a, du binome $\left(\frac{1}{a}+1+a\right)^s$.

On déterminera de la même manière, le terme moyen d'un polynome quelconque, élevé à une très-haute puissance. Supposons d'abord le nombre des termes du polynome, impair et égal à $2n+1$;

et représentons ce polynome par

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^{n-1}}\ldots\ldots+\frac{1}{a}+1+a\ldots\ldots+a^{n-1}+a^n.$$

En substituant $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ pour a, ce polynome devient

$$1+2.\cos\varpi+2.\cos 2\varpi\ldots\ldots+2.\cos n\varpi;$$

or cette fonction est égale à $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$; la puissance s du polynome est donc

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s.$$

Le terme moyen de cette puissance, est le terme indépendant de ϖ, dans son développement en cosinus de l'angle ϖ et de ses multiples. On aura évidemment ce terme, en multipliant la puissance par $d\varpi$; en prenant ensuite l'intégrale depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=\pi$, et en la divisant par π. Ce terme est donc égal à

$$\frac{1}{\pi}.\int d\varpi.\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s.$$

La condition du *maximum* de $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ donne l'équation

$$\operatorname{tang}\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi=(2n+1).\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varpi.$$

Il y a depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi=\pi$, plusieurs *maxima* alternativement positifs et négatifs. Le premier répond à ϖ nul et donne

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s=(2n+1)^s.$$

Pour avoir l'intégrale précédente, depuis ce *maximum* jusqu'au point où $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ est nul, ce qui a lieu d'abord lorsque

$\varpi = \frac{2\pi}{2n+1}$, on fera

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s = (2n+1)^s.c^{-t^2}.$$

En prenant les logarithmes, et réduisant en série relativement aux puissances de ϖ, la fonction

$$s.\log\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right);$$

on aura

$$\frac{n.(n+1)}{6}.s\varpi^2 + \text{etc.} = t^2;$$

ce qui donne

$$d\varpi = \frac{dt.\sqrt{6}}{\sqrt{n.(n+1).s}} + \text{etc.};$$

l'intégrale précédente devient ainsi

$$\frac{(2n+1)^s}{\pi}.\int\frac{dt.\sqrt{6}}{\sqrt{n.(n+1).s}}.c^{-t^2} + \text{etc.}$$

Elle doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini; car à l'origine, ou lorsque ϖ est nul, t est nul; et à la limite, où $\varpi = \frac{2\pi}{2n+1}$, t est infini; cette intégrale devient donc, en ne considérant que le premier terme, et négligeant les suivans qui sont, par rapport à lui, de l'ordre $\frac{1}{s}$,

$$\frac{(2n+1)^s.\sqrt{3}}{\sqrt{n.(n+1).2s\pi}}.$$

Le second *maximum* est négatif, et répond à une valeur de $\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi$, comprise entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$. En effet, l'équation du *maximum*

$$\text{tang}\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi = (2n+1).\text{tang}\frac{1}{2}\varpi,$$

donne

$$\text{tang}\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi > \left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi.$$

Ainsi $\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi$ étant compris dans le second *maximum* entre π et 2π, tang $\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi$ surpasse π; par conséquent $\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi$ surpasse $\pi + \frac{1}{4}\pi$; il est donc compris entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$. L'équation précédente du *maximum* donne

$$\frac{-\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi} = \frac{2n+1}{\sqrt{\cos^2\frac{1}{2}\varpi + (2n+1)^2.\sin^2\frac{1}{2}\varpi}}.$$

Ce dernier membre est plus petit que

$$\frac{2n+1}{\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi.\frac{\sin\frac{1}{2}\varpi}{\frac{1}{2}\varpi}}.$$

$\frac{1}{2}\varpi$ ne surpassant pas $\frac{1}{2}\pi$, il est facile de s'assurer que $\frac{\sin\frac{1}{2}\varpi}{\frac{1}{2}\varpi}$ n'est jamais moindre que sa valeur qui répond à $\varpi = \pi$, et qui est égale à $\frac{2}{\pi}$; le second membre dont il s'agit, est donc généralement plus petit que

$$\frac{2n+1}{\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}.\frac{\pi}{2}.$$

Relativement au second *maximum*, $\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi$ étant compris entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$, ce membre sera plus petit que $(2n+1).\frac{2}{5}$; ainsi la puissance s de $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$, ne surpassera point $(2n+1)^s.\left(\frac{2}{5}\right)^s$; elle sera donc, lorsque s est un trés-grand nombre, incomparablement plus petite que la même puissance correspondante au premier *maximum*, et qui est égal à $(2n+1)^s$.

On verra de la même manière, que le troisiéme *maximum* est compris entre $\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi = \frac{9}{4}\pi$, et $\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi = \frac{5}{2}\pi$, et qu'à ce *maximum*, la puissance s de $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ ne surpasse pas $(2n+1)^s.\left(\frac{2}{9}\right)^s$; que le quatrième *maximum* est compris entre

$\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi = \frac{13}{4}\pi$, et $\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi = \frac{7}{2}\pi$, et qu'à ce *maximum*, la puissance s de $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ ne surpasse point $(2n+1)^s.\left(\frac{2}{13}\right)^s$, et ainsi de suite.

Maintenant, si à partir de l'un quelconque de ces *maxima*, on fait

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s = \left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\Pi}{\sin\frac{1}{2}\Pi}\right)^s.c^{-t^2},$$

Π étant la valeur de ϖ qui correspond à ce *maximum*; et si l'on fait

$$\varpi = \Pi + \varpi';$$

on aura en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation précédente entre ϖ et t,

$$s.\log\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).(\Pi+\varpi') - s.\log\sin\tfrac{1}{2}(\Pi+\varpi')$$
$$= s.\left[\log\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\Pi - \log\sin\tfrac{1}{2}\Pi\right] - t^2.$$

En développant le premier membre de cette équation suivant les puissances de ϖ', la comparaison de la première puissance donnera d'abord l'équation du *maximum*

$$\operatorname{tang}\left(\frac{2n+1}{2}\right).\Pi = (2n+1).\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi.$$

En ne considérant ensuite que la seconde puissance de ϖ', on aura

$$\tfrac{1}{2}.n.(n+1).s\varpi'^2 = t^2;$$

ce qui donne

$$d\varpi' = \frac{2dt}{\sqrt{n.(n+1).2s}};$$

l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}.\int d\varpi.\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s$$

prise entre les deux limites entre lesquelles $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ est nul

de

de part et d'autre du *maximum* de cette fonction, est donc à très-peu près

$$\frac{2}{\sqrt{2n.(n+1).s\pi}} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\Pi}{\sin\frac{1}{2}\Pi}\right)^s.$$

Cette expression a généralement lieu pour les intégrales relatives à tous les *maxima* qui suivent le premier; seulement il faut n'en prendre que la moitié relativement au dernier qui correspond à $\Pi = \pi$. Il résulte de ce qui précède, que cette expression par rapport au second *maximum* est moindre, abstraction faite du signe, que

$$\frac{2}{\sqrt{2n.(n+1).s\pi}} \cdot \left(\tfrac{2}{5}\right)^s;$$

que relativement au troisième *maximum*, elle est moindre que

$$\frac{2}{\sqrt{2n.(n+1).s\pi}} \cdot \left(\tfrac{2}{9}\right)^s;$$

et ainsi de suite. Lorsque s est un très-grand nombre, ces quantités décroissent avec une extrême rapidité, et elles sont incomparablement plus petites que la quantité relative au premier *maximum*, et qui, comme on l'a vu, est

$$\frac{(2n+1)^s.\sqrt{3}}{\sqrt{2n.(n+1).s\pi}};$$

on peut donc n'avoir égard qu'à cette dernière intégrale, et l'on voit que cela est rigoureux dans le cas de n infini; car l'équation de condition du *maximum*, donne alors $\left(\frac{2n+1}{2}\right).\Pi = \left(\frac{2r+1}{2}\right).\pi$, r étant un nombre entier, ce qui rend $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\Pi}{\sin\frac{1}{2}\Pi}$ fini, excepté lorsque Π est zéro, ce qui répond au premier *maximum*.

Si le polynome est composé d'un nombre de termes, pair et égal à $2n$, tel que

$$\frac{1}{a^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a^{n-\frac{3}{2}}} \ldots + \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + a^{\frac{1}{2}} \ldots + a^{n-\frac{3}{2}} + a^{n-\frac{1}{2}};$$

en y substituant $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ au lieu de a, il devient

$$2.\cos\tfrac{1}{2}\varpi + 2.\cos\tfrac{3}{2}\varpi\ldots\ldots + 2.\cos\left(\frac{2n-1}{2}\right).\varpi,$$

ou $\frac{\sin n\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$. Ce polynome élevé à une puissance entière et positive, ne peut avoir de terme moyen ou indépendant des cosinus de $\frac{1}{2}\varpi$ et de ses multiples, qu'autant que cette puissance est paire; représentons-la par $2s$: alors le terme moyen sera

$$\frac{1}{\pi}.\int d\varpi.\left(\frac{\sin n\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^{2s},$$

l'intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi=\pi$. Cette intégrale se compose de diverses intégrales partielles relatives aux divers *maxima* de la fonction $\frac{\sin n\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$; mais on s'assurera facilement, par l'analyse précédente, que toutes ces intégrales, lorsque $2s$ est un très-grand nombre, et lorsque n est plus grand que l'unité, sont incomparablement plus petites que celle qui est relative au premier *maximum* qui correspond à ϖ nul; et alors on trouve à très-peu près le terme moyen de la puissance $2s$ du polynome, égal à

$$\frac{(2n)^{2s}.\sqrt{3}}{\sqrt{(2n-1).(2n+1).s\pi}}.$$

En rapprochant ce résultat, du précédent, on voit que si l'on nomme généralement n' le nombre des termes du polynome, et s' la puissance à laquelle il est élevé; le terme moyen du développement sera, lorsqu'il y en a un,

$$\frac{n'^{s'}.\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\frac{n'^2-1}{2}\right).s'\pi}};$$

et pour qu'il y ait un terme moyen, $(n'-1).s'$ doit être un nombre pair; c'est-à-dire que l'un ou l'autre au moins, des nombres $n'-1$ et s', doit être pair.

36. L'analyse précédente donne encore le coefficient de $a^{\pm l}$ dans le développement du polynome

$$(a^{-n}+a^{-n+1}\ldots\ldots+a^{-1}+1+a\ldots\ldots+a^{n-1}+a^{n})^{s};$$

Pour l'obtenir, on observera que le coefficient de a^r dans le développement de ce polynome, est le même que celui de a^{-r}; en nommant donc A_r ce coefficient, en faisant $a = c^{\varpi\sqrt{-1}}$, et réunissant les deux termes du développement, relatifs à a^r et a^{-r}, on aura $2A_r.\cos r\varpi$ pour leur somme. Maintenant, si l'on multiplie ce polynome, ou sa valeur $\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s$ par $d\varpi.\cos l\varpi$, et qu'on intègre le produit depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \pi$; il est clair que tous les termes disparaîtront, excepté celui où r est égal à l; l'intégrale se réduira donc à $2A_l.\int d\varpi.\cos^2.l\varpi$; ce qui donne

$$A_l = \frac{1}{\pi}.\int d\varpi.\cos.l\varpi.\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s.$$

Pour intégrer cette fonction, on fera comme ci-dessus,

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right).\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s = (2n+1)^s.c^{-t^2}.$$

En prenant les logarithmes et développant par rapport aux puissances de ϖ, on aura par le retour des suites, pour ϖ, une expression de cette forme,

$$\varpi = \frac{t.\sqrt{6}}{\sqrt{n.(n+1).s}}.(1 + At^2 + \text{etc.});$$

ce qui transforme l'intégrale précédente dans celle-ci,

$$\frac{(2n+1)^s}{\pi}.\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n.(n+1).s}}.\int dt.\cos\left\{\frac{lt.\sqrt{6}}{\sqrt{n.(n+1).s}}\right\}.c^{-t^2}(1+3At^2+\text{etc.}),$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini. On peut facilement l'obtenir par le n° 26, et l'on trouve, en n'ayant égard qu'à son premier terme, pour sa valeur,

$$\frac{(2n+1)^s.\sqrt{3}}{\sqrt{n.(n+1).2s\pi}}.c^{-\frac{\frac{3}{2}l^2}{n.(n+1).s}}.$$

C'est la valeur cherchée du coefficient de $a^{\pm l}$ dans le développement du polynome, lorque sa puissance s est très-élevée.

Cherchons maintenant la somme de tous ces coefficiens, depuis celui de a^{-l} inclusivement, jusqu'à celui de a^{l} inclusivement, l étant un grand nombre, mais d'un ordre inférieur à s. Pour cela, nous observerons que l'on a par le n° 10,

$$\Sigma . y_l = \frac{1}{c^{\frac{dy_l}{dl}} - 1} = \frac{1}{\frac{dy_l}{dl} \cdot \left\{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{dy_l}{dl} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{dy_l}{dl}\right)^2 + \text{etc.}\right\}}$$
$$= \left(\frac{dy_l}{dl}\right)^{-1} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dy_l}{dl}\right)^0 + \frac{1}{12} \cdot \frac{dy_l}{dl} + \text{etc.};$$

d'où l'on tire par le numéro cité,

$$\Sigma . y_l = \int y_l . dl - \frac{1}{2} . y_l + \frac{1}{12} . \frac{dy_l}{dl} + \text{etc.} + \text{constante.}$$

En prenant l'intégrale depuis le terme correspondant à l nul inclusivement, on aura la somme des valeurs de y_l depuis cette origine jusqu'au terme y_l exclusivement. La constante arbitraire sera égale alors à $\frac{1}{2} . y_0 - \frac{1}{12} . \frac{dy_0}{dl}$ — etc.; ainsi la somme des valeurs de y_l, depuis l nul inclusivement jusqu'à y_l inclusivement, sera

$$\int y_l . dl + \frac{1}{2} . y_0 + \frac{1}{2} . y_l + \frac{1}{12} . \frac{dy_l}{dl} - \frac{1}{12} . \frac{dy_0}{dl} + \text{etc.}$$

Supposons maintenant

$$y_l = \frac{(2n+1)^s . \sqrt{3}}{\sqrt{n.(n+1).2s\pi}} . c^{-\frac{\frac{3}{2} l^2}{n.(n+1).s}};$$

alors les différences de y_l seront successivement d'un ordre inférieur les unes aux autres; en ne considérant donc que les trois premiers termes de la série précédente, on aura

$$\int y . dl + \frac{1}{2} . y_0 + \frac{1}{2} . y_l$$

pour la somme des coefficiens des termes du développement de la puissance s du polynome, depuis l nul inclusivement jusqu'à y_l inclusivement. En doublant cette somme, et en retranchant de ce double, le terme y_0, on aura pour la somme des coefficiens, depuis celui du terme correspondant à a^{-l} inclusivement, jusqu'à celui du terme correspondant à a^{l} inclusivement,

$$\frac{(2n+1)^{s}.\sqrt{6}}{\sqrt{n.(n+1).s\pi}}.\left(\int dl.c^{-\frac{\frac{3}{2}l^2}{n.(n+1)s}}+\frac{1}{2}.c^{-\frac{\frac{3}{2}l^2}{n.(n+1).s}}\right).$$

37. Nous avons supposé dans les exemples précédens, que les équations aux différences en y_i, n'avaient point de dernier terme; donnons un exemple d'une équation jouissant d'un dernier terme, et pour cela, considérons l'équation aux différences

$$p^i = s.y_i + (s-i).y_{i+1}.$$

En faisant

$$y_i = \int x^{s-1}.\phi dx,$$

on aura

$$p^i = x^s.\phi.(1+x) - \int x^s.[(x+1).d\phi + (i+1).\phi dx];$$

ce qui donne d'abord pour déterminer ϕ, l'équation

$$(1+x).d\phi + (i+1).\phi dx = 0;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\phi = \frac{A}{(1+x)^{i+1}},$$

A étant une constante arbitraire. Ensuite on a

$$p^i = x^s.\phi.(1+x),$$

ou

$$p^i = \frac{A.x^s}{(1+x)^i};$$

d'où l'on tire

$$x = p, \quad A = (1+p)^s;$$

ensorte que

$$y_i = (1+p)^i.\int\frac{x^{s-1}.dx}{(1+x)^{i+1}},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=p$. En ajoutant à cette valeur de y_i, celle-ci

$$B.(1+p)^i.\int\frac{x^{s-1}dx}{(1+x)^{i+1}},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et B étant une arbitraire; on aura pour l'intégrale complète de la proposée

$$y_s = B.\int\frac{x^{s-1}.dx}{(1+x)^{i+1}} + (1+p)^i.\int\frac{x^{s-1}.dx}{(1+x)^{i+1}},$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme

$$y_s = B'.\int\frac{x^{s-1}.dx}{(1+x)^{i+1}} - (1+p)^i.\int\frac{x^{s-1}.dx}{(1+x)^{i+1}},$$

la première intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et la seconde étant prise depuis $x=p$ jusqu'à x infini.

Maintenant, l'intégrale de la proposée

$$p^s = s.y_s + (s-i).y_{s+1}$$

est

$$y_s = \frac{1.2.3\ldots.(s-1)}{i.(i-1).(i-2)\ldots.(i-s+1)}.\left(Q - \Sigma.\frac{i.(i-1).(i-2)\ldots(i-s+1)}{1.2.3\ldots.s}.p^s\right),$$

Q étant une arbitraire, et Σ étant la caractéristique des différences finies; ensorte que la fonction $\Sigma.\frac{i.(i-1).(i-2)\ldots\ldots(i-s+1)}{1.2.3\ldots.s}.p^s$ est égale à

$$1 + ip + \frac{i.(i-1)}{1.2}.p^2\ldots. + \frac{i.(i-1).(i-2)\ldots.(i-s+2)}{1.2.3\ldots(s-1)}.p^{s-1},$$

c'est-à-dire, à la somme des s premiers termes du binome $(1+p)^i$. Si l'on compare cette expression de y_s à la précédente, on aura

$$B'.\int\frac{x^{s-1}.dx}{(1+x)^{i+1}} - (1+p)^i.\int\frac{x^{s-1}.dx}{(1+x)^{i+1}}$$
$$= \frac{1.2.3\ldots.(s-1)}{i.(i-1)\ldots.(i-s+1)}.\left(Q - \Sigma.\frac{i.(i-1)\ldots.(i-s+1)}{1.2.3\ldots.s}.p^s\right).$$

Si l'on fait $s=1$ dans cette équation, et si l'on observe que le produit $1.2.3\ldots.(s-1)$ se réduit alors à l'unité, comme on l'a vu dans le n° 34; on trouve après les intégrations $B'=Q$: ainsi B' étant une arbitraire, cette équation se partage dans les deux suivantes,

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(s-1)}{i.(i-1)\ldots.(i-s+1)} = \int\frac{x^{s-1}.dx}{(1+x)^{i+1}},$$

$$\frac{1.2.3\ldots(s-1)}{i.(i-1)\ldots(i-s+1)}.\Sigma.\frac{i.(i-1)\ldots(i-s+1)}{1.2.3\ldots s}.p^s = (1+p)^i.\int\frac{x^{s-1}.dx}{(1+x)^{i+1}};$$

d'où l'on tire

$$1+ip+\frac{i.(i-1)}{1.2}.p^2\ldots\ldots+\frac{i.(i-1)\ldots.(i-s+2)}{1.2.3\ldots(s-1)}.p^{s-1}=(1+p)^i.\frac{\int\frac{x^{s-1}.dx}{(1+x)^{i+1}}}{\int\frac{x^{s-1}.dx}{(1+x)^{i+1}}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x=p$ jusqu'à x infini; et celle du dénominateur étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Lorsque s et i sont de grands nombres, il sera facile de réduire ces deux intégrales en séries convergentes, par les formules des n^{os} 22 et 23. On aura ainsi la somme de s premiers termes du binome élevé à une grande puissance, par une approximation d'autant plus rapide, que cette puissance sera plus haute.

Si l'on effectue les intégrations, l'équation précédente devient

$$1+ip+\frac{i.(i-1)}{1.2}.p^2\ldots.+\frac{i.(i-1).(i-2)\ldots.(i-s+2)}{1.2.3\ldots(s-1)}.p^{s-1}$$

$$=(1+p)^{i-1}.\left\{\begin{array}{l}1+\frac{(i-s+1)}{1}.\frac{p}{1+p}+\frac{(i-s+1).(i-s+2)}{1.2}.\frac{p^2}{(1+p)^2}\\ \ldots.+\frac{(i-s+1)\ldots.(i-1)}{1.2.3\ldots.(s-1)}.\frac{p^{s-1}}{(1+p)^{s-1}}\end{array}\right\}.$$

Le second membre de cette équation est une transformation de la somme partielle des termes du binome $(1+p)^i$, transformation qui peut être utile.

De l'approximation des différences infiniment petites et finies, très-élevées, des fonctions.

38. Considérons une fonction quelconque de z, que nous représenterons par $\varphi(z)$. En y changeant z en $z+t$, désignons par y_s le coefficient de t^s dans le développement de cette fonction; nous aurons

$$\frac{d^s.\varphi(z+t)}{dt^s}=1.2.3\ldots.s.y_s,$$

t étant supposé nul après les différentiations; et comme on a $\frac{d.\varphi(z+t)}{dt}=\frac{d.\varphi(z)}{dz}$, en supposant t nul; on aura

$$\frac{d^s.\varphi(z)}{dz^s}=1.2.3\ldots s.y_s.$$

Ainsi la recherche de la différence $s^{ième}$ de $\varphi(z)$, se réduit à développer la fonction $\varphi(z+t)$ en série.

Supposons que cette fonction de t soit une puissance d'un polynôme de t, que nous représenterons par

$$(a+bt+ct^2+\text{etc.})^\mu.$$

En exprimant par

$$y_0+y_1.t+y_2.t^2\ldots\ldots+y_s.t^s+\text{etc.},$$

son développement en série; on aura, en prenant les différences logarithmiques,

$$\frac{\mu.(b+2ct+\text{etc.})}{a+bt+ct^2+\text{etc.}}=\frac{y_1+2y_2.t\ldots\ldots+sy_s.t^{s-1}+\text{etc.}}{y_0+y_1.t+y_2.t^2\ldots\ldots+y_s.t^s+\text{etc.}}.$$

Multipliant en croix, et comparant les termes multipliés par t^{s-1}, on aura

$$\begin{aligned}a.s.y_s+b.(s-1).y_{s-1}+c.(s-2).y_{s-2}+\text{etc.}\\ =\mu.b.y_{s-1}+2\mu.c.y_{s-2}+\text{etc.}\end{aligned}$$

Représentons par $\int x^{s-1}\varphi.dx$, l'expression de y_s; cette équation devient

$$0=x^s.\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\text{etc.}\right).\varphi-\int x^s.\left\{\begin{aligned}&d\varphi.\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\text{etc.}\right)\\&+\mu\varphi dx.\left(\frac{b}{x^2}+\frac{2c}{x^3}+\text{etc.}\right)\end{aligned}\right\}.$$

En égalant séparément à zéro, la partie de cette équation, affectée du signe intégral, on a

$$0=d\varphi.\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\text{etc.}\right)+\mu\varphi dx.\left(\frac{b}{x^2}+\frac{2c}{x^3}+\text{etc.}\right);$$

ce qui donne en intégrant,

$$\varphi=A.\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\text{etc.}\right)^\mu,$$

A étant une constante arbitraire. La partie de l'équation précédente, hors du signe intégral, donnera ensuite pour déterminer les limites de l'intégrale,

$$0=x^s.\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\text{etc.}\right)^{\mu+1};$$

ces

ces limites sont donc $x = 0$, et x égal aux diverses racines de l'équation

$$0 = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \text{etc.}$$

On aura donc par les méthodes précédentes, et par une approximation très-prompte, les coefficiens des puissances très-élevées de t, dans le développement en série de la puissance

$$(a + bt + ct^2 + \text{etc.})^{\mu},$$

et par conséquent on aura les différentielles très-élevées de la puissance

$$(a' + b'z + c'z^2 + \text{etc.})^{\mu},$$

qui se change dans la précédente, en changeant z dans $z+t$, et faisant

$$\begin{aligned} a &= a' + b'z + c'z^2 + \text{etc.}, \\ b &= b' + 2c'z + \text{etc.}, \\ c &= c' + \text{etc.}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Appliquons cette analyse à un exemple.

z étant le sinus d'un angle θ, on aura

$$\frac{d^{s+1}.\theta}{dz^{s+1}} = \frac{d^s}{dz^s}.\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Pour avoir l'expression du second membre de cette équation, nous observerons que l'on a, par ce qu'on vient de voir,

$$\frac{d^s}{dz^s}.\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1.2.3\ldots s.y_s,$$

y_s étant le coefficient de t^s dans le développement de $[1-(z+t)^2]^{-\frac{1}{2}}$. On aura ensuite

$$y_s = A.\int x^{s-1}.dx.\left[1 - \left(z + \frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

les limites de l'intégrale étant données par l'équation

$$x^s.\left[1 - \left(z + \frac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ces limites sont

$$x=-\frac{1}{1+z},\quad x=0,\quad x=\frac{1}{1-z}.$$

Comme x a trois valeurs, l'expression de y_i prend cette forme, par le n° 29,

$$y_i=A.\int x^{i-1}.dx.\left[1-\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}+A'\int x^{i-1}.dx.\left[1-\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

A et A' étant des constantes arbitraires, et la première intégrale étant prise depuis $x=-\frac{1}{1+z}$ jusqu'à $x=0$, et la seconde étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{1-z}$. Si l'on fait

$$x=\frac{z+\cos\varpi}{1-z^2}.$$

L'expression précédente de y_i devient

$$y_i=B.\int\frac{d\varpi.(z+\cos\varpi)^i}{(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}+B'.\int\frac{d\varpi.(z+\cos\varpi)^i}{(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}},$$

la première intégrale étant prise depuis $\varpi=0$ jusqu'à ϖ égal à l'angle dont le cosinus est $-z$, et la seconde étant prise depuis ce dernier angle jusqu'à $\varpi=\pi$. Pour déterminer les arbitraires B et B', on observera que

$$y_0=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\quad y_1=\frac{z}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où il est facile de conclure

$$B=B'=\frac{1}{\pi};$$

partant

$$y_i=\frac{1}{\pi.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}.\int d\varpi.(z+\cos\varpi)^i,$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=\pi$. En prenant cette intégrale, et observant que

$$\int d\varpi.\cos^{2r}.\varpi=\frac{1}{2^{2r}}.\int d\varpi.(c^{\varpi\sqrt{-1}}+c^{-\varpi\sqrt{-1}})^{2r}$$
$$=\frac{1.2.3.\ldots.2r}{2^{2r}.(1.2.3.\ldots.r)^2}.\pi=\frac{1.3.5.\ldots.(2r-1)}{2.4.6.\ldots.2r}.\pi;$$

on aura

$$y_s = \frac{1}{(1-z^2)^{s+\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} z^s + \frac{1}{2} \cdot \frac{s.(s-1)}{1.2} . z^{s-2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{s.(s-1).(s-2).(s-3)}{1.2.3.4} . z^{s-4} \\ + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{s.(s-1).(s-2).(s-3).(s-4).(s-5)}{1.2.3.4.5.6} . z^{s-6} + \text{etc.} \end{array} \right\}; (a)$$

cette expression est fort composée, lorsque s est un grand nombre; mais alors on peut obtenir sa valeur d'une manière fort approchée, en appliquant à l'expression de y_s sous forme d'intégrale définie, les méthodes exposées ci-dessus. La fonction sous le signe intégral ayant deux *maxima*, l'un à l'origine de l'intégrale, et l'autre à son extrémité, nous la décomposerons dans les deux suivantes,

$$y_s = \frac{1}{\varpi(1-z^2)^{s+\frac{1}{2}}} . [\int d\varpi . (z + \cos\varpi)^s + (-1)^s . \int d\varpi . (\cos\varpi - z)^s];$$

la première intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à ϖ égal à l'angle dont le cosinus est $-z$, et la seconde intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à ϖ égal à l'angle dont z est le cosinus. Soit $\frac{1}{s} = \alpha$, et faisons

$$(z + \cos\varpi)^s = (1+z)^s . c^{-t^2};$$

on aura en prenant les logarithmes et réduisant $\cos\varpi$ en série,

$$\log\left(1 - \frac{\varpi^2}{2.(1+z)} + \frac{\varpi^4}{24.(1+z)} - \text{etc.}\right) = -\alpha t^2;$$

d'où il est facile de conclure

$$\varpi = \alpha^{\frac{1}{2}} t . \sqrt{2.(1+z)} . \left(1 - \frac{\alpha.(2-z)}{12} . t^2 + \text{etc.}\right);$$

on aura ainsi, en observant que l'intégrale doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini,

$$\int d\varpi . (z + \cos\varpi)^s = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} . \sqrt{2\pi}}{2} . (1+z)^{s+\frac{1}{2}} . \left(1 - \frac{\alpha.(2-z)}{8} + \text{etc.}\right).$$

En changeant z dans $-z$, on aura

$$\int d\varpi . (\cos\varpi - z)^s = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} . \sqrt{2\pi}}{2} . (1-z)^{s+\frac{1}{2}} . \left(1 - \frac{\alpha.(2+z)}{8} + \text{etc.}\right);$$

partant

$$y_s = \frac{1}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}}.\sqrt{2s\pi}}.\left(1-\frac{\alpha.(2-z)}{8}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{(-1)^s}{(1+z)^{s+\frac{1}{2}}.\sqrt{2s\pi}}.\left(1-\frac{\alpha.(2+z)}{8}+\text{etc.}\right); \quad (b)$$

dans le cas de s très-grand, cette expression se réduit à fort peu près à ce terme très-simple,

$$\frac{1}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}}.\sqrt{2s\pi}}.$$

Si l'on multiplie l'expression (b) de y_s par le produit $1.2.3\ldots s$, produit qui par le n° 33, est égal à

$$s^{s+\frac{1}{2}}.c^{-s}.\sqrt{2\pi}.\left(1+\frac{\alpha}{12}+\text{etc.}\right);$$

on aura à très-peu près

$$\frac{d^{s+1}.\theta}{dz^{s+1}} = \frac{d^s.\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}}{dz^s} = \frac{s^s.c^{-s}}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}}};$$

39. Lorsqu'une fonction y_s de s peut être exprimée par une intégrale définie de la forme $\int x^s.\varphi dx$, les différences infiniment petites et finies d'un ordre quelconque n, seront par le n° 21,

$$\frac{d^n.y_s}{ds^n} = \int x^s.\varphi dx.(\log x)^n,$$

$$\Delta^n.y_s = \int x^s.\varphi dx.(x-1)^n.$$

Si au lieu d'exprimer la fonction de s, par l'intégrale $\int x^s.\varphi dx$, on l'exprime par l'intégrale $\int c^{-sx}.\varphi dx$, alors on a

$$\frac{d^n.y_s}{ds^n} = (-1)^n.\int x^n.\varphi dx.c^{-sx},$$
$$\Delta^n.y_s = \int\varphi dx.c^{-sx}.(c^{-x}-1)^n.$$

Pour avoir les intégrales $n^{\text{ièmes}}$, soit finies, soit infiniment petites, il suffira de faire n négatif dans ces expressions. On peut observer qu'elles sont généralement vraies, quel que soit n, en le supposant même fractionnaire ; ce qui donne le moyen d'avoir les différences et les intégrales correspondantes à des indices fractionnaires. Toute la difficulté se réduit à mettre sous la forme d'intégrales définies, une fonction de s; ce que l'on peut faire par les nos 29 et 30, lorsque cette fonction est donnée par une équation linéaire aux différences infiniment petites ou finies. Comme on est principalement conduit dans l'analyse des hasards, à des expressions qui ne sont que les différences finies des fonctions, ou une partie de ces différences; nous allons y appliquer les méthodes précédentes, et déterminer leurs valeurs en séries convergentes.

40. Considérons d'abord la fonction $\frac{1}{s^i}$. En la désignant par y_s, elle sera déterminée par l'équation aux différences infiniment petites

$$0 = s.\frac{dy_s}{ds} + i.y_s.$$

Si l'on suppose dans cette équation,

$$y_s = \int c^{-sx}.\varphi dx, \quad c^{-sx} = \delta y,$$

elle deviendra

$$0 = \int \varphi dx.\left(i.\delta y + x.\frac{d\delta y}{dx}\right);$$

d'où l'on tire en intégrant par parties, conformément à la méthode du n° 29, les deux équations

$$0 = i\varphi - \frac{d.(x\varphi)}{dx},$$

$$0 = x\varphi.\delta y.$$

La première donne en l'intégrant,

$$\varphi = A.x^{i-1},$$

A étant une arbitraire. La seconde équation donne pour les limites de l'intégrale $\int c^{-sx}.\varphi dx$, $x = 0$ et $x = \infty$. On aura donc dans ces limites,

$$\frac{1}{s^i} = A.\int x^{i-1} dx.c^{-sx}.$$

Pour déterminer la constante A, nous observerons que s étant 1, le premier membre de cette équation se réduit à l'unité; ce qui donne

$$A=\frac{1}{\int x^{i-1}dx.c^{-x}};$$

partant

$$\frac{1}{s^i}=\frac{\int x^{i-1}dx.c^{-sx}}{\int x^{i-1}dx.c^{-x}}:$$

on aura donc par le numéro précédent

$$\Delta^n.\frac{1}{s^i}=\frac{\int x^{i-1}.dx.c^{-sx}.(c^{-x}-1)^n}{\int x^{i-1}dx.c^{-x}}, \quad (\mu)$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis x nul jusqu'à x infini.

Pour développer cette expression en série, supposons

$$x^{i-1}.c^{-sx}.(c^{-x}-1)^n=a^{i-1}.c^{-sa}.(c^{-a}-1)^n.c^{-t^2},$$

a étant la valeur de x qui répond au *maximum* du premier membre de cette équation. Si l'on fait $x=a+\theta$, on aura, en prenant les logarithmes de chaque membre, et en développant le logarithme du premier, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de θ,

$$h.\theta^2+h'.\theta^3+h''.\theta^4+\text{etc.}=t^2;$$

les quantités a, h, h', h'', etc. étant données par les équations suivantes :

$$0=\frac{i-1}{a}-s-\frac{n.c^{-a}}{c^{-a}-1},$$

$$h=\frac{i-1}{2a^2}-\frac{n}{2}.\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}+\frac{n}{2}.\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^2,$$

$$h'=-\frac{i-1}{3a^3}+\frac{n}{6}.\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}-\frac{n}{2}.\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^2+\frac{n}{3}.\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^3,$$

$$h''=\frac{i-1}{4a^4}-\frac{n}{24}.\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}+\frac{7n}{24}.\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^2-\frac{n}{2}.\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^3+\frac{n}{4}.\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^4,$$

etc.;

on aura donc par le retour des suites,

$$\theta=\frac{t}{\sqrt{h}}.\left(1-\frac{h't}{2h.\sqrt{h}}+\frac{(5h'^2-4hh'')}{8h^3}.t^2+\text{etc.}\right);$$

et cette suite sera d'autant plus convergente, que le nombre n sera plus considérable. En substituant cette valeur de θ dans la fonction $\int d\theta . c^{-t^2}$, et prenant l'intégrale dans les limites $t = -\infty$ et $t = \infty$, limites qui correspondent aux limites $x = 0$ et $x = \infty$, on aura

$$\int x^{i-1} dx . c^{-sx} . (c^{-x} - 1)^n$$
$$= a^{i-1} . c^{-sa} . (c^{-a} - 1)^n . \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} . \left(1 + \frac{15h'^2 - 12hh''}{16h^3} + \text{etc.}\right).$$

On a d'ailleurs

$$\int x^{i-1} dx . c^{-x} = \frac{1}{i} \int x^i dx . c^{-x};$$

et lorsque i est très-grand, on a par le n° 32,

$$\int x^i dx . c^{-x} = i^{i+\frac{1}{2}} . c^{-i} . \sqrt{2\pi} . \left(1 + \frac{1}{12i} + \text{etc.}\right);$$

en divisant donc l'une par l'autre, les deux valeurs de

$$\int x^{i-1} dx . c^{-sx} . (c^{-x} - 1)^n \quad \text{et} \quad \int x^{i-1} dx . c^{-x};$$

on aura

$$\Delta^n . \frac{1}{s^i} = \frac{\left(\frac{a}{i}\right)^{i-1} . c^{i-sa} . (c^{-a} - 1)^n}{\sqrt{2hi}} . \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{15h'^2 - 12hh''}{16h^3} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{12i} - \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Pour avoir la différence finie $n^{\text{ième}}$ de la puissance positive s^i; il suffit, par le n° 30, de changer dans cette équation i dans $-i$, et l'on aura

$$\Delta^n . s^i = (s+n)^i - n . (s+n-1)^i + \frac{n . (n-1)}{1.2} . (s+n-2)^i - \text{etc.}$$
$$= \frac{\left(\frac{i}{a}\right)^{i+1} . c^{sa-i} . (c^a - 1)^n}{\sqrt{\frac{i.(i+1)}{a^2} - ni . \frac{c^a}{(c^a - 1)^2}}} . \left(1 + \frac{15l'^2 - 12ll''}{16l^3} + \frac{1}{12i} + \text{etc.}\right); (\mu')$$

a, l, l', l'', etc. étant données par les équations

$$0=\frac{i+1}{a}-s-\frac{c}{c^a-1},$$

$$l=-\frac{i+1}{2a^2}-\frac{n}{2}\cdot\frac{c^a}{c^a-1}+\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^2,$$

$$l'=-\frac{i+1}{3a^3}+\frac{n}{6}\cdot\frac{c^a}{c^a-1}-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^2+\frac{n}{3}\cdot\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^3,$$

$$l''=-\frac{i+1}{4a^4}-\frac{n}{24}\cdot\frac{c^a}{c^a-1}+\frac{7n}{24}\cdot\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^2-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^3+\frac{n}{4}\cdot\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^4,$$

etc.

La série (μ') cesse d'être convergente, lorsque a est une très-petite fraction de l'ordre $\frac{1}{n}$; car il est visible que les quantités l, l', l'', etc., formant alors une progression croissante, chaque terme de la série est du même ordre que celui qui le précède. Pour déterminer dans quel cas a est très-petit, reprenons l'équation

$$0=\frac{i+1}{a}-s-\frac{n.c^a}{c^a-1}.$$

On peut la transformer dans la suivante, lorsque a est très-petit,

$$0=\frac{i+1}{a}-s-\frac{n}{a}\cdot\left(1+\frac{a}{2}+\text{etc.}\right);$$

d'où l'on tire à très-peu près, dans la supposition de a très-petit,

$$a=\frac{i+1-n}{s+\frac{n}{2}};$$

ainsi a sera fort petit toutes les fois que $i-n$ sera peu considérable relativement à $s+\frac{n}{2}$. Dans ce cas, on déterminera $\Delta^n.s^i$ par la méthode suivante.

Reprenons l'équation

$$\Delta^n.s^i=\frac{\int\frac{dx}{x^{i+1}}.c^{-sx}.(c^{-x}-1)^n}{\int\frac{dx}{x^{i+1}}.c^{-x}},$$

dans laquelle se change la formule (μ), lorsqu'on y fait i négatif et et égal à $-i$. On peut mettre la fonction $(c^{-x}-1)^n$ sous cette forme

$$c^{-\frac{nx}{2}}.\left(c^{-\frac{x}{2}}-c^{\frac{x}{2}}\right)^n$$

$$=(-1)^n.c^{-\frac{nx}{2}}.x^n.\left(1+\frac{1}{1.2.3}.\frac{x^2}{2^2}+\frac{1}{1.2.3.4.5}.\frac{x^4}{2^4}+\text{etc.}\right)^n$$

$$=(-1)^n.c^{-\frac{nx}{2}}.x^n.\left(1+\frac{n.x^2}{24}+\frac{n.(5n-2)}{15.16.24}.x^4+\text{etc.}\right);$$

on aura donc

$$\int\frac{dx}{x^{i+1}}.c^{-sx}.(c^{-x}-1)^n=(-1)^n.\int\frac{dx}{x^{i+1-n}}.c^{-\left(s+\frac{n}{2}\right).x}.\left(1+\frac{n.x^2}{24}+\text{etc.}\right).$$

Si l'on fait

$$\left(s+\frac{n}{2}\right).x=x',$$

on aura généralement

$$\int\frac{dx}{x^r}.c^{-\left(s+\frac{n}{2}\right).x}=\left(s+\frac{n}{2}\right)^{r-1}.\int\frac{dx'.c^{-x'}}{x'^r};$$

or on a trouvé dans le n° 33, par le passage du réel à l'imaginaire,

$$\int\frac{dx'.c^{-x'}}{x'^r}=\frac{2\pi.(-1)^{r-\frac{1}{2}}}{\int x'^{r-1}dx'.c^{-x'}}=\frac{2\pi.(-1)^{r-\frac{1}{2}}}{(r-1).(r-2).(r-3).\text{etc.}};$$

partant on aura

$$\Delta^n.s^i=(i-n+1).(i-n+2)\ldots.i.\left(s+\frac{n}{2}\right)^{i-n}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}1+(i-n).(i-n-1).\dfrac{n}{24.\left(s+\frac{n}{2}\right)^2}\\ +(i-n).(i-n-1).(i-n-2).(i-n-3).\dfrac{n.(5n-2)}{15.16.24.\left(s+\frac{n}{2}\right)^4}\\ +\text{etc.}\end{array}\right\}.\quad(\mu')$$

Cette série sera très-convergente, si $i-n$ est peu considérable relativement à $s+\frac{n}{2}$; elle peut d'ailleurs être employée dans le cas où i est fractionnaire, comme il est facile de s'en convaincre. Quant au produit $(i-n+1).(i-n+2)\ldots.i$, il est facile de l'obtenir en série convergente, par le n° 32.

La formule précédente est une application très-simple de l'équation

$$\Delta^n . y_s = \left(c^{\frac{dy_{s+\frac{n}{2}}}{ds}} - c^{-\frac{dy_{s+\frac{n}{2}}}{ds}} \right)^n$$

que nous avons donnée dans le n° 10; car en développant le second membre de cette équation, et faisant $y_s = s^i$, on obtient directement cette formule que nous avons conclue des passages du réel à l'imaginaire; ce qui confirme la justesse de ces passages.

41. Les formules (μ') et (μ'') des numéros précédens, supposent n égal ou moindre que i. En effet, si l'on considère l'expression

$$\Delta^n . s^i = \frac{\int \frac{dx . c^{-sx}}{x^{i+1}} . (c^{-x} - 1)^n}{\int \frac{dx . c^{-x}}{x^{i+1}}},$$

dont le développement a produit ces formules; on voit que les limites des intégrales du numérateur et du dénominateur étant déterminées par le numéro précédent, en égalant à zéro le produit des quantités sous le signe intégral, par x; ces limites seront toutes imaginaires, lorsque i sera plus grand que n; au lieu que dans le cas où i sera moindre que n, les limites de l'intégrale du numérateur seront réelles, tandis que celles du dénominateur seront imaginaires; il faut donc alors ramener ces dernières limites à l'état réel. Pour y parvenir, nous observerons que l'on a généralement

$$\int x^{i-1} dx . c^{-x} = \frac{\int x^{i+r} dx . c^{-x}}{i . (i+1) . (i+2) \ldots . (i+r)}.$$

Si l'on fait dans cette expression, i négatif et égal à $-r-\frac{m}{n}$, m étant moindre que n; on aura

$$\int \frac{dx . c^{-x}}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{r+1} . \int x^{-\frac{m}{n}} dx . c^{-x}}{\frac{m}{n} . \left(1+\frac{m}{n}\right) . \left(2+\frac{m}{n}\right) \ldots . i};$$

or on a par le n° 32, les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à

x infini,

$$\left(1+\frac{m}{n}\right).\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots\ldots i=\frac{\int x^{i}dx\,.\,c^{-x}}{\int x^{\frac{m}{n}}dx\,.\,c^{-x}},$$

i étant ici positif: c'est l'expression de $\int\frac{dx.c^{-x}}{x^{i+1}}$ dont on doit faire usage dans le cas que nous examinons ici. Si l'on fait $x=t^{n}$, on aura

$$\frac{n}{m}.\int x^{-\frac{m}{n}}dx\,.\,c^{-x}.\int x^{\frac{m}{n}}dx.c^{-x}=n^{2}\int t^{n-m-1}dt.c^{-t^{n}}.\int t^{m-1}dt.c^{-t^{n}};$$

et l'équation (T) du n° 24 donne, en y changeant r dans $m+1$,

$$n^{2}.\int t^{n-m-1}dt.c^{-t^{n}}.\int t^{m-1}dt.c^{-t^{n}}=\frac{\pi}{\sin\frac{m}{n}.\pi};$$

on aura donc

$$\int\frac{dx.c^{-x}}{x^{i+1}}=\frac{(-1)^{r+1}.\pi}{\sin\frac{m}{n}.\pi.\int x^{i}dx.c^{-x}};$$

d'où l'on tire, en substituant cette valeur dans l'expression précédente de $\Delta^{n}.s^{i}$,

$$\Delta^{n}.s^{i}=\frac{(-1)^{r+1}.\sin\frac{m\pi}{n}}{\pi}.\int x^{i}dx\,.\,c^{-x}.\int\frac{dx}{x^{i+1}}.c^{-sx}.(c^{-x}-1)^{n};\qquad(\mu''')$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini.

Le procedé qui vient de nous conduire à cette équation, est fondé sur les passages réciproques du réel à l'imaginaire; mais on peut y parvenir directement par l'analyse suivante qui confirmera ainsi la justesse de ces passages.

Si l'on prend l'intégrale $\int\frac{dx.c^{-sx}}{x^{i+1}}$ depuis $x=\alpha$ jusqu'à x infini; on aura, en faisant $i=r+\frac{m}{n}$, la fonction

$$\frac{(-1)^r . c^{-s\alpha}}{\frac{m}{n}.\left(1+\frac{m}{n}\right).\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i.\alpha^{\frac{m}{n}}} . \left\{ \begin{array}{l} s^r - \frac{m}{n} . \frac{s^{r-1}}{\alpha} + \frac{m}{n} . \left(1+\frac{m}{n}\right) . \frac{s^{r-2}}{\alpha^2} - \text{etc.} \\ \ldots + (-1)^r . \frac{m}{n} . \left(1+\frac{m}{n}\right) . \left(2+\frac{m}{n}\right) \ldots i . \frac{1}{\alpha^r} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{(-1)^{r+1} . s^{r+1}}{\frac{m}{n} . \left(1+\frac{m}{n}\right) . \left(2+\frac{m}{n}\right) \ldots i} . \int \frac{dx . c^{-sx}}{x^{\frac{m}{n}}};$$

or on a généralement, lorsque α est infiniment petit,

$$\frac{\Delta . c^{-s\alpha} . s^{r-f}}{\alpha^f} = 0,$$

f étant zéro ou un nombre entier positif; car si l'on développe $c^{-s\alpha}$ en série, et que l'on désigne par $k . \alpha^q . s^q$ un terme quelconque de cette série, on aura

$$k . \alpha^{q-f} . \Delta^n . s^{q+r-f} = 0.$$

En effet, si q surpasse f, ce terme devient nul par la supposition de α infiniment petit. Si q est égal ou moindre que f, $q + r - f$ sera égal ou moindre que r, et par conséquent, il sera plus petit que n; et alors, par la propriété connue des différences finies, $\Delta^n . s^{q+r-f}$ sera nul. Il suit de là que $\Delta^n . \int \frac{dx . c^{-sx}}{x^{i+1}}$, ou $\int \frac{dx . c^{-sx} . (c^{-x} - 1)^n}{x^{i+1}}$ se réduit à

$$\frac{(-1)^{r+1} . \Delta^n . s^{r+1} . \int \frac{dx . c^{-sx}}{x^{\frac{m}{n}}}}{\frac{m}{n} . \left(1+\frac{m}{n}\right) . \left(2+\frac{m}{n}\right) \ldots i},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Si l'on fait $x = \frac{x'}{s}$, on aura

$$\int \frac{dx . c^{-sx}}{x^{\frac{m}{n}}} = s^{\frac{m}{n} - 1} . \int \frac{dx' . c^{-x'}}{x'^{\frac{m}{n}}};$$

les intégrales étant prises depuis x et x' nuls jusqu'à x et x' infinis;

on aura donc

$$\int \frac{dx.c^{-ix}.(c^{-x}-1)^n}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{n+1}.\int \frac{dx'.c^{-x'}}{x'^{\frac{m}{n}}}.\Delta^n.s^i}{\frac{m}{n}.\left(1+\frac{m}{n}\right).\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i}.$$

En substituant pour $\left(1+\frac{m}{n}\right).\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i$, sa valeur $\frac{\int x^i dx.c^{-x}}{\int x^{\frac{m}{n}} dx.c^{-x}}$;

et observant que l'on a par ce qui précède,

$$\frac{n}{m}.\int x'^{-\frac{m}{n}} dx'.c^{-x'}.\int x^{\frac{m}{n}} dx.c^{-x} = \frac{\pi}{\sin\frac{m}{n}.\pi},$$

on aura la formule (μ''').

Si i est un très-grand nombre, on aura par le n° 32, l'intégrale $\int x^i dx.c^{-x}$; on aura ensuite par ce qui précède, l'intégrale $\int \frac{dx.c^{-ix}.(c^{-x}-1)^n}{x^{i+1}}$; ainsi l'on obtiendra, par une série très-convergente, la valeur du second membre de la formule citée.

Supposons i infiniment petit, r sera nul, et $\frac{m}{n}$ sera une fraction infiniment petite, on aura donc

$$\sin\frac{m}{n}.\pi = \frac{m}{n}.\pi = i\pi,$$

$$\Delta^n.\left(\frac{s^i-1}{i}\right) = \Delta^n.\log s;$$

la formule (μ''') donnera ainsi

$$\Delta^n.\log s = -\int \frac{c^{-ix}dx}{x}.(c^{-x}-1)^n,$$

expression que l'on réduira facilement en série convergente, lorsque n est un grand nombre.

42. On a souvent besoin, dans l'analyse des hasards, de ne considérer dans l'expression de $\Delta^n.s^i$, que la partie dans laquelle les quantités élevées à la puissance i sont positives. Nous allons déterminer la somme de tous ces termes. Pour cela, reprenons

la formule (μ''') du numéro précédent. Si l'on y substitue au lieu de $\Delta^n . s^i$, sa valeur

$$(s+n)^i - n.(s+n-1)^i + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(s+n-2)^i - \text{etc.};$$

et si l'on y change ensuite s dans $-s$; on aura, en ne continuant les deux séries du premier membre de l'équation suivante, que jusqu'aux termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance i, devient négative, et observant que le signe $+$ a lieu, si n est pair, et le signe $-$, si n est impair,

$$\begin{aligned}
&(1)^i . \left[(n-s)^i - n.(n-s-1)^i + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(n-s-2)^i - \text{etc.}\right] \\
&\pm(-1)^i . \left[s^i - n.(s-1)^i + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(s-2)^i - \text{etc.}\right] \\
&= \frac{(-1)^{r+1}}{\pi}.\sin\frac{m\pi}{n}.\int x^i\, dx . c^{-x} . \int \frac{dx}{x^{i+1}} . c^{sx} . (c^{-x}-1)^n.
\end{aligned}$$

Si l'on change dans la dernière intégrale, x en $-2x'.\sqrt{-1}$, elle devient, après toutes les réductions,

$$2^{n-i}.(-1)^{\frac{n+i}{2}}.\int x'^{n-i-1}.dx'.[\cos(2s-n).x' - \sqrt{-1}.\sin(2s-n).x'].\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n;$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis x' nul jusqu'à x' infini. On aura donc

$$\begin{aligned}
&(1)^i . \left[(n-s)^i - n.(n-s-1)^i + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(n-s-2)^i - \text{etc.}\right] \\
&\pm(-1)^i . \left[s^i - n.(s-1)^i + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(s-2)^i - \text{etc.}\right] \qquad (o \\
&= \frac{(-1)^{r+1}}{\pi}.2^{n-i}.(-1)^{\frac{n+i}{2}}.\sin\frac{m\pi}{n}.\int x^i dx . c^{-x} . \int x'^{n-i-1} . dx' \\
&\times [\cos(2s-n).x' - \sqrt{-1}.\sin(2s-n).x'].\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n.
\end{aligned}$$

Supposons $r = n-1$, ce qui donne $i = n - 1 + \frac{m}{n}$, et comparons séparément les parties réelles et les parties imaginaires de l'équation précédente. On a

$$(1)^i = (1)^{n-1}.(1)^{\frac{m}{n}} = 1^{\frac{m}{n}};$$

or on a

$$1 = \cos 2l\pi + \sqrt{-1}.\sin 2l\pi,$$

l étant un nombre entier ; on aura donc

$$(1)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{2\,lm\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{2lm\pi}{n}.$$

Les valeurs correspondantes de $(-1)^{\frac{m}{n}}$ sont

$$\cos(2l+1).\frac{m\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin(2l+1).\frac{m\pi}{n}.$$

Maintenant $(1)^i$ devant être supposé égal à l'unité, dans l'équation (o), il faut choisir l de manière que $\cos\frac{2\,lm\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{2\,lm\pi}{n}$ soit 1, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{2lm\pi}{n} = 2f\pi,$$

f étant un nombre entier que nous pouvons supposer nul ; alors on a

$$(-1)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{m\pi}{n};$$

mais on a

$$\pm(-1)^i = \pm(-1)^{n-1+\frac{m}{n}} = -(-1)^{\frac{m}{n}};$$

la partie imaginaire du premier membre de l'équation (o) est donc

$$-\sqrt{-1}.\sin\frac{m\pi}{n}.\left[s^i - n.(s-1)^i + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(s-2)^i - \text{etc.}\right].$$

Déterminons la partie imaginaire du second membre de l'équation (o). On a

$$(-1)^{r+n-1} = (-1)^{2n-2} = 1;$$

on a ensuite

$$(-1)^{\frac{n+i}{2}+r+1} = -\sqrt{-1}.(-1)^{\frac{m}{2n}}$$

à cause de $r = n - 1$ et de $i = n - 1 + \frac{m}{n}$; or on a par ce qui précède,

$$(-1)^{\frac{m}{2n}} = \cos\frac{m\pi}{2n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{m\pi}{2n};$$

on aura donc, pour la partie imaginaire du second membre de l'équation (o),

$$-2^{n-i}.\sqrt{-1}.\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\pi}.\int dx'.x'^{-\frac{m}{n}}.\cos\left[(2s-n).x'-\frac{m\pi}{2n}\right].\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n.\int x^i dx.c^{-x}.$$

Si l'on égale cette fonction à la partie imaginaire du premier membre de cette équation; si l'on observe de plus que

$$\int x^i dx.c^{-x} = \left(1+\frac{m}{n}\right).\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i.\int x^{\frac{m}{n}}.dx.c^{-x}$$
$$= \left(1+\frac{m}{n}\right).\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i.nk,$$

en faisant $k=\int t^{n+m-1}\,dt.c^{-t^n}$, l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini; enfin, si l'on suppose $2s-n=z$; on aura

$$\frac{(n+z)^{n-1+\frac{m}{n}} - n.(n+z-2)^{n-1+\frac{m}{n}} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(n+z-4)^{n-1+\frac{m}{n}} - \text{etc.}}{\left(1+\frac{m}{n}\right).\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots\ldots\left(n-1+\frac{m}{n}\right)}$$
$$= \frac{nk.2^n}{\pi}.\int x'^{-\frac{m}{n}}.dx'.\cos\left(zx'-\frac{m}{2n}\right).\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n. \qquad (p)$$

Dans le premier membre de cette formule, la série doit être continuée jusqu'à ce que l'on arrive à une quantité négative élevée à la puissance $n-1+\frac{m}{n}$, z ne surpassant point n; dans le second membre, l'intégrale doit être prise depuis x' nul jusqu'à x' infini.

La comparaison des parties réelles des deux membres de l'équation (o) conduit au même résultat; et d'ailleurs, elle prouve que pour la coïncidence des deux résultats tirés de la comparaison des quantités réelles entre elles et des quantités imaginaires entre elles, il est nécessaire de supposer, comme nous l'avons fait, $f=0$.

On

On peut encore parvenir à la formule (p), au moyen de l'équation suivante,

$$i.[\varphi(z+2,n)-\varphi(z,n)]=(n+z+2).\varphi'(z+2,n)+(n-z).\varphi'(z,n),$$

$\varphi'(z,n)$ étant le coefficient de dz dans la différentielle de $\varphi(z,n)$, et $\varphi(z,n)$ étant égal à

$$(n+z)^i-n.(n+z-2)^i+\frac{n.(n-1)}{1.2}.(n+z-4)^i-\text{etc.};$$

tous les termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance i est négative, devant être rejetés, et z ne surpassant point n, ensorte que la quantité élevée à la puissance i, ne surpasse jamais $2n$. En résolvant cette équation aux différences infiniment petites et finies, par la méthode du n° 30, et déterminant convenablement les constantes arbitraires, on parvient à la formule (p).

Nous allons maintenant donner quelques applications de cette formule, qui vont nous conduire à plusieurs théorèmes curieux d'analyse.

Supposons m nul, alors on a

$$k=\int t^{n+m-1}dt.c^{-t^n}=\frac{1}{n};$$

la formule (p) devient ainsi

$$\frac{(n+z)^{n-1}-n.(n+z-2)^{n-1}+\frac{n.(n-1)}{1.2}.(n+z-4)^{n-1}-\text{etc.}}{1.2.3\ldots\ldots(n-1).2^n}$$
$$=\frac{\int dx'.\cos zx'.\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n}{\pi},$$

on a

$$\log\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n=n.\log\left(1-\frac{1}{6}x'^2+\frac{1}{120}x'^4-\text{etc.}\right);$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n=c^{-\frac{n}{6}.x'^2}.\left(1-\frac{nx'^4}{180}+\text{etc.}\right);$$

on aura donc, par le n° 26, en faisant $z=r\sqrt{n}$,

$$\frac{\int dx'.\cos zx'.\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n}{\pi}=\sqrt{\frac{3}{2n\pi}}.c^{-\frac{3}{2}r^2}.\left[1-\frac{3}{20.n}.(1-6r^2+3r^4)+\text{etc.}\right]$$
$$=\frac{(n+r\sqrt{n})^{n-1}-n.(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1}+\frac{n.(n-1)}{1.2}.(n+r\sqrt{n}-4)^{n-1}-\text{etc.}}{1.2.3\ldots.(n-1).2^n};\quad (q)$$

la série de ce dernier membre devant être arrêtée aux puissances des quantités négatives.

En différentiant cette équation par rapport à r, on aura, avec la condition de l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$\frac{n}{1.2.3\ldots n-2.2^n}.\left[(n+r\sqrt{n})^{n-2}-n.(n+r\sqrt{n}-2)^{n-2}+\frac{n.(n-1)}{1.2}.(n+r\sqrt{n}-4)^{n-2}-\text{etc.}\right]$$
$$=-3r.\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.c^{-\frac{3}{2}r^2}.\left[1-\frac{3}{20.n}.(5-10r^2+3r^4)+\text{etc.}\right]$$

En continuant de différentier ainsi, on aura les valeurs des différences inférieures, pourvu cependant que le nombre de ces différentiations soit fort petit relativement au nombre n. On peut observer que ces équations subsistent, en y faisant r négatif; car $\cos zx'$ ou $\cos x'r\sqrt{n}$ est le même dans les deux cas de r positif et de r négatif.

On peut, en intégrant successivement l'équation (q), obtenir des théorèmes analogues sur les différences finies des puissances supérieures à n, en excluant toujours les puissances des quantités négatives. Ainsi l'on a, par une première intégration,

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^n-n.(n+r\sqrt{n}-2)^n+\frac{n.(n-1)}{1.2}.(n+r\sqrt{n}-4)^n-\text{etc.}}{1.2.3\ldots.n.2^n}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\int dr.c^{-\frac{3}{2}r^2}.\left[1-\frac{3}{20.n}.(1-6r^2+3r^4)\right]+\text{etc.}$$
$$=C+\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\left[\int dr.c^{-\frac{3}{2}r^2}-\frac{3}{20.n}.r.(1-r^2).c^{-\frac{3}{2}r^2}+\text{etc.}\right].$$

On déterminera la constante arbitraire C, en faisant commencer avec r, l'intégrale $\int dr.c^{-\frac{3}{2}r^2}$, et en observant qu'alors r étant nul, le dernier membre de l'équation se réduit à cette constante. Dans ce cas, le premier devient

$$n^n - n.(n-2)^n + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(n-4)^n - \text{etc.}$$

Mais on a, comme on sait, sans l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$n^n - n.(n-2)^n + \text{etc.} \ldots \mp n.(2-n)^n \mp (-n)^n = 1.2.3\ldots n.2^n,$$

le signe supérieur ayant lieu si n est pair, et le signe inférieur si n est impair. Dans les deux cas, on voit que la somme des termes dans lesquels les quantités élevées à la puissance n sont négatives, est égale à la somme des autres termes; on a donc, avec l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$n^n - n.(n-2)^n + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(n-4)^n - \text{etc.} = 1.2.3\ldots n.2^{n-1};$$

ce qui donne $C = \frac{1}{2}$; par conséquent,

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^n - n.(n+r\sqrt{n}-2)^n + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(n+r\sqrt{n}-4)^n - \text{etc.}}{1.2.3\ldots n.2^n}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\left[\int dr.c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{20.n}.r.(1-r^2).c^{-\frac{3}{2}r^2} + \text{etc.}\right].$$

En intégrant de nouveau cette expression, et déterminant convenablement la constante arbitraire, on trouve

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^{n+1} - n.(n+r\sqrt{n}-2)^{n+1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(n+r\sqrt{n}-4)^{n+1} - \text{etc.}}{1.2.3\ldots(n+1).2^n.\sqrt{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\left[r\int dr.c^{-\frac{3}{2}r^2} + c^{-\frac{3}{2}r^2}.\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{60.n}.(1-3r^2)\right\}\right] + \frac{1}{2}r.$$

43. On peut étendre les méthodes précédentes à la détermination de la différence $n^{ième}$ d'une puissance quelconque d'une fonction rationnelle de s. Il suffit pour cela de réduire par la méthode du n° 29, cette fonction à la forme $\int x^s.\phi dx$. Mais on a vu qu'alors

on parvient pour déterminer φ, à une équation différentielle d'un degré égal au plus haut exposant de s dans cette fonction, et qui le plus souvent n'est pas intégrable. On peut obvier à cet inconvénient, au moyen de multiples intégrales, de la manière suivante.

Considérons généralement la fonction

$$\frac{1}{(s+p)^i.(s+p')^{i'}.(s+p'')^{i''}.\text{etc.}}$$

Si dans l'intégrale $\int x^{i-1}dx.c^{-(s+p).x}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini, on change $(s+p).x$ en x', elle devient $\frac{1}{(s+p)^i}.\int x'^{i-1}dx'.c^{-x'}$, la nouvelle intégrale étant prise dans les limites qui la précèdent. La comparaison des deux intégrales donnera

$$\frac{1}{(s+p)^i}=\frac{\int x^{i-1}dx.c^{-(s+p)x}}{\int x^{i-1}dx.c^{-x}};$$

Il suit de là que

$$\frac{1}{(s+p)^i.(s+p')^{i'}.(s+p'')^{i''}.\text{etc.}}$$
$$=\frac{\int x^{i-1}.x'^{i'-1}.x''^{i''-1}.\text{etc.}\,dx.dx'.dx''.\text{etc.}\,c^{-px-p'x'-p''x''-\text{etc.}-s(x+x'+x''+\text{etc.})}}{\int x^{i-1}dx.c^{-x}.\int x'^{i'-1}dx'.c^{-x'}.\int x''^{i''-1}dx''.c^{-x''}.\text{etc.}},$$

toutes les intégrales étant prises depuis x, x', x'', etc. nuls jusqu'à leurs valeurs infinies; on aura donc

$$\Delta^n.\frac{1}{(s+p)^i.(s+p')^{i'}.\text{etc.}}$$
$$=\frac{\int x^{i-1}.x'^{i'-1}.\text{etc.}dx.dx'.\text{etc}.c^{-px-p'x'-\text{etc.}-s(x+x'+\text{etc.})}.(c^{-x-x'-\text{etc.}}-1)^n}{\int x^{i-1}dx.c^{-x}.\int x'^{i'-1}dx'.c^{-x'}.\text{etc.}}:$$

On réduira facilement en séries convergentes, par la méthode du n° 40, le numérateur et le dénominateur de cette expression; et si l'on change dans ces séries, les signes de i, i', etc.; on aura la valeur très-approchée de

$$\Delta^n.(s+p)^i.(s+p')^{i'}.\text{etc.},$$

n, i, i', etc. étant supposés de très-grands nombres. On trouvera par le numéro cité,

$$\Delta^n.(s+p)^i.(s+p')^{i'}.\text{etc.}$$

$$=\frac{\left(\frac{i}{a}\right)^{i+1}.\left(\frac{i'}{a'}\right)^{i'+1}.\text{etc.}\,c^{(s+p).a+(s+p').a'+\text{etc.}-i-i'-\text{etc.}}.(c^{a+a'+\text{etc.}}-1)^n}{\sqrt{\left(\frac{i.(i+1)}{a^2}-\frac{ni.c^{a+a'+\text{etc.}}}{(c^{a+a'+\text{etc.}}-1)^2}\right).\left(\frac{i'.(i'+1)}{a'^2}-\frac{ni'.c^{a+a'+\text{etc.}}}{(c^{a+a'+\text{etc.}}-1)^2}\right).\text{etc.}}},$$

a, a', etc. étant déterminés par les équations

$$0=\frac{i+1}{a}+s-p-\frac{n.c^{a+a'+\text{etc.}}}{c^{a+a'+\text{etc.}}-1},$$

$$\frac{i'+1}{a'}=\frac{i+1}{a}+p'-p,$$

$$\frac{i''+1}{a''}=\frac{i+1}{a}+p''-p,$$

etc.

Le cas le plus ordinaire est celui dans lequel les exposans i, i', i'', etc. sont égaux, et $s+p$, $s+p'$, etc. forment une progression arithmétique. On peut obtenir alors, par la méthode suivante, la différence finie de leur produit élevé à une haute puissance.

Considérons la différence $\Delta^n.(s.s-1)^i$. Si l'on fait $s=s'+\frac{1}{2}$, elle devient

$$\Delta^n.s'^{2i}.\left(1-\frac{1}{4s'^2}\right)^i.$$

En développant cette fonction en série, on a

$$\Delta^n.s'^{2i}-\frac{i}{4}.\Delta^n.s'^{2i-2}+\frac{i.(i-1)}{1.2.4^2}.\Delta^n.s'^{2i-4}-\text{etc.}$$

Les formules du n° 40 donneront la valeur approchée de chacun des termes de cette série, et l'on voit, par ces formules, que n et i étant de très-grands nombres, $\Delta^n.s^{2i-2}$ est d'un ordre moindre de deux unités, que $\Delta^n.s^{2i}$; d'où il suit que chaque terme de la série précédente est d'un ordre inférieur d'une unité, à celui qui le précède; ce qui montre la convergence de la série.

On arriverait au même résultat en résolvant par approximation, l'équation différentielle du second ordre en φ, à laquelle conduit la méthode du n° 29. Lorsqu'on suppose

$$\left(s'^2-\frac{1}{4}\right)^{-i}=\int c^{-s'x}.\varphi dx;$$

on a

$$2is.\int c^{-s'x}.\varphi dx = \left(s'^2 - \frac{1}{4}\right).\int c^{-s'x}.x\varphi dx.$$

En faisant disparaître s' des coefficiens de cette équation, par la méthode citée, dans les termes affectés du signe intégral; égalant ensuite à zéro, la somme de ces termes, et supposant ensuite dans l'équation différentielle que l'on obtient ainsi, φ égal à une suite ascendante par rapport aux puissances de x; on aura une série convergente. On aura ~~ensuite~~

$$\Delta^n.\left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{-i} = \int c^{-s'x}.(c^{-x}-1)^n.\varphi dx;$$

d'où l'on tirera une valeur en série de $\Delta^n.\left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{-i}$, et dans laquelle il suffira de changer le signe de i, pour avoir la valeur de $\Delta^n.\left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{i}$.

Cette manière de résoudre par approximation, l'équation différentielle en φ, et que nous avons indiquée à la fin du n° 30, peut servir dans un grand nombre de cas où cette équation n'est pas intégrable exactement.

Remarque générale sur la convergence des séries.

44. Nous terminerons cette Introduction, par une observation importante sur la convergence des séries dont nous avons fait un si fréquent usage. Ces séries convergent très-rapidement dans leurs premiers termes; mais souvent cette convergence diminue et finit par se changer en divergence. Elle ne doit pas empêcher l'usage de ces séries, en n'employant que leurs premiers termes, dans lesquels la convergence est rapide; car le reste de la série, que l'on néglige, est le développement d'une fonction algébrique ou intégrale, très-petite par rapport à ce qui précède. Pour rendre cela sensible par un exemple, considérons le développement en série, de l'intégrale $\int dt.c^{-t^2}$, prise depuis $t = T$ jusqu'à t infini. On a, par le n° 27,

$$\int dt.c^{-t^2} = \frac{c^{-T^2}}{2T}.\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2.T^4} - \frac{1.3.5}{2^3.T^6} + \text{etc.}\right).$$

Cette série finit par être divergente, quelque grande que soit la valeur que l'on suppose à T; mais alors on peut employer sans erreur sensible, ses premiers termes. En effet, si l'on considère, par exemple, ses quatre premiers termes, le reste de la série sera $\frac{1.3.5.7}{2^4}.\int\frac{dt.c^{-t^2}}{t^8}$; or cette quantité, abstraction faite du signe, est plus petite que le terme $-\frac{1.3.5.c^{-T^2}}{2^4.T^7}$ qui précède; c'est-à-dire, que l'on a

$$\frac{c^{-T^2}}{T^7} > 7.\int\frac{dt.c^{-t^2}}{T^8},$$

car on a

$$7.\int\frac{dt.c^{-t^2}}{t^8} = \text{constante} - \frac{c^{-t^2}}{t^7} - 2.\int\frac{dt.c^{-t^2}}{t^6}.$$

En déterminant la constante, de manière que l'intégrale soit nulle, lorsque $t = T$, on aura $\frac{c^{-T^2}}{T^7}$ pour cette constante; on aura donc, en prenant l'intégrale depuis $t = T$, jusqu'à t infini,

$$7.\int\frac{dt.c^{-t^2}}{T^8} = \frac{c^{-T^2}}{T^7} - 2.\int\frac{dt.c^{-t^2}}{T^6}.$$

La série précédente peut donc être employée, tant qu'elle est convergente; puisque l'on est sûr que ce que l'on néglige, est au-dessous du terme auquel on s'arrête.

Cette série jouit encore de cette propriété, savoir, qu'elle est alternativement plus grande et plus petite que sa valeur entière, suivant que l'on s'arrête à un terme positif, ou à un terme négatif. On peut nommer par cette raison, ce genre de séries, *séries-limites*. Au reste, on a vu dans le n° 27, que dans le cas où elles sont divergentes; on peut, en les réduisant en fractions continues, obtenir des approximations toujours convergentes.

Ce que nous venons de dire sur la série précédente, peut s'étendre à toutes celles que nous avons considérées, et doit ôter toute inquiétude sur les usages que nous en avons faits. En effet, on peut toujours arrêter ces séries au point où elles cessent d'être convergentes, et représenter le reste par une intégrale. C'est ce que nous allons faire voir sur la formule la plus générale du développement des fonctions en séries.

On a, en prenant l'intégrale depuis $z=0$,

$$\int dz.\varphi'(x-z)=\varphi(x)-\varphi(x-z),$$

$\varphi'(x)$ étant la différentielle de $\varphi(x)$ divisée par dx. Si l'on désigne pareillement par $\varphi''(x)$ la différentielle de $\varphi'(x)$ divisée par dx; par $\varphi'''(x)$ la différentielle de $\varphi''(x)$ divisée par dx, et ainsi de suite; on aura

$$\int dz.\varphi'(x-z)=z.\varphi'(x-z)+\int zdz.\varphi''(x-z),$$
$$\int zdz.\varphi''(x-z)=\tfrac{1}{2}z^2.\varphi''(x-z)+\int \tfrac{1}{2}z^2dz.\varphi'''(x-z),$$
etc.

En continuant ainsi, on trouvera généralement

$$\int dz.\varphi'(x-z)=z.\varphi'(x-z)+\frac{z^2}{1.2}.\varphi''(x-z)\ldots+\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}.\varphi^{(n)}(x-z)$$
$$+\int\frac{z^n.dz}{1.2.3\ldots\ldots n}.\varphi^{(n+1)}(x-z).$$

En comparant cette expression à la précédente, on aura

$$\varphi(x)=\varphi(x-z)+z.\varphi'(x-z)+\frac{z^2}{1.2}.\varphi''(x-z)\ldots+\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}.\varphi^{(n)}(x-z)$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}.\int z^n dz.\varphi^{(n+1)}(x-z).$$

Faisons $x-z=t$, l'équation précédente prendra cette forme

$$\varphi(t+z)=\varphi(t)+z.\varphi'(t)+\frac{z^2}{1.2}.\varphi''(t)\ldots\ldots+\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}.\varphi^{(n)}(t)$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots n}.\int z'^n dz'.\varphi^{(n+1)}.(t+z-z'),$$

l'intégrale étant prise depuis $z'=0$ jusqu'à $z'=z$. Il est clair que si l'on faisait dans cette intégrale, $\varphi^{(n+1)}.(t+z-z')$ constant, on aurait un trop grand résultat, si l'on prenait la plus grande valeur de cette quantité; et un trop petit résultat, en prenant sa plus petite valeur. Il y a donc dans l'intervalle de $z'=0$ à $z'=z$, une valeur de z' telle qu'en supposant cette quantité constante, on aura un résultat exact. Soit u cette valeur; l'intégrale précédente devient ainsi

$$\frac{z^{n+1}}{1.2.3\ldots\overline{n+1}}\cdot\varphi^{(n+1)}.(t+z-u);$$

ce qui donne

$$\varphi(t+z)=\varphi(t)+z.\varphi'(t)\ldots\ldots+\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}.\varphi^{(n)}(t)$$
$$+\frac{z^{n+1}}{1.2.3\ldots\overline{n+1}}.\varphi^{(n+1)}.(t+z-u),$$

$z-u$ étant compris entre zéro et z. On pourra ainsi juger de la convergence de la série et du degré d'approximation, lorsqu'on s'arrête à l'un de ses termes.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROBABILITÉS.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux de cette Théorie.

1. On a vu dans l'Introduction, que la probabilité d'un événement, est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables, au nombre de tous les cas possibles; lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend pour nous, également possibles. La juste appréciation de ces cas divers, est un des points les plus délicats de l'analyse des hasards.

Si tous les cas ne sont pas également possibles, on déterminera leurs possibilités respectives; et alors la probabilité de l'événement sera la somme des probabilités de chaque cas favorable. En effet, nommons p la probabilité du premier de ces cas. Cette probabilité est relative à la subdivision de tous les cas, en d'autres également possibles. Soit N la somme de tous les cas ainsi subdivisés, et n la somme de ces cas qui sont favorables au premier cas; on aura $p=\frac{n}{N}$. On aura pareillement $p'=\frac{n'}{N}$, $p''=\frac{n''}{N}$, etc.; en marquant d'un trait, de deux traits, etc., les lettres p et n, relativement au second cas, au troisième, etc. Maintenant, la probabilité de l'événement dont il s'agit, est, par la définition même de la probabilité, égale à

$$\frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{N};$$

elle est donc égale à $p+p'+p''+$ etc.

Lorsqu'un événement est composé de deux événemens simples, indépendans l'un de l'autre; il est clair que le nombre de tous les cas possibles, est le produit des deux nombres qui expriment tous les cas possibles relatifs à chaque événement simple; parce que chacun des cas relatifs à l'un de ces événemens, peut se combiner avec tous les cas relatifs à l'autre événement. Par la même raison, le nombre des cas favorables à l'événement composé, est le produit des deux nombres qui expriment les cas favorables à chaque événement simple; la probabilité de l'événement composé, est donc alors le produit des probabilités de chaque événement simple. Ainsi la probabilité d'amener deux fois de suite, un as avec un dé, est un trente-sixième, lorsque l'on suppose les faces du dé parfaitement égales; parce que le nombre de tous les cas possibles en deux coups, est trente-six, chaque cas de la première projection pouvant se combiner avec les six cas de la seconde; et parmi tous ces cas, un seul donne deux as de suite.

En général, si p, p', p'', etc. sont les possibilités respectives d'un nombre quelconque d'événemens simples indépendans les uns des autres; le produit $p.p'.p''$, etc. sera la probabilité d'un événement composé de ces événemens.

Si les événemens simples sont liés entre eux, de manière que la supposition de l'arrivée du premier, influe sur la probabilité de l'arrivée du second; on aura la probabilité de l'événement composé, en déterminant, 1° la probabilité du premier événement; 2° la probabilité que cet événement étant arrivé, le second aura lieu.

Pour démontrer ce principe d'une manière générale, nommons p le nombre de tous les cas possibles, et supposons que dans ce nombre, il y en ait p' favorables au premier événement. Supposons ensuite que dans le nombre p', il y en ait q favorables au second événement; il est clair que $\frac{q}{p}$ sera la probabilité de l'événement composé. Mais la probabilité du premier événement est $\frac{p'}{p}$; la probabilité que cet événement étant arrivé, le second aura lieu, est $\frac{q}{p'}$; car alors un des cas p' devant exister, on ne doit considérer que ces cas. Maintenant on a

$$\frac{q}{p} = \frac{p'}{p} \cdot \frac{q}{p'};$$

ce qui est la traduction en analyse, du principe énoncé ci-dessus.

En considérant comme événement composé, l'événement observé, joint à un événement futur; la probabilité de ce dernier événement, tirée de l'événement observé, est évidemment la probabilité que l'événement observé ayant lieu, l'événement futur aura lieu pareillement; or, par le principe que nous venons d'exposer, cette probabilité multipliée par celle de l'événement observé, déterminée *à priori*, ou indépendamment de ce qui est déjà arrivé, est égale à celle de l'événement composé, déterminée *à priori;* on a donc ce nouveau principe, relatif à la probabilité des événemens futurs, déduite des événemens observés.

La probabilité d'un événement futur, tirée d'un événement observé, est le quotient de la division de la probabilité de l'événement composé de ces deux événemens, et déterminée *à priori*, par la probabilité de l'événement observé, déterminée pareillement *à priori.*

De là découle encore cet autre principe relatif à la probabilité des causes, tirée des événemens observés.

Si un événement observé peut résulter de n causes différentes; leurs probabilités sont respectivement, comme les probabilités de l'événement, tirées de leur existence; et la probabilité de chacune d'elles, est une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement, dans l'hypothèse de l'existence de la cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables, relatives à toutes les causes.

Considérons, en effet, comme événement composé, l'événement observé, résultant d'une de ces causes. La probabilité de cet événement composé, probabilité que nous désignerons par E, sera, par ce qui précède, égale au produit de la probabilité de l'événement observé, déterminée *à priori*, et que nous nommerons F, par la probabilité que cet événement ayant lieu, la cause dont il s'agit, existe, probabilité qui est celle de la cause, tirée de l'événement observé, et que nous nommerons P. On aura donc

$$P = \frac{E}{F}.$$

La probabilité de l'événement composé, est le produit de la probabilité de la cause, par la probabilité que cette cause ayant lieu, l'événement arrivera, probabilité que nous désignerons par H. Toutes les causes étant supposées *à priori*, également possibles, la probabilité de chacune d'elles est $\frac{1}{n}$; on a donc

$$E = \frac{H}{n}.$$

La probabilité de l'événement observé, est la somme de tous les E relatifs à chaque cause; en désignant donc par $S.\frac{H}{n}$, la somme de toutes les valeurs de $\frac{H}{n}$, on aura

$$F = S.\frac{H}{n};$$

l'équation $P = \frac{E}{F}$ deviendra donc

$$P = \frac{H}{S.H};$$

ce qui est le principe énoncé ci-dessus, lorsque toutes les causes sont *à priori* également possibles. Si cela n'est pas, en nommant p la probabilité *à priori* de la cause que nous venons de considérer; on aura $E = Hp$; et en suivant le raisonnement précédent, on trouvera

$$P = \frac{Hp}{S.Hp};$$

ce qui donne les probabilités des diverses causes, lorsqu'elles ne sont pas toutes, également possibles *à priori*.

Pour appliquer le principe précédent à un exemple, supposons qu'une urne renferme trois boules dont chacune ne puisse être que blanche ou noire ; qu'après avoir tiré une boule, on la remette dans l'urne pour procéder à un nouveau tirage, et qu'après m tirages, on n'ait amené que des boules blanches. Il est visible que l'on ne peut faire *à priori*, que quatre hypothèses ; car les boules peuvent être, ou toutes blanches, ou deux blanches et une noire, ou deux noires et une blanche, ou enfin toutes noires. Si l'on considère ces hypothèses comme autant de causes de l'événement observé ; les probabilités de l'événement, relatives à ces causes, seront

$$1, \quad \frac{2^m}{3^m}, \quad \frac{1}{3^m}, \quad 0.$$

Les probabilités respectives de ces hypothèses, tirées de l'événement observé, seront donc, par le troisième principe,

$$\frac{3^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{2^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{1}{3^m+2^m+1}, \quad 0.$$

On voit, au reste, qu'il est inutile d'avoir égard aux hypothèses qui excluent l'événement ; parce que la probabilité résultante de ces hypothèses, étant nulle, leur omission ne change point les expressions des autres probabilités.

Si l'on veut avoir la probabilité de n'amener que des boules noires dans les m' tirages suivans ; on déterminera *à priori*, les probabilités d'amener d'abord m boules blanches, ensuite m' boules noires. Ces probabilités sont, relativement aux hypothèses précédentes,

$$0, \quad \frac{2^m}{3^{m+m'}}, \quad \frac{2^{m'}}{3^{m+m'}}, \quad 0;$$

et comme *à priori*, les quatre hypothèses sont également possibles, la probabilité de l'événement composé sera le quart de la somme des quatre probabilités précédentes, ou

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2^m + 2^{m'}}{3^{m+m'}}.$$

Les probabilités de l'événement observé, déterminées *à priori*, dans les quatre hypothèses précédentes, étant respectivement

$$\frac{3^m}{3^m}, \quad \frac{2^m}{3^m}, \quad \frac{1}{3^m}, \quad 0,$$

le quart de leur somme, ou

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3^m+2^m+1}{3^m}\right),$$

sera la probabilité de l'événement observé, déterminée *à priori*; en divisant donc la probabilité de l'événement composé, par cette probabilité, on aura par le second principe,

$$\frac{2^m+2^{m'}}{3^{m'}.(3^m+2^m+1)},$$

pour la probabilité d'amener m' boules noires, dans les m' tirages suivans.

On peut encore déterminer cette probabilité, par le principe suivant.

La probabilité d'un événement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'événement observé, par la probabilité que cette cause existant, l'événement futur aura lieu.

Ici les probabilités de chaque cause, tirées de l'événement observé, sont, comme on l'a vu,

$$\frac{3^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{2^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{1}{3^m+2^m+1}, \quad 0;$$

les probabilités de l'événement futur, relatives à ces causes, sont respectivement

$$0, \quad \frac{1}{3^{m'}}, \quad \frac{2^{m'}}{3^{m'}}, \quad 1;$$

la somme de leurs produits respectifs, ou

$$\frac{2^m+2^{m'}}{3^{m'}.(3^m+2^m+1)},$$

sera la probabilité de l'événement futur, tirée de l'événement observé; ce qui est conforme à ce qui précède.

Si l'on suppose quatre boules dans l'urne, et qu'ayant amené une boule

boule blanche au premier tirage, on cherche la probabilité de n'amener que des boules noires dans les m' tirages suivans; on trouvera, par les principes exposés ci-dessus, cette probabilité égale à

$$\frac{3+2^{m'+1}+3^{m'}}{10.4^{m'}}.$$

Si le nombre des boules blanches égale celui des noires; la probabilité de n'amener que des boules noires dans m' tirages, est $\frac{1}{2^{m'}}$. Elle surpasse la précédente, lorsque m' est égal ou moindre que 5; mais elle lui devient inférieure, lorsque m' surpasse 5, quoique la boule blanche extraite d'abord de l'urne, indique une supériorité dans le nombre des boules blanches. L'explication de ce paradoxe, tient à ce que cette indication n'exclut point la supériorité du nombre des boules noires; elle la rend seulement moins probable; au lieu que la supposition d'une égalité parfaite entre le nombre des blanches et celui des noires, exclut cette supériorité; or cette supériorité, quelque petite que soit sa probabilité, doit rendre la probabilité d'amener de suite, m' boules noires, plus grande que dans le cas de l'égalité des couleurs, lorsque m' est considérable.

L'inégalité qui peut exister entre des choses que l'on suppose parfaitement semblables, peut avoir sur les résultats du calcul des probabilités, une influence sensible qui mérite une attention particulière. Considérons le jeu de *croix* et *pile*, et supposons qu'il soit également facile d'amener *croix* que *pile;* alors la probabilité d'amener *croix* au premier coup, est $\frac{1}{2}$, et celle de l'amener deux fois de suite, est $\frac{1}{4}$. Mais s'il existe dans la pièce une inégalité qui fasse paraître une des faces plutôt que l'autre, sans que l'on connaisse la face que cette inégalité favorise; la probabilité d'amener *croix* au premier coup, restera toujours $\frac{1}{2}$; parce que dans l'ignorance où l'on est, de la face que cette inégalité favorise; autant la probabilité de l'événement simple est augmentée, si cette inégalité lui est favorable, autant elle est diminuée, si cette inégalité lui est contraire. Mais la probabilité d'amener *croix* deux fois de suite, est augmentée, malgré cette ignorance; car cette probabilité est égale à celle d'amener *croix* au premier coup, multipliée par la probabilité que l'ayant amené au premier coup, on l'amènera au second; or son arrivée au premier coup, est un motif de croire que l'inégalité de la pièce, la favorise; elle augmente donc la probabilite de l'amener au second; ainsi le produit des deux probabilités est accru par cette inégalité. Pour soumettre cet objet au calcul, supposons que l'inégalité de la pente accroisse de la quantité α, la probabilité de l'événement simple qu'elle favorise. Si cet événement est *croix*, la probabilité sera $\frac{1}{2}+\alpha$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite sera $(\frac{1}{2}+\alpha)^2$. Si l'événement favorisé est *pile*, la probabilité de *croix* sera $\frac{1}{2}-\alpha$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite sera $(\frac{1}{2}-\alpha)^2$. Comme on n'a d'avance, aucune raison de croire que l'inégalité favorise plutôt l'un que l'autre des événemens simples, il est clair que pour avoir la probabilité de l'événement composé *croix-croix*, il faut ajouter les deux probabilités précédentes, et prendre la moitié de leur somme, ce qui donne $\frac{1}{4}+\alpha^2$ pour cette probabilité : c'est aussi la probabilité de *pile-pile*. On trouvera par le même raisonnement, que la probabilité de l'événement composé *croix-pile* ou *pile-croix*, est $\frac{1}{4}-\alpha^2$; par conséquent, elle est moindre que celle de la répétition du même événement simple.

Les considérations précédentes peuvent être étendues à des événemens quelconques. p représentant la probabilité d'un événement simple, et $1-p$ celle de l'autre événement; si l'on désigne par P, la probabilité d'un résultat relatif à ces événemens, et que l'on suppose que p soit réellement $p\pm\alpha$, α etant une quantité inconnue, ainsi que le signe qui l'affecte; la probabilité P du résultat sera

$$P+\frac{1}{1.2}.\alpha^2.\frac{ddP}{dp^2}+\frac{1}{1.2.3.4}.\alpha^4.\frac{d^4P}{dp^4}+\text{etc.}$$

En faisant $P=p^n$, c'est-à-dire en supposant que le résultat relatif aux événemens, soit n fois la répétition du premier; la probabilité P deviendra

$$p^n+\frac{n.(n-1)}{1.2}.\alpha^2.p^{n-2}+\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}.\alpha^4.p^{n-4}+\text{etc.}$$

Ainsi l'erreur inconnue que l'on peut supposer dans la probabilité des événemens simples, accroît toujours la probabilité des événemens composés de la répétition du même événement.

2. La probabilité des événemens sert à déterminer l'espérance et la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions ; il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans une supposition qui n'est que vraisemblable. Dans la théorie des hasards, cet avantage est le produit de la somme espérée, par la probabilité de l'obtenir : c'est la somme partielle qui doit revenir, lorsqu'on ne veut point courir les risques de l'événement, en supposant que la répartition de la somme entière se fasse proportionnellement aux probabilités. Cette manière de la répartir, est la seule équitable, quand on fait abstraction de toute circonstance étrangère ; parce qu'avec un égal degré de probabilité, on a un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage, *espérance mathématique*, pour le distinguer de l'espérance morale qui dépend, comme lui, du bien espéré et de la probabilité de l'obtenir, mais qui se règle encore sur mille circonstances variables qu'il est presque toujours impossible de définir, et plus encore, d'assujétir au calcul. Ces circonstances, il est vrai, ne faisant qu'augmenter ou diminuer la valeur du bien espéré, on peut considérer l'espérance morale elle-même comme le produit de cette valeur, par la probabilité de l'obtenir ; mais on doit alors distinguer dans le bien esperé, sa valeur relative, de sa valeur absolue : celle-ci est indépendante des motifs qui le font desirer, au lieu que la première croît avec ces motifs.

c'est-à-dire, lorsqu'on interrompt la partie.

On ne peut donner de règle générale pour apprécier cette valeur relative ; cependant il est naturel de supposer la valeur relative d'une somme infiniment petite, en raison directe de sa valeur absolue, en raison inverse du bien total de la personne intéressée. En effet, il est clair qu'un franc a très-peu de prix pour celui qui en possède un grand nombre, et que la manière la plus naturelle d'estimer sa valeur relative, est de la supposer en raison inverse de ce nombre.

Tels sont les principes généraux de l'analyse des probabilités.

Nous allons maintenant les appliquer aux questions les plus délicates et les plus difficiles de cette analyse. Mais pour mettre de l'ordre dans cette matière, nous traiterons d'abord les questions dans lesquelles les probabilités des événemens simples, sont données; nous considérerons ensuite celles dans lesquelles ces possibilités sont inconnues, et doivent être déterminées par les événemens observés.

CHAPITRE II.

De la probabilité des événemens composés d'événemens simples dont les possibilités respectives sont données.

3. Si l'on développe le produit $(1+p).(1+p').(1+p'')$. etc. composé de n facteurs; ce développement renfermera toutes les combinaisons possibles des n lettres $p, p', p'', \ldots p^{(n-1)}$, prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc. jusqu'à n; et chaque combinaison aura pour coefficient l'unité. Ainsi la combinaison $pp'p''$ résultant du produit $(1+p).(1+p').(1+p'')$, multiplié par le terme 1 du développement des autres facteurs; son coefficient est évidemment l'unité. Maintenant, pour avoir le nombre total des combinaisons de n lettres prises x à x; on observera que chacune de ces combinaisons devient p^x, lorsqu'on suppose p', p'', etc. égaux à p. Alors le produit des n facteurs précédens se change dans le binome $(1+p)^n$; or le coefficient de p^x dans le développement de ce binome, est

$$\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots\ldots(n-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots x};$$

cette quantité exprime donc le nombre des combinaisons des n lettres prises x à x. On aura le nombre total des combinaisons de ces lettres, prises une à une, deux à deux, etc. jusqu'à n à n, en faisant $p=1$, dans le binome $(1+p)^n$, et en retranchant l'unité; ce qui donne 2^n-1 pour ce nombre.

Supposons que dans chaque combinaison, on ait égard non-seulement au nombre des lettres, mais encore à leur situation; on déterminera le nombre des combinaisons, en observant que dans la combinaison de deux lettres, pp', on peut mettre p' à la seconde place, et ensuite à la première; ce qui donne les deux combinaisons pp', $p'p$. En introduisant ensuite une nouvelle lettre p'' dans chacune de ces combinaisons, on peut la mettre à la première, à la seconde ou à la troisième place; ce qui donne 2.3 combinaisons. En continuant ainsi, on voit que dans une combinaison de x lettres, on peut leur donner $1.2.3\ldots.x$ situations différentes; d'où il suit que le nombre total des combinaisons de n lettres, prises x à x, étant par ce qui précède,

$$\frac{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-x+1)}{1.2.3.\ldots.x};$$

le nombre total des combinaisons, lorsqu'on a égard à la différente situation des lettres, sera cette même fonction, en supprimant son dénominateur.

On peut facilement, au moyen de ces formules, déterminer les bénéfices des loteries. Supposons que le nombre des numéros d'une loterie, soit n, et qu'il en sorte r à chaque tirage; on veut avoir la probabilité qu'une combinaison de s de ces numéros, sortira au premier tirage.

Le nombre total des combinaisons des numéros, pris r à r, est par ce qui précède,

$$\frac{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-r+1)}{1.2.3.\ldots.r};$$

Pour avoir parmi ces combinaisons, le nombre de celles dans lesquelles les s numéros sont compris, on observera que si l'on retranche ces numéros de la totalité des numéros, et que l'on combine $r-s$ à $r-s$, le reste $n-s$, le nombre de ces combinaisons sera le nombre cherché; car il est clair qu'en ajoutant les s numéros à chacune de ces combinaisons, on aura les combinaisons r à r des numéros dans lesquelles sont ces s numéros. Ce nombre est donc

$$\frac{(n-s).(n-s-1)\ldots.(n-r+1)}{1.2.3\ldots.(r-s)};$$

en le divisant par le nombre total des combinaisons r à r des n numéros, on aura pour la probabilité cherchée,

$$\frac{r.(r-1).(r-2)\ldots.(r-s+1)}{n.(n-1).(n-2)\ldots.(n-s+1)}.$$

En divisant cette quantité par $1.2.3....s$, on aura par ce qui précède, la probabilité que les s numéros sortiront dans un ordre déterminé entre eux. On aura la probabilité que les s premiers numéros du tirage, seront ceux de la combinaison proposée, en observant que cette probabilité revient à celle d'amener cette combinaison, en supposant qu'il ne sort que s numéros à chaque tirage ; ce qui revient à faire $r = s$ dans la fonction précédente qui devient ainsi

$$\frac{1.2.3.....s}{n.(n-1)....(n-s+1)}.$$

Il en est de même, si les numéros de la combinaison sont p. ex. les numéros $i, i+1, ... i+s-1$ de ceux, qui sortent. Et plus généralement, si ces numéros-là doivent occuper des places déterminées dans l'ordre des numéros du tirage.–

Enfin, on aura la probabilité que les s numéros choisis sortiront les premiers dans un ordre déterminé, en réduisant le numérateur de cette fraction, à l'unité.

Les quotiens des mises divisées par ces probabilités, sont ce que la loterie doit rendre aux joueurs : l'excédant de ces quotiens sur ce qu'elle donne, est son bénéfice. En effet, si l'on nomme p la probabilité du joueur, m sa mise, et x ce que la loterie doit lui rendre, pour l'égalité du jeu ; $x-m$ sera la mise de la loterie ; car ayant reçu la mise m, et rendant x au joueur ; elle ne met au jeu que $x-m$. Or pour l'égalité du jeu, l'espérance mathématique de chaque joueur doit être égale à sa crainte : son espérance est le produit de la mise $x-m$ de son adversaire, par la probabilité p de l'obtenir : sa crainte est le produit de sa mise m, par la probabilité $1-p$ de la perte. On a donc

$$p.(x-m) = (1-p).m;$$

c'est-à-dire que pour l'égalité du jeu, les mises doivent être (réciproques) aux probabilités de gagner. Cette équation donne proportionnelles

$$x = \frac{m}{p};$$

ainsi ce que la loterie doit rendre, est le quotient de la mise divisée par la probabilité du joueur pour gagner.

4. Une loterie étant composée de n numéros dont r sortent à chaque tirage, on demande la probabilité qu'après i tirages, tous les numéros seront sortis.

Nommons $z_{n,i}$ le nombre des cas dans lesquels après i tirages, la totalité des nos 1, 2, 3, ... q sera sortie. Il est clair que ce nombre est égal au nombre $z_{n,q-1}$ de cas dans lesquels les nos 1, 2, 3, ... $q-1$ sont sortis, moins le nombre de cas dans lesquels ces numéros étant sortis, le no q n'est pas sorti; or ce dernier nombre est évidemment le même que celui des cas dans lesquels les nos 1, 2, 3, ... $q-1$ seraient sortis, si l'on ôtait le no q des n numéros de la loterie, et ce nombre est $z_{n-1,q-1}$; on a donc

$$z_{n,q} = z_{n,q-1} - z_{n-1,q-1}. \quad (i)$$

Maintenant le nombre de tous les cas possibles dans un seul tirage, étant $\frac{n.(n-1).(n-2).....(n-r+1)}{1.2.3....r}$, celui de tous les cas possibles dans i tirages, est

$$\left(\frac{n.(n-1).(n-2).....(n-r+1)}{1.2.3....r}\right)^i.$$

Le nombre de tous les cas dans lesquels le no 1 ne sortira pas dans ces i tirages, est le nombre de tous les cas possibles, lorsqu'on retranche ce numéro des n numéros de la loterie; et ce nombre est

$$\left(\frac{(n-1).(n-2).....(n-r)}{1.2.3.....r}\right)^i;$$

le nombre des cas dans lesquels le no 1 sera sorti dans i tirages, est donc

$$\left(\frac{n.(n-1)....(n-r+1)}{1.2.3....r}\right)^i - \left(\frac{(n-1).(n-2)....(n-r)}{1.2.3....r}\right)^i,$$

ou

$$\Delta.\left(\frac{(n-1).(n-2)....(n-r)}{1.2.3....r}\right)^i;$$

c'est la valeur de $z_{n,1}$. Cela posé, l'équation (i) donnera, en y faisant successivement $q=2$, $q=3$, etc.,

$$z_{n,2} = \Delta^2.\left(\frac{(n-2).(n-3)....(n-r-1)}{1.2.3....r}\right)^i,$$

$$z_{n,3} = \Delta^3.\left(\frac{(n-3).(n-4)....(n-r-2)}{1.2.3....r}\right)^i,$$

etc.;

et

et généralement,

$$z_{n,q} = \Delta^q . \left(\frac{(n-q).(n-q-1)\ldots.(n-r-q+1)}{1.2.3\ldots.r}\right)^i.$$

Ainsi la probabilité que les n^os 1, 2, 3, ...q sortiront dans i tirages, étant égale à $z_{n,q}$ divisé par le nombre de tous les cas possibles, elle sera

$$\frac{\Delta^q.[(n-q).(n-q-1)\ldots.(n-r-q+1)]^i}{[n.(n-1).(n-2)\ldots.(n-r+1)]^i}.$$

Si l'on fait dans cette expression $q=n$, on aura, s étant ici la variable qui doit être supposée nulle dans le résultat,

$$\frac{\Delta^n.[s.(s-1)\ldots.(s-r+1)]^i}{[n.(n-1)\ldots.(n-r+1)]^i}$$

pour l'expression de la probabilité que tous les numéros de la loterie sortiront dans i tirages.

Si n et i sont de très-grands nombres, on aura par les formules du n° 40 du premier Livre, la valeur de cette probabilité, au moyen d'une série très-convergente. Supposons, par exemple, qu'il ne sort qu'un numéro à chaque tirage, la probabilité précédente devient

$$\frac{\Delta^n.s^i}{n^i}.$$

Proposons-nous de déterminer le nombre i de tirages dans lesquels cette probabilité est $\frac{1}{k}$, n et i étant de très-grands nombres. En suivant l'analyse du numéro cité, on déterminera d'abord a par l'équation

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{n.c^a}{c^a-1};$$

ce qui donne

$$a = \frac{i+1}{n+s}.\left\{\frac{1-c^{-a}}{1-\frac{s.c^{-a}}{n+s}}\right\}.$$

On a ensuite par le n° 40 du premier Livre, lorsque c^{-a} est une quantité très-petite de l'ordre $\frac{1}{i}$, comme cela a lieu dans la question présente; on a, dis-je, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$, s étant supposé nul dans le résultat du calcul,

$$\frac{\Delta^n . s^i}{n^i} = \frac{\left(\frac{i}{i+1}\right)^{i+\frac{1}{2}} . c^{na-i} . (1-c^{-a})^{n-i}}{\sqrt{1-\left(\frac{i+1}{n}\right).c^{-a}}}$$

or on a, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\left(\frac{i}{i+1}\right)^{i+\frac{1}{2}} = c^{-1};$$

en supposant ensuite $c^{-a} = z$, on a

$$(1-c^{-a})^{n-i} = c^{(i-n).a} . \left[1 + \left(\frac{i-n}{2}\right).z^2\right];$$

de plus, l'équation qui détermine a, donne

$$i+1-na = (i+1).z;$$

d'où l'on tire

$$c^{na-i-1} = c^{-ia}.(1-z);$$

on aura donc, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n.s^i}{n^i} = c^{-ia} . \left[1 + \left(\frac{i-2n+1}{2n}\right).z + \left(\frac{i-n}{2}\right).z^2\right].$$

Pour déterminer z, reprenons l'équation

$$a = \frac{i+1}{n} - \left(\frac{i+1}{n}\right).c^{-a};$$

on aura par la formule (p) du nº 21 du second Livre de la *Mécanique céleste*,

$$z = c^{-a} = q + \left(\frac{i+1}{n}\right).q^2 + \frac{3.\left(\frac{i+1}{n}\right)^2}{1.2}.q^3 + \frac{4.\left(\frac{i+1}{n}\right)^3}{1.2.3}.q^4 + \text{etc.};$$

q étant supposé égal à $c^{-\left(\frac{i+1}{n}\right)}$. Cette valeur de z donne

$$c^{-ia} = c^{-ni}.[1-(i+1).q^2];$$

par conséquent,

$$\frac{\Delta^n . s^i}{n^i} = c^{-nq} . \left[1 + \left(\frac{i+1-2n}{2n} \right) . q - \left(\frac{n+i+2}{2} \right) . q^2 \right].$$

En égalant cette quantité à la fraction $\frac{1}{k}$, on aura

$$q = \frac{\log k}{n} . \left[1 + \left(\frac{i+1-2n}{2n^2} \right) - \left(\frac{n+i+2}{2n^2} \right) . \log k \right];$$

or on a

$$i+1 = -n . \log q;$$

on aura donc à très-peu près pour l'expression du nombre i de tirages, après lesquels la probabilité que tous les numéros seront sortis est $\frac{1}{k}$,

$$i = (\log n - \log\log k) . (n - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \log k) + \tfrac{1}{2} \log k;$$

on doit observer que tous ces logarithmes sont hyperboliques.

Supposons la loterie composée de dix mille numéros, ou $n = 10000$, et $k = 2$, cette formule donne

$$i = 95767,4$$

pour l'expression du nombre de tirages, dans lesquels on peut parier un contre un, que les dix mille billets de la loterie sortiront; il y a donc un peu moins d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 95767 tirages, et un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 95768 tirages.

On déterminera par une analyse semblable, le nombre des tirages dans lesquels on peut parier un contre un, que tous les numéros de la loterie de France sortiront. Cette loterie est, comme on sait, composée de 90 numéros dont cinq sortent à chaque tirage. La probabilité que tous les numéros sortiront dans i tirages, est alors par ce qui précède,

$$\frac{\Delta^n . [s^{\prime}(s'-1) . (s'-2) . (s'-3) . (s'-4)]^i}{[n . (n-1) . (n-2) . (n-3) . (n-4)]^i},$$

n étant ici égal à 90, et s' devant être supposé nul dans le résultat du calcul. Si l'on fait $s = s' - 2$, cette fonction devient

$$\frac{\Delta^n.[s.(s^2-1).(s^2-4)]^i}{[(n-2).(\overline{n-2}^2-1).(\overline{n-2}^2-4)]^i};$$

ou en développant en série,

$$\frac{(\Delta^n.s^{5i}-5i\,\Delta^n.s^{5i-2}+\text{etc.})}{(n-2)^{5i}}.\left(1+\frac{5i}{(n-2)^2}+\text{etc.}\right),$$

s devant être supposé égal à -2 dans le résultat du calcul.

On a par le n° 40 du premier Livre, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i^2}$, et supposant c^{-a} très-petit de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$\frac{\Delta^n.s^{5i}}{(n-2)^{5i}} = \frac{\left(\frac{5i+1}{a}\right)^{5i}.\left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i}.c^{(n-2)a-5i}.(1-c^{-a})^n}{(n-2)^{5i}.\sqrt{1+\frac{1}{5i}-\frac{na^2.c^{-a}}{5i.(1-c^{-a})^2}}},$$

a étant donné par l'équation

$$a = \frac{(5i+1).(1-c^{-a})}{(n-2).\left(1+\frac{2c^{-a}}{n-2}\right)}.$$

On a ainsi, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n.s^{5i}}{(n-2)^{5i}} = \frac{\left(1+\frac{2c^{-a}}{n-2}\right)^{5i}}{(1-c^{-a})^{5i}}.(1-c^{-a})^n.c^{1-(5i+1)c^{-a}-\frac{10ic^{-a}}{n-2}}$$
$$\times\left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i}.\left(1-\frac{1}{10.i}+\frac{na^2.c^{-a}}{10.i}\right);$$

or on a

$$\left(1+\frac{2c^{-a}}{n-2}\right)^{5i} = c^{\frac{10ic^{-a}}{n-2}},$$

$$(1-c^{-a})^{-5i} = c^{5i.c^{-a}}.\left(1+\frac{5i}{2}.c^{-2a}\right),$$

$$\left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i} = c^{-1}.\left(1+\frac{1}{10.i}\right);$$

on aura donc aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n.s^i}{(n-2)^{5i}} = (1-c^{-a})^n.\left(1-c^{-a}+\frac{5i}{2}.c^{-2a}+\frac{na^2.c^{-a}}{10.i}\right);$$

En substituant pour a sa valeur, et observant que i est fort peu différent de $n-2$, dans le cas présent, comme on le verra ci-après; on a à très-peu près,

$$\frac{na^2 \cdot c^{-a}}{10 \cdot i} = \frac{(5i+12)}{2\cdot(n-2)} \cdot c^{-a}.$$

Je conserve pour plus d'exactitude, le terme $\frac{12 \cdot c^{-a}}{2\cdot(n-2)}$, quoique de l'ordre $\frac{1}{i^2}$, à cause de la grandeur de son facteur 12; on aura donc

$$\frac{\Delta^n \cdot s^{5i}}{(n-2)^{5i}} = (1-c^{-a})^n \cdot \left(1 + \frac{(5i-2n+16)}{2\cdot(n-2)} \cdot c^{-a} + \frac{5i}{2} \cdot c^{-2a}\right).$$

Si l'on change dans cette expression $5i$ dans $5i-2$, on aura celle de $\frac{\Delta^n \cdot s^{5i-2}}{(n-2)^{5i-2}}$; mais la valeur de a ne sera plus la même. Soit a' cette nouvelle valeur, on aura

$$a' = \frac{(5i-1)\cdot(1-c^{-a'})}{(n-2)\cdot\left(1+\frac{2c^{-a'}}{n-2}\right)},$$

ce qui donne à très-peu près,

$$a' = a - \frac{2}{n-2}.$$

Alors on a

$$1 - c^{-a'} = 1 - c^{-a} - \frac{2c^{-a}}{n-2};$$

d'où l'on tire, en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$(1-c^{-a'})^n = (1-c^{-a})^n;$$

par conséquent on a, en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$\frac{\Delta^n \cdot s^{5i-2}}{(n-2)^{5i-2}} = (1-c^{-a})^n.$$

On aura donc, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$;

$$\frac{\Delta^n \cdot [s\cdot(s^2-1)\cdot(s^2-4)]^i}{[n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)]^i}$$
$$= (1-c^{-a})^n \cdot \left[1 + \frac{(5i-2n+16)}{2\cdot(n-2)} \cdot c^{-a} + \frac{5i}{2} \cdot c^{-2a}\right].$$

Cette quantité doit, par la condition du problême, être égale à $\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$1-c^{-a}=\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}.\left[1-\frac{(5i-2n+16)}{2n.(n-2)}.c^{-a}-\frac{5i}{2n}.c^{-2a}\right];$$

d'où l'on tire

$$c^{-a}=(1-\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}).\left[1+\frac{(5i-2n+16)}{2n.(n-2)}+\frac{5i}{2n}.c^{-a}\right];$$

par conséquent on a en logarithmes hyperboliques,

$$a=\log\left(\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}\right)-\frac{(5i-2n+16)}{2n.(n-2)}-\frac{5i}{2n}.c^{-a};$$

or on a, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$a=\frac{5i+1}{(n-2).\sqrt[n]{2}};$$

on aura donc

$$i=\frac{(n-2)}{5}.\sqrt[n]{2}.\left[1-\frac{1}{2n}-\frac{16}{10.in}-\tfrac{1}{2}.(\sqrt[n]{2}-1)\right].\log\left(\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}\right).$$

En substituant pour n sa valeur 90, on trouve

$$i=85,53;$$

ensorte qu'il y a un peu moins d'un contre un à parier, que tous les numéros sortiront dans 85 tirages, et un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 86 tirages.

Un moyen fort simple et très-approché d'obtenir la valeur de i, est de supposer $\frac{\Delta^n.s^i}{n^i}$, ou la série

$$1-n.\left(\frac{n-1}{n}\right)^i+\frac{n.(n-1)}{1.2}.\left(\frac{n-2}{n}\right)^i-\text{etc.}$$

égale au développement

$$1-n.\left(\frac{n-1}{n}\right)^i+\frac{n.(n-1)}{1.2}.\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i}-\text{etc.}$$

du binome $\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n$. En effet, les deux séries ont les deux premiers termes égaux respectivement. Leurs troisièmes termes sont aussi, à très-peu près, égaux entre eux; car on a à fort peu près $\left(\frac{n-2}{n}\right)^i$ égal à $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i}$. En effet, leurs logarithmes hyperboliques sont, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{i}{n^2}$, égaux l'un et l'autre à $-\frac{i}{n}$. On verra de la même manière, que les quatrièmes termes, les cinquièmes, etc., sont très-peu différens, lorsque n et i sont de très-grands nombres; mais la différence s'accroît sans cesse, à mesure que les termes s'éloignent du premier, ce qui doit à la fin, en produire une sensible entre les séries elles-mêmes. Pour l'apprécier, déterminons la valeur de i conclue de l'égalité des deux séries. En égalant à $\frac{1}{k}$, le binome $\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n$, on aura

$$i=\frac{\log\left(1-\sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right)}{\log\left(\frac{n-1}{n}\right)},$$

ces logarithmes pouvant être à volonté, hyperboliques ou tabulaires. Soit $\sqrt[n]{\frac{1}{k}}=1-z$. Nous aurons en prenant les logarithmes hyperboliques de chaque membre de cette équation,

$$\frac{1}{n}.\log k=-\log(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\text{etc.}$$

ce qui donne à très-peu près,

$$z=\frac{\log k}{n}.\left(1-\frac{\log k}{2n}\right);$$

on aura donc en logarithmes hyperboliques,

$$\log\left(1-\sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right)=\log z=\log\log k-\log n-\frac{\log k}{2n}.$$

On a ensuite

$$\log \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \text{etc.}$$

L'expression précédente de i devient ainsi à très-peu près,

$$i = n.(\log n - \log\log k).\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \tfrac{1}{2}.\log k;$$

(p. 195)

l'excès de la valeur trouvée précédemment pour i, sur celle-ci, est

$$\frac{\log k}{2}.(\log n - \log\log k);$$

cet excès devient infini, lorsque n est infini; mais il faut un très-grand nombre pour le rendre bien sensible; et dans le cas de $n = 10000$ et de $k = 2$, il n'est encore que de trois unités.

Si l'on considère pareillement le développement

$$1 - n.\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \text{etc.}$$

de l'expression $\frac{\Delta^n.[s'.(s'-1).(s'-2).(s'-3).(s'-4)]^i}{[n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)]^i}$, comme celui du binome $\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n$; on aura pour déterminer le nombre i de coups dans lesquels on peut parier un contre un, que tous les numéros sortiront, l'équation

$$\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n = \tfrac{1}{2};$$

ce qui donne

$$i = \frac{\log\left(\dfrac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}\right)}{\log\left(\dfrac{n}{n-5}\right)},$$

Ces logarithmes peuvent être tabulaires. En faisant $n = 90$, on trouve

$$i = 85{,}204,$$

ces

ce qui diffère très-peu de la valeur $i = 85,53$ que nous avons trouvée ci-dessus.

5. Une urne étant supposée renfermer le nombre x de boules, on en tire une partie ou la totalité, et l'on demande la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair.

La somme des cas dans lesquels ce nombre est l'unité, égale évidemment x; puisque chacune des boules peut également être extraite. La somme des cas dans lesquels ce nombre égale 2, est la somme des combinaisons des x boules prises deux à deux, et cette somme est, par le n° 3, égale à $\frac{x.(x-1)}{1.2}$. La somme des cas dans lesquels le même nombre égale 3, est la somme des combinaisons des boules prises trois à trois, et cette somme est $\frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2.3}$; et ainsi de suite. Ainsi les termes successifs du développement de la fonction $(1+1)^x-1$, représenteront tous les cas dans lesquels le nombre des boules extraites, est successivement 1, 2, 3, etc. jusqu'à x; d'où il est facile de conclure que la somme de tous les cas relatifs aux nombres impairs, est $\frac{1}{2}.(1+1)^x-\frac{1}{2}.(1-1)^x$, ou 2^{x-1}; et que la somme de tous les cas relatifs aux nombres pairs, est $\frac{1}{2}.(1+1)^x+\frac{1}{2}.(1-1)^x-1$, ou $2^{x-1}-1$. La réunion de ces deux sommes est le nombre de tous les cas possibles; ce nombre est donc 2^x-1; ainsi la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair, est $\frac{2^{x-1}-1}{2^x-1}$, et la probabilité que ce nombre sera impair, est $\frac{2^{x-1}}{2^x-1}$; il y a donc de l'avantage à parier avec égalité, pour un nombre impair.

Si le nombre x est inconnu, et si l'on sait seulement qu'il ne peut excéder n, et que ce nombre et tous les inférieurs sont également possibles; on aura le nombre de tous les cas possibles relatifs aux nombres impairs, en faisant la somme de toutes les valeurs de 2^{x-1}, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$, et il est facile de voir que cette somme est 2^n-1. On aura pareillement la somme de tous les cas possibles relatifs aux nombres pairs, en sommant la fonction $2^{x-1}-1$, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$, et l'on trouve cette somme égale à $2^n - n - 1$; la probabilité d'un nombre pair est donc alors $\frac{2^n - n - 1}{2^{n+1} - n - 2}$; et celle d'un nombre impair est $\frac{2^n - 1}{2^{n+1} - n - 2}$.

Supposons maintenant que l'urne renferme le nombre x de boules blanches, et le même nombre de boules noires; on demande la probabilité qu'en tirant un nombre pair quelconque de boules, on amènera autant de boules blanches que de boules noires, tous les nombres pairs pouvant être également amenés.

Le nombre des cas dans lesquels une boule blanche de l'urne peut se combiner avec une boule noire, est évidemment $x.x$. Le nombre des cas dans lesquels deux boules blanches peuvent se combiner avec deux boules noires, est $\frac{x.(x-1)}{1.2} \cdot \frac{x.(x-1)}{1.2}$, et ainsi de suite. Le nombre des cas dans lesquels on amènera autant de boules blanches que de boules noires, est donc la somme des carrés des termes du développement du binome $(1+1)^x$, moins l'unité. Pour avoir cette somme, nous observerons qu'elle est égale au terme indépendant de a, dans le développement de $\left(1+\frac{1}{a}\right)^x \cdot (1+a)^x$. Cette fonction est égale à $\frac{(1+a)^{2x}}{a^x}$. Le terme indépendant de a, dans son développement, est ainsi le coefficient du terme moyen du binome $(1+a)^{2x}$; ce coefficient est $\frac{1.2.3.\ldots.2x}{(1.2.3.\ldots\ldots x)^2}$; le nombre des cas dans lesquels on peut tirer de l'urne autant de boules blanches que de boules noires, est donc

$$\frac{1.2.3\ldots 2x}{(1.2.3\ldots.x)^2} - 1.$$

Le nombre de tous les cas possibles est la somme des termes impairs dans le développement du binome $(1+1)^{2x}$, moins le premier, ou l'unité. Cette somme est $\frac{1}{2}.(1+1)^{2x} + \frac{1}{2}.(1-1)^{2x}$; le nombre des cas possibles est donc $2^{2x-1} - 1$; ce qui donne pour l'expression de la probabilité cherchée,

$$\frac{\frac{1.2.3\ldots 2x}{(1.2.3\ldots.x)^2} - 1}{2^{2x-1} - 1}.$$

Dans le cas où x est un grand nombre, cette probabilité se réduit par le n° 32 du premier Livre, à $\frac{2}{\sqrt{x\pi}}$, π étant toujours la demi-circonférence dont 1 est le rayon.

6. Considérons un nombre $x+x'$ d'urnes, dont la première renferme p boules blanches et q boules noires; la seconde, p' boules blanches et q' boules noires; la troisième, p'' boules blanches et q'' boules noires, et ainsi de suite. Supposons que l'on tire successivement une boule de chaque urne. Il est clair que le nombre de tous les cas possibles au premier tirage, est $p+q$; au second tirage, chacun des cas du premier pouvant se combiner avec les $p'+q'$ boules de la seconde urne, on aura $(p+q).(p'+q')$ pour le nombre de tous les cas possibles relatifs aux deux premiers tirages. Au troisième tirage, chacun de ces cas peut se combiner avec les $p''+q''$ boules de la troisième urne; ce qui donne...... $(p+q).(p'+q').(p''+q'')$ pour le nombre de tous les cas possibles relatifs à trois tirages, et ainsi du reste. Ce produit pour la totalité des urnes, sera composé de $x+x'$ facteurs; et la somme de tous les termes de son développement, dans lesquels la lettre p, avec ou sans accent, est répétée x fois, et par conséquent la lettre q, x' fois, exprimera le nombre des cas dans lesquels on peut tirer des urnes, x boules blanches et x' boules noires.

Si p', p'', etc. sont égaux à p, et si q', q'', etc. sont égaux à q; le produit précédent devient $(p+q)^{x+x'}$. Le terme multiplié par $p^x.q^{x'}$ dans le développement de ce binome est

$$\frac{(x+x').(x+x'-1)\ldots.(x+1)}{1.2.3\ldots.x'}.p^x.q^{x'},$$

ou

$$\frac{1.2.3\ldots.(x+x')}{1.2.3\ldots.x.1.2.3\ldots.x'}.p^x.q^{x'}.$$

Ainsi cette quantité exprime le nombre des cas dans lesquels on peut amener x boules blanches et x' boules noires. Le nombre de tous les cas possibles étant $(p+q)^{x+x'}$, la probabilité d'amener x boules blanches et x' boules noires, est

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'}.\left(\frac{p}{p+q}\right)^x.\left(\frac{q}{p+q}\right)^{x'},$$

où l'on doit observer que $\frac{p}{p+q}$ est la probabilité de tirer une boule blanche de l'une des urnes, et que $\frac{q}{p+q}$ est la probabilité d'en tirer une boule noire.

Il est visible qu'il est parfaitement égal de tirer x boules blanches et x' boules noires, de $x+x'$ urnes qui renferment chacune p boules blanches et q boules noires, ou d'une seule de ces urnes, pourvu que l'on remette dans l'urne la boule extraite à chaque tirage.

Considérons maintenant un nombre $x+x'+x''$ d'urnes dont la première renferme p boules blanches, q boules noires, et r boules rouges; dont la seconde renferme p' boules blanches, q' boules noires, et r' boules rouges; et ainsi de suite. Supposons que l'on tire une boule de chacune de ces urnes. Le nombre de tous les cas possibles sera le produit des $x+x'+x''$ facteurs,

$$(p+q+r).(p'+q'+r').(p''+q''+r'').\text{etc.}$$

Le nombre des cas dans lesquels on amènera x boules blanches, x' boules noires, et x'' boules rouges, sera la somme de tous les termes du développement de ce produit, dans lesquels la lettre p sera répétée x fois; la lettre q, x' fois, et la lettre r, x'' fois. Si toutes les lettres accentuées p', q', etc., sont égales à leurs correspondantes non-accentuées, le produit précédent se change dans le trinome $(p+q+r)^{x+x'+x''}$. Le terme de son développement qui a pour facteur $p^x.q^{x'}.r^{x''}$, est

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x'+x'')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3\ldots x''}.p^x.q^{x'}.r^{x''};$$

ainsi le nombre de tous les cas possibles étant $(p+q+r)^{x+x'+x''}$, la probabilité d'amener x boules blanches, x' boules noires, et x'' boules rouges, sera

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x'+x'')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3\ldots x''}.\left(\frac{p}{p+q+r}\right)^x.\left(\frac{q}{p+q+r}\right)^{x'}.\left(\frac{r}{p+q+r}\right)^{x''},$$

où l'on doit observer que $\frac{p}{p+q+r}$, $\frac{q}{p+q+r}$, $\frac{r}{p+q+r}$ sont les probabilités respectives de tirer de chaque urne, une boule blanche, une boule noire, et une boule rouge.

On voit généralement que si les urnes renferment chacune le même nombre de couleurs, p étant le nombre des boules de la première couleur; q celui des boules de la seconde couleur; r, s, etc., ceux des boules de la troisième, de la quatrième, etc.; $x+x'+x''+x'''+$ etc. étant le nombre des urnes; la probabilité d'amener x boules de la première couleur, x' boules de la seconde, x'' boules de la troisième, x''' boules de la quatrième, etc., sera

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x'+x''+x'''+\text{etc.})}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3\ldots x''.1.2.3\ldots x'''.\text{etc.}}\cdot\left(\frac{p}{p+q+r+s+\text{etc.}}\right)^{x}$$
$$\times\left(\frac{q}{p+q+r+s+\text{etc.}}\right)^{x'}\cdot\left(\frac{r}{p+q+r+s+\text{etc.}}\right)^{x''}\cdot\left(\frac{s}{p+q+r+s+\text{etc.}}\right)^{x'''}.\text{etc.}$$

7. Déterminons maintenant la probabilité de tirer des urnes précédentes, x boules blanches, avant d'amener soit x' boules noires, soit x'' boules rouges, etc. Il est clair que n exprimant le nombre des couleurs, cela doit arriver au plus tard après $x+x'+x''+$ etc. $-n+1$ tirages. Car lorsque le nombre des boules blanches extraites est égal ou moindre que x, celui des boules noires extraites, moindre que x', celui des boules rouges extraites, moindre que x'', etc.; le nombre total des boules extraites, et par conséquent, le nombre des tirages est égal ou moindre que $x+x'+x''+$ etc. $-n+1$; on peut donc ne considérer ici que $x+x'+x''+$etc.$-n+1$ urnes.

Pour avoir le nombre des cas dans lesquels on peut amener x boules blanches au $(x+i)^{\text{ième}}$ tirage, il faut déterminer tous les cas dans lesquels $x-1$ boules blanches seront sorties au tirage $x+i-1$. Ce nombre est le terme multiplié par p^{x-1} dans le développement du polynome $(p+q+r+\text{etc.})^{x+i-1}$, et ce terme est

$$\frac{1.2.3\ldots(x+i-1)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2.3\ldots i}.p^{x-1}.(q+r+\text{etc.})^{i}.$$

En le combinant avec les p boules blanches de l'urne $x+i$, on aura un produit qu'il faudra encore multiplier par le nombre de tous les cas possibles relatifs aux $x'+x''+$etc.$-n-i+1$ tirages suivans, et ce nombre est

$$(p+q+r+\text{etc.})^{x'+x''+\text{etc.}-n-i+1};$$

on aura donc

$$\frac{1.2.3\ldots(x+i-1)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2.3\ldots i}.p^x.(q+r+\text{etc.})^i.(p+q+r+\text{etc.})^{x'+x''+\text{etc.}-n-i+1}; \quad (a)$$

pour le nombre des cas dans lesquels l'événement peut arriver précisément au tirage $x+i$. Il faut cependant en exclure les cas dans lesquels q est élevé à la puissance x', ceux dans lesquels r est élevé à la puissance x'', etc.; car dans tous ces cas, il est déjà arrivé au tirage $x+i-1$, ou x' boules noires, ou x'' boules rouges, ou etc. Ainsi dans le développement du polynome $(q+r+\text{etc.})^i$, il ne faut avoir égard qu'aux termes multipliés par $q^f.r^{f'}.s^{f''}.\text{etc.}$, dans lesquels f est moindre que x', f' est moindre que x'', f'' est moindre que x''', etc. Le terme multiplié par $q^f.r^{f'}.s^{f''}.\text{etc.}$, dans ce développement, est

$$\frac{1.2.3\ldots i}{1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'.1.2.3\ldots f''.\text{etc.}}.q^f.r^{f'}.s^{f''}.\text{etc.}$$

Tous les termes que l'on doit considérer dans la fonction (a) sont donc représentés par

$$\frac{1.2.3\ldots(x+f+f'+\text{etc.}-1)}{1.2.3\ldots\overline{x-1}.1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'.\text{etc.}}.p^x.q^f.r^{f'}.\text{etc.}$$
$$\times(p+q+r+\text{etc.})^{x'+x''+\text{etc.}-f-f'-\text{etc.}-n+1}; \quad (b)$$

parce que i est égal à $f+f'+\text{etc.}$ Ainsi en donnant dans cette dernière fonction, à f toutes les valeurs entières, depuis $f=0$ jusqu'à $f=x'-1$; à f' toutes les valeurs depuis $f'=0$ jusqu'à $f'=x''-1$, et ainsi de suite, la somme de tous ces termes exprimera le nombre des cas dans lesquels l'événement proposé peut arriver dans $x+x'+\text{etc.}-n+1$ tirages. Il faut diviser cette somme par le nombre de tous les cas possibles, c'est-à-dire par $(p+q+r+\text{etc.})^{x+x'+x''+\text{etc.}-n+1}$. Si l'on désigne par p' la probabilité de tirer une boule blanche d'une quelconque des urnes; par q' celle d'en tirer une boule noire; par r' celle d'en tirer une boule rouge, etc.; on aura

$$p'=\frac{p}{p+q+r+\text{etc.}}, \quad q'=\frac{q}{p+q+r+\text{etc.}}, \quad r'=\frac{r}{p+q+r+\text{etc.}}, \quad \text{etc.};$$

la fonction (b) divisée par $(p+q+r+\text{etc.})^{x+x'+\text{etc.}-n+1}$, deviendra ainsi,

$$\frac{1.2.3\ldots(x+f+f'+\text{etc.}-1)}{1.2.3\ldots\overline{x-1}.1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'.\text{etc.}}.p'^{x}.q'^{f}.r'^{f'}.\text{etc.}$$

La somme des termes que l'on obtiendra en donnant à f toutes les valeurs depuis $f=0$ jusqu'à $f=x'-1$; à f' toutes les valeurs depuis $f'=0$ jusqu'à $f'=x''-1$, etc., sera la probabilité cherchée d'amener x boules blanches avant x' boules noires, ou x'' boules rouges, ou etc.

On peut, d'après cette analyse, déterminer le sort d'un nombre n de joueurs A, B, C, etc., dont p', q', r', etc. représentent les adresses respectives, c'est-à-dire, leurs probabilités de gagner un coup, lorsque pour gagner la partie, il manque x coups au joueur A, x' coups au joueur B, x'' coups au joueur C, et ainsi de suite; car il est clair que relativement au joueur A, cela revient à déterminer la probabilité d'amener x boules blanches avant x' boules noires, ou x'' boules rouges, etc.; en tirant successivement une boule d'un nombre $x+x'+x''+\text{etc.}-n+1$ d'urnes qui renferment chacune p boules blanches, q boules noires, r boules rouges, etc., p, q, r, etc. étant respectivement égaux aux numérateurs des fractions p', q', r', etc. réduites au même dénominateur.

8. Le problème précédent peut être résolu d'une manière fort simple, par l'analyse des fonctions génératrices. Nommons $y_{x,x',x'',\text{etc.}}$ la probabilité du joueur A pour gagner la partie. Au coup suivant, cette probabilité se change dans $y_{x-1,x',x'',\text{etc.}}$, si A gagne ce coup, et la probabilité pour cela est p'. La même probabilité se change dans $y_{x,x'-1,x'',\text{etc.}}$, si le coup est gagné par le joueur B, et la probabilité pour cela est q'; elle se change dans $y_{x,x',x''-1,\text{etc.}}$ si le coup est gagné par le joueur C, et la probabilité pour cela est r', et ainsi de suite; on a donc l'équation aux différences partielles,

$$y_{x,x',x'',\text{etc.}}=p'.y_{x-1,x',x'',\text{etc.}}+q'.y_{x,x'-1,x'',\text{etc.}}+r'.y_{x,x',x''-1,\text{etc.}}+\text{etc.}$$

Soit u une fonction de t, t', t'', etc., telle que $y_{x,x',x'',\text{etc.}}$ soit le coefficient de $t^{x}.t'^{x'}.t''^{x''}.\text{etc.}$ dans son développement; l'équation précédente aux différences partielles donnera, en passant des coefficiens aux fonctions génératrices,

$$u = u.(p't + q't' + r't'' + \text{etc});$$

d'où l'on tire

$$1 = p't + q't' + r't'' + \text{etc.};$$

par conséquent,

$$\frac{1}{t} = \frac{p'}{1 - q't' - r't'' - \text{etc.}};$$

ce qui donne

$$\frac{u}{t^x} = \frac{u.p'^x}{(1 - q't' - r't'' - \text{etc.})^x} = u.p'^x.\left\{\begin{array}{l} 1 + x.(q't' + r't'' + \text{etc.}) \\ + \dfrac{x.(x+1)}{1.2}.(q't' + r't'' + \text{etc.})^2 \\ + \dfrac{x.(x+1).(x+2)}{1.2.3}.(q't' + r't'' + \text{etc.})^3 \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

Maintenant le coefficient de $t^0.t'^{x'}.t''^{x''}.\text{etc.}$ dans $\frac{u}{t^x}$ est $y_{x,x',x'',\text{etc.}}$; et le même coefficient dans un terme quelconque du dernier membre de l'équation précédente, tel que $ku.p'^x.t'^{l'}.t''^{l''}.\text{etc.}$, est $kp'^x.y_{0,x'-l',x''-l'',\text{etc.}}$; la quantité $y_{0,x'-l',x''-l'',\text{etc.}}$ est égale à l'unité, puisqu'alors il ne manque aucun coup au joueur A. De plus, il faut rejeter toutes les valeurs de $y_{0,x'-l',x''-l'',\text{etc.}}$, dans lesquelles l' est égal ou plus grand que x', l'' est égal ou plus grand que x'', et ainsi de suite; parce que ces termes ne peuvent être donnés par l'équation aux différences partielles, la partie étant finie, lorsque l'un quelconque des joueurs B, C, etc. n'a plus de coups à jouer; il ne faut donc considérer dans le dernier membre de l'équation précédente, que les puissances de t' moindres que x', que les puissances de t'' moindres que x'', etc. L'expression précédente de $\frac{u}{t^x}$ donnera ainsi, en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens,

$$y_{x,x',x'',\text{etc.}} = p'^x.\left\{\begin{array}{l} 1 + x.(q' + r' + \text{etc.}) \\ + \dfrac{x.(x+1)}{1.2}.(q' + r' + \text{etc.})^2 \\ + \dfrac{x.(x+1).(x+2)}{1.2.3}.(q' + r' + \text{etc.})^3 \\ + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

pourvu

pourvu que l'on rejette les termes dans lesquels la puissance de q' surpasse $x'-1$, ceux dans lesquels la puissance de r' surpasse $x''-1$, etc. Le second membre de cette équation se développe dans une suite de termes compris dans la formule générale

$$\frac{1.2.3\ldots(x+f+f'+\text{etc.}-1)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2.3\ldots f.1.2.3\ldots f'.\text{etc.}}.p'^{x}.q'^{f}.r'^{f'}.\text{etc.}$$

La somme de ces termes relatifs à toutes les valeurs de f, depuis f nul jusqu'à $f=x'-1$; à toutes les valeurs de f', depuis f' nul jusqu'à $f'=x''-1$, etc., sera la probabilité $y_{x,x',x'',\text{etc.}}$; ce qui est conforme à ce qui précède.

Dans le cas de deux joueurs A et B, on aura pour la probabilité du joueur A,

$$p'^{x}.\left\{1+x.q'+\frac{x.(x+1)}{1.2}.q'^{2}\ldots+\frac{x.(x+1).(x+2)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}.q'^{x'-1}\right\};$$

En changeant p' en q', et x en x', et réciproquement, on aura

$$q'^{x'}.\left\{1+x'.p'+\frac{x'.(x'+1)}{1.2}.p'^{2}\ldots+\frac{x'.(x'+1).(x'+2)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x-1)}.p'^{x-1}\right\}$$

pour la probabilité que le joueur B gagnera la partie. La somme de ces deux expressions doit être égale à l'unité; ce que l'on voit évidemment en leur donnant les formes suivantes. La première expression peut, par le n° 37 du premier Livre, être transformée dans celle-ci,

$$p'^{x+x'-1}.\left\{\begin{array}{l}1+\frac{(x+x'-1)}{1}.\frac{q'}{p'}+\frac{(x+x'-1).(x+x'-2)}{1.2}.\frac{q'^{2}}{p'^{2}}\\ \qquad\ldots+\frac{(x+x'-1)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots(x'-1)}.\frac{q'^{x'-1}}{p'^{x'-1}}\end{array}\right\};$$

et la seconde peut être transformée dans celle-ci,

$$q'^{x+x'-1}.\left\{\begin{array}{l}1+\frac{(x+x'-1)}{1}.\frac{p'}{q'}+\frac{(x+x'-1).(x+x'-2)}{1.2}.\frac{p'^{2}}{q'^{2}}\\ \qquad\ldots+\frac{(x+x'-1)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-1)}.\frac{p'^{x-1}}{q'^{x-1}}\end{array}\right\}.$$

La somme de ces expressions est le développement du binome

$(p'+q')^{x+x'-1}$, et par conséquent elle est égale à l'unité; parce que A ou B devant gagner chaque coup, la somme $p'+q'$ de leurs probabilités pour cela, est l'unité.

Le problème que nous venons de résoudre, est celui que l'on nomme *problème des partis* dans l'analyse des hasards. Le chevalier de Meré le proposa à Pascal, avec quelques-autres problèmes sur le jeu des dés. Deux joueurs dont les adresses sont égales, ont mis au jeu la même somme; ils doivent jouer jusqu'à ce que l'un d'eux ait gagné un nombre de fois donné, son adversaire; mais ils conviennent de quitter le jeu, lorsqu'il manque encore x points au premier joueur pour atteindre ce nombre donné, et lorsqu'il manque x' points au second joueur. On demande de quelle manière ils doivent se partager la somme mise au jeu. Tel est le problème que Pascal résolut au moyen de son triangle arithmétique. Il le proposa à Fermat qui en donna la solution par la voie des combinaisons; ce qui occasionna entre ces deux grands géomètres une discussion, à la suite de laquelle Pascal reconnut la bonté de la méthode de Fermat, pour un nombre quelconque de joueurs. Malheureusement nous n'avons qu'une partie de leur correspondance, dans laquelle on voit les premiers élémens de la théorie des probabilités, et leur application à l'un des problèmes les plus curieux de cette théorie.

Le problème proposé par Pascal à Fermat, revient à déterminer les probabilités respectives des joueurs pour gagner la partie; car il est clair que l'enjeu doit être partagé entre les joueurs, proportionnellement à leurs probabilités. Ces probabilités sont les mêmes que celles de deux joueurs A et B, qui doivent atteindre un nombre donné de points, x étant le nombre de ceux qui manquent au joueur A, et x' étant le nombre de ceux qui manquent au joueur B, en imaginant une urne renfermant deux boules dont l'une est blanche et l'autre est noire, toutes deux portant le n° 1, la boule blanche étant pour le joueur A, et la boule noire pour le joueur B. On tire successivement une de ces boules, et on la remet dans l'urne après chaque tirage. En nommant $y_{x,x'}$ la probabilité que le joueur A atteindra le premier, le nombre donné de points, ou, ce qui revient au même, qu'il aura x points avant que B en ait

x', on aura

$$y_{x,x'} = \tfrac{1}{2}.y_{x-1,x'} + \tfrac{1}{2}.y_{x,x'-1};$$

car si la boule que l'on extrait est blanche, $y_{x,x'}$ se change en $y_{x-1,x'}$, et si la boule extraite est noire, $y_{x,x'}$ se change en $y_{x,x'-1}$, et la probabilité de chacun de ces événemens est $\frac{1}{2}$; on a donc l'équation précédente.

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ dans cette équation aux différences partielles, est, par le n° 20 du premier Livre,

$$\frac{M}{1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t'};$$

M étant une fonction arbitraire de t'. Pour la déterminer, nous observerons que $y_{0,0}$ ne peut avoir lieu, puisque la partie cesse, lorsque l'une ou l'autre des variables x et x' est nulle; M doit donc avoir pour facteur t'. De plus $y_{0,x'}$ est l'unité, quel que soit x'; la probabilité du joueur A se changeant alors en certitude : or la fonction génératrice de l'unité, est généralement $\frac{t'^i}{1-t'}$, car les coefficiens des puissances de t' dans le développement de cette fonction, sont tous égaux à l'unité; dans le cas présent, $y_{0,x'}$ pouvant avoir lieu lorsque x' est ou 1, ou 2, ou 3, etc.; i doit être égal à l'unité; la fonction génératrice de $y_{0,x'}$ est donc égale à $\frac{t'}{1-t'}$; c'est le coefficient de t^0 dans le développement de la fonction génératrice de $y_{x,x'}$, ou dans

$$\frac{M}{1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t'}:$$

on a donc

$$\frac{M}{1-\frac{1}{2}t'} = \frac{t'}{1-t'},$$

ce qui donne

$$M = \frac{t'.(1-\frac{1}{2}t')}{(1-t')};$$

par conséquent la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{t'.(1-\frac{1}{2}t')}{(1-t').(1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t')}.$$

En la développant par rapport aux puissances de t, on a

$$\frac{t'}{1-t'}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1-\frac{1}{2}t'}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{t^2}{(1-\frac{1}{2}t')^2}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{t^3}{(1-\frac{1}{2}t')^3}+\text{etc.}\right).$$

Le coefficient de t^x dans cette série, est

$$\frac{1}{2^x}\cdot\frac{t'}{(1-t').(1-\frac{1}{2}t')^x};$$

$y_{x,x'}$ est donc le coefficient de $t'^{x'}$ dans cette dernière quantité : or on a

$$\frac{t'}{(1-t').(1-\frac{1}{2}t')^x}$$

$$=\frac{t'+\frac{1}{2}.x.t'^2+\frac{1}{2^2}.\frac{x.(x+1)}{1.2}.t'^3\ldots+\frac{1}{2^{x'-1}}.\frac{x.(x+1).(x+2)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}.t'^{x'}+\text{etc.}}{1-t'}.$$

En réduisant en série le dénominateur de cette dernière fraction, et multipliant le numérateur par cette série, on voit que le coefficient de $t'^{x'}$ dans ce produit, est ce que devient ce numérateur lorsqu'on y fait $t'=1$; on a donc

$$y_{x,x'}=\frac{1}{2^x}\cdot\left\{\begin{array}{l}1+x.\frac{1}{2}+\frac{x.(x+1)}{1.2}.\frac{1}{2^2}+\frac{x.(x+1).(x+2)}{1.2.3}.\frac{1}{2^3}\\ \ldots\ldots+\frac{x.(x+1)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}.\frac{1}{2^{x'-1}}\end{array}\right\};$$

résultat conforme à ce qui précède.

Concevons présentement qu'il y ait dans l'urne une boule blanche portant le n° 1, et deux boules noires, dont une porte le n° 1, et l'autre porte le n° 2; la boule blanche étant favorable à A, et les boules noires à son adversaire : chaque boule diminuant de son numéro, le nombre de points qui manquent au joueur auquel elle est favorable. $y_{x,x'}$ étant toujours la probabilité que le joueur A atteindra le premier le nombre donné, on aura l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x'}=\tfrac{1}{3}.y_{x-1,x'}+\tfrac{1}{3}.y_{x,x'-1}+\tfrac{1}{3}.y_{x,x'-2};$$

car au tirage suivant, si la boule blanche sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x-1,x'}$;

si la boule noire numérotée 1 sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x,x'-1}$; et si la boule noire numérotée 2 sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x,x'-2}$; et la probabilité de chacun de ces événemens est $\frac{1}{3}$.

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{M}{1-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}t'-\frac{1}{3}t'^2},$$

M étant une fonction arbitraire de t', qui doit, par ce qui précède, avoir pour facteur t', et dans le cas présent, être égale à

$$\frac{t'}{1-t'}.(1-\tfrac{1}{3}t'-\tfrac{1}{3}t'^2);$$

ensorte que la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{t'.(1-\frac{1}{3}t'-\frac{1}{3}t'^2)}{(1-t').(1-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}t'-\frac{1}{3}t'^2)}.$$

Le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction, est

$$\frac{1}{3^x}\cdot\frac{t'}{1-t'}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{3}t'-\frac{1}{3}t'^2)^x};$$

et il résulte de ce que nous venons de dire, que le coefficient de $t'^{x'}$ dans le développement de cette dernière quantité, est égal à

$$\frac{1}{3^x}\cdot\left\{\begin{array}{l} t'+\dfrac{x.t'^2.(1+t')}{3}+\dfrac{x.(x+1)}{1.2}\cdot\dfrac{t'^3.(1+t')^2}{3^2} \\ +\dfrac{x.(x+1).(x+2)}{1.2.3}\cdot\dfrac{t'^4.(1+t')^3}{3^3}+\text{etc.}\end{array}\right\};$$

en rejetant du développement de cette série, toutes les puissances de t' supérieures à $t'^{x'}$, et supposant dans ce que l'on conserve, $t'=1$, ce sera l'expression de $y_{x,x'}$.

Il est facile de traduire ce procédé en formule. Ainsi en supposant x' pair et égal à $2r+2$, on trouve

$$\begin{aligned} y_{x,x'}=\;&\frac{1}{3^x}\cdot\left\{1+x.\tfrac{2}{3}+\frac{x.(x+1)}{1.2}.(\tfrac{2}{3})^2\ldots\ldots\frac{x.(x+1)\ldots(x+r-1)}{1.2.3\ldots.r}.(\tfrac{2}{3})^r\right\} \\ &+\frac{x.(x+1)\ldots(x+r)}{1.2.3\ldots(r+1).3^{x+r+1}}.\left\{1+(r+1)+\frac{(r+1).r}{1.2}\ldots+\frac{(r+1).r\ldots2}{1.2.3\ldots r}\right\} \\ &+\frac{x.(x+1)\ldots(x+r+1)}{1.2.3\ldots(r+2).3^{x+r+2}}.\left\{1+(r+2)\ldots\ldots+\frac{(r+2).(r+1)\ldots.4}{1.2.3\ldots(r-1)}\right\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\frac{x.(x+1)\ldots\ldots(x+2r)}{1.2.3\ldots.(2r+1).3^{x+2r+1}}.\end{aligned}$$

Si l'on suppose x' impair et égal à $2r+1$, on aura

$$y_{x,x'} = \frac{1}{3^x}.\left\{1 + x.\tfrac{2}{3} + \frac{x.(x+1)}{1.2}.(\tfrac{2}{3})^2 \ldots\ldots + \frac{x.(x+1)\ldots(x+r-1)}{1.2.3\ldots r}.(\tfrac{2}{3})^r\right\}$$
$$+ \frac{x.(x+1)\ldots(x+r)}{1.2.3\ldots(r+1).3^{x+r+1}}.\left\{1 + (r+1) + \frac{(r+1).r}{1.2} \ldots\ldots + \frac{(r+1).r\ldots\ldots 3}{1.2.3\ldots(r-1)}\right\}$$
$$+ \frac{x.(x+1)\ldots(x+r+1)}{1.2.3\ldots(r+2).3^{x+r+2}}.\left\{1 + (r+2) + \frac{(r+2).(r+1)}{1.2} \ldots + \frac{(r+2).(r+1)\ldots 5}{1.2.3\ldots(r-2)}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{x.(x+1)\ldots(x+2r-1)}{1.2.3\ldots\ldots 2r.3^{x+2r}}.$$

Ainsi dans le cas de $x=2$ et $x'=5$, on a

$$y_{2,5} = \frac{350}{729}.$$

Concevons encore qu'il y ait dans l'urne deux boules blanches distinguées comme les deux boules noires, par les n^{os} 1 et 2 ; la probabilité du joueur A sera donnée par l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x'} = \tfrac{1}{4}.y_{x-1,x'} + \tfrac{1}{4}.y_{x-2,x'} + \tfrac{1}{4}.y_{x,x'-1} + \tfrac{1}{4}.y_{x,x'-2}.$$

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est alors, par le n° 20 du premier Livre,

$$\frac{M + N.t}{1 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t'^2};$$

M et N étant deux fonctions arbitraires de t'. Pour les déterminer, on observera que $y_{0,x'}$ est toujours égal à l'unité, et qu'il faut exclure dans M la puissance nulle de t'; on a donc

$$M = \frac{t'}{1-t'}.(1 - \tfrac{1}{4}t' - \tfrac{1}{4}t'^2).$$

Pour déterminer N, cherchons la fonction génératrice de $y_{1,x'}$. Si l'on observe que $y_{0,x'}$ est égal à l'unité, et que le joueur A n'ayant plus besoin que d'un point, il gagne la partie, soit qu'il amène la boule blanche numérotée 1, ou la boule blanche numérotée 2 ; l'équation précédente aux différences partielles donnera

$$y_{1,x'} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}.y_{1,x'-1} + \tfrac{1}{4}.y_{1,x'-2}.$$

Supposons $y_{1,x'} = 1 - y'_{x'}$; on aura

$$y'_{x'} = \tfrac{1}{4}.y'_{x'-1} + \tfrac{1}{4}.y'_{x'-2}.$$

La fonction génératrice de cette équation est

$$\frac{m + nt'}{1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2},$$

m et n étant deux constantes. Pour les déterminer, on observera que $y_{1,0} = 0$, et que par conséquent $y'_0 = 1$; ce qui donne $m = 1$. La fonction génératrice de $y'_{x'}$ est donc

$$\frac{1 + nt'}{1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2}.$$

On a ensuite évidemment $y_{1,1} = \frac{1}{2}$, ce qui donne $y'_1 = \frac{1}{2}$; y'_1 est le coefficient de t' dans le développement de la fonction précédente, et ce coefficient est $n + \frac{1}{4}$; on a donc $n + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, ou $n = \frac{1}{4}$. La fonction génératrice de l'unité est $\frac{1}{1-t'}$, parce qu'ici toutes les puissances de t' peuvent être admises; on a ainsi

$$\frac{1}{1-t'} - \frac{1 + \frac{1}{4}t'}{1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{1}{2}t'}{(1-t').(1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2)},$$

pour la fonction génératrice de $y_{1,x'}$. Cette même fonction est le coefficient de t dans le développement de la fonction génératrice de $y_{x,x'}$, fonction qui, par ce qui précède, est

$$\frac{\frac{t'}{1-t'}.(1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2) + N.t}{1 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t'^2};$$

ce coefficient est

$$\frac{\frac{1}{4}t'}{(1-t').(1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2)} + \frac{N}{1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2};$$

en l'égalant à

$$\frac{\frac{1}{2}t'}{(1-t').(1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2)};$$

on aura

$$N = \frac{\frac{1}{4}t'}{1-t'}.$$

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est ainsi

$$\frac{t'.(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)+\frac{1}{4}tt'}{(1-t').(1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2)}.$$

Si l'on développe en série la fonction

$$\frac{t'.(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2)+\frac{1}{4}tt'}{1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2}-t';$$

on aura

$$\frac{(2+t).tt'}{4}.\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{4}.t'.(1+t')+\frac{1}{4^2}.t'^2.(1+t')^2+\frac{1}{4^3}.t'^3.(1+t')^3+\text{etc.} \\ +\frac{t.(1+t)}{4}.\left[1+\frac{2}{4}.t'.(1+t')+\frac{3}{4^2}.t'^2.(1+t')^2+\frac{4}{4^3}.t'^3.(1+t')^3+\text{etc.}\right] \\ +\frac{t^2.(1+t)^2}{4^2}.\left[1+\frac{3}{4}.t'.(1+t')+\frac{3.4}{1.2.4^2}.t'^2.(1+t')^2+\frac{3.4.5}{1.2.3.4^3}.t'^3.(1+t')^3+\text{etc.}\right] \\ +\frac{t^3.(1+t)^3}{4^3}.\left[1+\frac{4}{4}.t'.(1+t')+\frac{4.5}{1.2.4^2}.t'^2.(1+t')^2+\frac{4.5.6}{1.2.3.4^3}.t'^3.(1+t')^3+\text{etc.}\right] \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}.$$

Si l'on rejette de cette série, toutes les puissances de t autres que t^x, et toutes les puissances de t' supérieures à $t'^{x'}$, et si dans ce qui reste, on fait $t=1$, $t'=1$, on aura l'expression de $y_{x,x'}$ lorsque x est égal ou plus grand que l'unité : lorsque x est nul, on a $y_{0,x'}=1$. Il est facile de traduire ce procédé en formule, comme on l'a fait pour le cas précédent.

Nommons $z_{x,x'}$ la probabilité du joueur B; la fonction génératrice de $z_{x,x'}$ sera ce que devient la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ lorsqu'on y change t en t', et réciproquement; ce qui donne pour cette fonction,

$$\frac{t.(1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2)+\frac{1}{4}tt'}{(1-t).(1-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t'^2)}.$$

En ajoutant les deux fonctions génératrices, leur somme se réduit à

$$\frac{t}{1-t}+\frac{t'}{1-t'}+\frac{tt'}{(1-t)(1-t')},$$

dans laquelle le coefficient de $t^x.t'^{x'}$ est l'unité; ainsi l'on a

$$y_{x,x'}+z_{x,x'}=1;$$

ce qui est visible d'ailleurs, puisque la partie doit être nécessairement gagnée par l'un des joueurs.

9. Concevons dans une urne, r boules marquées du n° 1, r boules marquées du n° 2, r boules marquées du n° 3, et ainsi de suite jusqu'au n° n. Ces boules étant bien mêlées dans l'urne, on les tire toutes successivement; on demande la probabilité qu'il sortira au moins une de ces boules, au rang indiqué par son numéro, ou qu'il en sortira au moins deux, ou au moins trois, etc.

Cherchons d'abord la probabilité qu'il en sortira au moins une. Pour cela, nous observerons qu'aucune boule ne peut sortir à son rang, que dans les n premiers tirages; on peut donc ici faire abstraction des tirages suivans; or le nombre total des boules étant rn, le nombre de leurs combinaisons n à n, en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles, est par ce qui précède,

$$rn.(rn-1).(rn-2)\ldots.(rn-n+1);$$

c'est donc le nombre de tous les cas possibles dans les n premiers tirages.

Considérons une des boules marquées du n° 1, et supposons qu'elle sorte à son rang, ou la première. Le nombre des combinaisons des $rn-1$ autres boules prises $n-1$ à $n-1$, sera

$$(rn-1).(rn-2)\ldots.(rn-n+1);$$

c'est le nombre des cas relatifs à la supposition que nous venons de faire; et comme cette supposition peut s'appliquer aux r boules marquées du n° 1, on aura

$$r.(rn-1).(rn-2)\ldots\ldots(rn-n+1)$$

pour le nombre des cas relatifs à l'hypothèse qu'une des boules marquées du n° 1, sortira à son rang. Le même résultat a lieu pour l'hypothèse qu'une quelconque des $n-1$ autres espèces de boules sortira au rang indiqué par son numéro : en ajoutant donc tous les résultats relatifs à ces diverses hypothèses, on aura

$$nr.(rn-1).(rn-2)\ldots\ldots(rn-n+1), \quad (a)$$

pour le nombre des cas dans lesquels une boule au moins sortira à son rang, pourvu toutefois que l'on en retranche les cas qui sont répétés.

Pour déterminer ces cas, considérons une des boules du n° 1, sortant la première, et une des boules du n° 2, sortant la seconde. Ce cas est compris deux fois dans le nombre précédent; car il est compris une fois dans le nombre des cas relatifs à la supposition qu'une des boules numérotées 1, sortira à son rang, et une seconde fois, dans le nombre des cas relatifs à la supposition qu'une des boules numérotée 2, sortira à son rang; et comme cela s'étend à deux boules quelconques sortant à leur rang, on voit qu'il faut retrancher du nombre des cas précédens, le nombre de tous les cas dans lesquels deux boules sortent à leur rang.

Le nombre des combinaisons de deux boules de numéros différens est $\frac{n.(n-1)}{1.2}.r^2$; car le nombre des numéros étant n, leurs combinaisons deux à deux sont au nombre $\frac{n.(n-1)}{1.2}$; et dans chacune de ces combinaisons, on peut combiner les r boules marquées d'un des numéros, avec les r boules marquées de l'autre numéro. Le nombre des combinaisons des $rn-2$ boules restantes, prises $n-2$ à $n-2$, en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles, est

$$(rn-2).(rn-3).....(rn-n+1);$$

ainsi le nombre des cas relatifs à la supposition que deux boules sortent à leur rang, est

$$\frac{n.(n-1)}{1.2}.r^2.(rn-2).(rn-3)....(rn-n+1);$$

en le retranchant du nombre (a), on aura

$$\begin{aligned} &nr.(rn-1).(rn-2)...(rn-n+1)\\ &-\frac{n.(n-1)}{1.2}.r^2.(rn-2).(rn-3)...(rn-n+1); \qquad (a') \end{aligned}$$

pour le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sortira à son rang, pourvu que l'on retranche encore de cette fonction, les cas répétés, et qu'on lui ajoute ceux qui manquent.

Ces cas sont ceux dans lesquels trois boules sortent à leur rang. En nommant k ce nombre, il est répété trois fois dans le premier terme de la fonction (a'); car il peut résulter dans ce terme, des trois suppositions de chacune des trois boules sortant à son rang. Le nombre k est pareillement compris trois fois dans le second terme de la fonction; car il peut résulter de chacune des suppositions relatives à deux quelconques des trois boules sortant à leur rang; ainsi ce second terme étant affecté du signe $-$, le nombre k ne se trouve point dans la fonction (a'); il faut donc le lui ajouter pour qu'elle contienne tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang. Le nombre des combinaisons des n numéros pris trois à trois, est $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$, et comme on peut combiner les r boules d'un des numéros de chaque combinaison, avec les r boules du second numéro, et avec les r boules du troisième numéro, on aura le nombre total des combinaisons dans lesquelles trois boules sortent à leur rang, en multipliant $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.r^3$, par $(rn-3).(rn-4)\ldots(rn-n+1)$, nombre qui exprime celui des combinaisons des $rn-3$ boules restantes, prises $n-3$ à $n-3$, en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles. Si l'on ajoute ce produit à la fonction (a'), on aura

$$\begin{aligned} &n.r.(rn-1).(rn-2)\ldots(rn-n+1) \\ &-\frac{n.(n-1)}{1.2}.r^2.(rn-2).(rn-3)\ldots(rn-n+1) \\ &+\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.r^3.(rn-3).(rn-4)\ldots(rn-n+1); \quad (a'') \end{aligned}$$

cette fonction exprime le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang, pourvu que l'on en retranche encore les cas répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels quatre boules sortent à leur rang. En y appliquant les raisonnemens précédens, on verra qu'il faut encore retrancher de la fonction (a''), le terme

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}.r^4.(rn-4).(rn-5)\ldots.(rn-n+1).$$

En continuant ainsi, on aura pour l'expression du nombre des cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang

$$\begin{aligned}
&n.r.(rn-1).(rn-2)\ldots(rn-n+1)\\
&-\frac{n.(n-1)}{1.2}.r^2.(rn-2).(rn-3)\ldots(rn-n+1)\\
&+\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.r^3.(rn-3).(rn-4)\ldots(rn-n+1); \quad \text{(A)}\\
&-\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}.r^4.(rn-4).(rn-5)\ldots(rn-n+1)\\
&+\text{etc.}
\end{aligned}$$

la série étant continuée aussi loin qu'elle peut l'être. Dans cette fonction, ~~chaque combinaison~~ n'est point répétée; ainsi la combinaison de s boules sortant à leur rang, ne s'y trouve qu'une fois; car cette combinaison est comprise s fois dans le premier terme de la fonction, puisqu'elle peut résulter de chacune des s boules sortant à son rang; elle est retranchée $\frac{s.(s-1)}{1.2}$ fois dans le second terme, puisqu'elle peut résulter des combinaisons deux à deux des s boules sortant à leur rang; elle est ajoutée $\frac{s.(s-1).(s-2)}{1.2.3}$ fois dans le troisième terme, puisqu'elle peut résulter des combinaisons de s lettres prises trois à trois, et ainsi de suite; elle est donc dans la fonction (A), comprise un nombre de fois égal à

$$s-\frac{s.(s-1)}{1.2}+\frac{s.(s-1).(s-2)}{1.2.3}-\text{etc.};$$

et par conséquent égal à $1-(1-1)^s$, ou à l'unité. En divisant la fonction (A) par le nombre $rn.(rn-1).(rn-2)\ldots.(rn-n+1)$ de tous les cas possibles, on aura pour l'expression de la probabilité qu'une boule au moins sortira à son rang,

$$\begin{aligned}
1-\frac{(n-1).r}{1.2.(rn-1)}&+\frac{(n-1).(n-2).r^2}{1.2.3.(rn-1).(rn-2)}\\
&-\frac{(n-1).(n-2).(n-3).r^3}{1.2.3.4.(rn-1).(rn-2).(rn-3)}+\text{etc.} \quad \text{(B)}
\end{aligned}$$

Cherchons maintenant la probabilité que s boules au moins sortiront à leur rang. Le nombre des cas dans lesquels s boules sortent à leur rang, est, par ce qui précède,

$$\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots s}.r^s.(rn-s).(rn-s-1)\ldots(rn-n+1), \quad (b)$$

pourvu que l'on retranche de cette fonction, les cas qui sont répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels $s+1$ boules sortent à leur rang, car ils peuvent résulter dans la fonction, de $s+1$ boules prises s à s; ces cas sont donc répétés $s+1$ fois dans cette fonction; par conséquent il faut les retrancher s fois. Or le nombre des cas dans lesquels $s+1$ boules sortent à leur rang, est

$$\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-s)}{1.2.3\ldots(s+1)}.r^{s+1}.(rn-s-1).(rn-s-2)\ldots.(rn-n+1).$$

En le multipliant par s, et le retranchant de la fonction (b), on aura

$$\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots s}.r^s.(rn-s).(rn-s-1)\ldots.(rn-n+1)$$
$$\times\left\{1-\frac{s.(n-s).r}{(s+1).(rn-s)}\right\}. \quad (b')$$

Dans cette fonction, plusieurs cas sont encore répétés, savoir, ceux dans lesquels $s+2$ boules sortent à leur rang; car ils résultent dans le premier terme, des $s+2$ boules sortant à leur rang, et prises s à s; ils résultent dans le second terme, des $s+2$ boules sortant à leur rang, et prises $s+1$ à $s+1$, et de plus multipliés par le facteur s, par lequel on a multiplié le second terme. Ils sont donc compris dans cette fonction, le nombre de fois $\frac{(s+2).(s+1)}{1.2}-s.(s+2)$; ainsi il faut multiplier par l'unité moins ce nombre de fois, le nombre des cas dans lesquels $s+2$ boules sortent à leur rang. Ce dernier nombre est

$$\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-s-1)}{1.2.3\ldots(s+2)}.r^{s+2}.(rn-s-2).(rn-s-3)\ldots.(rn-n+1);$$

le produit dont il s'agit sera donc

$$\frac{n.(n-1)\ldots(n-s-1)}{1.2.3\ldots(s+2)}.r^{s+2}.(rn-s-2)\ldots.(rn-n+1).\frac{s.(s+1)}{1.2}.$$

En l'ajoutant à la fonction (b'), on aura

$$\frac{n.(n-1)\ldots.(n-s+2)}{1.2.3\ldots s}.r^s.(rn-s).(rn-s-1)\ldots.(rn-n+1)$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}1-\frac{s}{s+1}.\frac{(n-s).r}{rn-s}\\+\frac{s}{s+2}.\frac{(n-s).(n-s-1).r^2}{1.2.(rn-s).(rn-s-1)}\end{array}\right\}; \quad (b'')$$

c'est le nombre de tous les cas possibles dans lesquels s boules sortent à leur rang, pourvu que l'on en retranche encore les cas qui sont répétés. En continuant de raisonner ainsi, et divisant la fonction finale par le nombre de tous les cas possibles; on aura pour l'expression de la probabilité que s boules au moins sortiront à leur rang,

$$\frac{(n-1).(n-2)\ldots(n-s+1).r^{s-1}}{1.2.3\ldots s.(rn-1).(rn-2)\ldots(rn-s+1)}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{s}{s+1}.\frac{(n-s).r}{rn-s}+\frac{s}{s+2}.\frac{(n-s).(n-s-1).r^2}{1.2.(rn-s).(rn-s-1)} \\ -\frac{s}{s+3}.\frac{(n-s).(n-s-1).(n-s-2).r^3}{1.2.3.(rn-s).(rn-s-1).(rn-s-2)}+\text{etc.}\end{array}\right\}. \quad \text{(C)}$$

On aura la probabilité qu'aucune des boules ne sortira à son rang, en retranchant la formule (B) de l'unité; et l'on trouvera pour son expression,

$$\frac{[1.2.3\ldots rn]-n.r.[1.2.3\ldots(rn-1)]+\frac{n.(n-1)}{1.2}.r^2.[1.2.3\ldots(rn-2)]-\text{etc.}}{1.2.3\ldots rn}.$$

On a, par le n° 33 du premier Livre, quel que soit i,

$$1.2.3\ldots i=\int x^i dx.c^{-x},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. L'expression précédente peut donc être mise sous cette forme,

$$\frac{\int x^{rn-n}dx.(x-r)^n.c^{-x}}{\int x^{rn}dx.c^{-x}}. \quad (o)$$

Supposons le nombre rn de boules de l'urne, très-grand; alors en appliquant aux intégrales précédentes, la méthode du n° 24 du premier Livre, on trouvera à très-peu près, pour l'intégrale du numérateur,

$$\frac{\sqrt{2\pi}.X^{rn+1}.\left(1-\frac{r}{X}\right)^{n+1}.c^{-X}}{\sqrt{n.X^2+n.(r-1).(X-r)}},$$

X étant la valeur de x qui rend un *maximum*, la fonction $x^{rn-n}.(x-r)^n.c^{-x}$. L'équation relative à ce *maximum* donne pour X, les deux valeurs

$$X=\frac{rn+r}{2}\pm\frac{\sqrt{r^2.(n-1)^2+4rn}}{2},$$

On peut ne considérer ici que la plus grande de ces valeurs qui est, aux quantités près, de l'ordre $\frac{1}{rn}$, égale à $rn+\frac{n}{n-1}$; alors l'intégrale du numérateur de la fonction (o) devient à peu près

$$\frac{\sqrt{2\pi}.(rn)^{rn+\frac{1}{2}}.c^{-rn}.\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}.\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1).\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}}.$$

L'intégrale du dénominateur de la même fonction est, par le n° 32, à fort peu près,

$$\sqrt{2\pi}.(rn)^{rn+\frac{1}{2}}.c^{-rn};$$

la fonction (o) devient ainsi

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}.\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1).\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{rn}-\frac{1}{rn^2}}},$$

rn étant supposé un très-grand nombre, cette fonction se réduit à fort peu près à cette forme très-simple,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

C'est donc l'expression fort approchée de la probabilité qu'aucune des boules de l'urne ne sortira à son rang, lorsqu'il y a un grand nombre de boules. Le logarithme hyperbolique de cette expression, étant

$$-1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}-\text{etc.};$$

on voit qu'elle va toujours en croissant à mesure que n augmente; qu'elle est nulle, lorsque $n=1$, et qu'elle devient $\frac{1}{c}$, lorsque n

est infini, c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Concevons maintenant un nombre i d'urnes renfermant chacune le nombre n de boules, toutes de couleurs différentes; et que l'on tire successivement toutes les boules de chaque urne. On peut, par les raisonnemens précédens, déterminer la probabilité qu'une ou plusieurs boules de la même couleur sortiront au même rang dans les i tirages. En effet, supposons que les rangs des couleurs soient réglés d'après le tirage complet de la première urne, et considérons d'abord la première couleur : supposons qu'elle sorte la première dans les tirages des $i-1$ autres urnes. Le nombre total des combinaisons des $n-1$ autres couleurs dans chaque urne est, en ayant égard à leur situation entre elles, $1.2.3...(n-1)$; ainsi le nombre total de ces combinaisons relatives aux $i-1$ urnes, est $[1.2.3...(n-1)]^{i-1}$; c'est le nombre des cas dans lesquels la première couleur est tirée la première à la fois de toutes ces urnes; et comme il y a n couleurs, on aura

$$n.[1.2.3....(n-1)]^{i-1}$$

pour le nombre des cas dans lesquels une couleur au moins arrivera à son rang dans les tirages des $i-1$ urnes. Mais il y a dans ce nombre, des cas répétés : ainsi les cas où deux couleurs arrivent à leur rang dans ces tirages, sont compris deux fois dans ce nombre; il faut donc les en retrancher. Le nombre de ces cas est, par ce qui précède,

$$\frac{n.(n-1)}{1.2}.[1.2.3....(n-2)]^{i-1}:$$

en le retranchant du nombre précédent, on aura la fonction

$$n.[1.2.3....(n-1)]^{i-1}-\frac{n.(n-1)}{1.2}.[1.2.3....(n-2)]^{i-1}.$$

Mais cette fonction renferme elle-même des cas répetés. En continuant de les exclure, comme on l'a fait ci-dessus relativement à une seule urne; en divisant ensuite la fonction finale, par le nombre de tous les cas possibles, et qui est ici $[1.2.3....n]^{i-1}$; on aura pour la probabilité qu'une des $n-1$ couleurs au moins sortira

à

à son rang dans les $i-1$ tirages qui suivent le premier,

$$\frac{1}{n^{i-1}}-\frac{1}{1.2.[n.(n-1)]^{i-1}}+\frac{1}{1.2.3.[n.(n-1).(n-2)]^{i-1}}-\text{etc.},$$

expression dans laquelle il faut prendre autant de termes qu'il y a d'unités dans n. Cette expression est donc la probabilité qu'au moins une des couleurs sortira au même rang dans les tirages des i urnes.

10. Considérons deux joueurs A et B, dont les adresses soient p et q, et dont le premier ait a jetons, et le second, b jetons. Supposons qu'à chaque coup, celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie ne finisse que lorsqu'un des joueurs aura perdu tous ses jetons; on demande la probabilité que l'un des joueurs, A par exemple, gagnera la partie, avant ou au $n^{ième}$ coup.

Ce problème peut être résolu avec facilité par le procédé suivant qui est en quelque sorte, mécanique. Supposons b égal ou moindre que a, et considérons le développement du binome $(p+q)^b$. Le premier terme p^b de ce développement sera la probabilité de A pour gagner la partie au coup b. On retranchera ce terme, du développement, et l'on en retranchera pareillement le dernier terme q^b, si $b=a$; parce qu'alors ce terme exprime la probabilité de B pour gagner la partie au coup b. Ensuite on multipliera le reste par $p+q$. Le premier terme de ce produit aura pour facteur $p^b.q$, et comme l'exposant b ne surpasse que de $b-1$ l'exposant de q, il en résulte que la partie ne peut pas être gagnée par le joueur A, au coup $b+1$, ce qui est visible d'ailleurs; car si A a perdu un jeton dans les b premiers coups, il doit, pour gagner la partie gagner ce jeton plus les b jetons du joueur B, ce qui exige $b+2$ coups. Mais si $a=b+1$, on retranchera du produit, son dernier terme qui exprime la probabilité du joueur B pour gagner la partie au coup $b+1$.

On multipliera de nouveau ce second reste, par $p+q$. Le premier terme du produit aura pour facteur $p^{b+1}.q$, et comme l'exposant de p y surpasse de b celui de q, ce terme exprimera la probabilité de A pour gagner la partie au coup $b+2$. On retranchera pareillement du produit, le dernier terme, si l'exposant de q y surpasse de a celui de p.

On multipliera de nouveau ce troisième reste, par $p+q$, et l'on continuera ces multiplications jusqu'au nombre de fois $n-b$, en retranchant à chaque multiplication, le premier terme, si l'exposant de p y surpasse de b, celui de q, et le dernier terme, si l'exposant de q y surpasse de a, celui de p. Cela posé, la somme des premiers termes ainsi retranchés, sera la probabilité de A pour gagner la partie, avant ou au coup n; et la somme des derniers termes retranchés sera la probabilité semblable relative au joueur B.

Pour avoir une solution analytique du problème, soit $y_{x,x'}$ la probabilité du joueur A pour gagner la partie, lorsqu'il a x jetons, et lorsqu'il n'a plus que x' coups à jouer pour atteindre les n coups. Cette probabilité devient au coup suivant, ou $y_{x+1,x'-1}$, ou $y_{x-1,x'-1}$, suivant que le joueur A gagne ou perd le coup; or les probabilités respectives de ces deux événemens sont p et q; on a donc l'équation aux différences partielles,

$$y_{x,x'} = p \cdot y_{x+1,x'-1} + q \cdot y_{x-1,x'-1}.$$

Pour intégrer cette équation, nous considérerons, comme précédemment, une fonction u de t et de t' génératrice de $y_{x,x'}$, ensorte que $y_{x,x'}$ soit le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans le développement de cette fonction. En repassant des coefficiens, aux fonctions génératrices, l'équation précédente donnera

$$u = u \cdot \left(\frac{pt'}{t} + qtt'\right);$$

d'où l'on tire

$$1 = \frac{pt'}{t} + qtt';$$

par conséquent

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2pt'} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}}{2p};$$

ce qui donne

$$\frac{1}{t^x} = \frac{1}{(2p)^x} \cdot \left(\frac{1}{t'} \pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x;$$

donc

$$\frac{u}{t^x . t'^{x'}} = \frac{u}{(2p)^x . t'^{x'}} . \left(\frac{1}{t'} \pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x.$$

Cette équation peut être mise sous la forme suivante,

$$\frac{u}{t^x . t'^{x'}} = \frac{u}{2.(2p)^x . t'^{x'}}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x + \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x \\ \pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} . \frac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}} \end{array} \right\}.$$

L'expression précédente de $\frac{1}{t}$, donne

$$\pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} = \frac{2p}{t} - \frac{1}{t'};$$

on a donc

$$\frac{u}{t^x . t'^{x'}} = \frac{u}{2.(2p)^x . t'^{x'}} . \left[\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x + \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x\right]$$

$$+ \frac{u.\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2pt'}\right)}{2.(2p)^{x-1} . t'^{x'}} . \frac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}}:$$

sous cette forme, l'ambiguité du signe $\pm$ disparaît.

Maintenant si l'on repasse des fonctions génératrices à leurs coefficiens, et si l'on observe que $y_{0,x'}$ est nul, parce que le joueur A perd nécessairement la partie, lorsqu'il n'a plus de jetons; l'équation précédente donnera, en repassant des fonctions génératrices aux coefficiens,

$$y_{x,x'} = \frac{1}{2^x . p^{x-1}}$$

$$\times [X^{(x-1)} . y_{1,x+x'-1} + X^{(x-3)} y_{1,x+x'-3} \ldots + X^{(x-2r-1)} . y_{1,x+x'-2r-1} + \text{etc.}],$$

la série du second membre s'arrêtant lorsque $x - 2r - 1$ a une valeur négative. $X^{(x-1)}$, $X^{(x-3)}$, etc., sont les coefficiens de $\frac{1}{t'^{x-1}}$,

$\frac{1}{t'^{x-3}}$, etc., dans le développement de la fonction

$$\frac{\left(\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^x-\left(\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}. \quad (i)$$

Si l'on nomme u' le coefficient de t^n dans le développement de u; u' sera une fonction de t' et de x, génératrice de $y_{x,x'}$. Si l'on nomme pareillement T' le coefficient de t dans le développement de u, le produit de $\frac{T'}{2^x.p^{x-1}}$ par la fonction (i), sera la fonction génératrice du second membre de l'équation précédente; cette fonction est donc égale à u'. Supposons $x=a+b$, alors $y_{x,x'}$ devient $y_{a+b,x'}$, et cette quantité est égale à l'unité; car il est certain que A a gagné la partie, lorsqu'il a gagné tous les jetons de B; u' est donc alors la fonction génératrice de l'unité; or x' est ici zéro ou un nombre pair, car le nombre des coups dans lesquels A peut gagner la partie, est égal à b plus un nombre pair : en effet, A doit pour cela gagner tous les jetons de B, et de plus il doit regagner chaque jeton qu'il a perdu, ce qui exige deux coups. Ensuite n exprimant un nombre de coups dans lequel A peut gagner la partie, il est égal à b plus un nombre pair; x' étant le nombre des coups qui manquent au joueur A pour arriver à n, est donc zéro ou un nombre pair. De là il suit que dans le cas de $x=a+b$, u' devient $\frac{1}{1-t'^2}$; on a donc

$$\frac{T'}{2^{a+b}.p^{a+b-1}}.\frac{\left(\frac{1}{t'}+\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}-\left(\frac{1}{t'}-\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}\right)^{a+b}}{\sqrt{\frac{1}{t'^2}-4pq}}=\frac{1}{1-t'^2};$$

ce qui donne la valeur de T'. En la multipliant par la fonction (i) divisée par $2^a.p^{a-1}$, et dans laquelle on fait $x=a$, on aura la fonction génératrice de $y_{a,x'}$ égale à

$$\frac{2^b.p^b.t'^b.\left[\left(1+\sqrt{1-4pq.t'^2}\right)^a-\left(1-\sqrt{1-4pq.t'^2}\right)^a\right]}{(1-t'^2).\left[\left(1+\sqrt{1-4pq.t'^2}\right)^{a+b}-\left(1-\sqrt{1-4pq.t'^2}\right)^{a+b}\right]}. \quad (o)$$

Dans le cas de $a=b$, elle devient

$$\frac{2^a.p^a.t'^a}{(1-t'^2).[(1+\sqrt{1-4pq.t'^2})^a+(1-\sqrt{1-4pq.t'^2})^a]}.$$

En développant la fonction

$$(1+\sqrt{1-4pq.t'^2})^a+(1-\sqrt{1-4pq.t'^2})^a, \quad (q)$$

suivant les puissances de t'^2; le radical disparaît, et le plus haut exposant de t' dans ce développement, est égal ou plus petit que a. Mais si l'on développe $(1-\sqrt{1-4pq.t'^2})^a$ suivant les puissances de t'^2, le plus petit exposant de t' sera $2a$; la fonction (q) est donc égale au développement de $(1+\sqrt{1-4pq.t'^2})^a$, en rejetant les puissances de t' supérieures à a.

Maintenant on a, par le nº 3 du premier Livre,

$$z^a=1-a.\alpha+\frac{a.(a-3)}{1.2}.\alpha^2-\frac{a.(a-4).(a-5)}{1.2.3}.\alpha^3+\text{etc.},$$

z étant celle des racines de l'équation

$$z=1-\frac{\alpha}{z},$$

qui se réduit à l'unité, lorsque α est nul. Cette racine est

$$\frac{1+\sqrt{1-4\alpha}}{2};$$

en supposant donc $\alpha=pq.t'^2$, on aura

$$(1+\sqrt{1-4pq.t'^2})^a$$
$$=2^a.\left\{1-a.pq.t'^2+\frac{a.(a-3)}{1.2}.p^2q^2.t'^4-\frac{a.(a-4).(a-5)}{1.2.3}.p^3q^3.t'^6+\text{etc.}\right\};$$

on aura ainsi,

$$\frac{2^a.p^a.t'^a}{(1+\sqrt{1-4pq.t'^2})^a+(1-\sqrt{1-4pq.t'^2})^a}$$
$$=\frac{p^a.t'^a}{1-a.pq.t'^2+\frac{a.(a-3)}{1.2}.p^2q^2.t'^4-\frac{a.(a-4).(a-5)}{1.2.3}.p^3q^3.t'^6+\text{etc.}},$$

la série du dénominateur étant continuée exclusivement jusqu'aux puissances de t' supérieures à a. Ce second membre doit être, par ce qui précède, divisé par $1-t'^2$, pour avoir la fonction génératrice de $y_{a,x'}$; la quantité $y_{a,x'}$ est donc la somme des coefficiens des puissances de t', en ne considérant dans le développement de ce membre, par rapport aux puissances de t', que les puissances égales ou inférieures à x'. Chacun de ces coefficiens exprimera la probabilité que A gagnera la partie au coup indiqué par l'exposant de la puissance de t'.

Si l'on nomme z_i le coefficient correspondant à t'^{a+2i}, on aura généralement

$$0 = z_i - a.pq.z_{i-1} + \frac{a.(a-3)}{1.2}.p^2q^2.z_{i-2} - \text{etc.};$$

d'où il est facile de conclure les valeurs de z_1, z_2, etc., en observant que z_{-1}, z_{-2}, etc. sont nuls, et que $z_0 = p^a$. La valeur de z_i étant égale à $y_{a,a+2i}$, on aura celles de $y_{a,a}$, $y_{a,a+2}$, $y_{a,a+4}$, etc. L'équation aux différences partielles à laquelle on est immédiatement conduit, se trouve ainsi ramenée à une équation aux différences ordinaires qui détermine, en l'intégrant, la valeur de $y_{a,x'}$. Mais on peut obtenir cette valeur par le procédé suivant qui s'applique au cas général où a et b sont égaux ou différens entre eux.

Reprenons la fonction génératrice de $y_{a,x'}$ trouvée ci-dessus; $y_{a,x'}$ est le coefficient de $t'^{x'-b}$ dans le développement de la fonction

$$2^b.p^b.\frac{P}{Q.(1-t'^2)},$$

en supposant

$$P = \frac{(1+\sqrt{1-4pq.t'^2})^a - (1-\sqrt{1-4pq.t'^2})^a}{\sqrt{1-4pq.t'^2}},$$

$$Q = \frac{(1+\sqrt{1-4pq.t'^2})^{a+b} - (1-\sqrt{1-4pq.t'^2})^{a+b}}{\sqrt{1-4pq.t'^2}}.$$

Il résulte du n° 5 du premier Livre, que si l'on considère les deux termes

$$\frac{P}{2t'^{2i}.Q}, \quad -\frac{P}{(1-t'^2).t'^{x'+1}.\frac{dQ}{dt'}};$$

que l'on fasse ensuite successivement $t'=1$ et $t'=-1$ dans le premier terme, et t' égal successivement à toutes les racines de l'équation $Q=0$, dans le second terme; la somme de tous les termes que l'on obtient de cette manière, sera le coefficient de $t'^{x'}$, dans le développement de la fraction

$$\frac{P}{Q.(1-t'^2)}.$$

Ce que le premier terme produit dans cette somme est

$$\frac{p^a-q^a}{2^b.(p^{a+b}-q^{a+b})}.$$

Pour avoir les racines de l'équation $Q=0$, nous ferons

$$t'=\frac{1}{2\sqrt{pq}.\cos\varpi};$$

ce qui donne

$$Q=\frac{(\cos\varpi+\sqrt{-1}.\sin\varpi)^{a+b}-(\cos\varpi-\sqrt{-1}.\sin\varpi)^{a+b}}{\sqrt{-1}.\sin\varpi.(\cos\varpi)^{a+b-1}},$$

ou

$$Q=\frac{2.\sin(a+b).\varpi}{\sin\varpi.(\cos\varpi)^{a+b-1}}.$$

Les racines de l'équation $Q=0$ sont donc représentées par

$$\varpi=\frac{(r+1).\pi}{a+b},$$

r étant un nombre entier positif qui peut s'étendre depuis $r=0$ jusqu'à $r=a+b-2$. Lorsque $a+b$ est un nombre pair, $\frac{1}{2}\pi$ est une des valeurs de ϖ; il faut l'exclure, parce que $\cos\varpi$ devenant nul alors, cette valeur de ϖ ne rend pas Q nul. Dans ce cas, l'équation $Q=0$ n'a que $a+b-2$ racines; mais comme le terme dépendant de la valeur $\varpi=\frac{1}{2}\pi$, est multiplié dans l'expression de $y_{a,x'}$, par une puissance positive de $\cos\frac{(r+1).\pi}{a+b}$, on peut conserver la valeur de r qui donne $\varpi=\frac{1}{2}\pi$, puisque le terme qui lui correspond dans l'expression de $y_{a,x'}$ disparaît.

Maintenant on a

$$\frac{dQ}{dt'}=\left(\frac{dQ}{d\varpi}\right).\frac{d\varpi}{dt'};$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation $\sin(a+b).\varpi=0$,

$$\frac{dQ}{dt'}=\frac{4.(a+b).\sqrt{pq}.\cos(r+1).\pi}{\sin^2\varpi.(\cos\varpi)^{a+b-3}}=\frac{4.(a+b).\sqrt{pq}.(-1)^{r+1}}{\sin^2\varpi.(\cos\varpi)^{a+b-3}},$$

le terme

$$\frac{-P}{(1-t'^2).t'^{2i+1}.\frac{dQ}{dt'}}$$

devient ainsi, en observant que

$$P=\frac{2.\sin a\varpi}{\sin\varpi(\cos\varpi)^{a-1}},$$

$$\frac{(-1)^{r+1}.2^{2i+2}.(pq)^{i+1}.\sin\frac{(r+1).\pi}{a+b}.\sin\frac{(r+1).a\pi}{a+b}.\left(\cos\frac{(r+1).\pi}{a+b}\right)^{b+2i+1}}{(a+b).\left(p^2-2pq.\cos\frac{2.(r+1).\pi}{a+b}+q^2\right)}; \quad (h)$$

la somme de tous les termes que l'on obtient, en donnant à r toutes les valeurs entières et positives, depuis $r=0$ jusqu'à $r=a+b-2$, sera ce que produit la fonction

$$\frac{-P}{(1-t'^2).t'^{2i+1}.\frac{dQ}{dt'}}:$$

nous désignerons cette somme par la caractéristique S placée devant la fonction (h).

Si l'on fait $r'+1=a+b-(r+1)$, on aura

$$\sin\frac{(r'+1).\pi}{a+b}=\sin\frac{(r+1).\pi}{a+b},$$

$$\cos\frac{(r'+1).\pi}{a+b}=-\cos\frac{(r+1).\pi}{a+b},$$

$$\cos\frac{2.(r'+1).\pi}{a+b}=\cos\frac{2.(r+1).\pi}{a+b},$$

$$\sin\frac{(r'+1).a\pi}{a+b}=(-1)^{a+1}.\sin\frac{(r+1).a\pi}{a+b}.$$

De là il est facile de conclure que dans la fonction (h), le terme relatif à $r+1$ est le même que le terme relatif à $r'+1$; on peut donc doubler ce terme, et n'étendre alors la caractéristique S qu'aux valeurs de r comprises depuis $r=0$ jusqu'à $r=\frac{a+b-2}{2}$,

si

si $a+b$ est pair, ou $r=\frac{a+b-1}{2}$, si $a+b$ est impair. Cela posé, on aura en observant que

$$\sin\frac{(r+1).a\pi}{a+b}=(-1)^r.\sin\frac{(r+1).b\pi}{a+b},$$

$$y_{a,b+2i}=\frac{p^b.(p^a-q^a)}{p^{a+b}-q^{a+b}}-\frac{2^{b+2i+2}.p^b.(pq)^{i+1}}{a+b}$$

$$\times S.\left\{\frac{\sin\frac{2(r+1).\pi}{a+b}.\sin\frac{(r+1).b\pi}{a+b}.\left(\cos\frac{(r+1).\pi}{a+b}\right)^{b+2i}}{p^2-2pq.\cos\frac{2(r+1).\pi}{a+b}+q^2}\right\}. \quad \text{(H)}$$

En changeant a en b, p en q, et réciproquement, on aura la probabilité que le joueur B gagnera la partie avant le coup $a+2i$, ou à ce coup.

Supposons $a=b$; $\sin\frac{(r+1).a\pi}{a+b}$ deviendra $\sin\frac{1}{2}.(r+1).\pi$. Ce sinus est nul, lorsque $r+1$ est pair; il suffit donc alors de considérer dans l'expression de $y_{a,a+2i}$, les valeurs impaires de $r+1$. En les exprimant par $2s+1$, et observant que $\sin\frac{(2s+1).\pi}{2}=(-1)^s$, on aura

$$y_{a,a+2i}=\frac{p^a}{p^a+q^a}-\frac{2^{a+2i+1}.p^a.(pq)^{i+1}}{a}$$

$$\times S.\left\{\frac{(-1)^s.\sin\frac{(2s+1).\pi}{a}.\left(\cos\frac{(2s+1).\pi}{2a}\right)^{a+2i}}{p^2-2pq.\cos\frac{(2s+1).\pi}{a}+q^2}\right\},$$

$2s+1$ devant comprendre toutes les valeurs impaires contenues dans $a-1$.

Si l'on change dans cette expression, p en q, et réciproquement, on aura la probabilité du joueur B pour gagner la partie en $a+2i$ coups. La somme de ces deux probabilités sera la probabilité que la partie sera finie après ce nombre de coups; cette dernière probabilité est donc

$$1-\frac{2^{a+2i+1}}{a}.(p^a+q^a).(pq)^{i+1}.S.\left\{\frac{(-1)^s.\sin\frac{(2s+1).\pi}{a}.\left(\cos\frac{(2s+1).\pi}{2a}\right)^{a+2i}}{p^2-2pq.\cos\frac{(2s+1).\pi}{a}+q^2}\right\}.$$

Si les adresses p et q sont égales, cette expression devient

$$1-\frac{2}{a}.S.\left\{\frac{(-1)^s.\left(\cos\frac{(2s+1).\pi}{2a}\right)^{a+2i+1}}{\sin\frac{(2s+1).\pi}{2a}}\right\}.$$

Lorsque $a+2i$ est un grand nombre, on peut en conclure d'une manière fort approchée, le nombre de coups nécessaire pour que la probabilité que la partie finira dans ce nombre de coups, soit égale à une fraction donnée $\frac{1}{k}$. On aura alors

$$\frac{2}{a}.S.\left\{\frac{(-1)^s.\left(\cos\frac{(2s+1).\pi}{2a}\right)^{a+2i+1}}{\sin\frac{(2s+1).\pi}{2a}}\right\}=\frac{k-1}{k},$$

$a+2i$ étant supposé un très-grand nombre fort supérieur au nombre a, il suffit de considérer le terme du premier membre qui correspond à s nul, et alors on a

$$a+2i+1=\frac{\log\left(\frac{a.(k-1)}{2k}.\sin\frac{\pi}{2a}\right)}{\log\left(\cos\frac{\pi}{2a}\right)},$$

ces logarithmes pouvant être à volonté hyperboliques ou tabulaires.

Si dans les formules précédentes, on suppose a infini, b restant un nombre fini; on aura le cas dans lequel le joueur A joue contre le joueur B qui a primitivement le nombre b de jetons, jusqu'à ce qu'il ait gagné tous les jetons de B, sans que jamais celui-ci puisse gagner A, quel que soit le nombre des jetons qu'il lui gagne. Dans ce cas, la fonction génératrice (o) de $y_{x,x'}$ se réduit à

$$\frac{2^b.p^b.t'^b}{(1-t'^2).(1+\sqrt{1-4pq.t'^2})^b};$$

car alors $(1-\sqrt{1-4pq.t'^2})^a$ et $(1-\sqrt{1-4pq.t'^2})^{a+b}$ développés, ne renferment que des puissances infinies de t', puissances que l'on doit négliger, quand on ne considère qu'un nombre fini de coups. On a par ce qui précède

$$\left(1+\sqrt{1-4pq.t'^2}\right)^{-b}$$

$$=\frac{1}{2^b}.\left\{\begin{array}{l} 1+b.pq.t'^2+\frac{b.(b+3)}{1.2}.p^2q^2.t'^4+\frac{b.(b+4).(b+5)}{1.2.3}.p^3q^3.t'^6 \\ \ldots+\frac{b.(b+i+1).(b+i+2)\ldots.(b+2i-1)}{1.2.3\ldots.i}.p^iq^i.t'^{2i}+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

En multipliant ce second membre par $\frac{2^b.p^b.t'^b}{1-t'^2}$, le coefficient de t'^{b+2i} sera

$$p^b.\left\{1+b.pq+\frac{b.(b+3)}{1.2}.p^2q^2\ldots+\frac{b.(b+i+1).(b+i+2)\ldots.(b+2i-1).p^iq^i}{1.2.3\ldots.i}\right\};$$

c'est la valeur de $y_{a,b+2i}$, ou la probabilité que A gagnera la partie avant ou au coup $b+2i$.

Cette valeur serait très-pénible à réduire en nombres, si b et $2i$ étaient de grands nombres; il serait surtout très-difficile d'obtenir par son moyen, le nombre de coups dans lesquels A peut parier un contre un de gagner la partie; mais on peut y parvenir facilement de cette manière.

Reprenons la formule (H) trouvée ci-dessus. Dans le cas de a infini, et p étant supposé égal ou plus grand que q, si l'on y suppose $\frac{(r+1)}{a}.\pi=\varphi$, et $\frac{\pi}{a}=d\varphi$, elle devient

$$y_{a;b+2i}=1-\frac{2^{b+2i+2}.p^b.(pq)^{i+1}}{\pi}.\int\frac{d\varphi.\sin 2\varphi.\sin b\varphi.(\cos\varphi)^{b+2i}}{p^2-2pq.\cos 2\varphi+q^2},$$

l'intégrale devant être prise depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. Dans le cas de p moindre que q, la même expression a lieu, pourvu que l'on change le premier terme 1, dans $\frac{p^b}{q^b}$.

Si $p=q$, cette expression devient

$$1-\frac{2}{\pi}.\int\frac{d\varphi.\sin b\varphi.(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi},$$

l'intégrale étant prise depuis φ nul jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. Supposons maintenant que b et i soient de grands nombres. Le *maximum* de la fonction

$$\frac{\varphi.(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}$$

répond à $\varphi = 0$; ce qui donne 1 pour ce *maximum*. La fonction décroît ensuite avec une extrême rapidité, et dans l'intervalle où elle a une valeur sensible, on peut supposer

$$\log \sin \varphi = \log \varphi + \log \left(1 - \tfrac{1}{6}\varphi^2\right) = \log \varphi - \tfrac{1}{6}.\varphi^2,$$

$$\log (\cos \varphi)^{b+2i+1} = (b+2i+1).\log\left(1 - \tfrac{1}{2}.\varphi^2 + \tfrac{1}{24}.\varphi^4\right)$$

$$= -\frac{(b+2i+1)}{2}.\varphi^2 - \frac{(b+2i+1)}{12}.\varphi^4,$$

ce qui donne, en négligeant les sixièmes puissances de φ, et ses quatrièmes puissances qui ne sont pas multipliées par $b+2i+1$,

$$\log\left(\frac{(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi}\right) = -\log\varphi - \frac{(b+2i+\frac{2}{3})}{2}.\varphi^2 - \frac{(b+2i+\frac{2}{5})}{12}.\varphi^4;$$

en faisant donc

$$a^2 = \frac{b+2i+\frac{2}{3}}{2};$$

on aura

$$\frac{(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi} = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{6}.\varphi^4\right)}{\varphi}.c^{-a^2\varphi^2};$$

partant,

$$\int \frac{d\varphi.\sin b\varphi.(\cos\varphi)^{b+2i+1}}{\sin\varphi} = \int \frac{d\varphi.\left(1 - \frac{a^2}{6}.\varphi^4\right)}{\varphi}.\sin b\varphi.c^{-a^2\varphi^2}.$$

Cette dernière intégrale peut être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à φ infini; car elle doit être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; or a^2 étant un nombre considérable, $c^{-a^2\varphi^2}$ devient excessivement petit, lorsqu'on y fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, ensorte qu'on peut le supposer nul, vu l'extrême rapidité avec laquelle cette exponentielle diminue, lorsque φ augmente. Maintenant on a

$$\frac{d}{db}.\int \frac{d\varphi.\left(1 - \frac{a^2}{6}.\varphi^4\right)}{\varphi}.\sin b\varphi.c^{-a^2\varphi^2} = \int d\varphi.\left(1 - \frac{a^2}{6}.\varphi^4\right).\cos b\varphi.c^{-a^2\varphi^2};$$

on a d'ailleurs par le n° 26 du premier Livre,

$$\int d\varphi . \cos b\varphi . c^{-a^2\varphi^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} . c^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

$$\int \varphi^4 . d\varphi . \cos b\varphi . c^{-a^2\varphi^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} . \frac{d^4 . c^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{db^4}$$

$$= \frac{3 . \sqrt{\pi}}{8a^5} . c^{-\frac{b^2}{4a^2}} . \left(1 - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{12 . a^4}\right);$$

d'où l'on tire, en supposant

$$\frac{b^2}{4a^2} = t^2,$$

$$\frac{\int d\varphi . \sin b\varphi . (\cos \varphi)^{b+2i+1}}{\sin \varphi} = \sqrt{\pi} . \left\{\int dt . c^{-t^2} - \frac{t . c^{-t^2}}{8a^2} . \left(1 - \frac{2}{3} t^2\right)\right\}.$$

Ainsi la probabilité que A gagnera la partie dans le nombre $b + 2i$ de coups, est

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} . \left[\int dt . c^{-t^2} - \frac{T . c^{-T^2}}{8a^2} . \left(1 - \frac{2}{3} T^2\right)\right],$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à $t = T$, T^2 étant égal à $\frac{b^2}{4a^2}$.

Si l'on cherche le nombre des coups dans lesquels on peut parier un contre un que cela aura lieu, on fera cette probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\int dt . c^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{T . c^{-T^2}}{8a^2} . \left(1 - \frac{2}{3} T^2\right).$$

Nommons T' la valeur de t, qui correspond à

$$\int dt . c^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4};$$

et supposons

$$T = T' + q,$$

q étant de l'ordre $\frac{1}{a^2}$. L'intégrale $\int dt . c^{-t^2}$ sera augmentée à très-peu près de $q.c^{-T'^2}$; ce qui donne

$$q.c^{-T'^2} = \frac{T'.c^{-T'^2}}{8a^2}.(1 - \tfrac{2}{3}T'^2);$$

on aura donc

$$T^2 = T'^2 + \frac{T'^2}{4a^2}.(1 - \tfrac{2}{3}T'^2).$$

Ayant ainsi T^2 aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{a^4}$, l'équation

$$2a^2 = b + 2i + \tfrac{2}{3} = \frac{b^2}{2T^2}$$

donnera, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{a^2}$,

$$b + 2i = \frac{b^2}{2T'^2} - \tfrac{7}{6} + \tfrac{2}{3}T'^2.$$

Pour déterminer la valeur de T'^2, nous observerons qu'ici T' est plus petit que $\frac{1}{2}$; ainsi l'équation transcendante et intégrale

$$\int dt.c^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

peut être transformée dans la suivante,

$$T' - \frac{1}{3}.T'^3 + \frac{1}{1.2}.\frac{1}{5}.T'^5 - \frac{1}{1.2.3}.\frac{1}{7}.T'^7 + \text{etc.} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

En résolvant cette équation, on trouve

$$T'^2 = 0{,}2102497.$$

En supposant $b = 100$, on aura

$$b + 2i = 23780{,}14.$$

Il y a donc alors du désavantage à parier un contre un, que A gagnera la partie dans 23780 coups, mais il y a de l'avantage à parier qu'il la gagnera dans 23781 coups.

11. Un nombre $n+1$ de joueurs jouent ensemble aux conditions suivantes. Deux d'entre eux jouent d'abord, et celui qui perd se retire après avoir mis un franc au jeu, pour n'y rentrer qu'après

que tous les autres joueurs ont joué; ce qui a lieu généralement pour tous les joueurs qui perdent, et qui par là deviennent les derniers. Celui des deux premiers joueurs qui a gagné, joue avec le troisième, et s'il le gagne, il continue de jouer avec le quatrième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il perde, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné successivement tous les joueurs. Dans ce dernier cas, la partie est finie. Mais si le joueur gagnant au premier coup, est vaincu par l'un des autres joueurs, le vainqueur joue avec le joueur suivant, et continue de jouer jusqu'à ce qu'il soit vaincu, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné de suite tous les joueurs; le jeu continue ainsi jusqu'à ce qu'il y ait un joueur qui gagne de suite tous les autres, ce qui finit la partie, et alors le joueur qui la gagne, emporte tout ce qui a été mis au jeu. Cela posé,

Déterminons d'abord la probabilité que le jeu finira précisément au coup x; nommons z_x cette probabilité. Pour que la partie finisse au coup x, il faut que le joueur qui entre au jeu au coup $x-n+1$, gagne ce coup et les $n-1$ coups suivans; or il peut entrer contre un joueur qui n'a gagné qu'un seul coup: en nommant P la probabilité de cet événement, $\frac{P}{2^n}$ sera la probabilité correspondante que la partie finira au coup x. Mais la probabilité z_{x-1} que la partie finira au coup $x-1$, est évidemment $\frac{P}{2^{n-1}}$. Car il est nécessaire pour cela qu'il y ait un joueur qui ait gagné un coup, au coup $x-n+1$, et qui jouant à ce coup, le gagne et les $n-2$ coups suivans; et la probabilité de chacun de ces événemens étant P et $\frac{1}{2^{n-1}}$, la probabilité de l'événement composé sera $\frac{P}{2^{n-1}}$; on aura donc $z_{x-1}=\frac{P}{2^{n-1}}$, et par conséquent,

$$\frac{P}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot z_{x-1};$$

$\frac{1}{2}\cdot z_{x-1}$ est donc la probabilité que la partie finira au coup x, relative à ce cas.

Si le joueur qui entre au jeu au coup $x-n+1$, joue à ce coup contre un joueur qui a déjà gagné deux coups; en nommant P' la probabilité de ce cas, $\frac{P'}{2^n}$ sera la probabilité relative à ce cas, que la partie finira au coup x. Mais on a

$$\frac{p'}{2^{x-2}} = z_{x-2};$$

car pour que la partie finisse au coup $x-2$, il faut qu'au coup $x-n+1$, l'un des joueurs ait déjà gagné deux coups, et qu'il gagne ce coup et les $n-3$ coups suivans. On a donc

$$\frac{p'}{2^x} = \frac{1}{2^2} \cdot z_{x-2};$$

$\frac{1}{2^2} \cdot z_{x-2}$ est donc la probabilité que la partie finira au coup x, relative à ce cas; et ainsi de suite.

En rassemblant toutes ces probabilités partielles, on aura

$$z_x = \frac{1}{2} \cdot z_{x-1} + \frac{1}{2^2} \cdot z_{x-2} + \frac{1}{2^3} \cdot z_{x-3} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot z_{x-n+1}.$$

La fonction génératrice de z_x est, par le premier Livre,

$$\frac{\psi(t)}{1 - \frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{2^2} \cdot t^2 \ldots - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot t^{n-1}},$$

ou

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \psi(t) \cdot (2-t)}{1 - t + \frac{1}{2^n} \cdot t^n}.$$

Pour déterminer $\psi(t)$, nous observerons que la partie ne peut finir au plus tôt qu'au coup n, et que la probabilité pour cela est $\frac{1}{2^{n-1}}$; car il faut que le vainqueur au premier coup, gagne les $n-1$ coups suivans; $\psi(t)$ ne doit donc renfermer que la puissance n de t, et $\frac{1}{2^{n-1}}$ doit être le coefficient de cette puissance; ce qui donne $\psi(t) = \frac{t^n}{2^{n-1}}$; ainsi la fonction génératrice de z_x est

$$\frac{\frac{1}{2^n} \cdot t^n \cdot (2-t)}{1 - t + \frac{1}{2^n} \cdot t^n}.$$

La somme des coefficiens des puissances de t jusqu'à l'infini, dans le développement de cette fonction, est la probabilité que la partie doit

doit finir après une infinité de coups; or on a cette somme en faisant $t=1$ dans la fonction, ce qui la réduit à l'unité; il est donc certain que la partie doit finir.

On aura la probabilité que la partie sera finie au coup x ou avant ce coup, en déterminant le coefficient de t^x dans le développement de la fonction précédente, divisée par $1-t$; la fonction génératrice de cette probabilité est donc

$$\frac{\frac{1}{2^n}.t^n.(2-t)}{(1-t).\left(1-t+\frac{1}{2^n}.t^n\right)}.$$

Donnons à la fonction génératrice de z_x, cette forme

$$\frac{1}{2^n}.\frac{t^n.(2-t)}{1-t}.\left(1-\frac{1}{2^n}.\frac{t^n}{1-t}+\frac{1}{2^{2n}}.\frac{t^{2n}}{(1-t)^2}-\text{etc.}\right);$$

le coefficient de t^x dans $\frac{t^{rn}.(2-t)}{2^{rn}.(1-t)^r}$ est

$$\frac{1}{2^{rn}}.\frac{(x-rn+1).(x-rn+2)\ldots(x-rn+r-2)}{1.2.3\ldots(r-1)}.(x-rn+2r-2);$$

on a donc

$$z_x=\frac{1}{2^n}-\frac{(x-2n+1)}{2^{2n}}+\frac{(x-3n+1)}{1.2.2^{3n}}.(x-3n+4)$$
$$-\frac{(x-4n+1).(x-4n+2)}{1.2.3.2^{4n}}.(x-4n+6)+\text{etc.},$$

expression qui n'est relative qu'à x plus grand que n, et dans laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes qu'il y a d'unités entières dans le quotient $\frac{x}{n}$: lorsque $x=n$, on a $z_x=\frac{1}{2^{n-1}}$.

En développant de la même manière la fonction génératrice de la probabilité que la partie finira avant ou au coup x, on trouvera pour l'expression de cette probabilité,

$$\frac{x-n+2}{2^n}-\frac{(x-2n+1)}{1.2.2^{2n}}.(x-2n+4)$$
$$+\frac{(x-3n+1).(x-3n+2)}{1.2.3.2^{3n}}.(x-3n+6)-\text{etc.},$$

cette expression ayant lieu dans le cas même de $x=n$.

Déterminons maintenant les probabilités respectives des joueurs pour gagner la partie au coup x. Soit $y_{0,x}$ celle du joueur qui a gagné le premier coup. Soient $y_{1,x}, y_{2,x}, \ldots y_{n-1,x}$ celles des joueurs suivans, et $y_{n,x}$ celle du joueur qui a perdu au premier coup, et qui par là est devenu le dernier. Désignons les joueurs par (0), (1), (2), ...$(n-1)$, (n). Cela posé, la probabilité $y_{r,x}$ du joueur (r) devient $y_{r-1,x-1}$, si au second coup le joueur (0) est vaincu par le joueur (1); car il est visible que (r) se trouve alors, par rapport au vainqueur (1), dans la même position où était $(r-1)$ par rapport au vainqueur (0) : seulement, il y a un coup de moins à jouer pour arriver au coup x, ce qui change x dans $x-1$. Présentement la probabilité que le joueur (0) sera vaincu par (1) est $\frac{1}{2}$; ainsi $\frac{1}{2}.y_{r-1,x-1}$ est la probabilité du joueur (r) pour gagner la partie au coup x, relative au cas où (0) est vaincu par (1). Si (0) n'est vaincu que par (2), $y_{r,x}$ devient $y_{r-2,x-2}$, et la probabilité de cet événement étant $\frac{1}{4}$, on a $\frac{1}{4}.y_{r-2,x-2}$ pour la probabilité du joueur (r), de gagner la partie au coup x, relative à ce cas. Si le joueur (0) n'est vaincu que par le joueur (r), $y_{r,x}$ devient $y_{0,x-r}$, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2^r}$; ainsi $\frac{1}{2^r}.y_{0,x-r}$ est la probabilité du joueur (r) pour gagner la partie au coup x, relative à ce cas. Si le joueur (0) n'est vaincu que par le joueur $(r+1)$, $y_{r,x}$ se change dans $y_{n-1,x-r-1}$; car alors le joueur (r) se trouve, par rapport au vainqueur, dans la position primitive du joueur $(n-1)$ par rapport au joueur (0) : seulement il ne reste que $x-r-1$ coups à jouer pour arriver au coup x. Or la probabilité que (0) ne sera vaincu que par le joueur $(r+1)$, est $\frac{1}{2^{r+1}}$; $\frac{1}{2^{r+1}}.y_{n-1,x-r-1}$ est donc la probabilité de (r) pour gagner la partie au coup x, relative à ce cas. En continuant ainsi, et rassemblant toutes ces probabilités partielles, on aura la probabilité entière $y_{r,x}$ du joueur (r) pour gagner la partie; ce qui donne l'équation suivante,

$$y_{r,x} = \frac{1}{2}.y_{r-1,x-1} + \frac{1}{2^2}.y_{r-2,x-2} \ldots + \frac{1}{2^r}.y_{0,x-r} + \frac{1}{2^{r+1}}.y_{n-1,x-r-1}$$
$$+ \frac{1}{2^{r+2}}.y_{n-2,x-r-2} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.y_{r+1,x-n+1}.$$

Cette expression a lieu depuis $r=1$ jusqu'à $r=n-2$. Elle donne

$$\frac{1}{2}\cdot y_{r-1,x-1}=\frac{1}{2^2}\cdot y_{r-2,x-2}+\frac{1}{2^3}\cdot y_{r-3,x-3}\ldots+\frac{1}{2^n}\cdot y_{r,x-n}.$$

En retranchant cette équation, de la précédente; on aura celle-ci aux différences partielles,

$$y_{r,x}-y_{r-1,x-1}+\frac{1}{2^n}\cdot y_{r,x-n}=0; \quad (1)$$

cette équation s'étend depuis $r=2$ jusqu'à $r=n-2$.

On a, par le raisonnement précédent, les deux équations suivantes,

$$y_{n-1,x}=\frac{1}{2}\cdot y_{n-2,x-1}+\frac{1}{2^2}\cdot y_{n-3,x-2}\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot y_{0,x-n+1}.$$

Mais l'expression précédente de $y_{r,x}$ donne

$$\frac{1}{2}\cdot y_{n-2,x-1}=\frac{1}{2^2}\cdot y_{n-3,x-2}\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot y_{0,x-n+1}+\frac{1}{2^n}\cdot y_{n-1,x-n};$$

En retranchant cette équation de la précédente, on aura

$$y_{n-1,x}-y_{n-2,x-1}+\frac{1}{2^n}\cdot y_{n-1,x-n}=0:$$

ainsi l'équation (1) subsiste dans le cas de $r=n-1$.

Le raisonnement précédent conduit encore à cette équation

$$y_{n,x}=\frac{1}{2}\cdot y_{n-1,x-1}+\frac{1}{2^2}\cdot y_{n-2,x-2}\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot y_{1,x-n+1},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}\cdot y_{n,x-1}=\frac{1}{2^2}\cdot y_{n-1,x-2}\ldots+\frac{1}{2^n}\cdot y_{1,x-n}.$$

En retranchant cette équation, de celle-ci que donne l'expression générale de $y_{r,x}$,

$$y_{1,x}=\frac{1}{2}\cdot y_{0,x-1}+\frac{1}{2^2}\cdot y_{n-1,x-2}\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot y_{2,x-n+1};$$

et faisant $\frac{1}{2}.(y_{0,x}+y_{n,x})=\bar{y}_{0,x}$; on aura

$$y_{1,x}-\bar{y}_{0,x-1}+\frac{1}{2^n}.y_{1,x-n}=0.$$

L'équation (1) subsiste donc encore dans le cas même de $r=1$, pourvu que l'on y change $y_{0,x}$ dans $\bar{y}_{0,x}$. On doit observer que $\bar{y}_{0,x}$ est la probabilité de gagner la partie au coup x, de chacun des deux premiers joueurs, au moment où le jeu commence; car cette probabilité devient, après le premier coup, $y_{0,x}$ ou $y_{n,x}$, suivant que le joueur gagne ou perd, et la probabilité de chacun de ces événemens est $\frac{1}{2}$.

Maintenant, la fonction génératrice de l'équation (1) est, par le n° 20 du premier Livre,

$$\frac{\varphi(t)}{1-tt'+\frac{1}{2^n}.t^n}, \qquad (a)$$

t étant relatif à la variable x, et t' étant relatif à la variable r, ensorte que $y_{r,x}$ est le coefficient de $t'^r t^x$ dans le développement de cette fonction; $\varphi(t)$ est une fonction de t qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, nous ferons

$$T=\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}.t^n};$$

la fonction génératrice de $y_{r,x}$ sera le coefficient de t'^r dans le développement de la fonction (a); elle sera donc

$$\varphi(t).t^r.T^{r+1};$$

la probabilité que la partie finira précisément au coup x, est évidemment la somme des probabilités de chaque joueur pour la gagner à ce coup; elle est donc

$$2\bar{y}_{0,x}+y_{1,x}+y_{2,x}\ldots+y_{n-1,x};$$

par conséquent la fonction génératrice de cette probabilité est

$$T.\varphi(t).(2+tT+t^2T^2\ldots+t^{n-1}T^{n-1}),$$

ou

$$T.\varphi(t).\frac{(2 - tT - t^nT^n)}{1-tT}.$$

En l'égalant à la fonction génératrice de cette probabilité, que nous avons trouvée ci-dessus, et qui est

$$\frac{\frac{1}{2^n}.t^n.(2-t)}{1-t+\frac{1}{2^n}.t^n};$$

on aura

$$\varphi(t)=\frac{\frac{1}{2^n}.t^n.(2-t).(1-tT)}{T.(2-tT-t^nT^n).\left(1-t+\frac{1}{2^n}.t^n\right)};$$

Ainsi la fonction génératrice de l'équation (1) aux différences partielles, est

$$\frac{\frac{1}{2^n}.t^n.(2-t).(1-tT)}{T.(2-tT-t^nT^n).\left(1-t+\frac{1}{2^n}.t^n\right).\left(1-tt'+\frac{1}{2^n}.t^n\right)};$$

la fonction génératrice de $y_{r,x}$ est donc

$$\frac{\frac{1}{2^n}.t^{n+r}.(2-t).(1-tT).T^r}{(2-tT-t^nT^n).\left(1-t+\frac{1}{2^n}.t^n\right)}.$$

Le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction, est la probabilité du joueur (r) de gagner la partie au coup x. On pourra ainsi déterminer cette probabilité par ce développement. La somme de tous ces coefficiens jusqu'à x infini, est la probabilité du joueur (r) de gagner la partie; or on a cette somme, en faisant $t=1$ dans la fonction précédente, ce qui donne $T=\frac{2^n}{1+2^n}$; nommons p cette dernière quantité, et désignons par y_r la probabilité de (r) de gagner la partie, on aura

$$y_r=\frac{(1-p).p^r}{2-p-p^n}.$$

Cette expression s'étend depuis $r=0$ jusqu'à $r=n-1$, pourvu qu'on y change y_o dans $\bar{y}_o$, $\bar{y}_o$ exprimant la probabilité de gagner la partie, des deux premiers joueurs au moment où ils entrent au jeu.

Maintenant, chaque joueur perdant déposant un franc au jeu, déterminons l'avantage des différens joueurs. Il est clair qu'après x coups, il y avait x jetons au jeu; l'avantage du joueur (r) relatif à ces x jetons, est le produit de ces jetons par la probabilité $y_{r,x}$ de gagner la partie au coup x; cet avantage est donc $x.y_{r,x}$. La valeur de $x.y_{r,x}$ est le coefficient de $t^{x-1}.dt$ dans la différentielle de la fonction génératrice de $y_{r,x}$; en divisant donc cette différentielle par dt, et en y supposant ensuite $t=1$, on aura la somme de toutes les valeurs de $x.y_{r,x}$ jusqu'à x infini; c'est l'avantage du joueur (r). Mais il faut en retrancher les jetons qu'il met au jeu à chaque coup qu'il perd; or $y_{r,x}$ étant sa probabilité de gagner la partie au coup x, $2^n.y_{r,x-n+1}$ sera sa probabilité d'entrer au jeu, au coup $x-n+1$, puisque cette dernière probabilité, multipliée par la probabilité $\frac{1}{2^n}$, qu'il gagnera ce coup, et les $n-1$ coups suivans est sa probabilité de gagner la partie au coup x. En supposant donc qu'il perde autant de fois qu'il entre au jeu, la somme de toutes les valeurs de $2^n.y_{r,x-n+1}$ jusqu'à x infini, serait le désavantage du joueur (r); et comme la somme de toutes les valeurs de $y_{r,x-n+1}$ est égale à la somme de toutes les valeurs de $y_{r,x}$, ou à y_r, on aurait $2^n.y_r$, ou $\frac{2^n.(1-p).p^r}{2-p-p^n}$ pour le désavantage du joueur (r). Mais il ne perd pas chaque fois qu'il entre au jeu, parce qu'il peut entrer au jeu et gagner la partie; il faut donc ôter de $2^n.y_r$, la somme de toutes les valeurs de y_x ou y_r, et alors le désavantage de (r) est $\frac{(2^n-1).(1-p).p^r}{2-p-p^n}$. Pour avoir l'avantage entier de (r), il faut retrancher cette dernière quantité, de la somme des valeurs de $x.y_{r,x}$; en désignant donc par S cette somme, l'avantage du joueur (r) sera

$$S-\frac{(2^n-1).(1-p).p^r}{2-p-p^n},$$

S étant, comme on l'a vu, la différentielle de la fonction génératrice de $y_{r,x}$ divisée par dt, et dans laquelle on suppose ensuite $t=1$. Dans cette supposition, on a

$$T=p;\quad \frac{dT}{dt}=-np.(1-p).$$

Désignons par Y_r l'avantage de (r), on trouvera

$$Y_r=\frac{(np+1-n)}{2-p-p^n}.p^r.\left\{(1-p).r+\frac{p^{n+1}+n.(1-p).p^n-p}{2-p-p^n}\right\}.$$

Cette équation servira depuis $r=0$ jusqu'à $r=n-1$, pourvu que l'on y change Y_0 dans $\overline{Y}_0$, $\overline{Y}_0$ étant l'avantage des deux premiers joueurs, au moment où ils entrent au jeu.

Si au commencement de la partie, chacun des joueurs dépose au jeu une somme a; l'avantage du joueur (r) en sera augmenté de $(n+1).a$, multiplié par la probabilité y_r, que ce joueur gagnera la partie; mais il faut en ôter la mise a de ce joueur; il faut donc, pour avoir alors son avantage, augmenter l'expression précédente de Y_r, de la quantité

$$\frac{(n+1).a.(1-p).p^r}{2-p-p^n}-a.$$

Lorsque l'avantage de (r) devient négatif, il se change en désavantage.

12. Soit q la probabilité d'un événement simple, à chaque coup; on demande la probabilité de l'amener i fois de suite, dans le nombre x de coups.

Nommons z_x la probabilité que cet événement composé aura lieu précisément au coup x. Pour cela, il est nécessaire que l'événement simple n'arrive point au coup $x-i$, et qu'il arrive dans les i coups suivans, l'événement composé n'étant point arrivé précédemment. Soit alors P la probabilité que l'événement simple n'arrivera point au coup $x-i-1$. La probabilité correspondante qu'il n'arrivera point au coup $x-i$, sera $(1-q).P$; et la probabilité correspondante que l'événement composé aura lieu précisément au coup x, sera $(1-q).P.q^i$. Ce sera la partie de z_x correspondante à ce cas. Mais la probabilité que l'événement composé arrivera au coup $x-1$, est évidemment $P.q^i$; on a donc

$$P = \frac{z_{x-1}}{q^i};$$

ainsi la valeur partielle de z_x, relative à ce cas, est $(1-q).z_{x-1}$.

Considérons maintenant les cas où l'événement simple arrivera au coup $x-i-1$. Nommons P' la probabilité qu'il n'arrivera pas au coup $x-i-2$; la probabilité qu'il arrivera dans ce cas au coup $x-i-1$, sera $q.P'$ et la probabilité qu'il n'arrivera pas au coup $x-i$, sera $(1-q).q.P'$; la valeur partielle de z_x relative à ce cas, sera donc $(1-q).q.P'.q^i$. Mais la probabilité que l'événement composé arrivera précisément au coup $x-2$, est $P'.q^i$: c'est la valeur de z_{x-2}; ce qui donne

$$P' = \frac{z_{x-2}}{q^i};$$

$(1-q).q.z_{x-2}$ est donc la valeur partielle de z_x, relative au cas où l'événement simple arrivera au coup $x-i-1$, sans arriver au coup $x-i-2$.

On trouvera de la même manière que $(1-q).q^2.z_{x-3}$ est la valeur partielle de z_x, relative au cas où l'événement simple arrivera aux coups $x-i-1$ et $x-i-2$, sans arriver au coup $x-i-3$; et ainsi de suite.

En réunissant toutes ces valeurs partielles de z_x, on aura

$$z_x = (1-q).(z_{x-1} + q.z_{x-2} + q^2.z_{x-3} \ldots + q^{i-1}.z_{x-i}).$$

Il est facile d'en conclure que la fonction génératrice de z_x est

$$\frac{q^i.(1-qt).t^i}{1-t+(1-q).q^i.t^{i+1}};$$

car cette fonction génératrice est

$$\frac{\varphi(t)}{1-(1-q).(t+qt^2 \ldots + q^{i-1}t^i)},$$

ou

$$\frac{\varphi(t).(1-qt)}{1-t+(1-q).q^i.t^{i+1}}.$$

La

La fonction $\varphi(t)$ doit être déterminée par la condition qu'elle ne doit renfermer que la puissance i de t, puisque l'événement composé ne peut commencer à être possible qu'au coup i; de plus, le coefficient de cette puissance est la probabilité q^i, que cet événement aura lieu précisément à ce coup.

En divisant la fonction génératrice précédente, par $1-t$, on aura

$$\frac{q^i.(1-qt).t^i}{(1-t)^2.\left(1+\frac{(1-q).q^i.t^{i+1}}{1-t}\right)}$$

pour la fonction génératrice de la probabilité que l'événement composé aura lieu avant ou au coup x.

En développant cette fonction, on aura pour le coefficient de t^{x+i}, la série

$$\begin{aligned}
&q^i.[(1-q).x+1]\\
&-(1-q).q^{2i}.\frac{(x-i)}{1.2}.[(1-q).(x-i-1)+2]\\
&+(1-q)^2.q^{3i}.\frac{(x-2i).(x-2i-1)}{1.2.3}.[(1-q).(x-2i-2)+3]\\
&-(1-q)^3.q^{4i}.\frac{(x-3i).(x-3i-1).(x-3i-2)}{1.2.3.4}.[(1-q).(x-3i-3)+4]\\
&+\text{etc.},
\end{aligned}$$

la série étant continuée jusqu'à ce que l'on arrive à des facteurs négatifs. C'est l'expression de la probabilité que l'événement composé aura lieu au coup $x-i$, ou avant ce coup.

Supposons encore que deux joueurs A et B, dont les adresses respectives pour gagner un coup, sont q et $1-q$, jouent à cette condition, que celui des deux qui aura le premier vaincu i fois de suite son adversaire, gagnera la partie; on demande les probabilités respectives des deux joueurs pour gagner la partie précisément au coup x.

Soit y_x la probabilité de A, et y'_x celle de B. Le joueur A ne peut gagner la partie au coup x, qu'autant qu'il commence ou recommence à gagner B au coup $x-i+1$, et qu'il continue de le gagner les $i-1$ coups suivans. Or avant de commencer le coup $x-i+1$, B aura déjà gagné A, ou une fois, ou deux fois,.... ou

$i-1$ fois. Dans le premier cas, si l'on nomme P la probabilité de ce cas, $P.(1-q)^{i-1}$ sera la probabilité y'_{x-1} de B pour gagner la partie au coup $x-1$, ce qui donne

$$P=\frac{y'_{x-1}}{(1-q)^{i-1}}.$$

Mais si B perd au coup $x-i+1$ et aux $i-1$ coups suivans, A gagnera la partie au coup x, et la probabilité de cela est $P.q^i$; $\frac{q^i.y'_{x-1}}{(1-q)^{i-1}}$ est donc la partie de y_x, relative au premier cas.

Dans le second cas, si l'on nomme P' sa probabilité, $P'.(1-q)^{i-2}$ sera la probabilité y'_{x-2} de B pour gagner la partie au coup $x-2$. La probabilité de A pour gagner la partie au coup x, relative à ce cas, est $P'.q^i$; on a donc $\frac{q^i.y'_{x-2}}{(1-q)^{i-2}}$ pour cette probabilité.

En continuant ainsi, on aura

$$y_x=\frac{q^i}{(1-q)^i}.[(1-q).y'_{x-1}+(1-q)^2.y'_{x-2}\ldots\ldots+(1-q)^{i-1}.y'_{x-i+1}].$$

Si l'on change q en $1-q$, y_x en y'_x, et réciproquement, on aura

$$y'_x=\frac{(1-q)^i}{q^i}.[q.y_{x-1}+q^2.y_{x-2}\ldots+q^{i-1}.y_{x-i+1}].$$

Maintenant, u étant fonction génératrice de y_x, celle de y'_x sera, par tout ce qui précède,

$$kq.ut.(1+qt+qt^2\ldots\ldots+q^{i-2}t^{i-2}),$$

k étant égal à $\frac{(1-q)^i}{q^i}$. Mais l'expression précédente de y'_x ne commençant à avoir lieu que lorsque $x=i+1$, parce que pour des valeurs plus petites de x, y_{x-1}, y_{x-2}, etc. sont nuls; il faut, pour compléter l'expression précédente de la fonction génératrice de y'_x, lui ajouter une fonction rationnelle et entière de t, de l'ordre i, et dont les coefficiens des puissances de t soient les valeurs de y'_x, lorsque x est égal ou plus petit que i. Or y'_x est nul, lorsque x est moindre que i; et lorsqu'il est égal à i, y'_x est $(1-q)^i$, parce qu'il exprime alors la probabilité de B pour gagner la partie après i coups; la fonction à ajouter est donc $(1-q)^i.t^i$; ainsi la fonction génératrice de y'_x est

$$kq.ut.[1+qt\ldots+q^{i-2}t^{i-2}]+(1-q)^i.t^i.$$

Si l'on nomme u' cette fonction, l'expression de y_x en y'_{x-1}, y'_{x-2}, etc., donnera pour la fonction génératrice de y_x, en changeant dans celle de y'_x, k dans $\frac{1}{k}$, q dans $1-q$,

$$\frac{1}{k}.(1-q).u't.[1+(1-q)t\ldots+(1-q)^{i-2}t^{i-2}]+q^it^i.$$

Cette quantité est donc égale à u; d'où l'on tire, en y substituant pour u sa valeur précédente,

$$u=\frac{q^it^i.(1-qt).[1-(1-q)^it^i]}{1-t+q.(1-q)^it^{i+1}+(1-q).q^it^{i+1}-q^i.(1-q)^it^{2i}}.$$

En changeant q en $1-q$, on aura la fonction u' génératrice de y'_x. Si l'on divise ces fonctions par $1-t$, on aura les fonctions génératrices des probabilités respectives de A et de B, pour gagner la partie avant ou au coup x.

Si l'on suppose $t=1$ dans u, on aura la probabilité que A gagnera la partie; car il est clair qu'en développant u suivant les puissances de t, et en supposant ensuite $t=1$, la somme de tous les termes de ce développement sera celle de toutes les valeurs de y_x. On trouve ainsi la probabilité de A pour gagner la partie, égale à

$$\frac{[1-(1-q)^i].q^{i-1}}{(1-q)^{i-1}+q^{i-1}-q^{i-1}.(1-q)^{i-1}};$$

la probabilité de B est donc

$$\frac{(1-q)^{i-1}.[1-q^i]}{(1-q)^{i-1}+q^{i-1}-q^{i-1}.(1-q)^{i-1}}.$$

Supposons maintenant que les joueurs, à chaque coup qu'ils perdent, déposent un franc au jeu, et déterminons leur sort respectif. Il est clair que le gain du joueur A sera x, s'il gagne la partie au coup x, puisqu'il y aura x francs déposés au jeu; ainsi la probabilité de cet événement étant y_x par ce qui précède, $S.xy_x$ sera l'expression de l'avantage de A, le signe S s'étendant à toutes les valeurs possibles de x. La fonction génératrice de y_x étant u ou $\frac{T'}{T}$, T' étant le numérateur de l'expression précédente de u, et T étant son dénominateur; il est facile de voir que l'on aura $S.xy_x$ en différentiant $\frac{T'}{T}$, et en supposant ensuite $t=1$ dans cette différentielle, ce qui donne avec cette condition,

$$S.xy_x = \frac{dT'}{Tdt} - \frac{T'.dT}{T^2.dt}.$$

Pour avoir le désavantage de A, on observera qu'à chaque coup qu'il joue, la probabilité qu'il perdra, et par conséquent qu'il déposera un franc au jeu, est $1-q$; sa perte est donc le produit de $1-q$, par la probabilité que le coup sera joué; or la probabilité que le coup x sera joué, est $1-y_{x-1}-y'_{x-1}$; la fonction génératrice de l'unité, est ici $\frac{t}{1-t}$, et celle de $y_{x-1}+y'_{x-1}$, est $\frac{T'.t+T''.t}{T.(1-t)}$; T'' étant ce que devient T' lorsqu'on y change q en $1-q$, et réciproquement; ainsi la fonction génératrice du désavantage de A est

$$\frac{(1-q).t.(T-T'-T'')}{(1-t).T}.$$

Le numérateur et le dénominateur de cette fonction sont divisibles par $1-t$; de plus, on aura la somme de tous les désavantages de A, ou son désavantage total, en faisant $t=1$ dans cette fonction génératrice; le désavantage total est donc par les méthodes connues, et en observant que $T'+T''=T$, lorsque $t=1$,

$$-\frac{(1-q).(dT-dT'-dT'')}{T.dt},$$

t étant supposé égal à l'unité, après les différentiations. Si l'on retranche cette expression, de celle de l'avantage total de A, on aura pour l'expression du sort de ce joueur,

$$\frac{qdT'+(1-q).(dT-dT'')}{T.dt} - \frac{T'.dT}{T^2.dt}.$$

Le sort de B sera

$$\frac{(1-q).dT''+q.(dT-dT')}{T.dt}-\frac{T''.dT}{T^2.dt},$$

t étant supposé l'unité après les différentiations ; ce qui donne

$$T=q.(1-q).[q^{i-1}+(1-q)^{i-1}-q^{i-1}.(1-q)^{i-1}];$$
$$\frac{dT}{dt}=(i+1).q.(1-q).[q^{i-1}+(1-q)^{i-1}]-2^iq^i.(1-q)^i-1;$$
$$T'=(1-q).q^i.[1-(1-q)^i];$$
$$\frac{dT'}{dt}=i.(1-q).q^i.[1-2.(1-q)^i]-q.q^i.[1-(1-q)^i]$$

on aura T'' et $\frac{dT''}{dt}$, en changeant dans ces deux dernières expressions, q dans $1-q$.

13. Une urne étant supposée contenir $n+1$ boules, distinguées par les n^{os} 0, 1, 2, 3, ... n ; on en tire une boule que l'on remet dans l'urne après le tirage. On demande la probabilité qu'après i tirages, la somme des nombres amenés sera égale à s.

Soient t_1, t_2, t_3, ... t_i, les nombres amenés au premier tirage, au second, au troisième, etc. ; on doit avoir

$$t_1+t_2+t_3\ldots\ldots+t_i=s. \qquad (1)$$

t_2, t_3.... t_i étant supposés ne pas varier, cette équation n'est susceptible que d'une combinaison. Mais si l'on fait varier à la fois t_1 et t_2, et si l'on suppose que ces variables puissent s'étendre indéfiniment depuis zéro, alors le nombre des combinaisons qui donnent l'équation précédente sera

$$s+1-t_3-t_4\ldots-t_i;$$

car t_1 peut s'étendre depuis zéro, ce qui donne

$$t_2=s-t_3-t_4\ldots-t_i,$$

jusqu'à $s-t_3-t_4\ldots-t_i$, ce qui donne $t_2=0$; les valeurs négatives des variables t_1, t_2 devant être exclues.

Maintenant, le nombre $s+1-t_3-t_4\ldots-t_i$ est susceptible de plusieurs valeurs, en vertu des variations de t_3, t_4, etc. Supposons d'abord t_4, t_5, etc. invariables, et que t_3 puisse s'étendre indéfiniment depuis zéro; alors si l'on fait

$$s+1-t_3-t_4\ldots\ldots-t_i=x,$$

en intégrant cette variable dont la différence finie est l'unité, on aura $\frac{x.(x-1)}{1.2}$ pour son intégrale; mais pour avoir la somme de toutes les valeurs de x, il faut, comme l'on sait, ajouter x à cette intégrale; cette somme est donc $\frac{x.(x+1)}{1.2}$. Il faut y faire x égal à sa plus grande valeur, que l'on obtient en faisant t_3 nul dans la fonction $s+1-t_3-t_4\ldots\ldots-t_i$; ainsi le nombre total des combinaisons relatives aux variations de t_1, t_2 et t_3, est

$$\frac{(s+2-t_4-t_5\ldots\ldots-t_i).(s+1-t_4-t_5\ldots\ldots-t_i)}{1.2}.$$

En faisant encore dans cette fonction

$$s+2-t_4-t_5\ldots\ldots-t_i=x,$$

elle devient $\frac{x.(x-1)}{1.2}$; en l'intégrant depuis $x=0$, et en ajoutant la fonction elle-même, à cette intégrale, on aura $\frac{(x+1).x.(x-1)}{1.2.3}$; la valeur de x nulle répond à $t_4=s+2-t_5\ldots\ldots-t_i$, et sa plus grande valeur répond à t_4 nul, et par conséquent elle est égale à $s+3-t_5\ldots-t_i$; en substituant donc pour x, cette valeur dans l'intégrale précédente, on aura

$$\frac{(s+3-t_5-t_6\ldots-t_i).(s+2-t_5-t_6\ldots-t_i).(s+1-t_5-t_6\ldots-t_i)}{1.2.3}$$

pour la somme de toutes les combinaisons relatives aux variations de t_1, t_2, t_3, t_4. En continuant ainsi, on trouvera généralement que le nombre total des combinaisons qui donnent l'équation (1), dans la supposition où les variables t_1, t_2, $\ldots t_i$ peuvent s'étendre indéfiniment depuis zéro, est

$$\frac{(s+i-1).(s+i-2).(s+i-3)\ldots\ldots(s+1)}{1.2.3\ldots\ldots(i-1)};\quad (a)$$

mais dans la question présente, ces variables ne peuvent pas s'étendre au-delà de n. Pour exprimer cette condition, nous observerons que l'urne renfermant $n+1$ boules, la probabilité d'extraire l'une quelconque d'entre elles, est $\frac{1}{n+1}$; ainsi la probabilité de chacune des valeurs de t_1, depuis zéro jusqu'à n, est $\frac{1}{n+1}$. La probabilité des valeurs de t_1 égales ou supérieures à $n+1$, est nulle; on peut donc la représenter par $\frac{1-l^{n+1}}{n+1}$, pourvu que l'on fasse $l=1$ dans le résultat du calcul; alors la probabilité d'une valeur quelconque de t_1 peut être généralement exprimée par $\frac{1-l^{n+1}}{n+1}$, pourvu qu'on ne fasse commencer l, que lorsque t_1 aura atteint $n+1$, et qu'on le suppose à la fin, égale à l'unité: il en est de même des probabilités des autres variables. Maintenant, la probabilité de l'équation (1) est le produit des probabilités des valeurs de t_1, t_2, t_3, etc.; cette probabilité est donc $\left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i$; le nombre des combinaisons qui donnent cette équation, multipliées par leurs probabilités respectives, est ainsi le produit de la fraction (a) par $\left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i$, ou

$$\frac{(s+1).(s+2)\ldots.(s+i-1)}{1.2.3\ldots.(i-1)}.\left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i; \qquad (b)$$

mais il faut dans le développement de cette fonction, n'appliquer l^{n+1} qu'aux combinaisons dans lesquelles une des variables commence à surpasser n: il faut n'appliquer l^{2n+2} qu'aux combinaisons dans lesquelles deux des variables commencent à surpasser n, et ainsi du reste. Si dans l'équation (1) on suppose qu'une des variables, t_1, par exemple, surpasse n; en faisant $t_1=n+1+t'_1$, cette équation devient

$$s-n-1=t'_1+t_2+t_3+\text{etc.};$$

la variable t'_1 pouvant s'étendre indéfiniment. Si deux des variables telles que t_1 et t_2 surpassent n; en faisant

$$t_1=n+1+t'_1, \quad t_2=n+1+t'_2;$$

l'équation devient

$$s-2n-2=t'_1+t'_2+t_3+\text{etc.},$$

et ainsi de suite. On doit donc, dans la fonction (a) que nous avons dérivée de l'équation (1), diminuer s de $n+1$, relativement au système des variables t'_1, t_2, t_3, etc. On doit le diminuer de $2n+2$, relativement au système des variables t'_1, t'_2, t_3, etc.; et ainsi du reste. Il faut par conséquent, dans le développement de la fonction (b) par rapport aux puissances de l, diminuer dans chaque terme, s de l'exposant de la puissance de l; en faisant ensuite $l=1$, cette fonction devient

$$\frac{(s+1).(s+2)\ldots.(s+i-1)}{1.2.3\ldots(i-1).(n+1)^i}-\frac{i.(s-n).(s-n+1)\ldots.(s+i-n-2)}{1.2.3\ldots.(i-1).(n+1)^i}$$
$$+\frac{i.(i-1)}{1.2}.\frac{(s-2n-1).(s-2n)\ldots.(s+i-2n-3)}{1.2.3\ldots(i-1).(n+1)^i}-\text{etc.}; \quad (c)$$

la série devant être continuée jusqu'à ce que l'un des facteurs $s-n$, $s-2n-1$, $s-3n-2$, etc. devienne nul ou négatif.

Cette formule donne la probabilité d'amener un nombre donné s, en projetant i dés d'un nombre $n+1$ de faces chacun, le plus petit nombre marqué sur ces faces étant 1. Il est visible que cela revient à supposer dans l'urne précédente, tous les nombres des boules, augmentés de l'unité; et alors la probabilité d'amener le nombre $s+i$ dans i tirages, est la même que celle d'amener le nombre s dans le cas que nous venons de considérer; or en faisant $s+i=s'$, on a $s=s'-i$; la formule (c) donnera donc pour la probabilité d'amener le nombre s' en projetant les i dés,

$$\frac{(s'-1).(s'-2)\ldots.(s'-i+1)}{1.2.3\ldots.(i-1).(n+1)^i}-\frac{i.(s'-n-2).(s'-n-3)\ldots.(s'-i-n)}{1.2.3\ldots.(i-1).(n+1)^i}$$
$$+\frac{i.(i-1)}{1.2}.\frac{(s'-2n-3).(s'-2n-4)\ldots.(s'-i-2n-1)}{1.2.3\ldots.(i-1).(n+1)^i}-\text{etc.}$$

La formule (c) appliquée au cas où s et n sont des nombres infinis, se transforme dans la suivante,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(i-1).n}.\left\{\left(\frac{s}{n}\right)^{i-1}-i.\left(\frac{s}{n}-1\right)^{i-1}+\frac{i.(i-1)}{1.2}.\left(\frac{s}{n}-2\right)^{i-1}-\text{etc.}\right\}.$$

Cette

Cette expression peut servir à déterminer la probabilité que la somme des inclinaisons à l'écliptique, d'un nombre i d'orbites, sera comprise dans des limites données, en supposant que pour chaque orbite, toutes les inclinaisons depuis zéro jusqu'à l'angle droit, soient également possibles. En effet, si l'on conçoit que l'angle droit $\frac{1}{2}\pi$, soit divisé en un nombre infini n de parties égales, et que s renferme un nombre infini de ces parties; en nommant φ la somme des inclinaisons des orbites, on aura

$$\frac{s}{n}=\frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi}.$$

En multipliant donc l'expression précédente par ds ou par $\frac{nd\varphi}{\frac{1}{2}\pi}$, et en l'intégrant depuis $\varphi-\varepsilon$ jusqu'à $\varphi+\varepsilon$, on aura

$$\frac{1}{1.2.3\ldots i}.\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\varphi+\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^i-i.\left(\frac{\varphi+\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-1\right)^i+\frac{i.(i-1)}{1.2}.\left(\frac{\varphi+\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-2\right)^i-\text{etc.}\\-\left(\frac{\varphi-\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^i+i.\left(\frac{\varphi-\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-1\right)^i-\frac{i.(i-1)}{1.2}.\left(\frac{\varphi-\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}-2\right)^i+\text{etc.}\end{array}\right\};\ (o)$$

c'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites sera comprise dans les limites $\varphi-\varepsilon$ et $\varphi+\varepsilon$.

Appliquons cette formule aux orbites des planètes. La somme des inclinaisons des orbites des planètes à celle de la terre, était de $91°,4187$ au commencement de 1801 : il y a dix orbites, sans y comprendre l'écliptique; on a donc ici $i=10$. Nous ferons ensuite

$$\varphi-\varepsilon=0,$$
$$\varphi+\varepsilon=91°,4187.$$

La formule précédente devient ainsi, en observant que $\frac{1}{2}\pi$, ou le quart de la circonférence est de $100°$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots10}.(0,914187)^{10}.$$

C'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites serait comprise dans les limites zéro et $91°,4187$, si toutes les inclinaisons étaient également possibles. Cette probabilité est donc 0,00000011235. Elle est déjà très-petite; mais il faut encore la combiner avec la probabilité d'une circonstance très-remarquable dans le système du monde, et qui consiste en ce que toutes les planètes se meuvent dans le même sens que la terre. Si les mouvemens directs et rétrogrades sont supposés également possibles, cette dernière probabilité est $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; il faut donc multiplier 0,00000011235 par $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, pour avoir la probabilité que tous les mouvemens des planètes et de la terre seront dirigés dans le même sens, et que la somme de leurs inclinaisons à l'orbite de la terre, sera comprise dans les limites zéro et 91°,4187; on aura ainsi $\frac{1,0972}{(10)^{10}}$ pour cette probabilité; ce qui donne $1 - \frac{1,0972}{(10)^{10}}$ pour la probabilité que cela n'a pas dû avoir lieu, si toutes les inclinaisons, ainsi que les mouvemens directs et rétrogrades, ont été également faciles. Cette probabilité approche tellement de la certitude, que le résultat observé devient invraisemblable dans cette hypothèse; ce résultat indique donc avec une très-grande probabilité, l'existence d'une cause primitive qui a déterminé les mouvemens des planètes à se rapprocher du plan de l'écliptique, ou plus naturellement, du plan de l'équateur solaire, et à se mouvoir dans le sens de la rotation du soleil. Si l'on considère ensuite que les dix-huit satellites observés jusqu'ici, font leur révolution dans le même sens, et que les rotations observées au nombre de treize dans les planètes, les satellites et l'anneau de Saturne, sont encore dirigées dans le même sens; enfin, si l'on considère que la moyenne des inclinaisons des orbes de ces astres, et de leurs équateurs à l'équateur solaire, est fort éloignée d'atteindre un demi-angle droit; on verra que l'existence d'une cause commune qui a dirigé tous ces mouvemens dans le sens de la rotation du soleil, et sur des plans peu inclinés à celui de son équateur, est indiquée avec une probabilité bien supérieure à celle du plus grand nombre des faits historiques sur lesquels on ne se permet aucun doute.

Voyons maintenant si cette cause a influé sur le mouvement des comètes. Le nombre de celles qu'on a observées jusqu'à la fin de 1811, en comptant pour la même les diverses apparitions de celle de 1759, s'élève à cent, dont cinquante-trois sont directes, et quarante-sept sont rétrogrades. La somme des inclinaisons des orbites des premières, est de 2657°,993, et celle des inclinaisons des autres orbites, est de 2515°,684; l'inclinaison moyenne de toutes ces orbites est donc de 51°,73677; par conséquent la somme de toutes les inclinaisons est $\frac{i.\pi}{4}+i.1°,73677$, i étant ici égal à 100. On voit déjà que l'inclinaison moyenne surpassant le demi-angle droit, les comètes, loin de participer à la tendance des corps du système planétaire, pour se mouvoir dans des plans peu inclinés à l'écliptique, paraissent avoir une tendance contraire. Mais la probabilité de cette tendance est très-petite. En effet, si l'on suppose dans la formule (o),

$$\varphi=\frac{i.\pi}{4}, \quad \epsilon=i.1°,73677,$$

elle devient

$$\frac{1}{1.2.3\ldots i.2^i}\cdot\left\{\begin{array}{l} \left(i+\frac{4i.1°,73677}{\pi}\right)^i-i\left(i+\frac{4i.1°,73677}{\pi}-2\right)^i \\ +\frac{i.(i-1)}{1.2}.\left(i+\frac{4i.1°,73677}{\pi}-4\right)^i-\text{etc.} \\ -\left(i-\frac{4i.1°,73677}{\pi}\right)^i+i.\left(i-\frac{4i.1°,73677}{\pi}-2\right)^i \\ -\frac{i.(i-1)}{1.2}.\left(i-\frac{4i.1°,73677}{\pi}-4\right)^i+\text{etc.} \end{array}\right\}; \quad (p)$$

π étant 200°. C'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites des i comètes, doit être comprise dans les limites $\pm i.1°,73677$. Le nombre des termes de cette formule, et la précision avec laquelle il faudrait avoir chacun d'eux, en rend le calcul impraticable; il faut donc recourir aux méthodes d'approximation développées dans la seconde partie du premier Livre. On a par le n° 42 du même Livre,

$$\frac{(i+r\sqrt{i})^i-i.(i+r\sqrt{i}-2)^i+\frac{i.(i-1)}{1.2}.(i+r\sqrt{i}-4)^i-\text{etc.}}{1.2.3\ldots i.2^i}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\int dr.c^{-\frac{3}{2}r^2}-\frac{3}{20.i}.\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.r.(1-r^2).c^{-\frac{3}{2}r^2},$$

les puissances des quantités négatives étant ici exclues, comme elles le sont dans la formule précédente; en faisant donc

$$r\sqrt{i} = \frac{4i \,.\, 1^\circ{,}73677}{200^\circ};$$

la formule (p) devient

$$2 \,.\, \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \,.\, \int dr \,.\, c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{10 \,.\, i} \,.\, \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \,.\, r \,.\, (1 - r^2) \,.\, c^{-\frac{3}{2}r^2};$$

l'intégrale étant prise depuis r nul. On trouve ainsi 0,474 pour la probabilité que l'inclinaison des 100 orbites doit tomber dans les limites $50^\circ \pm 1^\circ{,}17377$; la probabilité que l'inclinaison moyenne doit être inférieure à l'inclinaison observée, est donc 0,737. Cette probabilité n'est pas assez grande pour que le résultat observé fasse rejeter l'hypothèse d'une égale facilité des inclinaisons des orbites, et pour indiquer l'existence d'une cause primitive qui a influé sur ces inclinaisons, cause que l'on ne peut s'empêcher d'admettre dans les inclinaisons des orbes du système planétaire.

La même chose a lieu par rapport au sens du mouvement. La probabilité que sur 100 comètes, quarante-sept au plus seront rétrogrades, est la somme des 48 premiers termes du binome $(p+q)^{100}$, en faisant dans le résultat du calcul $p = q = \frac{1}{2}$. Mais la somme des 50 premiers termes, plus la moitié du $51^{ième}$ ou du terme moyen, est la moitié du binome entier, ou de $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{100}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$; la probabilité cherchée est donc

$$\frac{1}{2} - \frac{100.99\ldots51}{1.2.3\ldots\ldots50.2^{100}} \,.\, \left(\frac{1}{2} + \frac{50}{51} + \frac{50.49}{51.52}\right);$$

ou

$$= \frac{1}{2} - \frac{1.2.3\ldots\ldots100.1594}{(1.2.3\ldots\ldots50)^2.2^{100}.663}.$$

En vertu du théorème

$$1.2.3\ldots s = s^{s+\frac{1}{2}} \,.\, c^{-s} \,.\, \left(1 + \frac{1}{12.s} + \text{etc.}\right) \,.\, \sqrt{2\pi},$$

on a, à très-peu près,

$$1.2.3\ldots100 = (100)^{100+\frac{1}{2}} \,.\, c^{-100} \,.\, \left(1 + \frac{1}{1200}\right) \,.\, \sqrt{2\pi},$$

$$2^{100} \,.\, (1.2.3\ldots50)^2 = 100^{100+1} \,.\, c^{-100} \,.\, \left(1 + \frac{1}{300}\right) \,.\, \pi.$$

La probabilité précédente devient ainsi,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{50.\pi}} \cdot \frac{1197.1594}{1200.663} = 0{,}3046.$$

Cette probabilité est beaucoup trop grande pour indiquer une cause qui ait favorisé, dans l'origine, les mouvemens directs. Ainsi la cause qui a déterminé le sens des mouvemens de révolution et de rotation des planètes et des satellites, ne paraît pas avoir influé sur le mouvement des comètes.

14. La méthode du numéro précédent a l'avantage de s'étendre au cas où le nombre des boules de l'urne, qui portent le même numéro, n'est pas égal à l'unité, mais varie suivant une loi quelconque. Concevons, par exemple, qu'il n'y ait qu'une boule portant le n° 0, qu'une boule portant le n° 1, et ainsi de suite jusqu'au n° r inclusivement. Supposons de plus qu'il y ait deux boules portant le n° $r+1$, deux boules portant le n° $r+2$, et ainsi de suite jusqu'au n° n inclusivement. Le nombre total des boules de l'urne sera $2n-r+1$, la probabilité d'en extraire un des numéros inférieurs à $r+1$, sera donc $\frac{1}{2n-r+1}$; et la probabilité d'en extraire le n° $r+1$ ou l'un des numéros supérieurs, sera $\frac{2}{2n-r+1}$: nous la représenterons par $\frac{1+l^{r+1}}{2n-r+1}$; mais nous ferons $l=1$ dans le résultat du calcul. Quoiqu'il n'y ait point de numéros au-delà du n° n, nous pouvons cependant considérer dans l'urne des numéros supérieurs à n, jusqu'à l'infini, pourvu que nous donnions à leur extraction, une probabilité nulle; nous pourrons donc représenter cette probabilité par $\frac{1+l^{r+1}-2l^{n+1}}{2n-r+1}$, en faisant $l=1$ dans le résultat du calcul. Par cet artifice, nous pourrons représenter généralement la probabilité d'un numéro quelconque, par l'expression précédente; pourvu que nous ne fassions commencer l^{r+1} que lorsqu'un des numéros commencera à surpasser r, et que nous ne fassions commencer l^{n+1} que lorsqu'un des numéros commencera à surpasser n. Cela posé, on trouvera, en appliquant ici les raisonnemens du numéro précédent, que la probabilité d'amener le nombre

s dans i tirages, est égale à

$$\frac{(s+i-1).(s+i-2).(s+i-3)\ldots\ldots(s+1)}{1.2.3\ldots.(i-1).(2n-r+1)^i}.(1+l^{r+1}-2l^{n+1})^i,$$

pourvu que dans le développement de cette fonction, suivant les puissances de l, on diminue dans chaque terme, s de l'exposant de la puissance l, qu'on suppose ensuite $l=1$, et qu'on arrête la série lorsque l'on parvient à des facteurs négatifs.

15. Appliquons maintenant cette méthode à la recherche du résultat moyen que doit donner un nombre quelconque d'observations dont les lois de facilité des erreurs sont connues. Pour cela, nous allons résoudre le problème suivant.

Soient i quantités variables et positives t, t_1, t_2, $\ldots t_{i-1}$ dont la somme soit s, et dont la loi de possibilité soit connue; on propose de trouver la somme des produits de chaque valeur que peut recevoir une fonction donnée $\psi(t, t_1, t_2,$ etc.$)$ de ces variables, multipliée par la probabilité correspondante à cette valeur.

Supposons pour plus de généralité, que les fonctions qui expriment les possibilités des variables t, t_1, etc. soient discontinues, et représentons par $\varphi(t)$ la possibilité de t, depuis $t=0$ jusqu'à $t=q$; par $\varphi'(t)+\varphi(t)$, sa possibilité depuis $t=q$ jusqu'à $t=q'$; par $\varphi''(t)+\varphi'(t)+\varphi(t)$, sa possibilité depuis $t=q'$ jusqu'à $t=q''$, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Désignons ensuite les mêmes quantités relatives aux variables t_1, t_2, etc. par les mêmes lettres, en écrivant respectivement au bas, les nombres 1, 2, 3, etc.; ensorte que q_1, q'_1, etc.; $\varphi_1(t_1)$, $\varphi'_1(t_1)$, etc. correspondent, relativement à t_1, à ce que q, q', etc.; $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, etc. sont respectivement à t, et ainsi de suite. Dans cette manière de représenter les possibilités des variables, il est clair que la fonction $\varphi(t)$ a lieu depuis $t=0$ jusqu'à t infini; que la fonction $\varphi'(t)$ a lieu depuis $t=q$ jusqu'à t infini, et ainsi de suite. Pour reconnaître les valeurs de t, t_1, t_2, etc. lorsque ces diverses fonctions commencent à avoir lieu, nous multiplierons conformément à la méthode exposée dans les numéros précédens, $\varphi(t)$ par l^0 ou l'unité, $\varphi'(t)$ par l^q, $\varphi''(t)$ par $l^{q'}$, etc.; nous multiplierons pareillement $\varphi_1(t_1)$ par l'unité, $\varphi'_1(t_1)$ par l^{q_1}, et ainsi de suite: les exposans des puissances de l indiqueront alors ces valeurs. Il suffira ensuite de faire $l=1$ dans le dernier résultat du calcul. Au moyen de ces artifices très-simples, on peut facilement résoudre le problème proposé.

La probabilité de la fonction $\psi(t, t_1, t_2, \text{etc.})$ est évidemment égale au produit des probabilités de t, t_1, t_2, etc., ensorte que si l'on substitue pour t sa valeur $s-t_1-t_2-$ etc. que donne l'équation

$$t+t_1+t_2 \ldots \ldots +t_{i-1}=s,$$

le produit de la fonction proposée par sa probabilité, sera

$$\begin{array}{l}
\psi(s-t_1-t_2-\text{etc.}, t_1, t_2, \text{etc.}) \\
\times[\varphi(s-t_1-t_2-\text{etc.})+l^q.\varphi'(s-t_1-t_2-\text{etc.})+l^{q'}.\varphi''(s-t_1-t_2-\text{etc.})+\text{etc.}] \\
\times[\varphi_1(t_1)+l^{q_1}.\varphi_1'(t_1)+l^{q_1'}.\varphi_1''(t_1)+\text{etc.}]; \qquad \text{(A)} \\
\times[\varphi_2(t_2)+l^{q_2}.\varphi_2'(t_2)+l^{q_2'}.\varphi_2''(t_2)+\text{etc.}] \\
\times \text{etc.}
\end{array}$$

on aura donc la somme de tous ces produits, 1°. en multipliant la quantité précédente par dt_1, et en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_1 est susceptible; 2° en multipliant cette intégrale par dt_2, et en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_2 est susceptible, et ainsi de suite jusqu'à la dernière variable t_{i-1}; mais ces intégrations successives exigent quelques attentions particulières.

Considérons un terme quelconque de la quantité (A), tel que

$$\begin{array}{l}
l^{q+q_1+q_2'+\text{etc.}}.\psi(s-t_1-t_2-\text{etc.}, t_1, t_2, \text{etc.}) \\
\times\varphi'(s-t_1-t_2-\text{etc.}).\varphi_1'(t_1).\varphi_2''(t_2).\text{etc.};
\end{array}$$

en le multipliant par dt_1, il faut intégrer pour toutes les valeurs possibles de t_1; or la fonction $\varphi'(s-t_1-t_2-\text{etc.})$ n'a lieu que lorsque t, dont la valeur est $s-t_1-t_2-$etc., égale ou surpasse q; la plus grande valeur que t_1 puisse recevoir, est donc $s-q-t_2-t_3-$etc. De plus, $\varphi_1'(t_1)$ n'ayant lieu que lorsque t_1 est égal ou plus grand que q_1, cette quantité est la plus petite valeur que t_1 puisse recevoir; il faut donc prendre l'intégrale dont il s'agit, depuis $t_1=q_1$ jusqu'à

$$t_1=s-q-t_2-t_3-\text{etc.};$$

ou, ce qui revient au même, depuis $t_1-q_1=0$ jusqu'à

$$t_1-q_1=s-q-q_1-t_2-t_3-\text{etc.}$$

On trouvera de la même manière qu'en multipliant cette nouvelle intégrale par dt_2, il faudra l'intégrer depuis $t_2 - q'_2 = 0$ jusqu'à

$$t_2 - q'_2 = s - q - q_1 - q'_2 - t_3 - \text{etc.}$$

En continuant d'opérer ainsi, on arrivera à une fonction de $s - q - q_1 - q'_2 -$ etc., dans laquelle il ne restera aucune des variables t, t_1, t_2, etc. Cette fonction doit être rejetée, si $s - q - q_1 - q'_2 -$ etc. est nul ou négatif; car il est visible que dans ce cas, le système des fonctions $\varphi'(t), \varphi'_1(t_1), \varphi''_2(t_2)$, etc. ne peut pas être employé. En effet, les plus petites valeurs de t_1, t_2, etc. étant par la nature de ces fonctions, égales à q_1, q'_2, etc.; la plus grande valeur que t puisse recevoir est $s - q_1 - q'_2 -$ etc.; ainsi la plus grande valeur de $t - q$ est

$$s - q - q_1 - q'_2 - \text{etc.};$$

or la fonction $\varphi'(t)$ ne peut être employée qu'autant que $t - q$ est positif.

De là résulte une solution très-simple du problème proposé. Que l'on substitue, 1°. $q + t$ au lieu de t, dans $\varphi'(t)$; $q' + t$ au lieu de t, dans $\varphi''(t)$; $q'' + t$ au lieu de t, dans $\varphi'''(t)$, et ainsi de suite; 2°. $q_1 + t_1$ au lieu de t_1, dans $\varphi'_1(t_1)$; $q'_1 + t_1$ au lieu de t_1, dans $\varphi''_1(t_1)$; etc.; 3°. $q_2 + t_2$ au lieu de t_2, dans $\varphi'_2(t_2)$; $q'_2 + t_2$ au lieu de t_2, dans $\varphi''_2(t_2)$, etc.; et ainsi de suite; 4°. enfin, $k + t$ au lieu de t, $k_1 + t_1$ au lieu de t_1, et ainsi du reste, dans $\psi(t, t_1, t_2, \text{etc.})$; la fonction (A) deviendra

$$\begin{aligned}
&\psi(k + s - t_1 - t_2 - t_3 - \text{etc.},\ k_1 + t_1,\ k_2 + t_2,\ \text{etc.}) \\
&\times [\varphi(s - t_1 - t_2 - t_3 - \text{etc.}) + l^q.\varphi'(s + q - t_1 - t_2 - \text{etc.}) \\
&\qquad\qquad + l^{q'}.\varphi''(s + q' - t_2 - t_3 - \text{etc.}) + \text{etc.}]; \quad (A') \\
&\times [\varphi_1(t_1) + l^{q_1}.\varphi'_1(q_1 + t_1) + l^{q'_1}.\varphi''_1(q'_1 + t_1) + \text{etc.}] \\
&\times [\varphi_2(t_2) + l^{q_2}.\varphi'_2(q_2 + t_2) + \text{etc.}]
\end{aligned}$$

en multipliant cette fonction par dt_1, on l'intégrera depuis t_1 nul jusqu'à $t_1 = s - t_2 - t_3 -$ etc. On multipliera ensuite cette première intégrale par dt_2, et on l'intégrera depuis t_2 nul jusqu'à $t_2 = s - t_3 - t_4 -$ etc. En continuant ainsi, on parviendra à une dernière intégrale qui sera fonction de s, et que nous désignerons par

par $\Pi(s)$; et cette fonction sera la somme cherchée de toutes les valeurs de $\psi(t, t_1, t_2, \text{etc.})$ multipliées par leurs probabilités respectives. Mais pour eela, il faut avoir soin de changer dans un terme quelconque, multiplié par une puissance de l, telle que $l^{q+q_1+q'_2+\text{etc.}}$, k dans la partie de l'exposant de la puissance relative à la variable t, et qui dans ce cas est q; et si cette partie manque, il faut supposer k égal à zéro. Il faut pareillement changer k_1 dans la partie de l'exposant relative à la variable t_1, et ainsi de suite; il faut diminuer s de l'exposant entier de la puissance de l, et écrire ainsi dans le cas présent, $s-q-q_1-q'_2-$ etc., au lieu de s, et rejeter le terme, si s, ainsi diminué, devient négatif. Enfin, il faut supposer $l=1$.

Si $\psi(t, t_1, t_2, \text{etc.})$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, etc.; $\varphi_1(t_1)$, etc. sont des fonctions rationnelles et entières des variables t, t_1, t_2, etc.; de leurs exponentielles, et de sinus et cosinus; toutes les intégrations successives seront possibles, parce qu'il est de la nature de ces fonctions, de se reproduire par les intégrations. Dans les autres cas, les intégrations pourront n'être pas possibles; mais l'analyse précédente réduit alors le problème aux quadratures. Le cas des fonctions rationnelles et entières, offre quelques simplifications que nous allons exposer.

Supposons que l'on ait

$$\begin{aligned}
&\varphi(t)+l^{q}.\varphi'(q+t)+l^{q'}.\varphi''(q'+t)+\text{etc.}=A+B.t+C.t^2+\text{etc.},\\
&\varphi_1(t_1)+l^{q_1}.\varphi'_1(q_1+t_1)+l^{q'_1}.\varphi''_1(q'_1+t_1)+\text{etc.}=A_1+B_1.t_1+C_1.t_1^2+\text{etc.},\\
&\varphi_2(t_2)+l^{q_2}.\varphi'_2(q_2+t_2)+l^{q'_2}.\varphi''_2(q'_2+t_2)+\text{etc.}=A_2+B_2.t_2+C_2.t_2^2+\text{etc.},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

et désignons par $H.t^{n}.t_1^{n_1}.t_2^{n_2}.\text{etc.}$ un terme quelconque de $\psi(k+t, k_1+t_1, k_2+t_2, \text{etc.})$; il est facile de s'assurer que la partie de $\Pi(s)$ correspondante à ce terme, est

$$\begin{aligned}
&1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n_1.1.2.3\ldots n_2.\text{etc.}\,H.s^{i+n+n_1+n_2+\text{etc.}-1}\\
&\quad\times[A+(n+1).B.s+(n+1).(n+2).C.s^2+\text{etc.}]\\
&\quad\times[A_1+(n_1+1).B_1.s+(n_1+1).(n_1+2).C_1.s^2+\text{etc.}];\\
&\quad\times[A_2+(n_2+1).B_2.s+(n_2+1).(n_2+2).C_2.s^2+\text{etc.}]\\
&\quad\times\text{etc.}
\end{aligned}\tag{B}$$

pourvu que dans le développement de cette quantité, au lieu d'une puissance quelconque a de s, on écrive $\frac{s^a}{1.2.3\ldots a}$. On aura ensuite la partie correspondante de la somme entière des valeurs de $\psi(t, t_1, t_2, \text{etc.})$, multipliées par leurs probabilités respectives, en changeant un terme quelconque de ce développement, tel que $H\lambda.t^{\mu}.s^e$ dans $H\lambda.(s-\mu)^e$, et en substituant dans H, au lieu de k, la partie de l'exposant μ, qui est relative à la variable t; au lieu de k_1, la partie relative à t_1, et ainsi du reste.

Si dans la formule (B) on suppose $H=1$, et n, n_1, n_2, etc. nuls; on aura la somme des valeurs de l'unité, multipliées par leur probabilité respective; or il est visible que cette somme n'est autre chose que la somme de toutes les combinaisons dans lesquelles l'équation

$$t+t_1+t_2\ldots\ldots+t_{i-1}=s$$

a lieu, multipliées par leur probabilité; elle exprime conséquemment la probabilité de cette équation. Si dans les hypothèses précédentes, on suppose de plus que la loi de probabilité est la même pour les r premières variables $t, t_1, t_2, \ldots t_{r-1}$, et que pour les $i-r$ dernières, elle soit encore la même, mais différente que pour les premières; on aura

$$\begin{aligned}
&A = A_1 = A_2\ldots = A_{r-1},\\
&B = B_1 = B_2\ldots = B_{r-1},\\
&\quad\text{etc.}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_r = A_{r+1}\ldots\ldots\ldots = A_{i-1},\\
&B_r = B_{r+1}\ldots\ldots\ldots = B_{i-1},\\
&\quad\text{etc.},
\end{aligned}$$

et la formule (B) se changera dans la suivante,

$$s^{i-1}.(A+B.s+2C.s^2+\text{etc.})^r.(A_r+B_r.s+2C_r.s^2+\text{etc.})^{i-r}. \qquad (C)$$

Cette formule servira à déterminer la probabilité que la somme des erreurs d'un nombre quelconque d'observations dont la loi de facilité des erreurs est connue, sera comprise dans des limites données.

Supposons, par exemple, que l'on ait $i-1$ observations dont les erreurs pour chaque observation puissent s'étendre depuis $-h$ jusqu'à $+g$; et qu'en nommant z l'erreur de la première de ces observations, la loi de facilité de cette erreur soit exprimée par $a+bz+cz^2$. Supposons ensuite que cette loi soit la même, pour les erreurs $z_1, z_2, \ldots z_{i-2}$ des autres observations, et cherchons la probabilité que la somme de ces erreurs, sera comprise dans les limites p et $p+e$.

Si l'on fait

$$z=t-h,\quad z_1=t_1-h,\quad z_2=t_2-h,\quad \text{etc.};$$

il est clair que t, t_1, t_2, etc. seront positifs et pourront s'étendre depuis zéro, jusqu'à $h+g$; de plus, on aura

$$z+z_1+z_2\ldots+z_{i-2}=t+t_1+t_2\ldots+t_{i-2}-(i-1).h;$$

donc la plus grande valeur de la somme $z+z_1+z_2\ldots+z_{i-2}$ étant par la supposition, égale à $p+e$, et la plus petite étant égale à p; la plus grande valeur de $t+t_1+t_2\ldots+t_{i-2}$, sera $(i-1).h+p+e$, et la plus petite sera $(i-1).h+p$; en faisant ainsi

$$(i-1).h+p+e=s$$

et

$$t+t_1+t_2\ldots+t_{i-2}=s-t_{i-1};$$

t_{i-1} sera toujours positif, et pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à e. Cela posé, si l'on applique à ce cas, la formule (C); on aura $q=h+g$. D'ailleurs la loi de facilité des erreurs z étant $a+bz+cz^2$, on en conclura la loi de facilité de t, en y changeant z en $t-h$; soit

$$a'=a-bh+ch^2,\quad b'=b-2ch,$$

on aura $a'+b't+ct^2$ pour cette loi; ce sera donc la fonction $\varphi(t)$. Mais comme depuis $t=h+g$ jusqu'à t infini, la facilité des valeurs de t est nulle par l'hypothèse; on aura

$$\varphi'(t)+\varphi(t)=0;$$

ce qui donne

$$\varphi'(t)=-(a'+b't+ct^2);$$

donc si l'on fait

$$a'' = a' + b'(h+g) + c(h+g)^2,$$
$$b'' = b' + 2c(h+g);$$

on aura

$$\varphi(t) + l^q . \varphi'(q+t) = a' + b't + ct^2 - l^{h+g}.(a'' + b''t + ct^2);$$

et cette équation aura encore lieu, en y changeant t en t_1, t_2, etc.; puisque la loi de facilité des erreurs est supposée la même pour toutes les observations.

Quant à la variable t_{i-1}, on observera que la probabilité de l'équation

$$z + z_1 \ldots . + z_{i-2} = \mu$$

étant, quel que soit μ, égale au produit des probabilités de z, z_1, z_2, etc.; la probabilité de l'équation

$$t + t_1 + t_2 \ldots . + t_{i-2} = s - t_{i-1},$$

sera égale au produit des probabilités de t, t_1, t_2, etc.; la loi de probabilité de t_{i-1} est donc constante et égale à l'unité; et comme cette variable ne doit s'étendre que depuis $t_{i-1} = 0$ jusqu'à $t_{i-1} = e$; on aura

$$q_{i-1} = e, \quad \varphi_{i-1}(t_{i-1}) = 1, \quad \varphi'_{i-1}(t_{i-1}) + \varphi_{i-1}(t_{i-1}) = 0;$$

et par conséquent

$$\varphi'_{i-1}(t_{i-1}) = -1$$

ce qui donne

$$\varphi_{i-1}(t_{i-1}) + l^{q_{i-1}}.\varphi'_{i-1}(q_{i-1} + t_{i-1}) = 1 - l^e;$$

la formule (C) deviendra donc

$$s^{i-1}.[a' + b's + 2cs^2 - l^{h+g}.(a'' + b''s + 2cs^2)]^{i-1}.(1 - l^e). \quad \text{(C')}$$

Soit

$$(a' + b's + 2cs^2)^{i-1} = a^{(1)} + b^{(1)}s + c^{(1)}s^2 + f^{(1)}s^3 + \text{etc.},$$
$$(a' + b's + 2cs^2)^{i-2}.(a'' + b''s + 2cs^2) = a^{(2)} + b^{(2)}s + c^{(2)}s^2 + \text{etc.},$$
$$(a' + b's + 2cs^2)^{i-3}.(a'' + b''s + 2cs^2) = a^{(3)} + b^{(3)}s + c^{(3)}s^2 + \text{etc.},$$
$$\text{etc.}$$

La formule précédente (C') donnera, en y changeant un terme quelconque tel que $\lambda.t^{\mu}.s^{a}$, en

$$\frac{\lambda.(s-\mu)^{a}}{1.2.3\ldots.a};$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)}.\left\{\begin{array}{l}
a^{(1)}.[s^{i-1}-(s-e)^{i-1}] \\
+\frac{b^{(1)}}{i}.[s^{i}-(s-e)^{i}] \\
+\frac{c^{(1)}}{i.(i+1)}.[s^{i+1}-(s-e)^{i+1}] \\
+\text{etc.} \\
-(i-1).\left\{\begin{array}{l}
a^{(2)}.[(s-h-g)^{i-1}-(s-h-g-e)^{i-1}] \\
+\frac{b^{(2)}}{i}.[(s-h-g)^{i}-(s-h-g-e)^{i}] \\
+\frac{c^{(2)}}{i.(i+1)}.[(s-h-g)^{i+1}-(s-h-g-e)^{i+1}] \\
+\text{etc.}
\end{array}\right. \\
+\frac{(i-1).(i-2)}{1.2}.\left\{\begin{array}{l}
a^{(3)}.[(s-2h-2g)^{i-1}-(s-2h-2g-e)^{i-1}] \\
+\frac{b^{(3)}}{i}.[(s-2h-2g)^{i}-(s-2h-2g-e)^{i}] \\
+\frac{c^{(3)}}{i.(i+1)}.[(s-2h-2g)^{i+1}-(s-2h-2g-e)^{i+1}] \\
+\text{etc.}
\end{array}\right. \\
-\text{etc.}
\end{array}\right.$$

Il faut rejeter de cette expression, les termes dans lesquels la quantité élevée sous le signe des puissances, est négative.

Supposons maintenant que z, z_1, z_2, etc., représentant toujours les erreurs de $i-1$ observations, la loi de facilité, tant de l'erreur z que de l'erreur négative $-z$, soit $\mathcal{C}(h-z)$, et que h et $-h$ soient les limites de ces erreurs. Supposons de plus que cette loi soit la même pour toutes les observations; et cherchons la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites p et $p+e$.

Si l'on fait $z=t-h$, $z_1=t_1-h$, etc.; il est clair que t, t_1, etc. seront toujours positifs, et pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à $2h$; mais ici la loi de facilité est discontinue en deux points. Depuis $t=0$ jusqu'à $t=h$, elle est exprimée par $\mathcal{C}t$. Depuis $t=h$ jusqu'à $t=2h$, elle est exprimée par $\mathcal{C}(2h-t)$; enfin, elle est nulle depuis

$t = 2h$ jusqu'à t infini. On a donc

$$q = h, \quad q' = 2h;$$

on a ensuite

$$\begin{aligned} &\varphi\ (t) = 6t, \\ &\varphi'(t) + \varphi\ (t) = (2h - t).6, \\ &\varphi''(t) + \varphi'(t) + \varphi\ (t) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\varphi'(t) = (2h - 2t).6, \quad \varphi''(t) = (t - 2h).6,$$

ainsi l'on a dans ce cas,

$$\varphi(t) + l^{q}.\varphi'(q+t) + l^{q'}.\varphi''(q'+t) = 6.t.(1 - l^{h})^2;$$

équation qui a encore lieu en y changeant t en t_1, t_2, etc. Présentement on a

$$z + z_1 + z_2 \ldots + z_{i-1} = t + t_1 + t_2 \ldots + t_{i-1} - (i-1).h;$$

donc la somme des erreurs z, z_1, etc. devant être par hypothèse, renfermée dans les limites p et $p+e$, la somme des valeurs de $t, t_1, \ldots t_{i-1}$ sera comprise dans les limites $(i-1).h+p$ et $(i-1).h+p+e$; ensorte que si l'on fait

$$t + t_1 + t_2 \ldots + t_{i-2} = s - t_{i-1},$$

s étant supposé égal à $(i-1).h+p+e$; t_{i-1} pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à e; et l'on verra, comme dans l'exemple précédent, que sa facilité doit être supposée égale à l'unité dans cet intervalle, et qu'elle doit être supposée nulle au-delà de cet intervalle; ainsi l'on a $q_{i-1} = e$, et

$$\varphi_{i-1}(t_{i-1}) + l^{q_{i-1}}.\varphi'_{i-1}(t_{i-1}) = 1 - l^{e}.$$

Cela posé, si l'on observe que $26\int dz.(h-z)$ étant la probabilité que l'erreur d'une observation est comprise dans les limites $-h$ et $+h$, ce qui est certain, on a $6 = \frac{1}{h^2}$; la formule (C) donnera pour l'expression de la probabilité cherchée,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(2i-2).h^{2i-2}}\cdot\left\{\begin{array}{l} s^{2i-2}-(s-e)^{2i-2} \\ -(2i-2).[(s-h)^{2i-2}-(s-h-e)^{2i-2}] \\ +\frac{(2i-2).(2i-3)}{1.2}.[(s-2h)^{2i-2}-(s-2h-e)^{2i-2}] \\ -\text{etc.} \end{array}\right\},$$

en ayant soin de rejeter tous les termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance $2i-2$, est négative.

Nous allons encore appliquer cette analyse au problème suivant. Si l'on conçoit un nombre i de points rangés en ligne droite, et sur ces points, des ordonnées dont la première soit au moins égale à la seconde, celle-ci au moins égale à la troisième, et ainsi de suite; et que la somme de ces i ordonnées soit constamment égale à s. En supposant s partagé dans une infinité de parties, on peut satisfaire aux conditions précédentes, d'une infinité de manières. On propose de déterminer la valeur de chacune des ordonnées, moyenne entre toutes les valeurs qu'elle peut recevoir.

Soit z la plus petite ordonnée, ou l'ordonnée $i^{ième}$; soit $z+z_1$, l'ordonnée $(i-1)^{ième}$; soit $z+z_1+z_2$, l'ordonnée $(i-2)^{ième}$, et ainsi de suite jusqu'à la première ordonnée qui sera $z+z_1\ldots\ldots+z_{i-1}$. Les quantités z, z_1, z_2, etc. seront ou nulles ou positives, et leur somme $i.z+(i-1).z_1+(i-2).z_2\ldots+z_{i-1}$ sera, par les conditions du problème, égale à s. Soit

$$i.z=t,\quad (i-1).z_1=t_1,\quad (i-2).z_2=t_2,\ldots z_{i-1}=t_{i-1};$$

on aura

$$t+t_1+t_2\ldots\ldots+t_{i-1}=s;$$

les variables t, t_1, t_2, etc. pourront s'étendre jusqu'à s. L'ordonnée $r^{ième}$ sera

$$\frac{t}{i}+\frac{t_1}{i-1}\ldots\ldots+\frac{t_{i-r}}{r}.$$

Il faut déterminer la somme de toutes les variations que cette quantité peut recevoir, et la diviser par le nombre total de ces variations, pour avoir l'ordonnée moyenne. La formule (B) donne très-facilement cette somme, en observant qu'ici

$$\psi.(t,t_1,t_2,\text{ etc.})=\frac{t}{i}+\frac{t_1}{i-1}\ldots\ldots+\frac{t_{i-r}}{r};$$

et on la trouve égale à

$$\frac{s^i}{1.2.3\ldots i}\cdot\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i-1}+\frac{1}{i-2}\cdots+\frac{1}{r}\right).$$

En divisant cette quantité par le nombre total des combinaisons, qui ne peut être qu'une fonction de i et de s, et que nous désignerons par N, on aura pour la valeur moyenne de l'ordonnée $r^{ième}$,

$$\frac{s^i}{1.2.3\ldots i.N}\cdot\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i-1}\cdots+\frac{1}{r}\right).$$

Pour déterminer N, nous observerons que toutes les valeurs moyennes doivent ensemble égaler s; ce qui donne

$$N=\frac{s^{i-1}}{1.2.3\ldots(i-1)};$$

la valeur moyenne de l'ordonnée $r^{ième}$ est donc

$$\frac{s}{i}\cdot\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i-1}\cdots+\frac{1}{r}\right). \qquad (\varepsilon)$$

Supposons qu'un effet observé n'ait pu être produit que par l'une des i causes A, B, C, etc.; et qu'une personne, après avoir apprécié leurs probabilités respectives, écrive sur un billet, les lettres qui indiquent ces causes, dans l'ordre des probabilités qu'elle leur attribue, en écrivant la première, la lettre indiquant la cause qui lui semble la plus probable. Il est clair que l'on aura par la formule précédente, la valeur moyenne des probabilités qu'il peut supposer à chacune d'elles, en observant qu'ici la quantité s que l'on doit répartir sur chacune des causes, est la certitude ou l'unité, puisque la personne est assurée que l'effet doit résulter de l'une d'elles. La valeur moyenne de la probabilité qu'elle attribue à la cause qu'elle a placée sur son billet au rang $r^{ième}$, est donc

$$\frac{1}{i}\cdot\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i-1}\cdots+\frac{1}{r}\right).$$

De là il suit que si un tribunal est appelé à décider sur cet objet, et que chaque membre exprime son opinion par un billet semblable au précédent; alors, en écrivant sur chaque billet, à côté des lettres qui

qui indiquent les causes, les valeurs moyennes qui répondent au rang qu'elles ont sur le billet; en faisant ensuite une somme de toutes les valeurs qui correspondent à chaque cause, sur les divers billets; la cause à laquelle répondra la plus grande somme, sera celle que le tribunal jugera la plus probable.

Cette règle n'est point applicable aux choix des assemblées électorales, parce que les électeurs ne sont point astreints, comme les juges, à répartir une même somme prise pour unité, sur les divers partis entre lesquels ils doivent se déterminer : ils peuvent supposer à chaque candidat, toutes les nuances de mérite comprises entre le mérite nul et le *maximum* de mérite, que nous désignerons par a : l'ordre des noms sur chaque billet, ne fait qu'indiquer que l'électeur préfère le premier au second, le second au troisième, etc. On déterminera ainsi les nombres qu'il faut écrire sur le billet, à côté des noms des candidats.

Soient $t_1, t_2, t_3 \ldots t_i$ les mérites respectifs des i candidats, dans l'opinion de l'électeur, t_1 étant le mérite qu'il suppose à celui des candidats qu'il a mis au premier rang, t_2 étant le mérite qu'il suppose au second, et ainsi de suite. L'intégrale $\int t_r . dt_1 . dt_2 \ldots dt_i$ exprimera la somme des mérites que l'électeur peut attribuer au candidat r, pourvu que l'on intègre d'abord par rapport à t_i, depuis $t_i = 0$ jusqu'à $t_i = t_{i-1}$; ensuite par rapport à t_{i-1}, depuis t_{i-1} jusqu'à t_{i-2}, et ainsi de suite, jusqu'à l'intégrale relative à t_1, que l'on prendra depuis t_1 nul jusqu'à $t_1 = a$. Car il est visible qu'alors t_i ne surpasse jamais t_{i-1}, t_{i-1} ne surpasse jamais t_{i-2}, etc. En divisant l'intégrale précédente par celle-ci $\int dt_1 . dt_2 \ldots dt_i$ qui exprime la somme totale des combinaisons dans lesquelles la condition précédente est remplie, on aura l'expression moyenne du mérite que l'électeur peut attribuer au candidat $r^{ième}$. En exécutant les intégrations, on trouve $\frac{i-r+1}{i+1} . a$ pour cette expression.

De là il suit que l'on peut écrire sur le billet de chaque électeur, i à côté du premier nom, $i-1$ à côté du second, $i-2$ à côté du troisième, etc. En réunissant ensuite tous les nombres relatifs à chaque candidat, sur les divers billets; celui des candidats qui aura la plus grande somme, doit être présumé le candidat qui, aux yeux de l'assemblée électorale, a le plus grand mérite, et doit par conséquent être choisi.

Ce mode d'élection serait sans doute le meilleur, si des considérations étrangères au mérite n'influaient point souvent sur le choix des électeurs, même les plus honnêtes, et ne les déterminaient point à placer aux derniers rangs, les candidats les plus redoutables à celui qu'ils préfèrent; ce qui donne un grand avantage aux candidats d'un mérite médiocre. Aussi l'expérience l'a-t-elle fait abandonner aux établissemens qui l'avaient adopté.

Supposons que les erreurs d'une observation puissent s'étendre dans les limites $+a$ et $-a$; mais qu'ignorant la loi de probabilité de ces erreurs, on ne l'assujétisse qu'à la condition de leur donner une probabilité d'autant plus petite, qu'elles sont plus grandes; la probabilité des erreurs positives étant supposée la même que celle des erreurs négatives correspondantes, toutes choses qu'il est naturel d'admettre. La formule (ε) donnera encore la loi moyenne des erreurs. Pour cela on concevra l'intervalle a partagé dans un nombre infini i de parties représentées par dx, ensorte que $i=\frac{a}{dx}$; on fera ensuite $r=\frac{x}{dx}$; la formule (ε) devient ainsi

$$\frac{s.dx}{a}.\int\frac{dx}{x},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=x$ jusqu'à $x=a$; dans la question présente $s=\frac{1}{2}$; car l'erreur devant tomber dans les limites $-a$ et $+a$, la probabilité qu'elle tombera dans les limites o et a est $\frac{1}{2}$; c'est la quantité s qu'il faut répartir sur tous les points de l'intervalle a; la formule (ε) devient donc alors

$$\frac{dx}{2a}.\log\frac{a}{x}.$$

Ainsi la loi moyenne des probabilités des erreurs positives x, ou négatives $-x$, est

$$\frac{1}{2a}.\log\frac{a}{x}.$$

CHAPITRE III.

Des lois de la probabilité, qui résultent de la multiplication indéfinie des événemens.

16. A MESURE que les événemens se multiplient, leurs probabilités respectives se développent de plus en plus : leurs résultats moyens et les bénéfices ou les pertes qui en dépendent, convergent vers des limites dont ils approchent avec des probabilités toujours croissantes. La détermination de ces accroissemens et de ces limites, est une des parties les plus intéressantes et les plus délicates de l'analyse des hasards.

Considérons d'abord la manière dont les possibilités de deux événemens simples dont un seul doit arriver à chaque coup, se développent lorsqu'on multiplie le nombre de coups. Il est visible que l'événement dont la facilité est la plus grande, doit probablement arriver plus souvent dans un nombre donné de coups ; et l'on est porté naturellement à penser qu'en répétant les coups un très-grand nombre de fois, chacun de ces événemens arrivera proportionnellement à sa facilité, que l'on pourra ainsi découvrir par l'expérience. Nous allons démontrer analytiquement cet important théorème.

On a vu dans le nº 6 que si p et $1-p$ sont les probabilités respectives de deux événemens a et b ; la probabilité que dans $x+x'$ coups, l'événement a arrivera x fois, et l'événement b, x' fois, est égale à

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'}.p^x.(1-p)^{x'};$$

c'est le $(x'+1)^{ième}$ terme du binome $[p+(1-p)]^{x+x'}$. Considérons le plus grand de ces termes que nous désignerons par k. Le terme antérieur sera $\frac{kp}{1-p}\cdot\frac{x'}{x+1}$, et le terme suivant sera $k.\frac{1-p}{p}\cdot\frac{x}{x'+1}$. Pour que k soit le plus grand terme, il faut que l'on ait à la fois

$$\frac{p}{1-p} < \frac{x+1}{x'} > \frac{x}{x'+1};$$

il est facile d'en conclure que si l'on fait $x+x'=n$, on aura

$$x<(n+1).p>(n+1).p-1;$$

ainsi x est le plus grand nombre entier compris dans $(n+1).p$; en faisant donc

$$x=(n+1).p-s,$$

ce qui donne

$$p=\frac{x+s}{n+1},\quad 1-p=\frac{x'+1-s}{n+1},\quad \frac{p}{1-p}=\frac{x+s}{x'+1-s}.$$

s sera moindre que l'unité. Si x et x' sont de très-grands nombres, on aura à très-peu près,

$$\frac{p}{1-p}=\frac{x}{x'};$$

c'est-à-dire que les exposans de p et de $1-p$, dans le plus grand terme du binome, sont à fort peu près dans le rapport de ces quantités; ensorte que de toutes les combinaisons qui peuvent avoir lieu dans un très-grand nombre n de coups, la plus probable est celle dans laquelle chaque événement est répété proportionnellement à sa probabilité.

Le terme $l^{ième}$, après le plus grand, est

$$\frac{1.2.3\ldots.n}{1.2.3\ldots(x-l).1.2.3\ldots.(x'+l)}.p^{x-l}.(1-p)^{x'+l}.$$

On a par le n° 32 du premier Livre,

$$1.2.3\ldots n=n^{n+\frac{1}{2}}.c^{-n}.\sqrt{2\pi}.\left\{1+\frac{1}{12.n}+\text{etc.}\right\};$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(x-l)}=(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}}.\frac{c^{x-l}}{\sqrt{2\pi}}.\left\{1-\frac{1}{12.(x-l)}-\text{etc.}\right\},$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(x'+l)}=(x'+l)^{-x'-l-\frac{1}{2}}.\frac{c^{x'+l}}{\sqrt{2\pi}}.\left\{1-\frac{1}{12.(x'+l)}-\text{etc.}\right\}.$$

Développons le terme $(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}}$. Son logarithme hyperbolique est

$$(l-x-\tfrac{1}{2}).\left[\log x+\log\left(1-\frac{l}{x}\right)\right];$$

or on a

$$\log\left(1-\frac{l}{x}\right)=-\frac{l}{x}-\frac{l^2}{2x^2}-\frac{l^3}{3x^3}-\frac{l^4}{4x^4}-\text{etc.};$$

nous négligerons les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$, et nous supposerons que l^2 ne surpasse point l'ordre n; alors on pourra négliger les termes de l'ordre $\frac{l^4}{x^3}$, parce que x et x' sont de l'ordre n. On aura ainsi

$$(l-x-\tfrac{1}{2}).\left[\log x+\log\left(1-\frac{l}{x}\right)\right]$$
$$=(l-x-\tfrac{1}{2}).\log x+l+\frac{l}{2x}-\frac{l^2}{2x}-\frac{l^3}{6x^2}:$$

ce qui donne, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}}=c^{l-\frac{l^2}{2x}}.x^{l-x-\frac{1}{2}}.\left(1+\frac{l}{2x}-\frac{l^3}{6x^2}\right);$$

on aura pareillement,

$$(x'+l)^{-l-x'-\frac{1}{2}}=c^{-l-\frac{l^2}{2x'}}.x'^{-l-x'-\frac{1}{2}}.\left(1-\frac{l}{2x'}+\frac{l^3}{6x'^2}\right).$$

On a ensuite par ce qui précède, $p=\frac{x+s}{n+1}$, s étant moindre que l'unité; en faisant donc $p=\frac{x-z}{n}$, z sera compris dans les limites $\frac{x}{n+1}$ et $-\frac{n-x}{n+1}$, et par conséquent il sera, abstraction faite du signe, au-dessous de l'unité. La valeur de p donne $1-p=\frac{x'+z}{n}$;

on aura donc par l'analyse précédente,

$$p^{x-l}.(1-p)^{x'+l}=\frac{x^{x-l}.\,x'^{x'+l}}{n^n}.\left(1+\frac{nz.l}{xx'}\right);$$

de là on tire

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(x-l).1.2.3\ldots(x'+l)}.p^{x-l}.(1-p)^{x'+l}$$

$$=\frac{\sqrt{n}.c^{-\frac{nl^2}{2xx'}}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2xx'}}.\left(1+\frac{nzl}{xx'}+\frac{l(x'-x)}{2xx'}-\frac{l^3}{6x^2}+\frac{l^3}{6x'^2}\right).$$

On aura le terme antérieur au plus grand terme, et qui en est éloigné à la distance l, en faisant l négatif dans cette équation; en réunissant ensuite ces deux termes, leur somme sera

$$\frac{2.\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2xx'}}.c^{-\frac{nl^2}{2xx'}}.$$

L'intégrale finie

$$\Sigma.\frac{2.\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2xx'}}.c^{-\frac{nl^2}{2xx'}},$$

prise depuis $l=0$ inclusivement, exprimera donc la somme de tous les termes du binome $[p+(1-p)]^n$, comprise entre les deux termes, dont l'un a p^{x+l} pour facteur, et l'autre a p^{x-l} pour facteur, et qui sont ainsi équidistans du plus grand terme; mais il faut retrancher de cette somme, le plus grand terme qui y est évidemment compris deux fois.

Maintenant, pour avoir cette intégrale finie, nous observerons que l'on a, par le n° 10 du premier Livre, y étant fonction de l,

$$\Sigma.y=\frac{1}{c^{\frac{dy}{dl}}-1}=\left(\frac{dy}{dl}\right)^{-1}-\frac{1}{2}.\left(\frac{dy}{dl}\right)^{0}+\frac{1}{12}.\frac{dy}{dl}+\text{etc.};$$

d'où l'on tire par le même numéro,

$$\Sigma.y=\int y\,dl-\frac{1}{2}.y+\frac{1}{12}.\frac{dy}{dl}+\text{etc.}+\text{constante.}$$

y étant ici égal à $\frac{2.\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2xx'}}.c^{-\frac{nl^2}{2xx'}}$, les différentielles successives de y acquièrent pour facteur $\frac{nl}{2xx'}$ et ses puissances; ainsi l étant supposé ne pouvoir être au plus que de l'ordre $\sqrt{n}$, ce facteur est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et par conséquent ses différentielles divisées par les puissances respectives de dl, décroissent de plus en plus; en négligeant donc, comme on l'a fait précédemment, les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$, on aura, en faisant commencer avec l les deux intégrales finies et infiniment petites, et désignant par Y le plus grand terme du binome,

$$\Sigma.y = \int ydl - \tfrac{1}{2}.y + \tfrac{1}{2}.Y.$$

La somme de tous les termes du binome $[p+(1-p)]^n$ compris entre les deux termes équidistans du plus grand terme du nombre l, étant égale à $\Sigma.y - \frac{1}{2}.Y$, elle sera

$$\int ydl - \tfrac{1}{2}.y;$$

et si l'on y ajoute la somme de ces termes extrêmes, on aura pour la somme de tous ces termes,

$$\int ydl + \tfrac{1}{2}.y.$$

Si l'on fait

$$t = \frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{2xx'}},$$

cette somme devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int dt.c^{-t^2} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2xx'}}.c^{-t^2}. \quad (o)$$

Les termes que l'on a négligés étant de l'ordre $\frac{1}{n}$, cette expression est d'autant plus exacte, que n est plus grand: elle est rigoureuse, lorsque n est infini. Il serait facile, par l'analyse précédente, d'avoir égard aux termes de l'ordre $\frac{1}{n}$, et des ordres supérieurs.

On a, par ce qui précède, $x = np + z$, z étant un nombre plus petit que l'unité ; on a donc

$$\frac{x+l}{n}-p=\frac{l+z}{n}=\frac{t.\sqrt{2xx'}}{n.\sqrt{n}}+\frac{z}{n};$$

ainsi la formule (o) exprime la probabilité que la différence entre le rapport du nombre de fois que l'événement a doit arriver, au nombre total des coups, et la facilité p de cet événement, est comprise dans les limites

$$\pm\frac{t.\sqrt{2xx'}}{n.\sqrt{n}}+\frac{z}{n}. \quad (l)$$

$\sqrt{2xx'}$ étant égal à

$$n.\sqrt{2p(1-p)+\frac{2z}{n}.(1-2p)-\frac{2z^2}{n^2}};$$

on voit que l'intervalle compris entre les limites précédentes est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Si la limite de t, que nous désignerons par T, est supposée invariable, la probabilité déterminée par la fonction (o), reste la même à très-peu près ; mais l'intervalle compris entre les limites (l), diminue sans cesse à mesure que les coups se répètent, et il devient nul, lorsque leur nombre est infini.

Cet intervalle étant supposé invariable ; lorsque les événemens se multiplient, T croît sans cesse, et à fort peu près comme la racine carrée du nombre des coups. Mais lorsque T est considérable, la formule (o) devient, par le n° 27 du premier Livre,

$$1-\frac{c^{-T^2}}{2T.\sqrt{\pi}}.\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\text{etc.}}}}}$$

$$+\frac{c^{-T^2}}{\sqrt{2n\pi.\left[p(1-p)+\frac{z}{n}.(1-2p)-\frac{z^2}{n^2}\right]}},$$

q étant égal à $\frac{1}{2T^2}$. Lorsqu'on fait croître T, c^{-T^2} diminue avec une extrême

extrême rapidité, et la probabilité précédente s'approche rapidement de l'unité à laquelle elle devient égale, lorsque le nombre des coups est infini.

Il y a ici deux sortes d'approximations : l'une d'elles est relative aux limites prises de part et d'autre de la facilité de l'événement a; l'autre approximation se rapporte à la probabilité que le rapport des arrivées de cet événement, au nombre total des coups, sera renfermé dans ces limites. La répétition indéfinie des coups accroît de plus en plus cette probabilité, les limites restant les mêmes : elle resserre de plus en plus l'intervalle de ces limites, la probabilité restant la même. Dans l'infini, cet intervalle devient nul, et la probabilité se change en certitude.

L'analyse précédente réunit à l'avantage de démontrer ce théorème, celui d'assigner la probabilité que dans un grand nombre n de coups, le rapport des arrivées de chaque événement sera compris dans des limites données. Supposons, par exemple, que les facilités des naissances des garçons et des filles soient dans le rapport de 18 à 17, et qu'il naisse dans une année, 14000 enfans ; on demande la probabilité que le nombre des garçons ne surpassera pas 7363, et ne sera pas moindre que 7037.

Dans ce cas, on a

$$p = \frac{18}{35}, \quad x = 7200, \quad x' = 6800, \quad n = 14000, \quad l = 163;$$

la formule (o) donne à fort peu près 0,994303 pour la probabilité cherchée.

Si l'on connaît le nombre de fois que sur n coups, l'événement a est arrivé ; la formule (o) donnera la probabilité que sa facilité p supposée inconnue, sera comprise dans des limites données. En effet, si l'on nomme i ce nombre de fois, on aura, par ce qui précède, la probabilité que la différence $\frac{i}{n} - p$ sera comprise dans les limites $\pm \frac{T.\sqrt{2xx'}}{n.\sqrt{n}} + \frac{z}{n}$; par conséquent, on aura la probabilité que p sera compris dans les limites

$$\frac{i}{n} \mp \frac{T.\sqrt{2xx'}}{n.\sqrt{n}} - \frac{z}{n}.$$

La fonction $\frac{T.\sqrt{2xx'}}{n.\sqrt{n}}$ étant de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$, on peut en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$, y substituer i au lieu de x, et $n-i$ au lieu de x'; les limites précédentes deviennent ainsi, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$;

$$\frac{i}{n} \mp \frac{T.\sqrt{2i.(n-i)}}{n.\sqrt{n}};$$

et la probabilité que la facilité de l'événement a est contenue dans ces limites, est égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int dt.c^{-t^2} + \frac{\sqrt{n}.c^{-T^2}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2i.(n-i)}}. \quad (o')$$

On voit ainsi qu'à mesure que les événemens se multiplient, l'intervalle des limites se resserre de plus en plus, et la probabilité que la valeur de p tombe dans ces limites, approche de plus en plus de l'unité ou de la certitude. C'est ainsi que les événemens, en se développant, font connaître leurs probabilités respectives.

On parvient directement à ces résultats, en considérant p comme une variable qui peut s'étendre depuis zéro jusqu'à l'unité, et en déterminant, d'après les événemens observés, la probabilité de ses diverses valeurs, comme on le verra lorsque nous traiterons de la probabilité des causes, déduite des événemens observés.

Si l'on a trois ou un plus grand nombre d'événemens a, b, c, etc., dont un seul doive arriver à chaque coup; on aura, par ce qui précède, la probabilité que dans un très-grand nombre n de coups, le rapport du nombre x de fois qu'un de ces événemens, a par exemple, arrivera, au nombre n, sera compris dans les limites $p \pm \alpha$, α étant une très-petite fraction; et l'on voit que dans le cas extrême du nombre n infini, l'intervalle 2α de ces limites peut être supposé nul, et la probabilité peut être supposée égale à la certitude, ensorte que les nombres des arrivées de chaque événement seront proportionnels à leurs facilités respectives.

Quelquefois les événemens, au lieu de faire connaître directement les limites de la valeur de p, donnent celles d'une fonction de cette valeur ; alors on en conclut les limites de p, par la résolution des équations. Pour en donner un exemple fort simple, considérons deux joueurs *A* et *B*, dont les adresses respectives soient p et $1-p$, et jouant ensemble à cette condition, que la partie soit gagnée par celui des deux joueurs qui, sur trois coups, aura vaincu deux fois son adversaire, le troisième coup n'étant pas joué, comme inutile, lorsque l'un des joueurs a vaincu dans les deux premiers coups.

La probabilité de *A* pour gagner la partie, est la somme des deux premiers termes du binome $[p+(1-p)]^3$; elle est par conséquent égale à $p^3+3p^2.(1-p)$. Soit P cette fonction ; en élevant le binome $P+(1-P)$ à la puissance n, on aura, par l'analyse précédente, la probabilité que sur le nombre n de parties, le nombre des parties gagnées par *A* sera compris dans des limites données. Il suffit pour cela de changer p en P dans la formule (o').

Si l'on nomme i le nombre des parties gagnées par *A*, la formule (o') donnera la probabilité que P sera compris dans les limites

$$\frac{i}{n} \mp \frac{T.\sqrt{2i.(n-i)}}{n.\sqrt{n}}.$$

Soit donc p' la racine réelle et positive de l'équation

$$p^3+3p^2.(1-p)=\frac{i}{n};$$

en désignant par $p'\mp\delta p$ les limites de p, les limites correspondantes de P seront à très-peu près $3p'^2-2p'^3\mp 6p'.(1-p').\delta p$; en égalant ces limites aux précédentes, on aura

$$\delta p=\frac{T.\sqrt{2i.(n-i)}}{6p'.(1-p').n.\sqrt{n}};$$

ainsi la formule (o') donnera la probabilité que p sera compris dans les limites

$$p'\mp\frac{T.\sqrt{2i.(n-i)}}{6p'.(1-p').n.\sqrt{n}}.$$

Le nombre n des parties ne détermine pas le nombre des coups, puisqu'il peut y avoir des parties de deux coups, et d'autres de trois coups. On aura la probabilité que le nombre des parties de deux coups, sera compris dans des limites données, en observant que la probabilité d'une partie à deux coups, est $p^2+(1-p)^2$; désignons cette fonction par P'. En élevant le binome $P'+(1-P')$ à la puissance n, la formule (o) donnera la probabilité que le nombre des parties de deux coups sera compris dans les limites $nP'\pm l$; or le nombre des parties de deux coups étant $nP'\pm l$, le nombre des parties à trois coups sera $n(1-P')\mp l$; le nombre total des coups sera donc $3n-nP'\mp l$; la formule (o) donnera donc la probabilité que le nombre des coups sera compris dans les limites

$$2n.(1+p-p^2)\mp T.\sqrt{2nP'.(1-P')}.$$

17. Considérons une urne A renfermant un très-grand nombre n de boules blanches et noires, et supposons qu'à chaque tirage, on tire une boule de l'urne, et qu'on la remplace par une boule noire. On demande la probabilité qu'après r tirages, le nombre des boules blanches sera x.

Nommons $y_{x,r}$ cette probabilité. Après un nouveau tirage, elle devient $y_{x,r+1}$. Mais pour qu'il y ait x boules blanches après $r+1$ tirages, il faut qu'il y ait ou $x+1$ boules blanches après le tirage r, et que le tirage suivant fasse sortir une boule blanche, ou x boules blanches après le tirage r, et que le tirage suivant fasse sortir une boule noire. La probabilité qu'il y aura $x+1$ boules blanches après r tirages, est $y_{x+1,r}$, et la probabilité qu'alors le tirage suivant fera sortir une boule blanche, est $\frac{x+1}{n}$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{x+1}{n}.y_{x+1,r}$; c'est la première partie de $y_{x,r+1}$. La probabilité qu'il y aura x boules blanches après le tirage r, est $y_{x,r}$; et la probabilité qu'alors il sortira une boule noire, est $\frac{n-x}{n}$, parce que le nombre des boules noires de l'urne est $n-x$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{n-x}{n}.y_{x,r}$; c'est la seconde partie de $y_{x,r+1}$. Ainsi l'on a

$$y_{x,r+1}=\frac{x+1}{n}.y_{x+1,r}+\frac{n-x}{n}.y_{x,r}.$$

Si l'on fait

$$x=nx',\quad r=nr',\quad y_{x,r}=y'_{x',r'},$$

cette équation devient

$$y'_{x',r'+\frac{1}{n}}=\left(x'+\frac{1}{n}\right).y'_{x'+\frac{1}{n},r'}+(1-x').y'_{x',r'},$$

n étant supposé un très-grand nombre, on peut réduire en séries convergentes $y'_{x',r'+\frac{1}{n}}$, et $y'_{x'+\frac{1}{n},r'}$; on aura donc, en négligeant les carrés et les puissances supérieures de $\frac{1}{n}$,

$$\frac{1}{n}.\left(\frac{dy'_{x',r'}}{dr'}\right)=\frac{x'}{n}.\left(\frac{dy'_{x',r'}}{dx'}\right)+\frac{1}{n}.y'_{x',r'};$$

l'intégrale de cette équation aux différences partielles est

$$y'_{x',r'}=c^{r'}.\varphi(x'.c^{r'}),$$

$\varphi(x'.c^{r'})$ étant une fonction arbitraire de $x'.c^{r'}$, qu'il faut déterminer par la valeur de $y'_{x',o}$.

Supposons que l'urne A ait été remplie de cette manière. On projette un prisme droit dont la base étant un polygone régulier de $p+q$ côtés, est assez étroite pour que le prisme ne retombe jamais sur elle. Sur les $p+q$ faces latérales, p sont blanches et q sont noires, et l'on met dans l'urne A, à chaque projection, une boule de la couleur de la face sur laquelle le prisme retombe. Après n projections, le nombre des boules blanches sera à fort peu près, par le n° précédent, $\frac{n.p}{p+q}$, et la probabilité qu'il sera $\frac{n.p}{p+q}+l$, est, par le même numéro,

$$\frac{p+q}{\sqrt{2npq.\pi}}.c^{-\frac{(p+q)^2.l^2}{2npq}}.$$

Si l'on fait

$$x=\frac{np}{p+q}+l,\quad \frac{(p+q)^2}{2pq}=i^2,$$

cette fonction devient

$$\frac{i}{\sqrt{\pi n}}.c^{-\frac{i^2}{n}.\left(x-\frac{np}{p+q}\right)^2};$$

c'est la valeur de $y_{x,0}$, ou de $y'_{x',0}$; mais la valeur précédente de $y'_{x',r'}$ donne

$$y_{x,0}=\varphi\left(\frac{x}{n}\right);$$

on a donc

$$\varphi\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{i}{\sqrt{n\pi}}.c^{-i^2.n.\left(\frac{x}{n}-\frac{p}{p+q}\right)^2};$$

partant,

$$y'_{x',r'}=\frac{i.c^{r'}}{\sqrt{n\pi}}.c^{-i^2.n.\left(\frac{x.c^{r'}}{n}-\frac{p}{p+q}\right)}$$

d'où l'on tire

$$y_{x,r}=\frac{i.c^{\frac{r}{n}}}{\sqrt{n\pi}}.c^{-\frac{i^2}{n}.\left(x.c^{\frac{r}{n}}-\frac{np}{p+q}\right)^2}.$$

La valeur de x la plus probable est celle qui rend nul $x.c^{\frac{r}{n}}-\frac{np}{p+q}$, et par conséquent elle est égale à

$$\frac{np}{(p+q).c^{\frac{r}{n}}};$$

la probabilité que la valeur de x sera contenue dans les limites

$$\frac{np}{(p+q).c^{\frac{r}{n}}}\pm\frac{\mu.\sqrt{n}}{c^{\frac{r}{n}}},$$

est

$$2.\int\frac{id\mu}{\sqrt{\pi}}.c^{-i^2\mu^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $\mu=0$.

Cherchons maintenant la valeur moyenne du nombre des boules blanches contenues dans l'urne A, après r tirages. Cette valeur est la somme de tous les nombres possibles de boules blanches, multipliés par leurs probabilités respectives; elle est donc égale à

$$\frac{2np}{(p+q).c^{\frac{r}{n}}}.\int\frac{id\mu}{\sqrt{\pi}}.c^{-i^2\mu^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \infty$. Cette valeur est ainsi

$$\frac{np}{(p+q).c^{\frac{r}{n}}};$$

par conséquent, elle est la même que la valeur de x la plus probable.

Considérons maintenant deux urnes A et B renfermant chacune le nombre n de boules, et supposons que dans le nombre total $2n$ des boules, il y en ait autant de blanches que de noires. Concevons que l'on tire en même tems, une boule, de chaque urne, et qu'ensuite on mette dans une urne, la boule extraite de l'autre. Supposons que l'on répète cette opération, un nombre quelconque r de fois, en agitant à chaque fois les urnes, pour en bien mêler les boules; et cherchons la probabilité qu'après ce nombre r d'opérations, il y aura x boules blanches dans l'urne A.

Soit $z_{x,r}$ cette probabilité. Le nombre des combinaisons possibles dans r opérations, est n^{2r}; car à chaque opération, les n boules de l'urne A peuvent se combiner avec chacune des n boules de l'urne B, ce qui produit n^2 combinaisons; $n^{2r}.z_{x,r}$ est donc le nombre des combinaisons dans lesquelles il peut y avoir x boules blanches dans l'urne A après ces opérations. Maintenant, il peut arriver que l'opération $(r+1)^{ième}$ fasse sortir une boule blanche de l'urne A, et y fasse rentrer une boule blanche; le nombre de cas dans lesquels cela peut arriver, est le produit de $n^{2r}.z_{x,r}$ par le nombre x des boules blanches de l'urne A, et par le nombre $n-x$ des boules blanches qui doivent être alors dans l'urne B, puisque le nombre total des boules blanches des deux urnes, est n. Dans tous ces cas, il reste x boules blanches dans l'urne A; le produit $x.(n-x).n^{2r}.z_{x,r}$ est donc une des parties de $n^{2r+2}.z_{x,r+1}$.

Il peut arriver encore que l'opération $(r+1)^{ième}$ fasse sortir et rentrer dans l'urne A, une boule noire, ce qui conserve dans cette urne, x boules blanches. Ainsi $n-x$ étant après l'opération $r^{ième}$, le nombre des boules noires de l'urne A, et x étant celui des boules noires de l'urne B, $(n-x).x.n^{2r}.z_{x,r}$ est encore une partie de $n^{2r+2}.z_{x,r+1}$.

S'il y a $x-1$ boules blanches dans l'urne A après l'opération $r^{ième}$, et que l'opération suivante en fasse sortir une boule noire, et y fasse rentrer une boule blanche; il y aura x boules blanches dans l'urne A après l'opération $(r+1)^{ième}$; le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver, est le produit de $n^{2r}.z_{x-1,r}$ par le nombre $n-x+1$ des boules noires de l'urne A après le tirage $r^{ième}$, et par le nombre $n-x+1$ des boules blanches de l'urne B, après la même opération; $(n-x+1)^2.n^{2r}.z_{x-1,r}$ est donc encore une partie de $n^{2r+2}.z_{x,r+1}$.

Enfin, s'il y a $x+1$ boules blanches dans l'urne A après l'opération $r^{ième}$, et que l'opération suivante en fasse sortir une boule blanche, et y fasse rentrer une boule noire; il y aura encore, après cette dernière opération, x boules blanches dans l'urne. Le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver, est le produit de $n^{2r}.z_{x+1,r}$ par le nombre $x+1$ des boules blanches de l'urne A, et par le nombre $x+1$ des boules noires de l'urne B après l'opération $r^{ième}$; $(x+1)^2.n^{2r}.z_{x+1,r}$ est donc encore une partie de $n^{2r+2}.z_{x,r+1}$.

En réunissant toutes ces parties, et en égalant leur somme à $n^{2r+2}.z_{x,r+1}$, on aura l'équation aux différences finies partielles,

$$z_{x,r+1}=\left(\frac{x+1}{n}\right)^2.z_{x+1,r}+\frac{2x}{n}.\left(1-\frac{x}{n}\right).z_{x,r}+\left(1-\frac{x-1}{n}\right)^2.z_{x-1,r}$$

Quoique cette équation soit aux différences du second ordre par rapport à la variable x, cependant son intégrale ne renferme qu'une fonction arbitraire qui dépend de la probabilité des diverses valeurs de x dans l'état initial de l'urne A. En effet, il est visible que si l'on connaît les valeurs de $z_{x,0}$ correspondantes à toutes les valeurs de x, depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$; l'équation précédente donnera toutes les valeurs de $z_{x,1}$, $z_{x,2}$, etc., en observant que les valeurs négatives de x étant impossibles, $z_{x,r}$ est nul lorsque x est négatif.

Si n est un très-grand nombre, cette équation se transforme dans une équation aux différences partielles que l'on obtient ainsi. On a alors à très-peu près,

$$z_{x+1,r}=z_{x,r}+\left(\frac{dz_{x,r}}{dx}\right)+\frac{1}{2}.\left(\frac{d^2z_{x,r}}{dx^2}\right);$$

$$z_{x-1,r}=z_{x,r}-\left(\frac{dz_{x,r}}{dx}\right)+\frac{1}{2}.\left(\frac{d^2z_{x,r}}{dx^2}\right);$$

$$z_{x,r+1}=z_{x,r}+\left(\frac{dz_{x,r}}{dx}\right).$$

Soit

Soit

$$x = \frac{n + \mu . \sqrt{n}}{2}, \quad r = nr', \quad z_{x,r} = U;$$

l'équation précédente aux différences finies partielles deviendra, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n^2}$,

$$\left(\frac{dU}{dr'}\right) = 2U + 2\mu . \left(\frac{dU}{d\mu}\right) + \left(\frac{d^2U}{d\mu^2}\right).$$

Pour intégrer cette équation qui, comme on peut s'en assurer par la méthode que j'ai donnée pour cet objet, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, de l'année 1773, n'est intégrable en termes finis, qu'au moyen d'intégrales définies; faisons

$$U = \int \varphi dt . c^{-\mu t},$$

φ étant fonction de t et de r'. On aura

$$2\mu . \left(\frac{dU}{d\mu}\right) = 2c^{-\mu t} . t\varphi - 2\int c^{-\mu t} . (\varphi dt + t d\varphi),$$
$$\left(\frac{ddU}{d\mu^2}\right) = \int c^{-\mu t} . t^2 \varphi dt;$$

l'équation aux différentielles partielles en U, devient ainsi

$$\int c^{-\mu t} . \left(\frac{d\varphi}{dr'}\right) . dt = 2c^{-\mu t} . t\varphi + \int c^{-\mu t} . dt . \left[t^2 \varphi - 2t . \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\right].$$

En égalant entre eux les termes affectés du signe $\int$, on aura l'équation aux différentielles partielles,

$$\left(\frac{d\varphi}{dr'}\right) = t^2 \varphi - 2t . \left(\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Le terme hors du signe $\int$, égalé à zéro, donnera pour l'équation aux limites de l'intégrale,

$$0 = t\varphi . c^{-\mu t}.$$

L'intégrale de l'équation précédente aux différentielles partielles de φ, est

$$\varphi = c^{\frac{1}{4} t^2} . \psi \left(\frac{t}{c^{2r'}}\right),$$

$\psi\left(\frac{t}{c^{2r'}}\right)$ étant une fonction arbitraire de $\frac{t}{c^{2r'}}$; on a donc

$$U = \int dt . c^{-\mu t + \frac{1}{4}t^2} . \psi\left(\frac{t}{c^{2r'}}\right).$$

Soit

$$t = 2\mu + 2s\sqrt{-1},$$

l'expression de U prendra cette forme,

$$U = c^{-\mu^2} . \int ds . c^{-s^2} . \Gamma\left(\frac{s - \mu\sqrt{-1}}{c^{2r'}}\right); \quad \text{(A)}$$

Il est facile de voir que l'équation précédente, aux limites de l'intégrale, exige que les limites de l'intégrale relative à s, soient prises depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$. En prenant le radical $\sqrt{-1}$, avec le signe $-$, on aurait pour U une expression de cette forme,

$$U = c^{-\mu^2} . \int ds . c^{-s^2} . \Pi\left(\frac{s + \mu\sqrt{-1}}{c^{2r'}}\right),$$

la fonction arbitraire $\Pi(s)$ pouvant être différente de $\Gamma(s)$. La somme de ces deux expressions de U sera sa valeur complette. Mais il est facile de s'assurer que les intégrales étant prises depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$, l'addition de cette nouvelle expression de U n'ajoute rien à la généralité de la première, dans laquelle elle est comprise.

Développons maintenant le second membre de l'équation (A), suivant les puissances de $\frac{1}{c^{2r'}}$, et considérons un des termes de ce développement, tel que

$$\frac{H^{(i)} . c^{-\mu^2}}{c^{4ir'}} . \int ds . c^{-s^2} . (s - \mu\sqrt{-1})^{2i};$$

ce terme devient, après les intégrations,

$$\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2^i} . \sqrt{\pi} . \frac{H^{(i)} . c^{-\mu^2}}{c^{4ir'}}$$
$$\times \left[1 - \frac{i.(2\mu)^2}{1.2} + \frac{i.(i-1).(2\mu)^4}{1.2.3.4} - \frac{i.(i-1).(i-2).(2\mu)^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}\right].$$

Considérons encore un terme de ce développement, relatif aux puissances impaires de $\frac{1}{c^{2r'}}$, tel que

$$\frac{L^{(i)}.\sqrt{-1}.c^{-\mu^2}}{c^{(i+1)r'}}.\int ds.c^{-s^2}.(s-\mu\sqrt{-1})^{2i+1}.$$

Ce terme devient, après les intégrations,

$$\frac{1.3.5\ldots(2i+1).L^{(i)}.\sqrt{\pi}.\mu.c^{-\mu^2}}{2^i.c^{(i+2)r'}}.\left[1-\frac{i.(2\mu)^2}{1.2.3}+\frac{i.(i-1).(2\mu)^4}{1.2.3.4.5}-\text{etc.}\right]$$

On aura donc ainsi l'expression générale de la probabilité U, développée dans une série ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{c^{2r'}}$, série qui devient très-convergente, lorsque r' est un nombre considérable. Cette expression doit être telle, que $\int Udx$ ou $\frac{1}{2}.\int Ud\mu.\sqrt{n}$ soit égale à l'unité, les intégrales étant étendues à toutes les valeurs de x et de μ, c'est-à-dire depuis x nul jusqu'à $x=n$, et depuis $\mu=-\sqrt{n}$ jusqu'à $\mu=\sqrt{n}$; car il est certain que l'une des valeurs de x devant avoir lieu, la somme des probabilités de toutes ces valeurs doit être égale à l'unité. En prenant l'intégrale $\int c^{-\mu^2}.d\mu$ dans les limites de μ, on a le même résultat à très-peu près, qu'en la prenant depuis $\mu=-\infty$ jusqu'à $\mu=\infty$: la différence n'est que de l'ordre $\frac{c^{-n}}{\sqrt{n}}$; et vu l'extrême rapidité avec laquelle c^{-n} diminue à mesure que n augmente, on voit que cette différence est insensible lorsque n est un grand nombre. Cela posé, considérons dans l'intégrale $\frac{1}{2}.\int Ud\mu.\sqrt{n}$, le terme

$$\frac{1.3.5\ldots.(2i-1).\frac{1}{2}H^{(i)}.\sqrt{n\pi}}{2^i.c^{4ir'}}$$
$$\times\int d\mu.c^{-\mu^2}.\left[1-\frac{i.(2\mu)^2}{1.2}+\frac{i.(i-1).(2\mu)^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}\right].$$

En étendant l'intégrale depuis $\mu=-\infty$ jusqu'à $\mu=\infty$, ce terme devient

$$\frac{1.3.5\ldots(2i-1).\frac{1}{2}.H^{(i)}.\pi\sqrt{n}}{2^i.c^{4ir'}}.\left[1-i+\frac{i.(i-1)}{1.2}-\frac{i.(i-1).(i-2)}{1.2.3}+\text{etc.}\right].$$

Le facteur $1-i+\frac{i.(i-1)}{1.2}-$ etc. est égal à $(1-1)^i$; il est donc nul, excepté dans le cas de $i=0$, où il se réduit à l'unité. Il est visible que les termes de l'expression de U qui renferment des puissances impaires de μ, donnent un résultat nul dans l'intégrale $\frac{1}{2}.\int U d\mu.\sqrt{n}$, étendue depuis $\mu=-\infty$ jusqu'à $\mu=\infty$; car ces termes ont pour facteur $c^{-\mu^2}$, et l'on a généralement dans ces limites,

$$\int \mu^{2i+1}.d\mu.c^{-\mu^2}=0.$$

Il n'y a donc que le premier terme de l'expression de U, terme que nous représenterons par $H.c^{-\mu^2}$, qui puisse donner un résultat dans l'intégrale $\frac{1}{2}.\int U d\mu.\sqrt{n}$, et ce résultat est $\frac{1}{2}.H.\sqrt{n\pi}$; on a donc

$$\tfrac{1}{2}.H.\sqrt{n\pi}=1;$$

par conséquent,

$$H=\frac{2}{\sqrt{n\pi}}.$$

L'expression générale de U a ainsi la forme suivante,

$$U=\frac{2c^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}}.\left\{\begin{array}{l} 1+\dfrac{Q^{(1)}.(1-2\mu^2)}{c^{4r'}}+\dfrac{Q^{(2)}.(1-4\mu^2+\frac{4}{3}\mu^4)}{c^{8r'}}+\text{etc.} \\ +\dfrac{L^{(0)}.\mu}{c^{2r'}}+\dfrac{L^{(1)}.\mu.(1-\frac{2}{3}\mu^2)}{c^{6r'}}+\dfrac{L^{(2)}.\mu.(1-\frac{4}{3}\mu^2+\frac{4}{15}\mu^4)}{c^{10r'}}+\text{etc.} \end{array}\right\};\ (k)$$

$Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, etc., $L^{(0)}$, $L^{(1)}$, etc. étant des constantes indéterminées qui dépendent de la valeur initiale de U.

Supposons que U devienne X lorsque r est nul, X étant une fonction donnée de μ. On a généralement ces deux théorèmes,

$$0=Q^{(i)}.\int \mu^{2q}.\ d\mu.U_i.c^{-\mu^2},$$

$$0=L^{(i)}.\int \mu^{2q+1}.d\mu.U'_i.c^{-\mu^2},$$

lorsque q est moindre que i; U_i et U'_i étant des fonctions de μ, par lesquelles $\frac{2Q^{(i)}.c^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}.c^{4ir'}}$ et $\frac{2L^{(i)}.c^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}.c^{(4i+2)r'}}$ sont multipliés dans l'expression de U. Pour démontrer ces théorèmes, nous observerons que, par ce qui précède, $\frac{2Q^{(i)}.c^{-\mu^2}.U_i}{\sqrt{n\pi}}$ est égal à

$$(\sqrt{-1})^{2i}.H^{(i)}.c^{-\mu^2}.\int ds.c^{-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i};$$

il faut donc faire voir que l'on a

$$0=\int\int\mu^{2q}.ds.d\mu.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i};$$

les intégrales étant prises depuis μ et s égaux à $-\infty$ jusqu'à μ et s égaux à $+\infty$. En intégrant d'abord par rapport à μ, ce terme devient

$$\frac{(2q-1)}{2}.\int\int\mu^{2q-2}.d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i}$$
$$+i.\int\int\mu^{2q-1}.d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i-1}.$$

En continuant d'intégrer ainsi par parties relativement à μ, on parvient enfin à des termes de la forme

$$k.\int\int d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2e},$$

e n'étant pas zéro, et par ce qui précède, ces termes sont nuls.

On prouvera de la même manière, que l'on a

$$0=L^{(i)}.\int\mu^{2q+1}.d\mu.U'_i.c^{-\mu^2}.$$

De là il suit que l'on a généralement

$$0=\int U_i.U_{i'}.d\mu.c^{-\mu^2}, \quad 0=\int U'_i.U'_{i'}.d\mu.c^{-\mu^2},$$

i et i' étant des nombres différens. Car si, par exemple, i' est plus grand que i, toutes les puissances de μ dans U_i, sont moindres que $2i'$; chacun des termes de U_i donnera donc, par ce qui précède, un résultat nul dans l'intégrale $\int U_i.U_{i'}.d\mu.c^{-\mu^2}$. Le même raisonnement a lieu pour l'intégrale $\int U'_i.U'_{i'}.d\mu.c^{-\mu^2}$.

Mais ces intégrales ne sont pas nulles, lorsque $i=i'$. On les obtiendra dans ce cas, de cette manière. On a, par ce qui précède,

$$U_i = \frac{2^i.(\sqrt{-1})^{2i}.\int ds.c^{-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i}}{1.3.5\ldots(2i-1).\sqrt{\pi}}.$$

Le terme qui a pour facteur μ^{2i} dans cette expression, est

$$\frac{2^i.(\sqrt{-1})^{2i}.\mu^{2i}}{1.3.5\ldots(2i-1)};$$

or, on peut ne considérer que ce terme dans le premier facteur U_i de l'intégrale $\int U_i.U_i.d\mu.c^{-\mu^2}$; car les puissances inférieures de μ, dans ce facteur, donnent un résultat nul dans l'intégrale. On a donc

$$\int U_i.U_i.d\mu.c^{-\mu^2}$$
$$= \frac{2^{2i}}{[1.3.5\ldots(2i-1)]^2.\sqrt{\pi}}.\iint \mu^{2i}.d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i}.$$

On a, en intégrant par rapport à μ, depuis $\mu=-\infty$ jusqu'à $\mu=\infty$,

$$\iint \mu^{2i}.d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i}$$
$$= \frac{(2i-1)}{2}.\iint \mu^{2i-2}.d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i}$$
$$+ \frac{2i}{2}.\iint \mu^{2i-1}.d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i-1}.$$

Le premier terme du second membre de cette équation est nul par ce qui précède; ce membre se réduit donc à son second terme. On trouve de la même manière, que l'on a

$$\iint \mu^{2i-1}.d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i-1}$$
$$= \frac{(2i-1)}{2}.\iint \mu^{2i-2}.d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i-2},$$

et ainsi de suite; on a donc

$$\iint \mu^{2i}.d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i} = \frac{1.2.3\ldots 2i.\pi}{2^{2i}};$$

par conséquent

$$\int U_i.U_i.d\mu.c^{-\mu^2} = \frac{2.4.6\ldots 2i.\sqrt{\pi}}{1.3.5\ldots(2i-1)}.$$

On trouvera de la même manière,

$$\int U'_i \,.\, U'_i \,.\, d\mu \,.\, c^{-\mu^2} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{2.4.6\ldots 2i.\sqrt{\pi}}{1.3.5\ldots(2i+1)}.$$

On a évidemment,

$$\int U_i \,.\, U'_{i'} \,.\, d\mu \,.\, c^{-\mu^2} = 0,$$

dans le cas même où i et i' sont égaux, parce que le produit $U_i \,.\, U'_{i'}$ ne contient que des puissances impaires de μ. Cela posé.

L'expression générale de U donne pour sa valeur initiale, que nous avons désignée par X,

$$X = \frac{2c^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}} \,.\, \left\{ \begin{array}{c} 1 + Q^{(1)}.(1-2\mu^2) + \text{etc.} \\ + L^{(0)}.\mu + L^{(1)}.\mu.(1-\frac{2}{3}\mu^2) + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Si l'on multiplie cette équation par $U_i.d\mu$, et si l'on prend les intégrales depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$, on aura, en vertu des théorèmes précédens,

$$\int XU_i.d\mu = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \,.\, Q^{(i)}.\int U_i.U_i.d\mu.c^{-\mu^2};$$

d'où l'on tire

$$Q^{(i)} = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{n}}{2.4.6\ldots 2i}.\int XU_i.d\mu;$$

on trouvera de la même manière,

$$L^{(i)} = \frac{1.3.5\ldots(2i+1).\sqrt{n}}{2.4.6\ldots 2i}.\int XU'_i.d\mu.$$

On aura donc ainsi les valeurs successives de $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, etc.; $L^{(0)}$, $L^{(1)}$, etc., au moyen d'intégrales définies, lorsque X ou la valeur initiale de U sera donnée.

Dans le cas où X est égal à $\frac{2i}{\sqrt{n\pi}}.c^{-i^2\mu^2}$, l'expression générale de U prend une forme très-simple. Alors la fonction arbitraire

$\Gamma\left(\frac{s-\mu\sqrt{-1}}{c^{2r'}}\right)$ de la formule (A) est de la forme $k.c^{-6.\left(\frac{s-\mu\sqrt{-1}}{c^{2r'}}\right)^2}$.

Pour déterminer les constantes 6 et k, nous observerons qu'en supposant

$$6' = \frac{6}{c^{4r'}},$$

on aura

$$U = k.c^{-\frac{\mu^2}{1+6'}}.\int ds.c^{-(1+6').\left(s-\frac{6'.\mu\sqrt{-1}}{1+6'}\right)^2}.$$

En faisant ensuite

$$\sqrt{1+6'}.\left(s-\frac{6'.\mu\sqrt{-1}}{1+6'}\right) = s',$$

et observant que l'intégrale relative à s devant être prise depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$, l'intégrale relative à s' doit être prise dans les mêmes limites, on aura

$$U = \frac{k.\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+6'}}.c^{-\frac{\mu^2}{1+6'}}.$$

En comparant cette expression à la valeur initiale de U, qui est

$$U = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}}.c^{-i^2\mu^2};$$

et observant que 6 est la valeur initiale de $6'$, on aura

$$i^2 = \frac{1}{1+6};$$

d'où l'on tire

$$6 = \frac{1-i^2}{i^2}, \quad 6' = \frac{1-i^2}{i^2.c^{4r'}}.$$

On doit avoir ensuite

$$\frac{k.\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+6}} = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}};$$

ce qui donne

$$k.\sqrt{\pi} = \frac{2}{\sqrt{n\pi}},$$

valeur que l'on obtient encore, par la condition que $\frac{1}{2}.\int U.d\mu.\sqrt{n} = 1$, l'intégrale l'intégrale étant prise depuis $\mu=-\infty$ jusqu'à $\mu=\infty$; on aura donc pour l'expression de U, quel que soit r',

$$U=\frac{2}{\sqrt{n\pi.(1+\mathfrak{C}')}}.c^{-\frac{\mu^2}{1+\mathfrak{C}'}}.$$

On trouve en effet, que cette valeur de U, substituée dans l'équation aux différentielles partielles en U, y satisfait.

$\mathfrak{C}'$ diminuant sans cesse quand r' augmente, la valeur de U varie sans cesse, et devient à sa limite, lorsque r' est infini,

$$U=\frac{2}{\sqrt{n\pi}}.c^{-\mu^2}.$$

Pour donner une application de ces formules, imaginons dans une urne C, un très-grand nombre m de boules blanches, et un pareil nombre de boules noires. Ces boules ayant été mêlées, supposons que l'on tire de l'urne, n boules que l'on met dans l'urne A. Supposons ensuite que l'on mette dans l'urne B, autant de boules blanches, qu'il y a de boules noires dans l'urne A, et autant de boules noires, qu'il y a de boules blanches dans la même urne. Il est clair que le nombre des cas dans lesquels il y aura x boules blanches, et par conséquent $n-x$ boules noires dans l'urne A, est égal au produit du nombre des combinaisons des m boules blanches de l'urne C, prises x à x, par le nombre des combinaisons des m boules noires de la même urne, prises $n-x$ à $n-x$. Ce produit est, par le n° 3, égal à

$$\frac{m.(m-1).(m-2)\ldots(m-x+1)}{1.2.3\ldots x}\cdot\frac{m.(m-1).(m-2)\ldots(m-n+x+1)}{1.2.3\ldots(n-x)},$$

ou à

$$\frac{(1.2.3\ldots m)^2}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots(n-x).1.2.3\ldots(m-x).1.2.3\ldots(m-n+x)}.$$

Le nombre de tous les cas possibles est le nombre des combinaisons des $2m$ boules de l'urne C, prises n à n; ce nombre est

$$\frac{1.2.3\ldots 2m}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(2m-n)};$$

en divisant la fraction précédente par celle-ci, on aura, pour la probabilité de x, ou pour la valeur initiale de U,

$$\frac{(1.2.3\ldots m)^2.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(2m-n)}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots(m-x).1.2.3\ldots(n-x).1.2.3\ldots(m-n+x).1.2.3\ldots 2m}.$$

Maintenant, si l'on observe que l'on a à très-peu près, lorsque s est un grand nombre,

$$1.2.3\ldots s = s^{s+\frac{1}{2}}.c^{-s}.\sqrt{2\pi};$$

on trouvera facilement après toutes les réductions, en faisant

$$x = \frac{n+\mu.\sqrt{n}}{2},$$

et en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$, qui ne sont pas multipliées par μ^2,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}.\sqrt{\frac{m}{2m-n}}.c^{-\frac{m\mu^2}{2m-n}};$$

en faisant donc

$$i^2 = \frac{m}{2m-n};$$

on aura

$$U = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}}.c^{-i^2\mu^2}.$$

Si le nombre m est infini, alors $i^2 = \frac{1}{2}$, et la valeur initiale de U est

$$U = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}.c^{-\frac{1}{2}\mu^2}.$$

Sa valeur, après un nombre quelconque de tirages, est

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi.\left(1+c^{-\frac{4r}{n}}\right)}}.c^{-\frac{\mu^2}{1+c^{-\frac{4r}{n}}}}.$$

Le cas de m infini revient à celui dans lequel les urnes A et B seraient remplies, en projetant n fois une pièce qui amènerait indifféremment *croix* ou *pile*, et mettant dans l'urne A, une boule blanche, chaque fois que *croix* arriverait, et une boule noire, chaque fois que *pile* arriverait ; et faisant l'inverse pour l'urne B. Car il est visible que la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne C, est alors $\frac{1}{2}$, comme celle d'amener *croix* ou *pile*.

En prenant l'intégrale $\int U dx$, ou $\frac{1}{2}\int U d\mu.\sqrt{n}$, depuis $\mu = -a$ jusqu'à $\mu = a$, on aura la probabilité que le nombre des boules blanches de l'urne A, sera compris dans les limites $\pm a.\sqrt{n}$.

On peut généraliser le résultat précédent, en supposant l'urne A remplie comme au commencement de ce numéro, par la projection d'un prisme de $p+q$ faces latérales, dont p sont blanches et q sont noires. On a vu qu'alors si l'on fait

$$i^2 = \frac{(p+q)^2}{2pq},$$

on a à l'origine, ou lorsque r est nul,

$$U = \frac{i}{\sqrt{n\pi}}.c^{-\frac{i^2}{n}\left(x - \frac{np}{p+q}\right)^2};$$

Supposons p et q très-peu différens, ensorte que l'on ait

$$p = \frac{p+q}{2}.\left(1 + \frac{a}{\sqrt{n}}\right),$$
$$q = \frac{p+q}{2}.\left(1 - \frac{a}{\sqrt{n}}\right);$$

on aura

$$i^2 = \frac{2}{1 - \frac{a^2}{n}};$$

ou à très-peu près $i^2 = 2$; donc

$$U = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}.c^{-\frac{2}{n}\left(x - \frac{n}{2} - \frac{a\sqrt{n}}{2}\right)^2}.$$

En faisant donc

$$x = \frac{n + \mu.\sqrt{n}}{2};$$

on aura

$$U = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}.c^{-\frac{1}{2}(\mu - a)^2}.$$

Supposons maintenant qu'après un nombre quelconque de tirages, on ait

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\mathcal{C}\pi}} \cdot c^{-\frac{(\mu-\alpha)^2}{\mathcal{C}}},$$

$\mathcal{C}$ et α étant des fonctions de r'. Si l'on substitue cette valeur dans l'équation aux différences partielles en U, on aura

$$-\left(\frac{d\mathcal{C}}{dr'}\right) \cdot \left[1 - \frac{2.(\mu-\alpha)^2}{\mathcal{C}}\right] + 4.\left(\frac{d\alpha}{dr'}\right).(\mu-\alpha)$$
$$= 4.(\mathcal{C}-1).\left[1 - \frac{2.(\mu-\alpha)^2}{\mathcal{C}}\right] - 8\alpha.(\mu-\alpha);$$

d'où l'on tire les deux équations suivantes,

$$\frac{\left(\frac{d\mathcal{C}}{dr'}\right)}{\mathcal{C}-1} = -4, \quad \left(\frac{d\alpha}{dr'}\right) = -2\alpha.$$

En les intégrant, et observant qu'à l'origine de r', $\alpha = a$ et $\mathcal{C} = 2$, on aura

$$\mathcal{C} = 1 + c^{-4r'}, \quad \alpha = a.c^{-2r'};$$

ce qui donne

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi.(1+c^{-4r'})}} \cdot c^{-\frac{(\mu - ac^{-2r'})^2}{1+c^{-4r'}}}.$$

Cherchons maintenant la valeur moyenne du nombre des boules blanches contenues dans l'urne A, après r tirages. Cette valeur est la somme des produits des divers nombres des boules blanches, multipliées par leurs probabilités respectives; elle est donc égale à l'intégrale

$$\int \frac{n + \mu.\sqrt{n}}{2} \cdot U \cdot \frac{d\mu.\sqrt{n}}{2},$$

prise depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$. En substituant pour U sa valeur donnée par la formule (k), on aura, en vertu des théorèmes précédens, pour cette intégrale,

$$\tfrac{1}{2}.n + \tfrac{1}{4}.L^{(0)}.c^{-\frac{2r}{n}}.$$

A l'origine où r est nul, cette valeur est $\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}L^{(0)}$; ainsi l'on aura

$z^{(r)}$ au moyen du nombre des boules blanches que l'urne A contient à cette origine.

On peut obtenir fort simplement de la manière suivante, la valeur moyenne du nombre des boules blanches, après r tirages. Imaginons que chaque boule blanche ait une valeur que nous représenterons par l'unité, les boules noires étant supposées n'avoir aucune valeur. Il est clair que le prix de l'urne A sera la somme des produits de tous les nombres possibles de boules blanches qui peuvent exister dans l'urne, multipliés par leurs probabilités respectives; ce prix est donc ce que nous avons nommé *valeur moyenne du nombre des boules blanches*. Nommons-le z, après le tirage $r^{ième}$. Au tirage suivant, s'il sort une boule blanche, ce prix diminue d'une unité; or si l'on suppose que x est le nombre des boules blanches contenues dans l'urne après le tirage $r^{ième}$, la probabilité d'en extraire une boule blanche sera $\frac{x}{n}$; en nommant donc U la probabilité de cette supposition, l'intégrale $\int\frac{Uxdx}{n}$, étendue depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$, sera la diminution de z, résultante de la probabilité d'extraire une boule blanche, de l'urne. Si l'on fait, comme ci-dessus, $\frac{r}{n}=r'$, et si l'on désigne la fraction très-petite $\frac{1}{n}$ par dr', cette diminution sera égale à zdr'; car z est égal à $\int Uxdx$, somme des produits des nombres des boules blanches, par leurs probabilités respectives. Le prix de l'urne A s'accroît, si l'on extrait une boule blanche de l'urne B, pour la mettre dans l'urne A; or, x étant supposé le nombre des boules blanches de l'urne A, $n-x$ sera celui des boules blanches de l'urne B, et la probabilité d'extraire une boule blanche de cette dernière urne, sera $\frac{n-x}{n}$; en multipliant cette probabilité par la probabilité U de x; l'intégrale $\int U.\frac{n-x}{n}.dx$, prise depuis x nul jusqu'à $x=n$, sera l'accroissement de z. $\int U.(n-x).dx$ est le prix de l'urne B; en nommant donc z' ce prix, $z'dr'$ sera l'accroissement de z: on aura donc

$$dz=z'dr'-zdr'.$$

La somme des prix des deux urnes est évidemment égale à n, nombre des boules blanches qu'elles contiennent, ce qui donne $z' = n - z$; substituant cette valeur de z' dans l'équation précédente, elle devient

$$dz = (n - 2z).dr';$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$z = \frac{1}{2}n + \frac{L^{(0)}}{4c^{2r'}},$$

$L^{(0)}$ étant une constante arbitraire; ce qui est conforme à ce qui précède.

On peut étendre toute cette analyse, au cas d'un nombre quelconque d'urnes: nous nous bornerons ici à chercher la valeur moyenne du nombre des boules blanches que chaque urne contient après r tirages.

Considérons un nombre e d'urnes, disposées circulairement, et renfermant chacune le nombre n de boules, les unes blanches, et les autres noires; n étant supposé un très-grand nombre. Supposons qu'après r tirages, z_0, z_1, z_2, ... z_{e-1} soient les prix respectifs des diverses urnes. Chaque tirage consiste à extraire en même tems, une boule de chaque urne, et à la mettre dans la suivante, en partant de l'une d'elles dans un sens déterminé. Si l'on fait $\frac{r}{n} = r'$ et $\frac{1}{n} = dr'$; on aura, par le raisonnement que nous venons de faire relativement à deux urnes,

$$dz_i = (z_{i-1} - z_i).dr';$$

cette équation a lieu depuis $i = 1$ jusqu'à $i = e - 1$. Dans le cas de $i = e$, on a

$$dz_0 = (z_{e-1} - z_0).dr';$$

en intégrant ces équations, et supposant qu'à l'origine les prix respectifs de chaque urne, ou les nombres des boules blanches qu'elles contiennent, soient

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \ldots \lambda_{e-1}.$$

On parvient à ce résultat qui a lieu depuis $i = 0$ jusqu'à $i = e - 1$,

$$z_i = \frac{1}{e}.S.c^{-\left(1-\cos\frac{2s\pi}{e}\right).r'} . \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0.\cos\left(\frac{2s.i\pi}{e} - ar'\right) \\ + \lambda_1.\cos\left(\frac{2s.(i-1).\pi}{e} - ar'\right) \\ + \lambda_2.\cos\left(\frac{2s.(i-2).\pi}{e} - ar'\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \lambda_{e-1}.\cos\left(\frac{2s.(i-e+1).\pi}{e} - ar'\right) \end{array} \right\}.$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de s, depuis $s = 1$ jusqu'à $s = e$, et a étant égal à sin $\frac{2s\pi}{e}$. Le terme de cette expression, correspondant à $s = e$, est indépendant de r', et égal à $\frac{1}{e}.(\lambda_0 + \lambda_1 \dots + \lambda_{e-1})$; c'est-à-dire, à la somme entière des boules blanches des urnes, divisée par leur nombre. Ce terme est la limite de l'expression de z_i; d'où il suit qu'après un nombre infini de tirages, les prix de chaque urne sont égaux entre eux.

CHAPITRE IV.

De la probabilité des erreurs des résultats moyens d'un grand nombre d'observations, et des résultats moyens les plus avantageux.

18. CONSIDÉRONS maintenant les résultats moyens d'un grand nombre d'observations dont on connaît la loi de facilité des erreurs. Supposons d'abord que pour chaque observation, les erreurs puissent être également

$$-n, \quad -n+1, \quad -n+2, \ldots -1, 0, 1, \quad 1, \ldots n-2, \quad n-1, n.$$

La probabilité de chaque erreur sera $\frac{1}{2n+1}$. Si l'on nomme s, le nombre des observations, le coefficient de $c^{l\varpi\sqrt{-1}}$ dans le développement du polynome

$$\left\{ \begin{array}{l} c^{-n\varpi\sqrt{-1}} + c^{-(n-1)\varpi\sqrt{-1}} + c^{-(n-2)\varpi\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots + c^{-\varpi\sqrt{-1}} + 1 + c^{\varpi\sqrt{-1}} \ldots\ldots + c^{n\varpi\sqrt{-1}} \end{array} \right\}^s$$

sera le nombre des combinaisons dans lesquelles la somme des erreurs est l. Ce coefficient est le terme indépendant de $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ et de ses puissances, dans le développement du même polynome multiplié par $c^{-l\varpi\sqrt{-1}}$, et il est visiblement égal au terme indépendant de ϖ dans le même développement multiplié par $\frac{c^{l\varpi\sqrt{-1}} + c^{-l\varpi\sqrt{-1}}}{2}$ ou par $\cos l\varpi$, on aura donc pour l'expression de ce coefficient,

$$\frac{1}{\pi} . \int d\varpi . \cos l\varpi . (1 + 2 \cos \varpi + 2 \cos 2\varpi \ldots\ldots + 2 \cos n\varpi)^s,$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \pi$.

On a vu dans le n° 36 du premier livre, que cette intégrale est

$$\frac{(2n+1)^s . \sqrt{3}}{\sqrt{n.(n+1).2s\pi}} . c^{-\frac{\frac{3}{2} l^2}{n(n+1).s}};$$

le nombre total des combinaisons des erreurs est $(2n+1)^s$; en divisant la quantité précédente par celle-ci, on aura

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n.(n+1).2s\pi}}.c^{-\frac{\frac{3}{2}l^2}{n(n+1)s}},$$

pour la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera l.

Si l'on fait

$$l = 2t.\sqrt{\frac{n.(n+1).s}{6}};$$

la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $+2T.\sqrt{\frac{n.(n+1).s}{6}}$ et $-2T.\sqrt{\frac{n.(n+1).s}{6}}$ sera égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int dt.c^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=T$. Cette expression a lieu encore dans le cas de n infini. Alors en nommant $2a$ l'intervalle compris entre les limites des erreurs de chaque observation, on aura $n=a$, et les limites précédentes deviendront $\pm\frac{2T.a.\sqrt{s}}{\sqrt{6}}$: ainsi la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $\pm ar.\sqrt{s}$ est

$$2.\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\int dr.c^{-\frac{3}{2}r^2};$$

c'est aussi la probabilité que l'erreur moyenne sera comprise dans les limites $\pm\frac{ar}{\sqrt{s}}$; car on a l'erreur moyenne, en divisant par s la somme des erreurs.

La probabilité que la somme des inclinaisons des orbites de s comètes, sera comprise dans des limites données, en supposant toutes les inclinaisons également possibles, depuis zéro jusqu'à l'angle droit, est évidemment la même que la probabilité précédente; l'intervalle $2a$ des limites des erreurs de chaque observation est, dans ce cas, l'intervalle $\frac{\pi}{2}$ des limites des inclinaisons possibles; alors la probabilité que la somme des inclinaisons doit être comprise dans les limites $\pm\frac{\pi . r\sqrt{s}}{4}$ est $2.\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\int dr.c^{-\frac{3}{2}r^2}$; ce qui s'accorde avec ce que l'on a trouvé dans le n° 13.

Supposons généralement que la probabilité de chaque erreur positive ou négative, soit exprimée par $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$, x et n étant des nombres infinis. Alors, dans la fonction

$$1 + 2\cos\varpi + 2\cos 2\varpi + 2\cos 3\varpi \ldots + 2\cos n\varpi,$$

chaque terme, tel que $2\cos x\varpi$, doit être multiplié par $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$; or on a

$$2\varphi\left(\frac{x}{n}\right).\cos x\varpi = 2\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x^2}{n^2}.\varphi\left(\frac{x}{n}\right).n^2\varpi^2 + \text{etc.}$$

En faisant donc

$$x' = \frac{x}{n}, \quad dx' = \frac{1}{n};$$

la fonction

$$\varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right).\cos\varpi + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right).\cos 2\varpi \ldots + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right).\cos n\varpi,$$

devient

$$2n.\int dx'.\varphi(x') - n^3\varpi^2.\int x'^2 dx'.\varphi(x') + \text{etc.};$$

les intégrales devant être étendues depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = 1$. Soit alors

$$k = 2\int dx'.\varphi(x'), \quad k'' = \int x'^2 dx'.\varphi(x'), \quad \text{etc.}$$

La série précédente devient

$$nk.\left(1 - \frac{k''}{k}.n^2\varpi^2 + \text{etc.}\right).$$

Maintenant la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\pm l$, est, comme il est facile de s'en assurer par les raisonnemens précédens,

$$\frac{2}{\varpi}.\iint d\varpi.dl.\cos l\varpi.\left\{\begin{array}{l}\varphi\left(\frac{0}{n}\right)+2\varphi\left(\frac{1}{n}\right).\cos\varpi+2\varphi\left(\frac{2}{n}\right).\cos 2\varpi\ldots\\ \qquad\qquad\ldots.+2\varphi\left(\frac{n}{n}\right).\cos n\varpi\end{array}\right\}^s,$$

l'intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi=\pi$; cette probabilité est donc

$$2.\frac{(nk)^s}{\pi}.\iint d\varpi.dl.\cos l\varpi.\left(1-\frac{k''}{k}.n^2\varpi^2-\text{etc.}\right)^s. \quad (u)$$

Supposons

$$\left(1-\frac{k''}{k}.n^2\varpi^2-\text{etc.}\right)^s=c^{-t^2};$$

en prenant les logarithmes hyperboliques, on aura à très-peu près, lorsque s est un grand nombre,

$$s.\frac{k''}{k}.n^2\varpi^2=t^2;$$

ce qui donne

$$\varpi=\frac{t}{n}.\sqrt{\frac{k}{k''s}}.$$

Si l'on observe ensuite que nk ou $2.\int dx.\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ exprimant la probabilité que l'erreur d'une observation est comprise dans les limites $\pm n$, cette quantité doit être égale à l'unité; la fonction (u) deviendra

$$\frac{2}{n\pi}.\sqrt{\frac{k}{k''s}}.\iint dl.dt.c^{-t^2}.\cos\left(\frac{lt}{n}.\sqrt{\frac{k}{k''s}}\right);$$

l'intégrale relative à t devant être prise depuis t nul jusqu'à $t=\pi.n.\sqrt{\frac{k''s}{k}}$, ou jusqu'à $t=\infty$, n étant supposé infini; or on a, par le n° 25 du premier Livre,

$$\int dt.\cos\left(\frac{lt}{n}.\sqrt{\frac{k}{k''s}}\right).c^{-t^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.c^{-\frac{l^2}{4n^2}.\frac{k}{k''s}};$$

en faisant donc

$$\frac{l}{n}=2t'.\sqrt{\frac{k''s}{k}};$$

la fonction (u) devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dt' \cdot c^{-t'^2}.$$

Ainsi en nommant, comme ci-dessus, $2a$ l'intervalle compris entre les limites des erreurs de chaque observation, la probabilité que la somme des erreurs des s observations, sera comprise dans les limites $\pm ar \cdot \sqrt{s}$, est

$$\sqrt{\frac{k}{k''\pi}} \cdot \int dr \cdot c^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

si $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ est constant; alors $\frac{k}{k''s} = 6$, et cette probabilité devient

$$2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \int dr \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2},$$

ce qui est conforme à ce que l'on a trouvé ci-dessus.

Si $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ ou $\varphi(x')$ est une fonction rationnelle et entière de x', on aura, par la méthode du nº 15, la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $\pm ar \cdot \sqrt{s}$, exprimée par une suite de puissances s, $2s$, etc. de quantités de la forme $s - \mu \pm r \cdot \sqrt{s}$, dans lesquelles μ augmente en progression arithmétique, ces quantités étant continuées jusqu'à ce qu'elles deviennent négatives. En comparant cette suite à l'expression précédente de la même probabilité, on obtiendra d'une manière fort approchée, la valeur de la suite; et l'on parviendra ainsi sur ce genre de suites, à des théorèmes analogues à ceux que nous avons donnés dans le nº 42 du premier Livre, sur les différences finies des puissances d'une variable.

Si la loi de facilité des erreurs est exprimée par une exponentielle négative qui puisse s'étendre jusqu'à l'infini, et généralement si les erreurs peuvent s'étendre à l'infini; alors a devient infini, et l'application de la méthode précédente peut offrir quelques difficultés. Dans tous ces cas, on fera

$$\frac{x}{h} = x'; \quad \frac{1}{h} = dx',$$

h étant une quantité quelconque finie, et en suivant exactement l'analyse précédente, on trouvera pour la probabilité que la somme des erreurs des s observations est comprise dans les limites $\pm hr.\sqrt{s}$,

$$\sqrt{\frac{k}{k''\pi}}.\int dr.c^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

expression dans laquelle on doit observer que $\varphi\left(\frac{x}{h}\right)$ ou $\varphi(x')$ exprime la probabilité de l'erreur $\pm x$, et que l'on a

$$k = 2\int dx'.\varphi(x'), \quad k'' = \int x'^2 dx'.\varphi(x'),$$

les intégrales étant prises depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$.

19. Déterminons présentement la probabilité que la somme des erreurs d'un très-grand nombre d'observations sera comprise dans des limites données, abstraction faite du signe de ces erreurs, c'est-à-dire, en les prenant toutes positivement. Pour cela, considérons la suite

$$\varphi\left(\frac{n}{n}\right).c^{-n\varpi\sqrt{-1}} + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right).c^{-(n-1)\varpi\sqrt{-1}} \ldots + \varphi\left(\frac{0}{n}\right)\ldots$$
$$\ldots + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right).c^{(n-1)\varpi\sqrt{-1}} + \varphi\left(\frac{n}{n}\right).c^{n\varpi\sqrt{-1}},$$

$\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ étant l'ordonnée de la courbe de probabilité des erreurs, correspondante à l'erreur $\pm x$, et x étant ainsi que n, considéré comme formé d'un nombre infini d'unités. Si l'on élève cette suite à la puissance s, après avoir changé le signe des exponentielles négatives; le coefficient d'une exponentielle quelconque, telle que $c^{(l+\mu s).\varpi\sqrt{-1}}$, sera la probabilité que la somme des erreurs prises abstraction faite du signe, est $l+\mu s$; cette probabilité est donc

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi.c^{-(l+\mu s)\varpi\sqrt{-1}}\left\{\begin{array}{l}\varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right).c^{\varpi\sqrt{-1}} + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right).c^{2\varpi\sqrt{-1}} \\ \qquad\qquad \ldots + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right).c^{n\varpi\sqrt{-1}}\end{array}\right\}^s,$$

l'intégrale relative à ϖ étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$;

car dans cet intervalle, l'intégrale $\int d\varpi . c^{-r\varpi\sqrt{-1}}$, ou

$$\int d\varpi . (\cos r\varpi - \sqrt{-1} . \sin r\varpi)$$

disparaît, quel que soit r, pourvu qu'il ne soit pas nul.

On a, en développant par rapport aux puissances de ϖ,

$$\log\left\{c^{-\mu s\varpi\sqrt{-1}} . \left[\varphi\left(\tfrac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\tfrac{1}{n}\right) . c^{\varpi\sqrt{-1}} \ldots\ldots + 2\varphi\left(\tfrac{n}{n}\right) . c^{n\varpi\sqrt{-1}}\right]\right\}$$

$$= s . \log\left\{\begin{array}{l} \quad \varphi\left(\tfrac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\tfrac{1}{n}\right) + 2\varphi\left(\tfrac{2}{n}\right) \ldots\ldots + 2\varphi\left(\tfrac{n}{n}\right) \\ + 2\varpi\sqrt{-1} . \left[\varphi\left(\tfrac{1}{n}\right) + 2\varphi\left(\tfrac{2}{n}\right) \ldots\ldots + n\varphi\left(\tfrac{n}{n}\right)\right] \\ \quad - \varpi^2 . \left[\varphi\left(\tfrac{1}{n}\right) + 2^2\varphi\left(\tfrac{2}{n}\right) \ldots\ldots + n^2\varphi\left(\tfrac{n}{n}\right)\right] \\ - \text{etc.} \end{array}\right\} - \mu s\varpi\sqrt{-1}. \quad (1)$$

En faisant donc

$$\frac{x}{n} = x', \quad \frac{1}{n} = dx,$$

$$2\int dx' . \varphi(x') = k, \quad \int x'dx' . \varphi(x') = k', \quad \int x'^2 dx' . \varphi(x') = k'',$$
$$\int x'^3 dx' . \varphi(x') = k''', \quad \int x'^4 dx' . \varphi(x') = k^{\text{iv}}, \quad \text{etc.},$$

les intégrales étant prises depuis x' nul jusqu'à $x' = 1$; le second membre de l'équation (1) devient

$$s . \log nk + s . \log\left(1 + \frac{2.k'}{k} . n\varpi\sqrt{-1} - \frac{k''}{k} n^2\varpi^2 - \text{etc.}\right) - \mu s\varpi\sqrt{-1}.$$

l'erreur de chaque observation devant tomber nécessairement dans les limites $\pm n$, on a $nk = 1$; la quantité précédente devient ainsi,

$$s . \left(\frac{2k'}{k} - \frac{\mu}{n}\right) . n\varpi\sqrt{-1} - \frac{(kk'' - 2k'^2) . s . n^2\varpi^2}{k^2} - \text{etc.};$$

en faisant donc

$$\frac{\mu}{n} = \frac{2k'}{k},$$

et négligeant les puissances de ϖ supérieures au carré, cette quantité se réduit à son second terme, et la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi.c^{-l\varpi\sqrt{-1}-\frac{(kk''-2k'^2)}{k^2}.s.n^2\varpi^2}.$$

Soit

$$6=\frac{k}{\sqrt{kk''-2k'^2}},\quad \varpi=\frac{6t}{n.\sqrt{s}},\quad \frac{l}{n}=r.\sqrt{s},$$

l'intégrale précédente devient

$$\frac{1}{2\pi}.\frac{c^{-\frac{6^2r^2}{4}}}{n.\sqrt{s}}.\int 6dt.c^{-\left(t+\frac{l6\sqrt{-1}}{2n\sqrt{s}}\right)^2}.$$

Cette intégrale doit être prise depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$; et alors la quantité précédente devient

$$\frac{6}{2\sqrt{\pi}.n.\sqrt{s}}.c^{-\frac{6^2r^2}{4}}.$$

En la multipliant par dl ou par $ndr.\sqrt{s}$, l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}.\int 6dr.c^{-\frac{6^2r^2}{4}}$$

sera la probabilité que la valeur de l, et par conséquent, la somme des erreurs des observations est comprise dans les limites $\frac{2k'}{k}.as\pm ar.\sqrt{s}$, $\pm a$ étant les limites des erreurs de chaque observation, limites que nous désignons par $\pm n$, quand nous les concevons partagées dans une infinité de parties.

On voit ainsi que la somme des erreurs, la plus probable, abstraction faite du signe, est celle qui répond à $r=0$. Cette somme est $\frac{2k'}{k}.as$. Dans le cas où $\varphi(x)$ est constant, $\frac{2k'}{k}=\frac{1}{2}$, la somme des erreurs, la plus probable, est donc alors la moitié de la plus grande somme possible, somme qui est égale à sa. Mais si $\varphi(x)$ n'est pas constant et diminue à mesure que l'erreur x augmente, alors $\frac{2k'}{k}$ est moindre que $\frac{1}{2}$, et la somme des erreurs, abstraction faite du signe, est au-dessous de la moitié de la plus grande somme possible.

On peut, par la même analyse, déterminer la probabilité que la somme des carrés des erreurs, sera $l+\mu s$; il est facile de voir que cette probabilité a pour expression, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi.c^{-(l+\mu s)\varpi\sqrt{-1}}.\left\{\begin{array}{r}\varphi\left(\frac{0}{n}\right)+2\varphi\left(\frac{1}{n}\right).c^{\varpi\sqrt{-1}}+2\varphi\left(\frac{2}{n}\right).c^{2^2.\varpi\sqrt{-1}} \\ \ldots.+2\varphi\left(\frac{n}{n}\right).c^{n^2.\varpi\sqrt{-1}}\end{array}\right\}^s,$$

prise depuis $\varpi=-\pi$, jusqu'à $\varpi=\pi$. En suivant exactement l'analyse précédente, on aura

$$\mu=\frac{2n^2.k''}{k};$$

et en faisant

$$6'=\frac{k}{\sqrt{kk^{\text{IV}}-2k''^2}},$$

la probabilité que la somme des carrés des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\frac{2k''}{k}.a^2s\pm a^2r.\sqrt{s}$, sera

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\int 6'dr.c^{-\frac{6'^2.r^2}{4}}.$$

La somme la plus probable est celle qui répond à r nul; elle est donc $\frac{2k''}{k}.a^2.s$. Si s est un très-grand nombre, le résultat des observations s'écartera très-peu de cette valeur, et par conséquent il fera connaître à très-peu près le facteur $\frac{a^2.k''}{k}$.

20. Lorsque l'on veut corriger un élément déjà connu à fort peu près, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, on forme des équations de condition de la manière suivante. Soit z la correction de l'élément, et 6 l'observation; l'expression analytique de celle-ci sera une fonction de l'élément. En y substituant, au lieu de l'élément, sa valeur approchée, plus la correction z; en réduisant en série par rapport à z, et négligeant le carré de z; cette

cette fonction prendra la forme $h+pz$; en l'égalant à la quantité observée $\mathcal{C}$, on aura

$$\mathcal{C}=h+pz;$$

z serait donc déterminé, si l'observation était rigoureuse; mais comme elle est susceptible d'erreur, en nommant ε cette erreur, on a exactement, aux quantités près de l'ordre z^2,

$$\mathcal{C}+\varepsilon=h+pz;$$

et en faisant $\mathcal{C}-h=\alpha$, on a

$$\varepsilon=pz-\alpha.$$

Chaque observation fournit une équation semblable, que l'on peut représenter pour l'observation $(i+1)^{ième}$, par celle-ci

$$\varepsilon^{(i)}=p^{(i)}.z-\alpha^{(i)}.$$

En réunissant toutes ces équations, on a

$$S.\varepsilon^{(i)}=z.S.p^{(i)}-S.\alpha^{(i)}, \quad (1)$$

le signe S se rapportant à toutes les valeurs de i, depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$, s étant le nombre total des observations. En supposant nulle la somme des erreurs, cette équation donne

$$z=\frac{S.\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)}};$$

c'est ce que l'on nomme ordinairement, *résultat moyen des observations*.

On a vu dans le n° 18, que la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\pm ar.\sqrt{s}$, est

$$\sqrt{\frac{k}{k'\pi}}.\int dr.c^{-\frac{kr^2}{4k''}}.$$

Nommons $\pm u$ l'erreur du résultat z; en substituant dans l'équation (1), $\pm ar.\sqrt{s}$ au lieu de $S.\varepsilon^{(i)}$, et $\frac{S.\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)}}\pm u$ au lieu de z, elle donne

$$r=\frac{u.S.p^{(i)}}{a.\sqrt{s}};$$

la probabilité que l'erreur du résultat z, sera comprise dans les limites $\pm u$ est donc,

$$\sqrt{\frac{k}{k''s\pi}}.S.p^{(i)}.\int\frac{du}{a}.c^{-\frac{ku^2.(S.p^{(i)})^2}{4k''.a^2s}}.$$

Au lieu de supposer nulle la somme des erreurs, on peut supposer nulle une fonction quelconque linéaire de ces erreurs, que nous représenterons ainsi,

$$m.\varepsilon+m^{(1)}.\varepsilon^{(1)}+m^{(2)}.\varepsilon^{(2)}\ldots\ldots+m^{(s-1)}.\varepsilon^{(s-1)}, \quad (m)$$

$m, m^{(1)}, m^{(2)}$, etc. étant des nombres entiers positifs ou négatifs. En substituant dans cette fonction (m), au lieu de ε, $\varepsilon^{(1)}$, etc., leurs valeurs données par les équations de condition, elle devient

$$z.S.m^{(i)}p^{(i)}-S.m^{(i)}\alpha^{(i)};$$

en égalant donc à zéro, la fonction (m), on a

$$z=\frac{S.m^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.m^{(i)}p^{(i)}}.$$

Soit u l'erreur de ce résultat, ensorte que l'on ait

$$z=\frac{S.m^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.m^{(i)}p^{(i)}}+u;$$

la fonction (m) devient

$$u.S.m^{(i)}p^{(i)}.$$

Déterminons la probabilité de l'erreur u, lorsque les observations sont en grand nombre.

Pour cela, considérons le produit

$$\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).c^{mx\varpi\sqrt{-1}}\times\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).c^{m^{(1)}x\varpi\sqrt{-1}}\ldots\ldots\times\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).c^{m^{(s-1)}x\varpi\sqrt{-1}},$$

le signe $\int$ s'étendant à toutes les valeurs de x, depuis la valeur négative extrême de x, jusqu'à sa valeur positive extrême. $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ est, comme dans les numéros précédens, la probabilité d'une erreur x, dans chaque observation; x étant supposé, ainsi que a, formé d'une infinité de parties prises pour unité. Il est clair que le coefficient d'une exponentielle quelconque $c^{l\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement de ce produit, sera la probabilité que la somme des erreurs des observations, multipliées respectivement par m, $m^{(1)}$, etc., c'est-à-dire, la fonction (m), sera égale à l; en multipliant donc le produit précédent par $c^{-l\varpi\sqrt{-1}}$, le terme indépendant de $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ et de ses puissances, dans ce nouveau produit, exprimera cette probabilité. Si l'on suppose, comme nous le ferons ici, la probabilité des erreurs positives, la même que celle des erreurs négatives; on pourra, dans la somme $\int.\varphi\left(\frac{x}{a}\right).c^{mx\varpi\sqrt{-1}}$, réunir les termes multipliés, l'un par $c^{mx\varpi\sqrt{-1}}$, et l'autre par $c^{-mx\varpi\sqrt{-1}}$; alors cette somme prend la forme $2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos mx\varpi$. Il en est de même de toutes les sommes semblables. De là il suit que la probabilité que la fonction (m) sera égale à l, est égale à

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi.\left\{\begin{array}{l} c^{-l\varpi\sqrt{-1}}\times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos mx\varpi \\ \times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos m^{(1)}x\varpi \ldots\times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos m^{(s-1)}x\varpi \end{array}\right\}; \qquad (i)$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=-\pi$ jusqu'à $\varpi=\pi$. On a en réduisant les cosinus en séries,

$$\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos mx\varpi=\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)-\tfrac{1}{2}.m^2a^2.\varpi^2.\int\frac{x^2}{a^2}.\varphi\left(\frac{x}{a}\right)+\text{etc.}$$

Si l'on fait $\frac{x}{a}=x'$, et si l'on observe que la variation de x étant l'unité, on a $dx'=\frac{1}{a}$; on aura

$$\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)=a.\int dx'.\varphi(x').$$

Nommons, comme dans les numéros précédens, k l'intégrale $2\int dx'.\varphi(x')$, prise depuis x' nul jusqu'à sa valeur positive extrême; nommons pareillement k'' l'intégrale $\int x'^2dx'$, prise dans les mêmes limites, et ainsi de suite; nous aurons

$$2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos mx\varpi=ak.\left(1-\frac{k''}{k}.m^2a^2\varpi^2+\frac{k^{\text{IV}}}{12k}.m^4a^4\varpi^4-\text{etc.}\right).$$

Le logarithme du second membre de cette équation est

$$-\frac{k''}{k}.m^2a^2\varpi^2+\frac{kk^{\text{IV}}-6k''^2}{12k^2}.m^4a^4\varpi^4-\text{etc.}+\log ak,$$

ak ou $2a.\int dx'.\varphi(x')$ exprime la probabilité que l'erreur de chaque observation, sera comprise dans ses limites, ce qui est certain; on a donc $ak=1$; ce qui réduit le logarithme précédent à

$$-\frac{k''}{k}.m^2a^2\varpi^2+\frac{kk^{\text{IV}}-6k''^2}{12k^2}.m^4a^4\varpi^4-\text{etc.}$$

De là il est aisé de conclure que le produit

$$2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos mx\varpi \times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos m^{(1)}x\varpi \ldots \times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos m^{(s-1)}x\varpi,$$

est

$$\left(1+\frac{kk^{\text{IV}}-6k''^2}{12k^2}.a^4\varpi^4.S.m^{(i)4}+\text{etc.}\right).c^{-\frac{k''}{k}.a^2\varpi^2.S.m^{(i)2}};$$

l'intégrale précédente (i) se réduit donc à

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi.\left\{1+\frac{kk^{\text{IV}}-6k''^2}{12k^2}.a^4\varpi^4.S.m^{(i)4}+\text{etc.}\right\}$$
$$\times c^{-l\varpi\sqrt{-1}-\frac{k''}{k}.a^2.\varpi^2.S.m^{(i)2}}.$$

En faisant $sa^2\varpi^2=t^2$, cette intégrale devient

$$\frac{1}{2a\pi.\sqrt{s}}.\int dt.\left\{1+\frac{kk^{\text{IV}}-6k''^2}{12k^2}.\frac{S.m^{(i)4}}{s^2}.t^4+\text{etc.}\right\}$$
$$\times c^{-\frac{lt\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}}-\frac{k''}{k}.\frac{S.m^{(i)2}}{s}.t^2};$$

$S.m^{(i)2}$, $S.m^{(i)4}$, etc. sont évidemment des quantités de l'ordre s; ainsi $\frac{S.m^{(i)4}}{s^2}$ est de l'ordre $\frac{1}{s}$; en négligeant donc les termes de ce dernier ordre, vis-à-vis de l'unité, la dernière intégrale se réduit à

$$\frac{1}{2a\pi.\sqrt{s}}.\int dt.c^{-\frac{lt\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}}-\frac{k''}{k}.\frac{S.m^{(i)2}}{s}.t^2}.$$

L'intégrale relative à ϖ devant être prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$, l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -a\pi.\sqrt{s}$ jusqu'à $t = a\pi.\sqrt{s}$; et dans ces cas, l'exponentielle sous le signe $\int$ est insensible à ces deux limites, soit parce que s est un grand nombre, soit parce que a est ici supposé divisé dans une infinité de parties prises pour unité; on peut donc prendre l'intégrale depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. Faisons

$$t' = \sqrt{\frac{k''.S.m^{(i)2}}{ks}}.\left\{t + \frac{l.\sqrt{-1}.k.\sqrt{s}}{2a.k''.S.m^{(i)2}}\right\},$$

la fonction intégrale précédente devient

$$\frac{c^{-\frac{kl^2}{4k''.a^2.S.m^{(i)2}}}}{2a\pi.\sqrt{\frac{k''}{k}.S.m^{(i)2}}}.\int dt'.c^{-t'^2}.$$

L'intégrale relative à t' doit être prise, comme l'intégrale relative à t, depuis $t' = -\infty$ jusqu'à $t' = \infty$; ce qui réduit la quantité précédente à celle-ci,

$$\frac{c^{-\frac{kl^2}{4k''.a^2.S.m^{(i)2}}}}{2a.\sqrt{\pi}.\sqrt{\frac{k''}{k}.S.m^{(i)2}}}.$$

Si l'on fait $l = ar.\sqrt{s}$, et si l'on observe que la variation de l étant l'unité, l'on a $adr = 1$, on aura

$$\frac{\sqrt{s}}{2.\sqrt{\frac{k''\pi}{k}.S.m^{(i)2}}}.\int dr.c^{-\frac{kr^2.s}{4k''.S.m^{(i)2}}},$$

pour la probabilité que la fonction (m) sera comprise dans les limites zéro et $ar.\sqrt{s}$, l'intégrale étant prise depuis r nul.

Nous avons besoin ici de connaître la probabilité de l'erreur u, de l'élément déterminé en faisant nulle la fonction (m). Cette fonction étant supposée égale à l ou à $ar.\sqrt{s}$; on aura, par ce qui précède,

$$u.S.m^{(i)}p^{(i)} = ar.\sqrt{s};$$

en substituant cette valeur dans la fonction intégrale précédente, elle devient

$$\frac{S.m^{(i)}p^{(i)}}{2a.\sqrt{\frac{k''\pi}{k}.S.m^{(i)2}}}.\int du.c^{-\frac{ku^2.(S.m^{(i)}p^{(i)})^2}{4k''.a^2.S.m^{(i)2}}};$$

c'est l'expression de la probabilité que la valeur de u sera comprise dans les limites zéro et u: c'est aussi l'expression de la probabilité que u sera compris dans les limites zéro et $-u$. Si l'on fait

$$u = 2at.\sqrt{\frac{k''}{k}}.\frac{\sqrt{S.m^{(i)2}}}{S.m^{(i)}p^{(i)}},$$

la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\int dt.c^{-t^2}.$$

Maintenant la probabilité restant la même, t reste le même, et l'intervalle des deux limites de u, se resserre d'autant plus que $a.\sqrt{\frac{k''}{k}}.\frac{\sqrt{S.m^{(i)2}}}{S.m^{(i)}p^{(i)}}$ est plus petit. Cet intervalle restant le même, la valeur de t, et par conséquent la probabilité que l'erreur de l'élément tombe dans cet intervalle, est d'autant plus grande, que la même quantité $a.\sqrt{\frac{k''}{k}}.\frac{\sqrt{S.m^{(i)2}}}{S.m^{(i)}p^{(i)}}$ est plus petite; il faut donc choisir le système de facteurs $m^{(i)}$, qui rend cette quantité un *minimum*; et comme a, k, k'' sont les mêmes dans tous ces systèmes, il faut choisir le système qui rend $\frac{\sqrt{S.m^{(i)2}}}{S.m^{(i)}p^{(i)}}$ un *minimum*.

On peut parvenir au même résultat, de cette manière. Reprenons l'expression de la probabilité que u sera compris dans les limites zéro et u. Le coefficient de du dans la différentielle de cette expression, est l'ordonnée de la courbe des probabilités des erreurs u de l'élément, erreurs représentées par l'abscisse u de cette courbe, que l'on peut étendre à l'infini, de chaque côté de l'ordonnée qui répond à u nul. Cela posé, toute erreur, soit positive, soit négative, doit être considérée comme un désavantage ou une perte réelle, à un jeu quelconque; or, par les principes de la théorie des probabilités, exposés au commencement de ce Livre, on évalue ce désavantage, en prenant la somme de tous les produits de chaque désavantage par sa probabilité; la valeur moyenne de l'erreur à craindre en plus, est donc la somme des produits de chaque erreur par sa probabilité; elle est par conséquent égale à l'intégrale

$$\frac{\int u\,du\,.\,S.m^{(i)}p^{(i)}.c^{-\frac{ku^2.(S.m^{(i)}p^{(i)})^2}{4k''.a^2.S.m^{(i)2}}}}{2a.\sqrt{\frac{k''\pi}{k}.S.m^{(i)2}}},$$

prise depuis u nul jusqu'à u infini; ainsi cette erreur est

$$a.\sqrt{\frac{k''}{k\pi}}.\frac{\sqrt{S.m^{(i)2}}}{S.m^{(i)}p^{(i)}}.$$

Cette quantité prise avec le signe —, donne l'erreur moyenne à craindre en moins. Il est visible que le système des facteurs $m^{(i)}$ qu'il faut choisir, doit être tel que ces erreurs soient des *minima*, et par conséquent tel que $\frac{\sqrt{S.m^{(i)2}}}{S.m^{(i)}p^{(i)}}$ soit un *minimum*.

Si l'on différentie cette fonction par rapport à $m^{(i)}$, on aura en égalant sa différentielle à zéro, par la condition du *minimum*,

$$\frac{m^{(i)}}{S.m^{(i)2}}=\frac{p^{(i)}}{S.m^{(i)}p^{(i)}}.$$

Cette équation a lieu quel que soit i; et comme la variation de i ne fait point changer la fraction $\frac{S.m^{(i)2}}{S.m^{(i)}p^{(i)}}$; en nommant μ cette fraction, on aura

$$m=\mu.p,\quad m^{(1)}=\mu.p^{(1)},\ldots.m^{(s-1)}=\mu.p^{(s-1)};$$

et l'on peut, quels que soient p, $p^{(1)}$, etc., prendre μ tel que les nombres m, $m^{(1)}$, etc. soient des nombres entiers, comme l'analyse précédente le suppose. Alors on a

$$z=\frac{S.p^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)2}}.$$

et l'erreur moyenne à craindre devient

$$\pm\frac{a.\sqrt{\frac{k''}{k\pi}}}{\sqrt{S.p^{(i)2}}};$$

c'est dans toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les facteurs m, $m^{(1)}$, etc., la plus petite erreur moyenne possible.

Si l'on fait les valeurs de m, $m^{(1)}$, etc. égales à ± 1; l'erreur moyenne à craindre sera plus petite lorsque le signe $\pm$ sera déterminé de manière que $m^{(i)}p^{(i)}$ soit positif; ce qui revient à supposer $1 = m = m^{(1)} =$ etc., et à préparer les équations de condition, de sorte que le coefficient de z dans chacune d'elles, soit positif; c'est ce que l'on fait dans la méthode ordinaire. Alors le résultat moyen des observations est

$$z = \frac{S.\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)}},$$

et l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, est

$$\pm\frac{a.\sqrt{\frac{k''.s}{k\pi}}}{S.p^{(i)}};$$

mais cette erreur surpasse la précédente qui, comme on l'a vu, est la plus petite possible. On peut s'en convaincre d'ailleurs de cette manière. Il suffit de faire voir que l'on a l'inégalité

$$\frac{\sqrt{s}}{S.p^{(i)}} > \frac{1}{\sqrt{S.p^{(i)2}}},$$

ou

$$s.S.p^{(i)2} > (S.p^{(i)})^2.$$

En effet, $2pp^{(1)}$ est moindre que $p^2+p^{(1)2}$, puisque $(p^{(1)}-p)^2$ est une quantité positive; on peut donc, dans le second membre de l'inégalité précédente, substituer pour $2pp^{(1)}$, $p^2+p^{(1)2}-f$, f étant une quantité positive. En faisant des substitutions semblables pour tous les produits semblables, ce second membre sera égal au premier, moins une quantité positive.

Le

Le résultat

$$z = \frac{S.p^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)2}},$$

auquel correspond le *minimum* d'erreur moyenne à craindre, est celui que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations; car la somme de ces carrés étant

$$(p.z - \alpha)^2 + (p^{(1)}.z - \alpha^{(1)})^2 \ldots + (p^{(s-1)}.z - \alpha^{(s-1)})^2;$$

la condition du *minimum* de cette fonction, en faisant varier z, donne pour cette variable, l'expression précédente; cette méthode doit donc être employée de préférence, quelle que soit la loi de facilité des erreurs, loi dont dépend le rapport $\frac{k''}{k}$.

Ce rapport est $\frac{1}{6}$, si $\varphi(x)$ est une constante; il est moindre que $\frac{1}{6}$, si $\varphi(x)$ est variable, et tel qu'il diminue à mesure que x augmente, comme il est naturel de le supposer. En adoptant la loi moyenne des erreurs que nous avons donnée dans le n° 15, et suivant laquelle $\varphi(x)$ est égal à $\frac{1}{2a}.\log\frac{a}{x}$, on a $\frac{k''}{k} = \frac{1}{18}$. Quant aux limites $\pm a$, on peut prendre pour ces limites, les écarts du résultat moyen, qui feraient rejeter une observation.

Mais on peut, par les observations mêmes, déterminer le facteur $a.\sqrt{\frac{k''}{k}}$ de l'expression de l'erreur moyenne. En effet, on a vu dans le n° précédent, que la somme des carrés des erreurs des observations, est à très-peu près $2s.\frac{a^2k''}{k}$, et que si elles sont en grand nombre, il devient extrêmement probable que la somme observée ne s'écartera pas de cette valeur, d'une quantité sensible; on peut donc les égaler; or la somme observée est égale à $S.\epsilon^{(i)2}$, ou à $S.(p^{(i)}.z - \alpha^{(i)})^2$, en substituant pour z sa valeur $\frac{S.p^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)2}}$; on trouve ainsi,

$$2s.\frac{a^2k''}{k} = \frac{S.p^{(i)2}.S.\alpha^{(i)2} - (S.p^{(i)}\alpha^{(i)})^2}{S.p^{(i)2}}.$$

L'expression précédente de l'erreur moyenne à craindre sur le résultat z, devient alors

$$\pm \frac{\sqrt{S.p^{(i)2}.S.\alpha^{(i)2}-(S.p^{(i)}\alpha^{(i)})^2}}{S.p^{(i)2}.\sqrt{2s\pi}},$$

expression dans laquelle il n'y a rien qui ne soit donné par les observations et par les coefficiens des équations de condition.

21. Supposons maintenant que l'on ait deux élémens à corriger par l'ensemble d'un grand nombre d'observations. En nommant z et z' les corrections respectives de ces élémens, on formera, comme dans le numéro précédent, des équations de condition, qui seront comprises dans cette forme générale

$$\epsilon^{(i)}=p^{(i)}.z+q^{(i)}.z'-\alpha^{(i)},$$

$\epsilon^{(i)}$ étant, comme dans ce numéro, l'erreur de l'observation $(i+1)^{ième}$. Si l'on multiplie respectivement par m, $m^{(1)}, \ldots m^{(s-1)}$ ces équations, et que l'on ajoute ensemble ces produits, on aura une première équation finale

$$S.m^{(i)}\epsilon^{(i)}=z.S.m^{(i)}p^{(i)}+z'.S.m^{(i)}q^{(i)}-S.m^{(i)}\alpha^{(i)}.$$

En multipliant encore les mêmes équations respectivement par n, $n^{(1)}, \ldots n^{(s-1)}$, et ajoutant ces produits, on aura une seconde équation finale

$$S.n^{(i)}\epsilon^{(i)}=z.S.n^{(i)}p^{(i)}+z'.S.n^{(i)}q^{(i)}-S.n^{(i)}\alpha^{(i)},$$

le signe S s'étendant ici, comme dans le numéro précédent, à toutes les valeurs de i, depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$.

Si l'on suppose nulles les deux fonctions $S.m^{(i)}\epsilon^{(i)}$, $S.n^{(i)}\epsilon^{(i)}$, fonctions que nous désignerons respectivement par (m) et (n); les deux équations finales précédentes donneront les corrections z et z' des deux élémens. Mais ces corrections sont susceptibles d'erreurs relatives à celle dont la supposition que nous venons de faire, est elle-même susceptible. Concevons donc que les fonctions (m) et (n), au lieu d'être nulles, soient respectivement l et l', et nommons u et u' les erreurs correspondantes des corrections z et z', déterminées par ce qui précède; les deux équations finales deviendront

$$l = u.S.m^{(i)}p^{(i)} + u'.S.m^{(i)}q^{(i)},$$
$$l' = u.S.n^{(i)}p^{(i)} + u'.S.n^{(i)}q^{(i)}.$$

Il faut maintenant déterminer les facteurs $m, m^{(1)}$, etc.; $n, n^{(1)}$, etc., de manière que l'erreur moyenne à craindre sur chaque élément, soit un *minimum*. Pour cela, considérons le produit

$$\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).c^{-(m\varpi+n\varpi')x\sqrt{-1}} \times \int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).c^{-(m^{(1)}\varpi+n^{(1)}\varpi')x\sqrt{-1}}\ldots\ldots\times\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).c^{-(m^{(s-1)}\varpi+n^{(s-1)}\varpi')x\sqrt{-1}},$$

le signe $\int$ se rapportant à toutes les valeurs de x, depuis $x = -a$ jusqu'à $x = a$, $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ étant, comme dans le numéro précédent, la probabilité de l'erreur x, ainsi que de l'erreur $-x$. La fonction précédente devient, en réunissant les deux exponentielles relatives à x et à $-x$,

$$2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos(mx\varpi+nx\varpi') \times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos(m^{(1)}x\varpi+n^{(1)}x\varpi')\ldots\ldots\times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos(m^{(s-1)}x\varpi+n^{(s-1)}x\varpi'),$$

le signe $\int$ s'étendant ici à toutes les valeurs de x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$; x étant supposé, ainsi que a, divisé dans une infinité de parties prises pour unité. Présentement, il est clair que le terme indépendant des exponentielles, dans le produit de la fonction précédente, par $c^{-l\varpi\sqrt{-1}-l'\varpi'\sqrt{-1}}$, est la probabilité que la somme des erreurs de chaque observation, multipliées respectivement par m, $m^{(1)}$, etc. ou la fonction (m), sera égal à l, en même tems que la fonction (n), somme des erreurs de chaque observation, multipliées respectivement par n, $n^{(1)}$, etc., sera égal à l'; cette probabilité est donc

$$\frac{1}{4\pi^2}.\iint d\varpi.d\varpi'.c^{-l\varpi\sqrt{-1}-l'\varpi'\sqrt{-1}}.\left\{\begin{array}{c}2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos(m\varpi+n\varpi')x\ldots\ldots\\ \ldots\times 2\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right).\cos(m^{(s-1)}\varpi+n^{(s-1)}\varpi')x\end{array}\right\}$$

les intégrales étant prises depuis ϖ et ϖ' égaux à $-\pi$, jusqu'à ϖ et ϖ' égaux à π. Cela posé;

En suivant exactement l'analyse du numéro précédent, on trouve que la fonction précédente se réduit à très-peu près à

$$\frac{1}{4\pi^2}.\int\int d\varpi.d\varpi'.c^{-l\varpi\sqrt{-1}-l'\varpi'\sqrt{-1}-\frac{k''}{k}.a^2.[\varpi^2.S.m^{(i)2}+2\varpi\varpi'.S.m^{(i)}n^{(i)}+\varpi'^2.S.n^{(i)2}]},$$

k et k'' ayant ici la même signification que dans le numéro cité. On voit encore, par le même numéro, que les intégrales peuvent s'étendre depuis $a\varpi=-\infty$, $a\varpi'=-\infty$, jusqu'à $a\varpi=\infty$ et $a\varpi'=\infty$. Si l'on fait

$$t=a\varpi+\frac{a\varpi'.S.m^{(i)}n^{(i)}}{S.m^{(i)2}}+\frac{kl.\sqrt{-1}}{2k''a.S.m^{(i)2}},$$

$$t'=a\varpi'-\frac{k}{2k''a}.\frac{(l.S.m^{(i)}n^{(i)}-l'.S.m^{(i)2}).\sqrt{-1}}{S.m^{(i)2}.S.n^{(i)2}-(S.m^{(i)}n^{(i)})^2};$$

si l'on fait ensuite

$$E=S.m^{(i)2}.S.n^{(i)2}-(S.m^{(i)}n^{(i)})^2;$$

la double intégrale précédente devient

$$c^{-\frac{k}{4k''a^2.E}.[l^2.S.n^{(i)2}-2ll'.S.m^{(i)}n^{(i)}+l'^2.S.m^{(i)2}]}$$
$$\times\int\int\frac{dt.dt'}{4\pi^2.a^2}.c^{-\frac{k''t^2}{k}.S.m^{(i)2}-\frac{k''t'^2.E}{k.S.m^{(i)2}}}.$$

En prenant les intégrales dans les limites infinies positives et négatives, comme celles relatives à $a\varpi$ et $a\varpi'$, on aura

$$\frac{1}{\frac{4k''\pi}{k}.a^2\sqrt{E}}.c^{-\frac{k}{4k''a^2}.\frac{l^2.S.n^{(i)2}-2ll'.S.m^{(i)}n^{(i)}+l'^2.S.m^{(i)2}}{E}}. \qquad (o)$$

Il faut maintenant, pour avoir la probabilité que les valeurs de l et de l' seront comprises dans des limites données, multiplier cette quantité par $dl.dl'$, et l'intégrer ensuite dans ces limites. En nommant X cette quantité, la probabilité dont il s'agit sera donc

$\int\int X dl.dl'$. Mais pour avoir la probabilité que les erreurs u et u' des corrections des élémens seront comprises dans des limites données, il faut substituer dans cette intégrale, au lieu de l et de l', leurs valeurs en u et u'. Or si l'on différentie les expressions de l et de l', en supposant l' constant, on a

$$dl = du.S.m^{(i)}p^{(i)} + du'.S.m^{(i)}q^{(i)},$$
$$o = du.S.n^{(i)}p^{(i)} + du'.S.n^{(i)}q^{(i)};$$

ce qui donne

$$dl = \frac{du.[S.m^{(i)}p^{(i)}.S.n^{(i)}q^{(i)} - S.n^{(i)}p^{(i)}.S.m^{(i)}q^{(i)}]}{S.n^{(i)}q^{(i)}}.$$

Si l'on différentie ensuite l'expression de l', en supposant u constant, on a

$$dl' = du'.S.n^{(i)}q^{(i)};$$

on aura donc

$$dl.dl' = [S.m^{(i)}p^{(i)}.S.n^{(i)}q^{(i)} - S.n^{(i)}p^{(i)}.S.m^{(i)}q^{(i)}].du.du'.$$

En faisant ensuite

$$F = S.n^{(i)2}.(S.m^{(i)}p^{(i)})^2 - 2S.m^{(i)}n^{(i)}.S.m^{(i)}p^{(i)}.S.n^{(i)}p^{(i)} + S.m^{(i)2}.(S.n^{(i)}p^{(i)})^2,$$

$$G = S.n^{(i)2}.S.m^{(i)}p^{(i)}.S.m^{(i)}q^{(i)} + S.m^{(i)2}.S.n^{(i)}p^{(i)}.S.n^{(i)}q^{(i)} - S.m^{(i)}n^{(i)}.[S.n^{(i)}p^{(i)}.S.m^{(i)}q^{(i)} + S.m^{(i)}p^{(i)}.S.n^{(i)}q^{(i)}],$$

$$H = S.n^{(i)2}.(S.m^{(i)}q^{(i)})^2 - 2.S.m^{(i)}n^{(i)}.S.m^{(i)}q^{(i)}.S.n^{(i)}q^{(i)} + S.m^{(i)2}.(S.n^{(i)}q^{(i)})^2,$$

$$I = S.m^{(i)}p^{(i)}.S.n^{(i)}q^{(i)} - S.n^{(i)}p^{(i)}.S.m^{(i)}q^{(i)},$$

la fonction (o) devient

$$\int\int \frac{k}{4k''\pi}.\frac{I}{\sqrt{E}}.\frac{du.du'}{a^2}.c^{-\frac{k.(Fu^2+2Guu'+Hu'^2)}{4k''.a^2.E}}.$$

Intégrons d'abord cette fonction depuis $u' = -\infty$ jusqu'à $u' = \infty$. Si l'on fait

$$t = \frac{\sqrt{\frac{k.H}{4k''}}.\left(u' + \frac{Gu}{H}\right)}{a.\sqrt{E}},$$

et si l'on prend l'intégrale depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, on aura en ne considérant que la variation de u',

$$\int\sqrt{\frac{k}{4k''\pi}}\cdot\frac{du}{a}\cdot\frac{I}{\sqrt{H}}\cdot c^{-\frac{ku^2}{4k''a^2}\cdot\frac{FH-G^2}{EH}}.$$

Or on a

$$\frac{FH-G^2}{E}=I^2;$$

l'intégrale précédente devient donc

$$\int\frac{I}{\sqrt{H}}\cdot\frac{du}{a}\cdot\sqrt{\frac{k}{4k''\pi}}\cdot c^{-\frac{k}{4k''}\cdot\frac{I^2u^2}{a^2.H}}.$$

On aura, par le numéro précédent, l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, sur la correction du premier élément, en multipliant la quantité sous le signe $\int$ par $\pm u$, et prenant l'intégrale depuis $u=0$ jusqu'à $u=\infty$, ce qui donne pour cette erreur,

$$\pm\frac{a.\sqrt{H}}{I.\sqrt{\frac{k\pi}{k''}}};$$

le signe $+$ indiquant l'erreur moyenne à craindre en plus, et le signe $-$, l'erreur moyenne à craindre en moins.

Déterminons présentement les facteurs $m^{(i)}$ et $n^{(i)}$, de manière que cette erreur soit un *minimum*. En faisant varier $m^{(i)}$ seul, on a

$$d.\log\frac{\sqrt{H}}{I}=dm^{(i)}.\frac{[-p^{(i)}.S.n^{(i)}q^{(i)}+q^{(i)}.S.n^{(i)}p^{(i)}]}{I}$$
$$+dm^{(i)}.\frac{\left\{\begin{array}{l}q^{(i)}.S.n^{(i)2}.S.m^{(i)}q^{(i)}-n^{(i)}.S.m^{(i)}q^{(i)}.S.n^{(i)}q^{(i)}\\-q^{(i)}.S.m^{(i)}n^{(i)}.S.n^{(i)}q^{(i)}+m^{(i)}.(S.n^{(i)}q^{(i)})^2\end{array}\right\}}{H}.$$

Il est facile de voir que cette différentielle disparaît, si l'on suppose dans les coefficiens de $dm^{(i)}$,

$$m^{(i)}=\mu.p^{(i)},\quad n^{(i)}=\mu.q^{(i)},$$

μ étant un coefficient arbitraire indépendant de i, et au moyen duquel on peut rendre $m^{(i)}$ et $n^{(i)}$ des nombres entiers; la supposition précédente rend donc nulle la différentielle de $\frac{\sqrt{H}}{I}$, prise par rapport à $m^{(i)}$. On verra de la même manière, que cette supposition rend nulle la différentielle de la même quantité, prise par rapport à $n^{(i)}$. Ainsi cette supposition rend un *minimum*, l'erreur moyenne à craindre sur la correction du premier élément; et l'on verra de la même manière, qu'elle rend encore un *minimum*, l'erreur moyenne à craindre sur la correction du second élément, erreur que l'on obtient en changeant dans l'expression de la précédente, H en F. Dans cette supposition, les corrections des deux élémens sont

$$z = \frac{S.q^{(i)2}.S.p^{(i)}\alpha^{(i)} - S.p^{(i)}q^{(i)}.S.q^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)2}.S.q^{(i)2} - (S.p^{(i)}q^{(i)})^2},$$

$$z' = \frac{S.p^{(i)2}.S.q^{(i)}\alpha^{(i)} - S.p^{(i)}q^{(i)}.S.p^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)2}.S.q^{(i)2} - (S.p^{(i)}q^{(i)})^2}.$$

Il est facile de voir que ces corrections sont celles que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations, ou du *minimum* de la fonction

$$S.(p^{(i)}z + q^{(i)}z' - \alpha^{(i)})^2;$$

d'où il suit que cette méthode a généralement lieu, quel que soit le nombre des élémens à déterminer; car il est visible que l'analyse précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'élémens.

En substituant pour $a.\sqrt{\frac{k''}{k\pi}}$, la quantité $\sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}}$, à laquelle on peut, par le n° 20, le supposer égal, ϵ, $\epsilon^{(i)}$, etc. étant ce qui reste dans les équations de condition, après y avoir substitué les corrections données par la méthode des moindres carrés des erreurs; l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, est

$$\pm \frac{\sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}}.\sqrt{S.q^{(i)2}}}{\sqrt{S.p^{(i)2}.S.q^{(i)2} - (S.p^{(i)}q^{(i)})^2}}.$$

L'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur le second élément, est

$$\pm \frac{\sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}}.\sqrt{S.p^{(i)2}}}{\sqrt{S.p^{(i)2}.S.q^{(i)2} - (S.p^{(i)}q^{(i)})^2}},$$

d'où l'on voit que le premier élément est plus ou moins bien déterminé que le second, suivant que $S.q^{(i)2}$ est plus petit ou plus grand que $S.p^{(i)2}$.

Si les r premières équations de condition ne renferment point q, et si les $s-r$ dernières ne renferment point p; alors $S.p^{(i)}q^{(i)}=0$, et les formules précédentes coïncident avec celle du numéro précédent.

On peut obtenir ainsi l'erreur moyenne à craindre sur chaque élément déterminé par la méthode des moindres carrés des erreurs, quel que soit le nombre des élémens, pourvu que l'on considère un grand nombre d'observations. Soient z, z', z'', z''', etc., les corrections de chaque élément, et représentons généralement les équations de condition, par la suivante,

$$\epsilon^{(i)}=p^{(i)}.z+q^{(i)}.z'+r^{(i)}.z''+t^{(i)}.z'''+\text{etc.}-\alpha^{(i)}.$$

Dans le cas d'un seul élément, l'erreur moyenne à craindre est, comme on l'a vu,

$$\pm\sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{S.p^{(i)2}}}.\qquad (a)$$

Lorsqu'il y a deux élémens, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, en changeant dans la fonction (a), $S.p^{(i)2}$ dans $S.p^{(i)2}-\frac{(S.p^{(i)}q^{(i)})^2}{S.q^{(i)2}}$; ce qui donne pour cette erreur,

$$\pm\frac{\sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}}\cdot\sqrt{S.q^{(i)2}}}{\sqrt{S.p^{(i)2}.S.q^{(i)2}-(S.p^{(i)}q^{(i)})^2}}.\qquad (a')$$

Lorsqu'il y a trois élémens, on aura l'erreur à craindre sur le premier élément, en changeant dans cette expression (a'), $S.q^{(i)2}$ dans $S.p^{(i)2}-\frac{(S.p^{(i)}r^{(i)})^2}{S.r^{(i)2}}$, $S.p^{(i)}q^{(i)}$ dans $S.p^{(i)}q^{(i)}-\frac{S.p^{(i)}r^{(i)}.S.q^{(i)}r^{(i)}}{S.r^{(i)2}}$, et $S.q^{(i)2}$ dans $S.q^{(i)2}-\frac{(S.q^{(i)}r^{(i)})^2}{S.r^{(i)2}}$; ce qui donne pour cette erreur,

$$\pm\frac{\sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}}\cdot\sqrt{S.q^{(i)2}.S.r^{(i)2}-(S.q^{(i)}r^{(i)})^2}}{\sqrt{\begin{array}{l}S.p^{(i)2}.S.q^{(i)2}.S.r^{(i)2}-S.p^{(i)2}.(S.q^{(i)}r^{(i)})^2-S.q^{(i)2}.(S.p^{(i)}r^{(i)})^2\\-S.r^{(i)2}.(S.p^{(i)}q^{(i)})^2+2.S.p^{(i)}q^{(i)}.S.p^{(i)}r^{(i)}.S.q^{(i)}r^{(i)}\end{array}}}.\qquad (a'')$$

Dans

Dans le cas de quatre élémens, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, en changeant dans cette expression (a''), $S.p^{(i)2}$, dans $S.p^{(i)2}-\frac{(S.p^{(i)}t^{(i)})^2}{S.t^{(i)2}}$; $S.p^{(i)}q^{(i)}$, dans $S.p^{(i)}q^{(i)}-\frac{S.p^{(i)}t^{(i)}.S.q^{(i)}t^{(i)}}{S.t^{(i)2}}$, etc. En continuant ainsi, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, quel que soit le nombre des élémens. En changeant dans l'expression de cette erreur, ce qui est relatif au premier élément, dans ce qui est relatif au second, et réciproquement; on aura l'erreur moyenne à craindre sur le second élément, et ainsi des autres.

De là résulte un moyen simple de comparer entre elles diverses tables astronomiques, du côté de la précision. Ces tables peuvent toujours être supposées réduites à la même forme, et alors elles ne diffèrent que par les époques, les moyens mouvemens, et les coefficiens de leurs argumens; car si l'une d'elles, par exemple, contient un argument qui ne se trouve point dans les autres, il est clair que cela revient à supposer dans celles-ci, ce coefficient nul. Maintenant, si l'on comparait ces tables à la totalité des bonnes observations, en les rectifiant par cette comparaison; ces tables ainsi rectifiées, satisferaient, par ce qui précède, à la condition que la somme des carrés des erreurs qu'elles laisseraient subsister encore, soit un *minimum*. Les tables qui approcheraient le plus de remplir cette condition, mériteraient donc la préférence; d'où il suit qu'en comparant ces diverses tables, à un nombre considérable d'observations, la présomption d'exactitude doit être en faveur de celle dans laquelle la somme des carrés des erreurs est plus petite que dans les autres.

22. Jusqu'ici nous avons supposé les facilités des erreurs positives, les mêmes que celles des erreurs négatives. Considérons maintenant le cas général dans lequel ces facilités peuvent être différentes. Nommons a l'intervalle dans lequel les erreurs de chaque observation peuvent s'étendre, et supposons-le partagé dans un nombre infini $n+n'$ de parties égales et prises pour l'unité, n étant le nombre des parties qui répondent aux erreurs négatives, et n' étant le nombre des parties qui répondent aux erreurs positives.

Sur chaque point de l'intervalle a, élevons une ordonnée qui exprime la probabilité de l'erreur correspondante, et désignons par $\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right)$, l'ordonnée correspondante à l'erreur x. Cela posé, considérons la suite

$$\varphi\left(\frac{-n}{n+n'}\right).c^{-qn\varpi\sqrt{-1}}+\varphi\left(\frac{-(n-1)}{n+n'}\right).c^{-q(n-1)\varpi\sqrt{-1}}\ldots$$
$$\ldots+\varphi\left(\frac{-1}{n+n'}\right).c^{-q\varpi\sqrt{-1}}+\varphi\left(\frac{0}{n+n'}\right)+\varphi\left(\frac{1}{n+n'}\right).c^{q\varpi\sqrt{-1}}\ldots$$
$$\ldots+\varphi\left(\frac{n'-1}{n+n'}\right).c^{q(n'-1)\varpi\sqrt{-1}}+\varphi\left(\frac{n'}{n+n'}\right).c^{qn'\varpi\sqrt{-1}}.$$

Représentons cette suite par $\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right).c^{qx\varpi\sqrt{-1}}$, le signe $\int$ s'étendant à toutes les valeurs de x, depuis $x=-n$ jusqu'à $x=n'$. Le terme indépendant de $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ et de ses puissances, dans le développement de la fonction

$$c^{-(l+\mu)\varpi\sqrt{-1}}\times\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right).c^{qx\varpi\sqrt{-1}}\times\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right).c^{q^{(1)}x\varpi\sqrt{-1}}\ldots$$
$$\ldots\times\int\varphi\left(\frac{x}{n}\right).c^{q^{(s-1)}x\varpi\sqrt{-1}},$$

sera, par le n° 21, la probabilité que la fonction

$$q\epsilon+q^{(1)}\epsilon^{(1)}\ldots+q^{(s-1)}\epsilon^{(s-1)}, \quad (m)$$

sera égale à $l+\mu$; cette probabilité est donc

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi.c^{-l\varpi\sqrt{-1}}.c^{-\mu\varpi\sqrt{-1}}\times\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right).c^{qx\varpi\sqrt{-1}}\times\text{etc.}, \quad (1)$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=-\pi$ jusqu'à $\varpi=\pi$. Le logarithme de la fonction

$$c^{-\mu\varpi\sqrt{-1}}\times\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right).c^{qx\varpi\sqrt{-1}}\times.\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right).c^{q^{(1)}x\varpi\sqrt{-1}}\times\text{etc.}, \quad (2)$$

est

$$-\mu\varpi\sqrt{-1}+\log\left[\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right).c^{qx\varpi\sqrt{-1}}\right]+\text{etc.},$$

n et n' étant supposés des nombres infinis, si l'on fait

$$\frac{x}{n+n'}=x', \quad \frac{1}{n+n'}=dx';$$

si de plus on suppose

$$k=\int dx'.\varphi(x'), \quad k'=\int x'dx'.\varphi(x'), \quad k''=\int x'^2dx'.\varphi(x'), \quad \text{etc.},$$

les intégrales étant prises depuis $x'=-\frac{n}{n+n'}$ jusqu'à $x'=\frac{n'}{n+n'}$; on aura

$$\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right).c^{qx\varpi\sqrt{-1}}=(n+n').k.\left\{\begin{array}{l}1+\frac{k'}{k}.q.(n+n').\varpi\sqrt{-1}\\ -\frac{k''}{2k}.q^2.(n+n')^2.\varpi^2+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

L'erreur de chaque observation devant tomber dans les limites $-n$ et $+n'$, et la probabilité que cela aura lieu étant $\int\varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right)$, ou $(n+n').k$, cette quantité doit être égale à l'unité. De là il est facile de conclure que le logarithme de la fonction (2) est, en faisant $\mu'=\frac{\mu}{n+n'}$,

$$\left(\frac{k'}{k}.S.q^{(i)}-\mu'\right).(n+n').\varpi\sqrt{-1}-\frac{kk''-k'^2}{2k^2}.S.q^{(i)2}.(n+n')^2.\varpi^2+\text{etc.},$$

le signe S embrassant toutes les valeurs de i, depuis i nul jusqu'à $i=s-1$. On fera disparaître la première puissance de ϖ, en faisant

$$\mu'=\frac{k'}{k}.S.q^{(i)};$$

et si l'on ne considère que sa seconde puissance, ce que l'on peut faire par ce qui précède, lorsque s est un très-grand nombre, on aura, pour le logarithme de la fonction (2),

$$-\frac{kk''-k'^2}{2k^2}.S.q^{(i)2}.(n+n')^2.\varpi^2.$$

En repassant des logarithmes aux nombres, la fonction (2) se transforme dans la suivante,

$$c^{-\frac{kk''-k'^2}{2k^2}.(n+n')^2.\varpi^2.S.q^{(i)2}};$$

l'intégrale (1) devient ainsi,

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi.c^{-l\varpi\sqrt{-1}}.c^{-\frac{kk''-k'^2}{2k^2}.(n+n')^2.\varpi^2.S.q^{(i)2}}.$$

Supposons

$$l=(n+n').r.\sqrt{S.q^{(i)2}},$$
$$t=\sqrt{\frac{(kk''-k'^2).S.q^{(i)2}}{2k^2}}.(n+n')\,\varpi-\frac{r.\sqrt{-1}}{2}.\sqrt{\frac{2k^2}{kk''-k'^2}}.$$

La variation de l étant l'unité, on aura

$$1=(n+n').dr.\sqrt{S.q^{(i)2}};$$

l'intégrale précédente devient ainsi, après l'avoir intégrée depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$,

$$\frac{kdr}{\sqrt{2.(kk''-k'^2).\pi}}.c^{-\frac{k^2r^2}{2(kk''-k'^2)}}.$$

Ainsi la probabilité que la fonction (m) sera comprise dans les limites

$$\frac{ak'}{k}.S.q^{(i)}\pm ar.\sqrt{S.q^{(i)2}},$$

est égale

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int\frac{kdr}{\sqrt{2(kk''-k'^2)}}.c^{-\frac{k^2r^2}{2(kk''-k'^2)}},$$

l'intégrale étant prise depuis r nul.

$\frac{ak'}{k}$ est l'abscisse de l'ordonnée qui passe par le centre de gravité de l'aire de la courbe des probabilités des erreurs de chaque observation; le produit de cette abscisse par $S.q^{(i)}$, est donc le résultat moyen vers lequel la fonction (m) converge sans cesse. Si l'on suppose $1=q=q^{(1)}=$ etc.; la fonction (m) devient la somme des erreurs, et alors $S.q^{(i)}$ devient s; en divisant donc par s la somme des erreurs, pour avoir l'erreur moyenne; cette erreur converge sans cesse vers l'abscisse du centre de gravité, de manière qu'en prenant de part et d'autre un intervalle quelconque aussi petit que l'on voudra, la probabilité que l'erreur moyenne tombera dans cet intervalle, finira, en multipliant indéfiniment les observations, par ne différer de la certitude, que d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

23. Nous venons de rechercher le résultat moyen que des observations nombreuses et non faites encore, doivent indiquer avec le plus d'avantage, et la loi de probabilité des erreurs de ce résultat. Considérons présentement le résultat moyen des observations déjà faites, et dont on connaît les écarts respectifs. Pour cela, concevons un nombre s d'observations du même genre, c'est-à-dire, telles que la loi des erreurs soit la même pour toutes. Nommons A le résultat de la première; $A+q$, celui de la seconde; $A+q^{(1)}$, celui de la troisième, et ainsi de suite; q, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, etc. étant des quantités positives et croissantes, ce que l'on peut toujours obtenir par une disposition convenable des observations. Désignons encore par $\varphi(z)$, la probabilité de l'erreur z pour chaque observation, et supposons que $A+x$ soit le vrai résultat. L'erreur de la première observation est alors $-x$; $q-x$, $q^{(1)}-x$, etc. sont les erreurs de la seconde, de la troisième, etc. La probabilité de l'existence simultanée de toutes ces erreurs, est le produit de leurs probabilités respectives; elle est donc

$$\varphi(-x).\varphi(q-x).\varphi(q^{(1)}-x).\text{etc.}$$

Maintenant, x étant susceptible d'une infinité de valeurs; en les considérant comme autant de causes de l'événement observé, la probabilité de chacune d'elles sera, par le n° 1,

$$\frac{dx.\varphi(-x).\varphi(q-x).\varphi(q^{(1)}-x).\text{etc.}}{\int dx.\varphi(-x).\varphi(q-x).\varphi(q^{(1)}-x).\text{etc.}};$$

l'intégrale du dénominateur étant prise pour toutes les valeurs dont x est susceptible. Nommons $\frac{1}{H}$ ce dénominateur. Cela posé, imaginons une courbe dont x soit l'abscisse, et dont l'ordonnée y soit

$$H.\varphi(-x).\varphi(q-x).\varphi(q^{(1)}-x).\text{etc.};$$

cette courbe sera celle des probabilités des valeurs de x. La valeur qu'il faut choisir pour résultat moyen, est celle qui rend l'erreur moyenne à craindre, un *minimum*. Toute erreur, soit positive, soit négative, devant être considérée comme un désavantage, ou une perte réelle au jeu; on a le désavantage moyen, en prenant la somme des produits de chaque désavantage, par sa probabilité; la valeur moyenne de l'erreur à craindre, est donc la somme des produits de chaque erreur, abstraction faite du signe, par sa probabilité. Déterminons l'abscisse qu'il faut choisir pour que cette somme soit un *minimum*. Pour cela, donnons aux abscisses, pour origine, la première extrémité de la courbe précédente, et nommons x' et y' les coordonnées de la courbe, à partir de cette origine. Soit l la valeur qu'il faut choisir. Il est clair que si le vrai résultat était x', l'erreur du résultat l serait, abstraction faite du signe, $l-x'$, tant que x' serait moindre que l; or y' est la probabilité que x' est le résultat vrai; la somme des erreurs à craindre, abstraction faite du signe, multipliées par leur probabilité, est donc pour toutes les valeurs de x', moindres que l, $\int(l-x').y'dx'$, l'intégrale étant prise depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=l$. On verra de la même manière, que pour les valeurs de x' supérieures à l, la somme des erreurs à craindre, multipliées par leur probabilité, est $\int(x'-l).y'dx'$, l'intégrale étant prise depuis $x'=l$ jusqu'à l'abscisse x' correspondante à la dernière extrémité de la courbe; la somme entière des erreurs à craindre, abstraction faite du signe, et multipliées par leurs probabilités respectives, est donc

$$\int(l-x').y'dx'+\int(x'-l).y'dx'.$$

La différentielle de cette fonction, prise par rapport à l, est

$$dl.\int y'dx'-dl.\int y'dx';$$

car on a la différentielle de $\int(l-x').y'dx'$, en différentiant d'abord la valeur de l sous le signe $\int$, et en ajoutant à cette différentielle, l'accroissement qui résulte de la variation de la limite de l'intégrale, limite qui se change en $l+dl$. Cet accroissement est égal à l'élément $(l-x').y'dx'$, à la limite où $x'=l$; il est donc nul, et $dl.\int y'dx'$ est la différentielle de l'intégrale $\int(l-x').y'dx'$. On verra de la même manière, que $-dl.\int y'dx'$ est la différentielle de l'intégrale $\int(x'-l).y'dx'$. La somme de ces différentielles est nulle relativement à l'abscisse l, pour laquelle l'erreur moyenne à craindre est un *minimum;* on a donc, relativement à cette abscisse,

$$\int y'dx' = \int y'dx',$$

la première intégrale étant prise depuis $x'=o$ jusqu'à $x'=l$, et la seconde étant prise depuis $x'=l$ jusqu'à la valeur extrême de x'.

Il suit de là que l'abscisse qui rend l'erreur moyenne à craindre, un *minimum*, est celle dont l'ordonnée divise l'aire de la courbe en deux parties égales. Ce point jouit encore de la propriété d'être celui en deçà duquel il est aussi probable que le vrai résultat tombe, qu'au-delà; et par cette raison, il peut encore être nommé *milieu de probabilité*. Des géomètres célèbres ont pris pour le milieu qu'il faut choisir, celui qui rend le résultat observé, le plus probable, et par conséquent l'abscisse qui répond à la plus grande ordonnée de la courbe; mais le milieu que nous adoptons, est évidemment indiqué par la théorie des probabilités.

Si l'on met $\varphi(x)$ sous la forme d'exponentielle, et qu'on le désigne par $c^{-\psi(x^2)}$, afin qu'il puisse également convenir aux erreurs positives et négatives; on aura

$$y = H.c^{-\psi(x^2)-\psi(x-q)^2-\psi(x-q^{(1)})^2-\text{etc.}} \quad (1)$$

Si l'on fait $x=a+z$, et que l'on développe l'exposant de c par rapport aux puissances de z, y prendra cette forme,

$$y = H.c^{-M-2Nz-Pz^2-Qz^3-\text{etc.}},$$

expression dans laquelle on a

$$M = \psi(a^2) + \psi(a-q)^2 + \psi(a-q^{(1)})^2 + \text{etc.},$$
$$N = a.\psi'(a^2) + (a-q).\psi'(a-q)^2 + (a-q^{(1)}).\psi'(a-q^{(1)})^2 + \text{etc.},$$
$$P = \psi'(a^2) + \psi'(a-q)^2 + \psi'(a-q^{(1)})^2 + \text{etc.} + 2a^2.\psi''(a^2)$$
$$+ 2(a-q)^2.\psi''(a-q)^2 + 2(a-q^{(1)})^2.\psi''(a-q^{(1)})^2 + \text{etc.},$$

etc.,

$\psi'(t)$ étant le coefficient de dt dans la différentielle de $\psi(t)$, $\psi''(t)$ étant le coefficient de dt dans la différentielle de $\psi'(t)$, et ainsi de suite.

Supposons le nombre s des observations, très-grand, et déterminons a par l'équation $N=0$ que donne la condition du *maximum* de y; alors on a

$$y=H.c^{-M-Pz^2-Qz^3-\text{etc.}}.$$

M, P, Q, etc. sont de l'ordre s; or, si z est très-petit de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$, Qz^3 devient de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$, et l'exponentielle $c^{-Qz^3-\text{etc.}}$ peut se réduire à l'unité. Ainsi dans l'intervalle depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{r}{\sqrt{s}}$, on peut supposer

$$y=H.c^{-M-Pz^2}.$$

Au-delà, et lorsque z est de l'ordre $s^{-\frac{m}{2}}$, m étant plus petit que l'unité, Pz^2 devient de l'ordre s^{1-m}; par conséquent c^{-Pz^2} devient ainsi que y, insensible; ensorte que l'on peut, dans toute l'étendue de la courbe, supposer

$$y=H.c^{-M-Pz^2}.$$

La valeur de a donnée par l'équation $N=0$, ou

$$0=a.\psi'(a^2)+(a-q).\psi'(a-q)^2+(a-q^{(1)}).\psi'(a-q^{(1)})^2+\text{etc.},$$

est alors l'abscisse x correspondante à l'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en parties égales. La condition que l'aire entière de la courbe doit représenter la certitude ou l'unité, donne

$$\frac{1}{H}=\int dz.c^{-M-Pz^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=\infty$, ce qui donne

$$H=\frac{c^M.\sqrt{P}}{\sqrt{\pi}}.$$

L'erreur

L'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, en prenant a pour résultat moyen des observations, est $\pm\int zydz$, l'intégrale étant prise depuis z nul jusqu'à z infini, ce qui donne pour cette erreur

$$\pm\frac{1}{2.\sqrt{\pi.P}}.$$

Mais l'ignorance entière où l'on est de la loi $c^{-\psi(x^2)}$ des erreurs de chaque observation, ne permet pas de former l'équation

$$o=a.\psi'(a^2)+(a-q).\psi'(a-q)^2+\text{etc.}$$

Ainsi la connaissance des valeurs de q, $q^{(1)}$, etc., ne donnant *à posteriori*, aucune lumière sur le résultat moyen a des observations; il faut s'en tenir au résultat le plus avantageux déterminé *à priori*, et que l'on a vu être celui que fournit la méthode des moindres carrés des erreurs.

Cherchons la fonction $\psi(x^2)$ qui donne constamment la règle des milieux arithmétiques, admise par les observateurs. Pour cela, concevons que sur les s observations, les i premières coïncident, ainsi que les $s-i$ dernières. L'équation $N=o$ devient alors

$$o=i.a.\psi'(a^2)+(s-i).(a-q).\psi'(a-q)^2.$$

La règle des milieux arithmétiques donne

$$a=\frac{s-i}{s}.q;$$

l'équation précédente devient ainsi

$$\psi'\left[\left(\frac{s-i}{s}\right)^2.q^2\right]=\psi'\left(\frac{i^2}{s^2}.q^2\right).$$

Cette équation devant avoir lieu quels que soient $\frac{i}{s}$ et q, il est nécessaire que $\psi'(t)$ soit indépendant de t, ce qui donne

$$\psi'(t)=k,$$

k étant une constante. En intégrant, on a

$$\psi(t)=kt-L,$$

L étant une constante arbitraire; partant,

$$c^{-\psi(x^2)} = c^{L-kx^2}.$$

Telle est donc la fonction qui peut seule, donner généralement la règle des milieux arithmétiques. La constante L doit être déterminée de manière que l'intégrale $\int dx . c^{L-kx^2}$, prise depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, soit égale à l'unité; car il est certain que l'erreur x d'une observation doit tomber dans ces limites; on a donc

$$c^L = \sqrt{\frac{k}{\pi}};$$

par conséquent la probabilité de l'erreur x est $\sqrt{\frac{k}{\pi}} . c^{-kx^2}$.

A la vérité, cette expression donne l'infini pour la limite des erreurs, ce qui n'est pas admissible; mais, vu la rapidité avec laquelle ce genre d'exponentielles diminue à mesure que x augmente, on peut prendre k assez grand, pour qu'au-delà de la limite admissible des erreurs, leurs probabilités soient insensibles, et puissent être supposées nulles.

La loi précédente des erreurs donne pour l'expression générale (1) de y,

$$y = \sqrt{\frac{sk}{\pi}} . c^{-ks.u^2};$$

en déterminant H de manière que l'intégrale entière $\int y dx$ soit l'unité, et faisant

$$x = \frac{S.q^{(i)}}{s} + u.$$

L'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en deux parties égales, est celle qui répond à $u = 0$, et par conséquent à

$$x = \frac{S.q^{(i)}}{s};$$

c'est donc la valeur de x qu'il faut choisir pour résultat moyen des observations; or, cette valeur est celle que donne la règle des milieux arithmétiques; la loi précédente des erreurs de chaque observation, donne donc constamment les mêmes résultats que cette règle, et l'on a vu qu'elle est la seule loi qui jouisse de cette propriété.

En adoptant cette loi, la probabilité de l'erreur $\epsilon^{(i)}$ de l'observation $(i+1)^{ième}$, est

$$\sqrt{\frac{k}{\pi}}\cdot c^{-k.\epsilon^{(i)2}};$$

or on a vu dans le n° 20, que z étant la correction d'un élément, cette observation fournit l'équation de condition

$$\epsilon^{(i)} = p^{(i)}.z - \alpha^{(i)}.$$

La probabilité de la valeur de $p^{(i)}.z - \alpha^{(i)}$, est donc

$$\sqrt{\frac{k}{\pi}}\cdot c^{-k.(p^{(i)}z-\alpha^{(i)})^2};$$

la probabilité de l'existence simultanée des s valeurs $p.z-\alpha$, $p^{(1)}.z-\alpha^{(1)}, \ldots p^{(s-1)}.z-\alpha^{(s-1)}$, sera donc

$$\left(\sqrt{\frac{k}{\pi}}\right)^{s-1}\cdot c^{-k.S.(p^{(i)}z-\alpha^{(i)})^2}.$$

Cette probabilité varie avec z; on aura donc la probabilité d'une valeur quelconque de z, en multipliant cette quantité par dz, et divisant le produit par l'intégrale de ce produit, prise depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=\infty$. Soit

$$z=\frac{S.p^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)2}}+u,$$

cette probabilité devient

$$du.\sqrt{\frac{k.S.p^{(i)2}}{\pi}}\cdot c^{-ku^2.S.p^{(i)2}};$$

ensorte que si l'on décrit une courbe dont le coefficient de du soit l'ordonnée, et dont u soit l'abscisse; cette courbe étendue depuis $u=-\infty$ jusqu'à $u=\infty$, peut être considérée comme la courbe des probabilités des erreurs u, dont le résultat

$$z=\frac{S.p^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)2}}$$

est susceptible. L'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en deux parties égales, est celle qui répond à $u=0$, et par conséquent à z égal à $\frac{S.p^{(i)}a^{(i)}}{S.p^{(i)2}}$; ce résultat est donc celui qu'il faut choisir; or, il est le même que celui que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations; la loi précédente des erreurs de chaque observation, conduit donc aux mêmes résultats que cette méthode.

La méthode des moindres carrés des erreurs devient nécessaire, lorsqu'il s'agit de prendre un milieu entre plusieurs résultats donnés, chacun, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations de divers genres. Supposons qu'un même élément soit donné, 1°. par le résultat moyen de s observations d'un premier genre, et qu'il soit par ces observations, égal à A; 2°. par le résultat moyen de s' observations d'un second genre, et qu'il soit égal à $A+q$; 3°. par le résultat moyen de s'' observations d'un troisième genre, et qu'il soit égal à $A+q'$, et ainsi du reste. Si l'on représente par $A+x$, l'élément vrai; l'erreur du résultat des observations s sera $-x$; en supposant donc 6 égal à

$$\sqrt{\frac{k}{k''}}\cdot\frac{\sqrt{S.p^{(i)2}}}{2a},$$

si l'on fait usage de la méthode des moindres carrés des erreurs, pour déterminer le résultat moyen; ou à

$$\sqrt{\frac{k}{k''}}\cdot\frac{S.p^{(i)}}{2a.\sqrt{s}},$$

si l'on fait usage de la méthode ordinaire; la probabilité de cette erreur sera, par le n° 20,

$$\frac{6}{\sqrt{\pi}}.c^{-6^2.x^2}.$$

L'erreur du résultat des observations s' sera $q-x$, et en désignant par $6'$ pour ces observations, ce que nous avons nommé 6 pour les observations s, la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{6'}{\sqrt{\pi}}.c^{-6'^2.(x-q)^2}.$$

Pareillement l'erreur du résultat des observations s'' sera $q'-x$; et en nommant pour elles, $\mathcal{C}''$, ce que nous avons nommé $\mathcal{C}$ pour les observations s; la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{\mathcal{C}''}{\sqrt{\pi}}.c^{-\mathcal{C}''^2.(x-q')^2},$$

et ainsi de suite. Le produit de toutes ces probabilités sera la probabilité que $-x$, $q-x$, $q'-x$, etc. seront les erreurs des résultats moyens des observations s, s', s'', etc. En le multipliant par dx, et prenant l'intégrale depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=\infty$, on aura la probabilité que les résultats moyens des observations s', s'', etc., surpasseront respectivement de q, q', etc., le résultat moyen des observations s.

Si l'on prend l'intégrale dans des limites déterminées, on aura la probabilité que la condition précédente étant remplie, l'erreur du premier résultat sera comprise dans ces limites; en divisant cette probabilité par celle de la condition elle-même, on aura la probabilité que l'erreur du premier résultat sera comprise dans des limites données, lorsqu'on est certain que la condition a effectivement lieu; cette probabilité est donc

$$\frac{\int dx.c^{-\mathcal{C}^2.x^2-\mathcal{C}'^2.(x-q)^2-\mathcal{C}''^2.(x-q')^2-\text{etc.}}}{\int dx.c^{-\mathcal{C}^2.x^2-\mathcal{C}'^2.(x-q)^2-\mathcal{C}''^2.(x-q')^2-\text{etc.}}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans les limites données, et celle du dénominateur étant prise depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=\infty$. On a

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}^2x^2+\mathcal{C}'^2.(x-q)^2+\mathcal{C}''^2.(x-q')^2+\text{etc.}\\ &=(\mathcal{C}^2+\mathcal{C}'^2+\mathcal{C}''^2+\text{etc.}).x^2-2x.(\mathcal{C}'^2q+\mathcal{C}''^2q'+\text{etc.})\\ &+\mathcal{C}'^2q^2+\mathcal{C}''^2q'^2+\text{etc.}\end{aligned}$$

Soit

$$x=\frac{\mathcal{C}'^2q+\mathcal{C}''^2q'+\text{etc.}}{\mathcal{C}^2+\mathcal{C}'^2+\mathcal{C}''^2+\text{etc.}}+t;$$

la probabilité précédente deviendra

$$\frac{\int dt.c^{-(\mathcal{C}^2+\mathcal{C}'^2+\mathcal{C}''^2+\text{etc.}).t^2}}{\int dt.c^{-(\mathcal{C}^2+\mathcal{C}'^2+\mathcal{C}''^2+\text{etc.}).t^2}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans des limites données, et celle du dénominateur étant prise depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$. Cette dernière intégrale est

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\text{€}^2+\text{€}'^2+\text{€}''^2+\text{etc.}}}.$$

En faisant donc

$$t'=t.\sqrt{\text{€}^2+\text{€}'^2+\text{€}''^2+\text{etc.}};$$

la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\int dt'.c^{-t'^2}.$$

La valeur de t' la plus probable, est celle qui répond à t' nul; d'où il suit que la valeur de x la plus probable, est celle qui répond à $t=0$, ainsi la correction du premier résultat, que l'ensemble de toutes les observations s, s', s'', etc. donne avec le plus de probabilité, est

$$\frac{\text{€}'^2q+\text{€}''^2q'+\text{etc.}}{\text{€}^2+\text{€}'^2+\text{€}''^2+\text{etc.}}.$$

Cette correction ajoutée au résultat A, donne pour le résultat qu'il faut choisir,

$$\frac{A.\text{€}^2+(A+q).\text{€}'^2+(A+q').\text{€}''^2+\text{etc.}}{\text{€}^2+\text{€}'^2+\text{€}''^2+\text{etc.}}.$$

La correction précédente est celle qui rend un *minimum*, la fonction

$$(\text{€}.x)^2+(\text{€}'.\overline{x-q})^2+(\text{€}''.\overline{x-q'})^2+\text{etc.}$$

Or la plus grande ordonnée de la courbe des probabilités du premier résultat est, comme on vient de le voir, $\frac{\text{€}}{\sqrt{\pi}}$; celle de la courbe des probabilités du second résultat, est $\frac{\text{€}'}{\sqrt{\pi}}$, et ainsi de suite; le milieu qu'il faut choisir entre les divers résultats, est donc celui qui rend un *minimum*, la somme des carrés de l'erreur de chaque résultat, multipliée par la plus grande ordonnée de sa courbe de probabilité. Ainsi la loi du *minimum* des carrés des erreurs, devient nécessaire, lorsque l'on doit prendre un milieu entre des résultats donnés, chacun, par un grand nombre d'observations.

24. On a vu précédemment, que de toutes les manières de combiner les équations de condition, pour en former des équations finales linéaires, nécessaires à la détermination des élémens; la plus avantageuse est celle qui résulte de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations, du moins lorsque les observations sont en grand nombre. Si au lieu de considérer le *minimum* des carrés des erreurs, on considérait le *minimum* d'autres puissances des erreurs, ou même de toute autre fonction des erreurs; les équations finales cesseraient d'être linéaires, et leur résolution deviendrait impraticable, si les observations étaient en grand nombre. Cependant il est un cas qui mérite une attention particulière, en ce qu'il donne le système dans lequel la plus grande erreur, abstraction faite du signe, est moindre que dans tout autre système. Ce cas est celui du *minimum* des puissances infinies et paires des erreurs. Ne considérons ici que la correction d'un seul élément; et z exprimant cette correction, représentons, comme précédemment, les équations de condition, par la suivante,

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)}.z - \alpha^{(i)},$$

i pouvant varier depuis zéro jusqu'à $s-1$, s étant le nombre des observations. La somme des puissances $2n$ des erreurs, sera $S.(\alpha^{(i)}-p^{(i)}.z)^{2n}$, le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i. On peut supposer, dans cette somme, toutes les valeurs de $p^{(i)}$ positives; car si l'une d'elles était négative, elle deviendrait positive en changeant, comme on peut le faire, les signes des deux termes du binome élevé à la puissance $2n$, auquel elle correspond. Nous supposerons donc les quantités $\alpha-p.z$, $\alpha^{(1)}-p^{(1)}.z$, $\alpha^{(2)}-p^{(2)}.z$, etc., disposées de manière que les quantités p, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, etc. soient positives et croissantes. Cela posé, si $2n$ est infini, il est clair que le plus grand terme de la somme $S.(\alpha^{(i)}-p^{(i)}.z)^{2n}$, sera la somme entière, à moins qu'il n'y ait un ou plusieurs autres termes qui lui soient égaux, et c'est ce qui doit avoir lieu dans le cas du *minimum* de la somme. En effet, s'il n'y avait qu'une seule quantité la plus grande, abstraction faite du signe, telle que $a^{(i)}-p^{(i)}.z$; on pourrait la diminuer en faisant varier z convenablement, et alors la somme $S.(a^{(i)}-p^{(i)}.z)^{2n}$ diminuerait et ne serait pas un *minimum*. Il faut de plus que si $a^{(i)}-p^{(i)}.z$ et $a^{(i')}-p^{(i')}.z$ sont, abstraction faite du signe, les deux quantités les plus grandes et égales entre elles, elles soient de signe contraire. En effet, la somme $(a^{(i)}-p^{(i)}.z)^{2n}+(a^{(i')}-p^{(i')}.z)^{2n}$ devant être alors un *minimum*, sa différentielle $-2ndz.[p^{(i)}.(a^{(i)}-p^{(i)}.z)^{2n-1}+p^{(i')}.(a^{(i')}-p^{(i')}.z)^{2n-1}]$ doit être nulle, ce qui ne peut être lorsque n est infini, que dans le cas où $a^{(i)}-p^{(i)}.z$ et $a^{(i')}-p^{(i')}.z$ sont infiniment peu différens, et de signe contraire. S'il y a trois quantités les plus grandes, et égales entre elles abstraction faite du signe; on verra de la même manière que leurs signes ne peuvent être les mêmes.

Maintenant, considérons la suite

$$a^{(s-1)}-p^{(s-1)}.z,\ a^{(s-2)}-p^{(s-2)}.z,\quad a^{(s-3)}-p^{(s-3)}.z,\ldots a-p.z, \qquad (o)$$
$$-a+p.z,\ldots\ldots-a^{(s-3)}+p^{(s-3)}.z,\ -a^{(s-2)}+p^{(s-2)}.z,\ -a^{(s-1)}+p^{(s-1)}.z.$$

Si l'on suppose $z=-\infty$, le premier terme de la suite surpasse les suivans, et continue de les surpasser en faisant croître z, jusqu'au moment où il devient égal à l'un d'eux. Alors celui-ci, par l'accroissement de z, devient le plus grand de tous; et à mesure que l'on fait croître z, il continue toujours de surpasser ceux qui le précèdent. Pour déterminer ce terme, on formera la suite des quotiens

$$\frac{a^{(s-1)}-a^{(s-2)}}{p^{(s-1)}-p^{(s-2)}},\ \frac{a^{(s-1)}-a^{(s-3)}}{p^{(s-1)}-p^{(s-3)}},\ldots\frac{a^{(s-1)}-a}{p^{(s-1)}-p},\ \frac{a^{(s-1)}+a}{p^{(s-1)}+p},\ldots\frac{a^{(s-1)}+a^{(s-1)}}{p^{(s-1)}+p^{(s-1)}}.$$

Supposons que $\frac{a^{(s-1)}-a^{(r)}}{p^{(s-1)}-p^{(r)}}$ soit le plus petit de ces quotiens en ayant égard au signe, c'est-à-dire en regardant une quantité négative plus grande, comme plus petite qu'une autre quantité négative moindre. S'il y a plusieurs quotiens les plus petits et égaux, nous considérerons celui qui se rapporte au terme le plus éloigné du premier dans la suite (o); ce terme sera le plus grand de tous, jusqu'au moment où, par l'accroissement de z, il devient égal à l'un des suivans,

suivans, qui commence alors à être le plus grand. Pour déterminer ce nouveau terme, on formera la nouvelle suite de quotiens

$$\frac{\alpha^{(r)}-\alpha^{(r-1)}}{p^{(r)}-p^{(r-1)}}, \quad \frac{\alpha^{(r)}-\alpha^{(r-2)}}{p^{(r)}-p^{(r-2)}}, \ldots \frac{\alpha^{(r)}-\alpha}{p^{(r)}-p}, \quad \frac{\alpha^{(r)}+\alpha}{p^{(r)}+p}, \quad \text{etc.};$$

le terme de la suite (o), auquel répond le plus petit de ces quotiens, sera le nouveau terme. On continuera ainsi jusqu'à ce que l'un des deux termes qui deviennent égaux et les plus grands, soit dans la première moitié de la suite (o), et l'autre dans la seconde moitié. Soient $\alpha^{(i)}-p^{(i)}.z$ et $-\alpha^{(i')}+p^{(i')}.z$ ces deux termes; alors la valeur de z qui correspond au système du *minimum* de la plus grande des erreurs, abstraction faite du signe, est

$$z=\frac{\alpha^{(i)}+\alpha^{(i')}}{p^{(i)}+p^{(i')}}.$$

S'il y a plusieurs élémens à corriger, les équations de condition qui déterminent leurs corrections, renferment plusieurs inconnues, et la recherche du système de correction, dans lequel la plus grande erreur est, abstraction faite du signe, plus petite que dans tout autre système, devient plus compliquée. J'ai considéré ce cas d'une manière générale, dans le troisième Livre de la Mécanique Céleste. J'observerai seulement ici, qu'alors la somme des puissances $2n$ des erreurs des observations est, comme dans le cas d'une seule inconnue, un *minimum*, lorsque $2n$ est infini; d'où il est facile de conclure que dans le système dont il s'agit, il doit y avoir autant d'erreurs plus une, égales, et les plus grandes abstraction faite du signe, qu'il y a d'élémens à corriger. On conçoit que les résultats correspondans à $2n$ égal à un grand nombre, doivent peu différer de ceux que donne $2n$ infini. Il n'est pas même nécessaire pour cela, que la puissance $2n$ soit fort élevée, et j'ai reconnu par beaucoup d'exemples, que dans le cas même où cette puissance ne surpasse pas le carré, les résultats diffèrent peu de ceux que donne le système du *minimum* des plus grandes erreurs; ce qui est un nouvel avantage de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations.

Depuis longtems, les géomètres prennent un milieu arithmétique entre leurs observations; et pour déterminer les élémens qu'ils

44

veulent connaître, ils choisissent les circonstances les plus favorables pour cet objet, savoir, celles dans lesquelles les erreurs des observations altèrent le moins qu'il est possible, la valeur de ces élémens. Mais Côtes est, si je ne me trompe, le premier qui ait donné une règle générale pour faire concourir à la détermination d'un élément, plusieurs observations, proportionnellement à leur influence. En considérant chaque observation comme une fonction de l'élément, et regardant l'erreur de l'observation comme une différentielle infiniment petite; elle sera égale à la différentielle de la fonction, prise par rapport à cet élément. Plus le coefficient de la différentielle de l'élément sera considérable, moins il faudra faire varier l'élément, pour que le produit de sa variation, par ce coefficient, soit égal à l'erreur de l'observation; ce coefficient exprimera donc l'influence de l'observation sur la valeur de l'élément. Cela posé, Côtes représente toutes les valeurs de l'élément, données par chaque observation, par les parties d'une droite indéfinie, toutes ces parties ayant une commune origine. Il conçoit ensuite, à leurs autres extrémités, des poids proportionnels aux influences respectives des observations. La distance de l'origine commune des parties, au centre ~~commun de~~ gravité de tous ces poids, est la valeur qu'il choisit pour l'élément.

Reprenons l'équation de condition du n° 20,

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)}.z - \alpha^{(i)},$$

$\varepsilon^{(i)}$ étant l'erreur de l'observation $(i+1)^{ième}$, et z étant la correction de l'élément déjà connu à fort peu près; $p^{(i)}$ que l'on peut toujours supposer positif, exprimera l'influence de l'observation correspondante. $\frac{\alpha^{(i)}}{p^{(i)}}$ étant la valeur de z résultante de l'observation, la règle de Côtes revient à multiplier cette valeur par $p^{(i)}$, à faire une somme de tous les produits relatifs aux diverses valeurs, et à la diviser par la somme de tous les $p^{(i)}$, ce qui donne

$$z = \frac{S.\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)}}.$$

C'était en effet la correction adoptée par les observateurs, avant l'usage de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations.

Cependant on ne voit pas que depuis cet excellent géomètre, on ait employé sa règle, jusqu'à Euler qui dans sa première pièce de Jupiter et Saturne, me paraît s'être servi le premier, des équations de condition, pour déterminer les élemens du mouvement elliptique de ces deux planètes. Presqu'en même tems, Tobie Mayer en fit usage dans ses belles recherches sur la libration de la lune, et ensuite pour former ses Tables lunaires. Depuis, les meilleurs astronomes ont suivi cette méthode, et le succès des Tables qu'ils ont construites à son moyen, en a constaté l'avantage.

Quand on n'a qu'un élément à déterminer, cette méthode ne laisse aucun embarras; mais lorsque l'on doit corriger à la fois plusieurs élémens, il faut avoir autant d'équations finales formées par la réunion de plusieurs équations de condition, et au moyen desquelles on détermine par l'élimination, les corrections des élémens. Mais quelle est la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition, pour former les équations finales? C'est ici que les observateurs s'abandonnaient à des tâtonnemens arbitraires qui devaient les conduire à des résultats différens, quoique déduits des mêmes observations. Pour éviter ces tâtonnemens, M. Legendre eut l'idée simple de considérer la somme des carrés des erreurs des observations, et de la rendre un *minimum*; ce qui fournit directement autant d'équations finales, qu'il y a d'élémens à corriger. Ce savant géomètre est le premier qui ait publié cette méthode; mais on doit à M. Gauss la justice d'observer qu'il avait eu, plusieurs années avant cette publication, la même idée dont il faisait un usage habituel, et qu'il avait communiquée à plusieurs astronomes. M. Gauss, dans sa Théorie du Mouvement elliptique, a cherché à rattacher cette méthode à la Théorie des Probabilités, en faisant voir que la même loi des erreurs des observations, qui donne généralement la règle du milieu arithmétique entre plusieurs observations, admise par les observateurs, donne pareillement la règle des moindres carrés des erreurs des observations; et c'est ce qu'on a vu dans le n° 23. Mais comme rien ne prouve que la première de ces règles donne le résultat le plus avantageux, la même incertitude existe par rapport à la seconde. La recherche de la manière la plus avantageuse de former les équations finales, est sans doute une des plus utiles de la Théorie des Probabilités: son importance dans la physique et l'astronomie, me porta à m'en occuper. Pour cela, je considérai que toutes les manières de combiner les équations de condition, pour en former une équation finale linéaire, revenaient à les multiplier respectivement par des facteurs qui étaient nuls relativement aux équations que l'on n'employait point, et à faire une somme de tous ces produits; ce qui donne une première équation finale. Un second système de facteurs donne une seconde équation finale, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait autant d'équations finales, que d'élémens à corriger. Maintenant, il est visible qu'il faut choisir les systèmes de facteurs, de sorte que l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur chaque élément, soit un *minimum;* l'erreur moyenne étant la somme des produits de chaque erreur par sa probabilité. Lorsque les observations sont en petit nombre, le choix de ces systèmes dépend de la loi des erreurs de chaque observation. Mais si l'on considère un grand nombre ~~d'observations~~, ce qui a lieu le plus souvent ~~dans~~ les recherches astronomiques; ce choix devient indépendant de cette loi; et l'on a vu dans ce qui précède, que l'analyse conduit alors directement aux résultats de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations. Ainsi cette méthode qui n'offrait d'abord que l'avantage de fournir, sans tâtonnement, les équations finales nécessaires à la correction des élémens, donne en même tems les corrections les plus précises, du moins lorsqu'on ne veut employer que des équations finales qui soient linéaires, condition indispensable, lorsque l'on considère à la fois un grand nombre d'observations; autrement, l'élimination des inconnues et leur détermination seraient impraticables.

CHAPITRE V.

Application du Calcul des Probabilités, à la recherche des phénomènes et de leurs causes.

25. Les phénomènes de la nature se présentent le plus souvent accompagnés de tant de circonstances étrangères ; un si grand nombre de causes perturbatrices y mêlent leur influence, qu'il est très-difficile, lorsqu'ils sont très-petits, de les reconnaître. On ne peut alors y parvenir, qu'en multipliant les observations, afin que les effets étrangers venant à se détruire, le résultat moyen des observations ne laisse plus apercevoir que ces phénomènes. On conçoit par ce qui précède, que cela n'a lieu rigoureusement, que dans le cas d'un nombre infini d'observations. Dans tout autre cas, les phénomènes ne sont indiqués par les résultats moyens, que d'une manière probable, mais qui l'est d'autant plus, que les observations sont en plus grand nombre. La recherche de cette probabilité est donc très-importante pour la physique, l'astronomie, et généralement pour toutes les sciences naturelles. On va voir qu'elle rentre dans les méthodes que nous venons d'exposer. Dans le chapitre précédent, l'existence du phénomène était certaine ; son étendue seule a été l'objet du Calcul des Probabilités : ici l'existence du phénomène et son étendue, sont l'objet de ce calcul.

Prenons pour exemple, la variation diurne du baromètre, que l'on observe entre les tropiques, et qui devient sensible même dans nos climats, lorsque l'on choisit et que l'on multiplie convenablement les observations. On a reconnu qu'en général, vers neuf heures du matin, le baromètre est plus élevé que vers quatre heures du soir ; ensuite il remonte jusque vers onze heures du soir, et il redescend jusque vers quatre heures du matin, pour revenir à son *maximum* de hauteur, vers neuf heures. Supposons que l'on ait observé la hauteur du baromètre vers neuf heures du matin et vers quatre heures du soir, pendant le nombre s de jours; et pour éviter la trop grande influence des causes perturbatrices, choisissons ces jours de manière que dans l'intervalle de neuf heures à quatre heures, le baromètre n'ait pas varié au-delà de quatre millimètres. Supposons ensuite qu'en faisant la somme des s hauteurs du matin, et la somme des s hauteurs du soir, la première de ces sommes surpasse la seconde de la quantité q; cette différence indiquera une cause constante qui tend à élever le baromètre vers neuf heures du matin, et à l'abaisser vers quatre heures du soir. Pour déterminer avec quelle probabilité cette cause est indiquée, concevons que cette cause n'existe point, et que la différence observée q, résulte des causes perturbatrices accidentelles, et des erreurs des observations. La probabilité qu'alors la différence observée entre les sommes des hauteurs du matin et du soir, doit être au-dessous de q, est, par le n° 18, égale à

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{k\pi}{4k''}}} \int dr \cdot c^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = -\infty$ jusqu'à $r = \frac{q}{a.\sqrt{s}}$, k et k'' étant des constantes dépendantes de la loi de probabilité des différences entre les hauteurs du matin et du soir, et $\pm a$ étant les limites de ces différences, a étant ici égal à quatre millimètres. $\frac{k}{k''}$ étant au moins égal à six, comme on l'a vu dans le n° 20 $\frac{k}{4k''}$ ne peut pas être supposé moindre que $\frac{3}{2}$; en faisant donc $s = 400$, et supposant l'étendue de la variation diurne, d'un millimètre, ce qui est à peu près ce que M. Ramond a trouvé dans nos climats, par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, on aura $q = 400^{mi}$. Ainsi $r = 5$, et $\frac{kr^2}{4k''}$ est au moins égal à $37,5$; en faisant donc

$$t^2 = \frac{kr^2}{4k''},$$

la probabilité précédente devient au moins

$$1 - \frac{\int dt . c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = \sqrt{37,5}$ jusqu'à $t = \infty$. Cette intégrale est à fort peu près, par le n° 27 du premier Livre,

$$1 - \frac{c^{-37,5}}{2\sqrt{37,5 . \pi}},$$

et elle approche tellement de l'unité ou de la certitude, qu'il est extrêmement probable que s'il n'existait point de cause constante de l'excès observé de la somme des hauteurs barométriques du matin, sur celles des hauteurs du soir, cet excès serait plus petit que 400^{mi}; il indique donc avec une extrême vraisemblance, l'existence d'une cause constante qui l'a produit.

Le phénomène d'une variation diurne étant ainsi bien constaté, déterminons la valeur la plus probable de son étendue, et l'erreur que l'on peut commettre sur son évaluation. Supposons pour cela, que cette valeur soit $\frac{q}{s} \pm \frac{ar}{\sqrt{s}}$; la probabilité que l'étendue de la variation diurne du matin au soir, sera comprise dans ces limites, est, par le n° 18,

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{k\pi}{4k''}}} . \int dr . c^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$.

On peut éliminer $\frac{k''}{k}$, en observant que par le n° 20, cette fraction est à peu près égale à $\frac{S . \varepsilon^{(i)2}}{2a^2 . s}$; $\pm \varepsilon^{(i)}$ étant la différence de $\frac{q}{s}$ à l'étendue observée le $(i+1)^{ième}$ jour, et le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$; en faisant donc

$$ar = t . \sqrt{\frac{2S . \varepsilon^{(i)2}}{s}},$$

la probabilité que l'étendue de la variation diurne du matin au soir, est comprise dans les limites $\frac{q}{s} \pm \frac{t}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{\frac{2S.\varepsilon^{(i)2}}{s}}$, sera $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dt . c^{-t^2}$, l'intégrale étant prise depuis t nul.

La variation diurne des hauteurs du baromètre, dépend uniquement du soleil; mais ces hauteurs sont encore affectées par les marées aériennes que produit l'attraction du soleil et de la lune sur notre atmosphère, et dont j'ai donné la théorie dans le quatrième Livre de la Mécanique Céleste. Il est donc nécessaire de considérer à la fois ces deux variations, et de déterminer leurs grandeurs et leurs époques respectives, en formant des équations de condition analogues à celles dont les astronomes font usage, pour corriger les élémens des mouvemens célestes. Ces variations étant principalement sensibles à l'équateur, et les causes perturbatrices y étant extrêmement petites; on pourra, au moyen d'excellens baromètres, les déterminer avec une grande précision; et je ne doute point que l'on ne reconnaisse alors, dans l'ensemble d'un très-grand nombre d'observations, les lois qu'indique la théorie de la pesanteur dans les ~~marées~~ atmosphériques, et qui se manifestent ~~d'une~~ manière si frappante dans les observations des marées de l'Océan, que j'ai discutées avec étendue, dans le Livre cité de la Mécanique Céleste.

On voit, par ce qui précède, que l'on peut reconnaître l'effet très-petit d'une cause constante, par une longue suite d'observations dont les erreurs peuvent excéder cet effet lui-même. Mais alors, il faut avoir soin de varier les circonstances de chaque observation, de manière que le résultat moyen de leur ensemble, n'en soit point altéré sensiblement, et soit presqu'entièrement l'effet de la cause dont il s'agit: il faut ensuite multiplier les observations, jusqu'à ce que l'analyse indique une très-grande probabilité que l'erreur de ce résultat sera comprise dans des limites très-rapprochées.

Supposons, par exemple, que l'on veuille reconnaître par l'observation, la petite déviation à l'est, produite par la rotation de la terre, dans la chute des corps. J'ai fait voir dans le dixième Livre de la Mécanique Céleste, que si du sommet d'une tour fort élevée, on abandonne

abandonne un corps à sa pesanteur; il retombera sur un plan horizontal passant par le pied de la tour, à une petite distance à l'est du point de contact de ce plan avec une boule suspendue par un fil dont le point de suspension est celui du départ du corps. J'ai donné dans le Livre cité, l'expression de cette déviation, et il en résulte qu'en faisant abstraction de la résistance de l'air, elle est uniquement vers l'est; qu'elle est proportionnelle au cosinus de la latitude, et à la racine carrée du cube de la hauteur, et qu'à la latitude du point de départ, elle s'élève à 5,1 millimètres, lorsque la hauteur de la tour est de 50 mètres. La résistance de l'air change ce dernier résultat: j'en ai donné pareillement l'expression dans ce cas, au Livre cité.

On a déjà fait un grand nombre d'expériences pour confirmer, par ce moyen, le mouvement de rotation de la terre, qui d'ailleurs est démontré par tant d'autres phénomènes, que cette confirmation devient inutile. Les petites erreurs de ces expériences très-délicates, ont souvent excédé l'effet que l'on voulait déterminer; et ce n'est qu'en multipliant considérablement les expériences, que l'on peut ainsi constater son existence et fixer sa valeur. Nous allons soumettre cet objet à l'analyse des probabilités.

Si l'on prend pour origine des coordonnées, le point de contact du plan et de la boule suspendue par un fil dont le sommet de suspension est celui du départ d'une balle que l'on fait tomber; si l'on marque ensuite sur ce plan, les divers points où la balle va toucher le plan dans chaque expérience; en déterminant le centre commun de gravité de ces points, la ligne menée de l'origine des coordonnées à ce centre, déterminera le sens et la quantité moyenne dont la balle s'est écartée de cette origine; et l'un et l'autre seront déterminés avec d'autant plus d'exactitude, que les expériences seront plus nombreuses et plus précises.

Considérons maintenant, comme axe des abscisses, la ligne menée de l'origine des coordonnées, à l'est; et désignons par $x, x^{(1)}, x^{(2)} \ldots x^{(s-1)}, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(s-1)}$ les coordonnées respectives des points déterminés par les expériences dont le nombre est s. En exprimant par X et Y les coordonnées du centre de gravité de tous ces points; on aura

$$X = S.\frac{x^{(i)}}{s}, \quad Y = S.\frac{y^{(i)}}{s},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i, depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$. Cela posé, en désignant par $\pm a$ les limites des erreurs de chaque expérience, dans le sens des x; la probabilité que l'écart moyen de la balle, du point origine des coordonnées, est compris dans les limites $X \pm \frac{ar}{\sqrt{s}}$, sera, par le n° 18,

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{k\pi}{4k''}}}.\int dr.c^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

k et k'' étant des constantes qui dépendent de la loi de facilité des erreurs de chaque expérience dans le sens des x.

Pareillement, $\pm a'$ étant les limites des erreurs de chaque expérience dans le sens des y; la probabilité que la valeur moyenne de la déviation dans le sens des y, est comprise dans les limites $Y \pm \frac{a'r}{\sqrt{s}}$, sera

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{\bar{k}\pi}{4\bar{k}''}}}.\int dr.c^{-\frac{\bar{k}r^2}{4\bar{k}''}},$$

$\bar{k}$ et $\bar{k}''$ étant des constantes dépendantes de la loi des erreurs des expériences dans le sens des y. Les fractions $\frac{k}{4k''}$ et $\frac{\bar{k}}{4\bar{k}''}$ étant, par ce qui précède, plus grandes que $\frac{3}{2}$; on pourra juger du degré d'approximation et de probabilité des valeurs de X et de Y, et déterminer la probabilité de l'écart au sud et au nord, indiqué par les observations.

L'analyse précédente peut encore être appliquée à la recherche des petites inégalités des mouvemens célestes, dont l'étendue est comprise dans les limites, soit des erreurs des observations, soit des perturbations produites par les causes accidentelles. C'est à peu près ainsi que Ticho-Brahé reconnut que l'équation du tems, relative au soleil et aux planètes, n'était point applicable à la lune, et qu'il fallait en retrancher la partie dépendante de l'anomalie du soleil, et même une quantité beaucoup plus grande ; ce qui conduisit Flamsteed à la découverte de l'inégalité lunaire que l'on nomme *équation annuelle*. C'est encore dans les résultats d'un grand nombre d'observations, que Mayer reconnut que l'équation de la précession, relative aux planètes et aux étoiles, n'était point applicable à la lune ; il évalua à 12″ décimales environ, la quantité dont il fallait alors la diminuer, quantité que Mason éleva ensuite à près de 24″, par la comparaison de toutes les observations de Bradley, et que M. Burg a réduite à 21″, au moyen d'un bien plus grand nombre d'observations de Maskeline. Cette inégalité, quoiqu'indiquée par les observations, était négligée par le plus grand nombre des astronomes ; parce qu'elle ne paraissait pas résulter de la théorie de la pesanteur universelle. Mais ayant soumis son existence au calcul des probabilités, elle me parut indiquée avec une probabilité si forte, que je crus devoir en rechercher la cause. Je vis bientôt qu'elle ne pouvait résulter que de l'ellipticité du sphéroïde terrestre, que l'on avait négligée jusqu'alors dans la théorie du mouvement lunaire, comme ne devant y produire que des termes insensibles ; et j'en conclus qu'il était extrêmement vraisemblable que ces termes devenaient sensibles par les intégrations successives des équations différentielles. Ayant déterminé ces termes par une analyse particulière, que j'ai exposée dans le septième Livre de la Mécanique Céleste ; je découvris d'abord l'inégalité du mouvement de la lune en latitude, et qui est proportionnelle au sinus de sa longitude : par son moyen, je reconnus que la théorie de la pesanteur donne effectivement la diminution observée par les astronomes cités, dans l'inégalité de la précession, applicable au mouvement lunaire en longitude. La quantité de cette diminution, et le coefficient de l'inégalité en latitude dont je viens de parler, sont donc très-propres à déterminer l'aplatissement de la terre. Ayant fait part de mes recherches à M. Burg qui s'occupait alors de ses Tables de la Lune ; je le priai de déterminer avec un soin particulier, les coefficiens de ces deux inégalités. Par un concours remarquable, les coefficiens qu'il a déterminés, s'accordent à donner à la terre, l'aplatissement $\frac{1}{305}$, aplatissement qui diffère peu du milieu conclu des mesures des degrés du méridien et du pendule; mais qui vu l'influence des erreurs des observations et des causes perturbatrices, sur ces mesures, me paraît plus exactement déterminé par les inégalités lunaires. M. Burckhardt qui vient de former de nouvelles Tables de la Lune, très-précises, sur l'ensemble des observations de Bradley et de Maskeline, a trouvé le même coefficient que M. Burg, pour l'inégalité lunaire en latitude : il trouve un trente-quatrième à ajouter au coefficient de l'inégalité en longitude, ce qui réduit l'aplatissement à $\frac{1}{301}$, par cette inégalité. La différence très-légère de ces résultats, prouve qu'en fixant à $\frac{1}{304}$, cet aplatissement, l'erreur est insensible.

L'analyse des probabilités m'a conduit pareillement à la cause des grandes irrégularités de Jupiter et de Saturne. La difficulté d'en reconnaître la loi, et de les ramener à la théorie de l'attraction universelle, avait fait conjecturer qu'elles étaient dues aux actions passagères des comètes; mais un théorème auquel j'étais parvenu sur l'attraction mutuelle des planètes, me fit rejeter cette hypothèse, en m'indiquant l'attraction mutuelle des deux planètes, comme la vraie cause de ces irrégularités. Suivant ce théorème, si le mouvement de Jupiter s'accélère en vertu de quelque grande inégalité à très-longue période; celui de Saturne doit se ralentir de la même manière, et ce ralentissement est à l'accélération de Jupiter, comme le produit de la masse de cette dernière planète, par la racine carrée du grand axe de son orbite, est au produit semblable relatif à Saturne. Ainsi en prenant pour unité, le ralentissement de Saturne, l'accélération correspondante de Jupiter doit être 0,40884; or Halley avait trouvé, par la comparaison des observations modernes aux anciennes, que l'accélération de Jupiter correspondait au ralentissement de Saturne, et qu'elle était 0,44823 de ce ralentissement. Ces résultats, si bien d'accord avec la théorie, me portèrent à penser qu'il existe dans les mouvemens de ces planètes, deux grandes inégalités correspondantes et de signe contraire, qui produisaient ces phénomènes. J'avais reconnu que l'action mutuelle des planètes ne pouvait point occasionner dans leurs moyens mouvemens, des variations toujours croissantes, ou périodiques, mais d'une période indépendante de leur configuration mutuelle; c'était donc dans le rapport des moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne, que je devais chercher celle dont il s'agit; or en examinant ce rapport, il est facile de reconnaître que deux fois le moyen mouvement de Jupiter ne surpasse que d'une quantité très-petite, cinq fois celui de Saturne; ainsi les inégalités qui dépendent de cette différence, et dont la période est d'environ neuf siècles, peuvent devenir fort grandes par les intégrations successives qui leur donnent pour diviseur, le carré du coefficient très-petit du tems, dans l'argument de ces inégalités. En fixant vers l'époque de Tycho-Brahé, l'origine de cet argument; je voyais que Halley avait dû trouver par la comparaison des observations modernes aux anciennes, les altérations qu'il avait observées; tandis que la comparaison des observations modernes entre elles, devait présenter des altérations contraires et pareilles à celles que Lambert avait remarquées. L'existence des inégalités dont je viens de parler, me parut donc extrêmement vraisemblable, et je n'hésitai point à entreprendre le calcul long et pénible, nécessaire pour m'en assurer complettement. Le résultat de ce calcul, non-seulement les confirma, mais il me fit connaître beaucoup d'autres inégalités dont l'ensemble a porté les Tables de Jupiter et de Saturne, au degré de précision des observations mêmes.

On voit par là combien il faut être attentif aux indications de la nature, lorsqu'elles sont le résultat d'un grand nombre d'observations, quoique d'ailleurs elles soient inexplicables par les moyens connus. J'engage ainsi les astronomes à suivre avec une attention particulière, l'inégalité lunaire à longue période, qui dépend principalement du mouvement du périgée de la lune, ajouté au double du moyen mouvement de ses nœuds; inégalité dont j'ai parlé dans le septième Livre de la Mécanique Céleste, et que déjà les observations indiquent avec beaucoup de vraisemblance. Les cas précédens ne sont pas les seuls dans lesquels les observations ont redressé les analystes. Le mouvement du périgée lunaire et l'accélération du mouvement de la lune, qui n'étaient point donnés d'abord par les approximations, ont fait sentir la nécessité de rectifier ces approximations. Ainsi, l'on peut dire que la nature elle-même a concouru à la perfection analytique des théories fondées sur le principe de la pesanteur universelle ; et c'est à mon sens, une des plus fortes preuves de la vérité de ce principe admirable.

On peut encore, par l'analyse des probabilités, vérifier l'existence ou l'influence de certaines causes dont on a cru remarquer l'action sur les êtres organisés. De tous les instrumens que nous pouvons employer pour connaître les agens imperceptibles de la nature, les plus sensibles sont les nerfs, surtout lorsque leur sensibilité est exaltée par des circonstances particulières. C'est à leur moyen, que l'on a découvert la faible électricité que développe le contact de deux métaux hétérogènes ; ce qui a ouvert un champ vaste aux recherches des physiciens et des chimistes. Les phénomènes singuliers qui résultent de l'extrême sensibilité des nerfs dans quelques individus, ont donné naissance à diverses opinions sur l'existence d'un nouvel agent que l'on a nommé *magnétisme animal*, sur l'action du magnétisme ordinaire et l'influence du soleil et de la lune, dans quelques affections nerveuses ; enfin, sur les impressions que peut faire naître la proximité des métaux ou d'une eau courante. Il est naturel de penser que l'action de ces causes est très-faible, et peut facilement être troublée par un grand nombre de circonstances accidentelles ; ainsi de ce que, dans quelque cas, elle ne s'est point manifestée, on ne doit pas conclure qu'elle n'existe jamais. Nous sommes si éloignés de connaître tous les agens de la nature, qu'il serait peu philosophique de nier l'existence des phénomènes, uniquement parce qu'ils sont inexplicables dans l'état actuel de nos connaissances. Seulement nous devons les examiner avec une attention d'autant plus scrupuleuse, qu'il paraît plus difficile de les admettre ; et c'est ici que l'analyse des probabilités devient indispensable pour déterminer jusqu'à quel point il faut multiplier les observations ou les expériences, pour avoir en faveur de l'existence des agens qu'elles semblent indiquer, une probabilité supérieure à toutes les raisons que l'on peut avoir d'ailleurs de la rejeter.

La même analyse peut être étendue aux divers résultats de la médecine et de l'économie politique, et même à l'influence des causes morales; car l'action de ces causes, lorsqu'elle est répétée un grand nombre de fois, offre dans ses résultats autant de régularité, que les causes physiques.

On peut encore déterminer par l'analyse des probabilités, comparée à un grand nombre d'expériences, l'avantage et le désavantage des joueurs, dans les cas dont la complication rend impossible leur recherche directe. Tel est l'avantage de la main, au jeu du piquet : telles sont encore les possibilités respectives d'amener les différentes faces d'un prisme droit rectangulaire, dont la longueur, la largeur et la hauteur sont inégales ; lorsque le prisme projeté en l'air, retombe sur un plan horizontal.

Enfin, on pourrait faire usage du calcul des probabilités, pour rectifier les courbes ou carrer leurs surfaces. Sans doute, les géomètres n'emploieront pas ce moyen ; mais comme il me donne lieu de parler d'un genre particulier de combinaisons du hasard, je vais l'exposer en peu de mots.

Imaginons un plan divisé par des lignes parallèles, équidistantes de la quantité a ; concevons de plus un cylindre très-étroit dont $2r$ soit la longueur, supposée égale ou moindre que a. On demande la probabilité qu'en le projetant, il rencontrera une des divisions du plan.

Elevons sur un point quelconque d'une de ces divisions, une perpendiculaire prolongée jusqu'à la division suivante. Supposons que le centre du cylindre soit sur cette perpendiculaire, et à la hauteur y au-dessus de la première de ces deux divisions. En faisant tourner le cylindre autour de son centre, et nommant φ l'angle que le cylindre fait avec la perpendiculaire, au moment où il rencontre cette division ; 2φ sera la partie de la circonférence décrite par chaque extrémité du cylindre, dans laquelle il rencontre la division ; la somme de toutes ces parties sera donc $4\int \varphi dy$, ou $4\varphi y - 4\int y d\varphi$; or on a $y = r.\cos\varphi$; cette somme est donc

$$4\varphi.y - 4r.\sin\varphi + \text{constante}.$$

Pour déterminer cette constante, nous observerons que l'intégrale doit s'étendre depuis y nul jusqu'à $y = r$, et par conséquent depuis

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\varphi = 0$, ce qui donne

$$\text{constante} = 4r;$$

ainsi la somme dont il s'agit est $4r$. Depuis $y = a - r$ jusqu'à $y = a$, le cylindre peut rencontrer la division suivante, et il est visible que la somme de toutes les parties relatives à cette rencontre, est encore $4r$; $8r$ est donc la somme de toutes les parties relatives à la rencontre de l'une ou de l'autre des divisions par le cylindre, dans le mouvement de son centre le long de la perpendiculaire. Mais le nombre de tous les arcs qu'il décrit en tournant en entier sur lui-même, à chaque point de cette perpendiculaire, est $2a\pi$; c'est le nombre de toutes les combinaisons possibles; la probabilité de la rencontre d'une des divisions du plan par le cylindre, est donc $\frac{4r}{a\pi}$. Si l'on projette un grand nombre de fois ce cylindre, le rapport du nombre de fois où le cylindre rencontrera l'une des divisions du plan, au nombre total des projections, sera par le n° 16, à très-peu près, la valeur de $\frac{4r}{a\pi}$, ce qui fera connaître la valeur de la circonférence 2π. On aura, par le même numéro, la probabilité que l'erreur de cette valeur sera comprise dans des limites données; et il est facile de voir que le rapport $\frac{8r}{a\pi}$ qui, pour un nombre donné de projections, rend l'erreur à craindre la plus petite, est l'unité; ce qui donne la longueur du cylindre égale à l'intervalle des divisions, multiplié par le rapport de la circonférence à quatre diamètres.

Concevons maintenant le plan précédent divisé encore par des lignes perpendiculaires aux précédentes, et équidistantes d'une quantité b égale ou plus grande que la longueur $2r$ du cylindre. Toutes ces lignes formeront avec les premières, une suite de rectangles dont b sera la longueur et a la hauteur. Considérons un de ces rectangles; supposons que dans son intérieur, on mène à la distance r de chaque côté, des lignes qui lui soient parallèles. Elles formeront d'abord un rectangle intérieur, dont $b - 2r$ sera la longueur, et $a - 2r$ la hauteur; ensuite deux petits rectangles, dont r sera la hauteur, et $b - 2r$ la longueur; puis deux autres petits

petits rectangles dont r sera la longueur, et $a-2r$ la hauteur; enfin, quatre petits carrés dont les côtés seront égaux à r.

Tant que le centre du cylindre sera placé dans le rectangle intérieur, le cylindre en tournant sur son centre, ne rencontrera jamais les côtés du grand rectangle.

Lorsque le centre du cylindre sera placé dans l'intérieur d'un des rectangles dont r est la hauteur et $b-2r$ la longueur; il est facile de voir par ce qui précède, que le produit de $8r$, par la longueur $b-2r$, sera le nombre des combinaisons correspondantes, dans lesquelles le cylindre rencontrera l'un ou l'autre des côtés b du grand rectangle. Ainsi $8r.(b-2r)$ sera le nombre total des combinaisons correspondantes aux cas dans lesquels le centre du cylindre étant placé dans l'un ou l'autre de ces petits rectangles, le cylindre rencontre le contour du grand rectangle. Par la même raison, $8r.(a-2r)$ sera le nombre total des combinaisons dans lesquelles le centre du cylindre étant placé dans l'intérieur des petits rectangles dont r et $a-2r$ sont les dimensions, le cylindre rencontre le contour du grand rectangle.

Il nous reste à considérer les quatre petits carrés. Soit $ABCD$ l'un d'eux. De l'angle A commun à ce carré et au grand rectangle, comme centre, et du rayon r, décrivons un quart de circonférence, se terminant aux points B et D. Tant que le centre du cylindre sera compris dans le quart de cercle formé par cet arc, le cylindre en tournant, rencontrera dans toutes ses positions, le contour du grand rectangle; le nombre des combinaisons dans lesquelles cela aura lieu, est donc égal au produit de 2π par la surface du quart de cercle, et par conséquent il est égal à $\frac{\pi^2.r^2}{2}$. Si le centre du cylindre est dans la partie du carré qui est au-delà du quart de cercle; le cylindre en tournant autour de son centre, pourra rencontrer l'un ou l'autre des deux côtés AB et AD prolongés, sans jamais les rencontrer tous deux à la fois. Pour déterminer le nombre des combinaisons relatives à cette rencontre, je conçois sur un point quelconque du côté AB, distant de x du point A, une perpendiculaire y dont l'extrémité soit au-delà du quart de cercle. Je place le centre du cylindre sur cette extrémité de laquelle j'abaisse quatre droites égales à r, et dont deux aboutissent sur le côté AB prolongé, si cela est nécessaire, et deux autres sur le côté AD pareillement prolongé. Je nomme 2φ l'angle compris entre les deux premières lignes, et $2\varphi'$ l'angle compris entre les deux secondes. Il est visible que le cylindre en tournant sur son centre, rencontrera le côté AB prolongé, tant qu'une de ses moitiés sera dans l'angle 2φ, et qu'il rencontre le côté AD prolongé, tant qu'une de ses moitiés sera dans l'angle $2\varphi'$; le nombre total des combinaisons dans lesquelles le cylindre rencontrera l'un ou l'autre de ces côtés, est donc $4.(\varphi+\varphi')$; ainsi ce nombre, relativement à la partie du carré, extérieure au quart de cercle, est

$$4\int(\varphi+\varphi').dx.dy;$$

or on a évidemment,

$$x=r.\cos\varphi', \quad y=r.\cos\varphi;$$

l'intégrale précédente devient ainsi,

$$4r^2.\int(\varphi+\varphi').d\varphi.d\varphi'.\sin\varphi\,\sin\varphi';$$

et il est facile de voir que l'intégrale relative à φ', doit être prise depuis $\varphi'=0$ jusqu'à $\varphi'=\frac{\pi}{2}-\varphi$, et que l'intégrale relative à φ doit être prise depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{\pi}{2}$; ce qui donne $\frac{1}{2}r^2.(12-\pi^2)$ pour cette intégrale. En lui ajoutant $\frac{\pi^2r^2}{2}$, on aura le nombre des combinaisons relatives au quarré; et en quadruplant ce nombre, et le réunissant aux nombres précédens des combinaisons relatives à la rencontre du contour du grand rectangle, par le cylindre; on aura, pour le nombre total des combinaisons,

$$8.(a+b).r-8r^2.$$

Mais le nombre total des combinaisons possibles, est évidemment égal à 2π multiplié par la surface ab du grand rectangle; la probabilité de la rencontre des divisions du plan par le cylindre, est donc

$$\frac{4.(a+b).r-4r^2}{ab.\pi}.$$

CHAPITRE VI.

De la probabilité des causes et des événemens futurs, tirée des événemens observés.

26. La probabilité de la plupart des événemens simples, est inconnue : en la considérant *à priori*, elle nous paraît susceptible de toutes les valeurs comprises entre zéro et l'unité; mais si l'on a observé un résultat composé de plusieurs de ces événemens, la manière dont ils y entrent, rend quelques-unes de ces valeurs plus probables que les autres. Ainsi à mesure que le résultat observé se compose par le développement des événemens simples, leur vraie possibilité se fait de plus en plus connaître, et il devient de plus en plus probable qu'elle tombe dans des limites qui se resserrant sans cesse, finiraient par coïncider, si le nombre des événemens simples devenait infini. Pour déterminer les lois suivant lesquelles cette possibilité se découvre, nous la nommerons x. La théorie exposée dans les chapitres précédens, donnera la probabilité du résultat observé, en fonction de x. Soit y cette fonction; si l'on considère les différentes valeurs de x comme autant de causes de ce résultat, la probabilité de x sera, par le troisième principe du n° 1, égale à une fraction dont le numérateur est y, et dont le dénominateur est la somme de toutes les valeurs de y; en multipliant donc le numérateur et le dénominateur de cette fraction par dx, cette probabilité sera

$$\frac{ydx}{\int ydx}.$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. La probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x=\theta$ et $x=\theta'$, est par conséquent égale à

$$\frac{\int ydx}{\int ydx}, \quad (1)$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x=\theta$ jusqu'à $x=\theta'$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$?

La valeur de x la plus probable, est celle qui rend y un *maximum*. Nous la désignerons par a. Si aux limites de x, y est nul, alors chaque valeur de y a une valeur égale correspondante de l'autre côté du *maximum*.

Quand les valeurs de x, considérées indépendamment du résultat observé, ne sont pas également possibles; en nommant z la fonction de x qui exprime leur probabilité; il est facile de voir, par ce qui a été dit dans le premier chapitre de ce Livre, qu'en changeant dans la formule (1), y dans yz, on aura la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x=\theta$ et $x=\theta'$. Cela revient à supposer toutes les valeurs de x également possibles *à priori*, et à considérer le résultat observé, comme étant formé de deux résultats indépendans, dont les probabilités sont y et z. On peut donc ramener ainsi tous les cas à celui où l'on suppose *à priori*, avant l'événement, une égale possibilité aux différentes valeurs de x, et par cette raison, nous adopterons cette hypothèse dans ce qui va suivre.

Nous avons donné dans les n[os] 22 et suivans du premier Livre, les formules nécessaires pour déterminer par des approximations convergentes, les intégrales du numérateur et du dénominateur de la formule (1), lorsque les événemens simples dont se compose l'événement observé, sont répétés un très-grand nombre de fois; car alors y a pour facteurs, des fonctions de x élevées à de grandes puissances. Nous allons, au moyen de ces formules, déterminer la loi de probabilité des valeurs de x, à mesure qu'elles s'éloignent de la valeur a, la plus probable, ou qui rend y un *maximum*. Pour cela, reprenons la formule (c) du n° 27 du premier Livre,

$$\begin{aligned}\int y\,dx = {} & Y.\left\{U+\frac{1}{2}.\frac{d^2U^3}{1.2.dx^2}+\frac{1.3}{2^2}.\frac{d^4.U^5}{1.2.3.4.dx^4}+\text{etc.}\right\}.\int dt.c^{-t^2}\\ & +\frac{Y}{2}.c^{-T^2}.\left\{\frac{d.U^2}{dx}-T.\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2}+(T^2+1).\frac{d^3.U^4}{1.2.3.dx^3}-\text{etc.}\right\}; \quad (2)\\ & -\frac{Y}{2}.c^{-T'^2}.\left\{\frac{d.U^2}{dx}+T'.\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2}+(T'^2+1).\frac{d^3.U^4}{1.2.3.dx^3}+\text{etc.}\right\}\end{aligned}$$

v est égal à $\frac{x-a}{\sqrt{\log Y-\log y}}$, et U, $\frac{d.U^2}{dx}$, $\frac{d^2.U^3}{dx^2}$, etc. sont ce que deviennent v, $\frac{d.v^2}{dx}$, $\frac{d^2.v^3}{dx^2}$, etc., lorsqu'on y change après les différentiations, x en a, a étant la valeur de x qui rend y un *maximum:* T est égal à ce que devient la fonction $\sqrt{\log Y-\log y}$, lorsqu'on change x en $a-\theta$ dans y, et T' est ce que devient la même fonction, lorsqu'on y change x dans $a+\theta'$. L'expression précédente de $\int y dx$ donne la valeur de cette intégrale, dans les limites $x=a-\theta$ et $x=a+\theta'$; l'intégrale $\int dt.c^{-t^2}$ étant prise depuis $t=-T$ jusqu'à $t=T'$.

Le plus souvent, aux limites de l'intégrale $\int y dx$, étendue depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, y est nul; ou lorsque y n'est pas nul, il devient si petit à ces limites, qu'on peut le supposer nul. Alors, on peut faire à ces limites T et T' infinis, ce qui donne pour l'intégrale $\int y dx$, étendue depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$,

$$\int y dx = Y.\left\{U+\frac{1}{2}.\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2}+\frac{1.3}{2^2}.\frac{d^4.U^5}{1.2.3.4.dx^4}+\text{etc.}\right\}.\sqrt{\pi};$$

ainsi la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x=a-\theta$ et $x=a+\theta'$, est égale à

$$\frac{\int dt.c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}.c^{-T^2}.\left\{\frac{d.U^2}{dx}-T.\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2}+(T^2+1).\frac{d^3.U^4}{1.2.3.dx^3}-\text{etc.}\right\}\\-\frac{1}{2}.c^{-T'^2}.\left\{\frac{d.U^2}{dx}+T'.\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2}+(T'^2+1).\frac{d^3.U^4}{1.2.3.dx^3}+\text{etc.}\right\}\end{array}\right\}}{\left\{U+\frac{1}{2}.\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2}+\frac{1.3}{2^2}.\frac{d^4.U^5}{1.2.3.4.dx^4}+\text{etc.}\right\}.\sqrt{\pi}}; \quad (3)$$

On voit par le n° 23 du premier Livre, que dans le cas où y a pour facteurs, des fonctions de x élevées à de grandes puissances de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, α étant une fraction extrêmement petite, alors U est le plus souvent de l'ordre $\sqrt{\alpha}$, ainsi que ses différences successives; U, $\frac{d.U^2}{dx}$, $\frac{d^2.U^3}{dx^2}$, etc. sont respectivement des ordres $\sqrt{\alpha}$, α, $\alpha^{\frac{3}{2}}$, etc.; d'où il suit que la convergence des séries de la formule (3), exige que T et T' ne soient pas d'un ordre supérieur à $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Si l'on suppose $\theta = \theta'$; alors on a à fort peu près $T = T'$, et la formule (3) se réduit, en négligeant les termes de l'ordre α, à l'intégrale $\frac{\int dt . c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$, prise depuis $t = -T$ jusqu'à $t = T'$; ce qui revient en négligeant le carré de la différence $T'^2 - T^2$, à doubler l'intégrale précédente, et à la prendre depuis t nul jusqu'à

$$t = \sqrt{\frac{T^2 + T'^2}{2}};$$

or on a

$$T^2 = \log Y - \log y,$$

et l'on peut supposer

$$\log y = \frac{1}{\alpha} . \log \varphi,$$

φ étant une fonction de x ou de $a - \theta$, qui ne renferme plus de facteurs élevés à de grandes puissances; en nommant donc $\Phi, \frac{d\Phi}{dx}, \frac{d^2\Phi}{dx^2}$, etc., ce que deviennent, lorsque θ est nul, $\varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}$, etc.; en observant ensuite que la condition de Y ou Φ, un *maximum*, donne $\frac{d\Phi}{dx} = 0$, on aura

$$\alpha T^2 = -\theta^2 . \frac{dd\Phi}{2\Phi . dx^2} + \theta^3 . \frac{d^3\Phi}{6\Phi . dx^3} - \frac{\theta^4}{8} . \left[\frac{d^4\Phi}{3\Phi . dx^4} - \left(\frac{dd\Phi}{\Phi . dx^2}\right)^2\right] + \text{etc.}$$

En changeant θ dans $-\theta$, on aura la valeur de $\alpha T'^2$; on aura donc, en négligeant les termes de l'ordre α^2,

$$\frac{\alpha . (T^2 + T'^2)}{2} = -\theta^2 . \frac{dd\Phi}{2\Phi . dx^2};$$

partant,

$$\sqrt{\frac{T^2 + T'^2}{2}} = \frac{\theta}{\sqrt{\alpha}} . \sqrt{-\frac{dd\Phi}{2\Phi dx^2}}.$$

Faisons

$$k = \sqrt{-\frac{dd\Phi}{2\Phi . dx^2}} = \sqrt{-\frac{\alpha ddY}{2Y . dx^2}},$$

$$\theta = \frac{t . \sqrt{\alpha}}{k};$$

la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites

$a \pm \frac{t.\sqrt{a}}{k}$, sera

$$\frac{2.\int dt.c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$, et pouvant être obtenue d'une manière fort approchée, par les formules du n° 27 du premier Livre.

Il résulte de cette expression, que la valeur de x la plus probable est a, ou celle qui rend l'événement observé, le plus probable; et qu'en multipliant à l'infini les événemens simples dont l'événement observé se compose, on peut à la fois resserrer les limites $a \pm \frac{t.\sqrt{a}}{k}$, et augmenter la probabilité que la valeur de x tombera entre ces limites; ensorte qu'à l'infini, cet intervalle devient nul, et la probabilité se confond avec la certitude.

Si l'événement observé dépend d'événemens simples de deux différens genres, en nommant x et x' les possibilités de ces deux genres d'événemens, on verra par les raisonnemens précédens, que y étant alors la probabilité de l'événement composé, la fraction

$$\frac{ydx.dx'}{\int\int ydx.dx'}, \qquad (4)$$

sera la probabilité des valeurs simultanées de x et de x', les intégrales du dénominateur étant prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=1$. En nommant a et a' les valeurs de x et de x' qui rendent y un *maximum*, et faisant $x=a+\theta$, $x'=a'+\theta'$, on trouvera, par l'analyse du n° 27 du premier Livre, que si l'on suppose

$$\frac{\theta}{\sqrt{2Y}}.\sqrt{-\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}-\theta'.\frac{\left(\frac{ddY}{dxdx'}\right)}{2Y}.\sqrt{\frac{2Y}{-\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}}=t,$$

$$\frac{\theta'}{\sqrt{-2Y.\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}}.\sqrt{\left(\frac{ddY}{dx^2}\right).\left(\frac{ddY}{dx'^2}\right)-\left(\frac{ddY}{dxdx'}\right)^2}=t',$$

la fraction (4) prendra cette forme

$$\frac{dt.dt'.c^{-t^2-t'^2}}{\int\int dt.dt'.c^{-t^2-t'^2}}.$$

Les intégrales du dénominateur doivent être prises depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, et depuis $t'=-\infty$ jusqu'à $t'=\infty$; car les intégrales relatives à x et x' de la fraction (4) étant prises depuis $x=0$ et $x'=0$ jusqu'à x et x' égaux à l'unité, et à ces limites, les valeurs de θ et de θ' étant $-a$ et $1-a$; $-a'$ et $1-a'$, les limites de t et de t' sont égales à ces dernières limites multipliées par des quantités de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$: ainsi l'exponentielle $c^{-t^2-t'^2}$ est excessivement petite à ces limites, et l'on peut sans erreur sensible, étendre les intégrales du dénominateur de la fraction précédente, jusqu'aux valeurs infinies positives et négatives des variables t et t'; ce dénominateur devient ainsi égal à π; et la probabilité que les valeurs de θ' et de θ sont comprises dans les limites

$$\theta'=0,\quad \theta'=\frac{t'.\sqrt{-2Y.\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{ddY}{dx^2}\right).\left(\frac{ddY}{dx'^2}\right)-\left(\frac{ddY}{dxdx'}\right)^2}};$$

$$\theta=0,\quad \theta=\frac{t.\sqrt{2Y}}{\sqrt{-\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}}+\frac{t'.\left(\frac{ddY}{dxdx'}\right)}{\sqrt{\left(\frac{ddY}{dx^2}\right).\left(\frac{ddY}{dx'^2}\right)-\left(\frac{ddY}{dxdx'}\right)^2}}.\sqrt{\frac{2Y}{-\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}},$$

est égale à

$$\frac{1}{\pi}.\int\int dt.dt'.c^{-t^2-t'^2},$$

les intégrales étant prises depuis t et t' nuls.

On voit par cette formule, que dans le cas de deux genres différens d'événemens simples, la probabilité que leurs possibilités respectives sont celles qui rendent l'événement composé, le plus probable, devient de plus en plus grande, et finit par se confondre avec la certitude; ce qui a lieu généralement pour un nombre quelconque de genres différens d'événemens simples, qui entrent dans l'événement observé,

Si

Si l'on conçoit une urne renfermant une infinité de boules de plusieurs couleurs différentes, et qu'après en avoir tiré un grand nombre n, p sur ce nombre, aient été de la première couleur, q de la seconde, r de la troisième, etc.; en désignant par x, x', x'', etc. les probabilités respectives d'amener dans un seul tirage, une de ces couleurs, la probabilité de l'événement observé sera le terme qui a pour facteur $x^p.x'^q.x''^r$.etc., dans le développement du polynome

$$(x + x' + x'' + \text{etc.})^n,$$

où l'on a

$$x + x' + x'' + \text{etc.} = 1,$$
$$p + q + r + \text{etc.} = n;$$

on pourra donc supposer ici $y = x^p.x'^q.x''^r$.etc.; et alors on a pour les valeurs de x, x', x'', etc. qui rendent l'événement observé le plus probable,

$$x = \frac{p}{n}, \quad x' = \frac{q}{n}, \quad x'' = \frac{r}{n}, \quad \text{etc.}$$

Ainsi les valeurs les plus probables sont proportionnelles aux nombres des arrivées des couleurs; et lorsque le nombre n est un grand nombre, les probabilités respectives des couleurs, sont à très-peu près égales aux nombres de fois qu'elles sont arrivées, divisés par le nombre des tirages.

27. Pour donner une application de la formule précédente, considérons le cas où deux joueurs A et B jouent ensemble avec cette condition, que celui qui sur trois coups en aura gagné deux, gagne la partie; et supposons que sur un très-grand nombre n de parties, A en ait gagné un nombre i. En nommant x la probabilité de A pour gagner un coup, et par conséquent $1 - x$, la probabilité correspondante de B; la probabilité de A pour gagner une partie, sera la somme des deux premiers termes du binome $(x + 1 - x)^3$; et la probabilité correspondante de B, sera la somme des deux derniers termes. Ces probabilités sont donc $x^2.(3-2x)$ et $(1-x)^2.(1+2x)$; ainsi la probabilité que sur n parties, A en gagnera i, et B, $n-i$, sera proportionnelle à $x^{2i}.(3-2x)^i.(1-x)^{2n-2i}.(1+2x)^{n-i}$; en nommant donc y cette

fonction, et a la valeur de x qui la rend un *maximum;* la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $a-\theta$ et $a+\theta$, sera

$$\frac{\int y dx}{\int y dx},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x=a-\theta$ jusqu'à $x=a+\theta$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Si l'on fait

$$\frac{1}{n}=\alpha, \quad \frac{i}{n}=i',$$

on aura par le numéro précédent,

$$\phi=x^{2i'}.(3-2x)^{i'}.(1-x)^{2-2i'}.(1+2x)^{1-i'}.$$

La condition du *maximum* de y ou de ϕ, donne $d\phi=0$; par conséquent a étant la valeur de x correspondante à ce *maximum*, on aura

$$0=\frac{2i'}{a}-\frac{2i'}{3-2a}-\frac{2.(1-i')}{1-a}+\frac{2(1-i')}{1+2a};$$

d'où l'on tire

$$i'=a^2.(3-2a), \quad 1-i'=(1-a)^2.(1+2a);$$

ensuite on a

$$\frac{-dd\phi}{2\phi.dx^2}=\frac{18}{(3-2a).(1+2a)}=k^2.$$

La probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $a\pm\frac{r}{\sqrt{n}}$, sera donc, par le numéro précédent, égale à

$$\frac{6.\sqrt{2}}{\sqrt{\pi.(3-2a).(1+2a)}}.\int dr.c^{\frac{-18.r^2}{(3-2a).(1+2a)}}.$$

On verra facilement que ce résultat s'accorde avec celui que nous avons trouvé dans le n° 16, par une analyse moins directe que celle-ci.

La partie finit en deux coups, si A ou B gagne les deux premiers coups, le troisième coup n'étant pas joué, parce qu'il devient inutile. Ainsi les nombres des parties gagnées par l'un et l'autre des joueurs, n'indiquent pas le nombre des coups joués; mais ils indiquent que ce dernier nombre est contenu dans des limites données, avec une probabilité qui croît sans cesse, à mesure que les parties se multiplient. La recherche de ce nombre et de cette probabilité étant très-propre à éclaircir l'analyse précédente; nous allons nous en occuper.

La probabilité que A gagnera une partie en deux coups, est x^2, x exprimant, comme ci-dessus, sa probabilité de gagner à chaque coup. La probabilité qu'il gagnera la partie en trois coups, est $2x^2.(1-x)$. La somme $x^2.(3-2x)$ de ces deux probabilités, est la probabilité que A gagnera la partie. Ainsi pour avoir la probabilité que sur i parties gagnées par le joueur A, s seront de deux coups, il faut élever à la puissance i, le binome

$$\frac{x^2}{x^2.(3-2x)}+\frac{2x^2.(1-x)}{x^2.(3-2x)},$$

ou

$$\frac{1}{3-2x}+\frac{2.(1-x)}{3-2x},$$

et le terme $i-s+1$ du développement de cette puissance, sera cette probabilité qui est ainsi égale à

$$\frac{1.2.3\ldots i.2^{i-s}.(1-x)^{i-s}}{1.2.3\ldots s.1.2.3\ldots(i-s).(3-2x)^i}.$$

Le plus grand terme de ce développement est, par le n° 16, celui dans lequel les exposans s et $i-s$ du premier et du second terme du binome sont à très-peu près dans le rapport de ces termes, ce qui donne

$$s=\frac{i}{3-2x}.$$

Nous nommerons s' cette quantité, et nous ferons

$$s=s'+l;$$

on aura, par le n° 16,

$$\sqrt{\frac{i}{2s'\pi.(i-s')}}.dl.c^{\frac{-il^2}{2s'.(i-s')}}$$

pour la probabilité de s, correspondante à l'adresse x du joueur A.

On trouvera pareillement, que si l'on nomme z le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur B, sur le nombre $n-i$ de parties qu'il a gagnées; la valeur de z la plus probable sera $\frac{n-i}{1+2x}$; et qu'en désignant par z' cette quantité, et faisant

$$z=z'+l',$$

la probabilité de z correspondante à x sera

$$\sqrt{\frac{n-i}{2z'.(n-i-z').\pi}}.dl'.c^{\frac{-(n-i).l'^2}{2z'.(n-i-z')}}.$$

Le produit de ces deux probabilités est donc la probabilité correspondante à x, que le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur A, sera $s'+l$, tandis que le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur B, sera $z'+l'$. Soit

$$q=\frac{i}{2s'.(i-s')},\quad q'=\frac{n-i}{2z'.(n-i-z')};$$

on aura pour cette probabilité composée,

$$\frac{\sqrt{qq'}}{\pi}.dl.dl'.c^{-ql^2-q'l'^2}.$$

Il faut multiplier cette probabilité par celle de x, qui, comme on l'a vu dans le numéro précédent, est $\frac{ydx}{\int ydx}$; le produit est

$$\frac{\sqrt{qq'}}{\pi}.\frac{ydx}{\int ydx}.dl.dl'.c^{-ql^2-q'l'^2};\quad (\varepsilon)$$

l'intégrale du dénominateur doit être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; et par le n° 27 du premier Livre, cette intégrale est à très-peu près,

$$Y.\sqrt{\pi}.\sqrt{-\frac{2Y.dx^2}{ddY}}.$$

Si l'on nomme X la fonction

$$\sqrt{qq'}.c^{-ql^2-q'l'^2},$$

et que l'on désigne par a' la valeur de x, qui rend Xy un *maximum*, et par X' et Y', ce que deviennent X et y, lorsqu'on y change x en a'; on aura, par le numéro précédent, en faisant $x = a' + \theta$,

$$y dx . \sqrt{qq'} . c^{-ql^2 - q'l'^2} = Y'X' . d\theta . c^{\frac{\theta^2 . d^2 . (X'Y')}{2X'Y' . dx^2}}.$$

Il est facile de voir que a' ne diffère de la valeur a de x, qui rend y un *maximum*, que d'une quantité de l'ordre α, que nous désignerons par $f\alpha$; en substituant dans Y, $a + f\alpha$ au lieu de a', pour en former Y', et développant par rapport aux puissances de α, on verra que $\frac{dY}{da}$ étant nul, parce que Y est le *maximum* de y, Y' ne diffère de Y, que de quantités de l'ordre α; ainsi l'on a, aux quantités près d'un ordre inférieur à celui que l'on conserve, et en observant que $\frac{dX'}{X'dx}$ et $\frac{d^2X'}{X'dx^2}$ peuvent être négligées par rapport à $\frac{dY'}{Y'dx}$;

$$\frac{d^2 . X'Y'}{2X'Y' . dx^2} = \frac{d^2Y}{2Y . dx^2};$$

la fonction (ϵ) devient par là

$$\frac{\sqrt{qq'}}{\pi . \sqrt{\pi}} . \sqrt{-\frac{ddY}{2Y . dx^2}} . dl . dl' . d\theta . c^{-ql^2 - q'l'^2 + \frac{\theta^2 . ddY}{2Y . dx^2}}. \quad (\epsilon')$$

On doit dans cette fonction, supposer $x = a$, ce qui donne, en substituant pour i, sa valeur $na^2 . (3 - 2a)$,

$$q = \frac{3 - 2a}{4na^2 . (1 - a)}, \quad q' = \frac{1 + 2a}{4na . (1 - a)^2}.$$

Ensuite, x étant égal à $a' + \theta$, il est égal à $a + f\alpha + \theta$; en négligeant donc les quantités de l'ordre α, on aura

$$x = a + \theta.$$

Maintenant le nombre des parties de deux coups, étant

$$\frac{i}{3 - 2x} + \frac{n - i}{1 + 2x} + l + l',$$

ce nombre sera

$$\frac{i}{3-2a}+\frac{n-i}{1+2a}+\left[\frac{2i}{(3-2a)^2}-\frac{2.(n-i)}{(1+2a)^2}\right].\theta+l+l'.$$

Faisons

$$t=\left[\frac{2i}{(3-2a)^2}-\frac{2.(n-i)}{(1+2a)^2}\right].\theta+l+l';$$

et désignons par q'' la quantité

$$-\frac{ddY}{2Y.dx^2.\left[\frac{2}{(3-2a)^2}-\frac{2.(n-i)}{(1+2a)^2}\right]^2},$$

qui, après toutes les réductions, se réduit à

$$\frac{9.(3-2a).(1+2a)}{2n.(1-2a)^2.(3-2a+2a^2)^2};$$

la fonction (ε') deviendra

$$\frac{\sqrt{qq'q''}}{\pi\sqrt{\pi}}.dt.dl.dl'.c^{-ql^2-q'l'^2-q''.(t-l-l')^2}. \qquad (\varepsilon'')$$

En l'intégrant depuis $l=-\infty$ jusqu'à $l=\infty$, et depuis $l'=-\infty$, jusqu'à $l'=\infty$, on aura la probabilité que le nombre des parties de deux coups, sera égal à

$$\frac{i}{3-2a}+\frac{n-i}{1+2a}+t;$$

or on a

$$\int dl.c^{-ql^2-q'l'^2-q''.(t-l-l')^2}$$

$$=\int dl.c^{-\frac{qq''}{q+q''}.(t-l')^2-q'l'^2-(q+q'').\left(l-\frac{q''}{q+q''}.(t-l')\right)^2}.$$

Cette dernière intégrale, prise depuis $l=-\infty$ jusqu'à $l=\infty$, est, par ce qui précède,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q+q''}}.c^{-\frac{qq''}{q+q''}.(t-l')^2-q'l'^2}.$$

En la multipliant par dl', et la mettant sous cette forme,

$$\frac{\sqrt{\pi}.dl'}{\sqrt{q+q''}}.c^{-\frac{qq'q''.t^2}{qq'+qq''+q'q''}-\frac{qq'+qq''+q'q''}{q+q''}.\left(l'-\frac{qq''.t}{qq'+qq''+q'q''}\right)^2},$$

et l'intégrant depuis $l'=-\infty$ jusqu'à $l=\infty$; on aura

$$\frac{\pi}{\sqrt{qq'+qq''+q'q''}}.c^{-\frac{qq'q''.t^2}{qq'+qq''+q'q''}}.$$

La fonction (ϵ'') intégrée par rapport à l et l', dans les limites infinies positives et négatives de ces variables, devient ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\sqrt{\frac{qq'q''}{qq'+qq''+q'q''}}.dt.c^{-\frac{qq'q''.t^2}{qq'+qq''+q'q''}}.$$

Ainsi la probabilité que le nombre de parties de deux coups, sera compris dans les limites

$$\frac{i}{3-2a}+\frac{n-i}{1+2a}\pm t=n.(a^2+\overline{1-a}^2)\pm t,$$

est égale au double de l'intégrale de la différentielle précédente, prise depuis t nul. On doit observer que q, q', q'' sont de l'ordre $\frac{1}{n}$, ensorte que la quantité $\frac{qq'q''}{qq'+qq''+q'q''}$ est du même ordre. Représentons-la par $\frac{k'^2}{n}$, et faisons $t=r.\sqrt{n}$; on aura

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int kdr.c^{-k'^2r^2}, \quad (\epsilon''')$$

pour l'expression de la probabilité que le nombre de parties de deux coups, sera compris dans les limites

$$n.(a^2+\overline{1-a}^2)\pm r.\sqrt{n},$$

l'intégrale étant prise depuis r nul. L'intervalle de ces deux limites est $2r\sqrt{n}$, et le rapport de cet intervalle au nombre n de parties, est $\frac{2r}{\sqrt{n}}$; ce rapport diminue sans cesse, à mesure que n augmente, et r peut en même tems croître indéfiniment; de sorte que l'intégrale précédente approche indéfiniment de l'unité.

Le nombre total des coups, est le triple du nombre des parties de trois coups, plus le double du nombre des parties de deux coups, ou le triple du nombre total n des parties, moins le nombre des parties de deux coups; il est donc

$$2n.(1+a-q^2) \mp r.\sqrt{n},$$

l'intégrale (ε''') est donc l'expression de la probabilité que le nombre des coups sera compris dans ces limites.

Si au lieu de connaître le nombre i des parties gagnées par le joueur A, et le nombre total n de parties, on connaît le nombre i et le nombre total des coups; la même analyse pourra servir à déterminer le nombre inconnu n des parties. Pour cela, désignons par h, le nombre total des coups; on aura, par ce qui précède, les deux équations

$$3n - \frac{i}{3-2a} - \frac{n-i}{1+2a} = h \pm r.\sqrt{n},$$

$$\frac{i}{a} - \frac{i}{3-2a} = \frac{n-i}{1-a} - \frac{n-i}{1+2a}.$$

Ces équations donnent a et n en fonctions de $h \pm r.\sqrt{n}$. Supposons

$$n = i.\psi\left(\frac{h \pm r.\sqrt{n}}{i}\right), \quad a = \Gamma\left(\frac{h \pm r.\sqrt{n}}{i}\right);$$

on aura, en réduisant en série,

$$n = i.\psi\left(\frac{h}{i}\right) \pm ir.\sqrt{n}.\frac{d.\psi\left(\frac{h}{i}\right)}{dh} + \text{etc.};$$

on substituera dans k', au lieu de n et de a, $i.\psi\left(\frac{h}{i}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{h}{i}\right)$; l'intégrale (ε''') est alors la probabilité que le nombre n des parties, est compris dans les limites

$$i.\psi\left(\frac{h}{i}\right) \pm ir.\sqrt{i.\psi\left(\frac{h}{i}\right).\frac{d.\psi\left(\frac{h}{i}\right)}{dh}}.$$

28. C'est principalement aux naissances, que l'analyse précédente est applicable, et l'on peut en déduire non-seulement pour l'espèce humaine, mais pour toutes les espèces d'êtres organisés, des résultats intéressans. Jusqu'ici les observations de ce genre n'ont été faites en grand nombre, que sur l'espèce humaine : nous allons soumettre au calcul, les principales.

Considérons d'abord les naissances observées à Paris, à Londres, et dans le royaume de Naples. Dans l'espace des 40 années écoulées depuis le commencement de 1475, époque où l'on a commencé à distinguer à Paris, sur les registres, les naissances des deux sexes, jusqu'à la fin de 1784, on a baptisé dans cette capitale, 393386 garçons, et 377555 filles, les enfans trouvés étant compris dans ce nombre : cela donne à peu près $\frac{25}{24}$ pour le rapport des baptêmes des garçons à ceux des filles. 1745

Dans l'espace des 95 années écoulées depuis le commencement de 1664 jusqu'à la fin de 1758, il est né à Londres, 737629 garçons, et 698958 filles ; ce qui donne $\frac{19}{18}$ à peu près, pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles.

Enfin, dans l'espace des neuf années écoulées depuis le commencement de 1774 jusqu'à la fin de 1782, il est né dans le royaume de Naples, la Sicile non-comprise, 782352 garçons, et 746821 filles ; ce qui donne $\frac{22}{21}$ pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles.

Les plus petits de ces nombres de naissances, sont relatifs à Paris ; d'ailleurs, c'est dans cette ville que les naissances des garçons et des filles, approchent le plus de l'égalité. Par ces deux raisons, la probabilité que la possibilité de la naissance d'un garçon surpasse $\frac{1}{2}$, doit y être moindre qu'à Londres et dans le royaume de Naples. Déterminons numériquement cette probabilité.

Nommons p le nombre des naissances masculines observées à Paris, q celui des naissances féminines, et x la possibilité d'une naissance masculine, c'est-à-dire la probabilité qu'un enfant qui doit naître, sera un garçon ; $1-x$ sera la possibilité d'une naissance féminine, et l'on aura la probabilité que sur $p+q$ naissances,

p seront masculines, et q seront féminines, égale à

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}.x^p.(1-x)^q;$$

en faisant donc

$$y = x^p.(1-x)^q,$$

la probabilité que la valeur de x est comprise dans des limites données, sera par le n° 26, égale à

$$\frac{\int y dx}{\int y dx},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et celle du numérateur étant prise dans les limites données. Si l'on prend zéro et $\frac{1}{2}$ pour ces limites, on aura la probabilité que la valeur de x ne surpasse pas $\frac{1}{2}$. La valeur qui correspond au *maximum* de y, est $\frac{p}{p+q}$; et vu la grandeur des nombres p et q, l'excès de $\frac{p}{p+q}$ sur $\frac{1}{2}$, est trop considérable pour employer ici la formule (c) du n° 27 du premier Livre, dans l'approximation de l'intégrale $\int y dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$; il faut donc, dans ce cas, faire usage de la formule (A) du n° 22 du même Livre. Ici l'on a

$$v = -\frac{y dx}{dy} = -\frac{x.(1-x)}{p-(p+q).x};$$

la formule citée (A) donne ainsi pour l'intégrale $\int y dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2^{p+q+1}.(p-q)}.\left[1-\frac{p+q}{(p-q)^2}+\text{etc.}\right].$$

Quant à l'intégrale $\int y dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, on a, par le n° 26,

$$\int y dx = Y.\left[U+\frac{1}{2}.\frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2}+\text{etc.}\right].\sqrt{\pi},$$

Y étant ce que devient y à son *maximum*, ou lorsqu'on y substitue $\frac{p}{p+q}$ pour x. v est ici égal à $\frac{x-\frac{p}{p+q}}{\sqrt{\log Y-\log y}}$; et U, $\frac{d^2.U^3}{dx^2}$, etc. sont ce que deviennent v, $\frac{d^2.v^3}{dx^2}$, etc., lorsqu'on y fait, après les différentiations, $x=\frac{p}{p+q}$. On trouve ainsi pour l'intégrale $\int y\,dx$, prise depuis x nul jusqu'à $x=1$,

$$\int y\,dx=\frac{p^{p+\frac{1}{2}}.q^{q+\frac{1}{2}}.\sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}.\left[1+\frac{\overline{p+q}^2-13.pq}{12.pq.(p+q)}+\text{etc.}\right];$$

la probabilité que la valeur de x ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, est donc égale à

$$\frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{(p-q).\sqrt{\pi}.2^{p+q+\frac{3}{2}}.p^{p+\frac{1}{2}}.q^{q+\frac{1}{2}}}$$
$$\times\left[1-\frac{p+q}{(p-q)^2}-\frac{\overline{p+q}^2-13.pq}{12.pq.(p+q)}-\text{etc.}\right].\quad(o)$$

Pour appliquer de grands nombres à cette formule, il faudrait avoir les logarithmes de p, q et $p-q$, avec douze décimales au moins : on peut y suppléer de cette manière. On a

$$\log\left[\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p.q^q}\right]=-p.\log\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)-q.\log\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right).$$

Lorsque les logarithmes sont hyperboliques, le second membre de cette équation, réduit en série, devient

$$-(p+q).\left[\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2}{1.2}+\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4}{3.4}+\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^6}{5.6}+\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^8}{7.8}+\text{etc.}\right]:$$

on aura donc par cette série très-convergente, le logarithme hyperbolique de $\frac{(p+q)^{p+q}}{2^{p+q}.p^p.q^q}$. En le multipliant par 0,43429448, on le convertira en logarithme tabulaire; et en lui ajoutant le logarithme tabulaire de $\frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}}{2.(p-q).\sqrt{2pq\pi}}$, on aura le logarithme tabulaire du facteur qui multiplie la série (o). Si l'on nomme $\frac{1}{\mu}$ ce facteur, et si l'on fait

$$p=393386,\qquad q=377555;$$

on trouve en logarithme tabulaire

$$\log \mu = 72{,}2511780,$$

la série (*o*) devient

$$\frac{1}{\mu}\cdot(1 - 0{,}0030761 + \text{etc.}).$$

Cette quantité d'une petitesse excessive, retranchée de l'unité, donnera la probabilité qu'à Paris, la possibilité des naissances des garçons, surpasse celle des filles; d'où l'on voit que l'on doit regarder cette probabilité comme étant égale, au moins, à celle des faits historiques les plus avérés.

Si l'on applique la formule (*o*) aux naissances observées dans les principales villes de l'Europe, on trouve que la supériorité des naissances des garçons sur les naissances des filles, observée partout depuis Naples jusqu'à Pétersbourg, indique une plus grande possibilité des naissances des garçons, avec une probabilité extrêmement approchante de la certitude; ce résultat paraît donc être une loi générale, du moins en Europe; et si dans quelques petites villes, où l'on n'a observé qu'un nombre peu considérable de naissances, la nature semble s'en écarter; il y a tout lieu de croire que cet écart n'est qu'apparent, et qu'à la longue, les naissances observées dans ces villes offriraient, en se multipliant, un résultat semblable à celui des grandes villes. Plusieurs philosophes, trompés par ces anomalies, ont cherché la cause de phénomènes qui ne sont que l'effet du hasard; ce qui prouve la nécessité de faire précéder de pareilles recherches, par celle de la probabilité avec laquelle les observations indiquent les phénomènes dont on veut déterminer la cause. Je prends pour exemple, la petite ville de Vitteaux, dans laquelle, sur 415 naissances observées pendant cinq années, il est né 203 garçons et 212 filles. p étant ici moindre que q, l'ordre naturel paraît renversé. Voyons quelle est d'après ces observations, la probabilité que les facilités des naissances des garçons surpassent dans cette ville, celles des naissances des filles. Cette probabilité est $\frac{\int y\,dx}{\int y\,dx}$, l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. La formule (*o*) qui, retranchée de l'unité, donne cette fraction, devient ici divergente; nous emploierons alors la formule (3) du n° 26, qui se réduit à fort peu près à son premier terme $\frac{\int dt.c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$, l'intégrale étant prise depuis la valeur de t qui correspond à $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à la valeur de t qui correspond à $x=1$. Or on a, par le numéro cité,

$$t^2 = \log Y - \log y,$$

y étant $x^p.(1-x)^q$, et Y étant la valeur de y correspondante au *maximum* de y, qui a lieu lorsque $x=\frac{p}{p+q}$; la valeur de t^2 qui correspond à $x=\frac{1}{2}$, est $-\log\left[\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p.q^q}\right]$, ce logarithme étant hyperbolique, et étant donné, par ce qui précède, par une série très-convergente. La valeur de t^2 qui correspond à $x=1$, est $t^2=\infty$; on a donc ainsi les deux limites de l'intégrale $\int dt.c^{-t^2}$, intégrale qu'il sera facile d'obtenir par les formules que nous avons données pour cet objet. On trouve ainsi la probabilité qu'à Vitteaux, les facilités des naissances des garçons l'emportent sur celles des filles, égale à 0,33; la supériorité de la facilité des naissances des filles, est donc indiquée par ces observations, avec une probabilité égale à 0,67, probabilité beaucoup trop faible pour balancer l'analogie qui nous porte à penser qu'à Vitteaux, comme dans toutes les villes où l'on a observé un nombre considérable de naissances, la possibilité des naissances des garçons l'emporte sur celle des naissances des filles.

29. On a vu qu'à Londres, le rapport observé des naissances des garçons à celles des filles, est égal à $\frac{19}{18}$, tandis qu'à Paris, celui des baptêmes des garçons à ceux des filles, n'est que $\frac{25}{24}$. Cela semble indiquer une cause constante de cette différence. Déterminons la probabilité de cette cause.

Soient p et q les nombres des baptêmes des garçons et des filles, faits à Paris dans l'intervalle du commencement de 1745 à la fin de 1784; en désignant par x, la possibilité du baptême d'un garçon, et faisant, comme dans le numéro précédent,

$$y = x^p . (1-x)^q,$$

la valeur de x la plus probable, sera celle qui rend y un *maximum*; elle est donc $\frac{p}{p+q}$; en supposant ensuite

$$x = \frac{p}{p+q} + \theta;$$

la probabilité de la valeur de θ sera, par le n° 26, égale à

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\pi}} . \sqrt{\frac{(p+q)^3}{2pq}} . c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}.\theta^2}.$$

En désignant par p', q' et θ', ce que deviennent p, q et θ pour Londres, on aura

$$\frac{d\theta'}{\sqrt{\pi}} . \sqrt{\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}} . c^{-\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}.\theta'^2}$$

pour la probabilité de θ'; le produit

$$\frac{d\theta . d\theta'}{\pi} . \sqrt{\frac{(p+q)^3.(p'+q')^3}{4pq.p'q'}} . c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}.\theta^2 - \frac{(p'+q')^3}{2p'q'}.\theta'^2}$$

de ces deux probabilités, sera donc la probabilité de l'existence simultanée de θ et de θ'. Faisons

$$\frac{p'}{p'+q'} + \theta' = \frac{p}{p+q} + \theta + t;$$

la fonction différentielle précédente devient

$$\frac{d\theta . dt}{\pi} . \sqrt{\frac{(p+q)^3.(p'+q')^3}{4pq.p'q'}} . c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}.\theta^2 - \frac{(p'+q')^3}{2p'q'}.\left(\theta + t - \frac{p'q - pq'}{(p+q).(p'+q')}\right)^2}.$$

En l'intégrant pour toutes les valeurs possibles de θ, et ensuite pour toutes les valeurs positives de t; on aura la probabilité que la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande à Londres qu'à Paris. Les valeurs de θ peuvent s'étendre depuis θ égal à $-\frac{p}{p+q}$

jusqu'à θ égal à $1-\frac{p}{p+q}$; mais lorsque p et q sont de très-grands nombres, le facteur $c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}.\theta^2}$ est si petit à ces deux limites, qu'on peut le regarder comme nul; on peut donc étendre l'intégrale relative à θ, depuis $\theta=-\infty$ jusqu'à $\theta=\infty$. On voit par la même raison, que l'intégrale relative à t, peut être étendue depuis $t=0$ jusqu'à $t=\infty$. En suivant le procédé du n° 27 pour ces intégrations multiples, on trouvera facilement que si l'on fait

$$k^2=\frac{(p+q)^3.(p'+q')^3}{2p'q'(p+q)^3+2pq.(p'+q')^3},$$

$$h=\frac{p'q-pq'}{(p+q).(p'+q')},$$

$$\theta+\frac{2pq.k^2}{(p+q)^3}.(t-h)=t',$$

ce qui donne $d\theta=dt'$; la différentielle précédente intégrée d'abord par rapport à t' depuis $t'=-\infty$ jusqu'à $t'=\infty$, et ensuite depuis $t=0$ jusqu'à t infini, donnera

$$\int\frac{kdt}{\sqrt{\pi}}.c^{-k^2.(t-h)^2}$$

pour la probabilité qu'à Londres, la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande qu'à Paris. Si l'on fait

$$k.(t-h)=t'',$$

cette intégrale devient

$$\int\frac{dt''}{\sqrt{\pi}}.c^{-t''^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t''=-kh$ jusqu'à $t''=\infty$; et il est visible qu'elle est égale à

$$1-\int\frac{dt''}{\sqrt{\pi}}.c^{-t''^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t''=kh$ jusqu'à t'' infini. De là il suit, par le n° 27 du premier Livre, que si l'on suppose

$$i^2=\frac{p'q'.(p+q)^3+pq.(p'+q')^3}{(p+q).(p'+q').(p'q-pq')^2};$$

la probabilité que la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande à Londres qu'à Paris, a pour expression,

$$1-\frac{i.c^{-\frac{1}{2i^2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{i^2}{1+\cfrac{2i^2}{1+\cfrac{3i^2}{1+\cfrac{4i^2}{1+\text{etc.}}}}}}\,.\qquad(\mu)$$

En faisant dans cette formule,

$$p=393386\,,\quad q=377555,$$
$$p'=737629\,,\quad q'=698958,$$

elle devient

$$1-\frac{1}{328269}.$$

Il y a donc 328268 à parier contre un, qu'à Londres, la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande qu'à Paris. Cette probabilité approche tellement de la certitude, qu'il y a lieu de rechercher la cause de cette supériorité.

Parmi les causes qui peuvent la produire, il m'a paru que les baptêmes des enfans trouvés, qui font partie de la liste annuelle des baptêmes à Paris, devaient avoir une influence sensible sur le rapport des baptêmes des garçons à ceux des filles; et qu'ils devaient diminuer ce rapport, si, comme il est naturel de le croire, les parens des campagnes environnantes, trouvant de l'avantage à retenir près d'eux les enfans mâles, en avaient envoyé à l'hospice des Enfans trouvés de Paris, dans un rapport moindre que celui des naissances des deux sexes. C'est ce que le relevé des registres de cet hospice m'a fait voir avec une très-grande probabilité. Depuis le commencement de 1745 jusqu'à la fin de 1809, on y a baptisé 163499 garçons et 159405 filles, nombre dont le rapport est $\frac{39}{38}$, et diffère trop du rapport $\frac{25}{24}$ des baptêmes des garçons et des filles à Paris, pour être attribué au simple hasard.

30. Déterminons, d'après les principes précédens, les probabilités

lités des résultats fondés sur les tables de mortalité ou d'assurance, construites sur un grand nombre d'observations. Supposons d'abord que sur un nombre p d'individus d'un âge donné A, on ait observé qu'il en existe encore le nombre q, à l'âge $A+a$; on demande la probabilité que sur p' individus de l'âge A, il en existera $q'+z$ à l'âge $A+a$, la raison de p' et q' étant la même que celle de p à q.

Soit x la probabilité d'un individu de l'âge A, pour vivre à l'âge $A+a$; la probabilité de l'événement observé est alors le terme du binome $(x+\overline{1-x})^p$ qui a x^q pour facteur; cette probabilité est donc

$$\frac{1.2.3\ldots p}{1.2.3\ldots \overline{p-q}.1.2.3\ldots q}.x^q.(1-x)^{p-q};$$

ainsi la probabilité de la valeur de x, prise de l'événement observé est

$$\frac{x^q dx.(1-x)^{p-q}}{\int x^q dx.(1-x)^{p-q}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

La probabilité que sur les p' individus de l'âge A, $q'+z$ vivront à l'âge $A+a$, est

$$\frac{1.2.3\ldots p'}{1.2.3\ldots(q'+z).1.2.3\ldots(p'-q'-z)}.x^{q'+z}.(1-x)^{p'-q'-z}.$$

En multipliant cette probabilité par la probabilité précédente de la valeur de x; le produit intégré depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, sera la probabilité de l'existence de $q'+z$ personnes à l'âge $A+a$; en nommant donc P cette probabilité, on aura

$$P=\frac{1.2.3\ldots p'.\int x^{q+q'+z}dx.(1-x)^{p+p'-q-q'-z}}{1.2.3\ldots(q'+z).1.2.3\ldots(p'-q'-z).\int x^q dx.(1-x)^{p-q}},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. On a par le n° 28, à très-peu près,

$$\int x^{q+q'+z}dx.(1-x)^{p+p'-q-q'-z}$$
$$=\sqrt{2\pi}.\left[(q+q').\left(1+\frac{z}{q+q'}\right)\right]^{q+q'+z+\frac{1}{2}}$$
$$\times\frac{\left[(p+p'-q-q').\left(1-\frac{z}{p+p'-q-q'}\right)\right]^{p+p'-q-q'-z+\frac{1}{2}}}{(p+p')^{p+p'+\frac{3}{2}}}$$
$$\int x^q dx.(1-x)^{p-q}=\sqrt{2\pi}.\frac{q^{q+\frac{1}{2}}.(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{3}{2}}}.$$

Ensuite, par le n° 33 du premier Livre, on a

$$1.2.3\ldots\ldots\ldots p'=p'^{p'+\frac{1}{2}}.c^{-p'}.\sqrt{2\pi},$$
$$1.2.3\ldots\ldots(q'+z)=q'^{q'+z+\frac{1}{2}}.\left(1+\frac{z}{q'}\right)^{q'+z+\frac{1}{2}}.c^{-q'-z}.\sqrt{2\pi},$$
$$1.2.3\ldots(p'-q'-z)=(p'-q')^{p'-q'-z+\frac{1}{2}}.\left(1-\frac{z}{p'-q'}\right)^{p'-q'-z+\frac{1}{2}}.c^{-p'+q'+\ldots}$$

enfin on a $q'=\frac{qp'}{p}$. Cela posé, on trouve après toutes les réductions,

$$P=\sqrt{\frac{p^3}{qp'.(p-q).(p+p').2\pi}}$$
$$\times\frac{\left(1+\frac{z}{q+q'}\right)^{q+q'+z+\frac{1}{2}}.\left(1-\frac{z}{p+p'-q-q'}\right)^{p+p'-q-q'-z+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{z}{q'}\right)^{q'+z+\frac{1}{2}}.\left(1-\frac{z}{p'-q'}\right)^{p'-q'-z+\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on prend le logarithme hyperbolique du second membre de cette équation, que l'on réduise ce logarithme en série ordonnée par rapport aux puissances de z, et que l'on néglige les puissances supérieures au carré; on aura en repassant du logarithme à la fonction,

$$P=\sqrt{\frac{p^3}{qp'.(p-q).(p+p').2\pi}}.\left(1+\frac{(2q-p).p^2z}{2qp'.(p-q).(p+p')}\right).c^{\frac{-p^3z^2}{2qp'.(p-q).(p+p')}},$$

p, q, p' étant supposés de très-grands nombres de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, le coefficient de z est très-petit de l'ordre α; celui de $-z^2$ est très-petit et du même ordre. Mais si l'on suppose z de l'ordre $\sqrt{\alpha}$, on pourra négliger dans l'expression précédente, le terme dépendant de la première puissance de z, comme très-petit de l'ordre $\sqrt{\alpha}$. De plus, ce terme se détruit lui-même, lorsque l'on a égard à la fois aux valeurs positives et négatives de z. En le négligeant donc, on aura

$$2.\sqrt{\frac{p^3}{qp'.(p-q).(p+p').2\pi}}.\int dz.c^{-\frac{p^3z^2}{2qp'.(p-q).(p+p')}}$$

pour l'expression de la probabilité que sur p' individus de l'âge A, le nombre de ceux qui parviendront à l'âge $A+a$ sera compris dans les limites $q'\pm z$, l'intégrale étant prise depuis z nul.

Supposons maintenant que l'on ait trouvé par l'observation, que sur p individus de l'âge A, q vivaient encore à l'âge $A+a$, et r à l'âge $A+a+a'$; on demande la probabilité que sur p' individus du même âge A, $\frac{qp'}{p}+z$ vivront à l'âge $A+a$, et $\frac{rp'}{p}+z'$ vivront à l'âge $A+a+a'$.

La probabilité que sur p' individus de l'âge A, $\frac{qp'}{p}+z$ vivront à l'âge $A+a$ est, par ce qui précède,

$$\sqrt{\frac{p^3}{2qp'.(p-q).(p+p').\pi}}.c^{-\frac{p^3z^2}{2qp'.(p-q).(p+p')}}.$$

On aura la probabilité que sur $\frac{qp'}{p}+z$ individus de l'âge $A+a$, $\left(\frac{qp'}{p}+z\right)\frac{r}{q}+u$ vivront à l'âge $A+a+a'$, en changeant dans la fonction précédente, p' dans $\frac{qp'}{p}+z$, p en q, q en r, et z en u; ce qui donne, en négligeant z par rapport à $\frac{qp'}{p}$.

$$\sqrt{\frac{qp^2}{2rp'.(q-r).(p+p').\pi}}.c^{-\frac{qp^2.u^2}{2rp'.(q-r).(p+p')}}.$$

Le produit de ces deux probabilités, est la probabilité de l'existence simultanée de z et de u; or on a

$$\left(\frac{qp'}{p}+z\right)\frac{r}{q}+u=\frac{rp'}{p}+z';$$

ce qui donne

$$u=z'-\frac{rz}{q};$$

en faisant donc

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^2&=\frac{p^3}{2qp'.(p-q).(p+p')},\\ \mathcal{C}'^2&=\frac{qp^2}{2rp'.(q-r).(p+p')}.\end{aligned}$$

La probabilité P de l'existence simultanée des valeurs de z et de z' sera

$$P=\int\frac{\mathcal{C}dz}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\mathcal{C}'dz'}{\sqrt{\pi}}\cdot c^{-\mathcal{C}^2.z^2-\mathcal{C}'^2.\left(z'-\frac{rz}{q}\right)^2}.$$

En suivant cette analyse, on trouve généralement que si l'on fait

$$\begin{aligned}\mathcal{C}''^2&=\frac{rp^2}{2sp'.(r-s).(p+p')},\\ \mathcal{C}'''^2&=\frac{sp^2}{2tp'.(s-t).(p+p')},\\ &\text{etc.};\end{aligned}$$

la probabilité P que sur p' individus de l'âge A, les nombres de ceux qui vivront aux âges $A+a$, $A+a+a'$, $A+a+a'+a''$, etc. seront compris dans les limites respectives

$$\frac{qp'}{p},\ \frac{qp'}{p}+z;\quad \frac{rp'}{p},\ \frac{rp'}{p}+z';\quad \frac{sp'}{p},\ \frac{sp'}{p}+z'';\quad \frac{tp'}{p},\ \frac{tp'}{p}+z''';\quad \text{etc.}$$

est

$$P=\int\frac{\mathcal{C}.dz}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\mathcal{C}'.dz'}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\mathcal{C}''.dz''}{\sqrt{\pi}}.\text{etc.}\,c^{-\mathcal{C}^2.z^2-\mathcal{C}'^2.\left(z'-\frac{rz}{q}\right)^2-\mathcal{C}''^2.\left(z''-\frac{sz'}{r}\right)^2-\text{etc}}.$$

On peut apprécier par cette formule, les probabilités respectives des nombres d'une table de mortalité, construite sur un grand nombre d'observations. La manière de former ces tables, est très-simple. On prend sur les registres des naissances et des morts, un grand nombre d'enfans que l'on suit pendant le cours de leur vie, en déterminant combien il en reste à la fin de chaque année de leur âge; et l'on inscrit ce nombre vis-à-vis de chaque année finissante. Mais comme dans les deux ou trois premières années de la vie, la mortalité est très rapide; il faut, pour plus d'exactitude, indiquer dans ce premier âge, le nombre des survivans à la fin de chaque demi-année. Si le nombre p des enfans était infini, on aurait ainsi des tables exactes qui représenteraient la vraie loi de la mortalité dans le lieu et à l'époque de leur formation. Mais le nombre d'enfans que l'on choisit étant fini; quelque grand qu'il soit, les nombres de la table sont susceptibles d'erreurs. Représentons par p', q', r', s', t', etc., ces divers nombres. Les vrais nombres, pour un nombre p' de naissances, sont $\frac{qp'}{p}$, $\frac{rp'}{p}$, $\frac{s.p'}{p}$, $\frac{tp'}{p}$, etc. Si l'on fait $q'=\frac{qp'}{p}+z$, z sera l'erreur de q'; pareillement si l'on suppose $r'=\frac{rp'}{p}+z'$, z' sera l'erreur de r', et ainsi de suite. L'expression précédente de P est donc la probabilité que les erreurs de q', r', s', etc. sont comprises dans les limites zéro et z, zéro et z', zéro et z'', etc. Les valeurs de β, β', etc. dépendent de p, q, r, etc. qui sont inconnues; mais la supposition de p infini donne

$$\beta^2=\frac{p^2}{2qp'.(p-q)}.$$

On peut substituer sans erreur sensible, $\frac{q'}{p'}$ au lieu de $\frac{q}{p}$, ce qui donne

$$\beta^2=\frac{p'}{2q'.(p'-q')}.$$

On aura de la même maniere,

$$\beta'^2=\frac{q'}{2r'.(q'-r')};$$

$$\beta''^2=\frac{r'}{2s'.(r'-s')},$$

etc.

Si l'on ne veut considérer que l'erreur d'un des nombres de la table, tel que s'; alors on intégrera l'expression de P, relativement à z''', z^{iv}, etc., depuis les valeurs infinies négatives de ces variables jusqu'à leurs valeurs infinies positives; et alors on a

$$P = \int \frac{\gamma . dz}{\sqrt{\pi}} . \frac{\gamma' . dz'}{\sqrt{\pi}} . \frac{\gamma'' . dz''}{\sqrt{\pi}} . c^{-\gamma^2 z^2 - \gamma'^2 . \left(z' - \frac{r'z}{q'}\right)^2 - \gamma''^2 . \left(z'' - \frac{s'z'}{r'}\right)^2}.$$

Les intégrales relatives à z et z' doivent être prises depuis leurs valeurs infinies négatives, jusqu'à leurs valeurs infinies positives; on trouvera ainsi, par le procédé dont nous avons souvent fait usage pour ce genre d'intégrations, que si l'on suppose

$$\gamma^2 = \frac{p'}{2s' . (p' - s')};$$

on aura

$$P = \int \frac{\gamma dz''}{\sqrt{\pi}} . c^{-\gamma^2 z''^2}.$$

La probabilité que l'erreur d'un nombre quelconque de la table, sera comprise dans les limites zéro et une quantité quelconque, est donc indépendante, soit des nombres intermédiaires, soit des nombres subséquens.

Si l'on fait $\gamma z'' = t$, on aura

$$\frac{z''}{s'} = t . \sqrt{\frac{2 . (p' - s')}{p's'}},$$

et la probabilité P que le rapport de l'erreur du nombre s' de la table, à ce nombre lui-même, sera compris dans les limites $\pm t . \sqrt{\frac{2 . (p' - s')}{p's'}}$, est

$$P = 2 . \int \frac{dt}{\sqrt{\pi}} . c^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis t nul. On voit ainsi que la valeur de t, et par conséquent la probabilité P restant les mêmes, ce rapport augmente lorsque s' diminue; ainsi les nombres de la table sont d'autant moins sûrs, qu'ils sont plus éloignés du premier p'. On voit encore que ce rapport diminue à mesure que p' augmente, ou à mesure que l'on multiplie les observations; de manière que l'on peut par cette multiplication, diminuer à la fois ce rapport et augmenter t; ce rapport devenant nul lorsque p' est infini, et P devenant alors égal à l'unité.

31. Appliquons l'analyse précédente à la recherche de la population d'un grand empire. L'un des moyens les plus simples et les plus propres à déterminer cette population, est l'observation des naissances annuelles dont on est obligé de tenir compte pour déterminer l'état civil des enfans. Mais ce moyen suppose que l'on connaît à très-peu près le rapport de la population aux naissances annuelles, rapport que l'on obtient en faisant sur plusieurs points de l'empire, le dénombrement exact des habitans, et en le comparant aux naissances correspondantes observées pendant quelques années consécutives : on en conclut ensuite, par une simple proportion, la population de tout l'empire. Le gouvernement a bien voulu, à ma prière, donner des ordres pour avoir avec précision, ces données. Dans trente départemens distribués sur la surface de la France, de manière à compenser les effets de la variété des climats, on a fait choix des communes dont les maires, par leur zèle et leur intelligence, pouvaient fournir les renseignemens les plus précis. Le dénombrement exact des habitans de ces communes, pour le 22 septembre 1802, s'est élevé à 2037615 individus. Le relevé des naissances, des mariages et des morts, depuis le 22 septembre 1799 jusqu'au 22 septembre 1802, a donné pour ces trois années,

Naissances.	*Mariages.*	*Décès.*
110312 garçons, 105287 filles,	46037	103659 mâles, 99443 femelles.

Le rapport des naissances des garçons à celles des filles, que ce relevé présente, est celui de 22 à 21; et les mariages sont aux naissances, comme 3 à 14 : le rapport de la population aux naissances annuelles est 28,352845. En supposant donc le nombre des naissances annuelles en France, égal à un million, ce qui s'éloigne peu de la vérité; on aura, en multipliant par le rapport précédent, ce dernier nombre, la population de la France égale à 28352845 individus. Voyons l'erreur que l'on peut craindre dans cette évaluation.

Pour cela, concevons une urne qui renferme une infinité de boules blanches et noires dans un rapport inconnu. Supposons ensuite qu'ayant tiré au hasard un grand nombre p de ces boules, q aient été blanches, et que dans un second tirage, sur un nombre inconnu de boules extraites, il y en ait q' de blanches. Pour en déduire ce nombre inconnu, on suppose son rapport à q', le même que celui de p à q; ce qui donne $\frac{pq'}{q}$ pour ce nombre. Cherchons la probabilité que le nombre des boules extraites au second tirage, est compris dans les limites $\frac{pq'}{q} \pm z$. Nommons x le rapport inconnu du nombre des boules blanches, au nombre total des boules de l'urne. La probabilité de l'événement observé dans le premier tirage, sera exprimée par le terme qui a pour facteur $x^q.(1-x)^{p-q}$ dans le développement du binome $(x+\overline{1-x})^p$; d'où il est facile de conclure, comme dans le numéro précédent, que la probabilité de x est

$$\frac{x^q dx.(1-x)^{p-q}}{\int x^q dx.(1-x)^{p-q}};$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Concevons maintenant que dans le second tirage, le nombre total des boules extraites est $\frac{pq'}{q}+z$; la probabilité du nombre observé q' de boules blanches, sera le terme du binome $(x+\overline{1-x})^{\frac{pq'}{q}+z}$, qui a pour facteur $x^{q'}.(1-x)^{\frac{pq'}{q}+z-q'}$; cette probabilité est donc

$$\frac{1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+z\right)}{1.2.3\ldots q'.1.2.3\ldots\left(\frac{pq'}{q}+z-q'\right)}.x^{q'}.(1-x)^{\frac{pq'}{q}+z-q'}.$$

En la multipliant par la probabilité précédente de x, en intégrant le produit depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et en le divisant par ce même produit multiplié pour dz, et intégré pour toutes les valeurs positives et négatives de z, on aura la probabilité que le nombre total

total des boules extraites, est $\frac{pq'}{q}+z$. On trouvera ainsi, par l'analyse du numéro précédent, cette probabilité égale à

$$\sqrt{\frac{q^3}{2pq'.(p-q).(q+q').\pi}}.c^{-\frac{q^3z^2}{2pq'.(p-q).(q+q')}};$$

en nommant donc P la probabilité que le nombre des boules extraites dans le second tirage, est compris dans les limites $\frac{pq'}{q}\pm z$, on aura

$$P=1-2\int dz.\sqrt{\frac{q^3}{2pq'.(p-q).(q+q').\pi}}.c^{-\frac{q^3z^2}{2pq'.(p-q).(q+q')}},$$

l'intégrale étant prise depuis $z=z$ jusqu'à z infini.

Maintenant, le nombre p des boules extraites dans le premier tirage, peut représenter un dénombrement; et le nombre q des boules blanches qui y sont comprises, peut exprimer le nombre des femmes qui, dans ce dénombrement, doivent devenir mères dans l'année, ou le nombre des naissances annuelles, correspondantes au dénombrement. Alors q' exprime le nombre des naissances annuelles observées dans tout l'empire, et d'où l'on conclut la population $\frac{pq'}{q}$. Dans ce cas, la valeur précédente de P exprime la probabilité que cette population est comprise dans les limites $\frac{pq'}{q}\pm z$.

Nous supposerons, conformément aux données précédentes,

$$p=2037615,\quad q=\frac{110313+105287}{2};$$

nous supposerons ensuite

$$q'=1500000,\quad z=500000;$$

la formule précédente donne alors

$$P=1-\frac{1}{1162}.$$

Il y a donc environ 1161 à parier contre un, qu'en fixant à

42529267, la population correspondante à quinze cent mille naissances, on ne se trompera pas d'un demi-million.

La différence entre la certitude et la probabilité P diminue avec une très-grande rapidité, lorsque z augmente: elle serait insensible, si l'on supposait $z = 700000$.

32. Considérons maintenant la probabilité des événemens futurs, tirée des événemens observés; et supposons qu'ayant observé un événement composé d'un nombre quelconque d'événemens simples, on cherche la probabilité d'un résultat futur, composé d'événemens semblables.

Nommons x la probabilité de chaque événement simple, y la probabilité correspondante du résultat observé, et z celle du résultat futur; la probabilité de x sera, comme on l'a vu,

$$\frac{ydx}{\int ydx},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; $\frac{yzdx}{\int ydx}$ est donc la probabilité du résultat futur, prise de la valeur de x, considérée comme cause de l'événement simple; ainsi en nommant P la probabilité entière de l'événement futur, on aura

$$P = \frac{\int yzdx}{\int ydx},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Supposons, par exemple, qu'un événement étant arrivé m fois de suite, on demande la probabilité qu'il arrivera les n fois suivantes. Dans ce cas, x étant supposé représenter la possibilité de l'événement simple, x^m sera celle de l'événement observé, et x^n celle de l'événement futur; ce qui donne

$$y = x^m, \quad z = x^n;$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{m+1}{m+n+1}.$$

Supposons l'événement observé, composé d'un très-grand nombre d'événemens simples; soit a la valeur de x qui rend y un *maximum*, et Y ce *maximum*; soit a' la valeur de x qui rend yz un *maximum*, et Y' et Z' ce que deviennent y et z à ce *maximum*. On aura par le n° 27 du premier Livre, à très peu près,

$$\int y\,dx = \frac{Y^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\frac{ddY}{dx^2}}},$$

$$\int yz\,dx = \frac{(Y'Z')^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\frac{dd(Y'Z')}{dx^2}}}.$$

Le résultat observé étant composé d'un très-grand nombre d'événemens simples, supposons que l'événement futur soit beaucoup moins composé. L'équation qui donne la valeur a' de x, correspondante au *maximum* de yz, est

$$o = \frac{dy}{ydx} + \frac{dz}{zdx}.$$

$\frac{dy}{ydx}$ est une quantité très-grande, de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$; et puisque le résultat futur est très-peu composé par rapport au résultat observé, $\frac{z}{zdx}$ sera d'un ordre moindre, que nous désignerons par $\frac{1}{\alpha^{1-\lambda}}$; ainsi a étant la valeur de x qui satisfait à l'équation $o = \frac{dy}{ydx}$; la différence entre a et a' sera très-petite de l'ordre α^{λ}, et l'on pourra supposer

$$a' = a + \alpha^{\lambda}.\mu.$$

Cette supposition donne

$$Y' = Y + \alpha^{\lambda}.\mu.\frac{dY}{dx} + \frac{\alpha^{2\lambda}.\mu^2}{1.2}.\frac{d^2Y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Mais on a $\frac{dY}{d} = o$, et il est facile d'en conclure que $\frac{d^nY}{Ydx^n}$ est d'un ordre égal ou moindre que $\frac{1}{\alpha^{\frac{n}{2}}}$; le terme $\frac{\alpha^{\lambda n}.\mu^n}{1.2.3...n}.\frac{d^nY}{Ydx^n}$ sera par conséquent au plus de l'ordre $\alpha^{n(\lambda-\frac{1}{2})}$. Ainsi la convergence de l'expression de Y' en série, exige que λ surpasse $\frac{1}{2}$; et dans ce cas, Y' ne diffère de Y, que de quantités de l'ordre $\alpha^{2\lambda-1}$.

Si l'on nomme Z ce que devient z lorsqu'on y fait $x=a$; on s'assurera de la même manière que Z' peut se réduire à Z. Enfin, on prouvera par un raisonnement semblable, que $\frac{d^n.(Z'Y')}{dx^n}$ se réduit à très-peu près à $Z.\frac{d^nY}{dx^n}$. En substituant ces valeurs dans l'expression de P, on aura

$$P=Z;$$

c'est-à-dire que l'on peut alors déterminer la probabilité du résultat futur, en supposant x égal à la valeur qui rend le résultat observé, le plus probable. Mais il faut pour cela que le résultat futur soit assez peu composé, pour que les exposans des facteurs de z soient d'un ordre de grandeur plus petit que la racine carrée des facteurs de y; autrement, la supposition précédente exposerait à des erreurs sensibles.

Si le résultat futur est une fonction du résultat observé, z sera une fonction de y, que nous représenterons par $\varphi(y)$. La valeur de x, qui rend zy un *maximum* est, dans ce cas, la même qui rend y un *maximum*; ainsi l'on a $a'=a$; et si l'on désigne $\frac{d.\varphi(y)}{dy}$ par $\varphi'(y)$, l'expression de P deviendra, en observant que $\frac{dY}{x}=0$,

$$P=\frac{\varphi(Y)}{\sqrt{1+\frac{Y.\varphi'(Y)}{\varphi(Y)}}}.$$

Si $\varphi(y)=y^n$, ensorte que l'événement futur soit n fois la répétition de l'événement observé; on aura

$$P=\frac{Y^n}{\sqrt{n+1}}.$$

La probabilité P calculée dans la supposition que la possibilité des événemens simples est égale à celle qui rend le résultat observé le plus probable, est Y^n: on voit ainsi que les petites erreurs qui résultent de cette supposition, s'accumulent à raison des événemens simples qui entrent dans le résultat futur, et deviennent très-sensibles lorsque ces événemens sont en grand nombre.

33. Depuis 1745, époque où l'on a commencé à distinguer à Paris sur les registres, les baptêmes des garçons de ceux des filles, on a constamment observé que le nombre des premiers a été supérieur à celui des seconds. Déterminons la probabilité que cette supériorité se maintiendra pendant un tems donné, par exemple, dans l'espace d'un siècle.

Soit p le nombre observé des baptêmes des garçons; q celui des filles; $2n$ le nombre des baptêmes annuels; x la probabilité que l'enfant qui va naître et être baptisé sera un garçon. En élevant $x+\overline{1-x}$ à la puissance $2n$, et développant cette puissance, on aura

$$x^{2n}+2n.x^{2n-1}.(1-x)+\frac{2n.(2n-1)}{1.2}.x^{2n-2}.(1-x)^2+\text{etc.}$$

La somme des n premiers termes de ce développement, sera la probabilité que chaque année, le nombre des baptêmes des garçons l'emportera sur celui des baptêmes des filles. Nommons z cette somme; z^i sera la probabilité que cette supériorité se maintiendra pendant le nombre i d'années consécutives; donc si l'on désigne par P la probabilité entière que cela aura lieu; on aura par le numéro précédent,

$$P=\frac{\int x^p dx.z^i.(1-x)^q}{\int x^p dx.(1-x)^q},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

Si l'on nomme a la valeur de x qui rend $x^p.z^i.(1-x)^q$ un *maximum*, et que l'on désigne par Z, $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{d^2Z}{dx^2}$, ce que deviennent z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ lorsqu'on y change x en a; on aura par le n° 26,

$$\int x^p dx.z^i.(1-x)^q=\frac{a^{p+1}.(1-a)^{q+1}.Z^i.\sqrt{2\pi}}{\sqrt{p.(1-a)^2+q.a^2+i.a^2.(1-a)^2.\left(\frac{dZ^2-ZddZ}{Z^2.dx^2}\right)}}.$$

z étant la somme des n premiers termes de la fonction

$$x^{2n}.\left[1+2n.\frac{(1-x)}{x}+\frac{2n.(2n-1)}{1.2}.\frac{(1-x)^2}{x^2}+\text{etc.}\right],$$

on a par le n° 37 du premier Livre,

$$z=\frac{\int\frac{u^{n-1}.du}{(1+u)^{2n+1}}}{\int\frac{u^{n-1}.du}{(1+u)^{2n+1}}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $u=\frac{1-x}{x}$ jusqu'à $u=\infty$, et celle du dénominateur étant prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=\infty$. Soit $u=\frac{1-s}{s}$, cette valeur de z deviendra

$$z=\frac{\int s^n ds.(1-s)^{n-1}}{\int s^n ds.(1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=x$, et celle du dénominateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$. De là on tire

$$\frac{dz}{zdx}=\frac{x^n.(1-x)^{n-1}}{\int s^n.ds.(1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=x$. On aura ensuite

$$\frac{ddz}{zdx^2}=\frac{dz}{zdx}.\frac{n-(2n-1).x}{x.(1-x)}.$$

En changeant x en a dans ces expressions, on aura celles de Z, $\frac{dZ}{Zdx}$, $\frac{ddZ}{Zdx^2}$.

Pour déterminer a, nous observerons que la condition du *maximum* de $x^p.z^i.(1-x)^q$, donne

$$0=\frac{p}{a}-\frac{q}{1-a}+i.\frac{dZ}{Zdx};$$

d'où l'on tire, en substituant pour $\frac{dZ}{Z.dx}$, sa valeur précédente,

$$a=\frac{p}{p+q}+\frac{i.a^{n+1}.(1-a)^n}{(p+q).\int s^n ds.(1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=a$. Pour conclure a de cette équation, nous observerons que la valeur de s qui rend $s^n.(1-s)^{n-1}$ un *maximum*, est à très-peu près $\frac{1}{2}$, et par conséquent, moindre que $\frac{p}{p+q}$ qui lui-même est plus petit que a. Ainsi n étant supposé un grand nombre, on peut, sans erreur sensible, étendre l'intégrale de cette expression de a, depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$, le terme qui en dépend étant très-petit. Cela donne par le n° 28,

$$\int s^n ds.(1-s)^{n-1} = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}.(n-1)^{n-\frac{1}{2}}.\sqrt{2\pi}}{(2n-1)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}.\sqrt{n}};$$

l'équation qui détermine a devient ainsi à fort peu près,

$$a = \frac{p}{p+q} + \frac{i.a^{n+1}.(1-a)^n.2^{2n}.\sqrt{n}}{(p+q).\sqrt{\pi}}.$$

Pour la résoudre, nous observerons que a diffère très-peu de $\frac{p}{p+q}$: ensorte que si l'on fait

$$a = \frac{p}{p+q} + \mu,$$

μ sera fort petit, et l'on aura d'une manière très approchée,

$$\mu = i.\sqrt{n}.\frac{p.\left[1-\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2\right]^n}{(p+q)^2.\sqrt{\pi}}.c^{-\frac{n\mu.(p+q)(p-q)}{pq}-\frac{(p+q)^2.n\mu^2}{pq}}; \quad (1)$$

on aura ensuite à très-peu près,

$$a^p.(1-a)^q = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p.\left(\frac{q}{p+q}\right)^q.c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}.\mu^2}.$$

En substituant dans le radical

$$\sqrt{p.(1-a)^2+qa^2+i.a^2.(1-a)^2.\left(\frac{dZ^2-ZddZ}{Z^2.dx^2}\right)},$$

pour a, sa valeur $\frac{p}{p+q}+\mu$; pour $\frac{dZ}{Zdx}$, sa valeur $\frac{(p+q).a-p}{ia.(1-a)}$ ou

$\frac{(p+q).u}{ia.(1-a)}$; et pour $\frac{ddZ}{Zdx^2}$, sa valeur $\frac{dZ}{Zdx}\cdot\frac{n-(2n-1).a}{a.(1-a)}$; ce radical devient à fort peu près,

$$\sqrt{\frac{pq}{p+q}}\cdot\sqrt{1+\frac{(p+q).\mu}{pq}.[n.(p-q)-p]+\frac{(p+q)^2}{pq}.\mu^2:\left(2n+\frac{(p+q)}{i}\right)}.$$

Enfin, on a par le n° 27,

$$\int x^p dx.(1-x)^q=\left(\frac{p}{p+q}\right)^p\cdot\left(\frac{q}{p+q}\right)^q\cdot\sqrt{\frac{pq}{p+q}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{p+q}.$$

Cela posé, l'expression de P deviendra à très-peu près,

$$P=\frac{Z^i.c^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}.\mu^2}}{\sqrt{1+\frac{(p+q).u}{pq}.[n.\overline{p-q}-p]+\frac{(p+q)^2.\mu^2}{pq}.\left(2n+\frac{(p+q)}{i}\right)}}.\quad(2)$$

Il ne s'agit donc plus que de déterminer Z. On a

$$Z=\frac{\int s^n.ds.(1-s)^{n-1}}{\int s^n.ds.(1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=a$; et celle du dénominateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$. Il est facile d'en conclure que l'on a

$$Z=1-\frac{\int s^n.ds.(1-s)^{n-1}}{\int s^n.ds.(1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s=a$ jusqu'à $s=1$ et celle du dénominateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$; on aura ainsi à fort peu près, par le n° 28,

$$Z=1-\frac{\int dt.c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},\quad(3)$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis

$$t^2=\frac{(2n-1)}{2n.(n-1)}\cdot\left(\frac{n.(p-q)}{p+q}-\frac{p}{p+q}+(2n-1).\mu\right)^2$$

jusqu'à $t^2=\infty$.

Pour

Pour appliquer des nombres à ces formules, nous observerons que, par ce qui précède, dans l'intervalle du commencement de 1745 à la fin de 1784, on a par le n° 28, relativement à Paris,

$$p = 393386, \quad q = 377555.$$

En divisant par 40 la somme de ces deux nombres, on aura 19273,5 pour le nombre moyen des baptêmes annuels; ce qui donne $n = 9636{,}75$; nous supposerons de plus $i = 100$. Au moyen de ces valeurs, on déterminera celle de μ, par l'équation (1); on déterminera ensuite la valeur de Z par l'équation (3); enfin l'équation (2) donnera la valeur de P. On trouvera ainsi

$$P = 0{,}782.$$

Il y avait donc à la fin de 1784, d'après ces données, près de quatre contre un à parier que dans l'espace d'un siècle, les baptêmes des garçons à Paris, l'emporteront, chaque année, sur ceux des filles.

CHAPITRE VII.

De l'influence des inégalités inconnues qui peuvent exister entre des chances que l'on suppose parfaitement égales.

34. J'ai déjà considéré cette influence dans le n° 1, où l'on a vu que ces inégalités augmentent la probabilité des événemens composés de la répétition des événemens simples. Je vais reprendre ici cet objet important dans les applications de l'analyse des probabilités.

Il résulte du numéro cité, que si au jeu de *croix* et *pile*, il existe une différence inconnue entre les possibilités d'amener l'un ou l'autre; en nommant α cette différence, ensorte que $\frac{1\pm\alpha}{2}$ soit la possibilité d'amener *croix*, et par conséquent $\frac{1\mp\alpha}{2}$ celle d'amener *pile*, celui des deux signes $+$ et $-$ que l'on doit adopter étant inconnu; la probabilité d'amener *croix* n fois de suite, sera

$$\frac{(1+\alpha)^n+(1-\alpha)^n}{2^{n+1}}$$

ou

$$\frac{1}{2^n}\cdot\left(1+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\alpha^2+\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}.\alpha^4+\text{etc.}\right). \quad (1)$$

Le jeu de *croix* et *pile* consiste, comme on sait, à projeter en l'air une pièce très-mince, qui retombe nécessairement sur l'une de ses deux faces opposées que l'on nomme *croix* et *pile*. On peut diminuer la valeur de α, en rendant ces deux faces le plus égales qu'il est possible. Mais il est physiquement impossible d'obtenir une égalité parfaite; et alors, celui qui parie d'amener *croix* deux fois de suite, ou *pile* deux fois de suite, a de l'avantage sur celui qui parie que dans deux coups, *croix* et *pile* alterneront; sa probabilité étant $\frac{1+\alpha^2}{2}$.

On peut diminuer l'influence de l'inégalité des deux faces de la pièce, en les soumettant elles-mêmes aux chances du hasard. Désignons par A cette pièce, et concevons une seconde pièce B semblable à la première. Supposons qu'après avoir projeté cette seconde pièce, on projette la pièce A pour former un premier coup, et déterminons la probabilité que dans n coups pareils consécutifs, la pièce A présentera les mêmes faces que la pièce B. Si l'on nomme p la probabilité d'amener *croix* avec la pièce A, et q la probabilité d'amener *pile*; si l'on désigne ensuite par p' et q' les mêmes probabilités pour la pièce B; $pp'+qq'$ sera la probabilité que dans un coup, la pièce A présentera les mêmes faces que la pièce B; ainsi $(pp'+qq')^n$ sera la probabilité que cela aura lieu constamment dans n coups. Soit

$$p=\frac{1+\alpha}{2},\quad q=\frac{1-\alpha}{2},$$
$$p'=\frac{1+\alpha'}{2},\quad q'=\frac{1-\alpha'}{2};$$

on aura

$$(pp'+qq')^n=\frac{1}{2^n}.(1+\alpha\alpha')^n.$$

Mais comme on ignore quelles sont les faces que les inégalités α et α' favorisent, la probabilité précédente peut être également ou $\frac{1}{2^n}.(1+\alpha\alpha')^n$, ou $\frac{1}{2^n}.(1-\alpha\alpha')^n$, suivant que α et α' sont de même signe ou de signes contraires; la vraie valeur de cette probabilité est donc, α et α' étant supposés positifs,

$$\frac{1}{2^{n+1}}.[(1+\alpha\alpha')^n+(1-\alpha\alpha')^n]$$

ou

$$\frac{1}{2^n}.\left(1+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\alpha^2\alpha'^2+\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}.\alpha^4\alpha'^4+\text{etc.}\right).$$

Si l'on compare cette formule à la formule (1), on voit qu'elle se rapproche plus qu'elle, de $\frac{1}{2^n}$, ou de la probabilité qui aurait lieu, si les faces des pièces étaient parfaitement égales. Ainsi l'inégalité de ces faces, est par là corrigée en grande partie : elle le serait même en totalité, si α' était nul, ou si les deux faces de la pièce *B* étaient parfaitement égales.

p représentant la probabilité de *croix*, avec la pièce *A*, et *q* celle de *pile*; la probabilité d'amener *croix* un nombre impair de fois dans *n* coups, sera

$$\tfrac{1}{2}.[(p+q)^n \mp (p-q)^n],$$

le signe — ayant lieu si *n* est pair, et le signe + ayant lieu si *n* est impair. Faisant $p = \frac{1+\alpha}{2}$, $q = \frac{1-\alpha}{2}$, la fonction précédente devient

$$\tfrac{1}{2}.(1 \mp \alpha^n).$$

Si *n* est impair et égal à $2i+1$, cette fonction est

$$\tfrac{1}{2}.(1 + \alpha^{2i+1});$$

mais comme on peut y supposer également α positif ou négatif, il faut prendre la moitié de la somme de ses deux valeurs relatives à ces suppositions; ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour sa véritable valeur; l'inégalité des faces de la pièce ne change donc point alors la probabilité $\frac{1}{2}$ d'amener *croix* un nombre impair de fois. Mais si *n* est pair et égal à $2i$, cette probabilité devient

$$\tfrac{1}{2}.(1 - \alpha^{2i}), \quad (2)$$

$\pm\alpha$ étant l'inégalité inconnue de probabilité entre *croix* et *pile*; il y a donc du désavantage à parier d'amener *croix* ou *pile* un nombre impair de fois dans $2i$ coups, et par conséquent, il y a de l'avantage à parier d'amener l'un ou l'autre, un nombre pair de fois.

On peut diminuer ce désavantage, en changeant le pari d'amener *croix* un nombre impair de fois en $2i$ coups, dans le pari d'amener dans le même nombre de coups, un nombre impair de ressemblances entre les faces des deux pièces *A* et *B*, projetées comme on l'a dit ci-dessus. En effet, la probabilité d'une ressemblance à chaque coup est, comme on l'a vu, $pp' + qq'$, et la probabilité d'une dissemblance est $pq' + p'q$. Nommons *P* la première de ces deux quantités, et *Q* la seconde; la probabilité d'amener un nombre impair de ressemblances dans $2i$ coups, sera

$$\tfrac{1}{2}.[(P+Q)^{2i}-(P-Q)^{2i}].$$

Si l'on fait, comme précédemment,

$$p=\frac{1+\alpha}{2},\quad q=\frac{1-\alpha}{2},\quad p'=\frac{1+\alpha'}{2},\quad q'=\frac{1-\alpha'}{2};$$

on aura

$$P=\frac{1+\alpha\alpha'}{2},\quad Q=\frac{1-\alpha\alpha'}{2};$$

la fonction précédente devient ainsi,

$$\tfrac{1}{2}.(1-\alpha^{2i}.\alpha'^{2i}).$$

Cette fonction reste la même, quelque changement que l'on fasse dans les signes de α et de α'; elle est donc la vraie probabilité d'amener un nombre impair de ressemblances; mais α et α' étant de petites fractions, on voit qu'elle se rapproche de $\frac{1}{2}$, plus que la formule (2); le désavantage d'un nombre impair est donc par là diminué.

On voit par ce qui précède, que l'on peut diminuer l'influence des inégalités inconnues entre des chances que l'on suppose égales, en les soumettant elles-mêmes au hasard. Par exemple, si l'on met dans une urne, les n^{os} 1, 2, 3,....n, suivant cet ordre, et qu'ensuite après avoir agité l'urne pour bien mêler ces numéros, on en tire un; s'il y a entre les probabilités de sortie des numéros, une petite différence dépendant de l'ordre suivant lequel ils ont été placés dans l'urne; on la diminuera considérablement, en mettant dans une seconde urne, ces numéros, suivant leur ordre de sortie de la première urne, et en agitant ensuite cette seconde urne, pour en bien mêler les numéros. Alors l'ordre suivant lequel on a placé les numéros dans la première urne, aura extrêmement peu d'influence sur l'extraction du premier numéro qui sortira de la seconde urne. On diminuerait encore cette influence, en considérant de la même manière une troisième urne, une quatrième, etc.

Considérons deux joueurs A et B jouant ensemble, de manière qu'à chaque coup, celui qui perd, donne un jeton à son adversaire, et que la partie dure jusqu'à ce que l'un d'eux ait gagné tous les jetons de l'autre. Soient p et q leurs adresses respectives; a et b leurs nombres de jetons en commençant. Il résulte de la formule (H) du n° 10, en y faisant i infini, que la probabilité de A, pour gagner la partie, est

$$\frac{p^b.(p^a-q^a)}{p^{a+b}-q^{a+b}}.$$

Si l'on fait dans cette expression,

$$p=\frac{1\pm\alpha}{2}, \quad q=\frac{1\mp\alpha}{2};$$

on aura, en prenant le signe supérieur, la probabilité relative au cas où A est plus fort que B; et en prenant le signe inférieur, on aura la probabilité relative au cas où A est moins fort que B. Si l'on ignore quel est le plus fort des joueurs, la demi-somme de ces deux probabilités sera la probabilité de A, que l'on trouve ainsi égale à

$$\frac{\frac{1}{2}\left[(1+\alpha)^a-(1-\alpha)^a\right].\left[(1+\alpha)^b+(1-\alpha)^b\right]}{(1+\alpha)^{a+b}-(1-\alpha)^{a+b}}; \qquad (3)$$

en changeant a en b, et réciproquement, on aura la probabilité de B. Si l'on suppose α infiniment petit ou nul; ces probabilités deviennent $\frac{a}{a+b}$ et $\frac{b}{a+b}$; elles sont donc proportionnelles aux nombres des jetons des joueurs; ainsi pour l'égalité du jeu, leurs mises doivent être dans ce rapport. Mais alors l'inégalité qui peut exister entre eux, est favorable au joueur qui a le plus petit nombre de jetons; car si l'on suppose a moindre que b, il est facile de voir que l'expression (3) est plus grande que $\frac{a}{a+b}$. Si les joueurs conviennent de doubler, de tripler, etc. leurs jetons; l'avantage de A augmente sans cesse, et dans le cas de a et b infinis, sa probabilité devient $\frac{1}{2}$ ou la même que celle de B.

P étant la probabilité d'un événement composé de deux événemens simples dont p et $1-p$ sont les probabilités respectives; si l'on suppose que la valeur de p soit susceptible d'une inégalité inconnue z qui puisse s'étendre depuis $-\alpha$ jusqu'à $+\alpha$; en nommant φ la probabilité de $p+$ [illegible] étant fonction de z; on aura pour la vraie probabilité de l'événement composé,

$$\frac{\int P'\varphi dz}{\int \varphi dz},$$

P' étant ce que devient P lorsqu'on y change p dans $p+z$, et les intégrales étant prises depuis $z=-\alpha$ jusqu'à $z=\alpha$.

Si l'on n'a d'autres données pour déterminer z, qu'un événement observé, formé des mêmes événemens simples; en nommant Q la probabilité de cet événement, $p+z$ et $1-p-z$ étant les probabilités des événemens simples; l'expression précédente donne, en y changeant φ en Q, pour la probabilité de l'événement composé,

$$\frac{\int P'Qdz}{\int Qdz},$$

les intégrales étant prises ici depuis $z=-p$ jusqu'à $z=1-p$; ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans le chapitre précédent.

CHAPITRE VIII.

Des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques.

35. Supposons que l'on ait suivi sur un très-grand nombre n d'enfans, la loi de mortalité, depuis leur naissance jusqu'à leur extinction totale; on aura leur vie moyenne, en faisant une somme des durées de toutes leurs vies, et en la divisant par le nombre n. Si ce nombre était infini, on aurait exactement la durée de la vie moyenne. Cherchons la probabilité que la vie moyenne des n enfans, ne s'écartera de celle-ci, que dans des limites données.

Désignons par $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$, la probabilité de mourir à l'âge x, a étant la limite de x; a et x étant supposés renfermer un nombre infini de parties prises pour l'unité. Considérons la puissance

$$\left\{\varphi\left(\frac{0}{a}\right)+\varphi\left(\frac{1}{a}\right).c^{-\varpi\sqrt{-1}}+\varphi\left(\frac{2}{a}\right).c^{-2\varpi\sqrt{-1}}\ldots\ldots+\varphi\left(\frac{x}{a}\right).c^{-x\varpi\sqrt{-1}}\ldots\ldots+\varphi\left(\frac{a}{a}\right).c^{-a\varpi\sqrt{-1}}\right\}^n,$$

il est visible que le coefficient de $c^{-(l+n\mu).\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement de cette puissance, est la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfans parviendront, sera $l+n\mu$; en multipliant donc par $c^{(l+n\mu).\varpi\sqrt{-1}}$ la puissance précédente, le terme indépendant des puissances de $c^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$ dans le produit, sera cette probabilité qui par conséquent, est égale à

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi.c^{l\varpi\sqrt{-1}}.\left\{c^{\mu\varpi\sqrt{-1}}.\left[\varphi\left(\frac{0}{a}\right)+\varphi\left(\frac{1}{a}\right).c^{-\varpi\sqrt{-1}}\ldots+\varphi\left(\frac{x}{a}\right).c^{-x\varpi\sqrt{-1}}\ldots+\varphi\left(\frac{a}{a}\right).c^{-a\varpi\sqrt{-1}}\right]\right\}^n, \quad (1)$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=-\pi$ jusqu'à $\varpi=\pi$.

Si

Si l'on prend dans cette intégrale, le logarithme hyperbolique de la quantité sous le signe $\int$, élevée à la puissance n, on aura, en développant les exponentielles en séries, ce logarithme égal à

$$n\mu.\varpi\sqrt{-1}+n.\log\left\{\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)-\varpi\sqrt{-1}.\int x.\varphi\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{\varpi^2}{2}.\int x^2.\varphi\left(\frac{x}{a}\right)+\text{etc.}\right\};\ (2)$$

le signe $\int$ se rapportant ici à toutes les valeurs de x, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$. Si l'on fait $\frac{x}{a}=x'$, et si l'on observe que la variation de x étant l'unité, on a $adx'=1$; on aura

$$\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)=a.\int dx'.\varphi(x'),$$

$$\int x.\varphi\left(\frac{x}{a}\right)=a^2.\int x'dx'.\varphi(x'),$$

$$\int x^2.\varphi\left(\frac{x}{a}\right)=a^3.\int x'^2dx'.\varphi(x'),$$

etc.,

les intégrales relatives à x' étant prises depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=1$. Nommons k, k', k'', etc. ces intégrales successives; la probabilité que la durée de la vie d'un enfant, sera comprise dans les limites zéro et a, est $\int\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ ou $a.\int dx'.\varphi(x')$; or cette probabilité est la certitude elle-même; on a donc $ak=1$. Cela posé, la fonction (2) devient

$$n\mu.\varpi\sqrt{-1}+n.\log\left(1-\frac{k'}{k}.a\varpi\sqrt{-1}-\frac{k''}{k}.\frac{a^2\varpi^2}{2}+\text{etc.}\right),$$

ou

$$\left(\frac{n\mu}{a}-\frac{nk'}{k}\right).a\varpi\sqrt{-1}-n.\frac{(kk''-k'^2)}{2k^2}.a^2\varpi^2-\text{etc.}$$

Si l'on fait

$$\mu=\frac{ak'}{k}=\frac{a^2k'}{ak}=a^2k',$$

la première puissance de ϖ disparaît; et de plus, n étant supposé un très-grand nombre, on peut s'arrêter à la seconde puissance de ϖ; la fonction (1) devient ainsi, en repassant des logarithmes aux nombres;

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi.c^{l\varpi\sqrt{-1}-n.\frac{(kk''-k'^2)}{2k^2}.a^2\varpi^2}$$

Si l'on fait

$$\mathrm{C}^2=\frac{k^2}{2(kk''-k'^2)},\quad t=\frac{a\varpi.\sqrt{n}}{2\mathrm{C}}-\frac{\mathrm{C}l.\sqrt{-1}}{a.\sqrt{n}},$$

cette intégrale devient, en la prenant depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$,

$$\frac{\mathrm{C}}{a.\sqrt{n\pi}}.c^{-\frac{\mathrm{C}^2l^2}{a^2n}}.$$

En la multipliant par dl, et faisant $l=ar.\sqrt{n}$, on aura

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int\mathrm{C}dr.c^{-\mathrm{C}^2r^2}$$

pour la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfans parviendront, sera comprise dans les limites $na^2k'\pm ar.\sqrt{n}$.

La quantité a^2k' ou $\int x.\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ est la somme des produits de chaque âge, par la probabilité d'y parvenir; elle est donc la vraie durée de la vie moyenne; ainsi la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfans cesseront de vivre, divisée par leur nombre, est comprise dans ces limites

Vraie durée de la vie moyenne, plus ou moins $\frac{ar}{\sqrt{n}}$,

a pour expression

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int\mathrm{C}dr.c^{-\mathrm{C}^2r^2}.$$

La valeur moyenne de r, en plus ou en moins, est par le n° 20,

$$\pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\int\mathrm{C}rdr.c^{-\mathrm{C}^2r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $r=0$ jusqu'à r infini. En la multipliant par $\frac{a}{\sqrt{n}}$, on aura l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, lorsqu'on prend pour durée moyenne de la vie, la somme des âges qu'ont vécu les n enfans considérés ci-dessus, divisée par n, quotient que nous désignerons par G; cette erreur est donc

$$\pm \frac{a}{2\mathcal{C}.\sqrt{n\pi}}.$$

On a à très-peu près,

$$a^2 k' = G;$$

et comme $ak = 1$, on aura

$$\frac{k'}{k} = \frac{G}{a}.$$

Si l'on nomme ensuite H, la somme des carrés des âges qu'ont vécu les n enfans, divisée par n; on trouvera, par l'analyse du n° 19,

$$\frac{k''}{k}.a^2 = H;$$

ces valeurs donnent

$$\mathcal{C}^2 = \frac{a^2}{2.(H - G^2)}:$$

l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, sur la durée de la vie, devient ainsi

$$\pm \frac{\sqrt{H - G^2}}{\sqrt{2n\pi}}.$$

Il est clair que ces résultats ont également lieu relativement à la durée moyenne de ce qui reste à vivre, lorsqu'au lieu de partir de l'époque de la naissance, on part d'une époque quelconque de la vie.

On peut facilement déterminer, au moyen des tables de mortalité, formées d'année en année, la durée moyenne de ce qui reste à vivre à une personne dont l'âge est d'un nombre entier A d'années. Pour cela, on ajoutera tous les nombres de la table qui suivent celui qui correspond à l'âge A; on divisera la somme par ce dernier nombre, et l'on ajoutera $\frac{1}{2}$ au quotient. En effet, si l'on désigne par (1), (2), (3), etc., les nombres de la table, correspondans à l'année A et aux années suivantes; le nombre des individus qui meurent dans la première année, à partir de l'année A, sera $(1)-(2)$; mais dans ce court intervalle, la mortalité peut être supposée constante; $\frac{1}{2}.[(1)-(2)]$ est donc la somme des durées de leur vie, à partir de l'âge A. Pareillement $\frac{3}{2}.[(2)-(3)]$, $\frac{5}{2}.[(3)-(4)]$, etc. sont les sommes des durées de la vie, à partir du même âge, de ceux qui meurent dans les seconde, troisième, etc. années comptées depuis l'année A. La réunion de toutes ces sommes est $\frac{(1)}{2}+(2)+(3)+(4)+$ etc.; et en la divisant par (1), on aura la durée moyenne de ce qui reste à vivre à la personne de l'âge A. On formera ainsi une table des durées moyennes de ce qui reste à vivre aux différens âges. On pourra même conclure ces durées les unes des autres, en observant que si F désigne cette durée pour l'âge A, et F' la durée correspondante à l'âge $A+1$, on a

$$F=\frac{(2)}{(1)}.(F'+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}.$$

39. Déterminons maintenant la durée moyenne de la vie, qui aurait lieu, si l'une des causes de mortalité venait à s'éteindre. Soit U le nombre des enfans qui sur le nombre n de naissances, vivrait encore à l'âge x dans cette hypothèse; u étant celui des enfans vivans à cet âge sur le même nombre de naissances, dans le cas où cette cause de mortalité subsiste. Nommons $z.\Delta x$, la probabilité qu'un individu de l'âge x, périra de cette maladie dans l'intervalle de tems très-court Δx; $uz.\Delta x$ sera à très-peu près par le nº 25, le nombre des individus u, qui périront de cette maladie dans l'intervalle de tems Δx, si ce nombre est considérable. Pareillement si l'on désigne par $\varphi.\Delta x$ la probabilité qu'un individu de l'âge x périra par les autres causes de mortalité dans l'intervalle Δx; $u\varphi.\Delta x$ sera le nombre des individus qui périront par ces causes, dans l'intervalle de tems Δx; ce sera donc la valeur de $-\Delta u$; j'affecte Δu du signe $-$, parce que u diminue à mesure que x augmente; on a donc

$$-\Delta u=u.\Delta x.(\varphi+z).$$

On aura pareillement

$$-\Delta U=U.\varphi.\Delta x.$$

En éliminant φ de ces deux équations, on aura

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{\Delta u}{u}+z.\Delta x.$$

Δx étant une quantité très-petite, on peut transformer la caractéristique Δ dans la caractéristique différentielle d, et alors l'équation précédente devient

$$\frac{dU}{U}=\frac{du}{u}+zdx;$$

d'où l'on tire en intégrant, et observant qu'à l'âge zéro, $U=u=n$,

$$U=u.c^{\int zdx}; \quad (3)$$

l'intégrale étant prise depuis x nul. On peut obtenir cette intégrale, au moyen des registres de mortalité, dans lesquels on tient compte de l'âge des individus morts, et des causes de leur mort. En effet, $uz.\Delta x$ étant par ce qui précède, le nombre de ceux qui, parvenus à l'âge x, ont péri dans l'intervalle de tems Δx, par la maladie dont il s'agit; on aura à très-peu près l'intégrale $\int zdx$, en supposant Δx égal à une année, et en prenant depuis la naissance des n enfans que l'on a considérés, jusqu'à l'année x, la somme des fractions qui ont pour numérateur le nombre des individus que la maladie a fait périr chaque année, et pour dénominateur, le nombre des n enfans qui vivent encore au milieu de la même année. Ainsi l'on pourra transformer au moyen de l'équation (3), une table de mortalité ordinaire, dans celle qui aurait lieu, si la maladie dont il s'agit, n'existait pas.

La petite vérole a cela de particulier, savoir, que le même individu n'en est jamais deux fois atteint, ou du moins ce cas est si rare, que s'il existe, on peut en faire abstraction. Concevons que sur un très-grand nombre n d'enfans, u parviennent à l'âge x, et que dans le nombre u, y n'aient point eu la petite vérole. Concevons encore que sur ce nombre y, $iydx$ prennent cette maladie dans l'instant dx, et que sur ce nombre, $ir.ydx$ périssent de cette maladie. En désignant, comme ci-dessus, par φ la probabilité de périr à l'âge x, par d'autres causes; on aura évidemment

$$du=-u\varphi.dx-ir.ydx.$$

On aura ensuite

$$dy=-y\varphi.dx-iydx.$$

En effet, y diminue par le nombre de ceux qui, dans l'instant dx, prennent la petite vérole, et ce nombre est par la supposition, $iydx$. y diminue encore par le nombre des individus compris dans y, qui périssent par d'autres causes, et ce nombre est $y\varphi dx$.

Maintenant, si de la première des deux équations précédentes, multipliée par y, on retranche la seconde multipliée par u, et si l'on divise la différence par y^2, on aura

$$d.\frac{u}{y}=i.\frac{u}{y}.dx-irdx;$$

ce qui donne, en intégrant depuis x nul, et observant qu'à cette origine, $u=y=n$,

$$\frac{u}{y}=(1-\int irdx.c^{-\int idx}).c^{\int idx}; \quad (4)$$

cette équation fera connaître le nombre d'individus de l'âge x, qui n'ont point encore eu la petite vérole. On a ensuite

$$zdx=\frac{ir.ydx}{u},$$

zdx étant, comme ci-dessus, ceux qui périssent dans le tems dx, de la maladie que l'on considère. En substituant au lieu de $\frac{y}{u}$, sa valeur précédente; on aura, après avoir intégré,

$$c^{\int zdx}=\frac{1}{1-\int irdx.c^{-\int idx}};$$

l'équation (3) donnera donc

$$U=\frac{u}{1-\int irdx.c^{-\int idx}}. \quad (5)$$

Cette valeur de U suppose que l'on connaît par l'observation i et r. Si ces nombres étaient constans, il serait facile de les déterminer; mais comme ils peuvent varier d'âge en âge, les élémens de la formule (3) sont plus aisés à connaître, et cette formule me semble plus propre à déterminer la loi de mortalité qui aurait lieu, si la petite vérole était éteinte. En lui appliquant les données que l'on a pu se procurer sur la mortalité causée par cette maladie, aux divers âges de la vie ; on trouve que son extinction au moyen de la vaccine, augmenterait de plus de trois années, la durée de la vie moyenne, si d'ailleurs cette durée n'était point restreinte par la diminution relative des subsistances, due à un plus grand accroissement de population.

37. Considérons présentement la durée moyenne des mariages. Pour cela concevons un grand nombre n de mariages entre n garçons de l'âge a, et n filles de l'âge a' ; et déterminons le nombre de ces mariages subsistans après x années écoulées depuis leur origine. Nommons φ la probabilité qu'un garçon qui se marie à l'âge a, parviendra à l'âge $a+x$; et ψ la probabilité qu'une fille qui se marie à l'âge a', parviendra à l'âge $a'+x$. La probabilité que leur mariage subsistera après sa $x^{ième}$ année, sera $\varphi\psi$; donc si l'on développe le binome $(\varphi\psi+\overline{1-\varphi\psi})^n$, le terme $H.(\varphi\psi)^i.(1-\varphi\psi)^{n-i}$ de ce développement, exprimera la probabilité que sur les n mariages, i subsisteront après x années. Le plus grand terme du développement est, par le n° 16, celui dans lequel i est égal au plus grand nombre entier contenu dans $\overline{n+1}.\varphi\psi$; et par le même numéro, il est extrêmement probable que le nombre des mariages subsistans ne s'écartera que très-peu en plus ou en moins de ce nombre. Ainsi, en désignant par i, le nombre des mariages subsistans ; on pourra supposer à très-peu près,

$$i=n.\varphi\psi.$$

$n\varphi$ est à fort peu près le nombre des n maris vivans à l'âge $a+x$. Les tables de mortalité le feront connaître d'une manière fort approchée, si elles ont été formées sur des listes nombreuses de mortalité ; car si l'on désigne par p' le nombre des hommes vivans à l'âge a, sur l'ensemble de ces listes, et par q' le nombre des survivans à l'âge $a+x$; on aura à fort peu près, par le n° 29,

$$n.\varphi=\frac{n.q'}{p'}.$$

Si l'on nomme pareillement p'' le nombre des femmes vivantes à l'âge a', et par q'' le nombre des survivantes à l'âge $a'+x$; on aura à très-peu près,

$$n.\psi = \frac{n.q''}{p''};$$

donc

$$i = \frac{n.q'q''}{p'p''}.$$

On formera ainsi d'année en année, une table des valeurs de i. En faisant ensuite une somme de tous les nombres de cette table, et en la divisant par n; on aura la durée moyenne des mariages faits à l'âge a pour les garçons, et à l'âge a' pour les filles.

Cherchons maintenant la probabilité que l'erreur de la valeur précédente de i, sera comprise dans des limites données. Supposons pour simplifier le calcul, que les deux conjoints soient du même âge, et que la probabilité de la vie des hommes soit la même que celle des femmes; alors on a

$$a' = a, \quad q'' = q', \quad p'' = p', \quad \varphi = \psi;$$

et l'expression précédente de i devient

$$i = \frac{n.q'^2}{p'^2}.$$

Concevons que la valeur de i soit $\frac{n.q'^2}{p'^2} + s$; s sera l'erreur de cette expression de i. On a vu dans le n° 30, que si l'on a observé que sur un très-grand nombre p d'individus de l'âge a, q sont parvenus à l'âge $a + x$; la probabilité que sur p' autres individus de l'âge a, $\frac{p'q}{p} + z$ parviendront à l'âge $a + x$, est

$$\sqrt{\frac{p^3}{2qp'.(p-q).(p+p')\pi}} . c^{-\frac{p^3.z^2}{2qp'.(p-q).(p+p')}}.$$

Si l'on suppose p et q infinis, on aura évidemment

$$\varphi = \frac{q}{p};$$

et si l'on fait

$$\frac{p'q}{p} + z = q';$$

on

on aura

$$\varphi = \frac{q'}{p'} - \frac{z}{p'};$$

ce qui donne à très-peu près, en négligeant le carré $\frac{n.z^2}{p'^2}$,

$$n\varphi^2 = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2};$$

ainsi la probabilité précédente de z, est en même tems la probabilité de cette expression de $n\varphi^2$. Supposons maintenant $i = n\varphi^2 + l$; en considérant le binome $(\varphi^2 + \overline{1-\varphi^2})^n$, la probabilité de cette expression de i est par le n° 16,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi.2n\varphi^2.(1-\varphi^2)}} . c^{-\frac{l^2}{2n\varphi^2.(1-\varphi^2)}}.$$

Mais la valeur précédente de i devient, en y substituant pour $n\varphi^2$ sa valeur,

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l;$$

la probabilité de cette dernière expression de i est égale au produit de celles de i et de z, trouvées ci-dessus; elle est donc égale à

$$\frac{c^{-\frac{z^2}{2p'.\varphi(1-\varphi)} - \frac{l^2}{2n\varphi^2.(1-\varphi^2)}}}{2\pi.\sqrt{np'.\varphi^3.(1-\varphi)^2.(1+\varphi)}}.$$

Ayant supposé précédemment $i = \frac{nq'^2}{p'^2} + s$, on aura $s = l - \frac{2nq'z}{p'^2}$; en substituant donc pour l sa valeur tirée de cette équation, et observant que l'on a à très-peu près $\frac{q'}{p'} = \varphi$; on aura pour la probabilité que la valeur de s sera comprise dans des limites données, l'expression intégrale

$$\frac{\int\int dz.ds.c^{-\frac{z^2}{2\varphi(1-\varphi).p'} - \frac{\left(s+\frac{2nq'z}{p'^2}\right)^2}{2n\varphi^2.(1-\varphi^2)}}}{2\pi.\sqrt{np'.\varphi^3.(1-\varphi)^2.(1+\varphi)}},$$

l'intégrale relative à z pouvant être prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à

$z=\infty$. De là il est facile de conclure par les méthodes exposées précédemment, que si l'on fait

$$k^2 = \frac{p'}{2n\varphi^2.(1-\varphi).[p'+(p'+4n)\varphi]};$$

l'intégrale précédente devient

$$\int \frac{kds}{\sqrt{\pi}}.c^{-k^2s^2};$$

ainsi la probabilité que l'erreur de l'expression $i=\frac{nq'^2}{p'^2}$ sera $\pm s$, est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int kds.c^{-k^2s^2},$$

l'intégrale étant prise depuis s nul.

L'analyse précédente s'applique également à la durée moyenne d'un grand nombre d'associations formées de trois individus, ou de quatre individus, etc. Soit n ce nombre, et supposons que tous les associés soient du même âge a au moment de l'association; désignons par p le nombre des individus de la table de mortalité, de l'âge a, et par q le nombre des individus de l'âge $a+x$; le nombre i des associations existantes après x années écoulées depuis l'origine des associations, sera à fort peu près

$$i=\frac{n.q^r}{p^r},$$

r étant le nombre des individus de chaque association. On trouvera par la même analyse, la probabilité que ce nombre sera renfermé dans des limites données. La somme des valeurs de i correspondantes à toutes les valeurs de x, divisée par n, sera la durée moyenne de ce genre d'associations.

CHAPITRE IX.

Des bénéfices dépendans de la probabilité des événemens futurs.

38. Concevons que l'arrivée d'un événement procure le bénéfice ν, et que sa non-arrivée cause la perte μ. Une personne A attend l'arrivée d'un nombre s d'événemens semblables, tous également probables, mais indépendans les uns des autres; on demande quel est son avantage.

Soit q la probabilité de l'arrivée de chaque événement, et par conséquent $1-q$ celle de sa non-arrivée; si l'on développe le binome $(q+\overline{1-q})^s$, le terme

$$\frac{1.2.3\ldots.s}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots(s-i)}.q^i.(1-q)^{s-i}$$

de ce développement, sera la probabilité que sur les s événemens, i arriveront. Dans ce cas, le bénéfice de A est $i\nu$, et sa perte est $(s-i).\mu$; la différence est $i.(\nu+\mu)-s\mu$; en la multipliant par sa probabilité exprimée par le terme précédent, et prenant la somme de ces produits pour toutes les valeurs de i, on aura l'avantage de A, qui par conséquent est égal à

$$-s\mu.(q+\overline{1-q})^s+(\nu+\mu).S.\frac{i.1.2.3\ldots s}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots.\overline{s-i}}.q^i.(1-q)^{s-i},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i. On a

$$S.\frac{i.1.2.3\ldots s}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots.\overline{i-s}}.q^i.(1-q)^{s-i}$$

$$=\frac{d}{dt}.S.\frac{1.2.3\ldots s}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots.\overline{s-i}}.q^i.t^i.(1-q)^{s-i}=\frac{d}{dt}.(qt+\overline{1-q})^s,$$

pourvu que l'on suppose $t=1$, après la différentiation, ce qui réduit ce dernier membre à qs; l'avantage de A est donc $s.(q\nu-\overline{1-q}.\mu)$. Cet avantage est nul, si $\nu q=\mu.(1-q)$; c'est-à-dire, si le bénéfice de l'arrivée de l'événement, multiplié par sa probabilité, est égal à la perte causée par sa non-arrivée, multipliée par sa probabilité. L'avantage devient négatif, et se change en désavantage, si le second produit surpasse le premier. Dans tous les cas, l'avantage ou le désavantage de A est proportionnel au nombre s des événemens.

On déterminera par l'analyse du n° 16, la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans des limites données, si s est un grand nombre. Suivant cette analyse, la somme des divers termes du binome $(q+\overline{1-q})^s$ compris entre les deux termes distans de $l+1$, de part d'autre du plus grand, est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int dt.c^{-t^2}+\frac{1}{\sqrt{2s\pi q.(1-q)}}.c^{-\frac{l^2}{2sq.(1-q)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{l}{\sqrt{2sq.(1-q)}}$. L'exposant de q dans le plus grand terme, est à très-peu près par le même numéro, égal à sq; et les exposans de q, correspondans aux termes extrêmes compris dans l'intervalle précédent, sont respectivement $sq-l$ et $sq+l$. Les bénéfices correspondans à ces trois termes sont

$$s.(q\nu-\overline{1-q}.\mu)-l(\nu+\mu),$$
$$s.(q\nu-\overline{1-q}.\mu),$$
$$s.(q\nu-\overline{1-q}.\mu)+l(\nu+\mu);$$

en faisant donc $l=r.\sqrt{s}$, la probabilité que le bénéfice réel de A n'excédera pas les limites $s.(q\nu-\overline{1-q}.\mu)\pm r.\sqrt{s}.(\nu+\mu)$, est égal à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\frac{\int dr.c^{-\frac{r^2}{2q.(1-q)}}}{\sqrt{2q.(1-q)}}+\frac{1}{\sqrt{2s\pi.q.(1-q)}}.c^{-\frac{r^2}{2q.(1-q)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r=0$, et le dernier terme pouvant être négligé. On voit par cette formule que si $q\nu-\overline{1-q}.\mu$ n'est pas nul, le bénéfice réel augmente sans cesse, et devient infiniment grand et certain, dans le cas d'un nombre infini d'événemens.

On peut étendre par l'analyse suivante, ce résultat, au cas où les probabilités des s événemens sont différentes, ainsi que les bénéfices et les pertes qui y sont attachés. Soient q, $q^{(1)}$, $q^{(2)} \ldots q^{(s-1)}$ les probabilités respectives de ces événemens; ν, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)} \ldots \nu^{(s-1)}$ les bénéfices que procurent leurs arrivées. On peut, pour simplifier, faire abstraction des pertes que causent leurs non-arrivées, en comprenant dans le bénéfice que procure l'arrivée de chaque événement, la quantité que A perdrait par sa non-arrivée, et en retranchant ensuite de l'avantage total de A, la somme de ces dernières quantités; car il est facile de voir que cela ne change point la position de A.

Cela posé, considérons le produit

$$(1-q+q.c^{\nu\varpi\sqrt{-1}}).(1-q^{(1)}+q^{(1)}.c^{\nu^{(1)}\varpi\sqrt{-1}})\ldots$$
$$\ldots(1-q^{(s-1)}+q^{(s-1)}.c^{\nu^{(s-1)}\varpi\sqrt{-1}}).$$

Il est clair que la probabilité que la somme des bénéfices sera $f+l'$, est égal au coefficient de $c^{(f+l')\varpi\sqrt{-1}}$ dans le développement de ce produit; elle est donc égale à

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi.c^{-(f+l')\varpi\sqrt{-1}}.(1-q+q.c^{\nu\varpi\sqrt{-1}})\ldots$$
$$\ldots(1-q^{(s-1)}+q^{(s-1)}.c^{\nu^{(s-1)}\varpi\sqrt{-1}}), \quad (a)$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=-\pi$ jusqu'à $\varpi=\pi$, et les nombres ν, $\nu^{(1)}$, etc. étant supposés, comme on peut le faire, des nombres entiers. Prenons le logarithme du produit

$$c^{-f\varpi\sqrt{-1}}.(1-q+q.c^{\nu\varpi\sqrt{-1}})\ldots(1-q^{(s-1)}+q^{(s-1)}.c^{\nu^{(s-1)}\varpi\sqrt{-1}}); \quad (b)$$

en le développant suivant les puissances de ϖ, il devient

$$(S.q^{(i)}\nu^{(i)}-f).\varpi.\sqrt{-1}-\frac{\varpi^2}{2}.S.q^{(i)}.(1-q^{(i)}).\nu^{(i)2}-\text{etc.},$$

le signe S se rapportant à toutes les valeurs de i, depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$. La supposition de f égal à $S.q^{(i)}\nu^{(i)}$ fait disparaître la première puissance de ϖ; et la considération de s, un très-grand nombre, rend insensibles les termes dépendans des puissances de ϖ, supérieures au carré; en repassant donc des logarithmes aux nombres dans le développement précédent, le produit (b) devient à très-peu près,

$$c^{-\frac{\varpi^2}{2}.S.q^{(i)}.(1-q^{(i)}).\nu^{(i)2}};$$

ce qui change l'intégrale (a) dans celle-ci,

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi.c^{-l'\varpi\sqrt{-1}-\frac{\varpi^2}{2}.S.q^{(i)}.(1-q^{(i)}).\nu^{(i)2}}.$$

L'intégrale devant être prise depuis $\varpi=-\pi$ jusqu'à $\varpi=\pi$, et $S.q^{(i)}.(1-q^{(i)}).\nu^{(i)2}$ étant un grand nombre de l'ordre s; il est clair que cette intégrale peut être étendue sans erreur sensible, jusqu'aux valeurs infinies positives et négatives de ϖ. En faisant donc

$$\varpi.\sqrt{\frac{S.q^{(i)}.(1-q^{(i)}).\nu^{(i)2}}{2}}+\frac{l'.\sqrt{-1}}{\sqrt{2.S.q^{(i)}.(1-q^{(i)}).\nu^{(i)2}}}=t,$$

et intégrant depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, l'intégrale (a) devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi.S.q^{(i)}.(1-q^{(i)}).\nu^{(i)2}}}.c^{-\frac{l'^2}{2.S.q^{(i)}.(1-q^{(i)}).\nu^{(i)2}}}.$$

Si l'on multiplie cette quantité par $2dl'$, et qu'ensuite on l'intègre depuis $l'=0$, cette intégrale sera l'expression de la probabilité que le bénéfice de A sera compris dans les limites $f\pm l'$, ou $S.q^{(i)}\nu^{(i)}\pm l'$; en faisant ainsi

$$l'=r.\sqrt{2S.q^{(i)}.(1-q^{(i)}).\nu^{(i)2}}$$

la probabilité que le bénéfice de A sera compris dans les limites

$$S.q^{(i)}\nu^{(i)}\pm r.\sqrt{2S.q^{(i)}.(1-q^{(i)}).\nu^{(i)2}},$$

est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int dr.c^{-r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $r=0$.

Maintenant il faut, par ce qui précède, changer dans les limites précédentes, $\nu^{(i)}$ dans $\nu^{(i)}+\mu^{(i)}$, et en retrancher $S.\mu^{(i)}$; la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans les limites

$$S.(q^{(i)}\nu^{(i)}-(1-q^{(i)}).\mu^{(i)})\pm r.\sqrt{2S.q^{(i)}.(1-q^{(i)}).(\nu^{(i)}+\mu^{(i)})^2},$$

est donc

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int dr.c^{-r^2}.$$

On voit par cette formule, que pour peu que l'espérance mathématique de chaque événement, surpasse zéro; en multipliant les événemens à l'infini, le premier terme de l'expression des limites étant de l'ordre s, tandis que le second n'est que de l'ordre $\sqrt{s}$, le bénéfice réel s'accroît sans cesse, et devient à la fois infiniment grand et certain, dans le cas d'un nombre infini d'événemens.

39. Considérons maintenant le cas où, à chaque événement, la personne A a un nombre quelconque de chances à espérer ou à craindre. Supposons, par exemple, qu'une urne renferme des boules de diverses couleurs; que l'on tire une boule de cette urne, en la remettant dans l'urne après le tirage, et que le bénéfice de A soit ν, si la boule extraite est de la première couleur; qu'il soit ν', si la boule extraite est de la seconde couleur; qu'il soit ν'', si la boule extraite est de la troisième couleur, et ainsi de suite; les bénéfices devenant négatifs, lorsque A est forcé de donner au lieu de recevoir. Nommons a, a', a'', etc. les probabilités que la boule extraite à chaque tirage, sera de la première, ou de la seconde, ou de la troisième, etc. couleur, et supposons que l'on ait ainsi s tirages; on aura d'abord

$$a+a'+a''+\text{etc.}=1.$$

En multipliant ensuite les termes du premier membre de cette équation, respectivement par $c^{\nu\varpi\sqrt{-1}}$, $c^{\nu'\varpi\sqrt{-1}}$, $c^{\nu''\varpi\sqrt{-1}}$, etc., le terme indépendant des puissances de $c^{\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement de la fonction

$$c^{-(l+s\mu).\varpi\sqrt{-1}}.[a.c^{\nu\varpi\sqrt{-1}}+a'.c^{\nu'\varpi\sqrt{-1}}+a''.c^{\nu''\varpi\sqrt{-1}}+\text{etc.}]^s,$$

sera, par ce qui précède, la probabilité que dans s tirages, le bénéfice de A sera $s\mu + l$; cette probabilité est donc égale à

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi . c^{-l\varpi\sqrt{-1}}.[c^{-\mu\varpi\sqrt{-1}}.(a.c^{\nu\varpi\sqrt{-1}} + a'.c^{\nu'\varpi\sqrt{-1}} + \text{etc.})]^s; \quad (c)$$

l'intégrale relative à ϖ étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$. Si l'on développe par rapport aux puissances de ϖ, le logarithme hyperbolique de la quantité élevée à la puissance s, sous le signe $\int$, et si l'on observe que $a + a' + a'' + \text{etc.} = 1$, on aura pour ce logarithme,

$$\varpi.\sqrt{-1}.[a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \text{etc.} - \mu]$$
$$-\frac{\varpi^2}{2}.\left[\begin{array}{l} a\nu^2 + a'\nu'^2 + a''\nu''^2 + \text{etc.} \\ -(a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \text{etc.})^2 \end{array}\right] - \text{etc.}$$

On fera disparaître la première puissance de ϖ, en faisant

$$\mu = a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \text{etc.};$$

Si l'on suppose ensuite

$$2k^2 = a\nu^2 + a'\nu'^2 + a''\nu''^2 + \text{etc.} - (a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \text{etc.})^2,$$

et si l'on observe que s étant supposé un grand nombre, on peut négliger les puissances de ϖ supérieures au carré; on aura, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$[c^{-\mu\varpi\sqrt{-1}}.(a.c^{\nu\varpi\sqrt{-1}} + a'.c^{\nu'\varpi\sqrt{-1}} + a''.c^{\nu''\varpi\sqrt{-1}} + \text{etc.})]^s = c^{-sk^2\varpi^2};$$

ce qui change l'intégrale (c) dans celle-ci,

$$\frac{1}{2\pi}.\int d\varpi . c^{-l\varpi\sqrt{-1} - sk^2\varpi^2},$$

qui devient en intégrant comme dans le numéro précédent,

$$\frac{1}{2k.\sqrt{s\pi}}.c^{-\frac{l^2}{4sk^2}}.$$

En la multipliant par $2dl$, et intégrant le produit depuis $l = 0$, on aura la probabilité que le bénéfice réel de A, sera compris dans les

les limites

$$s.(a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \text{etc.}) \pm l;$$

en faisant donc

$$l = 2kr'.\sqrt{s},$$

cette probabilité sera, en prenant l'intégrale depuis $r' = 0$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int dr'.c^{-r'^2}.$$

Nous avons supposé dans ce qui précède, les probabilités des événemens, connues; examinons le cas où elles sont inconnues. Supposons que sur m événemens semblables attendus, n soient arrivés, et que A attende s pareils événemens dont chacun lui procure par son arrivée, le bénéfice ν, la non-arrivée lui causant la perte μ. Si l'on représente par $\frac{n}{m}.s + z$, le nombre d'événemens qui arriveront sur les s événemens attendus, la probabilité que z sera contenu dans les limites $\pm kt$, sera par le n° 30,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int dt.c^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0$; k^2 étant égal à

$$\frac{2ns.(m-n).(m+s)}{m^3}.$$

Mais $\frac{n}{m}.s + z$ étant le nombre des événemens arrivés, le bénéfice réel de A est

$$\left(\frac{n\nu}{m} - \frac{(m-n).\mu}{m}\right).s + z.(\nu + \mu);$$

l'intégrale précédente est donc la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans les limites

$$\left(\frac{n\nu}{m} - \frac{(m-n).\mu}{m}\right).s \pm kt.(\nu + \mu).$$

k est de l'ordre $\sqrt{s}$, si m et n sont d'un ordre égal ou plus grand que s; ainsi quelque petite que soit l'espérance mathématique, relative à chaque événement, le bénéfice réel devient à l'infini, certain et infiniment grand, lorsque le nombre des événemens passés, est supposé infini, comme celui des événemens futurs.

40. Nous allons maintenant déterminer les bénéfices des établissemens fondés sur les probabilités de la vie humaine. La manière la plus simple de calculer ces bénéfices, est de les réduire en capitaux actuels. Prenons pour exemple, les rentes viagères. Une personne de l'âge A veut constituer sur sa tête, une rente viagère h; on demande le capital qu'elle doit pour cela, donner à la caisse de l'établissement qui lui fait cette rente.

Si l'on nomme y_0 le nombre des individus de l'âge A, dans la table de mortalité dont on fait usage, et y_x le nombre des individus de l'âge $A+x$; la probabilité de payer la rente à la fin de l'année $A+x$, sera $\frac{y_x}{y_0}$; par conséquent, la valeur du paiement sera $\frac{h.y_x}{y_0}$. Mais si l'on désigne par r l'intérêt annuel de l'unité, ensorte que le capital 1 devienne $1+r$ après un an; il deviendra $(1+r)^x$ après x années; ainsi le paiement $(1+r)^x$ fait à la fin de la $x^{\text{ième}}$ année, réduit en capital actuel, devient l'unité, ou ce même paiement divisé par $(1+r)^x$; le paiement $\frac{h.y_x}{y_0}$ réduit en capital actuel, est donc $\frac{h.y_x}{y_0.(1+r)^x}$. La somme de tous les paiemens faits pendant la durée de la vie de la personne qui constitue la rente, et multipliés par leur probabilité, équivaut donc à un capital actuel représenté par l'intégrale finie

$$\Sigma.\frac{h.y_x}{y_0.(1+r)^x},$$

la caractéristique Σ devant embrasser toutes les valeurs de la fonction qu'elle affecte.

On peut déterminer cette intégrale en formant toutes ces valeurs d'après la table de mortalité, et en les ajoutant ensemble: on déduira ensuite les capitaux les uns des autres, en observant que si l'on nomme F le capital relatif à l'âge A, et F' le capital relatif à l'âge $A+1$, on a

$$F=\frac{y_1}{y_0}.\frac{F'+h}{1+r}.$$

Mais ce procédé se simplifie, lorsque la loi de mortalité est connue, et surtout lorsqu'elle est donnée par une fonction rationnelle et entière de x, ce qui est toujours possible, en considérant les nombres de la table de mortalité, comme des ordonnées dont les âges correspondans sont les abscisses, et en faisant passer une courbe parabolique par les extrémités des deux ordonnées extrêmes, et de plusieurs ordonnées intermédiaires. Les différences qui existent entre les diverses tables de mortalité, permettent de regarder ce moyen, comme aussi exact que ces tables, et même de s'en tenir à un petit nombre d'ordonnées.

Faisons

$$\frac{1}{1+r}=p, \quad \frac{y_x}{y_0}=u;$$

reprenons la formule (16) du n° 11 du premier Livre, qui donne

$$\Sigma.p^x u=\frac{p^x}{p.c^{\frac{du}{dx}}-1}+f,$$

f étant une constante arbitraire. Il faut dans le développement du premier terme du second membre de cette équation, par rapport aux puissances de $\frac{du}{dx}$, changer une puissance quelconque $\left(\frac{du}{dx}\right)^i$ dans $\frac{d^iu}{dx^i}$, et multiplier par u, le premier terme qui est indépendant de $\frac{du}{dx}$. On a ainsi

$$\Sigma.p^x u=f-\frac{p^x.u}{1-p}-\frac{p^{x+1}.\frac{du}{dx}}{(1-p)^2}-\frac{(p+1).p^{x+1}}{1.2.(1-p)^3}.\frac{d^2u}{dx^2}+\text{etc.}$$

Pour déterminer f, on observera que l'intégrale $\Sigma.p^x u$ est nulle, lorsque $x=1$, et qu'elle se termine, lorsque $x=n+1$, $A+n$ étant la limite de la vie; car alors elle embrasse les termes correspondans à tous les nombres $1, 2, 3, \ldots n$. Désignons donc par (u), $\left(\frac{du}{dx}\right)$, etc.; u', $\left(\frac{du'}{dx}\right)$, etc., les valeurs de u, $\frac{du}{dx}$, etc. correspondantes à $x=1$, et à $x=n+1$; on aura

$$\Sigma.\frac{hp^x.y_x}{y_0}=h.\left\{\begin{array}{l}\frac{p}{1-p}.[(u)-p^n.(u')]\\ +\frac{p^2}{(1-p)^2}.\left[\left(\frac{du}{dx}\right)-p^n.\left(\frac{du'}{dx}\right)\right]\\ +\frac{(p+1).p^2}{1.2.(1-p)^3}.\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)-p^n.\left(\frac{d^2u'}{dx^2}\right)\right]\\ +\text{etc.}\end{array}\right\}. \quad (o)$$

Si u ou $\frac{y_x}{y_0}$ est constant et égal à l'unité, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$; alors la rente viagère doit être payée certainement pendant le nombre n d'années, et elle devient une annuité. Dans ce cas, $\frac{du}{dx}$ est nul, et la formule précédente donne $\frac{hp.(1-p^n)}{1-p}$ pour le capital équivalent à l'annuité h.

Si $u=1-\frac{x}{n}$; alors la probabilité de la vie décroît en progression arithmétique, et la formule précédente donne

$$\frac{hp}{1-p}.\left(1-\frac{1-p^n}{n.(1-p)}\right)$$

pour le capital équivalent à la rente viagère h, et ainsi de suite.

Supposons maintenant que l'on veuille constituer une rente viagère h, sur plusieurs individus des âges A, $A+a$, $A+a+a'$, etc., de sorte que la rente reste au survivant. Désignons par y_x, y_{x+a}, $y_{x+a+a'}$, etc., les nombres de la table de mortalité, correspondans aux âges A, $A+a$, $A+a+a'$, etc.; la probabilité qu'a le premier individu, de vivre à l'âge $A+x$, étant $\frac{y_x}{y_0}$; la probabilité qu'à cet âge, il aura cessé de vivre, est $1-\frac{y_x}{y_0}$. Pareillement, la probabilité qu'a le second individu, de vivre à l'âge $A+a+x$, ou à la fin de la $x^{ième}$ année de la constitution de la rente, étant $\frac{y_{x+a}}{y_a}$; la probabilité qu'il aura cessé de vivre alors, est $1-\frac{y_{x+a}}{y_a}$; la probabilité que le troisième individu aura cessé de vivre, à la même époque de la constitution de la rente, est $1-\frac{y_{x+a+a'}}{y_{a+a'}}$, et ainsi de suite. La probabilité qu'aucun de ces individus n'existera à cette époque, est donc

$$\left(1-\frac{y_x}{y_0}\right).\left(1-\frac{y_{x+a}}{y_a}\right).\left(1-\frac{y_{x+a+a'}}{y_{a+a'}}\right).\text{etc.}$$

En retranchant ce produit, de l'unité; la différence sera la probabilité qu'un de ces individus au moins, sera vivant à la fin de la $x^{ième}$ année de la constitution de la rente. Nommons u cette probabilité; $\Sigma.hp^x u$ sera le capital actuel équivalent à la rente viagère h.

Mais on doit observer en prenant cette intégrale, que les quantités y_x, y_{x+a}, etc. sont nulles, lorsque leurs indices x, $x+a$, etc. surpassent le nombre n, $A+n$ étant la limite de la vie.

Si y_x est une fonction rationnelle et entière de x, et d'exponentielles, telles que q^x, r^x, etc.; on aura facilement, par les formules du premier Livre, l'intégrale $h.\Sigma.p^x u$. Mais on peut dans tous les cas, former au moyen d'une table de mortalité, tous les termes de cette intégrale, en prendre la somme, et construire ainsi des tables de rentes viagères, sur une ou plusieurs têtes.

L'analyse précédente sert pareillement à déterminer la rente viagère que l'on doit faire à un établissement, pour assurer à ses héritiers un capital après sa mort. Le capital équivalent à la rente viagère h, faite à une personne de l'âge A, est par ce qui précède, $h.S.\frac{p^x.y_x}{y_0}$, le signe S comprenant tous les termes inclusivement, depuis $x=1$ jusqu'à la limite de la vie de la personne. Nommons hq cette intégrale, et imaginons que l'établissement reçoive de cette personne la rente h, et lui donne en échange, le capital hq. Concevons ensuite que la même personne place ce capital à intérêt perpétuel sur l'établissement lui-même; l'intérêt annuel de l'unité étant r ou $\frac{1-p}{p}$. Il est clair que l'établissement doit rendre le capital hq, aux héritiers de la personne. Mais elle a fait pendant sa vie, la rente h à l'établissement, et elle en a reçu la rente $\frac{hq.(1-p)}{p}$; la rente qu'elle a faite réellement est donc $h.\left[1-\frac{q.(1-p)}{p}\right]$; c'est donc ce qu'elle doit donner annuellement à l'établissement, pour assurer à ses héritiers le capital hq.

Je n'insisterai pas davantage sur ces objets, ainsi que sur ceux qui sont relatifs aux établissemens d'assurance de tout genre, parce qu'ils ne présentent aucunes difficultés. J'observerai seulement que tous ces établissemens doivent, pour prospérer, se réserver un bénéfice, et multiplier considérablement leurs affaires; afin que leur bénéfice réel devenant presque certain, ils soient exposés le moins qu'il est possible, à de grandes pertes qui pourraient les détruire. En effet, si le nombre des affaires est s, et si l'avantage de l'établissement dans chacune d'elles, est b; alors il devient extrêmement probable que le bénéfice réel de l'établissement sera sb, s étant supposé un très-grand nombre.

Pour le faire voir, supposons que s personnes de l'âge A constituent, chacune sur sa tête, une rente viagère h; et considérons une de ces personnes que nous désignerons par C. Si C meurt dans l'intervalle de la fin de l'année x écoulée depuis la constitution de sa rente, à la fin de l'année $x+1$; l'établissement lui aura payé la rente h pendant x années, et la somme de ces paiemens, réduite en capital actuel, sera $h.(p+p^2 \ldots +p^x)$ ou $\Sigma.hp^{x+1}$; or la probabilité que C mourra dans cet intervalle, est $\frac{y_x - y_{x+1}}{y_0}$, ou $-\frac{\Delta.y_x}{y_0}$; la valeur de la perte que l'établissement doit alors supporter, est donc $-\frac{\Delta.y_x}{y_0}.\Sigma.hp^{x+1}$. La somme de toutes ces pertes est

$$-\Sigma.\left(\frac{\Delta.y_x}{y_0}.\Sigma.hp^{x+1}\right); \quad (r)$$

c'est le capital que C doit verser à la caisse de l'établissement, pour en recevoir la rente viagère h. On peut observer ici que l'on a

$$-\Delta.y_x.\Sigma.p^{x+1} = -y_{x+1}.\Sigma.p^{x+1} + y_x.\Sigma.p^x + y_x.p^x:$$

en intégrant le second membre de cette équation, la fonction (r) se réduit à

$$-\frac{y_x}{y_0}.\Sigma.hp^x + \frac{\Sigma.hy_x.p^x}{y_0} + \text{constante};$$

or $\Sigma.p^x$ se réduit à zéro, lorsque $x=0$; et lorsque $x=n+1$, y_x est nul par ce qui précède; la fonction (r), ou le capital que C doit payer à l'établissement, est donc $\frac{\Sigma\, hy_x.p^x}{y_0}$; ce qui est conforme à ce qui précède. Mais sous la forme de la fonction (r), on peut appliquer au bénéfice de l'établissement, l'analyse du n° 39. En effet, on a dans ce cas, par le numéro cité,

$$av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} = -\Sigma.\left(\frac{\Delta.y_x}{y_0}.\Sigma.hp^{x+1}\right);$$

ensuite a, a', etc. étant les valeurs successives de $-\frac{\Delta.y_x}{y_0}$, on aura

$$a r^2 + a' r'^2 + \text{etc.} = \Sigma.\left[-\frac{\Delta . y_x}{y_0}.(\Sigma.\, hp^{x+1})^2\right],$$

ensorte que

$$2k^2 = \Sigma.\left[-\frac{\Delta . y_x}{y_0}.(\Sigma.\, hp^{x+1})^2\right] - \left[\Sigma.\left(\frac{\Delta . y_x}{y_0}.\Sigma.\, hp^{x+1}\right)\right]^2.$$

En supposant que chacune des s personnes qui constitue la rente h sur sa tête, verse à la caisse de l'établissement, outre le capital correspondant à cette rente, une somme b, pour subvenir aux frais de l'établissement; on aura par le n° 39,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int dr'.c^{-r'^2},$$

pour la probabilité que le bénéfice réel de l'établissement sera compris dans les limites

$$sb \pm 2kr'.\sqrt{s}.$$

Ainsi dans le cas d'un nombre infini d'affaires, le bénéfice réel de l'établissement, devient certain et infini. Mais alors ceux qui traitent avec lui, ont un désavantage mathématique qui doit être compensé par un avantage moral, dont l'appréciation va être l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE X.

De l'espérance morale.

41. On a vu dans le n° 2, la différence qui existe entre l'espérance mathématique et l'espérance morale. L'espérance mathématique résultante de l'attente probable d'un ou de plusieurs biens, étant le produit de ces biens, par la probabilité de les obtenir, elle peut être évaluée par l'analyse exposée dans ce qui précède. L'espérance morale se règle sur mille circonstances qu'il est presque impossible de bien évaluer. Mais nous avons donné dans le numéro cité, un principe qui s'appliquant aux cas les plus communs, conduit à des résultats souvent utiles, et dont nous allons développer les principaux.

D'après ce principe, x étant la fortune physique d'un individu, l'accroissement dx qu'elle reçoit, produit à l'individu un bien moral réciproque à cette fortune; l'accroissement de sa fortune morale peut donc être exprimé par $\frac{k.dx}{x}$, k étant une constante. Ainsi en désignant par y la fortune morale correspondante à la fortune physique x, on aura

$$y = k.\log x + \log h,$$

h étant une constante arbitraire que l'on déterminera au moyen d'une valeur de y correspondante à une valeur donnée de x. Sur cela, nous observerons que l'on ne peut jamais supposer x et y nuls ou négatifs, dans l'ordre naturel des choses; car l'homme qui ne possède rien regarde son existence, comme un bien moral qui peut être comparé à l'avantage que lui procurerait une fortune physique dont il est bien difficile d'assigner la valeur, mais que l'on ne peut fixer au-dessous de ce qui lui serait rigoureusement nécessaire

nécessaire pour exister; car on conçoit qu'il ne consentirait point à recevoir une somme modique, telle que cent francs, avec la condition de ne prétendre à rien, lorsqu'il l'aurait dépensée.

Supposons maintenant que la fortune physique d'un individu soit a, et qu'il lui survienne l'expectative d'un des accroissemens α, $\mathcal{C}$, γ, etc., ces quantités pouvant être nulles ou même négatives, ce qui change les accroissemens en diminutions. Représentons par p, q, r, etc., les probabilités respectives de ces accroissemens, la somme de ces probabilités étant supposée égale à l'unité. Les fortunes morales correspondantes de l'individu, pourront être

$$k.\log(a+\alpha)+\log h, \quad k.\log(a+\mathcal{C})+\log h, \quad k.\log(a+\gamma)+\log h, \text{ etc.}$$

En multipliant ces fortunes respectivement par leurs probabilités p, q, r, etc.; la somme de leurs produits sera la fortune morale de l'individu, en vertu de son expectative; en nommant donc Y cette fortune, on aura

$$Y = kp.\log(a+\alpha)+kq.\log(a+\mathcal{C})+kr.\log(a+\gamma)+\text{etc.}+\log h.$$

Soit X la fortune physique qui correspond à cette fortune morale, on aura

$$Y = k.\log X + \log h.$$

La comparaison de ces deux valeurs de Y donne

$$X = (a+\alpha)^p.(a+\mathcal{C})^q.(a+\gamma)^r.\text{etc.}$$

Si l'on retranche la fortune primitive a, de cette valeur de X; la différence sera l'accroissement de la fortune physique qui procurerait à l'individu, le même avantage moral qui résulte pour lui, de son expectative. Cette différence est donc l'expression de cet avantage, au lieu que l'avantage mathématique a pour expression

$$p\alpha + q\mathcal{C} + r\gamma + \text{etc.}$$

De là résultent plusieurs conséquences importantes. L'une d'elles est que le jeu mathématiquement le plus égal, est toujours désavantageux. En effet, si l'on désigne par a la fortune physique du joueur avant de commencer le jeu; par p, sa probabilité de gagner, et par μ sa mise; celle de son adversaire doit être, pour l'égalité du jeu, $\frac{(1-p).\mu}{p}$; ainsi le joueur gagnant la partie, sa fortune physique devient $a+\frac{1-p}{p}.\mu$, et la probabilité de cela est p. S'il perd la partie, sa fortune physique devient $a-\mu$, et la probabilité de cela est $1-p$; en nommant donc X sa fortune physique, en vertu de son expectative, on aura par ce qui précède,

$$X=\left(a+\frac{1-p}{p}.\mu\right)^p.(a-\mu)^{1-p};$$

or cette quantité est plus petite que a, c'est-à-dire que l'on a

$$\left(1+\frac{1-p}{p}.\frac{\mu}{a}\right)^p.\left(1-\frac{\mu}{a}\right)^{1-p}<1,$$

ou en prenant les logarithmes hyperboliques,

$$p.\log\left(1+\frac{1-p}{p}.\frac{\mu}{a}\right)+(1-p).\log\left(1-\frac{\mu}{a}\right)<0.$$

Le premier membre de cette équation peut être mis sous la forme

$$\int(1-p).\frac{d\mu}{a}.\left(\frac{1}{1+\frac{1-p}{p}.\frac{\mu}{a}}-\frac{1}{1-\frac{\mu}{a}}\right),$$

quantité qui est évidemment négative.

Il résulte encore de l'analyse précédente, qu'il vaut mieux exposer sa fortune, par parties, à des dangers indépendans les uns des autres, que de l'exposer toute entière au même danger. Pour le faire voir, supposons qu'un négociant ayant à faire venir par mer, une somme ε, l'expose sur un seul vaisseau, et que l'observation ait fait connaître la probabilité p de l'arrivée d'un vaisseau du même genre, dans le port; l'avantage mathématique du négociant, résultant de son expectative, sera $p\varepsilon$. Mais si l'on représente par l'unité sa fortune physique, indépendamment de son expectative; sa fortune morale sera par ce qui précède,

$$kp.\log(1+\varepsilon)+\log h,$$

et son avantage moral sera, en vertu de son expectative,

$$(1+\varepsilon)^p-1,$$

quantité plus petite que $p\varepsilon$; car on a

$$(1+\varepsilon)^p<1+p\varepsilon,$$

puisque $\log(1+\varepsilon)^p$ ou $p.\log(1+\varepsilon)$ est moindre que $\log(1+p\varepsilon)$, ce qui est évident, lorsqu'on met ces deux logarithmes sous les formes $\int\frac{pd\varepsilon}{1+\varepsilon}$, et $\int\frac{pd\varepsilon}{1+p\varepsilon}$.

Supposons maintenant, que le négociant expose la somme ε par parties égales, sur r vaisseaux. Sa fortune physique deviendra $1+\varepsilon$, si tous les vaisseaux arrivent, et la probabilité de cet événement est p^r. Si $r-1$ vaisseaux arrivent, la fortune physique du négociant devient $1+\frac{(r-1).\varepsilon}{r}$, et la probabilité de cet événement est $rp^{r-1}.(1-p)$. Si $r-2$ vaisseaux arrivent, la fortune physique du négociant devient $1+\frac{r-2}{r}.\varepsilon$, et la probabilité de cet événement est $\frac{r.\overline{r-1}}{1.2}.p^{r-2}.(1-p)^2$, et ainsi de suite; la fortune morale du négociant est donc par ce qui précède

$$k.\left\{\begin{array}{l} p^r.\log(1+\varepsilon)+r.p^{r-1}.(1-p).\log\left(1+\frac{r-1}{r}.\varepsilon\right) \\ +\frac{r.\overline{r-1}}{1.2}.p^{r-2}.(1-p)^2.\log\left(1+\frac{r-2}{r}.\varepsilon\right)+\text{etc.}\end{array}\right\}+\log h;$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme,

$$kp.\int d\varepsilon.\left[\frac{p^{r-1}}{1+\varepsilon}+\frac{\overline{r-1}.p^{r-2}.(1-p)}{1+\frac{r-1}{r}.\varepsilon}+\frac{\overline{r-1}.\overline{r-2}.p^{r-3}.(1-p)^2}{1.2.\left(1+\frac{r-2}{r}.\varepsilon\right)}+\text{etc.}\right]+\log h. \quad (a)$$

Si l'on retranche de cette expression, celle de la fortune morale du négociant, lorsqu'il expose la somme ε sur un seul vaisseau, et que l'on obtient en faisant $r=1$ dans la précédente, ce qui réduit celle-ci à $kp\int\frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon}$, qui est égal à

$$kp.\int d\varepsilon.\left\{\frac{p^{r-1}}{1+\varepsilon}+\frac{\overline{r-1}.p^{r-2}.(1-p)}{1+\varepsilon}+\frac{\overline{r-1}.\overline{r-2}.p^{r-3}.(1-p)^2}{1.2.(1+\varepsilon)}+\text{etc.}\right\},$$

la différence sera

$$kp.\frac{r-1}{r}.\int\frac{\varepsilon d\varepsilon}{1+\varepsilon}.\left[\frac{p^{r-2}}{1+\frac{(r-1)}{r}.\varepsilon}+\frac{\overline{r-2}.p^{r-3}.(1-p)}{1+\frac{(r-2)}{r}.\varepsilon}+\text{etc.}\right];$$

cette différence étant positive, on voit qu'il y a moralement de l'avantage à partager la somme ε sur plusieurs vaisseaux. Cet avantage s'accroît à mesure que l'on augmente le nombre r des vaisseaux; et si ce nombre est très-grand, l'avantage moral devient à peu près égal à l'avantage mathématique.

Pour le faire voir, reprenons la formule (a), et donnons-lui cette forme,

$$kp.\iint dx.d\varepsilon.c^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right).x}.(p.c^{-\frac{\varepsilon x}{r}}+1-p)^{r-1}+\log h; \quad (a')$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Dans cet intervalle, le coefficient de dx sous les signes $\iint$, n'a ni *maximum* ni *minimum*; car sa différentielle prise par rapport à x, est

$$-c^{\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right).x}.dx.(p.c^{-\frac{\varepsilon x}{r}}+1-p)^{r-2}.\left[p.(1+\varepsilon).c^{-\frac{\varepsilon x}{r}}+(1-p).\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)\right];$$

cette différentielle est constamment négative depuis $x=0$ jusqu'à x infini; ainsi le coefficient lui-même diminue constamment dans cet intervalle. C'est donc ici le cas de faire usage de la formule (A) du n° 22 du premier Livre, pour avoir, par une approximation convergente, l'intégrale $\int ydx$, y étant égal à

$$c^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right).x}.(p.c^{-\frac{\varepsilon x}{r}}+1-p)^{r-1}.$$

La quantité que nous avons nommée v dans le numéro cité, devient alors

$$v=-\frac{ydx}{dy}=\frac{p.c^{-\frac{\varepsilon x}{r}}+1-p}{p.(1+\varepsilon).c^{-\frac{\varepsilon x}{r}}+(1-p).\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)};$$

ce qui donne

$$U = \frac{1}{1 + p\varepsilon + (1-p).\frac{\varepsilon}{r}},$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{p.(1-p).\varepsilon^2.\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r.\left[1 + p\varepsilon + (1-p).\frac{\varepsilon}{r}\right]^2};$$

etc. ;

U, $\frac{dU}{dx}$; etc. étant ce que deviennent v, $\frac{dv}{dx}$, etc., lorsque x est nul. Cela posé, la formule (A) citée, donnera

$$\int dx.c^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right).x}.(p.c^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + 1 - p)^{r-1}$$

$$= \frac{1}{1 + p\varepsilon + (1-p).\frac{\varepsilon}{r}}.\left\{1 + \frac{p.(1-p).\varepsilon^2.\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r.\left[1 + p\varepsilon + (1-p).\frac{\varepsilon}{r}\right]} + \text{etc.}\right\}.$$

la formule (a') devient ainsi, à très-peu près, lorsque r est un grand nombre,

$$k.\int \frac{pd\varepsilon}{1 + p\varepsilon} + \log h,$$

ou

$$k \log (1 + p\varepsilon) + \log h.$$

Maintenant soit X la fortune physique correspondante à cette fortune morale ; on a par ce qui précède,

$$k.\log X + \log h,$$

pour la fortune morale correspondante à X; en comparant donc ces deux expressions, on aura

$$X = 1 + p\varepsilon.$$

Dans ce cas, l'avantage moral est $p\varepsilon$; il est donc égal à l'avantage mathématique.

Souvent l'avantage moral des individus est augmenté par le moyen des caisses d'assurance, en même tems que ces caisses produisent aux assureurs un bénéfice certain. Supposons, par exemple, qu'un négociant ait une partie ε de sa fortune sur un vaisseau dont la probabilité de l'arrivée est p; et qu'il assure cette partie, en donnant une somme à la compagnie d'assurance. Pour l'égalité parfaite entre les sorts mathématiques de la compagnie et du négociant, celui-ci doit donner $(1-p).\varepsilon$ pour prix de l'assurance. En représentant par l'unité, la fortune du négociant, indépendamment de son expectative ε, sa fortune morale sera par ce qui précède,

$$kp.\log(1+\varepsilon)+\log h,$$

dans le cas où il n'assure pas; et dans le cas où il assure, elle sera

$$k.\log(1+p\varepsilon)+\log h;$$

or on a

$$\log(1+p\varepsilon)>p.\log(1+\varepsilon),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int\frac{p\,d\varepsilon}{1+p\varepsilon}>\int\frac{p\,d\varepsilon}{1+\varepsilon};$$

p étant moindre que l'unité, la fortune morale du négociant est donc augmentée, au moyen de son assurance. Il peut ainsi faire à la compagnie d'assurance, un sacrifice propre à subvenir aux frais de l'établissement et au bénéfice qu'elle doit faire. Si l'on nomme α ce sacrifice, c'est-à-dire, si l'on suppose que le négociant donne à la compagnie, pour prix de son assurance, la somme $(1-p).\varepsilon+\alpha$, on aura dans le cas de l'égalité des fortunes morales, lorsque le négociant assure, et lorsqu'il n'assure point,

$$\log(1-\alpha+p\varepsilon)=p.\log(1+\varepsilon);$$

ce qui donne

$$\alpha=1+p\varepsilon-(1+\varepsilon)^p.$$

c'est tout ce que le négociant peut donner à la compagnie, sans désavantage moral; il aura donc un avantage moral, en faisant un sacrifice moindre que cette valeur de α, et en même tems, la compagnie aura un bénéfice qui, comme on l'a vu, devient certain, quand ses relations sont très-nombreuses. On voit par là, comment des établissemens de ce genre, bien conçus et sagement administrés, peuvent s'assurer un bénéfice réel, en procurant des avantages aux personnes qui traitent avec eux : c'est en général le but de tous les échanges; mais ici, par une combinaison particulière, l'échange a lieu entre deux objets de même nature, dont l'un n'est que probable, tandis que l'autre est certain.

42. Le principe dont nous venons de faire usage pour calculer l'espérance morale, a été proposé par Daniel Bernoulli, pour expliquer la différence entre le résultat du calcul des probabilités et l'indication du sens commun, dans le problème suivant. Deux joueurs A et B jouent à *croix* et *pile*, avec la condition que A paie à B, deux francs, si *croix* arrive au premier coup; quatre francs, s'il arrive au second coup; huit francs, s'il arrive au troisième coup, et ainsi de suite jusqu'au $n^{ième}$ coup. On demande ce que B doit donner à A, en commençant le jeu.

Il est visible que l'avantage de B, relatif au premier coup, est un franc; car il a $\frac{1}{2}$ de probabilité de gagner deux francs à ce coup. Son avantage relatif au second coup, est pareillement un franc; car il a $\frac{1}{4}$ de probabilité de gagner quatre francs à ce coup, et ainsi de suite; ensorte que la somme de tous ses avantages relatifs aux n coups, est n francs. Il doit donc pour l'égalité mathématique du jeu, donner à A, cette somme qui devient infinie, si l'on suppose que le jeu continue à l'infini.

Cependant personne, à ce jeu, ne risquera avec prudence, une somme même assez modique, telle que cent francs. Pour peu que l'on réfléchisse à cette espèce de contradiction entre le calcul, et ce qu'indique le sens commun; on voit facilement qu'elle tient à ce que si l'on suppose, par exemple, $n = 50$, ce qui donne 2^{50} pour la somme que B peut espérer au cinquantième coup, cette somme immense ne produit point à B, un avantage moral proportionnel à sa grandeur; de manière qu'il y a pour lui un désavantage moral à exposer un franc pour l'obtenir avec la probabilité excessivement petite $\frac{1}{2^{50}}$ de réussir. Mais l'avantage moral que peut procurer une somme espérée, dépend d'une infinité de circonstances propres à chaque individu, et qu'il est impossible d'évaluer. La seule considération générale que l'on puisse employer à cet égard, est que plus on est riche, moins une somme très-petite peut être avantageuse, toutes choses égales d'ailleurs. Ainsi la supposition la plus naturelle que l'on puisse faire, est celle d'un avantage moral réciproque, au bien de la personne intéressée. C'est à cela que se réduit le principe de Daniel Bernoulli, principe qui, comme on vient de le voir, fait coïncider les résultats du calcul avec les indications du sens commun, et qui donne le moyen d'apprécier avec quelque exactitude, ces indications toujours vagues. Son application au problème dont on vient de parler, va nous en fournir un nouvel exemple.

Nommons a la fortune de B avant le jeu, et x ce qu'il donne au joueur A. Sa fortune devient $a-x+2$, si *croix* arrive au premier coup; elle devient $a-x+2^2$, si *croix* arrive au second coup, et ainsi de suite jusqu'au coup n, où elle devient $a-x+2^n$, si *croix* n'arrive qu'au coup $n^{ième}$. La fortune de B devient $a-x$, si *croix* n'arrive point dans les n coups, après lesquels la partie est supposée finir; mais la probabilité de ce dernier événement est $\frac{1}{2^n}$. En multipliant les logarithmes de ces diverses fortunes par leurs probabilités respectives et par k, on aura par ce qui précède, la fortune morale de B en vertu des conditions du jeu, égale à

$$\frac{1}{2}.k.\log(a-x+2)+\frac{1}{2^2}.k.\log(a-x+2^2)\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2^n}.k.\log(a-x+2^n)+\frac{1}{2^n}.k.\log(a-x)+\log h.$$

Mais avant le jeu, sa fortune morale était $k.\log a+\log h$; en égalant donc ces deux fortunes, pour que B conserve toujours la même fortune morale, et repassant des logarithmes aux nombres, on aura, $a-x$ étant supposé égal à a', et faisant $\frac{1}{a'}=\alpha$,

$$1+\alpha x=(1+2.\alpha)^{\frac{1}{2}}.(1+2^2.\alpha)^{\frac{1}{2^2}}\ldots.(1+2^n.\alpha)^{\frac{1}{2^n}}; \quad (o)$$

les facteurs $(1+2\alpha)^{\frac{1}{2}}$, $(1+2^2\alpha)^{\frac{1}{2^2}}$ vont en diminuant sans cesse, et et leur limite est l'unité ; car on a

$$(1+2^i.\alpha)^{\frac{1}{2^i}} > (1+2^{i+1}.\alpha)^{\frac{1}{2^{i+1}}}.$$

En effet, si l'on élève à la puissance 2^{i+1}, les deux membres de cette inégalité, elle devient

$$1+2^{i+1}.\alpha+2^{2i}.\alpha^2 > 1+2^{i+1}.\alpha;$$

et sous cette forme, l'inégalité devient évidente. De plus, le logarithme de $(1+2^i.\alpha)^{\frac{1}{2^i}}$ est égal à $\frac{i.\log 2}{2^i}+\frac{1}{2^i}.\log\left(\alpha+\frac{1}{2^i}\right)$; et il est visible que cette fonction est nulle dans le cas de i infini, ce qui exige que dans ce cas, $(1+2^i.\alpha)^{\frac{1}{2^i}}$ soit l'unité.

Si l'on suppose n infini dans l'équation (o), on a le cas où la partie peut se prolonger à l'infini, ce qui est le cas le plus avantageux à B. a' et par conséquent α étant supposés connus; on prendra la somme des logarithmes tabulaires d'un assez grand nombre $i-1$, des premiers facteurs du second membre, pour que $2^i\alpha$ soit au moins égal à dix. La somme des logarithmes tabulaires des facteurs suivans, jusqu'à l'infini, sera à très-peu près égale à

$$\frac{\log\alpha}{2^{i-1}}+\frac{(i+1).\log 2}{2^{i-1}}+\frac{0,4342945}{\alpha.2^{2i-1}}.$$

L'addition de ces deux sommes donnera le logarithme tabulaire de $a'+x$ ou de a. Ainsi l'on aura pour une fortune physique a, supposée a B avant le jeu, la valeur de x qu'il doit donner à A au commencement du jeu, pour conserver la même fortune morale. En supposant, par exemple, a' égal à cent, on trouve $a=107^f,89$; d'où il suit que la fortune physique de B étant primitivement $107^f,89$, il ne doit alors risquer prudemment à ce jeu, que $7^f,89$, au lieu de la somme infinie que le résultat du calcul indique, lorsqu'on fait abstraction de toutes considérations morales. Ayant ainsi la valeur de a relative à $a'=100$, il est facile d'en conclure de la manière suivante, sa valeur relative à $a'=200$; en effet on a, dans ce dernier cas,

$$a = (200+2)^{\frac{1}{2}} . (200+2^2)^{\frac{1}{4}} . \text{etc.} = 2 . (100+1)^{\frac{1}{2}} . (100+2)^{\frac{1}{4}} . (100+4)^{\frac{1}{8}} . \text{etc.}$$

Mais on vient de trouver

$$(100+2)^{\frac{1}{4}} . (100+4)^{\frac{1}{8}} . \text{etc.} = (107,89)^{\frac{1}{2}};$$

donc

$$a = 2 . \sqrt{101 . 107,89} = 208,78.$$

Ainsi la fortune physique de B étant primitivement $208,78$, il ne peut risquer prudemment à ce jeu, au-delà de $8^f,78$.

43. Nous allons maintenant étendre le principe exposé ci-dessus, aux choses dont l'existence est éloignée et incertaine. Pour cela, considérons deux personnes A et B, qui veulent placer chacune, en viager, un capital q. Elles peuvent le faire séparément : elles peuvent s'associer et constituer une rente viagère sur leurs têtes, de manière que la rente soit reversible à celle qui survit à l'autre. Examinons quel est le parti le plus avantageux.

Supposons les deux personnes du même âge, et ayant la même fortune annuelle que nous représenterons par l'unité, indépendamment du capital qu'elles veulent placer. Soit $\mathcal{C}$ la rente viagère que ce capital leur produirait à chacune, si elles plaçaient leurs capitaux séparément, ensorte que leur fortune annuelle devienne $1+\mathcal{C}$. Nous exprimerons, conformément au principe dont il s'agit, leur fortune morale annuelle correspondante, par $k.\log(1+\mathcal{C})+\log h$. Mais cette fortune n'aura lieu que probablement, à la $x^{ième}$ année; ainsi en désignant par y_x la probabilité que A vivra à la fin de la $x^{ième}$ année, on doit multiplier sa fortune morale annuelle relative à cette année, par y_x; en ajoutant donc tous ces produits, leur somme que nous désignerons par $[k.\log(1+\mathcal{C})+\log h].\Sigma.y_x$, sera ce que je nomme ici, *fortune morale viagère*.

Supposons maintenant que A et B placent la somme $2q$ de leurs capitaux, sur leurs têtes, et que cela produise une rente viagère $\mathcal{C}'$, reversible au survivant. Tant que A et B vivront, chacun d'eux ne touchera que $\frac{1}{2}\mathcal{C}'$ de rente viagère, et leur fortune morale annuelle sera $k.\log(1+\frac{1}{2}\mathcal{C}')+\log h$. En la multipliant par la probabilité qu'ils vivront tous deux à la fin de l'année x, probabilité égale à $(y_x)^2$; la somme de ces produits pour toutes les valeurs de x, sera la fortune morale viagère de A, relative à la supposition de leur existence simultanée; cette fortune est donc

$$\left[k.\log\left(1+\frac{6'}{2}\right)+\log h\right].\Sigma.(y_x)^2.$$

La probabilité que A existera seul à la fin de la $x^{ième}$ année, est $y_x-(y_x)^2$; sa fortune morale viagère relative à son existence après la mort de B, qui rend sa fortune morale annuelle égale à $1+6'$, est donc

$$[k.\log(1+6')+\log h].\Sigma.[y_x-(y_x)^2].$$

La somme de ces deux fonctions,

$$k.\log\left(1+\frac{6'}{2}\right).\Sigma.(y_x)^2+k.\log(1+6').[\Sigma.y_x-\Sigma.(y_x)^2]+\log h.\Sigma.y_x,$$

sera la fortune morale viagère de A dans l'hypothèse où A et B placent conjointement leurs capitaux.

Si l'on compare cette fortune à celle que nous venons de trouver dans le cas où ils placent séparément leurs capitaux; on voit qu'il y aura pour A de l'avantage ou du désavantage à placer conjointement, suivant que

$$\log\left(1+\frac{6'}{2}\right).\Sigma.(y_x)^2+\log(1+6').[\Sigma.y_x-\Sigma.(y_x)^2]$$

sera plus grand ou moindre que $\log(1+6).\Sigma.y_x$. Pour le savoir, il faut déterminer le rapport de $6'$ à 6; or on a par le n° 40,

$$q=6.\Sigma.p^x y_x,$$

$\frac{1-p}{p}$ étant l'intérêt annuel de l'argent: on a ensuite par le même numéro,

$$2q=6'.\Sigma.p^x.[2y_x-(y_x)^2];$$

on a donc

$$6'=\frac{2 6.\Sigma.p^x y_x}{\Sigma.p^x.[2y_x-(y_x)^2]}.$$

Les tables de mortalité donneront les valeurs de $\Sigma.y_x$, $\Sigma.(y_x)^2$,

$\Sigma . p^x y_x$, $\Sigma . p^{2x} (y_x)^2$; on pourra ainsi juger lequel des deux placemens dont il s'agit, est le plus avantageux.

Supposons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de très-petites fractions; la quantité $\log(1+\mathcal{C}) . \Sigma . y_x$ devient à très-peu près $\mathcal{C} . \Sigma . y_x$. La quantité

$$\log\left(1+\frac{\mathcal{C}'}{2}\right) . \Sigma . (y_x)^2 + \log(1+\mathcal{C}') . [\Sigma . y_x - \Sigma . (y_x)^2]$$

devient

$$\frac{\mathcal{C}'}{2} . [2 . \Sigma . y_x - \Sigma . (y_x)^2],$$

et en substituant pour $\mathcal{C}'$ sa valeur précédente, elle devient

$$\mathcal{C} . \frac{[2\Sigma . y_x - \Sigma . (y_x)^2] . \Sigma . p^x y_x}{2\Sigma . p^x y_x - \Sigma . p^{2x} (y_x)^2};$$

il y a donc de l'avantage à placer conjointement, si

$$[2\Sigma . y_x - \Sigma . (y_x)^2] . \Sigma . p^x y_x$$

l'emporte sur

$$[2\Sigma . p^x y_x - \Sigma . p^{2x} (y_x)^2] . \Sigma . y_x,$$

ou si l'on a

$$\frac{\Sigma . p^{2x} (y_x)^2}{\Sigma . p^x y_x} > \frac{\Sigma . (y_x)^2}{\Sigma . y_x};$$

c'est en effet ce qui a lieu généralement, p étant plus petit que l'unité.

L'avantage de placer conjointement les capitaux, s'accroît par la considération que l'augmentation $\frac{\mathcal{C}'}{2}$ de revenu arrive au survivant, à un âge ordinairement avancé dans lequel de plus grands besoins qui se font sentir, la rendent beaucoup plus utile. Cet avantage s'accroît encore de toutes les affections qui peuvent attacher les deux individus l'un à l'autre, et qui leur font desirer le bien-être de celui qui doit survivre. Les établissemens dans lesquels on peut ainsi placer ses capitaux, et par un léger sacrifice de son revenu, assurer l'existence de sa famille pour un tems où l'on doit craindre de ne plus suffire à ses besoins, sont donc très-avantageux aux mœurs, en favorisant les plus doux penchans de la nature. Ils n'offrent point l'inconvénient que nous avons remarqué dans les jeux même les plus équitables, celui de rendre la perte plus sensible que le gain; puisqu'au contraire, ils offrent les moyens d'échanger le superflu, contre des ressources assurées dans l'avenir. Le Gouvernement doit donc encourager ces établissemens, et les respecter dans ses vicissitudes; car les espérances qu'ils présentent, portant sur un avenir éloigné, ils ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute inquiétude sur leur durée.

CHAPITRE XI.

De la probabilité des témoignages.

44. Je vais d'abord considérer un seul témoin. La probabilité de son témoignage se compose de sa véracité, de la possibilité de son erreur, et de la possibilité du fait en lui-même. Pour fixer les idées, concevons que l'on ait extrait un numéro d'une urne qui en renferme le nombre n; et qu'un témoin du tirage annonce que le n° i est sorti. L'événement observé est ici le témoin annonçant la sortie du n° i. Soit p la véracité du témoin, ou la probabilité qu'il ne cherche point à tromper : soit encore r la probabilité qu'il ne se trompe point. Cela posé.

On peut former les quatre hypothèses suivantes. Ou le témoin ne trompe point et ne se trompe point; ou il ne trompe point et se trompe; ou il trompe et ne se trompe point; enfin, ou il trompe et se trompe à la fois. Voyons quelle est, *à priori*, dans chacune de ces hypothèses, la probabilité que le témoin annoncera la sortie du n° i.

Si le témoin ne trompe point et ne se trompe point, le n° i sera sorti; mais la probabilité de cette sortie, est *à priori*, $\frac{1}{n}$; en la multipliant par la probabilité pr de l'hypothèse, on aura $\frac{pr}{n}$ pour la probabilité entière de l'événement observé, dans cette première hypothèse.

Si le témoin ne trompe point et se trompe, le n° i ne doit point être sorti, pour qu'il annonce sa sortie; la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$. Mais l'erreur du témoin doit porter sur l'un des numéros non sortis. Supposons qu'elle puisse également porter sur tous : la probabilité qu'elle portera sur le n° i, sera $\frac{1}{n-1}$; la probabilité que le témoin ne trompant point et se trompant, annoncera le n° i, est donc $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$. En la multipliant par la probabilité $p.(1-r)$ de l'hypothèse elle-même, on aura $\frac{p.(1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette seconde hypothèse.

Si le témoin trompe et ne se trompe point; le n° i ne sera point sorti, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$; mais le témoin doit choisir parmi les $n-1$ numéros non sortis, le n° i. Si l'on suppose que son choix puisse également porter sur chacun d'eux, $\frac{1}{n-1}$ sera la probabilité que son choix se fixera sur le n° i; $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$ est donc la probabilité que le témoin annoncera le n° i. En la multipliant par la probabilité $(1-p).r$, de l'hypothèse; on aura $\frac{(1-p).r}{n}$ pour la probabilité entière de l'événement observé dans cette troisième hypothèse.

Enfin, si le témoin trompe et se trompe, la probabilité qu'il ne croira pas le n° i sorti, sera $\frac{n-1}{n}$, et la probabilité qu'il le choisira parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croira pas sortis, sera $\frac{1}{n-1}$; $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ ou $\frac{1}{n}$ sera donc la probabilité qu'il annoncera la sortie du n° i. En la multipliant par la probabilité $(1-p).(1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p).(1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette quatrième hypothèse.

Cette hypothèse renferme un cas dans lequel le n° i est sorti; savoir, le cas dans lequel le n° i étant sorti, le témoin ne le croit pas sorti, et le choisit parmi les $n-1$ numéros qu'il ne croit pas sortis. La probabilité de cela est le produit de $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{n-1}$. En multipliant ce produit, par la probabilité $(1-p).(1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p).(1-r)}{n.(n-1)}$ pour la probabilité du cas dont il s'agit.

On peut arriver aux mêmes résultats, de cette manière. Soient

a, b, c, d, i, etc., les n numéros. Puisque le témoin se trompe, il ne doit point croire sorti, le numéro sorti; et puisqu'il trompe, il ne doit point annoncer comme sorti, le numéro qu'il croit sorti. Mettons donc à la première place, le numéro sorti; à la seconde, le numéro que le témoin croit sorti; et à la troisième, le numéro qu'il annonce. Parmi toutes les combinaisons possibles des numéros trois à trois, sans exclure celles où ils sont répétés, il n'y a de compatibles avec l'hypothèse présente, que celles où le numéro qui occupe la seconde place, n'occupe ni la première, ni la troisième; telles sont les combinaisons aba, abc, etc. Or il est facile de voir que le nombre des combinaisons qui satisfont aux deux conditions précédentes, est $n.\overline{n-1}^2$; car la combinaison ab peut se combiner avec les $n-1$ n^{os} autres que b; et le nombre des combinaisons ab, ba, ac, est $n.\overline{n-1}$. Maintenant les combinaisons dans lesquelles le n° i est annoncé, sans être sorti, sont de la forme abi, bai, aci, etc., et le nombre de ces combinaisons est $\overline{n-1}.\overline{n-2}$; ainsi la probabilité qu'une de ces combinaisons aura lieu, est $\frac{n-2}{n.\overline{n-1}}$. Les combinaisons dans lesquelles le numéro i étant sorti, il est annoncé, sont de la forme iai, ibi, etc., et le nombre de ces combinaisons est visiblement $n-1$; la probabilité qu'une de ces combinaisons aura lieu, est donc $\frac{1}{n.\overline{n-1}}$. Il faut multiplier toutes ces combinaisons, par la probabilité $(1-p).(1-r)$ de l'hypothèse; et alors on aura les résultats précédens.

Maintenant, pour avoir la probabilité de la sortie du n° i, on doit faire une somme de toutes les probabilités précédentes, relatives à cette sortie, et la diviser par la somme de toutes ces probabilités; ce qui donne pour cette probabilité,

$$\frac{\frac{pr}{n}+\frac{(1-p).(1-r)}{n.(n-1)}}{\frac{pr}{n}+\frac{p.(1-r)}{n}+\frac{(1-p).r}{n}+\frac{(1-p).(1-r)}{n}},$$

ou $pr+\frac{(1-p).(1-r)}{n-1}$.

Si r est égal à l'unité, ou si le témoin ne se trompe point, la probabilité de la sortie du n° i, sera p; c'est-à-dire la probabilité de la véracité du témoin.

Si n est un très-grand nombre, cette probabilité sera à très-peu près, pr, ou la probabilité de la véracité du témoin, multipliée par la probabilité qu'il ne se trompe point.

Nous avons supposé que l'erreur du témoin, lorsqu'il se trompe, peut également tomber sur tous les numéros non sortis; mais cette supposition cesse d'avoir lieu, si quelques-uns d'eux ont plus de ressemblance que les autres, avec le numéro sorti; parce que la méprise à leur égard, est plus facile. Nous avons encore supposé que le témoin, lorsqu'il trompe, n'a pas de motif pour choisir un numéro plutôt qu'un autre; ce qui peut ne pas avoir lieu. Mais il serait très-difficile de faire entrer dans une formule, toutes ces considérations particulières.

45. Supposons maintenant que l'urne contienne $n-1$ boules noires, et une boule blanche; et qu'en ayant extrait une boule, un témoin du tirage annonce la sortie d'une boule blanche. Déterminons la probabilité de cette sortie. Nous formerons les mêmes hypothèses que nous venons de faire. Dans la première, la probabilité de la sortie de la boule blanche, est, comme ci-dessus, $\frac{pr}{n}$. Dans la seconde hypothèse, le témoin se trompant sans tromper, une boule noire doit être sortie, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$, et comme le témoin supposé véridique, doit énoncer la sortie d'une boule blanche, par cela seul qu'il se méprend; la probabilité de cette annonce sera donc $\frac{n-1}{n}$, probabilité qu'il faut multiplier par la probabilité $p.(1-r)$ de l'hypothèse, ce qui donne $\frac{p.(1-r).\overline{n-1}}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Dans la troisième hypothèse, le témoin étant supposé tromper et ne point se tromper, une boule noire doit être sortie, et la probabilité de cela est $\frac{n-1}{n}$. En la multipliant par la probabilité $(1-p).r$

de cette hypothèse, on aura $\frac{(1-p).r.\overline{n-1}}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Enfin, dans la quatrième hypothèse, le témoin trompant et se trompant, ne peut annoncer la sortie de la boule blanche, qu'autant qu'elle sera sortie. La probabilité de cette sortie est $\frac{1}{n}$. En la multipliant par la probabilité $(1-p).(1-r)$ de l'hypothèse, on aura $\frac{(1-p).(1-r)}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Présentement, si l'on réunit parmi les probabilités précédentes, celles dans lesquelles la boule blanche est sortie; on aura la probabilité de cette sortie, en divisant leur somme, par la somme de toutes les probabilités, ce qui donne

$$\frac{pr+(1-p).(1-r)}{pr+(1-p)(1-r)+[p.(1-r)+(1-p).r].(n-1)}$$

pour la probabilité de la sortie de la boule blanche; par conséquent

$$\frac{[p.(1-r)+(1-p).r].(n-1)}{pr+(1-p).(1-r)+[p.(1-r)+(1-p).r].(n-1)}$$

est la probabilité que le fait attesté par le témoin du tirage, n'a pas eu lieu.

On peut observer ici, que si l'on nomme q, la probabilité que le témoin énonce la vérité, on aura

$$q=pr+(1-p).(1-r);$$

car il est visible qu'il dit vrai, dans le cas dont il s'agit, soit qu'il ne trompe point et ne se trompe point, soit qu'il trompe et se trompe. Cette expression de q donne

$$1-q=p(1-r)+(1-p).r.$$

En effet, la probabilité $1-q$ qu'il n'énonce pas la vérité, est la probabilité qu'il ne trompe point et se trompe, plus la probabilité qu'il trompe et ne se trompe point. L'expression précédente de la probabilité que le fait attesté est faux, devient ainsi

$$\frac{(1-q).(n-1)}{q+(1-q).(n-1)}.$$

Si le nombre $n-1$ des boules noires est très-grand ; cette probabilité devient, à très-peu près, égale à l'unité ou à la certitude, pour peu que l'erreur ou le mensonge du témoin soient probables. Alors le fait qu'il atteste, devient extraordinaire. Ainsi l'on voit comment les faits extraordinaires affaiblissent la croyance due aux témoins ; le mensonge ou l'erreur devenant d'autant plus vraisemblable, que le fait attesté est plus extraordinaire en lui-même.

46. Considérons présentement deux urnes A et B, dont la première contienne un grand nombre n de boules blanches ; et la seconde, le même nombre de boules noires. On tire de l'une de ces urnes, une boule que l'on remet dans l'autre urne ; ensuite on tire une boule de cette dernière urne. Un témoin du premier tirage, atteste qu'une boule blanche est sortie : un témoin du second tirage, atteste pareillement qu'il a vu extraire une boule blanche. Chacun de ces témoignages, considéré isolément, n'offre rien d'invraisemblable. Mais la conséquence qui résulte de leur ensemble, est que la même boule sortie au premier tirage, a reparu au second ; ce qui est un phénomène d'autant plus extraordinaire, que n est un plus grand nombre. Voyons comment la valeur de ces témoignages, en est affaiblie.

Nommons q la probabilité que le premier témoin énonce la vérité. On voit par le numéro précédent, que dans le cas présent, cette probabilité se compose de la probabilité que le témoin ne trompe point et ne se trompe point, ajoutée à la probabilité qu'il trompe et se trompe à la fois ; car le témoin, dans ces deux cas, énonce la vérité. Soit q' la même probabilité relative au second témoin. On peut former ces quatre hypothèses : ou le premier et le second témoin disent la vérité ; ou le premier dit la vérité, le second ne la disant point ; ou le second témoin dit la vérité, le premier ne la disant point ; ou enfin aucun des deux ne dit la vérité. Déterminons *à priori*, dans chacune de ces hypothèses, la probabilité de l'événement observé.

Cet événement est l'annonce de la sortie d'une boule blanche à chaque tirage. La probabilité qu'une boule blanche est sortie au premier tirage, est $\frac{1}{2}$, puisque la boule extraite peut être également sortie de l'urne A ou de l'urne B. Dans le cas où elle a été extrai de l'urne A, et mise dans l'urne B, $n+1$ boules sont contenu dans cette dernière urne; et la probabilité d'en extraire la bou blanche est $\frac{1}{n+1}$; le produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{n+1}$ est donc la probabili *à priori*, de l'extraction d'une boule blanche, dans les deux tirag consécutifs. En la multipliant par la probabilité qq' que les deu témoins disent la vérité; on aura

$$\frac{qq'}{2.(n+1)}$$

pour la probabilité de l'événement observé, dans la première hy pothèse.

Dans la seconde hypothèse, la boule a été extraite de l'urne A et mise dans l'urne B: la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. [De] plus, puisque le second témoin ne dit pas la vérité, une boule n[oire] a été extraite de l'urne B, et la probabilité de cette extraction [est] $\frac{n}{n+1}$. En multipliant donc $\frac{1}{2}$ par $\frac{n}{n+1}$, et le produit par la pro babilité $q.(1-q')$, que le premier témoin dit la vérité, tandis que le second ne la dit pas, on aura

$$\frac{q.(1-q').n}{2.(n+1)}$$

pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hy pothèse.

Dans la troisième hypothèse, une boule noire a été extraite de l'urne B, et mise dans l'urne A: la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. De plus, une boule blanche a été ensuite extraite de l'urne A, et la probabilité de cette extraction est $\frac{n}{n+1}$; en multipliant donc $\frac{1}{2}$ par $\frac{n}{n+1}$, et le produit par la probabilité $(1-q).q'$, que le second témoin dit la vérité, tandis que le premier ne la dit pas, on aura

$$\frac{(1-q).q'.n}{2.(n+1)}$$

pour la probabilité relative à la troisième hypothèse.

Enfin

Enfin, dans la quatrième hypothèse, une boule noire a d'abord été extraite de l'urne B, et la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{2}$. Ensuite cette boule noire mise dans l'urne A, en a été extraite au second tirage, et la probabilité de cette extraction est $\frac{1}{n+1}$; en multipliant donc le produit de ces deux probabilités, par la probabilité $(1-q).(1-q')$ qu'aucun des témoins ne dit la vérité, on aura

$$\frac{(1-q).(1-q')}{2.(n+1)}$$

pour la probabilité relative à la quatrième hypothèse.

Maintenant la probabilité du fait qui résulte de l'ensemble des deux témoignages, savoir, qu'une boule blanche extraite au premier tirage a reparu au second tirage, est visiblement égale à la probabilité relative à la première hypothèse, divisée par la somme des probabilités relatives aux quatre hypothèses; cette probabilité est donc

$$\frac{qq'}{qq'+(1-q).(1-q')+[q.(1-q')+q'.(1-q)].n}.$$

Le phénomène de la réapparition d'une boule blanche au second tirage, devient d'autant plus extraordinaire, que le nombre n des boules de chaque urne est plus considérable; et alors la probabilité précédente devient très-petite. On voit donc que la probabilité du fait résultant de l'ensemble des témoignages est extrêmement affaiblie, lorsqu'il est extraordinaire.

47. Considérons les témoignages simultanés : supposons deux témoins d'accord sur un fait, et déterminons sa probabilite. Pour fixer les idées, supposons que le fait soit l'extraction du n° i, d'une urne qui en renferme le nombre n; ensorte que l'événement observé soit l'accord de deux témoins du tirage, à énoncer la sortie du n° i. Nommons p et p' leurs véracités respectives; et supposons, pour simplifier, qu'ils ne se trompent point. Cela posé, on ne peut former que ces deux hypothèses. Les témoins disent la vérité : les témoins trompent.

Dans la première hypothèse, le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. En la multipliant par le produit des véracités p et p' des témoins ; on aura $\frac{pp'}{n}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Dans la seconde, le n° i n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$; mais les deux témoins s'accordent à choisir le n° i parmi les $n-1$ numéros non sortis. Or le nombre des combinaisons différentes qui peuvent résulter de leur choix est $(n-1)^2$, et dans ce nombre, ils doivent choisir celle où le n° i est combiné avec lui-même; la probabilité de ce choix est donc $\frac{1}{(n-1)^2}$. En la multipliant par la probabilité précédente $\frac{n-1}{n}$, et par les produits des probabilités $1-p$ et $1-p'$ que les témoins trompent; on aura $\frac{(1-p).(1-p')}{n.\overline{n-1}}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse.

Maintenant, on aura la probabilité de la sortie du n° i, en divisant la probabilité relative à la première hypothèse, par la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses; on aura donc pour cette probabilité,

$$\frac{pp'}{pp' + \frac{(1-p).(1-p')}{n-1}}; \qquad (o)$$

si $n=2$, alors la sortie du n° i est aussi probable que sa non sortie; et la probabilité de sa sortie, résultante de l'accord des témoignages, est

$$\frac{pp'}{pp' + (1-p).(1-p')}.$$

C'est généralement la probabilité d'un fait attesté par deux témoins, lorsque l'existence du fait est aussi probable que sa non existence. Si les deux témoins sont également véridiques, ce qui donne $p'=p$, cette probabilité devient

$$\frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}.$$

En général, si un nombre r de témoins également véridiques, affirme l'existence d'un fait de ce genre ; sa probabilité résultante des témoignages sera

$$\frac{p^r}{p^r+(1-p)^r}.$$

Mais cette formule n'est applicable qu'au cas où l'existence du fait et sa non existence sont en elles-mêmes, également probables.

Si le nombre n des numéros de l'urne est très-grand, la formule (o) devient à très-peu près l'unité ; et par conséquent la sortie du n° i est extrêmement probable. Cela tient à ce qu'il est très-peu vraisemblable que les témoins voulant tromper, s'accordent à énoncer le même numéro, lorsque l'urne en contient un grand nombre. Le simple bon sens indique ce résultat du calcul ; mais on voit en même temps que la probabilité de la sortie du n° i est beaucoup diminuée, si les deux témoins cherchant à tromper, ont pu s'entendre.

Supposons maintenant que le premier témoin affirme la sortie du n° i, et que le second témoin affirme la sortie du n° i'. On peut former alors les trois hypothèses suivantes. Le premier témoin dit la vérité et le second trompe. Dans ce cas, le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. De plus, le second témoin qui trompe, doit choisir parmi les autres numéros non sortis, le n° i', et la probabilité de ce choix est $\frac{1}{n-1}$. Le produit de ces deux probabilités, par le produit des probabilités p et $1-p'$, que le premier témoin ne trompe pas et que le second trompe, sera la probabilité de l'événement observé, ou de l'énonciation de la sortie des n^os^ i et i', dans cette hypothèse ; probabilité qui est ainsi $\frac{p.(1-p')}{n.\overline{n-1}}$.

Dans la seconde hypothèse, le premier témoin trompe, et le second ne trompe pas. Alors le n° i' est sorti ; et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. De plus, le premier témoin choisit le n° i sur les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité de ce choix est $\frac{1}{n-1}$. En multipliant le produit de ces deux probabilités, par le produit des probabilités $1-p$ et p', que le premier témoin trompe et que le second ne trompe pas, on aura $\frac{(1-p).p'}{n.\overline{n-1}}$.

Enfin, dans la troisième hypothèse, les deux témoins trompent à la fois. Alors aucun des deux numéros i et i' n'est sorti. La probabilité de cet événement est $\frac{n-2}{n}$. De plus, le premier témoin doit choisir le n° i, et le second doit choisir le n° i', parmi les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité de cet événement composé est $\frac{1}{(n-1)^2}$. En multipliant le produit de ces deux probabilités, par le produit des probabilités $1-p$ et $1-p'$ que le premier et le second témoin trompent; on aura $\frac{\overline{n-2}.\overline{1-p}.\overline{1-p'}}{n.(n-1)^2}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Maintenant, on aura la probabilité de la sortie du n° i, en divisant la probabilité relative à la première hypothèse, par la somme des probabilités relatives aux trois hypothèses; la probabilité de cette sortie est donc

$$\frac{p.(1-p')}{1-pp'-\frac{(1-p).(1-p')}{n-1}}.$$

Si $n=2$, c'est-à-dire si l'existence de chaque fait attesté par les deux témoins est, *à priori*, aussi probable que sa non existence; alors la probabilité précédente devient $\frac{1}{2}$, lorsque $p=p'$; ce qui est visible d'ailleurs, les deux témoignages se détruisant réciproquement. En général, si un fait de ce genre est attesté par r témoins, et nié par r' témoins, tous également véridiques; il est facile de voir que sa probabilité sera

$$\frac{p^{r-r'}}{p^{r-r'}+(1-p)^{r-r'}};$$

c'est-à-dire, la même que si le fait était attesté par $r-r'$ témoins.

48. Considérons présentement une chaîne traditionnelle de r témoins, et supposons que le fait transmis soit la sortie du n° i

d'une urne qui renferme n numéros. Désignons par y_r sa probabilité. L'addition d'un nouveau témoin changera cette probabilité en y_{r+1}, probabilité qui sera formée, 1°. du produit de y_r par la véracité du nouveau témoin, véracité que nous désignerons par p_{r+1}; 2°. du produit de la probabilité $1-p_{r+1}$ que ce nouveau témoin trompe, par la probabilité $1-y_r$ que le témoin précédent n'a pas dit la vérité, et par la probabilité $\frac{1}{n-1}$ que le nouveau témoin choisira le numéro sorti, dans le nombre des $n-1$ numéros autres que celui qui lui a été indiqué par le témoin précédent; on aura donc

$$y_{r+1}=p_{r+1}\cdot y_r+\frac{1}{n-1}\cdot(1-p_{r+1})\cdot(1-y_r);$$

équation dont l'intégrale est

$$y_r=\frac{1}{n}+\mathrm{C}\cdot\frac{(np_1-1)\cdot(np_2-1)\ldots\ldots(np_r-1)}{(n-1)^r},$$

C étant une constante arbitraire. Pour la déterminer, on observera que la probabilité du fait, d'après le premier témoignage, est, par ce qui précède, égale à p_1; on a donc $y_1=p_1$; ce qui donne $\mathrm{C}=\frac{n-1}{n}$; partant

$$y_r=\frac{1}{n}+\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(np_1-1)\cdot(np_2-1)\ldots\ldots(np_r-1)}{(n-1)^r}.$$

Si n est infini, on a

$$y_r=p_1\cdot p_2\ldots\ldots p_r.$$

Si $n=2$, c'est-à-dire si l'existence du fait est aussi probable que sa non existence; on a

$$y_r=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot(2p_1-1)\cdot(2p_2-1)\ldots\ldots(2p_r-1).$$

En général, à mesure que la chaîne traditionnelle se prolonge, y_r approche indéfiniment de sa limite $\frac{1}{n}$, limite qui est la probabilité *à priori*, de la sortie du n° i. Le terme $\frac{n-1}{n}\cdot\left(\frac{np_1-1}{n-1}\right)$. etc. de l'expression de y_r, est donc ce que la chaîne des témoins ajoute à cette probabilité. On voit ainsi comment la probabilité s'affaiblit à mesure que la tradition se prolonge. A la vérité, les monumens, l'imprimerie et d'autres causes peuvent diminuer cet effet inévitable du temps; mais ils ne peuvent jamais entièrement le détruire.

Si l'on a deux chaînes traditionnelles, chacune de r témoins; si l'on suppose les témoins de ces chaînes, également véridiques, et si le dernier témoin de l'une des chaînes, s'accorde avec le dernier de l'autre, à affirmer la sortie du n° i; on aura la probabilité de cette sortie, en substituant y_r pour p et p', dans la formule (o) du n° précédent, qui devient par là,

$$\frac{y_r^2}{y_r^2 + \frac{(1-y_r)^2}{n-1}}.$$

49. Considérons deux témoins dont p et p' soient les véracités respectives. On sait que tous deux, ou du moins l'un d'eux, sans être contredit par l'autre qui, dans ce cas, n'a point prononcé, affirment que le n° i est sorti d'une urne qui en renferme le nombre n. En supposant toujours qu'on n'a extrait qu'un seul numéro, on demande la probabilité de la sortie du n° i.

Soient r et r' les probabilités respectives que les témoins prononcent. On ne peut faire ici que les quatre hypothèses suivantes : 1°. les deux témoins prononcent et disent la vérité; 2°. les deux témoins prononcent et trompent; 3°. l'un des témoins prononce et dit la vérité, et l'autre témoin ne prononce pas; 4°. l'un des témoins prononce et trompe, et l'autre ne prononce point.

Dans la première hypothèse, le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. Il faut la multiplier par le produit des probabilités r et r' que les deux témoins ont prononcé, et par le produit des probabilités p et p' qu'ils disent la vérité; on aura ainsi

$$\frac{pp'.rr'}{n}$$

pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Dans la seconde, le n° i n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$. Mais si les deux témoins trompent sans s'entendre, la probabilité qu'ils s'accorderont à énoncer le même n° i, est $\frac{1}{(n-1)^2}$. Il faut multiplier le produit de ces probabilités par la probabilité rr' que les deux témoins prononcent à la fois; et par la probabilité $(1-p).(1-p')$ qu'ils trompent tous deux. On aura ainsi

$$\frac{(1-p).(1-p').rr'}{n.\overline{n-1}}$$

pour la probabilité de l'événement observé dans la seconde hypothèse.

Dans la troisième, le n° i est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n}$. Il faut la multiplier par la probabilité $pr.(1-r') + p'r'.(1-r)$, que l'un des témoins prononce en disant la vérité, tandis que l'autre témoin ne prononce point. On aura ainsi

$$\frac{pr.(1-r')+p'r'.(1-r)}{n}$$

pour la probabilité de l'événement observé dans cette hypothèse.

Enfin, dans la quatrième, le n° i n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$; mais le témoin qui trompe, doit le choisir dans les $n-1$ numéros non sortis, et la probabilité de ce choix est $\frac{1}{n-1}$. Il faut multiplier le produit de ces probabilités par la probabilité $(1-p).r.(1-r') + (1-p').r'.(1-r)$ que l'un des témoins prononçant, trompe, tandis que l'autre témoin ne prononce point. On a ainsi

$$\frac{(1-p).r.(1-r')+(1-p').r'.(1-r)}{n}$$

pour la probabilité correspondante à la quatrième hypothèse.

Maintenant on aura la probabilité de la sortie du n° i, en divisant la somme des probabilités relatives à la première et à la troisième hypothèse, par la somme des probabilités relatives à toutes les hypothèses; ce qui donne pour cette probabilité

$$\frac{pp'.rr' + pr.(1-r') + p'.r'.(1-r)}{pp'.rr' + r.(1-r') + r'.(1-r) + \frac{(1-p).(1-p')\,rr'}{n-1}}.$$

Ces exemples indiquent suffisamment la méthode d'assujétir au calcul des probabilités, les témoignages.

50. On peut assimiler le jugement d'un tribunal qui prononce entre deux opinions contradictoires, au résultat des témoignages de plusieurs témoins de l'extraction d'un numéro d'une urne qui ne contient que deux numéros. En exprimant par p la probabilité que le juge prononce la vérité; la probabilité de la bonté d'un jugement rendu à l'unanimité sera, par ce qui précède,

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r},$$

r étant le nombre des juges. On peut déterminer p par l'observation du rapport des jugemens rendus à l'unanimité par le tribunal, au nombre total des jugemens. Lorsque ce nombre est très-grand; en le désignant par n, et par i le nombre des jugemens rendus à l'unanimité; on aura à fort peu près

$$p^r + (1-p)^r = \frac{i}{n};$$

la résolution de cette équation donnera la véracité p des juges. Cette équation se réduit à un degré de moitié moindre, en faisant $p = 1 + \sqrt{u}$. Elle devient alors

$$(1+\sqrt{u})^r + (1-\sqrt{u})^r = \frac{i}{n};$$

équation qui développée est du degré $\frac{r}{2}$, ou $\frac{r-1}{2}$, suivant que r est pair ou impair.

La probabilité de la bonté d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité, sera

$$1 - \frac{n}{i}.(1-p)^r.$$

Si

Si l'on suppose le tribunal formé de trois juges, on aura

$$p = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4i - n}{12.n}}.$$

Nous adopterons le signe $+$; car il est naturel de supposer à chaque juge, une plus grande probabilité pour la vérité que pour l'erreur. Si la moitié des jugemens rendus par le tribunal, a été rendue à l'unanimité; alors $\frac{i}{n} = \frac{1}{2}$, et l'on trouve $p = 0{,}789$. La probabilité d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité, sera 0,981. Si ce jugement n'est rendu qu'à la pluralité, sa probabilité sera p ou 0,789.

En général, on voit que la probabilité $1 - \frac{n}{i}.(1-p)^r$ de la bonté d'un nouveau jugement rendu à l'unanimité, est d'autant plus grande, que r est un plus grand nombre, et que les valeurs de p et de $\frac{i}{n}$ sont plus grandes, ce qui dépend des lumières des juges. Il y a donc un grand avantage à former des tribunaux d'appel, composés d'un grand nombre de juges choisis parmi les personnes les plus éclairées.

ADDITIONS.

I.

Nous avons intégré par une approximation très-convergente, dans le n° 34 du premier livre, l'équation aux différences finies,

$$0 = (n' + s + 1).y_{s+1} - (n + s).y_s.$$

Il est facile de conclure de notre analyse, l'expression du rapport de la circonférence au rayon, en produits infinis, donnée par Wallis. En effet, cette analyse nous a conduits dans le numéro cité, à l'expression générale

$$\frac{(n+\mu)\,(n+\mu+1)\ldots\ldots(n+s-1)}{(n'+\mu+1).(n'+\mu+2)\ldots.(n'+s)} = \frac{\int u^{2n'-2n+1}.du.(1-u^2)^{n+s-1}}{\int u^{2n'-2n+1}.du.(1-u^2)^{n+\mu-1}}, \qquad (a)$$

les intégrales étant prises depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$. En faisant d'abord $n'=0$, $n=\frac{1}{2}$, $\mu=1$, et observant que $\int du.(1-u^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\pi$, π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon ; on aura

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.5\ldots.\overline{2s-1}}{4.6\ldots.2s.\int du.(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}}.$$

En supposant donc généralement

$$\frac{1}{\int du.(1-u^2)^s} = y_s;$$

on aura

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.5\ldots.\overline{2s-1}}{4.6\ldots.2s}.y_{s-\frac{1}{2}} = \frac{3.5\ldots.\overline{2s+1}}{4.6\ldots.\overline{2s+2}}.y_{s+\frac{1}{2}} = \text{etc.};$$

ce qui donne

$$y_{s-\frac{1}{2}} = \frac{2s+1}{2s+2}.y_{s+\frac{1}{2}}.$$

Si l'on fait ensuite dans la formule (a), $n'=-\frac{1}{2}$, $n=0$ et $\mu=1$, elle donne

$$\frac{3.5\ldots\overline{2s-1}}{2.4\ldots\overline{2s-2}}=y_{s-1};$$

d'où l'on tire

$$y_{s-1}=\frac{2s}{2s+1}.y_s;$$

équation qui coïncide avec la précédente entre $y_{s-\frac{1}{2}}$ et $y_{s+\frac{1}{2}}$, en y changeant s dans $s+\frac{1}{2}$; ensorte que cette équation a lieu, s étant entier, ou égal à un entier plus $\frac{1}{2}$.

Les deux expressions de y_{s-1} et de $\frac{4}{\pi}$ donnent

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3.3}{2.4}.\frac{5.5}{4.6}\ldots\ldots\frac{\overline{2s-1}.\overline{2s-1}}{\overline{2s-2}.2s}.\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}};$$

les équations aux différences en y_s et $y_{s-\frac{1}{2}}$ donnent

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}=\frac{\overline{2s+1}^2}{2s.\overline{2s+2}}.\frac{y_{s+\frac{1}{2}}}{y_s}=\frac{\overline{2s+1}^2}{2s.\overline{2s+2}}.\frac{\overline{2s+3}^2}{\overline{2s+2}.\overline{2s+4}}.\frac{y_{s+\frac{3}{2}}}{y_{s+1}}=\text{etc.}$$

Le rapport $\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}$ est plus grand que l'unité : il diminue sans cesse, à mesure que s augmente; et dans le cas de s infini, il devient l'unité. En effet, ce rapport est égal à

$$\frac{\int du.(1-u^2)^{s-1}}{\int du.(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}}.$$

Or l'élément $du.(1-u^2)^{s-1}$ est plus grand que l'élément $du.(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}$, ou $du.(1-u^2)^{s-1}.(1-u^2)^{\frac{1}{2}}$; l'intégrale du numérateur de la fraction précédente surpasse donc celle du dénominateur ; cette fraction est donc plus grande que l'unité. Lorsque s est infini, ces intégrales n'ont de valeur sensible que lorsque u est infiniment petit; car u étant fini, le facteur $(1-u^2)^{s-1}$ devient une fraction ayant un exposant infiniment grand; on peut donc alors supposer $(1-u^2)^{\frac{1}{2}}=1$, ce qui rend le rapport $\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}$ égal à l'unité.

Ce rapport est égal au produit d'une suite infinie de fractions dont la première est $\frac{\overline{2s+1}^2}{2s.\overline{2s+2}}$, et dont les autres s'en déduisent, en augmentant successivement s d'une unité, il devient $\frac{y_s}{y_{s-\frac{1}{2}}}$, en y changeant s dans $s+\frac{1}{2}$, et la fraction $\frac{\overline{2s+1}^2}{2s.\overline{2s+2}}$ devient $\frac{\overline{2s+2}^2}{\overline{2s+1}.\overline{2s+3}}$; or on a, quel que soit s,

$$\frac{\overline{2s+1}^2}{2s.\overline{2s+2}} > \frac{\overline{2s+2}^2}{\overline{2s+1}.\overline{2s+3}};$$

on a donc cette inégalité

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}} > \frac{y_s}{y_{s-\frac{1}{2}}}.$$

En y changeant s en $s-\frac{1}{2}$, on aura

$$\frac{y_{s-1}}{y_{s-\frac{3}{2}}} > \frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}.$$

Ces deux inégalités donnent

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}} > \sqrt{\frac{y_s}{y_{s-1}}} < \sqrt{\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-\frac{3}{2}}}}.$$

Substituant au lieu des rapports $\frac{y_s}{y_{s-1}}$ et $\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-\frac{3}{2}}}$, leurs valeurs données par les équations aux différences en y_s, on aura

$$\frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}} > \sqrt{1+\frac{1}{2s}} < \sqrt{1+\frac{1}{2s-1}};$$

on aura donc

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{\pi} > \frac{3.3}{2.4}\cdot\frac{5.5}{4.6}\cdots\cdots\frac{\overline{2s-1}.\overline{2s-1}}{\overline{2s-2}.2s}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2s}} \\ \frac{4}{\pi} < \frac{3.3}{2.4}\cdot\frac{5.5}{4.6}\cdots\cdots\frac{\overline{2s-1}.\overline{2s-1}}{\overline{2s-2}.2s}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2s-1}} \end{array}\right\} \quad (A).$$

Wallis publia en 1657, dans son *Arythmetica infinitorum*, ce beau théorème, l'un des plus curieux de l'analyse, par lui-même, et par la manière dont l'inventeur y est parvenu. Sa méthode renfermant les principes de la théorie des intégrales définies, que les géomètres ont spécialement cultivée dans ces derniers temps; je pense qu'ils en verront avec plaisir, une exposition succincte, dans le langage actuel de l'analyse.

Wallis considère la suite des fractions dont le terme général est $\frac{1}{\int dx.(1-x^{\frac{1}{n}})^s}$, n et s étant des nombres entiers, en commençant par zéro. En développant le binome renfermé sous le signe intégral, et intégrant chaque terme du développement, il obtient pour une même valeur de n, les valeurs numériques de la fraction précédente, correspondantes à $s=0$, $s=1$, $s=2$, etc.; ce qui lui donne une série horizontale dont s est l'indice. En supposant successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc., il a autant de séries horizontales. Par là il forme une table à double entrée, dont s est l'indice horizontal, et n l'indice vertical.

Dans cette table, les séries horizontales et verticales sont les mêmes; ensorte qu'en désignant par $y_{n,s}$ le terme correspondant aux indices n et s, on a cette équation fondamentale,

$$y_{n,s} = y_{s,n}.$$

Wallis observe ensuite que la première série est l'unité; que la seconde est formée des nombres naturels; que la troisième est formée des nombres triangulaires, et ainsi de suite; de manière que le terme général $y_{n,s}$ de la série horizontale correspondante à n est

$$\frac{\overline{s+1}.\overline{s+2}\ldots\ldots\overline{s+n}}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

cette fraction étant égale à

$$\frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}\ldots\ldots\overline{s+n}}{1.2.3\ldots\ldots s},$$

on voit clairement que $y_{n,s}$ est égale à $y_{s,n}$.

Maintenant si l'on parvenait à interpoler dans la table précédente, le terme correspondant à n et s égaux à $\frac{1}{2}$, on aurait le rapport du carré du diamètre à la surface du cercle ; car le terme dont il s'agit est $\frac{1}{\int dx.(1-x^n)^{\frac{1}{2}}}$, ou $\frac{4}{\pi}$. Wallis cherche donc à faire cette interpolation. Elle est facile dans le cas où l'un des deux nombres n et s est un nombre entier. Ainsi en faisant successivement s égal à un nombre entier moins $\frac{1}{2}$, dans la fonction $\frac{\overline{s+1}.\overline{s+2}\ldots\ldots\overline{s+n}}{1.2.3\ldots\ldots n}$, il obtient tous les termes des suites horizontales, correspondans aux valeurs de s, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc. ; et en faisant n égal à un nombre entier moins $\frac{1}{2}$, dans la fonction $\frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}\ldots\ldots\overline{n+s}}{1.2.3\ldots\ s}$, il obtient tous les termes des suites verticales, correspondans aux valeurs de n, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, etc. Mais la difficulté consiste à trouver les termes correspondans à n et s égaux tous deux, à des nombres entiers moins $\frac{1}{2}$.

Wallis observe pour cela que l'équation

$$y_{n,s} = \frac{\overline{s+1}.\overline{s+2}\ldots\ldots\overline{s+n}}{1.2.3\ldots\ldots n}$$

donne

$$y_{n,s-1} = \frac{s.\overline{s+1}\ldots\ldots\overline{s+n-1}}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

et qu'ainsi l'on a

$$y_{n,s} = \frac{s+n}{s}.y_{n,s-1}; \qquad (a)$$

ensorte que chaque terme d'une série horizontale est égal au précédent, multiplié par la fraction $\frac{s+n}{s}$; d'où il suit que tous les termes d'une série horizontale, à partir de $s=-\frac{1}{2}$, s croissant successivement de l'unité, sont les produits de $y_{n,-\frac{1}{2}}$, par les fractions $\frac{2n+1}{1}$, $\frac{2n+3}{3}$, $\frac{2n+5}{5}$, etc. ; et à partir de $s=1$, ces termes sont les produits de $y_{n,0}$, par les fractions $\frac{n+1}{1}$, $\frac{n+2}{2}$, $\frac{n+3}{3}$, etc. Il suppose que les même lois subsistent dans le cas de n fractionnaire, et égal à $\frac{1}{2}$; ensorte que l'on a tous les termes, à partir de $s=-\frac{1}{2}$, en multipliant $y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ par la suite des fractions $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$, etc. En désignant donc par $\square$ le terme correspondant à $n=\frac{1}{2}$ et $s=\frac{1}{2}$, terme qui, comme on l'a vu, est égal à $\frac{4}{\pi}$, on a

$$\square = \tfrac{2}{1}.y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}},$$

ce qui donne

$$y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}.\square.$$

A partir de $y_{\frac{1}{2},0}$ ou de l'unité, il obtient les termes successifs de la série, correspondans à s entier, en multipliant successivement l'unité, par les fractions $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, etc. Il forme ainsi la série horizontale suivante qui correspond à $n=\frac{1}{2}$, et à s successivement égal à $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, etc.

$$\tfrac{1}{2}.\square,\ 1,\ \square,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{4}{3}.\square,\ \tfrac{3.5}{2.4},\ \tfrac{4}{3}.\tfrac{6}{5}.\square,\ \text{etc.}; \qquad (i)$$

série qui représente celle-ci,

$$\frac{1}{\int dx.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}},\quad \frac{1}{\int dx.(1-x^2)^0},\quad \frac{1}{\int dx.(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \text{etc.}$$

La série (i) donne généralement, s étant un nombre entier,

$$y_{\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}} = \tfrac{4}{3}.\tfrac{6}{5}\ldots\ldots\frac{2s}{2s-1}.\square,$$
$$y_{\frac{1}{2},s-1} = \tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{4}\ldots\ldots\frac{2s-1}{2s-2};$$

d'où l'on tire

$$\square = \frac{3.3}{2.4}.\frac{5.5}{4.6}\ldots\ldots\frac{\overline{2s-1}.\overline{2s-1}}{\overline{2s-2}.2s}.\frac{y_{\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}}}{y_{\frac{1}{2},s-1}}. \qquad (B)$$

Wallis considère ensuite que dans la série (i), le rapport de chaque terme à celui qui le précède d'une unité, est plus grand que l'unité, et diminue sans cesse; ensorte que l'on a

$$\frac{y_{\frac{1}{2},s}}{y_{\frac{1}{2},s-1}} > \frac{y_{\frac{1}{2},s+1}}{y_{\frac{1}{2},s}}.$$

Cela résulte en effet de l'équation

$$y_{\frac{1}{2},s} = \frac{2s+1}{2s} \cdot y_{\frac{1}{2},s-1}.$$

Il suppose que cela a également lieu pour tous les termes consécutifs de la série ; ensorte que l'on a les deux inégalités

$$\frac{y_{\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}}}{y_{\frac{1}{2},s-1}} > \frac{y_{\frac{1}{2},s}}{y_{\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}}} < \frac{y_{\frac{1}{2},s-1}}{y_{\frac{1}{2},s-1\frac{1}{2}}};$$

d'où il tire, comme on l'a fait ci-dessus,

$$\frac{y_{\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}}}{y_{\frac{1}{2},s-1}} > \sqrt{1+\frac{1}{2s}} < \sqrt{1+\frac{1}{2s-1}};$$

par là, il change la formule (B) dans la formule (A).

Cette manière de procéder par voie d'induction, dut paraître, et parut en effet, extraordinaire aux géomètres accoutumés à la rigueur des anciens. Aussi voyons-nous que de grands géomètres contemporains de Wallis, en furent peu satisfaits ; et Fermat, dans sa correspondance avec Digby, fit des objections peu dignes de lui, contre cette méthode qu'il n'avait pas suffisamment approfondie. Elle doit être, sans doute, employée avec une circonspection extrême : Wallis dit lui-même, en répondant à Fermat, que c'est ainsi qu'il s'en est servi ; et pour en confirmer l'exactitude, il l'appuie sur un calcul par lequel milord Brouncker avait trouvé, par le moyen de la formule (A), le rapport de la circonférence au diamètre, compris entre les limites

$$3,\ 14159\ 26535\ 69,$$
$$3,\ 14159\ 26536\ 96,$$

limites qui coïncident dans les dix premiers chiffres, avec ce rapport que l'on a porté au-delà de cent décimales. Nonobstant ces confirmations, il est toujours utile de démontrer en rigueur, ce que l'on obtient par ces moyens d'invention. Wallis observe que les anciens en avaient, sans doute, de semblables qu'ils n'ont point fait connaître, se contentant de donner leurs résultats appuyés de démonstrations

trations synthétiques. Il regrette avec raison, qu'ils nous aient celé leurs moyens d'y parvenir; et il dit à Fermat, qu'on doit lui savoir gré de ne les avoir pas imités, et de n'avoir pas *détruit le pont après avoir passé le fleuve*. Il est digne de remarque que Newton qui avait profité de cette méthode d'induction de Wallis et de ses résultats, pour découvrir son théorème du binome, ait mérité les reproches que Wallis fait aux anciens géomètres, en cachant les moyens qui l'avaient conduit à ses découvertes.

Reprenons la formule (B) de Wallis. Si l'on suppose

$$\frac{y_{\frac{1}{2},\, s-\frac{1}{2}}}{y_{\frac{1}{2},\, s-1}} = u_s,$$

cette formule donnera

$$u_{s-1} = \frac{\overline{2s-1}^{\,2}}{\overline{2s-2}.2s}.u_s,$$

ou

$$0 = 2s.\overline{2s-2}.(u_s - u_{s-1}) + u_s. \qquad (l)$$

Soit

$$u_s = A^{(0)} + \frac{A^{(1)}}{s+1} + \frac{A^{(2)}}{\overline{s+1}.\overline{s+2}} + \frac{A^{(3)}}{\overline{s+1}.\overline{s+2}.\overline{s+3}} + \text{etc.};$$

et considérons ce que produit dans le second membre de l'équation (l), le terme

$$\frac{A^{(r)}}{\overline{s+1}\ldots\ldots\overline{s+r}}.$$

En n'ayant égard qu'à ce terme dans u_s, on aura

$$u_s - u_{s-1} = \frac{-r.A^{(r)}}{s.\overline{s+1}.\overline{s+2}\ldots\ldots\overline{s+r}}:$$

le terme $2s.\overline{2s-2}.(u_s - u_{s-1})$ de l'équation (l) devient ainsi,

$$\frac{-4r.A^{(r)}.\overline{s-1}}{\overline{s+1}\ldots\ldots\overline{s+r}},$$

ou

$$\frac{-4r.A^{(r)}}{\overline{s+1}\ldots\ldots\ldots\overline{s+r-1}} + \frac{4r.\overline{r+1}.A^{(r)}}{\overline{s+1}\ldots\ldots\overline{s+r}}.$$

Le terme de u_s dépendant de $A^{(r+1)}$, produira des termes semblables, et ainsi des autres. En comparant donc dans l'équation (l) les termes qui ont le même dénominateur $\overline{s+1} \ldots \overline{s+r}$, on aura

$$0 = 4r.\overline{r+1}.A^{(r)} - 4.(r+1).A^{(r+1)} + A^{(r)},$$

ce qui donne

$$A^{(r+1)} = \frac{(2r+1)^2 . A^{(r)}}{4.(r+1)}.$$

Il est visible, par ce qui précède, que u_s se réduit à l'unité, lorsque s est infini, ce qui donne $A^{(0)} = 1$. De là, on tire

$$u_s = 1 + \frac{1^2}{4.\overline{s+1}} + \frac{1^2.3^2}{4^2.1.2.\overline{s+1}.\overline{s+2}} + \frac{1^2.3^2.5^2}{4^3.1.2.3.\overline{s+1}.\overline{s+2}.\overline{s+3}} + \text{etc.} = \frac{y_{s-\frac{1}{2}}}{y_{s-1}}.$$

Le rapport du terme moyen du binome $(1+1)^{2s}$, au binome entier, est

$$\frac{\overline{s+1}.\overline{s+2} \ldots \ldots 2s}{2^{2s}.1.2.3 \ldots \ldots s},$$

ou

$$\frac{1.3.5 \ldots \ldots \overline{2s-1}}{2.4.6 \ldots \ldots 2s}.$$

En nommant donc T ce terme moyen, la formule (B) donnera

$$T^2 = \frac{1}{s\varpi . u_s}.$$

Ce théorème et l'expression précédente de u_s en série, sont dus à Stirling; et l'on voit comme ils se rattachent au théorème et à l'analyse de Wallis. Cette valeur de T^2 peut servir à déterminer par approximation, le rapport de la circonférence au diamètre, ce qui était l'objet de Wallis; ou ce rapport étant supposé connu, elle donne le terme moyen du binome, ce qui était l'objet de Stirling.

II.

L'expression de $\Delta^n.s^i$ donnée par la formule (μ') du n° 40 du premier livre, a été conclue de l'expression de $\Delta^n.\frac{1}{s^i}$, en changeant dans celle-ci, i en $-i$. Ce passage du positif au négatif, est analogue aux inductions que Wallis et d'autres géomètres ont si heureusement employées. Tous ces moyens d'invention, qui tiennent à la généralité de l'analyse, exigent dans leur usage, une grande circonspection, et il est toujours bon d'en démontrer directement les résultats. C'est ce que nous allons faire relativement à la formule (μ').

Considérons l'intégrale

$$\int \frac{d\varpi . c^{-as\varpi.\sqrt{-1}}}{(1-\varpi\sqrt{-1})^{i+1}},$$

prise depuis $\varpi = -\infty$, jusqu'à $\varpi = \infty$. Cette intégrale est égale à

$$\frac{-\sqrt{-1}}{i} . \frac{c^{-as\varpi.\sqrt{-1}}}{(1-\varpi.\sqrt{-1})^i} + \frac{as}{i} . \int \frac{d\varpi . c^{-as\varpi.\sqrt{-1}}}{(1-\varpi.\sqrt{-1})^i} + \text{constante.}$$

Cette constante est

$$\frac{\sqrt{-1}}{i} . \frac{c^{as\varpi.\sqrt{-1}}}{(1+\varpi.\sqrt{-1})^i},$$

ϖ étant supposé infini. En la réunissant au terme

$$\frac{-\sqrt{-1}}{i} . \frac{c^{-as\varpi.\sqrt{-1}}}{(1-\varpi.\sqrt{-1})^i},$$

dans lequel on doit pareillement supposer ϖ infini, on aura

$$\frac{\frac{\sqrt{-1}}{i} . \left\{ \begin{array}{l} \cos.(as\varpi).[(1-\varpi.\sqrt{-1})^i-(1+\varpi.\sqrt{-1})^i] \\ +\sqrt{-1}.\sin.(as\varpi).[(1-\varpi\sqrt{-1})^i+(1+\varpi.\sqrt{-1})^i] \end{array} \right.}{(1+\varpi^2)^i};$$

le numérateur de cette fraction est réel, ainsi que son dénominateur; et il est visible qu'elle devient nulle, en y faisant ϖ infini; on a donc

$$\int \frac{d\varpi . c^{-as\varpi.\sqrt{-1}}}{(1-\varpi.\sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{as}{i} . \int \frac{d\varpi . c^{-as\varpi.\sqrt{-1}}}{(1-\varpi.\sqrt{-1})^i}.$$

De là il est facile de conclure qu'en faisant $i = r - \frac{m}{n}$, r étant un nombre entier positif, on aura

$$\int \frac{d\varpi . c^{-as\varpi . \sqrt{-1}}}{(1-\varpi . \sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{a^i . s^i}{i . \overline{i-1} \ldots \left(1-\frac{m}{n}\right)} . \int \frac{d\varpi . c^{-as\varpi . \sqrt{-1}}}{(1-\varpi . \sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}}.$$

Soit $as\varpi = \varpi'$, et faisons $as = q$; nous aurons

$$a^i . s^i . \int \frac{d\varpi . c^{-as\varpi . \sqrt{-1}}}{(1-\varpi . \sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}} = q^i . \int \frac{d\varpi' . c^{-\varpi' . \sqrt{-1}}}{(q-\varpi' . \sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}},$$

les intégrales étant prises depuis ϖ et ϖ' égaux à $-\infty$, jusqu'à ϖ et ϖ' égaux à $+\infty$. Désignons par k l'intégrale

$$\int \frac{d\varpi' . c^{-\varpi' . \sqrt{-1}}}{(q-\varpi' . \sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}};$$

on aura

$$\frac{dk}{dq} = -\left(1-\frac{m}{n}\right) . \int \frac{d\varpi' . c^{-\varpi' . \sqrt{-1}}}{(q-\varpi' . \sqrt{-1})^{2-\frac{m}{n}}}$$

$$= \frac{\sqrt{-1} . c^{-\varpi' . \sqrt{-1}}}{(q-\varpi' . \sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}} - \int \frac{d\varpi' . c^{-\varpi' . \sqrt{-1}}}{(q-\varpi' . \sqrt{-1})^{1-\frac{m}{n}}} + \text{constante.}$$

On verra, comme ci-dessus, que ce dernier membre se réduit au terme affecté du signe intégral, terme qui est égal à $-k$; on a donc

$$\frac{dk}{dq} = -k;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$k = A . c^{-q},$$

A étant une constante arbitraire indépendante de q. Il est visible que cette équation suppose q positif; car en faisant q infini positif ou négatif, k est infiniment petit. On a donc

$$\int \frac{d\varpi . c^{as . (1-\varpi . \sqrt{-1})}}{(1-\varpi . \sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{A . a^i . s^i}{i . \overline{i-1} \ldots \left(1-\frac{m}{n}\right)}.$$

Cette équation a lieu quelle que soit la valeur de a, pourvu que as soit positif. En faisant $s=1$, et changeant a dans une autre constante a', on aura

$$\int\frac{d\varpi . c^{a'.(1-\varpi.\sqrt{-1})}}{(1-\varpi.\sqrt{-1})^{i+1}}=\frac{A.a'^{i}}{i.\overline{i-1}\ldots\ldots\left(1-\frac{m}{n}\right)};$$

on aura donc

$$s^{i}=\frac{a'^{i}}{a^{i}}.\frac{\int\frac{d\varpi . c^{as.(1-\varpi.\sqrt{-1})}}{(1-\varpi.\sqrt{-1})^{i+1}}}{\int\frac{d\varpi . c^{a'.(1-\varpi.\sqrt{-1})}}{(1-\varpi.\sqrt{-1})^{i+1}}};$$

ce qui donne

$$\Delta^{n}.s^{i}=\frac{a'^{i}}{a^{i}}.\frac{\int\frac{d\varpi . c^{as.(1-\varpi.\sqrt{-1})}.(c^{a.(1-\varpi.\sqrt{-1})}-1)^{n}}{(1-\varpi.\sqrt{-1})^{i+1}}}{\int\frac{d\varpi . c^{a'.(1-\varpi.\sqrt{-1})}}{(1-\varpi.\sqrt{-1})^{i+1}}}.$$

Pour avoir en séries, les intégrales; nous supposerons

$$\frac{c^{as.(1-\varpi.\sqrt{-1})}.(c^{a.(1-\varpi.\sqrt{-1})}-1)^{n}}{(1-\varpi.\sqrt{-1})^{i+1}}=c^{as}.(c^{a}-1)^{n}.c^{-t^{2}};$$

nous aurons en prenant les logarithmes,

$$-as\varpi.\sqrt{-1}+n.\log.\left[1+\frac{c^{a}}{c^{a}-1}.(c^{-a\varpi.\sqrt{-1}}-1)\right]$$
$$-(i+1).\log.(1-\varpi.\sqrt{-1})=-t^{2}.$$

Déterminons a, de manière que dans le développement du premier membre de cette équation, la première puissance de ϖ disparaisse, et supposons ce développement égal à

$$-f.a^{2}.\varpi^{2}-f'.a^{3}.\varpi^{3}-f''.a^{4}.\varpi^{4}-\text{etc.}=-t^{2};$$

nous aurons d'abord

$$0=\frac{i+1}{a}-s-\frac{n.c^{a}}{c^{a}-1};$$

ensuite

$$f = \frac{i+1}{2a^2} + \frac{n}{2} \cdot \frac{c^a}{c^a - 1} - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^2,$$

$$f' = \sqrt{-1} \cdot \left[\frac{i+1}{3a^3} - \frac{n}{6} \cdot \frac{c^a}{c^a - 1} + \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^2 - \frac{n}{3} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^3\right],$$

$$f'' = -\frac{(i+1)}{4a^4} - \frac{n}{24} \cdot \frac{c^a}{c^a - 1} + \frac{7n}{24} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^2 - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^3 + \frac{n}{24} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^4;$$

etc.

On a ensuite, par le retour des séries,

$$a\varpi = \frac{t}{\sqrt{f}} \cdot \left(1 - \frac{f't}{2f \cdot \sqrt{f}} + \frac{(5f'^2 - 4ff'')}{8f^3} \cdot t^2 + \text{etc.}\right):$$

on a donc, en prenant les intégrales depuis ϖ et t égaux à $-\infty$, jusqu'à t et ϖ égaux à $+\infty$,

$$\int \frac{d\varpi \cdot c^{as \cdot (1 - \varpi \cdot \sqrt{-1})} \cdot \left(c^{a \cdot (1 - \varpi \cdot \sqrt{-1})} - 1\right)^n}{(1 - \varpi \cdot \sqrt{-1})^s}$$

$$= \frac{c^{as} \cdot (c^a - 1)^n}{a} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{f}} \cdot \left(1 - \frac{f' \cdot t}{f\sqrt{f}} + 3 \cdot \frac{(5f'^2 - 4ff'')}{8f^3} \cdot t^2 + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot f'^2 - 12 \cdot ff''}{16 \cdot f^3} + \text{etc.}\right) \cdot \frac{c^{as} \cdot (c^a - 1)^n}{a}.$$

Si l'on suppose $s = 1$, $n = 0$, et si l'on change a en a', on aura

$$a' = i + 1, \quad f = \frac{1}{2 \cdot (i+1)}, \quad f' = \frac{\sqrt{-1}}{3 \cdot (i+1)^2}, \quad f'' = \frac{1}{4 \cdot (i+1)^3}, \quad \text{etc.}$$

on aura donc

$$\int \frac{d\varpi \cdot c^{a' \cdot (1 - \varpi \cdot \sqrt{-1})}}{(1 - \varpi \cdot \sqrt{-1})^{i+1}} = \frac{c^{i+1}}{i+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{12 \cdot i} + \text{etc.}\right) \cdot \sqrt{2(i+1) \cdot \pi}.$$

De là il est aisé de conclure

$$\Delta^n \cdot s^i = \frac{\left(\frac{i}{a}\right)^{i+1} \cdot c^{as-i} \cdot (c^a - 1)^n}{\sqrt{\frac{i \cdot (i+1)}{a^2} - in \cdot \frac{c^a}{(c^a - 1)^2}}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot f'^2 - 12 \cdot ff''}{16 \cdot f^3} + \frac{1}{12 \cdot i} + \text{etc.}\right),$$

formule qui coïncide avec la formule (μ') du n° 40 du premier livre.

Cette formule suppose a positif, et c'est ce qui a lieu, lorsque $i+1$ surpasse n. En effet, si dans l'équation

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{n.c^a}{c^a - 1},$$

on suppose a infiniment petit, le second membre est positif et égal à $\frac{i+1-n}{a}$; ensuite a étant positif et infini, ce second membre devient négatif et égal à $-s-n$; il y a donc une valeur positive de a qui satisfait à cette équation. Mais il n'y en a qu'une; car s'il y en avait deux, la fonction $\frac{i+1}{a} - s - \frac{nc^a}{c^a-1}$ aurait un *maximum* entre ces deux valeurs; on aurait donc à ce *maximum*,

$$0 = -\frac{(i+1)}{a^2} + \frac{n.c^a}{(c^a-1)^2},$$

ce qui ne se peut, a étant positif. En effet, $(c^a-1)^2$ est plus grand que $a^2.c^a$, ou $c^a - 1 > a.c^{\frac{a}{2}}$; ce qui est visible; car on a

$$c^{\frac{a}{2}} - c^{-\frac{a}{2}} = a + \frac{a^3}{4.1.2.3} + \text{etc.} > a;$$

on a donc

$$\frac{n.c^a}{(c^a-1)^2} < \frac{n}{a^2} < \frac{i+1}{a^2}.$$

Ainsi la formule (μ') peut être employée, tant que $i+1$ surpasse n; ce qui est conforme à ce que l'on a dit dans le n° 41 du premier livre, d'après la considération des passages du réel à l'imaginaire, passages que l'analyse précédente confirme.

III.

La formule (p) du n° 42 du premier livre, est fort remarquable : elle peut se démontrer de la manière suivante, qui montre distinctement la raison pour laquelle la série des différences doit être arrêtée, lorsque la quantité sous l'exposant de la puissance, devient négative.

Considérons l'intégrale

$$\int x^{-\frac{m}{n}}.dx.\cos\left(zx-\frac{m\pi}{2n}\right).\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n,$$

et donnons-lui cette forme

$$\cos\frac{m\pi}{2n}.\int x^{-\frac{m}{n}}\,dx.\cos zx.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

$$+\sin\frac{m\pi}{2n}.\int x^{-\frac{m}{n}}\,dx.\sin zx.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n,$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini. Supposons d'abord n pair et égal à $2i$; on aura par les formules connues,

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2i}=\frac{(-1)^i}{2^{2i-1}.x^{2i}}.\left\{\begin{array}{c}\cos nx-n.\cos(n-2).x+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\cos(n-4).x-\text{etc.}\\ \pm\frac{1}{2}.\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\ldots.\overline{n-i+1}}{1.2.3.\ldots.i}\end{array}\right\}$$

le signe $+$ ayant lieu, si i est pair, et le signe $-$, si i est impair. En multipliant cette équation par $\cos zx$, on aura

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2i}.\cos zx=\frac{(-1)^i}{2^{2i}.x^{2i}}.\left\{\begin{array}{l}\cos(n\pm z).x-n.\cos(n-2+z).x\pm\text{etc.}\\ \pm\frac{1}{2}.\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}\ldots.\overline{n-i+1}}{1.2.3\ldots.i}.\cos\left(\frac{1}{2}zx\right)\end{array}\right\}$$

où l'on doit observer que par $\cos(n-2r\pm z).x$, je comprends la somme des cosinus, $\cos(n-2r+z).x$ et $\cos(n-2r-z).x$, $2r$ étant ici égal moindre que n ou $2i$. Multiplions le second membre de cette équation par $x^{-\frac{m}{n}}.dx$; on a généralement

$$\int x^{-n-\frac{m}{n}}.dx.\cos(n-2r\pm z).x$$
$$=-\frac{\cos(n-2r\pm z).x}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right).x^{n+\frac{m}{n}-1}}$$
$$+\frac{(n-2r\pm z).\sin(n-2r\pm z).x}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\left(n+\frac{m}{n}-2\right).x^{n+\frac{m}{n}-2}}$$

+

$$+\frac{(n-2r\pm z)^n.\cos(n-2r\pm z).x}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right).\left(n+\frac{m}{n}-2\right).\left(n+\frac{m}{n}-3\right).x^{n+\frac{m}{n}-3}}$$

$-$ etc.

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{(-1)^i.(n-2r\pm z)^n}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\ldots\ldots\frac{m}{n}}.\int dx.x^{-\frac{m}{n}}.\cos(n-2r\pm z).x.$$

On a donc

$$\int x^{-\frac{m}{n}}.dx.\cos zx.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n=\frac{(-1)^i}{2^{2i}.x^{n+\frac{m}{n}}}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{x}{n+\frac{m}{n}-1}.\left\{\begin{array}{l}\cos(n\pm z).x-n.(\cos(n-2\pm z).x\\ +\dfrac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\cos(n-4\pm 2).x\\ -\text{etc.}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm\dfrac{1}{2}.\dfrac{n.\overline{n-1}\ldots\ldots\overline{n-i+1}}{1.2.3\ldots.i}.\cos(\pm zx)\end{array}\right.\\
+\dfrac{x^2}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right).\left(n+\frac{m}{n}-2\right)}.\left\{\begin{array}{l}(n\pm z).\sin(n\pm z).x\\ -n.(n-2\pm z).\sin(n-2\pm z).x\\ +\text{etc.}\end{array}\right.\\
+\dfrac{x^3}{\left(n+\frac{m}{n}-1\right).\left(n+\frac{m}{n}-2\right).\left(n+\frac{m}{n}-3\right)}.\left\{\begin{array}{l}(n\pm z)^2.\cos(n\pm z).x\\ -\text{etc.}\end{array}\right.\\
-\text{etc.}
\end{array}\right.$$

$$+\frac{1}{2^{2i}.\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\ldots\frac{m}{n}}.\int dx.x^{-\frac{m}{n}}.\left\{\begin{array}{l}(n\pm z)^n.\cos(n\pm z).x\\ -n.(n-2\pm z)^n.\cos(n-2\pm z).x\\ +\dfrac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(n-4\pm z)^n.\cos(n-4\pm z).x\\ -\text{etc.}\\ \pm\dfrac{1}{2}.\dfrac{n.\overline{n-1}\ldots.\overline{n+i-1}}{1.2.3\ldots.i}.z^n.\cos(\pm zx).\end{array}\right.$$

$+$ constante.

Cette constante doit être déterminée de manière que le second membre de cette équation soit nul, lorsque x est nul : or on a, par ce qui précède,

$$\cos(n\pm z).x - n.\cos(n-2\pm z).x + \text{etc.} = (-1)^i.2^{2i}.(\sin x)^n.\cos zx.$$

En différentiant cette équation par rapport à x, on a

$$-[(n\pm z).\sin(n\pm z).x - n.(n-2\pm z).\sin(n-2\pm z).x + \text{etc.}] = (-1)^i.2.\frac{d.[(\sin x)^n.\cos zx]}{dx};$$

différentiant encore, on a

$$-[n\pm z)^2.\cos(n\pm z).x - n.(n-2\pm z)^2.\cos(n-2\pm z).x + \text{etc.}] = (-1)^i.2^{2i}.\frac{d^2.[(\sin x)^n.\cos zx]}{dx^2};$$

et ainsi de suite : or on a aux deux limites $x=0$ et x infini,

$$x^{-n-\frac{m}{n}+1}.(\sin x)^n.\cos zx = 0,$$

$$x^{-n-\frac{m}{n}+2}.\frac{d.[(\sin x)^n.\cos zx]}{dx} = 0,$$

etc.

On a donc, en intégrant depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\int x^{-\frac{m}{n}}.dx.\cos zx.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n = \frac{1}{2^{2i}.\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\ldots\ldots\frac{m}{n}}$$

$$\times\int x^{-\frac{m}{n}}.dx.\left\{\begin{array}{l}(n\pm z)^n.\cos(n\pm z).x\\ -n.(n-2\pm z)^n.\cos(n-2\pm z).x\\ +\text{etc.}\\ \pm\frac{1}{2}.\frac{n.\overline{n-1}\ldots\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots i}.z^n.\cos(\pm z).x\end{array}\right.$$

Maintenant on a, en faisant $(n-2r\pm z).x = x'$,

$$\int x^{-\frac{m}{n}}.dx.(n-2r\pm z)^n.\cos(n-2r\pm z).x$$
$$= (n-2r\pm z)^{n-1+\frac{m}{n}}.\int dx'.x'^{-\frac{m}{n}}.\cos x'.$$

On a de plus, comme nous le démontrerons ci-après,

$$\int x'^{-\frac{m}{n}}.dx'.\cos x' = k'.\sin\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int x'^{-\frac{m}{n}}.dx'.\sin x' = k'.\cos\frac{m\pi}{2n},$$

k' étant égal à $\int t^{-\frac{m}{n}}.dt.c^{-t}$, l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini. Cela posé, on aura

$$\int x^{-\frac{m}{n}}.dx.\cos zx.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n = \frac{k'.\sin.\frac{m\pi}{2n}}{2^n.\left(n+\frac{m}{n}-1\right).\left(n+\frac{m}{n}-2\right)\ldots\ldots\frac{m}{n}}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}(n+z)^{n-1+\frac{m}{n}} - n.(n+z-2)^{n-1+\frac{m}{n}}\\ +\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(n+z-4)^{n-1+\frac{m}{n}}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm\frac{1}{2}.\frac{n.\overline{n-1}\ldots.\overline{n-i+1}}{1.2.3\ldots.i}.z^n\\ +(n-z)^{n-1+\frac{m}{n}} - n.(n-z-2)^{n-1+\frac{m}{n}} + \text{etc.}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm\frac{1}{2}.\frac{n.\overline{n-1}\ldots.\overline{n-i+1}}{1.2.3\ldots.i}.(-z)^{n-1+\frac{m}{n}}.\end{array}\right.$$

Il est facile de voir par l'analyse précédente, que si $n-z-2r$ est négatif, il faut changer la puissance $(n-z-2r)^{n-1+\frac{m}{n}}$ dans $(2r+z-n)^{n-1+\frac{m}{n}}$, parce que l'on a

$$\cos(n-z-2r).x = \cos(2r+z-n).x.$$

On trouvera par la même analyse,

$$\int x^{-\frac{m}{n}}.dx.\sin zx.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n = \frac{1}{2^n.\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\ldots\ldots\frac{n}{m}}$$

$$\times \int x^{-\frac{m}{n}}.dx.\left\{\begin{array}{l} \quad(n+z)^n.\sin(n+z).x \\ -n.(n+z-2)^n.\sin(n+z-2).x \\ +\text{etc.} \\ -(n-z)^n.\sin(n-z).x \\ +n.(n-z-2)^n.\sin(n-z-2).x \\ -\text{etc.} \end{array}\right.$$

Or on a

$$\int x^{-\frac{m}{n}}.(n\pm z-2r)^n.dx.\sin(n\pm z-2r).x$$
$$=(n\pm z-2r)^{n-1+\frac{m}{n}}.k'.\cos\frac{m\pi}{2n}.$$

Si $(n-z-2r)$ est négatif, on a

$$\int x^{-\frac{m}{n}}.(n-z-2r)^n.dx.\sin(n-z-2r).x$$
$$=-\int x^{-\frac{m}{n}}.dx.(2r+z-r)^n.\sin(2r+z-n).x$$
$$=-(2r+z-n)^{n-1+\frac{m}{n}}.k'.\cos\frac{m\pi}{2n}:$$

De là on tire

$$\cos\frac{m\pi}{2n}.\int x^{-\frac{m}{n}}.dx.\cos zx.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$
$$+\sin\frac{m\pi}{2n}.\int x^{-\frac{m}{n}}.dx.\sin zx.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

$$=\frac{k'.\sin.\frac{m\pi}{n}.\left[(n+z)^{n-1+\frac{m}{n}}-n.(n+z-2)^{n-1+\frac{m}{n}}+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(n+z-4)^{n-1+\frac{m}{n}}-\text{etc.}\right]}{2^n.\left(n+\frac{m}{n}-1\right).\left(n+\frac{m}{n}-2\right)\ldots\ldots\frac{m}{n}};$$

la série étant continuée jusqu'à ce que dans la puissance $(n+z-2r')^{n-1+\frac{m}{n}}$, la quantité $n+z-2r'$ devienne négative, $2r'$ pouvant ici s'étendre jusqu'à $2n$. En effet, il est visible que dans les expressions des deux termes du premier membre de l'équation (i), les termes relatifs à la puissance $(n+z-2r)^{n-1+\frac{m}{n}}$, sont les mêmes et s'ajoutent. Les termes relatifs à la puissance $(n-z-2r)^{n-1+\frac{m}{n}}$, sont les mêmes et de signes contraires, tant que $n-z-2r$ est positif; mais ils ont le même signe, lorsque $n-z-2r$ est négatif; et la puissance précédente doit, par ce qui précède, être changée dans $(2r+z-n)^{n-1+\frac{m}{n}}$. La somme des termes relatifs à cette puissance est

$$\frac{(-1)^r.\frac{n.\overline{n-1}\ldots\overline{n-r+1}}{1.2.3\ldots r}.(z+2r-n)^{n-1+\frac{m}{n}}}{2^n.\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\ldots\frac{m}{n}}.k'.\sin\frac{m\pi}{n};$$

or ce terme se rencontre dans la série du second membre de l'équation (i). Cette série contient le terme

$$\frac{(-1)^{r'}.\frac{n.\overline{n-1}\ldots\overline{n-r'+1}}{1.2.3\ldots r'}.(n+z-2r')^{n-1+\frac{m}{n}}}{2^n.\left(n+\frac{m}{n}-1\right)\ldots\frac{m}{n}}.k'.\sin\frac{m\pi}{n},$$

$n+z-2r'$ étant supposé positif. Si l'on fait $n-2r'=2r-n$, ce qui donne $r'=n-r$, ce terme devient égal au précédent; car alors on a $(-1)^{r'}=(-1)^r$, et

$$\frac{n.\overline{n-1}\ldots\overline{n-r'+1}}{1.2.3\ldots r'}=\frac{n.\overline{n-1}\ldots\overline{n-r+1}}{1.2.3\ldots r}.$$

La formule (T) du n° 24 du premier livre, donne

$$\frac{1}{r-1}.\int t^{r-1}dt.c^{-t}.\int t^{-r+1}dt.c^{-t}=\frac{\pi}{\sin(r-1).\pi},$$

les intégrales étant prises depuis t nul jusqu'à t infini. Si l'on suppose $r-1=\frac{m}{n}$, on aura

$$\int t^{\frac{m}{n}}.dt.c^{-t}.\int t^{-\frac{m}{n}}.dt.c^{-t}=\frac{\frac{m}{n}.\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ce que nous avons nommé k dans la formule (p) du n° 42 du premier livre, est égal à $\int t^{n+m-1}dt.c^{-t^n}$, et il est facile de voir que les intégrales étant prises depuis t nul jusqu'à t infini, on a

$$\int t^{n-1+m}\,dt.c^{-t^n} = \frac{1}{n}.\int t^{\frac{m}{n}}\,dt.c^{-t};$$

on a donc

$$n.k.k' = \frac{\frac{m}{n}.\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

En multipliant les deux membres de l'équation (z) par $\frac{nk.2^n}{\pi}$, et substituant dans le second membre ainsi multiplié, au lieu de nkk' sa valeur $\frac{\frac{m}{n}.\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}$, on aura la formule ($p$) citée.

La même analyse s'applique au cas où n est un nombre impair. Elle montre distinctement la raison pour laquelle la série des différences doit s'arrêter, lorsque la quantité élevée à la puissance $n-1+\frac{m}{n}$ devient négative.

Il nous reste maintenant à démontrer les formules

$$\int x^{-\frac{m}{n}}\,dx'.\cos x' = k'.\sin\frac{m\pi}{n},$$

$$\int x^{-\frac{m}{n}}\,dx'.\sin x' = k'.\cos\frac{m\pi}{n}.$$

Pour cela, considérons l'intégrale définie

$$\int\frac{dx.c^{-ax}}{x^{\varpi}}.(\cos rx - \sqrt{-1}.\sin rx),$$

cette intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini; ϖ étant moindre que l'unité. En la développant par les expressions connues de $\cos rx$ et de $\sin rx$, en séries, elle devient

$$\int\frac{dx.c^{-ax}}{x^{\varpi}}.\left\{\begin{matrix}1-\frac{r^2x^2}{1.2}+\frac{r^4x^4}{1.2.3.4} \\ -rx.\sqrt{-1}.\left(1-\frac{r^2x^2}{1.2.3}+\frac{r^4x^4}{1.2.3.4.5}-\text{etc.}\right)\end{matrix}\right\}$$

Or on a généralement, en prenant l'intégrale depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\int x^{i-\varpi}.dx.c^{-ax}=\frac{(1-\varpi).(2-\varpi)\ldots.(i-\varpi)}{a^i}.\int\frac{dx.c^{-ax}}{x^{\varpi}}.$$

En faisant ensuite $ax=t$, on a

$$\int\frac{dx.c^{-ax}}{x^{\varpi}}=\frac{1}{a^{1-\varpi}}.\int t^{-\varpi}.dt.c^{-t}=\frac{k'}{a^{1-\varpi}},$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis t nul jusqu'à t infini, et k' étant supposé exprimer l'intégrale $\int t^{-\varpi}.dt.c^{-t}$, prise dans ces limites. On aura ainsi

$$\int x^{i-\varpi}\,dx.c^{-ax}=\frac{(1-\varpi).(2-\varpi)\ldots..(i-\varpi).k'}{a^{i+1-\varpi}};$$

d'où l'on tire

$$\int\frac{dx.c^{-ax}}{x^{\varpi}}.(\cos rx-\sqrt{-1}.\sin rx)$$

$$=\frac{k'}{a^{1-\varpi}}.\left\{\begin{array}{l}1-\frac{(1-\varpi).(2-\varpi)}{1.2}.\frac{r^2}{a^2}+\frac{(1-\varpi).(2-\varpi).(3-\varpi).(4-\varpi)}{1.2.3.4}.\frac{r^4}{a^4}-\text{etc.}\\ -\sqrt{-1}.\left[(1-\varpi).\frac{r}{a}-\frac{(1-\varpi).(2-\varpi).(3-\varpi)}{1.2.3}.\frac{r^3}{a^3}+\text{etc.}\right]\end{array}\right.$$

Si l'on fait $\frac{r}{a}=s$, le second membre de cette équation devient

$$\frac{k'}{a^{1-\varpi}.(1+s.\sqrt{-1})^{1-\varpi}}.$$

Soit A un angle dont s soit la tangente, on aura

$$\sin A=\frac{s}{\sqrt{1+s^2}},\quad \cos A=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}},$$

ce qui donne

$$\cos A-\sqrt{-1}.\sin A=\frac{\sqrt{1+s^2}}{1+s.\sqrt{-1}},$$

d'où l'on tire, par le théorème connu,

$$\cos(1-\varpi).A-\sqrt{-1}.\sin(1-\varpi).A=\frac{(1+s^2)^{\frac{1-\varpi}{2}}}{(1+s.\sqrt{-1})^{1-\varpi}}.$$

La tangente s est non-seulement la tangente de l'angle A, mais encore celle du même angle augmenté d'un multiple quelconque de la demi-circonférence ; mais le premier membre de cette équation devant se réduire à l'unité, lorsque s est nul, il est clair que l'on doit prendre pour A, le plus petit des angles qui ont s pour tangente.

Maintenant, cette équation donne, en y restituant $\frac{r}{a}$ au lieu de s,

$$\frac{k'}{a^{1-\omega}.(1+s.\sqrt{-1})^{1-\omega}} = \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}}$$
$$\times[\cos(1-\omega).A - \sqrt{-1}.\sin(1-\omega)]:$$

on a donc

$$\int\frac{dx.c^{-ax}}{x^{\omega}}.(\cos rx - \sqrt{-1}.\sin rx)$$
$$= \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}}.[\cos(1-\omega).A - \sqrt{-1}.\sin(1-\omega).A].$$

En comparant séparément les quantités réelles et les imaginaires, on a

$$\int\frac{dx.\cos rx.c^{-ax}}{x^{\omega}} = \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}}.\cos(1-\omega).A,$$
$$\int\frac{dx.\sin rx.c^{-ax}}{x^{\omega}} = \frac{k'}{(a^2+r^2)^{\frac{1-\omega}{2}}}.\sin(1-\omega).A.$$

Si a est nul, $\frac{r}{a}$ est infini, et le plus petit angle dont il est la tangente, est $\frac{\pi}{2}$; on a donc

$$\int\frac{dx.\cos rx}{x^{\omega}} = \frac{k'}{r^{1-\omega}}.\sin\frac{\omega\pi}{2},$$
$$\int\frac{dx.\sin rx}{x^{\omega}} = \frac{k'}{r^{1-\omega}}.\cos\frac{\omega\pi}{2}.$$

En supposant $r=1$ et $\omega=\frac{m}{n}$, on aura les équations qu'il s'agissait de démontrer.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

LIVRE PREMIER.

DU CALCUL DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

LIVRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROBABILITÉS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.