Oeuvres complètes de Laplace / publiées sous les auspices de l'Académie des sciences, par MM. les secrétaires perpétuels

MÉMOIRE

SUR

LA PROBABILITÉ DES CAUSES

PAR LES ÉVÉNEMENTS [1].

Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris (*Savants étrangers*), Tome VI, p. 621; 1774.

I.

La théorie des hasards est une des parties les plus curieuses et les plus délicates de l'Analyse, par la finesse des combinaisons qu'elle exige et par la difficulté de les soumettre au calcul; celui qui paraît l'avoir traitée avec le plus de succès est M. Moivre, dans un excellent Ouvrage qui a pour titre : *Theory of chances*; nous devons à cet habile géomètre les premières recherches que l'on ait faites sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies; la méthode qu'il a imaginée pour cet objet est fort ingénieuse et il l'a très heureusement appliquée à la solution de plusieurs problèmes sur les Probabilités; on doit convenir cependant que le point de vue sous lequel il a envisagé cette matière est indirect. Les équations aux différences finies sont susceptibles des mêmes considérations que celles aux différences infiniment petites, et doivent être traitées d'une manière analogue; la seule différence qui s'y rencontre est que, dans le cas des différences infiniment petites, on peut négliger certaines quantités qu'il n'est pas

[1] Par M. de la Place, Professeur à l'École royale militaire.

permis de rejeter dans le cas des équations aux différences finies, ce qui rend l'intégration de celles-ci plus épineuse; l'illustre M. de Lagrange est le premier qui les ait envisagées sous ce rapport, dans un beau Mémoire qui se trouve dans le premier Volume de ceux de Turin; cette théorie des équations aux différences finies est du plus grand usage dans la science des Probabilités, et ce n'est qu'à son moyen que l'on peut espérer une méthode générale de les assujettir à l'Analyse.

En cherchant à résoudre de cette manière plusieurs problèmes sur les hasards, je suis tombé fréquemment dans une espèce d'équations aux différences finies, très différentes de celles que l'on a considérées jusqu'ici; on peut les regarder comme des équations finies aux différences partielles; leur importance dans l'Analyse des hasards m'a déterminé à les considérer d'une manière particulière dans un Mémoire *Sur les suites récurro-récurrentes*, imprimé dans ce Volume (¹); mais, ayant repris cette matière, je me suis aperçu qu'elle était d'une très grande utilité dans la science des hasards, et qu'elle donnait un moyen de la traiter beaucoup plus généralement qu'on ne l'a fait encore; cette considération m'a porté à l'approfondir davantage, ainsi que toute la théorie de l'intégration des équations finies différentielles; c'est ce que je me suis proposé dans un Mémoire que j'ai lu à l'Académie, et qui a pour titre : *Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies, et sur leur usage dans la Théorie des hasards*; ce Mémoire devant paraître dans le Volume de l'Académie pour l'année 1773, j'y renvoie le lecteur (²); l'objet de celui-ci est très différent : je me propose de déterminer la probabilité des causes par les événements, matière neuve à bien des égards et qui mérite d'autant plus d'être cultivée que c'est principalement sous ce point de vue que la science des hasards peut être utile dans la vie civile.

(¹) *Voir* p. 5.
(²) *Voir* p. 67.

II.

L'incertitude des connaissances humaines porte sur les événements ou sur les causes des événements; si l'on est assuré, par exemple, qu'une urne ne renferme que des billets blancs et noirs dans un rapport donné, et que l'on demande la probabilité qu'en prenant au hasard un de ces billets il sera blanc, l'événement alors est incertain, mais la cause dont dépend la probabilité de son existence, c'est-à-dire le rapport des billets blancs aux noirs, est connue.

Dans le problème suivant : *Une urne étant supposée renfermer un nombre donné de billets blancs et noirs dans un rapport inconnu, si l'on tire un billet et qu'il soit blanc, déterminer la probabilité que le rapport des billets blancs aux noirs est celui de p à q*; l'événement est connu et la cause inconnue.

On peut ramener à ces deux classes de problèmes tous ceux qui dépendent de la théorie des hasards; nous ne discuterons ici que ceux de la seconde classe, et pour cela nous établirons le principe suivant :

Principe. — *Si un événement peut être produit par un nombre n de causes différentes, les probabilités de l'existence de ces causes prises de l'événement sont entre elles comme les probabilités de l'événement prises de ces causes, et la probabilité de l'existence de chacune d'elles est égale à la probabilité de l'événement prise de cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités de l'événement prises de chacune de ces causes.*

La question suivante éclaircira ce principe, en même temps qu'elle en fera voir l'usage :

Je suppose que l'on me présente deux urnes A *et* B, *dont la première contienne p billets blancs et q billets noirs, et la seconde contienne p' billets blancs et q' billets noirs; je tire de l'une de ces urnes (j'ignore de laquelle) $f+h$ billets, dont f sont blancs et h sont noirs; on demande, cela posé, quelle est la probabilité que l'urne dont j'ai tiré ces billets est* A *ou qu'elle est* B.

En supposant que cette urne soit A, la probabilité d'en tirer f billets blancs et h billets noirs est

$$\frac{(f+1)(f+2)\ldots(f+h)\,p(p-1)\ldots(p-f+1)\,q(q-1)\ldots(q-h+1)}{1.2.3\ldots h(p+q)(p+q-1)\ldots(p+q-f-h+1)}.$$

Soit K cette quantité; si l'on suppose maintenant que l'urne dont j'ai tiré les billets est B, la probabilité d'en tirer f billets blancs et h billets noirs se déterminera en changeant, dans K, p et q en p' et q'; soit K′ ce que devient alors cette expression. Cela posé, les probabilités que l'urne dont j'ai tiré les billets est A ou B sont entre elles, par le principe énoncé ci-dessus, comme K est à K′; la probabilité que cette urne est A est égale à $\frac{K}{K+K'}$ et celle qu'elle est B est égale à $\frac{K'}{K+K'}$.

Nous allons présentement appliquer ce principe à la résolution de quelques problèmes.

III.

Problème I. — *Si une urne renferme une infinité de billets blancs et noirs dans un rapport inconnu, et que l'on en tire $p+q$ billets dont p soient blancs et q soient noirs; on demande la probabilité qu'en tirant un nouveau billet de cette urne il sera blanc.*

Solution. — Le rapport du nombre des billets blancs au nombre total des billets contenus dans l'urne peut être un quelconque des nombres fractionnaires compris depuis o jusqu'à 1; or, si l'on prend un de ces nombres x pour représenter ce rapport inconnu, la probabilité de tirer de l'urne p billets blancs et q billets noirs est, dans ce cas, $x^p(1-x)^q$; partant la probabilité que x est le vrai rapport du nombre des billets blancs au nombre total des billets est par le principe de l'article précédent égale à $\frac{x^p(1-x)^q\,dx}{\int x^p(1-x)^q\,dx}$, l'intégrale étant prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $x=0$, et qu'elle finisse lorsque $x=1$; or, dans la supposition que x est le vrai rapport du nombre des billets blancs au nombre total des billets, la probabilité de tirer un billet blanc de l'urne est x; si l'on multiplie maintenant cette quantité par la probabilité de la supposition, on aura, pour la probabilité de tirer un billet blanc de l'urne en vertu du rapport x, $\frac{x^{p+1}(1-x)^q\,dx}{\int x^p(1-x)^q\,dx}$, et conséquemment, si l'on nomme E la probabilité entière de tirer un billet blanc de l'urne, on aura

$$E = \frac{\int x^{p+1}(1-x)^q\,dx}{\int x^p(1-x)^q\,dx},$$

en observant de faire commencer les intégrales lorsque $x=0$ et de les terminer lorsque $x=1$.

Il est facile, d'après ces deux conditions, d'avoir une expression fort simple de E, car on a

$$\begin{aligned}\int x^{p+1}(1-x)^q\,dx &= \frac{q}{p+2}\int x^{p+2}(1-x)^{q-1}\,dx\\ &= \frac{q(q-1)}{(p+2)(p+3)}\int x^{p+3}(1-x)^{q-2}\,dx,\end{aligned}$$

et ainsi de suite, partant

$$\int x^{p+1}(1-x)^q\,dx = \frac{1.2.3\ldots q}{(p+2)(p+3)\ldots(p+q+2)},$$

pareillement

$$\int x^p(1-x)^q\,dx = \frac{1.2.3\ldots q}{(p+1)\ldots(p+q+1)};$$

donc

$$E = \frac{p+1}{p+q+2}.$$

Si l'on cherchait la probabilité de tirer de l'urne m billets blancs et n billets noirs, on trouverait

$$E = \frac{\int x^{p+m}(1-x)^{q+n}\,dx}{\int x^p(1-x)^q\,dx};$$

d'où l'on tire

$$E = \frac{(q+1)(q+2)\ldots(q+n)(p+1)(p+2)\ldots(p+q+1)}{(p+m+1)(p+m+2)\ldots(p+q+m+n+1)}.$$

p et q étant supposés fort grands, on peut simplifier cette expression de la manière suivante : pour cela, j'observe que l'on a

$$l1 + l2 + l3 + \ldots + lx = \tfrac{1}{2} l 2\pi + (x + \tfrac{1}{2}) lx - x + \frac{1}{12x} - \ldots,$$

π exprimant le rapport de la demi-circonférence au rayon (*voir* les *Institutions du Calcul différentiel* de M. Euler); de là il suit que, si l'on nomme e le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, on aura, en supposant p et q de très grands nombres,

$$(q+1)(q+2)\ldots(q+n) = \frac{1.2.3\ldots(q+n)}{1.2.3\ldots q} = \frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}}{e^n q^{q+\frac{1}{2}}},$$

pareillement

$$(p+1)\ldots(p+q+1) = \frac{(p+q+1)^{p+q+\frac{3}{2}}}{e^{q+1} p^{p+\frac{1}{2}}}$$

et

$$(p+m+1)\ldots(p+q+m+n+1) = \frac{(p+q+m+n+1)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}}}{e^{q+n+1}(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}}.$$

Donc

$$E = \frac{(p+q+1)^{p+q+\frac{3}{2}}(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}} p^{p+\frac{1}{2}}(p+q+m+n+1)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}}};$$

nous observerons ici que

$$(p+q+1)^{p+q+\frac{3}{2}} = e(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}},$$

parce que

$$\left(1 + \frac{1}{p+q}\right)^{p+q+\frac{3}{2}} = e,$$

en supposant $p+q$ infiniment grand. Semblablement, si nous supposons m et n fort petits par rapport à p et à q, nous aurons

$$(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}} = e^m p^{p+m+\frac{1}{2}},$$

$$(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}} = e^n q^{q+n+\frac{1}{2}}$$

et

$$(p+q+m+n+1)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}} = e^{m+n+1}(p+q)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}};$$

donc alors nous aurons

$$E = \frac{p^m q^n}{(p+q)^{m+n}}.$$

De là on peut conclure que, p et q étant supposés fort grands, tant que m et n seront beaucoup moindres, on pourra, sans craindre aucune erreur sensible, calculer la probabilité de tirer de l'urne des billets blancs et noirs, en supposant que dans cette urne le rapport du nombre des billets blancs est à celui des billets noirs comme p est à q; mais cette supposition devient fautive lorsque m et n sont fort grands, ce qu'il me paraît essentiel de remarquer. Pour le faire voir, supposons $m = p$ et $n = q$, nous aurons

$$E = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\frac{p^m q^n}{(p+q)^{m+n}} = 0,7071\,\frac{p^m q^n}{(p+q)^{m+n}},$$

expression, comme l'on voit, différente de celle-ci

$$E = \frac{p^m q^n}{(p+q)^{m+n}},$$

à laquelle on parvient en représentant par $\frac{p}{p+q}$ le rapport du nombre des billets blancs au nombre total des billets contenus dans l'urne.

La solution de ce problème donne une méthode directe pour déterminer la probabilité des événements futurs d'après ceux qui sont déjà arrivés; mais, cette matière étant fort étendue, je me bornerai ici à donner une démonstration assez singulière du théorème suivant :

On peut supposer les nombres p et q tellement grands, qu'il devienne aussi approchant que l'on voudra de la certitude que le rapport du nombre de billets blancs au nombre total des billets renfermés dans l'urne est compris entre les deux limites $\frac{p}{p+q} - \omega$ et $\frac{p}{p+q} + \omega$, ω pouvant être supposé moindre qu'aucune grandeur donnée.

Pour démontrer ce théorème, j'observe que la probabilité du rapport x est, par ce qui précède, égale à

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+q+1)}{1.2.3\ldots q}\,x^p(1-x)^q\,dx.$$

Soit $x = \frac{p}{p+q} + z$, et nous aurons

$$\int x^p (1-x)^q dx = \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} \int \left(1 + \frac{p+q}{p} z\right)^p \left(1 - \frac{p+q}{q} z\right)^q dz.$$

Si l'on intègre cette quantité depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \omega$, en multipliant cette intégrale par $\frac{(p+1)\ldots(p+q+1)}{1.2.3\ldots q}$, on aura la probabilité que le rapport du nombre des billets blancs au nombre total des billets est compris entre les limites $\frac{p}{p+q}$ et $\frac{p}{p+q} + \omega$.

Pareillement, si l'on intègre

$$\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} \int \left(1 - \frac{p+q}{p} z\right)^p \left(1 + \frac{p+q}{q} z\right)^q dz,$$

depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \omega$, en multipliant cette intégrale par $\frac{(p+1)\ldots(p+q+1)}{1.2.3\ldots q}$, on aura la probabilité que le rapport du nombre des billets blancs au nombre total des billets est compris entre les limites $\frac{p}{p+q}$ et $\frac{p}{p+q} - \omega$. La somme de ces deux quantités exprime donc la probabilité que ce rapport est contenu entre les limites $\frac{p}{p+q} - \omega$ et $\frac{p}{p+q} + \omega$. Nommons E cette probabilité; supposons d'ailleurs p et q infiniment grands, et que ω, ou la plus grande valeur de z, soit infiniment moindre que $\frac{1}{\sqrt[3]{p+q}}$, et infiniment plus grande que $\frac{1}{\sqrt{p+q}}$, qu'elle soit égale, par exemple, à $\frac{1}{(p+q)^{\frac{1}{n}}}$, n étant plus grand que 2 et moindre que 3.

Si l'on fait présentement $\mathrm{l}\left(1 - \frac{p+q}{p} z\right)^p = u$, on aura, en réduisant en séries,

$$u = -(p+q)z - \frac{(p+q)^2}{2p} z^2 - \frac{(p+q)^3}{3p^2} z^3 - \ldots.$$

Donc

$$\left(1 - \frac{p+q}{p} z\right)^p = e^u = e^{-(p+q)z - \frac{(p+q)^2}{2p} z^2 - \ldots}.$$

Nous pouvons négliger ici le terme $-\frac{(p+q)^3}{3p^2} z^3$ et les suivants, car la plus grande valeur de z étant par la supposition égale à $\frac{1}{(p+q)^{\frac{1}{n}}}$, on aura

$$e^{-\frac{(p+q)^3}{3p^2}z^3} = e^{-\frac{(p+q)^{3-\frac{3}{n}}}{3p^2}}$$

dans le cas où c aura le plus grand exposant négatif; or, puisque n est moindre que 3, cet exposant est visiblement infiniment petit, et partant on peut supposer $e^{-\frac{(p+q)^3}{3p^2}z^3 - \dots}$ égal à l'unité. On aura pareillement

$$\left(1+\frac{p+q}{q}z\right)^q = e^{(p+q)z - \frac{(p+q)^2}{2q}z^2}.$$

De là on conclura facilement

$$E = \frac{(p+1)\ldots(p+q+1)}{1.2.3\ldots q}\,\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}\int 2e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}z^2}dz;$$

or on a

$$\frac{(p+1)\ldots(p+q+1)}{1.2.3\ldots q} = \frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}.$$

Donc

$$E = \frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{pq}}\int 2e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}z^2}dz.$$

Soit $-\frac{(p+q)^3}{2pq}z^2 = \mathrm{l}\mu$, et l'on aura

$$\int 2e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}z^2}dz = -\frac{\sqrt{2pq}}{(p+q)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{d\mu}{\sqrt{-\mathrm{l}\mu}};$$

le nombre μ peut ici recevoir tous les accroissements possibles depuis o jusqu'à 1, et, en supposant l'intégrale commencer lorsque $\mu = 1$, nous avons ici besoin de sa valeur lorsque $\mu = 0$. Voici maintenant comment on peut la déterminer; pour cela, nous ferons usage du théorème suivant. (*Voir* le *Calcul intégral* de M. Euler.) En supposant que l'intégrale commence lorsque $\mu = 0$ et finisse lorsque $\mu = 1$, on a

$$\int\frac{\mu^n d\mu}{\sqrt{1-\mu^{2i}}}\int\frac{\mu^{n+i}d\mu}{\sqrt{1-\mu^{2i}}} = \frac{1}{i(n+1)}\,\frac{\pi}{2},$$

quels que soient n et i. Supposons conséquemment $n = 0$ et i infiniment petit; nous aurons

$$\frac{1-\mu^{2i}}{2i} = -\operatorname{l}\mu,$$

car le numérateur et le dénominateur de cette quantité devenant nuls par la supposition de $i = 0$, si l'on différentie l'un et l'autre en regardant i seule comme variable, on aura

$$\frac{1-\mu^{2i}}{2i} = -\operatorname{l}\mu,$$

partant $1 - \mu^{2i} = -2i\operatorname{l}\mu$; on aura donc dans ces suppositions

$$\int \frac{\mu^n d\mu}{\sqrt{1-\mu^{2i}}} \int \frac{\mu^{n+i} d\mu}{\sqrt{1-\mu^{2i}}} = \int \frac{d\mu}{\sqrt{2i}\sqrt{-\operatorname{l}\mu}} \int \frac{d\mu}{\sqrt{2i}\sqrt{-\operatorname{l}\mu}} = \frac{1}{i}\,\frac{\pi}{2};$$

partant

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{-\operatorname{l}\mu}} = \sqrt{\pi},$$

en supposant l'intégrale commencer lorsque $\mu = 0$ et finir lorsque $\mu = 1$; mais comme, dans le cas précédent, cette intégrale commence lorsque $\mu = 1$ et finit lorsque $\mu = 0$, nous aurons

$$\int -\frac{d\mu}{\sqrt{-\operatorname{l}\mu}} = \sqrt{\pi}.$$

Donc

$$\int 2e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}z^2}\,dz = \frac{\sqrt{pq}\sqrt{2\pi}}{(p+q)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où nous obtiendrons $E = 1$; on voit donc qu'en négligeant les quantités infiniment petites, nous pouvons regarder comme certain que le rapport du nombre des billets blancs au nombre total des billets est compris entre les limites $\frac{p}{p+q} + \omega$ et $\frac{p}{p+q} - \omega$, ω étant égal à $\frac{1}{\sqrt[n]{p+q}}$, n étant plus grand que 2 et moindre que 3, et à plus forte raison n étant plus grand que 3; partant ω peut être supposé moindre qu'aucune grandeur donnée.

Supposons maintenant que l'on propose de déterminer l'erreur que l'on peut commettre en faisant $E = 1$, lorsque l'on donne à z une très petite valeur ω; voici un moyen fort simple d'y parvenir.

Il faut intégrer d'abord

$$\int\left(1+\frac{p+q}{p}z\right)^p\left(1-\frac{p+q}{q}z\right)^q dz,$$

depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \omega$. Pour cela, je suppose que K soit l'intégrale entière depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{q}{p+q}$; cette intégrale est visiblement trop grande pour l'objet que nous nous proposons; il faut en retrancher l'intégrale

$$\int\left(1+\frac{p+q}{p}z\right)^p\left(1-\frac{p+q}{q}z\right)^q dz,$$

depuis $z = \omega$ jusqu'à $z = \frac{q}{p+q}$; soit $z = \omega + f$, et l'on aura

$$\int\left(1+\frac{p+q}{p}z\right)^p\left(1-\frac{p+q}{q}z\right)^q dz$$
$$= \left(1+\frac{p+q}{p}\omega\right)^p\left(1-\frac{p+q}{q}\omega\right)^q \int e^{-\frac{(p+q)^3\omega f - \cdots}{pq-\omega(pp-qq)-\omega^2(p+q)^2}} df.$$

J'observe que ω doit, par ce qui précède, être supposé infiniment plus grand que $\frac{1}{\sqrt{p+q}}$; supposons f infiniment moindre que $\frac{1}{\sqrt{p+q}}$, afin de pouvoir négliger les termes affectés de f^2, f^3, ... dans le développement de l'exposant de e, et nous aurons

$$\int e^{-\frac{(p+q)^3\omega f}{pq-\omega(pp-qq)-\omega^2(p+q)^2}} df$$
$$= \frac{pq-\omega(pp-qq)-\omega^2(p+q)^2}{(p+q)^3\omega}\left(1 - e^{-\frac{(p+q)^3\omega f}{pq-\omega(pp-qq)-\omega^2(p+q)^2}}\right).$$

Supposons ensuite ωf d'un ordre infiniment plus grand que $\frac{1}{p+q}$, ce qui est possible; alors $e^{-\frac{(p+q)^3\omega f}{pq-\omega(pq-qq)-\omega^2(p+q)^2}}$ devient négligeable par rapport à l'unité, et l'intégrale précédente deviendra, par la supposition de ω très petit, égale à $\frac{pq}{(p+q)^3\omega}$; nous aurons ainsi

$$\int\left(1+\frac{p+q}{p}z\right)^p\left(1-\frac{p+q}{q}z\right)^q dz$$
$$=\left(1+\frac{p+q}{p}\omega\right)^q\left(1-\frac{p+q}{q}\omega\right)^q\frac{pq}{(p+q)^3\omega},$$

l'intégrale étant supposée commencer lorsque $z=\omega$ et finir lorsque $z=\omega+\frac{1}{(p+q)^n}$, n étant plus grand que $\frac{1}{2}$. Or la différence de cette intégrale avec l'intégrale entière prise depuis $z=\omega$ jusqu'à $z=\frac{q}{p+q}$ est infiniment moindre; pour le démontrer, j'observe que si l'on nomme, pour abréger, y la quantité $\left(1+\frac{p+q}{p}z\right)^p\left(1-\frac{p+q}{q}z\right)^q$, on aura, lorsque $z=\omega+\frac{1}{(p+q)^n}$, n étant plus grand que $\frac{1}{2}$,

$$y=\left(1+\frac{p+q}{p}\omega\right)^p\left(1-\frac{p+q}{q}\omega\right)^q c^{-\frac{(p+q)^{2-n}\omega}{pq-\omega(p^2-q^2)-\omega^2(p+q)^2}}.$$

Si l'on donne à z une plus grande valeur, y devient moindre, partant $\int y\,dz$ depuis $z=\omega+\frac{1}{(p+q)^n}$ jusqu'à $\frac{q}{p+q}$ est moindre que

$$\left(\frac{q}{p+q}-\omega-\frac{1}{(p+q)^n}\right)c^{-\frac{(p+q)^{2-n}\omega}{pq-\omega(p^2-q^2)-\omega^2(p+q)^2}};$$

or, puisque nous avons supposé $\frac{\omega}{(p+q)^n}$ infiniment plus grand que $\frac{1}{p+q}$, la quantité précédente est infiniment moindre que $\frac{pq}{(p+q)^3\omega}$; car, en général, $c^{x^{\frac{1}{n}}}>x^m$, m et n étant des nombres finis quelconques.

Nous aurons donc

$$\int\left(1+\frac{p+q}{p}z\right)^p\left(1-\frac{p+q}{q}z\right)^q dz$$
$$=K-\left(1+\frac{p+q}{p}\omega\right)^p\left(1-\frac{p+q}{q}\omega\right)^q\frac{pq}{(p+q)^3\omega},$$

en supposant l'intégrale commencer lorsque $z=0$ et finir lorsque

$z=\omega$. Semblablement nous aurons, avec les mêmes conditions,

$$\begin{aligned}\int\left(1-\frac{p+q}{p}z\right)^p\left(1+\frac{p+q}{q}z\right)^q dz\\ =\mathrm{K}'-\left(1-\frac{p+q}{p}\omega\right)^p\left(1+\frac{p+q}{q}\omega\right)^q\frac{pq}{(p+q)^3\omega},\end{aligned}$$

K′ étant ce que devient K lorsqu'on y change p en q et q en p; nous aurons, par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}=\frac{(p+1)\ldots(p+q+1)}{1.2.3\ldots q}\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}\Bigg[&\mathrm{K}-\left(1+\frac{p+q}{p}\omega\right)^p\left(1-\frac{p+q}{q}\omega\right)^q\frac{pq}{(p+q)^3\omega}\\ &+\mathrm{K}'-\left(1-\frac{p+q}{p}\omega\right)^p\left(1+\frac{p+q}{q}\omega\right)^q\frac{pq}{(p+q)^3\omega}\Bigg]\end{aligned}$$

Mais on a visiblement

$$\frac{(p+1)\ldots(p+q+1)}{1.2.3\ldots q}\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}(\mathrm{K}+\mathrm{K}')=1,$$

d'où l'on tirera facilement

$$\begin{aligned}\mathrm{E}=1-\frac{-\sqrt{pq}}{\omega\sqrt{2\pi}(p+q)^{\frac{3}{2}}}\Bigg[&\left(1+\frac{p+q}{p}\omega\right)^p\left(1-\frac{p+q}{q}\omega\right)^q\\ &+\left(1-\frac{p+q}{p}\omega\right)^p\left(1+\frac{p+q}{q}\omega\right)^q\Bigg].\end{aligned}$$

On peut juger par cette formule de l'erreur que l'on commet en faisant $\mathrm{E}=1$.

IV.

Problème II. — *Deux joueurs A et B, dont les adresses respectives sont inconnues, jouent à un jeu quelconque, par exemple au piquet, à cette condition que celui qui, le premier, aura gagné le nombre n de parties, obtiendra une somme a déposée au commencement du jeu; je suppose que les deux joueurs soient forcés d'abandonner le jeu, lorsqu'il manque f parties au joueur A, et h parties au joueur B; cela posé, on demande comment on doit partager la somme a entre les deux joueurs.*

Solution. — Si les adresses respectives des deux joueurs A et B étaient supposées connues, et qu'elles fussent dans la raison de p à q, on trouverait, en supposant $p+q=1$, la somme qui doit revenir à B égale à

$$aq^{f+h-1}\left[1+\frac{p}{q}(f+h-1)+\frac{p^2}{q^2}\,\frac{(f+h-1)(f+h-2)}{1.2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{p^{f-1}}{q^{f-1}}\,\frac{(f+h-1)\ldots(h+1)}{1.2.3\ldots(f-1)}\right].$$

Cette proposition est démontrée dans plusieurs Ouvrages; elle se déduit fort aisément de la méthode des suites récurro-récurrentes, comme on le verra dans le Mémoire cité au commencement de celui-ci; on y trouvera pareillement une solution générale du problème des partis, dans le cas de trois ou d'un plus grand nombre de joueurs, problème qui n'a encore été résolu par personne, que je sache, bien que les géomètres qui ont travaillé sur ces matières en aient désiré la solution. (*Voir* la seconde édition de l'*Analyse des jeux de hasard* de M. Montmort, page 247.)

Présentement, puisque la probabilité de A pour gagner une partie est inconnue, nous pouvons la supposer un des nombres quelconques, compris depuis o jusqu'à 1. Supposons qu'un de ces nombres x représente cette probabilité; dans cette supposition, la probabilité que, sur $2n-f-h$ parties, A en gagnera $n-f$, et B, $n-h$, sera

$$x^{n-f}(1-x)^{n-h};$$

d'où il résulte, par le principe de l'Article II, que la probabilité de la supposition que nous avons faite pour x est

$$\frac{x^{n-f}(1-x)^{n-h}\,dx}{\int x^{n-f}(1-x)^{n-h}\,dx},$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle commence lorsque $x=0$ et qu'elle finisse lorsque $x=1$. Maintenant, x étant supposé être la probabilité de A pour gagner une partie, on trouvera que la somme qui doit revenir à B est

$$a(1-x)^{f+h-1}\left[1+\frac{x}{1-x}(f+h-1)+\frac{x^2}{(1-x)^2}\,\frac{(f+h-1)(f+h-2)}{1.2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{x^{f-1}}{(1-x)^{f-1}}\,\frac{(f+h-1)\ldots(h+1)}{1.2.3\ldots(f-1)}\right].$$

Donc la somme qui doit véritablement revenir au joueur B est

$$\frac{a\int x^{n-f}(1-x)^{f+n-1}\left[1+\frac{x}{1-x}(f+h-1)+\ldots+\frac{x^{f-1}}{(1-x)^{f-1}}\frac{(f+h-1)\ldots(h+1)}{1.2.3\ldots(f-1)}\right]dx}{\int x^{n-f}(1-x)^{n-h}dx},$$

les deux intégrales étant prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $x=0$ et qu'elles finissent lorsque $x=1$. De là, on conclura facilement

$$\int x^{n-f}(1-x)^{n-h}dx=\frac{1.2.3\ldots(n-h)}{(n-f+1)\ldots(2n-f-h+1)};$$

pareillement

$$\int x^{n-f}(1-x)^{f+n-1}dx=\frac{1.2.3\ldots(f+n-1)}{(n-f+1)\ldots 2n},$$

et ainsi du reste.

D'où l'on aura, pour la somme qui doit revenir à B,

$$\begin{aligned}\frac{a(n-h+1)\ldots(n+f-1)}{(2n-f-h+2)\ldots 2n}\Bigg[1&+\frac{f+h-1}{1}\,\frac{n-f+1}{f+n-1}\\&+\frac{(f+h-1)(f+h-2)}{1.2}\,\frac{(n-f+1)(n-f+2)}{(f+n-1)(f+n-2)}+\ldots\\&+\frac{(f+h-1)\ldots(h+1)}{1.2.3\ldots(f-1)}\,\frac{(n-f+1)\ldots(n-1)}{(f+n-1)\ldots(n+1)}\Bigg].\end{aligned}$$

V.

On peut, au moyen de la théorie précédente, parvenir à la solution du problème qui consiste à déterminer le milieu que l'on doit prendre entre plusieurs observations données d'un même phénomène. Il y a deux ans que j'en donnai une à l'Académie, à la suite du *Mémoire sur les séries récurro-récurrentes*, imprimé dans ce Volume ([1]); mais le peu d'usage dont elle pouvait être me la fit supprimer lors de l'impression. J'ai appris depuis, par le *Journal astronomique* de M. Jean Bernoulli, que MM. Daniel Bernoulli et Lagrange se sont occupés du même Problème dans deux Mémoires manuscrits qui ne sont point venus à ma

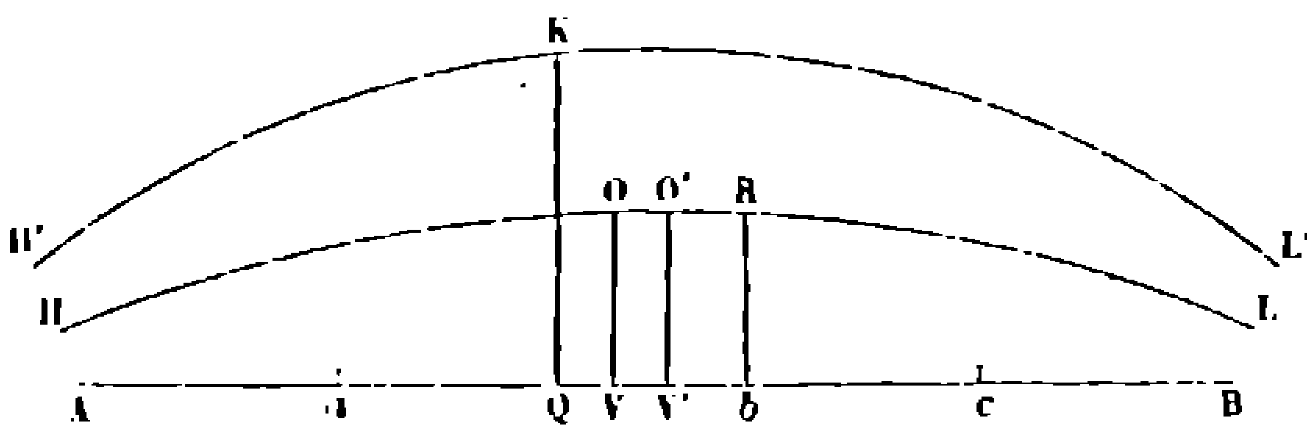
([1]) *Voir* p. 5.

connaissance. Cette annonce, jointe à l'utilité de la matière, a réveillé mes idées sur cet objet; et, quoique je ne doute point que ces deux illustres géomètres ne l'aient traité beaucoup plus heureusement que moi, je vais cependant exposer ici les réflexions qu'il m'a fait naître, persuadé que les différentes manières dont on peut l'envisager produiront une méthode moins hypothétique et plus sûre, pour déterminer le milieu que l'on doit prendre entre plusieurs observations.

Problème III. — *Déterminer le milieu que l'on doit prendre entre trois observations données d'un même phénomène.*

Solution. — Représentons le temps par une droite indéfinie AB (*fig.* 1), et supposons que la première observation fixe l'instant du phénomène au point a, la seconde au point b et la troisième au

Fig. 1.

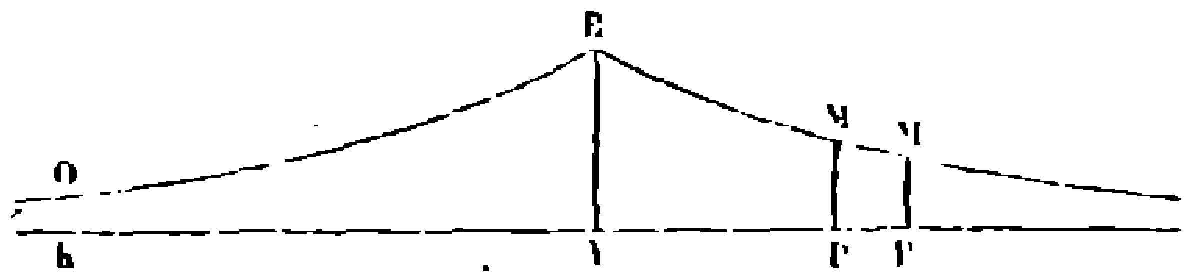


point c; supposons de plus que l'unité de temps soit une seconde, en sorte que l'intervalle de a à b soit p secondes, et celui de b à c, q secondes; cela posé, on demande à quel point V de la droite AB on doit fixer le milieu que l'on doit prendre entre les trois observations a, b et c.

Pour cela, on doit observer qu'il est plus probable qu'une observation donnée s'écarte de la vérité de 2 secondes que de 3 secondes, de 3 secondes que de 4 secondes, etc.; mais la loi suivant laquelle cette vraisemblance diminue à mesure que l'observation s'éloigne de la vérité nous est inconnue. Supposons donc (*fig.* 2) que le point V soit le véritable instant du phénomène; les probabilités que l'observation s'éloigne de la vérité, aux distances VP, VP', ..., peuvent être représentées par les ordonnées d'une courbe RMM', qui décroissent suivant une loi quelconque, et dont, en nommant x l'abscisse VP, et y l'ordonnée correspondante PM, nous représenterons l'équation par celle-ci : $y = \varphi(x)$. Or voici les propriétés de cette courbe :

1° Elle doit être partagée en deux parties entièrement semblables par la droite VR, car il est tout aussi probable que l'observation s'écartera de la vérité à droite comme à gauche ;

Fig. 2.



2° Elle doit avoir pour asymptote la ligne KP, parce que la probabilité que l'observation s'éloigne de la vérité à une distance infinie est évidemment nulle ;

3° L'aire entière de cette courbe doit être égale à l'unité, puisqu'il est certain que l'observation tombera sur un des points de la droite KP.

Supposons maintenant (*fig.* 1) que le véritable instant du phénomène soit au point V, à la distance x du point a ; la probabilité que les trois observations a, b et c s'écarteront aux distances Va, Vb et Vc sera

$$\varphi(x)\,\varphi(p-x)\,\varphi(p+q-x);$$

et, si nous supposons le véritable instant au point V', en sorte que $a\mathrm{V}' = x'$, cette probabilité sera

$$\varphi(x')\,\varphi(p-x')\,\varphi(p+q-x');$$

d'où il résulte, par notre principe fondamental de l'Article II, que les probabilités que le véritable instant du phénomène est aux points V ou V' sont entre elles comme

$$\varphi(x)\,\varphi(p-x)\,\varphi(p+q-x) : \varphi(x')\,\varphi(p-x')\,\varphi(p+q-x').$$

Si donc on construit une courbe HOL, dont l'équation soit

$$y = \varphi(x)\,\varphi(p-x)\,\varphi(p+q-x),$$

les ordonnées de cette courbe pourront représenter les probabilités des points correspondants de l'abscisse. Cela posé :

Par le milieu que l'on doit choisir entre plusieurs observations, on peut entendre deux choses qu'il importe également de considérer.

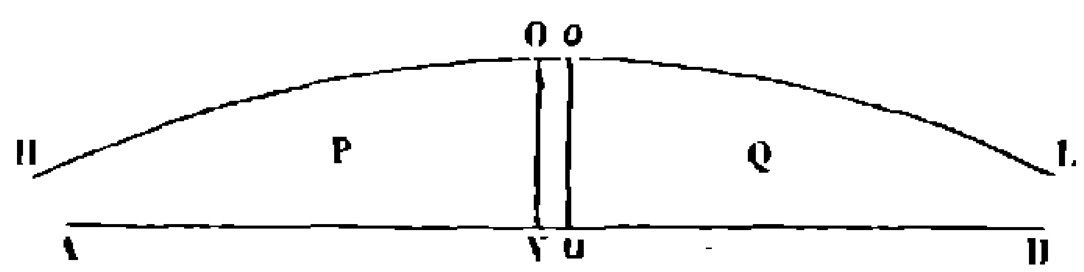
La première est l'instant tel qu'il soit également probable que le véritable instant du phénomène tombe avant ou après; on pourrait appeler cet instant *milieu de probabilité*.

La seconde est l'instant tel qu'en le prenant pour milieu, la somme des erreurs à craindre, multipliées par leur probabilité, soit un *minimum;* on pourrait l'appeler *milieu d'erreur* ou *milieu astronomique*, comme étant celui auquel les astronomes doivent s'arrêter de préférence.

Pour avoir le premier milieu, il faut déterminer l'ordonnée OV, qui divise l'aire de la courbe HOL en deux parties égales; car il y a visiblement alors autant de probabilité que le véritable instant du phénomène tombe à droite comme à gauche du point V.

Pour avoir le second milieu, il faut choisir (*fig.* 3) un point V sur

Fig. 3.



l'abscisse, tel que la somme des ordonnées de la courbe HOL, multipliées par leurs distances à ce point V, soit un minimum. Or je dis que ce second milieu ne diffère point du premier. Pour le faire voir, menons l'ordonnée *ou*, infiniment proche de OV. Soient

$Vu = dx$, $OV = y$;

Q le centre de gravité de la partie *uo*L de la courbe;

M cette partie elle-même;

z la distance du point Q à l'ordonnée OV;

P le centre de gravité de la partie VOH;

N cette partie elle-même;

z' la distance de P à l'ordonnée OV.

Cela posé, en prenant le point V pour milieu, la somme des ordonnées multipliées par leurs distances à ce point sera

$$Mz + Nz' + \tfrac{1}{2}y\,dx^2,$$

et, si l'on prenait u pour ce milieu, la somme des ordonnées multipliées par leurs distances au point u serait

$$M(z - dx) + N(z' + dx) + \tfrac{1}{2}y\,dx^2;$$

d'où l'on voit que la différence de ces deux quantités sera

$$N\,dx - M\,dx,$$

laquelle doit être égale à zéro dans le cas du minimum. On aura donc dans ce cas $M = N$, c'est-à-dire que l'ordonnée OV partagera l'aire de cette courbe en deux parties égales. On voit donc que le milieu *astronomique* ne diffère point de celui de *probabilité*, et que l'un et l'autre se déterminent par l'ordonnée OV qui divise l'aire de la courbe HOL en deux parties égales.

Pour trouver cette ordonnée, il est nécessaire de connaître $\varphi(x)$; mais, dans le nombre infini de fonctions possibles, laquelle choisirons-nous de préférence? Les considérations suivantes peuvent nous déterminer dans ce choix. Il est certain (*fig.* 2) que, s'il n'y avait pas plus de raison pour supposer le point P plus probable que le point P′, on devrait supposer $\varphi(x)$ constant, et la courbe ORM′ serait une ligne droite infiniment proche de l'axe KP. Mais cette supposition doit être rejetée; car, si l'on supposait exister un très grand nombre d'observations du phénomène, il est à présumer qu'elles deviendraient d'autant plus rares qu'elles s'éloigneraient de la vérité; on sent facilement d'ailleurs que cette diminution ne peut être constante, et qu'elle devient d'autant moindre que les observations s'écartent de la vérité : ainsi, non seulement les ordonnées de la courbe RMM′, mais encore les différences de ces ordonnées doivent aller en décroissant à mesure qu'elles s'éloignent du point V, que nous supposons toujours être dans cette figure le véritable instant du phénomène. Or, comme nous n'avons aucune raison de supposer une autre loi aux ordonnées qu'à leurs différences, il suit que nous devons, conformément aux règles des probabilités, supposer le rapport de deux différences consécutives et infiniment petites égal à celui des ordonnées correspondantes. On aura ainsi

$$\frac{d\varphi(x+dx)}{d\varphi(x)} = \frac{\varphi(x+dx)}{\varphi(x)},$$

partant

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -m\,\varphi(x),$$

ce qui donne

$$\varphi(x) = 6e^{-mx}.$$

Telle est donc la valeur que nous devons choisir pour $\varphi(x)$. La constante 6 doit se déterminer par cette supposition que l'aire entière de la courbe ORM soit égale à l'unité qui représente la certitude, ce qui donne

$$6 = \tfrac{1}{2}m, \qquad \text{partant} \qquad \varphi(x) = \frac{m}{2}e^{-mx},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

On peut objecter contre cette loi qu'en supposant x extrêmement grand $\varphi(x)$ ne serait pas nul, ce qui répugne; mais, à cela, je réponds que, bien que e^{-mx} ait une valeur réelle, quel que soit x, cette valeur cependant est si petite lorsque x devient extrêmement grand, qu'elle peut être regardée comme nulle.

Maintenant, en admettant cette loi, déterminons l'aire de la courbe HOL (*fig.* 1).

1° Depuis a jusqu'en b, l'ordonnée de la courbe HOL est

$$y = \frac{m^3}{8}e^{-m(2p+q-x)}.$$

Partant, l'aire de la courbe dans cet intervalle sera

$$\frac{m^2}{8}e^{-m(2p+q)}(e^{mx}-1).$$

2° Depuis b jusqu'en c, l'ordonnée de la courbe sera

$$y = \frac{m^3}{8}e^{-m(x+q)},$$

et l'aire de la courbe dans cet intervalle sera

$$\frac{m^2}{8} e^{-mq}(e^{-mp} - e^{-mx}).$$

3° Depuis c jusqu'à l'infini, l'aire de la courbe sera

$$\frac{m^2}{3.8} e^{-m(p+2q)}.$$

4° Depuis a jusqu'à l'infini, du côté de A, l'aire de la courbe sera

$$\frac{m^2}{3.8} e^{-m(q+2p)};$$

l'aire entière de la courbe sera donc

$$\frac{m^2}{8} e^{-m(p+q)}(1 - \tfrac{1}{3} e^{-mp} - \tfrac{1}{3} e^{-mq}).$$

On peut observer que le point V, tel que l'ordonnée OV partage l'aire de la courbe en deux parties égales, doit nécessairement tomber entre les points a et b, en supposant $p > q$; ou entre les points b et c, en supposant $q > p$; car l'aire de la courbe à gauche de l'ordonnée bR est

$$\frac{m^2}{8} c^{-m(p+q)}(1 - \tfrac{2}{3} c^{-mp}),$$

laquelle est visiblement plus grande ou moindre que la moitié de l'aire entière, suivant que p est plus grand ou moindre que q; nous le supposerons plus grand dans la suite du calcul. Cela posé, pour déterminer la distance x du point a au point V où l'on doit fixer le véritable instant du phénomène, on aura l'équation suivante

$$m^2 e^{-m(2p+q-x)} = m^2 e^{-m(p+q)}(1 + \tfrac{1}{3} e^{-mp} - \tfrac{1}{3} e^{-mq}),$$

d'où l'on tire

$$x = p + \frac{1}{m} \mathrm{l}(1 + \tfrac{1}{3} e^{-mp} - \tfrac{1}{3} e^{-mq}).$$

Remarque sur la méthode des milieux arithmétiques.

La méthode en usage parmi les observateurs consiste à prendre un milieu arithmétique entre les trois observations, ce qui donnerait $x = \frac{2p+q}{3}$. Or cette méthode revient à supposer, dans les formules précédentes, $m = 0$ ou infiniment petit; car alors on a

$$\mathrm{l}(1 + \tfrac{1}{3}e^{-mp} - \tfrac{1}{3}e^{-mq}) = \tfrac{1}{3}e^{-mp} - \tfrac{1}{3}e^{-mq}.$$

Or

$$\tfrac{1}{3}e^{-mp} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}mp \qquad \text{et} \qquad \tfrac{1}{3}e^{-mq} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}mq;$$

donc

$$\frac{1}{m}\mathrm{l}(1 + \tfrac{1}{3}e^{-mp} - \tfrac{1}{3}e^{-mq}) = -\tfrac{1}{3}p + \tfrac{1}{3}q,$$

partant

$$x = p + \frac{1}{m}\mathrm{l}(1 + \tfrac{1}{3}e^{-mp} - \tfrac{1}{3}e^{-mq}) = \frac{2p+q}{3},$$

la même valeur que donne la méthode des milieux arithmétiques.

La supposition de m infiniment petit donne (*fig.* 2) tous les points de la droite KP également probables, au moins jusqu'à une distance extrêmement grande; ce qui est hors de toute vraisemblance par la nature même de la chose et par le résultat du calcul, comme on va le voir dans un moment. On sent par là combien cette supposition est peu naturelle, et combien il est nécessaire dans des circonstances délicates de faire usage de la méthode suivante.

Si m était connue, il serait facile par ce qui précède d'avoir la valeur de x; mais, cette quantité étant inconnue, il faut nécessairement recourir à d'autres moyens pour obtenir cette valeur.

D'après le principe fondamental de l'Article II, les probabilités des différentes valeurs de m sont entre elles comme les probabilités que, ces valeurs ayant lieu, les trois observations auront les distances respectives qu'elles ont entre elles. Or les probabilités que les trois observations a, b et c (*fig.* 1) s'éloigneront les unes des autres aux distances p et q sont entre elles comme les aires des courbes HOL, correspondantes aux différentes valeurs de m, comme il est facile de s'en assurer.

D'où il résulte, par le principe de l'Article II, que la probabilité de m est proportionnelle à

$$m^2 e^{-m(p+q)}\left(1-\tfrac{1}{3}e^{-mp}-\tfrac{1}{3}e^{-mq}\right)dm;$$

on voit par là que la probabilité de $m=0$ ou infiniment petit, supposition que donne la méthode des milieux arithmétiques, est infiniment moindre que celle de m égal à une quantité finie quelconque.

Présentement, si l'on nomme y la probabilité, correspondante à m, que le véritable instant du phénomène tombe à la distance x du point a, la probabilité entière que cet instant tombera à cette distance sera proportionnelle à

$$\int y\,m^2 e^{-m(p+q)}\left(1-\tfrac{1}{3}e^{-mp}-\tfrac{1}{3}e^{-mq}\right)dm,$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle commence lorsque $m=0$, et finisse lorsque $m=\infty$; si donc on construit sur l'axe AB une nouvelle courbe H'KL' dont les ordonnées soient proportionnelles à cette quantité, l'ordonnée KQ qui divisera l'aire de cette courbe en deux parties égales coupera l'axe au point que l'on doit prendre pour milieu entre les trois observations.

L'aire de cette nouvelle courbe sera évidemment proportionnelle à l'intégrale du produit de l'aire de la courbe HOL par

$$m^2 e^{-m(p+q)}\left(1-\tfrac{1}{3}e^{-mp}-\tfrac{1}{3}e^{-mq}\right)dm.$$

Donc, puisque, pour déterminer x dans une supposition particulière pour m, on a

$$m^2 e^{-m(2p+q-x)} = m^2 e^{-m(p+q)}\left(1+\tfrac{1}{3}e^{-mp}-\tfrac{1}{3}e^{-mq}\right),$$

on aura

$$\begin{aligned}&\int m^4 e^{-m(3p+2q-x)}\left(1-\tfrac{1}{3}e^{-mp}-\tfrac{1}{3}e^{-mq}\right)dm\\ &\quad=\int m^4 e^{-m(2p+2q)}\left(1+\tfrac{1}{3}e^{-mp}-\tfrac{1}{3}e^{-mq}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}e^{-mp}-\tfrac{1}{3}e^{-mq}\right)dm,\end{aligned}$$

en intégrant de manière que les intégrales commencent lorsque $m=0$, et finissent lorsque $m=\infty$.

Pour intégrer ces quantités, on doit observer que

$$\int m^5 e^{-Km} dm = -\frac{1}{K} m^5 e^{-Km} + \int \frac{5}{K} m^4 e^{-Km} dm$$
$$= -\frac{1}{K} m^5 e^{-Km} - \frac{5}{K^2} m^4 e^{-Km} + \int \frac{4.5}{K^2} m^3 e^{-Km} dm,$$

et ainsi de suite. Partant,

$$\int m^5 e^{-Km} dm = C - \frac{1}{K} m^5 e^{-Km} - \frac{5}{K^2} m^4 e^{-Km}$$
$$- \frac{3.4.5}{K^4} m^2 e^{-Km} - \frac{2.3.4.5}{K^5} m e^{-Km} - \frac{1.2.3.4.5}{K^6} e^{-Km}.$$

Puisque cette intégrale doit s'évanouir lorsque $m = 0$, on a

$$C = \frac{1.2.3.4.5}{K^6};$$

d'ailleurs, comme elle doit finir lorsque $m = \infty$, on a dans ce cas

$$m^5 e^{-Km} = 0, \qquad m^4 e^{-Km} = 0, \qquad \ldots;$$

partant,

$$\int m^5 e^{-Km} dm = \frac{1.2.3.4.5}{K^6}.$$

On aura ainsi, pour obtenir x, l'équation suivante :

$$(\omega) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{(3p+2q-x)^6} - \dfrac{1}{3(4p+2q-x)^6} - \dfrac{1}{3(3p+3q-x)^6} \\[2ex] = \dfrac{1}{(2p+2q)^6} - \dfrac{1}{3(2p+3q)^6} - \dfrac{1}{9(4p+2q)^6} + \dfrac{1}{9(2p+4q)^6}. \end{cases}$$

Cette équation monte au quinzième degré et donne quinze valeurs pour x; mais on doit observer que, dans le cas du problème précédent, x doit être positive et moindre que p, ce qui rend un grand nombre de ces valeurs inutiles; s'il y en avait cependant plusieurs qui satisfissent à ces deux conditions, il serait impossible de déterminer laquelle est préférable. Heureusement cela n'arrive point ici, et nous allons faire voir qu'il n'y en a qu'une seule qui y satisfasse, ce qu'il est essentiel de remarquer pour l'usage de cette méthode.

Supposons qu'une des racines de x soit $p-f$, et nommant, pour abréger, K le second membre de l'équation (ω), nous aurons

$$\frac{1}{(2p+2q+f)^5}-\frac{1}{3(3p+2q+f)^3}-\frac{1}{3(2p+3q+f)^3}=K;$$

supposons que $p-f-u$ soit une seconde racine de x, $f+u$ étant positif et moindre que p; nous aurons

$$\frac{1}{(2p+2q+f)^5\left(1+\frac{u}{2p+2q+f}\right)^3}$$

$$-\frac{1}{3(3p+2q+f)^3\left(1+\frac{u}{3p+2q+f}\right)^3}$$

$$-\frac{1}{3(2p+3q+f)^3\left(1+\frac{u}{2p+3q+f}\right)^3}=K.$$

Soit

$$\frac{1}{(2p+2q+f)^5\left(1+\frac{u}{2p+2q+f}\right)^3}=\frac{1}{(2p+2q+f)^5}\left(1+\frac{1}{l}\right),$$

$$\frac{1}{(3p+2q+f)^3\left(1+\frac{u}{3p+2q+f}\right)^3}=\frac{1}{(3p+2q+f)^5}\left(1+\frac{1}{l'}\right),$$

$$\frac{1}{(2p+3q+f)^5\left(1+\frac{u}{3p+2q+f}\right)^3}=\frac{1}{(2p+3q+f)^3}\left(1+\frac{1}{l''}\right);$$

l, l' et l'' seront positifs ou négatifs, suivant que u sera positif ou négatif; de plus, on aura $l<l'$ et $l<l''$, ensuite on aura

$$\frac{1}{l(2p+2q+f)^5}-\frac{1}{3l'(3p+2q+f)^3}-\frac{1}{3l''(2p+3q+f)^5}=0;$$

mais on a

$$\frac{1}{l(2p+2q+f)^5}-\frac{1}{3l(3p+2q+f)^3}-\frac{1}{3l(2p+3q+f)^3}=\frac{K}{l};$$

donc

$$\frac{K}{l}+\frac{1}{3(3p+2q+f)^3}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l'}\right)+\frac{1}{3(2p+3q+f)^3}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l''}\right)=0.$$

Or, K étant nécessairement positif, cette équation est visiblement impossible, à moins qu'on ne suppose $\frac{1}{l}=0$, $\frac{1}{l'}=0$ et $\frac{1}{l''}=0$, ce qui donne $u=0$. Il n'y a donc qu'une seule racine de x qui satisfasse aux conditions prescrites ci-dessus.

La difficulté de tirer de l'équation (ω) la valeur de x rend fort pénible l'usage de la méthode précédente; mais on peut l'employer dans des circonstances délicates, où il s'agit d'avoir avec précision le milieu que l'on doit prendre entre plusieurs observations; et, quoique dans le problème précédent nous n'en ayons considéré que trois, il est visible que la solution est entièrement la même pour un nombre quelconque.

Pour donner un exemple de la méthode précédente et de la manière d'en faire usage, supposons (*fig.* 1) que les observations b et c coïncident, en sorte que $q=0$; cela posé, si l'on fait $x=pz$, l'équation (ω) donne

$$\frac{2}{3(3-z)^3}-\frac{1}{3(4-z)^3}=\frac{1,3229}{3.2^3},$$

et, si l'on fait $\frac{3-z}{2}=\mu$, on aura

$$\mu=\sqrt[3]{\frac{2}{1,3229+\frac{1}{(\frac{1}{2}+\mu)^3}}}.$$

Si dans une première approximation on néglige le terme $\frac{1}{(\frac{1}{2}+\mu)^3}$, on aura une première valeur de μ qui, substituée dans l'équation, donnera une seconde valeur de μ plus approchée, et ainsi de suite. De cette manière, j'ai trouvé $\mu=1,0697$, ce qui donne $z=0,860$; partant, $x=0,860p$. Tel est, conséquemment, le milieu que l'on doit prendre entre trois observations, dont deux coïncident; par exemple, si la première donne l'instant du phénomène à $m^h30^m0^s$, et les deux autres à $m^h30^m10^s$, on doit supposer le véritable instant du phénomène à $m^h30^m8^s,6$; suivant la méthode usitée par les astronomes, on le supposerait à $m^h30^m6^s\frac{2}{3}$. On voit donc que la méthode précédente rapproche plus l'instant du phénomène des deux observations qui coïncident, et, en cela, elle est bien plus conforme aux probabilités, car on sent aisément que ce milieu doit être pris plus près des deux observations qui coïncident que ne le donne la méthode des milieux arithmétiques.

Voici maintenant une petite Table que j'ai construite pour l'usage des observateurs. Comme la valeur de q a été supposée dans nos calculs moindre que celle de p, je l'ai fait successivement égale à $0{,}0\,p$; $0{,}1\,p$; $0{,}2\,p$; $0{,}3\,p$; ... jusqu'à p; j'ai calculé ensuite les valeurs de x qui y correspondent. Si la valeur de q tombait entre deux de ces décimales, il serait facile de conclure x par interpolation.

On doit observer, pour l'usage de cette Table, que x exprime la distance de celle des deux observations extrêmes qui s'éloigne le plus de l'observation intermédiaire, au milieu que l'on doit choisir entre les trois observations.

$q = 0{,}0\,p$	$x = 0{,}860\,p$
$q = 0{,}1\,p$	$x = 0{,}894\,p$
$q = 0{,}2\,p$	$x = 0{,}916\,p$
$q = 0{,}3\,p$	$x = 0{,}932\,p$
$q = 0{,}4\,p$	$x = 0{,}944\,p$
$q = 0{,}5\,p$	$x = 0{,}955\,p$
$q = 0{,}6\,p$	$x = 0{,}965\,p$
$q = 0{,}7\,p$	$x = 0{,}975\,p$
$q = 0{,}8\,p$	$x = 0{,}984\,p$
$q = 0{,}9\,p$	$x = 0{,}992\,p$
$q = p$	$x = p$

VI.

La théorie précédente m'a conduit aux considérations suivantes, qui peuvent n'être pas inutiles dans la Théorie des hasards, et par lesquelles je terminerai ce Mémoire.

Je suppose que A *joue avec* B *à croix ou pile, à ces conditions : savoir que, si* A *amène croix au premier coup*, B *lui donnera deux écus ; qu'il lui* *en donnera quatre s'il ne l'amène qu'au second, huit s'il ne l'amène qu'au troisième, et ainsi de suite jusqu'au nombre x de coups.*

Il est facile de déterminer l'espérance de A, ou la somme qu'il doit donner à B, avant que de commencer le jeu; car en nommant y_x cette somme, si l'on suppose que le nombre des coups, au lieu d'être x, vienne à augmenter d'une unité, il est visible que l'espérance de A sera augmentée du nombre 2^{x+1} d'écus, multiplié par la probabilité $\frac{1}{2^{x+1}}$ de l'obtenir au coup $x+1$. On aura donc

$$y_{x+1} - y_x = 1,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$y_x = x + C,$$

C étant une constante arbitraire; or, posant $x = 1$, $y_x = 1$; donc $C = 0$. Ainsi A doit donner à B le nombre x d'écus.

Nous supposons dans cette solution que la pièce qui, jetée en l'air, doit amener croix ou pile, n'a pas plus de pente pour amener l'un plutôt que l'autre; or cette supposition n'est admissible que mathématiquement, car physiquement il doit y avoir une inégalité; mais, comme les deux joueurs A et B ignorent en commençant le jeu de quel côté est cette plus grande pente, on pourrait croire que cette incertitude n'augmente et ne diminue point leur avantage. On va voir cependant que rien n'est moins fondé que cette supposition; d'où il résultera que la science des hasards exige d'être employée avec précaution, et demande à être modifiée lorsqu'on passe du cas mathématique au physique.

Examinons ce qui résulte de la supposition que la pièce a une plus grande pente à tomber d'un côté que de l'autre; soit $\frac{1-\varpi}{2}$ la probabilité qu'en jetant la pièce en l'air croix ou pile (on ignore lequel des deux) arrivera. Supposons d'abord que la probabilité pour croix soit $\frac{1-\varpi}{2}$, l'espérance de A sera dans cette supposition égale à

$$(1+\varpi)[1+(1-\varpi)+(1-\varpi)^2+\ldots+(1-\varpi)^{x-1}] = \frac{(1+\varpi)[(1-\varpi)^x-1]}{-\varpi};$$

supposons ensuite que la probabilité pour croix soit $\frac{1-\varpi}{2}$, l'espérance de A sera égale à $\frac{(1-\varpi)[(1+\varpi)^x-1]}{\varpi}$. Or, comme il est aussi naturel d'attribuer à croix comme à pile la probabilité $\frac{1+\varpi}{2}$, si l'on nomme E l'espérance de A, on aura

$$E = 1 + \frac{1-\varpi^2}{2\varpi}[(1+\varpi)^{x-1} - (1-\varpi)^{x-1}];$$

si l'on regarde ϖ comme fort petit, on aura, tant que x ne sera pas considérable,

$$E = x + \left[\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} - \frac{x-1}{1}\right]\varpi^2.$$

Ainsi l'espérance de A est moindre que x, si x est au-dessous de 5 et plus grand que 1; elle égale x si $x = 5$. Après un plus grand nombre de coups, l'espérance de A devient plus grande que x, et, posant x infinie, elle est infiniment plus grande.

Comme la valeur de ϖ est inconnue, il n'est guère possible d'évaluer ainsi l'espérance de A pour un nombre n de coups; cependant, si l'on est assuré que ϖ ne peut excéder une certaine quantité, par exemple, $\frac{1}{q}$, mais qu'il puisse être également un des nombres fractionnaires compris entre 0 et $\frac{1}{q}$, on peut calculer de cette manière l'espérance de A.

Si l'on conçoit la fraction $\frac{1}{q}$ partagée dans une infinité de parties égales, représentées par $d\varpi$, il est clair que l'élément de l'espérance de A sera égal à $Eq\,d\varpi$, et l'espérance totale sera

$$\int Eq\,d\varpi = \int q\left(1 + \frac{1-\varpi^2}{2\varpi}\right)[(1+\varpi)^{x-1} - (1-\varpi)^{x-1}]\,d\varpi$$

(en intégrant et ajoutant la constante convenable)

$$\begin{aligned} &= n + \left[\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} - \frac{n-1}{1}\right]\frac{1}{3q^2} \\ &\quad + \left[\frac{(n-1)\ldots(n-5)}{1.2.3.4.5} - \frac{(n-1)\ldots(n-3)}{1.2.3}\right]\frac{1}{5q^4} \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si nous supposons q fort grand, cette quantité se réduit à ses deux premiers termes, tant que n est assez petit, et l'espérance de A est alors

$$n + \left[\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} - \frac{n-1}{1}\right]\frac{1}{3q^2}.$$

C'est une chose remarquable que cette espérance soit moindre que n lorsque le nombre des coups est au-dessous de 5 et plus grand que 1, qu'elle lui soit égale lorsque $n = 5$, et qu'enfin elle soit plus grande lorsque n est plus grand que 5.

Supposons $n = 2$ et $\frac{1}{q} = \frac{1}{10}$; l'espérance de A sera égale à $2 - \frac{1}{300}$ d'écus; d'où il résulte que A joue avec désavantage en donnant à B 2 écus, puisqu'il ne doit lui donner que $2 - \frac{1}{300}$ d'écus.

Si l'on cherchait par cette méthode la probabilité d'amener croix en deux coups, on la trouverait égale à $\frac{1}{4} + \frac{1}{12q^2}$, plus grande conséquemment que $\frac{1}{4}$; on se tromperait par conséquent en calculant ces probabilités suivant la méthode ordinaire, c'est-à-dire sans faire attention aux inégalités qui peuvent avoir lieu entre les deux faces de la pièce.

Ceci donne lieu à un nouveau genre de problème sur les hasards, fort utile dans l'application du Calcul des probabilités; car, bien que l'on ignore de quel côté est la plus grande probabilité, on voit cependant que cette incertitude rend le sort de l'un des joueurs plus avantageux que celui de l'autre; il est donc très intéressant de connaître, dans les différents cas, de quel côté est le plus grand avantage.

Mais c'est principalement dans l'application de la science des probabilités au jeu des dés que cette théorie a besoin d'être modifiée, vu que souvent entre les faces d'un dé, qui semble parfaitement cube, il existe une inégalité de pente très sensible, en sorte que, sur un fort grand nombre de coups, une des faces arrive plus souvent que l'autre, ce qui vient et de l'hétérogénéité de la matière du dé et de ce que sa figure n'est pas exactement cube; c'est ce que j'ai observé sur les dés les plus réguliers et les plus homogènes qu'il m'a été possible de trouver, et particulièrement sur les dés que l'on nomme *dés anglais;* examinons présentement les changements que ces inégalités doivent apporter dans la solution des Problèmes sur le jeu des dés.

A et B jouent ensemble, à cette condition que si A amène dans un nombre n de coups une face donnée d'un dé, B lui donnera la somme a; on demande ce que A doit donner à B.

Par la théorie des hasards, on trouve que l'espérance de A est $a - \frac{5^n}{6^n}a$, et c'est la somme qu'il doit donner à B; cette solution suppose toutes les faces du dé parfaitement égales, ce qui n'est vrai que mathématiquement parlant.

Soient $\frac{1+\varpi}{6}$ la probabilité qu'une des faces du dé (on ignore laquelle) a pour être amenée au premier coup; $\frac{1+\varpi'}{6}, \frac{1+\varpi''}{6}, \ldots, \frac{1+\varpi^{\text{v}}}{6}$ celles que les autres ont pour être amenées pareillement au premier coup; on aura

$$\frac{1+\varpi}{6} + \frac{1+\varpi'}{6} + \ldots + \frac{1+\varpi^{\text{v}}}{6} = 1,$$

partant

$$\varpi + \varpi' + \varpi'' + \ldots + \varpi^{\text{v}} = 0.$$

Or, si l'on suppose que la face donnée du dé ait la probabilité $\frac{1+\varpi}{6}$ pour être amenée dans un seul coup, la probabilité qu'elle n'arrivera pas dans un nombre n de coups sera

$$\frac{(5+\varpi'+\varpi''+\ldots+\varpi^{\text{v}})^n}{6^n} = \frac{(5-\varpi)^n}{6^n};$$

l'espérance de A est donc alors

$$a\left[1 - \frac{(5-\varpi)^n}{6^n}\right].$$

Pareillement, si la probabilité qu'a la face donnée pour être amenée au premier coup est $\frac{1+\varpi'}{6^n}$, on aura, pour l'espérance de A,

$$a\left[1 - \frac{(5-\varpi')^n}{6^n}\right],$$

et ainsi de suite; d'où il suit que la véritable espérance de A est

$$a - a\,\frac{(5-\varpi)^n}{6^{n+1}} - a\,\frac{(5-\varpi')^n}{6^{n+1}} - \ldots - a\,\frac{(5-\varpi^{\text{v}})^n}{6^{n+1}}.$$

Si l'on suppose ϖ, ϖ', ϖ'', ... fort petits et n peu considérable, on aura cette espérance égale à

$$a - \frac{5^n}{6^n}a - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{5^{n-2}}{6^{n+1}}a(\varpi^2 + \varpi'^2 + \varpi''^2 + \ldots + \varpi^{\text{v}2});$$

d'où il suit que, si ϖ, ϖ', ... ne sont pas nuls, ce qui serait physiquement impossible, l'espérance de A est moindre que $a - \frac{5^n}{6^n}a$, excepté dans le cas de $n = 1$; de là il résulte que A en donnant à B $a - \frac{5^n}{6^n}a$ joue avec désavantage.

Si n était un nombre considérable, on trouverait l'espérance de A égale à

$$\begin{aligned}
&a - \frac{5^n}{6^n}a - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{5^{n-2}}{6^{n+1}}a(\varpi^2 + \varpi'^2 + \ldots + \varpi^{\text{v}2})\\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{5^{n-3}}{6^{n+1}}a(\varpi^3 + \varpi'^3 + \ldots + \varpi^{\text{v}3})\\
&\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Or, comme il est aussi naturel de supposer ϖ, ϖ', ... négatifs comme positifs, il est visible que l'on doit rejeter les termes où ils se trouvent élevés à des puissances impaires; ainsi l'espérance de A sera

$$\begin{aligned}
&a - \frac{5^n}{6^n}a - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{5^{n-2}}{6^{n+1}}a(\varpi^2 + \varpi'^2 + \ldots + \varpi^{\text{v}2})\\
&\quad - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\,\frac{5^{n-4}}{6^{n+1}}a(\varpi^4 + \ldots + \varpi^{\text{v}4})\\
&\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

laquelle est toujours moindre que $a - \frac{5^n}{6^n}a$, quel que soit n.

Si les quantités ϖ, ϖ', ϖ'', ... sont inconnues, mais qu'on soit assuré qu'elles ne peuvent être plus grandes que $\frac{1}{q}$, ni moindres que $-\frac{1}{q}$, on propose de trouver dans cette supposition l'espérance de A.

Ce problème présente quelques difficultés et exige des considérations particulières, en ce que les quantités ϖ, ϖ', ϖ'', ... dépendent mutuellement les unes des autres, ce qui rend les différentes valeurs qu'on peut leur donner plus ou moins probables; pour simplifier le calcul, au lieu du dé, j'imagine un prisme triangulaire qui ne puisse retomber que sur ses trois faces rectangulaires; cela posé, en supposant ϖ fort petit et n peu considérable, l'espérance de A est

$$a - \frac{2^n}{3^n}a - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{2^{n-2}}{3^{n+1}}a(\varpi^2 + \varpi'^2 + \varpi''^2);$$

présentement, puisque l'on a $\varpi + \varpi' + \varpi'' = 0$, on aura $\varpi'' = -\varpi - \varpi'$; donc l'espérance de A est

$$a - \frac{2^n}{3^n}a - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}a(\varpi^2 + \varpi\varpi' + \varpi'^2);$$

je suppose d'abord ϖ positif et constant, et je cherche dans cette supposition l'espérance de A. Pour cela, je multiplie la quantité précédente par $d\varpi$, ce qui donne, après avoir intégré,

$$a\varpi - \frac{2^n}{3^n}a\varpi - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}a\left(\frac{1}{3}\varpi^3 + \frac{\varpi'\varpi^2}{2} + \varpi'^2\varpi\right) + C.$$

Or la plus grande valeur positive que puisse avoir ϖ est $\frac{1}{q} - \varpi'$; ainsi, en supposant l'intégrale nulle lorsque $\varpi = 0$, on aura $C = 0$, et l'intégrale qui convient à ϖ positif est

$$\left(a - \frac{2^n}{3^n}a\right)\left(\frac{1}{q} - \varpi'\right) - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}a\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{q} - \varpi'\right)^3 + \frac{\varpi'}{2}\left(\frac{1}{q} - \varpi'\right)^2 + \varpi'^2\left(\frac{1}{q} - \varpi'\right)\right].$$

Pour avoir l'intégrale qui convient à ϖ négatif, je fais ϖ négatif dans la valeur donnée ci-dessus de l'espérance de A, laquelle devient alors

$$a - \frac{2^n}{3^n}a - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}a(\varpi^2 - \varpi'\varpi + \varpi'^2).$$

Si l'on multiplie cette quantité par $d\varpi$, et que l'on intègre, on aura

$$\left(a - \frac{2^n}{3^n}a\right)\varpi - \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}a\left(\frac{1}{3}\varpi^3 - \frac{1}{2}\varpi'\varpi^2 + \varpi'^2\varpi\right);$$

or la plus grande valeur que puisse avoir ϖ dans ce cas est $\frac{1}{q}$. On aura donc, pour l'intégrale complète qui convient à ϖ négatif,

$$\left(a-\frac{2^n}{3^n}a\right)\frac{1}{q}-\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}a\left(\frac{1}{3q^3}-\frac{1}{2}\varpi'\frac{1}{q^2}+\varpi'^2\frac{1}{q}\right).$$

Si l'on ajoute cette intégrale à la précédente, il est visible que leur somme exprimera la somme de toutes les espérances de A, qui conviennent à cette valeur de ϖ', et conséquemment à toutes les variations de ϖ', depuis $-\frac{1}{q}$ jusqu'à $\frac{1}{q}-\varpi'$; cette somme sera

$$\left(a-\frac{2^n}{3^n}a\right)\left(\frac{2}{q}-\varpi'\right)-\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}a\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{q}-\varpi'\right)^3+\frac{1}{3q^3}+\frac{\varpi'^2}{2}\left(\frac{2}{q}-\varpi'\right)\right].$$

Si l'on multiplie cette quantité par $d\varpi'$, et que l'on intègre, on aura

$$\left(a-\frac{2^n}{3^n}a\right)\left(\frac{2}{q}\varpi'-\frac{1}{2}\varpi'^2\right)-\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}a\left[\frac{1}{12q^4}-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{q}-\varpi'\right)^4+\frac{\varpi'^3}{3q}-\frac{1}{8}\varpi'^4+\frac{\varpi'}{3q^3}\right]+C,$$

et, faisant commencer l'intégrale au point où $\varpi'=0$, et la supposant finir lorsque $\varpi'=\frac{1}{q}$, cette intégrale devient

$$\left(a-\frac{2^n}{3^n}a\right)\frac{3}{2qq}-\frac{n(n-1)}{1.2}a\frac{5.2^{n-4}}{3^{n+1}q^4};$$

cette quantité exprime la somme totale des espérances de A, qui conviennent à toutes les variations possibles de ϖ' positif; et, pour avoir l'espérance qui en résulte pour A, il est visible qu'il faut diviser cette somme par le nombre total des variations qui conviennent à ϖ' positif. Or le nombre de toutes les variations qui conviennent à ϖ' est, par ce qui précède, $\frac{2}{q}-\varpi'$; multipliant par $d\varpi'$ et intégrant, on trouve $\frac{3}{2qq}$ pour le diviseur de la quantité précédente. Ainsi l'espérance de A, qui convient à ϖ' positif, est

$$a-\frac{2^n}{3^n}a-\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{2^{n-3}}{3^{n+2}}\frac{5a}{q^2}.$$

Or l'espérance qui convient à ϖ' négatif est visiblement la même; de plus, il y a autant à parier pour ϖ' négatif que pour ϖ' positif; l'espérance totale de A est donc

$$a - \frac{2^n}{3^n} a - \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{2^{n-2}}{3^{n+2}} \frac{5a}{q^2};$$

en suivant le même procédé, on parviendrait à résoudre le problème précédent, dans le cas où le corps aurait 4, 5, 6, ... faces. Il n'y a d'autre difficulté que dans la longueur du calcul.

Ces exemples suffisent pour faire voir avec quelle précaution on doit appliquer aux objets physiques les considérations mathématiques sur le Calcul des probabilités. On suppose dans la théorie que les différents cas qui amènent un événement sont également probables, ou, s'ils ne le sont pas, que leur probabilité est dans un rapport donné. Quand on veut ensuite faire usage de cette théorie, on regarde deux événements comme également probables, lorsqu'on ne voit aucune raison qui rende l'un plus probable que l'autre, parce que, quand bien même il y aurait une inégale possibilité entre eux, comme nous ignorons de quel côté est la plus grande, cette incertitude nous fait regarder l'un comme aussi probable que l'autre.

Lorsqu'il n'est question que de probabilités simples, il paraît que cette inégalité de probabilités ne nuit en rien à la justesse de l'application du calcul aux objets physiques; si B, par exemple, s'engage à donner deux écus à A, à cette condition que ce dernier amènera croix au premier coup, suivant la théorie, c'est-à-dire en supposant croix et pile également possibles, A doit donner à B un écu avant que de commencer le jeu; et la même chose a lieu, comme il est facile de s'en assurer, quand on supposerait une inégale probabilité pour croix et pour pile, pourvu qu'on ignorât de quel côté est la plus grande; mais, lorsqu'il s'agit de probabilité composée, il me semble que l'application que l'on fait de la théorie aux événements physiques demande à être modifiée. Par exemple, si au jeu de croix et de pile, B parie avec A que ce dernier, sur deux coups, n'amènera point croix, la probabilité de B pour gagner est visiblement composée, puisqu'elle résulte de la probabilité que croix n'arrivera point au premier coup, et de celle qu'il n'arrivera point au second, multipliées l'une par l'autre. Or, dans ce cas, la probabilité de B par la théorie ordinaire est $\frac{1}{4}$, au lieu que, pour peu que l'on suppose croix et pile inégalement possibles, cette probabilité est plus grande que $\frac{1}{4}$.

Cette aberration de la théorie ordinaire, qui n'a encore été observée par personne, que je sache, m'a paru digne de l'attention des géomètres, et il me semble que l'on ne peut trop y avoir égard, lorsqu'on applique le Calcul des probabilités aux différents objets de la vie civile.

VII.

Quoique les théorèmes suivants n'aient aucun rapport avec la matière précédente, cependant à cause de l'utilité dont ils peuvent être dans l'Analyse, j'ai cru pouvoir les communiquer ici aux géomètres.

Sur les solutions particulières des équations différentielles.

On sait que les équations différentielles ont des solutions particulières qui ne sont point comprises dans l'intégrale générale, de quelque manière que l'on détermine les constantes arbitraires; je les nomme, pour cette raison, *solutions particulières*. Il est donc nécessaire d'avoir une méthode pour trouver toutes ces solutions; or voici, pour y parvenir, un théorème général :

Théorème. — *Soit l'équation différentielle $dy = p\,dx$, p étant fonction de x et de y; toute solution particulière de cette équation différentielle est un facteur commun aux deux quantités*

$$p + \frac{\dfrac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\dfrac{\partial p}{\partial y}},$$

et réciproquement, tout facteur commun à ces deux quantités, égalé à *zéro, est une solution particulière de l'équation différentielle*

$$dy = p\,dx.$$

On trouvera la démonstration de ce théorème et de plusieurs autres analogues sur les équations différentielles du second ordre, dans un Mémoire intitulé : *Recherches sur les solutions particulières des équations différentielles*, qui paraîtra parmi ceux de l'Académie pour l'année 1772 (¹).

Sur les équations aux différences partielles.

Théorème I. — *L'intégrale d'une équation linéaire aux différences partielles de l'ordre n renferme n fonctions arbitraires; ces fonctions peuvent entrer dans l'intégrale avec leurs différences premières, deuxièmes, troisièmes, etc., mais ces fonctions et leurs différences ne peuvent y entrer que sous une forme linéaire; ainsi, l'équation générale linéaire du deuxième ordre,*

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 6 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + \tau,$$

α, 6, γ, δ, λ et τ étant des fonctions de x et de y, a nécessairement une intégrale de cette forme

$$\begin{aligned} z = \mathrm{H} + \mathrm{A}\varphi(\varpi) + \mathrm{B}\varphi'(\varpi) + \mathrm{C}\varphi''(\varpi) + \ldots \\ + \mathrm{P}\psi(\theta) + \mathrm{Q}\psi'(\theta) + \mathrm{R}\psi''(\theta) + \ldots, \end{aligned}$$

$\varphi(\varpi)$ et $\psi(\theta)$ étant deux fonctions arbitraires, $\varphi'(\varpi)$ représentant $\frac{d\varphi(\varpi)}{d\varpi}$, $\varphi''(\varpi) = \frac{d\varphi'(\varpi)}{d\varpi}$, et ainsi de suite; et H, A, B, C, ..., P, Q, R, ... étant fonctions de x et de y.

Les quantités ϖ et θ se déterminent en cherchant des valeurs qui satis-

(¹) La méthode dont j'ai fait usage vient de paraître dans les *Actes de Leipzig* pour l'année 1771. Mais, comme il s'est glissé, durant l'impression, plusieurs fautes assez considérables, et que d'ailleurs j'ai eu depuis occasion d'approfondir davantage cette matière, je prie le lecteur de suivre mes recherches sur cet objet, dans le Volume de l'Académie pour l'année 1772.

fassent aux équations

$$o = \frac{\partial \varpi}{\partial x} + \frac{\partial \varpi}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - 6}\right),$$

$$o = \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - 6}\right),$$

équations que l'on peut toujours résoudre. En général, il est toujours facile d'intégrer cette équation

$$o = \frac{\partial z}{\partial x} + K\frac{\partial z}{\partial y} + V,$$

K *étant fonction de x et de y, et* V *étant fonction de x, y et z. On observera ici que, par intégrer, j'entends ramener aux différences ordinaires l'équation aux différences partielles.*

De là résulte cette remarque assez singulière : savoir, que pour déterminer la vitesse du son, il est inutile d'intégrer l'équation aux différences partielles dont elle dépend ; et, quoiqu'on ne l'ait pas encore intégrée dans le cas où l'air n'a que deux dimensions, on peut assurer cependant que cette vitesse est la même que dans les hypothèses d'une et de trois dimensions.

Du théorème précédent, suit cet autre théorème, savoir :

Théorème II. — *Il existe des équations linéaires aux différences partielles du second ordre dont l'intégrale est impossible en termes finis. De ce genre est l'équation des cordes vibrantes dans un milieu résistant comme la vitesse, et toute fois que l'intégrale est possible en termes finis, on peut la trouver par une méthode qui peut également s'appliquer aux équations linéaires de tous les ordres.*

Nous supposons, dans les deux théorèmes précédents, que les fonctions arbitraires existent dans l'intégrale débarrassées de tout signe d'intégration; et ce n'est, à proprement parler, que dans ce cas que cette intégrale est possible en termes finis. Mais, lorsque l'équation n'est pas susceptible d'une pareille intégrale, il importe souvent d'en avoir une en termes finis, quoique les fonctions arbitraires y soient enveloppées sous le signe d'intégration. Cela posé,

THÉORÈME III. — *L'expression de z aura dans ce cas la forme suivante*

$$\begin{aligned} z = H + A\varphi(\varpi) &+ B\int C\,\varphi(\varpi)\,d\varpi + \ldots \\ &+ B'\int C'\varphi(\varpi)\,d\varpi + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + R\psi(\theta) &+ S\int V\,\psi(\theta)\,d\theta + \ldots \\ &+ S'\int V'\psi(\theta)\,d\theta + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

dont on peut toujours déterminer les coefficients H, A, B, C, ..., R, S, V, ...

Voir pour la démonstration de ces théorèmes les *Mémoires de l'Académie pour l'année* 1773.