[illegible] 1302.
[illegible]
[illegible] 26 K.

Mathem.

Trigon.

R

p. 920

e. d. Pl. Scharl. 1814.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE

ET SPHÉRIQUE,

ET D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE

A LA GÉOMÉTRIE,

PAR S. F. LACROIX.

Da veniam scriptis quorum non gloria nobis
Causa, sed utilitas officiumque fuit.
OVID. *Epist. IX, ex Ponto L. III.*

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN SEPTIÈME.

TABLE.

CHAPITRE PREMIER.

De la Trigonométrie rectiligne.

CHAPITRE II.

De la Trigonométrie sphérique.

CHAPITRE III.

De l'Application de l'Algèbre à la Géométrie.

TRAITÉ

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE

ET SPHÉRIQUE,

ET D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE

A LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

De la Trigonométrie rectiligne.

1. DANS un triangle rectiligne, il y a six choses à considérer, savoir : trois angles et trois côtés ; mais il suffit de connoître un certain nombre de ces diverses parties pour déterminer les autres. Il suit en effet des propositions démontrées, relativement aux triangles égaux, que l'on peut toujours construire un triangle lorsqu'on connoît trois des six choses qui le constituent, et que, parmi les choses connues, il se trouve au moins un côté. Pour ne rien laisser à desirer sur la théorie des triangles, il faut pouvoir appliquer le calcul aux constructions géométriques, parce que l'exactitude de ces dernières est limitée

par l'imperfection des instrumens, tandis que rien n'arrête le calcul, qu'on est toujours maître de pousser jusqu'à tel degré de précision qu'on veut. Tel est l'objet qu'on se propose dans la *Trigonométrie rectiligne*.

Ceux qui ont entrepris les premiers de développer, par une suite d'opérations numériques, ou par des formules algébriques, les relations qu'ont entre elles les différentes parties d'un triangle, ont dû se trouver arrêtés par la difficulté de faire entrer dans le calcul la grandeur des angles, qui, mesurés par des arcs de cercle, ne peuvent être comparés avec les lignes droites. Mais ils ont bientôt reconnu que s'ils pouvoient, par un moyen quelconque, calculer une suite de triangles dont les angles eussent toutes les valeurs possibles, cette suite en renfermeroit nécessairement un qui seroit semblable au triangle que l'on auroit à déterminer, quel qu'il fût, et qu'alors de simples proportions suffiroient pour déduire les parties du second de celles du premier. L'exemple suivant éclaircira ce que ces notions peuvent avoir d'abstrait.

Fig. 1. 2. Supposons que, dans le triangle ABC, fig. 1re, on connoisse l'angle B, l'angle C et le côté BC, on cherchera dans la suite des triangles calculés celui qui a deux angles b et c respectivement égaux aux angles B et C; il sera nécessairement semblable au triangle proposé ABC; et puisque toutes ses parties ab, ac, bc sont connues, on aura les proportions $bc:ab::BC:AB$, $bc:ac::BC:AC$, dans chacune desquelles les trois premiers termes sont donnés. On trouvera par conséquent $AC=\frac{BC\times ac}{bc}$, $AB=\frac{BC\times ab}{bc}$; et comme on a d'ailleurs $A=a$, toutes les parties du triangle ABC seront déterminées.

3. Maintenant qu'on voit le parti qu'on peut tirer d'une suite de triangles faits sur tous les angles possibles, et dont les côtés seroient calculés, il est naturel de chercher les moyens de former une pareille suite. Pour considérer d'abord le cas le plus simple, supposons que les triangles qu'on se propose de déterminer soient rectangles; il est facile de voir qu'on les pourra construire tous dans un quart de cercle, en abaissant de chacun des points de l'arc AB, fig. 2, des perpendiculaires MP, $M'P'$, $M''P''$ etc. sur le rayon AC, et tirant les rayons MC, $M'C$, $M''C$, etc. les triangles MPC, $M'P'C$, $M''P''C$, etc. formés ainsi, seront rectangles en P, P', P'', etc. et les angles, MCP, $M'CP'$, $M''CP''$, etc. auront successivement toutes les valeurs possibles: enfin les angles CMP, $CM'P'$, $CM''P''$, etc. qui, avec les précédens, forment un angle droit, seront aussi tels que l'exige la nature des triangles rectangles, et il ne sauroit exister de triangle rectangle qui ne soit pas équiangle avec quelqu'un de ceux que fournit la construction présente. Il est à propos de remarquer que ces derniers ont tous une même hypothénuse, égale au rayon de l'arc AB. Fig. 2.

4. On pourroit encore former une suite de triangles rectangles, ayant tous un des côtés de l'angle droit égal au rayon du cercle; il suffit pour cela d'élever la tangente indéfinie AT, à l'extrémité du rayon AC, et de mener par le centre C et par les points M, M', M'', etc. les sécantes CN, CN', CN'', etc. Il est évident que les triangles CAN, CAN', CAN'', etc. auront successivement toutes les combinaisons d'angles qui peuvent exister dans un triangle rectangle; et parmi ces triangles, il s'en trouvera nécessairement un semblable à tel triangle rectangle qu'on voudra.

Fig. 2. 5. Dans les triangles CPM, $CP'M'$, $CP''M''$, etc. dont l'hypothénuse ne change pas, les côtés PM, $P'M'$, $P''M''$, etc. qui croissent en même temps que les angles ACM, ACM', ACM'', etc. et les arcs AM, AM', AM'', etc. qui mesurent ces angles, ont reçu un nom à cause de cette dépendance; la ligne PM s'appelle le *sinus* de l'arc AM; la ligne $P'M'$ est de même le sinus de l'arc AM', et ainsi des autres. Il suit de-là que *le sinus d'un arc est la perpendiculaire abaissée de l'une des extrémités de cet arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité.* Les lignes CP, CP', CP'', etc. qui diminuent lorsque les arcs AM, AM', AM'', etc. augmentent, sont respectivement égales, comme parallèles comprises entre parallèles, aux perpendiculaires MQ, $M'Q'$, $M''Q''$, etc. abaissées des points M, M', M'' sur le rayon CB, perpendiculaire au rayon CA; et il est évident que les lignes MQ, $M'Q'$, $M''Q''$ sont, par rapport aux arcs BM, BM', $B''M''$, ce que sont PM, $P'M'$, $P''M''$, etc. par rapport aux arcs AM, AM', AM'', etc. et que par conséquent MQ est le sinus de BM, $M'Q'$ celui de BM', $M''Q''$ celui de BM'', etc.

Deux arcs qui, pris ensemble ou soustraits l'un de l'autre, valent le quart de la circonférence, sont dits *complémens* l'un de l'autre. Les arcs BM, BM', BM'', sont respectivement les complémens de AM, AM', AM'', etc. On a désigné les lignes MQ, $M'Q'$, $M''Q''$, etc. ainsi que leurs égales CP, CP', CP'', sous le nom de *cosinus* des arcs AM, AM', AM'', etc. D'après ces notions, *le cosinus d'un arc quelconque est le sinus du complément de cet arc, et est égal à la partie du rayon comprise entre le centre et le pied du sinus.*

Les triangles rectangles CPM, $CP'M'$, $CP''M''$, etc. qui ont tous une même hypothénuse, sont donc formés

par le rayon du cercle, et par le sinus et le cosinus Fig. 2.
de celui de leurs angles aigus qui a son sommet au centre (*).

6. Passons aux triangles CAN, CAN', CAN'', etc. Leurs hypothénuses sont les *sécantes* des arcs AM, AM', AM'', etc. parce qu'on nomme *sécante d'un arc le rayon mené par une des extrémités de cet arc, et prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente menée par l'autre extrémité*. Les portions AN, AN', AN'', etc. prises sur la tangente AT, sont les tangentes des arcs AM, AM', AM'', etc. parce que l'on est convenu d'appeler *tangente d'un arc la partie qu'interceptent, sur la tangente menée par l'une des extrémités de cet arc, les deux rayons qui le terminent* (**).

7. Si, par l'extrémité B de l'arc AB, fig. 3, on mène Fig. 3
la tangente Bn prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la sécante CN, la ligne Cn sera la sécante de l'arc BM, complément de AM, et se nomme la *cosécante* de AM; la ligne Bn, tangente de BM, sera la *cotangente* de AM; parce qu'on appelle *cotangente et cosécante d'un arc, la tangente et la sécante de son complément*. La cotangente et la cosécante, comme on voit, ne font pas partie des mêmes triangles, ainsi que cela arrive pour le sinus et le cosinus.

(*) La partie AP du rayon AC, comprise entre le pied du sinus et l'extrémité de l'arc, se nomme *sinus verse*. Cette ligne d'ailleurs n'est d'aucun usage en trigonométrie.

(**) On voit ici les mots *sécante* et *tangente*, pris dans une acception différente de celle qu'on leur donne dans les élémens de géométrie. Dans cette partie des mathématiques, la sécante et la tangente sont des droites indéfinies, dont l'une coupe le cercle, et l'autre le touche; mais en trigonométrie, les mêmes dénominations s'appliquent toujours à des lignes d'une grandeur déterminée: quand il peut y avoir équivoque, on appelle ces dernières *tangentes et sécantes trigonométriques*.

Fig. 3. 8. Les tangentes et les sécantes ont avec les sinus et les cosinus des relations très-simples, au moyen desquelles on peut trouver les unes, lorsqu'on connoît les autres. Les triangles CPM et CAN étant semblables, donnent $CP : PM :: CA : AN$, d'où l'on tire $AN = \frac{PM \times CA}{CP}$; mettant, au lieu des lignes CP, PM et AN, leur désignation, savoir : cos AM, sin AM et tang AM, et représentant le rayon CA par R, on aura tang $AM = \frac{R \sin AM}{\cos AM}$.

Des mêmes triangles CPM et CAN, on déduit aussi $CP : CM :: CA : CN$, ce qui conduit à $CN = \frac{CM \times CA}{CP}$: mais $CN =$ séc AM, $CM = CA = R$, $CP = \cos AM$; donc séc $AM = \frac{R^2}{\cos AM}$.

9. Si l'on compare entre eux les triangles CAN et CBn, qui sont encore semblables, puisqu'ils sont tous les deux rectangles, et que l'angle $ACN = CnB$, comme alternes internes, par rapport à la sécante Cn, on aura la proportion $AN : CA :: CB$ ou $CA : Bn$, qui donne $Bn = \frac{\overline{CA}^2}{AN}$, ce qui revient à cot $AM = \frac{R^2}{\text{tang } AM}$.

Cette proportion et celle que nous venons de trouver pour la sécante, nous apprennent que le rayon est moyen proportionnel entre la sécante et le cosinus, entre la tangente et la cotangente, puisqu'on a

$$\cos AM \times \text{séc } AM = R^2, \quad \text{tang } AM \times \cot AM = R^2.$$

10. Aidés de ce qui précède, il ne nous manque plus, pour être en état de construire les tables nécessaires à la trigonométrie, que de connoître les moyens de calculer les sinus et les cosinus seulement. Le cosinus même se

déduit immédiatement du sinus; car le triangle rectangle *CPM*, qui les contient l'un et l'autre, et qui a pour hypothénuse le rayon, donne $\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2$, ou $(\sin AM)^2 + (\cos AM)^2 = R^2$, c'est-à-dire que *le quarré du rayon est égal à la somme des quarrés du sinus et du cosinus,* d'où il suit : $\cos AM = \sqrt{R^2 - (\sin AM)^2}$. Fig. 3.

La proposition suivante, qui donne l'expression du sinus et du cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs, mérite la plus grande attention, parce qu'elle renferme implicitement toutes les propriétés des sinus et des cosinus.

11. *Soient deux arcs quelconques* a *et* b, *je dis qu'on aura*

$$\sin(\mathrm{a} \pm \mathrm{b}) = \frac{\sin \mathrm{a} . \cos \mathrm{b} \pm \sin \mathrm{b} . \cos \mathrm{a}}{R}.$$

$$\cos(\mathrm{a} \pm \mathrm{b}) = \frac{\cos \mathrm{a} . \cos \mathrm{b} \mp \sin \mathrm{a} . \sin \mathrm{b}}{R}.$$

Pour le prouver, je prends sur le cercle *AMB*, fig. 4, l'arc $AM = a$; je porte de chaque côté du point *M* les arcs *MN* et *MN'* égaux à *b*; je tire la corde *NN'*; des points *N*, *M*, *N'*, j'abaisse sur le rayon *AC* les perpendiculaires *NQ*, *MP*, *N'Q'*; par le point *M*, je mène le rayon *MC*, et du point *E*, où il rencontre la corde *NN'*, j'abaisse sur *AC* la perpendiculaire *EF*; par les points *E* et *N'*, je mène les droites *ED*, *N'G*, parallèles à *AC*. Cela fait, je remarque, 1°. que *NQ* est le sinus de l'arc $AN = AM + MN = a + b$, et que *CQ* est le cosinus du même arc; 2°. que *N'Q'* est le sinus de l'arc $AN' = AM - MN' = a - b$, et que *CQ'* en est le cosinus. Mais la corde *NN'* étant nécessairement partagée en deux parties égales au point *E*, puisque le rayon *CM* passe par le milieu de l'arc *NN'*, d'après la construction, il suit de la simili- Fig. 4.

Fig. 4. tude évidente des triangles NED, $NN'G$, que NG est aussi divisée en deux parties égales au point D, et que $DN = DG$. De plus $DQ = EF$, $GQ = N'Q'$, $DE = FQ$, à cause des parallèles; et comme DE est la moitié de $N'G$, FQ sera la moitié de $Q'Q$; en sorte que $Q'F = QF = DE$. Enfin

$$\begin{aligned} NQ &= DQ + DN = EF + DN, \\ GQ &= N'Q' = DQ - DG = EF - DN, \\ CQ &= CF - FQ = CF - DE, \\ CQ' &= CF + FQ' = CF + DE; \end{aligned}$$

mettant pour NQ, $N'Q'$, CQ, CQ' leurs désignations respectives, savoir:

$$\sin(a+b),\ \sin(a-b),\ \cos(a+b),\ \cos(a-b),$$

j'aurai

$$\sin(a+b) = EF + DN, \quad \cos(a+b) = CF - DE,$$
$$\sin(a-b) = EF - DN, \quad \cos(a-b) = CF + DE.$$

Il ne reste plus qu'à calculer les quatre lignes EF, CF, DN et DE; les deux premières s'obtiennent par les triangles semblables CMP et CEF, dont on tire

$$CM : PM :: CE : EF, \qquad CM : CP :: CE : CF.$$

Or, puisque $AM = a$, j'ai $MP = \sin a$, $CP = \cos a$; il suit aussi des définitions du sinus et du cosinus (n°. 5) que EN est le sinus de l'arc MN, que CE en est le cosinus, et que par conséquent $NE = \sin b$, $CE = \cos b$; d'ailleurs $CM = R$: substituant ces valeurs dans les proportions ci-dessus, je trouve

$$EF = \frac{MP \times CE}{CM} = \frac{\sin a \cos b}{R}.$$

$$CF = \frac{CP \times CE}{CM} = \frac{\cos a \cos b}{R}.$$

Je compare ensuite les triangles CMP, DEN, qui sont semblables, parce que les côtés du second sont perpendiculaires à ceux du premier, et je déduis de ces triangles Fig. 4.

$$CM:EN::CP:DN; \quad CM:EN::MP:DE.$$

Substituant aux trois premiers termes de chacune de ces proportions, leur désignation rapportée ci-dessus, elles donnent

$$DN = \frac{EN \times CP}{CM} = \frac{\sin b \cos a}{R},$$

$$DE = \frac{MP \times EN}{CM} = \frac{\sin a \sin b}{R}.$$

Réunissant ces valeurs aux précédentes pour former celles de $\sin(a+b)$ et de $\sin(a-b)$, il vient les quatre équations

$$\left\{\begin{array}{l} \sin(a+b) = \dfrac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{R}, \\ \sin(a-b) = \dfrac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{R}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(a+b) = \dfrac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{R}, \\ \cos(a-b) = \dfrac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{R}, \end{array}\right.$$

qui se réduisent aux deux qui composent l'énoncé du théorême.

Avec ces équations, on peut trouver le sinus et le cosinus d'un arc double, triple, et en général multiple de celui dont on connoît le sinus et le cosinus. En effet, si l'on prend successivement $b = a$, $b = 2a$, on aura

Fig. 4.
$$\begin{cases} \sin 2a = \dfrac{2\sin a\cos a}{R}, \\ \cos 2a = \dfrac{\cos a^2 - \sin a^2}{R}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3a = \dfrac{\sin a\cos 2a + \sin 2a\cos a}{R}, \\ \cos 3a = \dfrac{\cos a\cos 2a - \sin a\sin 2a}{R}; \end{cases}$$

et on tirera des deux dernières équations $\sin 3a$ et $\cos 3a$, lorsque $\sin 2a$ et $\cos 2a$ seront calculés.

12. L'équation $\sin 2a = \dfrac{2\sin a\cos a}{R}$ donne aussi le sinus de l'arc a par celui de $\frac{1}{2}a$. Si l'on remplace $\cos a$ par sa valeur $\sqrt{R^2 - \sin a^2}$ (*), elle devient alors $\sin 2a = \dfrac{2\sin a\sqrt{R^2 - \sin a^2}}{R}$, et en élevant au quarré, on trouve $R^2 \sin 2a^2 = 4R^2 \sin a^2 - 4\sin a^4$; prenant $\sin a$ pour l'inconnue, dans cette équation qui peut se résoudre à la manière de celles du second degré, il vient

$$\sin a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}R^2 \pm \tfrac{1}{2}R\sqrt{R^2 - \sin 2a^2}}.$$

Si l'on fait $2a = a'$, on aura $a = \frac{1}{2}a'$, et par conséquent

$$\sin\tfrac{1}{2}a' = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}R^2 \pm \tfrac{1}{2}R\sqrt{R^2 - \sin a'^2}},$$

$$\text{ou } \sin\tfrac{1}{2}a' = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 \pm 2R\cos a'},$$

en mettant $\cos a'^2$ au lieu de $R^2 - \sin a'^2$ (n° 10.), en multipliant les quantités sous le radical par 4, et en divi-

(*) Le lecteur est prévenu que dorénavant nous désignerons le quarré du sinus de l'arc a par $\sin a^2$, expression qu'il ne faut pas prendre pour le sinus du quarré de l'arc a, ainsi $\sin a^2 = (\sin a)^2$.

sant au-dehors par 2, ce qui ne change rien à l'expression. Telle est la formule qui donne le sinus de la moitié d'un arc, lorsqu'on a celui de cet arc.

13. On peut arriver à ce résultat par une construction très-simple.

Si l'on divise l'arc AM, fig. 5, en deux parties égales, la corde AQM se trouvera également divisée en deux parties égales, et QM sera le sinus de MN ou de la moitié de AM; le triangle AMP rectangle en P, donnera Fig. 5.

$AM = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{AP}^2}$; et comme $AP = AC - CP = R - \cos AM$, ou $R - \cos a'$, que d'ailleurs $PM = \sin AM = \sin a'$, on aura $AM = \sqrt{\sin a'^2 + R^2 - 2R\cos a' + \cos a'^2} = \sqrt{2R^2 - 2R\cos a'}$ à cause que $\sin a'^2 + \cos a'^2 = R^2$, (n°. 10), et on en déduira $QM = \frac{1}{2}AQM = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R\cos a'}$.

On ne trouve de cette manière que la deuxième valeur de $\sin\frac{1}{2}a'$: l'autre est MQ'; car l'arc $MN'A'$ qui compose, avec l'arc AM, la demi-circonférence, a aussi pour sinus PM, puisque cette ligne est bien en effet la perpendiculaire abaissée de l'extrémité M sur le rayon CA' qui passe par l'autre extrémité (n°. 5), et rien dans l'équation d'où l'on est parti, ne faisant connoître lequel de ces deux arcs on se propose de diviser, on doit trouver en même temps le sinus de la moitié du premier et celui de la moitié du second. Suivant notre construction, on auroit

$$\begin{aligned}A'M &= \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{A'P}^2} = \sqrt{\overline{PM}^2 + (A'C + CP)^2}\\ &= \sqrt{\sin a'^2 + (R + \cos a')^2}\\ &= \sqrt{\sin a'^2 + R^2 + 2R\cos a' + \cos a'^2}\\ &= \sqrt{2R^2 + 2R\cos a'},\end{aligned}$$

et par conséquent $MQ' = \sin\frac{1}{2}a' = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 2R\cos a'}$,

Fig. 5. résultat qui est la première valeur de $\sin\frac{1}{2}a'$. Il faut bien observer que, quoique $\sin a'$ soit le même dans les deux valeurs de $\sin\frac{1}{2}a'$, l'arc a' est différent : pour l'une d'elles, cet arc est AM, et pour l'autre, $A'M$, qui est le supplément de AM ; car *on entend par le supplément d'un angle ou d'un arc, ce qu'il faut ajouter à cet angle ou à cet arc pour en faire deux droits, ou la demi-circonférence.* On conclura aussi de ce qui précède, que le sinus du supplément d'un arc est le même que celui de cet arc. Nous donnerons plus loin des notions générales sur les différens arcs qui peuvent avoir un même sinus, une même tangente, etc.

14. Il suit de ce qui précède, que le sinus d'un arc quelconque AN est la moitié de la corde AM de l'arc double ANM, et que la corde AM est le double du sinus de l'arc AN, moitié de ANM ; de manière que lorsque les sinus sont connus, on en déduit les cordes, *et vice versâ.*

15. Nous sommes en état d'expliquer maintenant comment on a pu dresser une table des sinus et des cosinus. On a conçu premièrement le quart de cercle partagé en un certain nombre de parties égales que l'on a nommées *degrés*. Jusqu'à présent on a divisé la circonférence entière en 360 degrés ; on a subdivisé ensuite chacun de ces degrés en 60 parties appelées *minutes ;* chacune de ces minutes en 60 parties appelées *secondes ;* chacune de ces secondes en 60 parties appelées *tierces*, etc. La marque des degrés est le caractère $^{\circ}$ placé à la droite du nombre et au-dessus, celle des minutes $'$, celle des secondes $''$, celle des tierces $'''$, etc. ; en sorte que $42^{\circ}\,31'\,14''\,5'''$ signifie 42 degrés 31 minutes 14 secondes 5 tierces.

Il est facile de voir que dans la mesure des angles on n'a aucun égard à la valeur absolue des arcs, mais seulement à leur rapport avec la circonférence entière. Il sembleroit fort naturel de la prendre pour l'unité, et d'exprimer les arcs par des fractions, soit quelconques, soit décimales. Cependant quelques considérations particulières ont déterminé les savans, chargés de la réforme des poids et mesures, à prendre l'angle droit pour l'unité des angles, et par conséquent le quart de cercle ou *quadrans* pour l'unité des arcs. Ils l'ont divisé en cent parties égales qu'ils ont nommées *grades*, et qu'ils ont substituées aux anciens degrés; chacun de ces grades en cent parties égales. Ces dernières divisions remplacent les minutes, et peuvent être subdivisées autant qu'on le voudra, suivant la progression décimale.

En employant dans le cours de cet ouvrage la nouvelle division du cercle, nous exprimerons les arcs par des nombres décimaux écrits à l'ordinaire; mais nous placerons au-dessus du chiffre des unités, et à droite, la lettre q, pour désigner que l'unité est le quart de cercle, et pour empêcher qu'on ne confonde les mesures d'arcs avec les autres nombres. $0^q,435$, par exemple, représentera l'arc égal à $\frac{435}{1000}$ ou $\frac{4350}{10000}$ du quadrans, et sera par conséquent composé de 43 grades et 50 minutes (*).

Ce n'est pas non plus les valeurs absolues des sinus que

(*) Il paroît que les principales raisons qui ont fait choisir l'angle droit pour unité, sont, 1°. que le cercle entier, à proprement parler, ne mesure point un angle, puisqu'alors le rayon mobile CM (fig. 2) est revenu s'appliquer sur le rayon CA; 2°. que le sinus, auquel on rapporte toutes les autres lignes trigonométriques, prend dans l'étendue du quart de cercle, ou de l'angle droit, toutes les valeurs dont il est susceptible. Fig. 2.

l'on a besoin de calculer, mais seulement leur rapport avec le rayon, puisqu'il suffit de connoître dans tous les Fig. 2. triangles CPM, $CP'M'$, etc. fig. 2, les rapports qu'ont entre eux les côtés (n°. 2). On peut donc, pour plus de simplicité, prendre le rayon pour unité, et partager ensuite cette unité en autant de parties qu'on voudra, en 100000, par exemple, ainsi qu'on a coutume de le faire, et déterminer ensuite combien chaque sinus PM, $P'M'$, $P''M''$, etc. contient de ces parties.

16. Le rayon du cercle sur lequel on se propose de construire les tables étant 1, et sa circonférence étant dési-Fig. 6. gnée par π, le sinus de AB, fig. 6, ou $\sin \frac{1}{4}\pi = 1$; on a d'ailleurs $\cos \frac{1}{4}\pi = 0$: faisant donc $a' = \frac{1}{4}\pi$, la formule $\sin \frac{1}{2}a' = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R\cos a'}$ (n°. 13) fait voir que le sinus de la moitié du quart de cercle ou de $\frac{1}{8}\pi$ est $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. On peut aussi s'en convaincre *à priori*, puisque le triangle CMP est alors isocèle, et que l'on a par conséquent $2\overline{PM}^2 = \overline{CM}^2 = 1$, d'où $\overline{PM}^2 = \frac{1}{2}$ et $PM = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dans ce qui suit nous adopterons la nouvelle division du cercle; et l'arc $AB = \frac{1}{4}\pi$ étant pris pour unité, AM sera de $0^q,5$: on aura donc

$$\sin 0^q,5 = \cos 0^q,5 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707106781186.$$

Maintenant si on fait $0^q,5 = a'$, on trouvera

$$\sin \tfrac{1}{2}a' = \sin 0^q,25 = 0,382683432365$$
$$\cos \tfrac{1}{2}a' = \cos 0^q,25 = 0,923879532511.$$

En partant de ces dernières valeurs, on arrivera par les mêmes formules à celles de

$$\sin \frac{0^q,25}{2} = \sin 0^q,125, \qquad \cos \frac{0^q,25}{2} = \cos 0^q,125;$$

de celles-ci à celles de

$$\sin\frac{0^q,125}{2}=\sin 0^q,0625,\ \cos\frac{0^q,125}{2}=\cos 0^q,0625\ ;$$ Fig. 6.

de celles-ci à celles de

$$\sin\frac{0^q,0625}{2}=\sin 0^q,03125,\ \cos\frac{0^q,0625}{2}=\cos 0^q,03125\ ;$$

et en continuant ainsi de partager chaque arc en deux parties égales, on parviendra à un très-petit arc. A la quatorzième division, on tombe sur un arc qui n'est que $\frac{1}{16384}$ du quart de cercle; la petitesse de cet arc est telle, que dans les douze premières décimales il ne diffère pas de son sinus.

17. Pour s'en convaincre, il faut observer que la longueur d'un arc est toujours moindre que celle de sa tangente, et plus grande que celle de son sinus. En effet, si on prend au-dessous du rayon AC, fig. 7, l'arc $AM'=AM$, que l'on tire la corde MM', et que l'on mène les tangentes MT, $M'T$, il est facile de voir que les tangentes doivent rencontrer toutes deux le rayon AC dans un même point, puisque les triangles CMT et $CM'T$, sont égaux. Les lignes MT et $M'T$ étant égales aussi bien que les lignes PM et PM' et les arcs AM et AM', on aura $2\,AM<2\,MT$ et $2\,AM>2\,PM$, parce que les lignes qui ne serpentent point sont d'autant plus longues, qu'elles s'écartent davantage de la ligne droite; et l'on en conclura $AM<MT$, $AM>PM$ (*). Fig. 7.

(*) La plupart des auteurs élémentaires ont négligé de démontrer la proposition rappelée ici. Cependant elle a besoin d'être prouvée, et peut l'être facilement, ainsi qu'il suit. Si l'on mène à la ligne courbe ACB, fig. 8, intérieure à la courbe AMB, une tangente DE, cette tangente sera plus courte que l'arc DME, et on aura $ADEB<AMB$. Tirant ensuite par les points H et L, intermédiaires entre A et C, C et B, les tangentes FG, IK, on formera une nouvelle ligne brisée $AFGIKB$, qui sera moindre que la première, puisque $FG<FD+DG$, $IK<IE+EK$. Il est évident qu'on construira Fig. 8.

18. Il suit évidemment de-là que si la valeur de la tangente et celle du sinus d'un petit arc AM, ne diffèrent point dans un certain nombre de leurs premiers chiffres, ces mêmes premiers chiffres donneront aussi une valeur approchée de l'arc. En prenant, par exemple, $PM = 0{,}0001$, on trouve

$$CP = \sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{PM}^2} = 0{,}999\,999\,995,$$

et $MT = \dfrac{CM \times PM}{CP} = 0{,}000\,100\,000\,000\,5$, valeur qui ne diffère de PM qu'au treizième chiffre. Ayant donc trouvé que le sinus de $\frac{1}{16384}$ du quart de cercle, est $0{,}000\,095\,873\,799$, on en conclura que ce sinus ne diffère point de l'arc dans les douze premiers chiffres, et que par conséquent le nombre rapporté ci-dessus exprime aussi la valeur approchée de l'arc proposé (*).

19. On voit que tant que les arcs sont assez petits pour

---

de la même manière une suite indéfinie de lignes brisées qui iront sans cesse en diminuant à mesure qu'elles approcheront de se confondre avec la courbe ACB, qui sera donc non-seulement plus petite que AMB, mais encore que toutes les lignes brisées dont on vient de parler.

(*) La même chose se prouve en réduisant en série l'expression de la tangente. En effet, on a $\operatorname{tang} a = \dfrac{\sin a}{\cos a} = \dfrac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin a^2}}$ (nos 8, 10); mais $\dfrac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin a^2}} = \sin a\,(1 - \sin a^2)^{-\frac{1}{2}}$ développant la dernière quantité par la formule du binome, on trouvera

$$\operatorname{tang} a = \sin a + \tfrac{1}{2}\sin a^3 + \tfrac{3}{8}\sin a^5 + \text{etc.}$$

Il est évident que tant que $\sin a$ sera une petite fraction décimale, le terme $\frac{1}{2}\sin a^3$ ne pourra influer que sur les derniers chiffres de l'expression de l'arc a, et que dans les premiers on aura arc $a = \sin a$.

En faisant $\sin a = 0{,}0001$, on trouve $\frac{1}{2}\sin a^3 = 0{,}000\,000\,000\,000\,5$, résultat qui ne peut changer que le treizième chiffre.

se

se confondre avec leurs sinus et leurs tangentes, ces der- Fig. 7.
nières lignes leur sont proportionnelles, et que par conséquent on a $\sin \frac{1^q}{16384} : \sin \frac{1^q}{100000} :: \frac{1^q}{16384} : \frac{1^q}{100000}$ ou $:: 100000 : 16384$. On aura donc

$$\sin 0{,}00001 = \frac{16384 \sin \frac{1^q}{16384}}{100000} = 0{,}000015707963,$$

au moins dans les douze premières décimales. On trouvera, par la même raison

$$\sin 0{,}00002 = 2 \sin 0{,}00001$$
$$\sin 0{,}00003 = 3 \sin 0{,}00001$$
$$\sin 0{,}00004 = 4 \sin 0{,}00001$$
etc.

Ayant soin de calculer en même temps le cosinus et la tangente de chacun de ces arcs, on verra qu'on peut suivre cette voie jusqu'à l'arc dont le sinus et la tangente se confondent encore dans les douze premières décimales.

Si l'on ne vouloit avoir les valeurs approchées que jusqu'à la huitième décimale, on pourroit pousser ainsi jusqu'à l'arc de 0,001.

Pour s'élever ensuite à des arcs plus considérables, on se servira des équations

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
$$\cos 2a = \cos a^2 - \sin a^2$$
$$\sin (a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos (a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b;$$

faisant successivement $a = 0^q{,}001$, $a = 0^q{,}002$, etc. dans les deux premières, on en déduira

$$\sin 0^q{,}002,\ \sin 0^q{,}004$$
$$\cos 0^q{,}002,\ \cos 0^q{,}004$$
etc.

Fig. 7. et prenant ensuite $a = 0^q{,}001$, $b = 0^q{,}002$, $a = 0^q{,}002$, $b = 0^q{,}003$, etc. on obtiendra par le moyen des deux dernières

$$\sin 0^q{,}03\,,\ \sin 0^q{,}05$$
$$\cos 0^q{,}03\,,\ \cos 0^q{,}05$$
$$\text{etc.}$$

Cet exposé suffit pour faire concevoir comment on a pu former les tables trigonométriques. Il existe d'ailleurs des méthodes plus expéditives pour calculer les sinus des arcs quelconques, par le moyen de séries convergentes qui se déduisent des équations du numéro 1[illegible]. On les trouvera dans l'introduction à mon *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral.*

20. La méthode que nous venons d'exposer pour former les tables de sinus peut s'adapter à l'ancienne division du cercle en 360° ; mais alors il faut partir du sinus de $\frac{1}{3}$ du quart de cercle, ou de 30°, parce qu'il est égal à la moitié du rayon ; ce qu'on peut prouver ainsi.

On sait que le rayon est le côté de l'hexagone inscrit, ou, ce qui est la même chose, la corde du $\frac{1}{3}$ de la demi-circonférence, c'est-à-dire d'un arc de 60° ; prenant donc

Fig. 9. la corde $APM = AC$, fig. 9, on aura $ANM = 60°$; et PM, moitié de AM ou de AC, sera le sinus de l'arc $MN = \frac{1}{2} AMN = 30°$: donc le sinus de $30° = \frac{1}{2} R$.

21. Pour faciliter les calculs, on a substitué depuis long-temps aux valeurs des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, leurs logarithmes ; et dans la plupart des tables, on ne trouve plus que ces derniers ; en sorte que par leur moyen, on résout toujours l'une ou l'autre de ces questions :

1°. *Un arc étant donné, trouver le logarithme de son sinus, ou celui de son cosinus, ou celui de sa tangente, ou celui de sa cotangente.*

2°. *Connoissant le logarithme du sinus, ou celui du cosinus, ou celui de la tangente, ou celui de la cotangente d'un arc, trouver cet arc.* Fig. 9.

La solution de ces questions tient à la disposition des tables, disposition qui n'est pas la même dans toutes, et qui se trouve toujours expliquée en tête de chacune d'elles; c'est pourquoi nous n'en parlerons point ici. Nous nous bornerons à indiquer les tables de Callet, comme les meilleures relativement à l'ancienne division. Les tables que le citoyen Borda a dressées d'après la nouvelle, et qui sont actuellement sous presse, ne laisseront sûrement rien à desirer.

Les tables trigonométriques n'embrassent que l'étendue du quart de cercle; mais elles donnent malgré cela les sinus et cosinus, tangentes et cotangentes, pour tous les arcs, quelque grands qu'ils soient, ainsi que nous allons le faire voir en examinant la marche des lignes trigonométriques par rappport aux divers degrés de grandeur par lesquels peut passer un arc de cercle.

22. Pour bien comprendre ce qui va suivre, il faut se pénétrer d'avance de la continuité qui règne toujours entre les différens résultats qu'on déduit d'une même expression algébrique, ou d'une même construction géométrique, et qui consiste en ce que chaque valeur que prend l'expression dont il s'agit, est toujours précédée ou suivie de valeurs qui diffèrent aussi peu qu'on voudra de la première; et en ce que, dans la description d'une ligne, chaque point est toujours précédé ou suivi de points qui lui sont immédiatement contigus. Cela posé, si on conçoit que le rayon MC, fig. 10, d'abord couché sur AC, tourne autour du point C, comme sur une charnière, ce rayon formera successivement, avec AC, tous Fig. 10.

Fig. 10. les angles possibles ; et le point M, situé à son extrémité, passera sur tous les points de la circonférence du cercle $A\,B\,A'\,B'\,A$, ou, ce qui est la même chose, la décrira. En suivant avec attention le mouvement que nous venons d'indiquer, on voit d'abord qu'au point A, où l'arc est nul, le sinus est nul aussi, et le cosinus ne diffère pas du rayon $A\,C$. Lorsque le rayon $C\,M$ s'est détaché de $A\,C$, le sinus $P\,M$ augmente à mesure que le point M, que j'appellerai désormais le *point décrivant*, s'avance vers B, et quand il y est parvenu, $P\,M$ devient égal à CB, ou au rayon. Dans les mêmes circonstances, le cosinus $P\,C$ diminue sans cesse, et devient nul lorsque le point M est en B; l'angle $A\,C\,B$ est alors droit, et l'arc $AB = \frac{1}{4}\pi$. Le point M continuant son mouvement au-delà du point B, le sinus décroît, et le cosinus, qui tombe maintenant sur le diamètre AA', d'un côté du point C, opposé à celui où il étoit avant le point B, augmente. C'est ce que prouve la seule inspection de la figure : $P'\,M'$ sinus de $A\,B\,M$, est moindre que $B\,C$, sinus de $A\,B$; et CP', cosinus du premier de ces arcs, surpasse le cosinus du second, qui est nul. Il est à propos de remarquer que $P'\,M'$ et $C\,P'$ sont respectivement le sinus et le cosinus de l'arc $A'\,M'$, compté du point A' et supplément de $A\,B\,M'$; d'où il suit qu'*un angle obtus a le même sinus et le même cosinus que son supplément*.

Lorsque le point M' est parvenu en A', le sinus est redevenu nul comme au point A, et le cosinus est encore une fois égal au rayon. Au point A', l'arc $A\,B\,A'$ est égal à la demi-circonférence, ou à $\frac{1}{2}\pi$: l'angle $A\,C\,M$ a atteint sa plus grande limite ; mais rien ne s'oppose à ce que le rayon $C\,M$ et le point décrivant ne continuent leur mouvement, et ne passent au-dessous du diamètre $A\,A'$. Le sinus, qui devient alors $P''M''$, tombe aussi au-dessous du diamètre, et augmente à mesure que le point M'' s'approche de B', tandis que le cosinus CP'' diminue. Au point B', où l'arc $ABA'B'$ est les $\frac{3}{4}$ de la circonférence, ou $\frac{3}{4}\pi$, l'un est égal au rayon CB', et l'autre est nul. Enfin depuis B' jusqu'en A, le sinus $P'''M'''$, toujours au-dessous de AA', diminue sans cesse, et le cosinus CP''', qui se trouve alors du même côté où il étoit dans le premier quart de cercle AB, augmente et devient égal au rayon en A. A ce point, le sinus est nul, le rayon décrivant a achevé une révolution; mais il en peut recommencer une autre; et considérant toujours comme un seul arc la totalité du chemin parcouru par le point M, depuis le commencement du mouvement, on aura des arcs plus grands que la circonférence, et qui auront les mêmes sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, que ceux qui ont été décrits dans la première révolution. Ces considérations mènent à des conséquences très-importantes pour l'analyse, et que j'ai développées dans le III^e chapitre du premier volume de mon *Calcul différentiel et intégral*. Fig. 10.

23. Cherchons maintenant comment les expressions analytiques des sinus et cosinus répondent aux diverses circonstances que nous venons de remarquer. Pour cela faisons d'abord $a = \frac{1}{4}\pi$ dans les équations

$$\left.\begin{array}{l}\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a\end{array}\right\} \ldots\ldots (A)$$

En observant que $\cos \frac{1}{4}\pi = 0$, et que $\sin \frac{1}{4}\pi = 1$, nous trouverons

$$\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi \pm b\right) = \mp \sin b$$
$$\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi \pm b\right) = \cos b$$

d'où il suit que si l'on regarde comme positifs le sinus et le cosinus d'un arc moindre que le quart de la circonfé-

Fig. 10. rence, le cosinus d'un arc plus grand sera négatif, tandis que son sinus sera positif. Si l'on fait aussi $b = \frac{1}{4}\pi$, on aura $\cos \frac{1}{2}\pi = -1$, $\sin \frac{1}{2}\pi = 0$.

Supposons ensuite que dans les équations (A), $a = \frac{1}{2}\pi$, nous obtiendrons, d'après ce qui précède

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi \pm b\right) = -\cos b$$
$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi \pm b\right) = \mp \sin b,$$

ce qui montre que tout arc compris entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{3}{4}\pi$ aura son sinus et son cosinus négatifs; et lorsque $b = \frac{1}{4}\pi$, on a $\cos \frac{3}{4}\pi = 0$, $\sin \frac{3}{4}\pi = -1$.

Examinons enfin le cas où $a = \frac{3}{4}\pi$, en vertu des valeurs précédentes, les équations (A) se réduisent dans ce cas à

$$\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi \pm b\right) = \pm \sin b$$
$$\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi \pm b\right) = -\cos b$$

et il s'en suit que tout arc compris entre $\frac{3}{4}\pi$ et $\frac{4}{4}\pi$ ou π, a son cosinus positif et son sinus négatif.

En récapitulant ces résultats, on verra,

1°. Que depuis le point A jusqu'au point A', où l'arc $ABA' = \frac{1}{2}\pi$, les sinus sont positifs;

2°. Que depuis le point A' jusqu'au point A, où l'arc $ABA'B'A = \pi$, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à π, les sinus sont négatifs;

3°. Que depuis le point A jusqu'au point B, où l'arc $AB = \frac{1}{4}\pi$, les cosinus sont positifs;

4°. Que depuis le point B jusqu'au point B', où l'arc $ABA'B' = \frac{3}{4}\pi$, c'est-à-dire de $\frac{1}{4}\pi$ à $\frac{3}{4}\pi$, les cosinus sont négatifs;

5°. Enfin que depuis le point B' jusqu'au point A, où l'arc $ABA'B'A = \pi$, c'est-à-dire de $\frac{3}{4}\pi$ à π, les cosinus sont positifs.

Et l'on remarquera sans peine que les sinus changent de signe lorsqu'ils passent au-dessous du diamètre AA', et les cosinus lorsqu'ils passent d'un côté à l'autre du point C, ou qu'ils tombent en-deçà ou en-delà du diamètre BB', perpendiculaire au premier. Fig. 10.

24. En suivant le cours des tangentes, on trouvera qu'elles augmentent sans cesse depuis le point A jusqu'au point B, où l'arc AM est devenu égal à $\frac{1}{4}\pi$. A ce point la sécante NC se confondant avec CB, est parallèle à la tangente AN, et ne la rencontre par conséquent plus ; en sorte que l'arc AB n'a point, à proprement parler, de tangente trigonométrique. On dit cependant que sa tangente est infinie ; mais par cette expression, il faut entendre qu'en prenant le point M aussi près du point B qu'il sera nécessaire, on trouvera une tangente AN plus grande que telle quantité qu'on voudra. C'est aussi ce que prouve l'équation $\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a}$, qui donne pour tang a une valeur d'autant plus grande, que cos a est plus petit, ou qu'on approche davantage du point B.

Lorsqu'on a $a = 0^q{,}50$, on a $\cos a = \sin a$, et par conséquent $\operatorname{tang} 0^q{,}50 = 1$.

On prouve la même chose par le triangle CAN, qui devient isocèle dans ce cas, puisque l'angle ACN étant égal à la moitié d'un droit, il en est nécessairement de même de l'angle ANC ; la tangente AN est donc égale au rayon. Fig. 10.

Quand l'arc AM est plus grand que $\frac{1}{4}\pi$, le rayon MC ne rencontre plus la ligne AN au-dessus du diamètre, mais au-dessous. La véritable tangente AN' est égale, ainsi qu'il est facile de le voir, à $A'n'$ tangente de l'arc $A'M'$, supplément de AM', mais se trouve placée dans un sens opposé. Dans le troisième quart du cercle, la tangente qui a été nulle au point A', repasse au-dessus du diamètre AA', et AN est encore la tangente de l'arc $AA'M''$.

Fig. 10. Le rayon devenant encore parallèle à AN au point B', la tangente est encore infinie à ce point, passé lequel elle revient au-dessus du diamètre : en effet, l'arc $AA'M'''$, par exemple, a évidemment pour tangente AN'.

25. Voyons maintenant ce qui résulte de l'expression algébrique de la tangente.

L'équation $\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$, en y faisant successivement $a=\frac{1}{4}\pi$, $a=\frac{1}{2}\pi$, $a=\frac{3}{4}\pi$, donne

$$\tan(\tfrac{1}{4}\pi+b)=\frac{\sin(\frac{1}{4}\pi+b)}{\cos(\frac{1}{4}\pi+b)}=\frac{\cos b}{-\sin b}=-\frac{\cos b}{\sin b}$$

$$\tan(\tfrac{1}{2}\pi+b)=\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi+b)}{\cos(\frac{1}{2}\pi+b)}=\frac{-\sin b}{-\cos b}=+\frac{\sin b}{\cos b}$$

$$\tan(\tfrac{5}{4}\pi+b)=\frac{\sin(\frac{5}{4}\pi+b)}{\cos(\frac{5}{4}\pi+b)}=\frac{-\cos b}{\sin b}=-\frac{\cos b}{\sin b};$$

d'où l'on voit que, pour les tangentes comme pour les sinus et les cosinus, les changemens de signe correspondent aussi au changement de situation. On trouveroit de même que les cotangentes sont positives depuis 0° jusqu'à $\frac{1}{4}\pi$, depuis $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\frac{3}{4}\pi$, et négatives depuis $\frac{1}{4}\pi$ jusqu'à $\frac{1}{2}\pi$, depuis $\frac{5}{4}\pi$ jusqu'à π.

26. La proposition que nous avons démontrée (n°. 11) a de nombreuses conséquences, dont quelques-unes nous seront nécessaires dans la suite; c'est pourquoi nous les placerons ici.

1°. En ajoutant entre elles les deux équations

$$\sin(a+b)=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{R}$$

$$\sin(a-b)=\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{R},$$

nous aurons $\sin(a+b)+\sin(a-b)=\frac{2\sin a\cos b}{R}$,

d'où $\sin a\cos b=\frac{R}{2}\sin(a+b)+\frac{R}{2}\sin(a-b)$.

2°. En retranchant la seconde équation de la première, on aura $\sin(a+b)-\sin(a-b)=\frac{2\sin b\cos a}{R}$,

d'où $\sin b\cos a=\frac{R}{2}\sin(a+b)-\frac{R}{2}\sin(a-b)$.

Lorsque $a=b$, cette formule et la précédente donnent

$$\cos a\sin a=\frac{R}{2}\sin 2a.$$

3°. En ajoutant entre elles les deux équations

$$\cos(a+b)=\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{R},$$

$$\cos(a-b)=\frac{\cos a\cos b+\sin a\sin b}{R},$$

on aura $\cos(a+b)+\cos(a-b)=\frac{2\cos a\cos b}{R}$,

d'où $\cos a\cos b=\frac{R}{2}\cos(a+b)+\frac{R}{2}\cos(a-b)$.

Lorsque $a=b$, cette formule donne

$$\cos a^2=\frac{R}{2}\cos 2a+\frac{R^2}{2},$$

en observant que le cosinus est égal au rayon lorsque l'arc est nul.

4°. En retranchant la première de la seconde, il viendra $\cos(a-b)-\cos(a+b)=\frac{2\sin a\sin b}{R}$, d'où $\sin a \sin b = \frac{R}{2} \cos (a - b) - \frac{R}{2} \cos (a + b)$;

et lorsque $a = b$, cette formule donne

$$\sin a^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{R}{2} \cos 2a.$$

5°. Si l'on fait $a + b = a'$, $a - b = b'$, on trouvera, en ajoutant ces deux équations, $2a = a' + b'$, et en retranchant la seconde de la première, $2b = a' - b'$; il suit de-là que $a = \frac{a' + b'}{2}$, $b = \frac{a' - b'}{2}$. Mettant ces valeurs de a et de b, dans les expressions de

$\sin a \cos b$, $\sin b \cos a$, $\cos a \cos b$, $\sin a \sin b$,

obtenues précédemment, on trouvera

$$\sin \tfrac{1}{2} (a' + b') \cos \tfrac{1}{2} (a' - b') = \frac{R}{2} (\sin a' + \sin b')$$

$$\sin \tfrac{1}{2} (a' - b') \cos \tfrac{1}{2} (a' + b') = \frac{R}{2} (\sin a' - \sin b')$$

$$\cos \tfrac{1}{2} (a' + b') \cos \tfrac{1}{2} (a' - b') = \frac{R}{2} (\cos a' + \cos b')$$

$$\sin \tfrac{1}{2} (a' + b') \sin \tfrac{1}{2} (a' - b') = \frac{R}{2} (\cos b' - \cos a').$$

Divisant la seconde des formules précédentes par la première, on aura

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (a' - b') \cos \frac{1}{2} (a' + b')}{\sin \frac{1}{2} (a' + b') \cos \frac{1}{2} (a' - b')} =$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (a' - b')}{\cos \frac{1}{2} (a' - b')} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (a' + b')}{\sin \frac{1}{2} (a' + b')} = \frac{\sin a' - \sin b'}{\sin a' + \sin b'}.$$

Observant ensuite que $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\tang A}{R}$ (n°. 8), et que par conséquent $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{R}{\tang A}$, on obtiendra

$$\frac{\tang \frac{1}{2}(a' - b')}{\tang \frac{1}{2}(a' + b')} = \frac{\sin a' - \sin b'}{\sin a' + \sin b'}.$$

On conclura de même des deux dernières formules rapportées ci-dessus, que

$$\frac{\cos b' - \cos a'}{\cos a' + \cos b'} = \frac{\tang \frac{1}{2}(a' + b') \tang \frac{1}{2}(a' - b')}{R^2}.$$

6°. En divisant l'expression de $\sin (a \pm b)$ par celle de $\cos (a \pm b)$, on aura

$$\frac{\sin (a \pm b)}{\cos (a \pm b)} = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b};$$

divisant ensuite le numérateur et le dénominateur de la fraction du second membre par $\cos a \cos b$, elle deviendra

$$\frac{\frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b}}{1 \mp \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}}$$

et comme en général $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\tang A}{R}$ (n°. 8), on obtiendra par ce moyen

$$\frac{\tang (a \pm b)}{R} = \frac{\frac{\tang a}{R} \pm \frac{\tang b}{R}}{1 \mp \frac{\tang a}{R} \cdot \frac{\tang b}{R}} = \frac{R(\tang a \pm \tang b)}{R^2 \mp \tang a \tang b},$$

et enfin $\tang (a \pm b) = \frac{R^2 (\tang a \pm \tang b)}{R^2 \mp \tang a \tang b}$.

En se rappelant que $\cot A = \frac{R^2}{\tang A}$ (n°. 9), on trouvera

$$\cot(a \pm b) = \frac{R^2}{\tan\text{g}\,(a \pm b)} = \frac{R^2 \mp \text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}{\text{tang}\,a \pm \text{tang}\,b} = \frac{R^2 \mp \frac{R^2}{\cot a} \cdot \frac{R^2}{\cot b}}{\frac{R^2}{\cot a} \pm \frac{R^2}{\cot b}},$$

et en réduisant, on parviendra à

$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \mp R^2}{\cot b \pm \cot a}.$$

Comme on a souvent occasion de faire usage des formules auxquelles nous venons de parvenir, nous les avons réunies, dans le tableau suivant, avec d'autres qui s'en déduisent par des procédés faciles à imaginer. Les numéros qu'on lit après chaque formule, marquent les articles où elles ont été trouvées, ou desquels on peut les conclure.

TABLE

des formules trigonométriques les plus usitées.

$$\sin a^2 + \cos a^2 = R^2 \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{R} \\ \cos(a \pm b) &= \frac{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}{R} \end{aligned}\right\} (11)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin a \cos b &= \tfrac{1}{2} R [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a \sin b &= \tfrac{1}{2} R [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \\ \cos a \cos b &= \tfrac{1}{2} R [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \sin b &= -\tfrac{1}{2} R [\cos(a+b) - \cos(a-b)] \end{aligned}\right\} (26)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin a + \sin b &= \frac{2}{R} \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \\ \sin a - \sin b &= \frac{2}{R} \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2}(a-b) \\ \cos a + \cos b &= \frac{2}{R} \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \\ \cos a - \cos b &= -\frac{2}{R} \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2}(a-b) \end{aligned}\right\} (26)$$

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{R} (11), \sin \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} \sqrt{2R^2 - 2R \cos a} \quad (13)$$

$$\cos 2a = \frac{\cos a^2 - \sin a^2}{R} = \frac{2 \cos a^2 - R^2}{R} \quad (11)$$

$$\sin a^2 = \tfrac{1}{2} R (R - \cos 2a) \quad (26)$$

$$\cos a^2 = \tfrac{1}{2} R (R + \cos 2a) \quad (26)$$

$$\sin a^2 - \sin b^2 = \cos b^2 - \cos a^2 = \sin(a+b) \sin(a-b) \quad (11, 10)$$

$$\cos a^2 - \sin b^2 = \cos(a+b) \cos(a-b) \quad (11, 10)$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{R \sin a}{\cos a} (8), \cot a = \frac{R^2}{\operatorname{tang} a} = \frac{R \cos a}{\sin a} \quad (9)$$

$$\text{séc}\, a = \frac{R^2}{\cos a}, \quad \text{coséc}\, a = \frac{R^2}{\sin a} \quad (8)$$

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{R \sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{R^2 (\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b)}{R^2 \mp \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b} \quad (26)$$

Suite de la table des formules trigonométriques.

$$\left.\begin{aligned}
\text{tang}\,a + \text{tang}\,b &= \frac{R^2 \sin(a+b)}{\cos a \cos b}\\
\text{tang}\,a - \text{tang}\,b &= \frac{R^2 \sin(a-b)}{\cos a \cos b}\\
\cot a + \cot b &= \frac{R^2 \sin(a+b)}{\sin a \sin b}\\
\cot a - \cot b &= -\frac{R^2 \sin(a-b)}{\sin a \sin b}
\end{aligned}\right\} (8,11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{tang}\,a^2 - \text{tang}\,b^2 &= \frac{R^4 \sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos a^2 \cos b^2}\\
\cot a^2 - \cot b^2 &= -\frac{R^4 \sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin a^2 \sin b^2}
\end{aligned}\right\} (8,11)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-b)}\\
&\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a+b)}{R}, \quad \frac{\sin a}{R + \cos a} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{R}\\
&\frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} = -\frac{\cot\frac{1}{2}(a-b)}{R}, \quad \frac{\sin a}{R - \cos a} = \frac{\cot\frac{1}{2}a}{R}\\
&\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-b)}{R}\\
&\frac{\sin a - \sin b}{\cos a - \cos b} = -\frac{\cot\frac{1}{2}(a+b)}{R}\\
&\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = -\frac{\cot\frac{1}{2}(a-b)}{\text{tang}\frac{1}{2}(a+b)} = -\frac{\text{séc}\,a + \text{séc}\,b}{\text{séc}\,a - \text{séc}\,b}
\end{aligned}\right\} (26)$$

$$\sin a = \frac{R\,\text{tang}\,a}{\sqrt{R^2 + \text{tang}\,a^2}}, \quad \cos a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \text{tang}\,a^2}} \quad (8,10)$$

$$R = \sin 1^q = \cos 0^q = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}{}^q = \cot\tfrac{1}{2}{}^q = \text{séc}\,0^q = \text{coséc}\,1^q$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{séc}\,\tfrac{2}{3}{}^q \;(23, 24)$$

$$\sin a = \tfrac{1}{2}\,\text{corde}\,2a \;(14),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(1^q+a) = +\sin(1^q-a) = +\cos a, && \cos(1^q+a) = -\sin a\\
&\sin(2^q+a) = -\sin a && \cos(2^q+a) = -\cos a\\
&\sin(3^q+a) = -\sin(1^q-a) = -\cos a, && \cos(3^q+a) = +\sin a\\
&\sin(4^q+a) = +\sin a && \cos(4^q+a) = +\cos a
\end{aligned}\right\} (23)$$

27. Appliquons maintenant les tables trigonométriques à la résolution des triangles rectangles, et rappelons-nous que, par le moyen de ces tables, lorsqu'un angle est connu, la valeur de son sinus, celle de son cosinus, celle de sa tangente et celle de sa cotangente sont connues aussi, et que réciproquement quand la valeur de l'une de ces lignes est donnée, celle de l'arc doit être regardée comme donnée.

Soit CDE, fig. 11, un triangle rectangle en D; de l'un des angles aigus C, décrivons, avec un rayon égal à celui des tables, l'arc AM; abaissons PM perpendiculaire sur AC; élevons la tangente AN : nous formerons les deux triangles des tables; savoir, CPM qui sera celui du sinus et du cosinus, et CAN celui de la tangente et de la sécante; l'un et l'autre seront semblables au triangle proposé. En les comparant successivement avec celui-ci, on en tirera

$$\left.\begin{array}{l} CM:MP :: CE:DE \\ CM:CP :: CE:CD \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l} R:\sin C :: CE:DE \\ R:\cos C :: CE:CD \end{array}\right.$$

$$CA:AN :: CD:DE \quad \text{ou} \quad R:\text{tang}\, C :: CD:DE.$$

L'angle E étant complément de l'angle C, on aura $\cos C = \sin E$; les deux premières proportions peuvent se réunir dans une seule, et s'énoncer ainsi: *Le rayon est au sinus de l'un des angles aigus du triangle rectangle proposé, comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle.*

La troisième nous apprend que *le rayon est à la tangente de l'un des angles aigus du triangle rectangle proposé, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle aigu est au côté opposé.*

Le rayon étant toujours donné, il suffira de connoître deux des trois autres termes de chacune des proportions que nous venons d'énoncer, pour trouver celui qui reste.

Ainsi, par la première on déterminera toujours une de ces trois choses, *l'hypothénuse*, *un côté* et *un angle aigu*, lorsqu'on en connoîtra deux.

J'ai mis simplement un angle aigu, quoique la proportion exige que cet angle soit opposé au côté donné ou cherché, parce qu'un des angles aigus fait trouver l'autre sur-le-champ, et que par conséquent si celui qu'on connoît ou qu'on cherche ne remplit pas cette condition, on peut toujours employer son complément.

Par la seconde proportion, on déterminera toujours une de ces trois choses, *les deux côtés d'un angle droit*, et *un angle aigu*, lorsqu'on en connoîtra deux.

Il suit de-là, 1°. que, connoissant un côté et un angle d'un triangle rectangle, on peut calculer les deux autres côtés; 2°. que, connoissant deux quelconques des côtés, on peut calculer les angles aigus.

Ces deux cas ne comprennent pas celui où l'on a deux côtés quelconques d'un triangle, et où l'on cherche le troisième; mais celui-ci se résout immédiatement par la proposition connue du triangle rectangle qui donne $\overline{CD}^2+\overline{DE}^2=\overline{CE}^2$, et d'où on tire $CE=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{DE}^2}$.

Si l'on connoissoit l'hypothénuse CE, et l'un des côtés de l'angle droit, DE, par exemple, on auroit

$$\overline{CD}^2=\sqrt{\overline{CE}^2-\overline{DE}^2};$$

en observant que $\overline{CE}^2-\overline{DE}^2=(CE+DE)\ (CE-DE)$, et en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation $CD=\sqrt{(CE+DE)\ (CE-DE)}$, on trouveroit

$$l\,CD=\tfrac{1}{2}[l(CE+DE)+l(CE-DE)].$$

Lorsqu'on construit des formules qui doivent servir à des calculs numériques, il faut toujours tâcher de les préparer de manière qu'on puisse y appliquer les logarithmes commodément,

modément ; c'est-à-dire qu'on ne soit obligé de passer des logarithmes aux nombres, et de repasser de ceux-ci aux premiers, que le moins qu'il est possible. En appliquant les logarithmes à la recherche de CD, au moyen de sa première expression, on sentira bien évidemment l'objet de notre remarque. Fig. 11

Nous terminerons cet exposé des principes qui servent à résoudre les triangles rectangles, en observant que les deux cas que nous venons de traiter en dernier lieu se résolvent aussi par les deux proportions rapportées au commencement de cet article ; car, 1°. si, connoissant CD et DE, on veut trouver CE, on pourra calculer l'un des angles aigus, C, par exemple, par la proportion $R : \text{tang}\, C :: CD : DE$: ayant trouvé cet angle, on calculera l'hypothénuse CE par la proportion $R : \sin C :: CE : DE$, dans laquelle on connoîtra les trois termes, R, $\sin C$ et DE. 2°. Lorsque l'on connoîtra l'hypothénuse CE et l'un des deux autres côtés, CD, par exemple, on calculera l'angle aigu opposé au côté cherché, par la proportion $R : \sin E$, ou $\cos C :: CE : CD$; puis on trouvera le côté DE par la proportion $R : \sin C :: CE : DE$.

28. On peut résumer ce qui vient d'être dit sur les triangles rectangles d'une manière commode en désignant leurs angles par A, B, C, A étant l'angle droit, et nommant a, b et c les côtés qui sont respectivement opposés à chacun de ces angles, ainsi que le montre la fig. 12. Fig. 12.
On aura d'abord par le premier principe

$$R : \sin C :: a : c, \qquad R : \sin B :: a : b,$$

d'où l'on tirera

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{R}, \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{R};$$

chassant a de ces deux équations, ce qui se fait en divisant chaque membre de la première par son correspondant dans la seconde, on trouvera

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B};$$

et comme $\sin B=\cos C$, et que $\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\operatorname{tang} C}{R}$, il en résultera $\frac{c}{b}=\frac{\operatorname{tang} C}{R}$, équation qui représente le second principe énoncé dans le numéro précédent.

Enfin si l'on quarre chaque membre des deux premières équations, et qu'on ajoute ensuite membre à membre les équations résultantes, en observant que $\sin C^2+\sin B^2=\sin C^2+\cos C^2=R^2$ (n°. 10), on aura

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=1\text{ , ou }b^2+c^2=a^2.$$

Il suit de-là que les deux équations $\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{R}$, $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{R}$, suffisent, conjointement avec la relation qui existe entre les angles B et C, pour résoudre tous les cas des triangles rectangles.

29. Le principe sur lequel est fondée la résolution des triangles rectangles conduit à celle des triangles quelcon-
Fig. 13. ques. En abaissant de l'angle B, du triangle ABC, fig. 13, une perpendiculaire BD, on formera deux triangles ABD, BDC, rectangles en D; on aura dans le premier

$$R:\sin A::AB:BD,$$

et dans le second

$$R:\sin C::BC:BD,$$

ce qui donnera

$$R\times BD=\sin A\times AB,\quad R\times BD=\sin C\times BC,$$

et d'où il suit par conséquent

$$AB\times\sin A=BC\times\sin C,\text{ ou }\sin A:\sin C::BC:AB.$$

Lorsque la perpendiculaire tombe au-dehors, l'angle C n'est pas commun au triangle ABC et au triangle BCD; mais l'angle BCD et l'angle BCA, valant ensemble deux angles droits, ont le même sinus.

La proportion que nous venons d'obtenir peut se convertir en principe général, et s'énoncer ainsi : *Dans un triangle quelconque, les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés à ces angles.*

30. Désignons, comme dans le n°. 28, les trois angles par A, B, C, et les côtés respectivement opposés à chacun de ces angles par a, b, c; nous aurons, d'après ce qui précède, les proportions

$$\sin A : \sin B :: a : b, \quad \sin A : \sin C :: a : c, \quad \sin B : \sin C :: b : c,$$

desquelles nous déduirons les équations

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}.$$

On résoudra immédiatement par ces proportions un triangle, 1°. lorsqu'on y connoîtra deux angles et un côté, puisqu'alors tous les angles seront donnés, et que les côtés cherchés seront nécessairement opposés à deux de ces angles; si, par exemple, a est donné, ainsi que les angles B et C, on retranchera la somme de ces angles de deux droits, pour avoir l'angle A, et les deux premières proportions feront connoître les côtés cherchés b et c. 2°. Quand on aura un angle et deux côtés dont l'un soit opposé à l'angle donné; si, par exemple, on avoit l'angle A avec les côtés a et b, on calculeroit l'angle B par la première proportion, et connoissant alors deux angles, on retomberoit dans le cas précédent.

Il y a deux cas qui, n'étant pas compris dans ceux que nous venons d'examiner, semblent échapper à la méthode :

ce sont ceux dans lesquels on connoît deux côtés et l'angle compris, ou bien les trois côtés: nous allons nous en occuper successivement.

31. Supposons que l'on connoisse les deux côtés a et b, et l'angle compris C, et mettons les équations $\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}$, $\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$, sous la forme

$$a \sin C = c \sin A, \qquad b \sin C = c \sin B.$$

En ajoutant d'abord les dernières membre à membre, puis retranchant ensuite l'une de l'autre, nous trouverons

$$(a+b)\sin C = c(\sin A + \sin B)$$
$$(a-b)\sin C = c(\sin A - \sin B);$$

divisant le dernier résultat par le premier, le côté inconnu c disparoît, et on a

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}.$$

Or, on a vu (n°.26) que

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)};$$

on en conclura $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}$.

Tout est connu dans cette équation, à l'exception de $A-B$; car si on retranche de deux quadrans la mesure de l'angle connu C, le reste sera celle de $(A+B)$; prenant par conséquent la valeur de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)$, il viendra $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\times \operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)$, formule qui fera connoître $A-B$. Faisons $A+B=m$, et $A-B=n$; en ajoutant ces deux équations, nous trouverons $2A=m+n$, ou $A=\frac{m+n}{2}$; et si nous retranchons la seconde de la première, il viendra $2B = m - n$, ou $B = \frac{m-n}{2}$.

On voit par-là que, *connoissant la somme* m *et la différence* n *des deux angles demandés* A *et* B, *on trouvera le plus grand en ajoutant la moitié de la somme à la moitié de la différence, et le plus petit en ôtant la moitié de la différence de la moitié de la somme.*

L'équation $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A+B)}$ donne la proportion $a+b : a-b :: \text{tang}\,\frac{1}{2}(A+B) : \text{tang}\,\frac{1}{2}(A-B)$, qui s'énonce ainsi : *La somme des deux côtés d'un triangle est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés est à la tangente de leur demi-différence.*

Lorsqu'on aura calculé tous les angles, on trouvera le troisième côté par la règle du n°. 29.

32. On peut aussi trouver immédiatement le troisième côté, en abaissant une perpendiculaire sur l'un des côtés donnés, de l'angle A, par exemple, sur le côté donné BC, fig. 14. On aura par la propriété connue des triangles obliquangles, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \mp 2BC \times DC$, le signe supérieur ayant lieu quand la perpendiculaire tombe en dedans du triangle, comme dans la figure, et le signe inférieur dans le cas où elle tombe en dehors : de plus, dans le triangle rectangle ADC, on a (n°. 28) $DC = AC.\sin DAC = AC \times \cos C$, en faisant $R=1$; on conclura donc de-là $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times BC \cos C$, et par conséquent $AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC.BC.\cos C}$, formule qui revient, suivant la notation établie, à $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$, et donnera le côté c par le Fig. 14

moyen des deux autres a et b, et de l'angle C : on n'y a mis qu'un seul signe, parce que quand l'angle C est obtus, son cosinus est négatif, et change par conséquent le $-$ en $+$, comme l'exige la construction géométrique.

33. Cette formule ne se prête pas commodément au calcul logarithmique ; mais comme on a $\cos 2C = 1 - 2\sin C^2$ (n°. 26), on aura aussi $\cos C = 1 - 2(\sin\frac{1}{2}C)^2$, en écrivant $\frac{1}{2}C$ à la place de C ; et par cette transformation, on obtiendra

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + 4ab(\sin\tfrac{1}{2}C)^2} =$$
$$\sqrt{(a-b)^2 + 4ab(\sin\tfrac{1}{2}C)^2}:$$

faisant ensuite $\frac{2\sin\frac{1}{2}C}{a-b}\sqrt{ab} = \operatorname{tang}\alpha$, il en résultera

$c = (a-b)\sqrt{1 + \operatorname{tang}\alpha^2} = \frac{a-b}{\cos\alpha}$, puisque $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}}$. On calculera facilement $\operatorname{tang}\alpha$ par la première formule ; et lorsqu'on sera parvenu à l'angle α, on aura par la seconde $c = \frac{a-b}{\cos\alpha}$.

34. L'équation $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$ fait connoître l'angle C lorsque les trois côtés a, b et c sont donnés ; et en élevant chacun de ses membres au quarré, on en tire $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$, d'où $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.
Si l'on écrit $2C'$ au lieu de C, et qu'on mette $1 - 2\sin C'^2$ à la place de $\cos C$ (n°. 26), on aura par cette expression,

$2\sin C'^2 = 1 + \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab} = \frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{2ab} = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab}$, et par conséquent, $\sin C'^2 = \frac{(c+a-b)\ (c-a+b)}{4ab} = \frac{\frac{(c+a-b)}{2}\ \frac{(c-a+b)}{2}}{ab}$; mais il est facile de voir que $\frac{c+a-b}{2} = \frac{(c+a+b)}{2} - b$, $\frac{c-a+b}{2} = \frac{c+a+b}{2} - a$: si donc $c+a+b = f$, on aura, en prenant la racine quarrée et en remettant $\frac{1}{2}C$ au lieu de C',

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}f - a)(\frac{1}{2}f - b)}{ab}},$$

formule qui conduit à la règle suivante :

Pour trouver un angle d'un triangle, lorsque les trois côtés sont connus, *de la demi-somme des trois côtés retranchez successivement chacun de ceux qui comprennent l'angle cherché ; multipliez les deux restes entre eux ; divisez ce produit par celui des côtés qui comprennent l'angle cherché, et prenant la racine quarrée du quotient, vous aurez le sinus de la moitié de cet angle.*

35. La solution de tous les cas des triangles obliquangles ne dépend, comme on voit, que des trois règles énoncées dans les nos. 29, 31, 34, et repose sur le principe dont on a tiré la solution des triangles rectangles dans le numéro 27. Il sera donc facile, avec un peu d'attention, de retenir ces règles; et le calcul des exemples que nous allons donner, suffira pour mettre le lecteur en état de les appliquer.

Exemples de la résolution des triangles rectangles.

Fig. 12. 1er. Supposons que dans le triangle rectangle BAC, fig. 12, on connoisse l'hypothénuse a et un côté c, et qu'on cherche l'angle opposé C à ce côté; soit l'hypothénuse $a = 13^{\text{mètres}},178$, le côté $c = 7^{m},357$. On aura (n°. 28), pour déterminer sin C, la proportion $a : c :: R : \sin C$, d'où $\sin C = \frac{R \times c}{a}$, et prenant les logarithmes, $\text{l} \sin C = \text{l} R + \text{l}\, c - \text{l}\, a$.

Pour plus de simplicité, nous supposerons désormais le rayon égal à l'unité; son logarithme sera zéro; il n'en faudra par conséquent tenir aucun compte; et au lieu d'effectuer les soustractions, nous emploierons les complémens arithmétiques dont la théorie est exposée dans la cinquième édition de l'algèbre de Clairaut (tom. II, page 372). Voici l'opération;

$\text{l}\, c = \text{l}\ 7{,}357 =$	0,8667008
comp. arith. $\text{l}\, a =$ comp. arith. l 13,178 $=$	8,8801505
somme ou $\text{l} \sin C =$	9,7468513

qui, dans les tables, répond à $0^{q},377 = C$.

2e. Supposons qu'on connoisse l'angle $B = 0^{q},4163$, l'hypothénuse $a = 33,253$, et qu'on cherche le côté b; on aura (n°. 28) $R : \sin B :: a : b$, d'où $b = \frac{a \times \sin B}{R}$, $\text{l}\, b = \text{l}\, a + \text{l} \sin B - \text{l} R = \text{l}\, a + \text{l} \sin B$.

Or, $\text{l}\, a = \text{l}\ 33{,}253 =$	1,5218308
$\text{l} \sin B = \text{l} \sin 0{,}5837 =$	9,7841210
somme ou $\text{l}\, b =$	1,3059518

qui répond, dans les tables, à $20^{m},2279 = b$, à moins d'un 10000e près.

3e. Supposons qu'on connoisse le côté $c = 5^{m},391$, l'angle $B = 0^{q},3502$, et qu'on cherche le côté b; on aura $R : \text{tang}\, B :: c : b$; d'où $b = \frac{c \times \text{tang}\, B}{R}$,

$l\,b = l\,c + l\,\text{tang}\,B - l\,R.$

Or $l\,c = 15{,}391 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0{,}7316693$

$l\,\text{tang}\,B = l\,\text{tang}\,0^q{,}3502 = \ldots\ldots\ldots\ 9{,}7876255$

somme ou $l\,c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 10{,}5192948$

qui répond, dans les tables, à $3^m, 3059 = c$.

Exemples de la résolution des triangles obliquangles.

1[er]. Supposons que l'on connoisse dans le triangle ABC le côté c, les angles A et B, et qu'on cherche le côté b.

Soit $A = 1^q{,}2805$, $B = 0^q{,}5879$, $c = 27^m, 348$; l'angle C sera $2^q - (A + B) = 2^q - 1{,}8684 = 0{,}1316$, et on aura

$$\sin\ C : c :: \sin B : b,\ \text{d'où}\ b = \frac{c \times \sin B}{\sin C},$$

$l\,b = l\,c + l\sin B - l\sin C.$

Or, $l\,c = l\,27{,}348 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1{,}4369256$

$l\sin B = l\sin 0^q{,}5879 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 9{,}9018394$

comp.arith. $l\sin C$ = comp.arith. $l\sin 0^q{,}1316 =$ 0,6877217

somme, ou $l\,b\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2{,}0264867$

qui répond, dans les tables, à $106^m, 289 = b$.

2[e]. Connoissant dans le triangle ABC les deux côtés a, b, et l'angle compris C, trouver le troisième côté c.

Soit $a = 28^m{,}442$, $b = 17^m{,}803$, $C = 0^q{,}8426$; commençons d'abord par trouver les autres angles. On aura (n°.31)

$a + b : a - b :: \text{tang}\,\frac{A+B}{2} : \text{tang}\,\frac{A-B}{2}$, ou

$\text{tang}\,\frac{A-B}{2} = \frac{\left(\text{tang}\,\frac{A+B}{2}\right)(a-b)}{a+b}$, ou $l\,\text{tang}\,\frac{A-B}{2} =$
$l\,\text{tang}\,\frac{A+B}{2} + l\,(a-b) - l\,(a+b)$. Or, $A + B =$
$2^q - C = 2 - 0^q{,}8426 = 1^q{,}1574$, et $\frac{A+B}{2} = 0^q{,}5787$.

$a + b = 28{,}442 + 17{,}803 = 46{,}245.$

$a - b = 28{,}442 - 17{,}803 = 10{,}639$;

$l \tan \frac{A+B}{2} = l \tan 0^q,5787 = \ldots\ldots$ 0,1184874

$l(a-b) = l\,10,639 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 1,0269008

comp. arith. $l(a+b)$ = comp. arith. $l\,46,245$ = 8,3349352

somme ou $l \tan \frac{A-B}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ 9,4803234

qui répond à $0^q,1868$.

Donc $\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = A = 0,^q7655$,

et $\frac{A+B}{2} - \frac{(A-B)}{2} = B = 0^q,3919$.

Maintenant pour déterminer le côté c, on aura la proportion $\sin B : \sin C :: b : c$, d'où $c = \frac{b \times \sin C}{\sin B}$, et

$l\,c = l\,b + l \sin C - l \sin B$. Or,

$l\,b = l\,17,803 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 1,2504932

$l \sin C = l \sin 0,8426 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 9,9865885

comp. arith. $l \sin B$ = comp. arith. $l \sin 0^q,3919$ = 0,2484898

somme ou $l\,C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 1,4855715

qui répond, dans les tables, à $30^m,589 = c$.

3°. Connoissant, dans le triangle ABC les trois côtés a, b, c, trouver l'angle A.

Soit $a = 29^m,037$, $b = 18^m,743$, $c = 13^m,782$.

Suivant le numéro 34, on ajoutera les trois côtés a, b, c entre eux, et de la moitié 30,781 de la somme 61,562, on retranchera successivement b, c, ce qui donnera pour restes 12,038 et 16,999 : on aura ensuite

$l\,16,999 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 1,2304234

$l\,12,038 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 1,0805543

comp. arith. $l\,18,743$ ou $b = \ldots\ldots\ldots$ 8,7271609

comp. arith. $l\,13,782$ ou $c = \ldots\ldots\ldots$ 8,8606878

somme $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 19,8988264

dont la moitié ou $l \sin \frac{1}{2} A = \ldots\ldots\ldots$ 9,9494132 qui, dans les tables, répond à $0^q,6987 = \frac{1}{2}A$; donc $A = 1^q,3974$.

36. Un ouvrage de la nature de celui-ci ne sauroit comporter le détail des applications dont la trigonométrie rectiligne est susceptible; nous nous bornerons à indiquer la solution de deux questions que l'on peut regarder comme la base de l'art de lever les plans.

Voici l'énoncé de la première.

Etant donnée de grandeur et de position, sur un plan, une ligne AB, *fig.* 15, *déterminer, par rapport à cette* Fig. 15.
ligne, la position d'un point C *situé dans le même plan*, ou, ce qui revient au même, *trouver les distances* AC *et* BC.

Pour la résoudre, il faut mesurer la ligne AB, les angles CAB et CBA: les distances cherchées AC et BC, se calculeront alors d'après la règle énoncée dans le n°. 29, et lorsqu'on les aura trouvées, on construira, au moyen d'une échelle de parties égales, sur les trois côtés donnés, le triangle ABC, qui fera connoître la position respective des trois points A, B et C (*).

On pourra ensuite, par la résolution du triangle rectangle ACP, dans lequel on connoîtra le côté AC et l'angle CAP, trouver la longueur de la perpendiculaire

(*) Je n'insiste point sur l'opération de la mesure des angles, parce que la vue des instrumens que l'on y emploie en apprend plus que tout ce qu'on peut en dire à cet égard; et pour concevoir la possibilité de cette mesure, il suffit d'imaginer que l'on ait placé sur le point A le centre d'un secteur de cercle, dont les rayons soient dirigés suivant les côtés AB et AC, de l'angle qu'on se propose de connoître. Ceux qui voudront se livrer à la pratique de la levée des plans, pourront consulter le *Traité de Trigonométrie* de Cagnoli, et l'article *Levée des plans*, dans le Dictionnaire de mathématiques de l'Encyclopédie méthodique.

Fig. 15. *CP* abaissée sur *AB*, ou de la plus courte distance du point *C* à la ligne *AB*, et la grandeur du segment *AP*. Ces données serviront aussi à marquer la position du point *C*, à l'égard de la ligne *AB*. On trouveroit de même la situation d'un second point *D*, qu'on pourroit appercevoir en même temps de deux quelconques des trois points *A*, *B* et *C*.

37. Lorsqu'on a déterminé immédiatement le point *D* par rapport à la ligne *AB*, en mesurant les angles *DAB*, *DBA*, on a tout ce qu'il faut pour connoître la distance réciproque de ~~ces deux~~ points C&D, car ayant résolu le triangle *DAB*, de même que le triangle *CAB*, et retranché ensuite l'angle *DAB* de l'angle *CAB*, on connoît alors, dans le triangle *CAD*, les deux côtés *AC* et *AD*, et l'angle *CAD* qu'ils comprennent. L'application des règles du n°. 31, donne les deux autres angles *DCA*, *CDA*, et le troisième côté *CD*, qui est la distance cherchée. L'angle *DCA* donne la position de la droite *CD*; et en considérant *AC* comme sécante, la comparaison des angles *DCA* et *CAB* fait voir quelle est l'inclinaison de *CD* à l'égard de *AB*.

En partant des points *C* et *D*, on en pourra déterminer de nouveaux, que l'on n'appercevoit pas des deux premiers, *A* et *B*; et continuant ainsi de proche en proche, on fixera la position respective de tous les points d'un pays : c'est ainsi qu'a été construite la carte de France, dirigée par Cassini.

38. La seconde question dont nous avons à nous occuper, n'est que la première rendue plus générale, en supposant que le point à déterminer soit situé hors du plan sur lequel se trouve la ligne *AB*. Soit *C* ce point, et *ABC'*
Fig. 16. le plan qui contient la ligne *AB*, fig. 16 : la position du point *C* sera connue, si l'on a celle du pied *C'* de la perpen-

diculaire abaissée de ce point sur le plan ABC', et la longueur de la perpendiculaire CC', qui marque de combien le point C est élevé au-dessus de C', qu'on nomme sa projection. Dans ce cas, les angles $C'AB$ et $C'BA$ ne sont plus ceux qu'on mesure, mais on prend à leur place les CAB et CBA, situés dans le plan CAB, passant par les lignes AC et BC, menées des points donnés A et B, au point demandé; et pour fixer la position de ce plan, on mesure en outre l'angle CBC' que fait la ligne CB avec la ligne $C'B$ (*). On résout le triangle CAB comme le triangle CAB du numéro précédent, puisqu'on a les mêmes données dans l'un et dans l'autre; ensuite, dans le triangle $C'BC$, rectangle en C', on connoît l'hypothénuse CB et l'angle $C'BC$: on calcule les côtés CC' et $C'B$. Le premier est la hauteur du point C au-dessus du plan $C'AB$, et sert, conjointement avec le côté AC, à déterminer AC' par le moyen du triangle CAC', rectangle en C'; cela fait, on a les trois côtés du triangle $C'AB$, et le point C' est par conséquent donné.

(*) Quoique la projection C' ne soit pas connue, la direction de la ligne $C'B$ l'est toujours lorsqu'il s'agit des points placés sur la surface de la terre, parce qu'on choisit pour le plan ABC un plan horizontal. La ligne CC' devient alors verticale; le plan $C'CB$ qui passe par cette ligne est vertical aussi, et se trouve déterminé par le point C qu'on apperçoit du point B; la ligne CB est donc une ligne horizontale comprise dans ce plan, et est par conséquent déterminée.

CHAPITRE II.

De la Trigonométrie sphérique.

39. Un triangle sphérique est celui que forment, sur la surface de la sphère, trois grands cercles qui se coupent deux à deux. Un triangle sphérique détermine toujours un angle solide, composé de trois plans, et réciproquement, d'un pareil angle on déduit aussi un triangle
Fig. 17. sphérique. En effet, soit ABC, fig. 17, un triangle sphérique quelconque; et concevons que l'on ait mené de chacun de ses angles, au centre de la sphère dont il fait partie, les rayons AS, BS, CS, les plans ABS, ACS, BCS, seront ceux des grands cercles sur lesquels sont pris les arcs AB, AC, BC, côtés du triangle proposé, et ces arcs mesurent les angles rectilignes compris sur chacune des faces de l'angle solide $SABC$, entre ses arrêtes SA et SB, SA et SC, SB et SC. L'inclinaison de deux plans se mesure, comme on sait, par l'angle rectiligne formé par deux droites menées dans chacun de ces plans par un même point de leur commune section, perpendiculairement à cette ligne: il suit de-là que, si par le point A, on tire les droites AI et AK, perpendiculaires l'une et l'autre à AS, mais la première dans le plan CAS, et la seconde dans le plan BAS, l'angle rectiligne IAK mesurera l'inclinaison de ces deux plans. Il est d'ailleurs aisé de voir que la ligne AI sera tangente à l'arc AC, et que AK sera tangente à l'arc AB; et comme on prend pour l'angle que forment deux lignes courbes, celui que comprennent les tangentes menées

aux points où elles se rencontrent, l'angle IAK sera donc aussi la mesure de l'angle fait par les arcs AC et AB. Il en seroit de même de chacun des deux autres angles du triangle ; les inclinaisons des faces de l'angle solide $SABC$ ont donc la même mesure que l'angle correspondant du triangle sphérique BAC. Le triangle sphérique et l'angle solide sont composés par conséquent de six parties qui se correspondent, savoir : les trois côtés du triangle qui répondent aux angles des arrêtes de l'angle solide, et les trois angles du triangle sphérique qui répondent aux inclinaisons réciproques des faces de l'angle solide.

Euler, qui s'est occupé à plusieurs reprises de la trigonométrie sphérique, pour la présenter sous des points de vue nouveaux, a donné, en 1779 (*), un mémoire que l'on peut regarder comme un traité complet de cette science : nous ne croyons pouvoir mieux faire que d'offrir à nos lecteurs ce travail, dans lequel nous avons fait quelques changemens qui nous ont paru propres à simplifier les résultats de cet illustre auteur.

40. Tout ce que nous avons à dire sur les triangles sphériques repose uniquement sur la construction suivante, qu'il est par conséquent important de bien saisir.

De l'angle C du triangle ABC, on abaisse une perpendiculaire CD, sur le plan ASB du côté BA opposé à cet angle. Du point D, on mène les lignes ED, DF, respectivement perpendiculaires, sur SA et SB; on tire les lignes CE et CF, qui, d'après une proposition fondamentale de la théorie des plans, seront respectivement perpendiculaires aux lignes SA et SB. Il suit de-là que les angles CED et CFD, mesurent les inclinaisons des plans CSA et CSB, sur le plan ASB, ou, ce qui est la même

(*) Acta academiæ scientiarum petropolitanæ, anno 1779, pars prior.

chose, donnent la valeur des angles A et B du triangle sphérique ABC. Nous désignerons dorénavant les angles de ces triangles par la lettre placée à leur sommet, et les côtés qui leur sont opposés par une lettre semblable, mais prise dans le petit alphabet; ici, comme dans le numéro 30, le côté BC opposé à l'angle A, sera nommé a, et ainsi des autres. Le rayon des tables étant supposé égal à l'unité, nous aurons alors

$$CE = \sin CA = \sin b, \quad SE = \cos CA = \cos b$$
$$CF = \sin CB = \sin a, \quad SF = \cos CB = \cos a.$$

Dans le triangle rectiligne CDE, rectangle en D, et dont l'angle $CED = A$, nous trouverons

$$CD = CE \sin CED = \sin b \sin A$$
$$DE = CE \cos CED = \sin b \cos A.$$

Par le triangle rectiligne CDF, pareillement rectangle en D, et dont l'angle $CFD = B$, nous obtiendrons

$$CD = CF \sin CFD = \sin a \sin B$$
$$DF = CF \cos CFD = \sin a \cos B.$$

Egalant entr'elles les deux expressions de la ligne CD, nous en déduirons

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B \ldots\ldots\ (A)$$

résultat qui est, par rapport aux triangles sphériques, l'analogue de celui du numéro 29.

Il est évident qu'on doit avoir de même les deux équations suivantes:

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C$$
$$\sin c \sin B = \sin b \sin C$$

41. Maintenant, par le point E, menons EG perpendiculaire sur SB, et par le point D, tirons DH parallèle à SB; nous formerons de cette manière un triangle rectangle HDE, dans lequel $HED = ASB$, puisqu'en retranchant

retranchant l'angle GES de l'angle droit SED, on a pour reste HED, et que l'angle ASB ou ESG est aussi la différence entre un angle droit et l'angle GES. De la résolution du triangle EHD, on déduira par conséquent Fig. 17.

$$HD = DE \sin DEH = DE \sin c = \cos A \sin b \sin c;$$

mais $SF = \cos a = SG + GF = SG + HD$, et $SG = SE \cos ESG = \cos b \cos c$: on aura donc

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c,$$

équation qui exprime la relation qui existe entre le côté a, les deux autres côtés b et c, et l'angle qu'ils comprennent.

Il est évident qu'en considérant en particulier chacun de ces derniers, on trouvera de même deux équations semblables à la précédente, et l'on formera de cette manière entre les six parties du triangle ABC, les trois équations

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c \\ \cos b = \cos a \cos c + \cos B \sin a \sin c \\ \cos c = \cos a \cos b + \cos C \sin a \sin b\end{array}\right\} \ldots \text{(B)}$$

Ces trois équations renferment implicitement l'équation (A). Pour s'en convaincre, il suffit de prendre les valeurs qu'elles donnent pour $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, et de les substituer dans les équations

$$\begin{array}{l}\sin A^2 = 1 - \cos A^2 \\ \sin B^2 = 1 - \cos B^2 \\ \sin C^2 = 1 - \cos C^2.\end{array}$$

On trouve par la première de celles-ci

$$\sin A^2 = 1 - \frac{\cos a^2 - 2\cos a \cos b \cos c + \cos b^2 \cos c^2}{\sin b^2 \sin c^2} =$$

$$\frac{\sin b^2 \sin c^2 - \cos a^2 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos b^2 \cos c^2}{\sin b^2 \sin c^2} =$$

$$\frac{(1-\cos b^2)(1-\cos c^2) - \cos b^2 \cos c^2 - \cos a^2 + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin b^2 \sin c^2} =$$

$$\frac{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin b^2 \sin c^2};$$

multipliant les deux termes de cette fraction par $\sin a^2$, et prenant ensuite la racine quarrée, on obtiendra

$$\sin A = \sin a \times \frac{\sqrt{1-\cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Si, pour abréger, on représente par M la quantité qui multiplie $\sin a$ dans le second membre de cette équation, on aura

$$\sin A = M \sin a;$$

on trouvera de même

$$\sin B = M \sin b, \quad \sin c = M \sin c,$$

et par l'élimination de M, on retombera sur les équations (A). Il est à propos de remarquer que les trois côtés a, b, c, entrent tous de la même manière dans l'expression de M; car c'est pour cela qu'elle est commune aux valeurs des sinus de chacun des angles.

Les équations (B) suffiront donc pour résoudre un triangle sphérique quelconque, lorsqu'on connoîtra trois de ses parties, en observant que le sinus et le cosinus ne doivent être regardés que comme une seule inconnue, puisqu'on peut toujours exprimer l'un par l'autre.

L'application des équations (B) aux différens cas qui peuvent se présenter, devient plus facile au moyen de quelques transformations que nous allons faire connoître.

42. On peut y changer les angles dans les côtés qui leur sont opposés, et respectivement, en observant de

donner le signe — aux cosinus. Pour le prouver, il faut éliminer $\cos a$ des deux dernières au moyen de la première, on trouvera

$$\cos b = \cos b \cos c^2 + \cos A \sin b \sin c \cos c + \cos B \sin a \sin c$$
$$\cos c = \cos b^2 \cos c + \cos A \sin b \sin c \cos b + \cos C \sin a \sin b.$$

En substituant dans ces résultats $1 - \sin c^2$ à $\cos c^2$, $1 - \sin b^2$ à $\cos b^2$, ils se réduisent; le premier devient divisible par $\sin c$, et le second par $\sin b$, et ils peuvent ensuite s'écrire ainsi :

$$\left.\begin{array}{l}\cos B \sin a = \cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c \\ \cos C \sin a = \sin b \cos c - \cos A \cos b \sin c\end{array}\right\}\ldots(C)$$

Si on multiplie la deuxième de ces équations par $\cos A$, qu'on l'ajoute à la première, et que l'on substitue $1 - \sin A^2$ au lieu de $\cos A^2$, on obtiendra

$$\sin a (\cos B + \cos A \cos C) = \sin A^2 \cos b \sin c;$$

mais il suit des équations (A) que $\sin c \sin A = \sin a \sin C$: faisant la substitution de cette valeur dans le second membre de l'équation ci-dessus, elle deviendra divisible par $\sin a$, et on aura pour résultat

$$\cos B + \cos A \cos C = \cos b \sin A \sin C,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\cos B = -\cos A \cos C + \cos b \sin A \sin C.$$

En rapprochant cette équation des équations (B), on voit qu'elle se déduiroit immédiatement de la seconde, en changeant les grandes lettres en petites, et réciproquement, et en affectant tous les cosinus du signe —. En effet, en opérant ainsi, il vient

$$-\cos B = \cos A \cos C - \cos b \sin A \sin C,$$

équation qui rentre dans la précédente lorsqu'on en change tous les signes.

Nous venons d'obtenir la relation qui existe entre les deux angles A et C, et le côté b qu'ils interceptent et le 3. angle B; mais il est évident qu'il en existe de semblables pour chacune des combinaisons semblables d'angles et de côtés : on a donc en même temps les trois équations

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = -\cos B\cos C + \cos a\sin B\sin C\\ \cos B = -\cos A\cos C + \cos b\sin A\sin C\\ \cos C = -\cos A\cos B + \cos c\sin A\sin B\end{array}\right\}\ldots(\mathrm{B}')$$

43. Il faut remarquer qu'en prenant les cosinus négativement, on passe des arcs a, b, c, et des angles A, B, C, à leurs supplémens, puisque $-\cos A = \cos(2q - A)$, $-\cos a = \cos(2q - a)$, et ainsi des autres (n°. 23). Si on substitue ces valeurs dans les équations ci-dessus, en faisant, pour abréger $2q - A = A'$, $2q - a = a'$, &c. elles prendront la forme

$$\left.\begin{array}{l}\cos A' = \cos B'\cos C' + \cos a'\sin B'\sin C'\\ \cos B' = \cos A'\cos C' + \cos b'\sin A'\sin C'\\ \cos C' = \cos A'\cos B' + \cos c'\sin A'\sin B'\end{array}\right\}$$

équations parfaitement semblables aux équations (B), et qui appartiennent par conséquent à un triangle sphérique dont les côtés sont a', b', c', et les angles A', B', C'. Un tel triangle a donc ses angles mesurés par les supplémens des côtés du triangle ABC, et ses côtés mesurent les supplémens des angles du même triangle : il est désigné dans les livres de trigonométrie sous le nom de triangle supplémentaire, et on prouve que les sommets de ses angles sont les pôles des côtés du premier, *et vice versâ.*

44. Les équations obtenues dans le n°. 42 sous la désignation (C), qui renferment cinq parties du triangle sphérique ABC, peuvent se transformer en d'autres qui n'en contiennent plus que quatre. Il faut pour cela substituer, au

lieu de sin a, dans la première, $\frac{\sin b \sin A}{\sin B}$, et dans la seconde, $\frac{\sin c \sin A}{\sin C}$ (n°. 40), et comme $\frac{\cos p}{\sin p} = \cot p$, on trouvera alors

$$\left.\begin{aligned}\cot B &= \frac{\cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c}{\sin A \sin b}\\ \cot C &= \frac{\sin b \cos c - \cos A \cos b \sin c}{\sin A \sin c}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(D).$$

Il est facile de former, à l'inspection de ces valeurs, toutes celles qui leur sont analogues, en y permutant les lettres d'une manière convenable ; mais il importe sur-tout de remarquer que puisqu'elles sont déduites des équations (B), on y pourra changer de la même manière que dans celles-ci, les côtés en angles, et réciproquement, en affectant les cosinus et les cotangentes, du signe contraire à celui qu'ils ont, et il viendra

$$\left.\begin{aligned}\cot b &= \frac{\cos B \sin C + \cos a \sin B \cos C}{\sin a \sin B}\\ \cot c &= \frac{\sin B \cos C + \cos a \cos B \sin C}{\sin a \sin C}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(D').$$

45. Les 5 systêmes d'équations (A), (B), (B'), (D), (D'), donnent immédiatement la résolution de tous les cas que peut offrir un triangle sphérique quelconque. Le premier exprime la relation qui existe entre les angles et les côtés opposés.

46. On tire du second les six formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c\\ \cos b &= \cos a \cos c + \cos B \sin a \sin c\\ \cos c &= \cos a \cos b + \cos C \sin a \sin b\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}\\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\end{aligned}\right\},$$

dont les trois premières font connoître un côté par le moyen des deux autres et de l'angle qu'ils comprennent, et dont les trois dernières donnent les angles par le moyen des côtés.

47. Le troisième systême produit, de même que le précédent, six formules, qui sont :

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a\\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b\\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c\end{aligned}$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Les trois premières feront trouver un angle lorsque l'on connoîtra les deux autres et le côté intercepté entre eux. Les trois dernières donneront chacun des côtés lorsque tous les angles seront connus.

48. Le quatrième systême, en y faisant toutes les permutations possibles, donne les six formules,

$$\cot A = \frac{\cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b}{\sin C \sin a}$$

$$\cot B = \frac{\sin a \cos b - \cos C \cos a \sin b}{\sin C \sin b}$$

$$\cot A = \frac{\cos a \sin c - \cos B \sin a \cos c}{\sin B \sin a}$$

$$\cot C = \frac{\sin a \cos c - \cos B \cos a \sin c}{\sin B \sin c}$$

$$\cot B = \frac{\cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c}{\sin A \sin b}$$

$$\cot C = \frac{\sin b \cos c - \cos A \cos b \sin c}{\sin A \sin c},$$

par le moyen desquelles on déterminera deux des angles d'un triangle sphérique, lorsqu'on connoîtra le troisième angle et les côtés qui le comprennent.

49. Le quatrième systême enfin conduit aux six formules suivantes :

$$\cot a = \frac{\cos A \sin B + \cos c \sin A \cos B}{\sin c \sin A}$$

$$\cot b = \frac{\sin A \cos B + \cos c \cos A \sin B}{\sin c \sin B}$$

$$\cot a = \frac{\cos A \sin C + \cos b \sin A \cos C}{\sin b \sin A}$$

$$\cot c = \frac{\sin A \cos C + \cos b \cos A \sin C}{\sin b \sin C}$$

$$\cot b = \frac{\cos B \sin C + \cos a \sin B \cos C}{\sin a \sin B}$$

$$\cot c = \frac{\sin B \cos C + \cos a \cos B \sin C}{\sin a \sin C},$$

qui serviront à déterminer deux des côtés d'un triangle lorsqu'on connoîtra le troisième et les deux angles qu'il intercepte.

50. Les quatre classes de formules que nous venons de rapporter méritent la plus grande attention, tant par leur élégance que par la propriété qu'elles ont de faire connoître

si l'arc ou l'angle qu'elles expriment est moindre ou plus grand qu'un quadrans ou qu'un angle droit, propriété que n'auroient point les expressions des sinus des mêmes arcs. En effet, le sinus d'un arc étant le même que celui du supplément de cet arc, tant par sa valeur que par son signe, toutes les fois que l'on ne connoît que le sinus d'un arc, il n'est pas possible de savoir si cet arc doit être plus petit ou plus grand qu'un quadrans ; mais lorsqu'on a le cosinus ou la cotangente, et qu'on sait d'ailleurs que cet arc ne peut être égal à la demi-circonférence, ce qui est le cas des côtés des triangles sphériques et des arcs qui mesurent leurs angles, on voit par le signe du résultat si l'arc cherché est compris ou non entre 1q et 2q. Le cosinus et la cotangente ont le signe — dans le premier cas, et le signe + dans le second. Si donc on a soin de donner aux quantités connues qui entrent dans les formules rapportées ci-dessus, les signes qui doivent les affecter d'après la valeur des arcs auxquels elles appartiennent, le signe du résultat fera connoître *l'espèce* du côté ou de l'angle cherché, c'est-à-dire s'il est plus petit ou plus grand qu'un quadrans, s'il est aigu ou obtus.

51. Ces mêmes formules se simplifient beaucoup lorsque le triangle proposé est rectangle, c'est-à-dire lorsqu'un de ses angles est droit. En effet, si l'on suppose que $C = 1q$, on aura $\sin C = 1$, $\cos C = 0$, et il viendra

$$\cos c = \cos a \cos b \quad (\text{n}^{\circ}.\ 46)$$

$$\cos c = \frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \cot A \cot B \quad (\text{n}^{\circ}.\ 47)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = \sin B \cos a \\ \cos B = \sin A \cos b\end{array}\right\} (\text{n}^{\circ}.\ 47)$$

$$\sin a = \sin c \sin A,\ \sin b = \sin c \sin B \quad (\text{n}^{\circ}.\ 40)$$

$$\left.\begin{aligned}\cot b &= \frac{\cos B}{\sin a \sin B}\\ \cot a &= \frac{\cos A}{\sin b \sin A}\\ \cot c &= \frac{\cos b \cos A}{\sin b}\\ \cot c &= \frac{\cos a \cos B}{\sin a}\end{aligned}\right\} (\text{n}^\circ.49) \text{ d'où } \left\{\begin{aligned}\text{tang}\, b &= \sin a \,\text{tang}\, B\\ \text{tang}\, a &= \sin b \,\text{tang}\, A\\ \text{tang}\, b &= \cos A \,\text{tang}\, c\\ \text{tang}\, a &= \cos B \,\text{tang}\, c;\end{aligned}\right.$$

et en ne prenant parmi ces formules que celles qui diffèrent essentiellement, on aura les six que voici :

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a \cos b\\ \cos c &= \cot A \cot B\\ \sin a &= \sin c \sin A\\ \text{tang}\, a &= \sin b \,\text{tang}\, A\\ \text{tang}\, a &= \cos B \,\text{tang}\, c\\ \cos A &= \sin B \cos a\end{aligned}$$

qui suffiront pour résoudre les triangles sphériques rectangles en C, et dans lesquels le côté c, opposé à l'angle droit, se nomme hypothénuse, aussi-bien que dans les triangles rectilignes. On obtiendroit des formules analogues pour le cas où le triangle sphérique proposé auroit un de ses côtés égal au quadrans ; mais nous ne nous y arrêterons pas.

52. Pour pouvoir appliquer commodément les logarithmes aux calculs des triangles sphériques, il faut transformer les formules des nos. 46–49, en d'autres dont le numérateur et le dénominateur puissent se décomposer en facteurs, et c'est ce qu'Euler a fait d'une manière aussi simple qu'élégante.

1°. De l'expression $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$, comprise parmi celles de la première classe, n°. 46, on tire

$$1-\cos A=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b \sin c} \quad (\text{n}^{\text{o}}.\ 11)$$

$$1+\cos A=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b \sin c},$$

d'où il suit, à cause de $\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\text{tang}\,\frac{1}{2}A^2$ (n°. 26),

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A^2=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\cos a-\cos(b+c)}.$$

Mais $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)$ (n°. 26),

donc $\text{tang}\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c+a)\sin\frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b-c)}}.$

En opérant de même sur les autres expressions de la première classe, on parviendra à des résultats semblables.

2°. Prenant dans la seconde classe, l'expression

$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C},$$

on en déduit

$$1-\cos a=-\frac{\cos(B+C)+\cos A}{\sin B\sin C},$$

$$1+\cos a=-\frac{\cos A+\cos(B-C)}{\sin B\sin C},$$

$$\text{d'où tang}\,\tfrac{1}{2}a^2=-\frac{\cos(B+C)+\cos A}{\cos(B-C)+\cos A};$$

mais $\cos p+\cos q=2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)$ (n°. 26),

donc $\text{tang}\,\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(B+C+A)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(B-C+A)\cos\frac{1}{2}(B-C-A)}}.$

3°. Les expressions de la première classe donnent aussi

$$\cos a-\cos b\cos c=\sin b\sin c\cos A$$
$$\cos b-\cos a\cos c=\sin a\sin c\cos B;$$

et divisant la première de ces équations par la seconde, en observant que, d'après les équations (A), on a $\frac{\sin b}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin A}$, on trouvera

$$\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\cos b-\cos a\cos c}=\frac{\sin B\cos A}{\sin A\cos B}.$$

Si l'on ajoute ensuite l'unité à chaque membre de cette dernière, elle deviendra

$$1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\cos b-\cos a\cos c}=1+\frac{\sin B\cos A}{\sin A\cos B},$$

et on la changera facilement en

$$(\cos a+\cos b)(1-\cos c)=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\cos B},$$

par la réduction des deux termes de chaque membre au même dénominateur.

En retranchant l'unité au lieu de l'ajouter, on aura

$$\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\cos b-\cos a\cos c}-1=\frac{\sin B\cos A}{\sin A\cos B}-1,$$

d'où l'on tirera

$$(\cos a-\cos b)(1+\cos c)=\frac{\sin(B-A)}{\sin A\cos B}.$$

Divisant cette équation par celle qu'on vient d'obtenir, et se rappelant que, d'après le tableau de la page 29,

$$\frac{1+\cos c}{1-\cos c}=\cot\tfrac{1}{2}c^2,\quad \frac{\cos p-\cos q}{\cos p+\cos q}$$
$$=\tang\tfrac{1}{2}(q+p)\tang\tfrac{1}{2}(q-p),$$

$\sin p=2\sin\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}q$, on trouvera

$$\tang\tfrac{1}{2}(b-a)\tang\tfrac{1}{2}(b+a)\cot\tfrac{1}{2}c^2$$
$$=\frac{\sin(B-A)}{\sin(B+A)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)\cos\frac{1}{2}(B+A)};$$

mais en ajoutant et en retranchant successivement l'unité à chacun des membres de l'équation $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$; puis divisant les deux résultats l'un par l'autre, on parvient à l'équation

$$\frac{\sin b - \sin a}{\sin b + \sin a} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A},$$

qui peut être transformée ainsi :

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(b-a)\ \cot\ \tfrac{1}{2}(b+a) = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)\cos\frac{1}{2}(B+A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)\cos\frac{1}{2}(B-A)},$$

par les formules du tableau de la page 29.

Multipliant entr'elles, membre à membre, cette équation et la précédente, en observant que $\text{tang}\frac{1}{2}(b+a)\cot\frac{1}{2}(b+a) = 1$ (n°. 9), on obtiendra

$$(\text{tang}\tfrac{1}{2}(b-a))^2\cot\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{(\sin\frac{1}{2}(B-A))^2}{(\sin\frac{1}{2}(B+A))^2};$$

et extrayant la racine de chaque membre, il viendra

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(b-a)\ \cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)}:$$

divisant enfin la première par cette dernière,

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(a+b)\ \cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)}.$$

En se rappelant $\frac{1}{\cot p} = \text{tang}\, p$ (n°. 9), on déduira des deux équations ci-dessus les expressions

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(b-a) = \text{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(b+a) = \text{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)},$$

qui feront connoître deux côtés d'un triangle sphérique, dont on aura le troisième côté et les deux angles qu'il intercepte, puisqu'en désignant par b' et a', les valeurs des arcs $b+a$ et $b-a$, il en résulte $b=\frac{1}{2}(b'+a')$, $a=\frac{1}{2}(b'-a')$.

4°. En prenant dans la seconde classe de formules (n°. 47) les équations

$$\cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C\cos a$$
$$\cos B+\cos A\cos C=\sin A\sin C\cos b,$$

et divisant la première par la seconde, on trouvera, en opérant comme ci-dessus,

$$\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\cos B+\cos A\cos C}=\frac{\sin B\cos a}{\sin A\cos b}=\frac{\sin b\cos a}{\sin a\cos b}.$$

Ajoutant et retranchant successivement l'unité à chacun des membres de celle-ci, on en déduira

$$(\cos A+\cos B)(1+\cos C)=\frac{\sin(b+a)}{\sin a\cos b}$$
$$(\cos A-\cos B)(1-\cos C)=\frac{\sin(b-a)}{\sin a\cos b},$$

d'où l'on conclura par la division

$$\frac{\cos A-\cos B}{\cos A+\cos B}\tang\tfrac{1}{2}C^2=\frac{\sin(b-a)}{\sin(b+a)},$$

ce qui revient à

$$\tang\tfrac{1}{2}(B-A)\tang\tfrac{1}{2}(B+A)\tang\tfrac{1}{2}C^2$$
$$=\frac{\sin(b-a)}{\sin(b+a)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)\cos\frac{1}{2}(b+a)};$$

et comme l'équation $\frac{\sin b-\sin a}{\sin b+\sin a}=\frac{\sin B-\sin A}{\sin B+\sin A}$, dont nous avons fait usage dans la transformation précédente, peut s'écrire ainsi :

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)\cos\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)\cos\frac{1}{2}(b-a)}=\tang\tfrac{1}{2}(B-A)\cot\tfrac{1}{2}(B+A),$$

en multipliant et en divisant par cette dernière celle que nous avons obtenue plus haut, nous trouverons enfin

$$\tang \tfrac{1}{2}(B-A)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(B+A)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos\frac{1}{2}(b+a)},$$

formules qui remplaceront les précédentes lorsqu'on connoîtra deux côtés et l'angle qu'ils comprennent.

53. En prenant toutes les variations dont les formules trouvées ci-dessus sont susceptibles, on aura

$$\tang\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}}$$

(*) $$\tang\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}$$

$$\tang\frac{b-a}{2}=\tang\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\tang\frac{b+a}{2}=\tang\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)}$$

(*) Pour tirer ces formules de leurs analogues du numéro précédent, il faut observer que $\alpha-\beta-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)$, et que $\sin(p-q)=-\sin(q-p)$, $\cos(p-q)=\cos(q-p)$.

$$\tang \frac{c-b}{2} = \tang \tfrac{1}{2} a \frac{\sin \frac{1}{2}(C-B)}{\sin \frac{1}{2}(C+B)}$$

$$\tang \frac{c+b}{2} = \tang \tfrac{1}{2} a \frac{\cos \frac{1}{2}(C-B)}{\cos \frac{1}{2}(C+B)}$$

$$\tang \frac{a-c}{2} = \tang \tfrac{1}{2} b \frac{\sin \frac{1}{2}(A-C)}{\sin \frac{1}{2}(A+C)}$$

$$\tang \frac{a+c}{2} = \tang \tfrac{1}{2} b \frac{\cos \frac{1}{2}(A-C)}{\cos \frac{1}{2}(A+C)}$$

$$\tang \frac{B-A}{2} = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{\sin \frac{1}{2}(b-a)}{\sin \frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\tang \frac{B+A}{2} = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2}(b-a)}{\cos \frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\tang \frac{C-B}{2} = \cot \tfrac{1}{2} A \frac{\sin \frac{1}{2}(c-b)}{\sin \frac{1}{2}(c+b)}$$

$$\tang \frac{C+B}{2} = \cot \tfrac{1}{2} A \frac{\cos \frac{1}{2}(c-b)}{\cos \frac{1}{2}(c+b)}$$

$$\tang \frac{A-C}{2} = \cot \tfrac{1}{2} B \frac{\sin \frac{1}{2}(a-c)}{\sin \frac{1}{2}(a+c)}$$

$$\tang \frac{A+C}{2} = \cot \tfrac{1}{2} B \frac{\cos \frac{1}{2}(a-c)}{\cos \frac{1}{2}(a+c)}$$

Des douze dernières formules on déduit les suivantes, qui servent à trouver le troisième angle ou le troisième côté d'un triangle dans lequel on connoît deux côtés et les angles opposés.

$$\tang \tfrac{1}{2} c = \tang \tfrac{1}{2}(b-a) \frac{\sin \frac{1}{2}(B+A)}{\sin \frac{1}{2}(B-A)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} c = \tang \tfrac{1}{2}(b+a) \frac{\cos \frac{1}{2}(B+A)}{\cos \frac{1}{2}(B-A)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} a = \tang \tfrac{1}{2}(c-b) \frac{\sin \frac{1}{2}(C+B)}{\sin \frac{1}{2}(C-B)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} a = \tang \tfrac{1}{2}(c+b) \frac{\cos \frac{1}{2}(C+B)}{\cos \frac{1}{2}(C-B)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} b = \tang \tfrac{1}{2} (a - c) \frac{\sin \frac{1}{2} (A + C)}{\sin \frac{1}{2} (A - C)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} b = \tang \tfrac{1}{2} (a + c) \frac{\cos \frac{1}{2} (A + C)}{\cos \frac{1}{2} (A - C)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \tang \tfrac{1}{2} (B - A) \frac{\sin \frac{1}{2} (b + a)}{\sin \frac{1}{2} (b - a)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \tang \tfrac{1}{2} (B + A) \frac{\cos \frac{1}{2} (b + a)}{\cos \frac{1}{2} (b - a)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} A = \tang \tfrac{1}{2} (C - B) \frac{\sin \frac{1}{2} (c + b)}{\sin \frac{1}{2} (c - b)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} A = \tang \tfrac{1}{2} (C + B) \frac{\cos \frac{1}{2} (c + b)}{\cos \frac{1}{2} (c - b)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} B = \tang \tfrac{1}{2} (A - C) \frac{\sin \frac{1}{2} (a + c)}{\sin \frac{1}{2} (a - c)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} B = \tang \tfrac{1}{2} (A + C) \frac{\cos \frac{1}{2} (a + c)}{\cos \frac{1}{2} (a - c)}$$

Si l'on joint à ces équations les équations (A), qui serviront dans le cas où l'on connoîtra deux côtés et l'un des angles opposés à ces côtés, ou bien deux angles et l'un des côtés opposés à ces angles, on aura tout ce qu'il faut pour résoudre un triangle sphérique. Ce qui précède peut donc être regardé comme formant un traité complet de trigonométrie sphérique. En combinant entr'elles les diverses formules que nous avons obtenues, on en pourroit déduire beaucoup d'autres d'un usage très-fréquent dans les calculs astronomiques. On doit, dans ce genre, au citoyen Delambre, des résultats très-élégans et très-nombreux, dont quelques-uns se trouvent dans la Trigonométrie de Cagnoli, d'autres dans les mémoires qu'il a présentés aux sociétés savantes.

Récapitulation

Récapitulation des formules nécessaires pour résoudre un triangle sphérique quelconque.

54. En négligeant les variations que peut présenter un même cas, on ne trouve que les six suivans:

1°. *Connoissant les trois côtés* (a, b, c), *trouver un des angles* (A).

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}}.$$

2°. *Connoissant les trois angles* (A, B, C), *trouver un des côtés* (a).

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C}}$$

3°. *Connoissant deux côtés* (b, c) *et l'angle compris* (A), *trouver les autres angles* (B *et* C).

$$\tang\tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cot\tfrac{1}{2}A$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cot\tfrac{1}{2}A.$$

4°. *Connoissant deux angles* (B, C) *et le côté compris* (a), *trouver les autres côtés* (b et c).

$$\tang\tfrac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\tang\tfrac{1}{2}a$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(b-c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\tang\tfrac{1}{2}a.$$

5°. *Connoissant deux côtés* (a, c) *et un angle opposé* (C), *trouver l'autre angle opposé* (A).

$$\sin A = \frac{\sin a \sin C}{\sin c}.$$

Fig. 15. 6°. *Connoissant deux angles* (A, C) *et un côté opposé* (c), *trouver l'autre côté opposé* (a).

$$\sin a = \frac{\sin c \sin A}{\sin C}.$$

Obs. Lorsque, dans les quatre premiers cas, les circonstances de la question laisseront douter si les arcs ou les angles cherchés valent plus ou moins du quadrans, ou d'un angle droit, on lèvera la difficulté en recourant aux expressions des cosinus et des cotangentes des inconnues (n°. 50). Mais dans les deux derniers cas, il peut arriver que la question proposee soit susceptible de deux solutions, et l'on s'en assurera aisément en étudiant la manière de construire un angle solide composé de trois plans, lorsqu'on connoît deux de ses faces et l'inclinaison de l'une d'elles sur la troisième, ou bien lorsqu'on connoît les inclinaisons de deux faces sur la troisième, et l'angle des arrêtes qui déterminent l'une des premières. Nous ne saurions entrer ici dans ces détails; mais en voici du moins les résultats.

1°. Le triangle sphérique ne peut exister que d'une seule manière avec les données a, c et C,

lorsque $C = 1^q$,

$C < 1^q$, $a < 1^q$, $c > a$
$C < 1^q$, $a > 1^q$, $c > 2^q - a$
$C > 1^q$, $a < 1^q$, $c > 2^q - a$
$C > 1^q$, $a > 1^q$, $c < a$,

et il est susceptible de deux formes

lorsque $C < 1^q$, $a < 1^q$, $c < a$
$C < 1^q$, $a > 1^q$, $c < 2^q - a$
$C > 1^q$, $a < 1^q$, $c > 2^q - a$
$C > 1^q$, $a > 1^q$, $c > a$
$C <$ ou $> 1^q$, $a = 1^q$.

2°. Avec les données A, C et c, il ne peut avoir qu'une forme,

lorsque $c = 1^q$,

$c > 1^q$, $\quad A > 1^q$, $\quad C < A$

$c > 1^q$, $\quad A < 1^q$, $\quad C < 2^q - A$

$c < 1^q$, $\quad A > 1^q$, $\quad C > 2^q - A$

$c < 1^q$, $\quad A < 1^q$, $\quad C > A$,

et il en a deux quand

$c > 1^q$, $\quad A > 1^q$, $\quad C > A$

$c > 1^q$, $\quad A < 1^q$, $\quad C > 2^q - A$

$c < 1^q$, $\quad A > 1^q$, $\quad C < 2^q - A$

$c < 1^q$, $\quad A < 1^q$, $\quad C < A$

$c <$ ou $> 1^q$, $\quad A = 1^q$.

55. Pour donner une application de la trigonométrie sphérique, nous choisirons le problême suivant. *Connoissant un angle* MSN, fig. 18, *mesuré dans un plan incliné*, *et les angles que font avec une verticale* SS′, *les côtés* SM *et* SN *du premier, trouver l'angle* M′S′N′ *formé sur le plan* M′S′N′, *horizontal ou perpendiculaire à* SS′, *par les projections* M′S′ *et* N′S′ *des lignes* MS *et* NS. Fig. 18.

Les trois lignes SS', SM et SN, déterminent un angle solide dont le point S est le sommet, dans lequel on connoît les trois angles plans MSN, MSS', NSS'; et puisque la droite SS' est perpendiculaire sur le plan $N'S'M'$, elle est aussi perpendiculaire sur chacune des lignes $M'S'$, $N'S'$, situées respectivement dans les plans $S'SN$, $S'SM$, et formant par conséquent entr'elles un angle égal à celui qui mesure l'inclinaison de ces plans : le problême proposé revient donc à déterminer cette inclinaison. C'est ainsi qu'il se trouve résolu, par des opérations graphiques, dans l'*Essai de géométrie sur les plans et les surfaces*, n°. 42.

Mais on peut obtenir l'angle cherché en le considérant comme faisant partie du triangle sphérique BAC, formé par les cercles résultans des sections que les trois plans MSN, $S'SM$, $S'SN$, feroient dans une sphère dont le centre seroit en S, et dont le rayon seroit égal à celui des tables. a dans ce triangle, les côtés AB, AC, BC, qui sont les mesures respectives des angles donnés NSS', MSS', MSN; et l'angle demandé est précisément l'angle A : il se trouvera donc par la première règle du numéro précédent.

CHAPITRE III.

De l'application de l'algèbre à la géométrie.

56. L'APPLICATION de l'algèbre à la géométrie a pour but de faire servir les opérations algébriques à combiner ensemble plusieurs théorêmes de géométrie pour en déduire des conséquences. C'est ainsi que, dans les deux chapitres précédens, nous sommes parvenus aux principales formules de la trigonométrie rectiligne et de la trigonométrie sphérique. Un théorême qui établit une relation entre plusieurs lignes d'une grandeur définie, peut toujours s'exprimer par une équation, et toutes les transformations qu'on opère sur cette équation étant à leur tour traduites en langage ordinaire, donnent des énoncés qui sont des conséquences du théorême duquel on est parti. Mais ce point de vue n'offre qu'une très-petite partie de ce que doit embrasser l'application de l'algèbre à la géométrie. Cette branche des mathématiques, considérée dans toute son étendue, comprend, non-seulement la recherche des propriétés de l'étendue par le moyen des procédés algébriques, mais on y voit encore comment on peut représenter par ces propriétés tout ce que signifie une expression algébrique quelconque, ramener sans cesse les constructions des figures aux opérations de calcul, et revenir de celles-ci aux premières.

On trouve d'abord quelques difficultés à concevoir comment les circonstances relatives à la situation des lignes ou des surfaces peuvent s'exprimer algébriquement; mais en approfondissant un peu cette idée, on voit que ces circonstances tiennent toujours à des rapports de grandeur, lesquels sont essentiellement l'objet du calcul, et par conséquent de l'algèbre.

57. Si l'on conçoit, par exemple, que de tous les points
Fig 19. d'une ligne quelconque DE, fig. 19, on ait abaissé des perpendiculaires PM, $P'M'$, $P''M''$, etc. sur une ligne droite AB, donnée de position, et qu'à partir d'un point A, pris à volonté sur cette ligne, on ait mesuré les distances AP, AP', AP'', etc., chacune de ces distances et la perpendiculaire qui lui correspond, seront liées entr'elles de manière que l'une se conclura nécessairement de l'autre. En effet, quand la grandeur de AP sera fixée, la rencontre de la courbe DE avec la perpendiculaire élevée par le point P sur la ligne AB, donnera la grandeur de PM; et quand on aura cette grandeur, que nous supposerons représentée par ab, on obtiendra AP, en prenant sur AC, perpendiculaire à AB, une partie $AQ = ab$, et en menant ensuite la droite QM parallèle à AB, qui rencontrera la ligne DE dans un point M, pour lequel on aura nécessairement $PM = ab$.

Rien n'empêche d'imaginer que les lignes AP, PM, soient rapportées à une ligne commune prise pour unité, et que sous ce point de vue elles ne soient représentées par des nombres ou des lettres. Si la relation qui est entre AP et PM, entre AP' et $P'M'$, etc. peut être exprimée par une équation algébrique, cette équation caractérisera la ligne DE, et pourra en faire connoître successivement tous les points. C'est ce qu'on va voir sur deux exemples très-simples.

Fig. 20. 58. Prenons pour le premier la droite AE, fig. 20, menée par le point A; toutes les perpendiculaires PM, $P'M'$, $P''M''$, etc. abaissées de chacun de ses points sur la ligne AB,

déterminerontune suite de triangles APM, $AP'M'$, $AP''M''$, Fig. 20.
etc. tous semblables entr'eux, et qui donneront

$$AP:PM::AP':P'M'::AP'':P''M'', \text{etc.}$$

ou, ce qui revient au même

$$\frac{PM}{AP}=\frac{P'M'}{AP'}=\frac{P''M''}{AP''}, \text{etc.}$$

La relation de toutes les distances AP aux perpendiculaires PM est ici bien facile à saisir; elle consiste dans le rapport constant que chacune des premières a avec celle des secondes qui lui correspond; et si l'on désigne ce rapport par a, on aura

$$PM=a\times AP,\ P'M'=a\times AP',\ P'P''=a\times AP'', \text{etc.}$$

Toutes ces équations qui semblent particulières à chaque point de la droite AE, peuvent être comprises dans une seule, en désignant la distance du pied de la perpendiculaire au point A, quelle qu'elle soit, par x, et en représentant la perpendiculaire elle-même par y; car on aura alors $y=ax$. Cette équation, qui renferme deux inconnues, x, y, ne peut donner la valeur que d'une seule, et cela, après que l'on a fixé arbitrairement la valeur de l'autre. Lorsqu'on assigne à x une valeur quelconque AP, y prend la valeur correspondante PM. Si l'on a, par exemple $a=\frac{1}{2}$, on trouve $PM=\frac{1}{2}AP$, c'est-à-dire qu'en prenant PM, égal à la moitié de AP, le point M est sur la droite AE, et non ailleurs.

59 Considérons en second lieu le cercle décrit du point A, fig. 21, comme centre et d'un rayon égal à la ligne AD. Fig. 21.
Ce qui distingue tous les points de sa circonférence des autres points du plan, c'est d'être tous à une distance du centre C qui soit égale au rayon AD; et par conséquent quelque part que l'on prenne le point M sur cette courbe, les droites AP et PM seront les côtés d'un triangle rectangle

Fig. 21. dont l'hypothénuse AM sera égale à AD. En faisant donc $AP=x$, $PM=y$, $AD=r$, on aura $x^2+y^2=r^2$; et on tirera de là $y=\sqrt{r^2-x^2}$, équation qui fait voir que quand x ou AP sera connu, on aura, par le secours du calcul, et sans qu'il soit besoin de construire la figure, y ou PM, ou du moins le rapport de cette ligne avec le rayon. En prenant, par exemple, $x=\frac{1}{3}r$, il viendra

$$y=\sqrt{r^2-\tfrac{1}{9}r^2}=\sqrt{\tfrac{8}{9}r^2}=r\times\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

On concevra sans peine que l'on peut déduire de la même expression les lignes PM pour tous les points de la ligne AB, compris entre A et E. L'équation $y=\sqrt{r^2-x^2}$ fait voir aussi bien que la description géométrique de la circonférence du cercle, que cette courbe ne doit pas s'étendre au-delà du point E; car pour prendre le point P au-delà de celui-ci, il faudroit supposer $x>AD$, ou $>r$, et dans ce cas, la valeur de y deviendroit imaginaire.

Quoique nous n'ayons considéré que le quadrans DE, les trois autres, qui complètent la circonférence, sont compris dans l'équation $x^2+y^2=r^2$, de même que la partie Ae, fig. 20, que l'on obtiendroit en prolongeant la droite AE au-dessous de AB, est représentée par $y=ax$. L'une et l'autre de ces circonstances dépendent de la considération des signes qui affectent x et y, et nous les ferons connoître bientôt. Pour le moment nous nous bornerons à observer que quoiqu'on ne tire des équations $y=ax$, $y=\sqrt{r^2-x^2}$, que des valeurs appartenantes à des points isolés et disjoints, néanmoins la continuité qui résulte de la description de la ligne droite et du cercle, représentés respectivement par ces équations, n'est point violée, parce qu'on peut toujours déterminer par leur moyen deux points aussi voisins l'un de l'autre qu'on voudra, puisqu'il suffit pour cela de prendre pour x deux valeurs consécutives presqu'égales, et que rien ne limite la petitesse de la différence qu'on peut mettre entr'elles.

60. Cette manière de représenter le cours des lignes, c'est-à-dire les circonstances de leur nature et de leur situation, en les rapportant à une droite par des perpendiculaires, mérite la plus grande attention; on voit qu'elle revient à déterminer la position d'un point quelconque, par le moyen de sa distance à deux droites AB et AC, perpendiculaires entr'elles. Le point M, fig. 19, est en effet déterminé lorsqu'on a les distances AP et AQ, puisqu'il se trouve à l'intersection des lignes PM et QM, menées par les points P et Q, parallèlement aux droites AB et AC. Les lignes AP et AQ, ou leurs égales, QM et PM, se nomment les coordonnées. On se sert ordinairement du mot *abscisse* pour désigner celle qu'on suppose connue, et l'on donne à l'autre le nom d'*ordonnée*. Ainsi, dans les exemples précédens, où nous avons toujours exprimé les PM par les AP, PM étoit l'ordonnée, et AP l'abscisse. Les lignes AB et AC, qui déterminent la direction des coordonnées, se nomment les *axes des coordonnées*. Nous les avons supposées perpendiculaires, ce qui est le cas le plus simple; mais nous verrons dans la suite qu'on peut leur donner une situation quelconque. Il faut bien observer que pour les points situés sur la ligne AB, la distance AQ ou PM, est nulle, et que par conséquent si on la représente par y, on a pour tous ces points, $y=0$; par la même raison, on a QM, ou AP, ou $x=0$, pour tous ceux qui sont placés sur l'axe AC: et enfin au point A, qu'on nomme l'origine des coordonnées, on a en même temps $x=0$, $y=0$.

L'équation qui exprime la relation entre les AP et les PM pour une ligne donnée, s'appelle l'équation de cette ligne, et celle-ci se nomme à son tour le *lieu* de l'équation qui lui appartient.

L'équation d'une courbe s'obtient toujours en exprimant analytiquement l'une quelconque de ses propriétés, comme nous l'avons fait pour la ligne droite, ou les circonstances de sa description, ainsi que nous en avons usé à l'égard du cercle. Réciproquement, une équation quelconque, considérée en elle-même, donne aussi naissance à une courbe dont elle fait connoître les propriétés. Ce dernier point de vue étant le plus général, et le plus fécond, c'est désormais de la considération des équations que nous déduirons les lignes.

61. De toutes les équations à deux indéterminées, la plus simple est celle du premier degré, et elle appartient à la ligne droite, la plus simple de toutes les lignes. Cette équation peut être représentée par $Cy = Ax + B$; mais en la divisant par C, elle ne perdra rien de sa généralité, et deviendra $y = \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}$, ou $y = ax + b$, en faisant $\frac{A}{C} = a$, $\frac{B}{C} = b$: c'est sous cette forme que nous l'emploierons désormais.

Supposons d'abord que b soit nul, on aura simplement $y = ax$ ou $\frac{y}{x} = a$, c'est-à-dire, que dans toute l'éten-

Fig. 20. due de la droite, le rapport de PM à AP, fig. 20, sera constant, propriété qui n'est que l'expression de la similitude des triangles APM, $AP'M'$ etc. de laquelle il résulte que $\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'}$, etc. quelque part qu'on prenne les points P, P', etc. sur la ligne AB, et qui ne peut appartenir

qu'à la ligne droite AE, menée par le point A, origine des coordonnées. Fig. 10.

Le rapport $\frac{y}{x}$ ou le coefficient a, dépend de l'angle que fait la droite AE avec l'axe des abscisses AB; mais dans le triangle APM, que nous supposons rectangle en P, le rapport de PM à AP est égal à la tangente de l'angle APM (n°. 27) : a représente donc la tangente de cet angle.

En considérant l'équation $y=ax+b$, on voit que la nouvelle ordonnée y ne diffère de la première, $y=ax$, qu'en ce qu'elle la surpasse de la quantité b; d'où il suit que si on prend $AD=b$, et qu'on mène la ligne DF parallèle à AE, elle sera le lieu de l'équation $y=ax+b$, puisqu'on aura

$$PN = PM + MN = PM + AD,$$
$$P'N' = P'M' + M'N' = P'M' + AD, \text{ etc.}$$

et il faut bien remarquer que le coefficient a restera le même pour toutes les droites parallèles à AE.

Il est aisé de voir que rien, dans l'équation $y=ax+b$, ne limite les valeurs que l'on peut donner à x, et que par conséquent celles de y deviendront aussi grandes qu'on voudra; mais en même temps rien ne bornant le cours de la ligne DF dans l'espace indéfini BAC, on trouvera toujours des abscisses et des ordonnées assez grandes pour représenter les valeurs de y et de x, qui satisferont à l'équation proposée. Faisons $x=0$, nous aurons $y=b$, et cette valeur appartiendra au point D, où la droite DF rencontre l'axe AC des ordonnées. Lorsque x sera négatif, on trouvera $y=-ax+b$, et ax étant moindre que b, y sera encore positif, mais moindre que b ou AD. Le cours de la ligne DF nous montre que cette circonstance ne peut avoir lieu que dans la partie Df, correspondante à des abscisses Ap, situées d'un côté opposé aux abscisses AP, que nous avons choisies pour représenter les valeurs positives de x; c'est donc de ce côté qu'il faut prendre les valeurs négatives de x.

Pour trouver la valeur de x qui répond au point f où la ligne DF rencontre l'axe AB des abscisses, il faut faire $y=0$, ce qui donne $ax+b=0$, et $x=-\frac{b}{a}=Af$. Lorsque x, restant toujours négatif, sera devenu plus grand que la quantité $\frac{b}{a}$, y lui-même deviendra négatif. Mais au-delà du point f, la ligne DF se trouve au-dessous de la ligne AB; l'ordonnée $p'n'$ tombera donc d'un côté opposé à celui où elle étoit située d'abord, et par conséquent les valeurs négatives de y doivent se porter d'un côté de la ligne AB, opposé à celui qu'on a adopté pour les valeurs positives. J'observerai que rien ne détermine quel côté des abscisses ou des ordonnées on doit regarder comme positif; mais que ce choix étant une fois arrêté, les côtés opposés deviennent par cela seul négatifs. Je n'insiste sur ces remarques, que parce qu'il me semble que dans la plupart des livres élémentaires, on n'a pas prouvé avec assez de soin la nécessité de prendre les quantités négatives d'un côté opposé aux quantités positives, et c'est cependant de là que dépendent, en grande partie, les diverses formes qu'affectent les lignes courbes, comme on le verra plus bas.

L'équation $y=ax+b$ ne renfermant que deux constantes, a et b, dont la valeur particularise la droite, qu'on considère, en la distinguant de toute autre, il s'ensuit que deux conditions suffisent pour déterminer cette droite. Celles qui s'offrent les premières, sont de l'assujettir à passer par deux points donnés ; à être parallèle ou perpendiculaire à une autre droite donnée et à passer en outre par un point donné. Nous aurons besoin dans la suite de connoître la forme que prend l'équation $y = ax + b$, pour satisfaire à ces conditions, c'est pourquoi nous allons les examiner chacune en particulier.

62. Si on cherche l'équation de la ligne droite qui passe par deux points, dont les abscisses soient α et α', et les ordonnées, β et β', on mettra successivement α et α' à la place de x, β et β' à celle de y, et on aura, pour déterminer a et b, les deux équations

$$\left.\begin{array}{l}\beta = a\alpha + b\\ \beta' = a\alpha' + b\end{array}\right\}\text{ dont on tirera }\left\{\begin{array}{l}a = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\\ b = \dfrac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}\end{array}\right.$$

et il en résultera $y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$ pour l'équation de la droite cherchée.

On peut donner à ce résultat une forme plus simple ; car si on retranche de l'équation $y = ax + b$, l'une des deux équations ci-dessus, la première, par exemple, b disparoîtra, et il viendra $y - \beta = a(x - \alpha)$; cette dernière équation sera celle d'une droite assujettie à passer par le point, dont les coordonnées sont α et β, et faisant d'ailleurs avec l'axe AB un angle quelconque : en y mettant, au lieu de a, la valeur trouvée précédemment, on aura

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha).$$

La distance des points proposés, ou la partie de la droite cherchée, interceptée entr'eux, aura pour expres-

Fig. 20. sion $\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}$: cela se voit évidemment, en supposant que N et N' représentent ces points; car leur distance NN' étant l'hypothénuse du triangle rectangle NRN', il s'ensuit que

$$\overline{NN'}^2=\overline{NR}^2+\overline{N'R}^2=(AP'-AP)^2+(P'N'-PN)^2.$$

63. Pour obtenir l'équation de la ligne droite qui passeroit par le point dont les coordonnées sont α et β, et qui seroit parallèle à la ligne représentée par l'équation $y=a'x+b'$, il suffira de substituer a' au lieu de a dans l'équation $y-\beta=a(x-\alpha)$, qui satisfait déjà à la première condition, puisque, d'après le numéro 61, le coefficient de x est le même dans les équations des lignes droites parallèles entr'elles, on aura donc pour celle qu'on cherche $y-\beta=a'(x-\alpha)$.

Fig. 22. 64. Enfin si AE et AI, fig. 22, sont deux droites perpendiculaires entr'elles, on verra, par la similitude des triangles Apm et Apn, que le rapport de pm à Ap est inverse de celui de pn à Ap; et comme pn est négatif lorsque pm est positif, *et vice versâ*, il s'ensuit que si on représente le premier rapport par a, le second sera $-\frac{1}{a}$. Les équations des droites AE et AI seront donc

$$y=ax \text{ et } y=-\frac{1}{a}x.$$

Considérant ensuite les droites DF et GH, respectivement parallèles à AE et à AI, et par conséquent perpendiculaires entr'elles, on trouvera pour leurs équations

$$y=ax+b \text{ et } y=-\frac{1}{a}x+b' \text{ (n}^\circ\text{. précéd.).}$$

Si la seconde doit passer par un point N dont les coordonnées soient α et β, son équation deviendra

$$y-\beta=-\frac{1}{a}(x-\alpha).$$

65. Deux lignes qui se coupent ont dans leur point d'intersection les mêmes coordonnées; en sorte que pour trouver celles du point de rencontre des deux droites données par les équations $y = ax + b$, et $y = a'x + b'$, il n'y a qu'à supposer que les inconnues x et y ont la même valeur dans l'une et l'autre équation : on aura ainsi $ax + b = a'x + b'$, ce qui donnera

$$x = \frac{b - b'}{a' - a} \quad \text{et} \quad y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

On voit par ces valeurs que le point de concours est d'autant plus éloigné des axes AB et AC, que la quantité $a' - a$ est plus petite, et qu'enfin x et y deviennent infinis, lorsque $a' = a$, c'est-à-dire lorsque les droites proposées cessent de se rencontrer, ou sont parallèles.

66. Il peut être utile de connoître la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point donné, sur une ligne donnée; et on y parviendra en cherchant les différences entre les coordonnées de ce point et celles du point où la droite donnée rencontre la ligne qui lui est perpendiculaire. Or l'équation de la première étant $y = ax + b$, celle de la seconde sera $y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$; mais on peut mettre l'équation $y = ax + b$ sous la forme

$$y - \beta = a(x - \alpha) + b - \beta + a\alpha,$$

et, jointe à $y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$, elle donnera

$$x - \alpha = \frac{a(\beta - a\alpha - b)}{1 + a^2}, \quad y - \beta = -\frac{\beta - a\alpha - b}{1 + a^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression $\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$, on aura pour la longueur de la perpendiculaire cherchée $\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}}$.

67. Ce qui précède nous conduit à l'expression du sinus, du cosinus et de la tangente, de l'angle que forment entr'elles deux droites données. Soient

$$y = ax + b, \qquad y = a'x' + b',$$

les équations des deux droites proposées; il est évident que l'angle qu'elles font entr'elles ne changeroit point si on les faisoit mouvoir toutes deux parallèlement à elles-mêmes, jusqu'à ce qu'elles passassent par l'origine des coordonnées, et alors leurs équations se réduiroient à $y = ax$, $y = a'x$ (n°. 61).

C'est dans cet état que nous les considérerons et nous
Fig. 23. les représenterons par les lignes AM et AM', fig. 23. Ayant pris sur l'une d'elles un point M', dont les coordonnées AP' et PM' soient désignées par α et β, la perpendiculaire MM' abaissée de ce point sur l'autre ligne AM, sera exprimée par $\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{1+a^2}}$ (n°. 61), à cause de $b = 0$; mais si l'on fait $AM' = r$, on aura $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, et parce que le point M' est sur la ligne AM', dont l'équation est $y = a'x$, il s'ensuivra $\beta = a'\alpha$. Cette équation, combinée avec la précédente, donnera

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{1+a'^2}}, \quad \beta = \frac{a'r}{\sqrt{1+a'^2}};$$

substituant ces valeurs dans celle de la perpendiculaire, on trouvera $\frac{r(a'-a)}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}}$, et si l'on donne à la perpendiculaire MM' le nom de sinus, qu'on lui a assigné dans la trigonométrie, on aura

$$\sin MAM' = \frac{r(a'-a)}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}},$$

en prenant r pour rayon.

Si

Si on retranche de r^2 le quarré de cette expression, on aura celle de $\overline{AM}^2$, ou du quarré du cosinus de l'angle MAM' ; on obtiendra $(\cos MAM')^2 =$ Fig. 23.

$$\frac{r^2(1+a^2)(1+a'^2)-r^2(a'-a)^2}{(1+a^2)(1+a'^2)}=\frac{r^2(1+2aa'+a^2a'^2)}{(1+a^2)(1+a'^2)},$$

et prenant la racine quarrée, il viendra

$$\cos MAM'=\frac{r(1+aa')}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}:$$

enfin faisant $r=1$, on tirera de ces deux expressions

$$\operatorname{tang} MAM'=\frac{\sin MAM'}{\cos MAM'}=\frac{(a'-a)}{1+aa'}.$$

Nous aurions pu déduire immédiatement cette dernière valeur de la formule

$$\operatorname{tang}(p\pm q)=\frac{\operatorname{tang}p\pm\operatorname{tang}q}{1\mp\operatorname{tang}p\operatorname{tang}q},$$

rapportée dans le tableau de la page 29, puisque l'angle MAM' est la différence des angles BAM' et BAM, et que par conséquent si l'on désigne ces derniers par p et q, on aura $\operatorname{tang}p=a'$, $\operatorname{tang}q=a$, et $\operatorname{tang}(p-q)=\frac{a'-a}{1+aa'}$, comme ci-dessus; mais cette formule repose sur celles du n°. 11, que nous avons obtenues par le moyen d'une construction, et nous nous sommes proposé de tirer des seules équations des lignes tout ce qui est nécessaire pour l'application de l'algèbre à la géométrie.

68. Pour achever d'éclaircir ce qu'expriment les signes des grandeurs qui représentent des lignes, reprenons l'équation $y^2+x^2=r^2$, que nous avons trouvée n°. 59, pour le cercle $DED'E'$, fig. 21, décrit du point A comme centre, et d'un rayon $AE=r$. Si l'on y fait Fig. 21.

Fig. 21. $y=z-a$, ce qui donne $z=y+a$, elle deviendra $(z-a)^2+x^2=r^2$; on en tirera $z-a=\pm\sqrt{r^2-x^2}$, et par conséquent $z=a\pm\sqrt{r^2-x^2}$. Il est facile de voir que l'on peut toujours prendre a plus grand que $\sqrt{r^2-x^2}$; il suffit, en effet, pour cela, de supposer $a>r$; mais il est évident qu'en reculant l'axe des abscisses AB parallèlement à lui-même d'une quantité $AA'=a$, les ordonnées QM, prises par rapport à $A'B'$, représenteront les valeurs de z, puisqu'en supposant y positif, on aura

$$QM=PQ+PM=AA'+PM=a+y=z.$$

Dans le cas où y sera négatif, il viendra

$$z=a-y=AA'-PM;$$

et pour retrancher PM de AA' ou de PQ, il faudra prendre sur la direction de cette dernière ligne, en allant de P vers Q, une partie $PM'=PM$: le reste QM' sera la seconde valeur de z.

Il n'y a maintenant aucun doute qu'on ne doive porter du même côté du nouvel axe $A'B'$ les diverses valeurs de z, relatives à l'abscisse $A'Q$, puisque toutes sont affectées du même signe; car la distance MM' des points qui répondent à cette abscisse, étant égale à la différence qui se trouve entre les deux valeurs de z, c'est-à-dire à $a+y-(a-y)=QM-QM'$, si on portoit l'une au-dessous de $A'B'$ en QN, et qu'on laissât l'autre au-dessus, la distance MN, qui remplaceroit alors la distance MM', deviendroit égale à la somme des ordonnées QM' et QN, ce qui changeroit la situation respective des points M et M', qui doit évidemment demeurer la même, quelque part qu'on transporte l'axe AB: on altéreroit ainsi la figure de la courbe, qui néanmoins ne sauroit dépendre du choix des coordonnées. Il suit de-là que le point M', qui résulte de la seconde valeur de z, laquelle répond au cas où y est négatif, s'obtiendroit sans le secours de la transformation, en portant seulement une partie $PM'=PM$, au-dessous de AB dans le prolongement de PM. En faisant la même chose pour toutes les abscisses comprises entre les points A et E, on obtiendra une suite de points M', qui donneront le quart de cercle ED', et complèteront ainsi la demi-circonférence DED', qui répond à toutes les valeurs positives de x. Il est évident qu'on en doit obtenir une pareille $D'ED'$ pour les x négatifs, mais située, par rapport à la première, de l'autre côté de l'axe AC; car en prenant les x pour représenter les ordonnées, et en considérant les y comme les abscisses, on prouveroit de même que ci-dessus, que les valeurs négatives de x doivent être prises sur AB, prolongé du côté opposé à celui où on a porté les valeurs positives. Fig. 21.

69. Quoique nous n'ayons employé que les exemples particuliers de la ligne droite et du cercle pour prouver que les coordonnées négatives doivent être portées sur leurs axes respectifs du côté opposé à celui qu'on a choisi pour les coordonnées positives, la proposition n'en est pas moins vraie dans tous les cas; et le moyen de démonstration, pris en général, revient à considérer la situation respective de deux points dont les distances à une droite quelconque soient exprimées par $a+b$ et $a-c$. En effet, il est évident que la distance mutuelle de ces points est $b+c$, puisque $a+b-(a-c)=b+c$; pour les placer de cette manière par rapport à une droite quelconque $A'B'$, fig. 24, il faut tirer d'abord, soit d'un côté, soit de l'autre de cette ligne, à une distance $AA'=a$, une parallèle AB, puis mener ensuite deux autres lignes parallèles à celles-ci, l'une QM, en dehors d'elles et à Fig. 24.

Fig. 24. une distance $AQ=b$, l'autre $Q'M'$, en dedans et à une distance $AQ'=c$. Par ce moyen, tous les points, tels que M et M', placés aux rencontres des dernières parallèles et d'une perpendiculaire à la ligne $A'B'$, auront entr'eux la distance exigée, et se trouveront dans une situation opposée par rapport à la parallèle intermédiaire AB, de laquelle leurs éloignemens respectifs sont marqués par $+b$ et $-c$. Il est facile de voir qu'ils seroient tous deux du même côté, si leurs distances à la ligne $A'B'$ étoient exprimées par $a+b$ et $a+c$, parce qu'alors leur distance mutuelle seroit $b-c$.

70. Ce qui précède étant bien compris, toutes les questions que l'on peut proposer sur la ligne droite et sur le cercle, se ramènent facilement à l'algèbre, sans qu'il soit besoin de recourir à d'autres propriétés des figures que celles dont nous avons fait usage jusqu'à présent, et qui se réduisent à celles des triangles semblables et à la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle rectangle (*). Proposons-nous pour premier exemple cette question :

Fig. 25. *Deux lignes droites*, AE *et* DE, fig. 25, *étant données par les angles qu'elles font avec une troisième* AB, *et par la partie* AD *qu'elles interceptent sur cette troisième, trouver sur une ligne* AC, *perpendiculaire à* AB, *un point* G, *par*

(*) Dans les notes qu'il a placées à la suite de ses Elémens de geométrie, Legendre déduit ces propriétés des premières conséquences de la superposition des triangles égaux par un moyen très-élégant ; mais les considérations qu'il emploie pour cela sont malheureusement trop abstraites pour pouvoir servir de base à un livre élémentaire, et porter dans l'esprit cette conviction intime qui résulte des notions reçues immédiatement par les sens.

lequel, menant une droite GK, *parallèle à* AB, *la partie* HK *comprise entre* AE *et* DE *soit d'une grandeur donnée.* Fig. 28.

Formons d'abord les équations des droites AE et ED. Soient a et a' les tangentes des angles EAD, EDA, qu'elles font respectivement avec la droite AB, que nous prendrons pour l'axe des abscisses dont nous supposerons l'origine au point A, ainsi que celle des ordonnées y que nous concevrons parallèles à AC, et faisons $AD=\alpha$. La première droite aura pour équation $y=ax$, puisqu'elle passe par le point A; la seconde devant passer par le point D, pour lequel on a $y=0$ (nº. 60), et $x=\alpha$, sera de la forme $y=A(x-\alpha)$, et comme y diminue tandis que x augmente, il faudra nécessairement que A soit négatif, et par conséquent égal à $-a'$. On aura donc ces deux équations:

$$y=ax, \qquad y=-a'(x-\alpha).$$

Pour obtenir les points H et K, où les droites qu'elles représentent rencontrent la ligne GK, parallèle à AB, il suffit d'y faire $y=AG$; si donc on pose $AG=t$, on aura

$$t=ax, \qquad t=-a'(x-\alpha):$$

prenant la valeur de x dans chacune de ces équations, il viendra

$$x=\frac{t}{a} \text{ pour l'une,} \qquad \text{et } x=\frac{\alpha a'-t}{a'} \text{ pour l'autre.}$$

Ces expressions sont celles des abscisses Ah et Ak, dont la différence donne $hk=HK$, à cause des parallèles; et désignant par m la grandeur que doit avoir HK, on trouvera

$$m=\frac{\alpha a'-t}{a'}-\frac{t}{a},$$

d'où l'on tirera

$$aa'm = \alpha aa' - ta' - ta,$$

et par conséquent

$$t = \frac{(\alpha - m)aa'}{a + a'}.$$

Telle est la valeur de AG qui satisfait à la question proposée.

On déduira de cette valeur la grandeur de AG, en évaluant la fraction $\frac{aa'}{a + a'}$, résultante des valeurs numériques des tangentes a et a', tirées des tables trigonométriques, et en prenant sur la ligne $AD = \alpha$ une partie proportionnelle à cette fraction, c'est-à-dire telle qu'on ait

$$\alpha - m : t :: a + a' : aa'.$$

Si on avoit mesuré AD ou α, en parties d'une échelle ou d'une ligne quelconque prise pour unité, l'expression de t seroit un nombre, et sa longueur s'obtiendroit en prenant sur l'échelle autant de parties qu'en contiendroit ce nombre.

71. De cette manière, la question proposée n'est résolue, pour ainsi dire, qu'arithmétiquement, tandis qu'en ne faisant entrer que des lignes dans son énoncé, on peut parvenir à trouver la grandeur de AG sans recourir aux nombres. Pour cela, il faut substituer aux tangentes numériques des rapports linéaires qui puissent les représenter, et l'on voit sans peine, dans le cas actuel, que si du point E on abaisse sur AB la perpendiculaire Ee, on aura

$$a = \frac{Ee}{Ae} \text{ et } a' = \frac{Ee}{De};$$

faisant ensuite $Ee = n$, $Ae = p$, $De = q$, on aura

$$a = \frac{n}{p}, \quad a' = \frac{n}{q};$$

l'expression de t deviendra

$$t = \frac{\frac{n}{p} \cdot \frac{n}{q}}{\frac{n}{p} + \frac{n}{q}}(\alpha - m) = \frac{n^2(\alpha - m)}{nq + np} = \frac{n(\alpha - m)}{q + p} = \frac{n(\alpha - m)}{\alpha};$$

car $p + q = Ae + De = \alpha$: et pour obtenir ces lignes, il suffit de prendre une quatrième proportionnelle aux trois lignes α, n et $\alpha - m$, puisqu'on a

$$\alpha : n :: \alpha - m : \frac{n(\alpha - m)}{\alpha} = t.$$

On pourra, dans la recherche de cette quatrième proportionnelle, se servir de l'angle EeB, sur l'un des côtés duquel se trouve déjà la ligne $Ee = n$; on portera donc sur l'autre côté, $Me = AD = \alpha$, $Le = \alpha - m$; on tirera EM par les points E et M, et on lui mènera ensuite IL parallèle : le point I sera sur la ligne cherchée HK, puisque $eI = AG$.

72. C'est une remarque générale, et qu'on aura occasion de vérifier très-souvent dans le cours de ce chapitre, que lorsqu'il n'entre que des lignes dans l'énoncé d'une question, et que la quantité cherchée est elle-même une ligne, son expression renferme toujours un facteur de plus dans le numérateur que dans le dénominateur, et chacune de ces quantités est composée de termes homogènes entr'eux. La dernière expression de t, trouvée dans le numéro précédent, remplit cette condition; son numérateur est le produit de deux facteurs, et son dénominateur n'en contient qu'un.

Il suit de là que lorsque l'expression d'une ligne quelconque ne contient point de radicaux, on peut, en représentant toutes les quantités qu'elle renferme par des lignes, obtenir la longueur de la première sans recourir aux nombres, et seulement en cherchant avec le compas des quatrièmes proportionnelles à des lignes données. Pour le prouver, il suffira de l'exemple suivant : Soit

$$t = \frac{abc + d^3 - e^2 f}{gh + i^2};$$

cette expression, dont le numérateur est composé de termes contenant chacun trois facteurs, tandis que les termes du dénominateur n'en ont que deux, appartient, d'après la remarque ci-dessus, à une ligne. Si l'on fait

$$abc = k d^2, \quad e^2 f = k' d^2$$
$$gh = k'' d, \quad i^2 = k''' d,$$

on aura

$$t = \frac{d^2(k + d - k')}{d\,(k'' + k''')} = \frac{d(k + d - k')}{k'' + k'''};$$

on obtiendra donc t en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois lignes $k'' + k'''$, $k + d - k'$, et d, lorsque les lignes inconnues représentées par k, k', k'', k''', seront déterminées. Or, on a par les équations posées ci-dessus

$$k = \frac{abc}{d^2} = \frac{ab}{d} \times \frac{c}{d}, \quad k' = \frac{e^2 f}{d^2} = \frac{ef}{d} \times \frac{e}{d}$$
$$k'' = \frac{gh}{d}, \qquad k''' = \frac{i^2}{d};$$

on parvient à ces valeurs par les proportions suivantes :

$$d : a :: b : \frac{ab}{d}, \qquad d : e :: f : \frac{ef}{d}$$
$$d : c :: \frac{ab}{d} : \frac{abc}{d^2} = k, \quad d : e :: \frac{ef}{d} : \frac{e^2 f}{d^2} = k'$$
$$d : g :: h : \frac{gh}{d} = k'', \quad d : i :: i : \frac{i^2}{d} = k''',$$

et cherchant les quatrièmes termes de chacune d'elles par les lignes proportionnelles, on aura successivement les longueurs de lignes représentées par

$$\frac{ab}{d},\ \frac{abc}{d^2},\ \frac{ef}{d},\ \frac{e^2 f}{d^2},\ \frac{gh}{d},\ \frac{i^2}{d},$$

qui donneront k, k', k'' et k'''; et avec celles-ci, on trouvera t.

Déterminer ainsi la valeur d'une expression en n'y employant que des lignes, c'est ce qu'on appelle construire cette expression, et l'on reconnoît sans peine que l'esprit de la méthode dont nous venons de faire usage pour cet objet, consiste à transformer le numérateur et le dénominateur de l'expression proposée, en produits d'un certain nombre de facteurs simples ou du premier degré.

Il y a des cas où cette transformation peut s'effectuer immédiatement, sans qu'il soit besoin d'y introduire des indéterminées; tel est celui de l'expression $t = \frac{c(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$, dont le numérateur équivaut à $c(a+b)(a-b)$, et dont le dénominateur peut s'écrire ainsi : $\sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{a^2+b^2}$: il vient alors

$$t = \frac{(a-b)(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{a^2+b^2}},$$

ce qui s'obtient par les proportions

$$\sqrt{a^2+b^2} : a+b :: c : \frac{(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sqrt{a^2+b^2} : a-b :: \frac{(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}} : \frac{(a-b)(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Le radical employé dans ce calcul se construit facilement car il exprime évidemment l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont a et b.

73. Reprenons maintenant la résolution des problêmes, et proposons-nous d'inscrire un quarré dans un triangle.
Fig. 25. Il est évident que si DAE, fig. 25, représente le triangle donné, et $khHK$ le quarré demandé, la ligne HK parallèle à AD sera située de manière que $AG = HK = Hh$. Cette question revient donc à celle du numéro 70, excepté qu'au lieu d'égaler t à la quantité connue m, il faudra l'égaler à lui-même, ce qui donnera l'équation

$$t = \frac{aa' - t}{a'} - \frac{t}{a},$$

dont on déduira

$$t = \frac{aaa'}{aa' + a + a'}.$$

Si l'on remplace les tangentes a et a', des angles DAE et EDA, par les rapports linéaires équivalens $\frac{Ee}{Ae} = \frac{n}{p}$, $\frac{Ee}{De} = \frac{n}{q}$, on trouvera

$$t = \frac{\alpha n^2}{n^2 + np + nq} = \frac{\alpha n}{n + p + q} = \frac{\alpha n}{\alpha + n},$$

expression qui se construit d'après la proportion

$$\alpha + n : n :: \alpha : \frac{\alpha n}{\alpha + n} = t,$$

en prenant $Me = \alpha + n$, $Le = \alpha$, au lieu de faire ces lignes respectivement égales à α et à $\alpha - m$, comme dans le numéro précédent.

74. Cette question et celle du numéro 70 se résolvent immédiatement par la considération des lignes proportionnelles, sans qu'il soit besoin d'employer l'équation de la ligne droite. En effet, on a, d'après cette considé-

ration, en vertu du parallélisme des lignes AD et HK, Fig. 25.
les proportions

$$AE : HE :: Ee : IE, \quad AE : HE :: AD : HK,$$

desquelles on tire

$$Ee : IE :: AD : HK, \quad \text{ou} \quad n : n - t :: \alpha : HK,$$

d'où il suit

$$HK = \frac{\alpha n - \alpha t}{n}.$$

Si maintenant on veut, comme dans le numéro 70, que HK soit égal à une ligne donnée m, on aura $\frac{\alpha n - \alpha t}{n} = m$, et par conséquent $t = \frac{\alpha n - n m}{\alpha}$; et pour le cas où HK devroit être égal à Ie ou à t, il viendroit $\frac{\alpha n - \alpha t}{n} = t$, d'où $t = \frac{\alpha n}{\alpha + n}$, de même que dans le numéro précédent.

75. Faisons maintenant l'application des formules que nous avons trouvées pour la ligne droite, à la recherche des principales propriétés du triangle. Prenons à cet effet deux points M et M', fig. 26, formant, avec l'origine A, Fig. 26.
un triangle quelconque; désignons les coordonnées du premier par . . . . . α, β
celles du second par α', β';
les distances AM, AM', $M'M''$, qui forment les côtés de ce triangle, seront, d'après le numéro 62, exprimées respectivement par

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}, \quad \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}.$$

Si l'on fait $AM = c$, $AM' = c'$, $M'M'' = c''$, on aura ces équations :

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = \alpha^2 + \beta^2 \\ c'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 \\ c''^2 = \alpha'^2 - 2\alpha'\alpha + \alpha^2 + \beta'^2 - 2\beta'\beta + \beta^2 \end{array}\right\} (A),$$

Fig. 23. et si on retranche la dernière de la somme des deux premières, il viendra

$$c^2 + c'^2 - c''^2 = 2(\alpha\alpha' + \beta\beta'),$$

d'où
$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}.$$

Les équations des lignes AM et AM' seront

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x, \quad y = \frac{\beta'}{\alpha'}x \ (\text{n}^\circ. 62);$$

le cosinus de l'angle qu'elles forment entr'elles aura pour expression (n°. 67),

$$\frac{r\left(1 + \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\right)}} = \frac{r(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)}};$$

en faisant le rayon $r = 1$, comme celui des tables des sinus, et substituant à la place des quantités
$\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2$, $\alpha\alpha' + \beta\beta'$, leurs valeurs
c, c', $\frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}$, il viendra

$$\cos MAM' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2cc'},$$

équation qui donne une relation entre les trois côtés du triangle MAM' et l'un de ses angles. Si l'on fait attention que l'angle MAM' est opposé au côté $MM' = c''$, on sera convaincu qu'on doit avoir pour les angles AMM', $AM'M$, respectivement opposés aux côtés $AM' = c'$, $AM = c$, les équations

$$\cos AMM' = \frac{c^2 + c''^2 - c'^2}{2cc''},$$

$$\cos AM'M = \frac{c'^2 + c''^2 - c^2}{2c'c''}.$$ Fig. 26.

En désignant donc par γ'', γ', γ, les angles MAM', AMM', $AM'M$, on obtiendra les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} c^2 + c'^2 - 2cc'\cos\gamma'' = c''^2 \\ c^2 + c''^2 - 2cc''\cos\gamma' = c'^2 \\ c'^2 + c''^2 - 2c'c''\cos\gamma = c^2 \end{array}\right\} (A).$$

Si l'on ajoute ensemble la première et la seconde de ces équations, puis la première et la troisième, puis la seconde et la troisième, on obtiendra trois résultats qui deviendront respectivement divisibles par $2c$, $2c'$, $2c''$, lorsqu'on aura effacé les termes communs aux deux membres de chacun d'eux, et qui donneront ainsi

$$\left.\begin{array}{l} c - c'\cos\gamma'' - c''\cos\gamma' = 0 \\ c' - c\cos\gamma'' - c''\cos\gamma = 0 \\ c'' - c\cos\gamma' - c'\cos\gamma = 0 \end{array}\right\} (B).$$

76. Quoique ces équations soient au nombre de trois, elles ne peuvent cependant faire connoître les côtés lorsque les trois angles seront donnés ; car si on cherchoit les valeurs de c, c', c'', au moyen des expressions générales des inconnues déterminées par trois équations du premier degré, on trouveroit o, à cause que le terme connu manque. Mais ces mêmes équations se changent en

$$\begin{array}{l} 1 - p\cos\gamma'' - q\cos\gamma' = 0 \\ p - \cos\gamma'' - q\cos\gamma = 0 \\ q - \cos\gamma' - p\cos\gamma = 0, \end{array}$$

lorsqu'on fait $\frac{c'}{c} = p$, $\frac{c''}{c} = q$; elles donnent alors le rapport des côtés du triangle proposé, et il reste de plus une équation de condition, qu'on obtient en éliminant p et q : cette équation est

$$1 - \cos\gamma''^2 - \cos\gamma'^2 - \cos\gamma^2 - 2\cos\gamma''\cos\gamma'\cos\gamma = 0,$$

Fig. 23. et elle renferme la relation que doivent avoir entr'eux les trois angles γ, γ' et γ'', pour que leur somme soit égale à deux droits, ainsi que l'exige la nature du triangle rectiligne. Pour s'en assurer, il faut, à l'aide des valeurs de $\sin(p \pm q)$, $\cos(p \pm q)$ (nº. 11), développer l'équation $\cos(2q - \gamma'' - \gamma') = \cos\gamma$, on trouvera d'abord

$$-\cos(\gamma'' + \gamma') = \cos\gamma,$$

en observant que $\sin 2q = 0$, et que $\cos 2q = -1$; puis il viendra

$$-\cos\gamma''\cos\gamma' + \sin\gamma''\sin\gamma' = \cos\gamma,$$

d'où $\cos\gamma + \cos\gamma''\cos\gamma' = \sin\gamma''\sin\gamma'$,

$$(\cos\gamma + \cos\gamma''\cos\gamma')^2 = \sin\gamma''^2\sin\gamma'^2 = (1 - \cos\gamma''^2)(1 - \cos\gamma'^2),$$

et après les réductions, on retombera sur l'équation ci-dessus.

Il est à propos de remarquer que les équations (A) sont, par rapport aux triangles rectilignes, ce que les équations (B) du nº. 41 sont à l'égard des triangles sphériques, et conduiroient, par de simples transformations, aux formules de la résolution des premiers triangles.

77. Pour avoir la surface du triangle MAM', il faudra, du point A, abaisser une perpendiculaire AD sur le côté MM' qui, passant par les points M et M' dont les coordonnées ~~qui~~ sont respectivement α' et β', a pour équation (nº. 62)

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

ou $$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha' - \alpha}.$$

En comparant cette dernière équation avec la formule $y = ax + b$, on trouvera

$$a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}, \quad b = \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha' - \alpha};$$ Fig. 26.

mais en observant que dans le numéro 66, les lettres α et β désignent les coordonnées du point d'où part la perpendiculaire, coordonnées qui sont nulles dans le cas actuel, puisque ce point est l'origine, l'expression de la perpendiculaire se réduit à

$$\frac{-b}{\sqrt{1+a^2}} = -\frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2 + (\beta'-\beta)^2}};$$

et mettant c'' au lieu de $\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2 + (\beta'-\beta)^2}$, il viendra

$$AD = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{c''}.$$

Avec cette valeur, on aura pour la surface du triangle MAM',

$$\frac{MM' \times AD}{2} = S = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{2},$$

expression bien remarquable, en ce qu'elle donne la surface de tous les triangles qui ont leur sommet au point A, au moyen des coordonnées des sommets des angles adjacens à leur base.

On peut la changer en une autre qui ne dépende que des côtés. Pour cela, il faut multiplier entr'elles les deux équations

$$\alpha^2 + \beta^2 = c^2, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = c'^2,$$

et retrancher du produit le quarré de

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2};$$ il viendra

$$\alpha^2\beta'^2 + \alpha'^2\beta^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' = c^2c'^2 - \frac{(c^2 + c'^2 - c''^2)^2}{4};$$

prenant les racines quarrées, et réduisant tous les termes du second membre au même dénominateur, on trouvera

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{4c^2c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2},$$

et la surface du triangle MAM' aura pour expression

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{4c^2c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2}.$$

78. Concevons maintenant un quatrième point M'', dont les coordonnées soient α'', β'', et représentons par d, d', d'', les distances AM'', MM'', $M'M''$, nous aurons

$$\begin{aligned} \alpha''^2 + \beta''^2 &= d^2 \\ (\alpha'' - \alpha)^2 + (\beta'' - \beta)^2 &= d'^2 \\ (\alpha'' - \alpha')^2 + (\beta'' - \beta')^2 &= d''^2. \end{aligned}$$

En développant ces équations, et substituant dans les deux dernières à la place des quantités $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2$, $\alpha''^2 + \beta''^2$, leurs valeurs c^2, c'^2 et d^2, on obtiendra

$$\begin{aligned} c^2 + d^2 - 2(\alpha\alpha'' + \beta\beta'') &= d'^2 \\ c'^2 + d^2 - 2(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'') &= d''^2; \end{aligned}$$

si, pour abréger, on fait

$$\frac{c^2 + d^2 - d'^2}{2} = d_{,}, \quad \frac{c'^2 + d^2 - d''^2}{2} = d_{,,},$$

on aura

$$d_{,} = \alpha\alpha'' + \beta\beta'', \quad d_{,,} = \alpha'\alpha'' + \beta'\beta''.$$

Prenant dans ces équations la valeur de α'' et celle de β'', qui sont

$$\alpha'' = \frac{d_{,}\beta' - d_{,,}\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \qquad \beta'' = \frac{\alpha d_{,,} - \alpha' d_{,}}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},$$

pour les mettre dans $\alpha''^2 + \beta''^2 = d^2$, et ayant égard aux équations $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2 = c'^2$, on trouvera

$$c^2 d_{,,}^2 + c'^2 d_{,}^2 - 2d_{,}d_{,,}(\alpha\alpha' + \beta\beta') = d^2(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 \quad (C).$$

Remplaçant

Remplaçant ensuite les quantités $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ et $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, Fig. 26.
par leurs valeurs

$$\frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2} \text{ et } \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2}$$

obtenues ci-dessus, et remettant

$$\frac{c^2 + d^2 - d'^2}{2}, \quad \frac{c'^2 + d^2 - d''^2}{2}, \text{ pour } d_{,}, d_{,,},$$

cette équation ne renfermera plus que les six distances

$$AM,\ AM',\ MM',\ AM'',\ MM'',\ M'M'',$$

qui forment les quatre côtés et les deux diagonales du quadrilatère $AMM''M'$. Quand les quatre côtés de ce quadrilatère et l'une de ses diagonales seront connus, on pourra trouver l'autre.

79. Si l'on vouloit déterminer le point M'' par les conditions que les trois distances AM'', MM'', $M'M''$ fussent égales, ce point seroit alors le centre du cercle circonscrit au triangle proposé, et l'on auroit $d = d' = d''$, ce qui donneroit $d_{,} = \frac{c^2}{2}$, $d_{,,} = \frac{c'^2}{2}$; l'équation (C) deviendroit

$$c^2 c'^4 + c'^2 c^4 - 2c^2 c'^2 (\alpha\alpha' + \beta\beta') = 4d^2 (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2$$

et se réduiroit à

$$c^2 c'^2 c''^2 = 16 d^2 S^2,$$

en mettant pour $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ sa valeur, et en observant que si on désigne par S la surface du triangle AMM', égale à $\frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{2}$ (n°. 77), on aura

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 = 4S^2.$$

Nous tirerons de là

$$d = \frac{c c' c''}{4S},$$

Fig. 26. expression très-simple du rayon du cercle circonscrit au triangle proposé; et en écrivant $\frac{c^2}{2}$ et $\frac{c'^2}{2}$ au lieu de $d_{\prime}$ et $d_{\prime\prime}$, dans les valeurs de α'' et de β'', nous aurons les coordonnées du centre de ce cercle.

80. Il ne sera pas plus difficile de trouver les coordonnées du centre du cercle inscrit, et le rayon de ce cercle. Dans ce cas, le point M'', fig. 27, se trouve au-dedans du triangle, et dans une situation telle, que les perpendiculaires abaissées de ce point sur chacun des côtés AM, AM', $M'M''$, sont égales entr'elles. Pour exprimer analytiquement cette circonstance, il suffit de former les équations des trois lignes ci-dessus, et d'en déduire, par la formule du n°. 66, les longueurs des perpendiculaires menées du point M''. Or, ces équations sont respectivement

Fig. 27.

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x, \quad y=\frac{\beta'}{\alpha'}x \ (\text{n}^\circ. 61),$$

$$y=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x+\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha'-\alpha} \ (\text{n}^\circ. 62);$$

les perpendiculaires abaissées sur chacune d'elles auront pour expression

$$\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}},$$

$$\frac{(\alpha'-\alpha)\beta''-(\beta'-\beta)\alpha''+\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}},$$

et deviendront

$$\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{c}, \quad \frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{c'},$$

$$\frac{(\alpha'-\alpha)\beta''-(\beta'-\beta)\alpha''+2S}{c''},$$

d'après les relations trouvées ci-dessus, entre α, β, α' et β'. Fig. 27.

Si maintenant on se rappelle que la formule qui donne la perpendiculaire abaissée d'un point sur une ligne, a été obtenue par une extraction de racine quarrée, et qu'elle est par conséquent susceptible d'être prise positivement ou négativement, on en conclura que chacune des expressions ci-dessus a deux valeurs. Pour n'employer que celles qui sont positives, il faut observer que, d'après la figure, la ligne AM' s'écartant plus de l'axe des abscisses AB que la ligne AM, et le point M'' étant compris entre la première et la dernière, on doit avoir

$$\frac{\beta'}{\alpha'} > \frac{\beta''}{\alpha''}, \quad \frac{\beta'}{\alpha'} > \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\beta''}{\alpha''} > \frac{\beta}{\alpha},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\alpha''\beta' > \beta''\alpha', \quad \alpha\beta' > \alpha'\beta, \quad \alpha\beta'' > \alpha''\beta,$$

d'où il suit que pour donner une valeur positive, l'expression de la seconde perpendiculaire doit être prise avec des signes contraires à ceux qu'elle a ci-dessus. Si l'on fait, après ce changement,

$$\frac{\alpha\beta'' - \alpha''\beta}{c} = e, \quad \frac{\alpha''\beta' - \alpha'\beta''}{c'} = e',$$

$$\frac{(\alpha' - \alpha)\beta'' - (\beta' - \beta)\alpha'' + 2S}{c''} = e'',$$

et que l'on ajoute les produits ec, $e'c'$, $e''c''$, il viendra, par les réductions,

$$ec + e'c' + e''c'' = 2S.$$

Cette équation est évidente par elle-même, car les produits ec, $e'c'$, $e''c''$, expriment les surfaces des triangles $AM''M$, $AM''M'$, $MM''M'$, multipliées par 2, et dont la somme est égale à celle du triangle total AMM', qu'on

Fig. 27. a désignée par S. Lorsqu'on a $e=e'=e''$, on obtient sur-le-champ

$$e=\frac{2S}{c+c'+c''},$$

et quand $c=c'=c''$, il vient

$$e+e'+e''=\frac{2S}{c}.$$

La première de ces expressions est celle du rayon du cercle inscrit, et la seconde nous fait voir que si d'un point quelconque pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral, on abaisse une perpendiculaire sur chacun des côtés de ce triangle, la somme de ces trois lignes sera égale à sa hauteur, puisqu'en prenant le côté c pour base, et nommant h la hauteur, on a $S=\frac{ch}{2}$, ce qui donne $e+e'+e''=h$.

On pourroit tirer encore un grand nombre de conséquences de la théorie que je viens d'exposer; mais ce qui précède suffit pour cet ouvrage, dont le but est seulement de donner une idée de la forme que l'on pourroit faire prendre à l'application de l'algèbre à la géométrie, en suivant la marche tracée dans la préface de mon *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral;* et j'observerai qu'il existe pour les polygones rectilignes quelconques des équations analogues aux équations (A) du numéro 75, qui s'obtiennent de la même manière, et qui conduiroient aux propriétés de ces polygones, comme celles-ci mènent aux propriétés du triangle. Lagrange a donné, sur les pyramides, un Mémoire auquel ceci peut servir de préliminaire, et qu'on étendroit aux polyèdres en faisant usage des formules rapportées dans le cinquième chapitre du premier volume de l'ouvrage cité plus haut.

Pour ne rien laisser à desirer sur ce qui concerne le triangle, nous allons parvenir, par la considération immédiate de la propriété fondamentale du triangle rectangle, aux équations (A) et à l'expression de la surface trouvée dans le numéro 77.

81. La perpendiculaire AD, fig. 26, partage le triangle MAM' en deux triangles rectangles AMD, $AM'D$, qui donnent Fig. 26.

$$\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{MD}^2, \quad \overline{AM'}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{M'D}^2,$$

et si l'on désigne, comme plus haut, les côtés AM, AM', MM', par c, c', c'', qu'on nomme t le segment MD, et u la perpendiculaire AD, on aura

$$M'D = MM' - MD = c'' - t;$$

les équations ci-dessus deviendront

$$c^2 = t^2 + u^2, \quad c'^2 = (c'' - t)^2 + u^2:$$

développant la seconde, et retranchant la première, on trouvera

$$c'^2 - c^2 = c''^2 - 2c''t, \text{ ou } c^2 + c''^2 - 2c''t = c'^2.$$

Or, le triangle rectangle AMD donne

$$MD = AM \cos AMM';$$

désignant donc, comme dans le numéro 75, les angles MAM', AMM', $AM'M$, par γ'', γ', γ, on obtiendra

$$t = c \cos \gamma',$$

et par conséquent

$$c^2 + c''^2 - 2cc'' \cos \gamma' = c'^2,$$

équation qui est une de celles du numéro cité.

82. Si on tire la valeur de t de l'équation

Fig. 26. $c^2+c''^2-2c''t=c'^2$, pour la substituer dans $c^2=t^2+u^2$, on trouvera

$$u=\sqrt{c^2-\frac{(c^2+c''^2-c'^2)^2}{4c''^2}}$$

$$=\frac{1}{2c''}\sqrt{4c^2c''^2-(c^2+c''^2-c'^2)^2},$$

et multipliant u par $\frac{1}{2}c''$, pour obtenir la surface du triangle MAM', égale à $\frac{1}{2}MM'\times AD$, il viendra

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{4c^2c''^2-(c^2+c''^2-c'^2)^2}.$$

Il est facile de voir que cette expression n'est pas présentée ici sous la forme la plus élégante qu'on puisse lui donner, car elle ne paroît pas symétrique par rapport à chacun des côtés c, c', c'', ce qui pourtant devroit être, puisqu'en y changeant les lettres les unes dans les autres, elle ne doit point changer de valeur. Il suit évidemment de là qu'elle peut être ramenée à ne contenir que des combinaisons semblables des lettres qu'elle renferme, et l'on atteint ce but en observant que la quantité $4c^2c''^2-(c^2+c''^2-c'^2)^2$, étant la différence de deux quarrés, se décompose dans les facteurs

$$2cc''+c^2+c''^2-c'^2,\quad 2cc''-c^2-c''^2+c'^2,$$

qui reviennent à

$$(c+c'')^2-c'^2,\quad -(c-c'')^2+c'^2,$$

et se décomposent eux-mêmes dans les quatre suivans :

$$c+c'+c'',\quad c+c''-c',\quad c+c'-c'',\quad c'+c''-c:$$

on aura donc

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(c+c'+c'')(c'+c''-c)(c+c''-c')(c+c'-c'')}.$$

Maintenant si l'on fait attention que

$$c' + c'' - c = (c + c' + c) - 2c$$
$$c + c'' - c' = (c + c' + c'') - 2c'$$
$$c + c' - c'' = (c + c' + c'') - 2c'',$$

et que l'on pose $c + c' + c'' = 2s$, on trouvera enfin que la surface du triangle MAM' est exprimée par

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{2s \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-c') \cdot 2(s-c'')},$$

et se réduit à

$$\sqrt{s(s-c)(s-c')(s-c'')},$$

formule aussi remarquable par l'utilité dont elle peut être pour évaluer la surface d'une figure plane quelconque, que par son élégance.

83. La combinaison de l'équation de la circonférence du cercle avec celle de la ligne, droite conduit aux diverses propriétés qui résultent de la rencontre de ces lignes, et donne la solution de toutes les questions dans lesquelles l'inconnue ne passe pas le second degré.

Soient

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad y - \beta = a(x - \alpha),$$

ces deux équations ; les employer à la détermination de x et de y, ou les considérer comme renfermant les mêmes inconnues, c'est supposer que les points auxquels appartiennent les coordonnées x, y, sont situées en même temps sur la circonférence du cercle et sur la ligne droite proposées, c'est-à-dire sont les intersections de ces lignes : et en général, il est évident que pour trouver les points de rencontre de deux lignes quelconques, il suffit de supposer que leurs équations ne contiennent que les mêmes inconnues.

En chassant d'abord y, par le moyen de sa valeur prise dans la première équation, on trouvera

$$x^2 + (ax + \beta - a\alpha)^2 = r^2.$$

Cette équation, du second degré, étant développée, donnera deux valeurs pour x, parce qu'en effet la ligne droite doit rencontrer en général le cercle en deux points; mais on peut arriver à des résultats plus simples, en prenant pour inconnue la distance du point dont les coordonnées sont α et β à l'un des points d'intersection de la droite et du cercle. Si l'on désigne cette distance par z, on aura (n°. 62)

$$z = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2},$$

d'où l'on tirera

$$z^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2,$$

et mettant pour $y-\beta$ sa valeur $a(x-\alpha)$, il viendra

$$z^2 = (x-\alpha)^2 (1+a^2),$$

d'où l'on tirera

$$(x-\alpha) = \frac{z}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y-\beta = \frac{az}{\sqrt{1+a^2}},$$

ce qui donne

$$x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y = \beta + \frac{az}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Substituant ces dernières valeurs dans l'équation $x^2 + y^2 = r^2$, on la changera en cette autre :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 + \dfrac{2\alpha z}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{z^2}{1+a^2} \\ + \beta^2 + \dfrac{2\beta a z}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{a^2 z^2}{1+a^2} \end{array}\right\} = r^2,$$

qui se réduit à

$$z^2 + \frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0,$$

et qui fera d'abord connoître z, et ensuite x et y, au moyen des expressions précédentes.

Il est visible que si le point E, fig. 28, est celui dont les coordonnées sont α et β, que MNM' et EM soient le cercle et la droite proposés, a exprimera la tangente de l'angle EeB, et les deux valeurs de z appartiendront aux droites EM et EM'. Fig. 28.

84. On sait par la théorie des équations que le dernier terme est le produit de toutes les racines; si donc on nomme z' et z'' celles de l'équation ci-dessus, on aura

$$z' z'' = \alpha^2 + \beta^2 - r^2,$$

expression qui, ne dépendant point de la quantité a, demeurera la même, quelle que soit cette quantité, c'est-à-dire quel que soit l'angle EeB dont elle est la tangente; et comme z' et z'' représentent les deux lignes ME et $M'E$, il suit de-là que le produit $M'E \times ME$ est le même pour toutes les lignes menées par le point E, ou, que si l'on tire une seconde sécante Em', on aura

$$EM \times EM' = Em \times Em',$$

d'où il résulte que les sécantes EM' et Em' sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures EM et Em, ainsi qu'on le prouve dans les élémens.

Lorsque le point E est en dehors du cercle, on a $\alpha^2 + \beta^2 > r^2$, puisque $\alpha^2 + \beta^2$ exprime le quarré de la distance du point E au centre A; mais quand ce point est intérieur au cercle, comme le montre la figure 29, z' et z'' sont de signes différens, parce que le dernier terme $\alpha^2 + \beta^2 - r^2$ devient négatif, à cause de $\alpha^2 + \beta^2 < r^2$. D'ailleurs le produit $EM \times EM'$ demeure Fig. 29.

Fig. 29. indépendant de l'inclinaison de la ligne MM', par rapport à AB; et en menant par le point E une seconde corde mm', on a encore

$$EM \times EM' = Em \times Em',$$

d'où il résulte, comme on le prouve dans les élémens, que les cordes d'un même cercle se coupent en raison réciproque, et l'on voit que ce théorême et le précédent n'en font, à proprement parler, qu'un seul, puisqu'ils se déduisent de la même équation.

En tirant de l'équation

$$z^2 + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1+a^2}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

la valeur de z, nous trouverons

$$z' = \frac{-(\alpha + \beta a) + \sqrt{r^2(1+a^2) - (\beta - a\alpha)^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$z'' = \frac{-(\alpha + \beta a) - \sqrt{r^2(1+a^2) - (\beta - a\alpha)^2}}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Fig. 28. Telles sont les expressions des lignes EM et EM'. Elles peuvent être simplifiées en changeant les coordonnées, de manière que les abscisses x et α soient prises sur la droite qui joint le point E avec le centre A du cercle proposé, en partant toujours de ce point, et que les ordonnées y soient perpendiculaires à la droite dont il s'agit : on aura alors $\beta = 0$, $\alpha = AE$, et

$$z' = \frac{-\alpha + \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$z'' = \frac{-\alpha - \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

l'équation au cercle ne changera point, mais celle de la Fig. 28.
droite EM deviendra

$$y = a(x - \alpha).$$

85. En supposant que le point E soit extérieur au cercle, on aura

$$MM' = EM' - EM = \frac{2\sqrt{r^2(1 + a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1 + a^2}};$$

mais il est visible que cette ligne diminue à mesure que la ligne EM, tournant autour du point E, tend à sortir du cercle, et que les points M et M' finissent par coïncider en N, lorsque cette ligne n'a plus avec le cercle qu'un simple contact. A ce point, on a donc $MM' = 0$, et par conséquent

$$r^2(1 + a^2) - a^2\alpha^2 = 0,$$

d'où on tirera

$$a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}},$$

c'est-à-dire l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle que doit faire avec la ligne AE une ligne EN, menée par le point E, de manière à toucher le cercle.

Nous venons donc de résoudre algébriquement ce problême : *mener par un point pris hors d'un cercle une tangente à ce cercle.*

86. Les mêmes considérations nous serviront aussi à déterminer la tangente menée par un point pris sur la circonférence du cercle ; et pour plus de généralité, nous prendrons ce point d'une manière quelconque, en désignant toujours par α et β ses coordonnées ; nous aurons par l'équation du cercle à laquelle ces quantités

doivent satisfaire, $\alpha^2+\beta^2=r^2$, ce qui réduira l'équation

$$z^2+\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}z+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

à
$$z^2+\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}z=0,$$

et dans cet état, elle se décomposera en

$$z=0,\qquad z+\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}=0;$$

ses deux racines seront donc

$$z'=0,\qquad z''=-\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}:$$

la différence de ces valeurs, ou la longueur de la partie de la sécante comprise dans le cercle, sera

$$\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Pour que cette quantité s'évanouisse, il faudra qu'on ait

$$\alpha+\beta a=0,\quad \text{ou}\quad a=-\frac{\alpha}{\beta},$$

résultat qui s'accorde avec ce qu'on démontre dans les élémens; car la droite menée par le centre du cercle et par le point dont les coordonnées sont α et β, ou le rayon AN, auroit pour équation $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ (n°. 61); l'équation $y-\beta=a(x-\alpha)$ devenant, par la valeur de a trouvée ci-dessus, $y-\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)$, représentera la droite perpendiculaire à ce rayon, et passant par le point dont les coordonnées sont α et β, c'est-à-dire par son extrémité N.

Si l'on vouloit connoître la distance de l'origine A des coordonnées, au point où la tangente $N\,T$ rencontre l'axe des abscisses, il faudroit, dans l'équation de cette tangente, faire $y=0$, ce qui donneroit Fig. 28.

$$-\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha), \quad \text{et} \quad x=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}=\frac{r^2}{\alpha},$$

à cause de $\alpha^2+\beta^2=r^2$.

87. Nous pouvons, par ce qui précède, résoudre la question suivante : *Trouver la position que doit avoir la ligne* E M, *menée par le point donné* E, *pour que la partie* M M' *de cette ligne, comprise dans le cercle, soit d'une grandeur désignée par* m. Afin de parvenir à des expressions plus simples, nous prendrons, comme à la fin du numéro 85, la ligne $A\,E$ pour axe des abscisses, et nous aurons, par ce numéro,

$$m=\frac{2\sqrt{r^2(1+a^2)-a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}};$$

Faisant disparoître les radicaux, il viendra

$$m^2(1+a^2)=4r^2(1+a^2)-4a^2\alpha^2,$$

d'où nous tirerons

$$a=\frac{\sqrt{4r^2-m^2}}{\sqrt{4\alpha^2-4r^2+m^2}};$$

substituant cette valeur dans $y=a(x-\alpha)$, nous aurons l'équation de la droite cherchée.

88. Ce n'est encore là que la solution analytique du problème qui nous occupe ; il faut maintenant construire l'expression ci-dessus par des opérations *graphiques*, c'est-à-dire avec la règle et le compas. Pour y parvenir, on observera d'abord que le numérateur $\sqrt{4r^2-m^2}$

exprime le côté d'un triangle rectangle dont $2r$ est l'hypothénuse, et m le troisième côté. On donnera ensuite au dénominateur $\sqrt{4\alpha^2-4r^2+m^2}$ la forme $\sqrt{4\alpha^2-(4r^2-m^2)}$, équivalente à $\sqrt{4\alpha^2-(\sqrt{4r^2-m^2})^2}$, et qui fait voir que ce dénominateur est aussi le côté d'un triangle rectangle ayant pour hypothénuse 2α, et pour troisième côté le radical $\sqrt{4r^2-m^2}$, ou le numérateur dont nous venons d'indiquer la construction.

En désignant par p et par q les deux lignes qu'on obtiendra par ces opérations, nous aurons $a=\frac{p}{q}$; et comme l'équation $y=a(x-\alpha)$ donne $\frac{y}{x-\alpha}=a$, il en résulte $\frac{y}{x-\alpha}=\frac{p}{q}$, d'où $p:q::x-\alpha:y$. Si donc nous prenons sur AE, à partir du point E, une distance égale à p, et que par l'autre extrémité de cette distance, nous élevions une perpendiculaire égale à q, la droite qui joindra l'extrémité de cette perpendiculaire avec le point E jouira de la propriété comprise dans l'énoncé de la question.

89. Le triangle rectangle et le cercle donnent le moyen de construire la racine quarrée d'une quantité quelconque exprimée en lignes. L'usage du premier est évident lorsque la quantité comprise sous le radical est la somme ou la différence de deux quarrés. En effet, on a dans ce cas $\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sqrt{a^2-b^2}$; l'une de ces expressions peut être regardée comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont a et b, et l'autre comme l'un des côtés adjacens à l'angle droit, dans un triangle de même nature, dont l'hypothénuse seroit a et le troisième côté b.

On construira, par une suite de triangles, l'expression $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$: ayant obtenu d'abord $\sqrt{a^2+b^2}$, on représentera cette ligne par α, ce qui donnera $a^2+b^2=\alpha^2$, et la quantité proposée deviendra $\sqrt{\alpha^2+c^2+d^2}$; on construira le radical $\sqrt{\alpha^2+c^2}$ comme le précédent, et nommant β le résultat de cette opération, on aura $\alpha^2+c^2=\beta^2$: il ne restera plus qu'à trouver $\sqrt{\beta^2+d^2}$, ce qui se fera en prenant l'hypothénuse du triangle rectangle dont les côtés sont β et d. Il est facile d'étendre ce procédé au cas où le radical à construire contiendroit un nombre quelconque de quarrés.

Passons maintenant à l'emploi du cercle dans l'extraction des racines. L'équation de sa circonférence étant mise sous la forme $y=\sqrt{r^2-x^2}$, donne $y=\sqrt{(r+x)(r-x)}$, et par conséquent si l'on fait $r+x=a$, $r-x=b$, on aura $y=\sqrt{ab}$; mais $r+x=E'A+AP=E'P$, fig. 21, $r-x=EA-AP=EP$: Fig. 21. prenant donc $E'P=a$, $EP=b$, et sur la somme EE' de ces deux lignes, prise pour diamètre, décrivant un cercle, l'ordonnée PM élevée sur le point P sera y ou $\sqrt{ab}$, c'est-à-dire qu'elle sera moyenne proportionnelle entre $E'P$ et EP.

On peut encore trouver une moyenne proportionnelle entre deux quantités quelconques, par un procédé qu'il est bon de connoître. Il consiste à prendre la plus grande des deux lignes a et b, pour le diamètre EE' du cercle, l'autre pour l'abscisse EP, à élever ensuite l'ordonnée PM, et à tirer la corde EM qui est la moyenne proportionnelle demandée. En effet, par le triangle rectangle PME, on a

$$ME = \sqrt{\overline{PE}^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{(r-x)^2 + y^2} = \sqrt{(r-x)^2 + r^2 - x^2}$$
$$= \sqrt{2r^2 - 2rx} = \sqrt{2r(r-x)} = \sqrt{EE' \times EP}.$$

Le calcul seroit le même, et conduiroit au même résultat, dans le cas où l'abscisse seroit plus grande que le rayon : on prendroit alors $E'P = r + x$ à la place de EP.

90. A l'aide de ces méthodes, on construira tous les radicaux du second degré, quelle que soit la quantité qu'ils renferment. Soit pour exemple

$$\sqrt{a^2 + bc - \frac{def}{g}};$$

on fera $bc = ak$, $\frac{def}{g} = ak'$; l'expression proposée deviendra

$$\sqrt{a^2 + ak - ak'} = \sqrt{(a + k - k')a},$$

et pour l'obtenir, il suffira de prendre une moyenne proportionnelle entre deux lignes respectivement égales à $a + k - k'$ et a: il est d'ailleurs évident que les quantités k et k' se détermineront par les lignes proportionnelles, d'après ce qui a été dit n°. 72, puisque les équations dont elles dépendent donnent

$$k = \frac{bc}{a}, \quad k' = \frac{def}{ag},$$

et conduisent par conséquent à ces proportions

$$a : b :: c : k,$$

$$a : d :: e : \frac{de}{a}, \quad g : f :: \frac{de}{a} : \frac{def}{ag} = k'.$$

91. La quantité que l'on se propose de construire pourroit ne pas être homogène; mais cela n'arrivera que lorsqu'on aura fait quelque ligne égale à l'unité, ou que l'on aura représenté un nombre par une lettre; et les

méthodes

méthodes indiquées ci-dessus ne seront pas arrêtées par cette circonstance, pourvu qu'on fasse reparoître, dans tous les termes où elle devoit se trouver, et avec des exposans convenables, la ligne prise pour unité.

Si l'on avoit $\sqrt{a+\frac{bc}{d^3}}$, et que l'on sût par l'énoncé de la question par laquelle on seroit arrivé à cette expression, qu'elle doit appartenir à une ligne, on verroit que chacun des termes compris sous le radical devroit être du second degré, et que par conséquent en désignant l'unité par n, il faudroit écrire an au lieu de a, et $\frac{bcn^3}{d^3}$ au lieu de $\frac{bc}{d^3}$, ce qui ne change rien à la grandeur absolue de ces quantités, puisque $n = n^3 = 1$, et en général $n^m = 1$, quelle que soit m : on auroit de cette manière

$$\sqrt{an+\frac{bcn^3}{d^3}} = \sqrt{n\left(a+\frac{bcn^2}{d^3}\right)},$$

qui se construiroit facilement.

Nous observerons que, d'après ce qui précède, on peut extraire, par une opération graphique, la racine quarrée d'un nombre quelconque, en prenant une moyenne proportionnelle entre deux lignes, dont l'une représenteroit l'unité, et l'autre auroit avec celle-ci le rapport marqué par le nombre proposé. $\sqrt{\frac{7}{5}}$, par exemple, s'obtiendroit en prenant une moyenne proportionnelle entre deux lignes, dont une seroit les $\frac{7}{5}$ de l'autre, puisque $\sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{1 \times \frac{7}{5}}$.

92. **Rien n'est plus facile maintenant que de résoudre graphiquement l'équation du second degré $x^2 - ax = b^2$,**

qui peut représenter toutes celles de ce degré. En effet, en tirant les valeurs de x, on a

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b^2}:$$

il ne s'agit que de construire le radical $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+b^2}$, ce qu'on effectuera sans peine d'après ce qui a été dit n°. 89; on prendra ensuite la somme et la différence du résultat et de la ligne $\tfrac{1}{2}a$, et l'on aura ainsi la grandeur de chacune des racines de la proposée.

Si cette équation étoit de la forme $x^2 - ax = -b^2$, on auroit

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b^2};$$

sa construction, dans ce cas, ne différeroit de celle du précédent, qu'en ce que le radical seroit exprimé par l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, au lieu de l'être par l'hypothénuse, et que ce triangle cesseroit d'exister si l'on avoit $\tfrac{1}{2}a < b$, parce qu'alors ayant pris
Fig. 21. sur l'un des côtés d'un angle droit, de APM, fig. 21, par exemple, une grandeur $AP=b$, le cercle décrit du point A comme centre, avec un rayon qui seroit moindre que AP, n'atteindroit pas l'autre côté PM: cette circonstance s'accorde avec la théorie des équations du second degré, qui donne des racines imaginaires pour le cas dont il s'agit.

Pour appliquer ce qui précède, proposons-nous la question suivante: *Etant donnée la somme ou la différence des deux côtés contigus d'un rectangle et sa surface, construire ce rectangle.*

Soient b^2 la surface du rectangle demandé, a la somme ou la différence de ses côtés contigus, x l'un d'eux; l'autre sera exprimé par $a-x$ dans le premier cas, et par $a+x$ dans le second; la surface sera $(a-x)x$

pour l'un, et $(a+x)x$ pour l'autre; en sorte qu'on Fig. 21.
aura ces deux équations :

$$ax-x^2=b^2, \quad ax+x^2=b^2,$$

lesquelles, étant résolues, donneront des valeurs de x constructibles par la méthode précédente.

93. Les équations du second degré se construisent élégamment par le cercle; pour cela, il faut employer l'équation la plus générale de cette courbe qui s'obtient en plaçant son centre d'une manière quelconque: or, on voit par la figure 21 que si l'on prend le point A''' pour l'origine des coordonnées, et que l'on fasse

$$A'''A'=\alpha,\ A'A=\beta,\ AM=r,\ A'''Q=x,\ QM=y,$$

on aura

$$AP=A''P-A''A=A'''Q-A'''A'=x-\alpha,$$
$$PM=QM-PQ=QM-AA'=y-\beta;$$

à cause de $\overline{AP}^2+\overline{PM}^2=\overline{AM}^2$, il viendra

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

ou, en développant,

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2=r^2.$$

Si l'on vouloit que l'origine A''' fût placée sur un point de la circonférence, on auroit

$$\alpha^2+\beta^2=r^2,$$

et l'équation ci-dessus se réduiroit à

$$x^2-2\alpha x+y^2-2\beta y=0;$$

enfin si, pour plus de simplicité, on faisoit coïncider ce point avec l'extrémité E du diamètre EE', AA' ou β deviendroit nul, et α seroit égal à r: on auroit par conséquent

$$x^2-2rx+y^2=0.$$

Si maintenant on fait $2r = a$, et $y = b$ dans cette équation, elle se changera en

$$x^2 - ax + b^2 = 0, \text{ ou } x^2 - ax = -b^2,$$

qui est la première des équations proposées dans le numéro précédent ; et de-là résulte cette construction :
Fig. 30. Ayant décrit sur la ligne $EE' = a$, fig. 30, prise pour diamètre, un cercle, on élèvera au point E une perpendiculaire EF, sur laquelle on portera $EG = b$; on tirera ensuite GM parallèle à EE', et abaissant les perpendiculaires PM et $P'M'$, elles détermineront les abscisses EP et EP', qui seront les deux valeurs de x, puisqu'aux points M et M', pour lesquels l'ordonnée $y = b$, on aura $x^2 - ax = -b^2$. Il est visible que lorsque GE surpassera le rayon du cercle, ou $\frac{1}{2}a$, auquel cas les racines de l'équation proposée seront imaginaires, la droite menée par le point G parallèlement à EE', passera au-dessus du cercle, et ne déterminera par conséquent aucun point sur sa circonférence.

Les racines de l'équation $x^2 + ax = -b^2$ ne différant de celles de la précédente que parce qu'elles sont négatives, s'obtiennent par la construction que nous venons d'indiquer.

94. Il n'en est pas de même pour l'équation $x^2 - ax = b^2$: ici il faut employer la propriété des sécantes et des tangentes, démontrée dans le numéro 84. Pour l'appliquer au sujet qui nous occupe, on mettra l'équation proposée sous la forme $x(x-a) = b^2$, on décrira sur le rayon $AD = \frac{1}{2}a$ un cercle, on mènera la tangente DH, qu'on fera égale à b, et par les points A et H on tirera une sécante HN. En nommant x la ligne HN', on aura évidemment

$HN = HN' - NN' = HN' - EE' = HN' - 2\,AD = x - a$, Fig. 30.

et la propriété citée plus haut, donnant $HN' \times HN = \overline{DH}^2$, il en résultera $x(x-a) = b^2$, ce qui est l'équation proposée.

Si l'on avoit $x^2 + ax = b^2$, il faudroit faire $HN = x$; on auroit alors $HN' = x + a$, et $x(x+a) = b^2$.

La construction présente n'étant sujette à aucune exception, nous montre que tant que b^2 sera positif dans le second membre en même temps que x^2 l'est dans le premier, les racines de l'équation proposée seront toujours réelles.

95. S'il s'agissoit de partager une ligne a en moyenne et extrême raison, et qu'on nommât x l'une de ses parties, on auroit

$$a - x : x :: x : a,$$

d'où $a^2 - ax = x^2$, ou, ce qui revient au même, $x^2 + ax = a^2$, équation qui rentre dans $x^2 + ax = b^2$, lorsqu'on fait $a = b$. Dans ce cas, $AD = \frac{1}{2} DH$, et la construction proposée ci-dessus, modifiée ainsi, s'accorde parfaitement avec celle que l'on donne pour la même question dans les Elémens de Géométrie, où cependant on ne tient compte que de la plus petite des deux valeurs de x, représentée par HN. L'autre valeur HN' ne résout pas le problême dans le sens précis de son énoncé, mais elle satisfait à une équation dans laquelle cet énoncé se trouve compris. En effet, de

$$HN' : DH :: DH : HN, \quad \text{ou} \quad x + a : a :: a : x,$$

on déduit encore, comme ci-dessus,

$$x^2 + ax = a^2;$$

mais alors c'est la ligne HN' qui se trouve partagée en

Fig. 30. moyenne et extrême raison au point N, et le plus grand segment est égal à la ligne donnée DH.

Le problême suivant est très-propre à faire connoître comment il faut interpréter les diverses solutions qu'offre une même équation.

Fig. 31. 96. *D'un point* E, fig. 31, *placé comme on voudra, mener une droite de manière que la partie* D′ F′ *de cette droite, interceptée entre deux lignes qui forment entr'elles un angle droit* BAC', *soit d'une grandeur donnée.*

Désignons comme à l'ordinaire par α et β les coordonnées du point donné E; représentons par $y-\beta=a(x-\alpha)$ l'équation de la droite ED', menée par ce point. Pour obtenir la longueur de $D'F'$, il suffit de déterminer AD' et AF', c'est-à-dire la valeur de y lorsque $x=0$, et celle de x lorsque $y=0$, hypothèses qui fournissent les équations

$$y-\beta=-a\alpha,\quad -\beta=a(x-\alpha),$$

desquelles on tire

$$y=\beta-a\alpha=AD',\quad x=-\frac{\beta-a\alpha}{a}=AF',$$

et comme $F'D'=\sqrt{\overline{AD'}^2+\overline{AF'}^2}$, il en résulte

$$F'D'=\sqrt{(\beta-a\alpha)^2+\frac{1}{a^2}(\beta-a\alpha)^2}=\frac{\beta-a\alpha}{a}\sqrt{1+a^2};$$

posant $F'D'=m$, et élevant au quarré pour faire disparoître le radical, il vient

$$m^2=\left(\frac{\beta-a\alpha}{a}\right)^2(1+a^2).$$

Cette équation étant développée et ordonnée par rapport à a, se changera en

$$a^4-\frac{2\beta}{\alpha}a^3+\frac{\beta^2+\alpha^2-m^2}{\alpha^2}a^2-\frac{2\beta}{\alpha}a+\frac{\beta^2}{\alpha^2}=0,$$ Fig. 31.

et monte, comme on voit, au quatrième degré; mais si l'on fait $\beta=\alpha$, c'est-à-dire, si l'on prend le point E à égale distance des deux axes AC et AB, elle deviendra

$$a^4-2a^3+\frac{2\alpha^2-m^2}{\alpha^2}a^2-2a+1=0,$$

sera réciproque, et par conséquent réductible au second degré. En faisant $a+\frac{1}{a}=a'$ (Voyez l'*Alg. de Clairaut*, 5[e] *édit. tom. II, pag.* 239), on obtiendra en a' l'équation

$$a'^2-2a'-\frac{m^2}{\alpha^2}=0,$$

qui donnera

$$a'=1\pm\sqrt{1+\frac{m^2}{\alpha^2}};$$

on tirera ensuite de l'équation $a+\frac{1}{a}=a'$,

$$a^2-a'a+1=0,\quad a=\tfrac{1}{2}a'\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a'^2-1}.$$

Substituant dans ce résultat les deux valeurs de a', il donnera quatre valeurs de a, qui répondront à un pareil nombre de solutions différentes, dont le problême proposé est susceptible.

On peut y arriver immédiatement en donnant à l'équation

$$a^4-2a^3+\frac{2\alpha^2-m^2}{\alpha^2}a^2-2a+1=0$$

la forme

$$a^4-2a^3+2a^2-\frac{m^2}{\alpha^2}a^2-2a+1=0,$$

passant ensuite le terme $\frac{m^2}{\alpha^2}a^2$ dans le second membre,

Fig. 51. et ajoutant en même temps de part et d'autre la quantité a^2: on aura

$$a^4 - 2a^3 + 2a^2 - 2a + 1 + a^2 = \left(\frac{m^2}{\alpha^2} + 1\right)a^2;$$

extrayant la racine quarrée de chaque membre, on trouvera

$$a^2 - a + 1 = \pm a\sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2} + 1},$$

ce qui revient à

$$a^2 - \frac{\alpha \pm \sqrt{m^2 + \alpha^2}}{\alpha}\,a + 1 = 0.$$

Cette équation doit être considérée comme équivalente à deux équations du second degré, à cause des deux formes dont le coefficient de son second terme est susceptible ; et elle donne successivement

$$a^2 - \frac{\alpha + \sqrt{m^2 + \alpha^2}}{\alpha}\,a + 1 = 0,$$

$$a^2 - \frac{\alpha - \sqrt{m^2 + \alpha^2}}{\alpha}\,a + 1 = 0.$$

Si on désigne par a', a'', les deux racines de la première, et par a''', a'''', celles de la seconde, on aura en vertu du dernier terme égal à l'unité, $a'\,a'' = 1$, $a'''\,a'''' = 1$; et comme a exprime la tangente d'un angle, prise pour un rayon $= 1$, il s'ensuit que les valeurs a' et a'' appartiennent à deux angles complément l'un de l'autre, et qu'il en est de même de a''' et a'''' (n°. 9).

En résolvant les équations ci-dessus, il vient

$$a' = \frac{\alpha + \sqrt{m^2+\alpha^2} + \sqrt{-2\alpha^2 + m^2 + 2\alpha\sqrt{m^2+\alpha^2}}}{2\alpha}$$

$$a'' = \frac{\alpha + \sqrt{m^2+\alpha^2} - \sqrt{-2\alpha^2 + m^2 + 2\alpha\sqrt{m^2+\alpha^2}}}{2\alpha}$$

$$a'' = \frac{a - \sqrt{m^2+a^2} + \sqrt{-2a^2+m^2-2a\sqrt{m^2+a^2}}}{2a}$$ Fig. 31.

$$a''' = \frac{a - \sqrt{m^2+a^2} - \sqrt{-2a^2+m^2-2a\sqrt{m^2+a^2}}}{2a}.$$

De ces quatre valeurs, deux seront toujours réelles, savoir les deux premières; les deux autres deviendront imaginaires lorsqu'on aura $2a^2 + 2a\sqrt{m^2+a^2} > m^2$, puisque dans ce cas la quantité soumise au radical sera négative; mais avant de parvenir à ce terme, les mêmes valeurs deviendront égales si $2a^2 + 2a\sqrt{m^2+a^2} = m^2$. Pour reconnoître ce cas, il faut mettre l'équation précédente sous la forme $2a^2 - m^2 = -2a\sqrt{m^2+a^2}$, et faisant évanouir les radicaux, il vient

$$-4a^2m^2 + m^4 = 4a^2m^2;$$

divisant par m^2, on arrive à un résultat qui donne

$$m^2 = 8a^2, \text{ ou } m = \sqrt{8a^2} = 2a\sqrt{2}.$$

Les valeurs de a', a'', a''', a'''', se changent, d'après celle-ci, en

$$a' = 2 + \sqrt{3},\ a'' = 2 - \sqrt{3},\ a''' = a'''' = -1.$$

97. On voit d'abord par l'inspection de la figure, que l'on peut en général remplir les conditions du problême proposé de quatre manières différentes : 1°. par la ligne EF' menée convenablement dans l'angle BAC';

2°. Par la ligne ED'', menée dans l'angle CAB', de manière que $AD'' = AF'$; car il est facile de voir que le point E étant situé de la même manière par rapport à chacun des axes AC et AB, on a alors $AF'' = DA'$, et par conséquent $D''F'' = D'F'$; par la même raison l'angle $EF''B = ED'C$. Mais $ED'C$ est le

Fig. 31. complément de $D'F'A$, ce qui établit en effet, entre les deux solutions représentées par EF' et EF'', la relation que nous avons fait remarquer plus haut.

3°. Quand la grandeur de la ligne donnée m ne sera pas au-dessous d'une certaine limite (savoir $2\alpha\sqrt{2}$), il sera possible de mener dans l'angle BAC une troisième ligne $D'''F'''$, qui résoudra encore la question proposée.

4°. Si l'on prend $AF''''=AD'''$, et $AD''''=AF'''$, la ligne $F''''D''''$ sera encore égale à la droite donnée; et il est évident que les angles $D'''F'''A$ et $D''''F''''A$ sont encore complémens l'un de l'autre, puisque le second triangle $D''''AF''''$ n'est autre que le triangle $D'''AF'''$, dont on a placé le côté AF''' dans la direction de AC: on voit de plus que ces deux solutions se confondent lorsque l'angle $D'''F'''A$ est égal à un demi-droit. Enfin les lignes $D'''F'''$ et $D''''F''''$, étant situées toutes deux en sens contraire des lignes $D'F'$ et $D''F''$, répondront aux deux valeurs négatives de a.

La construction des expressions de a', a'', a''', a'''', ne dépend que de celle des radicaux

$$\sqrt{\alpha^2+m^2},\quad \sqrt{-2\alpha^2+m^2+2\alpha\sqrt{\alpha^2+m^2}}$$
$$\sqrt{-2\alpha^2+m^2-2\alpha\sqrt{\alpha^2+m^2}}.$$

Le premier s'obtient facilement, puisqu'il n'exprime que l'hypothénuse du triangle rectangle dont les côtés sont α et m: à l'égard des deux derniers, il faut observer qu'ils peuvent se changer respectivement en

$$\sqrt{(\alpha+\sqrt{\alpha^2+m^2})^2-4\alpha^2},\quad \sqrt{(\alpha-\sqrt{\alpha^2+m^2})^4-4\alpha^2},$$

et que par conséquent l'un est le côté de l'angle droit du triangle rectangle, dont l'hypothénuse et le troisième côté sont $\alpha+\sqrt{\alpha^2+m^2}$ et 2α, et l'autre celui du triangle rectangle dont l'hypothénuse et le troisième côté sont $\alpha-\sqrt{\alpha^2+m^2}$ et 2α. Faisant donc Fig. 31.

$$\sqrt{\alpha^2+m^2}=n,\quad \sqrt{(\alpha+\sqrt{\alpha^2+m^2})^2-4\alpha^2}=p$$
$$\sqrt{(\alpha-\sqrt{\alpha^2+m^2})^2-4\alpha^2}=q,$$

il viendra

$$a'=\frac{\alpha+n+p}{2\alpha},\ a''=\frac{\alpha+n-p}{2\alpha}$$
$$a'''=\frac{\alpha-n+q}{2\alpha},\ a''''=\frac{\alpha-n-q}{2\alpha}.$$

Ayant ainsi les tangentes a', a'', a''', et a'''', on peut, d'après leurs valeurs, mener d'abord par l'origine des coordonnées, des lignes qui fassent avec l'axe AB les angles auxquels elles appartiennent, et cela en élevant sur une abscisse égale à 2α, des ordonnées respectivement égales à $\alpha+n+p$, $\alpha+n-p$, $\alpha-n+q$, $\alpha-n-q$. Tirant ensuite par le point E des droites parallèles à celles que donnera la construction précédente, on aura les droites demandées (n°. 61).

Il existe encore une autre manière de déterminer les droites $D'F'$, $D''F''$, $D'''F'''$, $D''''F''''$; savoir, en menant GE parallèle à AB, et en observant que par les données du problême, $GE=\alpha$, et que dans les triangles $D'EG$, $D''EG$, $D'''EG$, $D''''EG$, on aura

$$\begin{aligned}
D'G &= GE \tang D'EG = GE \tang D'F'A = \alpha a'\\
D''G &= GE \tang D''EG = GE \tang D''F''A = \alpha a''\\
D'''G &= GE \tang D'''EG = GE \tang D'''F'''A = \alpha a'''\\
D''''G &= GE \tang D''''EG = GE \tang D''''F''''A = \alpha a'''',
\end{aligned}$$

d'où il suit

Fig. 31.

$$D'G=\frac{a+n+p}{2},\qquad D''G=\frac{a+n-p}{2},$$

$$D'''G=\frac{a-n+q}{2},\qquad D''''G=\frac{a-n-q}{2},$$

et lorsqu'on aura les longueurs des quatre droites ci-dessus, les points D', D'', D''', D'''', seront bientôt trouvés (*).

98. Si au lieu de prendre pour inconnue l'angle que doit faire avec l'axe des abscisses AB, la droite demandée nous eussions cherché à déterminer la distance entre le point donné E et le point H pris sur le milieu de la ligne $D'F'$; en faisant $EH=x$, et posant pour abréger $F'H=D'H=\frac{m}{2}=l$, nous aurions eu

$$D'E=EH+D'H=x+l,\quad F'E=EH-F'H=x-l,$$

$$F'P=\sqrt{\overline{EF'}^2-\overline{EP}^2}=\sqrt{(x-l)^2-a^2};$$

et les triangles semblables $D'GE$, EPF', nous auroient donné

$$D'E:EG::EF':F'P,$$

ce qui revient à

$$x+l:a::x-l:\sqrt{(x+l)^2-a^2},$$

d'où nous aurions déduit l'équation

$$a(x-l)=(x+l)\sqrt{(x-l)^2-a^2},$$

(*) Si on compare l'analyse que nous venons de faire des diverses circonstances de la question ci-dessus, avec celle que l'on trouve dans l'algèbre de Bézout (3e vol. du *Cours à l'usage de la marine*, pag. 334), on verra combien cette dernière est incomplète et fautive; elle n'indique que les deux solutions représentées par les lignes $D'F'$ et $D'''F'''$.

qui, par l'élévation au quarré et le développement, seroit Fig. 31.
devenue

$$x^4 - (2l^2 + 2a^2)x^2 + l^4 - 2a^2l^2 = 0,$$

et pouvant se résoudre comme celles du second degré, on en auroit tiré d'abord

$$x^2 = l^2 + a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2l^2},$$

puis

$$x = \pm\sqrt{l^2 + a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2l^2}} = \pm\sqrt{l^2 + a^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4l^2}}$$

expressions faciles à construire d'après ce qu'on a vu dans le numéro 89.

Cette solution, bien remarquable par son élégance, est tirée de l'*Arithmétique universelle de Newton*, qui l'a donnée pour montrer comment un heureux choix d'inconnues simplifie la solution d'un problême. Celui qu'il a fait, dans la question qui nous occupe, lui a sans doute été suggéré par la considération que la distance EH ne peut avoir que deux grandeurs différentes, l'une relative aux deux solutions $D'F'$ et $D''F''$, et l'autre aux solutions $D'''F'''$ et $D''''F''''$, et que par conséquent ses quatre valeurs doivent être égales deux à deux, et ne peuvent différer que par le signe. Nous conclurons de là que, pour se déterminer dans le choix des inconnues, il faut chercher celle qui, dans les diverses circonstances que peut offrir la question proposée, subit le plus petit nombre de changemens.

99. L'équation du premier degré ne nous a donné qu'une seule espèce de lignes, savoir la ligne droite; nous avons trouvé que l'équation du cercle étoit du second degré; mais son équation, que nous avons obtenue dans

le numéro 93 sous la forme la plus générale, n'est encore qu'un cas particulier de celles du second degré, dont la formule est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F.$$

Il nous reste donc à reconnoître les courbes qui répondent aux autres cas de cette formule; nous observerons d'abord qu'on peut, sans en diminuer la généralité, l'écrire ainsi :

$$y^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x = \frac{F}{A},$$

et faisant pour abréger

$$\frac{B}{A}=a, \frac{C}{A}=b, \frac{D}{A}=c, \frac{E}{A}=d, \frac{F}{A}=e,$$

il en résultera

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e.$$

Le moyen qui s'offre le premier pour déterminer les circonstances du cours des courbes cherchées, c'est d'examiner la marche des valeurs de l'ordonnée, par rapport à celles que l'on peut assigner aux abscisses, et pour cela de résoudre l'équation ci-dessus par rapport à y. En opérant ainsi, on trouve

$$y = -\tfrac{1}{2}(ax+c) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4(e-dx-bx^2) + (ax+c)^2}.$$

On voit d'abord que la valeur de y est composée de deux parties, dont l'une, exprimée par $-\dfrac{ax+c}{2}$, est l'ordonnée d'une ligne droite ayant pour équation $y = -\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}c$, et qui se construit en prenant sur l'axe

Fig. 32. AC', au-dessous de AB, fig. 32, une partie $AD = \frac{1}{2}c$, et menant par le point D une droite DE, faisant du côté

des y négatifs un angle DEA, dont la tangente soit égale à $\frac{1}{2}a$; en sorte que AP étant x, PN sera $-\frac{ax+c}{2}$. Il est évident maintenant que pour avoir les points qui appartiennent à la courbe cherchée, il faut porter dans la direction de PN, tant au-dessus qu'au-dessous de la droite ED, des parties NM et NM' égales à

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{4(e-dx-bx^2)+(ax+c)^2},$$

puisqu'on aura par ce moyen

$$PM=-\tfrac{1}{2}(ax+c)+\tfrac{1}{2}\sqrt{4(e-dx-bx^2)+(ax+c)^2},$$
$$PM'=-\tfrac{1}{2}(ax+c)-\tfrac{1}{2}\sqrt{4(e-dx-bx^2)+(ax+c)^2}.$$

La droite DE jouit donc de la propriété remarquable de partager en deux parties égales les lignes menées parallèlement à AC entre deux points de la courbe cherchée, et c'est pour cela qu'on lui a donné le nom de *diamètre ;* mais il y a cette différence entre la ligne DE et les diamètres du cercle, que ceux-ci rencontrent à angle droit toutes les lignes qu'ils divisent en deux parties égales, tandis que la première le fait obliquement : cependant nous montrerons bientôt que ces deux circonstances dérivent d'une même loi.

Après avoir déterminé le diamètre DE, on est conduit à chercher s'il peut rencontrer la courbe, et quels sont les points d'intersection : or, le caractère de ces points consiste en ce que, pour chacun d'eux, les lignes NM et NM', deviennent nulles, c'est-à-dire qu'on a

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{4(e-dx-bx^2)+(ax+c)^2}=0,$$

d'où on tire

$$4(e-dx-bx^2)+(ax+c)^2=0;$$

et en développant, il vient

Fig. 32. $$(a^2-4b)x^2+(2ac-4d)x+c^2+4e=0.$$

Si on résout cette équation par rapport à x, après l'avoir mise sous la forme

$$x^2+\frac{2ac-4d}{a^2-4b}x+\frac{c^2+4e}{a^2-4b}=0,$$

on obtiendra

$$x=-\frac{ac-2d}{a^2-4b}\pm\sqrt{-\frac{c^2+4e}{a^2-4b}+\left(\frac{ac-2d}{a^2-4b}\right)^2}$$

ou $$x=-\frac{ac-2d\pm\sqrt{(ac-2d)^2-(c^2+4e)(a^2-4b)}}{a^2-4b}.$$

Ces valeurs seront ou réelles, ou imaginaires, selon qu'on aura

$$(ac-2d)^2>\text{ ou }<(c^2+4e)(a^2-4b).$$

Dans le premier cas, on prendra sur l'axe AB,

$AG=-\frac{ac-2d}{a^2-4b}$, et on portera ensuite de l'un et de l'autre côté du point G les parties GH et GH', égales à

$$\frac{\sqrt{(ac-2d)^2-(c^2+4e)(a^2-4b)}}{a^2-4b}:$$

en élevant les perpendiculaires HI et $H'I'$, les points I et I', seront ceux dans lesquels la courbe cherchée rencontre son diamètre DE. Il faut encore observer ici que si par le point G on élève la perpendiculaire GO, elle rencontrera DE dans un point O qui sera le milieu de la distance II', puisque $GH'=GH$; et nous nommerons ce point *le centre*, parce qu'il se trouve au milieu du diamètre.

100. Afin de suivre plus particulièrement la marche des ordonnées, relativement aux diverses valeurs des abscisses, nous observerons qu'en développant la quantité comprise

comprise sous le radical de l'expression de y, et en l'ordonnant par rapport à x, on a Fig. 31.

$$y = \frac{-ax - c \pm \sqrt{(4e+c^2) - 2(2d - ac)x - (4b - a^2)x^2}}{2};$$

faisant pour abréger,

$$4e + c^2 = p, \quad 2d - ac = n, \quad 4b - a^2 = m,$$

il viendra

$$y = \frac{-ax - c \pm \sqrt{p - 2nx - mx^2}}{2},$$

expression d'après laquelle on voit que y ne sauroit avoir de valeur réelle qu'autant que la quantité $p - 2nx - mx^2$ sera positive. L'examen de cette condition présente trois cas que nous allons discuter successivement.

1°. Lorsque le coefficient m sera positif par lui-même, c'est-à-dire que le terme $-mx^2$ demeurera négatif, la condition ci-dessus ne sera remplie que par des valeurs de x moindres que celles qui rendent $p - 2nx = mx^2$, et qui sont les racines de l'équation

$$mx^2 + 2nx - p = 0,$$

$$\text{ou} \quad (4b - a^2)x^2 + (4d - 2ac)x = 4e + c^2,$$

que nous avons résolue dans le numéro précédent, pour obtenir les points H et H'. Au-delà de ces points, la quantité $p - 2nx - mx^2$ sera négative, les ordonnées seront par conséquent imaginaires, et la courbe cherchée n'aura aucun point correspondant aux abscisses plus grandes que AH et AH'; elle sera donc renfermée dans l'espace compris entre les lignes IH et $I'H'$.

Nous n'avons eu ici aucun égard au signe de n, parce que ce signe ne change point la conclusion; il

Fgi. 32. n'influe que sur la grandeur absolue des distances AH et AH'. Il faut seulement faire attention que quand p est négatif, et que $\frac{p}{m} < \frac{n^2}{m^2}$, la quantité $p-2nx-mx^2$ reste négative, quelque valeur qu'ait x, d'où il suit que l'équation proposée ne donne aucune ordonnée réelle, et n'appartient à aucune ligne. Pour se convaincre de cette vérité, il suffit de remarquer que l'on a en général

$$p \pm 2nx - mx^2 = m\left[\frac{p}{m} + \frac{n^2}{m^2} - \frac{n^2}{m^2} \pm 2\frac{n}{m}x - x^2\right]$$
$$= m\left[\frac{p}{m} + \frac{n^2}{m^2} - \left(\frac{n}{m} \mp x\right)^2\right];$$

car le quarré de $\frac{n}{m} \mp x$ étant essentiellement positif, le terme $-\left(\frac{n}{m} \mp x\right)^2$ sera négatif dans tous les cas, et si p devient négatif, et que le terme $\frac{p}{m}$ l'emporte dans cette hypothèse sur $\frac{n^2}{m^2}$, la quantité entière sera toujours négative.

Si, dans l'expression de y, on donne à la quantité $p \pm 2nx - mx^2$ la forme ci-dessus, on aura

$$y = \frac{-ax - c \pm \sqrt{m\left[\frac{p}{m} + \frac{n^2}{m^2} - \left(\frac{n}{m} \mp x\right)^2\right]}}{2};$$

en passant dans le premier membre les termes dégagés du radical, élevant au quarré, et réunissant ensuite tous les termes dans un seul membre, on obtiendra

$$\left(y+\frac{ax+c}{2}\right)^2-\frac{m}{4}\left(\frac{p}{m}+\frac{n^2}{m^2}\right)+\left(\frac{n}{m}\mp x\right)^2=0;$$

quand p sera négatif, la quantité $\frac{p}{m}+\frac{n^2}{m^2}$ deviendra $-\frac{p}{m}+\frac{n^2}{m^2}$: on aura donc

$$\left(y+\frac{ax+c}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{m}\mp x\right)^2+\frac{m}{4}\left(\frac{p}{m}-\frac{n^2}{m^2}\right)=0,$$

et si $\frac{p}{m}>\frac{n^2}{m^2}$, le terme $\frac{m}{4}\left(\frac{p}{m}-\frac{n^2}{m^2}\right)$, qui ne change pas de signe, pourra être regardé comme un quarré déterminé et positif. Sous ce point de vue, le premier membre de l'équation précédente sera la somme de trois quarrés, et ne sauroit par conséquent devenir nul que dans le cas où l'on auroit séparément

$$y+\frac{ax+c}{2}=0,\quad \frac{n}{m}\pm x=0,\quad \frac{m}{4}\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{p}{m}\right)=0.$$

L'ensemble des deux premières équations désigne un point, puisque chacune des inconnues x et y se trouve déterminée par leur moyen, et la troisième ne tombant que sur des quantités données, exprime une condition sans laquelle l'équation proposée ne signifie rien.

2°. Quand m sera négatif, le terme $-mx^2$ devenant $+mx^2$, la quantité $p-2nx-mx^2$ se change en $p-2nx+mx^2$, et le terme mx^2 étant positif, quel que soit le signe de x, il faut qu'on ait $mx^2>2nx-p$, ce qui n'aura lieu que pour les valeurs de x qui surpassent celles que donne l'équation

$$mx^2=2nx-p \quad \text{ou} \quad mx^2-2nx+p=0,$$

qui n'est autre chose que ce que devient celle du cas précéd.

Fig. 52. lorsqu'on y fait m négatif. Il suit par conséquent de ce qui précède, que dans le cas actuel les valeurs de y, correspondantes aux abscisses moindres que les racines de cette équation, et comprises entre les points H et H', sont imaginaires. La courbe cherchée n'ayant donc aucun point qui corresponde à ces abscisses, est nécessairement composée de deux parties séparées par l'espace que terminent les droites IH et $I'H'$.

Les racines de l'équation $mx^2-2nx+p=0$, comprises dans la formule $x=\frac{-n\pm\sqrt{n^2-pm}}{m}$, sont imaginaires lorsque p est positif par lui-même, et que $n^2<pm$, parce qu'alors le terme pm est négatif et l'emporte sur n^2. Quand cette circonstance a lieu, les valeurs de AH et de AH' étant imaginaires, la courbe proposée ne rencontre pas le diamètre DE; et comme néanmoins elle a des points situés au-dessus et au-dessous, il faut qu'elle soit encore composée de deux parties séparées.

La quantité $p-2nx+mx^2$ pouvant se mettre sous la forme

$$m\left[\frac{p}{m}-\frac{n^2}{m^2}+\left(\frac{n}{m}-x\right)^2\right],$$

se réduit à $m\left(\frac{n}{m}-x\right)^2$ lorsque $\frac{p}{m}=\frac{n^2}{m^2}$; il en résulte

$$\sqrt{p-2nx+mx^2}=\left(\frac{n}{m}-x\right)\sqrt{m}$$

et
$$y=\frac{-ax-c\pm\left(\frac{n}{m}-x\right)\sqrt{m}}{2},$$

d'où on tire ces deux équations :

$$y = -\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{m})\,x - \tfrac{1}{2}\left(c - \frac{n}{m}\sqrt{m}\right)$$ Fig. 32.

$$y = -\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{m})\,x - \tfrac{1}{2}\left(c + \frac{n}{m}\sqrt{m}\right),$$

qui ne donnent que deux lignes droites.

3°. Lorsque $m=0$, l'expression de y se réduit à

$$y = \frac{-ax - c \pm \sqrt{p - 2nx}}{2},$$

et ne peut être réelle que pour les valeurs positives de x, moindres que celle qui résulte de l'équation $p-2nx=0$, ou moindres que $\frac{p}{2n}$; mais du côté des x négatifs, l'ordonnée y est toujours réelle, parce que la quantité $p-2nx$ se change en $p+2nx$ pour ce côté, et demeure constamment positive. Il est d'ailleurs évident que la courbe cherchée ne rencontre qu'une seule fois la ligne DE; car l'équation $mx^2+2nx-p=0$, dont nous avons fait usage pour trouver les points où cela arrive, devient $2nx-p=0$, et s'abaissant ainsi au premier degré, ne donne plus que la seule valeur $x=\frac{p}{2n}$. Si le point H est celui qui répond à cette valeur, la courbe n'aura pas d'ordonnées au-delà de ce point, mais elle s'étendra indéfiniment de H vers B'.

101. Nous pouvons, par un changement de coordonnées, simplifier beaucoup l'équation générale dans chacun des trois cas que nous venons d'examiner. L'équation

$$y = \frac{-ax - c \pm \sqrt{p - 2nx - mx^2}}{2}$$

étant mise sous la forme

Fig. 32.

$$y+\frac{ax+c}{2}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nx-mx^2},$$

se réduit à

$$u=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nx-mx^2},$$

en faisant

$$y+\frac{ax+c}{2}=u:$$

or, on a vu, n°. 99, que $\frac{ax+c}{2}$ étoit l'ordonnée PN de la ligne ED; il suit de-là que

$$u=y+\frac{ax+c}{2}=PN+PM=NM,$$

et que par conséquent $-u=NM'$ (n°. 69). Les nouvelles ordonnées u sont donc relatives au diamètre DE.

Prenons maintenant les abscisses sur ce diamètre, à partir du point O, et pour cela, déterminons la distance des points O et N. L'abscisse AG du premier est négative et égale à $-\frac{2d-ac}{4b-a^2}$, ou à $-\frac{n}{m}$ (n°. 99); l'ordonnée de la ligne DE étant en général $-\frac{ax+c}{2}$, la valeur particulière de OG, qui répond à l'abscisse $x=-\frac{n}{m}$, sera $\frac{1}{2}\left(a\frac{n}{m}-c\right)$; on aura d'ailleurs $AP=x$, $PN=-\frac{ax+c}{2}$; et faisant

$$\alpha=-\frac{n}{m},\ \beta=\tfrac{1}{2}\left(\frac{an}{m}-c\right),\ \alpha'=x,\ \beta'=-\tfrac{1}{2}(ax+c),$$

la formule $\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}$ (n°. 62) donnera

$$ON = \sqrt{\left(x+\frac{n}{m}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\left(x+\frac{n}{m}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\left(x+\frac{n}{m}\right)\sqrt{4+a^2}:$$

posant donc $ON = t$, il viendra

$$t = \tfrac{1}{2}\left(x+\frac{n}{m}\right)\sqrt{4+a^2},$$

d'où l'on tirera

$$x+\frac{n}{m} = \frac{2t}{\sqrt{4+a^2}}.$$

En observant que la quantité $p - 2nx - mx^2$ peut se mettre sous la forme

$$m\left[\frac{p}{m}+\frac{n^2}{m^2}-\left(\frac{n}{m}+x\right)^2\right] \text{ (n°. précéd.)},$$

on la changera en

$$m\left(\frac{p}{m}+\frac{n^2}{m^2}-\frac{4t^2}{4+a^2}\right),$$

ce qui donnera

$$u = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{m\left(\frac{p}{m}+\frac{n^2}{m^2}-\frac{4t^2}{4+a^2}\right)}$$

et passant le diviseur 2 sous le radical, on trouvera

$$u = \pm\sqrt{m\left(\frac{p}{4m}+\frac{n^2}{4m^2}-\frac{t^2}{4+a^2}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{m}{4+a^2}\left[\frac{(pm+n^2)(4+a^2)}{4m^2}-t^2\right]};$$

posant ensuite

$$\frac{(pm+n^2)(4+a^2)}{4m^2} = A^2, \quad \frac{m}{4+a^2} = \frac{B^2}{A^2},$$

on aura enfin ce résultat très-simple :

$$u = \pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2-t^2}.$$

Fig. 32. 102. Nous pouvons maintenant construire la courbe, car le radical $\sqrt{A^2-t^2}$ est l'ordonnée d'un cercle dont le centre seroit placé en O, à l'origine des coordonnées t et u, et dont le rayon seroit A; et nous obtiendrons u en prenant une quatrième proportionnelle aux lignes A, B et $\sqrt{A^2-t^2}$. Il est facile de voir que la plus grande valeur de u répond à $t=0$, c'est-à-dire au centre O, et qu'alors $u=\pm B$; les limites de la courbe, dans le sens de son ordonnée, seront donc les points L et L', pour lesquels $OL=OL'=B$. Nous avons déjà trouvé les limites I et I' dans le sens du diamètre DE, et nous sommes par conséquent fondés à conclure que, pour le cas où, comme nous le supposons ici, le terme mx^2 est négatif dans la quantité $p-2nx-mx^2$, la courbe cherchée rentre en elle-même comme celle qui est marquée sur la figure par un trait continu $ILI'L'$.

En faisant disparoître le radical de l'équation

$$u=\pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2-t^2},$$

on obtient

$$A^2u^2+B^2t^2=A^2B^2;$$

ce résultat étant symétrique par rapport aux deux indéterminées u et t, prouve que l'on peut appliquer à l'une les conséquences qu'on a trouvées relativement à l'autre, et prendre les abscisses pour les ordonnées.

103. Quand m est négative, il faut prendre $\frac{-m}{4+a^2}=-\frac{B^2}{A^2}$, afin que B ne soit pas imaginaire; il vient alors

$$u=\pm\sqrt{-\frac{B^2}{A^2}(A^2-t^2)}=\pm\frac{B}{A}\sqrt{t^2-A^2}.$$

Le radical $\sqrt{t^2 - A^2}$ étant construit par le procédé du numéro 89, l'ordonnée u s'obtiendroit par le moyen des lignes proportionnelles. Il est bien évident, par l'inspection de cette équation, que l'ordonnée u est imaginaire tant que l'abscisse t est moindre que A, soit positivement, soit négativement; mais lorsque t est parvenu à surpasser A, la quantité $t^2 - A^2$ augmente sans cesse, et rien ne limite par conséquent la grandeur à laquelle peut atteindre u. D'après ces considérations, on voit que le cours de la courbe est pareil à celui des lignes KIk, $K'I'k'$, séparées par l'intervalle II', et dont les *branches* IK et Ik, $I'K'$ et $I'k'$ s'étendent à l'infini. Fig. 32.

L'expression de A^2 étant

$$\frac{(pm + n^2)}{4m^2}(4 + a^2) \text{ (n}^{\circ}\text{. 101)},$$

deviendra $\dfrac{(-pm + n^2)(4 + a^2)}{4m^2}$,

par la supposition de m négative, et on aura

$$A = \frac{\sqrt{4 + a^2}}{2m}\sqrt{-pm + n^2},$$

ce qui fait voir que A seroit imaginaire si l'on avoit $pm > n^2$; il faudroit donc faire alors

$$\frac{(pm - n^2)(4 + a^2)}{4m^2} = A^2,$$

et il viendroit

$$u = \pm\frac{B}{A}\sqrt{t^2 + A^2}.$$

La quantité $t^2 + A^2$, ne pouvant jamais devenir nulle, prouve, comme nous l'avons déjà remarqué, que, dans ce cas, la courbe cherchée ne sauroit rencontrer le diamètre DE; l'ordonnée u ne peut être moindre que B,

Fig. 32. et ne devient égale à B que lorsque $t=0$: mais de chaque côté de la ligne LL' les ordonnées croîtront d'autant plus que leur pied sera plus éloigné du point O, et par conséquent les deux parties de la courbe, indéfinies dans ce cas-ci aussi bien que dans le précédent, s'étendront au-dessus et au-dessous de DE, comme le montrent les lignes QLq, $Q'L'q'$.

104. Transformons enfin l'équation

$$y=-\tfrac{1}{2}(ax+c)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nx},$$

qui répond au cas où $m=0$. En faisant toujours

$$y+\tfrac{1}{2}(ax+c)=u,$$

nous aurons d'abord

$$u=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nx};$$

posant ensuite $\frac{p}{2n}-x=t$, nous trouverons

$$\sqrt{p-2nx}=\sqrt{2n\left(\frac{p}{2n}-x\right)}=\sqrt{2nt},$$

d'où $$u=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2nt}=\pm\sqrt{4nt}.$$

Les nouvelles abscisses t ne partent plus du point O dans le cas actuel, et la courbe qui s'y rapporte n'a point de centre. En effet, il suit de l'expression de AG, qui est en général $-\frac{n}{m}$, qu'à mesure que m diminue, le point G, et par conséquent le centre O, s'éloignent de plus en plus de l'axe AC, et lorsque m devient nul, on a $AG=-\frac{n}{0}$ ou infini. Pour connoître alors l'origine des t, il faut faire $t=0$, ce qui donne $\frac{p}{2n}-x=0$, ou $x=\frac{p}{2n}$, valeur qui rend $u=0$, et qui fait voir que cette origine est le point

Fig. 52.

I, où la courbe rencontre le diamètre DE; en sorte que $t = IN$.

L'équation $u = \pm\sqrt{4nt}$ se construit en prenant une moyenne proportionnelle entre l'abscisse IM et une droite égale à $4n$, et le résultat est l'ordonnée MN, qu'il faut, ici comme dans les cas précédens, porter tant au-dessus de DE qu'au-dessous. La courbe cherchée est alors de la forme RIr.

105. L'équation générale du second degré, à deux indéterminées, ne nous fournit donc que ces trois formes :

$$\left.\begin{array}{l} u = \pm\dfrac{B}{A}\sqrt{A^2 - t^2} \\ u = \pm\dfrac{B}{A}\sqrt{t^2 - A^2} \\ u = \pm\sqrt{4nt} \end{array}\right\} \text{ ou, en faisant disparoître les radicaux, } \left\{\begin{array}{r} A^2u^2 + B^2t^2 = B^2 \\ A^2u^2 - B^2t^2 = B^2 \\ u^2 = 4nt. \end{array}\right.$$

Les courbes représentées par la première, qui rentrent sur elles-mêmes et qui comprennent un espace fermé de toutes parts, sont désignées sous le nom d'*ellipses*. Celles que donne la seconde, composées de quatre branches infinies formant deux parties séparées, se nomment *hyperboles*. Enfin la troisième équation est celle des *paraboles*. Chacune de ces équations paroît réduite à la forme la plus simple; mais les coordonnées n'y sont pas perpendiculaires entr'elles comme dans les équations de la ligne droite et du cercle dont nous avons fait usage jusqu'à présent : cependant la situation des ordonnées est liée à celle des abscisses par la condition que les premières sont parallèles à la droite qui touche la courbe à l'extrémité de son diamètre. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que les points M et M' se confondent en un seul au point I, circonstance qui forme le caractère essentiel des points de

Fig. 32. contact (n°. 85). En effet, la somme des deux ordonnées, ou la distance des points M et M', étant exprimée par $\frac{2B}{A}\sqrt{A^2-t^2}$ pour l'ellipse, par $\frac{2B}{A}\sqrt{t^2-A^2}$ pour l'hyperbole, et enfin par $2\sqrt{4nt}$ pour la parabole, devient nulle au point I, où l'on a $t=A$ pour les deux premières courbes, et $t=o$ pour la troisième.

106. L'équation des ellipses étant symétrique par rapport aux deux indéterminées t et u, de manière que l'expression de t en u a la même forme que celle de u en t, on pourroit prendre aussi les u pour abscisses, et les t pour ordonnées, et on verroit que le diamètre II' est lui-même parallèle à la tangente menée par le point L. Les droites II' et LL' jouissant toutes deux des mêmes propriétés, se nomment pour cette raison *diamètres conjugués*. Il est évident que dans le cercle, les diamètres conjugués doivent être perpendiculaires entr'eux, puisque la tangente menée à l'extrémité d'un diamètre quelconque lui est perpendiculaire : le nombre des diamètres qui jouissent de cette propriété est infini pour le cercle. Il n'en est pas de même de l'ellipse ; mais quoique, pour cette courbe, l'analyse précédente ne nous ait fait découvrir que deux diamètres conjugués, se coupant obliquement, elle en a néanmoins toujours deux qui se rencontrent à angle droit, ainsi que nous allons le prouver, après que nous aurons donné les formules générales pour changer les coordonnées d'une courbe en d'autres situées d'une manière quelconque, tant par rapport aux premières qu'entr'elles.

107. Le plus grand changement qu'on puisse apporter dans le système des coordonnées, sans cesser de les prendre droites et respectivement parallèles à deux lignes fixes, consiste à leur donner une nouvelle origine et

d'autres directions. Nous embrasserons tout de suite ce cas général, et nous supposerons qu'on se propose d'exprimer les valeurs des coordonnées $AP = x$, $PM = y$, fig. 33, relatives aux axes AB et AC, par deux autres coordonnées $A'''P'' = u$, $P''M = t$, rapportées aux axes $A'''B''$, $A'''C''$, dont on connoît la position à l'égard des premiers. Fig. 33.

Ayant mené par la nouvelle origine A''' les droites $A'''B'$ et $A'''C'$, respectivement parallèles à AB et à AC, les distances AA' et $A'A'''$ seront données par l'hypothèse, et en les représentant par a et par b, on aura

$$AP = A'P + AA' = A'''P' + a,$$
$$PM = P'M + A'A''' = P'M + b.$$

Tirant ensuite par le pied de la nouvelle ordonnée $P''M$ les lignes $P''Q$ et $P''R$, l'une parallèle à AB et l'autre à AC, on observera que puisque les axes $A'''B''$ et $A'''C''$ sont donnés de position à l'égard de AB et AC, on doit connoître tous les angles des triangles $A'''P''R$, $MP''Q$, ou, ce qui revient au même, les rapports de leurs côtés respectifs : faisant donc

$$\frac{AR}{A'''P''} = m, \quad \frac{P''R}{A'''P''} = n, \quad \frac{P''Q}{P''M} = p, \quad \frac{QM}{P''M} = q,$$

on aura

$$A'''R = m \, . \, A'''P'' = mu, \quad P''R = n \, . \, A'''P'' = nu,$$
$$P''Q = p \, . \, P''M = pt, \quad QM = q \, . \, P''M = qt,$$

d'où on tirera

$$A'''P' = A'''R + P''Q = mu + pt,$$
$$P'M = P''R + QM = nu + qt,$$

et enfin

$$x = AP = A'''P' + a = mu + pt + a,$$
$$y = PM = P'M + b = nu + qt + b.$$

Fig. 33. Telles sont les valeurs les plus générales que puissent prendre les coordonnées x et y, faisant entr'elles un angle quelconque, lorsqu'on les exprime par d'autres coordonnées du même genre, mais situées comme on voudra. Voyons maintenant comment on en déduit celles qui conviennent aux différens cas particuliers qui peuvent se présenter.

1°. Si on supposoit les nouvelles coordonnées parallèles aux premières, et qu'on ne fît que changer la position de l'origine, les lignes $A'''C''$ et $A'''C'$ se confondroient, ainsi que $A'''B''$ et $A'''B'$; on auroit par conséquent $m = 1$, $n = 0$, $p = 0$ et $q = 1$, et il en résulteroit $x = u + a$, $y = t + b$, ce qu'il est facile de voir *à priori*, puisqu'alors $A'''P''$ et $A'''P'$ se confondroient, ainsi que $P''M$ et $P'M$.

En égalant à zéro ou a ou b, on conservera dans sa place ou l'axe AC ou l'axe AB.

2°. Si on ne vouloit changer que la direction des axes AB et AC, et qu'on laissât toujours l'origine au point A, les lignes $A'''B'$ et $A'''C'$ tombant dans ce cas sur AB et sur AC, on auroit en même temps $a = 0$ et $b = 0$, ce qui donneroit

$$x = mu + pt, \qquad y = nu + qt.$$

On voit qu'en supposant $m = 1$ et $n = 0$, d'où il résulteroit $x = u + pt$, $y = qt$, on feroit coïncider la ligne $A'''B''$ avec $A'''B'$, et que par conséquent on n'auroit changé que la direction de l'ordonnée; on prouveroit de même que $x = mu$ et $y = nu + t$ sont les valeurs de x et de y, relatives au changement de la direction des abscisses.

108. Il faut observer qu'il y a entre les quantités m, n, p et q, qui dépendent de la direction des nouvelles

coordonnées, une relation nécessaire, en sorte qu'on ne peut les prendre toutes les quatre arbitrairement; car si, connoissant l'angle des axes primitifs $A'''B'$ et $A'''C'$, on se donnoit encore les angles $B''A'''B'$ et $C''A'''B''$, la position des nouveaux axes $A'''B''$ et $A''C''$ seroit entièrement déterminée par ces trois choses. Lorsqu'on passera d'un systême connu de coordonnées à un autre systême également connu, les quantités m, n, p et q, calculées suivant leurs définitions, auront entr'elles la relation dont on vient de parler; mais il suit de ce qui précède que la position de l'origine étant donnée, on ne peut déterminer la direction des nouveaux axes, de manière à satisfaire à plus de deux conditions différentes, et que dans les expressions $x = mu + pt + a$, $y = nu + qt + b$, les quantités x et y, u et t, ne sauroient être les coordonnées d'un même point relativement à deux systêmes de coordonnées droites et parallèles, tant que m, n, p et q seront quelconques. Voici un moyen très-simple de trouver la relation qui doit exister entre ces quantités.

Si on mène par le point M les droites MG et MH, respectivement perpendiculaires à $A'''B'$ et $A'''B''$, et qu'on suppose connus les angles $MP'B' = C'A'''B'$, et $MP''B'' = C''A'''B''$, on aura le rapport de $P'M$ à $P'G$, et celui de $P''M$ à $P''H$. Nommant g le premier et h le second, il en résultera $P'G = gy$ et $P''H = ht$; tirant ensuite $A'''M$, et représentant $A'''P'$ et $P'M$ par x' et y', les triangles obliquangles $A'''P'M$ et $A'''P''M$ donneront

$$\overline{A'''M}^2 = \overline{A'''P'}^2 + \overline{P'M}^2 + 2A'''P' \times P'G = x'^2 + y'^2 + 2gx'y'$$

$$\overline{A'''M}^2 = \overline{A'''P''}^2 + \overline{P''M}^2 + 2A'''P'' \times P''H = u^2 + t^2 + 2hut.$$

En égalant ces deux expressions de $\overline{A'''M}^2$, il viendra

$$x'^2+y'^2+2gx'y'=u^2+t^2+2htu;$$

mettant pour x' et y' leurs valeurs $mu+pt$ et $nu+qt$, on aura

$$(m^2+n^2+2mng)u^2+(p^2+q^2+2pqg)t^2+2(np+mq+g(mp+nq))ut$$
$$=u^2+t^2+2hut.$$

Cette équation devant avoir lieu, quelle que soit la position du point M, il faut qu'elle se vérifie toujours indépendamment de u et de t, condition qui donne les trois équations

$$m^2+n^2+2mng=1,\qquad p^2+q^2+2pqg=1,$$
$$mp+nq+(np+mq)g=h.$$

En chassant g des deux premières, le résultat

$$(m^2+n^2)pq-(p^2+q^2)mn=pq-mn,$$

exprimera les conditions auxquelles doivent satisfaire les quantités m, n, p et q.

On suppose le plus souvent que les nouvelles coordonnées u et t se rencontrent à angles droits, ainsi que les premières; dans ce cas, les équations ci-dessus se simplifient beaucoup. Les angles $MP'B'$ et $MP''B''$ devenant droits, $P'G$ ou gy' et PH ou ht, s'évanouissent; en sorte qu'on a seulement

$$m^2+n^2=1$$
$$p^2+q^2=1$$
$$mp+nq=0,$$

d'où on tire

$$m^2=1-n^2,\qquad p^2=1-q^2,$$
$$m^2p^2=1-n^2-q^2+n^2q^2;$$

et à cause de $mp=-nq$, il vient $n^2+q^2=1$. Comparant ce résultat avec l'équation $m^2+n^2=1$, on trouve

trouve $q=m$, ce qui donne $p=-n$; on aura donc enfin

$$x'=mu-nt,\quad y'=nu+mt,$$

en observant que les quantités m et n dépendent l'une de l'autre, en vertu de l'équation $m^2+n^2=1$. La figure 34, Fig. 34.
construite pour ce cas particulier, fait voir que m est le cosinus de l'angle $B'A'''B''$, que n en est le sinus, et qu'on a

$$A'''P'=A'''R-P''Q=mu-nt$$
$$P'M=P''R+QM=nu+mt,$$

comme nous venons de le trouver.

109. Voyons maintenant quelles simplifications on peut apporter à l'équation générale

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex=F \quad (1),$$

par le moyen de la transformation des coordonnées. Changeons d'abord la position de l'origine des coordonnées, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes; pour cela, mettons dans l'équation ci-dessus $x'+a$ au lieu de x, et $y'+b$ au lieu de y: elle deviendra alors

$$\left.\begin{array}{l} Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2 \\ +(2Ab+Ba+D)y'+(2Ca+Bb+E)x' \\ +Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea=F \end{array}\right\} (2).$$

Les quantités a et b étant arbitraires, nous pouvons les déterminer de manière à faire disparoître deux termes de ce résultat. Supposons qu'on veuille chasser ceux qui contiennent x et y séparément à la première puissance: en égalant leur coefficient à zéro, on aura

$$2Ab+Ba+D=0,\quad 2Ca+Bb+E=0 \quad (3),$$

il ne restera plus dans l'équation (2) que les termes du second degré, x^2, xy, y^2, et le terme tout connu. Ce dernier se simplifie beaucoup à l'aide des équations (3). En effet, multipliant la première par b, la seconde par a, et retranchant leur somme de l'équation (2), après y avoir supprimé les termes qui doivent s'évanouir, il viendra

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2-Ab^2-Bab-Ca^2=F \quad (4).$$

Plaçons à présent les axes des coordonnées dans de nouvelles directions, mais toujours perpendiculaires entr'elles, ce qui s'opère en faisant (n°. précéd.)

$$x'=mu-nt, \quad y'=nu+mt.$$

Nous pouvons faire disparoître encore un terme de l'équation (4), parce que n'ayant entre les quantités m et n que l'équation $m^2+n^2=1$, il en restera une à déterminer. La substitution des valeurs ci-dessus étant effectuée, on aura

$$\left.\begin{array}{l}[An^2+Bmn+Cm^2]u^2\\ +[2(A-C)mn+B(m^2-n^2)]ut\\ +[Am^2-Bnm+Cn^2]t^2\\ -Ab^2-Bab-Ca^2=F\end{array}\right\}(5);$$

en posant l'équation

$$2(A-C)mn+B(m^2-n^2)=0,$$

le terme multiplié par ut s'évanouit; et si, pour abréger, on fait

$$An^2+Bmn+Cm^2=\alpha, \quad Am^2-Bmn+Cn^2=\beta,$$
$$F+Ab^2+Bab+Ca^2=\gamma,$$

il viendra

$$\alpha u^2+\beta t^2=\gamma,$$

d'où on tirera

$$u = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} t^2} = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\gamma}{\beta} - t^2\right)}.$$

1°. Si les quantités $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\beta}$ sont toutes deux positives en même temps, cette équation rentrera dans l'équation $u = \pm \frac{B}{A} \cdot \sqrt{A^2 - t^2}$, trouvée dans le numéro 102 pour celle de l'ellipse. Mais ici les coordonnées u et t étant perpendiculaires entr'elles, il s'ensuit que la courbe cherchée sera une ellipse rapportée à des diamètres II' et LL', fig. 35, perpendiculaires entr'eux, et que, pour cette raison, on nomme *axes*. Fig. 35.

2°. Quand $\frac{\beta}{\alpha}$ est négative seule, la courbe est une hyperbole rapportée aussi à un diamètre qui rencontre ses ordonnées à angles droits, c'est-à-dire à un axe, fig. 37, puisqu'on a $u = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(t^2 - \frac{\gamma}{\beta}\right)}$, ce qui s'accorde avec l'équation $u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{t^2 - A^2}$ du n°. 103. Fig. 37.

C'est encore à l'hyperbole que se rapporte l'équation ci-dessus, lorsque $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\beta}$ sont négatives en même temps, mais alors l'axe est LL', et non pas II'; car il vient dans ce cas

$$u = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(t^2 + \frac{\gamma}{\beta}\right)},$$

résultat qui est de la forme $u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{t^2 + A^2}$.

Nous observerons que, par rapport à l'hyperbole KIk,

Fig. 37. $K'I'k'$, la ligne LL' est aussi un diamètre : quoiqu'elle ne soit pas une double ordonnée comme dans l'ellipse, on lui assigne une grandeur, savoir celle qui résulteroit de la supposition de $t=0$, en changeant le signe de la quantité négative $\frac{\gamma}{\beta}$, et il vient $OL=\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$. On conserve de cette manière l'analogie entre l'équation de l'ellipse et celle de l'hyperbole.

110. Pour savoir dans quels cas les quantités β et γ peuvent être positives, il faut déterminer m et n, et substituer leurs valeurs dans ces quantités. L'équation

$$2(A-C)mn+B(m^2-n^2)=0$$

donne

$$mn=\frac{B(m^2-n^2)}{2(C-A)};$$

si on fait $\frac{B}{2(C-A)}=\delta$, qu'on élève au quarré, et qu'on chasse n^2, au moyen de l'équation $m^2+n^2=1$, il viendra

$$m^4-m^2=-\frac{\delta^2}{1+4\delta^2},$$

d'où on tirera

$$m^2=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}-\frac{\delta^2}{1+4\delta^2}}=\tfrac{1}{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{1+4\delta^2}},$$

puis

$$n^2=\tfrac{1}{2}\mp\frac{1}{2\sqrt{1+4\delta^2}}$$

$$m^2n^2=\tfrac{1}{4}-\frac{1}{4(1+4\delta^2)}=\frac{\delta^2}{1+4\delta^2};$$

remettant, au lieu de δ, la quantité qu'il représente, et n'ayant égard qu'au signe supérieur des radicaux, il en résultera

$$m^2 = \tfrac{1}{2} + \frac{C-A}{2\sqrt{(C-A)^2+B^2}}$$

$$n^2 = \tfrac{1}{2} - \frac{C-A}{2\sqrt{(C-A)^2+B^2}}$$

$$mn = \frac{B}{2\sqrt{(C-A)^2+B^2}}.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de β et de α, et en les réduisant ensuite au même dénominateur, on verra, avec un peu d'attention, que leurs numérateurs sont divisibles par $\sqrt{(C-A)^2+B^2}$, et que

$$\beta = \tfrac{1}{2}(C+A) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(C-A)^2+B^2},$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(C+A) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(C-A)^2+B^2}.$$

On voit d'abord que tant que A et C ne seront pas négatifs tous deux, α sera positif, et que si la quantité $C+A$ est positive, β ne deviendra négatif que lorsqu'on aura

$$C+A < \sqrt{(C-A)^2+B^2}, \quad \text{ou} \quad (C+A)^2 < (C-A)^2+B^2,$$

$$\text{ou } 2AC < -2AC+B^2, \text{ ou enfin } 4AC < B^2.$$

Quant au cas où A et C seroient tous deux négatifs, il ne doit pas être distingué de celui où ces quantités sont positives, parce qu'on ramène l'un à l'autre en changeant les signes de tous les termes de l'équation (1). Nous remarquerons que $4AC - B^2 = A^2\left(4\frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}\right)$, et que si, dans cette expression, l'on change, comme dans le n°. 99, $\frac{B}{A}$ en a, et $\frac{C}{A}$ en b, on aura $A^2(4b-a^2)$, dont le

Fig. 51. signe dépendra de celui de la quantité $4b-a^2$, que nous avons représentée par m dans le n°. 100, et d'après laquelle nous avons reconnu les diverses formes qui caractérisent les trois espèces de courbes comprises dans l'équation générale du second degré.

111. Si l'on avoit $4AC=B^2$, la quantité β s'anéantiroit, et par-là l'équation $u=\pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\gamma}{\beta}-t^2\right)}$ sembleroit ne plus renfermer que la seule inconnue u; mais les valeurs des quantités a et b tirées des équations (3), et qui sont en général

$$a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC},\quad b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC},$$

devenant infinies lorsque $B^2=4AC$, ne font plus rien connoître; on ne peut donc, dans ce cas, faire disparoître à-la-fois les termes Dy et Ex dans l'équation (1). Pour parer à cet inconvénient, nous ferons immédiatement dans cette équation,

$$x=mu-nt,\quad y=nu+mt,$$

ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned}&[An^2+Bmn+Cm^2]u^2\\+&[2(A-C)mn+B(m^2-n^2)]ut\\+&[Am^2-Bmn+Cn^2]t^2\\+&(Dn+Em)u+(Dm-En)t=F,\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

et nous poserons encore l'équation

$$2(A-C)mn+B(m^2-n^2)=0,$$

afin de chasser le terme multiplié par ut; les coefficiens de u^2 et de t^2 auront ici la même valeur que dans le numéro précédent, puisque m et n dépendent encore des mêmes équations que ci-dessus. En représentant donc ces coefficiens par α et β, nous obtiendrons

$$\alpha u^2 + \beta t^2 + (Dn + Em) u + (Dm - En) t = F.$$

Maintenant il suffira de changer seulement l'origine des coordonnées, en mettant $u' + a'$ pour u, et $t' + b'$ pour t', pour faire disparoître le terme tout connu, et réduire cette dernière équation à la forme

$$\alpha u'^2 + \beta t'^2 - \varepsilon t' = 0,$$

par exemple, en chassant en outre le terme multiplié par la première puissance de u'.

La substitution indiquée donnant

$$\left.\begin{array}{l} \alpha u'^2 + \beta t'^2 + (2\alpha a' + Dn + Em) u' \\ \qquad + (2\beta b' + Dm - En) t' \\ + \alpha a'^2 + \beta b'^2 + (Dn + Em) a' + (Dm - En) b' \end{array}\right\} = F,$$

on fera

$$2\alpha a' + Dn + Em = 0,$$

$$\alpha a'^2 + \beta b'^2 + (Dn + Em) a' + (Dm - En) b' - F = 0,$$

et

$$2\beta b' + Dm - En = \varepsilon.$$

Les deux premières de ces équations serviront à déterminer a' et b', et substituant les valeurs de ces quantités dans la troisième, on obtiendra ε.

Lorsqu'on a $B^2 = 4AC$, il en résulte $\beta = 0$; l'équation

$$\alpha u^2 + \beta t^2 - \varepsilon t = 0$$

se réduit à

$$\alpha u^2 - \varepsilon t = 0,$$

et donne

$$u = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha} t}:$$

elle se rapporte donc alors à la parabole (n^o. 105).

Nous devons être maintenant convaincus que l'équation (1) ne renferme que les trois espèces de courbes que nous avons reconnues d'une autre manière dans le n°. 105, et que nous avons désignées sous le nom d'*ellipses*, d'*hyperboles* et de *paraboles*.

Le cercle est implicitement compris dans l'espèce de l'ellipse ; il répond au cas où l'on a $\alpha = \beta$, ce qui change l'équation $\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma$ (n°. 109), en cette autre :

$$u^2 + t^2 = \frac{\gamma}{\beta},$$

qui appartient évidemment au cercle dont le centre est à l'origine des coordonnées u et t, et dont le rayon est $\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$, pourvu toutefois que les coordonnées soient perpendiculaires, comme nous le supposons ici.

Nous terminerons cet article en observant que l'équation $\beta u'^2 + \gamma t'^2 - \varepsilon t' = 0$ est commune à l'ellipse, à l'hyperbole et à la parabole. On a la première courbe lorsque β et γ sont de même signe; la seconde lorsqu'ils sont de signes différens, et la troisième enfin lorsque $\gamma = 0$.

Il arrive souvent que l'on cherche quelle est la courbe qui soit douée d'une propriété particulière qu'on ignore appartenir à une courbe déjà connue ; mais alors l'équation relative à cette propriété rentre dans quelques-unes des équations déjà discutées : c'est ce que montreront les questions suivantes.

112. *Trouver l'équation d'une courbe telle, que si l'on*
Fig. 35. *mène de chacun de ses points* M, *fig.* 35, *à deux points fixes*, F *et* F', *les droites* MF *et* MF', *la somme de ces lignes soit égale à une ligne donnée que nous représenterons par* 2 a. On aura donc sur toute la courbe cherchée

$$MF + MF' = 2a.$$ Fig. 35.

On prendra pour origine des coordonnées le point O, milieu de FF' que je désigne par $2c$; en sorte que $OF = OF' = c$; et faisant $OP = x$, $PM = y$, on trouvera

$$FP = c - x, \quad F'P = c + x.$$

Les triangles PMF, PMF', rectangles en P, donnant

$$MF = \sqrt{\overline{FP}^2 + \overline{PM}^2}, \quad MF' = \sqrt{\overline{F'P}^2 + \overline{PM}^2},$$

on obtiendra

$$MF = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, \quad MF' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2};$$

mais en posant $MF = z$, il viendra

$$MF' = 2a - z,$$

à cause de $MF + MF' = 2a$; on aura par conséquent

$$z = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, \quad 2a - z = \sqrt{(c+x)^2 + y^2};$$

élevant au quarré pour faire disparoître les radicaux, il en résultera

$$z^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$$
$$4a^2 - 4az + z^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2;$$

retranchant la seconde de ces équations de la première, il restera

$$-4a^2 + 4az = -4cx,$$

d'où $$z = \frac{a^2 - cx}{a}:$$

substituant enfin cette valeur de z dans la première expression de z^2, on parviendra à l'équation cherchée, qui sera, après les réductions,

$$a^4 + c^2x^2 = a^2c^2 + a^2(x^2 + y^2).$$

Cette équation, n'étant que du second degré, nous apprend que la courbe cherchée ne peut être que l'une de celles que nous avons discutées précédemment; et pour recon-

Fig. 35. noître à quelle espèce elle appartient, donnons à son équation la forme

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^4-a^2c^2;$$

en la comparant alors avec la formule $\alpha u^2+\beta t^2=\gamma$, après y avoir écrit y et x pour u et t, nous aurons

$$\alpha=a^2,\ \beta=a^2-c^2,\ \gamma=a^4-a^2c^2=a^2(a^2-c^2),$$

d'où nous conclurons qu'elle est celle d'une ellipse, puisque les quantités β, γ et α sont essentiellement positives. En posant, pour abréger, $a^2-c^2=b^2$, nous aurons

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

d'où nous tirerons

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Les demi-axes OI et OL de cette ellipse sont respectivement a et b; et comme $b^2=a^2-c^2$, on tire de là

$$c^2=a^2-b^2,\qquad c=\sqrt{a^2-b^2},$$

ce qui nous apprend que lorsque l'on ne connoît que les axes II' et LL' d'une ellipse, on peut trouver sur le plus grand des deux, les points F et F', pour lesquels $MF+MF'=II'$, en décrivant du point L, comme centre et d'un rayon égal à la moitié du grand axe II', un arc de cercle; car aux intersections F et F' de cet arc de cercle avec l'axe II', on a

$$OF=OF'=\sqrt{\overline{FL}^2-\overline{OL}^2}=\sqrt{a^2-b^2}.$$

113. L'énoncé du problême que nous venons de résoudre nous offre une nouvelle propriété commune à toutes les ellipses, et donne en même temps un moyen d'en trouver autant de points qu'on voudra, ou même de les décrire d'un mouvement continu. En effet, si l'on

prend à volonté une ouverture de compas FM, moindre que OI, que du point F, comme centre, on décrive un cercle avec cette ouverture de compas, et qu'ensuite, prenant pour centre le point F', et pour rayon la différence $F'M$ entre le premier rayon FM et l'axe II', on décrive un second cercle, il coupera le premier en deux points M et M', qui appartiendront à l'ellipse. En répétant ce procédé avec diverses ouvertures de compas, on obtiendra de nouveaux points de l'ellipse demandée; et si ces points sont un peu multipliés, on pourra, en les joignant par un trait libre de la main, achever la courbe d'une manière d'autant plus exacte, que les points déterminés seront en plus grand nombre. Fig. 35.

Lorsque l'ellipse doit être fort grande, on la trace par un mouvement continu en fixant aux points F et F' les extrémités d'un cordeau dont la longueur est celle de l'axe II'; on tend ce cordeau par le moyen d'un piquet M que l'on fait glisser le long du même cordeau, jusqu'à ce qu'il se retrouve au point d'où il est parti : alors il a tracé l'ellipse demandée.

L'une et l'autre de ces descriptions est fondée sur ce que *dans toutes les ellipses la somme des lignes* MF *et* MF', *qu'on nomme rayons vecteurs, menées aux points fixes* F *et* F', *pris sur le grand axe, et qu'on appelle foyers, est toujours égale au grand axe,* ainsi que nous l'avons trouvé dans le numéro précédent.

L'équation $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ fournit une construction par points, très-commode dans la pratique. Ayant décrit du centre O de l'ellipse demandée, fig. 36, deux demi-cercles, l'un sur le grand axe et l'autre sur le petit, Fig. 36.

Fig. 36. pris pour diamètres, et mené un grand nombre de rayons ON, ON', etc. on abaissera sur l'axe II' les perpendiculaires PN, $P'N'$, etc. et on mènera par les points R, R', etc. où les rayons ON, ON', etc. rencontrent le plus petit des deux cercles, les droites RM, $R'M'$, etc. parallèles à II'; les points M, M', etc. que ces parallèles détermineront sur les perpendiculaires PN, $P'N'$, etc. appartiendront à l'ellipse cherchée. Par l'opération que l'on vient d'indiquer, on n'obtient que la moitié de cette courbe; mais en répétant la construction au-dessous de l'axe II', on l'aura toute entière.

Pour reconnoître l'exactitude de cette construction, il suffit d'observer qu'en vertu du parallélisme des droites RM, et II', on a

$$ON : OR :: PN : PM,$$

et que puisque $ON = a$, $OR = b$, $OP = x$, il en résulte

$$PN = \sqrt{\overline{ON}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{a^2 - x^2},$$
$$a : b :: \sqrt{a^2 - x^2} : PM,$$

d'où $$PM = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = y.$$

114. L'équation $z = \dfrac{a^2 - cx}{a} = a - \dfrac{cx}{a}$ peut être considérée comme une équation caractéristique de l'ellipse: elle en fournit une construction très-simple; car en se don-
Fig. 35. nant l'abscisse $OP = x$, fig. 35, on obtiendra par les lignes proportionnelles la quantité $\dfrac{cx}{a}$, et retranchant cette quantité de a, on auroit z ou FM; ensuite du point F, comme centre, et d'un rayon égal à FM, on décriroit un arc de cercle qui couperoit la perpendiculaire PM

dans un point M appartenant à l'ellipse. Si l'abscisse tomboit dans la partie OI' de l'axe, x devenant négatif, on auroit pour ce cas $z=a+\frac{cx}{a}$.

Le système des ordonnées z et x diffère de ceux que nous avons employés jusqu'ici, en ce que l'ordonnée z, au lieu d'être constamment parallèle à une droite donnée, change sans cesse de direction, et n'est assujettie qu'à passer par un point donné; aussi l'équation $z=a-\frac{cx}{a}$, quoique du premier degré, n'appartient plus à une ligne droite, comme dans le cas des coordonnées respectivement parallèles à des axes fixes. On pourroit substituer à l'abscisse OP une nouvelle abscisse FP, comptée toujours sur l'axe II', mais à partir du point F; en désignant cette dernière par x', on auroit $x=c-x'$, puisque $OP=OF-FP$, et il viendroit

$$z=a-\frac{c(c-x')}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}+\frac{cx'}{a}:$$

mettant b^2 au lieu de a^2-c^2, on aura

$$z=\frac{b^2+cx'}{a}.$$

On introduit le plus souvent l'angle $I'FM$ à la place de l'abscisse x', ce qui se fait en observant que dans le triangle rectangle FMP, on a $FP=FM\cos I'FM$, ou $x'=z\cos I'FM$: nommant donc φ l'angle $I'FM$, on obtiendra

$$z=\frac{b^2+cz\cos\varphi}{a}, \text{ ou } z=\frac{b^2}{a-c\cos\varphi}.$$

Cette dernière équation est d'un grand usage dans l'Application de l'analyse à l'Astronomie; on la nomme *équation polaire*, comme toutes celles dont les coordonnées partent d'un même point, qu'on appelle *pôle de la courbe*.

115. Nous modifierons dans cet article le problême que nous avons résolu dans le numéro 112, et nous de-
Fig. 37. manderons qu'on ait $MF' - MF = II' = 2a$, fig. 37, au lieu de $MF + MF' = 2a$; c'est-à-dire que la différence des rayons vecteurs soit constante. En gardant d'ailleurs les dénominations de l'article cité, nous aurons

$$MF = \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{PM}^2} = \quad z = \sqrt{(c-x)^2 + y^2},$$
$$MF' = \sqrt{\overline{F'P}^2 + \overline{PM}^2} = 2a + z = \sqrt{(c+x)^2 + y^2},$$

d'où nous tirerons

$$z^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2,$$
$$4a^2 + 4az + z^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2;$$

retranchant la première de ces équations de la seconde, nous obtiendrons

$$4a^2 + 4az = 4cx, \quad \text{ou} \quad z = \frac{cx - a^2}{a};$$

et par cette valeur de z, nous parviendrons à l'équation

$$\left(\frac{cx - a^2}{a}\right)^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2,$$

qui, par le développement, se réduit à

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Dans le cas actuel, où $c > a$, il faut prendre $b^2 = c^2 - a^2$, ce qui donnera

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

résultat qui se rapporte à la formule $\alpha u^2 - \beta t^2 = \gamma$ du numéro 109. La question proposée conduit donc à l'hyperbole, qui jouit par conséquent de cette propriété;

que la différence de ses rayons vecteurs, MF *et* MF′, *est* Fig. 57.
égale à l'axe II′, *sur lequel se trouvent les foyers* F *et* F′.

Nous avons déjà fait remarquer que cette courbe n'avoit, à proprement parler, qu'un axe, mais que pour conserver l'analogie, on concevoit un second axe LL' mené par le point O, perpendiculairement au premier: b exprime la longueur OL de la moitié de cet axe, et l'équation $b^2 = c^2 - a^2$, donnant $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, fait voir que pour trouver les foyers F et F', il faut prendre les distances OF et OF' égales à l'hypothénuse du triangle rectangle construit sur les deux demi-axes II' et LL'.

Dans la suite des diverses hyperboles qu'on obtient en assignant aux demi-axes a et b toutes les valeurs possibles, il en existe une qui est analogue au cercle, c'est celle qui résulte de la supposition de $a = b$, ou dont les axes sont égaux, et que pour cette raison on nomme *hyperbole équilatère*. Son équation $y = \pm\sqrt{x^2 - a^2}$ ne diffère de celle du cercle $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, que par les signes des termes du second membre qui sont contraires entr'eux. Les ordonnées des hyperboles quelconques décrites sur le même axe $2a$, ont avec celles de cette courbe le même rapport que les ordonnées de l'ellipse ont avec celles du cercle, puisque l'équation générale des hyperboles est $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, comme celle des ellipses est $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

116. La propriété dont jouissent les foyers F et F' peut servir à la construction de l'hyperbole par points. Pour cela, du point F, comme centre, et d'un rayon

Fig. 57. quelconque FM, on décrira un arc de cercle, puis on prendra un rayon $F'M$ plus grand ou moindre que le premier d'une quantité égale à II', et le cercle décrit sur ce dernier, du point F' comme centre, coupera le premier dans deux points M et M' appartenans à l'hyperbole.

Pour décrire une portion quelconque d'hyperbole par un mouvement continu, on assujettit une règle à tourner autour du point F', on fixe à l'extrémité N de cette règle et au point F, un fil dont la longueur soit moindre que $F'N$ de la quantité II'; on fait ensuite tourner la règle en appuyant contr'elle, avec un stylet M, le fil NMF, de manière qu'il demeure toujours tendu : le stylet M trace ainsi un arc de courbe qui appartient à l'hyperbole dont l'axe est II', et dont les foyers sont F et F'.

117. L'hyperbole a aussi une équation polaire qui se déduit de l'équation $z=\frac{cx-a^2}{a}$. Si l'on prend d'abord les abscisses à partir du point F, on aura

$$OP=x=OF-FP=c-x',$$

ce qui donnera

$$z=\frac{c^2-a^2-cx'}{a},$$

et $z=\frac{b^2-cx'}{a}$, en mettant b^2 au lieu de c^2-a^2.

Pour introduire l'angle φ, on observera que dans le triangle rectangle PMF, on a

$$PF=MF\cos I'FM \text{ ou } x'=z\cos\varphi,$$

de même que pour l'ellipse, et il viendra

$$z=\frac{b^2-cz\cos\varphi}{a}, \text{ ou } z=\frac{a}{b^2+c\cos\varphi}:$$

118.

118. Proposons-nous enfin de *trouver l'équation d'une courbe, telle que chacun de ses points soit autant éloigné de la droite* AC, *donnée de position, fig.* 38, *que d'un point fixe* F *également donné de position.* Fig. 38.

Si l'on prend sur la droite AB, menée par le point F perpendiculairement à AC, un point I situé au milieu de la distance AF, ce point appartiendra nécessairement à la courbe cherchée, puisqu'il sera autant éloigné de la droite AC que du point F. Faisant

$$IF = AI = c', \quad IP = x, \quad PM = y,$$

nous aurons, pour un point quelconque M, la distance

$$QM = AP = AI + IP = c' + x,$$

et le triangle rectangle FPM nous donnera

$$MF = \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{(c' - x)^2 + y^2},$$

puisque $PF = IF - IP$; en développant, nous trouverons

$$MF = \sqrt{c'^2 - 2c'x + x^2 + y^2},$$

et comme par la nature de la courbe cherchée on doit avoir $QM = MF$, il en résultera

$$c' + x = \sqrt{c'^2 - 2c'x + x^2 + y^2},$$

d'où on tirera

$$(c' + x)^2 = c'^2 - 2c'x + x^2 + y^2:$$

il viendra, après la réduction,

$$2c'x = -2c'x + y^2, \quad \text{ou} \quad y^2 = 4c'x,$$

équation à la parabole.

119. Pour construire la courbe d'après la propriété que nous venons d'employer à la recherche de son équa-

tion, il faut, d'un rayon FM pris à volonté, décrire un cercle, faire $AP = FM$, et mener par le point P, parallèlement à la ligne AC, une droite PM : le point M où cette droite coupera le cercle appartiendra à la parabole demandée ; car il est évident que la droite QM étant parallèle et égale à AP, sera égale à FM.

Cette même propriété donne lieu à un mouvement continu par lequel on trace la courbe ; pour cela on place le long de AC, une règle sur laquelle on fait mouvoir une équerre dont l'un des côtés représente la droite QE ; on attache au point F l'extrémité d'un fil dont la longueur est égale à QE, et dont l'autre extrémité est fixée au point E ; on tend ce fil par un stile en l'appliquant contre le côté QE, et le stile décrit une portion de parabole.

120. Si, pour arriver à l'équation polaire, on fait $FM = z$, on aura

$$z = c' + x,$$

et changeant l'origine des abscisses, en prenant FP à la place de IP, c'est-à-dire en faisant $x = c' - x'$, puisque $IP = IF - FP$, il viendra

$$z = 2c' - x' ;$$

mettant ensuite $FM \cos MFP$, ou $z \cos \varphi$, au lieu de FP ou de x', on aura

$$z = 2c' - z\cos\varphi, \text{ ou } z = \frac{2c'}{1 + \cos\varphi}.$$

Fig. 39. 121. La question qui nous a conduits ci-dessus à l'équation de la parabole, peut être modifiée de manière à embrasser les trois courbes du second degré. Il suffit pour cela de l'énoncer ainsi : *trouver l'équation d'une courbe dans laquelle la distance entre un point quelconque* M *et le point fixe* F, fig. 39, *soit à la distance* MQ *entre le*

même point M *et une droite* AC *donnée de position, comme* 1 : n, *c'est-à-dire dans un rapport constant.*

Abaissons du point F sur AC la perpendiculaire AB; il est évident que la courbe cherchée rencontrera cette droite dans un point I, pour lequel on aura

$$IF : AI :: 1 : n;$$

en sorte que si on désigne IF par c', il en résultera

$$AI = nc'.$$

Faisant $IP = x$, $PM = y$, il viendra, en vertu du triangle rectangle PMF, de même que ci-dessus :

$$MF = \sqrt{(c' - x)^2 + y^2};$$

et comme $QM = AP = AI + IP = nc' + x$, on aura

$$\sqrt{(c' - x)^2 + y^2} : nc' + x :: 1 : n,$$

d'où on tirera

$$nc' + x = n\sqrt{(c' - x)^2 + y^2};$$

élevant au quarré, on obtiendra enfin

$$n^2 y^2 + (n^2 - 1)\, x^2 - 2(n + 1)\, nc' x = 0.$$

Cette équation, d'une forme absolument semblable à l'équation $\beta u^2 + \chi t^2 - \varepsilon t = 0$, obtenue dans le n°. 111, appartiendra à l'ellipse, à l'hyperbole, ou à la parabole, selon qu'on aura $n > 1$, $n < 1$, ou $n = 1$, et montre par conséquent que la propriété qui fait le sujet de la question proposée, est commune aux trois courbes du second degré, par rapport auxquelles la droite AC est nommée *directrice*.

En donnant à l'équation ci-dessus la forme

$$y^2 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) x^2 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) c' x = 0,$$

et en remarquant que plus n augmente, plus les fractions $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n}$ diminuent, on verra que dans la supposition de n infinie, elle doit se réduire à

$$y^2+x^2-2c'x=0,$$

équation qui est celle d'un cercle dont le rayon est c', et pour lequel l'origine des abscisses est placée à l'une des extrémités du diamètre (n°. 93).

122. On peut déduire immédiatement de l'une quelconque des équations

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2), \qquad y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$$

obtenues dans les n^{os}. 112 et 115, une nouvelle équation qui les renferme toutes deux, et qui comprenne aussi l'équation $y^2=4c'x$, qui semble d'une forme essentiellement différente de celle des deux autres. Pour cela, il suffit de transporter dans ces équations, l'origine des coordonnées à l'un des sommets de la courbe qu'elles représentent. En effet, si dans la figure 35 on fait $IP=x'$, et $I'P=x'$ dans la figure 37, on aura par la première,

$$x \text{ ou } OP=OI-IP=a-x'$$

et par la seconde,

$$x \text{ ou } OP=I'P-OI'=x'-a.$$

Ces substitutions changeront les équations rapportées ci-dessus en

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax'-x'^2), \qquad y^2=\frac{b^2}{a^2}(x'^2-2ax');$$

elles prendront alors la forme

$$y^2=\frac{p}{2a}(2ax'-x'^2), \quad y^2=\frac{p}{2a}(x'^2-2ax'),$$

si l'on pose $\frac{2b^2}{a}=p$, et l'une ne différera de l'autre que par le signe de p.

En mettant, au lieu de b^2, sa valeur a^2-c^2, relative à l'ellipse, on aura pour cette courbe

$$p=\frac{2(a^2-c^2)}{a};$$

mais comme dans le cas actuel c exprime la distance du foyer F au centre O, il faut introduire à sa place la distance IF, comptée de la nouvelle origine des coordonnées; or, si l'on prend $IF=c'$, on aura, fig. 35, Fig. 35.

$$c \text{ ou } OF=OI-IF=a-c',$$

et la quantité p deviendra

$$p=\frac{4ac'-2c'^2}{a}.$$

On trouvera pour l'hyperbole, fig. 37, Fig. 37.

$$OF=I'F-OI'=c'-a;$$

et puisqu'on a pour cette courbe

$$b^2=c^2-a^2, \text{ (n°. 115)},$$

il en résultera

$$p=\frac{2(c^2-a^2)}{a}=\frac{2c'^2-4ac'}{a},$$

quantité qui n'est que la précédente prise négativement.

En mettant l'expression $4ac'-2c'^2$ sous la forme $4c'-\frac{2c'^2}{a}$, on voit que plus a augmente, c' restant le même, plus la fraction $\frac{2c'^2}{a}$ diminue, et que par conséquent, dans la supposition où a deviendroit infini, elle se réduiroit à $4c'$: on aura donc pour ce cas $p=4c'$; mais, d'un autre côté, l'équation

$$y^2=\frac{p}{2a}(2ax'-x'^2),$$

équivalente à

$$y^2=p\left(x'-\frac{x'^2}{2a}\right),$$

se réduiroit aussi par la même raison à $y^2=px'$ ou $y^2=4c'x'$, ce qui est l'équation de la parabole.

L'équation $y^2=\frac{p}{2a}(2ax'-x'^2)$ est donc propre à représenter chacune des courbes du second degré ; elle appartiendra à l'ellipse quand p sera positif, à l'hyperbole quand p sera négatif, et à la parabole lorsque a sera infini.

123. La quantité p se nomme le *paramètre :* c'est dans l'ellipse et dans l'hyperbole, une troisième proportionnelle aux deux axes, puisqu'en vertu de l'équation

$$p=\frac{2b^2}{a}=\frac{4b^2}{2a},$$

on a

$$2a:2b::2b:p;$$

et dans les trois courbes du second degré, elle exprime la valeur de la double ordonnée qui passe par le foyer. En effet, à ce point on a $x'=c'$, et on trouve pour l'ellipse

$$y^2=\frac{p}{2a}(2ac'-c'^2)=\frac{(4ac'-2c'^2)(2ac'-c'^2)}{2a^2}$$

$$=\frac{(2ac'-c'^2)^2}{a^2},\quad \text{d'où}\quad y=\frac{2ac'-c'^2}{a},$$

et par conséquent

$$2y=\frac{4ac'-2c'^2}{a}=p.$$

On obtiendra de même dans l'hyperbole

$$2y=\frac{2c'^2-4ac'}{a}=p,$$

et dans la parabole $2y=4c'=p$.

124. Les équations

$$y^2=\frac{p}{2a}(2ax'-x'^2), \qquad y^2=\frac{p}{2a}(x'^2-2ax')$$

expriment une propriété commune à l'ellipse et à l'hyperbole, et qui devient évidente lorsqu'on les met sous la forme

$$\frac{y^2}{x'(2a-x')}=\frac{p}{2a}, \qquad \frac{y^2}{x'(x'-2a)}=\frac{p}{2a},$$

de laquelle il résulte que dans l'une et l'autre courbe, le quarré de l'ordonnée PM est dans un rapport constant avec le produit des lignes IP et $I'P$, qui sont respectivement x' et $2a-x'$ pour l'ellipse, fig. 35; x' et $x'-2a$ Fig. 35.
pour l'hyperbole, fig. 37. Ces distances du pied de l'or- Fig. 37.
donnée à chacun des sommets de la courbe, étant nommées *abscisses*, on dit que *dans l'ellipse et dans l'hyperbole les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes.*

En effet, si on désigne par X' une abscisse différente de x', mais toujours comptée du même point, et par Y l'ordonnée correspondante, on aura

$$Y^2=\frac{p}{2a}(2aX'-X'^2), \qquad Y^2=\frac{p}{2a}(X'^2-2aX'),$$

d'où on tirera

$$y^2 : Y^2 :: x'(2a-x') : X(2a-X)$$

pour l'ellipse,

$$y^2 : Y^2 :: x'(x'-2a) : X'(X'-2a)$$

pour l'hyperbole, en supprimant toutefois dans le dernier rapport de chacune de ces proportions le facteur commun $\frac{p}{2a}$.

L'équation de la parabole $y^2=px$, étant traitée de la même manière, donne seulement

$$y^2 : Y^2 :: x' : X',$$

ce qui fait voir que *dans la parabole les quarrés des ordonnées sont comme les abscisses correspondantes.*

125. Il résulte de la comparaison des formules obtenues dans les n^{os} 105, 109, 111, qu'il y a pour chaque courbe du second degré, au moins deux systêmes de coordonnées dans lesquels l'équation de cette courbe se présente sous la forme la plus simple; l'un de ces systêmes est celui des axes, et l'autre, celui de deux diamètres conjugués: nous allons montrer qu'il y a un nombre infini de systêmes de coordonnées qui jouissent de la même propriété. Pour le faire, nous appliquerons la transformation des coordonnées aux équations relatives aux axes.

Soit premièrement celle de l'ellipse $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ qui revient à

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2;$$

nous observerons d'abord qu'il est inutile de déplacer l'origine des coordonnées qu'il faut laisser au centre, et n'ayant à changer que la direction des axes, nous ferons seulement

$$x=mu+pt,\quad y=nu+qt \quad (\text{n}^{\text{o}}.108).$$

Nous laisserons indéterminé l'angle que les nouvelles coordonnées doivent faire entr'elles, et dont le cosinus est représenté par h, et nous ne tiendrons par conséquent aucun compte de l'équation

$$mp+nq+(np+mq)g=h;$$

il n'en sera pas de même des équations

$$m^2+n^2+2mng=1,\quad p^2+q^2+2pqg=1,$$

parce que les coordonnées x et y étant réciproquement perpendiculaires, il en résulte $g=0$, d'où

$$m^2+n^2=1,\qquad p^2+q^2=1.$$

Des quatre quantités m, n, p et q, il n'en restera donc que deux dont nous puissions disposer. En faisant la substitution des valeurs de x et de y, dans l'équation

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

nous obtiendrons

$$(a^2n^2+b^2m^2)u^2+2(a^2nq+b^2mp)ut+(a^2q^2+b^2p^2)t^2 \\ =a^2b^2;$$

pour simplifier cette dernière nous poserons

$$a^2nq+b^2mp=0,$$

ce qui la réduit à

$$(a^2n^2+b^2m^2)u^2+(a^2q^2+b^2p^2)t^2=a^2b^2,$$

et pour qu'elle puisse se ramener à la forme

$$a'^2t^2+b'^2u^2=a'^2b'^2,$$

il faut qu'elle n'en diffère que par un facteur commun à tous ses termes. Soit donc λ ce facteur, on aura

$$b'^2\lambda=a^2n^2+b^2m^2,\quad a'^2\lambda=a^2q^2+b^2p^2,\quad a'^2b'^2\lambda=a^2b^2,$$

d'où on tirera

$$\lambda=\frac{a^2b^2}{a'^2b'^2},\quad \frac{a^2b^2}{a'^2}=a^2n^2+b^2m^2,\quad \frac{a^2b^2}{b'^2}=a^2q^2+b^2p^2,$$

ce qui donnera

$$a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2n^2+b^2m^2},\qquad b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2q^2+b^2p^2}.$$

Pour s'assurer de la possibilité de cette transformation, il faut voir si la détermination des quantités m, n, p et q ne peut éprouver aucune difficulté ; or, l'équation

$$a^2 nq + b^2 mp = 0,$$

mise sous la forme $a^2 + b^2 \frac{mp}{nq} = 0$, fera toujours connoître le rapport des deux quantités p et q : on en déduit en effet $\frac{p}{q} = -\frac{a^2}{b^2}\frac{n}{m}$. Soit pour abréger $\frac{a^2}{b^2}\frac{n}{m} = r$, il viendra $p = qr$; substituant dans $p^2 + q^2 = 1$, on en obtiendra

$$q^2(1 + r^2) = 1,$$

d'où l'on conclura

$$q = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, \qquad p = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}},$$

expressions qui demeureront toujours réelles quelle que soit r. L'équation $m^2 + n^2 = 1$, ne pouvant déterminer qu'une des deux quantités m et n, laisse absolument indéterminé le rapport $\frac{n}{m}$ qui entre dans les expressions de p et de q, lesquelles, par cette raison, deviennent susceptibles d'une infinité de valeurs différentes. Il y a donc en effet une infinité de systêmes de coordonnées dans lesquels l'équation de l'ellipse a la forme

$$a'^2 t^2 + b'^2 u^2 = a'^2 b'^2,$$

absolument semblable à celle de l'équation aux axes

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

126. En opérant sur l'équation de l'hyperbole

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \quad \text{ou} \quad b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

comme nous venons de faire sur celle de l'ellipse, nous aurons successivement

$$(b^2m^2-a^2n^2)u^2+2(b^2mp-a^2nq)ut+(b^2p^2-a^2q^2)t^2 = a^2b^2,$$

$$b^2mp-a^2nq=0,$$

$$(b^2m^2-a^2n^2)u^2+(b^2p^2-a^2q^2)t^2=a^2b^2;$$

comparant ce dernier résultat à

$$\lambda(b'^2u^2-a'^2t^2)=\lambda a'^2b'^2,$$

nous trouverons

$$\lambda=\frac{a^2b^2}{a'^2b'^2}\quad a'^2=\frac{a^2b^2}{b^2m^2-a^2n^2},\quad b'^2=\frac{-a^2b^2}{b^2p^2-a^2q^2}.$$

Les expressions de p et de q seront de la même forme dans ce cas-ci que dans le précédent, et pourront donner par conséquent une infinité de valeurs d'après celles qu'on assignera au rapport $\frac{n}{m}$. Nous serons donc fondés à tirer pour l'hyperbole une conclusion pareille à celle que nous avons énoncée pour l'ellipse.

127. Passons à la parabole; son équation $y^2=4c'x$, ne peut être transformée en une autre qui lui soit semblable par les formules

$$x=mu+pt,\quad y=nu+qt.$$

On obtient en effet la résultante

$$n^2u^2+2nqut+q^2t^2=4c'(mu+pt),$$

de laquelle il faudroit faire disparoître trois termes, savoir, ceux qui sont affectés de u^2, ut et t; or, c'est ce qui ne se peut, puisque parmi les quantités m, n, p et q, on n'en sauroit déterminer que deux. Ayons donc recours au déplacement de l'origine, et substituons à x et à y leurs valeurs plus générales

$$mu+pt+\mathrm{a},\quad nu+qt+\mathrm{b}\quad (\text{n}^{\circ}.\ 108);$$

nous aurons ainsi

$$\left.\begin{array}{l} n^2u^2+2nqut+q^2t^2 \\ +2\mathrm{b}(nu+qt)-4c'(mu+pt) \\ \quad +\mathrm{b}^2-4\mathrm{a}c' \end{array}\right\}=0;$$

pouvant disposer maintenant de quatre quantités, à cause des deux nouvelles indéterminées a et b, nous ferons disparoître les termes affectés de ut, de t et le terme tout connu, en posant

$$2nq=0,\quad 2\mathrm{b}q-4c'p=0,\quad \mathrm{b}^2-4\mathrm{a}c'=0.$$

La première de ces équations peut être satisfaite de deux manières : soit par $n=0$, soit par $q=0$; en adoptant la première, le terme n^2u^2 s'évanouit, et il ne reste que

$$q^2t^2=4c'mu,\quad \text{ou}\quad t^2=\frac{4c'mu}{q^2},$$

équation semblable à celle qui se rapporte à l'axe de la courbe. La supposition de $n=0$, introduite dans l'équation $n^2+m^2=1$, donne $m=\pm1$; de $2\mathrm{b}q-4c'p=0$, on tire $\frac{q}{p}=\frac{2c'}{\mathrm{b}}$, et cette équation, combinée avec $p^2+q^2=1$, détermine p et q : l'équation $\mathrm{b}^2-4\mathrm{a}c'=0$ détermine aussi a lorsque b est connu; mais cette dernière quantité reste susceptible de telle valeur qu'on voudra.

128. Les remarques précédentes conduisent à cette question : *un diamètre quelconque étant donné, trouver la position de son conjugué*. On la résoudra en observant que Fig. 33. lorsque dans la fig. 33, du n°. 108, l'angle CAB, ou celui que font entr'eux les axes des coordonnées primitives x, y, est droit, les triangles $P''A'''R$ et $P''MQ$ deviennent rec-

tangles, l'un en R, l'autre en Q, et qu'il s'ensuit que $m = \frac{A'''R}{A'''P''}$ représente le cosinus de l'angle $P''A'''R$, ou $B''A'''B'$, et que $n = \frac{P''R}{A'''P''}$ en est le sinus; que $p = \frac{P''Q}{P''M}$ représente le cosinus de l'angle $MP''Q$ ou $C''A'''B'$, et que $q = \frac{QM}{P''M}$ en est le sinus. Si l'on rapporte ces mêmes dénominations à l'axe II', sur lequel se prennent les abscisses x dans les fig. 40 et 41, et qu'on connoisse l'angle Fig. 40, 41. que fait avec cet axe le diamètre quelconque FO, pris pour l'axe des u, les quantités m et n seront données, et suffiront pour déterminer p et q par le moyen de l'équation $p^2 + q^2 = 1$, combinée avec celle qu'on a déduite de la propriété des diamètres conjugués. Ayant q, on aura par conséquent l'angle que fait avec l'axe II', le diamètre OH conjugué avec FO.

129. Pour l'ellipse, on a l'équation $a^2nq + b^2mp = 0$, de laquelle on tire $\frac{q}{p} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n}$, et puisque

$$\frac{m}{n} = \frac{\cos FOE}{\sin FOE} = \frac{1}{\operatorname{tang} FOE}, \quad \frac{q}{p} = \frac{\sin HOG}{\cos HOG} = \operatorname{tang} HOG,$$

il vient

$$\operatorname{tang} HOG = -\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{\operatorname{tang} FOE}.$$

Si l'on suppose connues les coordonnées du point F, et qu'on désigne OE par α, EF par β, on aura

$$\operatorname{tang} FOE = \frac{EF}{OE} = \frac{\beta}{\alpha},$$

et par conséquent

$$\operatorname{tang} HOG = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}.$$

En représentant par α' et β' les lignes OG et GH, on aura

$$\text{tang}\, HOG = \frac{GH}{OG} = \frac{\beta'}{\alpha'} = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta},$$

d'où

$$a^2\beta\beta' + b^2\alpha\alpha' = 0;$$

cette équation jointe à celle de l'ellipse qui donnera

$$\beta'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2),$$

fera connoître α' et β', ou les coordonnées du point H, par le moyen de celles du point F.

Nous remarquerons en passant, que cette manière de trouver la position d'un diamètre conjugué avec un autre, donne en même temps celle de la tangente à un point quelconque de la courbe, puisque le diamètre OH est nécessairement parallèle à la droite FT qui touche l'ellipse au point F (n°. 106), et qui peut par conséquent se mener dès que OH est tirée.

Les calculs ci-dessus s'effectuent d'une manière semblable dans l'hyperbole, pour laquelle on a l'équation

$$b^2 mp - a^2 nq = 0,$$

dont on tire successivement

$$\frac{q}{p} = \frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n}, \text{tang}\, GOH = \frac{b^2}{a^2}\frac{1}{\text{tang}\, FOE}, \text{tang}\, GOH = \frac{b^2\alpha}{a^2\beta}.$$

Dans ce cas-ci, le second diamètre OH ne rencontrant pas la courbe, on pourra prendre IH et OI au lieu de GO et de GH, ou faire $\alpha' = a$; et comme

$$\text{tang}\, IOH = \frac{IH}{OG} = \frac{\beta'}{a},$$

on aura $\beta' = \frac{b^2\alpha}{a^2\beta}a$, ce qui donnera le point H.

Dans la parabole, on a $n=0$; il suit de là que l'axe des u, FO, est parallèle à celui des x, et que sa position ne dépend que du point O, fig. 42, où il rencontre la courbe, point qui se trouve déterminé par la quantité a, laquelle représente évidemment l'abscisse IE, qui répond sur l'axe IB', au point de la courbe où l'on a en même temps $t=0$, $u=0$. Fig. 42.

L'équation $\frac{q}{p}=\frac{2c}{b}$ donne la tangente trigonométrique de l'angle compris entre l'axe des u et celui des t, et si l'on mène ce dernier, HT, par le point O, il sera en même temps tangent à la parabole, d'après la remarque faite plus haut, relativement à l'ellipse.

130. Dans les équations

$$a'^2t^2+b'^2u^2=a'^2b'^2,\quad b'^2u^2-a'^2t^2=a'^2b'^2,$$

dont la première appartient à l'ellipse et la seconde à l'hyperbole, les lettres a' et b' représentent les deux diamètres conjugués; en effet, quand $t=0$, il vient $u=a'$ ou $OF=a'$, et lorsque $u=0$, il vient $t^2=b'^2$ ou $t^2=-b'^2$, ce qui donne pour l'hyperbole comme pour l'ellipse $OH=b'$ (n°. 115). Ces deux diamètres ont avec les axes une relation fort simple et fort remarquable.

Lorsqu'il s'agit de l'ellipse, on a

$$a^2nq+b^2mp=0,$$

$$a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2n^2+b^2m^2},$$

$$b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2q^2+b^2p^2};$$

en combinant ces équations avec

$$m^2+n^2=1,\quad p^2+q^2=1,$$

pour en éliminer les quatre quantités m, n, p, q, l'équation finale ne renfermant plus que les quatre lettres a, b, a' et b', exprimera la relation demandée. De l'équation

$$a^2 n q + b^2 m p = o,$$

on tire

$$a^2 n q = - b^2 m p;$$

élevant au quarré et substituant pour n^2 et q^2, leurs valeurs $1 - m^2$, $1 - p^2$, il viendra

$$a^4 (1 - m^2)(1 - p^2) = b^4 m^2 p^2,$$

d'où on tirera

$$m^2 = \frac{a^4 (1 - p^2)}{b^4 p^2 + a^4 (1 - p^2)}, \quad 1 - m^2 = \frac{b^4 p^2}{b^4 p^2 + a^4 (1 - p^2)};$$

mettant aussi pour n^2 et pour q^2, leurs valeurs dans les expressions de a'^2 et de b'^2, on formera ces équations :

$$a'^2 \left\{ a^2 (1 - m^2) + b^2 m^2 \right\} = a^2 b^2$$
$$b'^2 \left\{ a^2 (1 - p^2) + b^2 p^2 \right\} = a^2 b^2,$$

et chassant m^2 et $1 - m^2$ de la première, on aura

$$a'^2 \left\{ \frac{a^2 b^4 p^2 + a^4 b^2 (1 - p^2)}{b^4 p^2 + a^4 (1 - p^2)} \right\} = a^2 b^2,$$

résultat dont les deux membres se divisent par $a^2 b^2$, et qui donne ensuite

$$a'^2 \left\{ b^2 p^2 + a^2 (1 - p^2) \right\} = b^4 p^2 + a^4 (1 - p^2).$$

De cette dernière équation, on éliminera p^2, en prenant sa valeur dans

$$b'^2 \left\{ a^2 (1 - p^2) + b^2 p^2 \right\} = a^2 b^2,$$

on trouvera, après la substitution et les réductions qu'elle entraîne,

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \text{ ou } \overline{FO}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{OL}^2.$$

En

En traitant de la même manière les équations

$$b^2 mp - a^2 nq = 0,$$

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 m^2 - a^2 n^2},$$

$$b'^2 = -\frac{a^2 b^2}{b^2 p^2 - a^2 q^2}$$

qui se rapportent à l'hyperbole, on obtiendra

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2, \text{ ou } \overline{FO}^2 - \overline{OH}^2 = \overline{OI}^2 - \overline{OL}^2.$$

Donc la somme des quarrés des demi-diamètres conjugués dans l'ellipse, ou leur différence dans l'hyperbole, est égale à la somme des quarrés des demi-axes, ou à leur différence.

131. Si on multiplie entr'elles les expressions de a'^2 et de b'^2 dans l'ellipse, on obtiendra

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4 n^2 q^2 + a^2 b^2 n^2 p^2 + a^2 b^2 m^2 q^2 + b^4 m^2 p^2},$$

mais en quarrant l'équation $a^2 nq + b^2 mp = 0$, il vient

$$a^4 n^2 q^2 + 2 a^2 b^2 mnpq + b^4 m^2 p^2 = 0,$$

ou

$$a^4 n^2 q^2 + b^4 m^2 p^2 = -2 a^2 b^2 mnpq;$$

avec cette valeur on fera disparoître le premier et le dernier terme du dénominateur de l'expression de $a'^2 b'^2$, qui deviendra

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{a^2 b^2 n^2 p^2 - 2 a^2 b^2 mnpq + a^2 b^2 m^2 q^2}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{(np - mq)^2},$$

prenant de part et d'autre la racine quarrée, on aura

$$a'b' = \frac{ab}{np - mq} \quad \text{ou} \quad a'b'(np - mq) = ab.$$

Il est important de remarquer que la quantité $np - qm$ n'est autre chose que le sinus de l'angle que font entr'eux les deux diamètres conjugués FO et OH, car n et m étant le sinus et le cosinus de l'angle FOE, q et p le sinus et le cosinus de l'angle GOH, la formule

$$\sin FOH = \sin(FOE + GOH)$$

$$= \sin FOE \cos GOH + \cos FOE \sin GOH \; (\text{n}^\circ.\, 11),$$

donne $$\sin FOH = np - mq,$$

si l'on fait attention que l'angle GOH tombant au-dessous de l'axe II', a un sinus négatif, $q = -\frac{b^2 mp'}{a^2 n}$, qu'il faut rendre positif dans cette formule, et prendre par conséquent $-q$ au lieu de $+q$: on aura donc

$$a'b' \sin FOH = ab.$$

Il est facile de voir que si du point F on abaisse sur OH la perpendiculaire FQ, on aura

$$FQ = OF \sin FOH = a' \sin FOH;$$

et que par conséquent la surface du parallélogramme

$$FOHT = OH \times FQ = a'b' \sin FOH;$$

on doit donc conclure de ce qui précède que le rectangle formé sur les demi-axes a et b, ou OI et OL, est égal au parallélogramme $FOHT$, formé sur les deux demi-diamètres conjugués, OF et OH.

On reconnoîtra que la même propriété a lieu dans l'hyperbole, en formant de même le produit $a'^2 b'^2$; mais il faudra prendre garde que dans la fig. 41, l'angle Fig. 41.

$$FOH = HOE - FOE.$$

On déduit de là cette propriété remarquable : *que les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse ou inscrits entre les deux parties opposées de l'hyperbole sont tous égaux au rectangle des axes*, puisque ces parallélogrammes ainsi que le montrent les figures, sont composés de quatre autres parallélogrammes égaux chacun au quart du rectangle des axes, exprimé par $4 a^2 b^2$.

132. Si on désigne par s le sinus de l'angle FOH, on aura l'équation $a' b' s = a b$, que l'on combînera avec

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

dans l'ellipse, et

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$$

dans l'hyperbole, pour trouver les demi-axes a et b, lorsque l'on ne connoîtra que deux demi-diamètres conjugués, et l'angle qu'ils font entr'eux. Quand on aura les axes, on arrivera facilement aux angles qu'ils font avec les diamètres conjugués, en se servant des expressions de a'^2 et b'^2, rapportées dans le n°. 130. Nous laisserons au lecteur a effectuer les calculs et les constructions qui en dérivent; ce que nous avons dit remplit le but que nous nous étions proposé, de montrer comment on peût déduire les principales propriétés des courbes du second degré, par une méthode vraiment analytique, et indépendante des constructions géométriques.

133. Les propriétés fondamentales de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole que nous avons fait connoître dans le n°. 124, et qui ont lieu soit par rapport

aux axes, soit par rapport aux diamètres, se retrouvent dans les différentes courbes qui résultent de l'intersection de la surface conique par un plan quelconque. En voici les démonstrations synthétiques.

Fig. 43. Soit ASB, fig. 43, un cône quelconque à base circulaire, c'est-à-dire le solide terminé par la surface qu'engendre, en glissant sur la circonférence du cercle $ACBD$, une droite assujettie à passer par le point S, dans toutes les positions qu'elle prend. Il est évident, 1°. que si l'on coupe ce solide par un plan quelconque CSD, mené par le point S qu'on nomme le *sommet* du cône, on obtiendra deux lignes droites qui répondent aux deux positions prises par la droite génératrice lorsqu'elle est parvenue successivement aux points C et D, dans lesquels le plan CSD rencontre la circonférence $ACBD$. 2°. Si le plan coupant est $A'C'B'D'$, parallèle au plan de la base $ACBD$, la section sera un cercle, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre en concevant qu'on ait mené par le point S et le centre de la base l'*axe* SO du cône proposé, et que l'on ait fait passer par cet axe deux plans quelconques ASB et CSD, dont les intersections respectives avec $ACBD$, $A'C'B'D'$ soient AB et $A'B'$, CD et $C'D'$; car on aura alors les triangles semblables COS, $C'O'S$, qui donneront

$$CO : C'O' :: SO : SO',$$

et les triangles semblables AOS, $A'O'S$, qui donneront

$$AO : A'O' :: SO : SO',$$

d'où on conclura

$$AO : A'O' :: CO : C'O';$$

et puisque par construction $AO = CO$, on aura $A'O' = C'O'$, ce qui prouve que tous les rayons de la section $A'C'B'D'$ sont égaux, qu'elle est par conséquent un cercle.

Il est à propos d'observer que la surface du cône s'étend indéfiniment soit au-dessous du plan de la base $ABCD$, soit au-dessus de son sommet S, puisque rien ne limite la longueur de la droite génératrice ; il est aisé de sentir que la partie Sb du prolongement de la droite SB, décrit un second cône placé dans une situation inverse du premier.

134. Ces préliminaires étant posés, concevons 1°. que le cône ASB, fig. 44, soit coupé par un plan qui rencontre en même temps les deux côtés AS et SB, et qui par conséquent n'entre point dans le cône supérieur asb ; il est évident que dans ce cas la section $IMI'm$ sera une courbe fermée ou rentrante en elle-même. Soit GH la commune section du plan coupant avec le plan de la base $ACBD$; imaginons que la ligne AOB, qui détermine la position du plan triangulaire ASB, soit perpendiculaire sur GH, et supposons menés parallèlement à $ACBD$, deux plans $EMFm$, $E'M'F'm'$, qui rencontreront en même temps le plan coupant $IMI'm$: les communes sections des deux premiers avec le troisième, représentées par Mm, $M'm'$, seront parallèles à GH, et par conséquent perpendiculaires aux lignes EF et $E'F'$, qui sont parallèles entr'elles, comme étant les communes sections des plans $EMFm$, $E'M'F'm'$, par le plan ASB. Les courbes $EMFm$, $E'M'F'm'$ étant des circonférences de cercle (n°. précédent), on aura Fig. 44.

$$\overline{PM}^2 = EP \times FP, \quad \overline{P'M'}^2 = E'P' \times F'P';$$

mais la ligne II', commune section des plans ASB et $IMI'm$, forme avec les lignes EF, $E'F'$, et les côtés du cône les triangles EIP, $E'IP'$, semblables entr'eux, et les triangles $FI'P$, $F'I'P'$, aussi semblables entr'eux ; les deux premiers donneront

$$EP : E'P' :: IP : IP',$$

et les deux autres, $FP : F'P' :: I'P : I'P'$; multipliant ces proportions par ordre, on aura

$$EP \times FP : E'P' \times F'P' :: IP \times I'P : IP' \times I'P',$$

et substituant à $EP \times FP$ et $E'P' \times F'P'$, leurs valeurs $\overline{PM}^2$ et $\overline{P'M'}^2$, on aura

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: IP \times I'P : IP' \times I'P',$$

proportion qui exprime la propriété caractéristique de l'ellipse énoncée dans le n°. 124.

135. Il est à propos de remarquer que si le triangle SII' étoit semblable au triangle SAB, sans que la ligne II' fût parallèle à AB, ce qui auroit lieu si l'angle SII' étoit égal à SAB, et que $SI'I$ le fût à SBA, alors les triangles EPI et $FI'P$ étant semblables entr'eux comme les précédens, donneroient

$$EP : I'P :: IP : FP, \text{ ou } EP \times FP = I'P \times IP;$$

et parce que dans le cercle EMF, on a $\overline{PM}^2 = EP \times FP$, on auroit aussi $\overline{PM}^2 = I'P \times IP$. La section $IMI'm$, seroit donc elle-même un cercle dans ce cas, si les ordonnées PM étoient perpendiculaires au diamètre II'; mais pour que cette dernière condition soit remplie, il faut que la commune section GH du plan coupant et de la base du cône soit perpendiculaire à-la-fois sur la droite GA et sur la droite GI, c'est-à-dire, qu'elle soit perpendiculaire au triangle par l'axe SAB, et que par conséquent celui-ci soit lui-même perpendiculaire au plan de la base du cône et au plan coupant. Lorsque ces circonstances se rencontrent ensemble, le plan coupant est dit *antiparallèle* à celui de la base, et il en résulte que dans un cône à base circulaire, la section antiparallèle à cette base est un cercle de même que la section parallèle.

136. Si le plan coupant étoit, par rapport aux côtés du cône, dans la situation que représente la fig. 45, c'est-à-dire qu'il pût rencontrer en même temps les deux cônes opposés, il formeroit dans chaque cône une courbe indéfinie, puisqu'une fois entré dans le cône ce plan ne sauroit plus en être dégagé. Les deux cônes opposés ne formant à proprement parler qu'une seule surface, les deux courbes KIk et $K'I'k'$ doivent être regardées comme n'en composant qu'une seule. Il est facile de reconnoître déjà une ressemblance marquée entre cette courbe et l'hyperbole, mais pour prouver leur identité, il faut de plus retrouver dans la première une des propriétés caractéristiques de la seconde. En supposant que le plan ASB soit déterminé comme dans le n°. 134, qu'on ait mené le plan $EMFm$, parallèle à $ACBD$, et tiré les droites $I'I$, Mm, $M'm'$, qui sont les communes sections du plan coupant avec les trois plans ASB, $EMFm$, $ACBD$, on comparera entr'eux les triangles semblables $PI'F$, $P'I'B$, qui donneront Fig. 45.

$$I'P : I'P' :: PF : P'B,$$

et les triangles semblables EIP, $AI'P'$, qui donneront

$$IP : IP' :: PE : AP';$$

multipliant ces deux proportions par ordre, il viendra

$$I'P \times IP : I'P' \times IP' :: PF \times PE : P'B \times AP'.$$

Mais à cause que les sections $EMFm$ et $ACBD$ sont des cercles dont les diamètres EF et AB sont perpendiculaires aux lignes Mm et $M'm'$, par construction, on aura

$$PF \times PE = \overline{PM}^2,\ P'B \times AP' = \overline{P'M'}^2,$$

et par conséquent

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: I'P \times IP : I'P' \times IP',$$

proportion dans laquelle se trouve exprimée la propriété caractéristique de l'hyperbole, énoncée dans le n°. 124.

137. Il nous reste encore à examiner le cas où le plan coupant seroit parallèle à l'un des côtés du cône, ainsi
Fig. 46. que le montre la fig. 46. Il ne pourroit alors rencontrer qu'un seul des deux cônes opposés; mais il ne s'en dégageroit jamais, en sorte que la section $M'I\,m'$ seroit une courbe ouverte et indéfinie, comme la parabole, avec laquelle nous allons prouver qu'elle est identique. Les plans ASB, $EMFm$, $ACBD$, étant menés dans les mêmes conditions que ci-dessus, le parallélisme des lignes IP' et SB, donne $PF = P'B$; d'un autre côté, les triangles EIP, AIP', étant semblables, conduisent à

$$IP : IP' :: EP : AP';$$

multipliant l'un des termes du second rapport par PF, et l'autre par $P'B$, il viendra

$$IP : IP' :: EP \times PF : AP' \times P'B.$$

Mais dans les cercles $EMFm$ et $ACBD$, on a toujours

$$\overline{PM}^2 = EP \times PF, \quad \overline{P'M'}^2 = AP' \times P'B;$$

on aura donc

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: IP : IP',$$

proportion qui n'est que l'expression de la propriété caractéristique de la parabole énoncée dans le n°. 124.

138. Examinons à présent les propriétés des lignes droites qui coupent ou qui touchent les courbes du second degré. Pour suivre la méthode que nous avons employée à l'égard du cercle en particulier (n°. 83), nous prendrons l'équation

$$y - \beta = A(x - \alpha),$$

qui appartient à la droite passant par le point dont les coordonnées sont α et β, et faisant avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est A; nous la combinerons avec l'équation $y^2 = mx + nx^2$, semblable à celle du n°. 111, et comprenant par conséquent les trois courbes du second degré. En faisant comme dans le n°. 83,

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = z,$$

nous aurons

$$x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{1+A^2}}, \quad y = \beta + \frac{Az}{\sqrt{1+A^2}},$$

et posant pour abréger $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}} = A'$, il viendra

$$x = \alpha + A'z, \quad y = \beta + A'Az;$$

substituant ces valeurs dans l'équation $y^2 = mx + nx^2$, nous obtiendrons cette transformée

$$\beta^2 + 2\beta AA'z + A^2A'^2z^2 = \left\{ \begin{array}{l} m\alpha + mA'z \\ + n\alpha^2 + 2nA'\alpha z + nA'^2z^2 \end{array} \right.$$

passant tous les termes dans un seul membre et ordonnant par rapport à z, nous trouverons

$$(A^2-n)A'^2z^2 + (\beta A - \tfrac{1}{2}m - n\alpha)2A'z + \beta^2 - m\alpha - n\alpha^2 = 0,$$

ce qui revient à

$$z^2 + \frac{2(\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha)}{(A^2-n)A'}z + \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2-n)A'^2} = 0.$$

Dans cette équation, l'inconnue z représente la distance EM, fig. 48, entre le point donné et l'un des points d'intersection M et M' de la droite proposée EM avec la courbe AC; par le moyen de sa valeur, on parviendra facilement à celles des coordonnées de cette intersection. Fig. 48.

139. En raisonnant ici comme pour le cas du cercle (n°. 85), on verra que les deux valeurs de z doivent devenir

égales lorsque la ligne proposée ne fait plus que toucher la courbe, comme en N, parce que les points M et M' se rapprochent de plus en plus à mesure que la ligne EM s'approche de EN. La différence des deux valeurs de z comprises dans la formule

$$z = \frac{\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2-n)A'} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2-n)A'}\right)^2 - \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2-n)A'^2}}$$

et exprimée par

$$2\sqrt{\left(\frac{\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2-n)A'}\right)^2 - \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2-n)A'^2}},$$

donnant toujours la longueur de la corde MM', devient nulle lorsque les points M et M' coïncident, et fournit par conséquent pour le point de contact N, l'équation

$$\left(\frac{\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2-n)A'}\right)^2 - \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2-n)A'^2} = 0 \; (1).$$

En la développant, A'^2 disparoîtra comme diviseur commun à tous les termes, et la résultante sera l'équation qui doit donner A, et faire connoître par conséquent la position de la droite EN, menée par le point E, tangentiellement à la courbe AC.

Ne voulant considérer que les cas les plus simples, nous supposerons que le point E soit pris sur l'axe des abscisses AP, fig. 49; il résultera de là $\beta = 0$, et

Fig. 49.

$$\frac{(\frac{1}{2}m + n\alpha)^2}{(A^2-n)^2} + \frac{m\alpha + n\alpha^2}{A^2-n} = 0:$$

cette dernière se réduit, après le développement, à

$$\tfrac{1}{4}m^2 + m\alpha A^2 + n\alpha^2 A^2 = 0,$$

et donne $\qquad A = \dfrac{\frac{1}{2}m}{\sqrt{-m\alpha - n\alpha^2}}.$

Cette expression se présente sous une forme imaginaire, mais elle peut devenir réelle par les valeurs particulières que recevront les quantités m, n et α, et cela arrive pour tous les cas où la position du point E et la nature de la courbe permettent de lui mener une tangente par ce point.

140. Il y a encore un cas dans lequel la condition de contingence se simplifie beaucoup, c'est celui où le point donné étant sur la courbe même, se confond avec le point de contact. Concevons en effet que le point E passe en M, fig. 48; il y aura alors entre α et β la même relation Fig. 48. qu'entre x et y, sur la courbe AC, c'est-à-dire qu'on aura

$$\beta^2 = m\alpha + n\alpha^2 \quad \text{ou} \quad \beta^2 - m\alpha - n\alpha^2 = 0,$$

ce qui réduira l'équation (1) à la suivante

$$\beta A - \tfrac{1}{2}m - n\alpha = 0,$$

d'où on tirera $A = \dfrac{\frac{1}{2}m + n\alpha}{\beta}$. Telle est l'expression de la tangente de l'angle que doit faire avec l'axe des abscisses la droite TM pour toucher la courbe AC.

La position de cette droite seroit donnée d'une manière plus commode si l'on en connoissoit un second point, et celui qui s'offre le plus naturellement est le point T, où elle rencontre l'axe des abscisses, et pour lequel on a $y=0$, dans l'équation $y - \beta = A(x - \alpha)$, (n°. 60). Il résulte de là $-\beta = A(x - \alpha)$ et $x - \alpha = -\dfrac{\beta}{A}$; la quantité $x - \alpha$ étant la différence des abscisses des points M et T, désigne la portion PT de l'axe AB: mettant donc pour A sa valeur, on aura $PT = -\dfrac{\beta^2}{\frac{1}{2}m + n\alpha}$.

La ligne PT est nommée la soutangente, et lorsqu'elle est construite, on obtient la tangente en joignant le point M et le point T par une droite.

141. Pour connoître l'expression de la soutangente dans chacune des courbes du second degré en particulier, il suffit de comparer successivement les équations

$$y^2=\frac{p}{2a}(2ax-x^2),\quad y^2=\frac{p}{2a}(x^2-2ax),\quad y^2=px,$$

avec l'équation $y^2=mx+nx^2$. En observant comme ci-dessus que α et β, désignant les coordonnées du point de contact, situé sur la courbe, ont entr'eux les mêmes relations que x et y, et substituant en conséquence pour β^2 sa valeur, on trouvera, par la première équation appartenante à l'ellipse,

$$m=p,\ n=-\frac{p}{2a},\ \text{d'où } PT=-\frac{2a\beta^2}{p(a-\alpha)}=-\frac{2a\alpha-\alpha^2}{a-\alpha},$$

par la seconde, appartenante à l'hyperbole,

$$m=-p,\ n=\frac{p}{2a},\ \text{d'où } PT=-\frac{2a\beta^2}{p(\alpha-a)}=-\frac{\alpha^2-2a\alpha}{\alpha-a},$$

par la troisième enfin, appartenante à la parabole,

$$m=p,\ n=0,\quad \text{d'où}\quad PT=-\frac{2\beta^2}{p}=-2\alpha.$$

Cette dernière expression, la plus simple des trois, nous apprend que *dans la parabole la soutangente est double de l'abscisse;* le signe — qui l'affecte ainsi que les autres, montre qu'elle doit être prise sur l'axe AB, à partir du point P, vers le côté où se portent les x négatifs.

La construction des premières expressions n'offre pas beaucoup plus de difficulté : on a pour l'ellipse

$$a-\alpha : 2a-\alpha :: \alpha : \frac{2a\alpha-\alpha^2}{a-\alpha}=PT,$$

pour l'hyperbole

$$\alpha-a : \alpha-2a :: \alpha : \frac{\alpha^2-2a\alpha}{\alpha-a}=PT;$$

ainsi tout se réduit à trouver des quatrièmes proportionnelles.

Il est bien remarquable que le second axe b n'entre point dans ces expressions; il en résulte que pour la même abscisse la soutangente est la même dans toutes les ellipses qui ont le même grand axe, et qu'il en arrive autant aux hyperboles. L'ellipse se changeant en cercle lorsque $b=a$, on peut mener la tangente à la première de ces courbes par le moyen de celle de la seconde : car si l'on prolonge l'ordonnée pm, fig. 36, jusqu'à la rencontre du cercle décrit sur le grand axe, et qu'on tire la droite nT tangente à ce dernier, au point n, la soutangente pT, conviendra aussi, d'après ce qui précède, au point m de l'ellipse, dont la tangente s'obtiendra par conséquent en joignant le point T et le point m. On auroit une construction semblable pour les hyperboles quelconques, en partant des soutangentes de l'hyperbole équilatère (n°. 115). Fig. 36.

142. Quand on a la soutangente, il est facile d'en déduire les expressions de la *tangente*, de la *sous-normale* et de la *normale*: ce sont les noms qu'on donne aux lignes TM, PR et MR, fig. 48. La première est la portion de la tangente comprise entre le point de contact et l'axe des abscisses; la seconde est la partie de l'axe des abscisses comprise entre le pied de l'ordonnée PM, et le point R, où une droite, menée perpendiculairement à la tangente par le point M, rencontre l'axe des abscisses; enfin la troisième est la longueur même de cette perpendiculaire, mesurée depuis le point M jusqu'à l'axe des abscisses. Fig. 48.

1°. Par le triangle TMP, rectangle en P, on a

$$MT=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{PT}^2}.$$

2°. Les triangles PMT, PMR, semblables entr'eux comme étant formés par la perpendiculaire PM, abaissée de l'angle droit du triangle TMR, rectangle en M, donneront

$$PT : PM :: PM : PR, \quad \text{d'où} \quad PR = \frac{\overline{PM}^2}{PT}.$$

3°. Il résulte du triangle MPR, rectangle en P,

$$MR = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PR}^2}.$$

Il est visible que ces formules conviennent à toutes les courbes, et que pour les appliquer à l'ellipse, par exemple, il faut mettre dans la première et dans la seconde, au lieu de PM et de PT, les valeurs relatives à cette courbe, puis avec la valeur qu'on obtiendra pour PR et celle de PM, on formera celle de MR ; il faudra opérer de même par rapport à l'hyperbole et à la parabole. Nous nous bornerons à rapporter ici les résultats de ces substitutions qui n'ont par elles-mêmes aucune difficulté. Pour l'ellipse

$$PT = \frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \left(\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}(a - \alpha), \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \frac{b^4}{a^4}(a - \alpha)^2},$$

pour l'hyperbole

$$PT = \frac{\alpha^2 - 2a\alpha}{\alpha - a}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2 - 2a\alpha) + \left(\frac{\alpha^2 - 2a\alpha}{\alpha - a}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}(\alpha - a), \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2 - 2a\alpha) + \frac{b^4}{a^4}(\alpha - a)^2},$$

pour la parabole

$$PT = 2\alpha \qquad MT = \sqrt{p\alpha + 4\alpha^2},$$

$$PR = \tfrac{1}{2}p \qquad MR = \sqrt{p\alpha + \tfrac{1}{4}p^2}.$$

On obtient des résultats un peu plus simples, à l'égard des deux premières courbes, lorsqu'on compte les abscisses à partir du centre, ce qu'on ne peut faire pour la troisième qui en est dépourvue, (n°. 104); pour parvenir à ces résultats, il suffit de faire $\alpha = a - \alpha'$ dans l'ellipse, et $\alpha = \alpha' + a$ dans l'hyperbole (n°. 122), α' sera la nouvelle abscisse prise à partir du centre: ces substitutions et les réductions qui s'en suivent étant effectuées, il viendra pour l'ellipse,

$$PT = \frac{a^2 - \alpha'^2}{\alpha'}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2) + \left(\frac{a^2 - \alpha'^2}{\alpha'}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}\alpha', \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2) + \frac{b^4}{a^4}\alpha'^2},$$

pour l'hyperbole,

$$PT = \frac{\alpha'^2 - a^2}{\alpha'}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2 - a^2) + \left(\frac{\alpha'^2 - a^2}{\alpha'}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}\alpha', \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2 - a^2) + \frac{b^4}{a^4}\alpha'^2}.$$

143. Quelqu'élégante que doive paroître la méthode que nous avons employée ci-dessus pour mener les tangentes aux courbes du second degré, nous croyons ne pas devoir passer sous silence les solutions synthétiques que les anciens ont données de ce problême, et nous allons les exposer succinctement.

1°. Par le point M, pris sur l'ellipse, fig. 35, on mènera Fig. 35.
les deux rayons vecteurs FM et $F'M$; on prolongera l'un d'eux, $F'M$ par exemple, d'une quantité MG égale à FM; on tirera ensuite FG, et la droite MH perpendiculaire sur le milieu de FG, sera tangente au point M, car elle n'aura que ce point de commun avec la courbe. En effet, si l'on

prend un autre point quelconque N sur cette droite, et qu'on tire les droites FN, $F'N$, on aura $F'N + NG > F'G$, ce qui revient à $F'N + FN > F'M + FM > II'$, car par la construction $MG = FM$, $NG = FN$; et comme il est aisé de voir que pour les points placés au-dedans de l'ellipse, la somme des distances à chacun des foyers est moindre que le grand axe, il suit de ce qui précède que le point N est hors de l'ellipse, puisque la somme de ses rayons vecteurs est plus grande que l'axe II'.

Fig. 37. 2°. Lorsque le point proposé M est sur l'hyperbole, fig. 37, il faut porter le plus petit rayon vecteur FM, sur le plus grand $F'M$ et non pas sur son prolongement; achevant la construction comme ci-dessus, on aura pour ce cas

$$F'N < F'G + NG < F'G + FN,$$

d'où il suit

$$F'N - FN < F'G < F'M - FM,$$

ce qui prouve que le point N n'est pas sur l'hyperbole. Il n'est pas placé dans l'intérieur de cette courbe, car il faudroit, pour que cela fût, que la différence des distances à chacun des foyers surpassât le grand axe. En effet, si on tire Fm, on a

$$F'm - Fm = F'm + Mm - FM,$$

et comme $F'm + Mm$ surpasse $F'M$, il s'ensuit

$$F'm - Fm > F'M - FM.$$

Fig. 38. 3°. Lorsque le point M est sur une parabole, fig. 38, il n'y a plus qu'un rayon vecteur; mais l'autre est remplacé par la droite QM parallèle à l'axe IP: le point Q tient lieu du point G, puisqu'on a $QM = FM$. Considérant ensuite un point N placé avant ou après le contact, on a en même temps QN et $FN > ON$; le point N est donc hors de la courbe.

144.

Si on appliquoit le calcul à ces constructions, on trouveroit les résultats obtenus dans le n°. précédent.

144. L'hyperbole présente, par rapport à ses tangentes, une particularité très-remarquable, et de laquelle il résulte que quoique son cours s'étende à l'infini, chacune de ses branches demeure néanmoins toujours renfermée entre les côtés d'un certain angle, sans pouvoir jamais les atteindre, ainsi qu'on le voit dans la figure 47. Cette circonstance se reconnoît en observant la marche de la soutangente PT, à mesure que le point de contact M s'avance sur la courbe et s'éloigne du point I, ou ce qui est la même chose à mesure que l'abscisse OP augmente. En désignant OP par x, on a (n°. 142), $PT=\frac{x^2-a^2}{x}$, et comme Fig. 47.

$$OT=OP-PT,$$

il vient

$$OT=x-\frac{x^2-a^2}{x}=\frac{a^2}{x};$$

on voit évidemment par ce résultat que plus x croît, plus OT diminue, et plus le point T s'approche du point O, qu'il ne peut cependant jamais atteindre puisqu'une fraction ne peut jamais devenir absolument nulle tant que son numérateur ne s'anéantit pas. Le point O doit donc être regardé comme la limite vers laquelle le point T tend sans cesse par le progrès de l'abscisse. Examinons maintenant les changemens qu'éprouve dans les mêmes circonstances l'angle MTP qui détermine la situation de la tangente par rapport à la ligne des abscisses. La tangente trigonométrique de cet angle a pour expression

$$\frac{MP}{PT}=\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}, \qquad (\text{n}^\circ.\ 27),$$

et prenant la forme $\dfrac{b}{a\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}$, lorsqu'on divise ses deux termes par x, elle tend nécessairement vers la quantité $\dfrac{b}{a}$ à mesure que la fraction $\dfrac{a^2}{x^2}$ diminue, ou à mesure que x augmente. L'angle MTP ne peut donc augmenter indéfiniment, et la limite qu'il ne peut atteindre, mais dont il approche sans cesse, est l'angle EOI, dont la tangente trigonométrique est $\dfrac{b}{a}$; jamais l'hyperbole ne peut donc parvenir à toucher la ligne EO, quelque prolongées qu'on les suppose l'une et l'autre.

Pour construire l'angle EOI, il faut prendre sur l'axe II', une abscisse à volonté, le demi-axe OI, par exemple, et le triangle rectangle EOI donnant $EI = OI \tan EOI$, on aura $EI = OI \times \dfrac{b}{a} = b$, puisque $OI = a$. Elevant donc au point I la perpendiculaire $EI = b$, la droite OE, qui joindra les points O et E, sera la limite de toutes les tangentes de la branche IK de l'hyperbole : cette limite se nomme *asymptote*. Il est évident qu'il en existe une seconde Oe, placée au-dessous de l'axe II', faisant avec cet axe le même angle que la première, et servant de limite aux tangentes de la branche Ik.

145. L'équation de l'hyperbole se simplifie beaucoup, lorsqu'on prend les asymptotes pour axes des coordonnées. En effet, menons par le point M, parallèlement à l'asymptote Oe, une nouvelle ordonnée QM, et faisons $QO = u$, $QM = t$; l'angle EOI compris entre l'axe des u, QO, et

celui des x, II', aura évidemment pour cosinus $\frac{OI}{OE}$, pour sinus $\frac{IE}{OE}$; et comme on a

$$OI=a,\ IE=b,\ OE=\sqrt{\overline{OI}^2+\overline{IE}^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$

il en résultera (n°. 107),

$$m=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad n=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Considérant ensuite l'axe des t, Oe, nous trouverons

$$\cos eOI=\frac{OI}{Oe},\quad \sin eOI=\frac{Ie}{Oe};$$

et comme $Oe=OE$, $Ie=-IE$, il viendra

$$p=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad q=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

et par les formules générales $x=mu+pt$, $y=nu+qt$, nous aurons

$$x=\frac{a(u+t)}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\frac{b(u-t)}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

substituant ces valeurs dans l'équation $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, elle se changera, après les réductions, en

$$\frac{4ut}{a^2+b^2}=1,\ \text{ou}\ ut=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2).$$

Cette dernière équation met bien en évidence la propriété dont jouissent les asymptotes, car on en tire

$$t=\frac{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}{u},\quad\text{ou}\quad QM=\frac{\frac{1}{4}\overline{OE}^2}{QO},$$

ce qui montre que l'ordonnée QM va toujours en diminuant à mesure que le point Q s'éloigne du point O, mais qu'elle ne peut jamais devenir nulle.

Lorsque l'hyperbole proposée est équilatère, $b=a$; la tangente de l'angle EOI, exprimée par $\frac{b}{a}$, se réduit alors à 1; chaque asymptote fait par conséquent avec l'axe II' un angle égal à $0^q,5$, et les deux comprennent entr'elles un angle droit. L'équation $ut=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ devenant $ut=\frac{1}{2}a^2$, nous apprend que le produit des coordonnées u et t est égal à la moitié du quarré du demi-grand axe OI.

Il est à propos de remarquer que si l'on mène par le point I les droites ID et Id, respectivement parallèles à Oe et à EO, on formera un losange dont les côtés ID et Id seront, par rapport aux asymptotes, les coordonnées du point I situé sur l'axe; on aura par conséquent

$$ID\times Id=\overline{ID}^2=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2),$$

d'où on tirera

$$ID=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

et en général

$$QO\times QM=\overline{ID}^2.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère le losange Dd devient un quarré puisque l'angle DOd est droit.

Le grand losange construit sur II', composé de quatre losanges tels que Dd, est ce que les anciens géomètres désignoient sous le nom de *puissance* de l'hyperbole.

146. Il est visible que si l'on prolonge les lignes PM et PM', ordonnées relatives à l'axe II', jusqu'à la rencontre des asymptotes OE et Oe, les parties MR et $M'R'$ de ces ordonnées, interceptées entre chaque branche de courbe et son asymptote sont égales entr'elles. La même propriété a lieu par rapport à une droite quelconque menée par un point quelconque de l'hyperbole. Si l'on tire par exemple MN', on aura $GM=G'N'$, quelque position

qu'ait MN'. Pour le prouver, nous commencerons par observer que, puisque

$$PR = \frac{bx}{a},\ MR = PR - PM = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}),$$

$$MR' = PR + PM' = \frac{b}{a}(x + \sqrt{x^2 - a^2}),$$

on a

$$MR \times MR' = b^2.$$

Menons ensuite par le point N' la droite SS' parallèle à MM'; les triangles semblables RMG, $SN'G$, donneront

$$GM : GN' :: MR : N'S;$$

les triangles semblables $G'N'S'$ et $R'MG'$, donneront

$$G'M : G'N' :: MR' : N'S';$$

multipliant ces deux proportions par ordre, il viendra

$$GM \times G'M : GN' \times G'N' :: MR \times MR' : N'S \times N'S';$$

et comme en vertu de ce qui précède on a

$$MR \times MR' = b^2,\quad N'S \times N'S' = b^2,$$

on en conclura $GM \times G'M = GN' \times G'N'$.

Mettant à la place de $G'M$ et de GN', leurs valeurs

$$G'N' + MN',\quad GM + MN',$$

faisant les réductions qui se présentent après les multiplications indiquées, on aura enfin

$$GM \times MN' = G'N' \times MN' \text{ ou } GM = G'N'.$$

147. Avec le secours de la propriété que nous venons de démontrer, on décrit bien simplement l'hyperbole par points, lorsqu'on en a les asymptotes et un seul point M. On tire par ce point un très-grand nombre de droites comme MN', on prend la partie GM comprise entre le point M et l'asymptote qui en est la plus voisine, pour la

porter de G' en N', ce qui donne un nouveau point N' de la courbe cherchée.

Quand on a les asymptotes on trouve la direction de l'axe II' en divisant en deux parties égales l'angle qu'elles forment, et comme la tangente de l'angle EOI donne le rapport des demi-axes a et b (n°. 144), il est aisé de déterminer ces quantités, dès qu'on connoît un point de l'hyperbole. L'équation $\overline{PM}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\overline{OP}^2 - a^2)$ donne sur-le-champ $a^2 = \frac{A^2 \times \overline{OP}^2 - \overline{PM}^2}{A^2}$, en représentant par A la quantité $\frac{b}{a}$.

148. On sait par la géométrie élémentaire que trois points déterminent la position d'un cercle; la même chose se prouve facilement par l'analyse, et le procédé qu'on y employe sert en général à trouver le nombre des points par lesquels peut passer une courbe quelconque.

L'équation du cercle la plus générale étant (n°. 93),

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

a et b désignant les coordonnées du centre et r le rayon, si l'on prend

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\};$$

pour représenter les coordonnées de trois points donnés par lesquels doit passer le cercle demandé, on fera successivement, comme à l'égard de la ligne droite, dans le n°. 62,

$$\left.\begin{matrix}x=\alpha\\ y=\beta\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x=\alpha'\\ y=\beta'\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x=\alpha''\\ y=\beta''\end{matrix}\right\}$$

ce qui fournira les équations

$$(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 = r^2,$$
$$(\alpha' - a)^2 + (\beta' - b)^2 = r^2,$$
$$(\alpha'' - a)^2 + (\beta'' - b)^2 = r^2,$$

qui sont en nombre suffisant pour déterminer les lettres a, b qui font connoître la position du centre du cercle, et son rayon r.

Il est visible qu'il faut en général autant de points que l'équation de la courbe demandée renferme de coefficiens à déterminer. L'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F,$$

appartenant aux courbes du second degré en général, étant mise sous la forme

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e,$$

ne contient plus que cinq coefficiens a, b, c, d et e; il suffira donc de cinq points pour particulariser la courbe du second degré qu'elle représente : et si les coordonnées de ces points sont respectivement

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'''\\ \beta'''\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha''''\\ \beta''''\end{matrix}\right\},$$

on formera les cinq équations suivantes :

$$\beta^2 + a\alpha\beta + b\alpha^2 + c\beta + d\alpha = e$$
$$\beta'^2 + a\alpha'\beta' + b\alpha'^2 + c\beta' + d\alpha' = e$$
$$\beta''^2 + a\alpha''\beta'' + b\alpha''^2 + c\beta'' + d\alpha'' = e$$
$$\beta'''^2 + a\alpha'''\beta''' + b\alpha'''^2 + c\beta''' + d\alpha''' = e$$
$$\beta''''^2 + a\alpha''''\beta'''' + b\alpha''''^2 + c\beta'''' + d\alpha'''' = e.$$

N'ayant pour but que de montrer la possibilité de la détermination des lettres a, b, c, d, e, et le nombre de conditions qu'elle exige, nous ne nous arrêterons pas à effectuer les calculs qu'entraîneroit cette opération; nous nous bornerons à observer que ces équations peuvent devenir contradictoires entr'elles dans certains cas particuliers. S'il arrivoit, par exemple, que trois des points donnés fussent en ligne droite, il ne seroit pas possible de faire passer une courbe du second degré par ces points puisqu'aucune courbe de ce degré ne peut avoir plus de deux points de communs avec une même droite.

On conçoit que quand la courbe est donnée d'espèce et de position, il faut moins de conditions pour la déterminer. Si l'on vouloit déterminer une ellipse dont le centre et le grand axe fussent donnés de position, on n'auroit besoin que de deux points puisque l'équation $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, relative à ce cas, ne renferme que deux coefficiens a, b, qui dépendroient alors des équations

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2=a^2b^2,$$
$$a^2\beta'^2+b^2\alpha'^2=a^2b^2.$$

149. Nous avons montré, dans le n°. 93, comment l'équation du second degré se construisoit par le moyen d'une circonférence de cercle et d'une droite; nous avons fait voir que les deux racines étoient données par les deux intersections que peuvent avoir entr'elles ces lignes, et que de cette manière on regardoit l'équation proposée comme le résultat de l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux indéterminées, l'une appartenant à la droite, et l'autre au cercle. Si l'on généralise ce point de vue, on aura le moyen de construire des équations d'un degré quelconque. En effet, si l'on a par exemple, l'équation $x^4-b^2x^2+c^3x-d^4=0$, on pourra la regarder comme le résultat de l'élimination d'une inconnue y, entre deux équations du second degré renfermant en même temps x et y, et appartenant par conséquent à deux cour-

bes. Trouver ces équations est un problême indéterminé; car il y a une infinité de systêmes d'équations qui peuvent produire la proposée; prenons-en donc une arbitrairement. Soit $x^2 = py$, on aura $x^4 = p^2y^2$, et substituant dans l'équation proposée, il viendra

$$p^2y^2 - b^2py + c^3x - d^4 = 0,$$

ou

$$y^2 - \frac{b^2}{p}y + \frac{c^3}{p^2}x - \frac{d^4}{p^2} = 0.$$

Il est aisé de reconnoître que cette équation appartient à une parabole (n°. 111); et pour la mettre sous la forme la plus simple, il suffit de faire disparoître le terme multiplié par y, ce qui s'effectuera en prenant $y = y' + \frac{b^2}{2p}$. On aura, après la substitution,

$$y'^2 + \frac{c^3}{p^2}x - \frac{4d^4 + b^4}{4p^2} = 0,$$

résultat qui peut s'écrire ainsi:

$$y'^2 = \frac{c^3}{p^2}\left\{\frac{b^4 + 4d^4}{4c^3} - x\right\},$$

et qui montre que la parabole à laquelle il appartient a pour paramètre la quantité $\frac{c^3}{p^2}$, et que les abscisses comptées à partir de son sommet, sont égales à la différence entre la quantité $\frac{b^4 + 4d^4}{c^3}$ et les abscisses de la première parabole $x^2 = py$. En effet, si l'on porte perpendiculairement à l'axe AB des abscisses, fig. 50, et du côté des ordonnées Fig. 50.
positives, une distance $A\alpha = \frac{b^2}{2p}$, la droite $\alpha\ \beta$, menée parallèlement à AB, sera l'axe à partir duquel on doit

prendre les y'. Le sommet de la parabole dont y' désigne l'ordonnée, correspondant au point où l'on a $y'=0$, ce qui arrive quand $x=\frac{b^4+4d^4}{c^3}$, il faudra faire $AD=\frac{b^4+4d^4}{c^3}$, et ayant élevé $D\delta$ à angle droit sur AB, le point δ sera le sommet de la seconde parabole $G\delta H$, $\delta\alpha$ en sera l'axe, et connoissant son paramètre, rien ne sera plus facile que de la construire par points suivant le procédé du n°. 119. Quant à la première parabole EAF, donnée par l'équation $x^2=py$, il est visible qu'elle a son sommet à l'origine A des coordonnées, et pour axe celui des y, AC. Lorsqu'elle sera construite, les points M, M', M'', M''', où elle rencontrera la parabole $G\delta H$, auront des abscisses égales aux racines de l'équation proposée, puisque par ces points les valeurs de x satisfont en même temps aux deux équations

$$x^2=py,$$

$$p^2y^2-b^2py+c^3x-d^4=0,$$

desquelles résulte la proposée.

Pour représenter le cas le plus général nous avons disposé l'équation proposée et la figure de manière que les deux courbes se rencontrassent en quatre points; mais cette circonstance n'aura lieu qu'autant que l'équation proposée aura ses quatre racines réelles. Si, par exemple, l'axe $\alpha\beta$ de la parabole $G\delta H$ tomboit au-dessous de AB, ce qui arriveroit si le terme b^2py avoit le signe $+$, puisqu'il faudroit faire alors $y=y'-\frac{b^2}{2p}$, il n'y auroit plus que deux intersections au plus, car il est bien clair que la branche δH ne pourroit plus rencontrer la parabole EAF; dans certain cas même, la courbe $G\delta H$ se trouvera toute entière au-dessous de EAF, et alors les racines de la proposée seront imaginaires.

On voit au reste par cette construction, comme par la théorie des équations, que l'équation du quatrième degré ne peut avoir qu'un nombre pair de racines réelles, puisque les deux paraboles EAF et $G\delta H$ ne peuvent se couper qu'en deux ou en quatre points.

150. Il suit aussi de là que le cercle et la ligne droite ne pouvant se rencontrer en plus de deux points, ne peuvent résoudre que des problêmes susceptibles d'être ramenés à des équations du second degré, et ne sauroient par conséquent suffire pour résoudre ceux qui passent ce degré, tels que les problêmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle, si fameux dans l'antiquité.

Par le premier, il s'agit de trouver le côté d'un cube dont la solidité soit double de celle d'un autre cube donné. Si a est le côté de celui-ci et x le côté de l'autre, on aura cette équation :

$$x^3 = 2a^3, \quad \text{ou} \quad x^3 - 2a^3 = 0.$$

Pour la comparer à la proposée, il faut l'amener au quatrième degré, ce qui se fera en la multipliant par x, et on aura $x^4 - 2a^3x = 0$; comparant avec

$$x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0,$$

il viendra

$$b = 0, \quad c^3 = -2a^3, \quad d = 0.$$

Les équations des paraboles EAF, $G\delta H$, seront par conséquent $x^2 = py$, $y'^2 = \frac{2a^3}{p^2}x$. Ces courbes passeront toutes deux par l'origine A, puisqu'on aura $x = 0, y = 0$, $y' = 0$, dans l'une et dans l'autre en même temps; elles s'y couperont, et cette intersection donnera $x = 0$, racine qui

vient du facteur introduit pour élever au quatrième degré
Fig. 51. l'équation à construire. La fig. 51, qui répond à ce cas, montre que l'on ne peut avoir en outre qu'une seule racine réelle AP; et en effet, on a vu dans les Élémens d'*Algèbre* que l'équation $x^3 - 2a^3 = 0$ n'en a pas davantage.

151. La recherche de la trisection de l'angle a pour objet de partager un angle ou un arc en trois parties égales, ce qui s'effectueroit sans peine, si, connoissant la corde ou le sinus d'un arc, on obtenoit la corde ou le sinus de son tiers. Cette question n'est qu'un cas particulier de la théorie de la multisection des angles, que nous ne saurions exposer ici, mais dont on trouvera les bases dans l'Introduction au *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*; elle se met en équation par le moyen des formules du n°. 11, qui donnent

$$\cos 3A = \frac{4\cos A^3 - 3R^2 \cos A}{R^2}.$$

Si l'on regarde $\cos 3A$ comme donnée, et que l'on prenne $\cos A$ pour l'inconnue, on aura, en faisant $\cos 3A = a$ et $\cos A = x$, cette équation

$$x^3 - \tfrac{5}{4}R^2 x - \tfrac{1}{4}R^2 a = 0,$$

qui étant multipliée par x et comparée à l'équation

$$x^4 - b^2 x^2 + c^3 x - d^4 = 0,$$

donnera

$$b^2 = \tfrac{5}{4}R^2,\ c^3 = -\tfrac{1}{4}R^2 a,\ d^4 = 0.$$

On aura encore ici une intersection au point A correspondant à la racine $x = 0$, et les trois autres points d'intersection donneront les trois racines de l'équation

$$x^3 - \tfrac{5}{4}R^2 x - \tfrac{1}{4}R^2 a = 0.$$

Il semble au premier coup-d'œil qu'on ne devroit avoir qu'une racine réelle et qu'il n'y a qu'une seule manière de partager un arc en trois parties égales, mais on voit d'abord que l'équation ci-dessus tombe dans le *cas irréductible*, et qu'elle a par conséquent ses trois racines réelles; en y réfléchissant ensuite avec un peu d'attention, on reconnoît qu'il y a trois arcs qui doivent satisfaire à la question proposée, car les arcs $3A$, $\pi+3A$, $2\pi+3A$, qui ont le même cosinus (n°. 22), étant divisés par 3, donnent les valeurs

$$x=\cos A, x=\cos(\tfrac{1}{3}\pi+A), x=\cos(\tfrac{2}{3}\pi+A),$$

essentiellement différentes. On ne peut en avoir d'autres parce que les arcs $3\pi+3A$, $4\pi+3A$, etc. qui ont encore le même cosinus que A, étant divisés par 3, conduisent aux arcs $\pi+A$, $\pi+\frac{1}{3}\pi+A$, etc. et que

$$\cos(\pi+A)=\cos A, \cos(\pi+\tfrac{1}{3}\pi+A)=\cos(\tfrac{1}{3}\pi+A), \text{etc.}$$

152. Avant que les méthodes d'approximation eussent atteint le degré de perfection où elles sont portées aujourd'hui, les géomètres s'appliquoient beaucoup à la construction des équations, et faisoient tous leurs efforts pour effectuer cette construction par les courbes les plus simples, ou les plus faciles à décrire; c'est ainsi qu'*Halley* donna une méthode pour construire les équations du troisième et du quatrième degré par le cercle et la parabole, et cette méthode a quelqu'avantage sur celle du n°. 149, en ce que le cercle qui remplace une des paraboles, se trace par un mouvement continu; mais le peu d'usage que l'on fait à présent des constructions nous a dispensés des détails à cet égard, et nous terminerons en conséquence ce traité par l'exposition d'une méthode qui réunit à l'avantage de s'appliquer aux équations d'un degré quelconque, celui de peindre les résultats obtenus analytiquement par la théorie de la composition des équations.

Pour fixer les idées, nous supposerons que l'équation à construire soit seulement $a+bx+cx^2+dx^3=0$; nous ferons

$$y=a+bx+cx^2+dx^3.$$

Puisque dans les points où la courbe représentée par cette dernière équation rencontrera l'axe des abscisses, on aura $y=0$, il s'ensuit que les abscisses de ces points seront les racines de l'équation proposée. La question sera donc réduite à construire la courbe dont il s'agit, ce qui est facile après avoir rendu son équation homogène en y restituant les puissances de l'unité (n°. 91). On obtiendra en effet

$$y=a+\frac{bx}{n}+\frac{cx^2}{n^2}+\frac{dx^3}{n^3},$$

résultat dont chaque terme se construiroit séparément par les lignes proportionnelles (n°. 72); mais voici un moyen de lier entr'elles d'une manière commode les différentes opérations.

Fig. 52. On mènera, fig. 52, l'axe AB des abscisses; par l'origine A on élevera perpendiculairement à cet axe la droite AC qui sera celui des y, et ayant pris sur le premier la partie $AD=n$, et mené DE parallèle à AC, on portera sur cette dernière des parties

$$AF=a,\quad FG=b,\quad GH=c,\quad HI=d;$$

on tirera ensuite IK parallèle à AB; on joindra les points H et K par une droite qui coupera en L la ligne PR élevée perpendiculairement à AB sur l'abscisse $AP=x$; on mènera ML parallèle à AB, pour déterminer sur AC le point M, que l'on joindra avec le point G; par le point N, où MG rencontre PR, on tirera ON parallèle encore à AB, et joignant le point O avec le point F, la droite OF donnera sur PR un point Q tel que $PQ=y$.

En effet, on a par les triangles semblables HIK et $HH'L$,

$$IK(n):H'L(x)::IH(d):HH'=\frac{dx}{n},$$

d'où

$$GH'=GH+HH'=c+\frac{dx}{n};$$

des triangles $H'MG$ et $G'NG$, il résulte

$$MH'(n):NG'(x)::GH'\left(c+\frac{dx}{n}\right):GG'=\frac{cx}{n}+\frac{dx^2}{n^2},$$

et par conséquent

$$FG'=FG+GG'=b+\frac{cx}{n}+\frac{dx^2}{n^2};$$

enfin des triangles $G'OF$, $F'QF$, on conclut

$$OG'(n):QF'(x)::FG'\left(b+\frac{cx}{n}+\frac{dx^2}{n^2}\right):FF'=\frac{bx}{n}+\frac{cx^2}{n^2}+\frac{dx^3}{n^3},$$

ce qui donne pour dernier résultat

$$PQ=AF'=AF+FF'=a+\frac{bx}{n}+\frac{cx^2}{n^2}+\frac{dx^3}{n^3}.$$

On étendra sans peine ce procédé au cas où l'équation proposée auroit un nombre quelconque de termes; et lorsqu'on aura obtenu un nombre de points suffisant pour caractériser la marche de la courbe, on reconnoîtra aisément le nombre de racines réelles dont cette équation est susceptible.

153. Si le cours de la courbe est tel que le représente la ligne $XEGILY$, fig. 53, elle rencontrera cinq fois l'axe Fig. 53.
des abscisses, et indiquera par conséquent que l'équation dont elle dérive a un pareil nombre de racines réelles : cette équation ne pourra être d'un degré inférieur au cinquième. L'équation à construire sera

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\text{etc.}=0 \;(1),$$

et celle de la courbe

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\text{etc.}$$

Il est évident que les valeurs numériques de l'ordonnée y, ne sont autre chose que les résultats qu'on tire de l'équation proposée (1), en donnant à x les valeurs correspondantes aux différentes abscisses qu'on a choisies arbitrairement. La courbe $XEGILY$ offre donc en quelque sorte l'équivalent du tableau dans lequel ces résultats seroient inscrits; mais avec cet avantage qu'en vertu de la loi de *continuité*, qu'on sent bien mieux dans les lignes que dans les nombres, les intervalles entre deux substitutions successives se remplissent avec la plus grande facilité. Ayant calculé par exemple les ordonnées PP', QQ', RR', assez proches les unes des autres, et joignant leurs extrémités par un trait continu *sans angles ni jarrets*, on a d'une manière assez exacte les ordonnées intermédiaires.

Nous observerons 1°. que puisque l'équation de la courbe ne renferme que des puissances entières et positives de x, chaque valeur de cette indéterminée ne donnera pour y qu'une seule valeur qui sera finie ou limitée tant que x le sera, mais que y sera susceptible de prendre des accroissemens indéfinis ou illimités lorsque x en recevra de tels, et que par conséquent la courbe $XEGILY$ doit s'étendre à l'infini de chaque côté de l'axe AC des y.

2°. L'inspection seule de la figure fait voir que la courbe $XEGILY$ ne sauroit passer d'un côté de l'axe AB à l'autre sans rencontrer cet axe, ou analytiquement parlant, que l'ordonnée y ne peut changer de signe sans devenir nulle (*); d'où il suit que *si deux substitutions faites*

(*) Cela est vrai dans ce cas parce que l'expression de y est sans dénominateur, car si on avoit $y=\frac{a}{x}$, la succession de ces valeurs: $x=+1$, $x=0$, et $x=-1$, donneroit $y=+a$, $y=\frac{a}{0}$ ou infinie, et $y=-a$. C'est ainsi que les branches de l'hyperbole sont liées entr'elles.

dans

dans l'équation (1), *donnent deux résultats de signe contraire, il y a nécessairement une racine réelle comprise entre les valeurs de* x *employées dans ces substitutions.*

3°. Si l'on prend sur la même courbe deux points placés du même côté par rapport à l'axe AB, il y aura toujours entr'eux un nombre pair d'intersections de la courbe et de cet axe : on en voit en effet deux entre E et I, quatre entre E et Y, ou entre X et L, etc. ou bien il n'y en aura aucunes ainsi que cela arrive entre P et I. Au contraire, il y aura certainement un nombre impair d'intersections si les points que l'on considère sont placés de différens côtés, comme le sont X et E, X et I, X et Y, etc. De là résulte cette proposition analytique : *entre deux valeurs de* x *qui, par leur substitution dans l'équation proposée, donnent deux résultats de même signe, il ne peut y avoir qu'un nombre pair de racines réelles, et il y en aura un nombre impair si ces résultats sont de signes différens.*

4°. Enfin il arrive quelquefois que par suite des relations que peuvent avoir entr'eux les coefficiens a, b, c, d, e, f, etc. deux des intersections consécutives, comme K et M se rapprochant continuellement, viennent à se confondre, et la partie $IKLMY$ de la courbe prenant la forme du trait ponctué $IL'Y$, ne fait plus que toucher l'axe AB; alors les deux racines, représentées par AK et AM, deviennent égales entr'elles et à l'abscisse AL'. On voit facilement que si l'équation proposée n'avoit pas d'autres racines réelles, la courbe qui en dérive ne couperoit son axe nulle part, et qu'on ne pourroit par conséquent faire changer de signe le premier membre de cette équation, par aucune substitution. Il n'en seroit pas de même dans le cas où trois intersections se réuniroient. La courbe couperoit au moins une fois l'axe, soit avant soit après, et pour s'en convaincre, il suffit de voir ce qui resteroit de cette courbe si les trois points *H*, *K* et *M*, ou *F*, *H* et *K*, venoient à se confondre. En suivant ces considérations, on trouvera que par la réunion d'un nombre pair d'intersections, la courbe dérivée de l'équation (1) peut se trouver toute entière d'un même côté de l'axe, mais que cette circonstance n'a jamais lieu lorsque le nombre des intersections, confondues en une seule, est impair; et on conclura de là que lorsqu'une équation n'a pour racines réelles qu'un nombre pair de racines égales, il est impossible d'en reconnoître l'existence par aucunes substitutions.

Pour bien saisir ce qui précède, il suffira de faire les figures qui se rapportent aux différens cas que nous avons examinés, ce qui n'offre aucune difficulté; et l'on y verra, pour ainsi dire, la peinture de la théorie des équations exposée dans les *Elémens d'Algèbre*.

FIN.

Fautes essentielles.

PAGE 14, ligne 3, ACM, ACM', etc. *lisez*, CPM, $CP'M'$, etc.

18, l. 10, numéro 10, *lisez*, numéro 11.

22, l. 7, $-\sin b$, *lisez*, $\mp \sin b$; l. 13, $\sin b$, *lis.* $\pm \sin b$.

24, l. 3, au-dessus, *lisez*, au-dessous.

44, l. 11, de ces deux points, *lisez*, des points C et D.

46, l. 4, en remontant, AS, *lisez*, AI.

52, l. 2, qu'ils interceptent, *ajoutez*, et le 3e angle B.

ibid. l. 21, les côtés, *lis.* les angles; les angles, *lis.* les côtés.

68, l. 6, a dans ce triangle, *lis.* on a dans ce triangle.

78, l. 4, en remontant, (n°. précéd.) *lis.* (n°. 61).

79, l. 8, en remontant, *après le mot* sera, *ajoutez*, si α et β désignent les coordonnées du point donné.

80, l. 17, AM, *lis.* AM'; l. 21, après la virgule, *lis.* $\beta = \ldots$

91, l. 5 et 9, en remontant, $M'M''$, *lis.* MM'.

94, l. 22, ont, *lis.* dont; l. 23, *effacez* qui, *ibid. avant* α' et β', *lis.* α et β.

97, l. dernière, *effacez par-tout les exposans.*

143, l. 6, en remontant, $P'G = gy$, *lis.* $P'G = g.P'M$.

144, l. 4, changez m en n et n en m dans le coefficient de ut; l. 20, PH, *lis.* $P''H$.

160, l. 21, changez b^2 en a et a en b^2 dans la 2e valeur de z.

165, l. 13, pour l'hyperbole, *ajout.* en prenant $I'F = c'$.

ibid. l. 4, en remontant, mettez le dénominateur α.

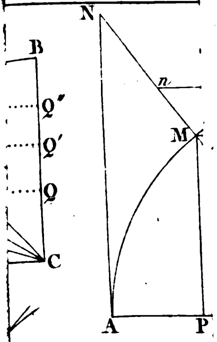
175, l. 15, diamètres, *lis.* demi-diamètres.

NOTICE ABRÉGÉE

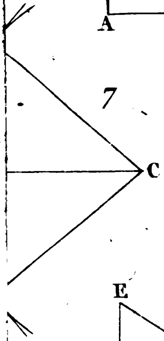
Des Livres de fonds et d'assortiment qui se trouvent à Paris, chez DUPRAT, quai des Augustins.

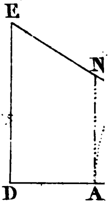
MÉCANIQUE analytique, par *J. L. Lagrange*, *in*-4. 13 fr.
Théorie des fonctions analytiques, par le même, *in*-4. 5 fr.
De la résolution des équations numériques, par le même, *in*-4. 9 fr.
Essai sur la Théorie des Nombres, par *A. M. Legendre*, in-4. 18 fr.
Mémoire sur les Transcendantes elliptiques, par le même, *in*-4. 6 fr.
Élémens de Géométrie, par le même, *in*-8. 5 fr.
Exposition du Système du Monde, par *P. S. Laplace*, 10 fr.
Traité de Mécanique céleste, par le même, *sous presse*.
Traité du Calcul intégral, par *S. F. Lacroix*, 2 vol. *in*-4. 33 fr.
Le Traité des Différences et des Séries, *qui sert d'appendice à l'ouvrage précédent, est sous presse.*
Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes, ou Élémens de Géométrie descriptive, par le même. 2 fr. 5 déc.
Élémens d'Algèbre de Clairaut, cinquième édition, avec un Supplément, par le même, 2 vol. *in*-8. 10 fr.
Leçons élémentaires d'Arithmétique et d'Algèbre, par *Tedenat*, *in*-8. 4 fr.
L'Arithmétique se vend séparément, 2 fr. 5 déc.
Géométrie du compas, par *L. Mascheroni*, *in*-8. 5 fr.
Isaaci Newtoni Enumeratio Linearum tertii ordinis; sequitur illustratio ejusd. tractatûs auct. *J. Stirling*, *in*-8. 7 fr. 5 déc.
Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio elementaris, auct. *S. L'huillier*, *in*-4. 14 fr.
Mélanges mathématiques, par *Nieuport*, *in*-4. 12 fr.
Essai sur les ouvrages Physico-Mathématiques de Léonard de Vinci, avec des fragmens tirés de ses manuscrits apportés de l'Italie, par *J. B. Venturi*, Professeur de physique à Modène, 2 fr. 5 déc.
Traité élémentaire de Mathématiques pures, par *E. M. J. Lemoine*, (d'Essoies), troisième édition, 2 vol. *in*-8. 9 fr.
Traité de Mécanique, par *Marie*, *in*-4. 12 fr.
Hydrographie démontrée et appliquée à toutes les parties du pilotage, à l'usage des Élèves ou Aspirans de la Marine militaire ou marchande, par *Lassale*, *in*-8. 6 fr.
Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal, par *Carnot*, *in*-8. *fig.* 1 fr. 8 déc.
Essai sur les Machines en général, par le même, *in*-8. 2 fr. 5 déc.
Introductio in Analysin infinitorum, auct. *L. Eulero*, 2 vol. *in*-4. 24 fr.
Tables portatives des Logarithmes, par *Callet*, *in*-8. rel. 14 fr.
Traité des mouvemens des Corps célestes, par *du Séjour*, 2 vol. *in*-4. 48 fr.
Tables de Jupiter et de Saturne, par *Delambre*, *in*-4. 6 fr.
Voyage astronomique et géographique pour mesurer deux degrés du méridien, par les PP. *Maire* et *Boscovich*, *in*-4. 12 fr.
Œuvres de *Blaise Pascal*, 5 vol. *in*-8. 24 fr.
Pinacothèque, ou Collection de Tables, par *Gruson*. 10 fr.
Essai sur l'application de l'Analyse aux probabilités des décisions rendues à la pluralité des voix, par *Condorcet*, *in*-4. 15 fr.

Le même Libraire tient un assortiment de Livres anciens et rares concernant la Géométrie, la Mécanique et l'Astronomie.

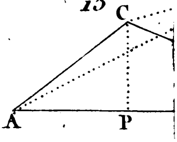


7

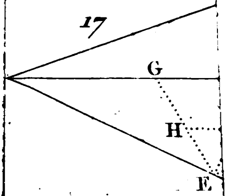


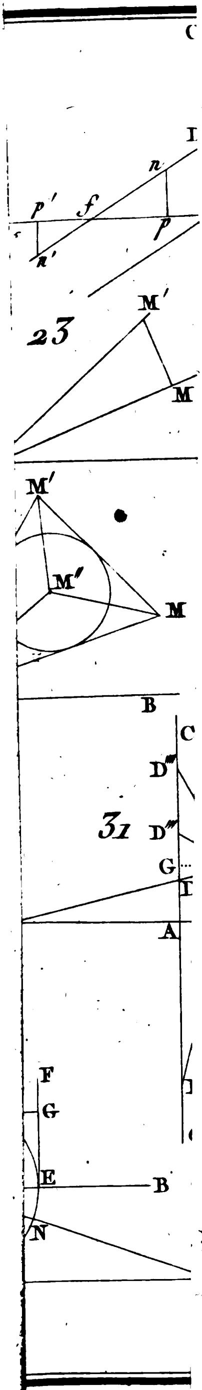


15

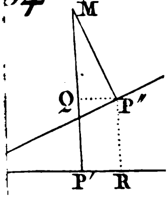


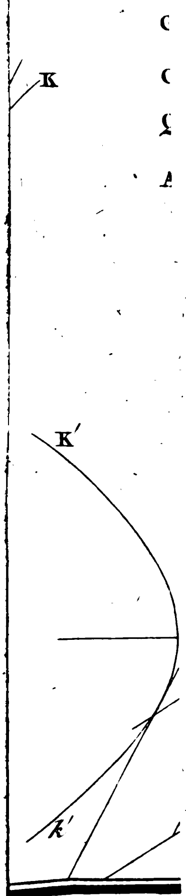
17




23
31
M′
M
M″
B
C
D‴
G
A
F
E
N
n
p′
f
p
n′

34





44