BnF Gallica

Traité du calcul différentiel et du calcul intégral , par S.-F. Lacroix

Source gallica.bnf.fr / Université Paris Sud

BnF Gallica

Lacroix, Silvestre-François (1765-1843). Traité du calcul différentiel et du calcul intégral , par S.-F. Lacroix. 1797-1798.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
utilisationcommerciale@bnf.fr.

(Paris)

1798

Lacroix, Sylvestre François

Traité du calcul différentiel et du calcul intégral

Tome 2

Source gallica.bnf.fr / Université Paris Sud

3 Volumes

TRAITÉ

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DU CALCUL INTÉGRAL.

TOME SECOND.

Notice des principaux ouvrages de Mathématiques qui se trouvent chez le même Libraire.

Essais de Géométrie sur les Plans et les Surfaces courbes, par *S. F. Lacroix.*
Elémens d'Algèbre de Clairaut, 5e édition, avec des additions, par le même.
Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'Algèbre à la Géométrie, par le même.

Essai sur la théorie des nombres, par *A. M. le Gendre.*
Mémoire sur les Transcendantes elliptiques, par le même.
Élémens de Géométrie, par le même.

Mécanique analytique, par *J. L. Lagrange.*
Théorie des Fonctions analytiques, par le même.
De la Résolution des Équations numériques, par le même.

Exposition du Système du Monde, par *P. S. Laplace.*
Traité de Mécanique céleste, par le même, *sous presse.*

Ces mêmes Ouvrages se trouvent,
A Berlin, chez F. T. DE LA GARDE;
& à Génes, chez YVES GRAVIER.

TRAITÉ
DU CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DU CALCUL INTÉGRAL,

PAR S. F. LACROIX.

Tantùm series junctura pollet.
HORAT.

TOME SECOND,

A PARIS,
Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins.

AN VI. = 1798.

TABLE.

TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE, DU CALCUL INTÉGRAL.

CHAP. I. *De l'intégration des fonctions d'une seule variable*, pag. 1

De quadraturâ curvarum, (Newtoni opuscula T. I.).
Méthode des fluxions, (Newton).
Lectiones de methodo integralium, aliisque, conscriptæ in usum ill. Marchionis HOSPITALII, (Joh. Bernoulli op. T. III).
Traité des fluxions, (Maclaurin).
Traité du Calcul intégral, (Bougainville).
Institutiones Calculi integralis, (Euler).

Intégration des fonctions rationnelles, pag. 2

Specimen novum analyseos, (Leibnitii opera, T. III, pag. 373).
Johan. BERNOULLI *opera*, T. I, pag. 393. III, 389, 397, 399. IV, 132.
Harmonia mensurarum, (Côtes).
Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, (Moivre).
Mém. de l'Acad. de Berlin, 1746, (d'Alembert).
Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. XIV, (Euler).
Acta ejusd. Academiæ, 1780, Pars I, (Euler).
Essays on several subjects, pag. 118, (Thomas Simpson).
Mathematical Lucubrations, Part. VII, (Landen).
Institutiones Calculi integralis, T. I, Sect. I. Cap. I.

Pour la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, voy. *Institutiones Calculi differentialis*, Pars post. Cap. XVIII.

De l'intégration des fonctions irrationnelles, pag. 29

Regulæ quædam de summatione differentialium, (Jac. Bernoulli opera, Tom. II, pag 1007).
Johan. Bernoulli opera, formulæ reductionum, T. IV, pag. 52.
Mém. de l'Acad. de Berlin, 1746 et 1748, (d'Alembert).
Novi Commentarii Acad. Petrop. T. VIII, p. 129, (Euler).]
Institutiones Calculi integralis, T. I. Sect. I, Cap. II.
Acta Acad. Petrop. 1780, Pars I, (Euler).

Pour la formule $\frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$, traitée page 52, voyez les *Mémoires de l'Acad. des Sciences de Turin*, année 1784-85, seconde partie, (Lagrange).

Mémoire sur les transcendantes elliptiques, (Legendre) (*).

De l'intégration par les séries, pag. 66

Méthode des fluxions, (Newton).

(*) Cet intéressant Mémoire, qui ne fait partie d'aucune collection académique, n'ayant été tiré qu'à un petit nombre d'exemplaires, commence à devenir très-rare.

Supplementum Geometriæ practicæ, (Leibnitii op. T. III. p. 279).
Tractatus de seriebus infinitis, (Jac. Bernoulli, ad calcem *Artis conjectandi*).
Inst. Calculi integralis, T. I. Sect. I. Cap. III.
Opuscula varii argumenti, T. II, (Euler).
Mathematical dissertations, pag. 119, (Thomas Simpson).
Mémoires de Turin, 1784-85, seconde partie, (Lagrange).

De l'intégration des fonctions logarithmiques et exponentielles, pag. 89

Johan. Bernoulli opera, T. III, pag. 376.
Institutiones Calculi integralis, T. I. Sect. I. Cap. IV.
Adnotationes ad Calculum integralem Euleri, (Mascheroni).

Intégration des fonctions circulaires, pag. 100

Institutiones Calculi integralis, T. I. Sect. I. Cap. V et VI.

Méthode générale pour obtenir les valeurs approchées des intégrales; pag 135

Mathematical dissertations, pag. 100, (Thomas Simpson).
Institutiones Calculi integralis, T. I. Sect. I. Cap. VII.

Voyez pour la série générale de la page 155, *Johannis Bernoulli opera*, T. I, page 125.

N. B. Les collections académiques renferment un grand nombre de Mémoires qui ont pour objet l'intégration de formules particulières, de peu d'importance par elles-mêmes, et dont l'énumération seroit trop longue pour trouver place ici. Quant aux tables contenant des formules intégrées, on en trouve dans le Traité *de quadraturâ curvarum* de Newton, dans l'*Harmonia mensurarum* de Côtes, dans les *Mathematical Memoirs* de Landen, etc.

CHAP. II. *Application du Calcul intégral à la quadrature des courbes et à leur rectification, à la quadrature des surfaces courbes et à l'évaluation des solides qu'elles comprennent*, pag. 161

N. B. Ces matières ont été traitées d'abord synthétiquement par Archimède, Cavalieri, Grégoire de Saint-Vincent, Viviani, Toricelli, Roberval, Pascal, Fermat et Wren.

On trouve les premières traces de l'application de l'Analyse au même sujet, dans l'*Arithmetica infinitorum* de *Wallis*, et la *Logarithmotechnia* de *Mercator*. *Brownker* donna, dans le n°. 34 des Transactions philosophiques, une série pour exprimer l'aire des segmens hyperboliques. On doit à *Jacques Gregori* et à *Huygens* des procédés approximatifs pour la quadrature du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole. Enfin parurent la *Méthode des fluxions*, le Traité *de quadraturâ curvarum* de *Newton*, et divers écrits de *Leibnitz* et des *Bernoulli*, dans les *Acta eruditorum* de Leipsick, qu'on a réunis ensuite dans leurs œuvres respectives, et qui contiennent les premières applications du Calcul intégral à la Géométrie.

De la quadrature des Courbes, pag. 161

Œuvres de Wallis,
Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1706, page 13, (Varignon).
Traité des fluxions, T. II, Chap. III, (Maclaurin).

De la rectification des Courbes, pag. 176

Van-Heuraet et Neil donnèrent les premiers exemples de la rectification d'une courbe. Voyez à la fin des éditions latines de la Géométrie de Descartes.
Traité des fluxions, T. II, Chap. III, (Maclaurin).

Opuscula varii argumenti, T. II, (Euler).
Produzioni Mathematiche, T. II, page 317, } (Fagnano).
Nova acta eruditorum, 1766, }
Commentarii Acad. Petrop. T. VIII, (Euler).
Novi Commentarii Acad. Petrop. T. X, T. XVIII, (Euler).
Opuscules mathématiques, T. IV, page 275, T. V, page 231, (d'Alembert).
Mathematical Memoirs, page 23, (Landen).
Memorie della Societa Italiana, T. II, Part. II, (Malfatti).
Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1786, (Legendre).
De Calculo integrallum exercitatio Mathematica, (Ferroni).
Acta Acad. Petrop. 1778, Part. I, II, (Lexell).

De la cubature des solides, terminés par des surfaces courbes; et de la quadrature de leurs aires, de la rectification des Courbes à double courbure, page 187

Recherches sur les Courbes à double courbure, (Clairaut).
Miscellanea Berolinensia, T. II, (Varignon et Leibnitz).
Leibnitii opera, T. III, page 505.
Novi Commentarii Acad. Petrop. T. I, (Euler).
Opuscules mathématiques, T. I, (d'Alembert).
Novi Commentarii Acad. Petrop. T. XIV, Pars I, (Euler).
Savans Etrangers, T. IX, (Tinseau).
Mém. de l'Acad. de Berlin, 1773, (Lagrange).
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1788, (Legendre).

Des fonctions qui rendent algébriques des intégrales données, ou recherche des Courbes quarrables, rectifiables, etc. pag. 206

Exercitatio mathematica de formatione et mensurâ fornicum, (Viviani).
Leibnitii opera, T. III, page 267.
Jacobi Bernoulli opera, T. I, p. 511, T. II, p. 739.
Johan. Bernoulli opera, T. III, p. 230.
Comment. Acad. Petrop. T. V et VI, (Euler).
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1732, (Bernoulli, Maupertuis, Clairaut), et 1758, (Bézout).
Novi Commentarii Acad. Petrop. T. V, XIV, Pars I, et T. XV, (Euler).

CHAP. III. *De l'intégration des équations différentielles à deux variables*, pag. 221

De la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre, ibid.

Leibnitii et Joh.ⁿ Bernoulli commercium epistolicum, T. I, p. 7 et 10.
Leibnitii opera, T. III, p. 336.
Johannis Bernoulli opera, T. I, p. 123.
Jacobi Bernoulli opera, T. II, p. 731.
De constructione æquationum differentialium primi gradûs, (Manfredi).
Acta eruditorum, *suppl.* T. VIII, pag. 66, (Com. Riccati).
Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. I, (Hermann, Joh. Bernoulli, Nicol. Bernoulli, Goldbach).
Johannis Bernoulli opera, T. III, p. 108.
Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. II, VI, IX, (Hermann, Euler).
Inst. calc. integr. T. I, Sect. II, Cap. I.

Recherche du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du premier ordre; pag. 230

Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1739 et 1740, (Clairaut).
Novi Commentarii Acad. Petrop. T. VIII, p. 3, T. XVII, p. 105, (Euler).
Opuscules mathématiques, T. IV. p. 254, (d'Alembert).

Inst. calc. integr. T. I, Sect. II, Cap. II et III.
Mémoires donnés à l'Academie, p. 24 et 84, (Fontaine).
Du Calcul intégral, seconde Section,
Sur le système du monde et le Calcul intégral,
Miscellanea Taurinensia, T. IV.
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1771, *p.* 693,
1772, première Partie, p. 61.
Notes sur l'éloge de Fontaine, 1771. } (Condorcet).

Des équations du premier ordre dans lesquelles les différentielles passent le premier degré, pag. 251

Mém. de l'Acad. de Berlin, 1748, p. 275, (d'Alembert).
Instit. Calc. integr. T. I, sect. III.

Des solutions particulières des équations différentielles du premier ordre, pag. 263

Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1734, page 209, (Clairaut).
Mém. de l'Acad. de Berlin, année 1756, (Euler).
Inst. Calc. integr. T. I, Sect. II, Cap. IV.
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1772, première partie, p. 343 et 651, (Laplace).
Mém. de l'Acad. de Berlin, 1774, p. 198, (Lagrange).
Théorie des fonctions analytiques, n°. 69, (Lagrange).
Mém. de l'Acad. des Sciences de Turin, 1790-91, (Trembley).

Méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles du premier ordre, pag. 284

Méthode des fluxions, (Newton).
Methodus incrementorum, (Taylor).
Instit. Calc. integr. T. I, Sect. II, Cap. VII.
Mém. de l'Acad. de Berlin, 1776, p. 236, (Lagrange).

De la construction géométrique des équations différentielles du premier ordre, pag. 296

Joh. Bernoulli opera, T. I, p. 123.
Jac. Bernoulli opera, T. II, p. 731.
Commentarii Academiæ Petropolitanæ, T. VIII, *Novi Comment.* T. XIV, Pars I, p. 46, T. XVII, p. 205. (Euler).

Pour l'histoire du problême des trajectoires orthogonales, *Voyez* les Tomes I et II des œuvres de Jean Bernoulli.

De l'intégration des équations différentielles du second ordre par le moyen des transformations, pag. 307

Joh. Bernoulli opera, T. IV, pp. 77 et 79.
Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. III, T. X, (Euler).
Novi Commentarii Acad. Petrop. T. VIII, (Euler).
Réflexions sur la cause générale des vents, n°. 80, (d'Alembert).
Opuscules mathématiques, T. VII, p. 377, (d'Alembert).
Instit. Calc. integr. T. II, Sect. I, Cap. I, IV, IX.

Recherche du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du second ordre, pag. 332

Novi Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. VII, (Euler).
Inst. Calc. integr. T. II, Sect. I, Cap. V et VI.

Méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles du second ordre, pag. 349

Novi Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. IX; T. XVII, p. 125, (Euler).
Inst. Calc. integr. T. II, Sect. I, Cap. VII, VIII et XII.

De l'intégration des équations différentielles des ordres supérieurs au second, pag. 364

Miscellanea Berolinensia, T. VII, (Euler).
Novi Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. III, (Euler).
Mém. de l'Acad. de Berlin, 1748, p. 283, (d'Alembert).
Miscellaneous Tracts, pag. 76, (Simpson).
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1767 et 1769, (d'Alembert).
Inst. Calc. integr. T. II, Sect. II.
Miscellanea Taurinensia, T. III, pag. 179, (Lagrange), *ibid.* pag. 381, (d'Alembert)
Miscellanea Taurinensia, T. IV. (Laplace).
Mém. de l'Acad. de Berlin, 1775, p. 190, (Lagrange).
Acta Acad. Petropol. 1777, Pars I, et 1779, Pars II, (Lexell).
Memorie della Societa Italiana, T. II, pag. 177, (Lorgna).

Pour les courbes qui sont semblables à leurs développées, voyez *Commentarii acad. Petrop.* T. XII, p. 3.

Mémoires de Fontaine, p. 12.

Usage des équations différentielles du premier degré pour intégrer par approximation, pag. 394

Mém. de l'Académie des Sciences de Paris, 1772, seconde Partie, p. 267, et 1777, p. 373, (Laplace).
Mém. de l'Acad. de Berlin, 1783, (Lagrange).
Mém. de l'Acad. de Berlin, 1786-87, (Trembley).

Condorcet s'est aussi beaucoup occupé de l'intégration des équations différentielles par approximation. Voyez *les Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris*, 1769, p. 193, 1770, p. 191, et 1771, p. 281.

Réflexions générales sur les équations différentielles et sur les transcendantes, pag. 408

Mém. de l'Acad. de Berlin, 1774, p. 225, et 1779, p. 122, (Lagrange).
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1790, (Legendre), 1783, pag. 719, (Monge).
Produzioni Mathematiche di Fagnano, T. II, p. 336.
Novi Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. VI, VII, XII, (Euler).
Miscellanea Taurinensia, T. IV, p. 98, (Lagrange).
Acta Acad. Petropolitanæ, 1778, Pars II, (Euler).
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1786, (Legendre).
Mém. sur les transcendantes elliptiques, (Legendre).
Théorie des fonctions analytiques, n°. 80, (Lagrange).
Inst. Calc. integr. T. I, Sect. II. Cap. V, VI, et T. III. Suppl.

CHAP. IV. *De l'intégration des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables*, pag. 453

Recherche d'une fonction de plusieurs variables lorsque tous ses coefficiens différentiels du même ordre sont donnés explicitement ou implicitement, *ibid.*

Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, année 1739 et 1740, (Clairaut).
Institutiones Calculi integralis, T. III, Pars I, Sect. I, Cap. I.
Mém. de l'Acad. des Sciences de Turin, 1790-91, (Pezzi).

Intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, pag. 476

Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. VII, p. 174, (Euler).
Novi Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. IX, p. 170, (Euler).
Institutiones Calculi integralis, Pars I, Sect. I, Cap. II-VI.

Mém. de l'Acad. de Berlin, années 1772, p. 35, 1774, p. 239, 1779, p. 152, 1785. p. 176, (Lagrange).
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, années 1773, (Laplace), 1787, pag. 337, (Legendre).

De l'intégration des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au premier, pag. 520

Réflexions sur la cause générale des vents, p. 164 et suiv. (d'Alembert).
Opuscules mathématiques, T. IV, p. 225, (d'Alembert).
Miscellanea Taurinensia, 1760-61, pp. 19, 55, 81, 104, (Lagrange).
Ibid. 1762-1765, pp. 27 et 60, (Euler).
Institutiones Calculi integralis, T. III, Pars I, Sect II, III, et pars altera.
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1770, p. 151, 1772, première Part, p. 1, (Condorcet).
Ibid. année 1773, (Laplace).
Miscellanea Taurinensia, 1770-73, p. 79, (Monge).
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, année 1784, p. 118, (Monge).
Ibid. 1787, (Legendre).
Mélanges mathématiques, (Nieuport).

De la construction géométrique des équations différentielles partielles, et de la détermination des fonctions arbitraires que renferment leurs intégrales, pag. 608

Miscellanea Taurinensia, 1770-73, p. 16, (Monge).
Savans Etrangers, 1773, p. 267, (Monge).
Mém, sur la nature des fonctions arbitraires, etc. couronné en 1790 par l'Acad. de Pétersbourg, (Arbogast).

Des équations différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, 624

Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, année 1784, p. 502, (Monge).
Memorie sul Calcolo integrale, etc. del signor Pietro Paoli, Verona, 1793.
Mélanges mathématiques, p. 211, (Nieuport).

CHAP. V. *De la Méthode des Variations*, pag. 655

Jacobi Bernoulli opera, T. II, p. 895.
Johan. Bernoulli opera, T. I et II, (Problême des Isopérimètres).
Mémoires de Fontaine, p. 1.
Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, (Euler).
Miscellaneous tracts, p. 98, (Simpson).
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, année 1767, (Borda, Fontaine).
Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio elementaris, Cap. XX, (L'Huillier).

Recherche de la variation d'une fonction quelconque, 656

Miscellanea Taurinensia, 1760-61, p. 173; 1766-69, p. 163, (Lagrange).
Novi Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. X, pag. 51. (Euler).
Institutiones Calculi integralis, T. III, appendix.
Novi Commentarii Acad. Petropolitanæ, T. XVI, (Euler).

Application du Calcul des variations, pag. 689

Nova acta eruditorum, ann. 1772, p. 193 (Laplace).
Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, année 1786, (Legendre).
Théorie des fonctions analytiques, n°. 168 et suiv. (Lagrange).

TRAITÉ

TRAITÉ
DU CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DU CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE.
DU CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration des fonctions d'une seule variable.

358. Le Calcul intégral est l'inverse du Calcul différentiel ; il a pour but de remonter des coefficiens différentiels aux fonctions dont ils dérivent (n°. 8). L'exposition des principes de ce Calcul présente des divisions analogues à celles que nous a offert le Calcul différentiel. Il peut arriver que la composition des coefficiens différentiels de la fonction cherchée soit donnée immédiatement par les variables

indépendantes, ou qu'on ait seulement une équation entre quelques-uns de ces coefficiens, et une ou plusieurs des variables: le premier cas étant le plus simple, c'est celui qu'il convient de traiter d'abord.

Lorsque le coefficient différentiel du premier ordre d'une fonction de x est donné en x, on a $\frac{dy}{dx} = X$, ou $dy = Xdx$. La fonction cherchée est donc celle dont la différentielle est Xdx; on l'indique comme il suit: $y = \int Xdx$, la caractéristique $\int$ étant l'inverse de la caractéristique d (*). Pour trouver cette fonction, il faut renverser les règles de la différentiation; mais afin de procéder avec ordre, nous nous occuperons successivement des différentes formes que peut avoir la fonction donnée X, et que nous classerons ainsi qu'il suit:

fonctions rationnelles, $\begin{cases} Ax^m + Bx^n + Cx^p \ldots = U \\ \dfrac{Ax^m + Bx^n + Cx^p \ldots}{A'x^{m'} + B'x^{n'} + C'x^{p'} \ldots} = \dfrac{U}{V} \end{cases}$

fonctions irrationnelles, $U.V^{\frac{m}{n}}$,

fonctions transcendantes, $f(U, lV)$, $f(U, \sin V)$, etc.

Intégration des fonctions rationnelles.

359. La différentielle de $Ax^m + B$, étant $mAx^{m-1}dx$, on en conclura que l'intégrale de $ax^n dx$ est $\frac{ax^{n+1}}{n+1} + B$, car en comparant $ax^n dx$ avec $mAx^{m-1}dx$, on a $m-1=n$, et $mA=a$ ou $A=\frac{a}{m}=\frac{a}{n+1}$.

Il résulte de cet exemple que lorsque $dy=ax^n dx$, $y=\frac{ax^{n+1}}{n+1}+B$, la constante B est arbitraire (n°. 15). On peut lui donner une forme

(*) La lettre $\int$ a été employée par ceux qui ont écrit les premiers sur le Calcul intégral, comme l'initiale du mot *somme*, parce que, suivant les idées de Leibnitz, les différentielles représentant les accroissemens infiniment petits des variables, il s'ensuit qu'une variable quelconque est la somme du nombre infini d'accroissemens qu'elle a reçus depuis son origine jusqu'au moment où on la considère, et c'est pour cela qu'ils ont donné à la fonction que nous appelons *primitive* le nom *d'Intégrale*, comme étant le résultat de l'agrégation de toutes les différentielles: ces dénominations étant bien entendues, nous pourrons nous servir indifféremment de l'une ou de l'autre.

semblable à celle du premier terme ; car si on désigne par b la valeur de x, qui rend la fonction y nulle, on aura $\frac{ab^{n+1}}{n+1} + B = 0$; d'où $B = -\frac{ab^{n+1}}{n+1}$ et par conséquent

$$y = \frac{a(x^{n+1} - b^{n+1})}{n+1},$$

résultat qui ne diffère du précédent que dans la forme qu'on a donnée à la constante.

360. Avant d'aller plus loin il est à propos d'examiner un cas particulier dans lequel la valeur de y trouvée ci-dessus, devient $\frac{0}{0}$; c'est celui où $n = -1$, car on a alors $y = \frac{a(x^0 - b^0)}{0} = \frac{a(1-1)}{0} = \frac{0}{0}$. Pour trouver la vraie valeur de cette fonction, il faut recourir à la règle du n°. 135, et nous avons fait voir par cette règle, pag. 244, que $\frac{a^x - b^x}{x}$ se réduisoit à $la - lb$, dans la supposition de $x = 0$; nous aurons dans l'exemple actuel, en changeant les lettres convenablement, $y = a(lx - lb)$; mais lorsque $n = -1$, on a $dy = ax^{-1}dx$: donc $dy = \frac{adx}{x}$ donne $y = a(lx - lb)$ ou $y = a\,lx + B$.

Toute la difficulté de l'intégration des fonctions d'une seule variable, ne consiste plus que dans la recherche des transformations propres à réduire les fonctions proposées à un ou plusieurs monomes, à chacun desquels on puisse appliquer la règle du n°. précédent.

361. Il est d'abord évident que $dy = ax^m dx + bx^n dx + cx^p dx \ldots$ donne $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \frac{cx^{p+1}}{p+1} \ldots + B$. Je n'ajoute qu'une constante arbitraire, car il est aisé de voir que si on en ajoutoit une pour chaque monome, elles n'équivaudroient toutes ensemble qu'à une seule, qui seroit égale à leur somme.

En général, puisqu'on a vu n°. 14, que

$$d(u + v - w) = du + dv - dw,$$

on en doit conclure que $\int(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw$ et que $\int(Pdx+Qdx-Rdx)=\int Pdx+\int Qdx-\int Rdx$.

Nous ferons remarquer dès ce moment une conséquence de cette règle, qui nous sera fort utile dans la suite. En intégrant ainsi chaque terme de la différentielle $d.uv=udv+vdu$ (n°. 16), il viendra $uv=\int udv+\int vdu$, ce qui donne une relation entre les fonctions primitives des différentielles udv, vdu, en sorte que l'une étant connue, l'autre l'est aussi : on a par exemple $\int udv=uv-\int vdu$. La différentielle $d.\frac{u}{v}=\frac{du}{v}-u\frac{dv}{v^2}$ (n°. 17), donnera de même $\frac{u}{v}=\int\frac{du}{v}-\int u\frac{dv}{v^2}$ d'où on tirera $\int u\frac{dv}{v^2}=-\frac{u}{v}+\int\frac{du}{v}$. Il est bon de remarquer que ce résultat n'est qu'une conséquence du précédent, car en substituant dans la valeur de $\int u\,dv$, trouvée ci-dessus $\frac{dv}{v^2}$ au lieu de dv, ce qui revient à changer v en $-\frac{1}{v}$, puisque $\frac{dv}{v^2}=v^{-2}dv=-d.v^{-1}=-d.\frac{1}{v}$, on aura $\int u\frac{dv}{v^2}=-\frac{u}{v}+\int\frac{du}{v}$.

Il suit de ce que $d.au=adu$, que $\int aXdx=a\int X\,dx$, et qu'on peut faire sortir du signe $\int$ la constante a.

362. Si on se donnoit $dy=(ax+b)^m dx$, on développeroit la puissance indiquée, et on intégreroit chaque monome qui résulteroit de cette opération ; mais il est bon d'observer qu'on peut arriver au résultat sans effectuer le développement : il suffit de faire $ax+b=z$, ce qui donne $x=\frac{z-b}{a}$, $dx=\frac{dz}{a}$; substituant dans l'expression de dy, on trouve $dy=\frac{z^m dz}{a}$ et par conséquent $y=\frac{z^{m+1}}{a(m+1)}+B$. Mettant pour z sa valeur, on aura donc lorsque $dy=(ax+b)^m dx$,

$$y=\frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}+B.$$

Si on avoit $dy=(ax^n+b)^m x^{n-1}dx$, la transformation réussiroit encore, car en posant $ax^n+b=z$, il en résulteroit $nax^{n-1}dx=dz$, d'où $x^{n-1}dx=\frac{dz}{na}$, $dy=\frac{z^m dz}{na}$ et $y=\frac{z^{m+1}}{na(m+1)}+B$,

ce qui donne, lorsque $dy=(ax^n+b)^m x^{n-1}dx$, $y=\frac{(ax^n+b)^{m+1}}{na(m+1)}+B$.

363. Passons aux fonctions fractionnaires, ou de la forme

$$\frac{(Ax^m+Bx^n+Cx^p\ldots)dx}{A'x^{m'}+B'x^{n'}+C'x^{p'}\ldots}.$$

Pour commencer par le cas le plus simple, supposons qu'on ait $dy=\frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n}$; en faisant $ax+b=z$, on trouve $x=\frac{z-b}{a}$, $dx=\frac{dz}{a}$, et par conséquent

$$dy=\frac{A(z-b)^m dz}{a^{m+1}z^n};$$

développant la puissance $(z-b)^m$, multipliant le résultat par dz et divisant après par z^n, on aura une suite de momomes à intégrer.

Prenons pour exemple le cas où $m=3$ et $n=2$; il viendra

$$dy=\frac{A(z-b)^3dz}{a^4z^2}=\frac{A}{a^4}[zdz-3bdz+3b^2z^{-1}dz-b^3z^{-2}dz];$$

en appliquant à chacun de ces monomes la règle générale, il en résultera $y=\frac{A}{a^4}\left[\frac{z^2}{2}-3bz+3b^2lz+b^3z^{-1}\right]+B$.

On remettra ensuite pour z sa valeur et on aura enfin, lorsque $dy=\frac{Ax^3dx}{(ax+b)^2}$,

$$y=\frac{1A}{a^4}\left[\tfrac{1}{2}(ax+b)^2-3b(ax+b)+3b^2l(ax+b)+b^3(ax+b)^{-1}\right]+B.$$

On construiroit sans peine la formule générale, et si on avoit

$$dy=\frac{Ax^m dx+Bx^p dx+Cx^q dx\ldots.}{(a+bx)^n},$$

on l'écriroit comme il suit :

$$dy=\frac{Ax^m dx}{(a+bx)^n}+\frac{Bx^p dx}{(a+bx)^n}+\frac{Cx^q dx}{(a+bx)^n}\ldots.$$

et on opéreroit sur chaque terme en particulier, comme nous venons de le faire sur le premier.

364. Occupons-nous maintenant de la fraction $\int\frac{Udx}{V}$. On pourra toujours supposer que l'exposant de x dans le numérateur soit

moindre que dans le dénominateur; car, si cela n'étoit pas, on diviseroit U par V, et nommant Q le quotient de cette division, et R le reste, il viendroit $\int\frac{Udx}{V}=\int Qdx+\int\frac{Rdx}{V}$: mais Q étant une fonction rationnelle et entière, $\int Qdx$ s'obtiendroit par l'application immédiate de la règle du n°. 359; il ne resteroit plus à trouver que $\int\frac{Rdx}{V}$, dans laquelle la fonction R est d'un degré moins élevé que la fonction V.

La forme la plus générale que puisse avoir la fraction $\frac{Udx}{V}$, sera donc $\frac{(Ax^{n-1}+B'x^{n-2}+Cx^{n-3}\ldots+T)dx}{x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}\ldots+T}$. Nous avons fait remarquer dans le n°. 20, que l'expression $\frac{(Ax^2+Bx+C)dx}{x^3+A'x^2+B'x+C'}$, qui se trouve comprise dans la précédente, résultoit de l'assemblage des fractions $\frac{ndx}{x+a}+\frac{n'dx}{x+a'}+\frac{n''dx}{x+a''}$, $x+a$, $x+a'$, $x+a''$, étant les facteurs du dénominateur $x^3+A'x^2+B'x+C'$; il est facile de conclure de là, que si le dénominateur $x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}\ldots+T'$ de la fraction à intégrer, étoit décomposé dans ses facteurs $x+a$, $x+a'$, $x+a''$, $x+a'''\ldots$ on pourroit la regarder comme équivalente a l'ensemble de celles-ci,

$$\frac{Ndx}{x+a}+\frac{N'dx}{x+a'}+\frac{N''dx}{x+a''}+\frac{N'''dx}{x+a'''}+\text{etc.}$$

les quantités N, N', N'', N''' étant indépendantes de x. Pour déterminer ces quantités, on réduira toutes les fractions simples au même dénominateur, et on aura une expression dont on pourra comparer le numérateur, terme à terme, avec celui de la fraction proposée; car il sera

$$N(x+a')(x+a'')(x+a''')\ldots+N'(x+a)(x+a'')(x+a''')\ldots$$
$$+N''(x+a)(x+a')(x+a''')\ldots+N'''(x+a)(x+a')(x+a'')\ldots$$

et étant développé, il prendra la forme

$$(N+N'+N''+N'''\ldots)x^{n-1}$$
$$+[(a'+a''+a'''..)N+(a+a''+a'''..)N'+(a+a'+a'''..)N''+(a+a'+a''..)N'''+..]x^{n-2}$$
$$+\ldots+Na'a''a'''\ldots+N'aa''a'''\ldots+N''aa'a'''\ldots+N'''aa'a''\ldots+\text{etc.}$$

On tirera de cette comparaison

$$N+N'+N''+N'''+\ldots.=A$$

$$\left.\begin{array}{l}(a'+a''+a'''\ldots.)N+(a+a''+a'''\ldots.)N' \\ +(a+a'+a'''\ldots.)N''+(a+a'+a''\ldots.)N'''+\ldots.\end{array}\right\}=B$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Na'a''a'''\ldots+N'aa''a'''\ldots+N''aa'a'''\ldots+N'''aa'a''\ldots+\text{etc.}=T;$$

ces équations seront en nombre suffisant pour donner les valeurs des indéterminées N, N', N'', N''' etc.

L'intégration de la fraction proposée sera donc réduite à celle de

$$\frac{Ndx}{x+a}+\frac{N'dx}{x+a'}+\frac{N''dx}{x+a''}+\frac{N'''dx}{x+a'''}\text{ etc.}$$

mais il est facile de s'assurer en faisant $x+a=z$ (n°. préc.), que $\int\frac{Ndx}{x+a}=N\,l\,(x+a)$, et par conséquent l'intégrale totale de l'expression ci-dessus sera

$$N\,l\,(x+a)+N'\,l\,(x+a')+N''\,l\,(x+a'')+\text{etc.}+const.$$

$$=l\,[(x+a)^N(x+a')^{N'}(x+a'')^{N''}(x+a''')^{N'''}\ldots]+const.$$

365. On voit par ce qui précède que l'intégration des fractions rationnelles n'a aucune difficulté, dans le cas où leur dénominateur se décompose en facteurs réels et inégaux. S'il renfermoit des facteurs imaginaires, le procédé qu'on vient d'indiquer réussiroit encore; les quantités N, N', N'', ... se présenteroient à la vérité sous une forme imaginaire, mais on pourroit arriver à un résultat réel, ainsi qu'on va le voir pour la fraction $\frac{(Ax+B)dx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}$. Les facteurs de son dénominateur sont $x+\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $x+\alpha-\beta\sqrt{-1}$; faisons pour abréger $x+\alpha=z$, nous aurons $dx=dz$, et la fraction proposée se changera en $\frac{(Az+B-A\alpha)dz}{z^2+\beta^2}$; représentons $B-A\alpha$ par B', et il viendra $\frac{(Az+B')dz}{z^2+\beta^2}=\frac{(Az+B')dz}{(z+\beta\sqrt{-1})(z-\beta\sqrt{-1})}$; posant

$$\frac{Az+B'}{(z+\beta\sqrt{-1})(z-\beta\sqrt{-1})}=\frac{N}{z+\beta\sqrt{-1}}+\frac{N'}{z-\beta\sqrt{-1}},$$

réduisant au même dénominateur les termes du second membre,

et comparant avec le premier, on aura pour trouver les quantités N et N', les équations suivantes,

$$N+N'=A, \qquad N'\beta\sqrt{-1}-N\beta\sqrt{-1}=B',$$

qui donneront

$$N=\frac{A\beta\sqrt{-1}-B'}{2\beta\sqrt{-1}}; \qquad N'=\frac{A\beta\sqrt{-1}+B'}{2\beta\sqrt{-1}}$$

et il faudra par conséquent intégrer

$$\frac{1}{2\beta\sqrt{-1}}\left\{\frac{(A\beta\sqrt{-1}-B')dz}{z+\beta\sqrt{-1}}+\frac{(A\beta\sqrt{-1}+B')dz}{z-\beta\sqrt{-1}}\right\}.$$

d'où on tirera

$$\frac{[(A\beta\sqrt{-1}-B')l(z+\beta\sqrt{-1})+(A\beta\sqrt{-1}+B')l(z-\beta\sqrt{-1})]}{2\beta\sqrt{-1}}+const.$$

Pour faire disparoître les imaginaires, nous observerons qu'en posant $\sqrt{z^2+\beta^2}=r$, et désignant par u l'arc dont $\frac{z}{r}$ est le cosinus, il viendra $l(z\pm\beta\sqrt{-1})=lr\pm u\sqrt{-1}$, (n°. 182). Mettant ces dernières valeurs dans l'expression précédente, on obtiendra

$$\frac{2A\beta\sqrt{-1}\,lr-2B'u\sqrt{-1}}{2\beta\sqrt{-1}}+const=Alr-\frac{B'}{\beta}u+const.$$

l'intégrale de la fraction $\frac{(Az+B')dz}{z^2+\beta^2}$ sera donc

$$Al\sqrt{z^2+\beta^2}-\frac{B'}{\beta}\times\text{arc}\left(\cos=\frac{z}{\sqrt{z^2+\beta^2}}\right)+const.$$

Si on met pour z et pour B' leurs valeurs $x+\alpha$ et $B-A\alpha$, on aura enfin $\int\frac{(Ax+B)dx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}=$

$$Al.\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}-\frac{B-A\alpha}{\beta}\times\text{arc}\left(\cos=\frac{x+\alpha}{\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}}\right)+const.$$

366. Quoique le moyen dont nous venons de faire usage réussisse, quel que soit le nombre des facteurs imaginaires, il est plus commode néanmoins d'éviter ces facteurs en ne décomposant le dénominateur

dénominateur de la fraction qu'on se propose d'intégrer, qu'en facteurs réels du premier et du second degré, et si on représente par

$$(x+\alpha)^2+\beta^2,\quad (x+\alpha')^2+\beta'^2,\quad (x+\alpha'')^2+\beta''^2,$$

les facteurs du second degré, on supposera cette fraction égale à

$$\left.\begin{aligned}&\frac{Ndx}{x+a}+\frac{N'dx}{x+a'}+\frac{N''dx}{x+a''}+\frac{N'''dx}{x+a'''}+\text{etc.}\\&+\frac{(Px+Q)dx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{(P'x+Q')dx}{(x+\alpha')^2+\beta'^2}+\frac{(P''x+Q'')dx}{(x+\alpha'')^2+\beta''^2}+\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

Il est facile de voir qu'en réduisant ces fractions au même dénominateur, et comparant le numérateur du résultat, terme à terme, avec celui de la proposée, on se procurera un nombre suffisant d'équations, pour déterminer les quantités $N\ldots$, $P\ldots$, $Q\ldots$. l'intégration de la fraction proposée ne dépendra donc plus que de celle des fractions de la forme $\frac{Ndx}{x+a}$ et $\frac{(Px+Q)dx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$, dont nous nous sommes occupés dans les n^os^. précédens. Je vais donner néanmoins la manière d'intégrer $\frac{(Px+Q)dx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$, sans avoir recours aux formules imaginaires.

Pour cela, je ferai encore $x+\alpha=\zeta$, et il viendra

$$\frac{(Px+Q)dx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{(P\zeta+Q-P\alpha)d\zeta}{\zeta^2+\beta^2}=\frac{(P\zeta+Q')d\zeta}{\zeta^2+\beta^2};$$

mais $$\frac{(P\zeta+Q')d\zeta}{\zeta^2+\beta^2}=\frac{P\zeta d\zeta}{\zeta^2+\beta^2}+\frac{Q'd\zeta}{\zeta^2+\beta^2};$$

la première partie du second membre de l'équation ci-dessus est intégrable; car en faisant $\zeta^2+\beta^2=u$, on a $\zeta d\zeta=\frac{du}{2}$,

ce qui donne $\int\frac{P\zeta d\zeta}{\zeta^2+\beta^2}=\frac{P}{2}\frac{du}{u}=P\int\frac{1}{2}lu=Pl\sqrt{\zeta^2+\beta^2}$,.

Quant à la seconde partie, si on y fait $\zeta=\beta u$, on aura $\frac{Q'd\zeta}{\zeta^2+\beta^2}=\frac{Q'}{\beta}\frac{du}{u^2+1}$; mais on a vu p. 114, que $\frac{du}{1+u^2}$ est la différentielle de l'arc dont la tang. $=u$, donc

$$\int\frac{Q'}{\beta}\frac{du}{1+u^2}=\frac{Q'}{\beta}.\text{arc}\,(\text{tang}=u)=\frac{Q'}{\beta}.\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{\zeta}{\beta}\right)$$

réunissant ces deux résultats, on obtiendra

$$\int \frac{(P\zeta+Q')\,d\zeta}{\zeta^2+\beta^2} = P\,l\sqrt{\zeta^2+\beta^2} + \frac{Q'}{\beta}\,.\,\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{\zeta}{\beta}\right) + \textit{const.}$$

Pour ramener ce résultat à celui du n°. 365, j'observe que l'arc dont la tangente est $\frac{\zeta}{\beta}$, a pour sinus $\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\beta^2}}$; qu'il est par conséquent le complément de celui que désigne u dans le n° cité, en sorte qu'en nommant π la demi-circonférence, il est exprimé par $\frac{1}{2}\pi - u$. En substituant cette valeur on pourra faire abstraction du terme $\frac{1}{2}\pi$; car il n'en résulteroit qu'un terme constant qui peut toujours être compris dans la constante arbitraire.

367. Jusqu'à présent nous avons supposé que tous les facteurs du dénominateur de la fraction proposée, étoient inégaux entr'eux; mais dans le cas contraire, la décomposition de cette fraction ne pourra plus avoir lieu dans la forme que nous avons adoptée: on le voit immédiatement sur cet exemple très-simple $\frac{Px+R}{(x+a)^2}$, qu'on ne sauroit représenter par $\frac{N}{x+a}+\frac{N'}{x+a}$, puisque ces deux fractions n'en forment qu'une seule $\frac{N+N'}{x+a}$.

Si donc le dénominateur $x^n+B'x^{n-1}+C'x^{n-2}\ldots.+T'$, de la fraction $\frac{Udx}{V}$, renferme un nombre p de facteurs du premier degré, réels et égaux, il faudra décomposer cette fraction comme il suit

$$\frac{N}{x+a}+\frac{N'}{x+a}+\frac{N''}{x+a''}+\ldots+\frac{Px^{p-1}+Qx^{p-2}+Rx^{p-3}\ldots+Y}{(x+b)^p},$$

et on déterminera les coefficiens N, $N'\ldots$ P, Q etc., ainsi qu'il a été indiqué pour chacun des cas précédens.

On pourroit comprendre dans le cas actuel celui où les facteurs égaux seroient imaginaires, mais il sera plus commode de n'employer que les facteurs réels du second degré qui renferment chaque couple des premiers, et alors on décomposera la fraction proposée en fractions de la forme suivante

$$\frac{N}{x+a}+\ldots\ldots+\frac{Px^{p-1}+Qx^{p-2}\ldots+Y}{(x+b)^p}+\frac{Q'x^{2q-1}+R'x^{2q-2}\ldots+Y'}{(x^2+2ax+a^2+\beta^2)^q};$$

Cette hypothèse étant la plus générale qu'on puisse faire sur la nature du dénominateur de la fraction $\frac{Udx}{V}$, on voit que l'intégration de cette fraction ne dépendra jamais que de celle des trois espèces de fonctions suivantes

$$\frac{Ndx}{x+a}, \frac{(Px^{p-1}+Qx^{p-2}\ldots+Y)dx}{(x+b)^p}, \frac{(Q'x^{2q-1}+R'x^{2q-2}\ldots+Y')dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q}.$$

La première a déjà été traitée dans les n^os précédens, on pourroit appliquer à la seconde la règle du n°. 363; mais on donne au résultat une forme plus élégante, en faisant

$$\frac{(Px^{p-1}+Qx^{p-2}+\ldots.+Y)dx}{(x+b)^p}=\frac{Mdx}{(x+b)^p}+\frac{M'dx}{(x+b)^{p-1}}+\frac{M''dx}{(x+b)^{p-2}}\ldots.+\frac{M'''\ldots dx}{x+b}.$$

Il est facile de voir qu'en réduisant au même dénominateur toutes les fractions du second membre, le numérateur qu'on obtiendra sera de la même forme que celui du premier. Cela posé, soit $x+b=z$, il viendra

$$\int\frac{Mdx}{(x+b)^p}=\int\frac{Mdz}{z^p}=\frac{Mz^{-p+1}}{1-p}=\frac{M}{(1-p)(x+b)^{p-1}};$$

on trouvera de même $\int\frac{M'dx}{(x+b)^{p-1}}=\frac{M}{(2-p)(x+b)^{p-2}}$ et ainsi des autres, toutes ces intégrales seront algébriques, la dernière seule $\int\frac{M'''\ldots dx}{x+b}$ renfermera un logarithme.

Pour obtenir l'intégrale de l'expression $\frac{(Q'x^{2q-1}+R'x^{2q-2}..+Y')dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q}$ on lui donnera la forme

$$\frac{(Kx+L)dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q}+\frac{(K'x+L')dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{q-1}}..+\frac{(K''..x+L''..)dx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2};$$

tout se réduira alors à intégrer la différentielle $\frac{(Kx+L)dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q}$.

Je supposerai qu'on ait fait $x+\alpha=z$ et $K\alpha-L=L_1$; par ce moyen on n'aura plus à traiter que $\frac{(Kz+L_1)dz}{(z^2+\beta^2)^q}$, et je vais montrer que cette dernière peut se ramener à $\int\frac{Hdz}{(z^2+\beta^2)^{q-1}}$. Pour cela, je la

décomposerai en deux parties $\int \frac{K\zeta d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^q} + \int \frac{L_1 d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^q}$. La première est intégrable immédiatement, et cela se voit en faisant $\zeta^2+\beta^2=u$, puisqu'on a $\zeta d\zeta = \frac{du}{2}$, d'où l'on tire $\int \frac{K\zeta d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^q} = \frac{Ku^{-q+1}}{2(1-q)}$.

Je supposerai ensuite $\int \frac{L_1 d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^q} = \frac{G\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-1}} + \int \frac{Hd\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-1}}$; prenant les différentielles de chaque membre, réduisant au même dénominateur tous les termes du résultat et supprimant ce dénominateur, ainsi que le facteur commun $d\zeta$, on trouvera

$$L_1 = G(\zeta^2+\beta^2) - 2(q-1)G\zeta^2 + H(\zeta^2+\beta^2);$$

comparant les termes semblables on formera deux équations,

$$L_1 = G\beta^2 + H\beta^2, \qquad G - 2(q-1)G + H = 0,$$

lesquelles donneront $G = \frac{L_1}{(2q-2)\beta^2}$, $H = \frac{(2q-3)L_1}{(2q-2)\beta^2}$;

on aura par conséquent

$$\int \frac{L_1 d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^q} = L_1 \left\{ \frac{1}{(2q-2)\beta^2} \cdot \frac{\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-1}} + \frac{(2q-3)}{(2q-2)\beta^2} \int \frac{d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-1}} \right\} \ldots (a).$$

Si dans cette équation on met $q-1$ à la place de q et qu'on y fasse $L_1=1$, il viendra

$$\int \frac{d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-1}} = \frac{1}{(2q-4)\beta^2} \frac{\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-2}} + \frac{(2q-5)}{(2q-4)\beta^2} \int \frac{d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-2}};$$

substituant cette valeur dans la même équation (a) il en résultera

$$\int \frac{L_1 d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^q} = L_1 \left\{ \frac{1}{(2q-2)\beta^2} \cdot \frac{\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-1}} + \frac{1.(2q-3)}{(2q-2)(2q-4)\beta^4} \cdot \frac{\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-2}} + \frac{(2q-3)(2q-5)}{(2q-2)(2q-4)\beta^4} \int \frac{d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-2}} \right\} \ldots (b).$$

L'équation (a) donnera encore la valeur de $\int \frac{d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-2}}$, en changeant q en $q-2$ et faisant $L_1=1$; si on remet ensuite cette valeur dans l'équation (b), on aura

$$\int \frac{L_1 d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^q} = L_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2q-2)\beta^2} \cdot \frac{\zeta}{\zeta^2+\beta^2} + \frac{1.(2q-3)}{(2q-2)(2q-4)\beta^4} \cdot \frac{\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-2}} \\ + \frac{1.(2q-3)(2q-5)}{(2q-2)(2q-4)(2q-6)\beta^6} \frac{\zeta}{(\zeta^2+p^2)^{q-3}} \\ + \frac{(2q-3)(2q-5)(2q-7)}{(2q-2)(2q-4)(2q-6)\beta^6} \int \frac{d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-3}} \end{array} \right\} \ldots . (c).$$

Si on déduisoit ensuite de l'équation (*a*) la valeur de $\int \frac{d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-3}}$, on auroit une nouvelle valeur de $\int \frac{L_1 d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^q}$ qui dépendroit de $\int \frac{d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^{q-1}}$. En continuant d'opérer ainsi, on formera une suite, qu'il faudra terminer, lorsqu'on sera parvenu au terme $\int \frac{d\zeta}{\zeta^2+\beta^2}$; car le terme suivant affecté de $\int \frac{d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^0}$, auroit un coefficient infini: on peut s'en assurer en faisant successivement $q=2$, et $q=3$ dans les équations (*b*) et (*c*), et il est aisé de sentir à quoi tient cette circonstance; car si l'on pouvoit arriver jusqu'au terme dont nous venons de parler, on auroit l'intégrale algébriquement, puisque $\int \frac{d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^0} = \int d\zeta = \zeta$.

On voit ici l'origine d'une méthode d'intégration qui est aussi féconde qu'élégante; c'est celle par laquelle on passe d'une intégrale à une autre: nous la développerons par la suite d'une manière plus générale.

En rapprochant les résultats des n^os^. précéd. on remarquera sans doute, que les différentielles qui se présentent sous la forme de fractions rationnelles, peuvent toujours s'intégrer, soit algébriquement, soit par le moyen des logarithmes ou des arcs de cercle, et qu'il n'est besoin pour les préparer, que de les décomposer en fractions dont les dénominateurs soient des binomes ou des trinomes. Nous n'avons encore indiqué pour cette opération que la méthode des coefficiens indéterminés, parce que c'est elle qui se présente la première; mais nous allons maintenant faire connoître plusieurs procédés, qui exigent moins de calcul.

Nous n'entrerons dans aucun détail sur la décomposition du dénominateur en facteurs binomes ou trinomes, puisque cette opération tient à la résolution des équations; en effet, lorsqu'on connoît les racines d'une équation algébrique, on a sur le champ les facteurs binomes de la fonction rationnelle entière qui compose son premier membre; et réciproquement si on égale à zéro une fonction de

cette espèce, les racines de l'équation résultante, prises avec un signe contraire, donneront les seconds termes des facteurs binomes : les racines imaginaires produiront les facteurs trinomes ou de la forme $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$.

368. Reprenons la fraction $\frac{U}{V}$, et supposons que $x+a$ soit un des facteurs inégaux du dénominateur V, en sorte qu'on ait $V=(x+a)Q$; posons ensuite $\frac{U}{V}=\frac{A}{x+a}+\frac{P}{Q}$, P étant une fonction indéterminée de x, mais dans laquelle cette quantité n'entre point comme diviseur ; on aura $U=AQ+P(x+a)$; d'où on tirera $P=\frac{U-AQ}{x+a}$. Comme P est une fonction entière, par rapport à x, il faut que la quantité $U-AQ$, qui est aussi une fonction rationnelle et entière de x, soit divisible par $x+a$, ou, ce qui est la même chose, s'évanouisse lorsqu'on mettra au lieu de x, la valeur $-a$ que donne le facteur $x+a$ égalé à zéro : désignant donc par u et par q, ce que deviennent U et Q après cette substitution qui ne change rien à la valeur de l'indéterminée A, puisqu'elle est indépendante de x, on aura $u-Aq=0$, et par conséquent $A=\frac{u}{q}$.

Cette valeur exige qu'on connoisse la fonction Q, donnée par l'équation $V=(x+a)Q$, et on la trouvera toujours en divisant V par $x+a$; le Calcul différentiel y conduit aussi d'une manière fort simple, car en différentiant l'équation ci-dessus, on a $\frac{dV}{dx}=Q+(x+a)\frac{dQ}{dx}$; si on fait dans ce résultat $x+a=0$, et qu'on représente par v ce que devient alors $\frac{dV}{dx}$, on aura $v=q$; d'où $A=\frac{u}{v}$.

L'expression $A=\frac{u}{q}$ aura toujours une valeur finie ; car le numérateur et le dénominateur ne sauroient devenir nuls, puisque la

fraction proposée est réduite à sa plus simple expression et que par conséquent la fonction U ne peut contenir le facteur $x+a$ qui fait partie du dénominateur, et qui ne s'y trouvant qu'une fois, n'entre point non plus dans Q. En appliquant d'une manière convenable ce raisonnement aux différens cas que nous allons parcourir, on se convaincra que la décomposition d'une fraction rationnelle quelconque, dans les formes que nous avons indiquées, est toujours possible.

369. Voyons maintenant comment on peut trouver les numérateurs des fractions partielles qui répondent aux facteurs égaux. Dans ce cas on a $V=Q(x+a)^n$ et on doit supposer

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{(x+a)^n}+\frac{A_1}{(x+a)^{n-1}}+\frac{A_2}{(x+a)^{n-2}}\cdots+\frac{A^{n-1}}{x+a}+\frac{P}{Q},$$

en réduisant au même dénominateur, il viendra

$$U=Q[A+A_1(x+a)+A_2(x+a)^2\ldots+A_{n-1}(x+a)^{n-1}]+P(x+a)^n;$$

$$P=\frac{U-Q[A+A_1(x+a)+A_2(x+a)^2\ldots\ldots+A_{n-1}(x+a)^{n-1}]}{(x+a)^n};$$

et comme P doit être une fonction entière, il faudra que le numérateur de son expression soit divisible n fois de suite par $x+a$: ce numérateur s'évanouira donc lorsqu'on y mettra $-a$ au lieu de x. On voit d'abord qu'il se réduit dans ce cas à $U-QA$, mais pour que $U-QA$ soit divisible par $x+a$, il faut, en conservant les mêmes dénominations que dans le n°. précédent, qu'on ait $u-qA=0$ ou $A=\frac{u}{q}$.

Cette valeur changera la quantité $U-QA$ en $U-\frac{u}{q}Q$ qui se divisera par $x+a$; ainsi le numérateur de P après cette substitution, deviendra tout entier divisible par $x+a$, et on aura en effaçant en même tems ce facteur dans le dénominateur, et faisant pour abréger $U-\frac{u}{q}Q=U_1(x+a)$

$$p=\frac{U_1-Q[A_1+A_2(x+a)\ldots.+A_{n-1}(x+a)^{n-2}]}{(x+a)^{n-1}}.$$

Maintenant pour obtenir A_1; on fera $x+a=0$, et en désignant

par u_1, ce que devient U_1, par la substitution de $-a$ à la place de x, on aura $u_1 - qA_1 = 0$, ou $A_1 = \frac{u_1}{q}$.

Mettant ensuite au lieu de A_1 sa valeur, dans $U_1 - QA_1$, il en résultera la quantité $U_1 - \frac{u_1}{q} Q$ qui, s'évanouissant lorsque $x+a=0$, sera divisible par $x+a$; le numérateur deviendra donc encore divisible par $x+a$, et par conséquent P se réduira à

$$P = \frac{U_2 - Q[A_2 + A_3(x+a) \ldots + A_{n-1}(x+a)^{n-3}]}{(x+a)^{n-2}},$$

U_2 représentant le quotient de la division de $U_1 - \frac{u_1}{q} Q$ par $x+a$.

En continuant le même procédé et la même notation, on trouvera encore $u_2 - qA_2 = 0$, d'où $A = \frac{u_2}{q}$, et ainsi des autres.

C'est ici que l'application du Calcul différentiel est commode. En effet, le numérateur de la valeur de P devant être divisible par $(x+a)^n$, sera nécessairement de la forme $X(x+a)^n$, X étant une fonction entière de x, mais qui ne contient pas le facteur $x+a$; d'après la remarque du n°. 133, toutes ses différentielles jusqu'à celle de l'ordre $n-1$ inclusivement, s'évanouiront en même tems qu'elle, lorsqu'on supposera $x+a=0$.

Donnons à ce numérateur la forme suivante

$$Q\left\{\frac{U}{Q} - A - A_1(x+a) - A_2(x+a)^2 - A_3(x+a)^3 \ldots\ldots\right\}.$$

La fonction Q ne contenant point le facteur $x+a$, il est évident que c'est seulement la partie de cette expression, renfermée dans la parenthèse qui doit devenir divisible par $(x+a)^n$.

Nous trouverons pour les différentielles

$$d.\frac{U}{Q} - A_1 dx - 2A_2(x+a)\,dx - 3A_3(x+a)^2 dx \ldots\ldots,$$

$$d.^2\frac{U}{Q} - 2A_2 dx^2 - 2.3A_3(x+a)\,dx^2 \ldots\ldots]$$

$$d.^3\frac{U}{Q} - 2.3A_3 dx^3$$

etc,

Ces

Ces résultats devant s'évanouir lorsqu'on y fera $x+a=0$, conduiront aux équations suivantes

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{U}{Q}-A=0 \\ d.\dfrac{U}{Q}-A_1dx=0 \\ d^2.\dfrac{U}{Q}-2A_2dx^2=0 \\ d^3.\dfrac{U}{Q}-2.3A_3dx^3=0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} A=\dfrac{u}{q} \\ A_1=\dfrac{1}{1.dx}d.\dfrac{U}{Q} \\ A_2=\dfrac{1}{1.2.dx^2}d^2.\dfrac{U}{Q} \\ A_3=\dfrac{1}{1.2.3dx^3}d^3.\dfrac{U}{Q} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

pourvû qu'après les différentiations, on substitue $-a$ au lieu de x.

Le moyen le plus simple pour obtenir la valeur de Q dans ce cas, est de diviser V par $(x+a)^n$, cependant on peut y parvenir par la différentiation, comme dans le n°. précédent; car puisqu'on a $V=Q(x+a)^n$, en différentiant un nombre n de fois chacun des membres de cette équation, et faisant ensuite $x+a=0$, on trouvera $d^nV=1.2....nQdx^n$ (n°. 133), et par conséquent $Q=\dfrac{d^nV}{1.2....ndx^n}$.

On parviendra à l'expression des différentielles de Q dans l'hypothèse de $x+a=0$, en prenant successivement celles de l'ordre $n+1$, $n+2$, etc. de l'équation $V=Q(x+a)^n$; car il est aisé de voir, d'après la formule du n°. 107 que dans ce cas $d^{n+1}V=d^{n+1}.Q(x+a)^n$, par exemple, se réduira à $d^{n+1}V=1.2.3.....(n+1)dQ$. Il suit de là qu'on pourra exprimer les indéterminées A_1, A_2, A_3, etc. à l'aide des différentielles du numérateur U et de celles du dénominateur V, de la fraction proposée; dans ce procédé il seroit peut-être plus commode de différentier le numérateur de l'expression de P sous la forme où il se présente d'abord, ce qui donneroit, en supprimant les termes affectés de $x+a$, les équations

$$dU-AdQ-A_1Qdx=0$$
$$d^2U-Ad^2Q-2A_1dQdx-2A_2Qdx^2=0$$
$$d^3U-Ad^3Q-3A_1d^2Qdx-6A_2dQdx^2-6A_3Qdx^3=0$$
etc.

La première inconnue A sera déterminée d'ailleurs par l'équation $U-AQ=0$, dans laquelle, ainsi que dans les précédentes, après la différentiation, il ne faut pas oublier d'écrire $-a$ au lieu de x.

370. Proposons-nous maintenant de trouver le numérateur d'une fraction partielle de la forme $\frac{Ax+B}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}$.

Soit $$\frac{U}{V}=\frac{Ax+B}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}+\frac{P}{Q};$$

en réduisant le second membre au même dénominateur, on trouve $U=Q(Ax+B)+P(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)$, d'où on tire ensuite $P=\frac{U-Q(Ax+B)}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}$. Comme P doit toujours être une fonction entière par rapport à x, il faut que la quantité $U-Q(Ax+B)$, soit divisible par $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$; elle doit donc renfermer au nombre de ses facteurs, ceux de cette dernière, et s'évanouir par conséquent dans les mêmes circonstances. Mais les facteurs de $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, sont $x+\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $x+\alpha-\beta\sqrt{-1}$; si on les égale à zéro, on aura $x=-(\alpha+\beta\sqrt{-1})$, $x=-(\alpha-\beta\sqrt{-1})$: ces valeurs étant substituées successivement dans $U-Q(Ax+B)$, doivent faire évanouir cette quantité. Désignant donc par $u\pm u'\sqrt{-1}$, et $q\pm q'\sqrt{-1}$, ce que deviennent U et Q, après cette transformation, on aura

$$u\pm u'\sqrt{-1}-(q\pm q'\sqrt{-1})[-A(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})+B]=0.$$

Cette équation est double à cause du signe $\pm$ dont sont affectés plusieurs de ses termes, et elle est équivalente à celles qu'on formeroit, en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire; d'après cette considération on aura

$$u+q\alpha A-q'\beta A-qB=0,$$
$$u'+q\beta A+q'\alpha A-q'B=0,$$

équations qui donneront les valeurs de A et de B.

J'observerai que la substitution de $-(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})$ au lieu de x, dans la quantité $U-Q(Ax+B)$, peut s'effectuer très-aisément,

au moyen des propriétés des sinus et des cosinus ; car en faisant $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=r$, $\frac{\alpha}{r}=\cos\varphi$, $\frac{\beta}{r}=\sin\varphi$, on a

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})^m=r^m\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\sin\varphi)^m=r^m(\cos m\varphi\pm\sqrt{-1}\sin m\varphi).$$

On peut trouver Q comme dans le n°. 368. En effet, si on différentie l'équation $Q(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)=V$, et qu'on fasse ensuite $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$, il viendra $Q(2xdx+2\alpha dx)=dV$, ou $Q=\frac{dV}{2xdx+2\alpha dx}$; substituant au lieu de x ses deux valeurs $-(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})$, représentant par $\nu\pm\nu'\sqrt{-1}$, ce que devient alors $\frac{dV}{dx}$, et écrivant $q\pm q'\sqrt{-1}$ pour Q, il viendra

$$q\pm q'\sqrt{-1}=\frac{\nu\pm\nu'\sqrt{-1}}{\mp 2\beta\sqrt{-1}};$$

multipliant les deux termes de la fraction du second membre par $\sqrt{-1}$, et égalant ensuite les parties réelles et les parties imaginaires de chaque membre, on aura $q=-\frac{\nu'}{2\beta}$, $q'=\frac{\nu}{2\beta}$.

371. Si le facteur $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, se trouvoit plusieurs fois dans le dénominateur V, et qu'on eût $V=Q(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n$, on prendroit dans ce cas (n°. 367),

$$\frac{U}{V}=\frac{Ax+B}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n}+\frac{A_1x+B_1}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{n-1}}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{n-2}}+\ldots+\frac{P}{Q};$$

réduisant au même dénominateur, et tirant la valeur de P, on trouvera

$$P=\frac{\left\{\begin{array}{c}U-Q[Ax+B+(A_1x+B_1)(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)\\+(A_2x+B_2)(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^2+\ldots.]\end{array}\right\}}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n}.$$

En raisonnant dans le cas actuel comme dans les précédens ; on en conclura que le numérateur de cette expression doit s'évanouir par la substitution de $-(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})$, et gardant les mêmes

dénominations que ci-dessus, on auroit après cette opération

$$u\pm u'\sqrt{-1}-(q\pm q'\sqrt{-1})[-A(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})+B]=0,$$

ce qui donneroit pour déterminer A et B, les mêmes équations que dans le n°. précédent. Ayant trouvé les valeurs de ces quantités, on les substitueroit dans le numérateur de P, et les termes $U-Q(Ax+B)$ devenant divisibles par $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, l'expression entière le deviendroit aussi. Nommant donc U_1, le quotient de $U-Q(Ax+B)$ par $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, on auroit

$$P=\frac{U_1-Q[A_1x+B_1+(A_2x+B_2)(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)\ldots.]}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{n-1}};$$

en remettant dans ce nouveau numérateur pour x, les valeurs que donne l'équation $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$, et égalant le résultat à zéro, on déterminera A_1 et B_1, comme on a déterminé plus haut A et B, et on continuera d'opérer de la même manière, pour parvenir aux valeurs des lettres A_2, B_2, A_3, B_3....

Ce cas est parfaitement analogue à celui qu'on a traité dans le n°. 369; et le Calcul différentiel s'applique de la même manière, à l'un et à l'autre. En effet, puisque Q ne contient point le facteur $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, si on divise le numérateur de P par la fonction Q, le résultat que je représenterai par π, devra être de la forme $\pi=X(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n$, et s'évanouir par conséquent ainsi que ses différentielles, depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, lorsqu'on fera $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$; dans cette hypothèse, on aura les équations

$$\pi=0,\quad d\pi=0,\quad d^2\pi=0\quad\ldots d^{n-1}\pi=0,$$

chacune desquelles deviendra double, lorsqu'on mettra pour x les valeurs dont il est susceptible en vertu de l'équation $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$: en égalant séparément à zéro, la partie réelle et la partie imaginaire, on obtiendra un nombre suffisant d'équations, pour déterminer A, B, A_1, B_1, etc.

Il faut encore remarquer que de $V=Q(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n$, on tirera $Q=\frac{d^nV}{d^n.(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n}$, lorsqu'on supposera $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$.

On trouvera dQ, d^2Q, etc. dans la même hypothèse, en prenant les différentielles des ordres $n+1$, $n+2$ etc. de l'équation

$$V=Q(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n,$$

et supprimant ensuite les termes que cette hypothèse rend nuls.

372. Je vais donner maintenant quelques applications de ce qui précède. Soit la fraction $\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$; les facteurs de son dénominateur sont faciles à découvrir; car il peut se mettre sous la forme $x^3(x^5+x^4-x-1)=x^3(x+1)(x^4-1)$. Le facteur x^4-1, se décompose en x^2-1 et x^2+1, ou $x-1$, $x+1$ et x^2+1: on a donc

$$x^8+x^7-x^6-x^5=x^3(x-1)(x+1)^2(x^2+1),$$

et par conséquent la fraction proposée est décomposable comme il suit

$$\frac{Adx}{x-1}+\frac{Bdx}{(x+1)^2}+\frac{Cdx}{x+1}+\frac{Ddx}{x^3}+\frac{Edx}{x^2}+\frac{Fdx}{x}+\frac{(Gx+H)dx}{1+x^2}.$$

En réduisant au même dénominateur, et comparant le résultat avec $\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$, on détermineroit les numérateurs inconnus; mais je vais faire usage des procédés indiqués précédemment.

Considérant d'abord le facteur $x-1$, qui étant égalé à zéro, donne $x=1$, les quantités $U=1$, et $\frac{dV}{dx}=\frac{d.(x^8+x^7-x^4-x^3)}{dx}$, deviennent 1 et 8; on a donc (n°. 368) $A=\frac{1}{8}$. Donc la première fraction partielle est $\frac{1}{8}.\frac{1}{x-1}$.

Pour avoir celles qui ont pour dénominateur $(x+1)^2$, je me sers de la règle du n°. 369, et ayant trouvé immédiatement que $Q=\frac{x^8+x^7-x^4-x^3}{(x+1)^2}=x^6-x^5+x^4-x^3$, j'ai, en faisant $x+1=0$, $x=-1$, d'où $q=4$, et $\frac{u}{q}=\frac{1}{4}$, ainsi la seconde fraction partielle est $\frac{1}{4}.(x+1)^2$.

Mettant dans l'expression U_1, du n°. cité, au lieu de A sa valeur $\frac{1}{4}$, j'ai

$$U_1=\frac{U-AQ}{x+1}=\frac{4-x^6+x^5-x^4+x^3}{4(x+1)}=\frac{-x^5+2x^4-3x^3+4x^2-4x+4}{4}$$

d'où il vient $\frac{u_1}{q}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$; on a donc pour la troisième fraction partielle $\frac{9}{8}\frac{1}{x+1}$.

On auroit pu déduire ce résultat de la formule $A_1=\frac{1}{dx}d.\frac{U}{Q}$; car on a $\frac{U}{Q}=\frac{1}{x^6-x^5+x^4-x^3}$ et $\frac{1}{dx}d.\frac{U}{Q}=-\frac{6x^5-5x^4+4x^3-3x^2}{(x^6-x^5+x^4-x^3)^2}$, expression qui se réduit à $\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$, lorsqu'on y fait $x=-1$.

On trouvera tout de suite les fractions partielles qui ont respectivement pour dénominateurs x^3, x^2, x, par les formules $A=\frac{U}{Q}$, $A_1=\frac{1}{dx}d.\frac{U}{Q}$, $A_2=\frac{1}{1.2dx^2}d^2.\frac{U}{Q}$, en observant que dans ce cas $Q=x^5+x^4-x-1$, et que les seconds membres des équations ci-dessus se réduisent à -1, $+1$ et -1, lorsqu'on fait $x=0$; on a donc $-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$.

Il ne reste plus à trouver que la fraction partielle qui a pour dénominateur $\frac{1}{x^2+1}$; on pourroit la conclure en retranchant de la proposée, toutes les précédentes; mais nous allons y parvenir directement par les formules du n°. 370. On a d'abord $Q=x^6+x^5-x^4-x^3$; puis le facteur x^2+1, étant égalé à zéro, donne $x=\pm\sqrt{-1}$; d'où on tire $q=\pm q'\sqrt{-1}=-2\pm 2\sqrt{-1}$, $u=1$, et $u'=0$; les équations qui déterminent A et B, deviennent $1+2A+2B=0$, $2A-2B=0$, et on trouve par conséquent $A=B=-\frac{1}{4}$.

Voilà donc la fraction proposée $\frac{dx}{x^6+x^5-x^4-x^3}$ décomposée dans les suivantes

$$\frac{1}{8}\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{9}{8}\frac{dx}{x+1}-\frac{dx}{x^3}+\frac{dx}{x^2}-\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\frac{(x+1)dx}{x^2+1}.$$

L'intégration de chacune de celles-ci ne présente aucune difficulté, et on obtiendra pour le résultat

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{8}l(x-1)-\tfrac{1}{4}\frac{1}{x+1}+\tfrac{9}{8}l(x+1)+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-lx\\ -\tfrac{1}{8}l(x^2+1)-\tfrac{1}{4}\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x)+const.\end{aligned}\right\}.$$

La réunion de tous les termes algébriques produira la fraction $\frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)}$, et celle des termes logarithmiques donnera

$$\tfrac{1}{8}l(x-1)+\tfrac{1}{6}l(x+1)+l(x+1)-\tfrac{1}{8}l(x^2+1)-lx=\tfrac{1}{8}l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+l\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

On aura donc

$$\int\frac{dx}{x^6+x^5-x^4-x^3}=\frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)}+\frac{1}{8}l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+l\left(\frac{x+1}{x}\right)+\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x)+const.$$

373. Proposons-nous encore les différentielles $\frac{x^m dx}{fx^n+g}$ et $\frac{x^m dx}{fx^n-g}$ et donnons-leur la forme $\frac{1}{g}\frac{x^m dx}{x^n\pm\frac{g}{f}}$; faisons ensuite $\frac{g}{f}=a^n$ et il viendra $\frac{1}{g}\frac{x^m dx}{x^n\pm a^n}$.

Nous avons donné dans le n°. 167, les facteurs des expressions $x^n\pm a^n$, il ne s'agira donc plus que d'appliquer le procédé du n°. 370, à la décomposition de la fraction $\frac{x^m}{x^n\pm a^n}$, dans ses fractions partielles. Pour abréger, nous représenterons l'un des facteurs du second degré de l'équation $x^n\pm a^n$ par $x^2-2ax\cos\varphi+a^2$, ce qui donnera $x=a(\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\sin\varphi)$; on aura donc

$$u\pm u'\sqrt{-1}=a^m(\cos m\varphi\pm\sqrt{-1}\sin m\varphi)$$
$$v\pm v'\sqrt{-1}=na^{n-1}[\cos(n-1)\varphi\pm\sqrt{-1}\sin(n-1)\varphi];$$

avec ces valeurs on trouvera sans peine

$$A=\frac{2}{na^{n-m-1}}\cos(n-m-1)\varphi,\quad B=-\frac{2a}{na^{n-m-1}}\cos(n-m)\varphi,$$

en observant de réduire les produits de sinus et de cosinus, au moyen des expressions connues de $\sin(x\pm z)$ et de $\cos(x\pm z)$.

La fraction partielle correspondante au facteur $x^2 - 2a\cos\varphi + a^2$, aura donc pour expression

$$\frac{2}{na^{n-m-1}} \cdot \frac{x\cos(n-m-1)\varphi - a\cos(n-m)\varphi}{x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2},$$

L'arc φ sera toujours de la forme $\frac{(2i+1)\pi}{n}$, si a^n est affecté du signe, + et de la forme $\frac{2i\pi}{n}$, s'il a le signe —. Dans le premier cas, il n'y aura, si n est impair, qu'un nombre $\frac{n-1}{2}$ de fractions semblables à la précédente, mais on en trouvera de plus une ayant pour dénominateur $x+a$, et par conséquent pour numérateur $\frac{(-a)^m}{n-a^{n-1}}$ (n°. 368). Dans le second cas, si n est pair, on aura $\frac{n-2}{2}$, fractions de la première espèce, et deux dont les dénominateurs seront $x-a$ et $x+a$, et les numérateurs $\frac{a^m}{na^{n-1}}$, $\frac{(-a)^m}{-na^{n-1}}$; enfin, dans le même cas, si n est impair, on trouvera $\frac{n-1}{2}$ fractions dont les dénominateurs seront du second degré, et de plus la fraction $\frac{a^m}{na^{n-1}} \cdot \frac{1}{x-a}$.

D'après ce qui précède, l'intégration de $\int \frac{x^m dx}{x^n \pm a^n}$ n'a plus aucune difficulté; les fractions partielles de la forme

$$\frac{2}{na^{n-m-1}} \cdot \frac{[x\cos(n-m-1)\varphi - a\cos(n-m)\varphi]\,dx}{x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2},$$

s'intégreront en faisant $x - a\cos\varphi = z$, et en les comparant à la formule du n°. 366, qui donne sur le champ

$$\frac{2}{na^{n-m-1}}\left\{\cos(n-m-1)\varphi \, l\sqrt{x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2} + \frac{\cos\varphi\cos(n-m-1)\varphi - \cos(n-m)\varphi}{\sin\varphi} \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x - a\cos\varphi}{a\sin\varphi}\right)\right\};$$

mais il est facile de voir que

$$\cos\varphi\cos(n-m-1)\varphi = \cos(n-m)\varphi + \sin\varphi\sin(n-m-1)\varphi;$$

substituant

substituant cette valeur dans le second terme du résultat ci-dessus, on aura

$$\frac{2}{na^{n-m-1}}\left\{\cos(n-m-1)\varphi\, l\sqrt{x^2-2ax\cos\varphi+a^2}+\sin(n-m-1)\varphi\times\right.$$
$$\left.\times\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x-a\cos\varphi}{a\sin\varphi}\right)\right\}.$$

On mettra ensuite dans cette formule au lieu de φ, les arcs $\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{5\pi}{n}$, etc. si le terme a^n est positif, et les arcs $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$, etc. s'il est négatif (n°. 167), en ayant soin de s'arrêter au multiple de π qui précède immédiatement $n\pi$; mais si n est impair, il faudra encore, pour avoir l'intégrale totale de la différentielle proposée, ajouter à la somme de tous les résultats obtenus, l'intégrale de $\frac{(-a)^m}{na^{n-1}}.\frac{dx}{x+a}$, dans le premier cas, ou celle de $\frac{a^m}{na^{n-1}}.\frac{dx}{x-a}$, dans le second: enfin quand n sera pair, et qu'en même tems a^n sera négatif, le dénominateur x^n-a^n ayant alors deux facteurs réels $x+a$ et $x-a$, il faudra ajouter à la fois les deux intégrales dont on vient de parler.

374. Ces détails suffisent pour faire trouver tous les termes dont l'intégrale $\int\frac{x^m dx}{x^n\pm a^n}$ doit être composée, j'y ajouterai néanmoins encore quelques remarques. Je ferai voir d'abord que l'intégrale de la fraction partielle qui a pour dénominateur le facteur rationnel du premier degré, se trouve comprise dans la formule générale donnée plus haut. En effet lorsque n est impair, et que a^n est positif, en poussant la suite des arcs $\frac{\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\frac{5\pi}{n}$, etc. jusqu'à $\frac{n\pi}{n}$ ou π, on aura alors $\varphi=\pi$, $\cos\varphi=-1$ et $\sin\varphi=0$.

Faisant ces substitutions dans l'expression dont il s'agit, le terme $\cos(n-m-1)\varphi\, l\sqrt{x^2-2ax\cos\varphi+a^2}$ devient $\cos(n-m-1)\pi\, l(x+a)$ ou $=\pm l.\,x+a$, selon que $n-m-1$

est un nombre pair ou impair. Le dernier terme

$\sin(n-m-1)\varphi \times \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x-a\cos\varphi}{a\sin\varphi}\right)$ devient constant;

car la quantité $\frac{x-a\cos\varphi}{a\sin\varphi}$ est alors $\frac{x-a}{0}$, ou infinie; ainsi elle répond à un arc de 90° ou à $\frac{\pi}{4}$; et comme à la suite de l'intégrale totale, on doit ajouter une constante arbitraire, on y réunira l'arc dont on vient de parler; de cette manière on aura seulement $\pm\frac{2}{na^{n-m-1}}\,l(x+a)$: mais il ne faudra prendre que la moitié de ce résultat pour s'accorder avec ce qu'on a déjà vu.

Si a^n est négatif, l'arc φ étant de la forme $\frac{2i\pi}{n}$, on pourra faire $i=0$, il en résultera $\cos\varphi=1$, $\sin\varphi=0$, et en raisonnant comme tout-à-l'heure, on trouvera $\frac{2}{na^{n-m-1}}\,l(x-a)$, dont il ne faudra prendre que la moitié. Enfin lorsque, n étant pair, a^n sera négatif, on fera $i=0$ et $i=\frac{n}{2}$, et on aura dans la première hypothèse $\cos\varphi=1$, $\sin\varphi=0$, et dans la seconde, $\cos\varphi=-1$, et $\sin\varphi=0$, et on tirera de là les deux résultats que nous venons d'obtenir.

On peut donner au terme $\sin(n-m-1)\varphi.\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x-a\cos\varphi}{a\sin\varphi}\right)$, une forme telle qu'il devienne nul, lorsque $\sin\varphi=0$. Pour cela il suffit d'y ajouter l'arc constant, dont la tangente est $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, changement qui ne porte que sur la constante arbitraire; mais on sait que $\text{tang}(A+B)=\frac{\text{tang}\,A+\text{tang}\,B}{1-\text{tang}\,A\,\text{tang}\,B}$: la somme des deux arcs précédens, aura donc pour tangente la quantité $\frac{x\sin\varphi}{a-x\cos\varphi}$. Par ce moyen le terme que nous considérons, deviendra $\sin(n-m-1)\varphi.\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x\sin\varphi}{a-x\cos\varphi}\right)$, et s'évanouira en même tems que $\sin\varphi$.

375. En donnant successivement à φ les valeurs $\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{5\pi}{n}$, etc. l'arc $(n-m-1)\varphi$ deviendra

$$\pi-\frac{(m+1)\pi}{n},\quad 3\pi-\frac{3(m+1)\pi}{n},\quad 5\pi-\frac{5(m+1)\pi}{n},\text{ etc.}$$

son cosinus et son sinus se changeront successivement en

$$-\cos\frac{(m+1)\pi}{n},\quad -\cos\frac{3(m+1)\pi}{n},\quad -\cos\frac{5(m+1)\pi}{n},\text{etc.}$$

$$\sin\frac{(m+1)\pi}{n},\quad \sin\frac{3(m+1)\pi}{n},\quad \sin\frac{5(m+1)\pi}{n},\text{etc.;}$$

si on fait de plus $a=1$, on aura pour $\int\frac{x^m dx}{x^n+1}$, cette suite de termes

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{(m+1)\pi}{n}\,l.\sqrt{1-2x\cos\frac{(m+1)\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{(m+1)\pi}{n}\times$$

$$\times\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{1-x\cos\frac{\pi}{n}}\right)$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{3(m+1)\pi}{n}\,l.\sqrt{1-2x\cos\frac{3(m+1)\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{3(m+1)\pi}{n}\times$$

$$\times\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1-x\cos\frac{3\pi}{n}}\right)$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{5(m+1)\pi}{n}\,l.\sqrt{1-2x\cos\frac{5(m+1)\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{5(m+1)\pi}{n}\times$$

$$\times\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x\sin\frac{5\pi}{n}}{1-x\cos\frac{5\pi}{n}}\right),$$

etc.

qu'il faudra pousser jusqu'au multiple qui précède $n\pi$, et on aura ainsi l'intégrale totale, si n est pair ; mais lorsqu'il sera impair, on ajoutera le terme $\pm\frac{1}{n}l(1+x)$, le signe + ayant lieu, si le nombre $m+1$ est impair, et le signe —, si ce nombre est pair.

Faisant successivement φ égal à $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$, etc., au lieu de $\cos(n-m-1)\varphi$ et $\sin(n-m-1)\varphi$, on aura

$$\cos\frac{2(m+1)\pi}{n}, \quad \cos\frac{4(m+1)\pi}{n}, \quad \cos\frac{6(m+1)\pi}{n}, \text{ etc.}$$

$$-\sin\frac{2(m+1)\pi}{n}, \quad -\sin\frac{4(m+1)\pi}{n}, \quad -\sin\frac{6(m+1)\pi}{n}, \text{ etc.}$$

et il viendra $\int\frac{x^m dx}{x^n-1} =$

$$\frac{2}{n}\cos\frac{2(m+1)\pi}{n}\,l.\sqrt{1-2x\cos\frac{2(m+1)\pi}{n}+x^2}-\frac{2}{n}\sin\frac{2(m+1)\pi}{n}\times$$

$$\times\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x\sin\frac{2\pi}{n}}{1-x\cos\frac{2\pi}{n}}\right)$$

$$+\frac{2}{n}\cos\frac{4(m+1)\pi}{n}\,l.\sqrt{1-2x\cos\frac{4(m+1)\pi}{n}+x^2}-\frac{2}{n}\sin\frac{4(m+1)\pi}{n}\times$$

$$\times\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x\sin\frac{4\pi}{n}}{1-x\cos\frac{4\pi}{n}}\right)$$

$$+\frac{2}{n}\cos\frac{6(m+1)\pi}{n}\,l.\sqrt{1-2x\cos\frac{6(m+1)\pi}{n}+x^2}-\frac{2}{n}\sin\frac{6(m+1)\pi}{n}\times$$

$$\times\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x\sin\frac{6\pi}{n}}{1-x\cos\frac{6\pi}{n}}\right),$$

etc.

cette suite étant continuée jusqu'au multiple immédiatement inférieur à $n\pi$; si le nombre n est impair, on ajoutera le terme $+\frac{1}{n}l(x-1)$, et s'il est pair, les deux termes

$+\frac{1}{n}l(x-1)\pm\frac{1}{n}l(x+1)$, le signe de ce dernier dépendant comme ci-dessus, de la forme du nombre $m+1$: bien entendu aussi, qu'on ajoutera, dans l'un et l'autre cas, une constante arbitraire.

Il est bon d'observer qu'on pourra délivrer ces formules de sinus et de cosinus, dans tous les cas où l'équation $x^n \pm 1 = 0$, sera résoluble indépendamment de la division du cercle. Je ferai encore remarquer que la formule $\int \frac{\zeta^m d\zeta}{f'\zeta^n \pm g}$, se ramène immédiatement à $L\int \frac{x^m dx}{x^n \pm 1}$, L étant un coefficient constant, en faisant $\left(\frac{g}{f'}\right)^n \zeta = x$.

On traiteroit d'une manière semblable, la différentielle $\frac{x^m dx}{x^{2n} - 2a^n x^n \cos\psi + a^{2n}}$, au moyen des facteurs de son dénominateur, que j'ai donnés n°. 172, et je laisse au lecteur le soin d'effectuer les calculs.

De l'intégration des fonctions irrationnelles.

376. Les fonctions irrationnelles doivent être regardées comme intégrées, toutes les fois que par quelque transformation on les a rendues rationnelles, ou du moins lorsqu'on les a ramenées à une suite de monomes irrationnels; car alors on peut y appliquer immédiatement les règles précédentes.

Proposons-nous par exemple $\frac{(1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; il est évident qu'en faisant $x=\zeta^6$, toutes les extractions indiquées s'effectuent et on a $\frac{6\zeta^5 d\zeta(1+\zeta^3-\zeta^1)}{1+\zeta^2}$, divisant par $1+\zeta^2$, il vient

$$-6\left[\zeta^7 d\zeta - \zeta^6 d\zeta - \zeta^5 d\zeta + \zeta^4 d\zeta - \zeta^3 d\zeta + d\zeta - \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}\right];$$

dont l'intégrale est

$$-6\left[\frac{\zeta^8}{8} - \frac{\zeta^7}{7} - \frac{\zeta^6}{6} + \frac{\zeta^5}{5} - \frac{\zeta^3}{3} + \zeta - \text{arc}\,(\text{tang}=\zeta)\right] + \textit{const.}$$

et remettant pour ζ la valeur $\sqrt[6]{x}$, on aura

$$-\tfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + x - \tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} - 6\text{arc}(\text{tang}=\sqrt[6]{x}) + \textit{const.}$$

377. La première espèce de fonctions irrationnelles dont nous allons nous occuper, est celle qui ne renferme que le radical $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, et qui ne sauroit avoir que l'une ou l'autre des formes $X dx\sqrt{A+Bx+Cx^2}$ et $\frac{X dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, X étant une

fonction rationnelle de x. Nous ferons d'abord remarquer que l'une de ces formes rentre dans l'autre; car on peut écrire la première ainsi qu'il suit :

$$X\,dx\,\frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2}\times\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=\frac{X(A+Bx+Cx^2)\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

et le numérateur du résultat est alors une fonction rationnelle.

Avant d'indiquer les moyens de rendre rationnelle, par rapport à x, l'expression $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, nous mettrons la quantité $A+Bx+Cx^2$, sous la forme $C\left(\frac{A}{C}+\frac{B}{C}x+x^2\right)$, et faisant, pour abréger $C=\gamma^2$, $\frac{A}{C}=\alpha$, $\frac{B}{C}=\beta$, il en résultera $\sqrt{A+Bx+Cx^2}=\gamma\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}$.

Cela posé, nous ferons $\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}=x+\zeta$; en élevant au quarré, il viendra $\alpha+\beta x=2x\zeta+\zeta^2$, ce qui donnera $x=\frac{\alpha-\zeta^2}{2\zeta-\beta}$, d'où

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2}=\gamma(x+\zeta)=\gamma\left(\frac{\alpha-\beta\zeta+\zeta^2}{2\zeta-\beta}\right).$$

$$dx=-\frac{2(\alpha-\beta\zeta+\zeta^2)\,\zeta d\zeta}{(2\zeta-\beta)^2}.$$

Par le moyen de ces valeurs, on changera la différentielle $\frac{X\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, en une autre de la forme $Z\,d\zeta$, Z étant une fonction rationnelle de ζ, et réelle tant que C sera positif; mais si C étoit négatif, γ deviendroit imaginaire et la transformée pourroit le devenir aussi.

Dans ce cas, on auroit $\sqrt{A+Bx-Cx^2}$, et faisant $C=\gamma^2$, $\frac{A}{C}=\alpha$, $\frac{B}{C}=\beta$, il viendroit $\gamma\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}$. La quantité $x^2-\beta x-\alpha$, peut toujours se décomposer en facteurs réels du premier degré; représentons-les par $x-a$ et $x-a'$: il est évident que $\alpha+\beta x-x^2=-(x^2-\beta x-\alpha)=(x-a)(a'-x)$. Posons ensuite $\sqrt{(x-a)(a'-x)}=(x-a)\zeta$; en élevant au quarré les deux membres de cette équation, elle deviendra divisible par $x-a$,

et nous aurons $a'-x=(x-a)z^2$, d'où nous tirerons

$$x=\frac{az^2+a'}{z^2+1},\quad (x-a)z=\frac{(a'-a)z}{z^2+1},\quad dx=\frac{2(a-a')z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

valeurs qui rendront encore rationnelle la différentielle proposée.

378. Prenons d'abord pour exemple la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$;

la première des transformations précédentes donnera $\frac{-2z\,dz}{\gamma(2z-\beta)}$,

dont l'intégrale est $-\frac{1}{\gamma}l(2z-\beta)+const.$ remettant pour z sa valeur $-x+\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}$ et pour α, β et γ les quantités qu'ils représentent, il viendra

$$-\frac{1}{\sqrt{C}}l\left[\frac{1}{\sqrt{C}}\left(-\frac{B}{\sqrt{C}}-2x\sqrt{C}+2\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right)\right]+const.$$

résultat auquel on peut donner la forme

$$-\frac{1}{\sqrt{C}}l\left[-\frac{B}{2\sqrt{C}}-x\sqrt{C}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right]+l\frac{2}{\sqrt{C}}+const.$$

En réunissant les termes constans et en observant que le radical $\sqrt{C}$ est susceptible du signe $\pm$, on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{C}}l\left[+\frac{B}{2\sqrt{C}}+x\sqrt{C}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right]+const.$$

379. Soit pour second exemple $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}}$; en faisant usage de la dernière transformation du n°. 377, on aura $\frac{2dz}{\gamma(z^2+1)}$, dont l'intégrale est $\frac{2}{\gamma}$ arc $(\text{tang}=z)+const.$ Substituant au lieu de z sa valeur $\frac{\sqrt{a'-x}}{\sqrt{x-a}}$, tirée de l'équation $a'-x=(x-a)z^2$, et mettant $\sqrt{C}$ pour γ, on obtiendra

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}}=-\frac{2}{\sqrt{C}}\cdot\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{\sqrt{a'-x}}{\sqrt{x-a}}\right)+const.$$

a et a' étant les racines de l'équation $x^2-\frac{B}{C}x-\frac{A}{C}=0$.

Supposons qu'on ait $A = C = 1$, et $B = 0$; la différentielle proposée devient dans ce cas particulier $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et la formule précédente donne pour son intégrale

$-2 \cdot \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right) + const.$; car a et a' étant alors les racines de $x^2 - 1 = 0$, il faut prendre $a = -1$ et $a' = 1$, pour ne pas tomber dans l'imaginaire. Je vais montrer que ce résultat revient à l'arc dont le sinus $= x$, et dont on sait que $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, exprime la différentielle (n°. 23); pour cela je rappellerai que d'après les formules trigonométriques $\text{tang } 2A = \frac{2\,\text{tang } A}{1 - \text{tang } A^2}$, d'où il suit que l'arc double de celui qui est indiqué dans la formule précédente, a pour tangente $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, et que par conséquent, il est le complément de l'arc, dont $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ seroit la tangente et x le sinus. Nommant donc s ce dernier, on aura $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = s - \frac{\pi}{2} + const.$; comprenant l'arc $-\frac{\pi}{2}$ dans la constante arbitraire, il viendra $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = s + const.$

J'observerai qu'on peut ramener immédiatement la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{A + Bx - Cx^2}} = -\frac{dx}{\gamma\sqrt{\alpha + \beta x - x^2}}$, à celle d'un arc de cercle; car en faisant d'abord $x - \frac{\beta}{2} = z$, on aura $\frac{dz}{\gamma\sqrt{\alpha + \frac{1}{4}\beta^2 - z^2}}$; posant ensuite $\alpha + \frac{1}{4}\beta^2 = g^2$ et $z = gu$, on trouvera $\frac{du}{\gamma\sqrt{1-u^2}}$, dont l'intégrale est $\gamma \cdot \text{arc}\,(\sin = u) + const.$

Nous ne quitterons point ce sujet sans montrer comment l'intégration

tégration conduit aux expressions imaginaires du sinus et du cosinus données dans le n°. 38 de l'Introduction. On sait, indépendamment des séries, que quand $x = \sin s$, on a $dx = ds \cos s$ (n°. 93), et comme alors $\cos s = \sqrt{1-x^2}$, il en résulte $ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; en comparant cette formule avec $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, on trouve $A=1$, $B=0$, $C=-1$, et l'intégrale générale devient

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}) + const.$$

on en conclura donc $s = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(\cos s + \sqrt{-1} \sin s) + const.$

Mais lorsqu'on suppose $s=0$, on a en même tems $\sin s = 0$, $\cos s = 1$ et $l1 = 0$; il résulte de là, $0 = const.$ et l'équation ci-dessus donne $\pm s\sqrt{-1} = l(\cos s \pm \sqrt{-1} \sin s)$, puisque le radical $\sqrt{-1}$ emporte avec lui le double signe $\pm$.

380. C'est en général du nombre de termes compris sous le radical, que dépend la complication des différentielles irrationnelles, et la difficulté de les intégrer; pour nous occuper d'abord des cas les plus simples, nous traiterons premièrement celles dans lesquelles la quantité irrationnelle n'a que deux termes.

Soit la différentielle $Xdx\,(a+bx)^{\frac{m}{n}}$, X étant une fonction rationnelle quelconque de x; on fera $(a+bx)^{\frac{1}{n}} = z$, et on aura $x = \frac{z^n - a}{b}$, $dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b}$. En y substituant ces valeurs, la fonction X se changera dans une fonction rationnelle de z, que nous désignerons par Z; la différentielle proposée deviendra $\frac{n}{b} Z z^{m+n-1} dz$, et s'intégrera par les méthodes relatives aux fonctions rationnelles.

Il faut observer que cette transformation conduit en général à intégrer une différentielle $V dx$, V étant composé comme on voudra, mais cependant d'une manière rationnelle, des quantités x et $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$. En effet, les substitutions indiquées ci-dessus chan-

geront V en une fonction rationnelle de z, et on aura à intégrer $\frac{n}{b} V z^{n-1} dz$.

Enfin, si on avoit à intégrer

$$f[x, (a+bx)^{\frac{m}{n}}, \quad (a+bx)^{\frac{p}{q}}, \quad (a+bx)^{\frac{r}{s}} \text{ etc. }] dx;$$

f désignant une fonction rationnelle quelconque des quantités comprises dans la grande parenthèse, on la rendroit rationnelle par rapport à z, en faisant $a+bx = z^{nqs\ldots}$. Pour fixer les idées, ne supposons que trois irrationnelles; il viendra

$$x = \frac{z^{nqs} - a}{b}, \quad dx = \frac{nqs z^{nqs-1} dz}{b};$$

et la différentielle proposée se changera en

$$\int \left[\frac{z^{nqs} - a}{b}, \quad z^{mqs}, \quad z^{npr}, \quad z^{nqr}\right] \cdot \frac{nqs z^{nqs-1} dz}{b},$$

résultat qui, par l'hypothèse, est rationnel par rapport à z.

Prenons pour exemple la différentielle

$$\frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}} = \frac{x dx}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}}.$$

d'après la formule ci-dessus il faudra faire $1+x = z^{3\cdot 2} = z^6$, et il viendra $\frac{-6z^3 dz(1-z^6)}{1-z} = -6dz(z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8)$; en intégrant on trouvera $-(\frac{6}{7}z^7 + \frac{6}{5}z^5 + z^6 + \frac{6}{7}z^7 + \frac{3}{4}z^8 + \frac{2}{3}z^9) + const$, remettant ensuite pour z sa valeur $\sqrt[6]{1+x}$, on aura l'intégrale demandée.

381. Passons à un cas plus compliqué; soit à intégrer $X dx \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}}$: nous ferons $\frac{a+bx}{a'+b'x} = z^n$, ce qui donnera $\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}} = z^m$, et on aura, en vertu de la première équation,

$$x = \frac{a - a'z^n}{b'z^n - b}, \qquad dx = \frac{n(ba' - ab')z^{n-1}dz}{(b'z^n - b)^2}.$$

En mettant au lieu de x et de dx ces valeurs, la différentielle proposée prendra la forme $\frac{n(ba' - ab')Zz^{m+n-1}dz}{(b'z^n - b)^2}$, Z étant une fraction rationnelle de Z.

Dans le cas actuel, comme dans le précédent, la même trans-

formation rendroit rationnelle, par rapport à z, toute différentielle qui le seroit par rapport aux quantités x et $\frac{a+bx}{a'+b'x}$.

Enfin si on avoit

$$f\left[x,\ \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}},\ \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{p}{q}},\ \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx,$$

f désignant une fonction rationnelle des quantités indiquées, on la rendroit rationnelle par rapport à z, en posant $\frac{a+bx}{a'+b'x}=z^{nqs}$.

382. Le succès de la transformation dans ce dernier exemple est dû à ce que les irrationnalités ne portent que sur la même quantité; il n'auroit pas été le même si l'on s'étoit proposé d'intégrer $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$; mais alors, en multipliant les deux termes de cette fraction par $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$, le dénominateur devient rationnel, et le résultat $\frac{dx\sqrt{1+x^2}+dx\sqrt{1-x^2}}{2x^2}$ se partage en deux parties $\frac{dx\sqrt{1+x^2}}{2x^2}$ et $\frac{dx\sqrt{1-x^2}}{2x^2}$, dont chacune peut devenir rationnelle par une substitution particulière. Une des plus commodes est de faire pour la première $\sqrt{1+x^2}=zx$, et pour la seconde $\sqrt{1-x^2}=ux$; on trouve alors $x=\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ et $x=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$, et il vient à intégrer $\frac{-z^2dz}{2(z^2-1)}$, $\frac{-u^2du}{2(1+u^2)}$.

J'observerai d'ailleurs que les différentielles $\frac{dx\sqrt{1+x^2}}{2x^2}$ et $\frac{dx\sqrt{1-x^2}}{2x^2}$ se rapportent à celle qui a été traitée dans les nos 377 et suiv. On trouveroit après les opérations et les réductions convenables

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{2x}+\tfrac{1}{2}l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+const.$$

383. Ce que nous venons de pratiquer sur un exemple particulier, s'étend à un très-grand nombre de cas, et repose sur cette remarque, qui doit avoir été faite par ceux qui connoissent à fond la théorie des équations; c'est qu'il existe un facteur par lequel, en multipliant une quantité irrationnelle, on peut la rendre rationnelle. En effet, une expression irrationnelle peut toujours être regardée comme la racine d'une équation algébrique qu'on obtiendroit en égalant cette expression à une inconnue et en faisant disparoître ensuite les radicaux de la manière la plus simple; une fois parvenu à l'équation dont nous parlons, son dernier terme qui sera délivré de radicaux, étant divisé par l'expression proposée, donnera le facteur cherché. Ce procédé, quoique fondé sur la nature de la chose, peut conduire beaucoup plus loin qu'il ne faut; l'exemple suivant nous offrira l'occasion d'en indiquer un autre plus commode et plus simple.

Soit $\frac{dx}{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt{a-x}}$; je remarque qu'un radical quarré est susceptible de deux valeurs, et qu'un radical cube en a trois; car en nommant α et β les deux racines imaginaires de l'équation $u^3-1=0$, on a $\sqrt[3]{A^3}=A$, ou $=A\alpha$ ou $A\beta$: combinant successivement chacune de ces valeurs avec celles que peut prendre le radical quarré, on obtiendra pour le dénominateur de la fraction proposée, les trois formes suivantes

$$\sqrt[3]{a+x}-\sqrt{a-x},\quad \alpha\sqrt[3]{a+x}-\sqrt{a-x},\quad \beta\sqrt[3]{a+x}-\sqrt{a-x^3},$$
$$\sqrt[3]{a+x}+\sqrt{a-x},\quad \alpha\sqrt[3]{a-x}+\sqrt{a-x},\quad \beta\sqrt[3]{a+x}+\sqrt{a-x^3}.$$

En faisant le produit de ces quantités, et en observant que

$$1+\alpha+\beta=0,\qquad \alpha+\beta+\alpha\beta=0,\qquad \alpha\beta=1,$$

on trouvera un résultat délivré de radicaux. Il suit donc de là, que si on multiplie les deux termes de la fraction proposée par le produit des cinq derniers facteurs, on parviendra à un dénominateur réel; les irrationnelles se trouvant transportées au numérateur, on pourra partager celui-ci en autant de parties qu'il y aura de radicaux différens, et traiter chacune en particulier.

Je ne dissimulerai point que ce moyen est assez compliqué, et que l'habitude de l'analyse peut souvent faire trouver des trans-

formations heureuses qui conduiront au but, d'une manière plus simple; cependant j'ai voulu saisir l'occasion d'indiquer aux lecteurs attentifs un procédé pour faire disparoître les radicaux, qui n'a point encore passé dans les livres élémentaires. Il est facile de l'appliquer à telle expression qu'on voudra, en affectant successivement les radicaux d'un degré quelconque n de toutes les racines de l'équation $u^n - 1 = 0$. On voit aussi qu'en égalant à une même inconnue, les différentes formes que prendra l'expression proposée, on formera l'équation rationnelle dont elle dépend, d'une manière analogue à ce qui a été dit dans le n°. 160.

384. Si la différentielle proposée ne renfermoit que deux irrationnelles de la forme $\sqrt{a+bx}$ et $\sqrt{a'+b'x}$, on pourroit l'en débarrasser en posant $a+bx=(a'+b'x)t^2$; car il viendroit

$$x=\frac{a-a't^2}{b't^2-b},\quad \sqrt{a+bx}=\frac{t\sqrt{ab'-ba'}}{\sqrt{b't^2-b}},\quad \sqrt{a'+b'x}=\frac{\sqrt{ab'-ba'}}{\sqrt{b't^2-b}}$$

et au moyen de ces valeurs, on parviendroit à un résultat qui ne contiendroit plus que l'irrationnelle $\sqrt{b't^2-b}$ qu'on feroit disparoître par une nouvelle transformation.

385. Nous allons nous occuper maintenant de la différentielle $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, dans laquelle nous supposerons que m et n sont des nombres entiers, ce qui n'en diminuera point la généralité.

Si on avoit, par exemple, $x^{-\frac{1}{3}}dx(a+bx^{\frac{1}{2}})^{\frac{p}{q}}$, on feroit $x=z^6$, d'où il résulteroit $6z^5dz(a+bz^3)^{\frac{p}{q}}$. On peut aussi regarder n comme essentiellement positive, parce que dans le cas où on auroit $x^{m-1}dx(a+bx^{-n})^{\frac{p}{q}}$, on supposeroit $x=\frac{1}{z}$, et il viendroit $-z^{-m-1}dz(a+bz^n)^{\frac{p}{q}}$.

Cherchons dans quel cas $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, peut devenir rationnelle. Soit $a+bx^n=z^q$, en sorte qu'on ait $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=z^p$; on trouvera

$$x^n=\frac{z^q-a}{b},\quad x^m=\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},\quad x^{m-1}dx=\frac{q}{nb}z^{q-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1};$$

la différentielle proposée deviendra par-là

$$\frac{q}{n\,b}\,\zeta^{p+q-1}\,d\zeta\left(\frac{\zeta^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1},$$

et on voit qu'elle sera rationnelle toutes les fois que $\frac{m}{n}$ sera un nombre entier.

Il existe encore d'autres cas où elle peut le devenir, et nous les déterminerons en faisant $a+b\,x^n=x^n u^q$; nous aurons

$$x^n=\frac{a}{u^q-b},\quad x^m=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{(u^q-b)^{\frac{m}{n}}},\quad x^{m-1}dx=\frac{-q\,a^{\frac{m}{n}}u^{q-1}\,du}{u(u^q-b)^{\frac{m}{n}+1}},$$

et à cause de $(a+b\,x^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{a^{\frac{p}{q}}u^p}{(u^q-b)^{\frac{p}{q}}}$, il viendra à intégrer

$$\frac{-q\,a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}u^{p+q-1}\,du}{n(u^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}},$$

résultat qui sera rationnel si $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ est un nombre entier; d'où il suit que la différentielle $x^{m-1}dx\,(a+b\,x^n)^{\frac{p}{q}}$ deviendra rationnelle lorsque l'un des deux nombres $\frac{m}{n}$ et $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ sera entier.

On peut voir qu'il n'existe pas d'autres transformations que les précédentes qui puissent la rendre telle, et j'observerai que la dernière peut se déduire de la première; car, on a

$$u^q=\frac{a+b\,x^n}{x^n}=a\,x^{-n}+b;$$

mais on peut donner à la quantité $(a+b\,x^n)^{\frac{p}{q}}$ la forme $(a\,x^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}$, pourvû qu'on la multiplie par $x^{\frac{np}{q}}$, et on aura alors

$$x^{m-1}dx\,(a+b\,x^n)^{\frac{p}{q}}=x^{m+\frac{np}{q}-1}dx\,(b+a\,x^{-n})^{\frac{p}{q}}.$$

Si maintenant on fait $m+\frac{np}{q}=m'$, $-n=n'$, on verra d'après la première transformation, que la formule proposée ne peut devenir

rationnelle dans ce nouvel état, que lorsque $\frac{m'}{n'}$ sera un nombre entier, ou, ce qui revient au même, lorsque $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$, en sera un; on passera donc d'un résultat à l'autre, en changeant m en $m+\frac{np}{q}$; n en $-n$, b en a, et a en b.

386. Nous traiterons encore la fonction $Xdx(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{p}{q}}$, à cause du rapport qu'elle a avec celles dont nous nous sommes occupés dans les n^os^. précédens. On la rendra rationnelle en faisant $x+\sqrt{1+x^2}=u^q$, ce qui donne $x=\frac{u^{2q}-1}{2u^q}$, $dx=\frac{qu^{2q}du+qdu}{2u^{q+1}}$.

Les mêmes substitutions réussiroient encore quand la fonction X renfermeroit $\sqrt{1+x^2}$, pourvû qu'elle soit rationnelle par rapport à ce radical, puisqu'on a $\sqrt{1+x^2}=u^q-x=\frac{u^q+1}{2u^q}$.

387. Puisqu'il n'est pas possible d'intégrer en général la formule $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, l'idée qui se présente d'abord, est de chercher à la réduire aux cas les plus simples qu'elle peut renfermer, comme nous avons fait n°. 367, à l'égard de $\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^q}$ que nous avons ramenée à $\int\frac{dz}{z^2+\beta^2}$, et c'est à quoi on parviendra par la remarque du n°. 361, en vertu de laquelle on a $\int udv=uv-\int vdu$; car si on décompose la quantité $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, en deux facteurs, dont l'un pouvant s'intégrer soit représenté par dv, et l'autre par u, on fera dépendre l'intégration de la formule proposée de celle de $\int vdu$ qui, dans certains cas, sera plus simple que la proposée, ainsi qu'on va le voir.

Parmi les diverses manières dont on peut décomposer la différentielle $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, en facteurs, celle qui s'offre la première, consiste à faire $x^{m-1}dx=dv$, ce qui donne $v=\frac{x^m}{m}$;

il en résulte $u=(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, $du=\frac{pnb}{q}x^{n-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$ et

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{x^m}{m}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}-\frac{pnb}{qm}\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}\ldots(1).$$

Cette formule nous donne déjà une réduction bien remarquable, mais on arrivera encore à quelque chose de plus simple, en observant que puisque $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}(a+bx^n)$ on a

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=a\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}+b\int x^{m+n-1}dx(a+bx)^{\frac{p}{q}-1}(a);$$

substituant cette valeur dans le premier membre de l'équation précédente, et tirant du résultat la valeur de $\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$ comme celle d'une inconnue, on obtiendra

$$\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}=\frac{\frac{x^m}{m}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}-a\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}}{b+\frac{pnb}{qm}}\ldots..(b).$$

Si, pour plus de simplicité, on écrit $\frac{p}{q}$ au lieu de $\frac{p}{q}-1$ et $\frac{p}{q}+1$, au lieu de $\frac{p}{q}$, et qu'on réduise tous les termes au même dénominateur, il viendra

$$\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}-aqm\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b(qm+pn+qn)}..(c);$$

mettant encore m à la place de $m+n$, et par conséquent $m-n$ à celle de m, on aura

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}-aq(m-n)\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b(qm+pn)}.(II).$$

Il est aisé de voir que puisqu'on peut ramener l'intégration de $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ à celle de $\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, on ramenera aussi cette dernière à celle $\int x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ en écrivant $m-n$, à la place de m, dans l'équation (II); puis changeant encore m en $m-2n$, dans cette même équation, elle fera connoître $\int x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ au moyen de $\int x^{m-3n-1}dx(a+bx^n)$ et ainsi de suite:

on

(I.) $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} - pnb\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}}{qm}$

(II.) $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{qx^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} - aq(m-n)\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b(mq+np)}$

(III.) $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} + pna\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}}{mq+np}$

(IV.) $\int x^{-m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{qx^{-m}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} + b(mq-nq-np)\int x^{-m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{-aqm}$

(V.) $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}} = \frac{qx^m(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}+1} - (mq+nq-np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}+1}}{an(p-q)}$

(VI.) $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{qx^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} - (m-n)q\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{bn(p+q)}$

(VII.) $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}\left\{\frac{qx^{m-n}}{b(mq+np)} - \frac{aq^2(m-n)x^{m-2n}}{b^2(mq+np)(mq-nq+np)} + \frac{a^2q^3(m-n)(m-2n)x^{m-3n}}{b^3(mq+np)(mq-nq+np)(mq-2nq+np)} \cdots \pm \frac{a^{i-1}q^i(m-n)\cdots(m-(i-1)n)x^{m-in}}{b^i(mq+np)\cdots(mq-(i-1)nq+np)}\right\} \mp \frac{a^iq^i(m-n)\cdots(m-in)\int x^{m-in-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b^i(mq+np)\cdots(mq-(i-1)nq+np)}$

(VIII.) $\int x^{-m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}\left\{\frac{x^{-m}}{-am} + \frac{b(mq-nq-np)x^{-m+n}}{a^2qm(m-n)} + \frac{b^2(mq-nq-np)(mq-2nq-np)x^{-m+2n}}{-a^3q^2m(m-n)(m-2n)} \cdots + \frac{b^i(mq-np-nq)\cdots(mq-inq-np)x^{-m+in}}{\mp a^{i+1}q^im(m-n)\cdots(m-in)}\right\} + \frac{b^{i+1}(mq-np-nq)\cdots(mq-(i+1)nq-np)\int x^{-m+(i+1)n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{\mp a^{i+1}q^im(m-n)\cdots(m-in)}$

(IX.) $\int \frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{1}{2r+1}x^{2r} + \frac{1\cdot 2r}{(2r-1)(2r+1)}x^{2r-2} + \frac{1\cdot(2r-2)2r}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}x^{2r-4} \cdots\cdots + \frac{1\cdot 2\cdot 4\cdots 2r}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r+1)}\right\} + const.$

(X.) $\int \frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{1}{2r}x^{2r-1} + \frac{1\cdot(2r-1)}{(2r-2)2r}x^{2r-3} + \frac{1\cdot(2r-3)(2r-1)}{(2r-4)(2r-2)2r}x^{2r-5} \cdots\cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r}x\right\} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r}\cdot \text{arc}(\sin = x) + const.$

(XI.) $\int \frac{dx}{x^{2r+1}\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{1}{2rx^{2r}} + \frac{1\cdot(2r-1)}{(2r-2)2rx^{2r-2}} + \frac{1\cdot(2r-3)(2r-1)}{(2r-4)(2r-2)2rx^{2r-4}} \cdots\cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2rx^2}\right\} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r}\cdot l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + const.$

(XII.) $\int \frac{dx}{x^{2r}\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{1}{(2r-1)x^{2r-1}} + \frac{1\cdot(2r-2)}{(2r-3)(2r-1)x^{2r-3}} + \frac{1\cdot(2r-4)(2r-2)}{(2r-5)(2r-3)(2r-1)x^{2r-5}} \cdots\cdots + \frac{1\cdot 2\cdot 4\cdots(2r-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)x}\right\} + const.$

On aura

$$\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{b[(m-n)q+np]}-\frac{(m-2n)qa\int x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b[(m-2n)q+np]},$$

$$\int x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m-3n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{b[(m-3n)q+np]}-\frac{(m-3n)qa\int x^{m-3n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b[(m-3n)q+np]},$$

et en général,

$$\int x^{m-(i-1)n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m-in}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{b[(m-in)q+np]}-\frac{(m-in)qa\int x^{m-in-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b[(m-in)q+np]},$$

la lettre i désignant un nombre entier quelconque.

Substituant la première de ces valeurs dans l'équation (II), puis la seconde, puis chacune des suivantes, on obtiendra le résultat (VII) du tableau ci-joint. Il faudra dans le dernier terme prendre le signe supérieur, si i est impair, et le signe inférieur, s'il est pair.

Il est aisé de voir que toutes les fois que m sera un multiple de n, on rencontrera un terme pour lequel $m-in=0$; la quantité $\int x^{m-in-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ qui est multipliée par ce facteur, disparoîtra; la série (VII) sera donc entièrement délivrée du signe $\int$, et on aura ainsi l'intégrale de $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$: ce résultat s'accorde avec ce qu'on a vu dans le n°. 385.

388. Reprenons l'équation (a) du n°. précédent,

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=a\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}+b\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1};$$

et mettons pour $\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$ la valeur que donne l'équation (b), il viendra

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}+pna\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}}{qm+pn} \quad \text{(III)}.$$

En substituant $\frac{p}{q}-1$ à la place de $\frac{p}{q}$, dans cette équation, on obtiendra $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$, au moyen de $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-2}$, et ainsi de proche en proche, jusqu'à ce que toutes les unités qui pourroient être contenues dans le nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$, soient épuisées.

389. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les nombres m, n et $\frac{p}{q}$, étoient positifs, nous allons indiquer maintenant ce qu'il faudroit faire s'ils étoient négatifs.

Supposons d'abord que m soit affectée du signe —. Dans ce cas, on renverseroit l'équation (c), pour en tirer la valeur de $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, et mettant par-tout $-m$ au lieu de m, il viendroit.....(IV).....

$$\int x^{-m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{-m}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}+b(mq-nq-np)\int x^{-m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{-aqm}.$$

En écrivant dans cette formule $-m+n$, au lieu de m, on trouvera $\int x^{-m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, par le moyen de $\int x^{-m+2n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, et ainsi de suite; ce qui donnera la formule (VIII) du tableau, dans laquelle l'intégrale cherchée dépendra de $\int x^{-m+in-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$. Le facteur $mq-inq-np$, qui multiplie cette expression, s'évanouira, si

$$i=\frac{mq-np}{qn}=\frac{m}{n}-\frac{p}{q};$$

or comme i est un nombre entier, il faudra que $\frac{p}{q}-\frac{m}{n}$ en soit un aussi: cette condition étant remplie, on obtiendra l'intégrale de $\int x^{-m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

Si m et n étoient négatives, mais que m fût plus grand que n, il faudroit se servir de la formule (II), en y changeant m en $-m$, et n en $-n$.

Lorsque $\frac{p}{q}$ sera un nombre négatif, on renversera l'équation (III); en prenant la valeur de $\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$, et écrivant ensuite $-\frac{p}{q}+1$ au lieu de $\frac{p}{q}$, il viendra.....(V).....

$$\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}}=\frac{qx^m(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}+1}}{an(p-q)}$$
$$-\frac{(mq+nq-np)\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{an(p-q)}.$$

Si on fait $m-1=0$, $n=2$, $q=1$, $a=\beta^2$ et $b=1$, on trouvera un résultat semblable à l'équation (a) du n°. 367.

390. Nous aurions pu décomposer aussi la différentielle $x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, dans les deux facteurs suivans: x^{m-n} et $x^{n-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$; il est aisé de reconnoître, en faisant $a+bx^n=z$, que le second est intégrable immédiatement, et qu'il donne $\frac{(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{nb\left(\frac{p}{q}+1\right)}$; désignant donc ce résultat par v, et appellant u l'autre facteur, x^{m-n}, nous aurons

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{nb(p+q)}$$
$$-\frac{(m-n)q\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{nb(p+q)}\quad\ldots(VI).$$

Cette équation qui offre encore une nouvelle réduction, conduiroit à l'équation (II), si on décomposoit $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$ en $(a+bx)^{\frac{p}{q}}\times(a+bx^n)$ comme dans le n°. 387.

Pour faciliter l'usage des formules précédentes, je les ai réunies dans le tableau de la page 40.

391. Avant d'appliquer ces formules à quelques exemples, je vais faire remarquer certains cas, dans lesquels leurs dénominateurs deviennent nuls. Cela arrive pour les formules (I) et (IV),

lorsque $m=0$; $\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, et $\int x^{-m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, se réduisent alors à $\int \frac{dx}{x}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$. En faisant $a+bx^n=z^q$, comme dans le n°. 385, il vient à intégrer $\frac{qz^{p+q-1}dz}{n(z^q-a)}$.

Le dénominateur de la formule (II) s'évanouit par la supposition de $b=0$, ou par celle de $mq+np=0$. Par la première on aura seulement à intégrer $a^{\frac{p}{q}}\int x^{m-1}dx$; la seconde donne $\frac{p}{q}=-\frac{m}{n}$, et il en résulte $\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}}$; cette intégrale se ramène aux fonctions rationnelles, en faisant $a+bx^n=x^nu^n$, transformation d'après laquelle il vient $-\frac{u^{-m+n-1}du}{u^n-b}$.

Ceci s'applique également à la formule (III), dont le dénominateur devient nul, lorsque $mq+np=0$.

Quand on a $p-q=0$, ou $n=0$, ou $a=0$, le dénominateur de la formule (V) s'évanouit; mais $\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, devient rationnelle dans le premier et le second cas, et dans le troisième, elle se change en un monome.

Le dénominateur de la formule (VI) s'évanouit de trois manières, savoir quand $n=0$, quand $b=0$, et quand $p+q=0$. Les deux premiers cas rentrent l'un dans l'autre, parce que dans tous deux, le facteur $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ devient constant, et l'on a seulement à intégrer $L\int x^{m-1}dx$. Dans le troisième on a $\int \frac{x^{m-1}dx}{(a+bx^n)}$, différentielle qui se rapporte aux fractions rationnelles.

On voit par ce qui précède, que les diverses exceptions que souffrent les formules que nous venons d'examiner, ne portent que sur des cas où l'intégration s'exécute facilement.

392. Soit la formule $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, m étant un nombre entier positif; on trouve par la formule (II); en y faisant $a=1$; $b=-1$, $n=2$, $\frac{p}{q}=-\frac{1}{2}$,

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}{m-1}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{1-xx}};$$

écrivons m au lieu de $m-1$ et nous aurons

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donnons successivement à m différentes valeurs, en commençant pour les nombres impairs ; nous aurons

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+const.$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2}+\frac{4}{5}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{6}x^6\sqrt{1-x^2}+\frac{6}{7}\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

&c.

On tirera de là

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+const.$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1\cdot2}{1\cdot3}\right)\sqrt{1-x^2}+const.$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{5}x^4+\frac{1\cdot4}{3\cdot5}x^2+\frac{1\cdot2\cdot4}{1\cdot3\cdot5}\right)\sqrt{1-x^2}+const.$$

$$\int\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{7}x^6+\frac{1\cdot6}{3\cdot7}x^4+\frac{1\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}x^2+\frac{1\cdot2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5\cdot7}\right)\sqrt{1-x^2}+const.$$

etc.

La loi de ces valeurs est évidente, et en désignant par $2r+1$ un nombre impair quelconque, on construira la formule (IX) du tableau. J'observerai qu'on la déduiroit immédiatement de la formule (VII), en faisant $m-1=2r+1$, et en réduisant le coefficient de chaque terme à sa plus simple expression.

Passons maintenant aux valeurs paires de m. En supposant $m=2$, $m=4$, $m=6$, etc. on trouve

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{4}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{6}x^5\sqrt{1-x^2}+\frac{5}{6}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

dans ce cas toutes les intégrales proposées dépendront de

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc}(\sin=x)+const.$$

et en représentant par A l'arc indiqué, on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=A+const.$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}A+const.$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}A.+const.$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1\cdot5}{4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}A+const.$$

etc.

En généralisant la loi qui règne dans ces résultats, on construira la formule (X) qui peut, comme la précédente, se tirer aussi de la formule (VII).

393. Cherchons maintenant les formules qui répondent aux cas où m est négative. On a alors par la formule (IV) du tableau

$$\int\frac{x^{-m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{-m}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{-m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

en écrivant $-m$, au lieu de $-m-1$, il vient

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}};$$

On ne peut pas supposer $m=1$, puisque cette valeur rend le dénominateur nul; il faut donc chercher *à priori* l'intégrale de $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. On la trouveroit facilement d'après ce qui a été dit n°. 385; mais on peut y parvenir aussi de la manière suivante: on fera $1-x^2=z^2$; d'où il résultera $x=\sqrt{1-z^2}$, $dx=\frac{-z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$ et par conséquent $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{-dz}{1-z^2}$, équation dont le second membre a pour intégrale $-\frac{1}{2}l(1+z)+\frac{1}{2}l(1-z)=-\frac{1}{2}l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$.

Remettant au lieu de z sa valeur, on aura $-\frac{1}{2}l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$;

multipliant par $1+\sqrt{1-x^2}$, les deux termes de la fraction comprise sous le signe l, on obtiendra

$$-\frac{1}{2}l\left[\frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{x^2}\right]=-\frac{1}{2}l\left[\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2\right]=-l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

On aura donc enfin

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)+const.$$

En posant $m=3$, $m=5$, etc. il viendra

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{4x^4}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{6x^6}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

Faisant ensuite $m=2$, $m=4$, $m=6$, etc. on trouvera

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\text{const.}$$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

de ces deux suites de formules on tirera, comme dans le n°. précédent, les formules (XI) et (XII).

394. En général, on ramènera l'intégrale $\int x^{\pm m}dx\,(a+bx^n)^{\pm\frac{p}{q}}$, à $\int x^{\pm m\mp rn}dx\,(a+bx^n)^{\pm\frac{p}{q}\mp s}$, rn désignant le plus grand des multiples de n, qu'on puisse retrancher de m, et s le nombre d'unités contenues dans l'exposant $\frac{p}{q}$. Si l'on avoit par exemple, $\int x^7dx\,(a+bx^3)^{\frac{5}{3}}$, en se servant de la formule (II), on ramèneroit d'abord cette intégrale à celle de $\int x\,dx\,(a+bx^3)^{\frac{8}{3}}$, et on feroit dépendre cette dernière de $\int xdx\,(a+bx^3)^{\frac{2}{3}}$, par le moyen de la formule (III).

395. Les différentielles de la forme $x^{m-1}dx(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}}$, sont susceptibles de réductions analogues aux précédentes. Si on fait $x^{m-1}dx=dv$ et $(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}}=u$, la formule $\int udv=uv-\int vdu$, donnera

$$\left.\begin{aligned}\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}}&=\frac{x^m}{m}(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}}\\&\quad-\frac{p}{q}\int\frac{x^m}{m}(nbx^{n-1}dx+2ncx^{2n-1}dx)(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}\right\}(a);$$

mais

$$\left.\begin{aligned}\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}}&=a\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}-1}\\&\quad+b\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}-1}\\&\quad\pm c\int x^{m+2n-1}dx(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}\right\}(b);$$

substituant

substituant cette valeur dans le premier membre de l'équation (a), faisant pour abréger $a+bx^n+cx^{2n}=X$, et prenant la valeur de $\int x^{m+2n-1}dx\,X^{\frac{p}{q}-1}$, on trouvera

$$\int x^{m+2n-1}dx\,X^{\frac{p}{q}-1}=\frac{qx^m X^{\frac{p}{q}}-(qm+pn)b\int x^{m+n-1}dx\,X^{\frac{p}{q}-1}-aqm\int x^{m-1}dx\,X^{\frac{p}{q}-1}}{c(qm+2pn)}.$$

Si dans cette formule, on change $\frac{p}{q}$ en $\frac{p}{q}+1$, ce qui revient à écrire $p+q$ au lieu de p, qu'on y mette aussi m à la place $m+2n$, on trouvera.....$\int x^{m-1}dx\,X^{\frac{p}{q}}=$

$$=\frac{qx^{m-2n}X^{\frac{p}{q}+1}-(qm-qn+pn)b\int x^{m-n-1}dx\,X^{\frac{p}{q}}-aq(m-2n)\int x^{m-2n-1}dx\,X^{\frac{p}{q}}}{c(qm+2pn)}.$$

L'intégrale $\int x^{m-1}dx\,X^{\frac{p}{q}}$ dépendra donc de $\int x^{m-n-1}dx\,X^{\frac{p}{q}}$ et de $\int x^{m-2n-1}dx\,X^{\frac{p}{q}}$.

L'équation (a) peut être traitée comme l'équation (I) du n°. 387, et en la combinant avec l'équation (b), on tirera des valeurs de l'intégrale $\int x^{m-1}dx\,X^{\frac{p}{q}}$, descendantes ou ascendantes, soit par rapport à l'exposant de x, soit par rapport à celui de X, et analogues aux formules (III), (IV) et (V) des n°s. 388, 389.

396. Il y a quelques cas, dans lesquels la différentielle $\int x^{m-1}dx(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}}$, peut se réduire à une suite de différentielles binomes.

Si on fait $x^n=u+\alpha$, α étant une constante indéterminée, on pourra faire disparoître le terme bx^n dans la quantité $a+bx^n+cx^{2n}$, et la mettre sous la forme $a'+b'u^2$; mais on aura en même tems $x=(u+\alpha)^{\frac{1}{n}}$, $dx=\frac{1}{n}(u+\alpha)^{\frac{1}{n}-1}du$, et la différentielle proposée deviendra

$$\frac{1}{n}(u+\alpha)^{\frac{m}{n}-1}du\,(a'+b'u^2)^{\frac{p}{q}}.$$

Il suit de là que lorsque $\frac{m}{n}$ sera un nombre entier positif, la

formule proposée pourra se ramener à une suite finie de différentielles de la forme $u^r du(a'+b'u^s)^{\frac{p}{q}}$.

On peut encore trouver un autre cas où la même chose ait lieu, en donnant à $x^{m-1}dx(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}}$ la forme suivante: $x^{m+\frac{2pn}{q}-1}dx(ax^{-2n}+bx^{-n}+c)^{\frac{p}{q}}$, qui résulte de la division de la quantité $a+bx^n+cx^{2n}$ par x^{2n}; posant ensuite $x^{-n}=u+\alpha$, pour faire disparoître le terme bx^{-n}, il viendra $x=(u+\alpha)^{-\frac{1}{n}}$, $dx=-\frac{1}{n}(u+\alpha)^{-\frac{1}{n}-1}du$, ce qui changera la différentielle proposée en $-\frac{1}{n}(u+\alpha)^{\frac{-mq-2pn-nq}{nq}}du(a''u^s+b'')^{\frac{p}{q}}$, et il faudra alors que $\frac{-mq-2pn-nq}{nq}$ soit un nombre entier positif, ou bien que $\frac{mq-2np-nq}{nq}$ en soit un, si l'exposant m est négatif.

397. En opérant sur l'intégrale

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}+\ldots.)^{\frac{p}{q}},$$

comme nous l'avons fait sur $\int x^{m-1}dx(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}}$ (n°. 395), on obtiendroit des réductions analogues, et on feroit dépendre la formule $\int x^{m-1}dx(a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n})$, par exemple, des trois intégrales

$$\int x^{m-n-1}dx\,X^{\frac{p}{q}},\quad \int x^{m-2n-1}dxX^{\frac{p}{q}},\quad \int x^{m-3n-1}dxX^{\frac{p}{q}},$$

dans lesquelles X représente $a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}$.

398. La seule différentiation peut conduire à un grand nombre de résultats de cette nature; je vais en indiquer quelques-uns des plus généraux.

Soit $U=a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}+fx^{4n}+\ldots\ldots$

Si on différentie $U_{p+1}x^{m+1}$, il viendra

$$d.U^{p+1}x^{m+1}=(m+1)U^{p+1}x^m dx+(p+1)U^p x^{m+1}dU;$$

Mais

$$U^{p+1}x^m dx=U^p x^m dx(a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}+fx^{4n}+\ldots),$$

$$U^p x^{m+1}dU=nU^p x^{m+1}dx(bx^{n-1}+2cx^{2n-1}+3ex^{3n-1}+4fx^{4n-1}+\ldots).$$

En indiquant séparément l'intégrale de chaque terme de ces équations et faisant

$\int U^p x^m dx = M$, $\int U^p x^{m+n} dx = M'$, $\int U^p x^{m+2n} dx = M''$..
$\int U^{p+1} x^m dx = N$,
$\int U^p x^{m+1} dU = P$,

il viendra

$N = aM + bM' + cM'' + \ldots$ $P = n(bM' + 2cM'' + ..)$.

La différentielle de $U^{p+1} x^{m+1}$ étant aussi intégrée terme à terme donnera

$$U^{p+1} x^{m+1} = (m+1)N + (p+1)P,$$

et si q exprime le nombre de termes de la fonction U, on pourra, à l'aide de cette dernière équation, trouver l'une des intégrales représentées par M, M'... au moyen des $q-1$ autres.

On peut tirer des mêmes formules de nouvelles réductions, en changeant m en $m+n$, en $m+2n$.... et en posant

$\int U^{p+1} x^{m+n} dx = N'$, $\int U^{p+1} x^{m+2n} dx = N''$...
$\int U^p x^{m+n+1} dU = P'$, $\int U^p x^{m+2n+1} dU = P''$...

car on aura comme ci-dessus

$N' = aM' + bM'' + cM''' \ldots$, $P' = n(bM'' + 2cM''' \ldots)$
$N'' = aM'' + bM''' + cM'''' \ldots$, $P'' = n(bM''' + 2cM'''' \ldots)$,
etc. etc.

$U^{p+1} x^{m+n+1} = (m+n+1)N' + (p+1)P'$
$U^{p+1} x^{m+2n+1} = (m+2n+1)N'' + (p+1)P''$,
etc.

et si on connoît un nombre $q-1$ des intégrales renfermées tant dans ces équations que dans les précédentes, on connoîtra toutes les autres.

Soit encore

$U = a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n} + \ldots$
$V = a' + b'x^n + c'x^{2n} + e'x^{3n} + f'x^{4n} + \ldots$

Si on suppose

$\int U^p V^q x^m dx = M$, $\int U^p V^q x^{m+s} dx = M'$, ...
$\int U^{p+1} V^q x^m dx = N$, $\int U^{p+1} V^q x^{m+s} dx = N'$, ...
$\int U^p V^{q+1} x^m dx = P$, $\int U^p V^{q+1} x^{m+s} dx = P'$, ...
$\int U^{p+1} V^{q+1} x^m dx = Q$, $\int U^{p+1} V^{q+1} x^{m+s} dx = Q'$, ...
$\int U^p V^{q+1} x^{m+1} dU = R$, $\int U^p V^{q+1} x^{m+n+1} dU = R'$, ...
$\int U^{p+1} V^q x^{m+1} dV = S$, $\int U^{p+1} V^q x^{m+n+1} dV = S'$, ...

on aura

$N = aM + bM' + cM'' + \ldots$, $P = a'M + b'M' + c'M'' + \ldots\ldots$
$N' = aM' + bM'' + cM''' + \ldots$, $P' = a'M' + b'M'' + c'M''' + \ldots\ldots$
etc. etc.
$Q = aP + bP' + cP'' + \ldots\ldots = a'N + b'N' + c'N'' + \ldots\ldots$
$Q' = aP' + bP'' + cP''' + \ldots\ldots = a'N' + b'N'' + c'N''' + \ldots\ldots$
etc. etc.
$R = n(bP + 2cP' + 3eP'' + ..)$, $S = n(b'N + 2c'N' + 3e'N'' + ..)$
$R' = n(bP' + 2cP'' + 3eP''' + ..)$, $S' = n(b'N' + 2c'N'' + 3e'N''' + ..)$,
etc.

Enfin $U^{p+1}V^{q+1}x^{m+1} = (m+1)Q + (p+1)R + (q+1)S$
$U^{p+1}V^{q+1}x^{m+n+1} = (m+n+1)Q' + (p+1)R' + (q+1)S'$,
etc.

Ces relations sont faciles à vérifier et même à trouver d'après ce qui précède. Si q désigne le nombre des termes de la fonction U et q' celui des termes de la fonction V, il suffira de connoître $q+q'-2$ des intégrales $M, M'.., N, N'.., P, P'.., Q, Q'.., R, R'.., S, S'..,$ pour déterminer toutes les autres.

399. Nous allons nous occuper en particulier de la formule $\frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4}}$, qui a été l'objet des travaux d'Euler, de Lagrange et de Legendre.

Toute différentielle Xdx, dans laquelle X est une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4}$ que nous désignerons par R, pourra toujours se ramener à dépendre de $\frac{Pdx}{R}$; car il est évident que X ne pourra avoir que la forme $\frac{A+BR}{C+DR}$, A, B, C et D étant des fonctions rationnelles de x; or en multipliant les deux termes de cette fraction par $C-DR$, il viendra $\frac{AC-BDR^2-(AD-CB)R}{C^2-D^2R^2} = \frac{AC-BDR^2}{C^2-D^2R^2} - \frac{(AD-CB)R}{C^2-D^2R^2}$. La première partie de ce résultat est rationnelle; si on multiplie par R les deux termes de la seconde, elle se changera en $\frac{(AD-CB)R^2}{C^2-D^2R^2}\cdot\frac{1}{R}$, et faisant $\frac{AC-BDR^2}{C^2-D^2R^2} = N$, $\frac{(AD-CB)R^2}{C^2-D^2R^2} = P$,

on trouvera enfin $\frac{(A+BR)\,dx}{C+DR} = N\,dx + \frac{P\,dx}{R}$.

400. Je vais montrer maintenant, d'après Legendre, que quelle que soit la fonction rationnelle P, la différentielle $\frac{P\,dx}{R}$ peut être ramenée à d'autres beaucoup plus simples.

En substituant d'abord $\frac{p+qy}{1+y}$, à la place de y, dans la quantité soumise au radical, et réduisant tous ses termes au même dénominateur, elle deviendra de la forme $\frac{\alpha'+\beta'y+\gamma'y^2+\delta'y^3+\epsilon'y^4}{(1+y)^4}$; on pourra par conséquent faire sortir du radical le dénominateur. En égalant à zéro les coefficiens β' et δ', l'intégrale proposée se réduira à $\frac{P'dy}{\sqrt{\alpha'+\gamma'y^2+\epsilon'y^4}}$, P' étant une fonction rationnelle de y: p et q seront déterminés par les équations $\beta'=0$, $\delta'=0$; mais il est essentiel de s'assurer que ces quantités auront toujours des valeurs réelles.

Pour y parvenir mettons $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4$, sous la forme

$$\left(\frac{\alpha}{\epsilon}+\frac{\beta}{\epsilon}x+\frac{\gamma}{\epsilon}x^2+\frac{\delta}{\epsilon}x^3+x^4\right)\epsilon,$$

et concevons que la quantité renfermée entre les parenthèses, soit décomposée en facteurs réels du second degré x^2-fx+g, $x^2-f'x+g'$, ce qui est toujours possible; il suffira alors de faire dans chacun de ces facteurs la substitution indiquée, et d'égaler à zéro les termes affectés de la première puissance de y: on négligera le dénominateur commun, puisqu'il sort du radical. Ce calcul étant effectué, il en résultera les équations

$$2pq-f(p+q)+2g=0, \qquad 2pq-f'(p+q)+2g'=0,$$

lesquelles donneront, sous une forme rationnelle, les valeurs de $p+q$ et de pq; or il suit de la théorie des équations, que p et q seront les racines de $u^2-(p+q)\,u+pq=0$, et seront réelles si $\frac{1}{4}(p+q)^2$ surpasse pq, ou si $\frac{1}{4}(p+q)^2-pq=\frac{1}{4}(p-q)^2$ est une quantité positive.

Voyons maintenant si cette condition est toujours remplie;

soient a, b, c, d, les quatre racines de l'équation

$x^4+\frac{\delta}{\epsilon}x^3+\frac{\gamma}{\epsilon}x^2+\frac{\beta}{\epsilon}x+\frac{\alpha}{\epsilon}=0$. Il est évident qu'on aura

$f=a+b$, $g=ab$, $f'=c+d$, $g'=cd$; les équations

$2pq-f(p+q)+2g=0$ et $2pq-f'(p+q)+2g'=0$, deviendront

$2pq-(a+b)(p+q)+2ab=0$, $2pq-(c+d)(p+q)+2cd=0$.

Tirant de ces dernières, les valeurs de $p+q$ et de pq, on aura

$$p+q=\frac{2(ab-cd)}{a+b-c-d}, \qquad pq=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{a+b-c-d};$$

formant au moyen de ces expressions, celle de

$$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq,$$

et décomposant en facteurs le résultat qu'on aura obtenu, on trouvera

$$\frac{1}{4}(p-q)^2=\frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}.$$

Lorsque les quatre racines a, b, c et d seront réelles, on pourra les disposer dans l'ordre de leurs grandeurs respectives, en plaçant les négatives après les positives; dans ce cas, les différences $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-d$, seront toutes positives, $(p-q)^2$ sera donc positif, p et q seront donc réels.

Si deux des racines a, b etc. sont imaginaires, elles seront nécessairement de la forme $m+n\sqrt{-1}$, $m-n\sqrt{-1}$, et elles pourront toujours être comprises dans le même facteur du second degré; posons donc qu'on ait $a=m+n\sqrt{-1}$, $b=m-n\sqrt{-1}$, il en résultera $ab=m^2+n^2$, $a+b-c-d=2m-c-d$, ainsi les quantités $p+q$ et pq seront réelles; on aura de plus,

$$a-c=m+n\sqrt{-1}-c, \quad a-d=m+n\sqrt{-1}-d,$$

$$b-c=m-n\sqrt{-1}-c, \quad b-d=m-n\sqrt{-1}-d,$$

d'où $(a-c)(b-c)=m^2-2cm+c^2+n^2=(m-c)^2+n^2$.

$(a-d)(b-d)=m^2-2dm+d^2+n^2=(m-d)^2+n^2$,

quantités essentiellement positives.

Enfin, si on a à la fois

$a=m+n\sqrt{-1}$, $b=m-n\sqrt{-1}$, $c=m'+n'\sqrt{-1}$, $d=m'-n'\sqrt{-1}$,

on développera les produits

$(a-c)(b-d)=(m+n\sqrt{-1}-m'-n'\sqrt{-1})(m-n\sqrt{-1}-m'+n'\sqrt{-1})$

$(a-d)(b-c)=(m+n\sqrt{-1}-m'+n'\sqrt{-1})(m-n\sqrt{-1}-m'-n'\sqrt{-1})$,

les imaginaires disparoîtront et il viendra

$$m^2+n^2-2mm'-2nn'+m'^2+n'^2=(m-m')^2+(n-n')^2,$$

$$m^2+n^2-2mm'+2nn'+m'^2+n'^2=(m-m')^2+(n+n')^2,$$

résultats nécessairement positifs.

Si les racines c et d étoient respectivement égales aux racines a et b, les valeurs précédentes de $p+q$ et de $p-q$ deviendroient $\frac{0}{0}$; mais dans ce cas on auroit $x^4+\frac{\delta}{\epsilon}x^3+\frac{\gamma}{\epsilon}x^2+\frac{\beta}{\epsilon}x+\frac{\alpha}{\epsilon}=(x-a)^2(x-b)^2$, et le radical disparoîtroit. Lorsque l'une des racines a ou b sera égale à l'une des racines c ou d, il en résultera $p-q=0$; dans cette circonstance, on peut en combinant ensemble les deux racines égales, en former un facteur quarré qui sortira du radical. Soit par exemple $a=c$, il vient $(x-a)^2(x^2+\alpha'x+\beta')$ au lieu de $x^4+\frac{\delta}{\epsilon}x^3+$ etc. et l'intégrale proposée se change en

$$\int\frac{P\,dx}{(x-a)\sqrt{\epsilon(x^2+\alpha'x+\beta')}},$$

qui ne dépend que des arcs de cercles et des logarithmes.

Enfin si on avoit $a+b=c+d$, les quantités $p+q$ et $p-q$ deviendroient infinies, mais on auroit en même tems $f=f'$, ce qui changeroit les deux facteurs du second degré de $x^4+\frac{\delta}{\epsilon}x^3+$ etc. en x^2-fx+g et x^2-fx+g'; la simple supposition de $x=y+\frac{f}{2}$ fait disparoître le second terme de l'un et de l'autre.

Nous voilà donc convaincus que la transformation proposée ci-dessus, conduiroit toujours à une expression réelle, et qu'on pourra changer R en $\frac{\sqrt{\epsilon}}{(1+y)^2}\sqrt{\alpha'+\beta'y^2+\gamma'y^4}$, par la substitution de $\frac{p+qy}{1+y}$, au lieu de x; mais cette substitution donne aussi

$$dx=\frac{(1+y)\,qdy-(p+qy)\,dy}{(1+y)^2},$$

et désignant par P' ce que devient alors la fonction P, nous aurons

$$\int \frac{Pdx}{R} = \frac{P'(q-p)dy}{\sqrt{1}\sqrt{\alpha'+\beta'y^2+\gamma'y^4}}.$$

L'intégration de $\int \frac{Pdx}{R}$ se trouve ramenée par là à celle de $\int \frac{Qdy}{\sqrt{\alpha'+\beta'y^2+\gamma'y^4}}$, Q étant une fonction rationnelle de y.

Je vais montrer qu'on peut réduire cette fonction à ne renfermer que des puissances paires de y. En la supposant fractionnaire, on lui donne la forme $\frac{S+Ty}{U+Vy}$, les lettres S, T, U et V, représentant des fonctions de y^2, et si on multiplie les deux termes de cette fonction par $U-Vy$, il viendra $\frac{US-VTy^2+(UT-US)y}{U^2-V^2y^2}$; posant $\frac{US-UTy^2}{U^2-V^2y^2}=G$, $\frac{UP-VS}{U^2-V^2y^2}=H$, G et H seront encore des fonctions paires ou de y^2, et la fonction Q sera transformée en $G+Hy$; la différentielle $\frac{Qdy}{\sqrt{\alpha'+\beta'y^2+\gamma'y^4}}$ deviendra

$$\frac{Gdy}{\sqrt{\alpha'+\beta'y^2+\gamma'y^4}}+\frac{Hydy}{\sqrt{\alpha'+\beta'y^2+\gamma'y^4}}.$$

Faisant $y^2=\zeta$ dans la seconde partie, elle se changera en $\frac{Hd\zeta}{\sqrt{\alpha'+\beta'\zeta+\gamma'\zeta^2}}$, H étant une fonction rationnelle de ζ, et on pourra par conséquent l'intégrer par le procédé du n°. 377; il ne restera plus à traiter que $\frac{Gdy}{\sqrt{\alpha'+\beta'y^2+\gamma'y^4}}$. Nous nous occuperons donc désormais de la seule intégrale $\int \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$, et nous ferons toujours pour abréger $\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}=R$.

401. Si la fonction P est entière, elle ne pourra avoir que la forme $A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+$ etc. puisqu'elle ne doit contenir que

que des puissances paires de x ; dans ce cas $\int\frac{Pdx}{R}$ deviendra $A\int\frac{dx}{R}+B\int\frac{x^2dx}{R}+$ etc. Mais $\int\frac{x^{2m}dx}{R}$ se ramenera par les formules du n°. 395, à $\int\frac{x^{2m-2}dx}{R}$, $\int\frac{x^{2m-1}dx}{R}$, et on y peut parvenir immédiatement en différentiant la quantité Rx^{2m-3}, ce qui donne

$$(2m-3)x^{2m-4}dx\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}+\frac{x^{2m-3}(\beta x+2\gamma x^3)dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}};$$

réduisant au même dénominateur, prenant séparément l'intégrale de chaque terme et remettant R au lieu de $\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}$, il viendra

$$Rx^{2m-3}=(2m-3)\alpha\int\frac{x^{2m-4}dx}{R}+(2m-2)\beta\int\frac{x^{2m-3}dx}{R}\Big\}.$$
$$+(2m-1)\gamma\int\frac{x^{2m-2}dx}{R}$$

Par le moyen de cette équation, on ramenera tous les cas de l'expression $\int\frac{x^{2m}dx}{R}$, aux deux suivans : $\int\frac{x^0dx}{R}=\int\frac{dx}{R}$, $\int\frac{x^2dx}{R}$; et on voit par là que P étant une fonction rationnelle et entière, $\int\frac{Pdx}{R}$ renfermera deux parties, l'une intégrée, et l'autre de la forme $\int(A+Bx^2)\frac{dx}{R}$.

402. Passons au cas où P est une fonction rationnelle quelconque. Après en avoir extrait la partie entière, qu'on traitera comme il vient d'être dit, on fera $x^2=u$, et on décomposera la fraction restante en fractions partielles de la forme $\frac{N}{(u+a)^n}$; ou $\frac{N}{(x^2+a)^n}$, N et a étant des quantités réelles ou imaginaires; et il viendra à intégrer une suite de termes, tels que $N\int\frac{dx}{(x^2+a)^nR}$, qu'il faudra tâcher de réduire à d'autres, dans lesquels l'exposant de x^2+a soit le moindre possible.

Pour suivre la même marche que dans le n°. précédent, nous

chercherons une fonction qui, étant différentiée, puisse donner une suite de termes de la forme

$$\frac{Adx}{(x^2+a)^nR}+\frac{Bdx}{(x^2+a)^{n-1}R}+\frac{Cdx}{(x^2+a)^{n-2}R}+\text{etc.}$$

Or, en réduisant ces termes au même dénominateur, la fonction qu'on trouvera par la réunion de tous les numérateurs, ne contiendra que des puissances paires de x, et avec un peu d'habitude de la différentiation, on verra que la différentielle de $\frac{xR}{(x^2+a)^{n-1}}$, satisfait à cette condition.

On en tire $\frac{(x^2+a)(xdR+Rdx)-2(n-1)x^2Rdx}{(x^2+a)^n}$; mettant pour R et dR leurs valeurs, et réduisant tous les termes au même dénominateur, il viendra

$$\left\{\frac{-(2n-5)\gamma x^6-[(2n-4)\beta-3a\gamma]x^4-[(2n-3)\alpha-2a\beta]x^2+a\alpha}{(x^2+a)^n}\right\}\frac{dx}{R}$$

faisant $x^2+a=\zeta$, nous aurons $x^2=\zeta-a$, et substituant dans la quantité qui multiplie $\frac{dx}{R}$, on pourra lui donner la forme

$$\frac{A\zeta^3+B\zeta^2+C\zeta+D}{\zeta^n}=\frac{A}{\zeta^{n-3}}+\frac{B}{\zeta^{n-2}}+\frac{C}{\zeta^{n-1}}+\frac{D}{\zeta^n}.$$

En effectuant avec attention les calculs indiqués, remettant pour ζ sa valeur, multipliant le résultat par $\frac{dx}{R}$, et prenant l'intégrale de chaque terme, on trouvera

$$\frac{xR}{(x^2+a)^{n-1}}=-(2n-5)\gamma\int\frac{dx}{(x^2+a)^{n-3}R}-(2n-4)(\beta-3a\gamma)\int\frac{dx}{(x^2+a)^{n-2}R}\Big\}$$
$$-(2n-3)(3a^2\gamma-2a\beta+\alpha)\int\frac{dx}{(x^2+a)^{n-1}R}+(2n-2)(a^3\gamma-a^2\beta+a\alpha)\int\frac{dx}{(x^2+a)^nR}\Big\}.$$

Nous sommes en état maintenant d'exprimer $\int\frac{dx}{(x^2+a)^nR}$ par des intégrales de plus en plus simples, tant que n surpassera l'unité. Lorsqu'on sera parvenu à $\int\frac{dx}{(x^2+a)^1R}$, on aura $n=2$, $2n-4=0$, et l'intégrale proposée dépendra de

$$\int\frac{dx}{(x^2+a)R},\quad\int\frac{dx}{(x^2+a)^{-1}R}=\int(x^2+a)\frac{dx}{R}.$$

Quand x^2+a sera un diviseur de la quantité $\alpha+\beta x^2+\gamma x^4$, on aura $\alpha-\beta a+\gamma a^2=0$ et le terme multiplié par $a\alpha-\beta a^2-\gamma a^3$ disparoîtra ; on écrira $n+1$ au lieu de n, et on aura par ce moyen $\int\frac{dx}{(x^2+a)^nR}$ en $\int\frac{dx}{(x^2+a)^{n-1}R}$ et $\int\frac{dx}{(x^2+a)^{n-2}R}$, et on pourra pousser les réductions successives jusqu'à ce qu'on soit arrivé à $\int\frac{dx}{(x^2+a)R}$, qui se trouvera exprimé par $\int\frac{dx}{R}$ et $\int(x^2+a)\frac{dx}{R}$.

403. En rapprochant ces résultats de ceux du n°. précédent, il sera prouvé que, quelle que soit la fonction P, l'intégration de $\int\frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$ peut être ramenée à celle de

$$A\int\frac{dx}{(x^2+a)R}+B\int\frac{dx}{R}+C\int\frac{x^2dx}{R}.$$

Si on avoit des moyens pour obtenir ces dernières intégrales, au moins par approximation, comme on en a pour calculer les logarithmes et les arcs de cercle, on pourroit regarder comme intégrées toutes les expressions qui s'y rameneroient, de même qu'on regarde comme intégrées toutes celles qui conduisent à des logarithmes et à des arcs de cercle.

Les intégrales $\int\frac{dx}{(x^2+a)R}$; $\int\frac{dx}{R}$, $\int\frac{x^2dx}{R}$, sont de nouvelles fonctions transcendantes qu'il faut introduire dans le calcul ; et d'après ce qu'on vient de voir, il paroît que les travaux à faire sur l'intégration des fonctions d'une seule variable, doivent avoir pour objet l'analyse des espèces distinctes de fonctions transcendantes, et la recherche des moyens de les calculer par approximation et de les comparer entre elles. Nous donnerons dans la suite une idée de ce qui a été fait à cet égard, par rapport aux intégrales dont nous venons de parler ; mais pour le moment nous ferons connoître encore quelques cas assez étendus, qu'on peut y ramener.

404. 1°. Il est évident que $\int Q\,dx\,\frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A'+B'x+C'x^2}}$, Q désignant une fonction rationnelle de x, est un de ces cas, puisqu'en multipliant les deux termes de la fraction par $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, l'intégrale proposée prendra la forme de $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$, traitée n°. 399 et suivans.

2°. $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4+\delta x^6}}$, P désignant une fonction rationnelle de x, devient, en faisant $x^2=z$,

$$\int \frac{P\,dz}{2\sqrt{z}\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}}=\int \frac{P\,dz}{2\sqrt{\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4}};$$

mais par cette substitution P se changera en $M+N\sqrt{z}$, M et N étant aussi des fonctions rationnelles de z: on aura donc alors

$$\int \frac{M\,dz}{2\sqrt{\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4}}+\int \frac{N\,dz}{2\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}},$$

expressions dont les deux termes rentrent dans la forme générale du n°. 399.

3°. $\int \frac{P\,dx}{\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$, P étant toujours une fonction rationnelle de x, se ramène encore à la même forme. D'après ce qu'on a vu page 56, on pourra changer P en $M+Nx$, M et N étant des fonctions paires de x, et l'intégrale proposée deviendra

$$\int \frac{M\,dx}{\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}+\int \frac{Nx\,dx}{\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}.$$

Traitons d'abord la seconde partie, et pour cela faisons $\sqrt[4]{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=z$; nous aurons $x^2=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\gamma z^4}}{2\gamma}$; après la substitution de cette valeur, et de celle de dx qui en résulte, la fonction $\int \frac{Nx\,dx}{z}$, ne contiendra d'autre radical que $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\gamma z^4}$, et pourra être ramenée à la forme

$\int \frac{Q\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\gamma\zeta^4}}$, dans laquelle Q est une fonction rationnelle de ζ^4.

Occupons-nous maintenant de la première partie $\int \frac{M dx}{\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$.

En faisant $\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}=xy$, on trouvera

$$x^2=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha y^4}}{2(\gamma-y^4)}.$$

Si pour abréger on fait $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha y^4}=u$, on trouvera

$\gamma-y^4=\frac{\beta^2-u^2}{4\alpha}$, $x^2=-\frac{2\alpha}{\beta+u}$, $xdx=\frac{\alpha du}{(\beta+u)^2}$, $(\beta+u)^2=\frac{4\alpha^2}{x^4}$;

d'où $dx=\frac{x^3 du}{4\alpha}$. Mettant pour du sa valeur $\frac{8\alpha y^3 dy}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha y^4}}$, il viendra $dx=\frac{2x^3y^5dy}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha y^4}}$; divisant ce résultat par xy, valeur supposée du radical $\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}$, on aura enfin

$$\frac{dx}{xy}=\frac{2x^2y^2dy}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha y^4}}.$$

Au moyen de cette expression et de celle de x on transformera l'intégrale proposée en une autre composée de deux parties, savoir: une première qui sera rationnelle, et une seconde qui ne contiendra que le radical $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha y^4}$, et qu'on réduira facilement à $\int \frac{Ry^2dy}{\sqrt{\beta^2-4\alpha y+4\alpha y^4}}$, dans laquelle R désigne une fonction rationnelle de y^4.

4°. $\int P dx \sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}$, est susceptible des mêmes transformations que les précédentes, lorsque P est une fonction rationnelle de x. Il suit de là qu'on peut ramener à la formule du n°. 399, l'intégrale $\int P dx\,(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)^{\pm\frac{1}{4}}$; car en multipliant et en divisant par $(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)^4$, on aura

$\int \frac{P\,dx\,(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)}{\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$, ou $\int \frac{P\,dx\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}$,

résultats qui sont compris dans les deux précédens.

5°. $\int P\,dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^{\pm\frac{1}{3}}$ se traitera en faisant disparoître du radical $\sqrt[3]{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}$, le terme δx^3 par la supposition de..... $\sqrt[3]{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}=\sqrt[3]{\alpha}+x\zeta$,

ou par celle de $\sqrt[3]{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}=x\sqrt[3]{\delta}+\zeta$,

et après avoir élevé les deux membres de ces équations au cube, elles ne renfermeront plus que la première et la seconde puissance de x; l'expression de cette dernière variable ne contiendra donc qu'un radical quarré, sous lequel la variable ζ ne passera pas la troisième puissance, et par conséquent l'intégrale proposée étant transformée en ζ, se trouvera comprise dans la formule du n°. 399.

6°. $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\gamma x^4+\beta x^5+\alpha x^6}}$ peut encore se ramener à la formule du n°. 399, parce que dans la quantité comprise sous le radical, les coefficiens des termes également éloignés des extrêmes sont les mêmes. En effet, on peut donner à cette quantité la forme

$$x^3\left[\alpha\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\beta\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\gamma\left(x+\frac{1}{x}\right)+\delta\right];$$

faisant ensuite $x+\frac{1}{x}=\zeta$, on trouvera

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\zeta^2-2, \qquad x^3+\frac{1}{x^3}=\zeta^3-3\zeta;$$

substituant, il viendra $x^3[\alpha(\zeta^3-3\zeta)+\beta(\zeta^2-2)+\gamma\zeta+\delta]$: par là on changera l'intégrale proposée en

$$\int \frac{Px^{-\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{\delta-2\beta+(\gamma-3\alpha)\zeta+\beta\zeta^2+\alpha\zeta^3}}.$$

La résolution de l'équation $x+\frac{1}{x}=\zeta$, par rapport à x, donne $x=\frac{1}{2}\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-4}$; cette valeur étant mise dans la fonction P,

lui fera prendre la forme $M \pm N\sqrt{\zeta^2-4}$, M et N désignant des fonctions rationnelles de ζ; et en représentant le radical par R, on aura à intégrer $\int \frac{Mx^{-\frac{5}{2}}dx}{R} + \int \frac{Nx^{-\frac{5}{2}}dx\sqrt{\zeta^2-4}}{R}$. On tireroit de l'expression de x, celle de $x^{-\frac{5}{2}}dx$; mais on y parviendra plus simplement ainsi qu'il suit. L'équation $x + \frac{1}{x} = \zeta$, donne $x^2+1 = x\zeta$, et on a par conséquent $x^2+2x+1 = x\zeta+2x = x(\zeta+2)$: on trouvera de même $x^2-2x+1 = x\zeta-2x = x(\zeta-2)$. Prenant les racines quarrées, il vient

$$x+1 = \pm x^{\frac{1}{2}}\sqrt{\zeta+2}, \quad x-1 = \pm x^{\frac{1}{2}}\sqrt{\zeta-2};$$

retranchant la seconde de ces équations de la première, il en résulte

$$2 = \pm x^{\frac{1}{2}}(\sqrt{\zeta+2}-\sqrt{\zeta-2}) \text{ ou } 2x^{-\frac{1}{2}} = \pm(\sqrt{\zeta+2}-\sqrt{\zeta-2});$$

différentiant on trouve

$$x^{-\frac{5}{2}}dx = \pm\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta+2}} - \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta-2}}\right) = \mp\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\zeta\sqrt{\zeta+2}-d\zeta\sqrt{\zeta-2}}{\sqrt{\zeta^2-4}}\right)$$

en substituant $\pm\frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta+2}} - \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta-2}}\right)$ au lieu de $x^{-\frac{5}{2}}dx$, dans la première partie $\int \frac{Mx^{-\frac{5}{2}}dx}{R}$, elle deviendra réductible à la forme demandée, et il en sera de même de la seconde partie $\int \frac{Nx^{-\frac{5}{2}}dx\sqrt{\zeta^2-4}}{R}$, lorsqu'au lieu de $x^{-\frac{5}{2}}dx$, on y mettra $\mp\frac{1}{2}\frac{(d\zeta\sqrt{\zeta+2}-d\zeta\sqrt{\zeta-2})}{\sqrt{\zeta^2-4}}$; car elle deviendra

$$\mp\tfrac{1}{2}\left\{\frac{Nd\zeta\sqrt{\zeta+2}}{R} - \frac{Nd\zeta\sqrt{\zeta-2}}{R}\right\};$$

multipliant et divisant la première fraction par $\sqrt{\zeta+2}$, la seconde par $\sqrt{\zeta-2}$, les deux résultats rentreront dans la formule du n°. 399.

7°. $\int \frac{Pdy}{\sqrt{\beta+\gamma y^2+\delta y^4+\gamma y^6+\beta y^8}}$ dépend de l'intégrale précédente ; car si on décompose P en $M+Ny$, M et N étant des fonctions paires de y, et qu'on fasse $y^2=x$, on aura d'abord une première partie $\int \frac{Mdx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{\beta+\gamma x+\delta x^2+\gamma x^3+\beta x^4}}$. La quantité comprise sous le radical pourra être mise sous la forme

$$x^2\left[\beta\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\gamma\left(x+\frac{1}{x}\right)+\delta\right],$$

et en la transformant comme ci-dessus, il viendra

$\int \frac{Mx^{-2}dx}{\sqrt{\beta(\zeta^2-2)+\gamma\zeta+\delta}}$, résultat qu'on obtiendroit en faisant $\alpha=0$, dans l'intégrale précédente. La seconde partie de l'intégrale proposée sera $\int \frac{Nydy}{\sqrt{\beta+\gamma y^2+\delta y^4+\gamma y^6+\beta y^8}}$ et deviendra $\int \frac{\frac{1}{2}Ndx}{\sqrt{\beta+\gamma x+\delta x^2+\gamma x^3+\beta x^4}}$ par la supposition de $y^2=x$ (*).

(*) La transformation dont nous avons fait usage dans les deux derniers cas ci-dessus a une propriété trop importante dans la Théorie des Equations, pour ne pas l'indiquer ici, puisqu'elle ne se trouve point dans les Elémens d'Algèbre. Par son moyen on abaisse au degré m toute équation du degré $2m$, comprise dans la formule $x^{2m}+\alpha x^{2m-1}+\beta x^{2m-2}+\gamma x^{2m-3}\ldots+\gamma x^3+\beta x^2+\alpha x+1=0$, dans laquelle les coefficiens des termes également éloignés des extrêmes sont les mêmes et qu'on peut écrire en conséquence de la manière suivante

$$x^m\left[x^m+\frac{1}{x^m}+\alpha\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\beta\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\gamma\left(x^{m-3}+\frac{1}{x^{m-3}}\right)+\ldots\right]=0.$$

En faisant $x+\frac{1}{x}=\zeta$, il en résulte en général

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\zeta^n+n\zeta^{n-2}+\frac{n(n-3)}{2}\zeta^{n-4}+\frac{n(n-4)(n-5)}{2\cdot 3}\zeta^{n-6}+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2\cdot 3\cdot 4}\zeta^{n-8}+\text{etc.}$$

et après la substitution des résultats tirés de cette dernière formule, il ne restera dans l'équation proposée que ζ^m et les puissances qui lui sont inférieures.

On sait que les équations $x^{2m+1}\pm 1=0$, étant divisées par le facteur $x\pm 1$, donnent une équation de la forme de celle que nous venons de considérer, et

405. Voilà à peu près ce qu'on sait de plus général sur l'intégration des fonctions d'une seule variable dans l'état actuel de l'Analyse. En compulsant avec soin les collections Académiques, sur-tout celle de Petersbourg, on trouveroit encore quelques formules particulières intégrées ou ramenées à des cas connus, par des transformations ingénieuses; mais je n'aurois pu me livrer à ces détails, sans sortir des bornes que l'étendue de la carrière qui me reste à parcourir, m'impose nécessairement: je traiterai cependant encore les formules

$$\frac{dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{2x^m-1}} \text{ et } \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{2x^m-1}}$$

integrées par Lexell, dans les Actes de Petersbourg (1781 2^eme^ partie).

La première devient rationnelle, lorsqu'on fait $\frac{\sqrt[2m]{2x^{m-1}-1}}{x}=u$; car on a $1-u^{2m}=\frac{(1-x^m)^2}{x^{2m}}$, $u^{2m-1}du=\frac{dx(1-x^m)}{x^{2m+1}}$; divisant les deux membres de cette dernière équation, par ceux de la première, on aura $\frac{u^{2m-1}du}{1-u^{2m}}=\frac{dx}{x(1-x^m)}$; divisant encore le premier membre de cette dernière par u, et le second par la valeur de u, il viendra enfin $\frac{u^{2m-2}du}{1-u^{2m}}=\frac{dx}{(1-x^m)\sqrt[m]{2x^m-1}}$.

Pour traiter la seconde différentielle proposée, Lexell pose $\sqrt[2m]{2x^m-1}=y$, ce qui donne $\frac{1}{2}(1-y^{2m})=1-x^m$; en différentiant

---

qu'il en arrive autant à l'équation $x^{2m+2}\pm 1=0$, lorsqu'on la divise par $x^2\pm 1$; il suit donc de là que la résolution complète de ces équations peut être ramenée à celle d'une équation du degré m, et c'est là tout ce qu'on a pu faire jusqu'à présent sans avoir recours aux propriétés des sinus et des cosinus.

L'équation $x^{2m}+\alpha x^{2m-1}+$ etc. s'appelle réciproque, parce qu'elle ne change pas lorsqu'on y met $\frac{1}{x}$ au lieu de x; elle a été remarquée d'abord par Moivre: voyez *Miscellanea analytica*, les Mém. de Berlin, années 1770, p. 165 et 1771, p. 240.

il trouve $y^{2m-1}dy = x^{m-1}dx$, d'où

$$\frac{2y^{2m-1}dy}{1-y^{2m}} = \frac{x^{m-1}dx}{1-x^m} \text{ et } \frac{2y^{2m-1}dy}{1-y^{2m}} = \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{2x^m-1}};$$

De l'intégration par les séries.

406. L'intégrale $\int X dx$ s'obtient facilement lorsqu'on a développé la fonction X en série, parce qu'on n'a plus à intégrer que des monomes auxquels s'applique immédiatement la règle du n°. 362. En effet, soit $X = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{etc.}$ si on multiplie les deux membres de cette équation par dx, et qu'on intégre séparément chaque terme du second, il viendra

$$\int X dx = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{Cx^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \text{etc.} + const.$$

Lorsqu'on rencontrera dans le développement de x un terme de la forme $\frac{A}{x}$, il en résultera dans l'intégrale, le terme $A1x$.

407. La fonction la plus simple qu'on puisse réduire en série, est $\frac{1}{a+x}$, et il en résulte $\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.}$; d'où

$$\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.} + const.$$

mais on sait d'ailleurs que $\int \frac{dx}{a+x} = 1(a+x)$, on aura donc

$$1(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.} + const.$$

Pour trouver ce qu'exprime la constante, il n'y a qu'à faire $x=0$; on aura dans cette supposition $1a = const.$, et par conséquent

$$1(a+x) - 1a = 1\left(1+\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.}$$

résultat conforme à celui du n°. 26 de l'Introduction.

En intégrant $\frac{-dx}{a-x}$, après avoir réduit $\frac{1}{a-x}$ en série, on trouvera

$$1\left(1-\frac{x}{a}\right) = -\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} - \text{etc.};$$

combinant cette équation avec la précédente, par addition et

par soustraction, on aura

$$1\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=-\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^4}{4a^4}-\frac{x^6}{6a^6}-\text{etc.};$$

$$1\left(\frac{a+x}{a-x}\right)=2\left(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\text{etc.}\right).$$

Ces séries une fois trouvées, il est facile d'en déduire d'autres qui soient plus convergentes, ainsi que nous l'avons fait dans l'Introduction.

408. Soit la différentielle $\frac{adx}{a^2+x^2}$, qui peut se mettre sous la forme $\frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}$, et qui appartient par conséquent à l'arc dont la tangente $=\frac{x}{a}$; en réduisant $\frac{a}{a^2+x^2}$ en série, il viendra

$$\frac{a}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^4}{a^5}-\frac{x^6}{a^7}\text{ etc.};$$

multipliant par dx, et intégrant chaque monome en particulier; on aura $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{a}\right)+const.=$

$$\frac{x}{a}-\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}-\frac{x^7}{7a^7}+\text{etc.}+const.$$

Si on veut tirer de cette équation la valeur du plus petit des arcs dont la tangente est $\frac{x}{a}$, il faudra supprimer la constante arbitraire, puisque l'arc cherché est nul lorsque $x=0$, et on aura

$$\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}-\frac{x^7}{7a^7}+\text{etc.}$$

résultat conforme à celui du n°. 38 de l'Introduction.

En opérant de même sur $\frac{x^m dx}{a^n+x^n}$, on trouve

$$\int\frac{x^m dx}{a^n+x^n}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n}-\frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)a^{2n}}+\frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)a^{3n}}-\text{etc.}+const.$$

On pourroit aussi développer $\frac{1}{a^n+x^n}$, suivant les puissances négatives de x, on auroit dans ce cas

$$\frac{1}{x^n+a^n} = \frac{1}{x^n} - \frac{a^n}{x^{2n}} + \frac{a^{2n}}{x^{3n}} - \frac{a^{3n}}{x^{4n}} + \text{etc.}$$

et il viendroit après avoir multiplié par $x^m dx$, et intégré

$$\int \frac{x^m dx}{x^n+a^n} = -\left\{ \frac{1}{(n-m-1)x^{n-m-1}} + \frac{a^n}{(2n-m-1)x^{2n-m-1}} - \frac{a^{2n}}{(3n-m-1)x^{3n-m-1}} + \text{etc.} + \textit{const.} \right\}$$

Cette dernière série sera convergente lorsque x surpassera la quantité a, et qu'on aura en même tems $m < n$ et $n > 1$; mais il faudra de plus, pour qu'elle ne renferme que des termes algébriques, qu'aucun des diviseurs, compris tous dans la forme $in-m-1$, ne devienne nul. Cette circonstance auroit lieu nécessairement si $m+1$ étoit un multiple de n, et dans ce cas, la différentielle développée contiendroit un terme de la forme $a^{(i-1)n}\frac{dx}{x}$, dont l'intégrale seroit $a^{i-n}\,l\,x$.

Si on fait dans le résultat ci-dessus $m=0$, $n=2$ et $a=1$, il devient

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

Mais quoique l'expression $\frac{dx}{1+x^2}$, soit la différentielle de l'arc dont la tangente est x, il n'en faut pas conclure que la série que nous venons d'obtenir, soit le développement de cet arc, puisqu'elle devient infinie lorsque $x=0$. La considération de la constante arbitraire levera cette difficulté, si l'on fait attention que pour connoître la vraie valeur d'une série, il faut toujours partir du cas où elle est convergente. Or la série

$-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.}$ l'est d'autant plus, que x est plus grand, et elle s'évanouit lorsque x est infini; l'équation

$$\text{arc}\,(\text{tang}=x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

se changera dans cette limite en arc de $90^\circ = \frac{\pi}{2} = \textit{const.}$ Substi-

tuant cette valeur de la constante, on aura

$$\text{arc}\,(\text{tang.} = x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.}$$

On pourroit intégrer aussi la fraction rationnelle $\frac{Udx}{V}$ (n°. 364), en développant en série l'expression $\frac{U}{V}$; mais ce moyen ne conduiroit qu'à des résultats fort compliqués et rarement convergens: d'ailleurs ces calculs sont à peu près inutiles, puisqu'on sait ramener cette différentielle aux logarithmes et aux arcs de cercles, faciles à évaluer par les tables qu'on en a.

409. La formule $\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ est facile à intégrer par le développement de la quantité $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ en série, et il vient pour résultat.....

$$\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{x^m}{m} + \frac{p}{q}\frac{b}{a}\frac{x^{m+n}}{m+n} + \frac{p(p-q)}{1\cdot 2q^2}\frac{b^2}{a^2}\frac{x^{m+2n}}{m+2n} + \frac{p(p-q)(p-2q)}{1\cdot 2\cdot 3q^3}\frac{b^3}{a^3}\frac{x^{m+3n}}{m+3n} + \text{etc.} + const.\right\}$$

Si on vouloit avoir une série descendante par rapport à x, il faudroit donner à la différentielle proposée la forme $x^{m+\frac{np}{q}-1}dx\,(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$, et on trouveroit après avoir développé $(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$, multiplié le résultat par $x^{m+\frac{np}{q}-1}dx$ et intégré...

.....

$$\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = b^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{qx^{m+\frac{pn}{q}}}{mq+np} - \frac{pa}{qb}\frac{qx^{m+\frac{(p-q)n}{q}}}{mq+(p-q)n} + \frac{p(p-q)a^2}{1\cdot 2q^2b^2}\frac{qx^{m+\frac{(p-2q)n}{q}}}{mq+(p-2q)n} - \text{etc.} + const.\right\}.$$

Tant que les quantités a et b seront positives toutes deux, ou que q sera un nombre impair, on pourra se servir indifféremment de cette série ou de la précédente; mais lorsque q sera pair, la première formule deviendra imaginaire par le facteur $a^{\frac{p}{q}}$ si a^p est négatif, et la même chose arrivera à la seconde, si b^p est négatif.

410. Soit $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, expression qui est la différentielle de l'arc dont le sinus $=x$; on aura

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\text{etc.}$$

et de là, $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\text{etc.}+const.$

En supprimant la constante, la série s'anéantira lorsque $x=0$; elle donnera par conséquent la valeur du plus petit des arcs dont le sinus $=x$, comme dans le n°. 104.

Voici encore quelques résultats faciles à obtenir d'après ce qui précède, mais qu'il est bon de connoître.

1°. $\frac{dx}{\sqrt{x-xx}}=\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1-x}}$; faisant $\sqrt{x}=u$, on a $\frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$; mais par la série précédente il vient

$$\int\frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}=2\left(u+\frac{1}{2}\frac{u^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{u^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{u^7}{7}+\text{etc.}\right)+const.$$

donc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-xx}}=2\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^4}{7}+\text{etc.}\right)\sqrt{x}+const.$$

2°. $dx\sqrt{2ax-x^2}=(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$;

or $\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\frac{x}{2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{4a^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{8a^3}-\text{etc.}$

donc

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2}=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5.2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7.4a^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9.8a^3}-\text{etc.}\right)\sqrt{2a}\Bigg\}+conse.$$

$$\text{ou }\int dx\sqrt{2ax-x^2}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{x}{5.2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{7.4a^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{9.8a^3}-\text{etc.}\right)2x\sqrt{2ax}\Bigg\}+conse.$$

L'intégrale $\int dx\sqrt{2ax-xx}$ peut s'exprimer de plusieurs manières

par des arcs de cercle. Elle s'obtiendra d'abord en rendant rationnelle par la méthode du n°. 377, la différentielle proposée ; on y parviendra encore en faisant $x=a-u$, ce qui changera $dx\sqrt{2ax-xx}$ en $-du\sqrt{a^2-u^2}$, ou $-du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}$. Si on compare cette différentielle avec celle du premier membre de la formule (III) du tableau (page 40), on aura $m-1=0$, $n=2$, $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$, $b=-1$, et il faudra écrire a^2 au lieu de a, u au lieu de x; il viendra alors

$$-\int du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}=-\frac{2u(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}+2a^2\int du(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}}{4},$$

ou $-\int du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2}-\frac{1}{2}a^2\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$; mais

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\text{arc}\left(\sin=\frac{u}{a}\right)\text{: donc}$$

$$\int dx\sqrt{2ax-xx}=-\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-xx}-\tfrac{1}{2}a^2.\text{arc}\left(\sin=\frac{a-x}{a}\right)+const.$$

La comparaison de ce résultat avec la série obtenue ci-dessus donne une expression très-convergente de la demi-circonférence du cercle. Déterminons d'abord la constante arbitraire, de manière que la fonction $-\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-xx}-\frac{1}{2}a^2.\text{arc}\left(\sin=\frac{a-x}{a}\right)+const.$ s'évanouisse lorsque $x=0$, et pour cela supposons x nul et égalons ce résultat à zéro ; il viendra $-\frac{1}{2}a^2.\text{arc}(\sin=1)+const.=0$, d'où

$$const.=\tfrac{1}{2}a^2.\text{arc}\,(\sin=1)=\tfrac{1}{2}a^2.\text{arc de }90°.$$

En substituant cette valeur, il faudra observer que

$$-\tfrac{1}{2}x^2.\text{arc}\left(\sin=\frac{a-x}{a}\right)+\tfrac{1}{2}a^2.\text{arc de}\,90°.=\tfrac{1}{2}a^2.\text{arc}\left(\cos=\frac{a-x}{a}\right)$$

et on aura pour résultat

$$-\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-xx}+\tfrac{1}{2}a^2.\text{arc}\left(\cos=\frac{a-x}{a}\right).$$

Cela fait, on effacera aussi la constante dans la série qui exprime $\int dx\sqrt{2ax^3-x^4}$, pour que cette série s'évanouisse lorsque $x=0$;

et on aura $-\frac{1}{3}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}+\frac{1}{3}a^2.\,\text{arc}\left(\cos=\frac{a-x}{a}\right)=$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{x}{2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{7.4a^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{9.8a^3}-\text{etc.}\right)2x\sqrt{2ax}.$$

Posant ensuite $x=\frac{a}{2}$, il viendra

$$\text{arc}\left(\cos\frac{a-x}{a}\right)=\text{arc}\left(\cos=\tfrac{1}{2}\right)=\text{arc de } 60^\circ.=\frac{\pi}{6},$$

et il en résultera

$$-\tfrac{1}{8}a^2\sqrt{3}+\frac{\pi a^2}{6}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2.5.2^2}-\frac{1.1}{2.4.7.2^4}-\frac{1.1.3}{2.4.6.9.2^6}-\text{etc.}\right)a^2,$$

d'où on tirera

$$\pi=\tfrac{3}{4}\sqrt{3}+6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2.5.2^2}-\frac{1.1}{2.4.7.2^4}-\frac{1.1.3}{2.4.6.9.2^6}-\text{etc.}\right).$$

La série trouvée page 70, pour l'arc dont le sinus est x, lorsqu'on y fait $x=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ=\sin\frac{\pi}{6}$, donne

$$\pi=3\left(1+\frac{1}{2.3.2^2}+\frac{1.3}{2.4.5.2^4}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^6}+\text{etc.}\right).$$

En retranchant cette expression de π de la précédente, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}&\frac{3\sqrt{3}}{4}+6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2.5.2^2}-\frac{1.1}{2.4.7.2^4}-\frac{1.1.3}{2.4.6.9.2^6}-\text{etc.}\right)\\&-3\left(1+\frac{1}{2.3.2^2}+\frac{1.3}{2.4.5.2^4}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^6}+\text{etc.}\right)\end{aligned}\right\}=0,$$

équation de laquelle on tirera

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}=1+\frac{3.11}{2.3.5.2^5}+\frac{3.31}{2.4.5.7.2^4}+\frac{3.173}{2.4.6.7.9.2^8}+\text{etc.}$$

Ce résultat paroît d'autant plus curieux, qu'on ne voit pas tout de suite comment on pourroit y parvenir autrement, et nous ne l'avons donné que pour montrer de quelle manière l'intégration peut conduire à la connoissance des séries, mais nous réserverons les détails relatifs à cet objet pour le traité des séries.

3°. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ donne après la réduction de $\sqrt{1+x^2}$ en série et l'intégration,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\textit{const.}$$

on

on trouveroit par la méthode du n°. 378

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = l(x+\sqrt{1+x^2}) + const.$$

$$4°. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = lx - \frac{1}{2.2x^2} - \frac{1.3}{2.4.4x^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6.6x^6} - \text{etc.} + const.$$

on a d'ailleurs par le n°. 378 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = l(x+\sqrt{x^2-1}) + const.$

La série précédente renferme la transcendante lx, mais on peut en obtenir une autre entiérement algébrique en faisant $x = 1+u$; par ce moyen $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ devient $\int \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{2u}} \left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; développant $\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, multipliant chaque terme par $\frac{du}{\sqrt{2u}}$ et intégrant on trouve

$$\int \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{2.3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5.4} - \frac{1}{2}\frac{3.5}{4.6}\frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7.8} + \text{etc.}\right) + const.$$

$$\text{ou} \int \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} = \left(1 - \frac{1.u}{2.3.2} + \frac{1.3u^2}{2.4.5.4} - \frac{1.3.5u^3}{2.4.6.7.8} + \text{etc.}\right)\sqrt{2u} + const.$$

411. Les exemples précédens doivent suffire pour familiariser le lecteur avec l'application du développement en série, à l'intégration; mais quand on a pour but de parvenir à des valeurs approchées des intégrales dont on ne peut obtenir l'expression algébrique, il est important d'avoir plusieurs séries pour exprimer la même intégrale, afin de choisir celle qui se trouve convergente pour la valeur particulière qu'on se propose de donner à la variable x. On peut, dans beaucoup de cas, se procurer en même tems une série ascendante et une série descendante, en développant de ces deux manières le coefficient différentiel. Les diverses réductions des intégrales à d'autres plus simples, qui ont été trouvées dans les n°s. 387—390 et dont le tableau de la page 40 offre le résultat, donnent aussi des valeurs en séries, lorsqu'on les imagine continuées à l'infini.

La formule (VII), tirée de la formule (II) (n°. 387) exprime

l'intégrale $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, par une série ordonnée suivant les puissances descendantes de x, lorsqu'on néglige le dernier terme, ce qui est permis quand on suppose x très-grand, et qu'en considérant beaucoup de termes, le nombre i se trouve tel que le coefficient différentiel $x^{m-in-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{x^{in-m+1}}$, compris dans le dernier terme, est très-petit.

La formule (VIII), tirée de la formule (IV) convient au cas où m est négatif; et si on y change m en $-m$, elle donnera $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ en une suite ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. On pourra l'employer lorsque cette variable sera très-petite, parce qu'alors le coefficient différentiel $x^{m+in-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ peut être négligé quand i est très-considérable.

Il faut à ce sujet se rappeller des remarques qui ont été faites dans le n°. 391, sur les cas où les formules dont celles-ci sont tirées, cessent d'être applicables, à cause de l'évanouissement de leur dénominateur.

412. Donnons quelques exemples de l'usage des formules (VII) et (VIII) pour la réduction en série, et commençons par faire servir la dernière à développer $\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$.

On a dans cet exemple $-m-1=0$, ou $m=-1$, $n=2$, $p=-1$, $q=2$; $a=1$, $b=-1$; et avec ces valeurs on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = (x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}x^5+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}x^7+\text{etc.})\sqrt{1-x^2}+\textit{const.}$$

Cette formule donne un résultat digne de remarque lorsqu'on y fait $x=\frac{1}{2}$, cas auquel, en supposant la constante nulle, on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \text{arc}\,(\sin=x) = \text{arc de } 30^\circ = \frac{\pi}{6};$$ car il vient

$$\frac{\pi}{6} = (1+\frac{2}{3\cdot4}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5\cdot4^2}+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7\cdot4^3}+\text{etc.})\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

413. Soit encore $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$: cet exemple ne diffère du précédent

qu'en ce que $b=+1$, au lieu de $b=-1$, et la formule générale donne

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2.4}{3.5}x^5-\frac{2.4.6}{3.5.7}x^7+\text{etc.})\sqrt{1+x^2}+const.$$

On observera que $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=l(x+\sqrt{1+xx})+const.$ d'où il suit que la série précédente est le développement de la fonction $l(x+\sqrt{1+xx})$, ou du moins n'en diffère que par une constante.

414. Nous allons appliquer la formule (VII) au développement de l'expression $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-xx}}$, suivant les puissances descendantes de x.

En comparant $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-xx}}$ avec $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, on trouve $m-1=-1$, ou $m=0$, $n=2$, $p=-1$, $q=2$, $a=1$, $b=-1$, et la série devient

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-xx}}=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3x^4}+\frac{2.4}{3.5x^6}+\frac{2.4.6}{3.5.7x^8}+\text{etc.}\right)\sqrt{1-x^2}+const.$$

En intégrant $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-xx}}$ (n°. 377) on a pour résultat

$l.\left(\frac{1-\sqrt{1-xx}}{x}\right)+const.$ mais comme lorsqu'on fait $x=1$, la partie variable de cette fonction s'anéantit ainsi que celle de la série précédente, il s'ensuit que l'une est le développement de l'autre.

On passera de $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-xx}}$ à $\int\frac{dx}{x\sqrt{xx-1}}$, en multipliant la première par $\frac{1}{\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}$; en faisant la même multiplication sur la série et en observant que $\sqrt{-1}.\sqrt{1-xx}=\sqrt{xx-1}$, on aura le développement de $\int\frac{dx}{x\sqrt{xx-1}}$.

415. L'expression $\int\frac{dx.1}{\sqrt{a+bx^4}}$, développée par la formule (VIII), donne la série suivante

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{3bx^5}{5a^2}+\frac{3\cdot7b^2x^9}{5\cdot9a^3}-\frac{3\cdot7\cdot11b^3x^{13}}{5\cdot9\cdot13a^4}+\text{etc.}\right)\sqrt{a+bx^4}+\textit{const.}$$

en se servant de la formule (VII) on trouve

$$-\left(\frac{1}{bx^3}-\frac{3a}{5b^2x^7}+\frac{3\cdot7\cdot a^2}{5\cdot9\cdot b^3x^{11}}-\frac{3\cdot7\cdot11a^3}{5\cdot9\cdot13x^{15}}+\text{etc.}\right)\sqrt{a+bx^4}+\textit{const.}$$

416. Le but de la réduction des différentielles en série est de les transformer dans une suite de termes dont chacun soit intégrable en particulier, et il n'est pas nécessaire pour cela que ces termes soient des monomes.

Si on avoit par exemple $\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$, et que e fût une quantité fort petite, on pourroit développer $\sqrt{1-e^2x^2}$ dans une série très-convergente, parce que dans la différentielle proposée x^2 ne peut jamais surpasser 1, à cause du radical $\sqrt{1-x^2}$. On aura

$$\sqrt{1-e^2x^2}=1-\frac{1}{2}e^2x^2-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}e^4x^4-\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}e^6x^6-\text{etc.}$$

et il viendra à intégrer la suite

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{1}{2}e^2x^2-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}e^4x^4-\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}e^6x^6-\text{etc.}\right);$$

dont chaque terme rentre dans la formule $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, traitée dans les n^os^ 392, 393, et substituant au lieu de

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{etc.}$$

les expressions données dans le n°. 392, il en résultera

$$\begin{aligned}\int\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}&=A\\&+\frac{1}{2}e^2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-A\right]\\&+\frac{1\cdot1}{2\cdot4}e^4\left[\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}A\right]\\&+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}e^6\left[\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1\cdot5}{4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}A\right]\\&\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\textit{const.}\end{aligned}$$

série dans laquelle A représente un arc de cercle dont le sinus $= x$.

417. Dans l'exemple ci-dessus, l'intégration de chaque terme de la suite n'a souffert aucune difficulté; mais si on avoit à intégrer une série de la forme $(A+A'U+A''U^2+A'''U^3+\text{etc.})\,V\,dx$, dans laquelle U et V représentent des fonctions quelconques de x, il pourroit être assez difficile dans certains cas d'intégrer chaque terme en particulier.

Lagrange réduit ces opérations à la seule intégration de la différentielle $\frac{V\,dx}{1-aU}$, et il développe le résultat en série ordonnée suivant les puissances de a; dans cette dernière, que je représenterai par

$$a^0X+aX'+a^2X''+a^3X'''+\text{etc.}$$

X, X', X'', X''', étant des fonctions de x, il remplace les puissances de a par les coefficiens A, A', A'', etc. de la suite proposée, et il trouve ainsi pour l'intégrale demandée

$$AX+A'X'+A''X''+A'''X'''+\text{etc.}$$

Dans l'exemple précédent, la formule $\frac{V\,dx}{1-aU}$ devient

$\frac{dx}{(1-ax^2)\sqrt{1-x^2}}$, expression qui, en faisant $\sqrt{\frac{1-x^2}{1-ax^2}}=y$,

se change en $-\frac{dy}{\sqrt{1-a}.\sqrt{1-y^2}}$ et dont l'intégrale est

$\frac{1}{\sqrt{1-a}}$. arc $(\cos=y)+const.$ remettant pour y sa valeur on aura

$$\frac{1}{\sqrt{1-a}}.\text{arc}\left(\cos=\sqrt{\frac{1-x^2}{1-ax^2}}\right)+const.$$

Les conditions qu'on s'imposera dans la détermination de la constante de la fonction $\int\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$, devront être appliquées à l'intégrale trouvée ci-dessus. Si l'on vouloit, par exemple, que $\int\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ fût nulle lorsque $x=0$, on égaleroit aussi à zéro, après la supposition de $x=0$, le résultat obtenu précédemment, et

comme la partie variable s'évanouit d'elle-même, on voit que la constante doit être nulle dans cette hypothèse. Cela fait, on développera la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-a}}\text{arc}\left(\cos = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-ax}}\right)$ en série suivant les puissances de a, par les méthodes données dans le chapitre II du Calcul différentiel, et on remplacera dans cette série les puissances de a par les coefficiens qui multiplient celles de x^n dans la série proposée.

418. Le procédé que nous venons d'exposer peut se démontrer comme il suit: la différentielle $\frac{V\,dx}{1-aU}$ étant réduite en série suivant les puissances de a, deviendra

$$(1+aU+a^2U^2+a^3U^3+\text{etc.})V\,dx;$$

prenant l'intégrale de chacun de ses termes, on aura

$$\int\frac{V\,dx}{1-aU}=a^0\int V\,dx+a\int UV\,dx+a^2\int U^2V\,dx+a^3\int U^3V\,dx+\text{etc.}$$

Mais d'un autre côté si on fait $\int\frac{V\,dx}{1-aU}=X$, et qu'on développe X en série suivant les puissances de a; on aura encore

$$\int\frac{V\,dx}{1-aU}=a^0X_1+aX_1'+a^2X_1''+a^3X_1'''+\text{etc.}$$

X_1, X_1', X_1'', etc. étant des fonctions connues de x; comparant les termes de ce résultat avec le précédent, on trouve

$$\begin{aligned}\int V\,dx &= X_1\\ \int UV\,dx &= X_1'\\ \int U^2V\,dx &= X_1''\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

il est évident maintenant qu'en remplaçant dans la série $a^0X_1+aX_1'+a^2X_1''+\text{etc.}$ les puissances de a par les coefficiens A, A', A'', etc. on aura l'intégrale de la série proposée

$$(A+A'U+A''U^2+\text{etc.})V\,dx.$$

Il est bon de remarquer que X_1 est ce que devient X lorsqu'on y fait $a=0$, et que X_1', X_1'' etc. représentent les valeurs de $\frac{dX}{da}$, $\frac{1}{1.2}\frac{d^2X}{da^2}$ etc. dans la même circonstance, (n°. 100).

419. J'exposerai encore briévement comment il faudroit s'y prendre pour intégrer par les séries la différentielle $\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$, lorsque e diffère peu de l'unité, parce que le résultat servira dans la suite.

La fonction $\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ se décompose en $\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1+ex}}{\sqrt{1+x}}$; mais on a $\frac{ex+1}{x+1}=e+\frac{1-e}{x+1}$; la différentielle proposée se réduit donc à $\int dx.\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}}.\sqrt{e+\frac{1-e}{1+x}}$. Développant le radical $\sqrt{e+\frac{1-e}{1+x}}$ en série suivant les puissances de $1-e$, et faisant pour abréger $\frac{1-e}{e}=n$, on aura à intégrer

$$dx\sqrt{\frac{1-ex}{1-x}}.\sqrt{e}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{n}{1+x}-\frac{1.1}{2.4}\frac{n^2}{(1+x)^2}+\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{n^3}{(1+x)^3}-\text{etc.}\right\}$$

suite qui dépendra de la différentielle $\frac{\sqrt{e}}{1-\frac{a}{1+x}}.\sqrt{\frac{1-ex}{1-x}}$.

Pour traiter cette différentielle, on mettra la quantité $\frac{1}{1-\frac{a}{1+x}}$ sous la forme $\frac{1+x}{1-a+x}=1+\frac{a}{1-a+x}$, et on aura alors

$$\sqrt{e}\left\{dx\sqrt{\frac{1-ex}{1-x}}+\frac{adx}{1-a+x}\sqrt{\frac{1-ex}{1-x}}\right\}.$$

Faisant $\frac{1-x}{1-ex}=y^2$, il viendra $x=\frac{1-y^2}{1-ey^2}$, $dx=-\frac{2(1-e)ydy}{(1-ey^2)^2}$, et la différentielle proposée se changera en

$$\sqrt{e}\left\{-\frac{2(1-e)dy}{(1-ey^2)^2}-\frac{2a(1-e)dy}{(1-ey^2)[2-a-(1+e-ae)y^2]}\right\}.$$

Cette expression, dont le second terme se décompose en $\frac{2aedy}{1-ey^2} - \frac{2a(1+e-ae)dy}{2-a-(1+e-ae)y^2}$, s'intégre facilement puisqu'elle est rationnelle, et donne pour résultat

$$-\frac{(1-e)y\sqrt{e}}{1-ey^2}+\left(\frac{1-e}{2}-ea\right)l\left(\frac{1-y\sqrt{e}}{1+y\sqrt{e}}\right)$$

$$+a\sqrt{\frac{e(1+e-ea)}{2-a}}\,l\left(\frac{1-y\sqrt{\frac{1+e-ea}{2-a}}}{1+y\sqrt{\frac{1+e-ea}{2-a}}}\right)+const.$$

Si on veut que l'intégrale de la différentielle proposée soit nulle lorsque $y=0$, il faudra supprimer la constante. En développant la fonction précédente en série suivant les puissances de a, et remplaçant ces puissances par les coefficiens de celles de $\frac{1}{1+x}$, on aura le série demandée.

420. Nous allons donner dans cet article et dans les suivans les moyens d'intégrer par approximation la différentielle $\frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$.

Supposons d'abord qu'on ait décomposé son dénominateur en deux facteurs réels de la forme $e+fx^2$ et $g+hx^2$, elle se changera en $\frac{Pdx}{\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}}$, et en divisant les deux termes de cette fraction par $\sqrt{eg}$, elle deviendra $\frac{1}{\sqrt{eg}}\cdot\frac{Pdx}{\sqrt{\left(1+\frac{f}{e}x^2\right)\left(1+\frac{h}{g}x^2\right)}}$; faisant $\frac{f}{e}=p^2$, $\frac{h}{g}=q^2$, on n'aura plus à traiter que la différentielle

$$\frac{Pdx}{\sqrt{(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)}}.$$

Si les deux constantes p et q sont très-inégales entr'elles; que p, par exemple, soit beaucoup plus grand que q, on supposera $p^2x^2=u^2$, d'où il résultera $q^2x^2=\frac{q^2}{p^2}u^2$, $dx=\frac{du}{p}$, et la différentielle ci-dessus

ci-dessus se changera en $\frac{1}{p}\cdot\frac{N\,du}{\sqrt{(1+u^2)(1+\frac{q^2}{p^2}u^2)}}$; On décomposera cette nouvelle expression dans les facteurs $\frac{1}{p}\cdot\frac{N\,du}{\sqrt{1+u^2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2}{p^2}u^2}}$; on développera le second dans une série ordonnée suivant les puissances de $\frac{q^2}{p^2}u^2$, et dont l'intégration, d'après les articles précédens, dépendra de celle de la fonction $\frac{1}{p}\cdot\frac{N\,du}{(1+au^2)\sqrt{1+r^2u^2}}$, fonction qui se rapporte à celles du n°. 377 et dans laquelle on a fait $\frac{q^2}{p^2}=r^2$.

Pour que l'approximation ait lieu dans tous les cas, il faut que les termes de la série qui exprime $\sqrt{1+r^2u^2}$ restent toujours fort petits; or la grandeur de chacun d'eux ne dépend pas seulement de celle du coefficient r^2, mais encore des valeurs dont u est susceptible, et par conséquent si cette variable peut devenir assez grande, la série dont il s'agit ne sera plus convergente. Il existe des artifices analytiques pour faire disparoître cet inconvénient; mais ils ne sont pas particuliers au cas qui nous occupe; ils tiennent à une théorie complète, relative aux limites des intégrales et dont nous parlerons bientôt.

421. On pourra encore employer avec succès la réduction en série lorsque les deux quantités p et q différeront très-peu l'une de l'autre. Dans ce cas on mettra la différentielle proposée sous la forme $\frac{1}{pq}\cdot\frac{P\,dx}{\sqrt{(\frac{1}{p^2}+x^2)(\frac{1}{q^2}+x^2)}}$; on fera ensuite $\frac{1}{p^2}=r^2+\delta$, $\frac{1}{q^2}=r^2-\delta$, et il viendra

$$\left(\frac{1}{p^2}+x^2\right)\left(\frac{1}{q^2}+x^2\right)=(r^2+x^2+\delta)(r^2+x^2-\delta)=(r^2+x^2)^2-\delta^2;$$

la différentielle sera donc $\frac{1}{pq}\cdot\frac{P\,dx}{\sqrt{(r^2+x^2)^2-\delta^2}}$. On développera le radical en série suivant les puissances de δ, ce qui donnera

$$\left\{\frac{1}{r^2+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2}{(r^2+x^2)^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{\delta^4}{(r^2+x^2)^5}+\text{etc.}\right\}\frac{P\,dx}{pq}$$

et l'intégrale de cette suite s'obtiendra au moyen de celle de $\frac{P\,dx}{pq[(r^2+x^2)-a]}$ (n°. 417).

La série ci-dessus sera convergente tant que le dénominateur sera de la forme r^2+x^2; mais elle cesseroit de l'être si on avoit r^2-x^2, et que la valeur de x dût être fort peu différente de r: nous traiterons ce cas d'exception quand nous reviendrons sur celui du n°. précédent.

422. Il suit de ce qui précède que la différentielle..... $\frac{P\,dx}{\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}}$ s'intégreroit toujours, au moins par approximation, s'il étoit possible de la transformer en une autre dans laquelle les rapports $\frac{f}{e}$ et $\frac{h}{g}$ fussent ou très-inégaux ou presqu'égaux: or c'est à quoi Lagrange est parvenu d'une manière très-élégante.

Il transforme d'abord la différentielle proposée en une autre de la forme $L\,du+\frac{M\,du}{\sqrt{(1\pm p^2u^2)(1\pm q^2u^2)}}$, dans laquelle L et M sont des fonctions rationnelles de u^2, et les seconds termes des binomes $1\pm p^2u^2$, $1\pm q^2u^2$, sont tous deux positifs ou tous deux négatifs en même tems. Pour cela, il fait

$$u=\frac{x}{e}\frac{\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}}{g+hx^2}=\frac{x}{e}\sqrt{\frac{e+fx^2}{g+hx^2}}.$$

Tant que x et $\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}$ seront réels, la nouvelle variable sera réelle aussi. Il résulte de la supposition ci-dessus

$$\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}=\frac{eu(g+hx^2)}{x},\quad\frac{dx}{\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}}=\frac{x\,dx}{eu(g+hx^2)};$$

l'équation $u=\frac{x}{e}\sqrt{\frac{e+fx^2}{g+hx^2}}$ se change en cette autre.....

$e^2u^2(g+hx^2)=x^2(e+fx^2)$, qui, étant différentiée, donne

$$(e+2fx^2-he^2u^2)\,x\,dx=e^2(g+hx^2)u\,du$$

et $\dfrac{x\,dx}{eu(g+hx^2)}=\dfrac{e\,du}{e+2fx^2-he^2u^2}$;

tirant ensuite de cette même équation la valeur de x^2, il viendra

$$x^2=\frac{he^2u^2-e\pm e\sqrt{1+2(2fg-eh)u^2+e^2h^2u^4}}{2f},$$

ou $2fx^2+e-he^2u^2=\pm e\sqrt{1+2(2fg-eh)u^2+e^2h^2u^4}$.

Comme il ne s'agit ici que d'une simple transformation, nous ne ferons usage que du signe supérieur du radical, et par le moyen de la dernière équation, nous changerons $\dfrac{e\,du}{e+2fx^2-he^2u^2}$ en $\dfrac{du}{\sqrt{1+2(2fg-eh)u^2+e^2h^2u^4}}$, expression qui représentera..... $\dfrac{dx}{\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}}$. Substituant la valeur de x^2 dans P, il en résultera une fonction rationnelle de u^2 et de..... $\sqrt{1+2(2fg-eh)u^2+e^2h^2u^4}$ et par conséquent la différentielle proposée pourra être mise sous la forme ..... $L\,du+\dfrac{M\,du}{\sqrt{1+2(2fg-eh)u^2+e^2h^2u^4}}$.

La fonction $1+2(2fg-eh)u^2+e^2h^2u^4$ se décompose en deux facteurs, savoir: $1+(2fg-eh+2\sqrt{f^2g^2-efgh})u^2$ (*)

$$1-(2fg-eh-2\sqrt{f^2g^2-efgh})u^2.$$

Si, comme dans le n°. 420, nous supposons $\dfrac{f}{e}>\dfrac{h}{g}$ la quantité $f^2g^2-e^2h^2$ sera nécessairement positive; ses facteurs $fg+eh$ et $fg-eh$ seront tous deux de même signe, leur somme $2fg$ sera encore de même signe qu'eux, et enfin fg et $fg-eh$ étant de même signe, donneront un produit f^2g^2-efgh qui sera positif; d'où il suit que les deux quantités $2fg-eh+2\sqrt{f^2g^2-efgh}$, $2fg-eh-2\sqrt{f^2g^2-efgh}$

(*) Pour effectuer commodément cette décomposition, il faut résoudre par rapport à t, l'équation $t^2+2(2fg-eh)ut+e^2h^2u^4$, et faire ensuite $t=1$ dans les racines.

seront réelles : elles seront aussi toutes deux du même signe, puisque leur produit e^2h^2 est essentiellement positif, et ce signe dépendra de celui de fg. On posera donc

$$2fg-eh+2\sqrt{f^2g^2-efgh}=\pm p^2$$

$$2fg-eh-2\sqrt{f^2g^2-efgh}=\pm q^2,$$

ou

$$p^2=\pm 2fg\mp eh\pm 2\sqrt{f^2g^2-efgh},$$

$$q^2=\pm 2fg\mp eh\mp 2\sqrt{2f^2g^2-efgh};$$

le signe supérieur répondant au cas où le produit fg est positif, et le signe inférieur à celui où il est négatif. En extrayant la racine de chaque membre des équations précédentes, on trouvera

$$p=\sqrt{\pm fg}+\sqrt{\pm(fg-eh)}$$

$$q=\sqrt{\pm fg}-\sqrt{\pm(fg-eh)} \text{ ou } =\sqrt{\pm(fg-eh)}-\sqrt{\pm fg}.$$

Par le moyen de ces valeurs, qui seront toujours réelles, on pourra prendre p et q positifs, en faisant usage de la seconde valeur de cette dernière quantité quand fg et eh seront de même signe. On aura dans tous les cas $p>q$, et la différentielle proposée

$\frac{P\,dx}{\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}}$, sera ramenée à cette autre.....

$$Ldu+\frac{M\,du}{\sqrt{(1\pm p^2u^2)(1\pm q^2u^2)}}.$$

La même transformation qui nous a conduits de l'une de ces expressions à l'autre, a aussi la propriété d'augmenter l'inégalité des coefficiens p^2 et q^2, lorsqu'on l'applique à la seconde partie de la dernière, ce qu'on exécutera facilement en supposant dans les calculs ci-dessus $e=1$, $g=1$, $f=\pm p^2$, $h=\pm q^2$, et changeant p en p', q en q'. Le résultat qu'on obtiendra étant semblable au précédent sera encore susceptible d'être traité de même, et on fera successivement

$$u'=\frac{uR}{1\pm q^2u^2}; \quad p'=p+\sqrt{p^2-q^2}, \quad q'=p-\sqrt{p^2-q^2}$$

$$u''=\frac{u'R'}{1\pm q'^2u'^2}; \quad p''=p'+\sqrt{p'^2-q'^2}, \quad q''=p'-\sqrt{p'^2-q'^2}$$

$$u'''=\frac{u''R''}{1\pm q''^2u''^2}; \quad p'''=p''+\sqrt{p''^2-q''^2}, \quad q'''=p''-\sqrt{p''^2-q''^2}$$

etc.

R représente le radical $\sqrt{(1\pm pu^2)(1\pm qu^2)}$ et R', R'', etc. désignent ce qu'il devient quand on change p, q, u en p', q', u', p'', q'', u'', etc. Les expressions ci-dessus donnent

$$u^2=\frac{\pm q^2u'^2-1+R'}{\pm 2p^2}, \qquad \frac{du}{R}=\frac{du'}{R'}$$

$$u'^2=\frac{\pm q'^2u''^2-1+R''}{\pm 2p'^2}, \qquad \frac{du'}{R'}=\frac{du''}{R''}$$

$$u''^2=\frac{\pm q''^2u'''^2-1+R'''}{\pm 2p''^2}, \qquad \frac{du''}{R''}=\frac{du'''}{R'''}$$

etc.

Par la première de ces valeurs $\frac{Mdu}{R}$ se changera en $L'du'+\frac{M'du'}{R'}$, L' et M' étant des fonctions rationnelles de u'^2; la valeur de u'^2 changera de même $\frac{M'du}{R'}$ en $L''du''+\frac{M''du''}{R''}$ et ainsi de suite : la différentielle proposée après trois substitutions, par exemple, sera donc transformée en cette autre

$$L\,du+L'du'+L''du''+L'''du'''+\frac{M'''du'''}{\sqrt{(1\pm p'''^2u'''^2)(1\pm q'''^2u'''^2)}}.$$

Les trois premiers termes étant rationnels, la difficulté de l'intégration ne porte que sur le quatrième; mais l'inégalité des coefficiens correspondans p' et q', p'' et q'', p''' et q''' va toujours en augmentant. En effet, puisque par l'hypothèse p surpasse q, les quantités p, p', p'', p''', forment une progression croissante; à l'égard de q', on mettra son expression sous la forme $q'=\frac{(p-\sqrt{p^2-q^2})(p+\sqrt{p^2-q^2})}{p+\sqrt{p^2-q^2}}$, qui revient à $q'=\frac{q^2}{p'}$; d'où, à cause de $p'>p$ et $p>q$, il suit $q'<q$ et à plus forte raison $<p'$. Les valeurs de q'' et de q''' étant traitées de même que celle de q', on trouvera $q''<q'$, $q'''<q''$, et on verra par conséquent que les quantités q, q', q'', q''', forment une progression décroissante, mais dans laquelle il n'y aura aucun terme négatif.

En répétant donc, autant qu'il sera nécessaire, les transformations indiquées précédemment, et dont nous n'avons porté le nombre

qu'à trois, on parviendra à trouver deux coefficiens $p'''\cdots$, $q'''\cdots$, dont le second soit aussi petit qu'on voudra; par ce moyen la différentielle proposée sera ramenée à une suite de différentielles rationnelles et à une différentielle irrationnelle, qui se rapportera à celle qui a été traitée dans le n°. 420.

Au lieu de calculer immédiatement les quantités p', p'', p''' et q', q'', q''', etc. il sera plus commode de chercher les sommes et les différences de celles qui se correspondent; car si on fait

$$\left.\begin{array}{l} p+q=m\,,\ p-q=n \\ p'+q'=m'\,,\ p'-q'=n' \\ p''+q''=m''\,,\ p''-q''=n'' \\ p'''+q'''=m'''\,,\ p'''-q'''=n''' \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ce qui donne} \left\{\begin{array}{l} p=\dfrac{m+n}{2}\,,\ q=\dfrac{m-n}{2} \\ p'=\dfrac{m'+n'}{2}\,,\ q'=\dfrac{m'-n'}{2} \\ p''=\dfrac{m''+n''}{2}\,,\ p''=\dfrac{m''-n''}{2} \\ p'''=\dfrac{m'''+n'''}{2}\,,\ q'''=\dfrac{m'''-n'''}{2} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

il en résultera

$$\begin{array}{ll} m'=m+n & n'=2\sqrt{m\,n} \\ m''=m'+n' & n''=2\sqrt{m'\,n'} \\ m'''=m''+n'' & n'''=2\sqrt{m''n''} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

423. Comme rien ne limite l'étendue des séries p, p', p'', p''', etc. q, q', q'', q''', etc. il est évident qu'on peut les continuer en arrière; c'est-à-dire, considérer les termes qui, d'après la loi établie dans ces séries, devroient précéder p et q; et en désignant ces termes par $'p$, $''p$, etc. on aura

$$\begin{array}{ll} p='p+\sqrt{{}'p^2-{}'q^2}, & q='p-\sqrt{{}'p^2-{}'q^2} \\ {}'p={}''p+\sqrt{{}''p^2-{}''q^2}, & {}'q={}''p-\sqrt{{}''p^2-{}''q^2} \\ \text{etc.} & \end{array}$$

Mais puisque la différence entre les termes correspondans des séries p, p', p'', p''', etc. q, q', q'', q''', etc. augmente dans tous ceux qui suivent les termes p et q, elle diminuera nécessairement dans ceux qui les précèdent; et par conséquent les quantités $'p$

et $'q$, $''p$ et $''q$, etc. doivent approcher de plus en plus de l'égalité. On tirera sans peine des expressions de p, q, $'p$, $'q$, etc. les valeurs suivantes

$$'p=\frac{p+q}{2}, \qquad 'q=\sqrt{pq}$$

$$''p=\frac{'p+'q}{2}, \qquad ''q=\sqrt{'p'q}$$

etc.

Pour s'assurer de nouveau que les quantités $'p$, $'q$, $''p$, $''q$, ect. tendent sans cesse vers l'égalité, il faut observer qu'à cause de $p>q$, on aura $'p<p$ et $'q>q$; d'un autre côté

$'p-'q=\frac{p+q}{2}-\sqrt{pq}=\frac{1}{2}(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2$, ce qui donne $'q<'p$. En étendant ces remarques aux quantités $'p$, $'q$, $''p$, $''q$, etc. on verra que la série p, $'p$, $''p$, etc. est décroissante, tandis que la série q, $'q$, $''q$, etc. est croissante; mais que les termes de la seconde s'approchent de plus en plus de ceux de la première.

D'après ce qui précède, on fera

$$u=\frac{'u'R}{1\pm'q^2'u^2}, \qquad 'u=\frac{''u''R}{1\pm''q^2''u^2}, \qquad ''u=\frac{'''u'''R}{1\pm'''q^2'''u^2}$$

et on tirera de là

$$'u^2=\frac{\pm'q^2u^2-1+R}{\pm 2'p^2}, \qquad \frac{d'u}{'R}=\frac{du}{R}$$

$$''u^2=\frac{\pm''q^2'u^2-1+'R}{\pm 2''p^2}, \qquad \frac{d''u}{''R}=\frac{d'u}{'R}$$

$$'''u^2=\frac{\pm'''q^2''u^2-1+''R}{\pm 2'''p^2}, \qquad \frac{d'''u}{'''R}=\frac{d''u}{''R}$$

etc.

en désignant par $'R$, $''R$, etc. ce que devient le radical..... $\sqrt{(1\pm p^2u^2)(1\pm q^2u^2)}$ lorsqu'on y change p, q, u en $'p$, $'q$, $'u$, etc. Il reste à prouver que les nouvelles variables $'u$, $''u$ etc. ainsi que les radicaux $'R$, $''R$, etc. seront réels.

La valeur de $'u^2$ montre que cette quantité sera réelle tant que u et R le seront, et qu'en même tems elle sera positive lorsque le signe supérieur aura lieu dans les facteurs $1\pm p^2u^2$ et $1\pm q^2u^2$, car alors on aura $R>1$. Dans le cas où les facteurs seroient $1-p^2u^2$ et $1-q^2u^2$,

l'expression de $'u'$ deviendroit $'u'=\frac{'q'u'+1-R}{2'p'}$, mais on auroit en même tems $R<'q'u'+1$. En effet, $'q'=pq$; substituant cette valeur dans $'q'u'+1$ et quarrant le résultat, on obtiendra..... $p'q'u'+2pqu'+1$. D'un autre côté,

$$R'=(1-p'u')(1-q'u')=1-p'u'-q'u'+p'q'u';$$

retranchant ce résultat du précédent, il viendra

$$('q'u'+1)'-R'=p'u'+2pqu'+q'u'=(p+q)'u',$$

différence qui sera toujours positive, et comme les quantités $'q'u'+1$ et R sont positives, on en conclura que la première surpasse la seconde. De ce que $'u'$ est positif dans les deux cas que nous venons d'examiner, il suit que $'u$ sera une quantité réelle dans l'un et dans l'autre, et l'équation $\frac{du}{R}=\frac{d'u}{'R}$ emporte nécessairement la réalité de $'R$. De pareilles considérations feront voir successivement la réalité de $''u$, $''R$, et ainsi de suite.

Par les transformations de u en $'u$, de $'u$ en $''u$, etc. la différentielle $\frac{Mdu}{\sqrt{(1\pm p'u')(1\pm q'u')}}$ prendra successivement les formes

$$'L\,d'u+\frac{'Md'u}{'R}$$

$$'L\,d'u+''L\,d''u+\frac{''Md''u}{''R}$$

$$'L\,d'u+''L\,d''u+'''L\,d'''u+\frac{'''Md'''u}{'''R}$$

etc.

et sera ramenée à une suite de différentielles rationnelles, et à une différentielle irrationnelle qui se rapportera à celle du n°. 421, parce que les coefficiens $\cdots'''p$, $\cdots'''q$, sous le radical $\cdots'''R$ différeront très-peu l'un de l'autre.

Nous ne saurions entrer dans de plus grands détails sur cette méthode, la plus élégante, peut-être, qui soit sortie de la plume des Analystes; mais ce que nous en avons dit suffit pour mettre le lecteur à portée d'en saisir l'esprit, et nous aurons d'ailleurs occasion d'en reparler encore dans les applications du Calcul intégral à la Géométrie.

424.

De l'intégration des fonctions logarithmiques et exponentielles.

424. Prenons pour premier exemple de l'intégration des fonctions logarithmiques, la différentielle $Xdx\mathrm{l}x$, dans laquelle X désigne une fonction algébrique quelconque de x. En faisant $Xdx=dv$ et $\mathrm{l}x=u$, la formule $\int udv=uv-\int vdu$ (n°. 361), donnera.....

$$\int Xdx\mathrm{l}x=\mathrm{l}x\int Xdx-\int\frac{dx}{x}\int Xdx.$$

Si maintenant l'intégrale $\int Xdx$ ne renferme point de fonctions transcendantes, la différentielle $\frac{dx}{x}\int Xdx$ sera algébrique et pourra se traiter par les méthodes données dans ce qui précède. Dans le cas contraire, la réduction ci-dessus ne sera d'aucun secours, et la différentielle proposée ne pourra s'intégrer que par les séries, excepté pourtant lorsque $X=\frac{1}{x}$; car on a $\frac{dx}{x}=d.\mathrm{l}x$ et par conséquent $\int\frac{dx}{x}\mathrm{l}x=\int(\mathrm{l}x)d.\mathrm{l}x=\frac{1}{2}(\mathrm{l}x)^2+const.$

425. Pour appliquer les résultats que nous venons d'obtenir; soit $X=x^n$, n étant un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif, mais différent de -1; on aura $\int Xdx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$, d'où.....

$$\int Xdx\mathrm{l}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{l}x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+const.=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\mathrm{l}x-\frac{1}{n+1}\right)+const.$$

Le cas où $X=\frac{1}{x}$, c'est-à-dire, où $n=-1$, se traite aussi par la réduction dont nous avons fait usage ci-dessus; il vient alors $\int\frac{dx}{x}\mathrm{l}x=(\mathrm{l}x)^2-\int\frac{dx}{x}\mathrm{l}x$, équation qui, ne renfermant que l'intégrale cherchée, en fait connoître la valeur et donne.....

$$\int\frac{dx}{x}\mathrm{l}x=\frac{1}{2}(\mathrm{l}x)^2+const.$$

Soit encore $X=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$, on aura $\int Xdx=\frac{1}{n(1-x)^n}$ et par conséquent.....

$$\int Xdx\mathrm{l}x=\int\frac{dx.\mathrm{l}x}{(1-x)^{n+1}}=\frac{\mathrm{l}x}{n(1-x)^n}-\int\frac{dx}{nx(1-x)^n}+const.$$

L'intégrale $\int \frac{dx}{nx(1-x)^n}$ s'obtiendra par la méthode propre à l'intégration des fractions rationnelles.

Dans le cas où $n=1$, on a.....

$$\frac{1}{x(1-x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}, \quad \int \frac{dx}{x(1-x)}=1x+1\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

et par conséquent

$$\int \frac{dx\,1x}{(1-x)^n}=\frac{1x}{1-x}-1x-1\left(\frac{1}{1-x}\right)+const.=\frac{x1x}{1-x}-1\left(\frac{1}{1-x}\right)+const.$$

Lorsque $n=0$, la différentielle proposée devient.....

$$\int \frac{dx.1x}{1-x}=1\left(\frac{1}{1-x}\right).1x-\int \frac{dx}{x}1\left(\frac{1}{1-x}\right);$$

ici la réduction ne change pas beaucoup l'état des choses, et il faut développer $1\left(\frac{1}{1-x}\right)$ en série, dans le second membre, ce qui donne $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+$ etc. d'où.....

$$\int \frac{dx}{x}1\left(\frac{1}{1-x}\right)=x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{16}x^4+\text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx.1x}{1-x}=1\left(\frac{1}{1-x}\right).1x-x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{16}x^4-\text{etc.}+const.$$

426. La différentielle $\int X dx\, 1V$, dans laquelle X et V sont des fonctions algébriques de x, se ramène de même à.....

$1V\int X dx-\int \frac{dV}{V}\int X dx$, et se trouvera bien simplifiée si la différentielle $\frac{dV}{V}\int X dx$ est algébrique.

Soit, par exemple, $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}1\left(\frac{1}{1-x}\right)$; on aura.....

$\int X dx=\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}=-\frac{2}{\sqrt{x}}$ et par conséquent.....

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}1\left(\frac{1}{1-x}\right)=-\frac{2}{\sqrt{x}}1\left(\frac{1}{1-x}\right)+\int \frac{2dx}{(1-x)\sqrt{x}}+const.$$

En faisant $x=y^2$, il viendra $\int \frac{2dx}{(1-x)\sqrt{x}}=4\int \frac{dy}{1-yy}=2l\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$,

d'où $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}1\left(\frac{1}{1-x}\right)=-\frac{2}{\sqrt{x}}1\left(\frac{1}{1-x}\right)+2l\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+const.$

On auroit pu obtenir l'expression de cette intégrale en série, en développant $l\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

427. Occupons-nous en particulier de la formule $\int P dx (lx)^n$. En lui appliquant la réduction que donne la formule $\int u dv = uv - \int v du$ et faisant pour abréger $\int P dx = N$, il vient

$$\int P dx (lx)^n = N(lx)^n - n\int \frac{dx}{x}(lx)^{n-1} N,$$

si on désigne $\int \frac{dx}{x} N$ par M, on aura de la même manière.....

$$\int \frac{dx}{x} N(lx)^{n-1} = M(lx)^{n-1} - (n-1)\int \frac{dx}{x}(lx)^{n-2} M.$$

Par une suite de réductions semblables on obtiendra.....

$$\int P dx (lx)^n = N(lx)^n - n M(lx)^{n-1} + n(n-1) L(lx)^{n-2} - n(n-1)(n-2) K(lx)^{n-3} + \text{etc.}$$

et par conséquent l'intégrale proposée sera algébrique dans le cas où n sera un nombre entier et où les quantités N, M, L, K, etc. seront toutes des fonctions algébriques; c'est ce que les exemples suivans vont éclaircir.

428. Soit pour premier exemple la différentielle $x^m dx (lx)^s$; on aura alors $\int P dx = N = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $\int N \frac{dx}{x} = M = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$,

$$\int M \frac{dx}{x} = L = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3};$$

d'où $\int x^m dx (lx)^s = x^{m+1}\left(\frac{(lx)^2}{m+1} - \frac{2lx}{(m+1)^2} + \frac{2.1}{(m+1)^3}\right) + const.$

Dans le cas de $m=-1$, la formule $\int x^m dx (lx)^s$ devient $\int \frac{dx}{x}(lx)^s$ et en faisant $lx = u$, il vient $\frac{dx}{x} = du$ et

$$\int \frac{dx}{x}(lx)^s = \int u^s du = \frac{u^3}{3} + const.$$

On voit par là que la différentielle $\frac{dx}{x}.U$, dans laquelle U désigneroit une fonction algébrique de lx, deviendroit algébrique en faisant $lx = u$.

Prenons pour second exemple, la différentielle $x^m dx(lx)^n$; la formule générale du n°. précédent devient pour ce cas

$$\int x^m dx(lx)^n = x^{m+1}\left\{\frac{(lx)^n}{m+1} - \frac{n(lx)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n(n-1)(lx)^{n-2}}{(m+1)^3} - \frac{n(n-1)(n-2)(lx)^{n-3}}{(m+1)^4} + \text{etc.}\right\} + \textit{const.}$$

Lorsque $m=-1$, on a $\int \frac{dx}{x}(lx)^n = \frac{1}{n+1}(lx)^{n+1} + \textit{const.}$

La série ci-dessus se terminera toutes les fois que n sera un nombre entier, et dans ce cas, sa valeur lorsque $x=1$, mérite d'être remarquée; car à cause de $l1=0$, elle se réduit à un seul terme, savoir celui où l'exposant de lx est nul et qui devient $\pm\frac{1.2.3....n}{(m+1)^{n+1}}$, le signe $+$ ayant lieu si n est pair, et le signe $-$ si n est impair.

Il suit de là qu'en supposant la constante nulle, on aura $\int x^m dx(lx)^n = \pm\frac{1.2.3....n}{(m+1)^{n+1}}$, lorsque $x=1$.

On peut éviter l'ambiguité du signe en écrivant $-l\frac{1}{x}$ au lieu de lx, ce qui donne, quand n est impair, $-\int x^m dx\left(l\frac{1}{x}\right)^n = \int x^m dx(lx)^n$, et par conséquent $\int x^m dx\, l\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1.2.3....n}{(m+1)^{n+1}}$, dans tous les cas, lorsque $x=1$.

Lorsque n est négatif ou fractionnaire la série se prolonge à l'infini; en faisant $n=-\frac{1}{2}$, par exemple, il vient

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{lx}} = x^{m+1}\left\{\frac{1}{(m+1)(lx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(m+1)^2(lx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{4(m+1)^3(lx)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3.5}{8(m+1)^4(lx)^{\frac{7}{2}}} + \text{etc.} + \textit{const.}\right\}$$

429. Au lieu de se servir de la formule du n°. 428, dans laquelle l'exposant de lx augmente sans cesse lorsque n est négatif, on peut, en opérant comme on va le voir, ramener l'intégration de la formule $\int P dx(lx)^{-n}$ à une autre de la forme $\int V dx(lx)^{-i}$, si n est un

nombre entier, ou au moins de la forme $\int V dx\,(lx)^{-n+m}$, m étant le plus grand nombre entier contenu dans n.

La différentielle $P dx\,(lx)^{-n}$, peut être mise sous la forme $Px.\frac{dx}{x}(lx)^{-n}$; mais le facteur $\frac{dx}{x}(lx)^{-n}$ ayant pour intégrale $\frac{-1}{(n-1)(lx)^{n-1}}$, il viendra

$$\int Px.\frac{dx}{x(lx)^n} = -\frac{Px}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{1}{(lx)^{n-1}}.d(Px).$$

Si on fait successivement

$$d(Px)=Qdx, \quad d(Qx)=Rdx, \quad d(Rx)=Sdx, \text{ etc.}$$

on aura, en poursuivant la réduction ci-dessus,

$$\int \frac{Pdx}{(lx)^n} = -\left\{\frac{Px}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{Qx}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{Rx}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} \right.$$
$$\left. -\text{etc.}\right\}$$

cette suite étant poussée jusqu'à ce qu'on rencontre un terme $+\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{Vdx}{lx}$, si n est un nombre entier, ou un terme $+\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}\int \frac{Vdx}{(lx)^{n-m}}$, m étant le plus grand nombre entier contenu dans n.

La formule $\int \frac{Vdx}{lx}$ paroît devoir constituer une transcendante différente de celles que nous avons fait connoître jusqu'à présent; car on ne peut la ramener à aucune de ces dernières.

Soit pour exemple $\int \frac{x^m dx}{(lx)^n}$; il en résultera

$$P=x^m, \quad Q=(m+1)x^m, \quad R=(m+1)^2x^m, \quad S=(m+1)^3x^m, \text{ etc.}$$

d'où

$$\int \frac{x^m dx}{(lx)^n} = -\left\{\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} \right.$$
$$- \frac{(m+1)^2x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}}\cdots\cdots\cdots$$
$$\left. \ldots + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{x^m dx}{lx}\ldots\right\},$$

en supposant que n soit un nombre entier.

La formule précédente ne donne rien lorsque $n=-1$; mais dans ce cas, la différentielle proposée se réduit à $\frac{dx}{x(lx)^n}$, et s'intègre immédiatement; il en résulte $-\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}}+const.$

Si on avoit en même tems $n=1$, la différentielle $\frac{dx}{x\,lx}$ qui viendroit alors, auroit pour intégrale $l(lx)+const.$, puisqu'en faisant $lx=u$, elle se transformeroit en $\frac{du}{u}$.

430. L'intégrale $\int\frac{x^m dx}{lx}$, de laquelle dépend $\int\frac{x^m dx}{(lx)^n}$, quand n est un nombre entier, peut être ramenée à une forme plus simple, en faisant $x^{m+1}=z$; on a alors $x^m dx=\frac{dz}{m+1}$, $lx=\frac{lz}{m+1}$, et par conséquent $\int\frac{x^m dx}{lx}=\int\frac{dz}{lz}$.

On trouvera plus bas le développement de l'intégrale $\int\frac{dz}{lz}$, en série. Elle se rapporte aux fonctions exponentielles; car en posant $lz=u$, il vient $z=e^u$, $dz=e^u du$ et $\int\frac{dz}{lz}=\int\frac{e^u du}{u}$, formule dont l'intégration exacte est encore à desirer.

Nous allons nous occuper maintenant de l'intégration des fonctions exponentielles; nous ferons d'abord remarquer que la différentielle $V_1 dx$, dans laquelle V seroit une fonction algébrique de a^x, ne présenteroit aucune difficulté, puisqu'en supposant seulement $a^x=u$, d'où résulteroit $x=\frac{lu}{la}$, $dx=\frac{du}{u\,la}$, elle deviendroit algébrique par rapport à la nouvelle variable u. On trouve un exemple de ce cas dans la différentielle $\frac{a^x dx}{\sqrt{1+a^{2x}}}$.

431. Soit la différentielle $Pa^x dx$; on la décomposera dans les deux facteurs $a^x dx . P$; le premier étant intégré donne $\frac{1}{la}a^x$ (n°. 21)

et il en résulte par conséquent $\int P a^x dx = \frac{1}{la} P a^x - \frac{1}{la} \int a^x dP$.

Faisant $dP = Q dx$, $dQ = R dx$, $dR = S dx$, etc. et continuant la réduction présentée ci-dessus, on trouvera cette série :

$$\int P a^x dx = \frac{1}{la} P a^x - \frac{1}{(la)^2} Q a^x + \frac{1}{(la)^3} R a^x \ldots \pm \frac{1}{(la)^n} \int V a^x dx.$$

le signe + répondant au cas où n est pair, et le signe — à celui où n est impair.

En intégrant d'abord le facteur $P dx$ de la différentielle proposée $\int P a^x dx$, et faisant $\int P dx = N$, on auroit eu cette réduction

$$\int P a^x dx = a^x N - (la) \int N a^x dx ;$$

et en la continuant, après avoir supposé $\int N dx = M$, $\int M dx = L$, etc. il viendra

$$\int P a^x dx = a^x N - (la) a^x M + (la)^2 a^x L \ldots \pm (la)^n \int G a^x dx.$$

432. L'application de la première formule de l'article précédent conduira à l'intégrale exacte toutes les fois que P sera une fonction rationnelle et entière, parce qu'alors le nombre des quantités $Q = \frac{dP}{dx}$, $R = \frac{dQ}{dx}$, $S = \frac{dR}{dx}$, etc. sera limité ; la dernière sera constante (n°. 13) et par conséquent $\int V a^x dx$ se changera en $V \int a^x dx = V \frac{a^x}{la} + const.$

Soit pour exemple $P = x^n$, n désignant un nombre entier positif, on aura dans ce cas

$Q = n x^{n-1}$, $R = n(n-1) x^{n-2}$, $S = n(n-1)(n-2) x^{n-3} \ldots$ d'où

$$\int a^x x^n dx = a^x \left\{ \frac{x^n}{la} - \frac{n x^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n(n-1) x^{n-2}}{(la)^3} - \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{(la)^4} \right. \\ \left. \ldots\ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{(la)^{n+1}} \right\} + const.$$

Il est bon de remarquer que l'équation $\int P a^x dx = \frac{P a^x}{la} - \frac{1}{la} \int a^x dP$ devient $\int a^x x^n dx = \frac{a^x x^n}{la} - \frac{n}{la} \int a^x x^{n-1} dx$.

433. La seconde formule du n°. 431 ne convient qu'au cas où les quantités $N = \int P dx$, $M = \int N dx$, $L = \int M dx$, etc. peuvent

s'obtenir algébriquement ; mais elle s'applique avec succès à l'exemple ci-dessus, quand n est un nombre entier négatif. On a alors

$$P=\frac{1}{x^n},\quad N=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}},\quad M=-\frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}$$

$$L=-\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}},\text{ etc.}$$

d'où

$$\int\frac{a^x dx}{x^n}=-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{a^x la}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}-\frac{a^x(la)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}$$
$$\cdots\cdots\cdots-\frac{a^x(la)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1x}+\frac{(la)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int\frac{a^x dx}{x}+\text{const.}$$

On ne sauroit pousser la réduction au delà de $\int\frac{a^x dx}{x}$; car l'équation $\int P a^x dx=a^x N-la\int N a^x dx$, de laquelle se tirent toutes les réductions, devient $\int\frac{a^x dx}{x^n}=-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{la}{n-1}\int\frac{a^x dx}{x^{n-1}}$, et ne donne rien lorsque $n=1$.

Nous retombons encore dans cet exemple sur la transcendante $\int\frac{a^x dx}{x}$, dont nous avons déjà parlé n°. 430. Si on pouvoit obtenir son expression, on auroit en même tems l'intégrale $\int a^x x^n dx$, pour tous les cas où n est un nombre entier.

434. Lorsque n est un nombre fractionnaire, les deux séries dont on vient de faire usage, ne se terminent point. Si on avoit par exemple $n=-\frac{1}{2}$, on trouveroit par la première

$$\int\frac{a^x dx}{\sqrt{x}}=\frac{a^x}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{la}+\frac{1}{2x(la)^2}+\frac{1\cdot 3}{4x^2(la)^3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8x^3(la)^4}+\text{etc.}\right)+\text{const.}$$

et par la deuxième

$$\int\frac{a^x dx}{\sqrt{x}}=\frac{a^x}{\sqrt{x}}\left(\frac{2x}{1}-\frac{4x^2 la}{1\cdot 3}+\frac{8x^3(la)^2}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{16x^4(la)^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right)+\text{const.}$$

Nous ferons observer que dans le cas où la formule proposée seroit $\int a^x x^{n+\frac{p}{q}}dx$, n étant un nombre entier, on pourroit la ramener à $\int a^x x^{\frac{p}{q}}dx$, par le moyen de la première série, si n étoit positif, et par le moyen de la seconde, si n étoit négatif.

435.

435. Occupons-nous maintenant de la formule $\int\frac{a^x dx}{x}$. Pour en obtenir l'expression en série, il n'y a qu'à mettre au lieu de a^x son développement (*Int.* n°. 22) et en intégrant chaque terme en particulier, il viendra

$$\int\frac{a^x dx}{x} = 1x + \frac{x\,1a}{1} + \frac{x^2(1a)^2}{1.2.2} + \frac{x^3(1a)^3}{1.2.3.3} + \frac{x^4(1a)}{1.2.3.4.4} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

Si on substituoit au nombre a, le nombre e, dont le logarithme népérien est l'unité, on trouveroit

$$\int\frac{e^x dx}{x} = 1x + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

faisant $e^x = z$, il en résulteroit $x = 1z$, $\int\frac{e^x dx}{x} = \int\frac{dz}{1z}$ et

$$\int\frac{dz}{1z} = 11z + \frac{1z}{1} + \frac{1}{2}\frac{(1z)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(1z)^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\frac{(1z)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

La série qui forme le second membre de l'équation ci-dessus devient infinie lorsque $z = 0$, parce que $1z$ est infini; lorsque $z = 1$, parce que $1z = 0$, et $11z = 1o$: enfin elle est encore infinie en même tems que z; mais il faut observer que dans le premier et dans le dernier cas, elle n'est point convergente, et qu'on n'en sauroit par conséquent rien conclure pour la valeur de $\int\frac{dz}{1z}$ dans ces deux cas. De plus, les logarithmes des nombres négatifs étant imaginaires, lorsqu'on regarde comme réels ceux des nombre positifs, la série dont nous parlons devient imaginaire lorsque z est négatif; et elle l'est aussi par la même raison quand z est au-dessous de l'unité, parce qu'alors $1z$ est négatif, ce qui rend $11z$ imaginaire. Nous reviendrons plus bas sur cet objet, par d'autres considérations, et dans le Traité des différences et des séries, nous ferons connoître d'une manière plus complète la nature de la transcendante $\int\frac{dz}{1z}$.

436. En remplaçant a^x par son développement dans la fonction $\int P a^x dx$, on aura

$$\int P a^x dx = \int P dx + \frac{la}{1}\int P x\,dx + \frac{(la)^2}{1.2}\int P x^2 dx + \frac{(la)^3}{1.2.3}\int P x^3 dx + \frac{(la)^4}{1.2.3.4}\int P\, x^4 dx + \text{etc.}$$

ce qui fournira un nouveau développement de $\int P a^x dx$, toutes les fois qu'on pourra obtenir les fonctions $\int P dx$, $\int P x dx$, $\int P x^2 dx$, etc.

Si $P = x^n$, il viendra

$$\int a^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2} la}{1(n+2)} + \frac{x^{n+3}(la)^2}{1.2(n+3)} + \frac{x^{n+4}(la)^3}{1.2.3(n+4)} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

et dans cette série il faudra mettre lx au lieu de $\frac{x^{n+i}}{n+i}$, lorsque n sera un nombre entier négatif égal à $-i$.

437. Avant de quitter les fonctions exponentielles, nous allons encore donner quelques exemples.

1°. On pourroit obtenir deux séries pour la fonction $\int \frac{a^x dx}{1-x}$; la première, en développant a^x comme ci-dessus, ce qui donneroit à intégrer successivement $\frac{dx}{1-x}$, $\frac{x dx}{1-x}$, $\frac{x^2 dx}{1-x}$, etc. la seconde, en développant $1-x$. La première formule du n°. 431 donne une solution plus simple, car on a

$$Q = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad R = \frac{1.2}{(1-x)^3}, \quad S = \frac{1.2.3}{(1-x)^4}, \text{ etc.}$$

$$\text{et } \int \frac{a^x dx}{1-x} = a^x \left\{ \frac{1}{(1-x)la} - \frac{1}{(1-x)^2(la)^2} + \frac{1.2}{(1-x)^3(la)^3} - \frac{1.2.3}{(1-x)^4(la)^4} + \text{etc.} \right\}$$

Il est facile de parvenir à une troisième série, ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, en observant que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.}$$

$$a^x = 1 + \frac{x la}{1} + \frac{x^2(la)^2}{1.2} + \frac{x^3(la)^3}{1.2.3} + \frac{x^4(la)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Ces deux séries étant multipliées l'une par l'autre et par dx, don-

neront un résultat de la forme $(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.})dx$; on aura par conséquent

$$\int\frac{a^x dx}{1-x}=Ax+\tfrac{1}{2}Bx^2+\tfrac{1}{3}Cx^3+\tfrac{1}{4}Dx^4+\text{etc.}+const.$$

Si, pour plus de simplicité, on met e au lieu de a, on aura $le=1$, et

$$A=1,\quad B=1+1,\quad C=1+1+\tfrac{1}{2}$$

$$D=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3},\quad E=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4},\ \text{etc.}$$

2°. Occupons-nous encore de $\int x^{nx}dx$. On a premièrement

$$x^{nx}=1+\frac{nx\,lx}{1}+\frac{n^2x^2(lx)^2}{1.2}+\frac{n^3x^3(lx)^3}{1.2.3}+\frac{n^4x^4(lx)^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

$$\begin{aligned}\int x^{nx}dx=x+&\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}nx^2\left[lx-\frac{1}{2}\right]\\&+\frac{1}{1.2}\ \frac{1}{3}n^2x^3\left[(lx)^2-\frac{2}{3}(lx)+\frac{2.1}{3^2}\right]\\&+\frac{1}{1.2.3}\ \frac{1}{4}n^3x^4\left[(lx)^3-\frac{3}{4}(lx)^2+\frac{3.2}{4^2}(lx)-\frac{3.2.1}{4^3}\right]\\&+\frac{1}{1.2.3.4}\ \frac{1}{5}n^4x^5\left[(lx)^4-\frac{4}{5}(lx)^3+\frac{4.3}{5^2}(lx)^2-\frac{4.3.2}{5^3}(lx)+\frac{4.3.2.1}{5^4}\right]\\&+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

En ordonnant par rapport à lx, il viendra

$$\begin{aligned}\int x^{nx}dx=\ &x\left[1-\frac{nx}{2^2}+\frac{n^2x^2}{3^3}-\frac{n^3x^3}{4^4}+\frac{n^4x^4}{5^5}-\text{etc.}\right]\\&+\frac{nx^2(lx)}{1}\left[\frac{1}{2}-\frac{nx}{3^2}+\frac{n^2x^2}{4^3}-\frac{n^3x^3}{5^4}+\frac{n^4x^4}{6^5}-\text{etc.}\right]\\&+\frac{n^2x^3(lx)^2}{1.2}\left[\frac{1}{3}-\frac{nx}{4^2}+\frac{n^2x^2}{5^3}-\frac{n^3x^3}{6^4}+\frac{n^4x^4}{7^5}-\text{etc.}\right]\\&+\frac{n^3x^4(lx)^3}{1.2.3}\left[\frac{1}{4}-\frac{nx}{5^2}+\frac{n^2x^2}{6^3}-\frac{n^3x^3}{7^4}+\frac{n^4x^4}{8^5}-\text{etc.}\right]\\&+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+const.\end{aligned}$$

Ce développement de $\int x^{nx}dx$, qui renferme, comme on voit, un nombre infini de séries infinies, prend une valeur fort simple quand $x=1$; il devient alors $1-\frac{n}{2^2}+\frac{n^2}{3^3}-\frac{n^3}{4^4}+\text{etc.}$

Le développement de $\int x^{nx}x^m dx$, s'obtiendroit de la même manière

que le précédent, et deviendroit par la supposition de $x = 1$;

$$\frac{1}{m+1} - \frac{n}{(m+2)^2} + \frac{n^2}{(m+3)^3} - \frac{n^3}{(m+4)^4} + \text{etc.}$$

438. Il y a encore un autre moyen d'intégrer une fonction exponentielle, telle par exemple que $\frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2}$; c'est de chercher à la rapporter à la différentielle de la fonction $e^x P$, qui est $e^x(dP + P\,dx)$, et dans laquelle P représente une fonction algébrique de x. C'est principalement la sagacité et l'habitude du calcul qui peuvent guider dans ce procédé. L'exemple proposé étant fort simple, il suffira de faire $1 + x = z$; on aura

$$\frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{e^{z-1}(z-1)dz}{z^2} = \frac{1}{e}\left\{ e^z \left(\frac{1}{z} dz - \frac{dz}{z^2} \right) \right\},$$ et avec un peu d'attention on voit bientôt que $\frac{dz}{z^2}$ étant la différentielle de $\frac{1}{z}$ on doit avoir $P = \frac{1}{z}$, d'où résulte l'intégrale $\frac{e^x}{ez} + const$; remettant au lieu de z, sa valeur, on trouvera $\int \frac{e^x x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + const.$

De l'intégration des fonctions circulaires.

439. Soit la formule $\int X dx \cdot \text{arc}(\sin = x)$; si on integre d'abord le facteur $X dx$, en observant que $d.\text{arc}(\sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et faisant $\int X dx = V$, on aura

$$\int X dx . \text{arc}(\sin = x) = V . \text{arc}(\sin = x) - \int \frac{V dx}{\sqrt{1-x^2}} ;$$

l'intégration de la formule proposée sera donc ramenée à celle d'une fonction algébrique, si V est algébrique.

Prenons pour exemple $\int x^n dx . \text{arc}(\sin = x)$; nous aurons alors $V = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, et

$$\int x^n dx . \text{arc}(\sin = x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} . \text{arc}(\sin = x) - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} ;$$

la formule $\int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ a été traitée dans les nos 392 et 393.

Soit encore $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.\text{arc}\,(\sin = x)$; on aura

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} = V, \qquad \int \frac{V\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x, \text{ d'où}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{arc}\,(\sin = x) = -\sqrt{1-x^2}.\text{arc}\,(\sin = x) + x + \textit{const.}$$

Pour la formule $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{n}{2}}}.\text{arc}\,(\sin = x)$, on trouvera

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = V, \qquad \int \frac{V\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -1.\sqrt{1-x^2}$$

et par conséquent

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{n}{2}}}.\text{arc}\,(\sin = x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\text{arc}\,(\sin = x) + 1.\sqrt{1-x^2} + \textit{const.}$$

440. Comme $d.\text{arc}(\cos = x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $d.\text{arc}(\text{tang} = x) = \frac{dx}{1+x^2}$, on aura, en opérant de la même manière que ci-dessus,

$$\int X\,dx.\text{arc}(\cos = x) = V.\text{arc}(\cos = x) + \int \frac{V\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int X\,dx.\text{arc}\,(\text{tang} = x) = V.\text{arc}\,(\text{tang} = x) - \int \frac{V\,dx}{1+x^2}$$

et l'intégration de ces formules ne dépendra que de celle d'une fonction algébrique, toutes les fois que V sera algébrique.

441. Si ζ représente un arc dont le sinus, ou le cosinus, ou la tangente, etc. soient exprimés en fonction de x, c'est-à-dire, qu'on ait $d\zeta = X_1\,dx$, X_1 étant une fonction donnée de x, on obtiendra $\int X\zeta^n dx$ par un procédé semblable à celui des articles précédens. Soit $\int X\,dx = V$; on aura $\int X\zeta^n dx = V\zeta^n - n\int V\zeta^{n-1}\,d\zeta$; mettant pour $d\zeta$ sa valeur, et faisant $\int V X_1\,dx = U$, on trouvera

$$\int V\zeta^{n-1}\,d\zeta = U\zeta^{n-1} - (n-1)\int U\zeta^{n-2}\,d\zeta.$$

En suivant cette marche, on abaissera de plus en plus l'exposant de ζ, et on parviendra enfin à faire disparoître cet arc, si n est un nombre entier positif.

Le cas le plus simple est celui où $X = 1$, et où ζ est l'arc dont

le sinus $=x$; il vient alors

$$dz=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad V=x,\quad U=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}$$

$$T=-x,\quad S=\int\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2},\ R=x,\text{etc.}$$

et ces valeurs donnent

$$\left.\begin{aligned}\int z^n dx=z^n x+nz^{n-1}\sqrt{1-x^2}-n(n-1)z^{n-2}x-n(n-1)(n-2)z^{n-3}\sqrt{1-x^2}\\ +n(n-1)(n-2)(n-3)z^{n-4}x+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots+const.\end{aligned}\right\}$$

série qui s'arrête lorsque n est un nombre entier positif.

Si on avoit $X\,dx=dz$, ou $X=X_1$, l'intégrale $\int X z^n dx$ se changeroit en $\int z^n dz=\frac{z^{n+1}}{n+1}+const.$ et si on substituoit à z^n une fonction algébrique quelconque de z, l'intégrale considérée par rapport à z, rentreroit dans quelqu'une des formules traitées précédemment.

442. Avant de passer à des fonctions un peu générales des quantités z, $\sin z$, $\cos z$, etc. il faut se rappeller que par le n°. 22 on a

$$d.\ \sin nz=n\,dz\cos nz,\ \text{d'où}\ \int dz\cos nz=\frac{1}{n}\sin nz+const.$$

$$d.\ \cos nz=-n\,dz\sin nz,\qquad \int dz\sin nz=-\frac{1}{n}\cos nz+const.$$

$$d.\ \text{tang}\,nz=\frac{n\,dz}{(\cos nz)^2},\qquad \int\frac{dz}{(\cos nz)^2}=\frac{1}{n}\text{tang}\,nz+const.$$

$$d.\ \cot nz=-\frac{n\,dz}{(\sin nz)^2},\qquad \int\frac{dz}{(\sin nz)^2}=-\frac{1}{n}\cot nz+const.$$

$$d.\ \sec nz=\frac{n\,dz\sin nz}{(\cos nz)^2},\qquad \int\frac{dz\sin nz}{(\cos nz)^2}=\frac{1}{n}\sec nz+const.$$

$$=\frac{1}{n\cos nz}+const.$$

$$d.\ \text{cosec}\,nz=-\frac{n\,dz\cos nz}{(\sin nz)^2},\qquad \int\frac{dz\cos nz}{(\sin nz)^2}=-\frac{1}{n}\text{cosec}\,nz+const.$$

$$=-\frac{1}{n\sin nz}+const.$$

De ces intégrations résulte celle des expressions

$$dz(A+B\sin z+C\sin 2z+D\sin 3z+E\sin 4z+\text{etc.});$$
$$dz(A+B\cos z+C\cos 2z+D\cos 3z+E\cos 4z+\text{etc.});$$

et comme on peut, au moyen des valeurs données dans les n^os. 42 et 43 de l'Introduction, reduire à cette forme toutes les fonctions rationnelles et entières de sinus et de cosinus, ce qui précède suffiroit pour intégrer ces fonctions : cependant nous allons traiter en particulier quelques-unes des plus remarquables.

443. Proposons-nous d'intégrer $d\zeta \sin\zeta^n$; en mettant cette différentielle sous la forme $d\zeta \sin\zeta . \sin\zeta^{n-1}$, et en intégrant le premier facteur, on trouvera

$$\int d\zeta \sin\zeta^n = -\cos\zeta \sin\zeta^{n-1} + (n-1)\int d\zeta \cos\zeta^2 \sin\zeta^{n-2};$$

mais puisque $\cos\zeta^2 = 1 - \sin\zeta^2$, on aura

$$\int d\zeta \sin\zeta^n = -\cos\zeta \sin\zeta^{n-1} + (n-1)\int d\zeta \sin\zeta^{n-2} - (n-1)\int d\zeta \sin\zeta^n,$$

et réunissant les termes affectés de $\int d\zeta \sin\zeta^n$, on trouvera

$$\int d\zeta \sin\zeta^n = -\frac{1}{n}\cos\zeta \sin\zeta^{n-1} + \frac{n-1}{n}\int d\zeta \sin\zeta^{n-2}.$$

L'intégration de la formule proposée est donc ramenée à celle de $\int d\zeta \sin\zeta^{n-2}$: en opérant sur cette dernière expression comme sur la première, on la fera dépendre de $\int d\zeta \sin\zeta^{n-4}$, et en continuant ainsi de proche en proche, on tombera sur $\int d\zeta \sin\zeta^0$, si n est un nombre pair, ou sur $\int d\zeta \sin\zeta$, si n est un nombre impair. La première de ces formules a pour intégrale $\zeta + const.$ et la seconde $-\cos\zeta + const.$

La réduction précédente conduiroit à cette formule générale

$$\int d\zeta \sin\zeta^n = -\frac{1}{n}\cos\zeta \sin\zeta^{n-1} - \frac{(n-1)}{n(n-2)}\cos\zeta \sin\zeta^{n-3} - \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}\cos\zeta \sin\zeta^{n-5}$$
$$- \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{n(n-2)(n-4)(n-6)}\cos\zeta \sin\zeta^{n-7} + \text{etc.}$$

qui seroit terminée par

$$+ \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 1}{n(n-2)(n-4)(n-6)\ldots 2}\zeta + const.$$

si n étoit paire

et par

$$- \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 2}{n(n-2)(n-4)(n-6)\ldots 3}\cos\zeta + const.$$

si n étoit impaire.

Lorsque n sera un nombre fractionnaire, on ramenera $\int d\zeta \sin\zeta^n$ à $\int d\zeta \sin\zeta^{n-m}$, m étant le plus grand nombre entier contenu dans n.

444. En traitant de la même manière $\int dz \cos z^n$, on obtiendra d'abord

$$\int dz \cos z^n = \int dz \cos z \cos z^{n-1} = \sin z \cos z^{n-1} + (n-1)\int dz \sin z^2 \cos z^{n-2};$$

mettant $1 - \cos z^2$ au lieu de $\sin z^2$, il en résultera

$$\int dz \cos z^n = \sin z \cos z^{n-1} + (n-1)\int dz \cos z^{n-2} - (n-1)\int dz \cos z^n,$$

d'où $$\int dz \cos z^n = \frac{1}{n} \sin z \cos z^{n-1} + \frac{n-1}{n} \int dz \cos z^{n-2}.$$

Cette dernière équation conduira à $\int dz \cos z = z + const.$ lorsque n sera paire, et à $\int dz \cos z = \sin z + const.$ quand n sera impaire, et on en tirera la formule suivante

$$\int dz \cos z^n = \frac{1}{n} \sin z \cos z^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)} \sin z \cos z^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \sin z \cos z^{n-5} + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{n(n-2)(n-4)(n-6)} \sin z \cos z^{n-7} + \text{etc.}$$

terminée par

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)(n-4)(n-6)\ldots 2} z + const.$$

lorsque n sera paire, et par

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)(n-4)(n-6)\ldots 3} \sin z + const.$$

quand n sera impaire.

445. Nous aurions pu déduire les intégrales précédentes des formules du n°. 392; car en faisant $\sin z = x$, il en seroit résulté

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int dz \sin z^n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-xx}},$$

et en supposant $\cos z = x$, on auroit eu

$$dz = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int dz \cos z^n = -\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-xx}}.$$

Toute fonction algébrique de $\sin z$ et de $\cos z$ pourra être ainsi transformée en une autre qui se rapportera aux fonctions traitées dans le n°. 377.

Si on avoit par exemple $\int dz \sin z^m \cos z^n$, ayant fait $\sin z = x$, il viendroit $$\int dz \sin z^m \cos z^n = \int x^m dx (1-x)^{\frac{n-1}{2}},$$

résultat qui rentrera dans les fonctions rationnelles lorsque n sera un nombre impair.

Lorsque

Lorsque n sera un nombre pair, on aura recours aux formules (II) et (III) du tableau (page 40) qui donneront les deux réductions suivantes

$$\int x^m dx(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{x^{m-1}(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}} - (m-1)\int x^{m-2}dx(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}}{-(m+n)},$$

$$\int x^m dx(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{x^{m+1}(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} + (n-1)\int x^m dx(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}}{m+n}.$$

En remettant $\sin z$ au lieu de x, et en observant que

$$\int x^{m-2}dx(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.x^{m-2}(1-x^2)^{\frac{n}{2}} = \int dz \sin z^{m-2}\cos z^n,$$

$$\int x^m dx(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.x^m (1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} = \int dz \sin z^m \cos z^{n-2},$$

il viendra

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = -\frac{1}{m+n}\sin z^{m-1}\cos z^{n+1} + \frac{m-1}{m+n}\int dz \sin z^{m-2}\cos z^n,$$

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = \frac{1}{m+n}\sin z^{m+1}\cos z^{n-1} + \frac{n-1}{m+n}\int dz \sin z^m \cos z^{n-2}.$$

Par la première de ces réductions on fera dépendre l'intégrale proposée, de $\int dz \sin z \cos z^n = -\frac{1}{m+1}\cos z^{n+1} + const.$ si m est impaire, ou de $\int dz \cos z^n$, si m est paire ; par la seconde on arrivera à $\int dz \sin z^m \cos z = \frac{1}{m+1}\sin z^{m+1} + const.$ quand n sera impaire, et à $\int dz \sin z^m$, quand n sera paire.

446. Les réductions ci-dessus s'obtiennent immédiatement par la décomposition de la différentielle proposée en facteurs. On a d'abord

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = \int dz \sin z \cos z^n . \sin z^{m-1} =$$
$$-\frac{1}{n+1}\cos z^{n+1}\sin z^{m-1} + \frac{m-1}{n+1}\int dz \cos z^{n+2}\sin z^{m-2};$$

mais à cause de $\cos z^{n+2} = \cos z^n . \cos z^2 = \cos z^n (1-\sin z^2)$, on trouve

$$\int dz \cos z^{n+2}\sin z^{m-2} = \int dz \cos z^n \sin z^{m-2} - \int dz \cos z^n \sin z^m.$$

Substituant dans la première équation, et prenant la valeur de $\int dz \sin z^m \cos z^n$, il en résultera

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = -\frac{\sin z^{m-1}\cos z^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int dz \sin z^{m-2}\cos z^n.$$

On a aussi $\int d\zeta \sin\zeta^m \cos\zeta^n = \int d\zeta \cos\zeta \sin\zeta^m . \cos\zeta^{n-1} =$

$$\frac{1}{m+1} \sin\zeta^{m+1} \cos\zeta^{n-1} + \frac{n-1}{m+1} \int d\zeta \sin\zeta^{m+2} \cos\zeta^{n-2};$$

de plus, $\sin\zeta^{m+2} = \sin\zeta^m . \sin\zeta^2 = \sin\zeta^m (1 - \cos\zeta^2)$,

et par conséquent $\int d\zeta \sin\zeta^{m+2} \cos\zeta^{n-2} = \int d\zeta \sin\zeta^m \cos\zeta^{n-2} - \int d\zeta \sin\zeta^m \cos\zeta^n$.

Cette valeur mise, dans celle de $\int d\zeta \sin\zeta^m \cos\zeta^n$, conduit à une équation de laquelle on tire

$$\int d\zeta \sin\zeta^m \cos\zeta^n = \frac{\sin\zeta^{m+1} \cos\zeta^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int d\zeta \sin\zeta^m \cos\zeta^{n-2}.$$

Appliquons ces formules à $\int d\zeta \sin\zeta^8 \cos\zeta'$. La première donnera

$$\int d\zeta \sin\zeta^8 \cos\zeta' = -\tfrac{1}{16} \sin\zeta' \cos\zeta^8 + \tfrac{7}{16} \int d\zeta \sin\zeta^6 \cos\zeta',$$

et par la seconde on aura

$$\int d\zeta \sin\zeta^6 \cos\zeta' = \tfrac{1}{16} \sin\zeta^7 \cos\zeta^6 + \tfrac{6}{15} \int d\zeta \sin\zeta^6 \cos\zeta^6.$$

En employant ainsi alternativement l'une et l'autre, on trouvera

$$\int d\zeta \sin\zeta^6 \cos\zeta^5 = -\tfrac{1}{11} \sin\zeta^5 \cos\zeta^6 + \tfrac{5}{11} \int d\zeta \sin\zeta^4 \cos\zeta^5$$
$$\int d\zeta \sin\zeta^4 \cos\zeta^5 = \quad \tfrac{1}{9} \sin\zeta^5 \cos\zeta^4 + \tfrac{4}{9} \int d\zeta \sin\zeta^4 \cos\zeta^3$$
$$\int d\zeta \sin\zeta^4 \cos\zeta^3 = -\tfrac{1}{7} \sin\zeta^3 \cos\zeta^4 + \tfrac{3}{7} \int d\zeta \sin\zeta^2 \cos\zeta^3$$
$$\int d\zeta \sin\zeta^2 \cos\zeta^3 = \quad \tfrac{1}{5} \sin\zeta^3 \cos\zeta^2 + \tfrac{2}{5} \int d\zeta \sin\zeta^2 \cos\zeta$$
$$\int d\zeta \sin\zeta^2 \cos\zeta = -\tfrac{1}{3} \sin\zeta \cos\zeta^2 + \tfrac{1}{3} \int d\zeta \cos\zeta;$$

mais $\frac{1}{2} \int d\zeta \cos\zeta = \frac{1}{2} \sin\zeta + \textit{conse.}$ et remontant de chacune de ces valeurs à celle qui la précède, on trouvera

$$\int d\zeta \sin\zeta^8 \cos\zeta' = -\frac{1}{15} \sin\zeta' \cos\zeta^8 + \frac{1.7}{15.13} \sin\zeta^7 \cos\zeta^6 - \frac{1.7.6}{15.13.11} \sin\zeta^5 \cos\zeta^6$$
$$+ \frac{1.7.6.5}{15.13.11.9} \sin\zeta^5 \cos\zeta^4 - \frac{1.7.5.6.4}{15.13.11.9.7} \sin\zeta^3 \cos\zeta^4$$
$$+ \frac{1.7.6.5.4.3}{15.13.11.9.7.5} \sin\zeta^3 \cos\zeta^2 - \frac{1.7.6.5.4.3.2}{15.13.11.9.7.5.3} \sin\zeta \cos\zeta^2$$
$$+ \frac{1.7.6.5.4.3.2}{15.13.11.9.7.5.3} \sin\zeta + \textit{conse.}$$

Nous observerons que dans les cas analogues aux précédens, il seroit peut-être plus commode de changer en sinus et en cosinus d'arcs multiples, les puissances de sinus et de cosinus que renferme la différentielle proposée. Il est facile de voir que les procédés indiqués ci-dessus réussiroient également, quand au lieu de l'arc ζ on auroit un arc $a\zeta + b$.

447. Nous allons nous occuper dans cet article de l'intégration des quatre différentielles suivantes

$$\frac{d\zeta}{\sin\zeta}, \quad \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad \frac{d\zeta\cos\zeta}{\sin\zeta}, \quad \frac{d\zeta\sin\zeta}{\cos\zeta}.$$

La première devient successivement

$$\frac{d\zeta}{\sin\zeta}=\frac{d\zeta\sin\zeta}{\sin\zeta^2}=\frac{d\zeta\sin\zeta}{1-\cos\zeta^2}=\frac{-dx}{1-x^2},$$ en faisant $\cos\zeta=x$; son intégrale est donc

$$\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta}=-\tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}=-\tfrac{1}{2}l\frac{1+\cos\zeta}{1-\cos\zeta}=l\frac{\sqrt{1-\cos\zeta}}{\sqrt{1+\cos\zeta}}+const.$$

Pour la seconde on a

$$\frac{d\zeta}{\cos\zeta}=\frac{d\zeta\cos\zeta}{\cos\zeta^2}=\frac{d\zeta\cos\zeta}{1-\sin\zeta^2}=\frac{dx}{1-x^2},$$ en faisant $\sin\zeta=x$; et par conséquent

$$\int\frac{d\zeta}{\cos\zeta}=\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\tfrac{1}{2}l\frac{1+\sin\zeta}{1-\sin\zeta}=l\frac{\sqrt{1+\sin\zeta}}{\sqrt{1-\sin\zeta}}+const.$$

La troisième et la quatrième sont évidemment des différentielles logarithmiques, en sorte qu'on a

$$\int\frac{d\zeta\cos\zeta}{\sin\zeta}=l\sin\zeta+const.=\int\frac{d\zeta}{\tang\zeta}=\int d\zeta\cot\zeta$$

$$\int\frac{d\zeta\sin\zeta}{\cos\zeta}=-l\cos\zeta+const.=\int d\zeta\tang\zeta=\int\frac{d\zeta}{\cot\zeta},$$

En ajoutant ensemble ces deux dernières formules, on trouvera

$$\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta\cos\zeta}=l\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta}+const.=l\tang\zeta+const.$$

448. On peut donner aux intégrales

$$\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta}=l\frac{\sqrt{1-\cos\zeta}}{\sqrt{1+\cos\zeta}}+const. \text{ et } \int\frac{d\zeta}{\cos\zeta}l=\frac{\sqrt{1+\sin\zeta}}{\sqrt{1-\sin\zeta}}+const.$$

une forme plus simple, au moyen de deux formules qu'il est bon de connoître.

On sait que $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\cos(a+b)+\frac{1}{2}\cos(a-b)$ (Int. n°. 33)

$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\cos(a-b)-\frac{1}{2}\cos(a+b)$ (Int. n°. 34)

divisant la seconde équation par la première, il viendra

$$\text{tang}\, a \,\text{tang}\, b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\cos(a-b)+\cos(a+b)};$$

faisant $a-b=B$, $a+b=A$, il en résultera

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B).\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\cos B-\cos A}{\cos B+\cos A}.$$

En traitant de la même manière les équations

$$\sin a\cos b=\tfrac{1}{2}\sin(a+b)+\tfrac{1}{2}\sin(a-b)\ (\text{Int. n°. 39})$$
$$\cos a\sin b=\tfrac{1}{2}\sin(a+b)-\tfrac{1}{2}\sin(a-b),$$

on en tirera $\dfrac{\text{tang}\, a}{\text{tang}\, b}=\dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)}$ et

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}.$$

Cela posé, en prenant $\cos B=1$, $\cos A=\cos z$, on aura $B=0°$, $A=z$; la première formule deviendra $(\text{tang}\,\frac{1}{2}z)^2=\dfrac{1-\cos z}{1+\cos z}$, et donnera par conséquent $\int\dfrac{dz}{\sin z}=\text{l.tang}\,\frac{1}{2}z+\textit{const.}$

Si on fait ensuite dans la seconde formule $\sin A=1$ et $\sin B=\sin z$, il viendra $A=90°$ et $B=z$, d'où $\dfrac{1+\sin z}{1-\sin z}=\dfrac{\text{tang}\,(45°+\frac{1}{2}z)}{\text{tang}\,(45°-\frac{1}{2}z)}$; mais

$$\text{tang}\,(45°-\tfrac{1}{2}z)=\cot(45°+\tfrac{1}{2}z)=\frac{1}{\text{tang}\,(45°+\frac{1}{2}z)};$$

donc $\dfrac{1+\sin z}{1-\sin z}=[\text{tang}\,(45°+\frac{1}{2}z)]^2$, donc

$$\int\frac{dz}{\cos z}=\text{l.tang}\,(45°+\tfrac{1}{2}z)+\textit{const.}$$

449. Les réductions du n°. 446 peuvent s'employer pour les deux différentielles $\dfrac{dz\sin z^m}{\cos z^n}$, $\dfrac{dz\cos z^n}{\sin z^m}$; mais nous observerons qu'il suffit de s'occuper de l'une d'elles, car si on fait $z=90°-y$, on aura $dz=-dy$, $\sin z=\cos y$, $\cos z=\sin y$, et la substitution de ces valeurs dans la première lui fera prendre la même forme que la seconde et réciproquement.

En changeant $+n$ en $-n$, dans la première formule du n°. cité,

il viendra $\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta^n} = -\frac{1}{m-n}\frac{\sin\zeta^{m-1}}{\cos\zeta^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{d\zeta \sin\zeta^{m-2}}{\cos\zeta^n}$.

On voit que cette réduction conduira à $\int \frac{d\zeta \sin\zeta}{\cos\zeta^n}$, si m est impaire, et à $\int \frac{d\zeta}{\cos\zeta^n}$, si m est paire. La première de ces deux intégrales est $-\frac{1}{(n-1)\cos\zeta^{n-1}} + const.$ et quand $n=1$, elle se change en $l.\cos\zeta + const.$

Si on fait n négative dans la seconde formule du n°. 446, on trouvera $\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta^n} = \frac{1}{m-n}\frac{\sin\zeta^{m+1}}{\cos\zeta^{n+1}} - \frac{(n+1)}{m-n}\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta^{n+2}}$, d'où on tirera

$$\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta^{n+2}} = \frac{1}{n+1}\frac{\sin\zeta^{m+1}}{\cos\zeta^{n+1}} - \frac{m-n}{n+1}\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta^n}.$$

changeant $n+2$ en n, $n+1$ en $n-1$, et n en $n-2$, il en résultera

$$\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta^n} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin\zeta^{m+1}}{\cos\zeta^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta^{n-2}}.$$

Par le moyen de cette formule on passera aussi de $\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta^{n-2}}$ à $\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta^{n-4}}$, et ainsi de suite jusqu'à $\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta}$, quand n sera impaire, ou jusqu'à $\int d\zeta \sin\zeta^m$, quand n sera paire.

Si on avoit $m=n$, on ne pourroit se servir que de cette dernière réduction, qui devient inutile à son tour, dans le cas où $n=1$; mais alors la différentielle proposée se réduit à $\frac{d\zeta \sin\zeta}{\cos\zeta}$, traitée n°. 447.

Lorsque $m=n-2$ la différentielle proposée s'intègre; car la seconde réduction ci-dessus donne dans ce cas,

$$\int \frac{d\zeta \sin\zeta^{n-2}}{\cos\zeta^n} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin\zeta^{n-1}}{\cos\zeta^{n-1}} = \frac{1}{n-1}\operatorname{tang}\zeta^{n-1},$$

expression à laquelle il ne faut plus qu'ajouter une constante.

Pour achever la solution de la question que nous nous sommes proposée, il nous reste à traiter les intégrales $\int \frac{d\zeta}{\cos\zeta^n}$ et $\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta}$.

En employant pour la seconde, la première des réductions obtenues précédemment, il viendra

$$\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta} = -\frac{1}{m-1}\sin\zeta^{m-1} + \int \frac{d\zeta \sin\zeta^{m-2}}{\cos\zeta};$$

l'application réitérée de cette formule ramenera l'intégrale cherchée à $\int \frac{d\zeta \sin\zeta}{\cos\zeta} = -\text{l.}\cos\zeta + \textit{const.}$ quand m sera impaire, et à $\int \frac{d\zeta}{\cos\zeta} = \text{l.}\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\zeta) + \textit{const.}$ (n°. 448) quand m sera paire. Nous laissons au lecteur le soin de construire, pour s'exercer, une table des valeurs de $\int \frac{d\zeta \sin\zeta^m}{\cos\zeta}$ pour les cas où $m=1$, $m=2$, $m=3$, etc.

La seconde réduction appliquée à la formule $\int \frac{d\zeta}{\cos\zeta^n}$ donne

$$\int \frac{d\zeta}{\cos\zeta^n} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{d\zeta}{\cos\zeta^{n-2}}$$

et conduira par conséquent à $\int \frac{d\zeta}{\cos\zeta} = \text{l.}\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\zeta) + \textit{const.}$ si n est impaire, et à $\int d\zeta = \zeta + \textit{const.}$ si n est paire.

450. Soit $\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta^m \cos\zeta^n}$; en changeant à la fois $+m$ en $-m$ et $+n$ en $-n$, dans les deux réductions du n°. 446, on trouvera

$$\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta^m\cos\zeta^n} = \frac{1}{m+n}\frac{1}{\sin\zeta^{m+1}\cos\zeta^{n-1}} + \frac{m+1}{m+n}\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta^{m+2}\cos\zeta^n}$$

$$\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta^m\cos\zeta^n} = -\frac{1}{m+n}\frac{1}{\sin\zeta^{m-1}\cos\zeta^{n+1}} + \frac{n+1}{m+n}\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta^m\cos\zeta^{n+2}}$$

d'où il résultera

$$\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta^{m+2}\cos\zeta^n} = -\frac{1}{m+1}\frac{1}{\sin\zeta^{m+1}\cos\zeta^{n-1}} + \frac{m+n}{m+1}\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta^m\cos\zeta^n}$$

$$\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta^m\cos\zeta^{n+2}} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin\zeta^{m-1}\cos\zeta^{n+1}} + \frac{m+n}{n+1}\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta^m\cos\zeta^n}.$$

Changeant $m+2$ en m dans la première de ces équations et $n+2$ en n dans la seconde, on aura

$$\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta^m\cos\zeta^n}=-\frac{1}{m-1}\frac{1}{\sin\zeta^{m-1}\cos\zeta^{n-1}}+\frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta^{m-2}\cos\zeta^n}$$

$$\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta^m\cos\zeta^n}=\frac{1}{n-1}\frac{1}{\sin\zeta^{m-1}\cos\zeta^{n-1}}+\frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta^m\cos\zeta^{n-2}}.$$

On peut employer alternativement ces deux formules, comme on a fait à l'égard de celles du n°. 446, dans l'exemple $\int d\zeta\sin\zeta^3\cos\zeta^7$, et diminuer ainsi successivement l'exposant de $\sin\zeta$, puis celui de $\cos\zeta$; et en continuant les réductions autant qu'il sera possible, on parviendra à l'une des trois intégrales ci-dessous

$$\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta}=\text{l.tang}\tfrac{1}{2}\zeta+\textit{conse.},\quad\int\frac{d\zeta}{\cos\zeta}=\text{l.tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\zeta)+\textit{conse.},$$

$$\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta\cos\zeta}=\text{l.tang}\zeta+\textit{const.}\ (\text{n°. 447}).$$

On peut aussi s'élever de celles-ci à des cas plus compliqués, tels que $\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta^3}$, $\int\frac{d\zeta}{\cos\zeta^3}$, $\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta\cos\zeta^2}$, $\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta^2\cos\zeta}$, $\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta^2\cos\zeta^2}$, etc.

451. La différentielle $\frac{dz}{\sin z^m\cos z^n}$ se décompose encore en d'autres plus simples, en observant que son numérateur peut être multiplié par $\sin z^2+\cos z^2$ et son dénominateur par 1, puisque $\sin z^2+\cos z^2=1$; il vient alors

$$\frac{dz\sin z^2}{\sin z^m\cos z^n}+\frac{dz\cos z^2}{\sin z^m\cos z^n}=\frac{dz}{\sin z^{m-2}\cos z^n}+\frac{dz}{\sin z^m\cos z^{n-2}},$$

et par conséquent

$$\int\frac{dz}{\sin z^m\cos z^n}=\int\frac{dz}{\sin z^{m-2}\cos z^n}+\int\frac{dz}{\sin z^m\cos z^{n-2}}.$$

On trouvera de même

$$\int\frac{dz}{\sin z^{m-2}\cos z^n}=\int\frac{dz}{\sin z^{m-4}\cos z^n}+\int\frac{dz}{\sin z^{m-2}\cos z^{n-2}}$$

$$\int\frac{dz}{\sin z^m\cos z^{n-2}}=\int\frac{dz}{\sin z^{m-2}\cos z^{n-2}}+\int\frac{dz}{\sin z^m\cos z^{n-4}}$$

et en continuant ainsi, on parviendroit à des intégrales dont le dénominateur ne renfermeroit que $\cos z^n$ ou $\sin z^m$. On change sur

le champ par la première des formules ci-dessus

$$\int \frac{dz}{\sin z \cos z} \text{ en } \int \frac{dz \sin z}{\cos z} + \int \frac{dz \cos z}{\sin z} = l \frac{\sin z}{\cos z} + \textit{const.} \text{ (n°. 447).}$$

$$\int \frac{dz}{\sin z^3 \cos z^3} \text{ en } \int \frac{dz}{\cos z^3} + \int \frac{dz}{\sin z^3} = \frac{\sin z}{\cos z} - \frac{\cos z}{\sin z} + \textit{const.} \text{ (n°. 449).}$$

La différentielle $\frac{dz}{\sin z^n \cos z^n}$ se traite par un artifice particulier; on a, par le n° 39 de l'Introduction $\sin z \cos z = \frac{1}{2} \sin 2z$, d'où $\sin z^n \cos z^n = \frac{1}{2^n} (\sin 2z)^n$; faisant $2z = y$, il vient

$$\int \frac{dz}{\sin z^n \cos z^n} = 2^{n-1} \int \frac{dy}{\sin y^n}.$$

En remarquant avec soin la liaison des diverses formules auxquelles nous sommes parvenus dans ce qui précède, par un petit nombre de moyens très-simples, il sera facile de voir que l'intégrale de $dz \sin z^m \cos z^n$ s'obtiendra toutes les fois que m et n seront des nombres entiers, soit positifs, soit négatifs; il n'en est pas de même quand ces exposans sont fractionnaires; il faut avoir recours aux séries, excepté dans un petit nombre de cas où l'intégration se présente d'elle-même. Mais avant de passer à l'usage des séries, nous avons encore à traiter quelques différentielles fractionnaires, qui se rencontrent souvent dans l'application de l'Analyse à l'Astronomie.

452. Soit la différentielle $\frac{dz}{a + b \cos z}$; en posant $\cos z = x$, elle deviendroit $\frac{-dx}{(a + bx)\sqrt{1 - x^2}}$ et pourroit être rendue rationnelle par la méthode du n°. 377; mais il sera plus simple de faire $\cos z = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$: on aura $\sin z = \frac{2x}{1 + x^2}$, $dz \cos z = \frac{2dx(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$, d'où $dz = \frac{2dx}{1 + x^2}$ et $\frac{dz}{a + b \cos z} = \frac{2dx}{a + b + (a - b)x^2}$. La transformée est une fraction rationnelle et s'intégrera par conséquent, soit par les logarithmes, soit par les arcs de cercles, selon que les facteurs de son dénominateur seront ou réels ou imaginaires. Dans l'hypothèse de a et de b positifs, le premier cas a lieu lorsque a est $<$ que b, et le second

second lorsque a est $>$ que b; on trouve dans l'un (n°. 364)

$$\int\frac{2dx}{a+b+(a-b)x^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\,l.\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}+(b-a)x}{\sqrt{b^2-a^2}-(b-a)x}\right)+\text{conse.}=\int\frac{d\zeta}{a+b\cos\zeta}.$$

et dans l'autre (n°. 366)

$$\int\frac{2dx}{a+b+(a-b)x^2}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}.\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{(a-b)x}{\sqrt{aa-bb}}\right)+\text{conse.}=\int\frac{d\zeta}{a+b\cos\zeta}.$$

On tire de la supposition faite au commencement de cet article, $x=\sqrt{\frac{1-\cos\zeta}{1+\cos\zeta}}=\text{tang}\frac{1}{2}\zeta$ (n°. 448); en multipliant les deux termes de la fraction $\frac{1-\cos\zeta}{1+\cos\zeta}$, par $1+\cos\zeta$, on a aussi $x=\frac{\sin\zeta}{1+\cos\zeta}$.: ces valeurs étant substituées dans les intégrales trouvées ci-dessus, leur donneront des formes très-élégantes. En mettant d'abord $\frac{\sqrt{1-\cos\zeta}}{\sqrt{1+\cos\zeta}}$ dans la première et en observant que ses deux termes ont pour facteur commun $\sqrt{b-a}$, on trouvera

$$\int\frac{d\zeta}{a+b\cos\zeta}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}.l\frac{\sqrt{(b+a)(1+\cos\zeta)}+\sqrt{(b-a)(1-\cos\zeta)}}{\sqrt{(b+a)(1+\cos\zeta)}-\sqrt{(b-a)(1-\cos\zeta)}}+\text{conse.}$$

Si on multiplie les deux termes de la fraction comprise sous le signe l, par le numérateur, elle se changera en $\frac{b+a\cos\zeta+\sin\zeta.\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos\zeta}$; et on aura enfin

$$\int\frac{d\zeta}{a+b\cos\zeta}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}l\left(\frac{b+a\cos\zeta+\sin\zeta\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos\zeta}\right)+\text{conse.}$$

Ce résultat se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque $a=b$; mais alors la différentielle $\frac{2dx}{a+b+(a-b)x^2}$ devient $\frac{dx}{a}$: mettant dans son intégrale, au lieu de x, la valeur $\text{tang}\frac{1}{2}\zeta$, rapportée plus haut, on aura

$$\frac{1}{a}\int\frac{d\zeta}{1+\cos\zeta}=\frac{1}{a}\text{tang}\frac{1}{2}\zeta+\text{conse.}=\frac{1}{a}\frac{\sin\zeta}{1+\cos\zeta}+\text{conse.}$$

La seconde intégrale prend une forme bien simple, lorsqu'on y substitue $\text{tang}\frac{1}{2}z$ pour x; car elle devient

$$\int\frac{dz}{a+b\cos z}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}.\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{(a-b)\text{tang}\frac{1}{2}z}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)+const.$$

En remplaçant x par $\frac{\sqrt{1-\cos z}}{\sqrt{1+\cos z}}$, cette même intégrale deviendra

$$\int\frac{dz}{a+b\cos z}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{\sqrt{(a-b)(1-\cos z)}}{\sqrt{(a+b)(1+\cos z)}}\right)+const.$$

mais comme $\text{tang}\,2A=\frac{2\,\text{tang}\,A}{1-\text{tang}\,A^2}$ (*Int.* page 65) on trouvera

$$2.\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{\sqrt{(a-b)(1-\cos z)}}{\sqrt{(a+b)(1+\cos z)}}\right)=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{\sin z.\sqrt{a^2-b^2}}{b+a\cos z}\right);$$

et parce que $\sin A=\frac{\text{tang}\,A}{\sqrt{1+\text{tang}\,A^2}}$ et que $\cos A=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}\,A^2}}$, le dernier arc aura son sinus exprimé par $\frac{\sin z.\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos z}$, et son cosinus par $\frac{b+a\cos z}{a+b\cos z}$, ce qui donnera à l'intégrale ci-dessus deux formes différentes, dont la seconde

$$\int\frac{dz}{a+b\cos z}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{arc}\left(\cos.=\frac{b+a\cos z}{a+b\cos z}\right)+const.$$

est assez remarquable.

Les détails dans lesquels je viens d'entrer pourront paroître longs à quelques lecteurs; mais ceux qui n'auront pas une grande habitude du Calcul des fonctions circulaires, me sauront gré d'avoir mis sous leurs yeux plusieurs exemples qui leur apprendront comment on peut donner différentes formes à une même intégrale, parmi lesquelles on choisit celle qui est la plus commode pour l'application qu'on se propose.

453. Les différentielles $\frac{dz\sin z}{a+b\cos z}$, $\frac{dz\cos z}{a+b\cos z}$, s'integrent facilement; la première revient à $-\frac{d.\cos z}{a+b\cos z}$, et on a par conséquent

$$\int\frac{d\zeta\sin\zeta}{a+b\cos\zeta}=-\frac{1}{b}l(a+b\cos\zeta)+const.=\frac{1}{b}l\left(\frac{1}{a+b\cos\zeta}\right)+const.$$

La seconde peut se mettre sous la forme $\frac{d\zeta}{b}-\frac{a\,d\zeta}{b(a+b\cos\zeta)}$, d'où on tire $\int\frac{d\zeta\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}=\frac{\zeta}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{d\zeta}{a+b\cos\zeta}$, ce qui rentre dans le cas du n°. précédent.

454. Passons à la différentielle plus générale $\frac{d\zeta(a'+b'\cos\zeta)}{(a+b\cos\zeta)^n}$ et supposons

$$\int\frac{d\zeta(a'+b'\cos\zeta)}{(a+b\cos\zeta)^n}=\frac{A\sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^{n-1}}+\int\frac{d\zeta(B+C\cos\zeta)}{(a+b\cos\zeta)^{n-1}},$$

A et B étant des coefficiens constans et indéterminés ; en différentiant les deux membres de cette équation, divisant le résultat par $d\zeta$ et chassant le dénominateur, on trouvera

$$a'+b'\cos\zeta=A\cos\zeta(a+b\cos\zeta)+(n-1)Ab\sin\zeta^2+(B+C\cos\zeta)(a+b\cos\zeta);$$

développant les produits indiqués, substituant $1-\cos\zeta^2$, au lieu de $\sin\zeta^2$, et passant tous les termes dans un membre, on aura

$+(n-1)Ab$	$+Aa\cos\zeta$	$+$	$Ab\cos\zeta^2=0$
$+$ Ba	$+Bb$	$-(n-1)Ab$	
	$+Ca$	$+$ Cb	
$-$ a'	$-$ b'		

d'où, en égalant à zéro les coefficiens des termes semblables, on tirera

$$A=\frac{ab'-ba'}{(n-1)(a^2-b^2)},\quad B=\frac{aa'-bb'}{a^2-b^2},\quad C=\frac{(n-2)(ab'-ba')}{(n-1)(a^2-b^2)}$$

et par conséquent

$$\int\frac{d\zeta(a'+b'\cos\zeta)}{(a+b\cos\zeta)^n}=\frac{(ab'-ba')\sin\zeta}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos\zeta)^{n-1}}+\frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{d\zeta[(n-1)(aa'-bb')+(n-2)(ab'-ba')\cos\zeta]}{(a+b\cos\zeta)^{n-1}}.$$

Cette réduction conduira, si n est un nombre entier positif, à une dernière intégrale de la forme $\int\frac{d\zeta(p+q\cos\zeta)}{a+b\cos\zeta}$, laquelle se change en $\int d\zeta\left[\frac{q}{b}+\frac{bp-aq}{b(a+b\cos\zeta)}\right]=\frac{q}{b}\zeta+\frac{bp-aq}{b}\int\frac{d\zeta}{a+b\cos\zeta}$.

455. On pourroit se proposer, par rapport aux tangentes et aux sécantes, des différentielles analogues à celle que nous venons de traiter, et il sera facile d'imiter à leur égard le procédé que nous avons suivi ; nous ne saurions d'ailleurs nous arrêter sur ces détails : nous observerons seulement que toutes les différentielles de cette espèce peuvent être mises sous une forme algébrique, en faisant ou $\cos\zeta = x$, ou $\operatorname{tang}\zeta = x$, ou $\sec\zeta = x$, etc. et en substituant à $d\zeta$ les valeurs relatives à l'hypothèse établie.

Les différentielles $\frac{d\zeta \cos\zeta^m \sin\zeta^n}{(a+b\cos\zeta)^p}$ et $\frac{d\zeta \operatorname{tang}\zeta^m}{(a+b\operatorname{tang}\zeta)^p}$, par exemple, se changeront respectivement en

$$\frac{x^m dx\,(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}}{(a+bx)^p} \text{ et } \frac{x^m dx}{(1+x^2)(a+bx)^p}$$

par la supposition de $\cos\zeta = x$, et par celle de $\operatorname{tang}\zeta = x$, desquelles il résulte $d\zeta = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $d\zeta = \frac{dx}{1+x^2}$.

456. Nous traiterons encore les différentielles $e^{ax} d\zeta \sin\zeta^n$ et $e^{ax} d\zeta \cos\zeta^n$, qui peuvent se présenter dans quelques applications.

En intégrant d'abord le facteur $e^{ax} d\zeta$ de la premiere, on trouve

$$\int e^{ax} d\zeta \sin\zeta^n = \frac{1}{a} e^{ax} \sin\zeta^n - \frac{n}{a} \int e^{ax} d\zeta \cos\zeta \sin\zeta^{n-1}.$$

On aura de la même manière

$$\int e^{ax} d\zeta \cos\zeta \sin\zeta^{n-1} = \frac{1}{a} e^{ax} \cos\zeta \sin\zeta^{n-1}$$

$$- \frac{1}{a} \int e^{ax} d\zeta \left[(n-1)\cos\zeta^2 \sin\zeta^{n-2} - \sin\zeta^n\right];$$

mettant dans la dernière intégrale $1-\sin\zeta^2$ pour $\cos\zeta^2$, et substituant la valeur de $\int e^{ax} d\zeta \cos\zeta \sin\zeta^{n-1}$ qui viendra alors, dans celle de $\int a^{ax} d\zeta \sin\zeta^n$ donnée ci-dessus, on obtiendra l'équation suivante

$$\int e^{ax} d\zeta \sin\zeta^n = \frac{1}{a} e^{ax} \sin\zeta^n - \frac{n}{a^2} e^{ax} \sin\zeta^{n-1} \cos\zeta$$

$$+ \frac{n(n-1)}{a^2} \int e^{ax} d\zeta \sin\zeta^{n-2} - \frac{n^2}{a^2} \int e^{ax} d\zeta \sin\zeta^n,$$

de laquelle on déduira $\int e^{ax} d\zeta \sin\zeta^n = \frac{e^{ax} \sin\zeta^{n-1}(a\sin\zeta - n\cos\zeta)}{a^2+n^2}$

$$+ \frac{n(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} d\zeta \sin\zeta^{n-2},$$

Le second membre de cette dernière équation est délivré du signe $\int$, lorsque $n=1$ et lorsque $n=0$, et dans ces deux cas elle donne

$$\int e^{az}dz\sin z=\frac{e^{az}(a\sin z-\cos z)}{a^2+1}+const.$$

$$\int e^{az}dz\quad=\frac{1}{a}e^{az}+const.$$

formules auxquelles se rameneront par conséquent tous les cas où n sera un nombre entier.

La seconde différentielle proposée, $e^{az}dz\cos z^n$, traitée comme la précédente, donne $\int e^{az}dz\cos z^n=\frac{1}{a}e^{az}\cos z^n+\frac{n}{a}\int e^{az}dz\sin z\cos z^{n-1}$,

$$\int e^{az}dz\sin z\cos z^{n-1}=\frac{1}{a}e^{az}\sin z\cos z^{n-1}.$$

$$-\frac{1}{a}\int e^{az}dz[\cos z^n-(n-1)\sin z^2\cos z^{n-2}],$$

d'où $\int e^{az}dz\cos z^n=\frac{1}{a}e^{az}\cos z^n+\frac{n}{a^2}e^{az}\sin z\cos z^{n-1}.$

$$+\frac{n(n-1)}{a^2}\int e^{az}dz\cos z^{n-2}-\frac{n^2}{a^2}\int e^{az}dz\cos z^n,$$

et par conséquent

$$\int e^{az}dz\cos z^n=\frac{e^{az}\cos z^{n-1}(a\cos z+n\sin z)}{a^2+n^2}$$

$$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{az}dz\cos z^{n-2}.$$

Les deux cas les plus simples et auxquels se ramènent tous ceux où n est un nombre entier, sont

$$\int e^{az}dz\cos z=\frac{e^{az}(a\cos z+\sin z)}{a^2+1}+const.$$

$$\int e^{az}dz\quad=\frac{1}{a}e^{az}+const.$$

457. La possibilité d'exprimer les puissances entières et positives de sinus et de cosinus par les sinus et les cosinus des multiples de l'arc, conduit bien simplement à l'intégrale de la différentielle $e^{az}dz\sin z^m\cos z^n$; en effet, on changera cette différentielle par les formules des n^os. 42 et 43 de l'Introduction, en une suite de termes de la

forme $e^{az}dz\sin pz$, ou $e^{az}dz\cos pz$, et en faisant $pz=y$, on aura

$$e^{az}dz\sin pz=\frac{1}{p}e^{\frac{a}{p}y}dy\sin y,\qquad e^{az}dz\cos pz=\frac{1}{p}e^{\frac{a}{p}y}dy\cos y.$$

Les seconds membres de ces équations s'integrent par le n°. précédent, et remettant dans les résultats au lieu de y sa valeur, il viendra

$$\int e^{az}dz\sin pz=\frac{e^{az}(a\sin pz-p\cos pz)}{a^2+p^2}+const.$$

$$\int e^{az}dz\cos pz=\frac{e^{az}(a\cos pz+p\sin pz)}{a^2+p^2}+const.$$

458. Avant qu'Euler eût fait un si fréquent usage des formules citées dans le n°. précédent, les Géomètres recourroient le plus souvent pour l'intégration des différentielles affectées de sinus et de cosinus, aux expressions imaginaires de ces fonctions (*Int.* n°. 39).

Pour intégrer par ce moyen la différentielle $e^{az}dz\sin pz\cos qz$, on substituera, au lieu de $\sin pz$ et de $\cos qz$, leurs expressions $\frac{e^{pz\sqrt{-1}}-e^{-pz\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $\frac{e^{qz\sqrt{-1}}+e^{-qz\sqrt{-1}}}{2}$; ces deux quantités étant multipliées entr'elles, et par $e^{az}dz$, on aura

$$\frac{\left(e^{[a+(p+q)\sqrt{-1}]z}-e^{[a-(p-q)\sqrt{-1}]z}+e^{[a+(p-q)\sqrt{-1}]z}-e^{[a-(p+q)\sqrt{-1}]z}\right)dz}{4\sqrt{-1}}.$$

Tous les termes de cette transformée s'intégreront chacun en particulier, d'après la formule $\int e^{mz}dz=\frac{1}{m}\int e^{mz}m\,dz=\frac{1}{m}e^{mz}+const.$

Mettant ensuite au lieu de m les différens multiplicateurs de z, on aura pour résultat des exponentielles en partie réelles et en partie imaginaires, et on chassera ces dernieres au moyen de leurs expressions données dans le n°. 40 de l'Introduction.

Nous n'avons parlé de ce procédé assez compliqué, que parce qu'on en trouve des applications dans quelques ouvrages d'Astronomie physique; car d'ailleurs la différentielle $e^{az}dz\sin pz\cos qz$ se ramène à celles du n°. 456, en observant que
$\sin pz\cos qz=\frac{1}{2}\sin(p+q)z-\frac{1}{2}\sin(p-q)z$.

459. La différentielle $dz(a+b\cos z)^m$ se rencontre fréquemment dans les applications, et pour l'intégrer, lorsque m est un nombre

fractionnaire, ce qui arrive presque toujours, il faut la développer en série; c'est ce dont nous allons nous occuper avec quelque détail. Nous commencerons d'abord par mettre la quantité $a+b\cos z$ sous la forme $a\left(1+\frac{b}{a}\cos z\right)$ et faisant pour abréger $\frac{b}{a}=n$, la différentielle proposée se changera en $a^m dz(1+n\cos z)^m$.

Considérons d'abord le développement de $(1+n\cos z)^m$; la formule du binome donnera

$$(1+n\cos z)^m = 1+\frac{m}{1}n\cos z+\frac{m(m-1)}{1.2}n^2\cos z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}n^3\cos z^3 + \text{etc.}$$

chacun des termes de cette suite étant multiplié par dz, s'intégrera par les formules du n°. 444; mais ce procédé donne dans l'intégration de chaque terme de la différentielle une suite de termes parmi lesquels il s'en trouve de semblables à ceux qui résultent de l'intégration des termes précédens, ce qui rend le développement final très-difficile à ordonner: cet inconvénient n'ayant pas lieu pour les différentielles de la forme $(A+B\sin z+C\sin 2z+D\sin 3z+\text{etc.})dz$

$(A+B\cos z+C\cos 2z+D\cos 3z+\text{etc.})dz$,

dont les intégrales sont

$$Az-B\cos z-\tfrac{1}{2}C\cos 2z-\tfrac{1}{3}D\cos 3z-\text{etc.}+const.$$

$$Az+B\sin z+\tfrac{1}{2}C\sin 2z+\tfrac{1}{3}D\cos 3z+\text{etc.}+const.$$

il faut donc ramener à ces dernières les développemens des différentielles qu'on se propose d'intégrer.

460. Reprenons le développement de $(1+n\cos z)^m$, donné ci-dessus,

$$1+\frac{m}{1}n\cos z+\frac{m(m-1)}{1.2}n^2\cos z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}n^3\cos z^3+\text{etc.}$$

et substituons à la place de $\cos z^2$, $\cos z^3$ etc. leurs valeurs tirées du n°. 42 de l'Introduction, nous aurons, après avoir rassemblé tous les termes semblables,

$$1+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{2}n^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\frac{1.3}{2.4}n^4+\frac{m(m-1)\ldots(m-5)}{1.2\ldots\ldots6}\frac{1.3.5}{2.4.6}n^6+\text{etc.}$$

$$+2n\left[\frac{m}{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1.3}{2.4}n^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}n^4+\text{etc.}\right]\cos z$$

$$+\text{etc.}$$

Nous n'avons calculé que les deux premiers termes de cette suite,

parce que le calcul différentiel fournit un procédé très-direct et très-élégant, au moyen duquel on trouve des relations fort remarquables et fort utiles entre les différens termes du développement de $(1+n\cos z)^m$; ce procédé est celui dont nous avons déjà fait usage, n°. 98. En posant l'équation

$$(1+n\cos z)^m = A + B\cos z + C\cos 2z + D\cos 3z + E\cos 4z + \text{etc.}$$

et prenant la différentielle logarithmique, il vient

$$\frac{mn\sin z}{1+n\cos z} = \frac{B\sin z + 2C\sin 2z + 3D\sin 3z + 4E\sin 4z + \text{etc.}}{A + B\cos z + C\cos 2z + D\cos 3z + E\cos 4z + \text{etc.}};$$

faisant disparoître les dénominateurs, passant tous les termes dans un seul membre, et substituant par-tout, au lieu des produits de la forme $\sin z\cos pz$, $\cos z\sin pz$, leurs valeurs

$\frac{1}{2}\sin(p+1)z - \frac{1}{2}\sin(p-1)z$, $\frac{1}{2}\sin(p+1)z + \frac{1}{2}\sin(p-1)z$,

on obtient

$$\begin{aligned}
0 = {} & B\sin z + 2C\sin 2z + 3D\sin 3z + 4E\sin 4z + \text{etc.} \\
& + \tfrac{1}{2}Bn \quad + \tfrac{2}{2}Cn \quad + \tfrac{3}{2}Dn \\
& + \tfrac{2}{2}Cn \quad + \tfrac{3}{2}Dn \quad + \tfrac{4}{2}En \quad + \tfrac{5}{2}Fn \\
& - mAn \quad - \tfrac{m}{2}Bn \quad - \tfrac{m}{2}Cn \quad - \tfrac{m}{2}Dn \\
& + \tfrac{m}{2}Cn \quad + \tfrac{m}{2}Dn \quad + \tfrac{m}{2}En \quad + \tfrac{m}{2}Fn,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left.\begin{aligned}
&(m+2)Cn + 2B - 2mAn = 0 \\
&(m+3)Dn + 4C - (m-1)Bn = 0 \\
&(m+4)En + 6D - (m-2)Cn = 0 \\
&(m+5)Fn + 8E - (m-3)Dn = 0 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned}
C &= \frac{2mAn - 2B}{(m+2)n} \\
D &= \frac{(m-1)Bn - 4C}{(m+3)n} \\
E &= \frac{(m-2)Cn - 6D}{(m+4)n} \\
F &= \frac{(m-3)Dn - 8E}{(m+5)n} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

Par ces valeurs la recherche des coefficiens de la série $A + B\cos z + \text{etc.}$ est ramenée à celle des deux premiers A et B, puisque chacun de ces coefficiens dépend des deux qui le précedent; mais les coefficiens

des

des deux premiers termes du développement commencé plus haut, donnent pour A et B des valeurs qu'on peut mettre sous la forme

$$A=1+\frac{m(m-1)}{2.2}n^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.2.4.4}n^4+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2.2.4.4.6.6}n^6+\text{etc.}$$

$$B=2n\left[\frac{m}{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.2.4}n^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.2.4.4.6}n^4+\text{etc.}\right]$$

et à l'aide desquelles on obtiendra

$$C=4n^2\left[\frac{1m(m-1)}{2.2.4}+\frac{2m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.2.4.4.6}n^2+\frac{3m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2.2.4.4.6.6.8}n^4+\text{etc.}\right]$$

$$D=8n^3\left[\frac{1.2m(m-1)(m-2)}{2.2.4.4.6}+\frac{2.3m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.2.4.4.6.6.8}n^2+\text{etc.}\right]$$

$$E=16n^4\left[\frac{1.2.3m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.2.4.4.6.6.8}+\frac{2.3.4m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2.2.4.4.6.6.8.8.10}n^2+\text{etc.}\right]$$

etc.

461. Ces séries se terminent lorsque m est un nombre entier positif, et alors l'intégration de $(1+n\cos z)^m dz$ s'effectue exactement; mais dans tous les autres cas elles vont à l'infini et leur convergence dépend principalement de la petitesse de la quantité n: avant d'entrer dans les détails relatifs à cette convergence, je vais montrer comment on peut parvenir à exprimer les coefficiens du développement de $(1+n\cos z)^m$, par le moyen de ceux du même développement calculé pour un exposant moindre. Comme dans les applications où se rencontre la différentielle $(1+n\cos z)^m$, l'exposant m est négatif, nous supposerons

$$(1+n\cos z)^{-m}=A+B\cos z+C\cos 2z+D\cos 3z+E\cos 4z+\text{etc.}$$
$$(1+n\cos z)^{-m-1}=A'+B'\cos z+C'\cos 2z+D'\cos 3z+E'\cos 4z+\text{etc.}$$

et puisque

$$(1+n\cos z)^{-m'}=(1+n\cos z)^{-m-1}\times(1+n\cos z),$$

on aura

$$(1+n\cos z)(A'+B'\cos z+C'\cos 2z+D'\cos 3z+\text{etc.})$$
$$=A+B\cos z+C\cos 2z+D\cos 3z+\text{etc.}$$

développant cette équation et substituant au lieu des produits de la forme $\cos z\cos pz$, leur valeur $\frac{1}{2}\cos(p+1)z+\frac{1}{2}\cos(p-1)z$, on obtiendra, par la comparaison des termes semblables, les déterminations suivantes.

$$\left.\begin{array}{l} A = A' + \frac{1}{2}B'n \\ B = B' + A'n + \frac{1}{2}C'n \\ C = C' + \frac{1}{2}B'n + \frac{1}{2}D'n \\ D = D' + \frac{1}{2}C'n + \frac{1}{2}E'n \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{d'où résulte} \left\{\begin{array}{l} B' = \frac{2(M - A')}{n} \\ C' = \frac{2(B - B') - 2A'n}{n} \\ D' = \frac{2(C - C') - B'n}{n} \\ E' = \frac{2(D - D') - C'n}{n} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

L'inspection des valeurs ci-dessus fait voir que lorsqu'on connoîtra le développement de $(1 + n\cos\zeta)^{-m}$ et le premier terme A' de celui de $(1 + n\cos\zeta)^{-m-1}$, on connoîtra tous ceux de ce dernier ; mais il existe entre A et A' une relation qui donne l'une de ces quantités par l'autre. Si on change $+m$ en $-m$, dans l'expression de A du n°. préc. on aura

$$A = 1 + \frac{m(m+1)}{2.2}n^2 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{2.2.4.4}n^4 + \text{etc.}$$

substituant ensuite $m + 1$ à la place de m, il viendra

$$A' = 1 + \frac{(m+1)(m+2)}{2.2}n^2 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2.2.4.4}n^4 + \text{etc.}$$

mais en différentiant la première série par rapport à n, après l'avoir multipliée préalablement par n^m, on trouvera

$$\frac{d.An^m}{dn} = mn^{m-1} + \frac{m(m+1)(m+2)}{2.2}n^{m+1} + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2.2.4.4}n^{m+3}$$

$$+ \text{etc.})$$

$$= mn^{m-1}\left(1 + \frac{(m+1)(m+2)}{2.2}n^2 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2.2.4.4}n^4 + \text{etc.}\right)$$

la dernière série, comparée avec l'expression de A', donne évidemment $\frac{d.An^m}{dn} = mn^{m-1}A'$, et à cause que $mn^{m-1} = \frac{d.n^m}{dn}$, il en résultera

$$A' = \frac{d.An^m}{d.n^m} = A + \frac{ndA}{mdn} :$$

on trouveroit de même

$$B' = \frac{d.Bn^m}{d.n^m} = B + \frac{ndB}{mdn}$$

$$C' = \frac{d.Cn^m}{d.n^m} = C + \frac{ndC}{mdn}$$

etc.

On peut encore obtenir A' au moyen de A, sans employer la différentiation, en observant qu'il doit y avoir entre A', B', C', etc. les mêmes relations qu'entre A, B, C, etc. Or si on change m en $-m$, dans les expressions de C, D, etc. données page 120, on aura $C=\frac{2mnA+2B}{(m-2)n}$; mettant $m+1$, au lieu de m, dans cette dernière valeur, on trouvera $C'=\frac{2(m+1)nA'+2B'}{(m-1)n}$, résultat, qui étant égal à la valeur de C' trouvée au commencement de cet article, donne $\frac{2(m+1)nA'+2B'}{(m-1)n}=\frac{2(B-B')-2A'n}{n}$.

Si on chasse B' au moyen de sa valeur $\frac{2(A-A')}{n}$, et qu'on détermine ensuite A' par l'équation résultante, on aura enfin

$$A'=\frac{2Am-(m-1)nB}{2m(1-n^2)}.$$

Nous voilà donc en possession des formules nécessaires pour calculer tous les coefficiens A', B', C', etc. du développement de $(1+n\cos\zeta)^{-m-1}$, lorsque ceux du développement de $(1+n\cos\zeta)^{-m}$ seront connus.

462. Revenons aux résultats du n°. 460 et faisons-y $m=-1$, il viendra $A=1+\frac{1}{2}n^2+\frac{1.3}{2.4}n^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}n^6+$ etc.

$$B=2n\left(-\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2.4}n^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}n^4-\text{etc.}\right)$$

Il est facile de reconnoître à l'inspection de la série qui exprime A, que $A=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$, et d'en conclure que $B=\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\right)$ (*).

(*) Lorsque $m=-1$, on a simplement

$$\frac{1}{a+n\cos\zeta}=A+B\cos\zeta+C\cos 2\zeta+D\cos 3\zeta+\text{etc.}$$

et en faisant disparoître le dénominateur du premier membre, on peut déterminer tous les coefficiens, à l'exception du premier, on trouve ainsi $B=\frac{2}{n}(1-A)$.

Dans le cas général, la relation de A à B est exprimée par une équation différentielle. En vertu des séries du n°. 460, on a

$$\frac{2An^2+Bn}{m+2}=n^2+\frac{m(m-1)}{2.4}n^4+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4.4.6}n^6+\text{etc.}$$

Les autres coefficiens se déduisent de ces deux-ci, par les expressions rapportées dans le n°. cité. On observera que $\sqrt{1-n^2}$,

---

faisant pour abréger $\frac{2An^2+Bn}{m+2}=N$, et différentiant par rapport à n, il vient

$$\frac{dN}{dn}=2n+\frac{m(m-1)}{2}n^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4.4}n^5+\text{etc.}$$

ou $$\frac{dN}{ndn}=2+\frac{m(m-1)}{2}n^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4.4}n^4+\text{etc.}=2A.$$

Remettant pour dN sa valeur, en observant que A et B sont des fonctions de n, on aura l'équation $\frac{4Andn+Bdn+2n^2dA+ndB}{n(m+2)}=2Adn$, de laquelle on tirera

$$Bdn+ndB=2(m+2)Andn-4Andn-2n^2dA=2(mAndn-n^2dA),$$

et comme $Bdn+ndB=d.nB$, $4Andn+2n^2dA=d.2An^2$, on aura en intégrant, $Bn=2(m+2)\int Andn-2An^2$, d'où $B=\frac{2(m+2)}{n}\int Andn-2An$.

Lorsque $n=0$, la quantité $(1+n\cos z)^m$ se réduit à 1, ce qui donne $A=1$; et $B=0$; pour satisfaire à cette dernière condition, il faudra que l'intégrale $\int Andn$, lorsqu'elle sera connue, s'évanouisse par la supposition de $n=0$.

Enfin, on peut obtenir une équation différentielle du second ordre entre A et n. Nous avons trouvé (n°. précéd.) en supposant m négative,

$$B'=\frac{2(A-A')}{n},\quad A'=A+\frac{ndA}{mdn},\quad B'=B+\frac{ndB}{mdn};$$

substituant pour A' sa valeur dans la première expression de B' et égalant le résultat à la seconde, nous aurons $-\frac{2dA}{mdn}=B+\frac{ndB}{mdn}$; mais la valeur de B, à laquelle nous sommes parvenus plus haut, donne, par le changement de $+m$ en $-m$,

$$B=-\frac{2(m-2)}{n}\int Andn-2An,$$

$$dB=+\frac{2(m-2)}{n^2}dn\int Andn-2(m-1)Adn-2ndA,$$

expressions qui, substituées dans l'équation précédente, conduisent à

$$-n\frac{dA}{dn}=-(m-2)(m-1)\int Andn-(2m-1)An^2-n^3\frac{dA}{dn};$$

différentiant, pour faire partir le signe $\int$, on parviendra à un résultat qu'on mettra facilement sous la forme

$$(1-n^2)d^2A+\frac{dndA}{n}-2(m+1)ndndA-m(m+1)Adn^2=0.$$

il suffira de changer m en $-m$ dans cette équation, pour obtenir celle qui convient au cas où l'exposant m est positif.

devenant imaginaire, si on a $n>1$, la réduction en série n'aura plus lieu dans ce cas, ni même dans celui où $n=1$, circonstance qui rend A et B infinis, mais alors la différentielle proposée $\frac{dz}{1+\cos z}$ a pour intégrale, $\tang\frac{1}{2}z + const.$ (n°. 452).

463. Lorsqu'on a trouvé les coefficiens A, B, etc. pour le cas où $m=-1$, on peut, par le moyen des formules du n°. 461, déterminer successivement ceux qui répondent à $m=-2$, $m=-3$, etc. et s'élever ainsi de proche en proche à toutes les valeurs entières et négatives de m. Dans tous ces cas les formules de la page 120 ne sauroient être d'un usage commode ; car le dénominateur de C s'évanouit lorsque $m=-2$; il en est de même de celui de D, quand $m=-3$, et ainsi des autres ; à la vérité on voit, en calculant aussi le numérateur de ces termes, qu'il s'évanouit en même temps que leur dénominateur, mais leur expression analytique devenant de plus en plus compliquée, l'application de la méthode du n°. 136 seroit laborieuse.

En supposant $m=-1$, nous avons obtenu dans le n°. précédent $A=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$; mais puisque par le n°. 461, on a $A'=A+\frac{n\,dA}{m\,dn}$, il en résultera $A'=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}+\frac{n^2}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}$: telle est la valeur du premier coefficient du développement de $(1+n\cos z)^{-2}$. Ayant aussi sous une forme finie les expressions analytiques des coefficiens B, C, D, etc. on déterminera sous la même forme celles des coefficiens B', C', D', etc. par les valeurs du n°. cité.

464. Pour donner un exemple du cas où m est fractionnaire, nous supposerons $m=-\frac{5}{2}$, comme en effet cela arrive dans l'application à l'Astronomie Physique, et il sera facile d'étendre à toute autre valeur de m ce que nous dirons pour celle-ci. On voit d'abord que puisque $\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+1$, la recherche des coefficiens du développement de $(1+n\cos z)^{-\frac{5}{2}}$ se ramène à celle des coefficiens du développement de $(1+n\cos z)^{-\frac{1}{2}}$, au moyen des formules du n°. 461.

On représentera les premiers par A', B', etc. et les derniers par A, B, etc. faisant $m=-\frac{1}{2}$ dans les séries du n°. 460, on aura

$$A=1+\frac{1\cdot3}{4\cdot4}n^2+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4\cdot4\cdot8\cdot8}n^4+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{4\cdot4\cdot8\cdot8\cdot12\cdot12}n^6+\text{etc.}$$

$$B=\frac{1}{2}n+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot8}n^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot8\cdot8\cdot12}n^5+\text{etc.}$$

Le décroissement des fractions qui multiplient les diverses puissances de n se ralentit à mesure qu'on avance dans ces séries, et par cette raison elles ne sont suffisamment convergentes que quand n est très-petite : en supposant $m=+\frac{1}{2}$, on a

$$A=1-\frac{1\cdot1}{4\cdot4}n^2-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{4\cdot4\cdot8\cdot8}n^4-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{4\cdot4\cdot8\cdot8\cdot12\cdot12}n^6+\text{etc.}$$

$$B=\frac{1}{2}n+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot8}n^3+\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot8\cdot8\cdot12}n^5+\text{etc.}$$

séries qui sont plus convergentes que les premières. Dans ce cas, les coefficiens A' et B' répondront à l'exposant $m=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$; mais on pourra se servir de leur valeur pour passer à celle des coefficiens du développement de $(1+n\cos\zeta)^{-\frac{3}{2}}$, coefficiens que nous désignerons par les lettres A'', B'', C'', etc.

Cela posé, l'équation $A'=A+\frac{ndA}{mdn}$ n'étant point d'un usage commode, parce que l'expression analytique de A n'est pas sous une forme finie, on se servira de l'équation $A'=\frac{2Am-(m-1)nB}{2m(1-n^2)}$ (n°. 461) qui n'exige que la connoissance des valeurs numériques de A et de B; on y supposera $m=-\frac{1}{2}$, puisqu'il s'agit de $(1+n\cos\zeta)^{\frac{1}{2}}$ et il viendra $A'=\frac{2A+3nB}{2(1-n^2)}$: on déterminera B' par l'équation $B'=\frac{2(A-A')}{n}$ du n°. cité. Si on fait ensuite $m=\frac{1}{2}$ et qu'on change A en A' et B en B' dans la valeur de A', A en A' et A' en A'' dans celle de B', on aura les valeurs de A'' et de B'', savoir :

$$A''=\frac{2A'+nB'}{2(1-n^2)},\quad B''=\frac{2(A'-A'')}{n}.$$

On déduira ensuite C'', D'', etc. des équations de la page 120, qui doivent avoir lieu entre A'', B'', C'', D'', etc. comme entre A, B, C, D, etc. et dans lesquelles aucun dénominateur ne peut s'évanouir lorsque m est un nombre fractionnaire.

465. Après avoir écarté les difficultés qui tenoient aux valeurs particulières de l'exposant de la fonction $(1+n\cos z)^m$, et réduit la recherche des coefficiens de son développement à celle des deux premiers ; il ne nous reste plus qu'à donner aux expressions de ceux-ci une forme convergente pour le cas où la quantité n approcheroit beaucoup de l'unité. Ce cas s'étant rencontré dans les recherches sur le Systême du Monde, a été traité spécialement par les Géomètres, et voici d'abord un moyen dont Euler a fait usage dans cette circonstance.

Soit $(1+n\cos z)^m = A_0 + A_1\cos z + A_2\cos 2z + A_3\cos 3z + \text{etc.}$ A_0, A_1, A_2, etc. représentant les coefficiens A, B, C, etc. en donnant à z une valeur quelconque déterminée z', on aura de même

$(1+n\cos z)^m = A_0 + A_1\cos z' + A_2\cos 2z' + A_3\cos 3z' + \text{etc.}$

Si on désigne par π la demi-circonférence et qu'on substitue $\pi+z'$, à la place de z, on aura (*T. I, page* 294.)

$\cos(\pi+z') = -\cos z'$, $\cos 2(\pi+z') = \cos 2z'$, $\cos 3(\pi+z') = -\cos 3z'$, etc.

et par conséquent

$(1-n\cos z')^m = A_0 - A_1\cos z' + A_2\cos 2z' - A_3\cos 3z' + \text{etc.}$

En ajoutant cette expression avec la précédente, il viendra

$(1+n\cos z')^m + (1-n\cos z')^m = 2A_0 + 2A_2\cos 2z' + 2A_4\cos 4z' + \text{etc.}$

mettant ensuite dans ce résultat $\frac{\pi}{2}+z'$ à la place de z', en observant

que $\cos\left(\frac{\pi}{2}+z'\right) = \sin z'$, $\cos 2\left(\frac{\pi}{2}+z'\right) = -\cos 2z'$, $\cos 4\left(\frac{\pi}{2}+z'\right) = \cos 4z'$, etc.

on obtiendra

$(1+n\sin z')^m + (1-n\sin z')^m = 2A_0 - 2A_2\cos 2z' + 2A_4\cos 4z' - \text{etc.}$

la somme de ce résultat et du précédent sera

$$(1+n\cos z')^m + (1-n\cos z')^m + (1+n\sin z')^m + (1-n\sin z')^m$$
$$= 4A_0 + 4A_4\cos 4z' + 4A_8\cos 8z' + 4A_{12}\cos 12z' + \text{etc.}$$

représentant le premier membre de cette équation par $4M'$, nous aurons, après avoir divisé toute l'équation par 4,

$$M' = A_0 + A_4\cos 4z' + A_8\cos 8z' + A^{12}\cos 12z' + \text{etc.}$$

Pour d'autres arcs, ζ'', ζ''', ζ'''', etc. nous aurions également

$$M''=A_0+A_4\cos 4\zeta''+A_8\cos 8\zeta''+A_{12}\cos 12\zeta''+\text{etc.}$$
$$M'''=A_0+A_4\cos 4\zeta'''+A_8\cos 8\zeta'''+A_{12}\cos 12\zeta'''+\text{etc.}$$
$$M''''=A_0+A_4\cos 4\zeta''''+A_8\cos 8\zeta''''+A_{12}\cos 12\zeta''''+\text{etc.}$$
etc.

Les quantités A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, etc. formant une série décroissante, on voit que si le terme $A_4\cos 4\zeta'$ et les suivans, peuvent être négligés, on aura, pour une première approximation, $M=A_0$; on la rendra plus exacte en prenant $\zeta'=\frac{\pi}{8}$; car alors

$$\cos 4\zeta'=\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \cos 8\zeta'=\cos\pi'=-1,\quad \cos 12\zeta'=\cos\frac{3\pi}{2}=0\text{ etc.}$$

et par conséquent $M'=A_0-A_8+A_{16}-\text{etc.}$

d'où il suit qu'on ne néglige que le terme A_8 et ceux qui le suivent de 4 en 4, en prenant $A_0=M'$, dans ce cas.

Mais ce n'est pas tout; on peut par ce moyen pousser l'approximation aussi loin qu'on veut, en ajoutant ensemble les quantités M', M'', M''', M''''; etc. et déterminant les angles ζ', ζ'', ζ''', ζ'''', etc. de manière à faire disparoître dans la somme autant qu'on voudra des termes qui suivent, et voici comment:

Les racines de l'équation $x^{2r}+1=0$ qui n'a point de second terme, étant comprises dans la formule

$$x=\cos\frac{(2n+1)\pi}{2r}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2r}\ (\text{n°. 167}),$$

il s'ensuit que la somme des cosinus des divers arcs que donne l'expression $\frac{(2n+1)\pi}{2r}$ lorsqu'on y fait successivement $n=0$, $n=1$, $n=2,\ldots,n=2r-1$, doit être nulle; on aura donc

$$\cos\frac{\pi}{2r}+\cos\frac{2\pi}{2r}+\cos\frac{5\pi}{2r}\ldots\ldots+\cos\frac{(4r-1)\pi}{2r}=0\qquad (A).$$

De plus, en nommant α, β, γ, δ, etc. les racines de l'équation, $x^{2r}+1=0$. On trouvera (n°. 158).

$$S_1=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.}=0$$
$$S_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\text{etc.}=0$$
$$S_3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\text{etc.}=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{2r}=\alpha^{2r}+\beta^{2r}+\gamma^{2r}+\delta^{2r}+\text{etc.}=-2r;$$

passé

passé ce terme on rencontrera une suite de valeurs nulles jusqu'à S_{4r} qui sera égale à $+2r$, et ainsi de suite.

Mais en prenant pour α, β, γ, δ, etc. les valeurs particulières de l'expression $\cos\frac{(2n+1)\pi}{2r}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2r}$, on aura

$$\alpha^p=\left(\cos\frac{\pi}{2r}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2r}\right)^p=\cos\frac{p\pi}{2r}+\sqrt{-1}\sin\frac{p\pi}{2r}$$

$$\beta^p=\left(\cos\frac{3\pi}{2r}+\sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{2r}\right)^p=\cos\frac{3p\pi}{2r}+\sqrt{-1}\sin\frac{3p\pi}{2r}$$

etc.

ces valeurs, mises dans les équations ci-dessus, donneront

$$\cos\frac{p\pi}{2r}+\cos\frac{3p\pi}{2r}+\cos\frac{5p\pi}{2r}\ldots\ldots+\cos\frac{(4r-1)p\pi}{2r}=0\,(B),$$

tant que p ne sera pas égal à $2r$, et dans ce dernier cas, on auroit $\cos\pi+\cos 3\pi+\cos 5\pi\ldots\ldots+\cos(4r-1)\pi=-2r\,(C)$.

Il faut observer que dans l'équation (A) ou dans l'équation (B), qui la contient implicitement, on peut n'avoir égard qu'à la première moitié des termes; car l'autre moitié est entiérement semblable (*voyez* T. I, page 296): on a donc

$$\cos\frac{\pi}{2r}+\cos\frac{3\pi}{2r}+\cos\frac{5\pi}{2r}\ldots\ldots+\cos\frac{(2r-1)\pi}{2r}=0$$

$$\cos\frac{2\pi}{2r}+\cos\frac{6\pi}{2r}+\cos\frac{10\pi}{2r}\ldots\ldots+\cos\frac{2(2r-1)\pi}{2r}=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos\frac{p\pi}{2r}+\cos\frac{3p\pi}{2r}+\cos\frac{5p\pi}{2r}\ldots\ldots+\cos\frac{(2r-1)p\pi}{2r}=0$$

et prenant aussi la première moitié de l'équation (C), il viendra

$$\cos\pi+\cos 3\pi+\cos 5\pi\ldots\ldots+\cos(2r-1)\pi=-r.$$

Cela posé, si on fait d'abord $4\zeta'=\frac{\pi}{4}$, $4\zeta''=\frac{3\pi}{4}$ et ζ''', $\zeta''''=0$; il en résultera

$$\left.\begin{aligned}\cos 4\zeta'+\cos 4\zeta''=0,\\ \cos 8\zeta'+\cos 8\zeta''=0,\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}\cos 12\zeta'+\cos 12\zeta''=0,\\ \cos 16\zeta'+\cos 16\zeta''=-2;\end{aligned}\right.$$

et puisque les mêmes relations reviennent dans le même ordre pour les multiples 20, 24, 28, 32, etc. la somme des valeurs de M' et de M'' sera dans cette hypothèse $M'+M''=2A_0-2A_{16}+2A_{32}$, etc.

si donc on peut négliger le coefficient A_{16} et ceux qui le suivent, on aura $A_0 = \frac{1}{2}(M' + M'')$.

En faisant $4\zeta' = \frac{\pi}{6}$, $4\zeta'' = \frac{3\pi}{6}$, $4\zeta''' = \frac{5\pi}{6}$, ζ''', etc. $= 0$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\cos 4\zeta' + \cos 4\zeta'' + \cos 4\zeta''' = 0\\ \cos 8\zeta' + \cos 8\zeta'' + \cos 8\zeta''' = 0\\ \cos 12\zeta' + \cos 12\zeta'' + \cos 12\zeta''' = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\cos 16\zeta' + \cos 16\zeta'' + \cos 16\zeta''' = 0\\ \cos 20\zeta' + \cos 20\zeta'' + \cos 20\zeta''' = 0\\ \cos 24\zeta' + \cos 24\zeta'' + \cos 24\zeta''' = -3\end{array}$$

et prenant la somme des valeurs de M', M'', M''', on trouvera

$$M' + M'' + M''' = 3A_0 - 3A_{12} + 3A_{18} - \text{etc.}$$

d'où

$$A = \tfrac{1}{3}(M' + M'' + M''').$$

Enfin si on fait $4\zeta' = \frac{\pi}{8}$, $4\zeta'' = \frac{3\pi}{8}$, $4\zeta''' = \frac{5\pi}{8}$, $4\zeta'''' = \frac{7\pi}{8}$, tous les termes qui ne sont pas affectés de 32ζ et de ses multiples disparoîtront dans la somme des quatre quantités M', M'', M''', M'''', et on aura $M' + M'' + M''' + M'''' = 4A_0 - 4A_{32} + 4A_{64} -$, etc.
ce qui donnera

$$A_0 = \frac{1}{4}(M' + M'' + M''' + M'''').$$

Il est facile de trouver de la même manière des valeurs de A_0 encore plus approchées.

466. Quand le premier coefficient A_0 (ou A) est déterminé, le second A_1 (ou B) se tire de l'équation $Bn = 2\int(mAndn - n^2dA)$ (n^te. p. 124). En désignant par a, soit les sinus, soit les cosinus des arcs ζ', ζ'', etc. le coefficient A sera composé de termes de la forme $\alpha(1 + an)^m$ et $\alpha(1 - an)^m$, α étant une fraction numérique, et par conséquent $\int(mAndn - n^2dA)$ deviendra

$$\alpha m\int ndn(1 + an)^{m-1} + \alpha m\int ndn(1 - an)^{m-1} \ldots\ldots = \frac{\alpha(1 + an)^m(anm - 1)}{a^2(m + 1)} + \frac{\alpha(1 - an)(anm + 1)}{a^2(m + 1)} + \ldots + \text{const.}$$

Mais puisque le premier membre de l'équation qui doit donner B, s'évanouit lorsque $n = 0$, il faudra déterminer la constante arbitraire de manière qu'il en arrive autant au second dans la même circonstance. Or, en faisant $n = 0$, dans la valeur des intégrales rapportées ci-dessus, on aura

$$-\frac{\alpha}{a^2(m + 1)} + \frac{\alpha}{a^2(m + 1)} - \ldots\ldots + \text{const.} = 0;$$

d'où $const = \frac{a}{a^2(m+1)} - \frac{a}{a^2(m+1)} + \ldots\ldots\ldots$

et d'après ce qui précède, l'équation $Bn = 2\int(mAndn - n^2dA)$, se changera en

$$Bn = \frac{2a}{(m+1)}\left[\frac{(1+an)^m(amn-1)+1}{a^2} - \frac{(1-am)^m(amn+1)-1}{a^2}\right].$$

Il est facile de s'assurer que la valeur de B, qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, lorsque $n=0$, est vraiment nulle dans ce cas, comme l'exige la nature de la question (*).

467. La fonction $\frac{d\zeta}{(r^2-2rr'\cos\zeta+r'^2)^m}$ est celle qui se présente dans les applications; on la ramène à $\frac{d\zeta}{(1+n\cos\zeta)^m}$ en lui donnant la forme $\frac{1}{r^2+r'^2}\cdot\frac{d\zeta}{\left(1-\frac{2rr'}{r^2+r'^2}\cos\zeta\right)^m}$ et on a alors $n = -\frac{2rr'}{r^2+r'^2}$. En mettant cette valeur dans le développement de $(1+n\cos\zeta)^{-m}$, on n'aura plus qu'à multiplier l'intégrale de $d\zeta(1+n\cos\zeta)^{-m}$ par $\frac{1}{r^2+r'^2}$.

(*) Clairaut a fait voir qu'on pouvoit aussi déterminer le second coefficient A_1 et tous les suivans par le même procédé dont Euler s'est servi pour obtenir le premier. Pour cela il multiplie par $\cos\zeta$ la série

$$(1+n\cos\zeta)^m = A_0 + A_1\cos\zeta + A_2\cos 2\zeta + A_3\cos 3\zeta + \text{etc.}$$

et mettant ensuite pour $\cos\zeta^2$, $\cos 2\zeta\cos\zeta$, etc. leurs valeurs, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\zeta$, $\frac{1}{2}\cos\zeta+\frac{1}{2}\cos 3\zeta$, etc. il parvient à un résultat de la forme

$$(1+n\cos\zeta)^m\cos\zeta = \tfrac{1}{2}A_1 + A'_1\cos\zeta + A'_2\cos 2\zeta + A'_3\cos 3\zeta + \text{etc.}$$

maintenant il est aisé de voir qu'en faisant dans cette équation, à la place de ζ, toutes les substitutions que nous avons faites dans

$$(1+n\cos\zeta)^m = A_0 + A_1\cos\zeta + A_2\cos 2\zeta + \text{etc.}$$

on trouvera des résultats analogues à ceux du n°. précédent, et des valeurs de plus en plus approchées de $\frac{1}{2}A_1$, comme nous en avons trouvé pour A_0. Pour déterminer A_2, il faudroit multiplier l'équation $(1+n\cos\zeta)^m = A_0 + A_1\cos\zeta + \text{etc.}$ par $\cos 2\zeta$ et ainsi des autres.

Il est bon de remarquer que ce procédé s'applique en général à la recherche des coefficiens du développement de toutes les fonctions de ζ, susceptibles de produire une série convergente de la forme $A_0 + A_1\cos\zeta + \text{etc.}$

C'est lorsque les quantités r et r' diffèrent peu l'une de l'autre que la quantité $-\frac{2rr'}{r^2+r'^2}$, ou n, approche beaucoup de l'unité:

Lagrange parvient au développement de $(r^2-2rr'\cos\zeta+r'^2)^{-m}$ par un moyen très-simple et très-élégant. La quantité $r^2-2rr'\cos\zeta+r'^2$ devient $r^2-rr'(e^{\zeta\sqrt{-1}}-e^{-\zeta\sqrt{-1}})+r'^2$, quand on y met pour $\cos\zeta$ son expression exponentielle, et se décompose dans les facteurs $r-r'e^{\zeta\sqrt{-1}}$ et $r-r'e^{-\zeta\sqrt{-1}}$; on a donc

$$(r^2-2rr'\cos\zeta+r'^2)^{-m}=(r-r'e^{\zeta\sqrt{-1}})^{-m}+(r-r'e^{-\zeta\sqrt{-1}})^{-m},$$

mais

$$(r-r'e^{\zeta\sqrt{-1}})^{-m}=\frac{1}{r^m}+\frac{mr'e^{\zeta\sqrt{-1}}}{1.r^{m+1}}+\frac{m(m+1)r'^2e^{2\zeta\sqrt{-1}}}{1.2.r^{m+2}}+\text{etc.}$$

$$(r-r'e^{-\zeta\sqrt{-1}})^{-m}=\frac{1}{r^m}+\frac{mr'e^{-\zeta\sqrt{-1}}}{1.r^{m+1}}+\frac{m(m+1)r'^2e^{-2\zeta\sqrt{-1}}}{1.2.r^{m+2}}+\text{etc.}$$

Ces deux séries étant multipliées l'une par l'autre, on mettra dans leur produit $2\cos\zeta$ au lieu de $e^{\zeta\sqrt{-1}}+e^{-\zeta\sqrt{-1}}$, et en général $2\cos p\zeta$ au lieu de $e^{p\zeta\sqrt{-1}}+e^{-p\zeta\sqrt{-1}}$; on ordonnera ensuite par rapport aux cosinus des multiples de ζ, et on trouvera $(r^2-2rr'\cos\zeta+r'^2)^{-m}=$

$$\frac{1}{r^{2m}}\left(1+\frac{m^2}{1}\frac{r'^2}{r^2}+\frac{m^2(m+1)^2}{1.2^2}\frac{r'^4}{r^4}+\frac{m^2(m+1)^2(m+2)^2}{1.2^2.3^2}\frac{r'^6}{r^6}+\text{etc.}\right)$$

$$\frac{2}{r^{2m}}\left(\frac{m}{1}\frac{r'}{r}+\frac{m^2(m+1)}{1.1.2}\frac{r'^3}{r^3}+\frac{m^2.(m+1)^2(m+3)}{1.2.1.2.3}\frac{r'^5}{r^5}+\text{etc.}\right)\cos\zeta$$

$$+\frac{2}{r^{2m}}\left(\frac{m(m+1)}{1.2}\frac{r'^2}{r^2}+\frac{m^2(m+1)(m+2)}{1.1.2.3}\frac{r'^4}{r^4}+\text{etc.}\ldots\ldots\right)\cos 2\zeta$$

$$+\text{etc.}$$

Les coefficiens des deux premiers termes de ce développement étant suffisans pour faire connoître les autres, nous ne considérerons qu'eux; en posant

$$\frac{m}{1}=\alpha,\quad \frac{m(m+1)}{1.2}=\beta,\quad \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}=\gamma,$$

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}=\delta,\ \text{etc.}$$

ils deviennent

$$\frac{1}{r^{2m}}\left(1+\alpha^2\frac{r'^2}{r^2}+\beta^2\frac{r'^4}{r^4}+\gamma^2\frac{r'^6}{r^6}+\text{etc.}\right);$$

$$\frac{2}{r^{2m}}\left(\alpha\frac{r'}{r}+\alpha\beta\frac{r'^3}{r^3}+\beta\gamma\frac{r'^5}{r^5}+\text{etc.}\ldots\ldots\right);$$

ces suites sont très-convergentes lorsqu'on fait $m=-\frac{1}{2}$ et elles donnent alors la valeur des coefficiens que dans le n°. 464 nous avons nommés A et B, multipliée par la quantité $r^2+r'^2$. Il est à propos de remarquer que $r^2-2rr'\cos\zeta+r'^2$ se décompose aussi en $(r-re^{-\zeta\sqrt{-1}})\times(r-re^{-\zeta\sqrt{-1}})$ et qu'on peut par conséquent avoir au dénominateur la plus grande des deux quantités r et r'.

468. Soit encore la fonction $d\zeta l(1+n\cos\zeta)$ à intégrer par les séries; on a premiérement

$$l(1+n\cos\zeta)=n\cos\zeta-\tfrac{1}{2}n^2\cos\zeta^2+\tfrac{1}{3}n^3\cos\zeta^3-\tfrac{1}{4}n^4\cos\zeta^4+\text{etc.}$$

réduisant les puissances de $\cos\zeta$ en cosinus des multiples de l'arc ζ, on trouvera

$$l(1+n\cos\zeta)=-\frac{1.1}{2.2}n^2-\frac{1.3}{4.8}n^4-\frac{1.10}{6.32}n^6-\frac{1.35}{8.128}n^8-\text{etc.}$$
$$+\left[n+\frac{1.3}{3.4}n^3+\frac{1.10}{5.16}n^5+\frac{1.35}{7.64}n^7+\text{etc.}\right]\cos\zeta$$
$$+\text{etc.}$$

et par conséquent si on fait

$$l(1+n\cos\zeta)=-A+B\cos\zeta-C\cos 2\zeta+D\cos 3\zeta-\text{etc.}$$

on aura, d'après le développement ci-dessus,

$$A=\frac{1}{2}\frac{n^2}{2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{n^4}{4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{n^6}{6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{n^8}{8}+\text{etc.}$$

Mais en regardant n comme variable, on trouvera

$$\frac{ndA}{dn}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1.3}{2.4}n^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}n^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}n^8+\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}-1;$$

d'où on tirera $dA=\dfrac{dn}{n\sqrt{1-n^2}}-\dfrac{dn}{n}$, et en intégrant,

$$A=l\left[\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]-ln+\textit{conse.}=l\left[\frac{1-\sqrt{1+n^2}}{n^2}\right]+\textit{const.}$$

La supposition de $n=0$, rendant nulle la fonction $l(1+n\cos\zeta)$, il faut que A soit nul aussi, afin que le développement s'évanouisse dans la même circonstance; or $\dfrac{1-\sqrt{1-n^2}}{n^2}$ devient alors $\frac{1}{2}$, et en

faisant $n=0$, on a $l\frac{1}{2}+const.=0$, ce qui donne $const.=l2$; la valeur de A est donc $l\left(\frac{2-2\sqrt{1-n^2}}{n^2}\right)$.

Prenant la moitié du coefficient de $\cos z$; on trouve

$$\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}n+\frac{1.3}{2.4}\frac{n^3}{3}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{n^5}{5}+\text{etc.}$$

$$\frac{n^2dB}{2dn}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1.3}{2.4}n^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}n^6+\text{etc.}=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}-1;$$

on tire de là $dB=2\left(\frac{dn}{n^2\sqrt{1-n^2}}-\frac{dn}{n^2}\right)$ et en intégrant,

$$B=2\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)+const.$$

Le coefficient B doit aussi s'évanouir lorsque $n=0$; et comme cela arrive à la fonction $\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$, la constante est nécessairement nulle: on a donc seulement $B=2\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)$. Cette valeur étant rapprochée de celle de A, il en résulte $A=l\frac{B}{n}$.

Les coefficiens C, D, E, etc. se déterminent comme dans le n°. 460: en différentiant l'équation $l(1+n\cos z)=-A+B\cos z-\text{etc.}$ on a

$$\frac{-n\,dz\sin z}{1+n\cos z}=-B\,dz\sin z+2C\,dz\sin 2z-3D\,dz\sin 3z+\text{etc.}$$

chassant le dénominateur du premier membre, divisant par dz, passant tous les termes dans un seul membre et mettant, au lieu des produits $\cos z\sin z$, $\cos z\sin 2z$, etc. leurs valeurs, on trouvera

$$0=-B\sin z+2C\sin 2z-3D\sin 3z+4E\sin 4z-\text{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{2}Bn \quad +\tfrac{2}{2}Cn \quad -\tfrac{3}{2}Dn$$

$$+\tfrac{2}{2}Cn \quad -\tfrac{3}{2}Dn \quad +\tfrac{4}{2}En \quad -\tfrac{5}{2}Fn$$

$$+n$$

et par conséquent

$$C=\frac{B-n}{n},\qquad D=\frac{4C-Bn}{3n},\qquad E=\frac{6D-2Cn}{4n},$$

$$F=\frac{8E-3Dn}{5n},\ \text{etc.}$$

substituant pour B sa valeur, on aura

$$B=\frac{2}{1}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right),\ C=\frac{2}{2}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^2,\ D=\frac{2}{3}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^3$$

$$E=\frac{2}{4}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^4,\ F=\frac{2}{5}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^5,\ \text{etc.}$$

Faisons pour abréger $\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}=m$ et nous aurons

$$l(1+n\cos\zeta)=-l\frac{2m}{1}+\frac{2}{1}m\cos\zeta-\frac{2}{2}m^2\cos 2\zeta+\frac{2}{3}m^3\cos 3\zeta-\text{etc.}$$

d'où il résultera

$$\int d\zeta\, l(1+n\cos\zeta)=-\zeta l\frac{2m}{1}+\frac{2m}{1}\sin\zeta-\frac{2}{4}m^2\sin 2\zeta+\frac{2}{9}m^3\sin 3\zeta$$
$$-\frac{2}{16}\sin 4\zeta+\frac{2}{25}\sin 5\zeta-\text{etc.}+\textit{const.}$$

469. Le développement de $l(1+n\cos\zeta)^m$, trouvé dans le n°. précéd. conduit à plusieurs séries très-remarquables; en y supposant $n=+1$ et $n=-1$, ce qui donne $m=1$ et $m=-1$, on trouve

$$l(1+\cos\zeta)=-l2+\frac{2}{1}\cos\zeta-\frac{2}{2}\cos 2\zeta+\frac{2}{3}\cos 3\zeta-\frac{2}{4}\cos 4\zeta+\text{etc.}$$
$$l(1-\cos\zeta)=-l2-\frac{2}{1}\cos\zeta-\frac{2}{2}\cos 2\zeta-\frac{2}{3}\cos 3\zeta-\frac{2}{4}\cos 4\zeta+\text{etc.}$$

et comme $1+\cos\zeta=2(\cos\frac{1}{2}\zeta)^2$, $1-\cos\zeta=2(\sin\frac{1}{2}\zeta)^2$ (Int. n°s. 42, 43) on a

$$l\cos\tfrac{1}{2}\zeta=-l2+\tfrac{1}{1}\cos\zeta-\tfrac{1}{2}\cos 2\zeta+\tfrac{1}{3}\cos 3\zeta-\tfrac{1}{4}\cos 4\zeta+\text{etc.}$$
$$l\sin\tfrac{1}{2}\zeta=-l2-\tfrac{1}{1}\cos\zeta-\tfrac{1}{2}\cos 2\zeta-\tfrac{1}{3}\cos 3\zeta-\tfrac{1}{4}\cos 4\zeta-\text{etc.}$$

d'où il résulte

$$l\tan\tfrac{1}{2}\zeta=-\tfrac{2}{1}\cos\zeta-\tfrac{2}{3}\cos 3\zeta-\tfrac{2}{5}\cos 5\zeta-\tfrac{2}{7}\cos 7\zeta-\text{etc.}$$

Méthode générale pour obtenir les valeurs approchées des intégrales.

470. Le développement des intégrales en série, ne conduit à une approximation que dans le cas où les séries qu'on obtient sont convergentes, ce qui n'arrive pas toujours; c'est pourquoi les Analystes ont cherché les moyens de parvenir à des valeurs approchées des intégrales, quelles que soient les fonctions différentielles proposées. Nous allons exposer ici celui qu'Euler a donné dans son traité de Calcul Intégral.

Soit Xdx la différentielle à intégrer; $\int Xdx$ est une quantité indéterminée dans un certain sens, puisqu'elle doit renfermer une constante arbitraire (n°. 359): c'est encore ce que les considérations

suivantes vont confirmer. Si on fait $\int X dx = y$, on aura

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2X}{dx^2}, \text{ etc.}$$

mais la connoissance de ces coefficiens différentiels ne suffit pas pour déterminer le développement de y par le théorême de Taylor; il faut encore y joindre celle de la valeur particulière de y, lorsque $x=0$ (n°. 100). Tout ce qu'on peut donc faire au moyen des expressions données de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. c'est de passer de la valeur de $\int X dx$, prise pour une certaine valeur particulière de x, à celle qui répond à une autre valeur de x.

Soit par exemple Y la valeur de $\int X dx$, correspondante à $x=a$ et Y_1 celle qui est relative à $x=a_1$; on fera dans la formule du n°. 12, $x=a$, $k=a_1-a$, et désignant par Y', Y'', Y''', etc. les valeurs de X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, etc. prises dans l'hypothèse de $x=a$, il en résultera

$$Y_1 = Y + Y'\frac{(a_1-a)}{1} + Y''\frac{(a_1-a)^2}{1.2} + Y'''\frac{(a_1-a)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

On voit par cette formule que si aucun des coefficiens Y, Y', Y'', Y''', etc. ne devient infini, et que a_1 soit très-peu différent de a, on pourra déterminer assez exactement la valeur de Y_1.

Nommant Y_2 la valeur de $\int X dx$, relative à une troisième valeur de x, désignée par a_2, et représentant par Y'_1, Y''_1, Y'''_1, etc. ce que deviennent X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, etc. lorsque $x=a_1$, on aura

$$Y_2 = Y_1 + Y'_1\frac{(a_2-a_1)}{1} + Y''_1\frac{(a_2-a_1)^2}{1.2} + Y'''_1\frac{(a_2-a_1)^3}{1.2.3} + \text{, etc.}$$

On peut continuer de la même manière pour une suite de valeurs de x, représentées par a_3, a_4, etc. auxquelles on suppose répondre des valeurs de $\int X dx$, désignées par Y_3, Y_4, etc.

Concevons pour un moment qu'on ait pris chacune des quantités a_1, a_2, a_3, a_4, etc. assez peu différente de celle qui la précède, pour que le quarré et les puissances supérieures de a_1-a, a_2-a_1, a_3-a_2, etc. puissent être négligés sans erreur sensible, il en résulte

résultera ces approximations :

$$Y_1 = Y + Y'(a_1 - a)$$
$$Y_2 = Y_1 + Y'_1(a_2 - a_1)$$
$$Y_3 = Y_2 + Y'_2(a_3 - a_2)$$
$$Y'_4 = Y_3 + Y'_3(a_4 - a_3)$$
etc.

En mettant successivement la valeur de Y_1 dans celle de Y_2, celle de Y_2 dans celle de Y_3, et ainsi de suite, on trouvera

$Y_1 = Y + Y'(a_1 - a)$
$Y_2 = Y + Y'(a_1 - a) + Y'_1(a_2 - a_1)$
$Y_3 = Y + Y'(a_1 - a) + Y'_1(a_2 - a_1) + Y'_2(a_3 - a_2)$
$Y_4 = Y + Y'(a_1 - a) + Y'_1(a_2 - a_1) + Y'_2(a_3 - a_2) + Y'_3(a_4 - a_3)$
etc.

On peut s'élever de cette manière à une expression approchée de $\int X dx$, relative à telle valeur de x qu'on voudra.

Posons que a_n représente le dernier terme de la série a, a_1, a_2... et que Y_n soit la valeur de $\int X dx$, correspondante à $x = a_n$; il est évident, d'après les valeurs précédentes, que l'expression approchée de Y_n se formera en poussant jusqu'au terme $Y'_{n-1}(a_n - a_{n-1})$, dans lequel Y'_{n-1} désigne ce que devient X lorsqu'on y met a_{n-1} pour x : on aura donc

$$Y_n = Y + Y'(a_1 - a) + Y'_1(a_2 - a_1) + Y'_2(a_3 - a_2) \ldots + Y'_{n-1}(a_n - a_{n-1}).$$

Si les différences $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, etc. sont toutes égales à α, la valeur précédente de Y_n deviendra

$$Y_n = Y + \alpha(Y' + Y'_1 + Y'_2 + \ldots . Y'_{n-1}).$$

Ces valeurs seront d'autant plus exactes que les quantités a, a_1, a_2 seront plus voisines les unes des autres. En regardant les différences $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, comme infiniment petites, les quantités $Y'(a_1 - a)$, $Y'_1(a_2 - a_1)$, $Y'_2(a_3 - a_2)$, etc. seront ce que devient la différentielle $X dx$, lorsqu'on fait successivement $x = a$, $x = a_1$, $x = a_2$, etc. C'est sous ce point de vue que l'on conçoit l'intégrale comme la somme d'un nombre infini d'élémens, égaux aux valeurs consécutives que prend la différentielle par les divers changemens qu'éprouve la variable x (voyez la note, page 2 de ce vol.).

471. Les considérations précédentes font voir bien clairement en quoi l'intégrale $\int X dx$ diffère d'une fonction primitive donnée,

renfermant x et des constantes déterminées. La valeur de cette dernière sera connue lorsqu'on aura assigné celle qu'on veut attribuer à x; mais la même opération ne fera que fixer où doit s'arrêter la série Y, $Y'(a_1-a)$, $Y'_1(a_2-a_1)$, $Y'_2(a_3-a_2)$, etc. et la somme de cette série restera encore indéterminée tant qu'on n'aura rien statué sur la valeur de x, à laquelle doit répondre son premier terme et sur celle de ce premier terme.

Il suit de là que l'intégrale $\int X dx$ est une fonction de x, dont la valeur se trouve renfermée entre deux limites qui sont indéterminées. Cette conséquence mérite la plus grande attention et elle peut se tirer immédiatement de l'existence de la constante arbitraire. Faisons $\int X dx = P$, P étant la fonction de x que donne immédiatement le procédé de l'intégration; la valeur complète de $\int X dx$ sera $P + const.$ en assignant à x deux valeurs particulières a et b et nommant A et B celles que prend P dans ces hypothèses, on aura $A + const.$ pour la première valeur de $\int X dx$, et $B + const.$ pour la seconde; prenant leur différence, on trouvera $A-B$, résultat indépendant de la constante arbitraire et qui n'est autre chose que la somme de la série ci-dessus prise depuis le terme correspondant à $x=a$, jusqu'au terme correspondant à $x=b$.

Quand on détermine la constante en supposant que l'intégrale reçoive une certaine valeur lorsqu'on s'en donne une pour x, on ne fait que fixer un des termes de la série, Y, par exemple, duquel on part ensuite pour former tous les autres, et l'intégrale rentre alors dans le cas des fonctions primitives qui n'exigent pour leur détermination que celle de la variable qu'elles renferment. Il faut remarquer que le premier terme Y est absolument indépendant de tous les autres et n'influe sur aucun d'eux, mais seulement sur leur somme totale.

472. Nous avons commencé la série Y, $Y'(a_1-a)$, etc. par le terme relatif à $x=a$; nous aurions pu partir du dernier terme a_n pour revenir au premier. En effet, si nous faisons dans la série du n°. 12 $k = a_n - a_{n-1}$, nous aurons

$$Y_{n-1} = Y_n - Y'_n \frac{(a_n - a_{n-1})}{1} + Y''_n \frac{(a_n - a_{n-1})^2}{1.2} - \text{etc.}$$

on trouveroit, en suivant la même notation

$$Y_{n-2}=Y_{n-1}-Y'_{n-1}\frac{(a_{n-1}-a_{n-2})}{1}+Y''_{n-1}\frac{(a_{n-1}-a_{n-2})^2}{1.2}-\text{etc.}$$

$$Y_{n-3}=Y_{n-2}-Y'_{n-2}\frac{(a_{n-2}-a_{n-3})}{1}+Y''_{n-2}\frac{(a_{n-2}-a_{n-3})^2}{1.2}-\text{etc.}$$

et en continuant on formera la suite

$$Y_n, Y_{n-1}, Y_{n-2}, \ldots Y_2, Y_1, Y,$$

correspondante aux valeurs de x, représentées par

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_2, a_1, a.$$

Si on se borne aux premières puissances des différences a_n-a_{n-1}, $a_{n-1}-a_{n-2}$, etc. et qu'on substitue la valeur de Y_n dans celle de Y_{n-1}, celle-ci dans celle de Y_{n-2} et ainsi de proche en proche, il viendra

$$Y_{n-1}=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})$$
$$Y_{n-2}=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})-Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})$$
$$Y_{n-3}=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})-Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})-Y_{n-3}(a_{n-2}-a_{n-3})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_2=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})-Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})\ldots\ldots\ldots-Y'_3(a_3-a_2)$$
$$Y_1=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})-Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})\ldots\ldots\ldots-Y'_2(a_2-a_1)$$
$$Y=Y_n-Y'_n(a_n-a_{n-1})-Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})\ldots\ldots\ldots-Y'_1(a_1-a).$$

En tirant de cette dernière équation la valeur de Y_n, on aura

$$Y_n=Y+Y'_1(a_1-a)+Y'_2(a_2-a_1)\ldots+Y'_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2})+Y'_n(a_n-a_{n-1}).$$

Dans ce résultat les différences a_1-a, a_2-a_1, $\ldots a_{n-1}-a_{n-2}$, a_n-a_{n-1} sont multipliées par des coefficiens éloignés de l'origine d'un rang de plus que dans les valeurs de Y_n du n°. 470.

473. Les valeurs de Y_n n'étant qu'approchées, diffèrent toutes deux de la vraie valeur de $\int X dx$; pour savoir dans quel sens, il faut examiner d'abord si la quantité X change, de signe entre ses deux valeurs extrêmes Y' et Y'_n, et si après avoir été croissante, elle devient décroissante, ou *vice versâ*.

Tant que cette quantité conserve le même signe et varie dans le même sens, si l'une des valeurs de Y_n est moindre que la vraie valeur de $\int X dx$, l'autre sera plus grande *et vice versâ*.

Pour s'en convaincre, il suffit de comparer les deux expressions approchées d'une même valeur de $\int X dx$, celles de Y_1, par exemple, qui sont $Y+Y'(a_1-a)$, $Y+Y'_1(a_1-a)$. Si on conçoit un très-

grand nombre de valeurs de x, intermédiaires entre a et a_1, qu'on les désigne par α_1, α_2, α_3.....α_m et que l'on représente par y_1, y^2,...y^m, les valeurs correspondantes de $\int X dx$, on aura d'abord

$$a_1-a=\alpha_1-a+\alpha_2-\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2.....+\alpha_m-\alpha_{m-1}+a_1-\alpha_m$$

et les deux valeurs de Y_1, rapportées ci-dessus, pourront être mises sous la forme

$$Y+Y'(\alpha_1-a)+Y'(\alpha_2-a_1).....+Y'(a_1-\alpha_m)...(A),$$
$$Y+Y'_1(\alpha_1-a)+Y'_1(\alpha_2-a_1).....+Y'_1(a_1-\alpha_m)...(C);$$

mais si on passe de Y à Y_1, au moyen des valeurs intermédiaires y_1, y_2, y_3,...etc. on trouvera, d'après ce qui précède, deux expressions de Y_1, dont la premiere sera (n°. 470).

$$Y+Y'(\alpha_1-a)+y'_1(\alpha_2-\alpha_1).....+y'_{m-1}(\alpha_m-\alpha_{m-1})+y'_m(a_1-\alpha_m).....(B).$$

Il est évident que si les quantités Y', y'_1, y'_2,.....y'_m, Y'_1, qui sont les valeurs consécutives de X, forment une progression croissante, tous les termes qui suivent le deuxième de l'expression (B) surpasseront leurs correspondans de l'expression (A) et seront moindres que leurs correspondans dans l'expression (C), laquelle aura en outre son second terme $Y'_1(\alpha_1-a)$ plus grand que $Y'(\alpha_1-a)$. On voit donc que dans cette hypothèse la série (B) est comprise entre les séries (A) et (C), et comme on peut concevoir que la première soit aussi près qu'on voudra de la vraie valeur de Y_1, en imaginant un nombre suffisant de termes intermédiaires entre Y et Y_1, on en doit conclure que cette vraie valeur tombe entre les séries (A) et (B). On arriveroit au même résultat en supposant que la progression des quantités $Y', y'_1, y'_2,.....y'_m, Y'_1$ soit décroissante.

Les autres cas se ramènent aux deux que nous venons d'examiner, en considérant à part les portions de l'intégrale $\int X dx$, dans lesquelles les valeurs de X sont positives, les portions dans lesquelles ces valeurs sont négatives, et traitant séparément dans chaque portion les valeurs qui forment une progression croissante et celles qui forment une progression décroissante.

474. Si on retranche Y de la valeur de Y_n, trouvée n°. 470, il viendra $Y_n-Y=Y'(a_1-a)+Y'_1(a_2-a_1)...+Y'_{n-1}(a_n-a_{n-1})$, d'où on voit que la différence Y_n-Y sera positive si tous les

coefficiens Y', Y'_1, etc. sont positifs et qu'on ait $a_n > a$; car on peut toujours, quelles que soient ces deux dernières quantités, passer de l'une à l'autre par une suite d'intermédiaires aussi rapprochés qu'on le voudra, et porter ainsi le degré d'exactitude de l'équation ci-dessus, aussi loin qu'on le jugera à propos. Il suit de là que *la différence entre les deux valeurs de l'intégrale* $\int X dx$ *correspondantes à* $x = a_n$ *et à* $x = a$, *sera positive si le coefficient différentiel* X *reste toujours positif depuis l'une de ces valeurs jusqu'à l'autre.* Cette remarque va nous servir à obtenir les deux limites entre lesquelles se trouve comprise une intégrale quelconque.

475. Nous avons fait voir n°. 471, qu'il n'y a de déterminé dans une intégrale, que la différence entre deux de ses valeurs prises relativement à deux valeurs données de x; désignons donc par Y_a et par Y_b les valeurs de $\int X dx$, lorsque $x = a$ et que $x = b$, et cherchons les limites de la quantité $Y_b - Y_a$. Soient M et m la plus grande et la plus petite de toutes les valeurs que prend le coefficient différentiel X par la substitution des valeurs de x, depuis a jusqu'à b inclusivement; les quantités $M - X$ et $X - m$ demeureront nécessairement positives dans tout cet intervalle, et par conséquent les différences entre les valeurs de $\int (M - X) dx$ et de $\int (X - m) dx$, relatives à $x = a$, et celles qui correspondent à $x = b$ seront positives (n°. préc.); mais comme M et m sont des constantes, on aura

$$\int (M - X) dx = Mx - \int X dx$$
$$\int (X - m) dx = \int X dx - mx.$$

En faisant successivement $x = a$ et $x = b$ dans la première de ces valeurs, il vient $Ma - Y_a$, $Mb - Y_b$;
la seconde donne dans les mêmes hypothèses

$$Y_a - ma, \quad Y_b - mb;$$

les différences $Mb - Y_b - (Ma - Y_a)$, $Y_b - mb - (Y_a - ma)$ devant être positives, d'après ce qui précède, on a

$$Mb - Y_b > Ma - Y_a, \quad Y_b - mb > Y_a - ma,$$

d'où il résulte

$$Mb - Ma > Y_b - Y_a; \quad mb - ma < Y_b - Y_a:$$

la valeur de $Y_b - Y_a$ se trouve donc entre celles de $M(b - a)$ et $m(b - a)$.

Il faut observer que la quantité M doit être la plus petite des valeurs négatives de X, lorsque ce coefficient n'en a que de telles depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$; car ce n'est qu'ainsi que la quantité $M-X$, qui se change alors en $X-M$, reste toujours positive dans cet intervalle. Par la même raison on doit toujours prendre pour m la plus grande valeur négative de X, lorsque ce coefficient en a de cette espèce, parmi celles qu'il reçoit depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, afin que la quantité $X-m$, qui devient $m-X$ dans ce cas, soit encore positive.

Si la différentielle $X\,dx$ étoit de la forme $PQdx$, et qu'on pût intégrer le facteur $Q\,dx$, on prendroit pour M et pour m la plus grande et la plus petite des valeurs de la fonction P, et en représentant $\int Q\,dx$ par Z, on auroit

$$\int(MQ-PQ)dx=MZ-\int PQdx$$
$$\int(PQ-MQ)dx=\int PQ\,dx-MZ,$$

et calculant comme ci-dessus les différences des valeurs que reçoivent ces résultats dans les hypothèses de $x=a$ et de $x=b$, on trouveroit

$$MZ_b-MZ_a>Y_b-Y_a, \qquad mZ_b-mZ_a<Y_b-Y_a.$$

476. Nous ferons connoître dans cet article comment les Analystes indiquent les diverses circonstances dans lesquelles on considère les intégrales. Lorsqu'ils veulent désigner la valeur générale de $\int X\,dx$; ils l'appellent alors *intégrale indéfinie*, et son expression, pour être *complète*, doit contenir une *constante arbitraire*, ajoutée à *la fonction primitive* obtenue par l'intégration. Cette constante se détermine, comme nous l'avons fait dans plusieurs occasions, en assujettissant l'expression de $\int Xdx$ à prendre une valeur donnée lorsque x en reçoit une autre aussi donnée.

Quand dans une intégrale, dont la constante arbitraire a été déterminée, on donne à la variable x une valeur déterminée, cette intégrale se trouve aussi déterminée par là, et se nomme alors *intégrale définie*; ainsi s'il s'agit de la valeur que prend par la supposition de $x=b$, l'intégrale $\int Xdx$ assujettie déjà à devenir Y, lorsque $x=a$, cette intégrale est alors définie.

Enfin lorsqu'on évalue la différence entre les valeurs de $\int X\,dx$, relatives à $x=a$ et à $x=b$, différence qui est entiérement indépendante

de la constante arbitraire (n°. 471), cela s'appelle *prendre l'intégrale* $\int X\,dx$ *depuis* $x=a$ *jusqu'à* $x=b$.

477. Tout ce qui a été trouvé dans les trois numéros précédens se déduit facilement de la considération des courbes, par le moyen desquelles on peut, pour ainsi dire, peindre les résultats que nous avons obtenus de l'Analyse.

Soit BCZ (*fig.* 1) une courbe telle qu'à l'abscisse $AP=x$, réponde l'ordonnée $PM=X$; il suit de ce qui a été démontré dans le n°. 280, que la différentielle de l'aire BMP de cette courbe seroit exprimée par $X\,dx$ et que par conséquent l'intégrale de $\int X\,dx$ seroit l'aire BMP elle-même. On voit par là que cette intégrale est doublement indéterminée; car les aires BMP, $ACMP$, $DEMP$, dont la seule relation est d'avoir pour dernière limite l'ordonnée MP, ont la même différentielle, quelle que soit la place de leur première limite; de plus, tant qu'on regarde l'abscisse AP comme indéterminée, la position de l'ordonnée MP l'est aussi: donc, dans cet état de choses, les limites qui bornent des deux côtés opposés l'aire curviligne $ACMP$, sont arbitraires; mais lorsqu'on a fixé les abscisses extrêmes AD et AP, l'espace $DEMP$ renfermé entre les ordonnées ED et PM, élevées sur ces abscisses, est déterminé. FIG. 1.

En général on peut considérer l'intégrale $\int X\,dx$ comme représentant une portion variable de l'aire de la courbe CMZ, combinée par addition ou par soustraction avec un espace constant quelconque compris ou non dans cette courbe. C'est sous ce point de vue qu'on peut déterminer la constante arbitraire, de manière que l'intégrale proposée prenne à un point donné P telle valeur qu'on voudra.

478. Considérons maintenant une suite d'abscisses AP, AP', AP'', AP''', etc. respectivement égales à a, a_1, a_2, a_3, etc. élevons les ordonnées correspondantes, et formons les rectangles MP', SP', $M'P''$, $S'P'''$, $M''P'''$, $S''P'''$, etc. il est évident que MP, $M'P'$, $M''P''$, $M'''P'''$, etc. représenteront les quantités Y', Y'_1, Y'_2, Y'_3, etc. (n°. 280), et qu'on aura $P'P=a_1-a$, $P''P'=a_2-a_1$, $P'''P''=a_3-a_2$, etc. D'après ces dénominations la somme des rectangles MP', $M'P''$, $M''P'''$, ou la surface du Polygone $PMRM'R'M''R''$, etc. intérieur à la courbe, sera équivalente à la suite $Y'(a_1-a)+Y'_1(a_2-a_1)+Y'_2(a_3-a_2)+$ etc. qui, comme on le voit, différera d'autant moins de la valeur du

trapèze curviligne $PMM'M''M'''$, etc. que les points P, P', P'', P''', etc. seront plus rapprochés. En ajoutant à cette suite un premier terme Y égal à l'aire $ACMP$, elle donnera l'expression approchée de l'intégrale $\int X dx$, depuis l'origine des abscisses.

Si on calcule les rectangles $M'P$, $M''P'$, $M'''P''$, etc. on trouvera que la surface du Polygone $PSM'S'M''S''M'''$, etc. extérieur à la courbe, est exprimée par la suite $Y'_1(a_1-a)+Y'_2(a_2-a_1)+Y'_3(a_3-a_2)+$ etc. et on en conclura que cette seconde suite donne une valeur qui surpasse le trapèze curviligne $PMM'M''M'''$, etc., tandis que celle qui résulte de la première est moindre, ce qui se rapporte à ce que nous avons déjà vu n°. 473.

FIG. 2. Dans le cas que représente la fig. 1, les ordonnées vont toujours en croissant; si, comme dans la figure 2, elles passoient par un *maximum*, dans la partie CM'' antérieure à ce *maximum*, la portion $Y'(a_1-a)+Y'_1(a_2-a_1)$ de la première suite représenteroit le Polygone $PMRM'R'P''$ intérieur à la courbe, et la portion $Y'_2(a_3-a_2)+Y'_3(a_4-a_3)$ représenteroit le Polygone $P''M''S''M'''S'''P'''$ extérieur à la courbe; d'où il suit que la première portion de cette suite seroit plus grande que l'aire curviligne correspondante, et que la seconde seroit plus petite. On verra sans peine que l'inverse a lieu pour la seconde suite, dont la partie antérieure au *maximum* représente le Polygone extérieur $PSM'S'M''P''$, tandis que l'autre représente le Polygone intérieur $P''R''M'''R'''M''''P''''$. Chacune de ces suites peut donc, dans le cas actuel, devenir plus petite ou plus grande que l'aire curviligne, et même lui être égale, si le défaut qui se trouve d'un côté est compensé par l'excès qui a lieu de l'autre.

D'après ces principes, le lecteur discutera facilement le cas où la courbe CMZ, passant au-dessous de son axe, donneroit lieu à une aire négative.

FIG. 3. Il est évident, par la figure 3, que l'aire curviligne $PMNQ$ est moindre que le rectangle EQ, formé sur la plus grande ordonnée comprise dans l'espace PQ, et plus grande que le rectangle FP, formé sur la plus petite ordonnée: en faisant donc $AP=a$, $AQ=b$, $ACMP=Y_a$, $ACNQ=Y_b$, $GH=M$, $gh=m$, on aura, comme dans le n°. 475, $EQ=M(b-a)>Y_b-Y_a$, $FP=m(b-a)<Y_b-Y_a$.

479. Entrons maintenant dans quelques détails sur l'application des séries des n°. 470, 472. Pour obtenir la valeur de $\int X dx$, correspondante à $x=b$, il faudra connoître *à priori*, ou s'être donné la valeur que doit avoir cette même intégrale lorsque x est égale à une quantité déterminée a. Posant ensuite $b=a_n$, on formera la série $a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, dans laquelle les quantités intermédiaires a_1, a_2, a_3, etc. devront être d'autant plus rapprochées que le coefficient différentiel X, dont les valeurs particulières sont représentées par Y', Y_1, Y_2, Y_3, etc. variera plus dans l'intervalle de $x=a$ à $x=b$. C'est pour cela que nous n'avons point prescrit de partager la différence $b-a$ ou a_n-a en parties égales, de manière que la suite a, a_1, a_2, etc. soit une progression arithmétique; il en faudra resserrer les intervalles par-tout où les coefficiens Y', Y'_1, Y'_2, etc. croîtront ou décroîtront rapidement.

Soit par exemple $X=\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; il est évident que lorsque x approche de l'unité, un très-petit changement dans la valeur de cette variable en produit un très-grand dans celle de X; si donc on demandoit l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, depuis $x=0$, jusqu'à $x=1-\delta$, δ étant une petite quantité, il faudroit, vers la dernière limite, multiplier beaucoup les valeurs intermédiaires données à x. La même intégrale ne peut se calculer immédiatement jusqu'à $x=1$, par la méthode que nous proposons ici; car alors X devient infini sans que pourtant la valeur de $\int X dx$ le soit, puisque $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-\sqrt{1-x}+const.$ Cette difficulté tient à ce que dans l'intégration le facteur $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ passe du numérateur au dénominateur (n°. 131) et elle aura lieu en général lorsque X sera de la forme $\frac{V}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ et qu'on aura $p<q$. Pour la lever, on fera $a-x=z^q$, ce qui donnera

$x=a-z^q, \quad dx=-qz^{q-1}dz \quad$ et $X dx=-qVz^{q-p-1}dz,$

quantité qui ne deviendra plus infinie quand $x=a$ ou $\zeta=0$, si la fonction V reste finie dans cette circonstance; on calculera donc alors l'intégrale $\int V\zeta^{q-p-1}d\zeta$, depuis $\zeta=0$, jusqu'à $\zeta=\delta$, δ étant une quantité assez petite, et on aura ainsi la partie de la valeur de $\int\frac{Vdx}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ correspondante à l'intervalle compris entre $x=a$ et $x=a-\delta^q$.

On peut encore obtenir l'intégrale $\int\frac{Vdx}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$, depuis $x=a$ jusqu'à $x=a-\delta$, en faisant seulement $x=a-\zeta$; parce que la petitesse de la variable ζ renfermée entre les limites très-étroites 0 et δ, permet de simplifier beaucoup le coefficient différentiel. Si on avoit, par exemple, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, la différentielle à intégrer après la transformation indiquée, seroit

$$\frac{-(a-\zeta)^2d\zeta}{\sqrt{4a^3\zeta-6a^2\zeta^2+4a\zeta^3-\zeta^4}}=\frac{-(a^2-2a\zeta+\zeta^2)d\zeta}{\sqrt{\zeta}.\sqrt{4a^3-6a^2\zeta+4a\zeta^2-\zeta^3}}.$$

En réduisant la fraction $\frac{a^2-2a\zeta+\zeta^2}{\sqrt{4a^3-6a^2\zeta+4a\zeta^2-\zeta^3}}$ en série ordonnée suivant les puissances de ζ et en s'arrêtant au quarré de cette variable, on auroit enfin

$$-\int\frac{d\zeta\sqrt{a}}{2\sqrt{\zeta}}\left(1-\frac{\zeta}{6a}+\frac{\zeta^2}{8a^2}\right)=-\sqrt{a\zeta}+\frac{\zeta\sqrt{\zeta}}{6\sqrt{a}}+\frac{7\zeta^2\sqrt{\zeta}}{4a^2\sqrt{a}}.$$

Ce résultat qui s'évanouit lorsque $\zeta=0$, donnera par la substitution de δ à ζ, la valeur de l'intégrale cherchée, depuis $x=a$, jusqu'à $x=a-\delta$. Le reste de cette intégrale pourra se calculer par le moyen des séries des n^os^. 470 et 472.

En général, des transformations que l'habitude de l'analyse peut seule suggérer, rendent ces séries applicables dans un très-grand nombre de cas qui paroissent d'abord se refuser à la méthode proposée: nous allons encore en rapporter un exemple. Soit

$\int \frac{X\,dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}$; ici le coefficient différentiel devient infini quand $x=a$, quand $x=b$, et si on fait $x=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)\cos z$, et qu'on désigne par Z ce que devient alors la fonction X, on aura $\int Z\,dz$, formule rationnelle.

480. Pour donner plus d'exactitude au résultat et n'être pas obligé de multiplier autant les quantités intermédiaires a_1, a_2, a_3, etc. on ne négligera point, comme nous l'avons fait dans les n°s 470, 472, le quarré ni les puissances supérieures des différences a_1-a, a_2-a_1, etc. et on aura alors, en allant de $x=a$ à $x=a_n$,

$$Y_1=Y+Y'\frac{(a_1-a)}{1}+Y''\frac{(a_1-a)^2}{1.2}+Y'''\frac{(a_1-a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$Y_2=Y_1+Y'_1\frac{(a_2-a_1)}{1}+Y''_1\frac{(a_2-a_1)^2}{1.2}+Y'''_1\frac{(a_2-a_1)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$Y_3=Y_2+Y'_2\frac{(a_3-a_2)}{1}+Y''_2\frac{(a_3-a_2)^2}{1.2}+Y'''_2\frac{(a_3-a_2)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

.....

$$Y_n=Y_{n-1}+Y'_{n-1}\frac{(a_n-a_{n-1})}{1}+Y''_{n-1}\frac{(a_n-a_{n-1})^2}{1.2}+Y'''_{n-1}\frac{(a_n-a_{n-1})^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

En ajoutant toutes ces équations et effaçant les quantités communes aux deux membres du résultat, on aura la valeur de Y_n.

Si on partoit de Y_n pour arriver à Y, par le moyen de la formule du n°. 472, on formeroit les équations

$$Y_{n-1}=Y_n-Y'_n\frac{(a_n-a_{n-1})}{1}+Y''_n\frac{(a_n-a_{n-1})^2}{1.2}-Y'''_n\frac{(a_n-a_{n-1})^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$Y_{n-2}=Y_{n-1}-Y'_{n-1}\frac{(a_{n-1}-a_{n-2})}{1}+Y''_{n-1}\frac{(a_{n-1}-a_{n-2})^2}{1.2}-Y'''_{n-1}\frac{(a_{n-1}-a_{n-2})^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

.....

$$Y=Y_1-Y'_1\frac{(a_1-a)}{1}+Y''_1\frac{(a_1-a)^2}{1.2}-Y'''_1\frac{(a_1-a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

dont l'addition conduit à une seconde valeur de Y_n. Ces valeurs deviendront plus simples en prenant les différences a_1-a, a_2-a_1, etc. égales entr'elles, ce qui pourra toujours se faire au moins entre deux valeurs de x assez proches l'une de l'autre.

Soit donc $a_1 - a = a_2 - a_1 = \text{etc.} = \alpha$. Les premières équations ci-dessus donneront

$$Y_n = Y + (Y' + Y'_1 + Y'_2 \ldots\ldots + Y'_{n-1})\frac{\alpha}{1}$$
$$+ (Y'' + Y''_1 + Y''_2 \ldots\ldots + Y''_{n-1})\frac{\alpha^2}{1.2}$$
$$+ (Y''' + Y'''_1 + Y'''_2 \ldots\ldots + Y'''_{n-1})\frac{\alpha^3}{1.2.3}$$
$$+ \text{etc.}$$

Prenant dans la somme des secondes la valeur de Y_n, on aura

$$Y_n = Y + (Y'_1 + Y'_2 + Y'_3 \ldots\ldots + Y'_n)\frac{\alpha}{1}$$
$$- (Y''_1 + Y''_2 + Y''_3 \ldots\ldots + Y''_n)\frac{\alpha^2}{1.2}$$
$$+ (Y'''_1 + Y'''_2 + Y'''_3 \ldots\ldots + Y'''_n)\frac{\alpha^3}{1.2.3}$$
$$- \text{etc.}$$

Lorsqu'aucun des coefficiens X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$ etc. ne change de signe dans l'intervalle de $x=a$ à $x=b$, la vraie valeur de Y_n tombe entre les deux précédentes, et pour plus d'exactitude on doit prendre la moitié de leur somme: on trouve ainsi

$$Y_n = Y + \frac{\alpha}{1}(Y' + Y'_1 + Y'_2 \ldots + Y'_n) - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1}(Y' + Y'_n)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1.2}(Y'' + Y''_n)$$
$$+ \frac{\alpha^3}{1.2.3}(Y''' + Y'''_1 + Y'''_2 \ldots + Y'''_n) - \frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{1.2.3}(Y''' + Y'''_n)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}(Y'''' + Y''''_n)$$
$$+ \text{etc.}$$

481. L'intégrale $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}$, ne pouvant s'obtenir par la réduction de $e^{-\frac{1}{x}}$ en série, que pour le cas où x seroit très-grand, nous allons, par la formule ci-dessus, en calculer la valeur depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$.

On peut d'abord changer $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}$ en $\int x\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x^2} =$

$e^{-\frac{1}{x}}x - \int e^{-\frac{1}{x}}dx$; la partie $e^{-\frac{1}{x}}x$, s'évanouit lorsque $x=0$, et il en est de même de la seconde partie $\int e^{-\frac{1}{x}}dx$, ainsi qu'on va le voir. On a pour cette intégrale

$$X = e^{-\frac{1}{x}}, \qquad \frac{dX}{dx} = e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}, \qquad \frac{d^2X}{dx^2} = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)$$

$$\frac{d^3X}{dx^3} = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right), \text{ etc.}$$

Si on fait d'abord $x=0$, ces expressions s'évanouiront, et par conséquent les quantités Y', Y'', Y''', etc. seront nulles; il en sera de même du premier terme Y, puisqu'on prend l'intégrale à partir de $x=0$. Mettant ensuite α, 2α, 3α, etc. à la place de x, on obtiendra les valeurs de Y'_1, Y''_1, etc. Y'_2, Y''_2, etc. qui donneront $Y_n =$

$$\frac{\alpha}{1}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}} + e^{-\frac{1}{2\alpha}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + e^{-\frac{1}{n\alpha}}\right] - \frac{1}{2}\frac{\alpha e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2}\frac{1}{n^2\alpha^2}$$

$$+ \frac{\alpha^3}{1.2.3}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha^4} - \frac{2}{\alpha^3}\right) + e^{-\frac{1}{2\alpha}}\left(\frac{1}{16\alpha^4} - \frac{2}{8\alpha^3}\right) + \ldots + e^{-\frac{1}{n\alpha}}\left(\frac{1}{n^4\alpha^4} - \frac{2}{n^3\alpha^3}\right)\right] - \frac{1}{2}\frac{\alpha^3 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2.3}\left(\frac{1}{n^4\alpha^4} - \frac{2}{n^3\alpha^3}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\alpha^4 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{n^6\alpha^6} - \frac{6}{n^5\alpha^5} + \frac{6}{n^4\alpha^4}\right)$$

+ etc.

Si on fait $n\alpha = 1$, on aura $\alpha = \frac{1}{n}$ et $Y_n =$

$$\frac{1}{n}\left[e^{-\frac{n}{1}} + e^{-\frac{n}{2}} + e^{-\frac{n}{3}} \ldots . e^{-\frac{n}{n}}\right] - \frac{1}{2ne} + \frac{1}{4n^2e}$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\frac{(n-2)}{1}e^{-\frac{n}{1}} + \frac{(n-4)}{16}e^{-\frac{n}{2}} + \frac{(n-6)}{81}e^{-\frac{n}{3}} \ldots . + \frac{(n-2n)}{n^4}e^{-\frac{n}{n}}\right]$$

$$- \frac{1}{12n^3e} + \frac{1}{48n^4e} + \text{etc.}$$

En se bornant aux termes qui sont écrits et faisant $n=10$, on trouvera, suivant Euler, la valeur de Y_n à un millionième d'unité

près et on l'aura avec une exactitude vingt fois plus grande encore si on prend $n = 20$.

482. Le résultat de l'exemple précédent va nous conduire à prouver que l'intégrale $\int \frac{e^x dx}{x}$ a, en partant de x infini négativement, une valeur assignable au moins par approximation, ce qui ne se déduiroit pas facilement de la série

$$lx + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

obtenue n°. 435. Si on fait $x = -\frac{1}{u}$, il viendra

$\int \frac{e^x dx}{x} = -\int \frac{e^{-\frac{1}{u}} du}{u}$; or quand x est infini négativement, u est nul, la seconde intégrale s'évanouit, et par la formule du n°. préc. on obtiendra sa valeur depuis $u=0$ jusqu'à $u=a$.

Il est à propos de remarquer que cette intégrale est infinie lorsque $x=0$; car la série rapportée ci-dessus, d'autant plus convergente que x est petit, devient infinie par la même supposition.

Tout ce que nous venons de dire sur l'intégrale $\int \frac{e^x dx}{x}$ a lieu également pour la transformée $\int \frac{dz}{lz}$ (n°. 435) que la réduction en série par la méthode ordinaire ne nous a fait connoître que très-imparfaitement. On peut calculer sa valeur, depuis $z=0$, jusqu'à $z = \frac{1}{a}$, a étant un nombre plus grand que l'unité, par la formule du n°. 480, et on voit qu'elle s'évanouit lorsque $z=0$.

Lorsque z devient très-grand, on peut employer avec succès la même formule, pour calculer des portions de cette intégrale, qui est réellement infinie quand $z=1$, puisque ce cas répond à celui de $x=0$, dans l'intégrale $\int \frac{e^x dx}{x}$, et comme on le peut voir aussi par la série $ll z + \frac{lz}{1} + \frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ d'autant plus convergente que lz est plus petit.

483. Aidés de ce qui précède, reprenons la différentielle $\frac{P\,dx}{\sqrt{(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)}}$ (n^os 420 et 421), afin de parvenir à la valeur approchée de son intégrale quelle que soit celle de x. Par le procédé que nous avons indiqué n°. 420, pour le cas où p surpasse q, cette différentielle se trouve réduite à la série qui exprime le développement de $\frac{1}{\sqrt{1+r^2u^2}}$, multipliée par $\frac{1}{p}.\frac{N\,du}{\sqrt{1+u^2}}$, u étant égal à p^2x^2 et r^2 à $\frac{q^2}{p^2}$. Tant que l'intégrale cherchée ne doit être prise qu'entre les limites $u=0$ et $u=\pm 1$, la série dont nous parlons, ordonnée suivant les puissances ascendantes de r^2u^2, est convergente; mais elle cesse de l'être quand on donne à u une valeur qui rend $r^2u^2>1$, et même avant ce terme l'approximation devient très-lente. Pour obvier à cet inconvénient, nous ferons $x=\frac{u}{\sqrt{pq}}$, et $\frac{q}{p}=r$, ce qui changera la différentielle proposée en $\frac{N\,du}{\sqrt{r+u^2}.\sqrt{1+ru^2}}$, N désignant ce que devient la fonction $\frac{P}{p}$ lorsqu'on y met $\frac{u}{\sqrt{pq}}$ pour x. En développant la fraction $\frac{1}{\sqrt{1+ru^2}}$, suivant les puissances ascendantes de u, la série qu'on obtiendra pourra servir pour toutes les valeurs de cette variable, comprises entre $u=0$ et $u=\pm 1$, limites qui répondent à $x=0$ et à $x=\pm\frac{1}{\sqrt{pq}}$. Posant ensuite $u=\frac{1}{t}$ et représentant par M ce que devient alors N, on aura, au lieu de la différentielle proposée, cette autre de même forme: $\frac{M\,dt}{\sqrt{r+t^2}.\sqrt{1+r^2t^2}}$, qui par le développement de $\frac{1}{\sqrt{1+r^2t^2}}$ donnera une série dont on fera usage depuis $t=0$ jusqu'à $t=\pm 1$, c'est-à-dire, depuis x infini jusqu'à $x=\pm\frac{1}{\sqrt{pq}}$;

car $x=\frac{1}{t\sqrt{pq}}$. Les limites de cette série qui se joint à la précédente, renferment la plus grande étendue que puisse avoir l'intégrale $\int\frac{P\,dx}{\sqrt{(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)}}$.

Supposons maintenant qu'on se propose de prendre cette intégrale, depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$, et qu'on ait $a<\frac{1}{\sqrt{pq}}$ et $b>\frac{1}{\sqrt{pq}}$; on calculera d'abord sa valeur depuis $x=a$ jusqu'à $x=\frac{1}{\sqrt{pq}}$, en faisant successivement $u=a\sqrt{pq}$ et $u=1$, dans l'intégrale de la différentielle en u; et nommant U le résultat de la première substitution et U' celui de la seconde, la première partie de $\int\frac{P\,dx}{\sqrt{(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)}}$ sera $U'-U$.

Pour obtenir la seconde, qui doit être prise depuis $x=\frac{1}{\sqrt{pq}}$, jusqu'à $x=b$, on fera $t=1$ et ensuite $t=\frac{1}{b\sqrt{pq}}$ dans l'intégrale de la différentielle en t; le résultat de la première substitution étant désigné par T, et celui de la seconde par T', leur différence $T'-T$ sera la quantité qu'il faudra ajouter à $U'-U$, pour avoir la valeur complète de l'intégrale demandée.

Si par le moyen des transformations enseignées dans le n°. 422 on augmente l'inégalité des coefficiens p et q dans la différentielle $\frac{P\,dx}{\sqrt{(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)}}$ de manière à rendre la quantité r très-petite; les limites entre lesquelles se trouve comprise l'intégrale $\int\frac{N\,du}{\sqrt{r+u^2}.\sqrt{1+ru^2}}$, calculées par les formules du n°. 475, feront connoître le degré d'approximation auquel on sera parvenu. En effet, si cette intégrale est prise depuis $u=0$, jusqu'à $u=1$, et qu'on décompose sa différentielle dans les deux facteurs $\frac{N\,du}{\sqrt{r+u^2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+ru^2}}$;

la

la plus petite et la plus grande valeur du second seront 1 et $\frac{1}{\sqrt{1+r}}$; on aura par conséquent pour les limites cherchées, $\int\frac{N\,du}{\sqrt{r+u^2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+r}}\int\frac{N\,du}{\sqrt{r+u^2}}$: et comme on peut diminuer r indéfiniment, on voit qu'on pourra approcher aussi près qu'on voudra de l'intégrale proposée prise entre les limites $u=0$ et $u=1$, il en sera de même à l'égard de celle en t.

484. Lorsque p et q diffèrent très-peu l'un de l'autre, la différentielle $\frac{P\,dx}{\sqrt{(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)}}$ se transforme en $\frac{1}{pq}.\frac{P\,dx}{\sqrt{(r^2+x^2)^2-\delta^2}}$ (n°. 421) et se convertit dans une série qui, procédant suivant les puissances descendantes de r^2+x^2, cesseroit d'être convergente, si au lieu de cette quantité on avoit r^2-x^2 et que x dût être presqu'égal à r. Dans ce cas $\sqrt{(r^2-x^2)^2-\delta^2}=\sqrt{(r^2+\delta^2-x^2).(r^2-\delta^2-x^2)}$ et la différentielle proposée revient à la forme $\frac{P\,dx}{\sqrt{(m^2-x^2)(n^2-x^2)}}$, m et n s'éloignant peu l'un de l'autre, puisque δ est censé fort petit. La quantité $(m^2-x^2)(n^2-x^2)$, étant écrite comme il suit $(m-x)(n-x)(m+x)(n+x)$, et en observant que $(m+x)(n+x)=\left(x+\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$, on aura à intégrer $\frac{P\,dx}{\sqrt{(m-x)(n-x)}.\sqrt{\left(x+\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}}$. Tant qu'on prendra x très-différent de $-m$, la quantité $\left(x+\frac{m+n}{2}\right)^2$ sera toujours assez grande par rapport à $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$, pour que le développement de $\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}}$, ordonné suivant les puissances de $\frac{m-n}{2}$ converge; la différentielle proposée se développera donc ainsi:

$$\frac{P\,dx}{\sqrt{(m-x)(n-x)}}\left\{\frac{1}{x+\frac{m+n}{2}}+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}{\left(x+\frac{m+n}{2}\right)^3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\left(\frac{m-n}{2}\right)^4}{\left(x+\frac{m+n}{2}\right)^5}+\text{etc.}\right\}$$

et chacun de ses termes sera intégrable par les logarithmes ou par les arcs de cercle. Le résultat pourra servir pour tous les cas où l'intégrale demandée sera prise entre des limites a et b qui différeront assez de $-m$.

On a aussi $(m-x)(n-x)=\left(x-\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$ et par conséquent la différentielle proposée se mettra sous la forme

$$\frac{P\,dx}{\sqrt{(m+x)(n+x)}.\sqrt{\left(x-\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}}$$, et se développera dans cette série :

$$\frac{P\,dx}{\sqrt{(m+x)(n+x)}}\left\{\frac{1}{\left(x-\frac{m+n}{2}\right)}+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}{\left(x-\frac{m+n}{2}\right)^3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\left(\frac{m-n}{2}\right)^4}{\left(x-\frac{m+n}{2}\right)^5}+\text{etc.}\right\}$$

qui sera convergente tant que x différera sensiblement de $+m$, et servira par conséquent lorsqu'une des limites, entre lesquelles on doit prendre la valeur de l'intégrale demandée, approchera de $-m$.

Enfin si cette intégrale devoit être évaluée depuis $x=a$ jusqu'à $x=-b$, a et $-b$ étant peu différens de $+m$ et de $-m$, on la partageroit en deux parties, dont la première se prendroit depuis $x=a$, jusqu'à $x=0$, par la première formule, et la seconde depuis $x=0$ jusqu'à $x=-b$, par la seconde formule.

Les détails renfermés dans cet article et dans le précédent suffisent pour montrer comment, avec le secours des transformations et en calculant la valeur d'une intégrale en plusieurs parties, on parvient à en approcher, lorsque les séries qui l'expriment ne sont convergentes que pour un intervalle limité.

485. La série du théorême de Taylor donne deux développemens de l'intégrale $\int X\,dx$. Désignant par Y la valeur de cette intégrale quand $x=0$, et nommant Y', Y'', Y''', etc. ce que deviennent alors les

quantités X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, etc. on aura en général

$$\int X\,dx = Y + Y'\frac{x}{1} + Y''\frac{x^2}{1.2} + Y'''\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

série dans laquelle Y tient lieu de la constante arbitraire. En partant de la valeur générale de $\int X dx$, que nous représenterons par y, pour revenir à celle qui répond à $x=0$, il est évident qu'il faut faire $k=-x$ dans la formule du n°. 12, ce qui donnera

$$Y = y - \frac{dy}{dx}\frac{x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

remettant dans cette équation, au lieu de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. leurs valeurs, et prenant celle de $\int X dx$, on aura

$$\int X dx = Y + X\frac{x}{1} - \frac{dX}{dx}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

la quantité Y est encore ici la constante arbitraire.

L'intégration conduit aussi à ce développement. En effet, si on décompose la différentielle $X dx$ dans les deux facteurs X et dx, et qu'on intègre le second, on aura $\int X dx = Xx - \int x dX$; mais

$$\int x\,dX = \int \frac{dX}{dx}.x\,dx = \frac{1}{2}x^2\frac{dX}{dx} - \frac{1}{2}\int x^2\frac{d^2X}{dx},$$

$$\int x^2\frac{d^2X}{dx} = \int \frac{d^2X}{dx^2}.x^2dx = \frac{1}{3}x^3\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{1}{3}\int x^3\frac{d^3X}{dx^2},$$

$$\int x^3\frac{d^3X}{dx^2} = \int \frac{d^3X}{dx^3}.x^3dx = \frac{1}{4}x^4\frac{d^3X}{dx^3} - \frac{1}{4}\int x^4\frac{d^4X}{dx^4},$$

etc.

mettant successivement pour $\int x\,dX$, $\int x^2\frac{d^2X}{dx}$, etc. leurs valeurs; il en résultera

$$\int X dx = X\frac{x}{1} - \frac{dX}{dx}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

et pour que l'expression de l'intégrale soit complète, il faudra ajouter une constante à son développement, qui par là deviendra semblable au précédent. Cette série a été donnée pour la première fois par Jean Bernoulli, et elle porte son nom comme celle du n°. 12 porte celui de Taylor; l'une est à l'égard du Calcul intégral, ce que l'autre est

par rapport au Calcul différentiel. Les intégrations que nous avons effectuées sur $\int X dx$, et qui ne sont que l'application de la formule $\int u dv = uv - \int v du$ (n°. 361), s'appellent *Intégrations par parties.*

486. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que le coefficient différentiel du premier ordre ; mais si on ne connoissoit que le coefficient différentiel du second ordre, il faudroit alors deux intégrations successives pour remonter à la fonction primitive dont il tire son origine. Soit X le coefficient différentiel du second ordre de la fonction y, on aura $\frac{d^2y}{dx^2} = X$, et en multipliant les deux membres par dx, il viendra $\frac{d^2y}{dx} = X dx$; or $\frac{d^2y}{dx}$ est la différentielle de $\frac{dy}{dx}$, prise en regardant dx comme constant : on aura donc $\frac{dy}{dx} = \int X dx$. Représentons par P la fonction primitive de x égale à $\int X dx$, et par C la constante arbitraire, et nous aurons $\frac{dy}{dx} = P + C$; multiplions ensuite les deux membres par dx, nous trouverons $dy = P dx + C dx$, et en intégrant il viendra $y = \int P dx + Cx + C'$, C' étant une seconde constante arbitraire. Si on remet $\int X dx$, au lieu de P, il en résultera $y = \int dx \int X dx + Cx + C'$, expression qui renferme deux intégrations successives.

On peut ramener cette expression à deux intégrales simples, au moyen de l'intégration par parties ; car en remettant P au lieu de $\int X dx$, on aura $\int P dx = Px - \int x dP = x \int X dx - \int X x dx$ et par conséquent $y = x \int X dx - \int X x dx + Cx + C'$.

Passons maintenant aux différentielles du troisième ordre. Soit N le coefficient différentiel de la fonction y, relatif à cet ordre ; on aura $\frac{d^3y}{dx^3} = X$, d'où $\frac{d^3y}{dx^2} = X dx$; mais $\frac{d^3y}{dx^2} = d.\frac{d^2y}{dx^2}$; donc $\frac{d^2y}{dx^2} = \int X dx + C$, ce qui donne $\frac{d^2y}{dx} = dx \int X dx + C dx$: intégrant de nouveau il viendra $\frac{dy}{dx} = \int dx \int X dx + Cx + C'$, ou, d'après ce qui précède, $\frac{dy}{dx} = x \int X dx - \int X x dx + Cx + C'$. On tire

ensuite de là $dy=x\,dx\int X\,dx-dx\int Xx\,dx+Cx\,dx+C'dx$, et en intégrant on a $y=\int x\,dx\int X\,dx-\int dx\int Xx\,dx+\frac{1}{2}Cx^2+C'x+C''$, C'' étant la constante introduite par cette dernière intégration. Il est facile de voir que

$$\int x\,dx\int X\,dx=\tfrac{1}{2}x^2\int X\,dx-\tfrac{1}{2}\int Xx^2dx$$
$$\int dx\int Xx\,dx=x\int Xx\,dx-\int Xx^2dx,$$

substituant donc ces valeurs et réduisant entr'eux les termes semblables, on trouvera

$$y=\tfrac{1}{2}(x^2\int X\,dx-2x\int Xx\,dx+\int Xx^2dx)+\tfrac{1}{2}(Cx^2+2C'x+2C'').$$

487. Il seroit facile de continuer de la même manière pour les ordres supérieurs; mais au lieu d'effectuer ces calculs, nous allons chercher la loi que suivent les expressions de y. Pour cela nous observerons d'abord que lorsque X désigne le coefficient différentiel du second ordre, on a $d^2y=X\,dx^2$, et qu'en prenant l'intégrale de chaque membre on trouve $dy=\int X\,dx^2$, puis, en intégrant encore une fois $y=\iint X\,dx^2=\int^2 X\,dx^2$: on a de même, quand X est le coefficient différentiel du troisième ordre,

$$d^3y=\int X\,dx^3,\ dy=\iint X\,dx^3,\ y=\iiint X\,dx^3=\int^3 X\,dx^3,$$

et ainsi de suite pour les ordres supérieurs. On vérifiera aisément par la différentiation les équations suivantes.

$$\int X\,dx^3=dx\int X\,dx,\qquad \iint X\,dx^2=\int dx\int X\,dx$$
$$\int X\,dx^3=dx^2\int X\,dx,\qquad \iint X\,dx^3=\int dx^2\int X\,dx=dx\int dx\int X\,dx$$
$$\iiint X\,dx^3=\int dx\int dx\int X\,dx,\ \text{etc.}$$

Dans ces equations chaque signe $\int$ embrasse tous ceux qui le suivent, et on peut ne laisser sous le dernier que la première puissance de dx.

Cela posé, en négligeant les constantes arbitraires on aura, par le n°. précédent, ou en intégrant par parties

$$\int X\,dx=\int X\,dx$$
$$\int^2 X\,dx^2=\frac{1}{1}[x\int X\,dx-\int Xx\,dx]$$
$$\iint X\,dx^3=\frac{1}{1.2}[x^2\int X\,dx-2x^2\int Xx\,dx+\int Xx^2dx]$$
$$\int^4 X\,dx^4=\frac{1}{1.2.3}[x^3\int X\,dx-3x^2\int Xx\,dx+3x\int Xx^2dx-\int Xx^3dx].$$

Les coefficiens numériques de ces expressions sont les mêmes que

ceux des puissances du binome $a-b$, et tandis que l'exposant de x hors du signe $\int$ diminue d'une unité à chaque terme en allant vers la droite, son exposant sous ce signe augmente de la même quantité ; d'après cette loi on aura

$$\int^n X dx^n = \frac{1}{1.2..(n-1)}\left[x^{n-1}\int X dx - \frac{(n-1)}{1}x^{n-2}\int X x dx + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-3}\int X x^2 dx \right.$$
$$\left. - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}x^{n-4}\int X x^3 dx \ldots \pm \int X x^{n-1} dx\right].$$

Le signe + du dernier terme étant relatif au cas où $n-1$ est pair, et le signe — à celui où il est impair.

Pour confirmer ce résultat, nous allons montrer qu'il conserve la même forme lorsque n devient $n+1$. En effet,

$\int^{n+1} X dx^{n+1} = \int dx \int^n X dx^n$; mettant dans cette équation la valeur supposée de $\int^n X dx^n$, intégrant par parties chaque terme du résultat, réduisant au même dénominateur tous les coefficiens et réunissant les intégrales semblables, il viendra

$$\int^{n+1} X dx^{n+1} = \frac{1}{1.2...n}\left[x^n \int X dx - \frac{n}{1}x^{n-1}\int X x\, dx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\int X x^2 dx \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}\int X x^3 dx \ldots \pm n x \int X x^{n-1} dx\right]$$
$$- \frac{1}{1.2...n}\left[1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \ldots \pm n\right]\int X x^n dx.$$

Or la partie du coefficient de $\int X x^n dx$, renfermée entre parenthèses, est évidemment égale à $(1-1)^n \mp 1 = \mp 1$, le signe — ayant lieu si n est pair et le signe + s'il est impair ; donc

$$\int^{n+1} X dx^{n+1} = \frac{1}{1.2...n}\left[x^n \int X dx - \frac{n}{1}x^{n-1}\int X x dx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\int X x^2 dx \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}\int X x^3 dx \ldots \pm \int X x^n dx\right] :$$

la loi établie, se continuant dans le passage de n à $n+1$, aura nécessairement lieu de proche en proche, en partant des expressions calculées immédiatement.

On restituera les constantes arbitraires que nous avons omises dans cette formule, en écrivant $\int X dx + C$ pour $\int X dx$, $\int X x dx + C'$ pour $\int X x dx$, $\int X x^2 dx + C''$ pour $\int X x^2 dx$ et ainsi des autres ;

car les constantes C, C', C'', etc. étant affectées de diverses puissances de x sont irréductibles entr'elles.

488. Il existe aussi un développement de $\int^n X dx^n$ en termes délivrés du signe $\int$, et analogue à celui de $\int X dx$ que nous avons donné n°. 485. Pour y parvenir, nous observerons d'abord qu'en opérant sur $\int X x^n dx$, comme nous l'avons fait dans ce n°. sur $\int X dx$, on trouve

$$\int X x^n dx = X\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{dX}{dx}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{d^3X}{dx^3}\frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \text{etc.} + const.$$

Cela posé, puisque $\int^2 X dx^2 = x\int X dx - \int X x dx$, on aura

$$\int^2 X dx^2 = \left\{\begin{array}{l} X\frac{x^2}{1} - \frac{dX}{dx}\frac{x^3}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^4}{1.2.3} - \text{etc.} \\ -X\frac{x^2}{2} + \frac{dX}{dx}\frac{x^3}{2.3} - \frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$= X\frac{1x^2}{1.2} - \frac{dX}{dx}\frac{2x^3}{1.2.3} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{3x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

on arriveroit ainsi à

$$\int^3 X dx^3 = X\frac{1x^3}{1.2.3} - \frac{dX}{dx}\frac{3x^4}{1.2.3.4} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{6x^5}{1.2.3.4.5} \text{ etc.}$$

$$\int^4 X dx^4 = X\frac{1x^4}{1.2.3.4} - \frac{dX}{dx}\frac{4x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{10x^6}{1.2.3.4.5.6} - \text{etc.}$$

etc.

Les coefficiens des numérateurs dans ces expressions sont les mêmes que ceux des développemens de $\frac{1}{(1+x)^2}$, $\frac{1}{(1+x)^3}$, $\frac{1}{(1+x)^4}$, etc. et on s'assurera que cette loi est générale en posant

$$\int^n X dx^n = X\frac{x^n}{1.2..n} - \frac{dX}{dx}\frac{Ax^{n+1}}{1.2..(n+1)} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{Bx^{n+2}}{1.2..(n+2)} - \text{etc.}$$

$$\int^{n+1} X dx^{n+1} = X\frac{x^{n+1}}{1.2..(n+1)} - \frac{dX}{dx}\frac{A'x^{n+2}}{1.2..(n+2)} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{B'x^{n+3}}{1.2..(n+3)} - \text{etc.}$$

car en différentiant la seconde équation on doit nécessairement retrouver la première. Comparant les termes semblables il vient

$1 = 1$, $A = 1 - A'$, $B = B' - A'$ $C = B' - C'$, $D = D' - C'$ etc.

or, si on fait aussi $\frac{1}{(1+x)^n} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 +$ etc.

$$\frac{1}{(1+x)^{n+1}} = 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 + \text{etc.}$$

et qu'on substitue ces développemens dans l'équation

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \frac{1}{(1+x)^{n+1}}(1+x),$$

on trouvera entre les coefficiens A, B, C, etc. A', B', C', etc. les mêmes relations que ci-dessus ; d'où il suit que le développement de $\int^n X dx^n$ s'accordant dans les premières valeurs de n avec celui de $\frac{1}{(1+x)^n}$ doit continuer de le faire quelle que soit n, et qu'on doit avoir par conséquent $\int^n X dx^n =$

$$X\frac{x^n}{1.2...n} - \frac{dX}{dx}\frac{\frac{n}{1}x^{n+1}}{1.2...(n+1)} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{\frac{n(n+1)}{1.2}x^{n+2}}{1.2...(n+2)} - \frac{d^3X}{dx^3}\frac{\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^{n+3}}{1.2.3...(n+3)} - \text{etc.}$$

Il faudra, pour que ce développement soit complet, y joindre les termes affectés des constantes arbitraires dans l'expression générale $\int^n X dx^n$ du n°. précédent, et qui sont

$$\frac{Cx^{n-1}}{1.2...(n-1)} + \frac{C'x^{n-2}}{1.2...(n-2)} + \frac{C''x^{n-3}}{1.2...(n-3)} + \text{etc.}$$

ou $Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + C''x^{n-3} +$ etc., en comprenant les diviseurs dans les quantités indéterminées C, C', C'', etc.

489. Les différentielles que nous avons traitées sont prises en regardant dx comme constant, parce que ce sont les seules qui ne renferment qu'un coefficient différentiel. En effet, lorsqu'on fait varier en même tems dx, on a (n°. 59) $d^2y = y''dx^2 + y'd^2x$; si donc on se proposoit la différentielle $U dx^2 + V d^2x$, il faudroit, pour qu'elle signifiât quelque chose, qu'on eût $V = y'$ et $U = y''$, d'où résulte $U = \frac{dV}{dx}$, et cette condition étant remplie, on n'auroit qu'à intégrer $\int V dx$. Il est facile d'étendre cette remarque aux différentielles d'un ordre quelconque.

CHAPITRE

TABLEAU SYSTÉMATIQUE DES INTÉGRALES

TRAITÉES DANS CE PREMIER CHAPITRE,

CONTENANT L'INDICATION DU NUMÉRO OÙ L'ON S'EST OCCUPÉ DE CHACUNE D'ELLES, ET LA VALEUR DES PLUS SIMPLES.

Nota. Pour abréger, on a omis par-tout la constante arbitraire, qu'il est si facile de restituer.

I. FONCTIONS RATIONNELLES (page 2).

$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$ (359), $\int \frac{a\,dx}{x} = a\,lx$ (360), $\int (du+dv-dw) = u+v-w$, $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (361), $\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}$, $\int (ax^n+b)^m x^{n-1} dx = \frac{(ax^n+b)^{m+1}}{na(m+1)}$ . . . . . (362).

$\int \frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n} = \int \frac{A(\zeta-b)^m d\zeta}{a^{m+1}\zeta^n}$, $\zeta = ax+b$ (363), $\int \frac{U dx}{V} = \int Q dx + \int \frac{R dx}{V}$, $\frac{U}{V} = Q + \frac{R}{V}$ . . . . . (364)

$\int \frac{(Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}\ldots\ldots+T)dx}{x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}\ldots\ldots+T'} = \int \frac{N dx}{x+a} \ldots\ldots + \int \frac{M dx}{(x+b)^p} \ldots\ldots + \int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} \ldots\ldots + \int \frac{(Kx+L)dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q}$ . . . . . (364, 367)

$\int \frac{N dx}{x+a} = Nl(x+a)$ (364), $\int \frac{M dx}{(x+b)^p} = \frac{M}{(1-p)(x+b)^{p-1}}$ (367), $\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} = Al.\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} - \frac{B-A\alpha}{\beta}\,\text{arc}\left(\cos = \frac{x+\alpha}{\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}}\right)$ . . . . . (365).

$\int \frac{(Kx+L)dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q} = \int \frac{(K\zeta+L_1)d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^q} = \frac{-K}{2(q-1)(\zeta^2+\beta^2)^{q-1}} + \int \frac{L_1 d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^q}$ (*Nota.* $\int \frac{L_1 d\zeta}{(\zeta^2+\beta^2)^q}$ se ramène à $\int \frac{H d\zeta}{\zeta^2+\beta^2}$ par la formule V du tableau, page 40.), $\zeta = x+\alpha$ (367), $\int \frac{x^m dx}{x^n+1}$, $\int \frac{x^m dx}{x^n-1}$ . . . . (375).

II. FONCTIONS IRRATIONNELLES (page 29).

$\int X dx \sqrt{A+Bx\pm Cx^2} = \int \frac{X(A+Bx\pm Cx^2)\,dx}{\sqrt{A+Bx\pm Cx^2}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{X dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{1}{\gamma}\int \frac{X dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}} = \int Z d\zeta\,;\ C=\gamma^2,\ \frac{A}{C}=\alpha,\ \frac{B}{C}=\beta,\ \sqrt{\alpha+\beta x+x^2} = x+\zeta \ldots\ldots \\ \int \frac{X dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}} = \frac{1}{\gamma}\int \frac{X dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}} = \int Z d\zeta\,;\ C=\gamma^2,\ \frac{A}{C}=\alpha,\ \frac{B}{C}=\beta,\quad \alpha+\beta x-x^2 = (x-\alpha)(\alpha'-x),\ \sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)} = (x-\alpha)\zeta. \end{array} \right\}$ . . (377).

$\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}} l\left(\frac{B}{2\sqrt{C}} + x\sqrt{C} + \sqrt{A+Bx+Cx^2}\right)$ (378), $\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{C}}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{a'-x}}{\sqrt{x-a}}\right)$ . . . . . (379).

$\int X dx (a+bx)^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{b}\int Z\zeta^{m+n-1} d\zeta\,;\quad a+bx = \zeta^n,$ $\int f\left[x, (a+bx)^{\frac{m}{n}}, (a+bx)^{\frac{p}{q}}, (a+bx)^{\frac{r}{s}}\right] dx,\ a+bx = \zeta^{nqs}$ . . . . . (380).

$\int X dx \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}} = n(ba'-ab')\int \frac{Z\zeta^{m+n-1}d\zeta}{(b'\zeta-b)^2};\ \frac{a+bx}{a'+b'x} = \zeta^n,\ \int f\left[x, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx,\ \frac{a+bx}{a'+b'x} = \zeta^{nqs}$ . . . . . (381).

$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{nb}\int \zeta^{p+q-1} d\zeta \left(\frac{\zeta^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} = \frac{q^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}{n}\int \frac{-u^{p+q-1}du}{(u^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}},\ a+bx^n = \zeta^q,\ a+bx^n = x^n\zeta^q$ (*Nota.* Voyez les formules des n^os^ 387—390, et le tabl. page 42) (385), $\int X dx (x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{p}{q}}$ . . . . . (385).

$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ (395, 396) $\int x^{m-1} dx (a+bx^n+cx^{2n}+cx^{3n}+\ldots\ldots)^{\frac{p}{q}}$ . . . . . (397, 398).

$\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$ (399), $\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$ (403), $\int \frac{Q dx \sqrt{A+\beta x+Cx^2}}{\sqrt{A'+b'x+C'x^2}}$, $\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4+\delta x^6}}$, $\int \frac{P dx}{\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$, $\int P dx \sqrt[4]{+\beta x^2+\gamma x^4}$, $\int P dx (\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)^{\pm\frac{5}{4}}$

II. FONCTIONS IRRATIONNELLES (page 29).

$\int X dx \sqrt{A+Bx\pm Cx^2} = \int \frac{X(A+Bx\pm Cx^2)\,dx}{\sqrt{A+Bx\pm Cx^2}}$

$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{X dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{1}{\gamma}\int \frac{X dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}} = \int Z d\zeta ;\ C=\gamma^2,\ \frac{A}{C}=\alpha,\ \frac{B}{C}=\beta,\ \sqrt{\alpha+\beta x+x^2}=x+\zeta \ldots\ldots \\ \int \frac{X dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}} = \frac{1}{\gamma}\int \frac{X dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}} = \int Z d\zeta ;\ C=\gamma^2,\ \frac{A}{C}=\alpha,\ \frac{B}{C}=\beta,\quad \alpha+\beta x-x^2=(x-a)(a'-x),\ \sqrt{(x-a)(a'-x)}=(x-a)\zeta . \end{array} \right\}$ (377).

$\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}}\,l\left(\frac{B}{2\sqrt{C}}+x\sqrt{C}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right)$ (378), $\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{C}}\,\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{\sqrt{a'-x}}{\sqrt{x-a}}\right)$ ..... (379).

$\int X dx (a+bx)^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{b}\int Z\zeta^{m+n-1}d\zeta,\quad a+bx=\zeta^n,\qquad \int f\left[x,(a+bx)^{\frac{m}{n}},(a+bx)^{\frac{p}{q}},(a+bx)^{\frac{r}{s}}\right]dx,\ a+bx=\zeta^{nqs}$ ..... (380).

$\int X dx \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}} = n(ba'-ab')\int \frac{Z\zeta^{m+n-1}d\zeta}{(b'\zeta-b)^{s}},\ \frac{a+bx}{a'+b'x}=\zeta^n,\ \int f\left[x,\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}},\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{p}{q}},\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx,\ \frac{a+bx}{a'+b'x}=\zeta^{nqs}$ ..... (381).

$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{nb}\int \zeta^{p+q-1}d\zeta\left(\frac{\zeta^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} = \frac{q\,a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}{n}\int \frac{-u^{p+q-1}du}{(u^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}},\ a+bx^n=\zeta^q,\ a+bx^n=x^n\zeta^q$ (*Nota.* Voyez les formules des n^os. 387—390, et le tabl. page 47) (385), $\int X dx\,(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{p}{q}}$ ..... (385).

$\int x^{m-1}dx(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{q}}$ (395, 396) $\int x^{m-1}dx(a+bx^n+cx^{2n}+cx^{3n}+\ldots\ldots)^{\frac{p}{q}}$ ..... (397, 398).

$\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$ (399), $\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$ (403), $\int \frac{Q dx\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A'+B'x+C'x^2}}$, $\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4+\delta x^6}}$, $\int \frac{P dx}{\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$, $\int P dx\sqrt[4]{+\beta x^2+\gamma x^4}$, $\int P dx(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)^{\pm\frac{3}{4}}$

$\int P dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^{\pm\frac{1}{3}}$, $\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\gamma x^4+\beta x^5+\alpha x^6}}$, $\int \frac{P dy}{\sqrt{\beta+\gamma y^2+\delta y^4+\gamma y^6+\beta y^8}}$ (404), $\int \frac{dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{2x^m-1}}$, $\int \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{2x^m-1}}$ ..... (405)

III. INTÉGRALES PAR LES SÉRIES (page 66).

$\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$ (407), $\int \frac{a\,dx}{a^2+x^2} = \text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{a}\right)$, $\int \frac{x^m dx}{a^n+x^n}$ (408), $\int x^m dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ (409 et 411), $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}(\sin=x)$ (410, 412), $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (410, 412), $\int \frac{dx}{\sqrt{x-xx}}$, $\int dx\sqrt{2ax-x^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$, $\int \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}}$ ... (410).

$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^4}}$ (415), $\int \frac{dx\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ (416—419), $\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}} = \int \frac{P dx}{\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}}$ ..... (420—423).

IV. FONCTIONS LOGARITHMIQUES ET EXPONENTIELLES (page 89).

$\int X dx\,lx = lx\int X dx - \int \frac{dx}{x}\int X dx$ (424), $\int X dx\,lV = lV\int X dx - \int \frac{dV}{V}\int X dx$ (426), $\int P dx(lx)^n$ (427), $\int P dx(lx)^{-n}$ (429), $\int P a^x dx$ ..... (431, 436).

$\int \frac{a^x dx}{x}$, $\int \frac{e^x dx}{x} = \int \frac{a_\zeta}{l\zeta}$, $\zeta=e^x$ (435), $\int x^{nx}dx$ ..... (437).

V. FONCTIONS CIRCULAIRES (page 100).

$\int X dx\,(\text{arc sin}=x) = V\,\text{arc}(\sin=x) - \int \frac{V dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $V=\int X dx$ (439), $\int X dx\,\text{arc}(\cos=x)$, $\int X dx\,\text{arc}(\text{tang}=x)$ (440), $\int X\zeta^n dx$, ζ étant un arc quelconque. ..... (441).

$\int d\zeta\cos n\zeta$, $\int d\zeta\sin n\zeta$, $\int \frac{d\zeta}{(\cos n\zeta)^2}$, $\int \frac{d\zeta}{(\sin n\zeta)^2}$, $\int \frac{d\zeta\sin n\zeta}{(\cos n\zeta)^2}$, $\int \frac{d\zeta\cos n\zeta}{(\sin n\zeta)^2}$ (442), $\int d\zeta\sin\zeta^n$ (443), $\int d\zeta\cos\zeta^n$ (444, 445), $\int d\zeta\sin\zeta^m\cos\zeta^n$ (445, 446), $\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta}$, $\int \frac{d\zeta}{\cos\zeta}$, $\int \frac{d\zeta\cos\zeta}{\sin\zeta}$, $\int \frac{d\zeta\sin\zeta}{\cos\zeta}$ ..... (447).

$\int \frac{d\zeta\sin\zeta^m}{\cos\zeta^n}$, $\int \frac{d\zeta\cos\zeta^n}{\sin\zeta^m}$ (449), $\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta^m\cos\zeta^n}$ (450, 451), $\int \frac{d\zeta}{a+b\cos\zeta}$ (452), $\int \frac{d\zeta\sin\zeta}{a+b\cos\zeta}$, $\int \frac{d\zeta\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}$ (453), $\int \frac{d\zeta(a'+b'\cos\zeta)}{(a+b\cos\zeta)^n}$ (454), $\int \frac{d\zeta\cos\zeta^m\sin\zeta^n}{(a+b\cos\zeta)^p}$, $\int \frac{d\zeta\,\text{tang}\,\zeta^m}{(a+b\,\text{tang}\,\zeta)^p}$ (455), $\int e^{ax}d\zeta\sin\zeta^n$, $\int e^{ax}d\zeta\cos\zeta^n$ ... (456).

$\int e^{ax}d\zeta\sin\zeta^m\cos\zeta^n$ (457), $\int d\zeta(a+b\cos\zeta)^m$ (459—467) $\int d\zeta\,l(1+n\cos\zeta)$ ..... (468).

VI. SÉRIES GÉNÉRALES (page 135).

$\int X dx$ (470—475), $\int e^{-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x}$ (481), $\int X dx$ (485), $\int^n X dx^n = \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\left[\frac{x}{n}X - \frac{x^2}{1.(n+1)}\frac{dX}{dx} + \frac{x^3}{1.2(n+2)}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{x^4}{1.2.3(n+3)}\frac{d^3X}{dx^3} + \&c.\right] + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2}\ldots + C_n$ .. (487, 488)

CHAPITRE II.

Application du Calcul intégral à la quadrature des Courbes et à leur rectification, à la quadrature des Surfaces courbes et à l'évaluation des Solides qu'elles comprennent.

De la quadrature des Courbes.

490. LE problême général de la quadrature des courbes se réduit à l'intégration de la différentielle $X\,dx$, en nommant X la fonction de x, qui exprime l'ordonnée y de la courbe proposée. Le chapitre précédent contient l'exposé des diverses méthodes analytiques trouvées jusqu'à présent, pour effectuer cette intégration, soit rigoureusement, soit d'une manière approchée; il ne s'agit ici que de l'application de ces méthodes aux courbes les plus connues.

Celles dont l'équation est la plus simple sont les paraboles des divers ordres, représentées par l'équation $y^n = px^m$: on en tire $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$ et par conséquent $\int X\,dx = \int p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{n\,p^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} + const.$

Toutes ces courbes, comme on voit, sont *quarrables*; c'est-à-dire, qu'on a l'expression finie et algébrique de la surface du segment compris entre leur arc, l'axe des abscisses et l'ordonnée. Il est facile, avec l'expression de ce segment, de calculer celle de tout autre espace contenu entre une portion de la courbe et des lignes droites formant, avec les abscisses et les ordonnées, des Polygones dont la Géométrie élémentaire donne la mesure.

Ces courbes proposées passent par l'origine des abscisses, puisqu'on a en même temps $x=0$ et $y=0$; si on veut exprimer leur aire, à partir de ce point, il faut supprimer la constante arbitraire, puisque l'expression $\frac{n\,p^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ s'anéantit d'elle-même quand on y fait $x=0$.

Pour avoir ensuite l'aire $BCMP$, *fig.* 4, comprise entre les FIG. 4.

ordonnées BC et PM, correspondantes aux abscisses $AB=a$ et $AP=x$, il suffira de retrancher de $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$, qui exprime l'aire $ACMP$, la quantité $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}a^{\frac{m+n}{n}}$ égale à l'aire ACB, et on aura ainsi $BCMP=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}\left(x^{\frac{m+n}{n}}-a^{\frac{m+n}{n}}\right)$.

Quand l'exposant n est pair, l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ est susceptible du double signe $\pm$, et comme alors les mêmes abscisses AP appartiennent à deux branches de courbes ACM et acm, on a deux segmens $ACMP$ et $acmP$; celui qui renferme les ordonnées positives a une valeur positive et l'autre a une valeur négative.

Lorsque les exposans m et n sont impairs l'un et l'autre, la quantité $x^{\frac{m+n}{n}}$ n'a qu'un seul signe et reste toujours positive, quel que soit le signe de x; mais il est aisé de voir que dans ce cas l'une des deux branches de la courbe proposée a ses abscisses et ses ordonnées positives en même tems, et l'autre a ses abscisses et ses ordonnées négatives en même tems: il suit donc de là que les aires correspondantes à des abscisses et à des ordonnées négatives doivent être regardées comme positives.

Si n seule est impaire, alors la quantité $x^{\frac{m+n}{n}}$ devient négative en même tems que x; mais dans ce cas les deux branches de la courbe proposée sont du même côté de la ligne des abscisses et les ordonnées demeurent toujours positives.

En rapprochant ces remarques, on en conclura que *l'aire d'une courbe est positive quand l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe, et négative lorsque le contraire a lieu.*

Tous les segmens paraboliques ont un rapport constant avec le rectangle $ADMP$, formé sur l'abscisse et sur l'ordonnée, car l'expression $\frac{n}{m+n}p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m+n}{n}}=\frac{n}{m+n}x.p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}}$ devient $\frac{n}{m+n}xy$, en vertu de l'équation $y=p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}}$.

Lorsque $n=m$, la parabole devient une ligne droite, puisqu'on a $y=p^{\frac{1}{n}}x$, le segment $ACMP$ se change dans le triangle AMP, dont la valeur est par la formule ci-dessus, comme par la Géométrie élémentaire, égale à $\frac{1}{2}xy$.

En faisant $n=2$ et $m=1$, on tombe sur le cas de la parabole ordinaire et on trouve $\frac{2}{3}xy$ pour la valeur du segment $ACMP$ (*).

491. Cherchons maintenant la valeur des segmens faits dans les courbes représentées par l'équation $x^m y^n=p$. Cette équation se tire de $y^n=px^m$, en y changeant $+m$ en $-m$; on a $y=p^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}}$ et

$$\int X\,dx=\frac{n\,p^{\frac{1}{n}}}{n-m}x^{\frac{n-m}{n}}+const.$$

Les courbes proposées sont les hyperboles des divers ordres rapportées à leurs asymptotes, et sont composées de plusieurs branches telles que UMV, *fig.* 5, inscrites dans les angles que forment ces droites. En comptant les segmens de l'origine des abscisses, ils renferment tout l'espace indéfini qui se trouve entre la partie CV de la courbe et son asymptote AY; la valeur de cet espace est finie ou FIG. 5.

(*) Si on représente par s l'aire d'une courbe quelconque, on aura $h=\int y\,dx$ et lorsque x deviendra $x+h$, s se changera en $s+\frac{ds}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2s}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+$ etc. ou en

$$\int y\,dx+y\frac{h}{1}+\frac{dy}{dx}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

en faisant $\frac{dy}{dx}=A$, $\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}=B$, $\frac{1}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}=C$, etc. l'accroissement de l'aire, correspondant à celui de x, sera $yh+\frac{1}{2}Ah^2+\frac{1}{3}Bh^3+\frac{1}{4}Ch^4+$ etc. Or le terme yh est l'expression du rectangle fait sur l'ordonnée $MP=y$ et sur la ligne $MQ=h$ (fig. 29 du premier vol.); le terme $\frac{1}{2}Ah^2$ est l'intégrale de $Ahdh$, ou l'aire du triangle $N'MQ$, fermé par la droite MN' tangente à la courbe en M; les deux termes $\frac{1}{2}Ah^2+\frac{1}{3}Bh^3$ réunis sont l'intégrale de $(Ah+Bh^2)dh$, c'est-à-dire, l'aire du segment $N''MQ$ de la première parabole osculatrice (n°. 258): on trouvera de même que $\frac{1}{2}Ah^2+\frac{1}{3}Bh^3+\frac{1}{4}Ch^4$ représente l'aire du segment $N'''MQ$ de la deuxième parabole osculatrice et ainsi de suite; d'où on verra que les différences des segmens des paraboles osculatrices donnent les divers termes de la série ci-dessus, de même que les différences des ordonnées de ces courbes expriment ceux de la série de Taylor (note de la page 390, T. I).

infinie, selon que m est plus grande ou moindre que n. En effet, pour avoir l'espace $BCMP$, pris depuis l'abscisse $AB=a$, jusqu'à l'abscisse $AP=b$, il faut (n°. 471.) faire successivement $x=a$ et $x=b$ dans l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}x^{\frac{n-m}{n}}$ et retrancher le premier résultat du second; on aura donc $BCMP=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}}-a^{\frac{n-m}{n}}\right)$. Si maintenant on suppose $a=0$, le point B tombera sur le point A et l'espace $BCMP$ se changera en $YAPM$; or la quantité $a^{\frac{n-m}{n}}$ sera infinie ou nulle, selon qu'on aura $m>$ ou $<n$: dans le premier cas,

$$YAPM=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n}\left(\frac{1}{0}-b^{\frac{n-m}{n}}\right),$$

et dans le second

$$YAPM=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}}-0\right)=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}b^{\frac{n-m}{n}}.$$

Laissons à a une grandeur déterminée et faisons b infini, nous aurons alors l'espace indéfini $XBCU$, qui sera infini si m est moindre que n, et qui sera égal à $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n}a^{\frac{n-m}{n}}$, si m surpasse n. Il résulte de là que quand m et n sont inégaux, des deux espaces asymptotiques, l'un est infini et l'autre fini. La raison de cette différence se trouve dans le plus ou moins de rapidité avec laquelle la courbe s'approche de son asymptote; et puisque $y=\frac{p^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{m}{n}}}$ et $x=\frac{p^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{m}{n}}}$, il est facile de voir que quand on a $m>n$, y décroît beaucoup plus vîte que x, et que par conséquent la courbe s'approche beaucoup plus rapidement de l'asymptote parallèle aux abscisses, que de celle qui est parallèle aux ordonnées, *et vice versâ*. En mettant y au lieu de $p^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}}$, dans l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}x^{\frac{n-m}{n}}=\frac{n}{n-m}x.p^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}}$, elle deviendra $\frac{m}{n-m}xy$, et la valeur de l'aire $YAPMV$ sera

$\frac{nxy}{n-m}$ + *const.* Il sembleroit que le terme $\frac{nxy}{n-m}$ doit s'évanouir lorsqu'on fait $x=0$; mais ce qui précède prouve la nécessité de ne rien prononcer à cet égard avant d'avoir substitué pour y sa valeur en x.

492. Quand $n=m$, on a $xy=p^{\frac{1}{n}}$, ou $xy=p$, en changeant $p^{\frac{1}{n}}$ en p, ce qui est indifférent ; la courbe dont il s'agit dans ce cas est l'hyperbole ordinaire et équilatère si l'angle des coordonnées est droit. L'expression générale de l'aire, trouvée, n°. précéd. se présente alors sous une forme infinie quel que soit x, et la différentielle de cette expression étant $\frac{pdx}{x}$ a pour intégrale $p\,lx$ + *const.* Les espaces asymptotiques sont infinis l'un et l'autre, car lx devient tel par la supposition de $x=0$ et par celle de x infinie. Prenons pour plus de simplicité $p=1$, et soit *UMV*, *fig.* 6, une des branches de l'hyperbole équilatère dont la *puissance* est égale à l'unité, *AC* son axe ; en abaissant du sommet *C* la perpendiculaire *BC* on aura $AB=1$, et comme l'aire $BCMP=l.AP-l.AB$, il viendra, à cause de $l1=0$, $BCMP=l.AP$. On aura de même $l.AP'=BCM'P'$, $l.AP''=BCM''P''$, etc. d'où il suit que si les abscisses AP, AP', AP'', etc. sont en progression géométrique, les aires correspondantes $BCMP$, $BCM'P'$, $BCM''P''$, etc. seront en progression arithmétique. FIG. 6.

493. L'hyperbole que nous venons de considérer étant équilatère ne nous a fourni que les logarithmes népériens ; mais en variant l'angle des asymptotes et prenant toujours $AB=1$, on peut obtenir tel système de logarithmes qu'on voudra. Soit *UMV*, *fig.* 7, une hyperbole quelconque ; en menant les ordonnées *PM*, parallèles à l'asymptote *AY*, on prouvera, par des raisonnemens analogues à ceux du n°. 280, que le parallélogramme *MPP'R* est la différentielle de *BCMP*. Or si on mène $P'Q$ perpendiculaire sur *PM*, on trouvera $P'Q=PP'.\sin P'PQ=PP'.\sin XAY$; désignant par ω l'angle des asymptotes, on aura $P'Q=dx\sin\omega$, et par conséquent $PMRP'=ydx\sin\omega$. Si on met pour y sa valeur $\frac{p}{x}$, il en résul- FIG. 7.

tera $\frac{dx}{x}p\sin\omega$ pour la différentielle de l'aire $BCMP$; on aura donc $BCMP=1x-1.AB$, en prenant $p\sin\omega$ pour module, et comme $p=\overline{AB}^2$, $p\sin\omega$ exprime la puissance $ABCD$.

Quand $AB=1$, le module se réduit à $\sin\omega$, celui des logarithmes ordinaires étant 0,4342945 (*Int.* n°. 24), on a $\sin\omega=0{,}4342945$, d'où il suit que les asymptotes de l'hyperbole dont les aires donnent les logarithmes ordinaires, font entr'elles un angle de $25°\,4'\,25'',5$.

494. Jean Bernoulli, en considérant que les espaces asymptotiques de la branche ucv, *fig.* 6, correspondante aux abscisses négatives, étoient positifs et égaux à ceux de la branche UCV, en conclut que les logarithmes des nombres négatifs étoient réels et les mêmes que ceux des nombres positifs. La théorie que nous avons exposée d'après Euler, n°. 182, n'étant sujette en elle-même à aucune difficulté et se trouvant contraire à cette conclusion, ne permet d'attribuer la différence des résultats que donnent l'Analyse et la Géométrie, qu'à la présence de l'infini qui se rencontre dans le passage de la branche UCV à la branche ucv, et d'où il résulte que les deux aires ne peuvent être contenues dans une même expression analytique, parce qu'elles ne sont pas unies par le lien de la *continuité* que suppose une telle expression. On objectera sans doute que les ordonnées passent d'une branche à l'autre, en allant de l'infini positif à l'infini négatif, sans pour cela cesser d'être représentées par $\frac{1}{x}$; mais les exemples que je vais rapporter et d'autres que j'aurai occasion de donner par la suite, feront voir évidemment que lorsqu'il y a un passage par l'infini, on auroit tort souvent de conclure de la continuité qui règne entre les ordonnées qu'il doit y en avoir aussi entre les aires.

FIG. 6.

FIG. 5. Soit $AB=1$, $BP=x$, *fig.* 5; considérons les hyperboles dans lesquelles $PM=\frac{1}{(AP)^n}$. Leur équation sera $y=\frac{1}{(1+x)^n}$ en prenant les abscisses du point B, et leurs aires à partir de l'ordonnée CB auront pour expression $\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{(1+x)^{n-1}}\right)$. En faisant $x=-(1+a)$, cette formule qui doit donner alors l'aire terminée par l'ordonnée élevée sur le point p, pour lequel $Ap=a$;

devient $\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{(-a)^{n-1}}\right)$ et a par conséquent une valeur finie tant que n n'est pas égal à 1; mais quand n est paire, les branches de l'hyperbole sont toutes deux au-dessus de l'axe des abscisses, les aires $YABCV$ et $YApmv$ sont toutes deux infinies et de même signe: il n'est donc pas possible que leur somme, qui est l'aire totale prise depuis l'ordonnée CB jusqu'à l'ordonnée pm, soit comprise dans l'expression générale des aires rapportées ci-dessus.

La fonction $\frac{1}{(1+x)^n}$ offre dans ce cas une exception à la règle générale établie n°. 474, et d'après laquelle la valeur de $\int X dx$, prise entre deux valeurs de x de même signe, doit conserver aussi le même signe, si le coefficient différentiel n'en change pas dans cet intervalle; car quoique $\frac{1}{(1+x)^n}$, lorsque n est paire, garde toujours le même signe quel que soit celui de x, son intégrale $\frac{1}{(n-1)(1+x)^{n-1}}$ passe du positif au négatif, quand x vient à surpasser l'unité négative. Cette exception tient à ce que la fonction $\frac{1}{(1+x)^n}$ devient infinie lorque $x=-1$, et que les formules du n°. 470 cessent d'être vraies quand les coefficiens différentiels sont infinis.

Si l'exposant n étoit égal à une fraction de la forme $\frac{2p}{q}$, p et q désignant des nombres impairs, la difficulté n'auroit plus lieu parce que les espaces $YABCV$ et $YApmv$ auroient une valeur finie ainsi que leur somme.

Si n étoit un nombre impair la difficulté disparoîtroit encore, parce que la deuxième branche $u'm'v'$ étant opposée à la première, l'espace $yApm'v'$ seroit d'un signe contraire à l'espace $YABCV$, et l'aire totale prise depuis BC jusqu'à pm' ne représenteroit plus que la différence de ces espaces, qui est égale à l'aire $bpm'c'$, comprise entre l'ordonnée bc' élevée sur le point b pour lequel $Ab=AB$, et l'ordonnée pm'

Quoique l'hyperbole ordinaire soit dans ce dernier cas, on n'est pas fondé cependant à y appliquer les considérations ci-dessus; car

la fonction $l(1+x)$, qui exprime son aire, n'est point de la même forme que la fonction $\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(1+x)^{n-1}}$, qui représente celle des autres hyperboles, et elle offre dans le cours de ses valeurs des circonstances très-différentes; tout ce qu'on doit conclure des remarques précédentes, c'est que la marche du Calcul ne lui permet pas toujours d'exprimer toutes les circonstances qui se rencontrent dans les constructions géométriques, et que c'est de là seulement que peuvent naître les difficultés qui résultent quelquefois de la comparaison d'une théorie analytique bien établie par elle-même, avec les considérations géométriques. Ces difficultés ne sauroient d'ailleurs influer sur la vérité des propositions déduites du calcul qui redevient conforme au cours des lignes lorsque ce qui tient à l'infini en est écarté.

Les logarithmes des nombres négatifs ne sont imaginaires que parce que ceux des nombres positifs sont réels; si l'on supposoit imaginaires ceux des nombres positifs, on en trouveroit alors de réels pour les nombres négatifs qui donneroient par conséquent les espaces asymptotiques de la branche négative *ucv*, *fig.* 6, de l'hyperbole ordinaire. Nous terminerons cette discussion en observant que rien n'est plus facile et plus dangereux en même tems que d'abuser de la Métaphysique en Mathématique et de perdre ainsi en vaines subtilités un tems et des moyens qu'on peut employer à perfectionner les méthodes et à augmenter l'édifice analytique.

FIG. 8. 495. En faisant $AC=a$, $AP=x$ et $PN=y$, *fig.* 8, l'équation du cercle ANE sera $y^2=2ax-x^2$, et la différentielle de son segment ANP aura pour expression $dx\sqrt{2ax-xx}$ dont l'intégrale est $-\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-xx}+\frac{1}{2}a^2.\text{arc}\left(\cos=\frac{a-x}{a}\right)$, lorsqu'on veut qu'elle s'évanouisse par la supposition de $x=0$ (n°. 410).

Il est facile de reconnoître, dans la partie $\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-xx}$, l'expression de la surface du triangle PCN et de voir par conséquent que $\frac{1}{2}a^2.\text{arc}\left(\cos=\frac{a-x}{a}\right)$ ou $\frac{1}{2}AC.\text{arc}AN$ est la valeur du secteur ACN, ce que nous confirmerons bientôt d'une autre manière.

En

En supposant $x=2a$, dans l'expression de l'aire APN, elle devient $\frac{1}{2}a^2.\text{arc}(\cos=-1)=\frac{1}{2}a^2\pi$, en désignant par π la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1, et elle appartient alors au demi-cercle: on aura donc le cercle entier $a^2\pi=\frac{1}{2}a.2a\pi$, ainsi qu'on le prouve dans les Elémens de Géométrie.

Les développemens de $\int dx\sqrt{2ax-xx}$, trouvés dans le n°. 410, donnent des valeurs approchées de l'aire APN.

L'ordonnée MP de l'ellipse étant $\frac{b}{a}\sqrt{2ax-xx}$, le segment elliptique AMP sera égal à $\frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax-xx}$, et comme il est nul en même tems que le segment circulaire APN, on aura $ANP:AMP::a:b$; car il est facile de conclure du n°. 470 que quand deux différentielles sont dans un rapport constant, ce rapport est aussi celui des intégrales, si ces intégrales sont nulles en même tems.

L'hyperbole rapportée à son axe transverse pour équation $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$, on a $AQR=\frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax+x^2}$. Cette intégrale peut s'obtenir par les logarithmes (n°. 377) ou se développer en série; mais au lieu de nous arrêter à calculer ces résultats, nous allons faire connoître le rapport qu'ont entr'eux les secteurs elliptiques et les secteurs hyperboliques.

496. Soit $ABab$, *fig.* 8, une ellipse dont le demi-grand axe $AC=a$, le demi-petit axe $BC=b$; faisons $CP=x$, nous aurons $PM=y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Il est évident que le secteur FIG. 8.

$ACM=CMP+AMP$, et que $d.ACM=d.CMP+d.AMP$;

$$CMP=\frac{1}{2}CP\times PM=\frac{1}{2}\frac{bx}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

$$d.CMP=\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(dx\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right),$$

$$d.AMP=-\frac{b}{a}dx\sqrt{a^2-x^2};$$

la dernière de ces différentielles est affectée du signe — parce que l'aire AMP décroît lorsque x augmente, et elles donnent

$$d.ACM=-\frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Si on fait $\frac{b}{a}=1$, le secteur elliptique ACM se changera dans le secteur ACN, appartenant au cercle $AEae$ décrit sur le grand axe Aa comme diamètre; on aura donc

$$d.ACN=-\frac{1}{2}\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}a\times-\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

mais $-\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ étant la différentielle de l'arc AN, dont le cosinus tabulaire $=\frac{x}{a}$, on aura $ACN=\frac{1}{2}a\times AN=\frac{1}{2}AC\times AN$, et puisque les secteurs ACN et ACM ont leur origine commune au point A, on aura (n°. précéd.) $ACM=\frac{b}{a}ACN=\frac{1}{2}BC\times AN$.

Considérons aussi l'hyperbole XAx décrite sur les mêmes axes que l'ellipse $A\,B\,a\,b$. Dans cette courbe dont l'équation est $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, le secteur $ACR=CQR-AQR$, ce qui donne $d.ACR=d.CQR-d.AQR$, et comme

$$CQR=\frac{1}{2}CQ\times QR=\frac{1}{2}\frac{bx}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

$$d.CQR=\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(dx\sqrt{x^2-a^2}+\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\right);$$

$$d.AQR=\frac{b}{a}dx\sqrt{x^2-a^2},$$

on aura $d.ACR=\frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{a^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; d'où on voit que la différentielle du secteur hyperbolique est, aux signes près, la même que celle du secteur elliptique.

Dans l'hypothèse de $b=a$ on a, au lieu du secteur ACR, le secteur ACS, pris dans l'hyperbole équilatère YAy, dont le grand

axe est Aa, et $d.ACS=\frac{1}{2}\frac{a^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{2}a\times\frac{adx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; d'où

$$ACS=\frac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{x^2-a^2}} \text{ et } ACR=\frac{1}{2}b\int\frac{adx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

La fonction $\int\frac{adx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{2}{a}\times ACS$, qui tient ici la place de l'arc de cercle AN, a des propriétés entiérement semblables à celles dont jouit cet arc. Soit pour plus de simplicité $a=1$; faisons $AN=\int\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=\zeta$ et $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\zeta'$; la formule du n°. 378 donne, abstraction faite de la constante,

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{-1}}l(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2})=\frac{1}{\sqrt{-1}}l\left(\frac{1}{x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}}\right);$$

multipliant les deux termes de la fraction variable par $x+\sqrt{-1}.\sqrt{1-x^2}$, il en résultera

$\frac{1}{\sqrt{-1}}l(x+\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2})-\frac{1}{\sqrt{-1}}l.\sqrt{-1}$; mais en prenant l'origine des secteurs sur la ligne CA, il faut que $\int\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$ s'évanouisse lorsque $x=1$, et c'est ce qui arrive à la partie variable de la dernière valeur trouvée ci-dessus: on peut donc négliger la partie constante, et comme la formule citée conduit immédiatement à $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=l.(x+\sqrt{-1}.\sqrt{x^2-1})$, on aura

$$\zeta=\frac{1}{\sqrt{-1}}l(x+\sqrt{-1}.\sqrt{1-x^2}),\quad \zeta'=l(x+\sqrt{x^2-1})(*).$$

Les secteurs ACn et ACs, qui sont négatifs, et pour lesquels on a $Pn=-\sqrt{1-x^2}$, $Qs=-\sqrt{x^2-1}$ donnent

$$-\zeta=\frac{1}{\sqrt{-1}}l(x-\sqrt{-1}.\sqrt{1-x^2}),\quad -\zeta'=l(x-\sqrt{x^2-1}).$$

(*) On pourroit parvenir au même résultat en multipliant les deux termes

On tire de ces équations et des précédentes

$$\left.\begin{aligned} e^{z\sqrt{-1}} &= x+\sqrt{-1}.\sqrt{1-x^2} \\ e^{-z\sqrt{-1}} &= x-\sqrt{-1}.\sqrt{1-x^2} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} e^{z'} &= x+\sqrt{x^2-1} \\ e^{-z'} &= x-\sqrt{x^2-1} \end{aligned}\right\},$$

d'où il résulte

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{e^{z\sqrt{-1}}+e^{-z\sqrt{-1}}}{2} \\ \sqrt{1-x^2} &= \frac{e^{z\sqrt{-1}}-e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{e^{z'}+e^{-z'}}{2} \\ \sqrt{x^2-1} &= \frac{e^{z'}-e^{-z'}}{2} \end{aligned}\right\}.$$

Toutes les relations entre x et z sont, comme on voit, parfaitement semblables aux relations entre x et z', avec cette restriction cependant que les premières supposent $x<1$ et les autres $x>1$: dans le premier cas, les lignes x et $\sqrt{1-x^2}$, appartiennent au cercle et sont respectivement cos z et sin z ; dans le second x est égal à CQ, et au lieu de $\sqrt{1-x^2}$, il vient $\sqrt{x^2-1}=QS$. Il suit de là que quand l'arc AN, ou le secteur ACN est imaginaire, c'est-à-dire, quand $z=u\sqrt{-1}$, le cosinus de AN se change dans l'abscisse $AQ=\frac{e^u+e^{-u}}{2}$ et par conséquent correspondante à $z'=u$, ou au secteur hyperbolique réel $ACS=\frac{u}{2}$. Telle est l'analogie que nous avons annoncée entre le cercle et l'hyperbole, dans la note de la page 320 du premier volume.

---

de $\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$ par $x\sqrt{-1}-\sqrt{1-x^2}$, et ceux de $\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ par $x+\sqrt{x^2-1}$; car on trouveroit

$$\frac{dx-\frac{xdx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-x^2}}}{x\sqrt{-1}-\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\left(dx-\frac{xdx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(x+\sqrt{-1}.\sqrt{1-x^2})}=\frac{1}{\sqrt{-1}}d.l(x+\sqrt{-1}.\sqrt{1-x^2})$$

$$\text{et } \frac{dx+\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=d.l(x+\sqrt{x^2-1});$$

Les lignes CQ et QS étant à l'égard du secteur hyperbolique ACS, ce que sont CP et PN, par rapport au secteur circulaire ACN, *Lambert* les a nommées *cosinus* et *sinus hyperboliques*.

On obtiendra facilement, par le moyen des équations ci-dessus, les relations qui existent entre ces lignes et celles qui sont relatives à un secteur multiple ou sous-multiple de ACS.

Soit, en effet, X la valeur de x, correspondante à $n\zeta'$, ou le cosinus d'un secteur hyperbolique égal à $n.ACS$; on aura

$$n\zeta' = 1(X+\sqrt{X^2-1}), \qquad -n\zeta' = 1(X-\sqrt{X^2-1});$$

mais

$$n\zeta' = n1(x+\sqrt{x^2-1}), \qquad -n\zeta' = n1(x-\sqrt{x^2-1});$$

donc

$$X+\sqrt{X^2-1} = (x+\sqrt{x^2-1})^n, \quad X-\sqrt{X^2-1} = (x-x\sqrt{x^2-1})^n$$

et par conséquent

$$X = \tfrac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n]$$

$$\sqrt{X^2-1} = \tfrac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n],$$

équations analogues à celles qu'on trouveroit pour les sinus et cosinus des secteurs circulaires multiples de ACN (*Int.* n°. 40).

En élevant AT perpendiculaire à CA, la ligne CS déterminera la tangente AT du secteur hyperbolique ACS et CT sera la sécante de ce secteur. Si on nomme $AT = t$, on trouvera

$t = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, tandis que dans le cercle on auroit $t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$: on voit d'ailleurs que la tangente AT ne peut devenir infinie dans l'hyperbole et qu'elle est à son *maximum* lorsque CS se confond avec l'asymptote.

Le secteur hyperbolique ACM, *fig.* 6, est égal à l'espace asymptotique $BCMP$; car on a $ACM = BCMP + ABC - AMP$, et

$$ABC = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{AP \times PM}{2} = AMP.$$

497. Ce qui précède suffit pour faire voir comment le Calcul intégral s'applique à la quadrature des courbes; cependant nous ne pouvons quitter ce sujet sans donner quelques-uns des résultats

intéressans auxquels les Géomètres sont parvenus par rapport aux courbes transcendantes.

Dans la Logarithmique, dont l'équation est $y = lx$, on a $\int y\,dx = \int dx\,lx = x\,lx - x + const.$ (n°. 425); la partie variable de cette expression devient nulle lorsque $x = 0$, car en faisant $x = \frac{1}{m}$, elle prend la forme $-\frac{lm}{m} - \frac{1}{m}$, sous laquelle elle est nulle quand m est infinie (n°. 140). Il est donc inutile, d'après cela, de lui ajouter une constante lorsqu'on veut avoir les segmens à

FIG. 9. partir du point A (*fig.* 9).

En y faisant $x = AE = 1$, elle donne l'expression de l'espace asymptotique $cAEx$ qui est fini et égal à -1.

Si on prend les ordonnées à la place des abscisses, on aura $\int x\,dy = \int dx = x$, pour l'espace $CDMX$, fait sur l'axe des ordonnées AC, et dont l'expression est algébrique; nous n'y avons point ajouté de constante, parce qu'elle s'évanouit en même tems que x: l'espace $CAEx$, qui répond à $x = AE = 1$, a, par cette formule, la même valeur que par la précédente, abstraction faite du signe.

Nous avons supposé le module égal à l'unité, s'il étoit égal à M, on auroit $\int dx\,lx = x\,lx - \int M\,dx = x\,lx - Mx$ et $\int x\,dy = Mx$.

498. L'équation de la cycloïde étant $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ry - y^2}}$ (n°. 271), il vient $\int y\,dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{2ry - y^2}}$; il seroit facile d'intégrer cette équation par les arcs de cercle, mais on peut arriver à un résultat plus simple en faisant $2r - y = z$, ce qui donne $dy = -dz$, $dx = -\frac{(2r - z)\,dz}{\sqrt{2rz - z^2}}$.

FIG. 10. En effet, z représentant l'ordonnée QM, *fig.* 10, prise sur la ligne CK, la différentielle de l'aire $ACMQ$ aura pour expression

$$z\,dx = -\frac{(2rz - z^2)\,dz}{\sqrt{2rz - z^2}} = -dz\sqrt{2rz - z^2}, \text{ donc}$$

$$ACMQ = \int dz\sqrt{2rz - z^2} + const.$$

Au point C, où $z=2r$, l'intégrale $\int dz\sqrt{2rz-z^2}$ est égale à la surface du demi-cercle générateur gmq, et elle s'évanouit au point K, où $z=0$; par conséquent l'espace ACK est égal au demi-cercle $gmqg$.

Pour un point quelconque Q, $\int dz\sqrt{2rz-z^2}$ donnera l'aire du segment gmn correspondant à $gn=QM$, et on aura

$$ACMQ=gmqg-gmn, \quad KMQ=ACK-ACMQ=gmn.$$

Le rectangle AK ayant sa hauteur $IK=gq$ et sa base $AI=gmq$, sera quadruple du demi-cercle $gmqg$, et retranchant de ce rectangle l'espace $ACK=gmqg$, il restera $AMKI=3.gmqg$. Il suit de là que l'espace $AKLA$, compris entre une branche de la cycloïde et son axe est triple du cercle générateur.

499. Il nous reste à parler des spirales; occupons-nous d'abord de celle que représente l'équation $u=At^n$ (n°. 275), dans laquelle t est égal à l'arc ON, *fig.* 11, et $u=AM$. Les coordonnées étant polaires, la différentielle de l'aire sera $\frac{u^2dt}{2}$ (n°. 281); mettant pour u sa valeur, et intégrant, il viendra $\frac{A^2t^{2n+1}}{4n+2}+const.$ mais on doit négliger la constante lorsqu'on compte les aires à partir de la ligne AO, sur laquelle $t=0$, et par conséquent la surface $ACM=\frac{A^2t^{2n+1}}{4n+2}$. FIG. 11.

Après une révolution du rayon vecteur, on aura l'espace $ACMB=\frac{A^2.(2\pi)^{2n+1}}{4n+2}$, π étant la demi-circonférence du cercle ON; le rayon décrivant reviendra dans la direction AM, et déterminera l'espace $ACMBC'M'=A^2\frac{(2\pi+ON)^{2n+1}}{4n+2}$, et ainsi de suite.

Dans la spirale d'*Archimède* (n°. 275), $A=\frac{1}{2\pi}$, $n=1$, et $ACM=\frac{t^3}{24\pi^2}$, résultat qui, lorsqu'on y fait $t=2\pi$ donne $ACMB=\frac{\pi}{3}$.

Dans la spirale hyperbolique $n=-1$ et $ACM=-\frac{A^2}{2t}$; l'aire de

cette courbe, qui fait autour du point A une infinité de révolutions, est infinie lorsque $t=0$; on se conduira donc à son égard comme pour les hyperboles et on aura pour l'aire comprise entre les deux rayons vecteurs correspondans à $t=a$ et à $t=b$, $A^2\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2a}\right)$.

Dans la spirale logarithmique enfin (n°. 278), $t=lu$, $dt=\frac{du}{u}$, et la différentielle $\frac{u^2dt}{2}$ devenant $\frac{udu}{2}$, donne $ACM=\frac{u^2}{4}$. L'aire est nulle quand $u=0$, mais alors t est infini; car la courbe proposée fait comme la précédente une infinité de circonvolutions autour du pole A.

De la rectification des Courbes.

500. La différentielle de l'arc d'une courbe rapportée à des coordonnées perpendiculaires entr'elles, est exprimée par $\sqrt{dx^2+dy^2}$ (n°. 279); en y substituant, au lieu de dy^2 sa valeur tirée de l'équation différentielle de la courbe proposée, elle prendra la forme Xdx, et son intégrale donnera la longueur de l'arc de cette courbe. Demander la longueur de l'arc d'une courbe, c'est demander sa *rectification*, parce que la solution de ce problême, lorsqu'elle s'obtient exactement, met en état d'assigner une ligne droite qui soit égale à l'arc dont il s'agit.

501. Prenons pour premier exemple les paraboles des divers degrés et représentons leur équation par $y=px^n$, n étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire; nous aurons

$$dy=npx^{n-1}dx, \quad \sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+n^2p^2x^{2n-2}};$$

l'arc parabolique sera donc exprimé par $\int(1+n^2p^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx$. Cette intégrale s'obtiendra sous une forme finie et algébrique, lorsque l'exposant $2n-2$ sera égal à l'unité ou s'y trouvera contenu un nombre exact de fois (n°. 385).

Supposons d'abord $2n-2=1$, il en résultera $n=\frac{3}{2}$ et

$\int(1+n^2p^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx=\frac{8}{27p^2}(1+\frac{9}{4}p^2x)^{\frac{3}{2}}+const.$ la courbe proposée sera donnée par l'équation $y=px^{\frac{3}{2}}$, ou $y^2=p^2x^3$, et par conséquent la même que la parabole du troisième ordre, qui est la développée de

de la parabole ordinaire (n°. 267). Si on compte les arcs à partir du point où $x=0$, on aura $\frac{8}{27p^2}\left[\left(1+\frac{9}{4}p^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

En faisant successivement $2n-2=\frac{1}{3}$, $=\frac{1}{5}$ etc. il viendra $n=\frac{5}{4}$, $=\frac{7}{6}$ etc. ce qui montre que les paraboles représentées par les équations $y^4=p^4x^5$, $y^6=p^6x^7$ etc. sont rectifiables ; à l'égard des autres on ne peut obtenir leurs arcs que par approximation.

Pour la parabole ordinaire, dans laquelle $n=2$, on a $\int(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, et par la formule III du tableau de la page 40, on trouve $\int(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+4p^2x^2}}$, et comme $\int\frac{dx}{\sqrt{1+4p^2x^2}}=\frac{1}{2p}l\left(2px+\sqrt{1+4p^2x^2}\right)+const.$ (n°. 378); il en résultera

$$\int(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2p}l\left(2px+\sqrt{1+4p^2x^2}\right)+const.$$

Telle est la valeur d'un arc quelconque de la parabole ordinaire ; on peut y supprimer la constante, en faisant commencer l'intégrale lorsque $x=0$.

L'arc des hyperboles données par l'équation $y=px^{-n}$, a pour expression $\int x^{-n-1}dx(x^{2n+2}+n^2p^2)^{\frac{1}{2}}$, et ne peut s'obtenir que par approximation.

502. La différentielle de l'arc de cercle est $\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, lorsqu'on part de l'équation $y^2=a^2-x^2$, et $\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax-xx}}$, quand on emploie l'équation $y^2=2ax-x^2$; sous l'une et l'autre de ces formes, son intégrale ne peut s'obtenir que par approximation, et nous en avons déjà donné plusieurs développemens (n°. 410).

503. Passons à l'ellipse et prenons pour équation de cette courbe $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; la différentielle de son arc sera $\frac{dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$:

faisons pour plus de simplicité le grand axe $a=1$, et l'excentricité $a^2-b^2=1-b^2=e^2$, nous aurons l'arc lui-même égal à $\int\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. Déjà dans les n^os^. 416 et 419, nous avons trouvé des séries qui donnent une valeur approchée de cette intégrale lorsque e est très-petit et lorsqu'il est presque égal à l'unité; la première conviendra aux ellipses peu applaties et la seconde à celles qui le sont beaucoup.

En supposant $x=1$, dans la série du n°. 416, et mettant $\frac{\pi}{2}$ à la place de l'arc A qui est alors de 90°, il vient

$$\frac{1}{2}\pi\left(1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}e^4-\frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}e^6-\text{etc.}\right),$$

développement très-convergent lorsque e est une petite fraction. Quand e sera peu différent de l'unité, il faudra avoir recours à la série du n°. 419.

504. L'équation de l'hyperbole étant $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, on a $\frac{dx\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{a\sqrt{x^2-a^2}}$ pour la différentielle de son arc; faisant $a=1$, $a^2+b^2=1+b^2=e^2$, cet arc se trouve exprimé par $\int\frac{dx\sqrt{e^2x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$, et peut se développer en série par le procédé du n°. 419, dans le cas où e est très-approchant de l'unité.

505. La différentielle de l'arc elliptique et celle de l'arc hyperbolique, se changent dans les suivantes

$$\frac{dx(1-e^2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}},\qquad \frac{dx(e^2x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)(e^2x^2-1)}},$$

en multipliant chacun de leurs termes par le radical du numérateur, et on peut, sous cette forme, leur appliquer les transformations indiquées dans les n^os^. 422 et 423. Le calcul s'effectuera en même

tems pour l'une et pour l'autre, en prenant l'expression plus générale $\frac{(A+Bx^n)dx}{\sqrt{(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)}}$, qui se rapporte à la différentielle de l'ellipse lorsque $p=1$, $q=e$, et à celle de l'hyperbole lorsque $p=e$, $q=1$.

Si, dans les formules du n°. 422, on met x à la place de u, $A+Bx^n$ à celle de M, comme on a $L=0$, la partie rationnelle $Ldu+L'du'+L''du''+L'''du'''$ deviendra

$$=-\frac{B}{2p^n}\left[dx'+\frac{q^n}{2p'^n}dx''+\frac{q^n.q'^n}{2p'^n.2p''^n}dx'''\right],$$

et en faisant pour abréger

$$C=A+\frac{B}{2p^n}\left[1+\frac{q^n}{2p'^n}+\frac{q^nq'^n}{2p'^n.2p''^n}\right],\quad D=B\frac{q^n.q'^n.q''^n}{2p^n.2p'^n.2p''^n},$$

la partie irrationnelle sera $\frac{(C+Dx''')dx'''}{\sqrt{(1-p'''^2x'''^2)(1-q'''^2x'''^2)}}$.

L'inégalité des coefficiens p''' et q''' sera plus considérable que celle des coefficiens p et q, et si on ne trouvoit pas encore la fraction $\frac{q'''}{p'''}$ assez petite pour faire usage de l'approximation du n°. 421, on pousseroit plus loin la transformation; mais dans le cas très-défavorable où $p=1$, $q=0,9$, on trouveroit

$p'=1,44$, $q'=0,56$, $p''=2,76$, $q''=0,12$, $p'''=5,51$, $q'''=0,01$,

d'où $\frac{q'''}{p'''}=\frac{1}{551}$, environ. Si on vouloit au contraire rapprocher les coefficiens de x^n l'un de l'autre, on se serviroit des formules du n°. 423.

Ces transformations vont nous conduire à des rapports remarquables entre les arcs de plusieurs ellipses, dont l'excentricité varie suivant une certaine loi, et nous donneront les moyens d'exprimer par ceux-ci l'arc hyperbolique.

506. Soit $\frac{(1-e^2x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}$ la différentielle de l'arc elliptique; en comparant $\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}$ avec $\sqrt{(1\pm p^2u^2)(1\pm q^2u^2)}$ (n°. 422), et passant immédiatement de x à u', comme on l'a fait

de u à u', nous aurons

$$p=1,\ q=e,\ u'=\frac{x\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}{1-e^2x^2}=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-e^2x^2}}$$

$$x^2=\frac{e^2u'^2+1-R'}{2},\quad \frac{dx}{R}=\frac{du'}{R'},$$

$$\frac{(1-e^2x^2)dx}{R}=\frac{du'}{2R'}(2-e^2u'^2-e^2+e^2R')$$

$$=\frac{e^2du'}{2}+\frac{(2-e^2-e^2u'^2)du'}{2\sqrt{(1-p'^2u'^2)(1-q'^2u'^2)}}.$$

Si on fait $p'u'=x'$ et $\frac{q'}{p'}=e'$, la partie irrationnelle de l'expression ci-dessus deviendra $\frac{[(2-e^2)p'^2-e^2x'^2]dx'}{2p'^3\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}}$; mais puisque

$p'=1+\sqrt{1-e^2}$, $q'=1-\sqrt{1-e^2}$, on a

$e'=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}=\frac{e^2}{p'^2}$, $e^4=e'^2p'^4$, et en élevant p' au quarré on trouve $2-e^2=p'^2-2\sqrt{1-e^2}$: la quantité $(2-e^2)p'^2-e^2x'^2$ est donc équivalente à $[-2p'^2\sqrt{1-e^2}+p'^4-e'^2p'^4x'^2]$, et on peut décomposer la différentielle précédente comme il suit

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{p'}\cdot\frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}}+\frac{p'}{2}\frac{(1-e'^2x'^2)dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}}.$$

La seconde partie renferme la différentielle de l'arc de l'ellipse dont le grand axe $=1$ et l'excentricité $=e'$, et la première partie dépend aussi du même arc.

En effet, en désignant $\int\frac{(1-e'^2x'^2)dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}}$ par E', E' sera une fonction de x' et de e'; on aura $dE'=\frac{dE'}{dx'}dx'+\frac{dE'}{de'}de'$; or de

$\frac{dE'}{dx'}=\frac{(1-e'^2x'^2)}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}}=\frac{\sqrt{1-e'^2x'^2}}{\sqrt{1-x'^2}}$, on tirera

$\frac{d^2E'}{dx'de'}=\frac{-e'x'^2}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}}$, et $\frac{dE'}{dx'}-e'\frac{d^2E'}{dx'de'}=\frac{1}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}}$;

mais $\frac{dE'}{dx'} - e'\frac{d^2E'}{dx'de'} = \frac{d\left(E' - e'\frac{dE'}{de'}\right)}{dx'}$,

donc $\int \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}} = E' - e'\frac{dE'}{de'}$; et par conséquent si on fait $\int \frac{(1-e^2x^2)\,dx^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}} = E$, il viendra

$$E = \frac{e^2x'}{2p'} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{p'}\left(E' - e'\frac{dE'}{de'}\right) + \frac{p'}{2}E'.$$

La rectification de l'ellipse proposée se trouve ainsi ramenée à celle d'une autre ellipse dont l'excentricité $= e'$. On simplifiera un peu l'équation que nous venons de trouver en observant que

$$e^2 = e'p'^2,\ \sqrt{1-e^2} = \frac{1-e'}{1+e'},\qquad p' = \frac{2}{1+e'},$$

car il en résultera

$$2(1+e')E = 2e'x' - (1-e'^2)\left(E' - e'\frac{dE'}{de'}\right) + 2E' \ldots\ldots (1).$$

Nous tirerons d'abord de cette équation

$$\frac{dE'}{de'} = \frac{2(1+e')E - (1+e'^2)E' - 2e'x'}{e'(1-e'^2)},$$

et comme $\int \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}} = E' - e'\frac{dE'}{de'}$, nous aurons encore

$$\int \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}} = \frac{2e'x' + 2E' - 2(1+e')E}{1-e'^2},$$

d'où il suit qu'on peut exprimer le coefficient différentiel $\frac{dE'}{de'}$, ainsi que l'intégrale $\int \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}}$ au moyen des arcs d'ellipse E et E'.

507. On peut, en considérant une troisième ellipse, chasser de l'équation (1) le coefficient différentiel $\frac{dE'}{de'}$. En effet, si on applique à l'intégrale $\int \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}}$, la transformation par laquelle

on passe de u' à u'' (n°. 422), c'est-à-dire, si on suppose

$$p'=1, q'=e'^2, u''=\frac{x'R'}{1-e'^2x'^2}, p''=1+\sqrt{1-e'^2}, q''=1-\sqrt{1-e'^2},$$

on aura

$$\int\frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}}=\int\frac{dx''}{\sqrt{(1-p''^2u''^2)(1-q''^2u''^2)}}.$$

Posant ensuite $p''x''=u''$, $\frac{q''}{p''}=e''$, il en résultera $p''=\frac{2}{1+e''}$

$$\int\frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-e'^2x'^2)}}=\frac{1+e''}{2}\int\frac{dx''}{\sqrt{(1-x''^2)(1-e''^2x''^2)}};$$

mais si on désigne par E'', l'arc de l'ellipse dont l'excentricité est e'', il est évident qu'il y aura entre cette ellipse et celle à laquelle appartient l'arc E', la même relation qu'entre cette dernière et l'ellipse dont l'arc E fait partie; nous écrirons donc l'équation

$$\int\frac{dx''}{\sqrt{(1-x''^2)(1-e''^2x''^2)}}=\frac{2e''x''+2E''-2(1+e'')E'}{1-e''^2},$$

semblable à celle que nous avons obtenue dans le n°. précédent entre x, E, E' et l'intégrale analogue en x', et en vertu de la liaison que l'intégrale en x'' a avec l'intégrale en x', nous trouverons, en substituant la valeur de cette dernière,

$$\frac{e'x'+E'-(1+e')E}{1-e'^2}=\frac{1+e''}{2}\cdot\frac{e''x''+E''-(1+e'')E'}{1-e''^2}\ldots.(2)$$

Voilà donc l'arc E déterminé par ceux de deux ellipses moins excentriques que la proposée, puisqu'on a

$$e'=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}, \quad e''=\frac{1-\sqrt{1-e'^2}}{1+\sqrt{1-e'^2}}.$$

508. En désignant par E''', E'''', etc. les arcs des ellipses dont les excentricités respectives e''', e'''', etc. soient calculées suivant la loi précédente, on auroit entre E', E'', E''', entre E'', E''', E'''' et ainsi de suite, des équations semblables à l'équation (2), au moyen desquelles la rectification de la première ellipse E seroit ramenée à celle de deux ellipses très-excentriques: les mêmes relations auroient également lieu entre les ellipses qui la précèdent dans l'ordre de leurs

excentricités. Si on fait... $'e = \frac{1-\sqrt{1-{}''e^2}}{+\sqrt{1-{}''e^2}}$, $e = \frac{1-\sqrt{1-{}'e^2}}{1+\sqrt{1-{}'e^2}}$ et qu'on représente par..... $''E$, $'E$ les arcs des ellipses dont les excentricités respectives sont ..... $''e$, $'e$, on aura entre les arcs..... $''E$, $'E$, E, E', E''..... combinés trois à trois consécutivement, une suite d'équations semblables à l'équation (2) et telles par conséquent que si on connoît deux quelconques de ces arcs, tous les autres seront déterminés; mais comme la suite ..... $''e$, $'e$, e, e', e'', etc. est décroissante, si on la pousse un peu loin, soit avant, soit après e, les termes extrêmes différeront beaucoup: l'une des ellipses correspondantes sera très-excentrique, tandis que l'autre le sera peu, et ces deux ellipses donneront la rectification de toutes celles de la suite.

Si on fait $x=1$, l'arc E, que nous représenterons alors par $E1$, devient égal au quart de l'ellipse proposée; u', x', u'', x'' s'évanouissent dans la même circonstance; mais on se tromperoit si l'on pensoit qu'il en arrive autant aux arcs E' et E'', car le premier s'élève alors à la moitié de la circonférence de l'ellipse dont il fait partie, et le second est égal à la circonférence de l'ellipse à laquelle il se rapporte. Pour s'en convaincre, il faut observer que x' s'évanouissant quand $x=0$ et quand $x=1$, doit avoir entre ces deux points un *maximum*, et on trouvera bientôt qu'il répond à $x'=1$, d'où il suit que tandis que la variable x va de 0 à 1, la variable x' passe successivement de 0 à 1 et de 1 à 0. Nommant donc $E'1$ le quart de la seconde ellipse, $2E'1$ sera la valeur de l'arc E' lorsque $x=1$. L'enchaînement des valeurs de x', de x'' et de u'' prouvera de même que lorsque x' va de 0 à 1, x'' va de 0 à 1 et revient de 1 à 0, et que quand x' revient de 1 à 0, x'' passe de 0 à -1 et revient ensuite de -1 à 0; d'où il suit évidemment que l'arc E'' renferme les 4 quarts de l'ellipse et est égal $4E''1$, suivant notre notation. D'après ces remarques, qu'il est aisé d'étendre aussi loin qu'on voudra, l'équation (2) se changera en

$$\frac{2E'1-(1+e')E1}{1-e'^2} = \frac{1+e''}{2} \cdot \frac{4E''1-2(1+e'')E'1}{1-e''^2} \quad \ldots\ldots (3).$$

Telle est la relation qui existe entre les quarts de trois ellipses consécutives.

Tout ce qu'on vient de lire sur les propriétés des arcs elliptiques est dû à Legendre, qui a obtenu le premier l'équation (2), mais par des considérations différentes de celles qui nous y ont conduits.

FIG. 8. 509. La différentielle de l'arc elliptique s'exprime d'une manière très-simple, au moyen de l'arc qui lui correspond dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. Soit $EN=\varphi$, *fig.* 8, on aura $CP=x=\sin\varphi$, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d\varphi$ et par conséquent

$dE=d\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}$; faisant aussi $x'=\sin\varphi'$, on aura pareillement

$$dE'=d\varphi'\sqrt{1-e'^2\sin\varphi'^2},\quad d\left(E'-e'\frac{dE'}{de'}\right)=\frac{d\varphi'}{\sqrt{1-e'^2\sin\varphi'^2}},$$

et puisque $p'u'=x'$, il viendra $\sin\varphi'=\frac{(1+\sqrt{1-e^2})\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$;

l'arc du cercle *AEaeA*, relatif à la troisième ellipse, étant désigné par φ'', on aura $x''=\sin\varphi''$ et $\sin\varphi''=\frac{(1+\sqrt{1-e'^2})\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sqrt{1-e'^2\sin\varphi'^2}}$.

Les équations (1) et (2) se changeront en

$$(1+e')E=2e'\sin\varphi'-(1-e'^2)\left(E'-e'\frac{dE'}{d\varphi}\right)+2E'\ldots\ldots(4)$$

$$\frac{e'\sin\varphi'+E'-(1+e')E'}{1-e'^2}=\frac{1+e''}{2}\cdot\frac{e''\sin\varphi''+E''-(1+e'')E'}{1-e''^2}\ldots(5).$$

510. Par une transformation analogue, l'expression de l'arc hyperbolique se ramène à deux arcs d'ellipse : c'est ainsi que nous allons présenter, d'après Legendre, ce résultat auquel Landen est parvenu le premier par des transformations moins simples.

Soit 1 l'excentricité de l'hyperbole proposée, e son axe transverse, $b=\sqrt{1-e^2}$ son axe conjugué ; on aura $y=\frac{b}{e}\sqrt{x^2-e^2}$. On ne sauroit dans ce cas prendre $x=\sin\varphi$, puisque cette variable croît indéfiniment, mais on fera $x^2=e^2(1+b^2\tan\varphi^2)$, et il viendra

viendra $y = b^2 \operatorname{tang}\varphi$; nommant H l'arc de cette hyperbole, on trouvera

$$dH = \frac{b^2 d\varphi \sqrt{1+\operatorname{tang}\varphi^2}}{\cos\varphi^2\sqrt{1+b^2\operatorname{tang}\varphi^2}} = \frac{b^2 d\varphi}{\cos\varphi^2\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} = \frac{b^2 . d.\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}};$$

Si on différentie la quantité $\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}$, on obtiendra

$$\frac{d\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}{\cos\varphi^2} - \frac{e^2\sin\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} = \frac{d\varphi(1-e^2\sin\varphi^2)}{\cos\varphi^2\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} - \frac{e^2 d\varphi\sin\varphi^2}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}};$$

mettant $1-\cos\varphi^2$, au lieu de $\sin\varphi^2$ dans le numérateur du premier terme, il en résultera

$$d.\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2} = \frac{(1-e^2)\,d\varphi}{\cos\varphi^2\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} + \frac{e^2(1-\sin\varphi^2)d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$$

$$= \frac{b^2 d\varphi}{\cos\varphi^2\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} + \frac{e^2 d\varphi\cos\varphi^2}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}};$$

comparant cette dernière expression avec celle de dH, on aura

$$H = \text{tang.}\,\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2} - e^2\int\frac{d\varphi\cos\varphi^2}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}.$$

Mais si on représente $\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}$ par R, on en déduira

$\sin\varphi^2 = \frac{1-R^2}{e^2}$, $\cos\varphi^2 = \frac{R^2-(1-e^2)}{e^2}$, et par conséquent

$$H = R\operatorname{tang}\varphi - \int R\,d\varphi + (1-e^2)\int\frac{d\varphi}{R};$$

or, $\int R d\varphi = \int d\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2} = E$, $\int\frac{d\varphi}{R} = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} = E - e\frac{dE}{de}$;

on aura donc

$$H = \operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2} - E + (1-e^2)\left(E - e\frac{dE}{de}\right).$$

Enfin si on change e, φ, E, H, en e', φ', E', H', et qu'on mette pour $E' - e'\frac{dE'}{de'}$ sa valeur tirée de l'équation (4), il viendra

$$H' = \operatorname{tang}\varphi'\sqrt{1-e'^2\sin\varphi'} + 2e'\sin\varphi' + E' - (1+e')E.$$

Cette expression appartient aux arcs hyperboliques comptés du sommet de la courbe, car elle s'évanouit à ce point où l'on a $x = e'$, d'où il

résulte tang $\varphi'=0$, et par conséquent $\varphi'=0$. En effet, lorsque $\varphi'=0$, $E'=0$, et en remontant aux formules des n°s. 509, 506, qui donnent, pour l'ellipse, $\sin\varphi'=x'=p\mu'$, $\sin\varphi=x$, $x^2=\frac{e^2\mu'^2+1-R'}{2}$, on trouve $\sin\varphi^2=\frac{1+e'\sin\varphi'^2-\cos\varphi'\sqrt{1-e'^2\sin\varphi'^2}}{2}$, ce qui fait voir que φ et E sont nuls en même tems que φ' et E'.

511. Quand $\varphi'=90°$, hypothèse qui répond, dans l'hyperbole, à une abscisse infinie, la première partie tang $\varphi'\sqrt{1-e'^2\sin\varphi'^2}$, de la valeur de H', devient infinie, mais la seconde reste finie, puisque E' se change en $E'1$ (n°. 508) et que l'arc E prend une valeur relative à $\sin\varphi^2=\frac{1+e'}{2}$ et moindre que $E1$. L'expression

tang $\varphi'\sqrt{1-e'^2\sin\varphi'^2}$ est celle de la longueur de la tangente MS,
FIG. 12. *fig.* 12, comprise entre le point de contact et la rencontre de la perpendiculaire CS abaissée du centre; pour s'en assurer on comparera les triangles semblables CST et PMT, qui donneront $ST=\frac{CT\times PT}{MT}$, d'où $MS=MT+ST=\frac{\overline{MT}^2+CT\times PT}{MT}$. Or les valeurs générales de PT, CT et MT étant $\frac{y\,dx}{dy}$, $\frac{x\,dy-y\,dx}{dy}$, $\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$ (n°. 246), il viendra $MS=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$; substituant pour $x\,dx$, $y\,dy$, leurs valeurs $\frac{e^2b^2d\varphi\,\text{tang}\,\varphi}{\cos\varphi^2}$, $\frac{b^2d\varphi\,\text{tang}\,\varphi}{\cos\varphi^2}$, observant que $\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{b^2d\varphi}{\cos\varphi^2\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}$ (n°. préc.), on aura

$MS=(e^2+b^2)\,\text{tang}\,\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}$, ou $=\text{tang}\,\varphi'\sqrt{1-e^2\sin\varphi'^2}$, en accentuant les lettres e et φ et à cause que $e^2+b^2=1$.

Il suit de-là que

$AM-SM=H'-\text{tang}\,\varphi'\sqrt{1-e'^2\sin\varphi'^2}=2e'\sin\varphi'+E'-(1+e')E$.

Dans la supposition de $\varphi'=90°$ ou de x infinie, la ligne MS se confond avec l'asymptote XY, et par conséquent la différence entre

la branche infinie AV et son asymptote CY, ou plutôt la limite des différences entre les arcs hyperboliques et leurs tangentes prises comme ci-dessus, est égale à $2e' + E'1 - (1+e')\overline{E}$, $\overline{E}$ désignant la valeur de l'arc E, correspondante à $\sin\varphi' = \frac{1+e'}{2}$. Il est à propos d'observer que l'équation (5) donne immédiatement l'arc $\overline{E}$ au moyen des quarts d'ellipse $E'1$ et $E''1$; car ayant $\sin\varphi' = 1$, il en résulte $\sin\varphi'' = 0$ et $\varphi'' = 180°$, d'après la remarque du n°. 508.

512. En combinant les transformations des n°s. 399, 401, 402, avec celle du n°. 422, la différentielle $\frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$ se ramenera aux suivantes

$$\int\frac{du}{R},\quad \int\frac{u^2\,du}{R},\quad \int\frac{du}{(u^2+a)R},$$

R étant $\sqrt{(1\pm p^2u^2)(1\pm q^2u^2)}$; l'expression $\frac{du}{R}$ se réduira à la forme $\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$, en faisant $pu = \sin\varphi$ et $\frac{q^2}{p^2} = e^2$, lorsque p^2 et q^2 auront le signe $-$, et $pu = \operatorname{tang}\varphi$, $\frac{p^2-q^2}{p^2} = e^2$, lorsqu'ils auront le signe $+$. Par là il est facile de voir que les trois transcendantes, rapportées ci-dessus, sont comprises dans la formule générale

$$\int\frac{A+B\sin\varphi^2}{C+D\cos\varphi^2}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}.$$

Legendre leur a donné le nom de *transcendantes elliptiques*, à cause que les deux premières et la dernière, dans certains cas, peuvent s'exprimer par des arcs d'ellipse, et il est entré dans beaucoup de détails intéressans sur les propriétés de ces transcendantes et sur les moyens d'en avoir des valeurs approchées, dans un mémoire auquel nous renvoyons nos lecteurs.

Nous terminerons ce sujet en observant que, puisque $\sin\varphi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$ (*Int.* n°. 43), le radical $\sqrt{1-\sin e^2\varphi^2}$ se transforme en $\sqrt{1-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi} = \sqrt{1-\frac{1}{2}e^2}\cdot\sqrt{1-\frac{e^2}{2-e^2}\cos 2\varphi}$, et

que par conséquent si on fait $2\varphi = \zeta$, $\frac{e^2}{2-e^2} = n$, on aura $(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{1}{2}}(1+n\cos\zeta)^{\frac{1}{2}}$, et n sera toujours moindre que l'unité; on pourra donc aussi employer à l'intégration des transcendantes elliptiques les séries données n°. 459 et suiv. pour le développement de $(1+n\cos\zeta)^m$, ou d'autres qui s'obtiendront par des procédés analogues.

513. Il nous reste à parler des courbes transcendantes. L'équation de la cycloïde étant $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry-y^2}}$ (n°. 271), on en tire $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{dy\sqrt{2r}}{\sqrt{2r-y}}$, différentielle dont l'intégrale est

$= -2\sqrt{2r(2r-y)} + const.$; mais il est évident que $\sqrt{2r(2r-y)}$ est
FIG. 10. l'expression de la corde mg, *fig.* 10, du cercle générateur, et comme la partie variable de l'intégrale s'évanouit au point K où $y=r$, il s'ensuit qu'elle exprime l'arc MK, on a donc $MK = 2mg$, $AK = 2qg$, et par conséquent $AM = AK - MK = 2(gq-mg)$: ces résultats s'accordent avec celui du n°. 273.

514. Pour donner un exemple de l'usage de la formule $\sqrt{u^2dt^2+du^2}$, qui exprime la différentielle de l'arc d'une courbe rapportée aux coordonnées polaires (n°. 279), nous prendrons les spirales dont l'équation est $u = At^n$, et nous aurons à intégrer la différentielle $dt\sqrt{A^2t^{2n}+n^2A^2t^{2n-2}} = At^{n-1}dt(t^2+n^2)^{\frac{1}{2}}$. Lorsque $n=1$ on a seulement $Adt(t^2+n^2)^{\frac{1}{2}}$ différentielle de la même forme que celle de l'arc de la parabole ordinaire (n°. 501); d'où il suit que c'est à la rectification de cette courbe que se rapporte celle de la spirale d'Archimede.

Dans la spirale logarithmique on a $t = lu$, ce qui donne $\sqrt{u^2dt+du^2} = du\sqrt{2}$; l'arc de cette courbe a donc pour expression $u\sqrt{2}+const.$ ou seulement $u\sqrt{2}$, en partant de l'origine des rayons vecteurs; et on voit que quoiqu'il se trouve entre cette origine et un point quelconque de la courbe une infinité de révolutions, elles ne composent cependant qu'une longueur finie, égale à la diagonale du quarré fait sur le rayon vecteur.

De la cubature des solides terminés par des Surfaces courbes et de la quadrature de leurs aires ; de la rectification des Courbes à double courbure.

FIG. 13.

515. Les surfaces courbes que les Géomètres ont considérées les premières sont celles de révolution, parce que les différentielles de leurs aires et des solides qu'elles comprennent ont une expression plus simple que leurs analogues dans les surfaces courbes en général.

Soit u le solide engendré par un segment AMP, *fig.* 13, d'une courbe quelconque AZ, tournant autour de l'axe AD pris dans son plan ; il est évident que ce solide, terminé par le plan circulaire décrit par l'ordonnée MP, est une fonction de l'abscisse $AP=x$. Si on prend $PP'=h$, que l'on mène une seconde ordonnée $M'P'$ et les droites MR et SM', parallèles à PP', on verra que le solide u s'accroît de celui que décrit le trapèze curviligne $PMM'P'$, en tournant autour de PP', et que ce dernier solide est compris entre les cylindres engendrés par les rectangles MP' et PM'. Ces cylindres ont pour base les cercles décrits par les ordonnées $PM=y$, et $P'M'=y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+$ etc., leur hauteur commune est $PP'=h$, et en nommant π la demi-circonférence du cercle dont le rayon $=1$, leurs solidités seront πy^2 et $\pi(y+\frac{dy}{dx}h+\text{etc.})^2$; on trouvera par le raisonnement du n°. 280 que $\frac{du}{dx}=\pi y^2$, d'où $u=\pi\int y^2dx$. Lors donc qu'on aura l'équation de la courbe AMZ, on substituera pour y sa valeur en x, et l'intégration fera connoître la solidité d'un segment quelconque du solide engendré par cette courbe.

516. Pour trouver la différentielle de l'aire du même solide, il faut chercher le premier terme du développement de l'aire décrite par l'arc MM' correspondant à l'abscisse $PP'=h$, puisque cette aire représente le changement que subit, lorsque x devient $x+h$, l'aire totale produite par la révolution de l'arc AM. Si on mène la corde MM' et la tangente MN, elles décriront l'une et l'autre des cônes tronqués dont les valeurs respectives seront $\pi.MM'(MP+M'P')$ et $\pi.MN(MP+M'N)$; et il est évident que la surface décrite par l'arc MM' sera plus grande que le premier cône et moindre que le second augmenté de la surface décrite par $M'N$, laquelle est la diffé-

rence des deux cercles concentriques dont les rayons sont $P'M'$ et $P'N$. Cela posé, les développemens de $P'M'$, $M'N$ et de la corde MM' sont $y+y'\frac{h}{1}+\text{etc.}$, $y''\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$, $(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}h+$ etc. (n°. 279),

et on a $MN=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}h$, $PN=PM+NR=y+y'h$; en substituant ces valeurs et en se bornant à la première puissance de h, on trouvera que les développemens des deux aires, entre lesquelles est comprise celle qu'on cherche, commencent tous deux par $2\pi y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}h$, d'où il suit que le coefficient différentiel de l'aire décrite par l'arc AM est égal à $2\pi y\sqrt{1+y'^2}=2\pi y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$

et que par conséquent $2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$ est la différentielle de cette aire.

On parvient sur le champ à cette expression, ainsi qu'à celle du n°. précédent, en regardant la courbe AMZ comme un polygone; car alors l'élément de la solidité est le cylindre décrit par le rectangle MP', et celui de l'aire est le tronc de cône décrit par le côté MM'.

517. Nous insisterons peu sur les applications, qui n'ont par elles-mêmes aucune difficulté. Si on prend l'équation à l'ellipse, $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$, on trouvera que le solide qu'elle engendre en tournant autour de son grand axe, ou *l'ellipsoïde allongé*, est égal à $\frac{4\pi ab^2}{3}$, puisqu'un segment de ce solide a pour expression

$$\int\frac{\pi b^2}{a^2}(2ax-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2-\frac{x^3}{3}\right)+const.\ (\text{n°. 515}).$$

Quand $a=b$, le solide proposé devient une sphère et l'expression de la solidité est $\frac{4\pi a^3}{3}$, ainsi qu'on le trouve par la Géométrie élémentaire.

Si l'ellipse étoit rapportée à son centre, ou qu'on employât l'équation $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, on auroit le même résultat, en ob-

servant que pour embrasser le solide entier, il faudroit prendre l'intégrale depuis $x=a$, jusqu'à $x=-a$. La solidité du segment seroit alors $\int \frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx = \frac{\pi b^2}{3a^2}(3a^2x-x^3)+const.$ et on auroit $\int \frac{2b\pi dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a^2}$ pour l'expression de son aire. Cette intégrale se rapporte facilement à la surface du segment circulaire dont l'abscisse est x et le rayon $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$; lorsqu'on suppose $a=b$, elle se réduit à $\int 2a\pi dx = 2a\pi x + const.$ et donne, en la prenant depuis $x=a$, jusqu'à $x=-a$, $4\pi a^2$ pour la surface totale de la sphère.

518. Ce sujet nous offre encore des exemples du peu de liaison qui existe entre les différentielles et leurs intégrales par rapport à l'étendue des branches des courbes ou des nappes de surfaces, et un supplément aux remarques du n°. 494. L'expression du solide engendré par la révolution d'une parabole ordinaire autour de son axe, est $\pi p x^2$; elle demeure par conséquent réelle quand x passe du positif au négatif, malgré que ce passage ne puisse avoir lieu dans la courbe génératrice et qu'il n'existe aucune partie du solide du côté des abscisses négatives. L'hyperbole représentée par l'équation $xy^2=p$, et qui n'a point de branche correspondante aux abscisses négatives, engendre, en tournant autour de l'asymptote sur laquelle se comptent les x, un solide dont la valeur est $\int \frac{p\,dx}{x} = l\,x + const.$ mais, d'après ce qui précède, on n'en sauroit tirer aucune conclusion pour ou contre l'existence simultanée des logarithmes des nombres positifs et des nombres négatifs.

519. Nous ne nous arrêterons pas à traiter en particulier chacune des *familles* de surfaces courbes que nous avons fait connoître dans le quatrième chapitre du premier volume; mais nous considérerons les surfaces courbes en général, en les rapportant à trois plans perpendiculaires entr'eux, au moyen des trois coordonnées $AP=x$, $PM=y$, $M'M=z$, *fig.* 14.

FIG. 14. Le segment $APGMM'Q$, compris entre les trois plans $APM'Q$, PMM', $QM'M$, respectivement parallèles à chacun des plans coordonnés, et la surface courbe proposée, est nécessairement une fonction des deux variables indépendantes x et y; il peut s'étendre successivement dans le sens de chacune d'elles, ou varier par rapport à toutes deux simultanément. En effet, si on suppose que y demeurant constant, x se change en $x+h=AP+Pp$, ce segment s'accroîtra de la tranche $PGMM'm'mpg$, et de la tranche $QHMM'n'nqh$, si l'on fait varier y seul de $Qq=k$. Enfin, si x et y deviennent simultanément $x+h=AP+Pp$, $y+k=AQ+Rq$, le même segment aura alors pour limites les plans pNN', qNN', et différera de son état primitif par les deux tranches dont on vient de parler et par le prisme $M'm'N'n'nMmN$, qui n'est autre que la variation qu'éprouve la première tranche lorsque y se change en $y+k$, ou la seconde lorsque x devient $x+h$. Cela posé, soit u la fonction de x et de y, qui exprime la solidité du segment $APGMM'Q$, $\frac{du}{dx}h$ désignera le premier terme du développement de la valeur de la tranche $PGMM'm'mpg$, ordonné suivant les puissances de h, et $\frac{du}{dy}k$ celui du développement de la valeur de la tranche $QHMM'n'nqh$, ordonné suivant les puissances de k; faisant varier la première par rapport à y, ou la seconde par rapport à x, on aura toujours $\frac{d^2u}{dxdy}hk$, pour le premier terme du développement du prisme $M'm'N'n'nMmN$. Or il est facile de voir que ce premier terme est égal à ζhk; car cette quantité est aussi le premier terme de la valeur de tous les parallélipipèdes formés sur la base commune $M'm'N'n'=hk$, et sur chacune des ordonnées $M'M$, $m'm$, $n'n$, $N'N$, respectivement égales à ζ, $\zeta+\frac{d\zeta}{dx}h+$etc., $\zeta+\frac{d\zeta}{dy}k+$etc., $\zeta+\frac{d\zeta}{dx}h+\frac{d\zeta}{dy}k+$etc. (n°. 320), parallélipipèdes dont les uns sont plus grands et les autres plus petits que le prisme cherché : il suit donc de là que $\frac{d^2u}{dxdy}hk=\zeta hk$, ou que $\frac{d^2u}{dxdy}=\zeta$, et que pour obtenir le segment $APGMM'Q$, il faut par

par l'intégration, remonter du coefficient différentiel $\frac{d^2u}{dxdy}$ à la fonction u.

520. Quoique le coefficient différentiel $\frac{d^2u}{dxdy}$ soit relatif à deux variables, on peut néanmoins parvenir à la fonction dont il dérive par les méthodes données pour l'intégration des fonctions d'une seule, parce que chacune de ces variables est regardée comme constante à son tour. En effet, à cause de $\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$, on aura $\frac{d.\frac{du}{dx}}{dy}dy=\zeta dy$, et prenant l'intégrale de chaque membre, en ne considérant comme variable que y seul, il viendra $\frac{du}{dx}=\int Z dy$, d'où on tirera $\frac{du}{dx}dx=dx\int\zeta dy$; intégrant de nouveau, mais par rapport à x seulement, on trouvera $u=\int dx\int\zeta dy$.

En ne considérant cette récherche que du côté purement analytique; il est évident que la constante qu'il faudra ajouter pour compléter la première intégrale peut renfermer x d'une manière quelconque, que celle qu'on mettra à la suite de la seconde intégrale doit être considérée comme une fonction quelconque de y, et cela parce que toute fonction de x seul doit disparoître comme une constante lorsqu'on ne différentie que par rapport à y, et qu'il en est de même de toute fonction de y, lorsqu'on ne différentie que par rapport à x.

L'ordre des intégrations est indifférent (n°. 26). En nous occupant d'abord de la variable x, nous aurions eu $\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d.\frac{du}{dy}}{dx}$, et de là nous aurions tiré successivement $\frac{du}{dy}=\int\zeta dx$, $u=\int dy\int\zeta dx$. Ce résultat et le précédent s'écrivent comme il suit: $u=\int\int\zeta dy\,dx$, et $u=\int\int\zeta dx\,dy$, en faisant passer les deux différentielles sous le dernier signe $\int$, ce qui est

permis, en observant que chaque signe n'est relatif qu'à l'une des variables en particulier.

Pour éclaircir et confirmer ce qui précède, prenons $\zeta = \frac{1}{x^2+y^2}$; et nous aurons

$$u = \iint \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \int dx \int \frac{dy}{x^2+y^2} = \int dy \int \frac{dx}{x^2+y^2};$$

La première succession d'intégrales donne

$$\int \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x}.\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) + X',$$

résultat dans lequel X' représente une fonction arbitraire de x; ajoutée pour compléter l'intégrale; en intégrant de nouveau par rapport à x et faisant $\int X'dx = X$, on trouve

$$\int dx \int \frac{dy}{x^2+y^2} = \int dx \left[\frac{1}{x}.\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) + X'\right] = \int \frac{dx}{x}.\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) + X.$$

L'intégrale $\int \frac{dx}{x} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right)$ s'obtient en série, en mettant au lieu de $\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right)$ son développement $\frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3} + \frac{y^5}{5x^5} - \text{etc.}$ (n°. 408), et comme il faut, après cette dernière intégration, ajouter une fonction arbitraire de y, en la désignant par Y, on aura enfin $\int \int \frac{dxdy}{x^2+y^2} = X + Y - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.}$

En opérant dans un ordre inverse, d'après la seconde succession d'intégrales, on trouvera

$$\int \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + Y',$$

$$\int dy \int \frac{dx}{x^2+y^2} = \int dy \left[\frac{1}{y}\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + Y'\right] = \int \frac{dy}{y} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + Y,$$

mais si l'on observe que $\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{arc.}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right)$, on aura, après la dernière intégration et l'addition d'une fonction arbitraire de x,

$$\int \int \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2} 1y - \int \frac{dy}{y} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) + Y + X,$$

et comme on peut comprendre le terme $\frac{\pi}{2} 1y$ dans la fonction arbi-

traire Y, ce résultat, qui se changera par là en

$$\int\int \frac{dxdy}{x^2+y^2} = X + Y - \int \frac{dy}{y} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right);$$

sera le même que le précédent, ainsi qu'on peut s'en convaincre en mettant pour $\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right)$ son développement.

521. Lorsqu'on regarde $\int\int \zeta dxdy$ comme exprimant le volume d'un solide, il faut avoir égard aux limites entre lesquelles doit être prise chaque intégrale, et qui tiennent à la nature des surfaces par lesquelles le solide proposé est terminé latéralement.

Le cas le plus simple est celui où le solide est fermé par quatre plans parallèles deux à deux aux plans coordonnés ACD, ABD. En supposant que les premiers répondent aux abscisses $x=a$, $x=a'$, et la seconde aux abscisses $y=b$, $y=b'$, on prendra l'intégrale $\int \zeta dx$, depuis $x=a$, jusqu'à $x=a'$, en y regardant d'ailleurs y comme constant; et nommant P le résultat obtenu, il restera à prendre l'intégrale $\int P dy$, depuis $y=b$, jusqu'à $y=b'$.

Lorsque le solide proposé est terminé latéralement par des surfaces courbes, les valeurs extrêmes de l'une des variables sont liées avec celles de l'autre, ainsi qu'on va le voir dans l'exemple suivant, où il s'agit de trouver la solidité d'une sphère dont le centre est en A et dont le rayon est égal à r. On a $x^2+y^2+\zeta^2=r^2$, et par conséquent $\int\int \zeta dxdy = \int\int dxdy \sqrt{r^2-x^2-y^2}$; on trouve d'abord, en supposant y constant..... $\int \zeta dx = \int dx \sqrt{r^2-x^2-y^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2-y^2} + \frac{1}{2}(r^2-y^2)\text{arc}\left(\sin = \frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}}\right)$:

Ici la valeur extrême de x est représentée par QF, ordonnée du cercle $BFEC$, suivant lequel la sphère rencontre le plan ABC; et si le solide cherché doit être terminé du côté opposé par le plan CAD, il est évident que l'intégrale ci-dessus devra être prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=QF$. Mais QF est liée avec AQ, car en faisant $\zeta=0$, on trouve $x^2+y^2=r^2$ pour l'équation du cercle $BFEC$, d'où il suit que $QF=\sqrt{r^2-AQ^2}$, et par conséquent pour une va-

leur quelconque de y, les valeurs extrêmes de x sont $x=0$ et $x=\sqrt{r^2-y^2}$.

Le résultat que nous avons obtenu plus haut se réduit à $\frac{\pi}{4}(r^2-y^2)$, puisque arc $(\sin=1)=\frac{\pi}{2}$, et l'intégrale $\int dy\int z\,dx$ devient

$$\frac{\pi}{4}\int dy\,(r^2-y^2)=\frac{\pi}{4}\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right);$$

cette dernière doit être prise depuis la plus grande valeur de y, qui dans le cas actuel est $AC=r$, jusqu'à la plus petite que nous supposerons nulle en fermant de ce côté le solide par le plan BAD. La solidité du segment $ABCD$, qui est la huitième partie de la sphère, sera donc $\frac{\pi r^3}{6}$, et par conséquent celle de la sphère entière sera $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Il est à propos de remarquer que nous aurions pu obtenir immédiatement la solidité de tout l'hémisphère supérieur au plan ABC, en prenant la première intégrale depuis $x=+\sqrt{r^2-y^2}$, jusqu'à $x=-\sqrt{r^2-y^2}$; car dans ce cas les valeurs extrêmes de x se terminent de part et d'autre à la circonférence du cercle $BFBC$, dont AC est le diamètre, et on a la valeur complète de $\int z\,dx=\frac{\pi}{2}(r^2-y^2)$. Prenant ensuite $\int dy\int z\,dx=\frac{\pi}{2}\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right)$, depuis $y=r$, jusqu'à $y=-r$, c'est-à-dire, depuis l'extrémité C du diamètre du cercle BEC, jusqu'à l'autre extrémité qui tombe derrière le plan BAD, on trouve $\frac{2\pi r^3}{3}$, et en doublant on a, comme ci-dessus, $\frac{4\pi r^3}{3}$ pour la sphère entière.

522. En considérant les différentielles comme les accroissemens infiniment petits des variables ou des fonctions dont elles dérivent, il est évident que la valeur complète de $dy\int z\,dx$ est l'expression de la tranche $FHQqhf$, comprise entre deux plans parallèles au plan ABD des x et z; mais $\int z\,dx$ étant l'aire de la section FHQ, il s'ensuit que la tranche infiniment mince $FHQqhf$ peut être regardée comme

égale à $FHQ \times Qq$, c'est-à-dire, à l'aire de la courbe qui lui sert de base, multipliée par l'épaisseur Qq. On voit enfin que $\int dy \int \zeta dx$ exprime la somme de toutes les tranches semblables comprises dans le solide cherché.

523. En général, s'il faut déterminer la portion du solide proposé, terminée latéralement par le cylindre élevé perpendiculairement au plan ABC, *fig.* 15, sur la courbe donnée $E'N'G'$, on prendra l'intégrale $\int \zeta dx$, depuis $x = AP$, jusqu'à $x = Ap$, afin que l'expression $dy \int \zeta dx$ devienne celle de la tranche $MM'N'Nnn'm'm$. Les lignes AP et Ap, respectivement égales à QM' et QN' seront données en fonction de $AQ = y$, par l'équation de la courbe $E'N'G'$ dont elles sont les abscisses; en les représentant par $F(y)$ et $f(y)$, on devra prendre $\int \zeta dx$, depuis $x = F(y)$, jusqu'à $x = f(y)$, ce qui, comme l'on voit, introduit de nouvelles fonctions de y que ζ ne renfermoit pas, et pourra augmenter ou diminuer la difficulté de la seconde intégration. Pour obtenir ensuite dans celle-ci la valeur totale de l'espace cherché, ou la somme des tranches dont on a déjà l'expression générale, il faudra prendre $\int dy \int \zeta dx$, depuis FE', jusqu'à HG', ordonnées qui répondent aux limites de la courbe $E'N'G'$ dans le sens des y. FIG. 15.

Il pourroit arriver que le contour $E'N'G'$, au lieu d'être une courbe continue, fût l'assemblage de plusieurs portions de courbes différentes; l'application des principes précédens à ce cas est trop facile pour qu'il soit besoin de nous y arrêter.

524. On parvient à l'expression générale de la différentielle de l'aire d'une surface courbe, en imaginant cette surface partagée en zones, telles que $EGge$, *fig.* 14, par des plans parallèles à l'un des plans coordonnés, et en concevant que chacune de ces zones soit découpée en portions quadrangulaires $MmNn$, par des plans parallèles à un autre plan coordonné. A l'inspection de la figure on voit que $GMmg$ est le changement qui arrive à l'aire $DGMH$ de la surface proposée lorsque x devient $x+h$, que $HMnh$ est celui qu'elle éprouve quand y passe à $y+k$, et enfin que $MmNn$ est ce dont la première zone varie par la substitution de $y+k$ à y, et ce dont la seconde zone varie par celle de $x+h$ à x. Si on suppose les plans coupans FIG. 14.

infiniment proches les uns des autres, on pourra prendre, au lieu du
FIG. 16. quadrilatère courbe *MmNn*, *fig.* 16, son plan tangent *MXZY*, qui est égal à la racine de la somme des quarrés de ses projections sur chacun des plans coordonnés (*). La projection $M'm'N'n'$ sur celui des x et y, sera exprimée par $dx\,dy$; en menant YY'' et ZZ'' parallèles à $M'n'$ et $m'N'$, on formera la projection $MXZ''Y''$ sur le plan de x et z, égale à $MY''\times M'm'$, et comme $MY''=n'Y-M'M=\frac{dz}{dy}dy$, on aura $MXZ''Y''=\frac{dz}{dy}dx\,dy$; on trouvera d'une manière semblable que la projection sur le plan des y et z est $\frac{dz}{dx}dx\,dy$: on aura donc

$$MX''Z''Y''=dx\,dy\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}}=dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

en faisant $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$; et si on nomme s l'aire de la surface proposée, il viendra $\frac{d^2s}{dx\,dy}=\sqrt{1+p^2+q^2}$, ce qui montre que l'aire est donnée, comme la solidité, par un coefficient différentiel du second ordre, et qu'on obtient l'une et l'autre par le même mode d'intégration, en sorte que $dy\int dx\sqrt{1+p^2+q^2}$ représente la surface de la zone *FHhf*, *fig.* 14, et qu'on a

$$s=\int dy\int dx\sqrt{1+p^2+q^2}=\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Nous n'avons employé la considération des infiniment petits ci-dessus, que pour abréger; car nous aurions pu trouver les développemens de deux surfaces, l'une plus grande et l'autre plus petite que *MmNn*, *fig.* 15. Pour cela, il auroit fallu calculer d'une part la somme des quadrilatères *MXZY*, *mXZN*, *nYZN*, et des triangles *MXm*, *MYn*, et de l'autre celle des triangles *MmN* et *MnN*. En effectuant le calcul qui n'est pas difficile, on obtiendroit le même premier terme dans chaque somme développée; mais cet exemple, ainsi que beaucoup d'autres, montre bien évidemment

(*) Cette proposition est démontrée n°. 62, des *Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes*, cités à la page 435 du premier volume.

combien les principes de Léibnitz sont utiles et commodes dans les applications du Calcul différentiel à la Géométrie, et de quel secours on se priveroit en y renonçant, sur-tout puisqu'il est si facile de les ramener quand on veut à une énonciation rigoureuse (n°. 285 et Préf. page xix).

525. Des formules générales $\int\int z\,dx\,dy$ et $\int\int dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$, on déduit facilement les différentielles de la solidité et de l'aire des solides de révolution que nous avons déjà trouvées *à priori*. En prenant pour axe de révolution la ligne AB, *fig.* 14, sur laquelle se comptent les x, les sections BEC et BGD, faites par les plans coordonnés ABC et ABD seront égales à la courbe génératrice, et les sections telles que EMG, parallèles aux plans ACD, seront toutes des cercles ayant pour rayon l'ordonnée PE de la courbe génératrice, en sorte que $PE=X$, X désignant une fonction de $AP=x$, déterminée par l'équation de cette courbe. Cela posé, on aura FIG. 14.

$M'M=z=\sqrt{\overline{PE}^2-\overline{QM}^2}=\sqrt{X^2-y^2}$, et la formule $\int\int z\,dx\,dy$ deviendra $\int\int dx\,dy\sqrt{X^2-y^2}=\int dx\int dy\sqrt{X^2-y^2}$; or il est facile de voir que la valeur complète de l'intégrale $\int dy\sqrt{X^2-y^2}$, qui doit être prise depuis $y=+X$, jusqu'à $y=-X$, est πX^2, et que par conséquent la seconde intégration relative à x doit s'effectuer sur $\pi X^2 dx$, différentielle qui revient à celle du n°. 515, en changeant X en y.

Pour obtenir l'aire on observera, qu'en vertu de l'expression $z=\sqrt{X^2-y^2}$, on a

$$\frac{dz}{dx}=p=\frac{dX}{dx}\,\frac{X}{\sqrt{X^2-y^2}},\quad \frac{dz}{dy}=q=\frac{-y}{\sqrt{X^2-y^2}};\quad \text{d'où}$$

$$\int\int dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}=\iint\frac{X\,dx\,dy\sqrt{1+\frac{dX^2}{dx^2}}}{\sqrt{X^2-y^2}}=\int\sqrt{dx^2+dX^2}\int\frac{X\,dy}{\sqrt{X^2-y^2}};$$

et parce que $\int\frac{X\,dy}{\sqrt{X^2-y^2}}$, prise en regardant x comme constant, et depuis $y=+X$, jusqu'à $y=-X$, équivaut à $2\pi X$, il ne restera à intégrer par rapport à X que la différentielle $2\pi X\sqrt{dx^2+dX^2}$, sem-

blable à celle qu'on a obtenue dans le n°. 516, en changeant de même que ci-dessus X en y.

526. Appliquons encore les formules générales aux surfaces coniques. FIG. 17. Soit A, *fig.* 17, le sommet du cône, NnR la courbe qui lui sert de base, située dans un plan parallèle à celui des x et z, ABD; nommons X et Z les coordonnées CN' et $N'N$ de cette courbe, et faisons $AC=b$; nous aurons pour un point quelconque M de la surface proposée $AC:AQ::CN':QM'::N'N:M'M$, ou $b:y::X:x::Z:z$, ce qui donne

$$x=\frac{Xy}{b},\quad z=\frac{Zy}{b},\quad dx=\frac{y\,dX}{b},\quad \iint z\,dx\,dy=\iint\frac{y^2\,dy}{b^2}\,Z\,dX,$$

et dans le cas représenté par la figure

$$\iint z\,dx\,dy=\iint\frac{y^2\,dy}{b^2}(Z_{''}-Z_{'})\,dx,\quad \text{en faisant } N'N=Z_{'},$$

et $N'n=Z_{''}$. Or les valeurs de Z étant indépendantes de y, et $\int(Z_{''}-Z_{'})\,dX$ exprimant l'aire NnR, on aura

$\iint z\,dx\,dy=\frac{y^3}{3b^2}\times NnR$ pour la solidité d'une portion quelconque du cône, terminée au plan élevé par le point Q parallèlement à BAD. Si on fait $y=b$, on trouvera la solidité totale du cône prise depuis le sommet jusqu'à la base NnR, égale à $\frac{b}{3}\times NnR$, comme on le concluroit par la Géométrie élémentaire.

Passons maintenant à la recherche de l'aire. D'après les valeurs précédentes de x et de z, nous aurons

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{b}{y}\frac{dZ}{dX},\quad p=\frac{dZ}{dX},\quad q=\frac{Z}{b}+\frac{y}{b}\frac{dZ}{dX}\frac{dX}{dy};$$

mais pour obtenir $\frac{dX}{dy}$, il faut différentier l'équation $x=\frac{Xy}{b}$, en regardant x comme constant, et on trouvera $\frac{dX}{dy}=-\frac{X}{y}$: on aura donc

$$\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{1}{b^2}\iint y\,dy\,dX\sqrt{b^2(1+P^2)+(Z-PX)^2},$$

en faisant pour abréger $\frac{dZ}{dx}=P$. La dernière expression s'integre

tout

tout de suite par rapport à y et donne pour résultat $\frac{y^2}{2b^2}\int dX\sqrt{b^2(1+P^2)+(Z-PX)^2}$. Si on veut avoir la surface du cône, depuis son sommet jusqu'à sa base, on fera $y=b$, et l'expression ci-dessus deviendra $\frac{1}{2}\int dX\sqrt{b^2(1+P^2)+(Z-PX)^2}$.

Le cas où la base NnR est un cercle, a beaucoup occupé les Géomètres et nous allons le considérer en particulier. Le solide proposé est alors celui qu'on désigne dans les élémens sous le nom de *cône oblique*; on peut, pour plus de simplicité, supposer que le centre de sa base soit placé sur la ligne CO'. En faisant $CO'=a$, et nommant r le rayon du cercle NnR, nous aurons $(X-a)^2+Z^2=r^2$, d'où il résultera $P=-\frac{X-a}{\sqrt{r^2-(X-a)^2}}$, $1+P^2=\frac{r^2}{r^2-(X-a)^2}$, et l'expression trouvée ci-dessus deviendra

$$\frac{1}{2}\int dX\left[\frac{b^2r^2+(b^2+a(X-a))^2}{r^2-(X-a)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Il est facile de voir que cette intégrale se rapporte à la première formule du n°. 404, et peut par conséquent s'obtenir par approximation en faisant usage de la méthode donnée n^os. 422 et 423.

Si on fait $a-X=r\cos\varphi$, l'angle φ sera celui que forme avec la ligne CO', le rayon mené du centre au point N; l'intégrale ci-dessus deviendra $\frac{1}{2}\int r\,d\varphi\,[b^2+(r-a\cos\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}$ et se réduira à $\frac{1}{2}\int r\,d\varphi\,(b^2+r^2)=\frac{1}{2}r\varphi\sqrt{b^2+r^2}$, lorsque $a=0$; dans ce dernier cas, les points O, O' et C se confondent, le cône est droit, $r\varphi$ est la valeur de l'arc de cercle qui lui sert de base et $\sqrt{b^2+r^2}$ représente son côté; l'expression précédente s'accorde donc avec ce qu'on trouve dans les Elémens de Géométrie: l'intégrale $\frac{1}{2}\int r\,d\varphi\,[b^2+(r-a\cos\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}$ dépend en général des transcendantes elliptiques (n°. 512).

527. Dans les exemples des deux n^os. précédens un simple changement de coordonnées a suffi pour rendre possible indépendamment de la nature des courbes génératrices des solides proposés, une des deux intégrations indiquées dans les formules $\int\int z\,dx\,dy$ et

$\int\int dx\,dy\sqrt{1+p+q^2}$; cette simplification est due à ce que les nouveaux élémens de l'aire et de la solidité des solides proposés ont été pris d'une manière analogue à la génération de ces solides.

Dans le cas du cône oblique la différentielle $\frac{1}{2}rd\varphi[b^2+(r-a\cos\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}$ exprime l'aire du petit triangle formé par un arc infiniment petit de la base et par les deux lignes menées de ses extrémités au sommet; c'est ce qu'il est facile de vérifier, *à priori*, en observant que $rd\varphi$ est la valeur du petit arc dont on vient de parler, et que $[b^2+(r-a\cos\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}$ est celle de la perpendiculaire menée du sommet sur la tangente du même arc, et représente par conséquent la hauteur du triangle dont il est la base.

Pour atteindre au plus grand degré de simplicité, on ne doit pas toujours se borner à effectuer une simple transformation de coordonnées, mais il faut souvent opérer un changement de variables; car par les transformations usitées le solide proposé et sa surface ne peuvent être partagés qu'en parallélipipèdes et en quadrilatères, terminés par des plans parallèles à des plans donnés, ou en cônes et en secteurs, ayant leurs sommets à un même point, tandis que pour rendre la méthode aussi générale qu'il est possible, il faut partager le solide et sa surface en élémens terminés par des surfaces et par des lignes quelconques.

On peut concevoir d'abord que la base sur le plan des x et y, du solide qu'on veut obtenir, soit partagée par des lignes courbes dérivées d'une même équation par la variation d'une constante (n°. 290). Soit α cette constante; l'équation dont on vient de parler conduira à $dy=P\,dx+Q\,d\alpha$. Nous prendrons, au lieu des formules $\int\int z\,dx\,dy$ et $\int\int dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$, la suivante $\int\int V\,dx\,dy$, qui les comprend toutes deux, lorsqu'on regarde V comme une fonction quelconque de x et de y; la supposition de x constante donnant $dy=Q\,d\alpha$, nous aurons $\int\int QV\,dx\,d\alpha$. On substituera dans QV, à la place de y sa valeur en α et x; et dans beaucoup de cas l'habitude de l'analyse fera voir quelle relation on doit supposer entre x, y et α, pour que la transformée $\int\int QV\,dx\,d\alpha$ devienne la plus simple possible.

Si on avoit, par exemple, la différentielle

$$\frac{M}{N}dxdy\sqrt{\frac{ax^2+bxy+cy^2+ex+gy+h}{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'x+g'y+h'}},$$

dans laquelle M et N fussent des fonctions rationnelles de x et de y, une transformation très-simple suffiroit pour rendre possible l'une des deux intégrations, quoiqu'aucune ne puisse s'effectuer dans l'état actuel de la formule, puisqu'elles se rapportent à celles du n°. 404. En faisant $\sqrt{\frac{ax^2+bxy+cy^2+fx+gy+h}{a'x^2+b'xy+c'y^2+f'x+g'y+h'}}=s$; on tirera de cette équation une valeur de y, qui sera de la forme $A+Bx+\sqrt{C+Dx+Ex^2}$; les quantités A, B, C, D, E, ne contiendront x que d'une manière rationnelle, et il ne restera par conséquent dans la différentielle proposée que le radical $\sqrt{C+Dx+Ex^2}$: l'intégration de cette différentielle par rapport à x pourra donc s'obtenir, au moyen des logarithmes et des arcs de cercle, par le procédé du n°. 377.

528. Nous n'avons changé qu'une des variables, mais on peut aussi faire tomber la transformation sur toutes les deux en même tems, en les remplaçant par les nouvelles variables t et u, en sorte que x et y soient des fonctions données de ces deux dernières; on aura donc

$$dx=Pdt+Qdu, \qquad dy=P'dt+Q'du.$$

On se tromperoit beaucoup si, pour obtenir le produit $dxdy$, on multiplioit ces deux valeurs entr'elles. Le dx employé dans la formule $\int\int V dxdy$ supposant y constant, on ne peut arriver à son expression qu'en faisant $dy=0$: on a donc simultanément

$$dx=Pdt+Qdu, \qquad 0=P'dt+Q'du;$$

tirant de la seconde équation la valeur de du, la première donnera $dx=\frac{PQ'-P'Q}{Q'}dt$, et la différentielle $Vdxdy$ sera changée par-là en $\frac{(PQ'-P'Q)Vdtdy}{Q'}$. Pour faire disparoître dy, il faut observer qu'il est pris dans l'hypothèse de x constant, et que quand on fait $dx=0$, la valeur trouvée ci-dessus pour ce dernier donne $dt=0$, ce qui réduit l'expression complète de dy à $Q'du$

et donne $(PQ'-P'Q)Vdtdu$. Telle est la différentielle qu'il faudra intégrer successivement par rapport à t et par rapport à u.

L'ordre suivant lequel nous avons éliminé dx et dy étant arbitraire, on pourroit croire que le résultat eût été différent, si l'on avoit procédé dans un ordre inverse; mais il sera facile de se convaincre que le coefficient de $dtdu$ ne fera tout au plus que changer de signe, ce qui n'influera point sur la valeur absolue de l'intégrale; au reste, il est plus naturel de prendre toujours ce coefficient avec le signe $+$.

529. L'application de l'Analyse à la Mécanique conduit souvent à des intégrales de la forme $\int\int\int V dx\,dy\,dz$, qu'on appelle *intégrales triples*, par analogie avec celles de la forme $\int\int V dx\,dy$, désignées sous le nom d'*intégrales doubles*; dans les premières, la fonction V peut renfermer les trois variables x, y, z, considérées comme indépendantes les unes des autres, en sorte que chaque signe d'intégration ne tombe que sur une d'elles en particulier. Il est aisé de voir que ces intégrales proviennent de la détermination d'une fonction u, dépendante des trois variables x, y, z, et dont on ne connoît que le coefficient différentiel $\frac{d^3u}{dxdydz}$ donné par l'équation $\frac{d^3u}{dxdydz}=V$; car on tire de là, en opérant comme dans le n°. 520, 1°. en regardant x et y comme constans

$$\frac{d^3u}{dxdydz}dz=d.\frac{d^2u}{dxdy}=Vdz,\qquad \frac{d^2u}{dxdy}=\int Vdz+T'',$$

T'' étant une fonction arbitraire de x et de y; 2°. en regardant x et z comme constans

$$\frac{d^2u}{dxdy}dy=d.\frac{du}{dx}=dx\int Vdz+T''dy,\qquad \frac{du}{dx}=\int dy\int Vdz+T'+S',$$

T' désignant la fonction arbitraire de x et de y, résultante de $\int T''dy$ et S' une fonction arbitraire de x et de z; 3°. enfin, en regardant y et z comme constans

$$\frac{du}{dx}dx=d.u=dx\int dy\int Vdz+T'dx+S'dx\,u=\int dx\int dy\int Vdz+T+S+R,$$

T et S représentant des fonctions arbitraires de x et y, de x et de z, résultantes de $\int T'dx$ et de $\int S'dx$, et R étant une fonction arbitraire

de y et de z: l'intégrale complète renferme donc trois fonctions arbitraires, savoir: une de x et de y, une de x et de z et une de y et de z. En réunissant les différentielles sous le dernier signe d'intégration, $\int dz \int dy \int V dx$ devient $\iiint V dx dy dz$, et a sous cette dernière forme la même signification que sous la précédente.

Cet exemple suffit pour montrer comment on reviendra du coefficient différentiel d'un ordre quelconque d'une fonction de plusieurs variables à cette fonction elle-même. Les fonctions arbitraires introduites ici n'ont rapport, comme dans le n°. 520, qu'au cas où les intégrales sont prises entre des limites pour lesquelles les variables x, y et z sont indépendantes les unes des autres; mais il arrive le plus souvent que l'intégrale relative à z doit être prise depuis $z=F(x,y)$, jusqu'à $z=f(x,y)$, F et f étant des fonctions données, l'intégrale relative à y depuis $y=F_1(x)$, jusqu'à $y=f_1(x)$, et enfin l'intégrale relative à x, depuis $x=a$, jusqu'à $x=a'$.

530. On fait subir aux intégrales $\iiint V dx dy dz$ une transformation analogue à celle du n°. 528; et comme il y a ici trois variables, on suppose en général que x, y et z soient des fonctions de s, t et u, en sorte que

$$dx = P\,ds + Q\,dt + R\,du$$
$$dy = P'ds + Q'dt + R'du$$
$$dz = P''ds + Q''dt + R''du.$$

Pour obtenir la valeur du produit $dxdydz$, on calcule d'abord celle de dx, dans l'hypothèse de y et z constans, c'est-à-dire, en faisant $dy=0$, $dz=0$; on détermine alors dx en ds, au moyen des trois équations

$$dx = P\,ds + Q\,dt + R\,du$$
$$0 = P'ds + Q'dt + R'du$$
$$0 = P''ds + Q''dt + R''du,$$

dont les deux dernières servent à éliminer du et dt, et on a

$$dt = \frac{P''R' - P'R''}{Q'R'' - Q''R'}\,ds, \qquad du = \frac{P'Q'' - P''Q'}{Q'R'' - Q''R'}\,ds$$

$$dx = \frac{P(Q'R'' - Q''R') + Q(P''R' - P'R'') + R(P'Q'' - P''Q')}{Q'R'' - Q''R'}\,ds.$$

Supposant ensuite x et z constans, d'où il résulte $dx=0$, $ds=0$, d'après la valeur ci-dessus, et $dz=0$, on trouvera dy par le moyen

des deux dernières équations données qui se réduisent à

$$dy = Q'dt + R'du, \qquad 0 = Q''dt + R''du;$$

mettant dans la valeur de dy, celle de du, qui est $-\frac{Q''dt}{R''}$, il viendra $dy = \frac{(Q'R''-Q''R')}{R''}dt$. Enfin, faisant $dx = 0$, $dy = 0$, ce qui entraîne $ds = 0$, $dt = 0$, on aura par la dernière des équations données, $dz = R''du$; multipliant entr'elles les valeurs de dx, de dy et de dz, on changera $\int V dx dy dz$ en

$$\int V ds dt du [P(Q'R''-Q''R') + Q(P''R-P'R'') + R(P'Q''-S''Q')].$$

Ce résultat a été donné pour la première fois par Lagrange en 1773, mais Legendre, en 1788, en a fait des applications que Lagrange n'avoit point indiquées, et il en a tiré la démonstration analytique d'un théorême sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques, qui n'avoit encore été prouvé que synthétiquement ou par le secours des séries. Nous devons observer cependant que la transformation relative à l'intégrale $\int V dx dy$ (n°. 528) avoit été employée par Euler dès 1769.

531. Les courbes à double courbure n'ayant pas tous leurs points dans le même plan, n'enferment pas un espace qui leur soit propre; elles servent seulement de limites à des portions de surfaces sur lesquelles elles sont tracées, et par conséquent leur quadrature ne diffère point de celle de ces surfaces. Quant à leur rectification, elle se réduit à l'intégration d'une différentielle du premier ordre, à une seule variable. En effet, si on les considère comme des Polygones, on verra que leur côté est la distance de deux points dont les coordonnées respectives sont x, y et z, $x+dx$, $y+dy$ et $z+dz$, et a par conséquent pour expression $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ (n°. 302); on débarrassera cette différentielle de dx et de dy, en y substituant leurs valeurs tirées des deux équations de la courbe proposée (n°. 346).

Des fonctions qui rendent algébriques des intégrales données, ou recherche des Courbes quarrables, rectifiables, etc.

532. La division des fonctions en algébriques et en transcendantes a donné lieu dans le Calcul intégral à des recherches analogues à celles que présente l'Analyse algébrique indéterminée. Dans celle-ci il s'agit de résoudre en nombres entiers seulement ou en nombres rationnels, des problêmes qui sont en général susceptibles d'une infinité de solutions. L'autre a pour objet de trouver des fonctions algé-

briques dont les intégrales soient aussi des fonctions algébriques. Ce fut l'application du Calcul à la Géométrie qui fit naître ces questions, en conduisant les premiers analystes à chercher des courbes qui fussent ou quarrables ou rectifiables, soit indéfiniment, soit avec certaines conditions. Viviani, Jean Bernoulli et Herman proposèrent et résolurent les premiers problêmes de ce genre; Euler s'en occupa après eux avec le plus grand succès. Les méthodes qu'il a données sont pour la plupart, comme celles de l'Analyse indéterminées, des transformations ingénieuses qui, ramenant l'intégrale proposée à une grande simplicité, mettent en évidence le caractère des fonctions qui doivent satisfaire à la question proposée. Nous ne pouvons donner ici qu'une idée de ces méthodes que le lecteur trouvera exposées en détail dans plusieurs mémoires d'Euler.

Lorsqu'il s'agit d'obtenir les courbes quarrables, rien n'est plus facile, parce que la formule des quadratures étant $\int y dx$, il suffit de faire $\int y dx = X$, et de prendre pour X une fonction algébrique quelconque de x: passant aux différentielles, on trouve $ydx = dX$, d'où $y = \frac{dX}{dx}$, et il est évident que $\frac{dX}{dx}$ sera toujours une fonction algébrique.

533. On s'est proposé aussi de trouver des courbes dans lesquelles l'expression indéfinie de l'aire dépendît d'une fonction transcendante particulière et qui eussent néanmoins un nombre donné d'espaces quarrables algébriquement. Cette question sera résolue si X a la forme $P + \int Q dx$, P étant une fonction algébrique, $\int Q dx$ une fonction renfermant la transcendante désignée dans l'énoncé, et susceptible de s'évanouir lorsqu'on donne à x des valeurs déterminées a, b, c, etc. car dans ces cas X se réduira à la fonction algébrique P. Soit u et v, deux fonctions semblables, l'une en x et l'autre en z; supposons que $\int Q dx = \int u dx - \int v dz$, et que ces dernières intégrales renferment toutes deux la transcendante proposée; il ne restera plus qu'à déterminer z en x, de manière que quand $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. on ait $z = x$, et par conséquent $u = v$. Or cette condition sera remplie si z ne diffère de x que par une fonction qui s'anéantisse dans les cas rapportés ci-dessus, et cette fonction est évidemment $(x-a)(x-b)(x-c)$, etc. on fera donc $z - x = (x-a)(x-b)(x-c)$ etc.

ou plus généralement $\zeta - x = T(x-a)(x-b)(x-c)$ etc. T étant une fonction de x, qui ne devienne point infinie dans les circonstances où la quantité qu'elle multiplie s'évanouit, et qui n'ait point de facteurs réels du premier degré; on aura $\zeta = x + T(x-a)(x-b)(x-c)$, etc. ensuite à cause de $\int Q\,dx = \int u\,dx - \int v\,d\zeta$ et de $y = \frac{dX}{dx}$, il viendra $Q = u - v\frac{d\zeta}{dx}$, et $y = \frac{dP}{dx} + u - v\frac{d\zeta}{dx}$. Telle est l'expression de l'ordonnée de la courbe qui satisfait à la question proposée.

Pour appliquer cette solution, supposons que la quadrature indéfinie de la courbe demandée doive dépendre de celle du cercle, mais que la partie de l'aire correspondante à $x=a$ soit exprimée algébriquement; nous ferons alors

$$u = \sqrt{2rx - x^2}, \quad v = \sqrt{2r\zeta - \zeta^2} \text{ et } \zeta - x = T(x-a),$$

ce qui donnera

$$y = \frac{dP}{dx} + \sqrt{2rx - x^2} - \sqrt{[2r - x - T(x-a)][x + T(x-a)]},$$

$$\int y\,dx = P + \int dx\sqrt{2rx - x^2} - \int d\zeta\sqrt{2r\zeta - \zeta^2};$$

mais il faut observer que les deux intégrales $\int dx\sqrt{2rx - x^2}$ et $\int d\zeta\sqrt{2r\zeta - \zeta^2}$ doivent s'évanouir en même tems, autrement la constante arbitraire renfermeroit l'expression d'un segment de cercle déterminé: or $\int d\zeta\sqrt{2r\zeta - \zeta^2}$ devenant nul quand $\zeta = 0$, il faut qu'on ait en même tems $x = 0$, ce qui arrivera si $T = nx$. Si l'on suppose $n = \frac{1}{a}$, on obtiendra une solution très-simple, car il en résultera $\zeta = \frac{x^2}{a}$, $v = \frac{x}{a}\sqrt{2ar - x^2}$,

$$y = \frac{dP}{dx} + \sqrt{2rx - x^2} - \frac{x}{a}\sqrt{2ar - x^2},$$

et quelle que soit la fonction algébrique P, le segment de la courbe dont l'ordonnée est y, pris depuis $x=0$, jusqu'à $x=a$ sera algébrique.

534. En faisant $y = x^{\frac{p-n}{n-q}}\zeta$, Euler parvient à rendre algébriques les intégrales $\int y^n x^{m-1}dx$, $\int y^q x^{p-1}dx$, qu'il transforme par ce moyen en

en $\int x^{\frac{np-mq}{n-q}-1}\zeta^q dx$ et $\int x^{\frac{np-mq}{n-q}-1}\zeta^q dx$; l'intégration effectuée par rapport à x donne alors

$$\int x^{\frac{np-mq}{n-q}-1}\zeta^n dx = \frac{n-q}{np-mq}x^{\frac{np-mq}{n-q}}\zeta^n - \frac{n(n-q)}{np-mq}\int x^{\frac{np-mq}{n-q}}\zeta^{n-1}d\zeta;$$

$$\int x^{\frac{np-mq}{n-q}-1}\zeta^q dx = \frac{n-q}{np-mq}x^{\frac{np-mq}{n-q}}\zeta^q - \frac{q(n-q)}{np-mq}\int x^{\frac{np-mq}{n-q}}\zeta^{q-1}d\zeta;$$

la question se trouve ramenée à rendre algébriques les formules $\int u\zeta^{n-1}d\zeta$ et $\int u\zeta^{q-1}d\zeta$, dans lesquelles $u = x^{\frac{np-mq}{n-q}}$. Pour traiter ces dernières on supposera $\int u\zeta^{n-1}d\zeta = N$, $\int u\zeta^{q-1}d\zeta = P$, et il viendra $u = \frac{dN}{\zeta^{n-1}d\zeta} = \frac{dP}{\zeta^{q-1}d\zeta}$, N et P étant des fonctions d'une nouvelle variable ε; on tirera de là $\zeta^{n-q} = \frac{dN}{dP}$, et $\zeta = \left(\frac{dN}{dP}\right)^{\frac{1}{n-q}}$: on aura donc alors ζ en ε, u en ε, et on en déduira des expressions algébriques de x et de y au moyen de la variable ε.

Si on fait $m=1$, $p=1$, $n=1$ et $q=2$, les intégrales proposées deviendront $\int y dx$ et $\int y^2 dx$, et les courbes qu'on trouvera par le procédé ci-dessus seront quarrables et engendreront par leur révolution autour de l'axe des x, des solides dont l'évaluation ne dépendra que de la circonférence du cercle.

Plusieurs cas échappent à la solution précédente, entr'autres celui dans lequel $np=mq$; mais de pareils détails n'entrent point dans notre plan et nous passons au problême qui a pour objet la recherche de toutes les courbes rectifiables.

535. Nous ne nous occuperons que des premières formules que donne Euler pour trouver des courbes rectifiables; voici comment il y parvient. Soit $dy = p dx$, $\int \sqrt{dx^2+dy^2} = s$, ou $y = \int p dx$, $s = \int dx\sqrt{1+p^2}$; ces deux intégrales peuvent se changer en $y = px - \int x dp$, $s = x\sqrt{1+p^2} - \int \frac{xp dp}{\sqrt{1+p^2}}$. En désignant par P et Q deux fonctions algébriques quelconques d'une troisième variable u, et posant $\int x dp = P$, $\int \frac{xp dp}{\sqrt{1+p^2}} = Q$, il

viendra $x=\frac{dP}{dp}=\frac{dQ\sqrt{1+p^2}}{pdp}$, d'où il suit $pdP=dQ\sqrt{1+p^2}$; et par conséquent $p=\frac{dQ}{\sqrt{dP^2-dQ^2}}$. Puisque p est déterminé algébriquement en u par cette expression, x le sera aussi par l'équation $x=\frac{dP}{dp}$; on pourra donc chasser u des valeurs de y et de z, qui sont $y=px-P$, $s=x\sqrt{1+p^2}-Q$: on obtiendra d'abord par la première l'ordonnée de la courbe rectifiable, et par la seconde l'expression de l'arc de cette courbe.

En faisant $Q=u$, on trouvera $p=\frac{du}{\sqrt{dP^2-du^2}}$; et prenant du constant, on aura

$$dp=-\frac{dudPd^2P}{(dP^2-du^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ ce qui donnera}$$

$$x=-\frac{(dP^2-du^2)^{\frac{3}{2}}}{dud^2P}, \quad y=-\frac{(dP^2-du^2)}{d^2P}-P$$

$$s=-\frac{dP(dP^2-du^2)}{dud^2P}-u;$$

on déduira de ces formules une infinité de courbes rectifiables en donnant à la fonction P toutes les formes algébriques possibles.

Il est à propos de remarquer que la question qui nous occupe dans ce moment est résolue par les développées, puisque ces courbes sont algébriques et rectifiables toutes les fois que la développante est algébrique (n°. 268).

536. Euler propose ensuite de trouver deux courbes algébriques rapportées aux mêmes axes, qui soient telles que leur rectification dépende de la quadrature d'une courbe donnée, ou, ce qui revient au même, de l'intégration d'une différentielle donnée, et que la somme de leurs arcs pris sur la même abscisse puisse toujours s'exprimer algébriquement. Pour résoudre cette question, nommons x l'abscisse commune aux deux courbes cherchées, y et z leurs ordonnées respectives, s et t les arcs $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ et $\int\sqrt{dx^2+dz^2}$; supposons

$dy=pdx$, $dz=qdx$; nous aurons pour la première courbe

$$y=px-\int x\,dp, \qquad s=x\sqrt{1+p^2}-\int\frac{xp\,dp}{\sqrt{1+p^2}};$$

et pour la seconde

$$z=qx-\int x\,dq, \qquad t=x\sqrt{1+q^2}-\int\frac{xq\,dq}{\sqrt{1+q^2}}.$$

D'après l'énoncé de la question, il faut 1°. que les intégrales $\int x\,dp$ et $\int x\,dq$ soient algébriques, 2°. que la somme $s+t$ des arcs des courbes demandées soit aussi algébrique, 3°. que ces arcs s et t, ou que les intégrales $\int\frac{xdp}{\sqrt{1+p^2}}$, $\int\frac{xdq}{\sqrt{1+q^2}}$ dépendent de la transcendante donnée. Soit pour abréger

$$\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1+q^2}=m, \qquad \sqrt{1+p^2}-\sqrt{1+q^2}=n;$$

il en résultera $s+t=mx-\int x\,dm$, $\qquad s-t=nx-\int x\,dn$; il faudra donc que l'intégrale $\int x\,dm$ soit algébrique, ainsi que $\int x\,dp$, $\int x\,dq$, et que l'intégrale $\int x\,dn$ se ramène à la transcendante que doivent contenir s et t. Pour satisfaire à ces conditions faisons $\int x\,dp=L$, L étant une fonction de p; nous aurons $x=\frac{dL}{dp}$;

$$\int x\,dq=\int dL\frac{dq}{dp}=L\frac{dq}{dp}-\int L\,d.\frac{dq}{dp}$$

$$\int x\,dm=\int dL\frac{dm}{dp}=L\frac{dm}{dp}-\int L\,d.\frac{dm}{dp}$$

$$\int x\,dn=\int dL\frac{dn}{dp}=L\frac{dn}{dp}-\int L\,d.\frac{dn}{dp};$$

Supposons ensuite $\int L\,d.\frac{dq}{dp}=M$, ou $L=\frac{dM}{d.\frac{dq}{dp}}$; il viendra

$$\int L\,d.\frac{dm}{dp}=\int dM\frac{d.\frac{dm}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}}=M\frac{d.\frac{dm}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}}-\int M\,d.\frac{d.\frac{dm}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}};$$

$$\int L\,d.\frac{dn}{dp}=\int dM\frac{d.\frac{dn}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}}=M\frac{d.\frac{dn}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}}-\int M\,d.\frac{d.\frac{dn}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}};$$

dans la vue de simplifier ces expressions faisons

$\frac{d.\frac{dm}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}}=\mu$; $\frac{d.\frac{dn}{dp}}{d.\frac{dq}{dp}}=\nu$, et nous aurons

$$\int L d.\frac{dm}{dp}=M\mu-\int M d\mu$$

$$\int L d.\frac{dn}{dp}=M\nu-\int M d\nu.$$

La question est réduite maintenant à rendre algébrique l'intégrale $\int M d\mu$, et à faire en sorte que $\int M d\nu$ renferme la transcendante donnée. On remplira le premier objet en posant $\int M d\mu = N$; dont on tirera $M=\frac{dN}{d\mu}$; par là $\int M d\nu$ se changera en $\int d N \frac{d\nu}{d\mu}=N\frac{d\nu}{d\mu}-\int N d.\frac{d\nu}{d\mu}$: on prendra ensuite une fonction P renfermant la transcendante donnée, et on formera l'équation $\int N d.\frac{d\nu}{d\mu}=P$, de laquelle il résultera enfin $N=\frac{dP}{d.\frac{d\nu}{d\mu}}$. Si donc μ et ν sont des fonctions algébriques de p, N sera aussi une fonction algébrique de p, mais telle que $\int N d.\frac{d\nu}{d\mu}=P$; les quantités M et L seront nécessairement des fonctions algébriques; or il est facile de voir que pour que μ et ν soient en effet des fonctions algébriques de p, il suffit que q en soit une, n'importe de quelle forme: en la choisissant arbitrairement on en déduira toutes les solutions de la question proposée.

537. Tout ce qui précède ne regarde que les courbes décrites sur un plan. Les Analystes se sont aussi proposé de trouver des courbes à double courbure qui soient rectifiables. C'est la formule $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ qu'il faut alors rendre intégrable (n°. 531); mais comme il faut pour cela déterminer deux relations entre x, y et z, on suppose que la courbe proposée est décrite sur une surface donnée, ce qui fournit déjà une de ces relations et n'en laisse qu'une

à trouver. Si la courbe cherchée devoit, par exemple, être tracée sur une sphère, on auroit cette équation $x^2+y^2+z^2=r^2$, de laquelle on tireroit

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}, \qquad dz=-\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}};$$

et substituant dans $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, il en résulteroit la différentielle

$$\frac{\sqrt{r^2(dx^2+dy^2)-(x\,dy-y\,dx)^2}}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

qu'il s'agira de rendre algébrique par une détermination convenable de x en y, ce qui donnera sur le plan des x et y la projection des courbes cherchées. Jean Bernoulli et Euler n'ont obtenu qu'une seule solution et y sont parvenus, plutôt par une espèce de divination que par une méthode analytique; le dernier transforma l'expression ci-dessus en coordonnées polaires analogues à celles qui ont été indiquées n°. 319. En faisant

$$x=r\cos p, \qquad y=r\sin p\sin q, \qquad z=r\sin p\cos q;$$

on trouve

$$\frac{\sqrt{r^2(dx^2+dy^2)-(x\,dy-x\,dx)^2}}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\sqrt{dp^2+dq^2\sin p^2}.$$

Pour rendre algébrique l'intégrale de la transformée, supposons, d'après Euler, $\int\sqrt{dp^2+dq^2\sin p^2}=a\cos p$, nous aurons $\sqrt{dp^2+dq^2\sin p^2}=-a\,dp\sin p$; en prenant la valeur de dq, nous trouverons $dq=\frac{dp\sqrt{a^2\sin p^2-1}}{\sin p}$: c'est de cette équation qu'il faut tirer la relation des angles p et q. Le second membre peut se changer en

$$\frac{dp\,(a^2\sin p^2-1)}{\sin p\sqrt{a^2\sin p^2-1}}=\frac{a^2dp\sin p}{\sqrt{a^2\sin p^2-1}}-\frac{dp}{\sin p\sqrt{a^2\sin p^2-1}};$$

mettant $1-\cos p^2$, au lieu de $\sin p^2$, dans le dénominateur de $\frac{a^2dp\sin p}{\sqrt{a^2\sin p^2-1}}$, cette différentielle deviendra

$$\frac{a^2dp\sin p}{\sqrt{a^2-1-a^2\cos p^2}}=\frac{-ad.\cos p}{\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2}-\cos p^2}},$$

et son intégrale sera

évidemment $a.\text{arc}\left(\cos=\frac{a\cos p}{\sqrt{a^2-1}}\right)$. La différentielle $\frac{-dp}{\sin p\sqrt{a^2\sin p^2-1}}$ peut être rapportée à la suivante

$$d.\text{arc}\left(\sin=\frac{b\cos p}{\sin p}\right)=\frac{-b\,dp}{\sin p\sqrt{\sin p^2-b^2\cos p^2}}=\frac{-dp}{\sin p\sqrt{\frac{(1+b^2)}{b^2}\sin p^2-1}};$$

en faisant $\frac{1+b^2}{b^2}=a^2$, ou $b=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$; on aura donc, d'après ce qui précède,

$$q=a\,\text{arc}\left(\cos=\frac{a\cos p}{\sqrt{a^2-1}}\right)+\text{arc}\left(\sin=\frac{\cos p}{\sin p\sqrt{a^2-1}}\right).$$

Tant que a sera un nombre rationnel plus grand que l'unité, la relation entre les arcs contenus dans cette équation sera telle qu'on en pourra déduire l'expression de $\sin q$ et de $\cos q$, en fonction algébrique de $\sin p$ et de $\cos p$, et parvenir par conséquent à une équation algébrique entre x et y.

La constante arbitraire qu'il faudroit ajouter pour l'intégration ne pourroit être qu'un arc de cercle dont le sinus seroit donné et n'augmenteroit pas la généralité de la solution, c'est pourquoi nous l'avons omise.

538. La considération des limites, qui renferment les solides terminés par des surfaces courbes, ou les aires prises sur ces surfaces, conduit à des questions de Calcul intégral *indéterminé*. En effet, on peut chercher la nature de la courbe $E'M'N'$, *fig.* 15, par ces conditions: que le cylindre perpendiculaire au plan des x et y élevé sur cette courbe, et fermé supérieurement par une surface courbe donnée, soit exprimable algébriquement; ou que la portion de la même surface courbe, qui répond au-dessus de la courbe cherchée $E'M'N'$, ait une expression algébrique. FIG. 15.

Occupons-nous d'abord de la première et supposons que la surface courbe donnée soit une sphère. La formule à rendre algébrique sera $\int\int dx\,dy\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ (n°. 521); en l'intégrant par rapport à x, on trouvera $\frac{1}{2}\int dy\left[x\sqrt{r^2-x^2-y^2}+(r^2-y^2)\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}}\right)\right]$.

Ce résultat devant être pris depuis $x=QM'$ jusqu'à $x=QN'$, et les lignes QM' et QN' étant déterminées par l'équation de la courbe $E'M'N'$, il s'agit donc de trouver une relation entre AQ et QM', ou entre x et y, qui rende algébrique l'intégrale précédente. Faisons avec Euler $x=u\sqrt{r^2-y^2}$, u étant une nouvelle variable et concevons que la courbe cherchée soit traversée par l'axe AC; il faudra prendre l'intégrale dont nous venons de parler, depuis $x=u\sqrt{r^2-y^2}$, jusqu'à $x=-u\sqrt{r^2-y^2}$: la moitié du solide cherché aura donc pour expression $\frac{1}{2}\int dy[(r^2-y^2)[u\sqrt{1-u^2}+\text{arc}(\sin=u)]]$ et se transformera en

$$\frac{1}{2}\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right)[u\sqrt{1-u^2}+\text{arc}(\sin=u)]-\int du\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right)\sqrt{1-u^2}.$$

On fera disparoître les transcendantes en supposant

$$\int du\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right)\sqrt{1-u^2}=nr^3\,\text{arc}\,(\sin=u)+r^3U,$$

n étant une constante indéterminée et U désignant une fonction algébrique de u; car l'expression du solide cherché deviendra alors $S=$

$$\frac{1}{2}\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right)u\sqrt{1-u^2}-r^3U+\left(\frac{r^2y}{2}-\frac{y^3}{6}-nr^3\right)\text{arc}\,(\sin=u)$$

et ne contiendra point d'arcs de cercle, si on la prend depuis la valeur de y qui répond à $u=0$, jusqu'à celle qui résulte de l'équation

$$\frac{r^2y}{2}-\frac{y^3}{6}-nr^3=0:$$

la relation entre u et y sera donnée par l'équation

$$\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right)\sqrt{1-u^2}=\frac{nr^3}{\sqrt{1-u^2}}+r^3\frac{dU}{du},$$

de laquelle on tirera facilement celle qui doit exister entre x et y, ou l'équation de la courbe $E'M'N'$.

Pour obtenir une solution particulière, soit $U=mu\sqrt{1-u^2}$; on a dans ce cas $\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right)\sqrt{1-u^2}=\frac{nr^3+mr^3-2mr^3u^2}{\sqrt{1-u^2}}$. On peut faire en sorte que y et u s'évanouissent en même tems; il suffit pour cela de prendre $n=-m$, ce qui donne $r^2y-\frac{y^3}{3}=\frac{2nr^3u^2}{1-u^2}$, d'où

on tire $u=\sqrt{\frac{3r^2y-y^3}{6nr^3+3r^2y-y^3}}$,

$x=\sqrt{\frac{(r^2-y^2)(3r^2y-y^3)}{6nr^3+3r^2y-y^3}}$, $u\sqrt{1-u^2}=\frac{\sqrt{6nr^3(3r^2y-y^3)}}{6nr^3+3r^2y-y^3}$,

et il vient $S=\frac{2nr^3\sqrt{6nr^3(3r^2y-y^3)}}{6nr^3+3r^2y-y^3}$ pour l'expression du solide cherché, pris depuis $y=0$, jusqu'à la valeur de y résultante de l'équation $-y^3+3r^2y=6nr^3$; mais comme n est une quantité indéterminée on peut la prendre pour inconnue et se donner y. En supposant $y=r$, on aura $n=\frac{1}{3}$; cette valeur de n donne

$x=\sqrt{\frac{y(r-y)(3r^2-y^2)}{(r+y)(2r-y)}}$, mettant en outre r pour y dans S, on a $S=\frac{1}{3}r^3$. Dans cet exemple la courbe $E'M'N'$ est du 4^{me} ordre.

539. Proposons-nous maintenant de déterminer la courbe $E'M'N'$, de manière que l'aire qui lui correspond sur la surface de la sphère ait une expression algébrique. Il s'agit dans cette question de trouver la relation qui doit avoir lieu entre y et x, pour que la formule $\int r\,dy.\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}}\right)$, résultante de l'intégration de $\iint\frac{r\,dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, par rapport à x, soit algébrique. Faisons $\frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}}=u$, nous aurons, en intégrant par parties,

$$\int r\,dy.\mathrm{arc}\,(\sin=u)=ry.\mathrm{arc}\,(\sin=u)-r\int\frac{y\,du}{\sqrt{1-u^2}};$$

Si on suppose $\int\frac{y\,du}{\sqrt{1-u^2}}=p.\mathrm{arc}\,(\sin=u)-rU$, on pourra faire disparoître l'arc de cercle en déterminant convenablement le coefficient constant p. En effet, il résultera de cette hypothèse

$$\int r\,dy\,\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}}\right)=(ry-rp)\,\mathrm{arc}\,(\sin=u)+r^2U;$$

mais si l'intégration du premier membre doit être effectuée entre les limites $y=0$ et $y=b$, auxquelles on suppose que $u=m$ et $u=n$, que

que $U=M$ et $U=N$, l'expression de l'aire demandée sera

$$(rb-rp)\operatorname{arc}(\sin=n)+rp.\operatorname{arc}(\sin=m)+r^2(N-M)$$

et deviendra algébrique si

$$(b-p)\operatorname{arc}(\sin=n)+p.\operatorname{arc}(\sin=m)=0;$$

équation qui peut se vérifier d'une infinité de manières, en prenant les sinus m et n tels que les arcs soient commensurables entr'eux. La relation de y et de u se tirera de l'équation

$$\int\frac{y\,du}{\sqrt{1-u^2}}=p.\operatorname{arc}(\sin=u)-rU \text{ qui donne}$$

$$\frac{y}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{p}{\sqrt{1-u^2}}-r\frac{dU}{du}, \text{ ou } y=p-r\frac{dU}{du}\sqrt{1-u^2};$$

540. En général il est facile de voir que si l'on fait subir aux variables x et y des transformations telles que l'une des intégrations puisse s'effectuer algébriquement, le problême proposé sera ramené immédiatement à celui du n°. 533. Euler, en faisant $x=\frac{t}{\sqrt{1+u^2}}$ et $y=\frac{tu}{\sqrt{1+u^2}}$, trouve $\int\frac{r\,dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\iint\frac{r\,t\,dt\,du}{(1+u^2)\sqrt{1-t^2}}$. Dans ce résultat l'intégration relative à t s'effectue algébriquement; il vient $\int\frac{r\,du}{1+u^2}\times-\sqrt{r^2-t^2}$, et en supposant que l'une des limites de t soit la constante a, on aura

$$\int\frac{r\,du}{1+u^2}(\sqrt{r^2-a^2}-\sqrt{r^2-t^2}), \text{ ou } \int\frac{r\,du}{1+u^2}(b-\sqrt{r^2-t^2});$$ en faisant pour abréger $\sqrt{r^2-a^2}=b$.

Si on égale cette dernière expression à une fonction algébrique quelconque de u, ou si on suppose $\int\frac{r\,du}{1+u^2}(b-\sqrt{r^2-t^2})=U$; on en tirera $b-\sqrt{r^2-t^2}=\frac{(1+u^2)}{r}.\frac{dU}{du}$;

équation qui donnera une valeur algébrique de t en u, au moyen de laquelle l'intégration relative à cette dernière variable n'introduira aucune transcendante.

Les solutions les plus simples s'obtiennent en faisant $U=\frac{r(\alpha+\beta u)}{\sqrt{1+u^2}}$,

d'où il résulte $b-\sqrt{r^2-t^2}=\frac{\beta-au}{\sqrt{1+u^2}}$; Examinons le cas dans lequel $b=0$; on a alors $\sqrt{r^2-t^2}=\frac{au-\beta}{\sqrt{1+u^2}}$; mais par les hypothèses établies $u=\frac{y}{x}$, et $t=\sqrt{x^2+y^2}$: il s'ensuit donc

$$\sqrt{(x^2+y^2)(r^2-x^2-y^2)}=\alpha y-\beta x, \quad \text{et} \quad U=\frac{r(\alpha x+\beta y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

La supposition de $\alpha=r$, de $\beta=0$ simplifie beaucoup ces résultats qui deviennent

$$r^2x^2-(x^2+y^2)^2=0, \quad \text{ou} \quad y^2=rx-x^2 \quad \text{et} \quad U=\frac{r^2x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

FIG. 18. Le premier, qui est l'équation du cercle *AFB*, *fig.* 18, décrit sur *AB* comme diamètre, nous fait déjà connoître une des limites de la projection de la surface demandée. On voit sans peine que

$$t=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PM'}^2}=AM',$$

et que $u=\frac{y}{x}=\frac{PM'}{AP}=\text{tang}\,M'AP$. L'intégration relative à t commence dans le cas actuel quand $t=r=AE$, car de $b=0$, il suit $\sqrt{r^2-a^2}=0$, et finit quand $t=AF$; on a alors

$$\int\frac{r\,du}{1+u^2}\sqrt{r^2-t^2}=-U=-\frac{r^2}{\sqrt{1+u^2}}+C;$$

et pour faire en sorte que l'intégration relative à u commence à la ligne *AB* sur laquelle $u=0$, on prendra $C=r^2$. Par ce moyen les valeurs de u allant en augmentant, et l'une des valeurs extrêmes de t restant toujours par l'hypothèse égale à r, il est évident que les projections des élémens de cette intégrale seront les trapèzes *EFfe*, d'où il suit que la portion cherchée de la surface de la sphère sera terminée d'un côté par le quart de cercle *BEC*, situé dans le plan des x et y, de l'autre par la courbe résultante de de l'intersection de la sphère et du cylindre élevé sur le demi-cercle *AFB*, parallèlement à l'axe des z, et fermée enfin par l'arc de grand cercle compris dans le plan *DAE* et ayant pour projection *FE*. L'expression de ce triangle curviligne sera donc

$r^2 - \frac{r^2}{\sqrt{1+u^2}}$. Lorsque le rayon vecteur AE se trouve sur AC, u étant infini, puisque l'angle CAB est droit, la valeur précédente se réduit à r^2, ce qui donne un résultat très-curieux, obtenu d'abord par Viviani, qui proposa et résolut le premier le problême qui nous occupe.

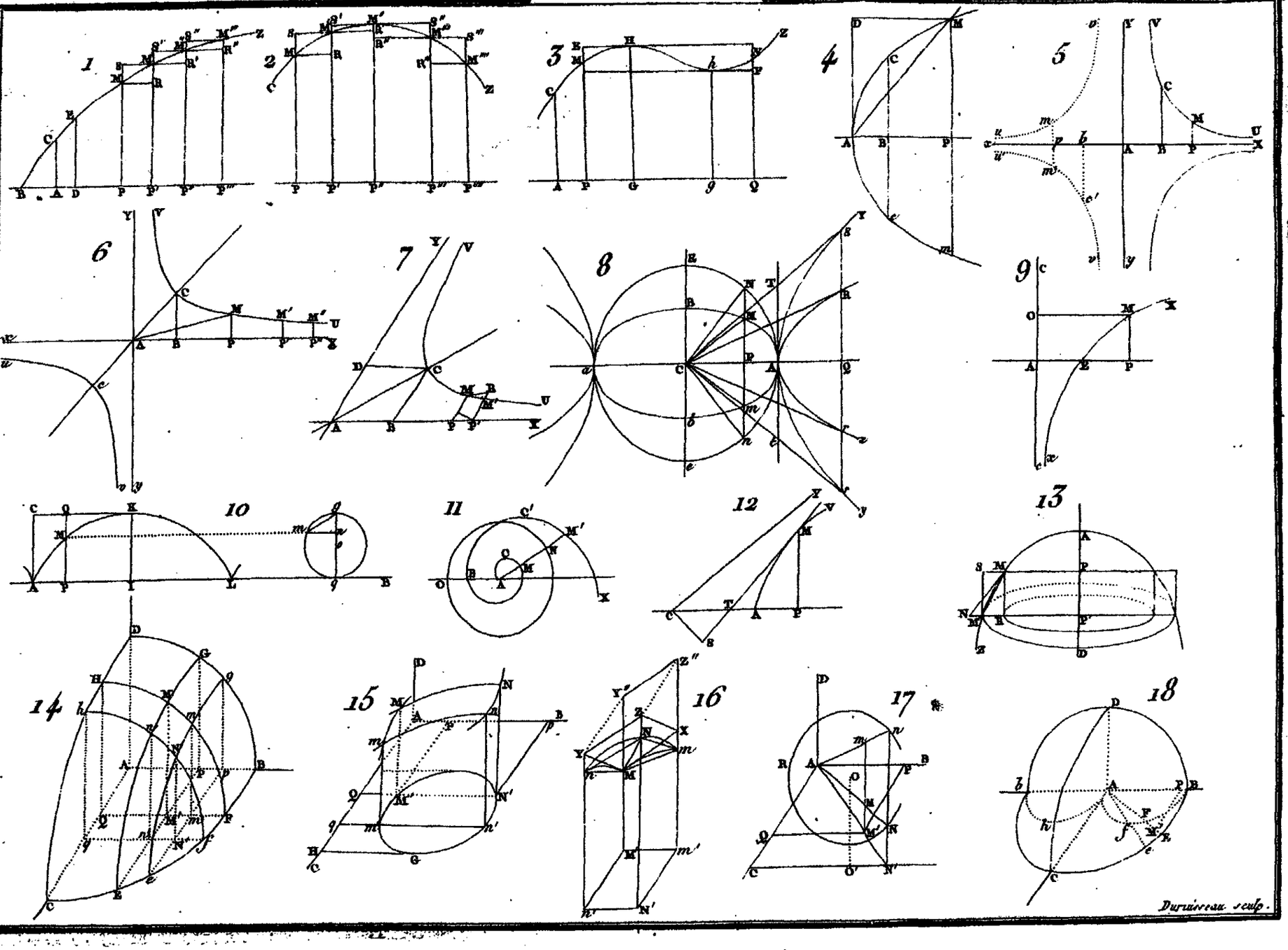
Il demanda aux Géomètres de son tems de *déterminer la courbe que devoient affecter les contours de quatre fenêtres percées dans un dôme hémisphérique, de manière que l'espace qui restoit de la voûte fût quarrable.* On voit en effet que si dans l'angle CAb du plan des x et y on décrit un demi-cercle bha, égal à BFA, et qu'on éleve sur ces deux demi-cercles des cylindres parallèles à l'axe des z et prolongés indéfiniment tant au-dessus qu'au-dessous du plan $BACb$, ils ouvriront dans la demi-sphère située en avant du plan $BADb$, quatre espaces tels que ce qui restera de la surface de la sphère sera quadruple de celui que nous avons déterminé plus haut, et par conséquent égal à quatre fois le quarré du rayon. En rapportant cette solution dans son histoire des Mathématiques, Montucla remarqua que la portion de la surface de chaque cylindre renfermée dans l'hémisphère est égale à deux fois le quarré du rayon.

541. Euler généralise encore la solution précédente en introduisant après l'intégration relative à t au lieu de la constante b, une fonction quelconque de u, et il trouve alors l'expression $\int \frac{r\,du}{1+u^2}(V - \sqrt{r^2-t^2})$, qu'il égale à $rU - rC$, C étant ce que devient U lorsque $u=0$; il résulte de là $\sqrt{r^2-t^2} = V - (1+u^2)\frac{dU}{du}$; Dans ce nouvel ordre de choses l'origine de l'intégrale relative à t, répond à $t = \sqrt{r^2-V^2}$; ainsi la courbe résultante de cette équation sera l'une des limites de la projection de la surface demandée: l'autre limite se tire de l'équation $\sqrt{r^2-t^2} = V - (1+u^2)\frac{dU}{du}$ qui donne $t = \sqrt{r^2 - \left[V - (1+u^2)\frac{dU}{du}\right]^2}$.

542. Nous terminerons en faisant voir que rien n'est plus facile que d'obtenir sur un cône droit des aires quarrables. L'équation de ce solide, en supposant que son sommet soit à l'origine des coordonnées, et que le rapport du rayon de sa base à sa hauteur soit $=k$, est $z=k\sqrt{x^2+y^2}$; on a $\int\int dx\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}=\int\int k\,dx\,dy$, d'où il suit que toutes les portions de la surface de ce cône sont dans un rapport constant avec leur projection, et par conséquent sont quarrables lorsque leurs projections le sont : prenant donc dans le plan des x et y des courbes quarrables, les cylindres élevés sur ces courbes parallèlement à l'axe de z retrancheront du cône des portions quarrables. Cette propriété n'est pas particuliere au cône droit, elle a lieu dans toutes les surfaces qui par leur génération satisfont à l'équation différentielle $1+p^2+q^2=const.$

Ce seroit peut-être ici le lieu de faire connoître les principaux résultats que les Analystes ont obtenus par rapport aux intégrales définies, c'est-à-dire, à certaines intégrales qui prennent une valeur très-simple lorsque la variable dont elles dépendent est renfermée entre des limites données, quoique le plus souvent on ne puisse obtenir leur expression générale; mais cette matière envisagée dans toute son étendue a avec la théorie des suites un rapport tel que j'ai cru pouvoir la comprendre dans ce qui regarde ces dernières.

PLANCHE I.



Duruisseau sculp.

CHAPITRE III.

De l'intégration des équations différentielles à deux variables.

543. DANS le Chapitre premier nous avons supposé que les coefficiens différentiels étoient exprimés immédiatement par le moyen de la variable d'où dépend leur fonction primitive, mais le plus souvent on n'a qu'une équation différentielle qui renferme ces diverses quantités. Pour le premier ordre l'équation différentielle, lorsqu'elle est du premier degré par rapport à dx et à dy, a nécessairement la forme $Mdx+Ndy=0$, et elle exprime, ainsi qu'on l'a fait voir n°. 49, une relation entre la variable x, la fonction y et son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$.

De la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre.

Le moyen qui s'est offert le premier aux Analystes pour découvrir l'équation primitive dont celle-ci tire son origine, a été de chercher à séparer les variables, c'est-à-dire, à ramener l'équation $Mdx+Ndy=0$ à la forme $Xdx+Ydy=0$, X étant une fonction de x seul et Y une fonction de y seul. En effet, lorsqu'on est parvenu à ce point, les termes Xdx et Ydy s'intégrent par les méthodes du Chapitre premier, et on a $\int Xdx+\int Ydy=C$, C désignant une constante arbitraire.

544. Pour donner un exemple des cas où l'équation différentielle se présente immédiatement sous la forme ci-dessus, soit $x^m dx+y^n dy=0$; on trouvera sur le champ $\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{y^{n+1}}{n+1}=C$.

Si l'équation proposée étoit $ydx-xdy=0$, la séparation seroit facile à effectuer, car on voit qu'en divisant par xy, on trouveroit $\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$; prenant séparément l'intégrale de chaque terme de cette dernière, on aura $lx-ly=C$, ou $l\frac{x}{y}=C$, et puisque l'on

peut regarder la constante arbitraire elle-même comme un logarithme, on en conclura $1\frac{x}{y}=1c$: en passant aux nombres il viendra $\frac{x}{y}=c$, ou $x=cy$. Après cet exemple on reconnoît sans peine que la séparation des variables s'effectuera de la même manière dans les équations $Ydx-Xdy=0$, $XY_1dx-YX_1dy=0$; car la première donne $\frac{dx}{X}-\frac{dy}{Y}=0$, et la seconde $\frac{Xdx}{X_1}-\frac{Ydy}{Y_1}=0$. En général, si lorsqu'on prend la valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation proposée, on trouve $\frac{dy}{dx}=XY$, il est facile d'en tirer $Xdx-\frac{1}{Y}dy=0$, et par conséquent $\int Xdx-\int\frac{1}{Y}dy=C$.

545. Lorsque M et N sont des fonctions homogènes de x et de y, il suffit de faire $y=x\zeta$, pour séparer les variables dans l'équation $Mdx+Ndy=0$; en effet, les fonctions M et N prennent la forme Zx^m, Z_1x^m, Z et Z_1 ne renfermant que la nouvelle variable ζ (n°. 66), et comme $dy=\zeta dx+xd\zeta$, il vient en divisant par x^m, $Zdx+Z_1(\zeta dx+xd\zeta)=0$, résultat qu'on peut mettre sous la forme $\frac{dx}{x}+\frac{Z_1d\zeta}{Z+\zeta Z_1}=0$, et dont on tire

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{Z_1d\zeta}{Z+\zeta Z_1}=C.$$

Appliquons d'abord cette transformation à l'équation $xdx+ydy=nydx$, qui devient $(x-ny)dx+ydy=0$, en passant tous les termes dans un membre; nous aurons $Z=1-n\zeta$, $Z_1=\zeta$ et $\int\frac{dx}{x}+\int\frac{\zeta d\zeta}{1-n\zeta+\zeta^2}=C$, ou $1x+\int\frac{\zeta d\zeta}{1-n\zeta+\zeta^2}=C$: l'intégrale $\int\frac{\zeta d\zeta}{1-n\zeta+\zeta^2}$ dépendra des logarithmes si $\frac{n}{2}>1$, des arcs de cercles si $\frac{n}{2}<1$, et sera algébrique si $\frac{n}{2}=1$. On peut la simplifier en observant que

$$\frac{\zeta d\zeta}{1-n\zeta+\zeta^2}=\frac{1}{2}\frac{2\zeta d\zeta-nd\zeta}{1-n\zeta+\zeta^2}+\frac{1}{2}\frac{nd\zeta}{1-n\zeta+\zeta^2};$$ car il vient alors

$1x+\frac{1}{2}1(1-n\zeta+\zeta^2)+\frac{1}{2}\int\frac{n\,d\zeta}{1-n\zeta+\zeta^2}=C$. Nous ne rapporterons ici que le résultat qu'on obtient quand $\frac{n}{2}=1$, ou $n=2$: dans ce cas $\int\frac{n\,d\zeta}{1-n\zeta+\zeta^2}$ devient $\int\frac{2\,d\zeta}{(1-\zeta)^2}=\frac{2}{1-\zeta}$, $1(1-n\zeta+\zeta^2)=1(1-\zeta)^2$ et on a par conséquent $1x+1(1-\zeta)+\frac{1}{1-\zeta}=C$, ou $1(x-y)+\frac{x}{x-y}=C$, en remettant pour ζ la valeur $x=\frac{y}{\zeta}$, ou enfin $x-y=ce^{-\frac{x}{x-y}}$, en substituant $1c$ à C et passant aux nombres (Int. page 52).

Proposons-nous encore d'intégrer l'équation $y\,dx-x\,dy=dx\sqrt{x^2+y^2}$. En faisant $y=x\zeta$, et divisant par x tous ses termes réunis dans un seul membre, on trouvera $dx\sqrt{1+\zeta^2}-x\,d\zeta=0$, ce qui donnera $\frac{dx}{x}-\frac{d\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}=0$; on obtiendra ensuite, par l'intégration de chaque terme en particulier, $1x-1(\zeta+\sqrt{1+\zeta^2})=1c$, ou $1x=1c+1(\zeta+\sqrt{1+\zeta^2})$; remettant pour ζ sa valeur $\frac{y}{x}$, il viendra $1x=1c+1\left(\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)$, résultat qu'on changera facilement en $1x=1c+1\left(\frac{-x}{y-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; et passant aux nombres on aura enfin $y-\sqrt{x^2+y^2}=-c$; faisant disparoître le radical, on aura enfin $x^2=c^2+2cy$.

546. L'équation $(a+mx+ny)\,dx+(b+px+qy)\,dy=0$ peut facilement être rendue homogène. En substituant $t+\alpha$, à la place de x, et $u+\beta$ à celle de y, on a $dx=dt$, $dy=du$, et

$$(a+m\alpha+n\beta+mt+nu)\,dt+(b+p\alpha+q\beta+pt+qu)\,du=0;$$

on fera disparoître les termes constans, en posant les équations $a+m\alpha+n\beta=0$, $b+p\alpha+q\beta=0$, au moyen desquelles on déterminera les quantités α et β, et il restera alors l'équation différentielle $(mt+nu)\,dt+(pt+qu)\,du=0$, homogène par rapport aux nouvelles variables u et t.

La transformation que nous venons d'effectuer est la même que celle dont on se sert pour changer l'origine des coordonnées sur un plan (n°. 210); elle ne donne aucun résultat quand $mq-np=0$, cas auquel les valeurs de α et de β deviennent infinies; mais alors on a $q=\frac{np}{m}$ et par conséquent $px+qy=\frac{p}{m}(mx+ny)$; l'équation proposée se change en

$$a\,dx+b\,dy+(mx+ny)\left(dx+\frac{p}{m}dy\right)=0.$$

Il suffit de faire $mx+ny=z$ pour y séparer les variables.

En substituant cette valeur, ainsi que celle de dy, qui en résulte, et dégageant dx, on trouve $dx+\frac{(bm+pz)\,dz}{amn-bm^2+(mn-pm)z}=0$; l'intégrale de cette équation renfermera des logarithmes, excepté dans le cas de $mn-pm=0$, où elle sera $x+\frac{2bmz+pz^2}{2(amn-bm^2)}=C$.

La transformation employée dans ce dernier cas a changé l'équation proposée en une autre qui ne contient plus qu'une des variables; et il est facile de voir que, quelle que soit l'équation sur laquelle on ait produit cet effet, on pourra lui donner la forme $dx+Z\,dz=0$, Z étant une fonction de z seul, et qu'on en tirera $x+\int Z dz=C$.

547. La séparation des variables s'opère d'une manière très-simple sur l'équation $dy+Py\,dx=Q\,dx$, dans laquelle P et Q désignent des fonctions quelconques de x. En y substituant Xz et $z\,dX+X\,dz$, au lieu de y et de dy, elle devient $z\,dX+X\,dz+PXz\,dx=Q\,dx$. La quantité X étant considérée comme une fonction indéterminée de x, il est permis d'en disposer pour partager l'équation précédente en deux autres où les variables puissent se séparer; or il est facile de voir que cette condition sera remplie si on fait $X\,dz+PXz\,dx=0$, ce qui donne $z\,dX=Q\,dx$. En divisant la première de ces équations par X, elle se réduit à $dz+Pz\,dx=0$; on en tire $\frac{dz}{z}+P\,dx=0$, $\quad 1z+\int P\,dx=0$, et en passant aux nombres, $z=e^{-\int P\,dx}$: on néglige ici la constante arbitraire, parce qu'il suffira d'en ajouter une à la fin de l'opération. Prenant ensuite

la

la valeur de dX dans la seconde équation, après y avoir substitué celle de ζ que l'on vient de trouver, on aura

$$dX = Q e^{\int P\,dx},\quad X = \int Q e^{\int P\,dx} + C,$$

et par conséquent $y = e^{-\int P\,dx}\left(\int e^{\int P\,dx} Q\,dx + C\right)$.

L'équation $dy + Py\,dx = Q\,dx$ est remarquable parce que la variable y et sa différentielle ne s'y trouvent qu'au premier degré, et on l'appelle à cause de cette circonstance *équation linéaire* du premier ordre, dénomination que j'ai cru devoir changer dans celle *d'équation du premier degré et du premier ordre* (*).

L'équation $Ly^{n-1}dy + My^n dx = Ny^n dx$, dans laquelle L, M et N sont des fonctions de x, se ramène à la précédente ; car en la divisant par Ly^n et faisant ensuite $y^{m-n} = (m-n)\zeta$, on aura

$$d\zeta + (m-n)\frac{M}{L}\zeta\,dx = \frac{N}{L}dx, \text{ ou } d\zeta + P\zeta\,dx = Q\,dx.$$

548. Soit l'équation générale

$$(ax^m y^n + bx^p y^q + cx^r y^s + \text{etc.})dx + (a'x^{m'}y^{n'} + b'x^{p'}y^{q'} + c'x^{r'}y^{s'} + \text{etc.})dy = 0;$$

si l'on y substitue ζ^k au lieu de y, elle deviendra

$$(a x^m \zeta^{kn} + b x^p \zeta^{kq} + c x^r \zeta^{ks} + \text{etc.})dx$$
$$(a' x^{m'} \zeta^{kn'} + b' x^{p'} \zeta^{kq'} + c' x^{r'} \zeta^{ks'} + \text{etc.})k\zeta^{k-1}d\zeta = 0$$

et sera homogène sous cette nouvelle forme lorsque

$$m + kn = p + kq = r + ks \ldots = m' + kn' + k - 1 = p' + kq' + k - 1, \text{ etc.}$$

On tire de la première égalité $k = \frac{p-m}{n-q}$, et les autres expriment les conditions qui doivent avoir lieu pour que la transformation produise l'effet desiré.

549. Les premiers Analystes qui se sont occupés du Calcul intégral classoient les équations différentielles par le nombre de leurs termes : dans celles qui n'en ont que deux et dont la forme est par conséquent $\beta u^g \zeta^h d\zeta = \alpha u^e \zeta^f du$, les variables se séparent sur le champ, puisqu'on en tire $\beta \zeta^{h-f} d\zeta = \alpha u^{e-g} du$; mais il n'en est pas de même

(*) Le mot *linéaire* est impropre ; il est relatif à la Géométrie, et en l'appliquant aux équations, on a eu en vue la ligne droite, dans l'équation de laquelle l'ordonnée (et l'abscisse également) ne se trouvent qu'au premier degré : on ne sauroit donc regarder comme linéaires des équations telles que $dy + Py\,dx = Q\,dx$, qui appartiennent le plus souvent à des courbes transcendantes.

des équations à trois termes, comprises dans la formule $\gamma u^i z^h dz + \beta u^g z^h du = \alpha u^e z^f du$. On peut lui donner une forme plus simple en divisant tous ses termes par $\gamma u^i z^f$, elle deviendra

$z^{k-f}dz + \frac{\beta}{\gamma} u^{g-i} z^{h-f} du = \frac{\alpha}{\gamma} u^{e-i} du$; supposant ensuite

$$z^{k-f}dz = \frac{dy}{k-f+1}, \quad u^{g-i}du = \frac{dx}{g-i+1},$$

on a $z^{k-f+1} = y, \quad u^{g-i+1} = x$

et $$dy + \frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\alpha} y^{\frac{k-f}{k-f+1}} dx = \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\beta} x^{\frac{e-g}{g-i+1}} dx;$$

enfin faisant pour abréger

$$\frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\alpha} = b, \quad \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\beta} = a, \quad \frac{h-f}{k-f+1} = n, \quad \frac{e-g}{g-i+1} = m,$$

il en résultera l'équation $dy + by^n dx = ax^m dx$.

550. Le cas le plus simple, après celui qui rentre dans l'équation du premier degré, est celui où $n=2$. On tombe alors sur l'équation $dy + by^2 dx = ax^m dx$, traitée pour la première fois par Riccati, Géomètre italien, dont elle a conservé le nom.

Les variables se séparent immédiatement dans cette équation lorsque $m=0$; elle devient $dy + by^2 dx = a dx$, et donne

$$dx = \frac{dy}{a-by^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{dy}{\sqrt{a}+y\sqrt{b}} + \frac{dy}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}\right].$$

On trouve, en intégrant,

$$x = \frac{1}{2\sqrt{ab}} l\left(\frac{\sqrt{a}+y\sqrt{b}}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}\right) + C.$$

Pour chercher à rendre la même équation homogène, faisons $y = z^k$; elle se changera en $k z^{k-1} dz + b z^{2k} dx = a x^m dx$, et prendra la forme demandée, si $k-1=2k$, $2k=m$, ce qui donne $k=-1$, et suppose qu'on ait $m=-2$; il vient alors $\frac{dz}{z^2} + \frac{b dx}{z^2} = \frac{a dx}{x^2}$.

Nous ne nous arrêterons point à l'intégration de cette dernière équation, et nous essayerons une transformation plus générale, celle qui résulte de $y = A x^p + x^q z$. On trouve dans cette hypothèse

$$dy = (pA x^{p-1} + q x^{q-1} z) dx + x^q dz$$
$$y^2 dx = (A^2 x^{2p} + 2A x^{p+q} z + x^{2q} z^2) dx$$

et par conséquent

$x^q dz + (q x^{q-1} + 2bAx^{p+q} + b x^{2q} z)\, z\, dx + (pA x^{p-1} + bA^2 x^{2p})\, dx = a x^m dx$.

Cette équation se réduira elle-même à trois termes, si on a les suivantes

$p-1=2p$, $pA+bA^2=0$, $q-1=p+q$, $q+2bA=0$.

La première et la troisième s'accordent à donner $p=-1$, on tire de la seconde et de la quatrième $A=\frac{1}{b}$, $q=-2$, valeurs qui conduisent à $y=\frac{1}{bx}+\frac{z}{x^2}$,

$x^{-2} dz + b x^{-1} z^2 dx = a x^m dx$, ou $dz + b z^2 \frac{dx}{x^2} = a x^{m+2} dx$.

Nous voyons encore par ce moyen que l'équation proposée sera réductible à l'homogénéité, si $m=-2$, et nous apprenons de plus qu'on y pourra séparer les variables si $m=-4$, puisqu'elle prendra la forme $dz + (bz^2 - a)\frac{dx}{x^2} = 0$, ou $\frac{dz}{bz^2-a} + \frac{dx}{x^2} = 0$.

Si dans l'équation $dz + b z^2 \frac{dx}{x^2} = a x^{m+2} dx$, nous faisons $z = \frac{1}{y'}$; nous aurons $-dy' + b\frac{dx}{x^2} = a y'^2 x^{m+2} dx$, ou $dy' + a y'^2 x^{m+2} dx = b\frac{dx}{x^2}$; posant ensuite $x^{m+2} dx = \frac{dx'}{m+3}$, nous trouverons

$$x^{m+3} = x', \quad dx = \frac{1}{m+3} x'^{-\frac{m+2}{m+3}} dx',$$

et $dy' + \frac{a}{m+3} y'^2 dx' = \frac{b}{m+3} x'^{-\frac{m+4}{m+3}} dx'$, ou

$dy' + a' y'^2 dx' = b' x'^{m'} dx'$, en faisant pour abréger

$$\frac{a}{m+3} = a', \quad \frac{b}{m+3} = b' \text{ et } \frac{-m-4}{m+3} = m'.$$

Appliquons maintenant à cette équation l'avant-dernière transformation, c'est-à-dire, faisons $y' = \frac{1}{a'x'} + \frac{z'}{x'^2}$, puisque a' a pris la place de b, nous la changerons en $dz' + a' z'^2 \frac{dx'}{x'^2} = b' x'^{m'+2} dx'$, dans laquelle la séparation des variables pourra encore s'effectuer si $m'=-4$, ce qui revient à $m=-\frac{8}{3}$.

Si on fait encore

$$\zeta'=\frac{1}{y''},\ x'^{m'+2}dx'=\frac{dx''}{m'+3},\ \frac{b'}{m'+3}=b'',\ \frac{a'}{m'+3}=a'',\ \frac{-m'-4}{m'+3}=m'',$$

dans l'équation $d\zeta'+a'\zeta'^2\frac{dx'}{x'^2}=b'x'^{m'+2}dx'$, elle deviendra

$dy''+b''y''^2dx''=a''x''^{m''}dx''$, et se changera ensuite en

$d\zeta''+b''\zeta''^2\frac{dx''}{x''^2}=a''x''^{m''+2}dx''$, par la substitution de $\frac{1}{b''x''}+\frac{\zeta''}{x''^2}$, au lieu de y''. Les variables se sépareront dans ce cas, si $m''=-4$, c'est-à-dire, si $m'=-\frac{8}{3}$, ou $m=-\frac{12}{5}$.

En suivant cet enchaînement de transformations, on parviendra à séparer les variables de l'équation proposée, dans les cas où $m=0$, $m=-4$, $m=-\frac{8}{3}$, $m=-\frac{12}{5}$, $m=-\frac{16}{7}$, etc. valeurs qui sont comprises dans la formule $m=-\frac{4i}{2i-1}$, i étant un nombre entier positif quelconque.

On peut effectuer les transformations dans un ordre inverse; faire d'abord dans la proposée $y=\frac{1}{y'}$, ce qui donnera

$dy'+ay'^2x^mdx=bdx$, et poser $x^mdx=\frac{dx'}{m+1}$, d'où il résultera

$$dy'+\frac{a}{m+1}y'^2dx'=\frac{b}{m+1}x'^{\frac{-m}{m+1}}dx',$$

ou $dy'+a'y'^2dx'=b'x'^{m'}dx$. Changeant ensuite dans la dernière transformée y' en $\frac{1}{a'x'}+\frac{\zeta'}{x'^2}$, on arrivera à l'équation

$d\zeta'+a'\zeta'^2\frac{dx'}{x'^2}=b'x'^{m'+2}dx'$, dont on séparera les variables lorsque $m'=-4$, et ce cas répond à $m=-\frac{4}{3}$. Faisant sur cette dernière équation les mêmes transformations et dans le même ordre que sur sa correspondante de l'alinéa précédent, on sera conduit à

$d\zeta''+b''\zeta''^2\frac{dx''}{x''^2}=a''x''^{m''+2}dx''$, où les variables se sépareront, si $m''=-4$, d'où $m'=-\frac{8}{3}$, ou $m=-\frac{8}{5}$. En continuant ainsi on

obtiendra la séparation pour les cas où

$$m=-\tfrac{4}{3},\quad m=-\tfrac{8}{5},\quad m=-\tfrac{12}{7},\quad m=-\tfrac{16}{9},\ \text{etc.}$$

et qui sont compris dans la formule $m=-\dfrac{4i}{2i+1}$.

Il suit donc de là que l'équation de Riccati pourra s'intégrer toutes les fois que l'exposant m sera de la forme $\dfrac{-4i}{2i\pm1}$.

551. La séparation des variables devient encore plus difficile dans les équations à quatre termes que dans celles qui n'en ont que trois, et le plus souvent des substitutions heureuses, qu'il n'est pas aisé d'imaginer, l'opèrent sur des équations fort compliquées, ainsi qu'on va le voir par les deux exemples suivans.

1°. Soit $\alpha y\,dx+\beta x\,dy+x^m y^n(\gamma y\,dx+\delta x\,dy)=0$;
en divisant cette équation par xy, on a

$$\frac{\alpha dx}{x}+\frac{\beta dy}{y}+x^m y^n\left(\frac{\gamma dx}{x}+\frac{\delta dy}{y}\right)=0;$$

mais si on observe que

$$\frac{\alpha dx}{x}+\frac{\beta dy}{y}=d.\mathrm{l}x^\alpha y^\beta,\qquad \frac{\gamma dx}{x}+\frac{\delta dy}{y}=d.\mathrm{l}x^\gamma y^\delta,$$

on sera tenté d'égaler $x^\alpha y^\beta$ et $x^\gamma y^\delta$ à deux nouvelles variables t et u; ce qui donnera $\dfrac{dt}{t}+x^m y^n\dfrac{du}{u}=0$; et des équations $x^\alpha y^\beta=t$, $x^\gamma y^\delta=u$, on tirera $x=t^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}u^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}$, $y=t^{\frac{-\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}}u^{\frac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}}$: substituant ces valeurs, il viendra $\dfrac{dt}{t}+t^{\frac{\delta m-\gamma n}{\alpha\delta-\beta\gamma}}u^{\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}}\dfrac{du}{u}=0$, ou

$$t^{\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}dt+u^{\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}du=0,$$

équation dont l'intégrale est $\dfrac{t^{\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma n-\delta m}}}{\gamma n-\delta m}+\dfrac{u^{\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha n-\beta m}}}{\alpha n-\beta m}=C$. Il ne reste plus qu'à remplacer t par $x^\alpha y^\beta$ et u par $x^\gamma y^\delta$.

2°. Soit encore l'équation $(y-x)dy=\dfrac{ndx(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

Il n'est pas aisé d'appercevoir dans cet exemple quelle substitution peut amener la séparation des variables, on sent seulement qu'elle doit être telle que les nouvelles variables ne se trouvent pas toutes

deux sous le même radical. Euler fait $y=\frac{x-u}{1+xu}$, d'où il tire

$$y-x=\frac{-u(1+x^2)}{1+xu},\quad 1+yy=\frac{(1+x^2)(1+u^2)}{(1+xu)^2},\quad dy=\frac{dx(1+u^2)-du(1+x^2)}{(1+xu)^2},$$

et enfin $-udx(1+u^2)+udu(1+x^2)=ndx(1+u^2)\sqrt{1+u^2}$, équation qui prend la forme

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{udu}{(1+u^2)(u+n\sqrt{1+u^2})}$$

Recherche du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du premier ordre

552. On pourroit multiplier davantage les exemples, mais toutes ces équations particulières, d'une forme bizarre le plus souvent, ne se rencontrant jamais dans les applications, n'offrent aucun intérêt. Nous passerons donc à une autre méthode due à Euler et qui consiste à multiplier par un facteur convenable les équations différentielles que l'on se propose d'intégrer.

Il faut se rappeler qu'une équation différentielle n'est pas toujours le produit immédiat de la différentiation d'une fonction de deux variables, mais qu'elle résulte en général de l'élimination d'une constante arbitraire, entre l'équation primitive dont elle tire son origine et la différentielle immédiate de cette équation (n°. 50).

L'élimination s'effectue sur le champ lorsque l'équation primitive est sous la forme $u=c$, u désignant une fonction quelconque de x et de y; car, en différentiant, on a $du=0$. Si la fonction du n'a aucun facteur par lequel elle ait pu être divisée, elle conservera toujours la forme de différentielle exacte à deux variables, et en la représentant par $Mdx+Ndy$, elle rendra identique l'équation $\frac{dM}{dy}=\frac{dM}{dx}$ (n°. 84).

Toutes les fois que l'on rencontrera une équation $Mdx+Ndy=0$, ayant ce caractère, il sera facile de remonter à son équation primitive, puisqu'alors on aura $M=\frac{du}{dx}$, et $N=\frac{du}{dy}$, et que l'on en déduira la valeur des différentielles partielles. En prenant celle de la différentielle relative à x, par exemple, il viendra $\frac{du}{dx}dx=Mdx$,

et par conséquent $u=\int M dx+Y$. On ajoute dans ce cas, comme dans celui du n°. 520, une fonction arbitraire de y, puisque l'intégration n'a eu lieu que par rapport à l'une des variables ; mais ici cette fonction se détermine, parce que la fonction u doit encore satisfaire à l'équation $N=\frac{du}{dy}$. L'équation $u=\int M dx+Y$ donne $\frac{du}{dy}=\frac{d\int M dx}{dy}+\frac{dY}{dy}$; représentant $\int M dx$ par v, on aura $\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dy}+\frac{dY}{dy}=N$, d'où on tirera $\frac{dY}{dy}=N-\frac{dv}{dy}$, et en intégrant, $Y=\int\left(N-\frac{dv}{dy}\right)dy$; on trouvera donc $u=\int M dx+\int\left(N-\frac{dv}{dy}\right)dy=c$: telle est l'intégrale de l'équation proposée.

Ce résultat nous fait voir que la fonction $N-\frac{dv}{dy}$ ne doit renfermer que la seule variable y, sans quoi il ne seroit pas vrai, comme on l'a supposé, que Mdx et Ndy fussent les différentielles partielles d'une même fonction u ; en le développant il nous conduira à l'équation de condition $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$, obtenue n°. 50, par une considération inverse.

Il est évident que pour obtenir $\frac{dv}{dy}=\frac{d\int M dx}{dy}$, il faut substituer $y+dy$ dans la fonction $\int M dx$, qui deviendra alors $\int(M+\frac{dM}{dy}dy+\text{etc.})dx=\int M dx+\int\frac{dM}{dy}dx\,dy+\text{etc.}=\int M dx+dy\int\frac{dM}{dy}dx$ etc. puisque le signe $\int$ n'est relatif qu'à la variable x ; on aura donc $\frac{d\int M dx}{dy}=\int\frac{dM}{dy}dx$: substituant cette valeur de $\frac{dv}{dy}$, dans $Y=\int\left(N-\frac{dv}{dy}\right)dy$, il viendra $Y=\int(N-\int\frac{dM}{dy}dx)dy$. En prenant les différentielles, d'abord

par rapport à y, on trouvera $\frac{dY}{dy}=N-\int\frac{dM}{dy}dx$; et différentiant ensuite par rapport à x, on aura enfin $\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}=0$ (*).

553. Soit pour exemple l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{dy}{y}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0;$$

en la comparant à $Mdx+Ndy=0$, on en tirera

$$M=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad N=\frac{1}{y}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

et $\frac{dM}{dy}=\frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{dN}{dx}$; il suit de là que l'équation proposée est la différentielle immédiate d'une équation à deux variables. On aura $\int Mdx=v=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=l(x+\sqrt{x^2+y^2})$,

$$\frac{dv}{dy}=\frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{y}-\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}=N,$$

$$N-\frac{dv}{dy}=0,\qquad Y=\int\left(N-\frac{dv}{dy}\right)dy=0,$$

et enfin $l(x+\sqrt{x^2+y^2})=C$, ou $x+\sqrt{x^2+y^2}=c$.

(*) L'équation $\frac{d\int Mdx}{dy}=\int\frac{dM}{dy}dx$, renferme le théorême donné par Léibnitz pour différentier sous le signe $\int$. Il appeloit ce procédé *differentiatio de curvâ in curvam*, parce que dans la question qu'il se proposoit de résoudre, il passoit d'une courbe à une autre de la même espèce, en faisant varier une constante.

Le théorême de Léibnitz peut se déduire immédiatement de l'équation $\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dydx}$, puisque si on fait $u=\int Mdx$, on aura $\frac{du}{dx}=M$, $\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{dM}{dy}$, et intégrant par rapport à x, on trouvera

$$\int\frac{d^2u}{dxdy}dx=\int\frac{d^2u}{dydx}dx=\frac{du}{dy}=\int\frac{dM}{dy}dx;$$

Considérons

Considérons encore l'équation

$$\frac{dx}{x}+\frac{y^2dx}{x^3}-\frac{ydy}{x^2}+\frac{(ydx-xdy)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{dy}{2y}=0.$$

En la comparant avec la formule $Mdx+Ndy=0$, on a

$$M=\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3},\qquad N=\frac{-y-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}+\frac{1}{2y};$$

et on trouve

$$\frac{dM}{dy}=\frac{2y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{dN}{dx}=\frac{2y+2\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}-\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+y^2}};$$

ces valeurs étant égalées entr'elles et réduites donnent

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}=\frac{2y}{x^3}+\frac{x^2+2y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}},$$ et par conséquent l'équation proposée peut s'intégrer immédiatement. On obtient d'abord

$$\int Mdx=lx-\frac{y^2}{2x^2}+y\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2};$$

mais $\int\frac{ydx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2}=-\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}l\frac{(-y+\sqrt{x^2+y^2})}{x}$;

donc $\int Mdx=lx-\frac{y^2}{2x^2}-\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}l\frac{(-y+\sqrt{x^2+y^2})}{x}=v$.

On trouve ensuite

$$N-\frac{dv}{dy}=-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}+\frac{y^2}{2x^2\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{2y},$$

et enfin $Y=\frac{1}{2}ly$, d'où il résulte

$$u=lx-\frac{y^2}{2x^2}-\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}l\left(\frac{-y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)=C.$$

La forme de ces exemples étoit trop compliquée pour qu'on pût y reconnoître, par la seule inspection, des différentielles complètes, et dans tous les cas semblables il faudra commencer par s'assurer si l'équation proposée satisfait ou non à la condition d'intégrabilité.

§54. Lorsque l'équation primitive n'est pas sous la forme $u=c$, ou que la différentielle $du=0$ renferme des facteurs qui disparoissent, l'équation du premier ordre qui en résulte n'est plus im-

médiatement intégrable. Si on avoit, par exemple, $u=y-cx=0$, on trouveroit $du=dy-c\,dx=0$, et éliminant c, il viendroit $x\,dy-y\,dx=0$, équation qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, puisqu'elle donne $M=-y$, $N=x$, $\frac{dM}{dy}=-1$, $\frac{dN}{dx}=1$.

Mais si on dégage la constante c, on aura $\frac{y}{x}=c$, et en différentiant, $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0$; sous cette forme

$$M=-\frac{y}{x^2},\qquad N=\frac{1}{x},\qquad \frac{dM}{dy}=-\frac{1}{x^2}=\frac{dN}{dx}.$$

On voit donc que l'intégrabilité de l'équation $x\,dy-y\,dx$ tient à la restitution du facteur $\frac{1}{x^2}$, qui a disparu après la différentiation et l'élimination de la constante arbitraire.

En général toute équation différentielle, dans laquelle dx et dy ne passent pas le premier degré, ne peut résulter que de l'élimination de la constante c, dans une équation de la forme $P+cQ=0$, P et Q désignant des fonctions quelconques de x et de y. On trouve par cette élimination $Q\,dP-P\,dQ=0$, tandis qu'en différentiant l'équation $\frac{P}{Q}=c$, on auroit obtenu $\frac{Q\,dP-P\,dQ}{Q^2}=0$; la première manière d'opérer fait donc disparoître le facteur $\frac{1}{Q^2}$, et avec lui s'en vont aussi tous les facteurs qui peuvent être communs aux deux quantités $Q\,dP$ et $P\,dQ$.

Il suit de ce qui précède, que lorsque l'équation $M\,dx+M\,dy=0$ ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, c'est que la différentiation et l'élimination de la constante arbitraire contenue dans l'équation primitive, ont fait disparoître un facteur qui, s'il étoit connu et restitué, rendroit le premier membre de l'équation proposée une différentielle complète à deux variables. Soit z ce facteur on aura donc $zM\,dx+zN\,dy=du$, u étant une fonction primitive de x et de y, et par conséquent $\frac{d.zM}{dy}=\frac{d.zN}{dx}$. En développant

cette dernière équation, on trouvera

$$M\frac{d\zeta}{dy}+\zeta\frac{dM}{dy}=N\frac{d\zeta}{dx}+\zeta\frac{dN}{dx};$$

ou $$M\frac{d\zeta}{dy}-N\frac{d\zeta}{dx}+\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)\zeta=0.\ (A).$$

Si l'on pouvoit en général tirer de cette équation une valeur de ζ, l'intégration des équations différentielles quelconques du premier ordre pourroit s'effectuer par le procédé du n°. précédent. Mais l'équation (A) est presque toujours plus difficile à traiter que la proposée, puisque la fonction ζ qu'elle renferme dépend de deux variables et a deux coefficiens différentiels, et qu'elle est par conséquent de l'espèce de celles dont on a indiqué la formation n°. 83, et qui appartiennent à des familles de surfaces courbes (n°. 334 et suiv.) Nous ne saurions donc pour le moment entreprendre sa résolution qui, comme on le verra dans la suite, nous ramèneroit au point d'où nous sommes partis, mais nous allons faire connoître quelques-unes des propriétés du facteur ζ.

555. Il est toujours facile de trouver le facteur ζ, lorsque l'on connoît l'équation primitive correspondante à l'équation différentielle proposée. Pour cela il faut mettre cette équation primitive sous la forme $u=c$, c étant la constante arbitraire. En différentiant on trouve $du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0$, et comparant avec

$\zeta Mdx+\zeta Ndy=du$, il vient $\zeta=\frac{\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy}{Mdx+Ndy}$; le quotient est indépendant des différentielles dx et dy; on l'obtient encore en égalant entr'elles les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, tirées des équations

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0,\qquad Mdx+Mdy=0,$$

ce qui donne $\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}=\frac{M}{N}$, et fait voir par conséquent que si M et N

n'ont aucun facteur commun, ζ sera le plus grand diviseur commun des coefficiens différentiels $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$.

Connoissant une valeur de ζ, on en déduit une infinité d'autres; en observant que si on multiplie les deux membres de l'équation $\zeta M dx + \zeta M dy = du$, par une fonction quelconque de u, que nous désignerons par $\varphi(u)$, les deux membres du résultat $\zeta\varphi(u) M dx + \zeta\varphi(u) N dy = \varphi(u) du$, seront aussi des différentielles complètes; ainsi ζ étant un facteur propre à rendre intégrable l'équation $Mdx + Ndy$, le produit $\zeta\varphi(u)$ jouira de la même propriété.

556. Il y a des cas où le facteur ζ ne doit renfermer que l'une des variables x ou y, et alors il est facile d'en obtenir l'expression au moyen de l'équation (A). Supposons en effet dans cette équation $\frac{d\zeta}{dy} = 0$, elle deviendra $-N\frac{d\zeta}{dx} + \zeta\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0$, et on en tirera $\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) dx$, équation qui aura lieu si la quantité $\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)$ se réduit à une fonction de x; en représentant cette fonction par X, et en intégrant on trouvera $l\zeta = \int X dx$, ou $\zeta = e^{\int X dx}$.

Appliquons cette formule à l'équation $dy + Py\,dx = Q\,dx$: nous aurons $M = Py - Q$, $N = 1$, $\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = P$; et par conséquent $\zeta = e^{\int P dx}$; multipliant donc l'équation $dy + Py\,dx - Q\,dx = 0$ par $e^{\int P dx}$, nous trouverons $e^{\int P dx} dy + (Py - Q) e^{\int P dx} dx = 0$; intégrant le terme $e^{\int P dx} dy$, par rapport à y, nous obtiendrons $u = y e^{\int P dx} + X$, X étant une fonction de x, déterminée par l'équation

$$\frac{d.ye^{\int P dx}}{dx} + \frac{dX}{dx} = (Py - Q) e^{\int P dx},$$

de laquelle on tire

$$\frac{dX}{dx} = -e^{\int P dx} Q; \qquad X = -\int e^{\int P dx} Q\,dx;$$

et par conséquent $y e^{\int P dx} - \int e^{\int P dx} Q\,dx = C$, ou comme dans le n°. 547, $y = e^{-\int P dx}\left(\int e^{\int P dx} Q\,dx + C\right)$.

Nous ne nous arrêterons point au cas où le facteur ζ ne devroit renfermer que la variable y; on voit aisément que son expression seroit alors $\zeta = e^{\int Y dy}$, en faisant $Y = \frac{1}{M}\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)$, et que ce cas n'auroit lieu qu'autant que Y seroit absolument indépendant de x.

557. On découvre encore quelquefois assez facilement le facteur, lorsque l'équation différentielle proposée se partage en deux parties pour chacune desquelles on sait le trouver. Supposons qu'on ait $P dx + Q dy + P_{,} dx + Q_{,} dy = 0$, et que l'on connoisse les facteurs qui peuvent rendre intégrable séparément chacune des différentielles $P dx + Q dy$ et $P_{,} dx + Q_{,} dy$, en sorte que $\zeta P dx + \zeta Q dy = du$ et $\zeta_{,} P_{,} dx + \zeta_{,} Q_{,} dy = du_{,}$; l'expression $\zeta \varphi(u)$ donnera tous les facteurs relatifs à la première (n°. préc.), et $\zeta_{,} \varphi_{,}(u_{,})$ tous ceux qui sont relatifs à la seconde, et si l'on peut déterminer les formes des fonctions φ et $\varphi_{,}$, de manière que ces expressions deviennent identiques, on aura alors un des facteurs qui rendent intégrable la différentielle proposée. L'exemple suivant éclaircira suffisamment ceci.

Soit l'équation différentielle $\alpha y dx + \beta x dy = x^m y^n (\gamma y dx + \delta x dy)$. On voit sans peine que le premier membre devient intégrable lorsqu'on le divise par xy, puisqu'il prend alors la forme $\alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y}$; on trouve donc en faisant $\zeta = \frac{1}{xy}$, $u = \alpha l x + \beta l y = l(x^\alpha y^\beta)$ et $\zeta \varphi(u) = \frac{1}{xy} \varphi(x^\alpha y^\beta)$. Le second membre de la proposée s'integre aussi en le divisant par $x^{m+1} y^{n+1}$, ce qui donne

$$\zeta_{,} = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}, \quad u_{,} = l(x^\gamma y^\delta), \text{ et } \zeta_{,} \varphi_{,}(u_{,}) = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} \varphi_{,}(x^\gamma y^\delta).$$

Pour rendre identiques les expressions $\zeta \varphi(u)$, $\zeta_{,} \varphi_{,}(u_{,})$, il faut faire $\varphi(x^\alpha y^\beta) = x^{k\alpha} y^{k\beta}$, $\varphi_{,}(x^\gamma y^\delta) = x^{k'\gamma} y^{k'\delta}$, et en égalant l'une à l'autre il viendra $x^{k\alpha - 1} y^{k\beta - 1} = x^{k'\gamma - m - 1} y^{k'\delta - n - 1}$, d'où on tirera

$$k\alpha - 1 = k'\gamma - m - 1, \qquad k\beta - 1 = k'\delta - n - 1,$$

ou $k=\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}$, $k'=\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}$; le facteur cherché sera donc $x^{\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}y^{\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}$. En multipliant le premier membre de la proposée par $x^{k\alpha-1}y^{k\beta-1}$, et le second par $x^{k'\gamma-m-1}y^{k'\delta-n-1}$ elle se changera en $x^{k\alpha-1}y^{k\beta-1}(\alpha y dx+\beta x dy)=x^{k'\gamma-1}y^{k'\delta-1}(\gamma y dx+\delta x dy)$, résultat dont l'intégrale est $\frac{1}{k}x^{k\alpha}y^{k\beta}=\frac{1}{k'}x^{k'\gamma}y^{k'\delta}+C$. Si $k=0$, c'est-à-dire, si $\gamma n=\delta m$, cette intégrale devient logarithmique, car on a alors $1x^{\alpha}y^{\beta}=\frac{1}{k}x^{k'\gamma}y^{k'\delta}$.

Lorsque $\alpha\delta=\beta\gamma$, les valeurs de k et de k' sont infinies; mais puisque dans ce cas $\delta=\frac{\beta\gamma}{\alpha}$, l'équation proposée devient $\alpha y dx+\beta x dy=\frac{\gamma}{\alpha}x^m y^n(\alpha y dx+\beta x dy)$ et prend la forme $(\alpha y dx+\beta x dy)(1-\frac{\gamma}{\alpha}x^m y^n)=0$. Elle offre ainsi deux solutions: l'une s'obtient par l'intégration du facteur $\alpha y dx+\beta x dy$, qui donne $x^{\alpha}y^{\beta}=C$; l'autre, qui ne renferme point de constante arbitraire, est le facteur $1-\frac{\gamma}{\alpha}x^m y^n=0$ lui-même. C'est le premier résultat qui est la véritable intégrale, parce qu'il renferme une constante arbitraire; le second n'est qu'une solution particulière: il en seroit de même pour toute équation différentielle qui se décomposeroit en facteurs.

558. Le facteur ζ se présente pour ainsi dire de lui-même dans les équations différentielles homogènes. Si $Mdx+Ndy=0$ est une équation de ce genre, et que la somme des exposans de x et de y dans M et dans N soit égale à m, en supposant que ζ soit aussi une fonction homogène du degré n, et faisant $\zeta Mdx+\zeta Ndy=du$, il résulte du théorême démontré n°. 91, que $\zeta Mx+\zeta Ny=(m+n+1)u$, puisque le degré de la fonction u sera nécessairement plus élevé de l'unité que celui des fonctions ζM et ζN. Divisant donc la première équation par la seconde, il viendra $\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\frac{1}{m+n+1}\cdot\frac{du}{u}$, et comme le second

membre de ce résultat est une différentielle complète, il faudra que le premier membre en soit pareillement une, d'où il suit que $\frac{1}{Mx+Ny}$ sera un des facteurs propres à rendre intégrable l'équation $Mdx+Ndy=0$.

Il est facile de s'assurer que la différentielle $\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}$ satisfait à la condition d'intégrabilité, lorsque M et N sont des fonctions homogènes, c'est-à-dire, qu'en faisant pour abréger $\frac{M}{Mx+Ny}=M_1$, $\frac{N}{Mx+Ny}=N_1$, on a $\frac{dM_1}{dy}=\frac{dN_1}{dx}$. En effet il vient

$$\frac{dM_1}{dy}=\frac{1}{(Mx+Ny)^2}\left[Ny\frac{dM}{dy}-My\frac{dN}{dy}-MN\right]$$

$$\frac{dN_1}{dx}=\frac{1}{(Mx+Ny)^2}\left[Mx\frac{dN}{dx}-Nx\frac{dM}{dx}-MN\right];$$

mais il résulte de la propriété des fonctions homogènes

$$mM=x\frac{dM}{dx}+y\frac{dM}{dy},\qquad mN=x\frac{dN}{dx}+y\frac{dN}{dx}.$$

Si on prend dans ces dernières équations les valeurs de $\frac{dM}{dy}$ et de $y\frac{dN}{dy}$, pour les substituer dans celle de $\frac{dM_1}{dy}$, il deviendra évident que $\frac{dM_1}{dy}=\frac{dN_1}{dx}$.

Lorsque la fonction $\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=M_1dx+N_1dy$, intégrable par elle-même, se trouve algébrique et du degré m', on parvient sur le champ à l'intégrale par le moyen du théorême démontré n°. 91, puisqu'on a $(m'+1)u=M_1x+M_1y$, et par conséquent $M_1x+M_1y=C$; il faut pourtant excepter le cas où $m'=-1$, dans lequel l'intégrale cherchée est transcendante. Soit pour exemple $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$; en suivant le procédé indiqué ci-dessus on trouveroit $u=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$, ce qui n'apprendroit rien, tandis que le véritable résultat est $\frac{1}{2}l(x^2+y^2)=C$.

559. On peut encore trouver le facteur ζ, lorsque l'on est parvenu à séparer les variables dans l'équation différentielle proposée. Si par le moyen d'une transformation quelconque on a changé $Mdx+Ndy$ en $Kds+Ldt$, et que la séparation des variables s et t s'opère en divisant la dernière fonction par V, c'est-à-dire, que $\frac{K}{V}$ soit une fonction de s seule, et $\frac{L}{V}$ une fonction de t seul; il est évident que le résultat que l'on obtiendroit en remettant au lieu de s et de t leurs valeurs en x et y, dans l'expression $\frac{Kds+Ldt}{V}$, qui est alors une différentielle complète, sera aussi une différentielle complète; mais par cette substitution $Kds+Ldt$ redeviendra $Mdx+Ndy$, donc la valeur que prendra alors V sera celle du facteur ζ propre à rendre $Mdx+Ndy$ intégrable. Voici quelques exemples de ce cas.

1°. Si l'équation $Mdx+Ndy=0$ est homogène, on fera, d'après le n°. 545, $y=ux$, et on aura $M=Ux^m$, $N=U_1x^m$, U et U_1 étant des fonctions de u seul; en substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on ne supprimera point le facteur commun x^m, car dans la recherche qui nous occupe, il n'en faut omettre aucun, et il viendra $(U+uU_1)x^m dx+U_1x^{m+1}du=0$. Il est aisé de voir que l'on rendra cette dernière équation intégrable en la divisant par $(U+uU_1)x^{m+1}$, puisqu'elle devient par là $\frac{dx}{x}+\frac{U_1du}{U+uU_1}=0$, et il s'ensuit que $\frac{1}{(U+uU_1)x^{m+1}}$ est le facteur cherché; remettant pour u, U, U_1 leurs valeurs $\frac{y}{x}$, $\frac{M}{x^m}$ et $\frac{N}{x^m}$, il se change en $\frac{1}{Mx+Ny}$, résultat conforme à celui du n°. précédent.

2°. Soit encore l'équation $ydx-xdy+ax^ny\,dy(x^n+b)^{\frac{-1}{n}}=0$; les variables de cette équation se séparent, lorsqu'on fait $\frac{x}{(x^n+b)^{\frac{1}{n}}}=vy$, ce qui donne $x^n=\frac{bv^ny^n}{1-v^ny^n}$ et $\frac{y^2dv+(ab+v)v^ny^{n+1}dy}{1-v^ny^n}=0$. Pour isoler les variables y et v il suffit

suffit de multiplier le résultat ci-dessus par $\frac{1-v^n y^n}{y^n v^n (ab+v)}$; on aura ainsi $\frac{dv}{v^n(ab+v)} + y^{n-1}dy = 0$. On substituera ensuite dans l'expression $\frac{1-v^n y^n}{y^n v^n (ab+v)}$, au lieu de v sa valeur $\frac{x}{y(x^n+b)^{\frac{1}{n}}}$, afin d'obtenir celle du facteur qui convient immédiatement à l'équation proposée.

560. L'intégration de l'équation homogène va nous conduire à celle d'une classe assez étendue d'équations différentielles. De ce que $\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}$ est une différentielle complète, il s'ensuit, ainsi que l'on peut s'en assurer *à priori*, que la quantité $\frac{dx+\frac{N}{M}dy}{x+\frac{N}{M}y}$ en est pareillement une. D'un autre côté, puisque les fonctions M et N, étant homogènes, se réduisent à la forme $x^m U$, $x^m U_1$, lorsqu'on y fait $\frac{y}{x} = u$, la quantité $\frac{N}{M}$ est nécessairement de la forme $F\left(\frac{x}{y}\right)$; F désignant une fonction quelconque. La différentielle $\frac{dx+F\left(\frac{x}{y}\right)dy}{x+yF\left(\frac{x}{y}\right)}$ sera donc immédiatement intégrable: on peut aussi lui donner la forme $\frac{\frac{dx}{x}+\frac{1}{x}F\left(\frac{x}{y}\right)dy}{1+\frac{y}{x}F\left(\frac{x}{y}\right)}$; changeant ensuite $F\left(\frac{x}{y}\right)$ en $\frac{x}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)$, ce qui est permis, il viendra $\frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)}{1+f\left(\frac{x}{y}\right)}$; mais prenant à la place de $f\left(\frac{x}{y}\right)$, $f\left(1\frac{x}{y}\right)$, ou $f\left(\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dy}{y}\right)$, et faisant

$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{T}$, $\frac{dy}{y}=\frac{du}{U}$, en désignant par T une fonction de t, et par U une fonction de u, on aura

$$\frac{\frac{dt}{T}+\frac{du}{U}f\left(\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}\right)}{1+f\left(\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}\right)}=\frac{dt+\frac{Tdu}{U}f\left(\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}\right)}{T+Tf\left(\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}\right)}.$$

La différentielle du second membre sera intégrable quelles que soient les fonctions T et U; et par conséquent si dans l'équation $Pdt+Qdu=0$, on a $\frac{Q}{P}=\frac{T}{U}f\left(\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}\right)$, cette équation deviendra une différentielle complète au moyen du facteur $\frac{1}{PT+QU}$. On voit facilement que la condition ci-dessus sera remplie quelles que soient les fonctions φ et ψ, si

$$P=\frac{V}{T}\varphi\left(\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}\right),\quad Q=\frac{V}{U}\psi\left(\int\frac{dt}{T}-\int\frac{du}{U}\right).$$

561. La recherche du n°. 559 n'avoit pour objet que de montrer la liaison et l'accord des deux méthodes que nous avons déjà fait connoître; car lorsque les variables de l'équation proposée sont séparées, son intégration ne dépend plus que des formules traitées dans le chapitre premier, et l'expression du facteur est à peu près inutile; cependant la forme sous laquelle il se présente, peut quelquefois faire deviner celle du facteur qui rendroit intégrables certaines équations analogues à celle qu'on s'est proposée, mais dont on ne sait pas séparer les variables. Le Calcul intégral est si peu avancé par rapport aux équations, que nous n'avons guères à offrir sur cet objet que des tentatives dont le succès est souvent très-borné; mais nous ne saurions néanmoins les passer sous silence, parce que ce sont des indices qui peuvent mettre sur la voie et conduire peut-être à des découvertes utiles.

Après qu'Euler eut épuisé les cas dans lesquels on trouve le facteur *à priori*, il renversa la question et se proposa de déterminer l'équation différentielle, par le facteur qui la rend intégrable: voici quelques-uns des exemples dont il s'est occupé.

Soit l'équation $Pydx+(y+Q)dy=0$, P et Q désignant des fonctions de x, qu'il faut déterminer de manière que cette équation devienne intégrable lorsqu'on la multiplie par un facteur de la forme $\frac{1}{y^3+Ry^2+Sy}$, R et S étant aussi des fonctions de x à trouver par la même condition, on aura l'équation

$$\frac{d.\frac{Py}{y^3+Ry^2+Sy}}{dy}=\frac{d.\frac{(y+Q)}{y^3+Ry^2+Sy}}{dx};$$

dont le développement est

$$-2Py^3-PRy^2=(y^3+Ry^2+Sy)\frac{dQ}{dx}-(y+Q)\left(y^2\frac{dR}{dx}+y\frac{dS}{dx}\right), \text{ ou}$$

$$\left.\begin{aligned}\left(2P+\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dx}\right)y^3+\left(PR+R\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dR}{dx}-\frac{dS}{dx}\right)y^2\\+\left(S\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dS}{dx}\right)y\end{aligned}\right\}=0;$$

lorsqu'on l'ordonne par rapport à y. Pour qu'il soit identiquement nul, il faut qu'on ait

$$2P+\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dx}=0, \quad PR+R\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dR}{dx}-\frac{dS}{dx}=0$$

$$S\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dS}{dx}=0,$$

équations d'après lesquelles il faut déterminer trois des fonctions P, Q, R, S. La dernière donne $\frac{dS}{S}=\frac{dQ}{Q}$, d'où on tire $S=aQ$, a étant une constante arbitraire (n°. 544); substituant cette valeur dans les deux autres, elles deviennent

$$2Pdx+dQ-dR=0, \quad PRdx+RdQ-QdR-adQ=0;$$

et après l'élimination de P, on aura

$$(2Q-R)dR+(2a-R)dQ=0.$$

En regardant Q et R comme les deux variables de cette équation, on trouvera que le facteur qui la rend intégrable peut ne renfermer que R seulement, et qu'alors il a pour expression $\frac{1}{(2a-R)^3}$ (n°. 556).

Procédant ensuite à l'intégration, en commençant par le terme $\frac{dQ}{(2a-R)^2}$, on obtiendra (n°. 552) $\frac{Q}{(2a-R)^2}-\int\frac{RdR}{(2a-R)^3}=b$, et comme $\int\frac{RdR}{(2a-R)^3}=-\int\frac{dR}{(2a-R)^2}+\int\frac{dR}{(2a-R)^3}$; on aura enfin $\frac{Q}{(2a-R)^2}+\frac{1}{2a-R}-\frac{a}{(2a-R)^2}=b$, d'où on tirera $Q=R-a+b(2a-R)^2$; mais puisque $2Pdx+dQ-dR=0$, la valeur précédente de Q donnera $P=b(2a-R)\frac{dR}{dx}$. Prenant donc pour R une fonction quelconque de x, il en résultera

$$P=b(2a-R)\frac{dR}{dx},\qquad Q=R-a+b(2a-R)^2,$$
$$S=a(R-a)+ab(2a-R)^2;$$

l'équation proposée se changera en

$$by(2a-R)dR+[R-a+b(2a-R)^2+y]dy,$$

et deviendra intégrable au moyen du facteur

$$\frac{1}{y^3+Ry^2+[R-a+b(2a-R)^2]ay},$$

quelle que soit la fonction R.

562. Déterminons encore les fonctions P, Q et R dans l'équation $Pydx+(Qy+R)dy=0$, de manière qu'elle devienne intégrable, lorsqu'on la multiplie par un facteur de la forme $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$, S désignant, comme les lettres P, Q et R, une fonction de x. L'équation de condition $\frac{d.Mz}{dy}=\frac{d.Nz}{dx}$ (n°. 554) devient

$$(m+1)Py^m(1+Sy)-nPSy^{m+1}=(1+Sy)\left(y^{m+1}\frac{dQ}{dx}+y^m\frac{dR}{dx}\right)-ny\frac{dS}{dx}(Qy^{m+1}+Ry^m);$$

en l'ordonnant par rapport à y, on aura

$$\left[(m+1)P-\frac{dR}{dx}\right]y^m+\left[(m+1-n)PS-\frac{dQ}{dx}-S\frac{dR}{dx}+nR\frac{dS}{dx}\right]y^{m+1}$$
$$-\left(S\frac{dQ}{dx}-nQ\frac{dS}{dx}\right)y^{m+2}=0,$$

d'où on tirera

$$(m+1)P-\frac{dR}{dx}=0, \quad S\left[(m+1)P-\frac{dR}{dx}\right]-nPS-\frac{dQ}{dx}+nR\frac{dS}{dx}=0;$$

$$S\frac{dQ}{dx}-nQ\frac{dS}{dx}=0.$$

La première et la dernière de ces équations donnent

$$Pdx=\frac{dR}{m+1}, \qquad Q=aS^n \text{ et } dQ=naS^{n-1}dS,$$

substituant ces valeurs dans la seconde, qui se réduit à

$$-nPS-\frac{dQ}{dx}+nR\frac{dS}{dx}=0,$$

on trouvera $SdR-(m+1)RdS+(m+1)aS^{n-1}dS=0$;

équation qui devient intégrable lorsqu'on la divise par S^{m+1} et conduit à $\frac{R}{S^{m+1}}=b-\frac{(m+1)aS^{n-m-1}}{n-m-2}$: comme on peut changer la forme des constantes arbitraires, nous substituerons $(m+2-n)a$, au lieu de a, afin d'avoir

$$Q=(m+2-n)aS^n,$$
$$R=bS^{m+1}+(m+1)aS^{n-1},$$

et $$P=bS^m\frac{dS}{dx}+(n-1)aS^{n-1}\frac{dS}{dx}.$$

Pour devenir intégrable au moyen du facteur $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$, l'équation proposée prendra donc la forme

$$ydS(bS^n+(n-1)aS^{n-1})+dy[(m-n+2)aS^ny+bS^{m+1}+(m+1)aS^{n-1}]=0.$$

563. Les deux exemples précédens suffisent pour faire connoître l'esprit de la méthode, montrer d'où dépend son succès et quelles difficultés peuvent se rencontrer dans son application. On voit d'abord qu'il faut se donner, par rapport à l'une des variables, la forme de l'équation proposée et celle du facteur, et que ces formes doivent être telles que l'équation de condition, décomposée en autant d'équations particulières qu'elle contient de puissances de cette variable, n'en donne pas plus qu'il n'y a de fonctions indéterminées; il est même nécessaire pour plus de généralité d'en

avoir une de moins, et il faut ensuite que ces équations puissent s'intégrer.

Pour tirer de cette méthode tout le parti dont elle paroît susceptible, l'idée qui se présente naturellement est de classer par ordre les diverses formes que peut avoir une équation du premier ordre et de chercher celles des facteurs qui conviennent à chacun de ces cas ; mais on reconnoît bientôt, après un examen un peu attentif, que le détail seroit immense, et que le plus souvent on seroit arrêté dans la détermination des coefficiens de y, par des équations qu'on ne sauroit intégrer par les méthodes connues. C'est ce dont le lecteur se convaincra facilement sur l'équation $(Py+Q)dx+ydy=0$, qui n'est cependant pas beaucoup plus compliquée que celle du premier degré (n°. 547).

Les facteurs à considérer, rangés d'après leur degré de simplicité, se présentent dans l'ordre suivant :

$(y+R)^n$, $(y^2+Ry+S)^n$, $(y^3+Ry^2+Sy+T)^n$, etc.

On a pour le premier

$$\frac{d[(Py+Q)(y+R)^n]}{dy}=\frac{d.y(y+R)^n}{dx}.$$

En développant et en égalant à zéro le coefficient de chaque puissance de y, on trouve $(n+1)P-n\frac{dR}{dx}=0$, $PR+nQ=0$, d'où on tirera sans aucune intégration

$P=\frac{n}{n+1}\frac{dR}{dx}$, $Q=-\frac{1}{n+1}R\frac{dR}{dx}$, et par là l'équation proposée deviendra $\frac{1}{n+1}(nydR-RdR)+ydy=0$. Il est à propos de remarquer que cette dernière équation est homogène par rapport à R et à y, et pourroit s'intégrer immédiatement par les procédés des n^os^ 545, 558.

Lorsqu'on fait usage du second facteur, l'équation de condition donne par son développement

$(2n+1)P-n\frac{dR}{dx}=0$, $(n+1)PR+2nQ-n\frac{dS}{dx}=0$, $PS+nQR=0$;

et il vient par conséquent

$$Pdx=\frac{n}{2n+1}dR,\ \frac{n+1}{2n+1}RdR+2Qdx-dS=0,\ \frac{SdR}{2n+1}+QRdx=0:$$

chassant Q des deux dernières équations, on trouvera

$$(2n+1)RdS+2SdR-(n+1)R^2dR=0.$$

Cette équation deviendra intégrable en la multipliant par $\frac{R^{\frac{1-4n}{2n+1}}}{2n+1}$,

et donne $R^{\frac{2}{2n+1}}S-\frac{1}{4}R^{\frac{4n+4}{2n+1}}=a$, d'où $S=\frac{1}{4}R^2+aR^{\frac{-2}{2n+1}}$,

$$Q=-\frac{1}{4(2n+1)}R\frac{dR}{dx}-\frac{a}{2n+1}R^{\frac{-2n-3}{2n+1}}\frac{dR}{dx},\ P=\frac{n}{2n+1}\frac{dR}{dx}.$$

Nous aurons donc l'équation

$$(ny-\tfrac{1}{4}R-aR^{\frac{-2n-3}{2n+1}})dR+(2n+1)ydy=0,$$

que le facteur $(y^2+Ry+\frac{1}{4}R^2+aR^{\frac{-2}{2n+1}})^\alpha$ rendra une différentielle complète.

Multiplions maintenant l'équation proposée par le facteur $(y^3+Ry^2+Sy+T)^\alpha$; l'équation de condition étant développée pour ce cas nous donnera les suivantes

$$(3n+1)P-n\frac{dR}{dx}=0,\quad (2n+1)PR+3nQ-n\frac{dS}{dx}=0$$

$$(n+1)PS+2nQR-n\frac{dT}{dx}=0,\quad PT+nQS=0.$$

Nous déduirons de la première et de la dernière,

$$P=\frac{n}{3n+1}\frac{dR}{dx},\quad Q=-\frac{T}{(3n+1)S}\frac{dR}{dx};$$

les deux autres deviennent d'après ces valeurs

$$(2n+1)SRdR-3TdR-(3n+1)SdS=0,$$

$$(n+1)S^2dR-2TRdR-(3n+1)SdT=0:$$

pour en tirer par l'élimination un résultat qui ne contienne que deux des variables R, S et T, il faut descendre jusqu'au second ordre (n°. 78). En effet, si on prend par exemple la valeur de T dans la première, pour la substituer dans la seconde, on arrivera à une équation finale du second ordre entre R et S; nous ne poursuivrons donc pas plus loin cette recherche.

564. En donnant au facteur la forme $(y+R)^m(y+S)^n$, on a plus de succès ; on parvient aux équations

$$(m+n+1)P-m\frac{dR}{dx}-n\frac{dS}{dx}=0,$$

$$(n+1)PR+(m+1)PS+(m+n)Q-mS\frac{dR}{dx}-nR\frac{dS}{dx}=0,$$

$$PRS+mQS+nQR=0,$$

dont la première et la troisième donnent

$$Pdx=\frac{mdR+ndS}{m+n+1}, \qquad Qdx=-\frac{RS(mdR+ndS)}{(m+n+1)(mS+nR)};$$

substituant dans la seconde, il vient, après les réductions,

$$[(n+1)R^2+(m-n-1)RS-mS^2]dR+[(m+1)S^2+(n-m-1)SR-nR^2]dS=0.$$

On peut simplifier ce résultat en le divisant par $R-S$; il devient alors $[(n+1)R+mS]dR-[(m+1)S+nR]dS=0$, et comme il est homogène par rapport aux variables R et S, il s'intégrera après avoir été divisé par $(n+1)R^2+mRS-(m+1)S^2-nRS$, ou $(R-S)[(n+1)R+(m+1)S]$ (n°. 558). Si on décompose en fractions simples la fraction produite par cette opération, on aura

$$\frac{(m+n+1)(dR-dS)}{R-S}+\frac{(n+1)dR+(m+1)dS}{(n+1)R+(m+1)S}=0,$$

et en intégrant on trouvera

$$(R-S)^{m+n+1}[(n+1)R+(m+1)S]=a.$$

Si pour abréger on fait $R-S=u$, il s'ensuivra

$$(n+1)R+(m+1)S=\frac{a}{u^{m+n+1}},$$

d'où $R=\frac{(m+1)u}{m+n+2}+\frac{a}{u^{m+n+1}}$, $\quad S=-\frac{(n+1)u}{m+n+2}+\frac{a}{u^{m+n+1}}$,

$$Pdx=\frac{(m-n)du}{m+n+2}-\frac{(m+n)adu}{u^{m+n+2}},$$

$$Qdx=\frac{du}{u}\left[\frac{a}{u^{m+n+1}}+\frac{(m+1)u}{m+n+2}\right]\left[\frac{a}{u^{m+n+1}}-\frac{(n+1)u}{m+n+2}\right];$$

mettant ces valeurs dans l'équation proposée, elle se changera en

$$\left.\begin{aligned}&ydu\left[\frac{m-n}{m+n+2}-\frac{(m+n)a}{u^{m+n+2}}\right]\\&+\frac{du}{u}\left[\frac{a^2}{u^{2m+2n+2}}+\frac{(m-n)a}{(m+n+2)u^{m+n}}-\frac{(m+1)(n+1)u^2}{(m+n+2)^2}\right]+ydy\end{aligned}\right\}=0,$$

et

et son facteur deviendra

$$\left[y+\frac{a}{u^{m+n+1}}+\frac{(m+1)u}{m+n+2}\right]^m\left[y+\frac{a}{u^{m+n+1}}-\frac{(n+1)u}{m+n+2}\right]^n.$$

565. Considérons en dernier lieu l'équation $dy+y^2dx+Xdx=0$; et multiplions-la par le facteur $\frac{P}{y^2+2Qy+R}$. Nous tirerons de l'équation de condition, ordonnée suivant les puissances de y,

$$2PQ-\frac{dP}{dx}=0, \qquad 2PR-2PX-2Q\frac{dP}{dx}+2P\frac{dQ}{dx}=0;$$

$$-2PQX-R\frac{dP}{dx}+P\frac{dR}{dx}=0;$$

prenant dans chacune de ces dernières la valeur de $\frac{dP}{P}$, nous trouverons

$$\frac{dP}{P}=2Qdx=\frac{Rdx-Xdx+dQ}{Q}=\frac{dR-2QXdx}{R};$$

d'où $2Qdx=\frac{dR-2QXdx}{R}$, et par conséquent

$dx=\frac{dR}{2Q(R+X)}$. Par le moyen de cette valeur nous donnerons à l'équation $2Qdx=\frac{Rdx-Xdx+dQ}{Q}$ la forme

$$2Q^2dR=RdR-XdR+2QRdQ+2QXdQ;$$

afin d'en déduire $X=\frac{2Q^2dR-2QRdQ-RdR}{2QdQ-dR}$; puis

$$dx=\frac{2QdQ-dR}{4Q(Q^2-R)}, \qquad \frac{dP}{P}=\frac{2QdQ-dR}{2(Q^2-R)}.$$

Faisons pour abréger $Q^2-R=S$, il viendra

$$dx=\frac{dS}{4QS}, \qquad X=\frac{4SQdQ}{dS}-Q^2-S, \qquad R=Q^2-S;$$

$\frac{dP}{P}=\frac{1}{2}\frac{dS}{S}$ et $P=a\sqrt{S}$: en supposant $a=1$, l'équation proposée et son facteur seront respectivement

$$dy+\frac{y^2dS}{4QS}+dQ-\frac{(Q^2+S)dS}{4QS}=0, \qquad \frac{\sqrt{S}}{(y+Q)^2-S};$$

L'équation $dx=\frac{dS}{4QS}$ donne aussi $Q=\frac{1}{4S}\frac{dS}{dx}$, $dQ=\frac{SdSd^2S-dS^3}{4S^2dx^2}$;

et si l'on met cette valeur dans les résultats ci-dessus, ils ne dépendront plus que de la fonction S, qui pourra être composée comme on le voudra, en x.

La transformée s'intégre facilement dans l'état où nous venons de l'obtenir. Si, après l'avoir multipliée par son facteur, on prend, par rapport à y seulement, l'intégrale du terme $\frac{dy\sqrt{S}}{(y+Q)^2-S}$, et que l'on ajoute une fonction arbitraire V, pour représenter les termes qui ne doivent contenir que les quantités Q et S auxquelles on n'a point eu égard, on trouvera $\frac{1}{2}l\left(\frac{y+Q-\sqrt{S}}{y+Q+\sqrt{S}}\right)+V=C$. Différentiant ensuite en ne faisant varier que Q, S et V, comparant le résultat avec les termes affectés de dQ et de dS dans l'équation proposée et qui sont

$$\frac{y^2dS+4SQdQ-(Q^2+S)dS}{4QS}\cdot\frac{\sqrt{S}}{(y+Q)^2-S};$$

on aura après les réductions $dV=\frac{dS}{4Q\sqrt{S}}$, ce qui donnera pour l'intégrale demandée $\frac{1}{2}l\left(\frac{y+Q-\sqrt{S}}{y+Q+\sqrt{S}}\right)+\frac{1}{4}\int\frac{dS}{Q\sqrt{S}}=C$.

La supposition de $R=Q^2$ donne à l'équation proposée une forme très-simple, et demande à être traitée *à priori*, parce que les valeurs de dx, de X, de dP, paroissent alors $\frac{0}{0}$ ou infinies. En remontant aux équations déduites immédiatement de l'équation de condition, on a

$$\frac{dP}{P}=2Qdx=\frac{Q^2dx-Xdx+dQ}{Q}=\frac{2dQ-2Xdx}{Q},$$

et les deux équations

$$2Qdx=\frac{Q^2dx-Xdx+dQ}{Q},\qquad 2Qdx=\frac{2dQ-2Xdx}{Q},$$

n'en font qu'une seule, savoir: $Q^2dx+Xdx-dQ=0$, de laquelle on tire $Xdx=dQ-Q^2dx$; l'équation proposée devient alors $dy+y^2dx+dQ-Q^2dx=0$, et $dy+y^2dx-dQ-Q^2dx=0$; si l'on suppose Q négatif. De plus comme de $\frac{dP}{P}=2Qdx$, il

suit $P=e^{\int Q\,dx}$, le facteur se changera en $\frac{e^{\int Q\,dx}}{(y+Q)^n}$ pour le premier cas, et en $\frac{e^{-\int Q\,dx}}{(y-Q)^n}$ pour le deuxième.

566. Tels sont, à peu près, tous les cas dans lesquels on peut intégrer les équations de la forme $M\,dx+N\,dy=0$; l'Analyse est encore si imparfaite, qu'elle n'offre aucun moyen sûr et direct pour obtenir leur intégrale, lors même que cette intégrale doit être algébrique. Tout ce qu'on peut faire est de multiplier l'équation proposée par des fonctions très-générales, mais dont la composition soit donnée en x et en y, en sorte qu'il n'y ait que des coefficiens constans à déterminer. Par là les différentielles disparoissent de l'équation de condition, et les équations partielles qu'on en tire, lorsqu'on égale séparément à zéro les quantités constantes qui multiplient les diverses puissances de x et de y qu'elle renferme, donnent les valeurs des coefficiens cherchés. Pour que cette méthode réussisse, il faut que le nombre des équations essentiellement différentes ne surpasse point celui des inconnues, et que dans ce nombre il ne s'en trouve point qui soient contradictoires entr'elles.

On doit essayer successivement des fonctions entières, dont le type général est $A+Bx+Cy^2+Dx^2+Exy+Fy^2+$ etc. des fonctions fractionnaires

$$\frac{A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2+\text{ etc.}}{A'+B'x+C'y+D'x^2+E'xy+F'y^2+\text{ etc.}}.$$

Si l'équation différentielle proposée contenoit des radicaux, il faudroit les faire entrer dans l'expression du facteur, qu'on pourroit aussi prendre d'une forme exponentielle ou logarithmique; mais nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce procédé, qui n'est au fond qu'une espèce de tâtonnement très-laborieux et qui le plus souvent exigeroit des calculs impraticables: on en doit dire autant des méthodes générales d'intégration proposées par Fontaine et Condorcet, c'est pourquoi nous les passerons également sous silence.

Des équations du premier ordre, dans lesquelles les différentielles passent le premier degré.

567. Par la génération des équations différentielles, dont nous avons donné plusieurs exemples n°. 50, on voit qu'il peut s'en présenter dans lesquelles les différentielles passent le premier degré.

Prenons $dy^n + Pdy^{n-1}dx + Qdy^{n-2}dx^2 \ldots + Tdydx^{n-1} + Udx^n = 0$ pour la formule générale de ces équations: en la divisant par la plus haute puissance de dx, elle deviendra

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} \ldots\ldots + T\frac{dy}{dx} + U = 0;$$

en la résolvant par rapport au coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, et désignant par p, p', p'', etc. ses racines, nous aurons

$$\frac{dy}{dx} - p = 0, \quad \frac{dy}{dx} - p' = 0, \quad \frac{dy}{dx} - p'' = 0, \text{ etc.}$$

résultats qui pourront tous se traiter par les méthodes précédentes, puisque les différentielles ne s'y trouvent qu'au premier degré. L'intégrale de chacun d'eux sera aussi l'intégrale de l'équation proposée, qui sera encore satisfaite par les valeurs tirées de l'équation formée du produit de toutes ces intégrales (n°. 54). Les deux exemples suivans, quoique très-simples, éclairciront toutes les difficultés que pourroit renfermer l'énoncé ci-dessus.

Soit 1°. $dy^2 - a^2dx^2 = 0$; cette équation se décompose en $dy + adx = 0$, et $dy - adx = 0$, dont les intégrales sont $y + ax = c$, $y - ax = c'$. Il est facile de voir que chacun de ces résultats satisfait à la proposée; l'équation
$(y + ax - c)(y - ax - c') = 0$ y satisfait aussi, car elle donne
$(y + ax - c)(dy - adx) + (y - ax - c')(dy + adx) = 0$;
d'où $dy = \frac{[(y+ax-c)-(y-ax-c')]adx}{2y-(c+c')}$: mettant successivement, au lieu de y, ses valeurs $c - ax$, $c' + ax$, on trouve

$$dy = -adx, \qquad dy = +adx.$$

2°. Considérons l'équation $dy^2 - axdx^2 = 0$, nous en tirerons $dy + dx\sqrt{ax} = 0$, $dy - dx\sqrt{ax} = 0$, et en intégrant, nous aurons $y + \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c = 0$, $y - \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c' = 0$. Chacune de ces équations, ainsi que leur produit, pourront être considérés comme des solutions de la proposée; mais ce cas-ci diffère du précédent, en ce que les radicaux que contiennent les deux intégrales obtenues, forment entr'elles un lien qui permet de les comprendre toutes deux dans une même équation, et avec une seule constante. En

effet; si on fait disparoître le radical, dans l'équation $y+\frac{2}{5}\sqrt{a\,x^3}-c=0$, on obtient $(y-c)^2=\frac{4}{9}a\,x^3$. Ce résultat est encore l'intégrale de l'équation proposée, à laquelle il conduira immédiatement par l'élimination de c.

568. Quoique ce qui précède ne fasse dépendre l'intégration des équations où les différentielles passent le premier degré que de la résolution des équations algébriques, voici néanmoins quelques cas dans lesquels cette intégration s'opère plus facilement avec le secours d'artifices analytiques appropriés aux circonstances et qui éludent, au moins en partie, les difficultés que présente la résolution de l'équation différentielle proposée, par rapport à $\frac{dy}{dx}$.

Quand cette équation ne contient que l'une des deux variables, x, par exemple, on en tire immédiatement $\frac{dy}{dx}=X$, d'où $y=\int X dx$; mais s'il est plus facile de la résoudre par rapport à x que par rapport au coefficient $\frac{dy}{dx}$, que nous représenterons pour abréger par p, et qu'on ait $x=P$, P désignant une fonction quelconque de p, on observera que l'équation $\frac{dy}{dx}=p$, ou $dy=pdx$, donne $y=px-\int x dp$; mettant pour x sa valeur P, il viendra $y=Pp-\int P dp$. L'intégrale demandée sera donc le résultat de l'élimination de p, entre les deux équations $x=P$, $y=Pp-\int P dp$.

Soit, par exemple, $x\,dx+a\,dy=b\sqrt{dx^2+dy^2}$, ou $x+ap=b\sqrt{1+p^2}$, en écrivant p au lieu de $\frac{dy}{dx}$. Cette dernière équation donne immédiatement

$$x=-ap+b\sqrt{1+p^2}, \qquad P=-ap+b\sqrt{1+p^2},$$

et par conséquent

$$y=bp\sqrt{1+p^2}-\tfrac{1}{2}ap^2-b\int dp\sqrt{1+p^2}.$$

L'équation $x^3dx^3+dy^3=axdx^2dy$, qui se change en $x^3+p^3=apx$, ne donneroit pour p ou pour x que des valeurs fort compliquées; on obvie à cet inconvénient par l'introduction d'une nouvelle

variable, au moyen de laquelle on exprime l'une et l'autre de ces quantités (*). Pour cela on fait $p=ux$, ce qui donne $x+u^3x=au$ et d'où on tire $x=\frac{au}{1+u^3}$, $p=\frac{au^2}{1+u^3}$; substituant pour p et pour dx leurs valeurs dans l'expression $y=\int p\,dx$, l'intégrale de la proposée sera le résultat de l'élimination de u entre les deux équations $x=\frac{au}{1+u^3}$, $y=a^2\int\frac{u^2du(1-2u^3)}{(1+u^3)^3}$. La dernière s'intègre et devient $y=\frac{1}{6}a^2\frac{2u^3-1}{(1+u^3)^2}+\frac{1}{3}a^2\frac{1}{1+u^3}+C$.

Il est facile de voir que le procédé suivi dans cet exemple aura le même succès dans tous les cas où il sera possible d'exprimer les quantités x et p par une troisième u.

569. Si on avoit une équation entre les variables x, y et la fonction p, et qui fût homogène par rapport aux premières, on sépareroit ces variables, comme dans le cas où les différentielles ne montent qu'au premier degré. La supposition de $y=ux$ faisant disparoître x, l'équation résultante ne renfermera plus que u et p; on pourra par conséquent exprimer l'une de ces quantités par l'autre; mais de $y=ux$, on tire $dy=udx+xdu$; substituant dans $dy=pdx$, il vient $pdx=udx+xdu$, ou $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$, ce qui donne $lx=\int\frac{du}{p-u}$, $x=e^{\int\frac{du}{p-u}}$, $y=ue^{\int\frac{du}{p-u}}$. Les variables primitives sont donc déterminées au moyen d'une troisième, savoir de p ou de u, selon que la résolution de l'équation proposée est plus facile par rapport à l'une ou par rapport à l'autre de ces dernières.

Quand on prend la valeur de u en p, on doit changer l'expression $lx=\int\frac{du}{p-u}$ en $lx=-l(p-u)+\int\frac{dp}{p-u}$.

(*) Il est aisé de sentir que l'on doit employer ici les artifices dont on fait usage pour résoudre les questions d'Analyse indéterminée, et qui ont été indiqués dans la note de la page 365 du premier volume.

Soit pour exemple l'équation $y\,dx - x\,dy = n\,x\sqrt{dx^2+dy^2}$. En mettant ux au lieu de y, et $p\,dx$ au lieu de dy, on trouve

$$u - p = n\sqrt{1+p^2},\quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = -\frac{p\,dp}{1+p^2} - \frac{dp}{n\sqrt{1+p^2}} \text{ et}$$

$$1x = -1\sqrt{1+p^2} - \int\frac{dp}{n\sqrt{1+p^2}} = -1\sqrt{1+p^2} - \frac{1}{n}1(p+\sqrt{1+p^2}) + C;$$

d'où on déduit

$$x = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}}(p+\sqrt{1+p^2})^{-\frac{1}{n}},\quad y = \frac{c(p+n\sqrt{1+p^2})}{\sqrt{1+p^2}}(p+\sqrt{1+p^2})^{-\frac{1}{n}},$$

et en éliminant p on obtiendra la relation qui doit exister entre x et y. Dans le cas actuel on tirera de l'équation $u-p=n\sqrt{1+p^2}$, la valeur de p en u, pour la substituer dans celle de x ou dans celle de y, et il n'y aura plus qu'à mettre $\frac{y}{x}$ au lieu de u. Il est à propos de remarquer qu'il suffit de joindre à l'équation $u-p=n\sqrt{1+p^2}$, la valeur de x, et que le système des deux équations $x = \frac{c(p+\sqrt{1+p^2})^{-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+p^2}}$, $\frac{y}{x} - p = n\sqrt{1+p^2}$; représente aussi l'intégrale demandée.

Lorsque $n=1$, on a $p = \frac{u^2-1}{2u}$, et on trouve

$$x = \frac{2c}{(u^2+1)} = \frac{2cx^2}{x^2+y^2},\quad \text{ou}\quad x(x^2+y^2) - 2cx^2 = 0,$$

résultat qui se décompose en deux facteurs $x=0$, $x^2+y^2-2cx=0$. Le premier donnant $dx=0$, rend identique l'équation différentielle proposée, mais c'est le second qui est la véritable intégrale complète, puisqu'il contient une constante arbitraire. Bientôt nous ferons connoître la nature et l'origine de ces équations primitives particulières, qui diffèrent, ou qui paroissent différer des intégrales.

L'équation $x\,dy^3 + y\,dx^3 = dy\,dx\sqrt{xy(dx^2+dy^2)}$, traitée comme la précédente, conduit à $p^3+u = p\sqrt{u(1+p^2)}$, d'où on

tire $u=\frac{1}{2}p^2-p^3+\frac{1}{2}p^4+\frac{1}{2}p^3\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)}$,

$$p-u=\tfrac{1}{2}p(1+p^2)(2-p)-\tfrac{1}{2}p^3\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)},$$

$$\frac{dp}{p-u}=\frac{dp(2-p)}{2p(1-p+p^2)}+\frac{dp\sqrt{(1-4p+p^2)}}{2(1-p+p^2)\sqrt{1+p^2}};$$

la dernière différentielle se rapporte aux transcendantes elliptiques et l'intégrale cherchée sera représentée par les deux équations

$$x=-1\left(p-\frac{y}{x}\right)+\int\frac{dp(2-p)}{2p(1-p+p^2)}+\int\frac{dp\sqrt{1-4p^2+p^4}}{2(1-p+p^2)\sqrt{1+p^2}},$$

$$p^2+\frac{y}{x}=p\sqrt{\frac{y}{x}(1+p^2)}$$

entre lesquelles il faudra éliminer p.

570. Soit $\sqrt{dx^2+dy^2}=d\zeta$, et supposons qu'on ait une équation homogène entre les trois variables x, y et ζ. Dans ce cas on substituera ux pour y, vx pour ζ, et la variable x ayant disparu on pourra déterminer v en u; concevons la chose faite et que par la différentiation de la valeur de v on ait $dv=q\,du$, q étant une fonction de u. Cela posé, puisque

$$dy=p\,dx=u\,dx+x\,du,\qquad d\zeta=dx\sqrt{1+p^2}=v\,dx+x\,dv;$$

on aura $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$, $\frac{dx}{x}=\frac{dv}{-v+\sqrt{1+p^2}}$; mettant pour dv sa valeur $q\,du$, on déduira de ces équations $\frac{1}{p-u}=\frac{q}{-v+\sqrt{1+p^2}}$;

ce qui donnera $p-u=\frac{qv-u+\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1-q^2}$, d'où il suit

$$\frac{dx}{x}=\frac{(1-q^2)du}{qv-u+\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}=\frac{du(qv-u-\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2})}{1+u^2-v^2}.$$

Il ne faut pas perdre de vue que v est donné en u, et que par conséquent chaque membre de l'équation différentielle ci-dessus s'intègre séparément, en sorte qu'on a, à cause de $dv=q\,du$,

$$lx=lc-l.\sqrt{1+u^2-v^2}-\int\frac{du\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1+u^2-v^2};$$

La

La différentielle $dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ appartenant à l'arc d'une courbe quelconque, la solution du problême analytique que nous nous sommes proposé nous conduit donc à trouver l'équation d'une courbe par la connoissance de la relation qui existe entre l'arc de cette courbe et ses coordonnées; et l'on voit par le résultat auquel nous sommes parvenus, que cette courbe sera algébrique si l'intégrale $\int \frac{du\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1+u^2-v^2}$ peut s'obtenir par les logarithmes.

Prenons pour exemple l'équation $z = ax+by$: elle donnera par les substitutions indiquées $v = a+bu$, $q = b$ et

$$lx = lc - l\sqrt{1+u^2-(a+bu)^2} - \int \frac{du\sqrt{a^2+b^2-1}}{1+u^2-(a+bu)^2};$$

l'intégrale indiquée dans le second membre se transforme en

$$\int \frac{du(b^2-1)\sqrt{a^2+b^2-1}}{[u(b^2-1)+ab-\sqrt{a^2+b^2-1}][u(b^2-1)+ab+\sqrt{a^2+b^2-1}]} =$$
$$\tfrac{1}{2}l.\frac{(b^2-1)u+ab-\sqrt{a^2+b^2-1}}{(b^2-1)u+ab+\sqrt{a^2+b^2-1}};$$

mettant cette valeur, ainsi que celle de u, dans l'équation ci-dessus, passant ensuite aux nombres et élevant au quarré, on trouvera

$$\frac{x^2+y^2-(ax+by)^2}{c^2} = \frac{(b^2-1)y+abx-x\sqrt{a^2+b^2-1}}{(b^2-1)y+abx+x\sqrt{a^2+b^2-1}}.$$

Cette dernière, quoique fort compliquée, n'appartient cependant qu'à des lignes droites; car si pour abréger on fait

$$(b^2-1)y+abx+x\sqrt{a^2+b^2-1} = P,\quad (b^2-1)y+abx-x\sqrt{a^2+b^2-1} = Q,$$

on trouvera $PQ = (b^2-1)[(ax+by)^2-x^2-y^2]$, le résultat précédent deviendra $\frac{PQ}{c^2(1-b^2)} = \frac{Q}{P}$ et se décomposera par conséquent en $P = c\sqrt{1-b^2}$ et $Q = 0$, ou

$$(b^2-1)y+abx+x\sqrt{a^2+b^2-1} = c,\quad (b^2-1)y+abx-x\sqrt{a^2+b^2-1} = 0,$$

en changeant la constante arbitraire. La première intégrale seule est complète; mais en renversant l'ordre des signes des radicaux, P prendroit la place de Q *et vice versâ*, ce qui donneroit alors

$(b^2-1)y+abx-x\sqrt{a^2+b^2-1}=c$, équation dont $Q=0$, trouvée ci-dessus, n'est qu'un cas particulier : les deux intégrales de la proposée sont donc comprises dans l'équation

$$(b^2-1)y+abx\pm x\sqrt{a^2+b^2-1}=c.$$

571. Je n'ai rapporté cet exemple qu'à cause de la forme du résultat auquel il conduit. L'équation différentielle, qui répond à $z=ax+by$, étant $\sqrt{dx^2+dy^2}=a\,dx+b\,dy$, est dans le cas du n°. 569, et peut se traiter d'une manière encore plus simple, en observant que puisque les variables x et y ne s'y trouvent point, il suffit de faire $dy=A\,dx$, pour chasser les différentielles. L'équation qu'on obtiendra servira à déterminer A, et en intégrant on aura $y=Ax+B$, B étant la constante arbitraire.

Si, U et V désignant deux fonctions quelconques de x et de y, on avoit une équation entre dU et dV seulement, on feroit $dV=A\,dU$, et l'intégrale cherchée seroit $V=AU+B$.

572. Prenons encore un exemple; savoir, $z^2=y^2+nx^2$. On a pour cette équation $v=\sqrt{u^2+n}$, $q=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+n}}$, et

$$lx=lc-l\sqrt{1-n}-\frac{\sqrt{n^2-n}}{1-n}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+n}},\text{ ou}$$

$$lx=lc+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}l\left(u+\sqrt{u^2+n}\right),\text{ d'où il résulte}$$

$$\frac{x}{c}=\left(\frac{y+\sqrt{y^2+nx^2}}{x}\right)^{\sqrt{\frac{n}{n-1}}}.$$

Cette équation est algébrique toutes les fois que le nombre $\dfrac{n}{n-1}$ est un quarré parfait; mais quand l'exposant $\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$ est irrationnel, on lui donne, d'après Léibnitz, le nom d'*interscendante*, comme tenant en quelque sorte le milieu entre les équations algébriques et les équations transcendantes.

L'intégrale que nous venons d'obtenir cesse d'être vraie lorsque

$n=1$, et comme dans ce cas la quantité $1+u^n-v^n$ s'évanouit, il faut faire usage de l'expression de $p-u$; on trouve, par ce moyen, $p-u=0$, ou $x\,dy-y\,dx=0$, ou enfin $y=cx$. Le cas de $n=0$ forme encore une exception facile à traiter *à priori*.

573. Considérons en dernier lieu le cas où les deux variables entrent en même temps dans l'équation proposée, mais supposons que l'une d'elles, y, par exemple, n'y monte qu'au premier degré ; nous aurons alors y égal à une fonction de x et de p, en sorte que $dy=R\,dx+S\,dp$, et par conséquent $p\,dx=R\,dx+S\,dp$ ou $(R-p)\,dx+S\,dp=0$. Si l'on parvenoit à intégrer cette dernière, on auroit entre p, x et une constante arbitraire, une relation au moyen de laquelle chassant p de l'équation proposée on obtiendroit une équation primitive, qui, renfermant une constante arbitraire, seroit l'intégrale cherchée. Voici plusieurs formules très-étendues, comprises dans le cas général, et dont l'intégration s'exécute facilement.

1°. Si l'équation proposée peut être mise sous la forme $y=px+P$, et que P ne renferme que le coefficient p, on aura $dy=p\,dx+\left(x+\frac{dP}{dp}\right)dp$; l'équation $(R-p)\,dx+S\,dp=0$ deviendra $\left(x+\frac{dP}{dp}\right)dp=0$, et se décomposera en deux facteurs $x+\frac{dP}{dp}=0$, $dp=0$. Eliminant p entre le premier et l'équation proposée, on aura une équation primitive qui satisfera à la proposée ; mais qui, ne contenant point de constante arbitraire, ne sera que particulière. Le second facteur s'intégre et donne $p=c$, ou $dy=c\,dx$ et $y=cx+c'$. Les constantes c et c' ne sont pas arbitraires toutes deux ; car en faisant dans l'équation proposée $p=c$, on a $y=cx+C$, C étant ce que devient P dans la même circonstance, et on tire de là $c'=C$. L'intégrale de la proposée est donc $y=cx+C$, et s'obtient en changeant p en c.

2°. Si l'on a $y=Px+P_1$, P et P_1 étant des fonctions de p ; l'équation $(R-p)\,dx+S\,dp=0$ devient $(P-p)\,dx+\left(x\frac{dP}{dp}+\frac{dP_1}{dp}\right)dp=0$, et s'intégre par le moyen

du facteur $e^{\int\frac{dP}{P-p}}$, puisqu'elle est du premier degré par rapport à x (n°. 556).

3°. Supposons la proposée telle que R et S soient des fonctions du premier degré ou des fractions dans lesquelles l'exposant du numérateur surpasse de l'unité celui du dénominateur, c'est-à-dire, que l'équation $(R-p)dx+Sdp=0$ soit homogène; celle-ci étant divisée par $(R-p)x+Sp$, s'intégrera, et il n'y aura plus qu'à éliminer p entre son intégrale et l'équation proposée, pour parvenir à l'intégrale demandée. Il est facile de reconnoître que R et S ne pourront être du premier degré, que quand la valeur de y sera du second, et qu'alors la proposée deviendra homogène, si l'on met z^2 au lieu de y.

On peut essayer aussi de rendre homogène par des substitutions, l'équation $(R-p)dx+Sdp=0$. Si on fait $x=u^m$, $p=q^n$, il viendra $m(R-q^n)u^{m-1}du+nSq^{n-1}dq=0$, et pour que ce résultat soit homogène, il faudra que la fonction R soit du degré n et la fonction S du degré m. On aura dans cette hypothèse

$$dy=Rdx+Sdp=mRu^{m-1}du+nSq^{n-1}dq,$$

ce qui fait voir que y doit être du degré $m+n$, et que par conséquent la proposée, dans ce cas, doit devenir homogène par la supposition de $y=z^{m+n}$, $x=u^m$, $p=q^n$. Quand cette condition sera remplie, on fera $z=rq$, $u=sq$; on pourra ensuite déterminer r en s, et comme l'équation $dy=pdx$ devient

$$(m+n)z^{m+n-1}dz=mu^{m-1}q^ndu,$$

on la transformera par les dernières substitutions en

$$(m+n)r^{m+n-1}(rdq+qdr)=ms^{m-1}(sdq+qds);$$

de laquelle on tirera

$$\frac{dq}{q}=\frac{ms^{m-1}ds-(m+n)r^{m+n-1}dr}{(m+n)r^{m+n}-ms^m}.$$

574. Donnons maintenant quelques exemples: 1°. soit l'équation $ydx-xdy=n\sqrt{dx^2+dy^2}$. Nous la mettrons d'abord sous la forme $y=px+n\sqrt{1+p^2}$; en la différentiant nous trouverons $dy=pdx+xdp+\frac{npdp}{\sqrt{1+p^2}}$, et à cause que $dy=pdx$, il restera

$x\,dp+\frac{np\,dp}{\sqrt{1+p^2}}=0$. Cette équation se décompose en deux facteurs $x+\frac{np}{\sqrt{1+p^2}}=0$, et $dp=0$; le second nous conduit à $p=c$; et l'intégrale demandée est $y=cx+n\sqrt{1+c^2}$.

Le premier facteur donne $p=\frac{x}{\sqrt{n^2-x^2}}$, et substituant dans l'équation proposée, on a $y^2+x^2=n^2$, équation qui ne renferme point de constante arbitraire, qui n'est point comprise dans l'intégrale $y=cx+n\sqrt{1+c^2}$, et telle néanmoins que les valeurs de y et de dy, qui s'en déduisent satisfont à l'équation différentielle proposée, dont elle offre par conséquent une *solution particulière*.

2°. Occupons-nous de l'équation $y\,dx-mx\,dy=n\sqrt[3]{dx^3+dy^3}$: nous en tirerons $y=mpx+n\sqrt[3]{1+p^3}$,

$$dy=mp\,dx+m\,x\,dp+np^2dp\,(1+p^3)^{-\frac{2}{3}},$$

et mettant $p\,dx$ pour dy, nous aurons

$$(m-1)p\,dx+m\,x\,dp+np^2dp\,(1+p^3)^{-\frac{2}{3}}=0.$$

Cette équation devient intégrable, lorsqu'on la multiplie par $p^{\frac{1}{m-1}}$ et donne $p^{\frac{m}{m-1}}x=-\frac{n}{m-1}\int p^{\frac{2m-1}{m-1}}(1+p^3)^{-\frac{2}{3}}$.

3°. Soit $dy^k=(Ax^\alpha+By^\beta)\,dx^k$, ou $p^k=Ax^\alpha+By^\beta$. Pour rendre cette équation homogène, faisons $x=u^m$, $p=q^n$, et $y=\zeta^{m+n}$, nous obtiendrons $q^{kn}=Au^{\alpha m}+B\zeta^{\beta m+\beta n}$, et posant ensuite $kn=\alpha m$, $kn=\beta m+\beta n$, nous trouverons $\frac{m}{n}=\frac{k}{\alpha}$, $k=\frac{\beta k}{\alpha}+\beta$, équation qui exprime une condition à laquelle doivent satisfaire les exposans k, α et β, et qui donne $k=\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$. Lorsqu'elle sera identique, on supposera $n=\alpha$, d'où il résultera $m=k$, et $q=Au^{\alpha k}+B\zeta^{\alpha k}$, puisque $\beta(\alpha+k)=\alpha k$. Faisant, d'après le procédé indiqué à la fin du n°. précéd. $\zeta=rq$, $u=sq$, nous trouverons

$$s^{\alpha k}=\frac{1-Br^{\alpha k}}{A},\qquad \frac{dq}{q}=\frac{k s^{k-1}ds-(\alpha+k)r^{\alpha+k-1}dr}{(\alpha+k)r^{\alpha+k}-ks^k}.$$

Nous laisserons au lecteur le soin d'achever le calcul qui n'a aucune difficulté ; nous ferons seulement observer que la substitution de $x^{\frac{\alpha}{\beta}}u$, au lieu de y, dans l'équation proposée mise sous la forme $p=(Ax^{\alpha}+By^{\beta})^{\frac{1}{k}}$ donne,

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}}du+\frac{\alpha}{\beta}x^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}u\,dx=x^{\frac{\alpha}{k}}dx\,(A+Bu^{\beta})^{\frac{1}{k}},$$

et comme dans l'hypothèse ci-dessus $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{k}$, on aura

$$\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha}{k}}du+\alpha u\,dx=\beta\,dx\,(A+Bu^{\beta})^{\frac{1}{k}},$$

d'où l'on tirera $\frac{dx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha}{k}}}=\frac{\beta\,du}{\beta(A+Bu^{\beta})^{\frac{1}{k}}-\alpha u}$.

575. On voit par cet exemple l'avantage qui résulte d'une transformation bien choisie, et c'est encore ce qui sera confirmé sur les équations suivantes

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=f(x^2+y^2),\quad \frac{x\,dy-y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}=f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

dans lesquelles f désigne une fonction quelconque. Si on fait $x=uv$, $y=u\sqrt{1-v^2}$, on les changera en

$$\frac{-u^2dv}{\sqrt{u^2dv^2+(1-v^2)du^2}}=f(u^2),\quad \frac{-u\,dv}{\sqrt{u^2dv^2+(1-v^2)du^2}}=f(v),$$

d'où on tirera

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}=\frac{du\,f(u^2)}{u\sqrt{u^2-f(u^2)^2}};\qquad \frac{dv\sqrt{1-f(v)^2}}{f(v)\sqrt{1-v^2}}=\frac{du}{u},$$

résultats dont les variables sont séparées.

Des solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.

576. Examinons maintenant la nature et l'origine des *solutions particulières* que nous avons obtenues pour plusieurs des équations différentielles dont nous nous sommes occupés. La relation qui existe entre une équation différentielle et son intégrale est telle que cette dernière équivaut à un nombre infini d'équations primitives, qu'on obtiendroit en donnant successivement à la constante arbitraire toutes les valeurs possibles, et dont chacune satisferoit à l'équation différentielle (n°. 50). Nous désignerons ces diverses équations

primitives sous le nom d'*intégrales particulières*, puisque ce sont des cas particuliers de l'intégrale complète. Les *solutions particulières*, dont le nombre est toujours limité, sont des équations primitives essentiellement différentes des intégrales particulières. Ces solutions sont de deux sortes, les unes, comme celle du n°. 557, ne sont autre chose que des facteurs de l'équation différentielle proposée, dans lesquels dx et dy n'entrent point, et qui par conséquent étant égalés à zéro donnent des équations primitives, et établissent entre x et y des relations qui rendent la proposée identique. En cherchant les diviseurs communs des fonctions M et N, on trouvera les solutions de cette espèce, dont seroit susceptible l'équation $Mdx+Ndy=0$.

La seconde espèce de solutions particulières dont l'équation $ydx-xdy=n\sqrt{dx^2+dy^2}$ nous a fourni un exemple, est liée intimément à l'équation différentielle dont elle dérive, quoiqu'elle ne puisse rentrer dans aucun des cas de l'intégrale complète, quelque valeur que l'on donne à la constante arbitraire, ainsi qu'il est facile de le voir, en comparant les équations $y=cx+n\sqrt{1+c^2}$ et $x^2+y^2=n^2$ (n°. 574).

Voici la théorie que Lagrange, en 1774, donna de ces dernières solutions, regardées avant lui comme formant un paradoxe dans le Calcul intégral (*).

577. Les solutions particulières, sans être comprises explicitement dans l'intégrale complète, peuvent néanmoins s'en déduire, en cessant de regarder la constante arbitraire comme invariable. En effet, soit $U=0$, une équation primitive renfermant les variables x, y et une constante c; l'équation différentielle correspondante, que je désignerai par $V=0$, sera le résultat de l'éli-

(*) Il les appela *intégrales particulières*, et donna le nom de solutions particulières aux différens cas de l'intégrale complète. Laplace, qui s'est occupé avec succès du même sujet avant Lagrange, employe ces dénominations dans un sens inverse, et je l'ai suivi. Il m'a semblé que les équations primitives, qui résolvent les équations différentielles sans être comprises dans leur intégrale complète, ne s'obtenant point par les procédés de l'intégration, ne doivent pas porter un nom qui rappelle ces procédés.

mination de cette constante, entre les équations $U=0$, $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=0$ (n°. 50); mais si on suppose que c soit une fonction quelconque de x, on donnera à l'équation $U=0$ une extension telle qu'elle pourra représenter une équation quelconque à deux variables, et par conséquent aussi toutes les solutions particulières de l'équation $V=0$. Cela posé, mettons l'équation $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dx}=0$, sous la forme $dy=pdx$, et observons que puisque l'équation $V=0$ résulte de l'élimination de c entre $U=0$ et $dy=pdx$, elle demeurera la même quelque valeur qu'on donne à c (note de la page 395 du premier volume) et qu'on pourroit par conséquent supposer c variable, pourvû que la loi de sa variation fût telle qu'on eût toujours $dy=pdx$. Or, quoiqu'en regardant c comme variable aussi bien que x, il vienne en général $dy=pdx+qdc$, p et q étant des fonctions de x et de c, on aura néanmoins $dy=pdx$ seulement, si $q=0$. Déterminant donc c par cette dernière équation, et substituant dans $U=0$ la valeur qu'on trouvera, le résultat satisfera encore à l'équation différentielle $V=0$.

Dans ce qui précède nous avons regardé y comme une fonction de x et de c; en considérant à son tour x comme une fonction de y et de c, on mettra l'équation $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=0$, sous la forme $dx=mdy$, et raisonnant comme ci-dessus, on trouvera que si la valeur de dx, prise en faisant varier c, est $dx=mdy+ndc$, l'équation résultante de l'élimination de c, entre $n=0$ et $U=0$, satisfera aussi à l'équation différentielle $V=0$.

Les équations primitives que donnent l'un et l'autre des procédés que nous venons d'exposer, sont nécessairement des solutions particulières de l'équation $V=0$, si elle est susceptible d'en avoir, ou autrement des cas particuliers de son intégrale complète.

On peut comprendre ces deux procédés dans un seul, en faisant évanouir les dénominateurs dans l'équation $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{dc}dc=0$, différentielle de $U=0$,

prise

prise par rapport à x, à y et à c. Elle aura alors la forme $M\,dx+N\,dy+P\,dc=0$; on en tirera

$$dy=-\frac{M}{N}dx-\frac{P}{N}dc, \quad dx=-\frac{N}{M}dy-\frac{P}{M}dc,$$

et si les fonctions entières M, N sont algébriques, ou quoique transcendantes, ne peuvent pas devenir infinies par quelque valeur de c, le coefficient de dc ne disparoîtra que par la supposition de $P=0$, qui donnera ainsi toutes les solutions particulières de $V=0$.

Lorsque l'équation $P=0$ ne renferme que c et des constantes, elle donne c constant et ne conduit par conséquent qu'à une intégrale particulière. Quand c ne se trouve qu'au premier degré dans U, il n'entre point dans P, qui ne contient alors que les variables x et y; mais dans ce cas, l'équation $P=0$ satisfait elle-même à $V=0$, car $U=0$ étant de la forme $Q+cP=0$, $V=0$ devient $PdQ-QdP=0$. Pour s'assurer alors si $P=0$ est une solution particulière, ou seulement une intégrale particulière, on éliminera une des variables x ou y, entre $U=0$ et $P=0$; la résultante donnera c variable dans le premier cas, et c constant dans le second. Si on trouvoit $c=\frac{0}{0}$, il en faudroit conclure que l'équation $P=0$ est un facteur de $U=0$, indépendant de la constante c et par conséquent étranger à l'équation différentielle $V=0$.

578. Appliquons maintenant cette théorie à quelques exemples: 1°. Soit l'équation $y\,dx-x\,dy=n\sqrt{dx^2+dy^2}$, ayant pour intégrale complète $y-cx=n\sqrt{1+c^2}$ (n°. 574); nous aurons, en faisant varier c en même tems que x et y, et réduisant tous les termes au même dénominateur,

$$c\,dx\sqrt{1+c^2}-dy\sqrt{1+c^2}+(x\sqrt{1+c^2}+nc)\,dc=0;$$

égalant à zéro le coefficient de dc, il vient $x\sqrt{1+c^2}+nc=0$, d'où on tire $c=\frac{x}{\sqrt{n^2-x^2}}$. Cette valeur change l'équation $y-cx=n\sqrt{1+c^2}$ en $x^2+y^2=n^2$ et donne la solution particulière obtenue dans le n°. cité.

Toutes les équations de la forme $y=px+P$ (n°. 573), dans

laquelle se trouve comprise la précédente, ont aussi une solution particulière analogue à celle que nous venons d'obtenir. Leur intégrale complète représentée par $y = cx + C$, C étant composé en c comme P l'est en p, donne $c\,dx - dy + \left(x + \frac{dC}{dc}\right) dc = 0$, et posant $x + \frac{dC}{dc} = 0$, on en tire la valeur de c, d'où dépend la solution particulière. Cette solution particulière s'est offerte à nous lorsque nous avons intégré l'équation $y = px + P$; car en la différentiant nous sommes parvenus à une équation composée des deux facteurs $x + \frac{dP}{dp} = 0$, et $dp = 0$, et le résultat de l'élimination de p entre $y = px + P$ et $x + \frac{dP}{dp} = 0$, seroit le même que celui de l'élimination de c, entre $y = cx + C$, et $x + \frac{dC}{dc} = 0$. Les équations $y = px + P$ ont été remarquées d'abord par Clairaut, tant à cause de la propriété qu'elles ont de s'intégrer facilement après une nouvelle différentiation, que par rapport à la solution particulière que cette différentiation manifeste sur le champ.

2°. Soit l'équation $x\,dx + y\,dy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$, dont l'intégrale $\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = y + c$, ou $x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = 0$, en faisant disparoître le radical. On trouve $x\,dx - c\,dy - (y + c)\,dc = 0$, d'où il résulte $y + c = 0$, et par conséquent $\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = 0$; la solution particulière est donc dans cet exemple $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

3°. Reprenons l'équation $y^2 + x^2 - 2cx = 0$, trouvée n°. 569, pour l'intégrale de $y\,dx - x\,dy = x\sqrt{dx^2 + dy^2}$; nous en tirerons $(x - c)\,dx + y\,dy - x\,dc = 0$, d'où $x = 0$. Cette dernière équation ne contenant pas c, nous substituerons la valeur qu'elle donne pour x, dans celle de c, qui est $\frac{y^2 + x^2}{2x}$ et qui devient alors infinie; nous conclurons donc de là (n°. précéd.), que $x = 0$ n'est pas une solution particulière de l'équation $ydx - xdy = x\sqrt{dx^2 + dy^2}$, mais seulement ce que devient l'intégrale complète quand c est infini.

579. Il sera toujours facile de trouver, par ce qui précède, les solutions particulières des équations différentielles dont on connoîtra l'intégrale complète; mais il existe aussi des méthodes très-simples pour déduire ces solutions de l'équation différentielle elle-même, et nous allons les faire connoître.

Lorsque dans l'équation primitive $U=0$, on regarde c comme variable, ce qui donne $dy=pdx+qdc$, et qu'on a en même tems $q=0$, cette équation satisfait à l'équation différentielle $V=0$, mais ne satisfait pas, du moins en général, à la différentielle de celle-ci, que je désignerai par $V'=0$, et dans laquelle je supposerai que dx soit constant. En effet, cette dernière ne renferme que les différentielles de y, prises par rapport à x, qui sont

$dy=pdx$, $d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2$; mais en faisant aussi varier c, on auroit

$$dy=pdx+qdc, \quad d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2+\frac{dp}{dc}dxdc+dqdc+qd^2c,$$

et dans l'hypothèse de $q=0$, qui répond aux solutions particulieres et qui donne $dq=0$, il viendroit

$$dy=pdx, \quad d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2+\frac{dp}{dc}dxdc:$$

l'expression de d^2y ne se réduiroit à $\frac{dp}{dx}dx^2$, que dans le cas particulier où on auroit en outre $\frac{dp}{dc}=0$. Si cela arrivoit, l'équation $U=0$ satisferoit en même tems à $V=0$ et à $V'=0$, mais non pas à $V''=0$, différentielle de $V'=0$; car celle-ci suppose que

$$dy=pdx, \quad d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2, \quad d^3y=\frac{d^2p}{dx^2}dx^3,$$

tandis qu'en faisant varier c, et en ayant égard aux conditions $q=0$, $\frac{dp}{dc}=0$, trouvées ci-dessus, on auroit

$$dy=pdx, \quad d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2, \quad d^3y=\frac{d^2p}{dx^2}dx^3+\frac{d^2p}{dxdc}dx^2dc;$$

il faudroit donc qu'on eût encore dans ce cas $\frac{d^2p}{dxdc}=0$. Cette condition réunie aux précédentes ne suffiroit pas pour que

l'équation $U=0$ satisfît, dans l'hypothèse de c variable, à la différentielle de $V''=0$, que je représenterai par $V'''=0$, et qui suppose que

$$dy=p\,dx, \quad d^2y=\frac{dp}{dx}dx^2, \quad d^3y=\frac{d^2p}{dx^2}dx^3, \quad d^4y=\frac{d^3p}{dx^3}dx^4,$$

puisqu'en ayant égard à la variabilité de c et aux conditions ci-dessus, on trouveroit

$$dy=p\,dx;$$

$$d^2y=\frac{dp}{dx^2}dx^2, \quad d^3y=\frac{d^2p}{dx^2}dx^3, \quad d^4y=\frac{d^3p}{dx^3}dx^4+\frac{d^3p}{dx^2dc}dx^3dc;$$

et on auroit une nouvelle condition, savoir, $\frac{d^3p}{dx^2dc}=0$.

On obtiendroit de la même manière les conditions qui doivent avoir lieu, pour que les solutions particulières satisfassent aux différentielles des ordres supérieurs de l'équation $V=0$. Il est facile de voir que

les quantités $\quad q, \quad \frac{dp}{dc}, \quad \frac{d^2p}{dxdc}, \quad \frac{d^3p}{dx^2dc}$, etc.

ne sont autre chose que

$$\frac{dy}{dc}, \quad \frac{d^2y}{dxdc}, \quad \frac{d^3y}{dx^2dc}, \quad \frac{d^4y}{dx^3dc}, \text{ etc.}$$

et qu'une solution particulière ne pourra satisfaire qu'aux équations différentielles dont l'ordre est inférieur ou égal à celui de la dernière des conditions

$$\frac{dy}{dc}=0, \quad \frac{d^2y}{dxdc}=0, \quad \frac{d^3y}{dx^2dc}=0, \quad \frac{d^4y}{dx^3dc}=0, \text{ etc.}$$

qu'elle remplit.

Ceci fait connoître le caractère qui distingue une solution particulière d'une intégrale particulière. L'une ne satisfait jamais qu'à un nombre limité des différentielles de l'équation $V=0$, parce qu'elle ne remplit qu'un pareil nombre des conditions rapportées ci-dessus; l'autre, au contraire, les remplissant toutes, puisqu'elle suppose c constant, satisfait ainsi à l'équation $V=0$, et à toutes celles qui en dérivent.

L'inverse de cette dernière proposition est vraie; c'est-à-dire, que l'on ne peut avoir en même tems

$$\frac{dy}{dc}=0, \quad \frac{d^2y}{dxdc}=0, \quad \frac{d^3y}{dx^2dc}=0, \text{ etc. indéfiniment, sans que}$$

la fonction $\frac{dy}{dc}$ ne soit constante ; car le changement qu'elle éprouve lorsque x devient $x+h$, ayant pour développement $\frac{dy}{dc}+\frac{d^2y}{dxdc}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2dc}\frac{h^2}{1.2}+$ etc. est toujours nul dans l'hypothèse établie : $\frac{dy}{dc}$ ne variant donc dans aucune circonstance, par rapport à x, sera nécessairement indépendant de cette quantité.

580. Voyons maintenant de quelle manière ces considérations conduisent à la connoissance des solutions particulières. Supposons que l'on ait fait disparoître les dénominateurs et les radicaux dans l'équation différentielle $V=0$, et qu'elle ne contienne point de fonctions transcendantes. Puisque la fonction V est indépendante de c, ou que l'équation $V=0$ devient identique par la substitution des valeurs de y et de dy, quel que soit c, on aura nécessairement $\frac{dV}{dc}=0$; mais V ne contenant pas explicitement c, dV ne peut être que de la forme $Md.\frac{dy}{dx}+Ndy+Pdx$, et la variation par rapport à c, ne peut venir que de celle qu'éprouve y relativement à cette dernière quantité : on aura donc $\frac{dV}{dc}=M\frac{d^2y}{dxdc}+N\frac{dy}{dc}=0$; équation qui doit être identique par elle-même, ainsi que toutes celles qui en dérivent. Elle se réduit à $M\frac{d^2y}{dxdc}=0$, lorsque $\frac{dy}{dc}$ s'évanouit seul, et donne dans ce cas $M=0$.

Si $\frac{dy}{dc}$ et $\frac{d^2y}{dxdc}$ s'évanouissent en même tems, elle sera satisfaite ; mais en la différentiant par rapport à x et à y, on trouvera $M\frac{d^2y}{dx^2dc}+\left(\frac{dM}{dx}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dx}+N\right)\frac{d^2y}{dxdc}+\left(\frac{dN}{dx}+\frac{dN}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dc}=0$, résultat que les équations $\frac{dy}{dc}=0$, $\frac{d^2y}{dxdc}=0$, réduiront à $M\frac{d^2y}{dx^2dc}=0$ et dont on tirera $M=0$, si $\frac{d^2y}{dx^2dc}$ ne s'évanouit pas.

Si $\frac{d^3y}{dx^2dc}$ s'évanouissoit, on différentieroit de nouveau, et le résultat, qui seroit de la forme $M\frac{d^4y}{dx^3dc}+R\frac{d^3y}{dx^2dc}+S\frac{d^2y}{dxdc}+T\frac{dy}{dc}=0$, donneroit encore $M=0$, si $\frac{d^4y}{dx^3dc}$ ne s'évanouissoit pas.

On voit, sans qu'il soit besoin d'aller au delà du résultat précédent, que la fonction M multipliant toujours le coefficient différentiel de l'ordre le plus élevé, doit être nulle lorsque ce coefficient ne s'évanouit pas, et que par conséquent lorsque les équations $\frac{dy}{dc}=0$, $\frac{d^2y}{dxdc}=0$, $\frac{d^3y}{dx^2dc}=0$, etc. n'ont pas lieu à l'infini, ce qui est le cas des solutions particulières, il faut qu'on ait $M=0$: ces solutions ne peuvent donc être que des facteurs de M. Mais quand $M=0$, l'équation $Md.\frac{dy}{dx}+Ndy+Pdx=0$, qui a lieu en même tems que $V=0$, se réduit à $Ndy+Pdx=0$, et donne $\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{N}$; substituant cette valeur dans $V=0$, il en résultera une équation primitive qui doit s'accorder avec $M=0$. C'est ainsi que l'on pourra distinguer, parmi les facteurs de M, ceux qui sont des solutions particulières de l'équation différentielle proposée, et s'il y en a qui le soient en effet; car toutes les équations différentielles n'ont pas de ces solutions.

Si on tire de l'équation $Md.\frac{dy}{dx}+Ndy+Pdx=0$, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on aura $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{Ndy+Pdx}{M}$, et cette expression deviendra $\frac{0}{0}$ dans le cas des solutions particulières, qui donnent en même tems $M=0$, et $Ndy+Pdx=0$.

Il est évident qu'en supposant x fonction de y et de c, et prenant dy constant, on auroit, par rapport à x, des résultats analogues à ceux que nous venons d'obtenir par rapport à y, et que les solutions particulières donneroient encore $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{0}{0}$. Il est nécessaire d'essayer

l'une et l'autre hypothèse, c'est-à-dire, de poser successivement $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{0}{0}$, $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{0}{0}$, parce que la première seule peut faire connoître les solutions de la forme $y=const.$ et la seconde celles de la forme $x=const.$

581. Cherchons par ces méthodes les solutions particulières des équations $y=px+P$, $xdx+ydy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}$, dont nous nous sommes déjà occupés (n°. 578). Nous tirerons de la première $-\left(x+\frac{dP}{dp}\right)dp=0$, puisque $dy=pdx$, et par conséquent $\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{0}{-\left(x+\frac{dP}{dp}\right)dx}$. Pour que $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{0}{0}$; il faudra que $x+\frac{dP}{dp}=0$; éliminant p entre cette équation et la proposée, on aura la solution particulière demandée, ainsi que nous l'avons prouvé précédemment de plusieurs manières.

L'équation $xdx+ydy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ devient, après l'évanouissement du radical, $x^2dx^2+2xydxdy+(a^2-x^2)dy^2=0$, et la différentiation donne $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{xdx+ydy}{xydx+(a^2-x^2)dy}$. En égalant à zéro le numérateur et le dénominateur de cette expression, on aura $xdx+ydy=0$, $xydx+(a^2-x^2)dy=0$, et chassant $\frac{dy}{dx}$, il viendra $x^2+y^2-a^2=0$, équation qui s'accorde avec la proposée, ainsi qu'avec chacune des précédentes, et que nous avons déjà déduite de l'intégrale complète.

On parviendroit au même résultat sans faire disparoître le radical. L'équation proposée donne immédiatement

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{-y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}} \text{ et}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^2-a^2-xy\frac{dy}{dx}+\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{-\left(y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right)^2\sqrt{x^2+y^2-a^2}},$$

dont on tirera les deux équations

$$y^2-a^2-xy\frac{dy}{dx}+(x\frac{dy}{dx}-y)\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0;$$

$$(-y+\sqrt{x^2+y^2-a^2})^2\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0.$$

La dernière se décompose en

$$-y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0; \qquad \sqrt{x^2+y^2-a^2}=0;$$

et la première ne s'accorde qu'avec le second de ces facteurs, qui la rend identique, tandis que l'autre la réduit à $-a^2=0$, ce qui ne peut être : on a donc encore de cette manière $x^2+y^2-a^2=0$. En regardant x comme une fonction de y, on trouvera

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{xy-(y^2-a^2)\frac{dx}{dy}+(y\frac{dx}{dy}-x)\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{x^2\sqrt{x^2+y^2-a^2}};$$

Les facteurs du dénominateur donnent $x=0$, et $\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0$; le premier réduit le numérateur à $-(y^2-a^2-y\sqrt{y^2-a^2})\frac{dx}{dy}$; et par conséquent à 0, puisqu'alors $\frac{dx}{dy}=0$; mais cette hypothèse ne s'accorde point avec l'équation proposée: quant au second facteur, il satisfera encore dans ce cas comme dans le précédent.

582. Pour n'être induit en erreur dans aucun cas, sur les solutions particulières, il est nécessaire de supprimer tous les facteurs communs qu'auroit l'équation $Md.\frac{dy}{dx}+Ndy+Pdx=0$ (n°. 580).

L'équation $xdy-ydx=x\sqrt{dx^2+dy^2}$, que nous savons n'avoir pas de solutions particulières (n°. 578), donne, par l'élévation au quarré et les réductions qui en sont la suite, $(x^2-y^2)dx+2xydy=0$; en différentiant, on trouve $xyd^2y+xdy^2+xdx^2=0$. Avant de prendre la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, il faut supprimer le facteur commun à tous les termes et qui se présenteroit ainsi sous la forme d'une solution particulière, tandis qu'il n'est qu'un cas de l'intégrale complète: après cette suppression, le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy^2+dx^2}{xy}$, ne peut plus devenir $\frac{0}{0}$, ni par la supposition de $x=0$, ni par celle de $y=0$.

Il

Il n'est pas moins nécessaire aussi de vérifier si l'équation, qui rend $\frac{d^2y}{dx^2}$, ou $\frac{d^2x}{dy^2}$ égal à $\frac{0}{0}$, satisfait à la proposée, avant de prononcer qu'elle en est une solution particulière. Soit par exemple l'équation $xdy = dx\sqrt{y^2-x^2}$; on trouvera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-x^2}}{x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)}{x^2\sqrt{y^2-x^2}},$$

d'où il résulte $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}$, lorsque $y=x$, quoique cette valeur de y ne satisfasse point à l'équation proposée. Il est à propos de remarquer que si on fait disparoître le radical avant de différentier, l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$ ne donnera plus de solution particulière, non plus que celle de $\frac{d^2x}{dy^2}$.

583. Pour donner un exemple des solutions particulières de la forme $y = const.$ nous prendrons l'équation $\frac{dy}{dx} = A(y-a)^m$, A étant une constante quelconque, et nous trouverons $\frac{d^2y}{dx^2} = mA(y-a)^{m-1}\frac{dy}{dx}$. Cette valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ ne peut devenir $\frac{0}{0}$, que quand l'exposant $m-1$ est négatif et qu'on a en même tems $y=a$, et $\frac{dy}{dx} = 0$. Quoique la première de ces valeurs entraîne la seconde, elles ne peuvent néanmoins satisfaire à la proposée que lorsque l'exposant m est positif; il faut donc, d'après cela, que m soit >0, et <1, ou positif et fractionnaire. Dans ce cas la solution particulière est $y = a$.

Si on avoit $\frac{dy}{dx} = \sqrt{Y}$, Y étant une fonction de y, on trouveroit $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2\sqrt{Y}}\frac{dY}{dy}\frac{dy}{dx}$; et si la fonction Y devenoit nulle par la supposition de $y=a$, sans qu'il en arrivât autant à $\frac{dY}{dy}$, c'est-à-dire, si $y=a$ n'étoit qu'un facteur simple de Y, l'équation $y=a$ seroit

une solution particulière de l'équation proposée : dans le cas contraire la valeur $y=a$ rend $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ et n'est qu'une intégrale particulière.

584. Après avoir reconnu que les intégrales particulières et les solutions particulières se déduisent de l'intégrale complète, il étoit naturel de chercher à remonter des premières à la dernière. Les solutions particulières se tirent immédiatement de l'équation différentielle, et souvent en examinant attentivement cette équation, on parvient à en découvrir une intégrale particulière ; on ouvriroit donc ainsi une nouvelle route pour intégrer les équations différentielles. Les Analystes l'ont déjà tentée ; mais ce n'est que dans un petit nombre de cas qu'ils sont parvenus à compléter les intégrales particulières. L'équation de Riccati est une de celles du premier ordre sur lesquelles cette opération peut s'effectuer.

Soit l'équation $dy+y^2dx+Xdx=0$, et supposons que $y=Q$ soit l'intégrale particulière donnée, on aura $dQ+Q^2dx+Xdx=0$; prenant dans cette équation la valeur de Xdx, pour la substituer dans la proposée, il viendra $dy+y^2dx-dQ-Q^2dx=0$, équation qui s'intégre au moyen du facteur, $\frac{e^{-2\int Qdx}}{(y-Q)^2}$ (n°. 565), et conduit à $ce^{2\int Qdx}+\frac{1}{y-Q}=e^{2\int Qdx}\int e^{-2\int Qdx}dx$.

On parviendra encore à ce résultat en faisant $y=Q+u$, ce qui donnera

$$dQ+Q^2dx+Xdx+du+(2Qu+u^2)dx=0,$$

ou $du+(2Qu+u^2)dx=0$, en effaçant les termes nuls par l'hypothèse. Si on met cette dernière équation sous la forme $\frac{du}{u^2}+2Q\frac{1}{u}dx+dx=0$, et qu'on suppose $u=\frac{1}{t}$, on en déduira $dt-2Qtdx=dx$, équation du premier ordre et du premier degré, ayant pour intégrale $t=e^{2\int Qdx}(\int e^{-2\int Qdx}dx+C)$ (n°. 556) : l'intégrale complète de la proposée sera donc

$$y=Q+\frac{1}{e^{2\int Qdx}(\int e^{-2\int Qdx}dx+C)}.$$

585. Le moyen dont nous venons de faire usage conduira le plus souvent à des équations d'une intégration aussi difficile que

la proposée, et ce n'est que par le secours des séries qu'on peut en général déduire de l'une des intégrales particulières d'une équation différentielle du premier ordre son intégrale complète.

Soit $y=X$, une intégrale particulière de l'équation $dy=pdx$; et représentons par $y=V$ son intégrale complète; V sera nécessairement une fonction de x et de c, qui doit se changer en X, lorsqu'on donne à c une valeur convenable que nous désignerons par c'. Cela posé, si c devient $c+h$, y deviendra

$$V+\frac{dV}{dc}\frac{h}{1}+\frac{d^2V}{dc^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3V}{dc^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

mais lorsque $c=c'$, on a $V=X$, et si on connoissoit les valeurs que prennent $\frac{dV}{dc}$, $\frac{d^2V}{dc^2}$, $\frac{d^3V}{dc^3}$, etc. dans la même hypothèse et pour lesquelles nous mettrons V', V'', V''', etc. l'équation

$$y=X+V'\frac{h}{1}+V''\frac{h^2}{1.2}+V'''\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

offriroit un développement de l'intégrale complète cherchée, dans lequel la quantité h seroit la constante arbitraire. Les fonctions V', V'', V''', etc. se déterminent, ainsi qu'on va le voir, par des équations du premier degré et du premier ordre. Faisons pour abréger $V'+V''\frac{h}{2}+V'''\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.}=W$, il viendra $y=X+Wh$; substituons cette valeur dans p, et désignons par P, P', P'', P''', etc. ce que deviennent les fonctions p, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{d^2p}{dy^2}$, $\frac{d^3p}{dy^3}$, etc. quand on met X à la place de y, nous aurons, au lieu de p, la série

$$P+P'\frac{Wh}{1}+P''\frac{W^2h^2}{1.2}+P'''\frac{W^3h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

et comme $\frac{dy}{dx}=\frac{dX}{dx}+\frac{dW}{dx}h$, l'équation $\frac{dy}{dx}=p$, se changera en

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dW}{dx}h=P+P'\frac{Wh}{1}+P''\frac{W^2h^2}{1.2}+P'''\frac{W^3h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Dans ce nouvel état elle devient identique indépendamment de la constante h qui n'y entroit pas d'abord; mais par l'hypothèse établie $\frac{dX}{dx}=P$: il restera donc $\frac{dW}{dx}=P'W+P''W^2\frac{h}{2}+P'''W^3\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.}$

Remettant pour W sa valeur, et ordonnant par rapport aux puissances de h, nous obtiendrons enfin

$$\frac{dV'}{dx}+\frac{dV''}{dx}\frac{h}{2}+\frac{dV'''}{dx}\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.}=\left.\begin{array}{r} P'\left(V'+V''\frac{h}{2}+V'''\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.}\right) \\ +P''\left(V'^2\frac{h}{2}+2V'V''\frac{h^2}{2.2}+\text{etc.}\right) \\ +P'''\left(V'^3\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.}\right) \\ +\text{etc.}\end{array}\right\},$$

d'où nous tirerons, en comparant les termes homologues,

$$\frac{dV'}{dx}-P'V'=0,\quad \frac{dV''}{dx}-P'V''-P''V'^2=0,$$
$$\frac{dV'''}{dx}-P'V'''-3P''V'V''-P'''V'^3=0,\text{ etc.}$$

La première de ces équations donne $V'=e^{\int P'dx}$; et par la méthode du n°. 556, on tireroit successivement des autres les valeurs de V'', V''', etc. Il n'est pas nécessaire que ces valeurs renferment des constantes arbitraires, puisque le développement de y en contient déjà une.

586. La forme que nous avons supposée à ce développement ne peut être légitime qu'autant qu'elle satisfera à l'équation $dy=pdx$ et que les coefficiens V', V'', etc. auront des valeurs assignables. Mais si la supposition de $y=X$ rendoit infinis les coefficiens P', P'', etc. résultans du développement de p, suivant les puissances entières de Wh, on en concluroit que ce développement et celui de y doivent procéder par des exposans fractionnaires (n°. 128).

Soit $P+Qk^m+Rk^n+$ etc. le développement de p, lorsque y se change en $X+k$; les exposans m, n, etc. formeront une progression croissante, l'équation $\frac{dy}{dx}=pdx$ deviendra $\frac{dk}{dx}=Qk^m+Rk^n+$ etc. puisque par l'hypothèse $\frac{dX}{dx}=P$; pour y satisfaire alors, nous supposerons que le développement complet de y soit représenté

par $X+qh^{\mu}+rh^{\nu}+$ etc. les exposans μ, ν étant indéterminés Puisque la quantité h doit rester arbitraire, on peut toujours supposer $\mu=1$; car cela revient à changer h^{μ} en h, ce qui est permis : nous prendrons donc pour y la série $X+qh+rh^{\nu}+$etc. dans laquelle $\nu>1$ et faisant $k=qh+rh^{\nu}+$ etc. nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq}{dx}h+\frac{dr}{dx}h^{\nu}+\text{etc.}=Q(q+rh^{\nu-1}+\text{etc.})^{m}h^{m}\\ +R(q+rh^{\nu-1}+\text{etc.})^{n}h^{n}\\ +\text{etc.}\end{aligned}\right\}(A).$$

Pour déterminer d'abord le coefficient q, qui affecte la première puissance de h, nous négligerons le quarré et les puissances supérieures; l'équation ci-dessus se réduira à

$$\frac{dq}{dx}h=Qq^{m}h^{m}+Rq^{n}h^{n}+\text{etc.}$$

et ne pourra avoir lieu que quand on aura $m=1$ ou $m>1$. Dans le premier cas on trouvera $\frac{dq}{dx}=Qq$, ce qui donnera $q=e^{\int Q dx}$, et dans le second $\frac{dq}{dx}=0$, d'où on tirera $q=const.$ ou plus simplement $q=1$; on substituera ensuite l'une ou l'autre de ces valeurs, et on tiendra compte des termes affectés de r. Mais lorsque $m<1$, il n'est plus possible de satisfaire à l'équation (A), en faisant h arbitraire et constante, puisqu'on ne sauroit comparer le terme $Qq^{m}h^{m}$, ni au terme $\frac{dq}{dx}h$, ni à aucun de ceux qui le suivent, et dont les exposans surpassent tous l'unité; l'équation $y=X$ ne pouvant alors admettre une constante, n'est pas une intégrale particulière, comme on l'avoit supposé, mais une solution particulière.

587. Ceci nous fournit encore le moyen de trouver les solutions particulières des équations différentielles du premier ordre. En effet, quand dans la série $P+Qk^{m}+Rk^{n}+$ etc. on a $m<1$, $P'\left(\text{ou }\frac{dp}{dy}\right)$ est infini (n°. 128); mais comme il n'en est pas ainsi de P, il faut que la différentiation par laquelle on passe de P à P', introduise dans le dernier un dénominateur qui s'évanouisse. Il résulte de là que si on

représente P' par $\frac{K}{L}$, toute solution particulière donnera $L=0$, et sera par conséquent un facteur de L.

Cette conclusion s'accorde avec celle du n°. 580; car en différentiant l'équation $dy=p\,dx$, on trouve $d^2y-\frac{dp}{dy}dxdy-\frac{dp}{dx}dx^2=0$, et mettant $\frac{K}{L}$ au lieu de $\frac{dp}{dy}$, on a l'équation

$$L\,d^2y-K\,dx\,dy-L\frac{dp}{dx}dx^2=0,$$

dans laquelle L ne peut être qu'un facteur de la fonction M de l'équation $M\,d\frac{dy}{dx}+N\,dy+P\,dx=0$ (n°. 580).

588. Parmi les fonctions algébriques, il n'y a que les radicaux qui acquièrent un dénominateur par la différentiation, et qui peuvent donner par conséquent $\frac{dP}{dy}=\frac{1}{0}$, lorsque P a une valeur finie; c'est donc dans les radicaux qu'il faut chercher les solutions particulières, en égalant à zéro les fonctions qu'ils affectent, et en s'assurant que les équations résultantes satisfont à la proposée. Par ce procédé l'équation $x\,dx+y\,dy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ donne $x^2+y^2-a^2=0$, et l'équation $y\,dx-x\,dy=n\sqrt{dx^2+dy^2}$, de laquelle on tire $\frac{dy}{dx}=\frac{-xy}{n^2-x^2}\pm\frac{\sqrt{x^2+y^2-n^2}}{n^2-x^2}$, conduit à $x^2+y^2-n^2=0$;

589. M. Jean Trembley est parvenu dans un grand nombre de cas à découvrir, au moyen des intégrales particulières, les facteurs propres à rendre intégrables les équations différentielles du premier ordre, et quoique sa méthode ne soit encore appuyée que sur l'induction, elle nous a paru trop digne d'attention pour la passer sous silence. Avant de l'exposer, nous allons d'abord faire connoître quels sont ses fondemens.

Euler avoit déjà remarqué que le multiplicateur ou le diviseur propre à rendre intégrable une équation différentielle, étant égalé à zéro, donnoit une intégrale particulière de cette équation, et il le

prouva ainsi qu'il suit: 1°. ζ étant le multiplicateur de l'équation $Mdx+Ndy$, si on représente par u le facteur de ζ que l'on égale à zéro, on aura une équation dans laquelle le premier membre sera u, et le second une fonction donnée en x et en y; on en pourra tirer une valeur de y au moyen de x et de u; par là l'équation proposée se changera en $Pdx+Qdu=0$, et le facteur ζ prendra la forme Vu, V désignant une fonction de x et de u: l'équation $PVudx+QVudu=0$ sera donc une différentielle complète. Or, en l'intégrant par le procédé du n°. 552, on aura un résultat de la forme Uu, soit que l'on commence par le terme $PVudx$, ou par le terme $QVudu$, puisqu'alors l'une et l'autre des différentielles précédentes s'évanouit lorsque $u=0$. L'équation proposée a donc pour intégrale complète $Uu=C$, et se décompose en $U=0$ et $u=0$, lorsque $C=0$. 2°. Si ζ doit diviser l'équation $Mdx+Ndy=0$, et que u soit le facteur de ce diviseur que l'on égale à zéro, en opérant comme ci-dessus, on changera $Mdx+Ndy=0$ en $Pdx+Qdu=0$, et ζ en Vu; on aura alors la différentielle complète $\frac{Pdx}{Vu}+\frac{Qdu}{Vu}$, dont les deux termes deviendront infinis lorsqu'on supposera $u=0$, si toutefois P et Q ne sont pas divisibles par u. Dans cet état de choses si U représente l'intégrale de cette différentielle, U deviendra infini lorsqu'on fera $u=0$, et par conséquent l'équation $U=c$, intégrale complète de la proposée, aura lieu en même tems que $u=0$, si c est infini.

Si dans ζ le facteur u se trouvoit sous un radical, la conclusion précédente ne seroit plus légitime, parce que ce radical pourroit passer du numérateur au dénominateur, et alors quoique la supposition de $u=0$ satisfît encore à l'équation différentielle, elle ne rendroit pas U infini: $u=0$ seroit dans ce cas une solution et non pas une intégrale particulière.

Le caractère des solutions particulières est en effet de rendre infini le facteur de l'équation différentielle; car ces solutions ne satisfaisant pas à l'intégrale complète $U=c$, ne peuvent rendre nulle l'équation $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=0$, qui en est la différentielle immédiate, et qui n'est autre chose que $\varphi(Mdx+Ndy)=0$, φ désignant le

facteur, et cependant elles font évanouir l'équation $Mdx+Ndy$; il faut donc qu'elles donnent $\varphi=\frac{1}{0}$: c'est ce qu'on peut voir sur l'équation $xdx+ydy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}$. Pour la rendre différentielle complète, il faut la multiplier par $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$; elle devient $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}-dy=0$, et son premier membre ne s'évanouit plus lorsqu'on suppose $x^2+y^2-a^2=0$.

590. M. Trembley a démontré aussi les propositions précédentes par le secours de l'équation qui résulte de la condition d'intégrabilité et qui est $\frac{d.M\zeta}{dy}=\frac{d.N\zeta}{dx}$ lorsque ζ doit multiplier, et $\frac{d.M\frac{1}{\zeta}}{dy}=\frac{d.N\frac{1}{\zeta}}{dx}$ lorsqu'il doit diviser. En développant, on a

$$M\frac{d\zeta}{dy}-N\frac{d\zeta}{dx}+\zeta\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0;$$

$$M\frac{d\zeta}{dy}-N\frac{d\zeta}{dx}-\zeta\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0;$$

équations que la supposition de $\zeta=0$ réduit à $M\frac{d\zeta}{dy}-N\frac{d\zeta}{dx}=0$; mais en différentiant $\zeta=0$, on en tire $\frac{d\zeta}{dy}=-\frac{d\zeta}{dx}\frac{dx}{dy}$, et cette valeur étant substituée dans l'équation ci-dessus, donne $Mdx+Ndy=0$; c'est-à-dire, l'équation proposée, qui doit donc avoir lieu en même tems que $\zeta=0$.

L'équation $M\frac{d\zeta}{dy}-N\frac{d\zeta}{dx}=0$, n'est une conséquence de la supposition de $\zeta=0$, qu'autant que les termes affectés de ζ dans l'équation de condition s'évanouissent, ce qui ne peut arriver, si la valeur de y ou celle de x, résultante de l'équation $\zeta=0$, rend M ou N infini, puisqu'alors l'un des termes $\zeta\frac{dM}{dy}$; ou $\zeta\frac{dN}{dx}$ devient $\frac{0}{0}$. Voilà la premlère exception indiquée par Euler, mais on voit qu'elle n'aura

n'aura pas lieu si l'équation $Mdx+Ndy=0$, est dégagée de tout dénominateur. Supposons maintenant que l'équation $\zeta=0$ fasse évanouir l'une des quantités M ou N, M, par exemple; l'équation de condition sera réduite alors au seul terme $N\frac{d\zeta}{dx}$, et comme par l'hypothèse N ne devient pas nul, il faudra qu'on ait $\frac{d\zeta}{dx}=0$, ce qui fait voir que ζ ne contient alors que y, d'où il suit qu'en posant $\zeta=0$, on a $y=const.$, $dy=0$, et que par conséquent l'équation $Mdx+Ndy=0$ est encore satisfaite. La seconde exception est donc éludée par cette considération; mais il en existe une plus réelle et que n'a point remarquée Euler, c'est lorsque ζ est de la forme v^u et que v est une fonction sans dénominateur: nous ne nous y arrêterons pas pour le moment, parce que nous devons en donner plus loin un exemple.

Nous terminons cet article en faisant observer que l'on a sur le champ l'intégrale de l'équation proposée lorsqu'on connoît deux des facteurs qui la rendent intégrable, et que ses solutions particulières sont des diviseurs communs à tous ces facteurs. En effet, si on désigne par ζ l'un des facteurs, et par u l'intégrale de la différentielle complète $\zeta Mdx+\zeta Ndy$, tous les autres facteurs seront compris dans l'expression $\zeta\varphi(u)$ (n°. 555); faisant donc $\frac{\zeta\varphi(u)}{\zeta}=const.$, on aura $\varphi(u)=const.$, ce qui revient à $u=const.$ Toute solution particulière devant rendre infini le facteur propre à l'intégration (n°. 589), ne peut être qu'un des facteurs de $\frac{1}{\zeta\varphi(u)}$, et doit être contenue dans $\frac{1}{\zeta}$ et non pas dans $\frac{1}{\varphi(u)}$; car si le contraire arrivoit, elle satisferoit à l'équation $\varphi(u)=const.$ en supposant la constante infinie et seroit comprise par conséquent dans l'intégrale complète.

591. Fondé sur les remarques précédentes, qui prouvent que les intégrales et les solutions particulières entrent, comme multiplicateurs ou comme diviseurs, dans la composition du facteur qui rend intégrable l'équation différentielle proposée, M. Trembley a imaginé de former ce facteur en affectant d'exposans indéterminés les diverses fonctions primitives qui, étant égalées à zéro, satisfont à la pro-

posée, et en les multipliant entr'elles. Substituant au lieu de ζ dans l'équation

$$M\frac{d\zeta}{dy}-N\frac{d\zeta}{dx}+\zeta\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=0;\quad (A)\ (\text{n°. }554);$$

le produit qu'il obtient, il égale à zéro les différens termes de cette équation, ce qui lui fournit des conditions, desquelles il tire la valeur des exposans indéterminés. Voici quelques-uns des exemples qu'il donne :

Il est facile de voir que l'on satisfait à l'équation

$$\alpha y\,dx+\beta x\,dy+x^m y^n(\gamma y\,dx+\delta x\,dy)=0;$$

en supposant $x=0$ et $y=0$; on fera donc dans ce cas $\zeta=x^p y^q$, l'équation (A) deviendra

$$(q\alpha-p\beta+\alpha-\beta)x^p y^q+(q\gamma-p\delta+(n+1)\gamma-(m+1)\delta)x^{m+p}y^{n+q}=0;$$

et en égalant séparément à zéro les deux termes dont elle est composée, on en tire

$$q\alpha-p\beta+\alpha-\beta=0,\quad q\gamma-p\delta+(n+1)\gamma-(m+1)\delta=0;$$

d'où $p=\dfrac{(\gamma n-\delta m)\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1$, $q=\dfrac{(\gamma n-\delta m)\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1$, valeurs qui donnent le facteur trouvé dans le n°. 557.

Les intégrales particulières ne sont pas toujours aussi faciles à reconnoître que dans l'exemple précédent, ou ne se présentent pas d'abord en nombre suffisant pour déterminer le facteur. Soit l'équation $2(a^2-x)y\,dy-a\,y\,dx-x\,dx=0$, à laquelle satisfait $x-a^2=0$; on ne parviendroit pas à rendre identique l'équation (A) en faisant $\zeta=(x-a^2)^p$ seulement, il faut encore découvrir quelqu'autre équation primitive qui satisfasse à la proposée. Pour cela M. Trembley prend $x=Ay+By^2$, A et B étant des coefficiens indéterminés, mais constans. Substituant les valeurs de x et de dx, la proposée se change en $(2a^2-aA-A^2)y-(2A+2aB+3AB)y^2-2(B+B^2)y^3=0$; on tire de là

$$2a^2-aA-A^2=0,\quad 2A+2aB+3AB=0,\quad B+B^2=0.$$

La dernière de ces équations donne $B=0$ et $B=-1$. Il n'y a que la supposition de $B=-1$ qui puisse s'accorder avec les deux autres équations, d'où il résulte alors $A=-2a$. Ayant donc l'équation primitive $x+2ay+y^2=0$, qui satisfait aussi à la proposée, on supposera $\zeta=(a^2-x)^p(y^2+2ay+x)^q$, et on trouvera, au moyen

de l'équation (A), $p=-1$, $q=-\frac{1}{2}$, en sorte que le facteur cherché aura pour expression $\frac{1}{(a^2-x)\sqrt{y^2+2ay+x}}$.

Soit encore l'équation

$$y\,dy+(3x+(\alpha+\beta+\gamma))y\,dx+(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\,dx=0;$$

en faisant $y=A+Bx+Cx^2$, et en opérant comme ci-dessus, on obtient

$$A=-\alpha\beta, \quad A=-\alpha\gamma, \quad A=-\beta\gamma$$
$$B=-(\alpha+\beta), \quad B=-(\alpha+\gamma), \quad B=-(\beta+\gamma)$$
$$C=-1$$

d'où il suit

$$y+(x+\alpha)(x+\beta)=0,\ y+(x+\alpha)(x+\gamma)=0,\ y+(x+\beta)(x+\gamma)=0.$$

Posant ensuite

$$z=[y+(x+\alpha)(x+\beta)]^p[y+(x+\alpha)(x+\gamma)]^q[y+(x+\beta)(x+\gamma)]^r,$$

on trouve, au moyen de l'équation (A), $p=q=r=-1$.

592. Considérons l'équation $y\,dx-x\,dy=n\sqrt{dx^2+dy^2}$, que nous connoissons pour être susceptible d'une solution particulière (n°. 578). En la résolvant par rapport à $\frac{dy}{dx}$, nous trouverons

$$dy\,(x^2-n^2)-(xy\mp n\sqrt{y^2+x^2-n^2})\,dx=0.$$

On voit sans peine qu'on satisfait à cette équation en posant $x^2-n^2=0$; et comme elle a pour solution particulière $x^2+y^2-n^2=0$, nous ferons $z=(x^2+y^2-n^2)^p(x^2-n^2)^q$; l'équation (A) nous donnera $p=-\frac{1}{2}$, $q=-1$, et nous aurons ainsi $z=\frac{1}{(x^2-n^2)\sqrt{x^2+y^2-n^2}}$.

M. Trembley cherche immédiatement la solution particulière, en supposant $y=A(x^2-n^2)^r$; substituant dans l'équation proposée et n'ayant égard qu'au signe —, il trouve

$$2Ar\,x\,(x^2-n^2)^r-A\,x(x^2-n^2)^r\pm n\sqrt{A^2(x^2-n^2)^{2r}+x^2-n^2}=0.$$

Pour rendre ce résultat identique, indépendamment de x^2-n^2, il suppose $2r=1$; alors tout se divise par $(x^2-n^2)^{\frac{1}{2}}$ et il reste $\sqrt{A^2+1}=0$; mais par l'hypothèse $A=\frac{y}{\sqrt{x^2-n^2}}$: cette valeur change l'équation $A^2+1=0$ en $x^2+y^2-n^2=0$.

593. Lorsque le facteur ne peut être algébrique, M. Trembley a besoin de modifier son procédé. Voici comme il traite l'équation $a^2(dy-dx)+(x^2-y^2)dx=0$: ayant reconnu que l'équation $y-x=0$ satisfait à la proposée, et ne suffit pas pour donner le facteur, il fait $\zeta=(y-x)^p v$, v étant une fonction de x et de y, qu'il s'agit de déterminer; d'après cette expression l'équation (A) devient

$$(p+2)y^2-px^2-a^2x\frac{dv}{dx}-2xy+a^2y\frac{dv}{dx}+(y^2-x^2+a^2)(y-x)\frac{dv}{dy}=0$$

et peut être rendue identique, en faisant

$$p+2=0,\ px^2+a^2x\frac{dv}{dx}=0,\ -2xy+a^2y\frac{dv}{dx}=0,\ \frac{dv}{dy}=0.$$

Par la première de ces équations $p=-2$; les deux suivantes s'accordent à donner $\frac{dv}{dx}=\frac{2xdx}{a^2}$, ou $v=\frac{x^2}{a^2}$, d'où il résulte $\frac{dv}{dy}=0$, ainsi que l'exige la dernière: on a donc $\zeta=\frac{e^{\frac{x^2}{a^2}}}{(y-x)^2}$, et on voit bien que la supposition de $\zeta=0$, qui emporte celle de $x=-\frac{1}{0}$, ne satisfait pas à l'équation différentielle proposée.

Nous terminerons ici l'extrait du travail de M. Trembley, parce que nous ne saurions le suivre dans la multitude de cas particuliers qu'il examine, non plus que dans les détails d'une méthode qu'il propose ensuite pour découvrir les équations primitives qui satisfont à la proposée, soit comme intégrales, soit comme solutions particulières; nous observerons, à l'égard de cette dernière, qu'elle n'est que l'extension des artifices dont nous avons donné, d'après lui, quelques exemples ci-dessus.

Méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles du premier ordre.

594. Après avoir épuisé les moyens connus pour intégrer une équation différentielle, il faut chercher à la résoudre par approximation, c'est-à-dire, à en tirer la valeur de y en x, au moyen d'une série. Lorsque l'on connoît la forme que doit avoir cette série, on en détermine les coefficiens, en la substituant ainsi que sa différentielle, au lieu de y et de dy, dans l'équation proposée.

Si on avoit, par exemple, l'équation $dy+y\,dx=mx^n dx$, on supposeroit $y=Ax^a+Bx^{a+1}+Cx^{a+2}+$ etc.
mettant cette valeur, ainsi que celle de dy, qui en résulte, dans $dy+y\,dx=mx^n dx$, on auroit

$$\left.\begin{array}{l} aAx^{a-1}+(a+1)Bx^a+(a+2)Cx^{a+1}+(a+3)Dx^{a+2}+\text{ etc.} \\ -mx^n \quad +\quad Ax^a+\quad Bx^{a+1}+\quad Cx^{a+2}+\text{ etc.} \end{array}\right\}=0;$$

cette équation deviendroit identique en faisant $n=a-1$, ou $a=n+1$

et $A=\frac{m}{a}$, $B=\frac{-m}{a(a+1)}$, $C=\frac{-m}{a(a+1)(a+2)}$, $D=\frac{-m}{a(a+1)(a+2)(a+3)}$ etc.

et on trouveroit

$$y=m\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\text{etc.}\right].$$

Cette valeur de y est incomplète, puisqu'elle ne renferme point de constante arbitraire; voici comment on pourroit en obtenir une qui eût toute la généralité que comporte une intégrale:

Soit $f(x,y,c)=0$ l'intégrale d'une équation différentielle quelconque; pour en déterminer la constante c, il faudroit connoître la valeur de y qui répond à une certaine valeur de x; savoir, par exemple, que $y=b$, quand $x=a$: au moyen de cette condition on auroit $f(a,b,c)=0$, d'où on tireroit la valeur de c en a et b. Il est évident qu'on remplira le même but en préparant l'expression de y déduite de l'équation différentielle, de manière qu'en y faisant $x=a$, il en résulte $y=b$; or c'est ce qui peut s'effectuer en posant $x=a+t$, $y=b+u$, et prenant pour représenter u, une série dont tous les termes s'évanouissent quand $t=0$.

L'équation $dy+y\,dx=mx^n dx$ devient par cette transformation $du+(b+u)dt=m(a+t)^n$, et faisant $u=At^a+Bt^{a+1}+Ct^{a+2}+$ etc. on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} aAt^{a-1}+(a+1)Bt^a+(a+2)Ct^{a+1}+\text{etc.} \\ \quad +\quad At^a+\quad Bt^{a+1}+\text{etc.} \\ +b \\ -ma^n-m\frac{n}{1}a^{n-1}t-m\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}t^2-\text{etc.} \end{array}\right\}=0;$$

il faudra supposer dans cette équation $a-1=0$, ou $a=1$, et il viendra

$$A=ma^n-b,\ B=\frac{mna^{n-1}-ma^n+b}{2},\ C=\frac{mn(n-1)a^{n-2}-mna^{n-1}+ma^n-b}{2.3},\text{etc.}$$

595. La série de Taylor s'applique immédiatement à la recherche qui nous occupe. En regardant b comme une fonction de a, cette quantité deviendra

$$b+\frac{db}{da}\frac{\epsilon}{1}+\frac{d^2b}{da^2}\frac{\epsilon^2}{1.2}+\frac{d^3b}{da^3}\frac{\epsilon^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

lorsque b se changera en $a+\epsilon$, et on aura par conséquent

$$y=b+u=b+\frac{db}{da}\frac{\epsilon}{1}+\frac{d^2b}{da^2}\frac{\epsilon^2}{1.2}+\frac{d^3b}{da^3}\frac{\epsilon^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

mais puisque a et b sont deux valeurs correspondantes de x et de y, il doit y avoir entr'elles et le coefficient $\frac{db}{da}$, la même relation qu'entre x, y et $\frac{dy}{dx}$: on trouvera donc la valeur de $\frac{db}{da}$, en mettant a et b à la place de x et de y, dans l'équation proposée, et les différentielles successives de ce résultat donneront les valeurs de $\frac{d^2b}{da^2}$, $\frac{d^3b}{da^3}$, etc. par un calcul absolument semblable à celui du n°. 110.

Si on fait $a+\epsilon=a_1$, et que l'on écrive Y pour b, Y' pour $\frac{db}{da}$, Y'' pour $\frac{d^2b}{da^2}$, etc. enfin Y_1 pour $b+u$, on aura

$$Y_1=Y+Y'\frac{(a_1-a)}{1}+Y''\frac{(a_1-a)^2}{1.2}+Y'''\frac{(a_1-a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

formule analogue à celle que nous avons trouvée dans le n°. 470, et qui n'en diffère qu'en ce que les coefficiens Y', Y'', Y''', etc. contiennent dans le cas actuel, outre la quantité a, la première valeur Y, et cela parce que l'expression de $\frac{dy}{dx}$ renferme en même tems les deux variables x et y.

Tout ce qui a été dit dans le n°. cité s'applique nécessairement ici: si donc on prend une suite de quantités a, a_1, a_2, a_3.....a_n, telles que chacune diffère très-peu de celle qui la précède, que l'on néglige les quarrés et les puissances supérieures des différences a_1-a, a_2-a_1, etc. on formera les valeurs successives de Y_1, Y_2, Y_3, et on en déduira la valeur de Y_n. On pourroit aussi revenir de cette valeur à celle de Y, comme dans le n°. 472. Enfin, s'il

étoit nécessaire de tenir compte d'un certain nombre de puissances des différences $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, etc. on auroit recours aux formules du n°. 480, en observant que les coefficiens Y', Y'', etc. Y'_1, Y''_1, etc. se déduisent de l'expression de $\frac{dy}{dx}$ et de ses différentielles, en y mettant successivement a et Y, a_1 et Y_1, etc. au lieu de x et de y.

596. Ce qui précède fait voir que les équations différentielles du premier ordre à deux variables sont toujours possibles, c'est-à-dire, qu'on peut toujours assigner des valeurs soit rigoureuses, soit approchées de la fonction qu'elles déterminent: la même chose se prouve aussi par des considérations géométriques. En effet, le coefficient $\frac{dy}{dx}$, donné par l'équation différentielle proposée, est la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec la ligne des abscisses, la tangente de la courbe qui représente cette équation (n°. 238): prenant donc le point M, *fig.* 19, correspondant à l'abscisse $AP = a$, et à l'ordonnée $PM = b$, on menera la ligne MT, faisant avec MQ, parallèle à AB, l'angle $M'MQ$ égal à celui dont la tangente est $\frac{db}{da}$, ou Y'; cette droite touchera la courbe cherchée au point M. Passant ensuite à un point P', infiniment proche de P, tirant l'ordonnée $P'M'$, et formant au point M' un angle $M''M'Q'$, dont la tangente soit égale à Y'_1, valeur consécutive de Y', on aura une tangente $T'M'$, consécutive à TM. On voit, qu'en continuant ce procédé, on tracera un polygone qui différera d'autant moins de la courbe à laquelle appartient l'équation proposée, qu'on en multipliera les côtés. Il résulte aussi de cette construction qu'une équation différentielle du premier ordre représente une infinité de courbes, puisqu'on peut prendre le premier point M où on voudra. FIG. 19.

597. Les formules du n°. 595 supposent qu'il est toujours possible de développer la valeur $y = b + u$, relative à $x = a + t$, suivant les puissances entières de t; mais le contraire arrive souvent, et on s'en apperçoit parce qu'alors les coefficiens $\frac{db}{da}$, $\frac{d^2b}{da^2}$, etc. dont les valeurs se tirent de celles de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. deviennent infinis

lorsqu'on y met a pour x et b pour y. Il faut dans ce cas supposer à la série qui exprime u, cette forme générale $u=At^{\alpha}+Bt^{\beta}+Ct^{\gamma}+$ etc. dans laquelle on détermine les exposans et les coefficiens, par les règles données dans les n°s. 119 et 122. En substituant successivement At^{α} et $\alpha At^{\alpha-1}dt$, $At^{\alpha}+Bt^{\beta}$ et $\alpha At^{\alpha-1}dt+\beta Bt^{\beta-1}dt$, etc. au lieu de u et de du, dans l'équation différentielle en u et t. Nous ne nous arrêterons pas à rapporter des exemples de cette méthode, qui sera facilement saisie lorsqu'on aura bien entendu les deux articles cités et les applications qui viennent après.

598. La même méthode conduit à des développemens sous la forme de fractions continues, pour les équations différentielles, comme pour les équations algébriques (n°. 127). Supposons, par exemple, qu'on ait l'équation $P+Qy+Ry^{2}+S\frac{dy}{dx}=0$, P, Q, R et S étant des fonctions quelconques de x; on concevra cette suite de valeurs

$$y=\frac{Ax^{\alpha}}{1+y'}, \quad y'=\frac{Bx^{\beta}}{1+y''}, \quad y''=\frac{Cx^{\gamma}}{1+y'''}, \text{ etc.}$$

qui donnent la fraction continue rapportée dans le n°. cité. Pour avoir les transformées en y', y'', y''', on fera, pour abréger, $Ax^{\alpha}=X$, $Bx^{\beta}=X'$, $Cx^{\gamma}=X''$, etc. Substituant l'expression $\frac{X}{1+y'}$ et sa différentielle, au lieu de y et de dy, on parviendra à un résultat de la forme $P'+Q'y'+R'y'^{2}+S'\frac{dy'}{dx}=0$, dans lequel

$$P'=P+QX+RX^{2}+S\frac{dX}{dx}, \quad Q'=2P+QX+S\frac{dX}{dx}$$
$$R'=P, \qquad S'=-SX.$$

Toutes les transformées ultérieures se déduiront successivement les unes des autres, comme celle-ci de la proposée, et on aura par conséquent

$$P''+Q''y''+R''y''^{2}+S''\frac{dy''}{dx}=0,$$

en faisant

$$P''=P'+Q'X'+R'X'^{2}+S'\frac{dX'}{dx}; \quad Q''=2P'+Q'X'+S'\frac{dX'}{dx}$$
$$R''=P'. \qquad S''=-S'X';$$

on

on obtiendroit de même la transformée en y''' et toutes celles qui la suivent.

Cela posé, pour déterminer X ou Ax^α, on négligera d'abord y', ce qui réduira y à Ax^α; on substituera donc Ax^α et $\alpha Ax^{\alpha-1}dx$, au lieu de y et de dy dans la proposée: l'exposant α et le coefficient A s'obtiendront par les règles des nos 119 et 122. Au moyen de cette valeur de X, on connoîtra les coefficiens de la transformée en y', comme la valeur de y', lorsqu'on néglige y'', se réduit à Bx^β ou X', on déterminera X' par cette transformée, ainsi qu'on a déterminé X par la proposée. En continuant de cette manière, on trouvera tous les numérateurs des fractions intégrantes.

L'opération s'arrêtera d'elle-même, lorsque l'une des quantités P', P'', P''', etc. qui forment les premiers termes des transformées, s'évanouira. Supposons que cela arrive à la troisième; on aura alors l'équation $Q'''y'''+R'''y'''+S'''\frac{dy'''}{dx}=0$, à laquelle on satisfera en faisant $y'''=0$: à la vérité, il ne résultera de là qu'une valeur incomplète pour y, du moins, si aucun des coefficiens constans A, B, etc. n'est demeuré arbitraire; mais on en auroit une qui seroit complète, si l'on intégroit cette dernière transformée, ce qui est possible dans le cas actuel, puisqu'en faisant $y'''=\frac{1}{\zeta}$, on obtient l'équation du premier degré et du premier ordre $Q'''\zeta+R'''-S'''\frac{d\zeta}{dx}=0$.

599. Prenons pour première application l'équation $my+(1+x)\frac{dy}{dx}=0$; substituons d'abord Ax^α au lieu de y; nous aurons $(mA+\alpha A)x^\alpha+\alpha Ax^{\alpha-1}=0$, et nous trouverons qu'on ne peut satisfaire à cette dernière équation, dans l'hypothèse de x très-petite, qu'en faisant $\alpha=0$, puisque le terme affecté de x^α doit s'évanouir devant celui qui multiplie $x^{\alpha-1}$. Le coefficient A restera donc indéterminé et tiendra par conséquent lieu de constante arbitraire. Ayant $X=A$, $P=0$, $Q=m$, $R=0$, $S=1+x$; la première transformée deviendra

$$-m-my'+(1+x)\frac{dy'}{dx}=0;$$

changeant y' en Bx^{β}, dy' en $\beta B x^{\beta-1}dx$, on trouvera $\beta = 1$ et $B = m$ (n^os 119 et 122) : faisant donc $X' = mx$, on obtiendra pour la seconde transformée

$$(m-1)x + (1+(m-1)x)y'' + y''' + (1+x)x\frac{dy''}{dx} = 0.$$

Mettant Cx^{γ} pour y'', $\gamma Cx^{\gamma-1}dx$ pour dy'', on trouvera $\gamma = 1$ et $\gamma = 0$; mais la première de ces valeurs est la seule admissible, car l'exposant de x dans le numérateur de chacune des fractions intégrantes qui suivent la première, doit surpasser 0, puisqu'il faut que toutes ces fractions s'évanouissent en même tems que x : il résulte de là $C = -\frac{m-1}{2}$, et $X'' = -\frac{(m-1)x}{1.2}$. En poussant jusqu'à la sixième transformée, on trouvera

$$X''' = \frac{(m+1)x}{3.2},\quad X^{IV} = -\frac{(m-2)x}{3.2},\quad X^{V} = \frac{(m+2)x}{5.2},\quad X^{VI} = -\frac{(m-3)x}{5.2}$$

et

$$y = \cfrac{A}{1+mx}$$

$$\cfrac{}{1-\cfrac{m-1}{1}\cdot\cfrac{x}{2}}$$

$$\cfrac{}{1+\cfrac{m+1}{3}\cdot\cfrac{x}{2}}$$

$$\cfrac{}{1-\cfrac{m-2}{3}\cdot\cfrac{x}{2}}$$

$$\cfrac{}{1+\cfrac{m+2}{5}\cdot\cfrac{x}{2}}$$

$$\cfrac{}{1-\cfrac{m-3}{5}\cdot\cfrac{x}{2}}$$

$$\cfrac{}{1+\text{etc.}}$$

L'équation $my + (1+x)\frac{dy}{dx} = 0$ s'intégre et donne $y = c(1+x)^{-m}$. Quand $x = 0$, cette expression de y se réduit à $y = c$, et la précédente à $y = A$: donc $c = A$, et la fraction ci-dessus est le développement de $\frac{A}{(1+x)^m}$. Si on fait $A = 1$, on aura $(1+x)^n = \frac{1}{y}$, ou

$$(1+x)^m = 1 + \cfrac{mx}{1 - \cfrac{\frac{m-1}{1}\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{m+1}{3}\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{m-2}{3}\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{m+2}{5}\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{m-3}{5}\frac{x}{2}}{1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Il est facile de déduire de cette expression celles de $l(1+x)$ et de e^x. Pour la première il suffit d'observer que

$$(1+x)^m = 1 + \frac{ml(1+x)}{1} + \frac{m^2(l(1+x))^2}{1.2} + \text{etc.}\,(\text{Int. n°. 25.})$$

d'égaler cette expression à la précédente, et de prendre les limites relatives au décroissement de m; on aura par ce moyen

$$l(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{\frac{1}{1}\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{2}{3}\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{2}{5}\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{3}{5}\frac{x}{2}}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

On sait aussi que la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, en supposant que m devienne infini, est e^x; mettant donc $\frac{x}{m}$, au lieu de x, dans la

fraction continue qui représente $(1+x)^m$, et prenant les limites relatives à l'accroissement de m, on trouvera

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{\frac{1}{1}\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{5}\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{1}{5}\frac{x}{2}}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

Ces fractions continues pourroient aussi s'obtenir par la résolution des équations $1-(1+x)\frac{dy}{dx}=0$, $y-\frac{dy}{dx}=0$, qui résultent de l'élimination des transcendantes dans les équations primitives $y=l(1+x)$, $y=e^x$ (*).

600. En traitant l'équation $1-(1+x)^n\frac{dy}{dx}=0$, on parvient au développement de

$$y=\int\frac{dx}{1+x^n}=\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{x^n}{n+1}}{1+\cfrac{\frac{n^2x^n}{(n+1)(2n+1)}}{1+\cfrac{\frac{(n+1)^2x^n}{(2n+1)(3n+1)}}{1+\cfrac{\frac{(2n)^2x^n}{(3n+1)(4n+1)}}{1+\cfrac{\frac{(2n+1)^2x^n}{(4n+1)(5n+1)}}{1+\text{etc.}}}}}}}$$

(*) On peut changer de plusieurs manières la forme de ces fractions continues, et les réduire, si l'on veut, en fractions ordinaires. Lagrange a donné une Théorie complète des fractions continues à la suite des Elémens d'Algèbre d'Euler, et je l'ai rapportée en entier dans la cinquième édition de ceux de Clairaut. (Paris, 2 volumes, chez Duprat.)

quand on fait $n=1$, on retombe sur la valeur de $l(1+x)$ trouvée plus haut, et lorsque $n=2$, on a

$$y=\text{arc}(\text{tang}=x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1\cdot 3}}$$
$$\cfrac{}{1+\cfrac{4x^2}{3\cdot 5}}$$
$$\cfrac{}{1+\cfrac{9x^2}{5\cdot 7}}$$
$$\cfrac{}{1+\cfrac{16x^2}{7\cdot 9}}$$
$$\cfrac{}{1+\text{etc.}}$$

Les quantités X, X', X'', etc. ou les numérateurs des fractions intégrantes, ne forment pas, dans cet exemple, une série assez convergente, pour qu'on puisse ne considérer qu'un certain nombre des premières et négliger celles qui suivent; mais les transformées en y', y'', etc. marchent vers une limite, au moyen de laquelle on peut, après un certain nombre d'opérations, trouver la valeur approchée du reste de la fraction continue. En effet, on reconnoît à l'inspection de ces transformées, que si on désigne par y_r, l'une quelconque des quantités y', y'', y''', etc. la transformée relative à cette quantité sera

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\left(\frac{r}{2}n\right)^2 x^2}{((r-1)n+1)^2}+\left(1-\frac{(n-1)x^n}{(r-1)n+1}\right)y_r+y^2{}_r\\ +(1+x^n)x\frac{dy_r}{((r-1)n+1)\,dx}\end{aligned}\right\}=0,$$

si r est paire, et

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\left(\frac{r-1}{2}n+1\right)^2 x^n}{((r-1)n+1)^2}+\left(1-\frac{x^n}{(r-1)n+1}\right)y_r+y^2{}_r\\ +(1+x)^n x\frac{dy_r}{((r-1)n+1)\,dx}\end{aligned}\right\}=0,$$

si r est impaire. Prenant la limite de ces deux équations, en supposant que l'indice r soit très-grand, on aura $-\frac{x^2}{4}+y_r+y_r{}^2=0$, d'où il

suit $y_r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+x^2}}{2}$; mais comme y_r doit être nul lorsque $x=0$, on ne peut employer que la valeur $y_r = \frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{2}$, et on donnera $1+y_r$, ou $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2}$, pour dénominateur à la dernière fraction intégrante.

601. Nous nous occuperons encore de l'équation

$$1 + 2mxy - y^2 + nx^2\frac{dy}{dx} = 0,$$

dont la solution est

$$y = \cfrac{1}{1-mx}$$

$$1+\cfrac{\frac{m-n}{2}x}{1-\cfrac{\frac{m+n}{2}x}{1+\cfrac{\frac{m-2n}{2}x}{1-\cfrac{\frac{m+2n}{2}x}{1+\cfrac{\frac{m-3n}{2}x}{1-\text{etc.}}}}}}$$

Cette expression s'arrête toutes les fois que m est un multiple de n, et dans ce cas on peut la compléter par le moyen indiqué n°. 598. En effet, les transformées successives en y', y'', y''', etc. sont

$$-2mx-(2+2mx)y' - y'^2 + nx^2\frac{dy'}{dx} = 0$$

$$(m-n)x-(2+(n-2m)x)y'' - 2y''^2 + nx^2\frac{dy''}{dx} = 0$$

$$-(m+n)x-(2+2mx)y''' - 2y'''^2 + nx^2\frac{dy'''}{dx} = 0$$

$$(m-2n)x-(2+(n-2m)x)y^{IV} - 2y^{IV^2} + nx^2\frac{dy^{IV}}{dx} = 0$$

$$-(m+2n)x-(2+2mx)y^{V} - 2y^{V^2} + nx^2\frac{dy^{V}}{dx} = 0$$

$$(m-3n)x-(2+(n-2m)x)y^{VI} - 2y^{\circ} + nx^2\frac{dy^{VI}}{dx} = 0$$

etc.

en désignant donc par r un indice quelconque ; on aura

$$\left(m-\frac{rn}{2}\right)x-(2+(n-2m)x)y_r-2y_r^{\circ}+nx^2\frac{dy_r}{dx}=0;$$

si cet indice est pair, et

$$-\left(m+\frac{r-1}{2}n\right)x-(2+2mx)y_r-2y^{\circ}_r+nx^2\frac{dy_r}{dx}=0,$$

s'il est impair. Lorsque m sera un multiple de n, il arrivera nécessairement que $m-\frac{rn}{2}=0$, ou $m+\frac{r-1}{2}n=0$; dans l'un et l'autre cas la transformée deviendra

$$-(2-(r-1)nx)y_r-2y^{\circ}_r+nx^2\frac{dy_r}{dx}=0;$$

ou $d\zeta+\frac{(2-(r-1)nx)\zeta dx}{nx^2}=-\frac{2dx}{nx^2}$, en faisant $y_r=\frac{1}{\zeta}$, et on en tirera par l'intégration

$$\zeta=e^{\frac{2}{nx}}x^{\frac{r-1}{n}}\left(-\frac{2}{n}\int e^{-\frac{2}{nx}}x^{-\frac{r+2n-2}{n}}dx+C\right).$$

Il ne faudra plus que mettre $\frac{1}{\zeta}$ à la place de y_r dans la dernière fraction intégrante, dont le rang est marqué par r, pour avoir l'intégrale complète de l'équation proposée.

L'équation $1+2mxy-y^2+nx^2\frac{dy}{dx}$, comprend implicitement l'équation de Riccati; car si on y fait $x=at^{\alpha}$, $y=bt^{\beta}u$, on trouvera après les réductions

$$\frac{du}{dt}+\frac{2m\alpha+n\beta}{n}\frac{u}{t}-\frac{ab}{na}t^{\beta-\alpha-1}u^2+\frac{\alpha}{nab}t^{-\alpha-\beta-1}=0;$$

comparant ce résultat avec l'équation $\frac{du}{dt}+Au^2-Bt^p=0$, on aura

$$2m\alpha+n\beta=0,\ -\frac{ab}{na}=A,\ \beta-\alpha-1=0,\ \frac{\alpha}{nab}=-B,\ -\alpha-\beta-1=p,$$

d'où $\alpha=-\frac{1}{2}p-1$, $\beta=-\frac{1}{2}p$, $\frac{m}{n}=-\frac{p}{2p+4}$

$$a=\frac{\alpha}{n\sqrt{AB}},\qquad b=\sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Puisque la fraction continue qui exprime y s'arrête lorsque $\frac{m}{n}$ est un nombre entier, soit positif, soit négatif, on aura dans les mêmes cas la valeur complète de u en t, c'est-à-dire, toutes les fois que $-\frac{P}{2p+4}$ sera égal à $\pm i$, ce qui donne, ainsi que dans le n°. 550, la formule $p=\frac{-4i}{2i\pm 1}$.

De la construction géométrique des équations différentielles du premier ordre.

602. L'intégration des équations différentielles du premier ordre s'appelle aussi *Méthode inverse des tangentes*, parce que toute équation différentielle de cet ordre, donnant l'expression de $\frac{dy}{dx}$ en x et en y, fait connoître la relation qui existe entre les coordonnées et la soutangente, ou la tangente, ou la normale, etc, dans la courbe qu'elle représente. En effet, si on tire de l'équation proposée $\frac{dy}{dx}=p$, la soutangente aura pour expression $\frac{y}{p}$, la tangente $\frac{y\sqrt{1+p^2}}{p}$, etc. (n°. 246). On découvrit le Calcul différentiel pour mener des tangentes aux courbes, c'est-à-dire, pour résoudre le *Problème direct des tangentes*. On s'occupa ensuite du Calcul intégral, pour parvenir aux équations primitives des courbes par les propriétés de leurs tangentes; mais les progrès et les nombreuses applications de ce Calcul ont fait abandonner la dénomination de *méthode inverse des tangentes* qui ne convenoit qu'à un seul de ses usages.

Dans les premiers tems on chercha à déterminer par les aires ou même par les arcs de quelques courbes connues, l'ordonnée de la courbe demandée; depuis on a laissé ces constructions de côté, parce que, quelqu'élégantes qu'elles fussent dans la théorie, elles étoient toujours moins commodes et sur-tout moins exactes dans la pratique, que les formules approximatives qui ont pris leur place.

Une équation différentielle ne peut se construire en général que lorsqu'on en a séparé les variables, parce qu'alors l'expression de l'une d'elles ne dépend plus que de la quadrature d'une courbe dont l'équation primitive est connue.

603.

603. Proposons-nous de construire la courbe dans laquelle la soutangente est égale à une fonction donnée de l'abscisse x; l'équation différentielle de cette courbe sera $\frac{y\,dx}{dy} = X$, X désignant la fonction donnée. Les variables se séparent sur-le-champ, dans cette équation qui n'a que deux termes, et il vient $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{X}$. Multiplions les deux membres de cette équation par une quantité constante m, nous aurons $\frac{m\,dy}{y} = \frac{m\,dx}{X}$, et désignant par Ly le logarithme de y, pris dans le système dont le module est m, l'intégration nous donnera

$$Ly = \int \frac{m\,dx}{X} = \frac{1}{m}\int \frac{m^2\,dx}{X}.$$

En construisant d'abord la courbe DN, *fig.* 20, telle que l'ordonnée correspondante à l'abscisse AP, soit $PN = \frac{m^2}{X}$, l'aire $ADNP$ donnera la valeur de $\int \frac{m^2\,dx}{X}$. On réduira cette aire à un rectangle FQ, dont l'un des côtés soit m, l'autre côté AQ exprimera $\frac{1}{m}\int \frac{m^2\,dx}{X}$; décrivant ensuite la logarithmique ER, dont les ordonnées soient perpendiculaires à l'axe AC, et élevant par le point Q la perpendiculaire RQ, on aura $L.RQ = AQ$ (n°. 270), ou $L.RQ = \frac{1}{m}\int \frac{m^2\,dx}{X}$, RQ sera donc égale à l'ordonnée PM de la courbe cherchée (*). FIG. 20.

Il faut bien remarquer que cette construction n'exige pas que l'on ait l'expression analytique de la fonction X; on pourroit prendre à sa place l'ordonnée d'une courbe quelconque rapportée à l'axe AB, et effectuer sur cette ordonnée et sur la ligne arbitraire m les opé-

(*) Nous ne nous sommes pas arrêtés à détailler les différens moyens de décrire la logarithmique, qui ne sont tous qu'approximatifs; parce qu'il est plus simple de la construire par points par le procédé du n°. 205, au moyen des tables de logarithmes. On pourroit employer aussi les espaces asymptotiques de l'hyperbole (n°. 493).

rations graphiques indiquées par les formules ci-dessus. On voit aussi que la ligne m n'a été introduite que pour rendre ces formules homogènes et peut être supposée égale à l'unité.

604. Le premier problême qu'on ait résolu par la méthode inverse des tangentes est celui que de Beaune, ami de Descartes, avoit proposé aux Géomètres de son tems. Il fut généralisé par Jacques Bernoulli, qui l'énonça de la manière suivante : *Etant donnée une courbe quelconque, soit algébrique, soit transcendante, ou même tracée par le mouvement libre de la main, en trouver une autre dans laquelle la soutangente soit à l'ordonnée, comme une ligne constante* m *est à la somme ou à la différence de cette ordonnée et de celle de la première courbe.*

En appelant Q l'ordonnée de la courbe donnée, on déduira facilement de cet énoncé l'équation $\frac{dx}{dy}=\frac{m}{y\pm Q}$, ou $m\,dy-y\,dx=\pm Q\,dx$. Cette équation rentre dans celle du premier degré et du premier ordre, que nous représenterons ainsi :

$$m\,dy-\frac{1}{m}U\,y\,dx=V\,dx;$$

l'expression de y trouvée dans les nos 547 et 556, deviendra

$$y=e^{\frac{1}{m^2}\int U\,dx}\left(\frac{1}{m}\int e^{-\frac{1}{m^2}\int U\,dx}V\,dx+C\right).$$

Si on fait $e^{\frac{1}{m^2}\int U\,dx}=z$, on aura $\frac{1}{m^2}\int U\,dx=\mathrm{l}z$, ou $\frac{1}{m}\int U\,dx=\mathrm{L}z$, en prenant le système logarithmique dont le module est m, et $y=\frac{z}{m}\int\frac{V\,dx}{z}=\frac{z}{m^2}\int\frac{m\,V}{z}\,dx$, en faisant abstraction de la constante arbitraire qu'on peut comprendre implicitement dans la manière d'évaluer l'intégrale indiquée (n°. 476). On construira l'équation $\frac{1}{m}\int U\,dx=\mathrm{L}z$, comme celle du n°. précédent, en prenant seulement, au lieu de la courbe DN, celle dont l'ordonnée seroit U. Ayant obtenu, par le moyen de la logarithmique, la ligne QR, telle que $\mathrm{L}.\,QR=\frac{1}{m}\int U\,dx$, et qui soit par conséquent égale à z, on décrira la courbe dont l'ordonnée est $\frac{m\,V}{z}$. Représen-

tant ensuite par S^a l'aire de cette courbe, on parviendra à connoître y en construisant l'expression $\frac{2S^a}{m^a}$.

Les opérations que nous venons d'indiquer sur la valeur complète de y se déduiroient immédiatement de la transformation dont on a fait usage dans le n°. 547. On pourroit substituer aux fonctions U et V les ordonnées de deux courbes quelconques rapportées à l'axe AB, ainsi qu'on l'a fait observer dans le n°. précédent. Pour le cas du problême énoncé ci-dessus, on a $U=m$, et $x=Lz$; $V(=\pm Q)$ est l'ordonnée de la courbe donnée: de Beaune supposoit, au lieu de cette courbe, une ligne droite inclinée à 45° sur l'axe des abscisses.

On construit encore les équations différentielles, en les ramenant à d'autres qu'on sait déjà construire, ou qui représentent des courbes que l'on peut décrire d'un mouvement continu: telles sont les *tractoires*; mais ces courbes appartiennent à la Méchanique plutôt qu'à la Géométrie, c'est pourquoi je n'en parlerai point ici (*).

605. Je vais rapporter, d'après Euler, la solution d'un problême célèbre dans les premiers tems où l'on s'est occupé du Calcul intégral, du *problême des trajectoires*. Il a pour objet de *déterminer la courbe qui coupe toutes celles d'une espèce donnée sous un angle donné*. On entend ici par courbes d'une espèce donnée, les diverses courbes particulières qu'on peut obtenir en assignant successivement à l'une des constantes d'une équation primitive toutes les valeurs possibles. Si, par exemple, on fait varier le paramètre d'une parabole, il en résultera une suite de paraboles rapportées au même axe, ayant même sommet, et dont les extrêmes seront d'une part l'axe, et de l'autre la ligne qui lui est perpendiculaire et qui passe par le sommet: la courbe qui coupera toutes celles-ci sous un angle donné en sera la trajectoire (**).

(*) On appelle *tractoire* la courbe que décrit sur un plan un corps pesant attaché à l'une des extrémités d'un fil, tandis que l'autre parcourt une courbe donnée sur le même plan.

(**) On donne aussi en Méchanique le nom de *trajectoire* à la courbe décrite par un corps sollicité par des forces quelconques; mais il ne sauroit être question de cette espèce de trajectoire dans un ouvrage consacré uniquement à l'Analyse et à la Géométrie.

FIG. 21. Soient $D,N,$, DN, $D'N'$, etc. *fig.* 21, les courbes coupées et MZ la courbe coupante, ou la trajectoire cherchée; si par l'un quelconque M de ses points on lui mène une tangente Mt, et qu'on tire aussi celle de la courbe coupée qui passe par ce point, l'angle TMt, d'après l'énoncé de la question, doit être égal à l'angle donné. Désignons par x', y', les coordonnées des courbes coupées, par x, y, celles de la courbe coupante, et par a la tangente trigonométrique de l'angle constant TMt, qui est égal à la différence des angles MTP et MtP dont les tangentes respectives ont pour expression $\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{dy}{dx}$ (n°. 238); nous aurons $\text{tang}\, TMt = \text{tang}\,(MtP - MTP)$,

et par conséquent $$a = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}}{1 + \frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}}$$ (Int. page 65).

Supposons d'abord que l'on connoisse l'équation primitive des courbes coupées, on en tirera par la différentiation $dy' = p\,dx'$, et l'équation ci-dessus deviendra

$$a\left(1 + p\frac{dy}{dx}\right) + p - \frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots (\mathcal{A}).$$

Il faudra écrire par-tout x et y, au lieu de x' et de y', parce qu'au point M la courbe coupée et la courbe coupante ont les mêmes coordonnées: cela fait, si on élimine entre l'équation $(\mathcal{A})$ et l'équation primitive des courbes coupées, la constante dont les différentes valeurs particularisent chacune de ces courbes, on aura un résultat qui embrassera toutes leurs intersections successives avec la trajectoire et en sera par conséquent l'équation.

Prenons pour exemple les paraboles ayant même axe et même sommet, et dont l'équation est $y'^n = \alpha x'^m$; il viendra $p = \frac{m\alpha x'^{m-1}}{n y'^{n-1}}$.

Nous pourrons chasser immédiatement de cette expression, au moyen de l'équation proposée, le paramètre α qui particularise chaque parabole d'un même degré; substituant le résultat dans l'équation $(\mathcal{A})$, après avoir changé x' et y' en x et en y, et divisant ensuite

par $x^{m-1}y^{n-1}$, nous trouverons

$$a(nx\,dx+my\,dy)+my\,dx-nx\,dy=0;$$

Cette équation étant homogène peut se traiter par le procédé du n°. 545. Lorsqu'on a $m=n=1$, elle devient intégrable en la divisant par x^2+y^2, puisque $\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=d.1\sqrt{x^2+y^2}$, et que $\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=d.\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)$ (n°. 29); on a donc $a1\sqrt{x^2+y^2}+\text{arc}\left(\text{tang}\frac{x}{y}\right)=C$, ou $a1\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)$, en changeant la constante arbitraire. Si on fait $\sqrt{x^2+y^2}=u$, $\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)=t$, on retombera sur l'équation des spirales logarithmiques qui ont la propriété de couper leur rayon vecteur sous un angle constant (n°. 278); et en effet, dans le cas actuel les courbes coupées ne sont autre chose que toutes les lignes droites menées par l'origine des coordonnées et dont l'équation est $y=ax$.

Si on vouloit que l'angle TMt fût droit, il faudroit supposer a infini, et par conséquent ne tenir compte que des termes qu'il multiplie; l'équation ci-dessus se réduiroit à $nx\,dx+my\,dy=0$, dont l'intégrale $nx^2+my^2=c$ nous apprend que la courbe qui coupe à angles droits toutes les paraboles proposées est une ellipse décrite sur le même axe qu'elles, ayant pour centre leur sommet commun. Les trajectoires, pour lesquelles l'angle TMt est droit, s'appellent *trajectoires orthogonales*; leur équation générale est $1+p\frac{dy}{dx}=0$, et s'obtient en faisant a infini dans l'équation (A).

606. Lorsque l'élimination de a présente quelque difficulté, il faut voir si l'on peut obtenir l'une des variables x' ou y' en fonction de l'autre et de la constante a. Supposons que l'équation proposée donne aisément y', on pourra dans ce cas chasser y de l'équation (A), en observant que passer d'une ordonnée quelconque de la trajectoire à celle qui lui est consécutive, c'est la même chose que de passer de l'ordonnée PM, de l'une des courbes coupées DN, à l'ordonnée $P'M'$, qui répond à une nouvelle abscisse AP' dans la courbe consécutive $D'N'$, et

qui s'obtiendra par conséquent en faisant varier à la fois x' et α dans l'équation proposée. Il suit de là que si $dy' = p\,dx' + q\,d\alpha$, on aura aussi $dy = p\,dx + q\,d\alpha$, en changeant x' et y' en x et en y; substituant cette valeur dans l'équation (A), on trouvera

$$(1+p^2)\,a\,dx - (1-ap)\,q\,d\alpha = 0 \ldots\ldots (B).$$

La valeur de y' étant exprimée en x' et α, les coefficiens p et q ne contiendront que ces deux dernières quantités; l'intégrale de l'équation ci-dessus, donnant la relation qui se trouve entre la constante α et l'abscisse x, fournira le moyen de construire la trajectoire cherchée. En effet, ayant déterminé pour une abscisse quelconque AP la valeur de α, si on décrit la courbe coupée DN, relative à cette valeur, elle rencontrera l'ordonnée PM dans un point qui appartiendra à la trajectoire cherchée. Il est d'ailleurs aisé de voir qu'on obtiendra l'équation de cette courbe en éliminant α entre l'intégrale de l'équation (B) et l'équation des courbes coupées, dans laquelle on aura écrit x' et y' pour x et y.

Supposons que les courbes coupées soient toutes les cycloïdes passant par l'origine des coordonnées, décrites sur l'axe des y, et qui ne diffèrent que par leurs cercles générateurs. L'équation différentielle de ces cycloïdes se déduira de celle du n°. 271, en changeant x en y, y en x et r en α, et sera $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{2\alpha x - x^2}}$; mise sous la forme $dy = -\frac{a\,dx - x\,dx}{\sqrt{2\alpha x - x^2}} + \frac{a\,dx}{\sqrt{2\alpha x - x^2}}$, elle donnera

$$y = -\sqrt{2\alpha x - x^2} + \alpha . \operatorname{arc}\left(\cos = 1 - \frac{x}{\alpha}\right)$$

: on ne doit point ajouter de constante, parce que x et y s'évanouissent en même tems. Cette équation primitive ne fait connoître que la valeur de y, et si on suppose $\frac{x}{\alpha} = \zeta$, elle deviendra

$$y = -\alpha\sqrt{2\zeta - \zeta^2} + \alpha . \operatorname{arc}(\cos = 1 - \zeta);$$

pour abréger, nous la représenterons par $y = \alpha Z$, et nous ferons $dZ = Z'd\zeta = Z'\frac{a\,dx - x\,d\alpha}{\alpha^2}$, d'où $dy = Z'dx + \left(Z - Z'\frac{x}{\alpha}\right)d\alpha$,

$p=Z'$, $\quad q=Z-Z'\frac{x}{\alpha}=Z-Z'\zeta$, ce qui montre que p et q seront des fonctions de ζ seul. Mettant dans l'équation (B), au lieu de $d\alpha$ sa valeur $\frac{\zeta dx-x d\zeta}{\zeta^2}$, nous trouverons

$$\frac{dx}{x}+\frac{(1-ap)q d\zeta}{a(1+p^2)\zeta^2-(1-ap)q\zeta}=0.$$

Les variables x et ζ étant séparées dans cette équation, on pourra la construire et déterminer ζ en x, ou x en ζ, ce qui donnera α, puisque $\alpha=\frac{x}{\zeta}$: décrivant ensuite la courbe de l'équation $y=\alpha Z$, on aura y.

607. Passons maintenant au cas où l'on n'a que l'équation différentielle des courbes coupées $dy=p\,dx$, et où la constante α entre dans cette équation. Si p ne renferme pas y, on aura $y=\int p\,dx$, et $q=\frac{dy}{d\alpha}=\frac{d\int p\,dx}{d\alpha}=\int dx\frac{dp}{d\alpha}$ (n°. 552); substituant dans l'équation (B) on trouvera

$$(1+p^2)a\,dx-(1-ap)\,d\alpha\int dx\frac{dp}{d\alpha}=0,$$

équation qui ne sera du premier ordre seulement, que lorsque la différentielle $dx\frac{dp}{d\alpha}$ sera intégrable par rapport à x; mais il y a cependant une circonstance dans laquelle on peut déterminer la trajectoire, sans effectuer cette intégration.

Pour la découvrir, mettons l'équation (B) sous la forme $\frac{a\,dx(1+p^2)}{ap-1}+q\,d\alpha=0$, et cherchons ce que doit être p, pour qu'elle devienne intégrable par la multiplication d'un facteur donné A, qui soit fonction de α seul. L'équation de condition est

$$\frac{d.\frac{aA(1+p^2)}{ap-1}}{d\alpha}=\frac{d.Aq}{dx}=A\frac{dq}{dx}=A\frac{dp}{d\alpha};$$

puisque, $p\,dx+q\,d\alpha$ étant une différentielle complète, on a $\frac{dp}{d\alpha}=\frac{dq}{dx}$;

en développant et réduisant, on obtiendra

$$\frac{a(1+p^2)}{ap-1}\frac{dA}{d\alpha}-\frac{(1+a^2)}{(ap-1)^2}A\frac{dp}{d\alpha}=0.$$

L'intégration de cette équation ne doit s'effectuer que par rapport à α, puisqu'on y regarde x comme constant; les variables α et p se séparent facilement, et il vient

$$\frac{a\,dA}{A}=\frac{(1+a^2)\,dp}{(ap-1)(1+p^2)}=\frac{a^2dp}{ap-1}-\frac{ap\,dp+dp}{1+p^2},$$

d'où on tire

$$a\,lA=a\,l(ap-1)-\tfrac{1}{2}a\,l(1+p^2)-\text{arc}\,(\text{tang}=p)+a\,lX,$$

résultat dans lequel le terme $a\,lX$ représente la constante arbitraire, qui peut être une fonction quelconque de x. La manière dont p se trouve engagé dans cette équation, ne permet pas d'en obtenir une valeur en X et A; mais si on suppose a infini, c'est-à-dire, si on cherche la trajectoire orthogonale, l'équation différentielle ci-dessus deviendra $\frac{dA}{A}=\frac{dp}{p}-\frac{p\,dp}{1+p^2}$, et donnera alors $A=-\frac{pX}{\sqrt{1+p^2}}$. Pour déduire la même équation de l'intégrale rapportée précédemment, il faut observer que cette intégrale peut s'écrire ainsi: $\text{arc}\,(\text{tang}=p)=a\,l\frac{(ap-1)X}{A\sqrt{1+p^2}}$; mettant dans le numérateur $\frac{X}{a}$, au lieu de X, ce qui est permis, puisque X est arbitraire, il viendra $\text{arc}\,(\text{tang}=p)=l\frac{(ap-1)X}{aA\sqrt{1+p^2}}$, et on aura par conséquent, dans la supposition de a infini, $l\frac{pX}{A\sqrt{1+p^2}}=0$, ou $\frac{pX}{A\sqrt{1+p^2}}=1$, ou enfin $A=\frac{pX}{\sqrt{1+p^2}}$. Prenant la valeur de p, on trouvera $p=-\frac{A}{\sqrt{X^2-A^2}}$; l'équation des coupées sera donc $dy=\frac{A\,dx}{\sqrt{X^2-A^2}}$, et aura pour intégrale $y=\int\frac{A\,dx}{\sqrt{X^2-A^2}}+c$: la constante c se déterminera d'après les conditions dans lesquelles doit s'effectuer

s'effectuer l'intégration indiquée. En substituant l'expression de p et celle de $\sqrt{1+p^2}$ dans l'équation (B), qui, par l'hypothèse de a infini, devient $\frac{dx(1+p^2)}{p}+q\,da=0$, on obtiendra l'équation $\frac{X^2dx}{A\sqrt{X^2-A^2}}+q\,da=0$, que le facteur A rendra intégrable, et on en tirera, par le procédé du n°. 552, en intégrant d'abord le premier terme par rapport à x, $\int\frac{X^2dx}{\sqrt{X^2-A^2}}+\nu=c$. Il est facile de voir, d'après le n°. cité, que la fonction ν n'est autre chose que l'intégrale des termes indépendans de x, qui pourroient être contenus dans la différentielle $Aqda$, termes qui ne peuvent provenir que de ceux de la même espèce que renfermera la constante c ajoutée à la valeur de y, puisque $q=\frac{dy}{da}$.

Dans le cas général où p contiendroit en même tems x, y et a, l'élimination de l'une de ces variables, entre l'équation (B) et celle des courbes coupées, meneroit à un résultat du second ordre.

608. Les considérations géométriques conduisent aussi à la théorie des solutions particulières, que nous avons exposée dans le n°. 577. Proposons-nous ce problême; *trouver une courbe telle que toutes les perpendiculaires abaissées d'un point donné, sur les tangentes de cette courbe, soïent égales.* Pour parvenir à l'équation différentielle, il faut se rappeler qu'en nommant x' et y' les coordonnées d'une courbe, et x et y celles de sa tangente, l'équation de cette droite est $y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$ (n°. 238); prenant pour origine des coordonnées le point connu duquel doivent être abaissées toutes les perpendiculaires, chacune d'elles aura pour équation $y=-\frac{dx'}{dy'}x$ (n°. 199), et sa longueur sera exprimée par $\sqrt{x^2+y^2}$. En mettant dans cette formule, pour x et pour y, les coordonnées du point où elle rencontre la tangente qui lui correspond, et dont les valeurs s'obtiennent en déterminant x et y par les deux équations ci-dessus (n°. 200), on

aura, en vertu de ces équations,

$$x=\frac{(x'dy'-y'dx')\,dy'}{dx'^2+dy'^2},\qquad y=-\frac{(x'dy'-y'dx')\,dx'}{dx'^2+dy'^2};$$

et $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{x'dy'-y'dx'}{\sqrt{dx'^2+dy'^2}}=n$;

l'équation différentielle de la courbe cherchée sera donc

$$x'dy'-y'dx'=n\sqrt{dx'^2+dy'^2}.$$

Cela posé, il est facile de voir que le cercle, dont le rayon $=n$, et dont le centre est l'origine des coordonnées, satisfait à la question. Ce cercle ayant pour équation $y'^2+x'^2=n^2$, est précisément la solution particulière que nous avons trouvée n°. 578; mais toute ligne droite, située, par rapport à l'origine des coordonnées, de manière que la perpendiculaire abaissée sur elle de ce point soit égale à n, résout également le problême proposé, et comme il y a une infinité de lignes droites qui peuvent remplir cette condition, c'est dans l'équation qui les comprend toutes que réside l'intégrale complète de l'équation différentielle trouvée ci-dessus, et qui est en effet $y'-cx'=n\sqrt{1+c^2}$ (n°. 574). Une circonstance digne de remarque et qui s'apperçoit sur-le-champ, c'est que toutes les lignes droites dont on vient de parler seront nécessairement touchées par le cercle qui représente la solution particulière, puisqu'il a pour rayon la perpendiculaire abaissée sur chacune d'elles.

La même relation a lieu entre les diverses courbes que représente l'intégrale complète d'une équation différentielle du premier ordre, et celle qui résulte d'une solution particulière de cette équation; la dernière touche toutes les autres. En effet, l'équation différentielle ne détermine que la direction de la tangente, et toute courbe qui, dans un point quelconque, aura la même tangente que l'une des courbes déduites de l'intégrale complète, y satisfera nécessairement: or c'est ce qui arrive à la courbe qui touche toutes celles-ci.

Si on rapproche ceci du n°. 290, il ne restera aucun doute sur la proposition avancée plus haut; car on verra que l'équation de la courbe qui touche toutes celles qui résultent des valeurs successives que l'on donne à α dans l'équation $V=0$ de cet article, s'obtient par le même procédé qui sert à déduire la solution particulière de l'in-

tégrale complète (n°. 577). Il suit de là que la développée d'une courbe n'est autre chose que la solution particulière de l'équation différentielle qui représente toutes les normales de la développante (n°. 289), et qu'en général les courbes données par les solutions particulières résultent des intersections successives des courbes qui répondent aux diverses valeurs que peut avoir la constante arbitraire dans l'intégrale complète.

La règle donnée, n°. 580, pour trouver les solutions particulières, peut aussi se déduire des considérations géométriques. En effet, si, pour chaque valeur de x, la valeur de $\frac{dy}{dx}$, tirée de l'équation différentielle proposée, convient en même tems à la courbe de la solution particulière et à l'une de celles qui résultent de l'intégrale complète, il n'en est pas ainsi de la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, lorsqu'il n'y a qu'une osculation du premier ordre entre les deux courbes dont on vient de parler (n°. 259). Il suit de là (n°. 248), que l'expression de ce coefficient, trouvée en différentiant l'équation proposée, doit devenir $\frac{0}{0}$ pour tous les points de la courbe qui représente la solution particulière. La même chose arriveroit encore dans le cas où l'osculation seroit d'un ordre plus élevé que le premier; $\frac{d^2y}{dx^2}$ auroit toujours deux valeurs, mais ces valeurs seroient égales.

De l'intégration des équations différentielles du second ordre, par le moyen des transformations.

609. Les équations différentielles du second ordre, les plus simples, sont celles dans lesquelles l'une des variables ne s'élève pas au delà du premier degré; nous avons déjà traité (n°. 486), les équations de cet ordre comprises dans la forme $\frac{d^2y}{dx^2}=X$, X désignant une fonction de x, c'est pourquoi nous passerons tout de suite à celles qui ne renferment que les deux coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Faisant pour abréger $\frac{dy}{dx}=p$, nous aurons $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, et l'équation proposée donnera nécessairement $\frac{dp}{dx}=P$, P étant une fonction

connue de p. On tirera de là $dx=\frac{dp}{P}$, et par conséquent $x=\int\frac{dp}{P}$; mettant pour dx sa valeur dans l'équation $dy=p\,dx$, on trouvera aussi $y=\int\frac{p\,dp}{P}$: il ne s'agira plus que d'éliminer p entre les deux équations $x=c+\int\frac{dp}{P}$ et $y=c_1+\int\frac{p\,dp}{P}$, pour avoir l'intégrale en x et y. Elle sera complète, car elle renfermera deux constantes arbitraires, et il suit en effet du n°. 110, que l'intégrale de toute équation du second ordre n'en peut contenir qu'un pareil nombre. L'élimination de p ne pourra se faire que lorsqu'on aura effectué les intégrations indiquées; mais, par les quadratures, on construira la courbe cherchée, comme dans le n°. 606.

Soit pour exemple l'équation $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}=a$. En mettant $p\,dx$ pour dy, et $dp\,dx$ pour d^2y, on changera cette équation en $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dx}{dp}=a$, et on en tirera

$dx=\frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$, $dy=p\,dx=\frac{a\,p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$. L'intégration donnera

$x=C+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$, $y=C_1-\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}$; éliminant p, il viendra

$$(x-C)^2+(y-C_1)^2=a^2.$$

L'équation différentielle proposée n'est autre chose que l'expression générale du rayon de courbure, égalée à une constante a (n°. 261); et, comme on devoit s'y attendre, l'intégrale est l'équation du cercle ayant cette constante pour rayon.

610. Il est à propos de remarquer que les équations $x=C+\int\frac{dp}{P}$ et $y=C_1+\int\frac{p\,dp}{P}$ satisfont, chacune en particulier, à l'équation différentielle $\frac{dp}{dx}=P$, et qu'en supposant les seconds membres intégrés, elles ne seroient que du premier ordre: il y a donc dans

ce cas deux équations de cet ordre qui satisfont à l'équation proposée du second, et qui en sont par conséquent les intégrales, tandis qu'une équation du premier ordre n'a qu'une seule intégrale. Il est facile d'appercevoir la raison de cette différence. Soit $U=0$, une équation primitive entre x, y et deux constantes c et c_1; si on différentie deux fois de suite cette équation, on pourra éliminer entre $U=0$, $dU=0$, $d^2U=0$, les deux constantes et arriver ainsi à une équation du second ordre qui en soit indépendante; mais la combinaison des équations $U=0$ et $dU=0$ conduira à deux équations différentielles du premier ordre; l'une résultera de l'élimination de c_1, et l'autre de celle de c. Représentons-les par $V=0$, $V_1=0$; il est évident que l'on parviendra à l'équation du second ordre, en éliminant c entre $V=0$ et $dV=0$, ou bien c_1 entre $V_1=0$ et $dV_1=0$: chacune des équations $V=0$, $V_1=0$, est donc l'intégrale de celle du second ordre. On les appelle *intégrales premières*, pour les distinguer de l'équation primitive $U=0$, qui est l'*intégrale seconde*.

Il est facile de voir que l'on déduira l'équation $U=0$, des deux équations $V=0$ et $V_1=0$, en éliminant entr'elles le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}=0$, et que par conséquent on aura l'intégrale seconde ou l'équation primitive d'une équation du second ordre, lorsque l'on connoîtra ses deux intégrales premières, et qu'on pourra en chasser $\frac{dy}{dx}$.

Ces remarques s'étendent aux équations de tous les ordres. Pour le troisième, par exemple, l'équation primitive doit contenir trois constantes arbitraires (n^os. 51 et 110); on parvient à l'équation différentielle de cet ordre, en éliminant ces constantes entre les équations $U=0$, $dU=0$, $d^2U=0$, $d^3U=0$; mais si on n'en chasse que deux, on aura trois équations différentielles du second ordre, puisqu'on pourra conserver chacune d'elles à son tour. Les équations qu'on obtient ainsi, sont des *intégrales premières* de l'équation différentielle du troisième ordre, qui résultera nécessairement de l'élimination de la constante qu'elles renferment. Les *intégrales secondes* sont ici les équations du premier ordre que donne l'élimination de chacune des constantes entre les équations $U=0$ et $dU=0$, et l'équation primitive $U=0$ est l'*intégrale troisième*. Nous ne pousserons pas

plus loin ces considérations ; nous en conclurons seulement qu'*une équation différentielle de l'ordre* n *a un nombre* n *d'intégrales premières*, et comme ces intégrales sont de l'ordre $n-1$, elles ne renferment que les $n-1$ coefficiens $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ..... $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$: si donc on peut les éliminer, on aura l'intégrale $n^{ième}$, ou l'équation primitive qui répond à l'équation différentielle proposée.

611. Nous nous occuperons dans cet article de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}=Y$, Y désignant une fonction quelconque de y. Si on fait $dy=p\,dx$, on en peut tirer $dx=\frac{dy}{p}$, ce qui donne $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{p\,dp}{dy}$; substituant dans la proposée, il en résulte $pdp=Y\,dy$, et en intégrant on trouve $p^2=2\int Y dy+C$, d'où il suit $p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{C+2\int Y dy}$, et $x=\int\frac{dy}{\sqrt{C+2\int Y dy}}+C_1$.

Il est bon d'observer que l'intégration ci-dessus peut s'effectuer en multipliant la proposée par dy ; car il vient alors $\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx}=Y\,dy$, et comme $\frac{d^2y}{dx}=d.\frac{dy}{dx}$, on a $\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}=\int Y dy+C$, ou $\frac{dy}{dx}=\sqrt{2C+2\int Y dy}$.

Appliquons ce procédé à l'équation $d^2y\sqrt{ay}=dx^2$; nous aurons $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{ay}}$, $\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx}=\frac{dy}{\sqrt{ay}}$, et $\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2}{a}\sqrt{ay}+C$, en intégrant. Changeant C en $2c\sqrt{a}$, nous tirerons de là

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{4}{\sqrt{a}}(\sqrt{y}+c),\quad \frac{2\,dx}{\sqrt[4]{a}}=\frac{dy}{\sqrt{c+\sqrt{y}}};$$

faisant ensuite $c+\sqrt{y}=z$, il viendra

$$\frac{dx}{\sqrt[4]{a}}=\frac{(z-c)\,dz}{\sqrt{z}}=(z^{\frac{1}{2}}-cz^{-\frac{1}{2}})dz,$$

et enfin $\frac{x}{\sqrt[4]{a}}=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}-2cz^{\frac{1}{2}}+c_1=\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2c)\sqrt{c+\sqrt{y}}+c_1$.

612. On a vu dans le Calcul différentiel (n°. 56 et 76), que passé le premier ordre la forme des équations différentielles changeoit, suivant qu'on prenoit x ou y, ou même une fonction de ces quantités pour *variable indépendante*, et que cela revenoit à regarder successivement comme constante dx, ou dy, ou une fonction donnée de ces différentielles et de leurs variables; il est donc nécessaire, lorsqu'on se propose d'intégrer une équation du second ordre, de savoir dans laquelle de ces hypothèses elle a été calculée. Les exemples précédens répondoient tous à la supposition de y égal à une fonction de x, et par conséquent de dx constant; mais il sera facile de reconnoître parmi les équations relatives à d'autres hypothèses, celles qui peuvent s'y rapporter.

Il est d'abord évident, qu'en désignant par Q une fonction quelconque de $\frac{dx}{dy}$, toute équation de la forme $\frac{d^2x}{dy^2}=Q$, et dans laquelle dy est regardé comme constant, se traitera de même que celle du n°. 609, en faisant $\frac{dx}{dy}=q$, et $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{dq}{dy}$. On peut encore la ramener immédiatement à la forme $\frac{d^2y}{dx^2}=P$, en passant, par le procédé du n°. 77, à la supposition de dx constant, ce qui se fera par la substitution de $-\frac{dx\,d^2y}{dy^3}$, à la place de $\frac{d^2x}{dy^2}$.

Si l'équation proposée eut été prise dans l'hypothèse de $\sqrt{dx^2+dy^2}$ constant et qu'elle ne renfermât que dx, dy, d^2y; ou dy, dx, d^2x, elle rentreroit encore dans le cas du n°. 609, après qu'on l'auroit transformée en une autre dans laquelle dx fût constant.

Soit pour exemple l'équation $\frac{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2x}=a.\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{dy}{dx}\right)$, dans laquelle la différentielle $\sqrt{dx^2+dy^2}$ est regardée comme constante. En posant $\frac{dy}{dx}=p$, on a $\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+p^2}$; différentiant et faisant varier en même tems p et dx, il

résulte de l'hypothèse établie $d^2x\sqrt{1+p^2}+\frac{p\,dx\,dp}{\sqrt{1+p^2}}=0$,

ce qui donne $d^2x=\frac{-p\,dx\,dp}{1+p^2}$; l'équation proposée devient alors

$$-\frac{dx\,(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp}=a.\text{arc}\,(\text{tang}=p);$$

prenant dans cette équation la valeur dx, pour la substituer dans $dy=p\,dx$, il viendra

$$dx=\frac{-a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.\text{arc}\,(\text{tang}=p),\quad dy=\frac{-ap\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.\text{arc}\,(\text{tang}=p).$$

Ces expressions s'intègrent par le procédé du n°. 440, et on trouve

$$x=\frac{-a}{\sqrt{1+p^2}}-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.\text{arc}\,(\text{tang}=p)+c,$$

$$y=\frac{-ap}{\sqrt{1+p^2}}+\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}.\text{arc}\,(\text{tang}=p)+c_1.$$

L'équation $d^2y=Y\,dx^2$, dont nous nous sommes occupés dans le n°. précédent, devient $-\frac{(dx^2+dy^2)d^2x}{dx^3dy}=Y$, ou $\frac{(dx^2+dy^2)d^2y}{dx^4}=Y$, lorsqu'on prend pour constante la différentielle $\sqrt{dx^2+dy^2}$, et se change en $\frac{y\,d^2y+dy^2}{dx^2}=Yy$, quand c'est $y\,dx$ (n°. 77).

613. Passons maintenant aux équations qui contiennent les deux coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ et la variable x. Il est évident que ces équations se ramènent sur le champ au premier ordre, par la substitution de $p\,dx$ et de $dp\,dx$, au lieu de dy et de d^2y. Si on peut intégrer la transformée, et que l'on parvienne à en tirer l'expression de p en x, on obtiendra y par l'équation $y=\int p\,dx$, et si cette transformée donnoit x en p, on feroit usage de la formule $y=px-\int x\,dp$ (n°. 568).

Nous ne nous arrêterons point à détailler les différens cas intégrables que présentent les équations proposées; ils se découvriront aisément

aisément par l'application des divers procédés enseignés précédemment pour intégrer les équations du premier ordre.

Si les équations proposées étoient entre $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ et y, on les rameneroit au cas précédent, en prenant pour constante dy au lieu de dx, ou bien en chassant dx au moyen de sa valeur $\frac{dy}{p}$, tirée de l'équation $dy=p\,dx$, et on auroit ainsi $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{p\,dp}{dy}$: la transformée ne renfermeroit alors que p, dp et dy. Quand elle pourra s'intégrer et qu'elle donnera p en y, on trouvera x par la formule $x=\int\frac{dy}{p}$, et par la formule $x=\frac{y}{p}+\frac{\int y\,dp}{p^2}$ lorsqu'on aura y en p.

614. Ces deux méthodes conduisent aux équations des courbes dont le rayon de courbure est exprimé en fonction de l'une ou de l'autre des coordonnées. Soit, par exemple, X la fonction de x supposée égale à ce rayon dans la courbe demandée, l'équation différentielle sera (n°. 261), $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}=X$, ou $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dx}{dp}=X$, ou enfin $\frac{dx}{X}=\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$. En intégrant il vient $\int\frac{dx}{X}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; représentons $\int\frac{dx}{X}$ par V et nous aurons

$$p=\frac{V}{\sqrt{1-V^2}},\quad y=\int p\,dx=\int\frac{V\,dx}{\sqrt{1-V^2}}.$$

Prenons encore pour exemple l'équation

$$(a^2dy^2+x^2dx^2)\,d^2y=n\,x\,dx^3dy;$$

la transformée est dans ce cas $(a^2p^2+x^2)\,dp=npx\,dx$, équation homogène dont on tire $\frac{dp}{p}=\frac{n\,u\,du}{a^2+(1-n)u^2}$, après avoir fait $x=pu$. En intégrant on trouve

$$lp=\frac{n}{2(1-n)}l\,(a^2+(1-n)u^2)+lc,$$

d'où $p=c(a^2+(1-n)u^2)^{\frac{n}{2(1-n)}}$, $x=cu(a^2+(1-n)u^2)^{\frac{n}{2(1-n)}}$,

$y=px-\int x\,dp=c^2u(a^2+(1-n)u^2)^{\frac{n}{1-n}}-nc^2\int u^2\,du(a^2+(1-n)u^2)^{\frac{2n-1}{1-n}}+c_1$.

Lorsque $n=1$, on a

$$\frac{dp}{p}=\frac{u\,du}{a^2},\quad lp=\frac{u^2}{2a^2}+lc,\quad u=a\sqrt{2l\frac{p}{c}},$$

$$x=ap\sqrt{2l\frac{p}{c}},\quad y=ap^2\sqrt{2l\frac{p}{c}}-a\int p\,dp\sqrt{2l\frac{p}{c}}+c_1.$$

Cherchons en dernier lieu l'intégrale de l'équation $ab\,d^2y=dx\sqrt{y^2dx^2+a^2dy^2}$. En mettant dans cette équation $\frac{dy}{p}$ au lieu de dx, et $\frac{dp\,dy}{p}$ au lieu de d^2y, elle devient

$ab\,p\,dp=dy\sqrt{y^2+a^2p^2}$; posant ensuite $p=\frac{y}{u}$, on trouvera

$u^2dy\sqrt{a^2+u^2}=abu\,dy-aby\,du$, $\frac{dy}{y}=\frac{ab\,du}{abu-u^2\sqrt{a^2+u^2}}$.

Soit $\sqrt{a^2+u^2}=su$, on aura $u^2=\frac{a^2}{s^2-1}$

$$\frac{du}{u}=\frac{-s\,ds}{s^2-1},\qquad \frac{dy}{y}=\frac{-bs\,ds}{bs^2-as-b}=\frac{-s\,ds}{s^2-2ns-1};$$

en faisant $\frac{a}{b}=n$; décomposant le dernier membre en fraction simple, on obtiendra

$$\frac{2dy\sqrt{n^2+1}}{y}=\frac{-ds(n+\sqrt{n^2+1})}{s-n-\sqrt{n^2+1}}+\frac{ds(n-\sqrt{n^2+1})}{s-n+\sqrt{n^2+1}},$$

$$y^{2\sqrt{n^2+1}}=\frac{C(s-n+\sqrt{n^2+1})^{n-\sqrt{n^2+1}}}{(s-n-\sqrt{n^2+1})^{n+\sqrt{n^2+1}}}.$$

Revenant à l'équation $y=pu$, qui devient $y=u\frac{dy}{dx}$, en mettant pour p sa valeur, on en tire $dx=\frac{u\,dy}{y}$; et puisque $u=\frac{a}{\sqrt{s^2-1}}$ et $\frac{dy}{y}=\frac{-s\,ds}{s^2-2ns-1}$, on a enfin $dx=\frac{-a\,s\,ds}{(s^2-2ns-1)\sqrt{s^2-1}}$; différentielle qui s'intègre par la méthode du n°. 377.

615. L'équation du premier degré et du second ordre, dont la forme est $d^2y+Pdx\,dy+Qy\,dx^2=Rdx^2$, P, Q et R désignant des fonctions de x, se présente immédiatement après celles que nous venons de traiter, et se ramène à l'équation $d^2\zeta+Pdxd\zeta+Q\zeta dx^2=0$, par la même transformation qui nous a servi dans le n°. 547 à faire dépendre $dy+Pydx=Qdx$ de $d\zeta+P\zeta dx=0$. En effet, la supposition de $y=X\zeta$, donne

$$dy=Xd\zeta+\zeta dX, \quad d^2y=Xd^2\zeta+2dXd\zeta+\zeta d^2X,$$

et change l'équation proposée en

$$X(d^2\zeta+Pdxd\zeta+Q\zeta dx^2)+2dXd\zeta+P\zeta dXdx+\zeta d^2X=Rdx^2.$$

Si on fait $d^2\zeta+Pdxd\zeta+Q\zeta dx^2=0$, et qu'on parvienne à tirer de cette équation la valeur de ζ en x, on aura pour déterminer la fonction X, l'équation $2dXd\zeta+P\zeta dXdx+\zeta d^2X=Rdx^2$, qui ne contenant point la variable X, mais seulement ses différentielles, se réduira au premier ordre lorsqu'on fera $dX=X'dx$: on trouvera alors $2X'd\zeta+P\zeta X'dx+\zeta dX'=Rdx$, ou bien $dX'+\left(P+\frac{2d\zeta}{\zeta dx}\right)X'dx=\frac{Rdx}{\zeta}$. Cette équation n'étant que du premier degré et du premier ordre par rapport à X', conduit à

$$X'=e^{-\int\left(Pdx+\frac{2d\zeta}{\zeta}\right)}\left[\int e^{\int\left(Pdx+\frac{2d\zeta}{\zeta}\right)}\frac{Rdx}{\zeta}+C\right] \text{ (n°. 547)},$$

résultat qui devient $X'=\frac{e^{-\int Pdx}}{\zeta^2}\left[\int e^{\int Pdx}R\zeta dx+C\right]$,

en observant que $e^{-\int\frac{2dx}{\zeta}}=\frac{1}{\zeta^2}$, $e^{\frac{\int 2dx}{\zeta}}=\zeta^2$. On aura ensuite

$$X=\int X'dx+C, \text{ et } y=\zeta\int X'dx+C\zeta.$$

616. Considérons maintenant l'équation $d^2\zeta+Pdxd\zeta+Q\zeta dx^2=0$. Il est facile de la changer dans une autre qui ne contienne que les coefficiens différentiels de la variable indépendante x; pour cela il suffit de se rappeler que les différentielles successives de la fonction exponentielle e^u sont toutes divisibles par e^u, et ne renferment après la division que du, d^2u, etc. (n°. 21). Si donc on fait $\zeta=e^u$, il viendra $d^2u+du^2+Pdxdu+Qdx^2=0$, et la substitution de tdx et de $dtdx$, pour du et d^2u, donnera $dt+(t^2+Pt+Q)dx=0$. Cette équation étant intégrée, on aura $\zeta=e^u=e^{\int tdx+c}=Ce^{\int tdx}$,

valeur qui renferme deux constantes, puisque t en contient implicitement une.

617. Le cas le plus simple est celui où les coefficiens P et Q sont constans, c'est-à-dire, où l'on a $d^2z+A\,dx\,dz+B\,z\,dx^2=0$. L'équation $dt+(t^2+Pt+Q)\,dx=0$, devient alors $dt+(t^2+At+B)\,dx=0$, et s'integre lorsqu'on la met sous la forme $\frac{dt}{t^2+At+B}+dx=0$; mais on arrivera plus facilement encore à l'expression de z, en se bornant à satisfaire à cette équation au lieu de l'intégrer complètement, ce qui se fera en supposant $t=m$, la constante m étant telle que $m^2+Am+B=0$, puisqu'on a en même tems $dt=0$: on trouvera, par ce moyen, $z=Ce^{mx}$. Si maintenant on observe que la quantité m a deux valeurs, et qu'on désigne ces valeurs par m' et m'', on aura $z=Ce^{m'x}$ et $z=C_1e^{m''x}$. Non-seulement chacune de ces valeurs satisfait à la proposée indépendamment de la constante arbitraire, mais leur somme $Ce^{m'x}+C_1e^{m''x}$ jouit de la même propriété, ainsi qu'on peut s'en assurer en substituant cette quantité et ses différentielles à la place de z, dz et d^2z; on trouvera $Ce^{m'x}(m'^2+Am'+B)+C_1e^{m''x}(m''^2+Am''+B)=0$, équation qui est identique, puisque m' et m'' sont les racines de $m^2+Am+B=0$. La somme des deux valeurs de z, contenant deux constantes arbitraires, sera nécessairement l'intégrale complète de la proposée, et on aura ainsi $z=Ce^{m'x}+C_1e^{m''x}$.

Tant que les racines m' et m'' seront réelles et inégales, la forme du résultat auquel nous venons de parvenir sera aussi commode pour les applications qu'elle est simple; mais quand ces racines seront imaginaires, il faudra exprimer les exponentielles en sinus et cosinus au moyen des formules du n°. 40 de l'Introduction. Supposons qu'on ait

$$m'=\alpha+\beta\sqrt{-1}, \qquad m''=\alpha-\beta\sqrt{-1};$$

les quantités $e^{m'x}$ et $e^{m''x}$ deviendront respectivement

$$e^{\alpha x+\beta x\sqrt{-1}}=e^{\alpha x}.\,e^{\beta x\sqrt{-1}}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+\sqrt{-1}\sin\beta x),$$

$$e^{\alpha x-\beta x\sqrt{-1}}=e^{\alpha x}.e^{-\beta x\sqrt{-1}}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-\sqrt{-1}\sin\beta x);$$

il en résultera

$$z=e^{\alpha x}[(C+C_1)\cos\beta x+(C-C_1)\sqrt{-1}\sin\beta x];$$

et faisant $C+C_1=c$, $(C-C_1)\sqrt{-1}=c_1$, on aura $z=e^{\alpha x}(c\cos\beta x+c_1\sin\beta x)$.

On peut encore donner à cette intégrale la forme $z=pe^{\alpha x}\sin(\beta x+q)$, en posant $c=p\sin q$ et $c_1=p\cos q$. Les constantes arbitraires seront alors p et q.

Quand les racines m' et m'' sont égales, l'équation $z=Ce^{m'x}+C_1e^{m''x}$ devient $z=(C+C_1)e^{m'x}$, et ne donne plus qu'une intégrale particulière; car les deux constantes C et C_1 se réunissent dans une seule en posant $C+C_1=c$. Le premier moyen qui s'offre dans ce cas pour trouver l'intégrale complète est de recourir à l'équation

$\frac{dt}{t^2+At+B}+dx=0$, qui devient $\frac{dt}{(t-m)^2}+dx=0$, et donne par l'intégration, $-\frac{1}{t-m}+x+C=0$, d'où il suit

$$t=m+\frac{1}{x+C},\quad z=ce^{mx+1(x+C)}=ce^{mx}(x+C);$$

en faisant $Cc=c_1$, on obtient $z=e^{mx}(cx+c_1)$.

On parvient au même résultat par une méthode analogue à celle du n°. 139; on suppose que m'' ne diffère de m' que d'une quantité très-petite, en sorte que $m''=m'+k$; l'équation $z=Ce^{m'x}+C_1e^{m''x}$, se change alors en $z=Ce^{m'x}+C_1e^{m'x+kx}$; on développe la quantité e^{kx} suivant les puissances de k, et il vient

$$z=Ce^{m'x}+C_1e^{m'x}\left(1+\frac{kx}{1}+\frac{k^2x^2}{1.2}+\text{etc.}\right)$$

$$=e^{m'x}\left(C+C_1+C_1kx+C_1k.\frac{kx^2}{2}+\text{etc.}\right),$$

ou $$=e^{m'x}\left(c_1+cx+c\frac{kx^2}{2}+\text{etc.}\right),$$

en posant $C+C_1=c_1$ et $C_1k=c$. Si maintenant on fait $k=0$, ce qui répond à l'hypothèse de $m'=m''$, on aura, comme ci-dessus,

$$z=e^{m'x}(cx+c_1).$$

618. Il est important de remarquer que l'intégrale complète de l'équation $d^2z+A\,dx\,dz+Bz\,dx^2=0$, s'obtient en multipliant par une constante arbitraire chacune des exponentielles $e^{m'x}$ et $e^{m''x}$, qui ont des valeurs particulières de z, et en ajoutant les produits.

L'équation générale $d^2\zeta+P\,dx\,d\zeta+Q\,dx^2=0$ jouit d'une propriété analogue; si $\zeta=M$ et $\zeta=M_1$ sont deux valeurs particulières qui satisfont à cette équation, son intégrale complète sera $\zeta=CM+C_1M_1$. En effet, en substituant pour ζ, $d\zeta$ et $d^2\zeta$, leurs expressions, on trouve l'équation

$$C(d^2M+P\,dx\,dM+QM\,dx^2)+C_1(d^2M_1+P\,dx\,dM_1+QM_1dx^2)=0,$$

qui devient identique lorsqu'on a séparément

$$d^2M+P\,dx\,dM+QM\,dx^2=0, \qquad d^2M_1+P\,dx\,dM_1+QM_1dx^2=0.$$

Si on ne connoissoit qu'une seule valeur particulière $\zeta=M$, on feroit $\zeta=uM$, u étant une fonction indéterminée de x, l'équation proposée deviendroit

$$u(d^2M+P\,dx\,dM+QM\,dx^2)+Md^2u+2\,dM\,du+PM\,dx\,du=0,$$

et se réduiroit par conséquent à $Md^2u+2\,dM\,du+PM\,dx\,du=0$. En posant $du=u'dx$, on tireroit de cette dernière équation

$$du'+\left(2\frac{dM}{M\,dx}+P\right)u'dx=0, \quad u'=\frac{C}{M^2}e^{-\int P\,dx},$$

d'où $\quad u=C_1+\int\frac{C}{M^2}e^{-\int P\,dx}, \quad \zeta=C_1M+M\int\frac{C}{M^2}e^{-\int P\,dx}.$

619. Proposons-nous d'intégrer l'équation

$$d^2\zeta+\frac{A\,dx\,d\zeta}{a+bx}+\frac{B\,dx^2}{(a+bx)^2}=0.$$

La transformée en t deviendra dans cet exemple

$$dt+\left(t^2+\frac{At}{a+bx}+\frac{B}{(a+bx)^2}\right)dx^2=0,$$ et prendra la forme

$$(a+bx)\,du+(u^2+(A-b)u+B)\,dx=0,$$

si l'on pose $u=(a+bx)t$; il est visible qu'on y satisfera en faisant $u^2+(A-b)u+B=0$, puisque u étant alors constant on aura $du=0$. Soient m' et m'', les deux racines de cette équation; il viendra $t=\frac{m'}{a+bx}$, $t=\frac{m''}{a+bx}$; les valeurs particulières de ζ seront

$$\zeta=e^{\int\frac{m'dx}{a+bx}}=(a+bx)^{\frac{m'}{b}}, \quad \zeta=e^{\int\frac{m''dx}{a+bx}}=(a+bx)^{\frac{m''}{b}},$$

et on aura pour l'intégrale complète

$$\zeta=C(a+bx)^{\frac{m'}{b}}+C_1(a+bx)^{\frac{m''}{b}};$$

Dans le cas où les racines m' et m'' seront de la forme $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, on trouvera

$$z=(a+bx)^{\frac{\alpha}{b}}\left[C(a+bx)^{\frac{\beta}{b}\sqrt{-1}}+C_1(a+bx)^{-\frac{\beta}{b}\sqrt{-1}}\right],$$

et comme (n°. 186),

$$(a+bx)^{\pm\frac{\beta}{b}\sqrt{-1}}=\cos\left[\frac{\beta}{b}l(a+bx)\right]\pm\sqrt{-1}\sin\left[\frac{\beta}{b}l(a+bx)\right];$$

on obtiendra

$$z=(a+bx)^{\frac{\alpha}{b}}\left[c\cos\left[\frac{\beta}{b}l(a+bx)\right]+c_1\sin\left[\frac{\beta}{b}l(a+bx)\right]\right];$$

en prenant $c=C+C_1$, $\quad c_1=(C-C_1)\sqrt{-1}$,

$$\text{ou}\qquad z=p(a+bx)^{\frac{\alpha}{b}}\sin\left[\frac{\beta}{b}l(a+bx)+q\right],$$

$$\text{si}\qquad c=p\sin q,\qquad c_1=p\cos q.$$

Quand les racines m' et m'' seront égales, on supposera, comme dans le n°. 617, $m''=m'+k$, ce qui donnera

$$z=C(a+bx)^{\frac{m'}{b}}+C_1(a+bx)^{\frac{m'+k}{b}}=(a+bx)^{\frac{m'}{b}}\left[C+C_1(a+bx)^{\frac{k}{b}}\right]$$

$$=(a+bx)^{\frac{m'}{b}}\left[C+C_1\left(1+\frac{k}{b}l(a+bx)+\text{etc.}\right)\right];\ (\text{Int. n°. 25.})$$

posant ensuite $C+C_1=c$, $\quad C_1\frac{k}{b}=c_1$, et faisant, après ce changement, $k=0$, on aura enfin $z=(a+bx)^{\frac{m'}{b}}\left[c+c_1l(a+bx)\right]$.

620. L'équation $d^2z-\frac{dXdz}{X}+AXdxdz+BX^2zdx^2=0$, dans laquelle X désigne une fonction quelconque de x, s'intègre par la supposition de $dz=Xuzdx$, de laquelle il résulte

$$d^2z=Xudzdx+Xzdudx+uzdXdx$$
$$=X^2u^2zdx^2+Xzdudx+uzdXdx,$$

parce qu'après la substitution de ces valeurs la variable z disparoît; et il vient $du+(u^2+Au+B)Xdx=0$. On satisfait à cette dernière équation en faisant $u^2+Au+B=0$; l'équation $dz=Xuzdx$ donne $z=Ce^{\int Xudx}$: on mettra donc successivement, au lieu de u,

chacune des valeurs dont il est susceptible, et que nous représenterons par m' et m''; on aura ainsi $z = Ce^{m'\int X dx}$, $z = C_1 e^{m''\int X dx}$, et par conséquent $z = Ce^{m's} + C_1 e^{m''s}$, en écrivant, pour abréger, s à la place de $\int X dx$.

On trouvera, comme dans le n°. précédent, $z = p \sin(\beta s + q)$, lorsque les racines m' et m'' seront imaginaires, et $z = e^{m's}(cs + c_1)$, lorsqu'elles seront égales.

Si l'on veut appliquer ces formules à un exemple, on pourra prendre l'équation $d^2z - \frac{n dx dz}{x} + Ax^n dx dz + Bx^{2n} z dx = 0$, pour laquelle $X = x^n$, et $s = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

621. C'est en cherchant les différens cas d'intégrabilité de l'équation $dt + (t^2 + Pt + Q)dx = 0$, que l'on découvrira ceux de l'équation du second ordre $d^2z + P dx dz + Qz dx^2 = 0$. La première rentre dans celle que nous avons traitée, n°. 565; car en faisant $t = Vs$, elle devient $V ds + s(dV + PV dx) + V^2 s^2 dx + Q dx = 0$, et se réduit à $ds + Vs^2 dx + \frac{Q}{V} dx = 0$, lorsqu'on pose $dV + PV dx = 0$, d'où il résulte $V = Ce^{-\int P dx}$. Pour la transformer d'une manière plus générale, on peut supposer avec Euler $t = \frac{U + Vs}{S + Ts}$, et chercher à déterminer les fonctions S, T, U et V, de manière que la résultante soit facile à traiter; mais au lieu de nous arrêter à ce calcul, nous allons faire connoître quelques-unes des transformations dont la proposée est elle-même susceptible.

622. 1°. Soit $z = Rr$; l'équation $d^2z + P dz dx + Qz dx^2 = 0$ se changera en

$$R d^2r + (2dR + PR dx) dr + (d^2R + P dR dx + QR dx^2) r = 0,$$

le terme multiplié par dr s'évanouira par la supposition de $2dR + PR dx = 0$, de laquelle on tire $R = e^{-\frac{1}{2}\int P dx}$: substituant cette valeur, on aura $d^2r + \left(Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}\right) r dx^2 = 0$, résultat de la forme $d^2r + Nr dx^2 = 0$. L'équation auxiliaire en t devient alors

alors $dt+(t^2+N)\,dx=0$, et s'obtient toujours en supposant $r=e^{\int t\,dx}$.

2°. Soit $\zeta=e^{\int R\,dx}r$; on aura

$$d^2r+(2R+P)\,dx\,dr+\left(\frac{dR}{dx}+R^2+PR+Q\right)r\,dx^2=0.$$

Cette transformée rentrera dans la précédente, si l'on fait $2R+P=0$, et se réduira à $d^2r+(2R+P)\,dx\,dr=0$, par la supposition de $\frac{dR}{dx}+R^2+PR+Q=0$; on y satisfera, dans ce dernier cas, en prenant $r=const.$ En général, il faut tâcher de découvrir pour R une expression qui rende intégrable l'équation auxiliaire

$$dt+\left[t^2+(2R+P)t+\frac{dR}{dx}+R^2+PR+Q\right]dx=0,$$

ou qui soit telle qu'on puisse obtenir une valeur particulière de t (n°. 618).

3°. Soit l'équation du premier ordre $r\,d\zeta+R\zeta\,dx=A\,dx$; la différentiation donnera un résultat qu'on pourra mettre sous la forme $d^2\zeta+\left(\frac{dr}{r\,dx}+\frac{R}{r}\right)dx\,d\zeta+\frac{dR}{r\,dx}\zeta\,dx^2=0$; comparant avec la proposée, on trouvera $P=\frac{dr}{r\,dx}+\frac{R}{r}$, $Q=\frac{dR}{r\,dx}$: on différentiera la première de ces équations pour éliminer R, et il viendra

$$d^2r-P\,dx\,dr+\left(Q-\frac{dP}{dx}\right)r\,dx^2=0.$$

Toutes les fois que l'on pourra tirer de cette équation une valeur particulière de r, on aura la valeur complète de ζ, puisque l'équation du premier ordre entre r et ζ, d'où l'on est parti, n'est que du premier degré et contient déjà la constante A.

Si on élimine r, entre les équations $P=\frac{dr}{r\,dx}+\frac{R}{r}$ et $Q=\frac{dR}{r\,dx}$, on obtiendra cette transformée

$$d^2R-\left(P+\frac{dQ}{Q\,dx}\right)dx\,dR+QR\,dx^2=0,$$

qui conduira comme la précédente à la valeur complète de ζ.

4°. En observant que $\frac{d^2\zeta}{\zeta}=d.\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{d\zeta^2}{\zeta^2}$, on peut mettre

l'équation proposée sous la forme $d.\frac{dz}{z}+\left(\frac{dz}{z}\right)^2+P\,dx\frac{dz}{z}+Q\,dx^2=0$. Il est aisé de voir alors qu'on en chassera z, si l'on se donne une valeur de $\frac{dz}{z}$, en x, dr, dx, et des fonctions indéterminées de x; mais il faudra que la résultante soit du premier degré par rapport à r et dr. Euler prend $\frac{dz}{z}=\frac{T\,dr+U\,r\,dx}{R\,dr+S\,r\,dx}$, et trouve que la condition que l'on vient d'énoncer ne peut être remplie que lorsque la quantité $dx(T^2+UR-TS)+(R\,dT-T\,dR)+PRT\,dx+QR^2dx$, qui multiplie dr^2 dans la transformée, s'évanouit, ce qui donne une relation entre les fonctions R, S, T et U.

Je ne pousserai pas plus loin ces calculs qui se compliquent beaucoup et ne paroissent pas devoir conduire à des résultats dont on puisse tirer parti. Je terminerai cet article en faisant remarquer que si l'on veut introduire dans une équation quelconque du second ordre, à la place de la variable x dont la différentielle est constante, une autre variable s, égale à une fonction donnée de la première, il faut, d'après ce qui a été dit, n°. 77, écrire $\frac{1}{dx}d.\frac{dz}{dx}$ à la place de $\frac{d^2z}{dx^2}$, et si on a $ds=X\,dx$, il en résultera

$$dx=\frac{ds}{X},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{X\,dz}{ds},\quad d.\frac{dz}{dx}=d.\frac{X\,dz}{ds}=\frac{dX\,dz}{ds}+X\frac{d^2z}{ds},$$

en prenant la différentielle ds pour constante; il ne restera plus qu'à chasser x au moyen de sa relation avec s. L'équation

$$d^2z+P\,dx\,dz+Qz\,dx^2=0,$$

traitée ainsi devient $d^2z+\left(\frac{dX}{X\,ds}+\frac{P}{X}\right)ds\,dz+\frac{Q}{X^2}\,ds^2=0$, et sera transformée lorsqu'on aura substitué la valeur de x en s, dans les quantités P, Q et X.

623. Il résulte du n°. 615 que l'intégration des équations de la forme $d^2y+P\,dx\,dy+Qy\,dx^2=R\,dx^2$ revient à celle des différentielles d'une seule variable, lorsqu'on a l'expression de z tirée de l'équation correspondante $d^2z+P\,dx\,dz+Qz\,dx^2=0$,

et comme celle-ci est ramenée à l'équation du premier ordre

$$dt+(t^2+Pt+Q)\,dx=0 \quad (\text{n°. 616}),$$

il suit de là que l'équation différentielle du second ordre et du premier degré dépend en dernière analyse de la précédente. L'application des formules du n°. 615 ne peut en général souffrir aucune difficulté, et pour la faciliter encore, nous en donnerons un exemple sur l'équation $d^2y+A\,dx\,dy+By\,dx^2=R\,dx^2$.

On a pour l'équation $d^2y+P\,dx\,dy+Qy\,dx^2=R\,dx^2$, d'après les formules du n°. cité plus haut,

$$y=\zeta\int X'dx+C_1\zeta=C_1\zeta+\zeta\int\frac{e^{-\int P\,dx}}{\zeta^2}dx\left(\int e^{\int P\,dx}R\zeta\,dx+C\right);$$

cette expression, renfermant deux constantes arbitraires, est complète, en sorte qu'il ne s'agit plus que d'y substituer une valeur particulière de ζ. L'équation proposée, dans laquelle les coefficiens A et B sont constans, conduit à $d^2\zeta+A\,dx\,d\zeta+B\zeta\,dx^2=0$; on satisfait à cette dernière en supposant $\zeta=e^{mx}$, m étant déterminée par l'équation $m^2+Am+B=0$: on aura donc, à cause de $P=A$,

$$y=C_1e^{mx}+e^{mx}\int e^{-(A+2m)x}dx\left(\int e^{(A+m)x}R\,dx+C\right)$$

$$=C_1e^{mx}-\frac{Ce^{-(A+m)x}}{A+2m}+e^{mx}\int e^{-(A+2m)x}dx\int e^{(A+m)x}R\,dx.$$

En intégrant par parties, on trouvera que

$$\int e^{-(A+2m)x}dx\int e^{(A+m)x}R\,dx=\frac{-e^{-(A+2m)x}\int e^{(A+m)x}R\,dx+\int e^{-mx}R\,dx}{A+2m}\ (*);$$

si on substitue cette valeur dans l'expression de y, et qu'après les réductions on mette n à la place de $-(A+m)$, il viendra

$$y=C_1e^{mx}-\frac{Ce^{nx}}{m-n}+\frac{e^{mx}\int e^{-mx}R\,dx-e^{nx}\int e^{-nx}R\,dx}{m-n},$$

ou, en changeant la forme des constantes arbitraires,

$$y=ce^{mx}+c_1e^{nx}+\frac{e^{mx}\int e^{-mx}R\,dx-e^{nx}\int e^{-nx}R\,dx}{m-n}.$$

Il est facile de voir que la quantité n est la seconde racine de l'équation $m^2+Am+B=0$, puisque par l'hypothèse $m+n=-A$. Lorsque ces racines sont imaginaires, on transforme l'expression de y, par le moyen des sinus et des cosinus, comme dans le n°. 617.

(*) La formule à intégrer ici revient à $\int UfV\,dx=Uf'V\,dx-\int UV\,dx$ (n°. 486).

En effet, la substitution de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et de $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ au lieu de m et de n, donne

$$y=e^{\alpha x}[ce^{\beta x\sqrt{-1}}+c_1e^{-\beta x\sqrt{-1}}]+\frac{e^{\alpha x}[e^{\beta x\sqrt{-1}}\int e^{-\alpha x-\beta x\sqrt{-1}}R\,dx-e^{-\beta x\sqrt{-1}}\int e^{-\alpha x+\beta x\sqrt{-1}}R\,dx]}{2\beta\sqrt{-1}};$$

mettant ensuite $\cos\beta x\pm\sqrt{-1}\sin\beta x$, pour $e^{\pm\beta x\sqrt{-1}}$, la première partie de y deviendra $e^{\alpha x}[p\cos\beta x+q\sin\beta x]$, si on fait $c+c_1=p$, $(c-c_1)\sqrt{-1}=q$, et on trouvera pour le numérateur de la seconde,

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x+\sqrt{-1}\sin\beta x)[\int e^{-\alpha x}Rdx\cos\beta x-\sqrt{-1}\int e^{-\alpha x}Rdx\sin\beta x]$$
$$-e^{\alpha x}(\cos\beta x-\sqrt{-1}\sin\beta x)[\int e^{-\alpha x}Rdx\cos\beta x+\sqrt{-1}\int e^{-\alpha x}Rdx\sin\beta x]:$$

cette expression étant développée et réduite est divisible par $2\sqrt{-1}$, et on a enfin $y=e^{\alpha x}[p\cos\beta x+q\sin\beta x]+\frac{e^{\alpha x}[\sin\beta x\int e^{-\alpha x}R\,dx\cos\beta x-\cos\beta x\int e^{-\alpha x}R\,dx\sin\beta x]}{\beta}$.

On parviendroit au même résultat sans le secours des imaginaires, en supposant dans l'expression générale de y, $\zeta=e^{\alpha x}\cos\beta x$, ou $\zeta=e^{\alpha x}\sin\beta x$, valeurs particulières qui résultent de la seconde valeur complète de ζ, dans le n°. 617, lorsqu'on fait $c=0$, ou $c_1=0$.

Dans le cas où l'on a $m=n$, l'expression trouvée plus haut pour y devient incomplète comme dans le n°. déjà cité, et la seconde partie de cette expression se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$; mais on élude cette difficulté en observant que $\mathcal{A}$ devient égal à $-2m$, et que dans cette hypothèse l'équation

$$y=C_1e^{mx}+e^{mx}\int e^{-(\mathcal{A}+2m)x}dx\,(\int e^{(\mathcal{A}+m)x}R\,dx+C)$$

se réduit à $y=C_1e^{mx}+e^{mx}\int dx\,(\int e^{-mx}R\,dx+C)$:

en intégrant on trouve

$$y=C_1e^{mx}+e^{mx}(Cx+x\int e^{-mx}R\,dx-\int e^{-mx}Rx\,dx),$$

ou $y=e^{mx}(Cx+C_1)+e^{mx}(x\int e^{-mx}R\,dx-\int e^{-mx}Rx\,dx)$;

On rencontre fréquemment, dans les applications de l'Analyse à la Physique céleste, l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=R$, pour laquelle $m=a\sqrt{-1}$, ou $\alpha=0$ et $\beta=a$; son intégrale sera donc

$$y = p\cos ax + q\sin ax + \frac{\sin ax \int R\,dx \cos ax - \cos ax \int R\,dx \sin ax}{a}.$$

La fonction R a ordinairement la forme
$A + B\cos\beta x + C\cos\gamma x + \text{etc.}$ A, B, C, etc. étant des coefficiens constans; β, γ, etc. désignant des nombres entiers, et les intégrations indiquées s'effectuent par le procédé du n°. 457.

L'équation $d^2y - \frac{dX\,dy}{X} + AX\,dy\,dx + BX^2 y\,dx^2 = R\,dx^2$,

qui conduit à $d^2z - \frac{dX\,dz}{X} + AX\,dx\,dz + BX^2 z\,dx^2 = 0$, s'intégre facilement par la formule générale; mais elle se rapporte immédiatement à celle que nous venons de traiter. En faisant $X\,dx = ds$ et en effectuant la dernière transformation du n°. précéd., il vient $d^2y + A\,ds\,dy + By\,ds^2 = \frac{R}{X^2}\,ds^2$; supposant ensuite qu'on ait éliminé x de la fonction $\frac{R}{X^2}$, au moyen de l'équation $s = \int X dx$; et désignant par S le résultat, on aura $d^2y + A\,ds\,dy + By\,ds^2 = S\,ds^2$: on appliquera donc à cet exemple les formules trouvées ci-dessus.

624. Il y a dans le second ordre une classe d'équations qui répond aux équations homogènes du premier et se ramène facilement à cet ordre; ces équations sont elles-mêmes homogènes, non pas par rapport aux variables x, y, en particulier, mais en considérant aussi les différentielles dx, dy et d^2y, comme de nouvelles variables. L'équation $x^2 d^2y + x\,dx^2 + y\,dy^2 = 0$ est dans ce cas, puisque chacun de ses termes est du troisième degré, ou renferme trois facteurs variables, en comptant d^2y pour un de ces facteurs, et dx^2 ainsi que dy^2 pour deux.

Sous ce point de vue, le coefficient du premier ordre $\frac{dy}{dx}$ est du degré 0; celui du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$ est du degré -1: si donc on fait $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = px^0 = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{x}$, la variable x s'élevera au même degré dans tous les termes, et disparoîtra par la division. Par le moyen de ces substitutions, on obtiendra une

équation entre p, q et u; mais de $y=ux$, on tirera $dy=pdx=udx+xdu$, d'où $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$, et puisque $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, il viendra $\frac{dp}{du}=\frac{q}{x}$, ou $\frac{dx}{x}=\frac{dp}{q}$, ce qui donne $\frac{dp}{q}=\frac{du}{p-u}$. Mettant dans cette dernière équation la valeur de q, prise dans la proposée, on n'aura plus à intégrer qu'une équation du premier ordre entre les variables p et u, et quand on sera parvenu à l'expression de p en u, on obtiendra x par l'équation $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$, dans laquelle les variables sont séparées; on aura ensuite $y=ux$. La valeur de y sera complète, puisqu'elle renfermera deux constantes arbitraires, l'une introduite par l'expression de p en u, et l'autre par celle de x en u. Donnons maintenant quelques exemples.

625. Soit 1°. $x^2d^2y=dx\sqrt{mx^2dy^2+ny^2dx^2}$; en faisant, d'après ce qui précède, $y=ux$, $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{x}$, on aura $dy=pdx$, $d^2y=\frac{qdx^2}{x}$, et par conséquent $q=\sqrt{mp^2+nu^2}$. La transformée $\frac{dp}{q}=\frac{du}{p-u}$, ou $dp(p-u)=qdu$, conduira alors à l'équation homogène $dp(p-u)=du\sqrt{mp^2+nu^2}$,
dans laquelle on supposera $p=tu$, et on trouvera
$$\frac{du}{u}=\frac{-(t-1)dt}{t^2-t-\sqrt{mt^2+n}},\quad \frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{du}{u(t-1)}=\frac{-dt}{t^2-t-\sqrt{mt^2+n}};$$
x et $u=\frac{y}{x}$ seront donc déterminés par la nouvelle variable t.

2°. Proposons-nous encore l'équation $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}=n\sqrt{x^2+y^2}$, qui appartient à la courbe dans chacun des points de laquelle le rayon de courbure est proportionnel à la distance de ce point à l'origine des coordonnées. Cette équation se changera en $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}=n\sqrt{1+u^2}$; tirant la valeur de q, et substituant dans $dp(p-u)=qdu$, on

aura $(1+p^2)^{\frac{3}{2}}du=n(p-u)\,dp\,\sqrt{1+u^2}$, équation qu'Euler integre par le secours des arcs de cercle de la manière suivante: il fait $p=\text{tang}\,r$, $u=\text{tang}\,s$, d'où il suit

$$dp=\frac{dr}{\cos r^2},\quad du=\frac{ds}{\cos s^2},\quad \sqrt{1+p^2}=\frac{1}{\cos r},\quad \sqrt{1+u^2}=\frac{1}{\cos s},$$

$$p-u=\text{tang}\,r-\text{tang}\,s=\frac{\sin r}{\cos r}-\frac{\sin s}{\cos s}=\frac{\sin r\cos s-\sin s\cos r}{\cos r\cos s}=\frac{\sin(r-s)}{\cos r\cos s}.$$

Au moyen de ces valeurs l'équation précédente devient $ds=n\,dr\sin(r-s)$, et posant $r-s=t$, on a

$$ds=dr-dt,\quad dr-dt=n\,dr\sin t,$$

d'où $$dr=\frac{dt}{1-n\sin t},\quad ds=\frac{dt}{1-n\sin t}-dt=\frac{n\,dt\sin t}{1-n\sin t};$$

l'équation $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$ donne $\frac{dx}{x}=\frac{du\cos r\cos s}{\sin(r-s)}=\frac{ds\cos r}{\cos s\sin t}$;

mettant ensuite $\cos t\cos s-\sin t\sin s$, pour $\cos r=\cos(s+t)$, on trouvera

$$\frac{dx}{x}=\frac{ds\cos t}{\sin t}-\frac{ds\sin s}{\cos s},\text{ ou }\frac{dx}{x}=\frac{n\,dt\cos t}{1-n\sin t}-\frac{ds\sin s}{\cos s},$$

en substituant la valeur de ds dans le premier terme du second membre.

Cette dernière équation a pour intégrale $x=\frac{c\cos s}{1-n\sin t}$, et comme $y=ux=x\,\text{tang}\,s=\frac{x\sin s}{\cos s}$, on a enfin $y=\frac{c\sin s}{1-n\sin t}$. Ces valeurs sont complètes puisque l'arc s, déterminé par l'équation $s=-t+\int\frac{dt}{1-n\sin t}$, renferme implicitement une constante arbitraire. Si on remet au lieu de s, sa valeur $r-t$, il viendra

$$x=\frac{c\cos(r-t)}{1-n\sin t},\quad y=\frac{c\sin(r-t)}{1-n\sin t},\quad r=\int\frac{dt}{1-n\sin t};$$

l'intégrale du second membre de la dernière équation se rapporte aux formules du n°. 452, et lorsqu'on l'aura obtenue, on pourra chasser r ou t des valeurs de x et de y, afin d'avoir leur expression au moyen d'un seul arc.

626. On peut généraliser la méthode du n°. 624, en faisant $y=x^nu$, $\frac{dy}{dx}=x^{n-1}p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=x^{n-2}q$, n étant un exposant

indéterminé dont on disposera pour rendre la proposée homogène par rapport à x. On aura dans cette hypothèse

$$dy = nx^{n-1}u\,dx + x^n du = x^{n-1}p\,dx,$$
$$d^2y = (n-1)x^{n-2}p\,dx^2 + x^{n-1}dp\,dx = x^{n-2}q\,dx^2;$$

on tirera de la première équation

$$nu\,dx + x\,du = p\,dx, \text{ ou } \frac{dx}{x} = \frac{du}{p-nu},$$

et de la seconde

$$(n-1)p\,dx + x\,dp = q\,dx, \text{ ou } \frac{dx}{x} = \frac{dp}{q-(n-1)p},$$

d'où il résultera $du(q-(n-1)p) = dp(p-nu)$.

Cette méthode ramène immédiatement au premier ordre toute équation du second qui n'a que deux termes, et qui par conséquent est comprise dans la formule $d^2y = a\,x^\alpha y^\beta dx^{\delta-\gamma}dy^\gamma$. En effet, si on écrit dans cette équation $x^n u$, $x^{n-1}p\,dx$, $x^{n-2}q\,dx^2$, au lieu de y, dy et d^2y, elle se changera en $x^{n-2}q = a\,x^{\alpha+\beta n+\gamma n-\gamma}u^\beta p^\gamma$, et x disparoîtra, si $\alpha+\beta n+\gamma n-\gamma = n-2$, c'est-à-dire, si $n = \frac{-\alpha+\gamma-2}{\beta+\gamma-1}$; on aura alors $q = a\,u^\beta p^\gamma$, et la transformée $du(q-(n-1)p) = dp(p-nu)$ deviendra

$$du(a\,u^\beta p^\gamma - (n-1)p) = dp(p-nu).$$

Il est facile de voir que cette méthode ne sauroit réussir dans les équations qui ont plus de deux termes, à moins qu'il n'y ait entre les exposans de ces termes des relations convenables; c'est ce que prouvera l'exemple suivant.

En substituant ux^n, $x^{n-1}p\,dx$, $x^{n-2}q\,dx^2$, à la place de y, dy et d^2y, dans l'équation

$$x^4d^2y = x^3dx\,dy + 2x^2y\,dx\,dy - 4y^2dx^2,$$

on trouve $x^{n+2}q = x^{n+2}p + 2x^{n+2}up - 4x^{2n}u^2$.

L'exposant de x étant le même dans les trois premiers termes, il ne s'agit que de déterminer n, de manière que $2n = n+2$, ce qui donne $n = 2$, et il vient $q = p + 2up - 4u^2$; la transformée $du(q-(n-1)p) = dp(p-nu)$ se change en $du(q-p) = dp(p-2u)$, et éliminant q, on trouve $2u\,du(p-2u) - dp(p-2u) = 0$. Cette équation se décompose en deux facteurs $2u\,du - dp = 0$, et $p-2u = 0$; il résulte du premier $p = u^2 + c$. Substituant

cette

Substituant cette valeur, et celle de n, dans $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-nu}$, on obtient $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2-2u+c}$, équation dont le second membre s'intégre sous trois formes selon que $c = 1$, $c < 1$, $c > 1$.

Dans le premier cas, on a $lx = \int \frac{du}{(u-1)^2} = \frac{1}{1-u} + C_1$; dans le second, on fera $c = 1 - CC$, on aura

$$lx = \int \frac{du}{(u-1)^2 - CC} = -\frac{1}{2C} l \frac{C+u-1}{C-u+1} + lC_1;$$

dans le troisième enfin, on prendra $c = 1 + CC$, et on trouvera

$$lx = \int \frac{du}{(u-1)^2 + CC} = \frac{1}{C} \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{u-1}{C} \right) + lC_1,$$

et comme par la transformation actuelle $y = ux^2 = ux^2$, $u = \frac{y}{x^2}$, les trois intégrales précédentes deviendront

$$lx = \frac{x^2}{x^2-y} + C_1, \quad x = C_1 \left(\frac{(C+1)x^2-y}{(C-1)x^2+y} \right)^{\frac{1}{2C}},$$

$$l\frac{x}{C_1} = \frac{1}{C} \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{y-x^2}{Cx^2} \right).$$

Le second facteur $p - 2u = 0$, trouvé dans la transformée, donne $p = 2u$, $\frac{dx}{x} = \frac{du}{2u-2u}$, d'où il résulte nécessairement $du = 0$, $u = C$, et par conséquent $y = Cx^2$, valeur qui satisfait à l'équation différentielle proposée, mais qui n'étant point comprise dans son intégrale complète et ne contenant qu'une seule constante arbitraire, n'est qu'une *solution particulière*, analogue à celles que nous avons fait connoître dans le premier ordre.

627. Il peut arriver qu'en effectuant la transformation du n°. précédent, on trouve n égale à zéro ou égale à l'infini. Le premier cas a lieu toutes les fois que l'équation proposée est homogène, en ne considérant que la variable x et sa différentielle, et le second lorsqu'elle est homogène par rapport à y, dy et d^2y seulement; c'est ce dont on peut se convaincre sur l'équation $d^2y = ax^\alpha y^\beta dx^{2-\gamma} dy^\gamma$, pour laquelle on a $n = \frac{-\alpha+\gamma-2}{\beta+\gamma-1}$, valeur qui devient nulle

lorsque $\alpha+2-\gamma=0$, et infinie, quand $\beta+\gamma-1=0$. La même chose auroit lieu quand l'équation proposée renfermeroit plus de deux termes; car il est évident qu'on en peut toujours concevoir un sous la forme du premier membre de l'équation ci-dessus, et chacun des autres sous celle du second membre.

Lorsque $n=0$, on a $dy=\frac{p\,dx}{x}$, $d^2y=\frac{q\,dx^2}{x^2}$, et il est facile de voir que ces substitutions, qui ne changent rien à la somme des exposans de x et de dx, dans chaque terme de l'équation proposée, doivent rendre les premiers égaux entr'eux, puisque les seconds le deviennent par la nature même des équations différentielles (n°. 65).

Soit pour exemple l'équation $x^2d^2y+x\,dx\,dy-4y^3dx^2=0$; on la changera en $q+p-4y^3=0$; la transformée $du\,(q-(n-1)p)=dp\,(p-nu)$, qui devient $dy\,(q+p)=p\,dp$, en y faisant $n=0$, et en écrivant y au lieu de u, puisqu'alors $y=u$, donnera $4y^3dy=p\,dp$ et $2y^4=p^2+2c$; l'équation $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-nu}$ se réduisant à $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{p}$, conduit à $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{\sqrt{2(y^4-c)}}$, en substituant au lieu de p sa valeur tirée de la précédente.

Il est évident que quand l'équation proposée sera homogène à l'égard de y et de ses différentielles seulement, on fera disparoître cette variable en supposant $dy=py\,dx$, $d^2y=qy\,dx^2$ (n°. 66); mais en différentiant l'équation $dy=py\,dx$, on trouve

$$d^2y=p\,dy\,dx+y\,dp\,dx=p^2y\,dx^2+y\,dp\,dx=qy\,dx^2;$$

de là résulte cette transformée $p^2dx+dp=q\,dx$, dans laquelle il faudra substituer la valeur de q, et lorsqu'on en pourra tirer celle de p en x, on aura y par le moyen de l'équation $dy=py\,dx$, ou $\frac{dy}{y}=p\,dx$.

Appliquons ce procédé à l'équation $ay\,d^2y+b\,dy^2=\frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{1+x^2}}$; nous aurons $aq+bp^2=\frac{p}{\sqrt{1+x^2}}$, et la transformée sera

$$dp+p^2dx=\frac{p\,dx}{a\sqrt{1+x^2}}-\frac{bp^2dx}{a}.$$

Si on fait $p=\frac{1}{s}$, on aura $ds+\frac{s\,dx}{a\sqrt{1+x^2}}=\left(1+\frac{b}{a}\right)dx$, équation qui devient intégrable lorsqu'on la multiplie par $(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{a}}$ et donne

$$s(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{a}}=\left(1+\frac{b}{a}\right)\int dx(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{a}};$$

le second membre s'intégre en faisant $x+\sqrt{1+x^2}=u^a$ (n°. 386); et il vient $su=\frac{a+b}{2}\left(\frac{u^{a+1}}{a+1}+\frac{u^{1-a}}{1-a}\right)+c$. On a ensuite $\frac{dy}{y}=p\,dx=\frac{dx}{s}$, et comme de l'équation

$$ds+\frac{s\,dx}{a\sqrt{1+x^2}}=\left(1+\frac{b}{a}\right)dx,$$

on tire $\left(1+\frac{b}{a}\right)\frac{dx}{s}=\frac{ds}{s}+\frac{dx}{a\sqrt{1+x^2}}$, on obtiendra

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)ly=ls+\frac{1}{a}l(x+\sqrt{1+x^2})+lc_1,$$

en intégrant; passant des logarithmes aux nombres, on trouvera

$$y^{\frac{a+b}{a}}=c_1s(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{a}}=c_1su=c_1\left[\frac{a+b}{2}\left(\frac{u^{a+1}}{a+1}+\frac{u^{1-a}}{1-a}\right)+c\right],$$

ou $y^{\frac{a+b}{a}}=c_1\left[\frac{1}{a+1}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{a+1}{a}}+\frac{1}{1-a}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1-a}{a}}+c\right]$, en changeant les constantes c et c_1 en $\frac{c(a+b)}{2}$, $\frac{c_1}{a+b}$.

628. Les trois classes d'équations que nous ayons traitées dans les n°. 624—627, se ramènent immédiatement aux équations du n°. 613, par une transformation fondée comme celle du n°. 616, sur la propriété des exponentielles.

Si on fait $x=e^u$, $y=e^uv$, on aura

$dx=e^u du$, $d^2x=e^u(du^2+d^2u)$,

$dy=e^u(dv+v\,du)$, $d^2y=e^u(d^2v+2du\,dv+v(du^2+d^2u))$,

et comme lorsqu'on suppose dx constant on a $d^2x=0$, il en résulte $du^2+d^2u=0$, et $d^2y=e^u(d^2v+2du\,dv)$, il est évident que si

l'on substitue ces valeurs dans une équation du second ordre, homogène par rapport aux variables x, y et à leurs différentielles, le résultat ne contiendra point u, mais seulement du, v, dv, d^2v, et rentrera par conséquent dans le cas du n°. 613. Pour le ramener au premier ordre, il faudra faire attention que du n'y est pas supposé constant, puisqu'on a $du^2+d^2u=0$, et que par conséquent, en posant $dv=pdu$, on doit avoir $d^2v=dpdu+pd^2u=dpdu-pdu^2$.

Pour plus de généralité on peut prendre $x=e^{nu}$, au lieu de $x=e^u$, et se servir de l'exposant indéterminé n pour chasser la variable u, dans le cas où l'équation proposée ne seroit pas homogène. Cette méthode réussit pour l'équation à deux termes $d^2y=ax^\alpha y^\beta dx^{2-\gamma}dy^\gamma$, qui, après la substitution des valeurs de x, y, dx, dy, d^2y, et en observant que $d^2x=e^{nu}(n^2du^2+nd^2u)=0$, devient

$$e^{nv}(dv+2dudv+(1-n)vdu^2)=ae^{n\alpha u+\beta u+(2-\gamma)nu+\gamma v}n^{2-\gamma}v^\gamma du^{2-\gamma}(dv+vdu)^\gamma,$$

et se réduit à

$$dv+2dudv+(1-n)vdu^2=an^{2-\gamma}v^\beta du^{2-\gamma}(dv+vdu)^\gamma,$$

lorsqu'on fait $n\alpha+\beta+(2-\gamma)n+\gamma=1$, ou $n=\frac{1-\gamma-\beta}{\alpha+2-\gamma}$.

Quand l'équation est homogène par rapport à x et dx seulement, on prend $x=e^u$, en laissant y tel qu'il est; la substitution des valeurs de x et de dx fait disparoître e^u, il ne reste que du, y, dy et d^2y, et il ne faut pas oublier qu'à cause de $d^2x=0$, on a $du^2+d^2u=0$.

Enfin si l'équation est homogène en y, dy et d^2y, on ne changera point x, mais on supposera $y=e^v$, et lorsque les substitutions seront effectuées, il ne restera que x, dx, dv et d^2v.

Recherche du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du second ordre.

629. Dans ce qui va suivre nous représenterons en général par $M\frac{d^2y}{dx^2}+N=0$, ou $Md^2y+Ndx^2=0$, toute équation différentielle du second ordre, dans laquelle le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ ne monte pas au delà du premier degré, M et N contenant d'ailleurs, x, y, dx et dy d'une manière quelconque. On pourroit, d'après la théorie des équations de condition exposée n°. 84 et suiv. trouver celles qui doivent avoir lieu entre les quantités M et N, pour que la fonction Md^2y+Ndx^2 soit la différentielle immédiate d'une fonction du

premier ordre, c'est-à-dire, ne renfermant que x, y, dx et dy; mais nous allons y parvenir directement en cherchant à intégrer l'équation proposée.

Soit $\frac{dy}{dx}=p$, on aura $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$ et $Mdp+Ndx=0$; dp n'étant contenu ni dans M ni dans N, il est évident que le terme Mdp ne peut résulter que de la différentiation, par rapport à p, de la fonction du premier ordre d'où dérive $Mdp+Ndx$; en désignant donc cette fonction par u, on aura $\frac{du}{dp}=M$, $\frac{du}{dp}dp=Mdp$: si on intégre en regardant x et y comme constantes, et qu'on ajoute au résultat une fonction arbitraire de ces quantités, on trouvera $u=\int Mdp+V$. La fonction V se détermine dans le cas actuel comme la fonction Y dans le n°. 552, puisqu'en différentiant l'expression de u on doit retomber sur $Mdp+Ndx$. Si l'on fait usage du procédé indiqué dans ce n°. pour différentier les fonctions affectées du signe $\int$, il viendra

$$du=\frac{du}{dp}dp+\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dx}dy$$

$$=Mdp+dx\int\frac{dM}{dx}dp+dy\int\frac{dM}{dy}dp+\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy;$$

comparant ce résultat avec la proposée, et divisant par dx, on aura l'équation

$$N=\int\frac{dM}{dx}dp+p\int\frac{dM}{dy}dp+\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dy}p,$$

qui doit être identique. Pour en faire disparoître les signes $\int$, on la différentiera deux fois de suite par rapport à p, et en observant que cette quantité n'entre point dans V, ce qui donnera

$$\frac{dN}{dp}=\frac{dM}{dx}+\int\frac{dM}{dy}dp+\frac{dM}{dy}p+\frac{dV}{dy}$$

$$\frac{d^2N}{dp^2}=\frac{d^2M}{dxdp}+2\frac{dM}{dy}+\frac{d^2M}{dydp}p.....(1).$$

La dernière de ces équations, dans laquelle la quantité V ne se trouve plus, est précisément une des équations que nous cherchons; c'est pourquoi nous l'avons désignée par (1).

Tirons maintenant des deux qui la précèdent les expressions

de $\frac{dV}{dy}$ et $\frac{dV}{dx}$, nous obtiendrons

$$\frac{dV}{dy} = \frac{dN}{dp} - \frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy}p - \int \frac{dM}{dy}dp.$$

$$\frac{dV}{dx} = N - \frac{dN}{dp}p + \frac{dM}{dx}p + \frac{dM}{dy}p^2 - \int \frac{dM}{dx}dp;$$

et comme il faut que $\frac{d^2V}{dy\,dx} = \frac{d^2V}{dx\,dy}$, nous aurons pour la seconde équation de condition

$$\frac{dN}{dy} - \frac{d^2N}{dp\,dx} - \frac{d^2N}{dp\,dy}p + \frac{d^2M}{dx^2} + 2\frac{d^2M}{dx\,dy}p + \frac{d^2M}{dy^2}p^2 = 0 \ldots\ldots (2).$$

Lorsque la proposée rendra identique cette équation, ainsi que l'équation (1), son intégration sera ramenée à celle des fonctions d'une seule variable, puisqu'il suffira, pour déterminer V, d'intégrer la différentielle complète $\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy$, par la méthode du n°. 552, et $\int M\,dp + V = C$ sera l'intégrale cherchée.

Si l'on substitue dans le développement de du les valeurs de $\frac{dV}{dx}$ et de $\frac{dV}{dy}$, il deviendra

$$du = M\,dp + \left(N - \frac{dN}{dp}p + \frac{dM}{dx}p + \frac{dM}{dy}p^2\right)dx + \left(\frac{dN}{dp} - \frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy}p\right)dy;$$

résultat délivré des signes $\int$ et qui est sous la forme d'une différentielle complète à trois variables.

Appliquons ce qui précède à l'équation

$$\left.\begin{array}{l}(2xy\,dy + x^2y\,dx)\,d^2y + x\,dy^3 + (y + x^2)\,dy^2dx \\ +(2 + 3y)xy\,dy\,dx^2 + y^3dx^3\end{array}\right\} = 0.$$

En y substituant $p\,dx$ et $dp\,dx$, au lieu de dy et de d^2y, pour la mettre sous la forme $M\,dp + N\,dx = 0$, nous aurons $M = 2xyp + x^2y$,

$$N = xp^3 + (y + x^2)p^2 + (2 + 3y)xyp + y^3.$$

Ces valeurs mises dans les équations (1) et (2) les rendent identiques, d'où il suit que la proposée est une différentielle exacte; formant alors le développement de du, rapporté ci-dessus, nous

trouverons $du=(2xyp+x^2y)dp+(yp^2+2xyp+y^3)dx$
$+(xp^2+x^2p+3xy^2)dy$,
et en intégrant le premier terme par rapport à p seulement, il viendra $u=xyp^2+x^2yp+V$. Pour déterminer V nous différentierons cette fonction en faisant varier à la fois x, y et p; comparant le résultat avec celui que nous venons d'obtenir, nous parviendrons à l'équation $\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy=y^3dx+3xy^2dy$,
de laquelle nous tirerons $V=xy^3$, et nous conclurons de là que l'intégrale de l'équation proposée est
$xyp^2+x^2yp+xy^3+C=0$, ou $xydy^2+x^2ydydx+(xy^3+C)dx^2=0$.

630. Les équations du second ordre peuvent être envisagées comme le résultat de l'élimination d'une constante entre une équation du premier et sa différentielle immédiate. Quand l'équation du premier ordre est sous la forme $u=c$, la seule différentiation suffit pour chasser la constante; mais si l'on a, comme dans le n°. 554, $P+cQ=0$, l'élimination à laquelle il faut avoir recours fait disparoître un facteur qui se trouvoit dans la différentielle complète, et qui, dans le cas actuel, peut contenir, avec les variables x et y le coefficient $\frac{dy}{dx}=p$, puisque P et Q peuvent être des fonctions du premier ordre.

Soit donc Z le facteur qu'il faut restituer pour rendre intégrable l'équation $Mdp+Ndx=0$, que nous supposons n'être pas une différentielle complète; nous aurons $MZdp+NZdx=0$, et si, pour plus de simplicité, nous faisons $MZ=\zeta$, et $N=PM$, il viendra $\zeta dp+P\zeta dx=0$: en écrivant ζ, au lieu de M, et $P\zeta$ au lieu de N, dans les équations (1) et (2), nous trouverons

$$\zeta\frac{d^2P}{dp^2}+2\frac{d\zeta}{dp}\frac{dP}{dp}+P\frac{d^2\zeta}{dp^2}-\frac{d^2\zeta}{dxdp}-\frac{d^2\zeta}{dydp}p-2\frac{d\zeta}{dy}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\zeta\frac{dP}{dy}+P\frac{d\zeta}{dy}-p\left(\zeta\frac{d^2P}{dpdy}+\frac{d\zeta}{dy}\frac{dP}{dp}+\frac{d\zeta}{dp}\frac{dP}{dy}+P\frac{d^2\zeta}{dpdy}\right)\\ +\frac{d^2\zeta}{dy^2}p^2+2\frac{d^2\zeta}{dxdy}p+\frac{d^2\zeta}{dx^2}-&\left(\zeta\frac{d^2P}{dpdx}+\frac{d\zeta}{dx}\frac{dP}{dp}+\frac{d\zeta}{dp}\frac{dP}{dx}+P\frac{d^2\zeta}{dpdx}\right)\end{aligned}\right\}=0\ldots(4).$$

Ces équations deviendront identiques si l'on y substitue la valeur de ζ, et serviront à la déterminer si on ne la connoît pas.

Connoissant une valeur de ζ qui satisfasse à ces deux équations, il est facile d'en déduire une infinité d'autres; car ici, comme dans le premier ordre (n°. 555), si la quantité $\zeta(dp+Pdx)$ est une différentielle exacte du, il en sera de même de $\zeta\varphi(u)(dp+Pdx)$, φ désignant une fonction quelconque de u: l'expression $\zeta\varphi(u)$ donnera autant de facteurs différens qu'on assignera de formes particulières à la fonction φ, et ces facteurs ne conduiront qu'à la seule intégrale première $u=const.$ Mais si les deux intégrales premières de la proposée diffèrent essentiellement l'une de l'autre, il existera nécessairement un autre facteur ζ_1, par lequel la proposée étant multipliée, deviendra la différentielle exacte de l'autre intégrale première que je représenterai par $u_1=const.$ on aura donc $\zeta_1(dp+Pdx)=du_1$, et on en conclura de même que ci-dessus $\zeta_1\varphi_1(u_1)$ est l'expression générale d'une seconde suite de facteurs propres à rendre la proposée intégrable. Il n'est pas moins évident que la fonction $[\zeta\varphi(u)+\zeta_1\varphi_1(u_1)](dp+Pdx)=\varphi(u)du+\varphi_1(u_1)du_1$ est aussi une différentielle exacte et que par conséquent $\zeta\varphi(u)+\zeta_1\varphi_1(u_1)$ est une nouvelle expression du facteur plus générale que les précédentes. Enfin si l'on a entre une constante et une fonction quelconque des deux quantités u et u_1, désignée par ψ, l'équation $\psi=C$, on en déduira la différentielle exacte $\frac{d\psi}{du}du+\frac{d\psi}{du_1}du_1=0$, qui deviendra $\left(\zeta\frac{d\psi}{du}+\zeta_1\frac{d\psi}{du_1}\right)(dp+Pdx)$, en mettant au lieu de du et de du_1, leurs valeurs $\zeta(dp+Pdx)$ et $\zeta_1(dp+Pdx)$, et donnera pour le facteur l'expression $\zeta\frac{d\psi}{du}+\zeta_1\frac{d\psi}{du_1}$, dans laquelle se trouvent comprises comme cas particuliers toutes celles que nous avons trouvées ci-dessus. Il n'en sauroit exister de plus générale; car si l'on pouvoit obtenir un facteur qu'elle ne renfermât point, il conduiroit nécessairement à une intégrale première différente de u et de u_1; il s'ensuivroit qu'une équation du second ordre auroit plus de deux intégrales premières, ce qui est absurde (n°. 610).

631.

631. Si la recherche du facteur relatif aux équations du premier ordre, qui ne renferme que les deux variables x et y et ne dépend que d'une seule équation, présente dans le cas général des difficultés insurmontables par rapport à l'état actuel de l'Analyse, on doit s'attendre à ne pouvoir tirer des équations ci-dessus l'expression du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du second ordre que dans un petit nombre de cas particuliers, et c'est ce qui arrive en effet; l'un de ces cas est celui où le coefficient p n'entre point dans le facteur et où l'équation proposée est de la forme

$$d^2y + Q\,dy^2 + R\,dx\,dy + S\,dx^2 = 0,$$

Q, R et S étant des fonctions de x et de y seulement. Dans cette hypothèse $\frac{d\zeta}{dp}, \frac{d^2\zeta}{dx\,dp}, \frac{d^2\zeta}{dy\,dp}, \frac{d^2\zeta}{dp^2}$, sont nuls; supprimant les termes affectés de ces coefficiens dans les équations (3) et (4), et mettant pour $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dP}{dy}$, $\frac{dP}{dp}$, $\frac{d^2P}{dx\,dp}$, $\frac{d^2P}{dy\,dp}$, leurs expressions tirées de l'équation proposée, les équations (3) et (4) deviendront

$$\frac{d\zeta}{dy} - Q\zeta = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + 2p\frac{d^2\zeta}{dx\,dy} + p^2\frac{d^2\zeta}{dy^2} - (R + 2Qp)\frac{d\zeta}{dx} + (S - Qp^2)\frac{d\zeta}{dy}$$
$$-\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} + 2p\frac{dQ}{dx} + p^2\frac{dQ}{dy}\right)\zeta = 0.$$

La dernière se réduit à

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} - R\frac{d\zeta}{dx} + S\frac{d\zeta}{dy} - \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy}\right)\zeta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (B);$$

en vertu de la seconde qui, lorsqu'on la différentie successivement par rapport à x et à y, donne

$$\frac{d^2\zeta}{dx\,dy} - Q\frac{d\zeta}{dx} - \zeta\frac{dQ}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dy^2} - Q\frac{d\zeta}{dy} - \zeta\frac{dQ}{dy} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D).$$

Prenant ensuite la différentielle de l'équation (B), par rapport à y, celle de l'équation (C), par rapport à x, et éliminant $\frac{d^3\zeta}{dx^2dy}$ entre

ces deux équations, on obtiendra la suivante

$$Q\frac{d^2\zeta}{dx^2}-R\frac{d^2\zeta}{dxdy}+S\frac{d^2\zeta}{dy^2}+\left(2\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dy}\right)\frac{d\zeta}{dx}+\left(2\frac{dS}{dy}-\frac{dR}{dx}\right)\frac{d\zeta}{dy}$$
$$+\left(\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^2R}{dxdy}+\frac{d^2S}{dy^2}\right)\zeta=0.$$

Substituant, au lieu des coefficiens, $\frac{d\zeta}{dy}$, $\frac{d^2\zeta}{dx^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dxdy}$ et $\frac{d^2\zeta}{dy^2}$, leurs valeurs tirées des équations (A), (B), (C) et (D), et faisant pour abréger

$$T=\frac{\frac{d^2Q}{dx^2}-R\frac{dQ}{dx}+S\frac{dQ}{dy}+Q\frac{dS}{dy}+\frac{d^2S}{dy^2}-\frac{d^2R}{dxdy}}{\frac{dR}{dy}-2\frac{dQ}{dx}},$$

on trouvera $\frac{d\zeta}{dx}=T\zeta$; on aura donc, en combinant cette équation avec l'équation (A),

$$d\zeta=\frac{d\zeta}{dx}dx+\frac{d\zeta}{dy}dy=T\zeta dx+Q\zeta dy,$$

et par conséquent $\frac{d\zeta}{\zeta}=Tdx+Qdy$, d'où il suit $\zeta=e^{\int(Tdx+Qdy)}$.

Il ne faut pas perdre de vue que dans tout ceci les variables x et y doivent être regardées comme indépendantes, parce qu'il en résulte que la valeur de ζ est absurde toutes les fois que $Tdx+Qdy$ n'est pas une différentielle complète et que l'équation $\frac{dT}{dy}=\frac{dQ}{dx}$ exprime une condition qui doit avoir lieu pour que la proposée devienne intégrable, en la multipliant par une fonction de x et de y seulement; mais cette condition ne suffit pas.

Si, par la formule du n°. 629, on met sous la forme d'une différentielle complète à trois variables le premier membre de l'équation $\zeta dp+\zeta(Qp^2+Rp+S)dx=0$, résultante de la proposée multipliée par le facteur ζ, on trouvera

$$du=\zeta dp+(\zeta Tp+\zeta S)dx+(\zeta Qp+\zeta R-\zeta T)dy,$$

en observant que $\frac{d\zeta}{dx}=\zeta T$ et $\frac{d\zeta}{dy}=\zeta Q$; intégrant ensuite le terme ζdp, par rapport à p seulement, on aura $\zeta p+V=C$, puisque dans l'hypothèse établie ζ ne contient pas p: différentiant

ce résultat pour le comparer au précédent, on en déduira

$$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy=\zeta S\,dx+(\zeta R-\zeta T)\,dy,$$

et par conséquent $V=\int\zeta'(S\,dx+(R-T)\,dy)$, pourvu qu'on ait $\frac{d.\zeta S}{dy}=\frac{d.\zeta(R-T)}{dx}$. Telle est la seconde équation qui doit être identique pour que le facteur ζ ne renferme que x et y; en la développant, après y avoir substitué la valeur de ζ, elle deviendra

$$QS+\frac{dS}{dy}=T(R-T)+\frac{dR}{dx}-\frac{dT}{dx}.$$

Prenons pour exemple l'équation

$$x^2y\,d^2y+2x^2dy^2+(2x+3xy)\,dx\,dy+2y\,dx^2=0,$$

qui revient à $dp+\frac{1}{x^3y}(2x^2p^2+(2x+3xy)p+2y)\,dx=0$

et donne $Q=\frac{2}{y}$, $R=\frac{2+3y}{xy}$, $S=\frac{2}{x^2}$; nous aurons

$$T=\frac{3}{x},\quad \int(T\,dx+Q\,dy)=1.x^3y^2,\quad \zeta=x^3y^2$$

$$V=\int(2xy^2dx+2x^2y\,dy)=x^2y^2,$$

et l'intégrale première de l'équation proposée sera par conséquent

$$x^3y^2\frac{dy}{dx}+x^2y^2=C.$$

632. Lorsque $Q=0$, l'équation $\frac{d\zeta}{dy}-Q\zeta=0$ donne $\frac{d\zeta}{dy}=0$; il suit de là que le facteur ζ, qui, par l'hypothèse, ne peut renfermer p, ne contient dans ce cas que la seule variable x, et on a $\zeta=e^{\int T dx}$. La première équation de condition exige que T, qui se réduit à $\frac{\frac{d^2S}{dy^2}-\frac{d^2R}{dx\,dy}}{\frac{dR}{dy}}$, soit indépendant de y, et la seconde devient $\frac{dS}{dy}=T(R-T)+\frac{dR}{dx}-\frac{dT}{dx}$.

Si le facteur ne devoit contenir que y, on auroit $T=0$, $\zeta=e^{\int Q dy}$, Q seroit une fonction de y seul; on satisferoit ainsi à la première

équation de condition : la seconde se trouveroit réduite à

$$QS+\frac{dS}{dy}=\frac{dR}{dx},$$

Enfin si l'on avoit $\frac{dR}{dy}-2\frac{dQ}{dx}=0$, l'expression de T ne donneroit aucun résultat ; il faudroit alors déterminer cette quantité par le moyen des équations de condition trouvées ci-dessus : on auroit dans ce cas $\frac{dQ}{dx}=\frac{1}{2}\frac{dR}{dy}$; l'équation $\frac{dQ}{dx}=\frac{dT}{dy}$ conduiroit à $\frac{dT}{dy}=\frac{1}{2}\frac{dR}{dy}$ et $T=\frac{1}{2}R+X$, X désignant une fonction de x, ajoutée comme une constante après l'intégration effectuée par rapport à y (n°. 520). Substituant cette valeur dans la deuxième équation de condition, il viendra

$$\frac{dX}{dx}+X^2=\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{2}\frac{dR}{dx}-QS-\frac{dS}{dy},$$

résultat qui ne pourra s'accorder avec la forme que doit avoir X qu'autant que le second membre ne renfermera que la seule variable x ; lorsque cette circonstance aura lieu, il suffira de connoître une valeur particulière de X, pour obtenir le facteur ζ qui deviendra $e^{\int(Qdy+(\frac{1}{2}R+X)dx)}$, et la fonction V qui sera $\int\zeta(Sdx+(\frac{1}{2}R-X)dy)$.

633. L'équation du premier degré et du second ordre tombe dans ce dernier cas : en effet, soit $d^2y+P'dxdy+Q'ydx=R'dx^2$, cette équation ; P', Q' et R', seront des fonctions de x ; en faisant $dy=pdx$, $d^2y=dpdx$, on aura $dp+(P'p+Q'y-R')dx=0$; comparant avec l'équation traitée dans le n°. 631, on trouvera $Q=0$, $R=P'$, $S=Q'y-R'$, par conséquent $\frac{dR}{dy}-2\frac{dQ}{dx}=0$. Substituant les valeurs de Q, R et S, dans l'équation qui doit donner X (n°. précédent), elle se changera en

$$\frac{dX}{dx}+X^2=\frac{1}{4}P'^2+\frac{1}{2}\frac{dP'}{dx}-Q',$$

et son second membre sera une fonction de x seul : il suffira donc de découvrir une valeur particulière de X, pour parvenir, par ce qui précède, à l'intégrale de la proposée.

Quoique l'équation en X ne soit que du premier ordre, son intégration échappe dans le plus grand nombre de cas aux méthodes connues (n°. 565); mais si on y suppose $X=\frac{1}{2}P'+\frac{d\zeta'}{\zeta' dx}$, elle deviendra $d^2\zeta'+P'dx\,d\zeta'+Q'\zeta' dx^2=0$, en sorte que connoissant une valeur particulière de ζ', on en auroit une de X et on intégreroit encore l'équation proposée, conclusion qui s'accorde avec celle du n°. 618, quoique tirée de principes fort différens.

Ayant $X=\frac{1}{2}P'+\frac{d\zeta'}{\zeta' dx}$, on trouvera

$$\zeta=e^{\int P'dx+\int\frac{d\zeta'}{\zeta'}}=e^{\int P'dx}\zeta'$$

$$V=\int e^{\int P'dx}\zeta'\left[(Q'y-R')dx-\frac{d\zeta'}{\zeta' dx}dy\right];$$

mettant pour Q' sa valeur $-\frac{1}{\zeta'}\left(\frac{d^2\zeta'}{dx^2}+P'\frac{d\zeta'}{dx}\right)$, tirée de l'équation en ζ, il viendra

$$V=-\int e^{\int P'dx}\left[y\left(\frac{d^2\zeta'}{dx^2}+P'\frac{d\zeta'}{dx}\right)+\frac{d\zeta'}{dx}dy\right]-\int e^{\int P'dx}\zeta' R'dx$$

$$=-e^{\int P'dx}\frac{d\zeta'}{dx}y-\int e^{\int P'dx}\zeta' R'dx.$$

Ces résultats changeront l'intégrale générale $\zeta p+V=C$ ou $p+\frac{1}{\zeta}V+\frac{1}{\zeta}C'=0$, en

$$\frac{dy}{dx}-\frac{d\zeta'}{\zeta' dx}y-\frac{e^{-\int P'dx}}{\zeta'}\left(\int e^{\int P'dx}\zeta' R'dx-C'\right)=0,$$

équation qui, n'étant que du premier ordre et du premier degré, s'intégreroit par le procédé du n°. 556, et donneroit l'intégrale seconde de la proposée (n°. 610).

On parviendroit immédiatement à cette équation primitive, si l'on connoissoit une seconde valeur particulière de ζ'; car en la désignant par ζ'', on auroit

$$\frac{dy}{dx}-\frac{d\zeta''}{\zeta'' dx}y-\frac{e^{-\int P'dx}}{\zeta''}\left(\int e^{\int P'dx}\zeta'' R'dx-C''\right)=0,$$

et éliminant $\frac{dy}{dx}$, entre cette équation et la précédente, on trouveroit

$$y=-\frac{e^{-\int P'dx}}{\frac{d\zeta'}{dx}-\frac{\zeta' d\zeta''}{\zeta'' dx}}\left(\int e^{\int P'dx}\zeta' R'dx-C'\right)-\frac{e^{-\int P'dx}}{\frac{d\zeta''}{dx}-\frac{\zeta'' d\zeta'}{\zeta' dx}}\left(\int e^{\int P'dx}\zeta'' R'dx-C''\right).$$

Pour montrer l'usage de ces formules, je vais les appliquer à l'équation $d^2y+Adxdy+By dx^2=R'dx^2$, dans laquelle A et B sont des quantités constantes: l'équation en ζ deviendra $d^2\zeta'+Adxd\zeta'+B\zeta' dx^2=0$, et donnera ces deux valeurs $\zeta'=e^{m'x}$, $\zeta'=e^{m''x}$, m' et m'' désignant les racines de l'équation $m^2+Am+B=0$ (n°. 617); substituant ces valeurs dans celle de y, en observant que $m'+m''=-A$, on trouvera

$$y=\frac{e^{m'x}\left(\int e^{-m'x}R'dx-C'\right)-e^{m''x}\left(\int e^{-m''x}R'dx-C''\right)}{m'-m''}.$$

Lorsque les racines m' et m'' sont imaginaires, cette expression se transforme par le moyen des sinus et cosinus, comme celle du n°. 623; mais elle devient $\frac{0}{0}$ quand on a $m'=m''$, en négligeant les constantes arbitraires qui se confondent en une seule. Pour en connoître la vraie valeur dans ce dernier cas, il faut, suivant la règle du n°. 139, faire $m''=m'+k$, et en suivant les détails du procédé indiqué, on trouvera

$$y=e^{m'x}\left(x\int e^{-m'x}R'dx-\int e^{-m'x}R'x\,dx\right).$$

Cette expression est complète, car chaque intégrale est censée renfermer implicitement une constante arbitraire, et en restituant ces constantes, on obtiendra la formule du n°. 623.

634. Renversons maintenant la question qui vient de nous occuper, et cherchons, comme dans le premier ordre, la forme que doit avoir l'équation proposée pour devenir intégrable lorsqu'elle sera multipliée par un facteur donné. Soit l'équation $d^2y+P'dxdy+Q'y dx^2=0$; et supposons $\zeta=Kp+Ly$, K et L étant des fonctions connues en x. En substituant cette expression dans les équations (3) et (4), après y avoir fait $P=P'p+Q'y$, nous trouverons $2L+\frac{dK}{dx}-2P'K=0$

$$\left.\begin{aligned}&p\left(2\frac{dL}{dx}+\frac{d^2K}{dx^2}-2P'\frac{dK}{dx}-2K\frac{dP'}{dx}\right)\\&+y\left(\frac{d^2L}{dx^2}-P'\frac{dL}{dx}+2Q'L-L\frac{dP'}{dx}-K\frac{dQ'}{dx}-Q'\frac{dK}{ax}\right)\end{aligned}\right\}=0.$$

La première de ces équations donne $P'=\frac{L}{K}+\frac{dK}{2Kdx}$; et sa différentielle est précisément le coefficient de p dans la seconde, qui se réduit par conséquent à

$$\frac{d^2L}{dx^2}-P'\frac{dL}{dx}+2Q'L-L\frac{dP'}{dx}-K\frac{dQ'}{dx}-Q'\frac{dK}{dx}=0;$$

mettant celle-ci sous la forme

$$dQ'+\left(\frac{dK}{Kdx}-\frac{2L}{K}\right)Q'dx=\left(\frac{d^2L}{Kdx}-\frac{d.P'L}{Kdx}\right)dx,$$

on en tirera

$$Q'=\frac{e^{2\int\frac{Ldx}{K}}}{K}\int e^{-2\int\frac{Ldx}{K}}\left(\frac{d^2L}{dx^2}-\frac{d.P'L}{dx}\right)dx \text{ (n°. 556)};$$

remplaçant P par sa valeur trouvée ci-dessus, et effectuant la différentiation indiquée, on obtiendra

$$\int e^{-2\int\frac{Ldx}{K}}\left(\frac{d^2L}{dx^2}-\frac{d.P'L}{dx}\right)dx=$$

$$\int e^{-2\int\frac{Ldx}{K}}\left(\frac{d^2L}{dx^2}-\frac{2LdL}{K}-\frac{dKdL}{2Kdx}+\frac{L^2dK}{K^2}-\frac{Ld^2K}{2Kdx}+\frac{LdK^2}{2K^2dx}\right)$$

$$=e^{-2\int\frac{Ldx}{K}}\left(\frac{dL}{dx}-\frac{LdK}{2Kdx}\right)+C:$$

on aura donc $Q'=\frac{C}{K}e^{2\int\frac{Ldx}{K}}+\frac{dL}{Kdx}-\frac{LdK}{2K^2dx}$,

et l'équation que le facteur $Kp+Ly$ rendra intégrable sera

$$d^2y+\left(\frac{L}{K}+\frac{dK}{2Kdx}\right)dxdy+\left(\frac{C}{K}e^{2\int\frac{Ldx}{K}}+\frac{dL}{Kdx}-\frac{LdK}{2K^2dx}\right)ydx^2=0.$$

Pour en obtenir l'intégrale, il faudra, après l'avoir multipliée par ce facteur, la mettre sous la forme $Mdp+Ndx=0$, et faire usage ensuite du procédé indiqué dans le n°. 629. Nous allons parvenir au résultat par une autre voie, qui conduit immédiatement aux expressions de P' et de Q', obtenues précédemment.

Pour cela multiplions l'équation proposée $dp+(P'p+Q'y)dx=0$ par $Kp+Ly'$, nous trouverons

$$(Kp+Ly)dp+(P'Kp^2+(Q'K+P'L)yp+Q'Ly^2)dx=0;$$

intégrons le premier terme par rapport à p, et ajoutons-y une fonction indéterminée de x et de y, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}Kp^2+Lyp+V=C_1,$$

équation dont la différentielle est

$$(Kp+Ly)\,dp+\Big(\big(\tfrac{1}{2}\frac{dK}{dx}+L\big)p^2+\Big(\frac{dL}{dx}y+\frac{dV}{dy}\Big)p+\frac{dV}{dx}\Big)dx=0;$$

comparant cette dernière avec celle d'où nous sommes partis, nous en conclurons $\frac{1}{2}\frac{dK}{dx}+L=P'K$, ou $2L+\frac{dK}{dx}-2P'K=0$,

$$\frac{dL}{dx}y+\frac{dV}{dy}=Q'Ky+P'Ly, \text{ ou } \frac{dV}{dy}=\Big(Q'K+P'L-\frac{dL}{dx}\Big)y,$$

$$\frac{dV}{dx}=Q'Ly^2, \text{ et à cause de } \frac{d^2V}{dy\,dx}=\frac{d^2V}{dx\,dy}, \text{ il faudra que}$$

$$2Q'L=Q'\frac{dK}{dx}+K\frac{dQ'}{dx}+P'\frac{dL}{dx}+L\frac{dP'}{dx}-\frac{d^2L}{dx^2}.$$

La première et la dernière de ces équations sont les mêmes que celles que nous avons déduites des équations (3) et (4) et qui nous ont servi à déterminer P' et Q'; intégrant donc la fonction

$$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy=2Q'Ly^2dx+\Big(Q'K+P'L-\frac{dL}{dx}\Big)y\,dy;$$

nous trouverons

$$V=\tfrac{1}{2}\Big(Q'K+P'L-\frac{dL}{dx}\Big)y^2 \text{ et}$$

$$\tfrac{1}{2}Kp^2+Lyp+\tfrac{1}{2}\Big(Q'K+P'L-\frac{dL}{dx}\Big)y^2=C_1.$$

En remettant pour p, Q' et P' leurs valeurs, l'intégrale première de l'équation que nous avons déterminée ci-dessus sera

$$\tfrac{1}{2}K\frac{dy^2}{dx^2}+\tfrac{1}{2}\Big(Ce^{2\int\frac{Ldx}{K}}+\frac{L^2}{K}\Big)y^2=C_1.$$

Si l'on veut faire disparoître des résultats précédens les exponentielles, on posera $e^{2\int\frac{Ldx}{K}}=I$, ce qui donnera $\frac{2Ldx}{K}=\frac{dI}{I}$ et $L=\frac{K\,dI}{2I\,dx}$; le facteur z, l'équation à intégrer, et son intégrale

première

première, deviendront respectivement $K\frac{dy}{dx}+\frac{Kydl}{2ldx}$;

$$d^2y+\left(\frac{dl}{2ldx}+\frac{dK}{2Kdx}\right)dxdy+\left(\frac{Cl}{K}+\frac{d^2l}{2ldx^2}+\frac{dKdl}{4Kldx^2}-\frac{dl^2}{2l^2dx^2}\right)y\,dx^2=0$$

$$\tfrac{1}{2}K\left(\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{ydl}{ldx}\frac{dy}{dx}+\frac{y^2dl^2}{4l^2dx^2}\right)+\tfrac{1}{2}Cly^2=C_1.$$

La dernière équation s'intègre facilement dans le cas où $C_1=0$; en la résolvant alors par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on trouvera

$$\frac{dy}{dx}+\frac{dl}{2ldx}y=\pm\frac{y\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}} \text{ et } y\sqrt{l}=ce^{\pm\int\frac{dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}};$$

on aura donc ces deux valeurs particulières

$$y=\frac{c}{\sqrt{l}}e^{\int\frac{dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}},\quad y=\frac{c_1}{\sqrt{l}}e^{-\int\frac{dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}},$$

qui satisferont à l'équation du second ordre rapportée ci-dessus, et on en conclura la valeur complète

$$y=\frac{1}{\sqrt{l}}\left(ce^{\int\frac{dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}}+c_1e^{-\int\frac{dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}}\right)\text{ (n°. 618).}$$

Si la quantité $\sqrt{-Cl}$ étoit imaginaire, on transformeroit ce résultat par le moyen des sinus et cosinus (Int. n°. 40).

Il donne aussi l'intégrale de l'équation différentielle du premier ordre, dans le cas où C_1 n'est pas zéro, pourvû qu'on détermine convenablement l'une des deux constantes c ou c_1. Pour cela on le différentiera et on aura

$$dy\sqrt{l}+y\frac{dl}{2\sqrt{l}}=\frac{cdx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}e^{\int\frac{dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}}-\frac{c_1dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}e^{-\int\frac{dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}};$$

divisant les deux membres de cette équation par $dx\sqrt{l}$, le premier deviendra $\frac{dy}{dx}+\frac{dl}{2ldx}y$; son quarré sera $\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{ydl}{ldx}+\frac{y^2dl^2}{4l^2dx^2}$; mettant la valeur de ce quarré, ainsi que celle de y^2 dans l'équation du premier ordre dont il s'agit, elle se changera en

$$-\tfrac{1}{2}C\left(ce^{\int\frac{dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}}-c_1e^{-\int\frac{dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}}\right)^2+\tfrac{1}{2}C\left(ce^{\int\frac{dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}}+c_1e^{\int\frac{dx\sqrt{-Cl}}{\sqrt{K}}}\right)^2=C_1;$$

développant et réduisant on trouvera $2Cc_1=C_1$, d'où $c_1=\frac{C_1}{2C}$;

635. Donnons encore au facteur cette forme $\frac{y}{(p+Ky)(p+Ly)}$ et cherchons immédiatement les équations de condition, comme nous l'avons fait en dernier lieu dans le n°. précédent; nous obtiendrons 1°. l'équation $\frac{y\,dp+(P'yp+Q'y^2)\,dx}{(p+Ky)(p+Ly)}=0$, en multipliant la proposée par le facteur; 2°. $l\frac{p+Ky}{p+Ly}+V=C$, en intégrant par rapport à p;

3°. $\frac{(L-K)\,ydp+(K-L)\,pdy+(dK-dL)\,py+(LdK-KdL)y^2}{(p+Ky)(p+Ly)}+dV=0$,

en différentiant l'équation précédente. Si on réduit tous les termes de ce résultat au même dénominateur, qu'on les divise ensuite par $L-K$, et qu'on écrive $p\,dx$ pour dy, on aura une fraction dont le numérateur sera

$$y\,dp+\left(\frac{dV}{L-K}-dx\right)p^2+\left[\frac{(K+L)dV+dK-dL}{L-K}\right]yp+\frac{(KL\,dV+LdK-KdL)y^2}{L-K}.$$

En le comparant à celui de l'équation que nous nous proposons d'intégrer, nous obtiendrons ces équations

$$\frac{dV}{L-K}-dx=0,\text{ ou }V=\int(L-K)\,dx,$$

$$P'=(K+L)+\frac{dK-dL}{(L-K)dx},\qquad Q'=KL+\frac{(LdK-KdL)}{(L-K)dx}.$$

Lorsque P' et Q' auront ces valeurs, l'intégrale première de l'équation proposée sera $l\left(\frac{p+Ky}{p+Ly}\right)+\int(L-K)\,dx=C$, et passant aux nombres on en déduira cette équation du premier degré

$$(p+Ky)\,e^{\int(L-K)dx}-c(p+Ly)=0.$$

636. Nous ne nous sommes encore occupés que de l'équation du second ordre et du premier degré; mais ce qu'on a vû suffit pour faire connoître l'esprit de la méthode, c'est pourquoi nous n'en donnerons plus qu'un seul exemple: savoir, de déterminer les quantités P, Q et R, pour que l'équation $d^2y+Pdy^2+Qdxdy+Rdx^2=0$, ou $dp+(Pp^2+Qp+R)\,dx=0$, devienne intégrable, par la mul-

tiplication d'un facteur Ip^2+Kp+L, dans lequel I, K et L sont des fonctions données en x et en y.

Si on multiplie la proposée par ce facteur, et qu'on intègre le résultat par rapport à p, on trouvera $\frac{1}{3}Ip^3+\frac{1}{2}Kp^2+Lp+V=c$; différentiant cette dernière équation, mettant pdx au lieu de dy, et comparant ensuite avec l'équation à intégrer, multipliée par le facteur donné, on aura

$$IP-\tfrac{1}{3}\frac{dI}{dy}=0; \qquad IQ+KP-\tfrac{1}{3}\frac{dI}{dx}-\tfrac{1}{2}\frac{dK}{dy}=0$$

$$IR+KQ+LP-\tfrac{1}{2}\frac{dK}{dx}-\frac{dL}{dy}=0,$$

$$KR+LQ-\frac{dL}{dx}-\frac{dV}{dy}=0, \qquad LR-\frac{dV}{dx}=0;$$

On tire des deux dernières équations

$$dV=\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy=LR\,dx+\left(KR+LQ-\frac{dL}{dx}\right)dy;$$

et pour que cette quantité soit une différentielle exacte, il faut que l'équation $\frac{d.LR}{dy}=\frac{d\left(KR+LQ-\frac{dL}{dx}\right)}{dx}$ soit identique. Les trois premières équations donnent

$$P=\frac{1}{3I}\frac{dI}{dy}, \qquad Q=\frac{1}{3I}\frac{dI}{dx}-\frac{K}{3I^2}\frac{dI}{dy}+\frac{1}{2I}\frac{dK}{dy}$$

$$R=\frac{1}{2I}\frac{dK}{dx}+\frac{1}{I}\frac{dL}{dy}-\frac{L}{3I^2}\frac{dI}{dy}-\frac{K}{3I^2}\frac{dI}{dx}+\frac{K^2}{3I^3}\frac{dI}{dy}-\frac{K}{2I^2}\frac{dK}{dy};$$

substituant ces valeurs dans l'équation de condition ci-dessus, elle fera connoître la relation qui doit exister entre les trois quantités I, K et L, pour que le facteur proposé convienne.

Il est facile de voir qu'on pourroit aussi déduire la valeur de I de celle de P, puis celle de K, par le moyen de celles de Q et de I, celle de L par le moyen de celles de R, de I et de K, et enfin celle de V, en supposant toutefois que l'équation de condition soit satisfaite.

Appliquons ces formules à l'équation

$$d^2y+\frac{Aydx^2}{(By^2+C+2Dx+Ex^2)^2}=0, \text{ dans laquelle } A, B, C, D$$

et E, désignent des coefficiens constans; on a dans ce cas $P=0$, $Q=0$, $R=\frac{Ay}{(By^2+C+2Dx+Ex^2)^2}$, et il résulte de là

$$\frac{dI}{dy}=0, \quad \frac{1}{2}\frac{dI}{dx}+\frac{1}{2}\frac{dK}{dy}=0, \quad IR-\frac{1}{2}\frac{dK}{dx}-\frac{dL}{dy}=0.$$

Faisant pour plus de simplicité $I=0$, nous aurons $\frac{dK}{dy}=0$; K ne renfermera plus que x, et à cause de $\frac{1}{2}\frac{dK}{dx}+\frac{dL}{dy}=0$, il faudra que L soit la forme Xy, X désignant une fonction de x, telle que $dK+2Xdx=0$. Cela posé, on trouvera

$$dV=XRy\,dx+\left(KR-y\frac{dX}{dx}\right)dy=\frac{1}{2}R(2Kdy-y\,dK)-y\,dy\frac{dX}{dx},$$

en mettant $-\frac{1}{2}dK$ pour Xdx; substituant ensuite au lieu de R sa valeur, on obtiendra

$$dV=\frac{Ay(2Kdy-y\,dK)}{2(By^2+C+2Dx+Ex^2)^2}-y\,dy\frac{dX}{dx},$$ résultat qui doit être une différentielle exacte. On l'intégrera d'abord par rapport à y; on aura $V=\frac{-AK}{2B(By^2+C+2Dx+Ex^2)}-\frac{1}{2}y^2\frac{dX}{dx}$, et prenant la différentielle de ce résultat, en faisant varier à la fois x, y, ainsi que les quantités K et X qui en dépendent, on la comparera avec l'expression de dV, ce qui donnera l'équation de condition

$$\frac{AdK(By^2+C+2Dx+Ex^2)-2AKdx(D+Ex)}{B(By^2+C+2Dx+Ex^2)^2}+y^2\frac{d^2X}{dx}=\frac{Ay^2dK}{(By^2+C+2Dx+Ex^2)}$$

ou $$\frac{AdK(C+2Dx+Ex^2)-2AKdx(D+Ex)}{B(By^2+C+2Dx+Ex^2)^2}+y^2\frac{d^2X}{dx}=0,$$

à laquelle on satisfera en supposant $\frac{d^2X}{dx^2}=0$, et

$$dK(C+2Dx+Ex^2)-2Kdx(D+Ex)=0.$$

On tirera de la première de ces équations $X=\alpha+\beta x$, α et β étant des constantes arbitraires; la seconde donnera $K=\gamma(C+2Dx+Ex^2)$; mais comme il faut d'ailleurs que ces valeurs satisfassent à l'équation $dK+2Xdx=0$, on aura $\gamma(D+Ex)+\alpha+\beta x=0$, et prenant $\gamma=1$ il en résultera $\alpha=-D$, $\beta=-E$, $X=-(D+Ex)$ $L=-y(D+Ex)$, $K=C+2Dx+Ex^2$:

le facteur cherché aura pour expression $p(C+2Dx+Ex^2)-y(D+Ex)$, et l'intégrale première de l'équation proposée sera $\frac{1}{2}Kp^2+Lp+V=c$, ou

$$p^2(C+2Dx+Ex^2)-2py(D+Ex)-\frac{A(C+2Dx+Ex^2)}{B(By^2+C+2Dx+Ex^2)}+Ey^2=c.$$

Si l'équation proposée étoit réduite à $d^2y+\frac{a^2y\,dx^2}{(y^2+x^2)^2}=0$,

on auroit $x^2p^2-2xyp+y^2+\frac{a^2x^2}{y^2+x^2}=c$, d'où il suit

$$x\,dy-y\,dx=\pm dx\sqrt{c-\frac{a^2x^2}{y^2+x^2}};$$

multipliant les deux membres de cette équation par $\frac{1}{x^2}$, on trouveroit

$$d.\frac{y}{x}=\pm\frac{dx}{x^2}\sqrt{c-\frac{a^2x^2}{y^2+x^2}} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{x^2}=\frac{\pm du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{c(1+u^2)-a^2}},$$

en faisant $\frac{y}{x}=u$.

Méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles du second ordre.

637. Soit l'équation $d^2y+ax^ny\,dx^2=0$; si on suppose que la valeur de y, qui satisfait à cette équation, ait la forme $Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+$ etc. et que la suite des exposans α, β, γ, etc. soit croissante, en mettant, d'après le procédé du n°. 119, Ax^α et $\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}dx^2$ au lieu de y et de d^2y, on trouvera

$$\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}+aAx^{\alpha+n}=0.$$

Il ne sera pas possible de déterminer α, de manière que les deux exposans $\alpha-2$ et $\alpha+n$ deviennent égaux, excepté dans le cas particulier où $n=-2$; mais si l'on suppose x très-petite, on satisfera pourtant à l'équation ci-dessus de deux manières; savoir, en prenant $\alpha=0$ et $\alpha=1$; parce que par l'une et l'autre hypothèse le terme $\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}$, qui est le plus grand, s'évanouit: A reste donc indéterminé, et l'on a deux séries, l'une commençant par A et l'autre par Ax. On trouvera ensuite pour le second terme de la première $\frac{-Aax^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$, et pour celui de la seconde $\frac{-Aax^{n+3}}{(n+2)(n+3)}$; en continuant, on parviendra à ces deux séries:

$$A-\frac{aAx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{a^2Ax^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}-\frac{a^3Ax^{3n+6}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)}+\text{etc.}$$

$$Ax-\frac{aAx^{n+3}}{(n+2)(n+3)}+\frac{a^2Ax^{2n+5}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}-\frac{a^3Ax^{3n+7}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)(3n+6)(3n+7)}+\text{etc.}$$

qu'on obtiendroit immédiatement, en substituant dans l'équation proposée, au lieu de y et de d^2y, les séries

$$A+Bx^{n+2}+Cx^{2n+4}+Dx^{3n+6}+\text{etc.}$$

$$Ax+Bx^{n+3}+Cx^{2n+5}+Dx^{3n+7}+\text{etc.}$$

et leurs différentielles secondes.

Les développemens rapportés plus haut ne sont que particuliers, puisqu'ils ne contiennent que la constante arbitraire A; mais en écrivant dans le dernier A_1 à la place de A, et prenant ensuite leur somme, on aura (n°. 618) une expression générale de y.

La méthode du n°. 110 donne aussi le même résultat. Si on désigne par A et par A_1 les valeurs que prennent y et $\frac{dy}{dx}$, lorsque $x=0$, valeurs qui sont arbitraires, puisque la proposée est du second ordre, il ne s'agira que de déterminer les coefficiens différentiels ultérieurs par le moyen de ces valeurs. Or, en vertu de l'équation $d^2y+x^ny\,dx^2=0$, on a $d^{m+2}y+dx^2d^m(x^ny)=0$, et en développant il vient

$$d^{m+2}y+dx^2(y\,d^m.x^n+m\,dy\,d^{m-1}.x^n\ldots\ldots+x^nd^my)=0;$$

maintenant il est facile de voir que toutes les différentielles $d^2y, d^3y\ldots$ jusqu'à $d^{n+1}y$ inclusivement, s'évanouissent en même tems que x, puisqu'il en arrive autant aux différentielles de x^n, lorsque $m<n$. Ces dernières sont encore nulles quand $m>n$; mais quand $m=n$, on a $d^n.x^n=n.(n-1)\ldots\ldots\ldots\ldots1.dx^n$. Il suit de là que

$$\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}+n(n-1)\ldots\ldots1.A=0,$$

$$\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}+(n+1)n\ldots\ldots1.A_1=0.$$

Toutes les différentielles de y qui suivent sont encore nulles jusqu'à $d^{2n+1}y$ et $d^{2n+5}y$, qui dépendent des précédentes, et pour lesquelles on a $\frac{d^{2n+4}y}{dx^{2n+4}}+(2n+2)(2n+1)\ldots(n+3)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}=0$,

$$\frac{d^{2n+5}y}{dx^{2n+5}}+(2n+3)(2n+1)\ldots(n+4)\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}=0.$$

En continuant ainsi, et substituant dans la série du n°. cité, les valeurs obtenues, on trouvera

$$y=A+A_1x-\frac{aAx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{aA_1x^{n+3}}{(n+2)(n+3)}$$
$$+\frac{a^2Ax^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}+\frac{a^2A_1x^{2n+5}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}-\text{etc.}$$

638. Tout ce qui a été dit dans le n°. 595, sur les équations du premier ordre, peut s'appliquer à celles du second, avec cette seule différence que le second terme des séries rapportées dans cet article doit être regardé comme arbitraire, puisque l'équation proposée ne donne que le coefficient $\frac{d^2b}{da^2}$ et ceux qui le suivent. Pour déterminer entiérement l'expression de y, il faut donc connoître ce que deviennent cette fonction et son premier coefficient différentiel, lorsque x reçoit une valeur particulière a (*).

639. On tire de ce qui précède une construction générale des équations différentielles du second ordre à deux variables, analogue à celle qu'on a vue dans le n°. 596, pour les équations du premier. Une équation du second ordre ne déterminant que le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$, on ne sauroit prendre moins de trois termes dans la série

$$y=b+\frac{db}{da}\frac{t}{1}+\frac{d^2b}{da^2}\frac{t^2}{1.2}+\text{etc.}$$

et si on fait $b=Y$, $\frac{db}{da}=Y'$, $\frac{d^2b}{da^2}=Y''$, on aura $Y_1=Y+Y't+Y''\frac{t^2}{2}$, équation dans laquelle t représente a_1-a ; l'ordonnée Y_1 sera celle de la première parabole osculatrice de la courbe cherchée (n°. 258); les quantités Y et Y' seront arbitraires : on construira donc cette parabole MN, *fig.* 22, de manière qu'elle passe par deux points donnés, ou bien qu'en passant par le point M, dont l'abscisse $AP=a$ et l'ordonnée $PM=Y=b$, sa tangente à ce point fasse

FIG. 22.

(*) Ou bien encore avoir deux valeurs particulières de y, correspondantes à deux valeurs données de x ; mais ce dernier procédé n'est applicable en général qu'à l'intégrale seconde, exprimée par un nombre fini de termes.

avec l'axe AB un angle dont la tangente trigonométrique soit donnée. Prenant ensuite un second point P', infiniment proche du premier et correspondant à l'abscisse $AP'=a_1$, on aura pour ce point $P'M'=Y_1$, $Y'_1=\frac{dY_1}{dt}=Y'+Y''t$; substituant ces valeurs à la place de x, de y et de $\frac{dy}{dx}$ dans la proposée; on en tirera celle de $\frac{d^2y}{dx^2}=Y''_1$; et faisant $a_2-a_1=t_1$, on trouvera $Y_2=Y_1+Y'_1t_1+Y''_1\frac{t_1^2}{2}$, pour l'équation de la parabole osculatrice $M'N'$, consécutive à la précédente. L'assemblage de toutes les paraboles construites ainsi formera une courbe qui différera d'autant moins de la courbe cherchée que les points P, P', P'', etc. seront plus rapprochés les uns des autres. Cette construction s'étendra facilement aux équations de tous les ordres à deux variables, et prouve que ces équations, qui sont toujours possibles, représentent une infinité de courbes (*).

640. Lorsqu'il arrive que quelques-uns des coefficiens différentiels deviennent infinis, les séries obtenues par la méthode du n°. 110 ne signifient plus rien. Celles de l'exemple que nous avons donné et dont les diviseurs de chaque terme sont de ces formes
$in+2i-1$, $in+2i$, $in+2i+1$, ou $(n+2)i-1$, $(n+2)i$, $(n+2)i+1$, i désignant un nombre entier, tomberont dans le cas dont il s'agit, si l'on a $(n+2)i=1$, ou $(n+2)i=0$, ou $(n+2)i=-1$. Il faut néanmoins distinguer ces diverses circonstances; car la première ne rend inutile que la première série, et l'on peut employer la seconde série comme une valeur particulière de y; dans la troisième circonstance, c'est la seconde série qui devient inutile, tandis que la première

(*) En se rappelant ce qu'exprime d^2y, lorsque, d'après Léibnitz, on considère les courbes comme des Polygones, on peut modifier, ainsi qu'il suit, la construction ci-dessus. Ayant tiré arbitrairement le premier côté MM' (*fig.* 39 du premier vol.) et pris $P'P''=PP'$, on portera sur $P''M''$, une grandeur $M''O$ égale à la première valeur de d^2y, et $M'M''$ sera le second côté. Pour en trouver un troisième, on prendra encore $P''P'''=PP'$; on portera sur $P'''M'''$ une grandeur $M'''O'$ égale à la seconde valeur de d^2y: on déterminera de la même manière les autres points.

Dans le cas du second ordre, on pourroit substituer aux paraboles osculatrices les cercles osculateurs.

subsiste;

subsiste ; mais dans la deuxième circonstance, où l'on a $n+2=0$, les deux séries sont illusoires en même tems. L'équation proposée qui se réduit alors à $d^2y+\frac{ay\,dx^2}{x^2}$, est homogène (n°. 624) ; si on y fait $y=x^m$, elle se change en

$$m(m-1)x^{m-2}+ax^{m-2}=0,$$

et donne $m^2-m+a=0$; tirant de celle-ci les deux valeurs de m ; on trouve $y=Cx^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}}+C_1x^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a}}$ (n°. 618).

Ayant dans chacune des hypothèses de $(n+2)i=1$, $(n+2)i=-1$, une série qui donne une valeur particulière de y, si on représente cette série par M, on obtiendra par le n°. 618,

$$y=C_1M+M\int\frac{Cdx}{M^2},$$

pour la valeur complète de y. On ne pourroit tirer parti de ce résultat qu'en développant en série l'intégrale qu'il renferme ; c'est pourquoi Euler transforme l'équation proposée en y introduisant le logarithme de x, fonction dont les coefficiens différentiels deviennent infinis lorsque $x=0$. Il fait $y=p+q\,lx$, et trouve par la substitution des expressions de y et de d^2y l'équation suivante,

$$d^2p+\frac{2dx\,dq}{x}-\frac{q\,dx^2}{x^2}+ap\,x^n\,dx^2+(d^2q+aq\,x^n\,dx^2)\,lx=0;$$

en égalant à zéro ce qui multiplie lx, il obtient ces deux équations

$$d^2q+aq\,x^n\,dx^2=0$$

$$d^2p+\frac{2dx\,dq}{x}-\frac{q\,dx^2}{x^2}+ap\,x^n\,dx^2=0.$$

La première étant absolument semblable à la proposée, on a, dans celle des deux séries qui subsiste, une valeur particulière de q, et mettant cette valeur dans la seconde équation, on en tire p, au moyen d'une série ; et il est à propos de remarquer qu'on peut prendre $p+q\,lCx$, au lieu de $p+q\,lx$, pour l'expression de y, ainsi qu'il est facile de s'en assurer par le calcul.

Pour appliquer ces formules, prenons l'équation $d^2y+\frac{aydx^2}{x\sqrt{x}}=0$; nous aurons $n=-\frac{1}{2}$, $n+2=\frac{3}{2}$. Dans ce cas c'est la première

série qui devient inutile, à cause de l'évanouissement du diviseur $2(n+2)-1$, ou $2n+3$, et la seconde donne

$$q=A_1x-\frac{4aA_1}{1.3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{16a^2A_1}{1.2.3.4}x^4-\frac{64a^3A_1}{1.2.3.4.3.5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{256a^4A_1}{1.2.3.4.3.4.5.6}x^3-\text{etc.}$$

si pour abréger on fait

$$q=A_1x+B_1x^{\frac{3}{2}}+C_1x^2+D_1x^{\frac{5}{2}}+E_1x^3+\text{etc.}$$

qu'on suppose en même tems

$$p=A+\alpha x^{\frac{1}{2}}+\beta x+\gamma x^{\frac{3}{2}}+\delta x^2+\epsilon x^{\frac{5}{2}}+\zeta x^3+\text{etc.}$$

A, α, β, γ, δ, ϵ, ζ, etc. étant des coefficiens indéterminés, et qu'on mette ces expressions, ainsi que celles de dq et de d^2p, qui en résultent, dans l'équation d^2p+ etc, on aura

$$\left.\begin{array}{llllllll} -\frac{1}{4}a x^{-\frac{3}{2}} & +0.\ x^{-1} & +\frac{3}{4}\gamma x^{-\frac{1}{2}} & +2\delta & +\frac{15}{4}\epsilon x^{\frac{1}{2}} & +6\zeta x & +\text{etc.} \\ & +2A_1 & +3B_1 & +4C_1 & +5D_1 & +6E_1 & +\text{etc.} \\ & -A_1 & -B_1 & -C_1 & -D_1 & -E_1 & +\text{etc.} \\ +aA & +a\alpha & +a\beta & +a\gamma & +a\delta & +a\epsilon & +\text{etc.} \end{array}\right\}=0.$$

En égalant séparément à zéro le coefficient de chaque puissance de x, on trouvera $\alpha=-\frac{A_1}{a}$, $A=-\frac{A_1}{4a^2}$; β restera indéterminé,

$$\gamma=-\frac{4a\beta}{1.3}-\frac{8B_1}{1.3}=-\frac{4a\beta}{1.3}+\frac{32aA_1}{1^2.3^2}$$

$$\delta=-\frac{4a\gamma}{2.4}-\frac{12C_1}{2.4}=-\frac{4a\gamma}{2.4}-\frac{12.16a^2A_1}{1.3.2^2.4^2}$$

$$\epsilon=-\frac{4a\delta}{3.5}-\frac{16D_1}{3.5}=-\frac{4a\delta}{3.5}+\frac{16.64a^3A_1}{1.3.2.4.3^2.5^2}$$

$$\zeta=-\frac{4a\epsilon}{4.6}-\frac{20E_1}{4.6}=-\frac{4a\epsilon}{4.6}-\frac{20.256a^4A_1}{1.3.2.4.3.5.4^2.6^2},$$

etc.

641. On peut donner à l'équation $d^2y+ax^ny\,dx^2=0$ une forme plus propre au développement en série, en y faisant $y=e^{\int p\,dx}q$: elle deviendra alors

$$d^2q+(2p\,dq+q\,dp)\,dx+(p^2+ax^n)\,q\,dx^2=0;$$

et posant $p^2+ax^n=0$, on aura $p=x^{\frac{n}{2}}\sqrt{-a}$, ou $p=bx^m$, en

écrivant, pour abréger, m et b au lieu de $\frac{n}{2}$, et de $\sqrt{-a}$; il résultera de là $y = e^{\frac{b x^{m+1}}{m+1}} q$, et la fonction q sera donnée par l'équation

$$d^2q + 2bx^n dq dx + mbx^{m-1} q dx^2 = 0.$$

Si on développe cette fonction, comme on a fait pour y dans le n°. 637, on trouvera les deux séries

$$A + Bx^{m+1} + Cx^{2m+2} + Dx^{3m+3} + Ex^{4m+4} + \text{etc.}$$

$$A_1 x + B_1 x^{m+2} + C_1 x^{2m+3} + D_1 x^{3m+4} + E_1 x^{4m+5} + \text{etc.}$$

dans lesquelles les quantités A et A_1 sont arbitraires et dont la somme donnera la valeur complète de q. Pour déterminer les coefficiens A, B, etc. A_1, B_1, etc. il sera plus court de mettre chacune des séries ci-dessus à la place de q, dans l'équation proposée, lorsque leur forme sera connue, que d'employer la méthode des substitutions successives; on trouvera ainsi

$$B = \frac{-mAb}{m(m+1)}, \qquad B_1 = \frac{-(m+2)A_1 b}{(m+1)(m+2)}$$

$$C = \frac{-(3m+2)Bb}{(2m+1)(2m+2)}, \qquad C_1 = \frac{-(3m+4)B_1 b}{(2m+2)(2m+3)}$$

$$D = \frac{-(5m+4)Cb}{(3m+2)(3m+3)}, \qquad D_1 = \frac{-(5m+6)C_1 b}{(3m+3)(3m+4)}$$

$$E = \frac{-(7m+6)Db}{(4m+3)(4m+4)}, \qquad E_1 = \frac{-(7m+8)D_1 b}{(4m+4)(4m+5)}$$

etc. etc.

Ces valeurs nous apprennent que la première série s'arrêtera toutes les fois qu'on aura $(2i+1)m+2i=0$, ou $m = \frac{-2i}{2i+1}$, i étant un nombre entier, et qu'il en arrivera autant à la seconde, si $(2i-1)m+2i=0$, ou si $m = \frac{-2i}{2i-1}$. On aura dans l'un et l'autre cas une valeur particulière de q, au moyen de laquelle il sera facile de parvenir à une valeur complète. Remettant au lieu de m sa valeur $\frac{n}{2}$, on verra que ces deux cas sont compris dans la formule $n = \frac{-4i}{2i \pm 1}$, que nous avons trouvée pour l'équation de Riccati

(n°. 550); et en effet, si, dans l'équation proposée, l'on suppose $y = t^{\int t dx}$, elle deviendra $dt + t^2 dx + a x^n dx = 0$ (n°. 616), ou $dt + t^2 dx = b^2 x^n dx$, puisque $b^2 = -a$; réciproquement on reviendra de cette dernière à la première: en mettant pour t sa valeur $\frac{dy}{y dx}$. Il y a donc entre l'équation proposée et celle de Riccati, une liaison telle que l'intégration de l'une conduit à celle de l'autre.

642. Cherchons maintenant à déterminer la fonction q par une série descendante. Pour cela substituons $A x^\alpha$, $\alpha A x^{\alpha-1}$ et $\alpha(\alpha-1) A x^{\alpha-2}$, au lieu de q, dq et d^2q; l'équation qui doit donner cette fonction se changera en $\alpha(\alpha-1) A x^{\alpha-2} + (2b\alpha + mb) A x^{\alpha+m-1} = 0$, et égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de x; c'est-à-dire, de $x^{\alpha+m-1}$ (n°. 121), on aura $2\alpha + m = 0$, ou $m = -2\alpha$, et le coefficient A demeurera arbitraire. En continuant, pour trouver la loi que suivent les exposans de x, on s'assurera que q peut être exprimé par une série de la forme

$$A x^\alpha + B x^{3\alpha-1} + C x^{5\alpha-2} + D x^{7\alpha-3} + \text{etc.}$$

prenant ensuite les expressions de dq et de d^2q, et les substituant dans l'équation $d^2q + 2b x^m dq dx + m b x^{m-1} q dx^2 = 0$, après y avoir mis au lieu de m, sa valeur -2α, on trouvera, par la détermination des coefficiens,

$$B = -\frac{\alpha(\alpha-1)A}{2(2\alpha-1)b}, \qquad C = -\frac{(3\alpha-1)(3\alpha-2)B}{4(2\alpha-1)b}$$

$$D = -\frac{(5\alpha-2)(5\alpha-3)C}{6(2\alpha-1)b}, \quad E = -\frac{(7\alpha-3)(7\alpha-4)D}{8(2\alpha-1)b}, \text{ etc.}$$

La série qui résulte de ces valeurs s'arrêtera, si $(2i \pm 1)\alpha - i = 0$; c'est-à-dire, si $\alpha = \frac{i}{2i \pm 1}$, ou $m = \frac{-2i}{2i \pm 1}$, et $n = 2m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$, comme ci-dessus. Elle ne donnera qu'une valeur particulière de q, et ne conduira par conséquent qu'à une semblable valeur pour y; mais comme l'équation proposée, $d^2y - b^2 x^{2m} y dx^2 = 0$, reste la même, quel que soit le signe que l'on donne à b, il s'ensuit qu'on peut supposer successivement b positif et b négatif, dans l'expression de y, ainsi que dans celle de q. Or cette dernière étant

$$Ax^a - \frac{a(a-1)}{2(2a-1)b}Ax^{3a-1} + \frac{a(a-1)(3a-1)(3a-2)}{8(2a-1)^2b^2}Ax^{5a-2}$$
$$- \frac{a(a-1)(3a-1)(3a-2)(5a-2)(5a-3)}{48(2a-1)^3b^3}Ax^{7a-3} + \text{etc.}$$

si on désigne, par AU la somme des termes qui contiennent les puissances paires de b, et qui sont tous positifs, par AbV celle des termes affectés des puissances impaires, il viendra $q = A(U+bV)$, lorsqu'on prendra b positif et $q = A_1(U-bV)$, lorsqu'on le supposera négatif; car il est aisé de voir que la quantité V ne doit renfermer que des puissances paires de b et ne peut changer de signe.

Mettant ces valeurs dans l'équation $y = e^{\frac{bx^{m+1}}{m+1}}q$, en affectant successivement b du signe $+$ et du signe $-$, on obtiendra deux intégrales particulières de la proposée, dont la somme donnera l'intégrale complète

$$y = e^{\frac{bx^{m+1}}{m+1}}A(U+bV) + e^{-\frac{bx^{m+1}}{m+1}}A_1(U-bV), \text{ ou bien}$$
$$y = U\left(Ae^{\frac{bx^{m+1}}{m+1}} + A_1e^{-\frac{bx^{m+1}}{m+1}}\right) + bV\left(Ae^{\frac{bx^{m+1}}{m+1}} - A_1e^{-\frac{bx^{m+1}}{m+1}}\right).$$

Lorsque a est positif, b devenant imaginaire, il faut transformer le second membre de l'équation ci-dessus en fonction de sinus et de cosinus, par le moyen des formules du n°. 40 (*Int.*); mettant donc $\beta\sqrt{-1}$, à la place de b, on trouvera pour ce cas

$$y = U\left(C\cos\frac{\beta x^{m+1}}{m+1} + C_1\sin\frac{\beta x^{m+1}}{m+1}\right) + \beta V\left(C_1\cos\frac{\beta x^{m+1}}{m+1} - C\sin\frac{\beta x^{m+1}}{m+1}\right),$$

en faisant $A+A_1 = C$, $(A-A_1)\sqrt{-1} = C_1$.

Pour appliquer ces formules, choisissons un exemple dans lequel la série qui exprime q s'arrête; en prenant $i=3$, nous aurons $a = \frac{3}{6\pm1} = \frac{3}{7}$ ou $\frac{3}{5}$, $m = -\frac{6}{7}$ ou $-\frac{6}{5}$, $n = -\frac{12}{7}$ ou $-\frac{12}{5}$. Faisons d'abord usage de la première valeur de chacun de ces exposans; l'équation proposée sera $d^2y + ax^{-\frac{12}{7}}y\,dx^2 = 0$, et nous

trouverons $q = Ax^{\frac{3}{7}} - \frac{4\cdot3}{2\cdot7b}Ax^{\frac{8}{7}} + \frac{5\cdot3}{7\cdot7b^2}Ax^{\frac{1}{7}} - \frac{5\cdot3\cdot1}{7\cdot7\cdot7b^3}A$,

ce qui donnera

$$U = x^{\frac{3}{7}} + \frac{5\cdot3}{7\cdot7b^2}x^{\frac{1}{7}}, \quad bV = -\frac{4\cdot3}{2\cdot7b}x^{\frac{8}{7}} - \frac{5\cdot3\cdot1}{7\cdot7\cdot7b^3},$$

ou

$$V = -\frac{4\cdot3}{2\cdot7b^2}x^{\frac{8}{7}} - \frac{5\cdot3\cdot1}{7\cdot7\cdot7b^4},$$

valeurs qu'il faudra substituer dans la première expression de y, si a est négatif, parce qu'alors b est réel, et dans la seconde, si a est positif: on aura pour le premier cas

$$y = U(Ae^{7bx^{\frac{1}{7}}} + A_1e^{-7bx^{\frac{1}{7}}}) + bV(Ae^{7bx^{\frac{1}{7}}} - A_1e^{-7bx^{\frac{1}{7}}}),$$

et pour le second

$$y = U(C\cos 7\beta x^{\frac{1}{7}} + C_1\sin 7\beta x^{\frac{1}{7}}) + \beta V(C_1\cos 7\beta x^{\frac{1}{7}} - C\sin 7\beta x^{\frac{1}{7}}).$$

En employant la deuxième valeur des exposans α, m et n, nous aurons $d^2y + ax^{-\frac{12}{7}}y\,dx^2 = 0$,

$$q = Ax^{\frac{3}{7}} + \frac{3}{5b}Ax^{\frac{4}{7}} + \frac{3\cdot1}{5\cdot5b^2}Ax,$$

$$U = x^{\frac{3}{7}} + \frac{3\cdot1}{5\cdot5b^2}x, \quad V = \frac{3}{5b^2}x^{\frac{4}{7}},$$

et de là, on conclura, comme ci-dessus, la valeur de y.

643. Par le moyen des mêmes formules on trouvera l'intégrale de l'équation de Riccati, dans tous les cas où elle peut s'obtenir, puisque l'on passe de cette équation, représentée par $dt + t^2dx = b^2x^ndx$, à l'équation $d^2y + b^2x^ny\,dx^2 = 0$, en faisant $t = \frac{dy}{y\,dx}$. Si l'on met dans cette expression les valeurs générales de y et de dy, trouvées dans le n°. précéd. on aura

$$t = \frac{d.\left[U(Ae^{\frac{bx^{m+1}}{m+1}} + A_1e^{-\frac{bx^{m+1}}{m+1}}) + bV(Ae^{\frac{bx^{m+1}}{m+1}} - A_1e^{-\frac{bx^{m+1}}{m+1}})\right]}{\left[U(Ae^{\frac{bx^{m+1}}{m+1}} + A_1e^{-\frac{bx^{m+1}}{m+1}}) + bV(Ae^{\frac{b_1x^{m+1}}{m+1}} - A_1e^{-\frac{b_1x^{m+1}}{m+1}})\right]dx}$$

Quoique cette expression paroisse contenir deux constantes arbi-

traires, elle n'en renferme qu'une implicitement ; car, après avoir effectué la différentiation indiquée, on pourra diviser les deux termes de la fraction résultante par A, et il ne restera plus d'arbitraire que la seule quantité $\frac{A'}{A}$. Si b^2 étoit négatif, il faudroit se servir de la valeur de y exprimée en fonction de sinus et de cosinus.

644. Occupons-nous encore de l'équation

$$x^2(a+bx^n)\,d^2y+x(c+ex^n)\,dx\,dy+(f+gx^n)\,y\,dx^2=0.$$

On satisfait à cette équation en supposant

$$y=Ax^\alpha+Bx^{\alpha+n}+Cx^{\alpha+2n}+Dx^{\alpha+3n}+\text{etc.}$$

prenant les valeurs de dy et de d^2y, et ordonnant, par rapport aux puissances de x, le résultat de la substitution, on trouvera

$$\left.\begin{array}{rrrr}
\alpha(\alpha-1)Aax^\alpha+&(\alpha+n)(\alpha+n-1)Bax^{\alpha+n}+&(\alpha+2n)(\alpha+2n-1)Cdx^{\alpha+2n}+&\text{etc.}\\
+\quad\alpha Acx^\alpha+&(\alpha+n)Bcx^{\alpha+n}+&(\alpha+2n)Ccx^{\alpha+2n}+&\text{etc.}\\
+\quad Afx^\alpha+&Bfx^{\alpha+n}+&Cfx^{\alpha+2n}+&\text{etc.}\\
+&\alpha(\alpha-1)Abx^{\alpha+n}+&(\alpha+n)(\alpha+n-1)Bbx^{\alpha+2n}+&\text{etc.}\\
+&\alpha Aex^{\alpha+n}+&(\alpha+n)Bex^{\alpha+2n}+&\text{etc.}\\
+&Agx^{\alpha+n}+&Bgx^{\alpha+2n}+&\text{etc.}
\end{array}\right\}=0$$

le coefficient A restera arbitraire ; car il disparoît de l'équation que fournit le premier terme et qui se réduit à $\alpha(\alpha-1)a+\alpha c+f=0$.

Les autres coefficiens sont déterminés par les équations

$$[(\alpha+n)(\alpha+n-1)a+(\alpha+n)c+f]B+[\alpha(\alpha-1)b+\alpha e+g]A=0$$

$$[(\alpha+2n)(\alpha+2n-1)a+(\alpha+2n)c+f]C+[(\alpha+n)(\alpha+n-1)b+(\alpha+n)e+g]B=0$$

etc.

L'exposant α, donné par l'équation $\alpha(\alpha-1)a+\alpha c+f=0$, ayant toujours deux valeurs, excepté lorsque $a=0$, on obtiendra, comme dans le n°. 637, deux séries différentes ; chacune d'elles contiendra une constante arbitraire, et leur somme sera la valeur complète de y.

Il est facile de voir que ces séries s'arrêteront si l'on a

$$(\alpha+in)(\alpha+in-1)b+(\alpha+in)e+e=0.$$

La série qui exprime y peut être prise descendante, et en supposant $y=Ax^\alpha+Bx^{\alpha-n}+Cx^{\alpha-2n}+Dx^{\alpha-3n}+$ etc. on trouvera par la même opération que ci-dessus, $\alpha(\alpha-1)b+\alpha e+g=0$,

$$[(\alpha-n)(\alpha-n-1)b+(\alpha-n)e+g]B+[\alpha(\alpha-1)a+\alpha c+f]A=0,$$

$$[(\alpha-2n)(\alpha-2n-1)b+(\alpha-2n)e+g]C+[(\alpha-n)(\alpha-n-1)a+(\alpha-n)c+f]B=0,$$

etc.

et on aura pour ce cas les mêmes conclusions que pour le précédent.

Il suit des équations $\alpha(\alpha-1)a+\alpha c+f=0$, et $(\alpha+in)(\alpha+in-1)b+(\alpha+in)e+g=0$, que les premières séries s'arrêteront, et que l'équation proposée s'intégrera complétement, si

$f=-\alpha(\alpha-1)a-\alpha c$, $g=-(\alpha+in)(\alpha+in-1)b-(\alpha+in)e$.

Résolvant la première de ces équations par rapport à α, et la seconde par rapport à la quantité $\alpha+in$, considérée comme une inconnue, il viendra

$$\alpha=\frac{a-c\pm\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}, \qquad \alpha+in=\frac{b-e\pm\sqrt{(b-e)^2-4bg}}{2b},$$

expressions dont la différence doit être divisible par n, puisque i désigne un nombre entier. On remarquera que pour les séries descendantes, les valeurs de α sont les mêmes que celle de $\alpha+in$ dans les séries ascendantes, *et vice versâ*.

Lorsque la valeur de α sera imaginaire et de la forme $\beta+\gamma\sqrt{-1}$, on substituera à la place de $x^{\alpha+in}=x^{\beta+in\pm\gamma\sqrt{-1}}$, l'expression $x^{\beta+in}(\cos\gamma l x\pm\sqrt{-1}\sin\gamma l x)$ (n°. 186), et les imaginaires disparoîtront.

Si α n'a qu'une valeur, ou si ses deux valeurs deviennent égales, les deux séries rentreront l'une dans l'autre, et ne donneront plus qu'une valeur particulière de y. Quand la différence des deux valeurs de α sera divisible par n, alors une des racines étant α', l'autre prendra la forme $\alpha'+in$, rendra par conséquent nulle la quantité $(\alpha'+in)(\alpha'+in-1)a+(\alpha'+in)c+f$, et infini, l'un des coefficiens de la série relative à la valeur α': on ne pourra donc employer que l'autre série; mais un artifice analytique, semblable à celui dont on s'est servi n°. 640, pour l'équation $d^2y+ax^ny\,dx^2=0$, leve ces difficultés. En supposant $y=p+q\,lx$, l'équation proposée devient

$$\left.\begin{aligned} &x^2(a+bx^n)d^2p+2x(a+bx^n)dx\,dq-(a+bx^n)q\,dx^2\\ &\quad+x(c+ex^n)dx\,dp+(c+ex^n)q\,dx^2\\ &\quad+(f+gx^n)p\,dx^2\\ &+[x^2(a+bx^n)d^2q+x(c+ex^n)dx\,dq+(f+gx^n)q\,dx^2]lx \end{aligned}\right\}=0.$$

On

On égalera séparément à zéro la partie multipliée par $1x$, et comme elle est semblable à l'équation proposée, on prendra pour q la série dont aucun terme ne devient infini, et on aura ainsi

$$q = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+n} + Cx^{\alpha+2n} + \text{etc.}$$

il restera pour déterminer p, l'équation

$$\left.\begin{aligned} x^2(a+bx^n)\,d^2p + x(c+ex^n)\,dx\,dp + (f+gx^2)p\,dx^2 \\ +2x(a+bx^n)\,dx\,dq - (a+bx^n)q\,dx^2 \\ +(c+ex^n)q\,dx^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

On représentera p par la série $A_1x^{\alpha'} + B_1x^{\alpha'+n} + C_1x^{\alpha'+2n} + \text{etc.}$ dans laquelle il faudra déterminer l'exposant α' du premier terme, de manière qu'il n'en résulte aucune absurdité.

Si l'on suppose d'abord $\alpha' = \alpha$, et que l'on substitue, au lieu de q, dq, p, dp et d^2p, leur valeur dans l'équation rapportée ci-dessus, le premier terme du résultat sera

$$[(\alpha(\alpha-1)a + \alpha c + f)A_1 + ((2\alpha-1)a + c)A]x^{\alpha},$$

et en l'égalant à zéro, on trouvera $(2\alpha-1)a + c = 0$, puisqu'on a d'ailleurs $\alpha(\alpha-1)a + \alpha c + f = 0$; l'hypothèse actuelle n'est donc admissible que quand $\alpha = \frac{a-c}{2a}$, et ce cas a lieu lorsque les deux racines de l'équation $\alpha(\alpha-1)a + \alpha c + f = 0$ sont égales.

Quand l'équation $(2\alpha-1)a + c = 0$ ne peut s'accorder avec la précédente, il faut prendre α' moindre que α, et par conséquent de la forme $\alpha - in$, i étant un nombre entier; on aura donc

$$p = A_1x^{\alpha-in} + B_1x^{\alpha-(i-1)n}, \ldots\ldots + I_1x^{\alpha} + L_1x^{\alpha+n} + \text{etc.}$$

mettant cette série, ainsi que celles qui expriment dp et d^2p, dans l'équation d'où dépend p, il viendra pour premier terme

$$[(\alpha-in)(\alpha-in-1)a + (\alpha-in)c + f]x^{\alpha-in},$$

et en égalant son coefficient à zéro, on obtiendra l'équation

$$(\alpha-in)(\alpha-in-1)a + (\alpha-in)c + f = 0,$$

qui doit avoir lieu en même tems que $\alpha(\alpha-1)a + \alpha c + f = 0$; or c'est ce qui ne peut arriver à moins que $\alpha - in$ ne soit une des racines de cette dernière, racines qui ne pourront alors différer entr'elles que d'une quantité divisible par n. La détermination des coefficiens ultérieurs n'entraîne aucune difficulté, ainsi qu'on en jugera par l'exemple suivant.

645. Soit l'équation

$x^3(1+bx^3)d^2y+x(-5+ex^3)dxdy+(5+gx^3)ydx^2=0$;

en la comparant à la formule générale, on trouve $a=1$, $c=-5$, $f=5$, $n=2$, d'où il suit $\alpha(\alpha-1)-5\alpha+5=0$, et $\alpha=1$, $\alpha=5$. La différence de ces deux valeurs étant divisible par 2, on aura $\alpha'=\alpha-in=1$; on posera donc

$$q=Ax^5+Bx^7+Cx^9+Dx^{11}+\text{etc.}$$
$$p=A_1x+B_1x^3+C_1x^5+D_1x^7+\text{etc.}$$

substituant ces séries et leurs différentielles dans les équations

$$x^2(1+bx^3)d^2q+x(-5+ex^3)dqdx+(5+gx^3)qdx^2=0$$
$$\left.\begin{array}{r} x^2(1+bx^3)d^2p+x(-5+ex^3)dpdx+(5+gx^3)pdx^2 \\ 2x(1+bx^3)dqdx-(1+bx^3)qdx^2 \\ +(-5+ex^3)qdx^2 \end{array}\right\}=0;$$

on trouvera par la première

$$\left.\begin{array}{r|l|l|l|l} 5.4A & x^5+7.6B & x^7+9.8C & x^9+11.10D & x^{11}+\text{etc.} \\ -5.5A & -5.7B & -5.9C & -5.11D & \\ +5A & +5B & +5C & +5D & \\ & +5.4Ab & +7.6Bb & +9.8Cb & \\ & +5Ae & +7Be & +9Ce & \\ & +Ag & +Bg & +Cg & \end{array}\right\}=0;$$

ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l} 12B+(20b+5e+g)A=0 \\ 32C+(42b+7e+g)B=0 \\ 60D+(72b+9e+g)C=0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2.6\,B+(4.5\,b+5e+g)A=0 \\ 4.8\,C+(6.7\,b+7e+g)B=0 \\ 6.10D+(8.9\,b+9e+g)C=0 \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

et par la seconde

$$\left.\begin{array}{r|l|l|l|l} & x+2.3B_1 & x^3+4.5C_1 & x^5+6.7D_1 & x^7+8.9E_1 & x^9+\text{etc.} \\ -5A_1 & -5.3B_1 & -5.5C_1 & -5.7D_1 & -5.9E_1 & \\ +5A_1 & +5B_1 & +5C_1 & +5D_1 & +5E_1 & \\ & & +2.3B_1b & +4.5C_1b & +6.7D_1b & \\ & +A_1e & +3B_1e & +5C_1e & +7D_1e & \\ & +A_1g & +B_1g & +C_1g & +D_1g & \\ & & +2.5A & +2.7B & +2.9C & \\ & & -6A & -6B & -6C & \\ & & & +2.5Ab & +2.7Bb & \\ & & & -Ab & -Bb & \\ & & & +Ae & +Be & \end{array}\right\}=0;$$

d'où $-4B_1+(e+g)A_1=0$

$$0.\ C_1+(2.3b+3e+g)B_1+4A=0$$
$$2.6D_1+(4.5b+5e+g)C_1+8B+(9b+e)A=0$$
$$4.8E_1+(6.7b+7e+g)D_1+12C+(13b+e)B=0,$$

etc.

On voit par ces équations et les précédentes que les coefficiens A et C_1 restent indéterminés; ayant trouvé les valeurs des autres coefficiens, on substituera celles de p et de q dans $y=p+q\,lx$.

L'expression de y devient algébrique dans plusieurs cas: 1°. lorsque $e+g=0$, parce qu'alors A_1 reste indéterminé, et $B_1=0$, et qu'il suit de là $A=0$, $B=0$, $C=0$, etc. ou $q=0$; on a seulement $y=p$.

Les coefficiens de la série qui exprime p sont donnés par les équations $2.6D_1+4C_1(5b+e)=0$, $4.8E_1+6D_1(7b+e)=0$, etc. Cette série s'arrêtera si $(2i+5)b+e=0$: les constantes arbitraires sont ici A_1 et C_1.

2°. La supposition de $2.3b+3e+g=0$ donne $A=0$, etc. $q=0$; et l'expression de y est encore algébrique.

Quand on a $4.5b+5e+g=0$, il en résulte $B=0$, $C=0$, etc. $q=Ax^6$, $B_1+A_1(5b+e)=0$, $-B_1(14b+2e)+4A=0$
$2.6D_1+A(9b+e)=0$, $4.8E_1+2D_1(11b+e)=0$, $6.10F_1+4E_1(13b+e)=0$ etc.

$$y=Ax^5lx+A_1x+B_1x^3+C_1x^5+D_1x^7+E_1x^9+\text{ etc.}$$

série dans laquelle les coefficiens A et C_1 sont arbitraires et qui s'arrêtera toutes les fois que $(2i+5)b+e=0$.

Si les racines de l'équation $\alpha(\alpha-1)a+\alpha c+f=0$ étoient imaginaires, il faudroit recourir aux sinus et cosinus (n°. précéd.); on pourroit aussi supposer immédiatement $y=p\cos k\,lx+q\sin k\,lx$, et après la substitution des valeurs de y, dy et d^2y, dans l'équation proposée, on égaleroit séparément à zéro les termes multipliés par $\cos k\,lx$ et par $\sin k\,lx$. Nous n'entrerons pas dans le détail de ce calcul, facile à effectuer, d'après ce qui précède, et dont l'application ne peut être que très-rare, parce que la méthode exposée ci-dessus n'a guère de succès que sur des équations semblables à celles que nous avons prises pour exemple, ou qu'on peut y ramener par les transformations (n°. 622); elle ne donne pour les autres que des valeurs particulières représentées par des séries peu convergentes, et dont la loi est souvent difficile à saisir. On pourroit introduire ici les fractions

continues, par un procédé analogue à celui du n°. 598 ; mais le défaut de méthode générale pour intégrer les équations différentielles fait que l'on n'a considéré que celles de ces équations qui se présentent dans les recherches Physico-Mathématiques et qui sont du premier degré, ou qui peuvent s'y réduire : de là naissent les méthodes d'approximation les plus usitées. Nous les ferons connoître plus bas, après avoir parlé des équations du premier degré pour un ordre quelconque.

De l'intégration des équations différentielles des ordres supérieurs au second.

646. La difficulté d'intégrer les équations différentielles devient d'autant plus grande, que ces équations sont d'un ordre plus élevé ; au delà du second on ne réussit que sur un petit nombre de classes d'équations. Nous ne nous occuperons point ici des équations comprises dans la formule $d^n y = X dx^n$, déjà traitée n°. 487. L'équation $d^n y = Y dx^n$, dans laquelle Y désigne une fonction de y, ne peut en général s'abaisser qu'à l'ordre inférieur. Pour y parvenir on la changera par les formules du n°. 77, dans une autre où la différentielle dy soit prise pour constante, et on fera ensuite

$$dx = p'dy,\ d^2x = dp'dy,\ \ldots\ldots d^n x = d^{n-1}p'dy.$$

Soit f une fonction quelconque ; l'intégration de toutes les équations comprises dans la série suivante

$$\frac{dy}{dx} = f(y),\quad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right),\quad \frac{d^3y}{dx^3} = f\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

ne dépendra que de celle des fonctions d'une seule variable. Cela est évident pour la première qui donne sur le champ $dx = \frac{dy}{f(y)}$; et pour traiter les autres, on fera

$$\frac{dy}{dx} = p,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = q,\quad \frac{d^3y}{dx^3} = r,\quad \frac{d^4y}{dx^4} = s,\ \text{etc.}$$

elles deviendront par ce moyen $q = f(p)$, $r = f(q)$, $s = f(r)$ etc. mais comme on aura $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$, $dr = s\,dx$, etc. on obtiendra successivement

$$dx = \frac{dp}{q} = \frac{dp}{f(p)},\quad dx = \frac{dq}{r} = \frac{dq}{f(q)},\quad dx = \frac{dr}{s} = \frac{dr}{f(r)},\ \text{etc.}$$

d'où on tirera

$$x = \int \frac{dp}{f(p)};\quad x = \int \frac{dq}{f(q)};\quad x = \int \frac{dr}{f(r)};\ \text{etc.}$$

ensuite à cause de $y=\int p dx$, $y=\int dx \int q dx$, $y=\int dx \int dx \int r dx$, etc. il viendra

$$y=\int \frac{p dp}{f(p)};\quad y=\int \frac{dq}{f(q)} \int \frac{q dq}{f(q)};\quad y=\int \frac{dr}{f(r)} \int \frac{dr}{f(r)} \int \frac{r dr}{f(r)}, \text{ etc.}$$

Les équations $\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$, $\frac{d^3y}{dx^3}=f\left(\frac{dy}{dx}\right)$,... $\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$ s'intégrent aussi; la première a déjà été traitée n°. 611. En conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, les autres deviennent

$$q=f(y),\qquad r=f(p),\qquad s=f(q), \text{ etc.}$$

multipliant ensuite les deux membres de la première par $p dx$, ceux de la seconde par $q dx$, ceux de la troisième par $r dx$, et observant que $p dx=dy$, $q dx=dp$, $r dx=dq$, $s dx=dr$, etc. il vient

$$p dp=f(y) dy,\quad q dq=f(p) dp,\quad r dr=f(q) dq, \text{ etc.}$$

ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}p^2=\int f(y) dy;\quad \tfrac{1}{2}q^2=\int f(p) dp;\quad \tfrac{1}{2}r^2=\int f(q) dq, \text{ etc.}$$

Mais comme $dx=\frac{dy}{p}=\frac{dp}{q}=\frac{dq}{r}=\frac{dr}{s}$, etc. on aura

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y) dy}},\quad dx=\frac{dp}{\sqrt{2\int f(p) dp}},\quad dx=\frac{dq}{\sqrt{2\int f(q) dq}}, \text{ etc.}$$

$$x=\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y) dy}},\quad x=\int \frac{dp}{\sqrt{2\int f(p) dp}},\quad x=\int \frac{dq}{\sqrt{2\int f(q) dq}}, \text{ etc.}$$

et d'après les formules employées plus haut

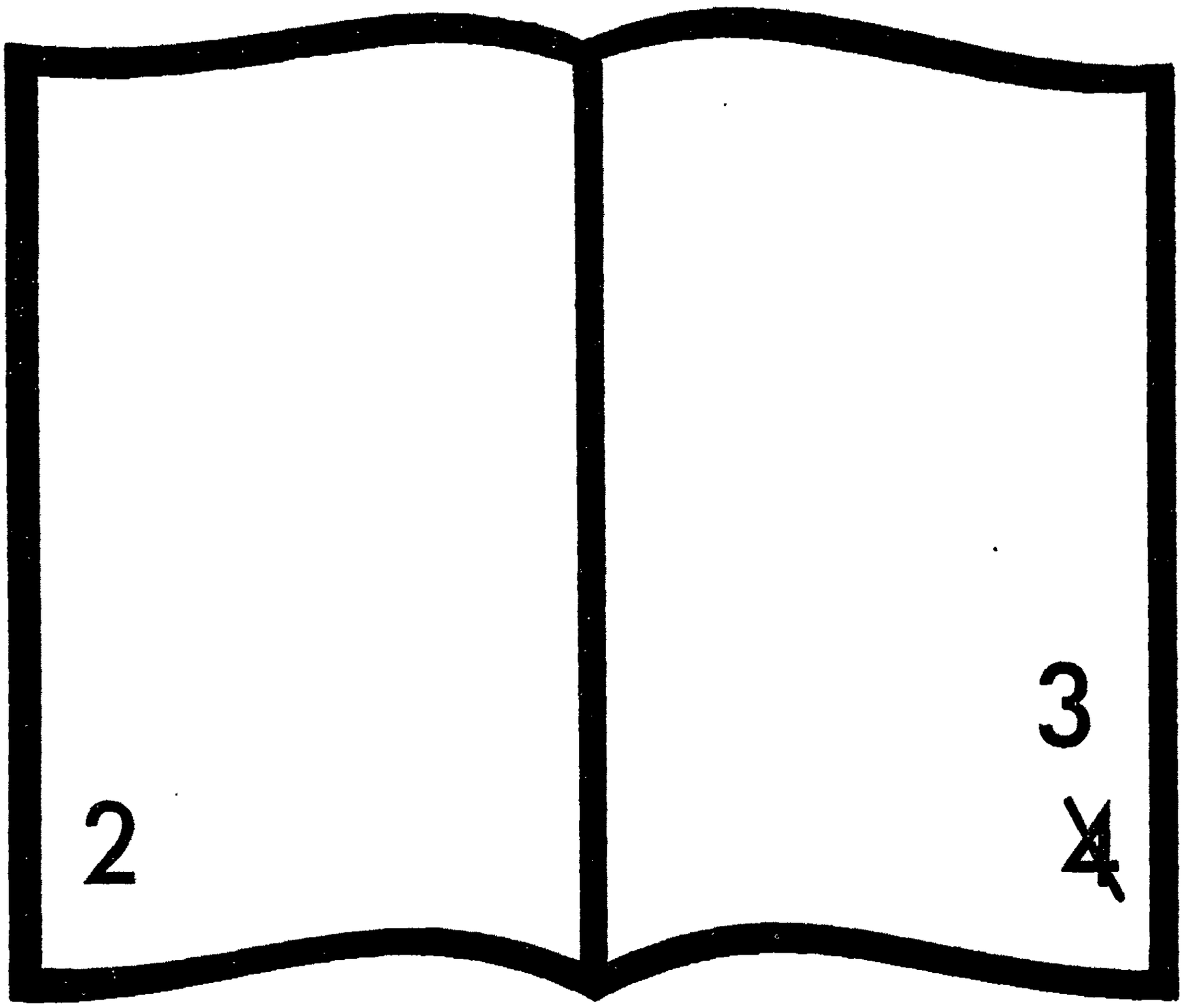
$$y=\int \frac{p dp}{\sqrt{2\int f(p) dp}},\quad y=\int \frac{dq}{\sqrt{2\int f(q) dq}} \int \frac{q dq}{\sqrt{2\int f(q) dq}}, \text{ etc.}$$

Il est facile de voir que les mêmes transformations réduiront à l'ordre $n-1$, toute équation de l'ordre n dans laquelle il n'entrera que les différentielles des deux variables, avec l'une d'elles seulement.

647. Les équations du premier degré offrent dans tous les ordres des propriétés analogues à celles que nous leur avons trouvées pour les deux premiers (n°s. 547, 615): 1°. l'intégration de l'équation

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+Uy=V,$$

ou $d^ny+Pd^{n-1}y dx+Qd^{n-2}y dx^2+\ldots\ldots+Uy dx^n=V dx^n$, dans laquelle P, Q,.....U et V désignent des fonctions de x, et qui ne renferme que les premières puissances de y et de ses


2
3
4

différentielles, ne dépend que de celle de l'équation

$$d^n\zeta + P d^{n-1}\zeta\, dx + Q d^{n-2}\zeta\, dx^2 \ldots\ldots + U\zeta\, dx^n = 0.$$

2°. Il suffit de connoître un nombre n de valeurs particulières de ζ; pour obtenir sur le champ l'expression générale de cette fonction, en sorte que si on désigne par $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots\ldots \zeta_n$, ces valeurs, on aura

$$\zeta = C_1\zeta_1 + C_2\zeta_2 + C_3\zeta_3 \ldots\ldots + C_n\zeta_n,$$

$C_1, C_2, \ldots\ldots C_n$, étant des constantes arbitraires.

Cette dernière proposition est facile à prouver; car il est évident que chacune des équations

$$C_1(d^n\zeta_1 + Pd^{n-1}\zeta_1 dx + Qd^{n-2}\zeta_1 dx^2 \ldots\ldots + U\zeta_1 dx^n) = 0$$
$$C_2(d^n\zeta_2 + Pd^{n-1}\zeta_2 dx + Qd^{n-2}\zeta_2 dx^2 \ldots\ldots + U\zeta_2 dx^n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_n(d^n\zeta_n + Pd^{n-1}\zeta_n dx + Qd^{n-2}\zeta_n dx^2 \ldots\ldots + U\zeta_n dx^n) = 0;$$

étant identique, par l'hypothèse, leur somme donnera une équation identique, qui sera précisément celle qu'on obtiendroit en mettant dans la proposée, à la place de ζ et de ses différentielles, les valeurs qui résultent de l'expression générale de ζ.

La démonstration de la première proposition n'offre guères plus de difficulté. Supposons que la valeur de y soit de la même forme que celle de ζ, mais que les quantités $C_1, C_2, C_3, \ldots$ au lieu d'être constantes comme ci-dessus, soient des fonctions de x, et pour fixer les idées prenons l'équation proposée du troisième ordre seulement; nous aurons $y = C_1\zeta_1 + C_2\zeta_2 + C_3\zeta_3$, expression dans laquelle il faudra déterminer C_1, C_2 et C_3, de manière qu'elle satisfasse à

$$d^3y + P d^2y\, dx + Q dy\, dx^2 + U y\, dx^3 = V dx^3.$$

Formons successivement les valeurs de dy, d^2y et d^3y, en traitant C_1, C_2, C_3, comme des variables; nous trouverons d'abord

$$dy = C_1 d\zeta_1 + C_2 d\zeta_2 + C_3 d\zeta_3 + \zeta_1 dC_1 + \zeta_2 dC_2 + \zeta_3 dC_3;$$

mais comme nous avons trois quantités à déterminer, et que la question proposée ne nous offre qu'une condition, nous en pouvons choisir deux autres à notre gré: nous ferons en conséquence $\zeta_1 dC_1 + \zeta_2 dC_2 + \zeta_3 dC_3 = 0$, ce qui nous donnera $dy = C_1 d\zeta_1 + C_2 d\zeta_2 + C_3 d\zeta_3$. En différentiant cette valeur il viendra

$$d^2y = C_1 d^2\zeta_1 + C_2 d^2\zeta_2 + C_3 d^2\zeta_3 + d\zeta_1 dC_1 + d\zeta_2 dC_2 + d\zeta_3 dC_3;$$

posant encore

$$d\zeta_1 dC_1 + d\zeta_2 dC_2 + d\zeta_3 dC_3 = 0,$$

il restera $d^3y = C_1 d^3\zeta_1 + C_2 d^3\zeta_2 + C_3 d^3\zeta_3$, d'où nous tirerons

$$d^3y = C_1 d^3\zeta_1 + C_2 d^3\zeta_2 + C_3 d^3\zeta_3 + d^2\zeta_1 dC_1 + d^2\zeta_2 dC_2 + d^2\zeta_3 dC_3.$$

Par la substitution des valeurs de y, dy, d^2y et d^3y, l'équation proposée deviendra

$$\left.\begin{array}{l} C_1(d^3\zeta_1 + P d^2\zeta_1 dx + Q d\zeta_1 dx^2 + U\zeta_1 dx^3) \\ + C_2(d^3\zeta_2 + P d^2\zeta_2 dx + Q d\zeta_2 dx^2 + U\zeta_2 dx^3) \\ + C_3(d^3\zeta_3 + P d^2\zeta_3 dx + Q d\zeta_3 dx^2 + U\zeta_3 dx^3) \\ + d^2\zeta_1 dC_1 + d^2\zeta_2 dC_2 + d^2\zeta_3 dC_3 \end{array}\right\} = V dx^3,$$

et se réduira à $d^2\zeta_1 dC_1 + d^2\zeta_2 dC_2 + d^2\zeta_3 dC_3 = V dx^3$, puisque les fonctions ζ_1, ζ_2 et ζ_3 satisfont à l'équation

$$d^2\zeta + P d^2\zeta dx + Q d\zeta dx^2 + U\zeta dx^3 = 0.$$

Nous aurons donc entre les différentielles dC_1, dC_2 et dC_3 les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_1 dC_1 + \zeta_2 dC_2 + \zeta_3 dC_3 = 0 \\ d\zeta_1 dC_1 + d\zeta_2 dC_2 + d\zeta_3 dC_3 = 0 \\ d^2\zeta_1 dC_1 + d^2\zeta_2 dC_2 + d^2\zeta_3 dC_3 = V dx^3, \end{array}\right\}$$

dont nous tirerons les valeurs de chacune de ces différentielles exprimées en x et dx, lorsque celles de ζ_1, ζ_2, ζ_3, etc. seront connues. On en déduira par l'élimination des résultats de la forme

$$dC_1 = X_1 dx, \qquad dC_2 = X_2 dx, \qquad dC_3 = X_3 dx;$$

d'où $C_1 = \int X_1 dx + c_1$, $C_2 = \int X_2 dx + c_2$, $C_3 = \int X_3 dx + c_3$;

et par conséquent

$$y = \zeta_1(\int X_1 dx + c_1) + \zeta_2(\int X_2 dx + c_2) + \zeta_3(\int X_3 dx + c_3)$$

sera l'intégrale complète de l'équation proposée.

Si l'on ne connoissoit que deux valeurs particulières de ζ, la proposée ne pourroit s'intégrer qu'avec le secours d'une équation du second ordre. En effet, on auroit alors

$y = C_1\zeta_1 + C_2\zeta_2$, $dy = C_1 d\zeta_1 + C_2 d\zeta_2$, en faisant $\zeta_1 dC_1 + \zeta_2 dC_2 = 0$; mais comme on ne pourroit disposer que d'une seule des quantités C_1 et C_2, il faudroit employer le développement complet de d^2y, qui seroit $d^2y = C_1 d^2\zeta_1 + C_2 d^2\zeta_2 + d\zeta_1 dC_1 + d\zeta_2 dC_2$, ce qui donneroit

$$d^3y = C_1 d^3\zeta_1 + C_2 d^3\zeta_2 + 2d^2\zeta_1 dC_1 + 2d^2\zeta_2 dC_2 + d\zeta_1 d^2C_1 + d\zeta_2 d^2C_2:$$

substituant dans la proposée, et réduisant de la même manière que ci-dessus, on obtiendroit

$$\left.\begin{array}{l} d\zeta_1 d^2C_1 + d\zeta_2 d^2C_2 + 2d^2\zeta_1 dC_1 \quad + 2d^2\zeta_2 dC_2 \\ \qquad + P d\zeta_1 dC_1 dx + P d\zeta_2 dC_2 dx \end{array}\right\} = V dx^3;$$

équation de laquelle on chassera dC_1 et d^2C_1, en tirant leurs valeurs de l'équation $\zeta_1 dC_1 + \zeta_2 dC_2 = 0$, et de sa différentielle ; la résultante ne contenant que d^2C_1, dC_1 et des fonctions de x, se ramenera au premier ordre (n°. 613).

Enfin lorsqu'on n'aura qu'une seule valeur de ζ, on tombera sur une équation auxiliaire du troisième ordre, réductible au second ; c'est ce dont il est facile de se convaincre, en mettant dans la proposée

$$C_1\zeta_1, \quad C_1 d\zeta_1 + \zeta_1 dC_1, \quad C_1 d^2\zeta_1 + 2 d\zeta_1 dC_1 + \zeta_1 d^2C_1$$
$$C_1 d^3\zeta_1 + 3 d^2\zeta_1 dC_1 + 3 d\zeta_1 d^2C_1 + \zeta_1 d^3C_1,$$

au lieu de y, dy d^2y et d^3y : l'équation produite par ces substitutions pourra se réduire à

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_1 d^3C_1 + 3 d\zeta_1 d^2C_1 + 3 d^2\zeta_1 dC_1 \\ &+ P\zeta_1 d^2C_1 dx + 2P d\zeta_1 dC_1 dx \\ &+ Q\zeta_1 dC_1 dx^2 \end{aligned}\right\} = V dx^3.$$

Si l'on suppose $V = 0$, l'équation en y devient la même que celle qui doit donner ζ, et par conséquent les calculs précédens feront voir comment avec deux, ou seulement une valeur particulière de cette fonction, on peut parvenir à son expression générale. La méthode que nous avons appliquée à l'équation du premier degré et du troisième ordre, convenant aux équations du même degré dans tous les ordres, il doit exister pour chacun d'eux des propositions analogues à celles que nous venons de prouver. Nous conclurons donc de ce qui précède, que *si l'on a un nombre* n *de valeurs particulières de* z, *on en déduira immédiatement l'expression générale de cette fonction et que l'on parviendra à la même expression, dans le cas où l'on ne connoîtroit que* n − 1 *valeurs particulières, en intégrant une équation du premier degré et du premier ordre :* cette proposition est due à Lagrange, ainsi que la démonstration que nous venons d'en donner.

648. L'équation $d^n\zeta + P d^{n-1}\zeta dx + Q d^{n-2}\zeta dx^2 \ldots + U\zeta dx^n = 0$ ne peut s'intégrer dans tous les cas ; mais on y satisfait en faisant $\zeta = e^{mx}$, lorsque les coefficiens P, Q, ... U sont constans, parce que dans cette hypothèse elle devient divisible par $e^{mx} dx^n$, après la substitution des valeurs de ζ, $d\zeta$, $d^2\zeta$, ... $d^n\zeta$, qui sont

$$e^{mx}, \quad e^{mx} m\, dx, \quad e^{mx} m^2 dx^2, \ldots\ldots e^{mx} m^n dx ;$$ et on trouve alors

$$m^n + P m^{n-1} + Q m^{n-2} \ldots\ldots + U = 0.$$

Si on désigne par m_1, m_2, ... m_n, les n racines de cette équation ;

on

on aura $\zeta_1 = e^{m_1 x}$, $\zeta_2 = e^{m_2 x}$, ... $\zeta_n = e^{m_n x}$, et par conséquent

$$\zeta = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} \ldots\ldots + C_n e^{m_n x}.$$

Telle est l'expression générale de ζ lorsque les racines m_1, m_2... etc. sont toutes inégales et réelles. Quand parmi ces racines il s'en trouve d'imaginaires, comme elles vont toujours par paires de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, on pourra faire disparoître les $\sqrt{-1}$, en changeant les exponentielles en sinus et cosinus, par les formules du n°. 40 (*Introduction*); et si m_1 et m_2 sont deux racines imaginaires de la même paire, les termes $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$, qu'elles fournissent à la valeur complète de ζ, deviendront

$$C_1 e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})x} + C_2 e^{(\alpha-\beta\sqrt{-1})x} = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)\sqrt{-1}\sin\beta x]$$
$$= e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) = p\, e^{\alpha x}\sin(\beta x + q) \text{ (n°. 617).}$$

Si quelques-unes des racines m_1, m_2, etc. deviennent égales entr'elles, la valeur complète de ζ perd de sa généralité, parce qu'alors plusieurs des constantes C_1, C_2, C_3, etc. se réduisent à une seule, ainsi qu'on l'a vu pour le deuxième ordre (n°. 617). Soit d'abord $m_1 = m_2$; les deux termes $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ n'en donneront qu'un; savoir, $(C_1 + C_2)e^{m_1 x}$; l'expression de ζ ne renfermera plus qu'un nombre $n-1$ de constantes arbitraires: mais si on suppose $m_2 = m_1 + k$, on trouvera

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = e^{m_1 x}(C_1 + C_2 e^{kx}) =$$
$$e^{m_1 x}\left[C_1 + C_2\left(1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2 x^2}{1.2} + \text{etc.}\right)\right] = e^{m_1 x}\left(c_1 + c_2 x + c_3 \frac{kx^2}{2} + \text{etc.}\right),$$

(en changeant $C_1 + C_2$ en c_1, et $C_2 k$ en c_2) $= e^{m_1 x}(c_1 + c_2 x)$, en faisant $k = 0$.

Substituant cette quantité à la place de $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$, la valeur de ζ reprendra la généralité qu'elle doit avoir pour être

l'intégrale complète de l'équation proposée ; nous aurons donc

$$z = e^{m_1 x}(c_1 + c_2 x) + C_3 e^{m_3 x} + \text{etc.}$$

Pour arriver au cas où $m_1 = m_2 = m_3$, nous ferons dans le résultat précédent $m_3 = m_1 + k'$, et il deviendra

$$z = e^{m_1 x}(c_1 + c_2 x + C_3 e^{k' x}) + \text{etc.}$$

En développant $e^{k'x}$, nous trouverons

$$z = e^{m_1 x}(c_1 + C_3 + (c_2 + C_3 k')x + C_3 \frac{k'^2 x^2}{2} + C_3 \frac{k'^3 x^3}{2.3} + \text{etc.}) + \text{etc.}$$

changeant les constantes $c_1 + C_3$; $c_2 + C_3 k'$ et $C_3 \frac{k'^2}{2}$ en c_1, c_2 et c_3, nous aurons

$$z = e^{m_1 x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_3 \frac{k' x^3}{3} + \text{etc.}) + \text{etc.}$$

et $z = e^{m_1 x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + \text{etc.}$ lorsque $k' = 0$. On trouvera de la même manière que si l'on a $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, l'expression générale de z sera $z = e^{m_1 x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) + \text{etc.}$ et ainsi de suite.

649. Considérons maintenant l'équation

$$d^n y + P d^{n-1} y\, dx + Q d^{n-2} y\, dx^2 \ldots\ldots + U y\, dx^n = V dx^n,$$

P, Q, ... U, désignant des coefficiens constans, et Q une fonction de x ; nous aurons

$$z_1 = e^{m_1 x}, \quad z_2 = e^{m_2 x}, \quad z_3 = e^{m_3 x} \ldots\ldots z_n = e^{m_n x} ;$$

formant ensuite les différentielles successives de ces valeurs, nous obtiendrons pour déterminer dC_1, dC_2, dC_3, etc. (n°. 647) les équations

$$e^{m_1 x} dC_1 + e^{m_2 x} dC_2 + e^{m_3 x} dC_3 \ldots + e^{m_n x} dC_n = 0$$

$$e^{m_1 x} m_1 dC_1 + e^{m_2 x} m_2 dC_2 + e^{m_3 x} m_3 dC_3 \ldots + e^{m_n x} m_n dC_n = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e^{m_1 x} m_1^{n-1} dC_1 + e^{m_2 x} m_2^{n-1} dC_2 + e^{m_3 x} m_3^{n-1} dC_3 \ldots + e^{m_n x} m_n^{n-1} dC_n = V dx.$$

Pour donner un exemple de ces calculs, nous supposerons que la proposée ne soit que du troisième ordre; nous aurons ainsi

$$e^{m_1 x}\,dC_1 + e^{m_2 x}\,dC_2 + e^{m_3 x}\,dC_3 = 0$$

$$e^{m_1 x}\,m_1\,dC_1 + e^{m_2 x}\,m_2\,dC_2 + e^{m_3 x}\,m_3\,dC_3 = 0$$

$$e^{m_1 x}\,m^2{}_1\,dC_1 + e^{m_2 x}\,m^2{}_2\,dC_2 + e^{m_3 x}\,m^2{}_3\,dC_3 = V\,dx,$$

d'où il est facile de voir que dC_1, dC_2, dC_3 seront respectivement de la forme

$$A_1 e^{-m_1 x}\,Vdx,\quad A_2 e^{-m_2 x}\,Vdx,\quad A_3 e^{-m_3 x}\,Vdx;$$

A_1, A_2, A_3 désignant des fonctions de m_1, m_2 et m_3; par ces valeurs, les équations ci-dessus deviendront

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0,$$
$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 = 0,$$
$$m^2{}_1 A_1 + m^2{}_2 A_2 + m^2{}_3 A_3 = 1;$$

il ne s'agira plus que d'en tirer les quantités A_1, A_2, A_3, et nous obtiendrons

$$y = e^{m_1 x}\,(c_1 + A_1 \int e^{-m_1 x} Vdx) + e^{m_2 x}\,(c_2 + \int e^{-m_2 x} Vdx) + e^{m_3 x}\,(c_3 + \int e^{-m_3 x} Vdx).$$

Il suffit de calculer l'un des coefficiens A_1, A_2, A_3; si on cherche la valeur du premier, on trouvera

$$A_1 = \frac{m_3 - m_2}{m^2 m^2{}_3 - m_3 m^2{}_2 + m_1 m^2{}_2 - m_1 m^2{}_3 + m_3 m^2{}_1 - m_2 m^2{}_1} =$$

$$\frac{1}{m_2 m_3 + m^2{}_1 - m_1(m_2 + m_3)} = \frac{1}{(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)},$$

et on en conclura

$$A_2 = \frac{1}{(m_2 - m_1)(m_2 - m_3)},\quad A_3 = \frac{1}{(m_3 - m_1)(m_3 - m_2)};$$

$$y = \frac{e^{m_1 x}\,(c_1 + \int e^{-m_1 x} Vdx)}{(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)} + \frac{e^{m_2 x}\,(c_2 + \int e^{-m_2 x} Vdx)}{(m_2 - m_1)(m_2 - m_3)} + \frac{e^{m_3 x}\,(c_3 + \int e^{-m_3 x} Vdx)}{(m_3 - m_1)(m_3 - m_2)},$$

en donnant aux constantes arbitraires le dénominateur de la fraction qu'elles accompagnent.

Si l'on compare cette expression avec celle qu'on auroit pour le

second ordre, on reconnoîtra sans peine la loi qui les lie, et on verra que pour l'ordre n

$$y=\frac{e^{m_1x}\left(c_1+\int e^{-m_1x}Vdx\right)}{(m_1-m_2)(m_1-m_3)\ldots(m_1-m_n)}+\frac{e^{m_2x}\left(c_2+\int e^{-m_2x}Vdx\right)}{(m_2-m_1)(m_2-m_3)\ldots(m_2-m_n)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{e^{m_nx}\left(c_n+\int e^{-m_nx}Vdx\right)}{(m_n-m_1)(m_n-m_2)\ldots(m_n-m_{n-1})}.$$

On peut d'ailleurs s'en convaincre immédiatement en faisant comme ci-dessus

$$dC_1=A_1e^{-m_1x}Vdx,\ dC_2=A_2e^{-m_2x}Vdx,\ldots dC_n=A_ne^{-m_nx}Vdx;$$

les équations qui doivent donner dC_1, dC_2, etc. prendront la forme

$$\begin{gathered}A_1+A_2+A_3\ldots\ldots+A_n=0\\ m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3\ldots\ldots+m_nA_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)\\ m_1^{n-2}A_1+m_2^{n-2}A_2+m_3^{n-2}A_3\ldots\ldots+m_n^{n-2}A_n=0\\ m_1^{n-1}A_1+m_2^{n-1}A_2+m_3^{n-1}A_3\ldots\ldots+m_n^{n-1}A_n=1;\end{gathered}$$

voici un procédé très-simple pour en déduire la valeur de A_1.

Soit

$$\begin{gathered}m_2+m_3\ldots\ldots\ldots+m_n=-P'\\ m_2m_3+m_2m_4\ldots\ldots+\text{etc.}=+Q'\\ m_2m_3m_4+m_2m_3m_5+\text{etc.}=-R'\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ m_2m_3m_4\ldots\ldots m_n\quad=\pm U',\end{gathered}$$

les quantités m_2, $m_3\ldots\ldots\ldots m_n$ seront les racines de l'équation

$$t^{n-1}+P't^{n-2}+Q't^{n-3}\ldots\ldots+U'=0;$$

si l'on multiplie l'avant-dernière des équations (A) par P', la précédente par Q', et ainsi de suite en remontant, enfin la première par U', et que l'on ajoute les produits, il viendra

$$\left.\begin{aligned}&A_1(m_1^{n-1}+P'm_1^{n-2}+Q'm_1^{n-3}\ldots\ldots+U')\\ &+A_2(m_2^{n-1}+P'm_2^{n-2}+Q'm_2^{n-3}\ldots\ldots+U')\\ &+A_3(m_3^{n-1}+P'm_3^{n-2}+Q'm_3^{n-3}\ldots\ldots+U')\\ &+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+A_n(m_n^{n-1}+P'm_n^{n-2}+Q'm_n^{n-3}\ldots\ldots+U')\end{aligned}\right\}=1.$$

Il est évident que toutes les lignes de ce résultat sont nulles, excepté la première, puisqu'elles ne sont autre chose que ce que devient

l'équation en t, quand on y fait successivement $t=m_2$, $=m_3$, etc. on tirera donc de là

$$A_1=\frac{1}{m_1^{n-1}+P'm_1^{n-2}+Q'm_1^{n-3}\ldots\ldots+U'};$$

ou
$$A_1=\frac{1}{(m_1-m_2)(m_1-m_3)\ldots\ldots(m_1-m_n)};$$

en décomposant le dénominateur dans ses facteurs simples. On parviendroit de même à la valeur de A_2, en se servant de l'équation dont les racines sont m_1, m_3, $m_4\ldots m_n$, et ainsi des autres; on retombera de cette manière sur l'expression de y rapportée plus haut.

La quantité $(m_1-m_2)(m_1-m_3)\ldots(m_1-m_n)$, ou le produit des différences qui se trouvent entre la racine m_1 et chacune des autres, est évidemment égale au dernier terme de l'équation qu'on obtiendroit par la substitution de m_1+u à la place de m, dans l'équation $m^n+Pm^{n-1}+Qm^{n-2}\ldots\ldots+Tm+U=0$, et ce dernier terme étant exprimé par $nm_1^{n-1}+(n-1)Pm_1^{n-2}+(n-2)Qm_1^{n-3}\ldots\ldots+T=0$; se déduit immédiatement de l'équation $m^n+Pm^{n-1}+$ etc.$=0$, en la différentiant et en écrivant dans le résultat m_1 au lieu de m. On aura les expressions analogues des dénominateurs de A_2, A_3, etc. en changeant successivement m_1 en m_2, en m_3, etc.

650. Pour terminer ce que nous avons à dire sur l'équation
$$d^ny+Pd^{n-1}y\,dx+Qd^{n-2}y\,dx^2\ldots\ldots+Uy\,dx^n=V\,dx^n,$$
lorsque les coefficiens P, Q,$\ldots U$ sont constans, il nous reste à considérer le cas où quelques-unes des racines de l'équation
$$m^n+Pm^{n-1}+Qm^{n-2}\ldots\ldots+U=0$$
sont imaginaires et celui où elles sont égales entr'elles. Dans le premier on traitera séparément chaque couple de racines imaginaires, comme on l'a fait dans le n°. 623, pour l'équation du deuxième ordre. Si, par exemple, m_1 et m_2 sont imaginaires, on écrira à leur place $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; les deux premiers termes de l'expression de y se changeront en

$$\frac{e^{x(\alpha+\beta\sqrt{-1})}\int e^{-x(\alpha+\beta\sqrt{-1})}V\,dx}{A+B\sqrt{-1}}+\frac{e^{x(\alpha-\beta\sqrt{-1})}\int e^{-x(\alpha-\beta\sqrt{-1})}V\,dx}{A-B\sqrt{-1}},$$

puisque les dénominateurs $(m_1 - m_2) \ldots\ldots (m_1 - m_n)$; $(m_2 - m_1) \ldots\ldots (m_2 - m_n)$ deviendront respectivement de la forme $A + B\sqrt{-1}$, $A - B\sqrt{-1}$; on développera, on réduira au même dénominateur, et on aura

$$\frac{e^{\alpha x}(2A\cos\beta x + 2B\sin\beta x)\left(\int e^{-\alpha x} V dx \cos\beta x + C_1\right)}{A^2 + B^2}$$
$$+ \frac{e^{\alpha x}(2A\sin\beta x - 2B\cos\beta x)\left(\int e^{-\alpha x} V dx \sin\beta x + C_2\right)}{A^2 + B^2},$$

en tirant immédiatement des intégrales indiquées les constantes arbitraires C_1 et C_2.

Dans le cas des racines égales, on réunira en un seul tous les termes dont le dénominateur s'évanouit; la fraction que l'on obtiendra ainsi prendra la forme de $\frac{0}{0}$, lorsqu'on négligera les constantes arbitraires, ou qu'on les supposera égales entr'elles: on pourra donc appliquer à ce cas la règle du n°. 139, ou celle du n°. 147, selon qu'il y aura deux ou un plus grand nombre de racines égales. S'il n'y a que deux racines égales, m_1 et m_2, par exemple, on écrira comme il suit les deux premiers termes de l'expression de y

$$\frac{1}{m_1 - m_2}\left\{\frac{e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x} V dx}{(m_1 - m_3)\ldots(m_1 - m_n)} - \frac{e^{m_2 x}\int e^{-m_2 x} V dx}{(m_2 - m_3)\ldots(m_2 - m_n)}\right\};$$

on fera $(m_1 - m_3)\ldots(m_1 - m_n) = M_2$ et $m_2 = m_1 + k$; on développera dans cette hypothèse l'expression ci-dessus: on aura

$$e^{m_2 x} = e^{m_1 x}\left(1 + k\frac{x}{1} + k^2\frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}\right),$$

$$\int e^{-m_2 x} V dx = \int e^{-m_1 x} V dx - k\int e^{-m_1 x} V x dx + \tfrac{1}{2}k^2\int e^{-m_1 x} V x^2 dx - \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(m_2 - m_3)\ldots(m_2 - m_n)} = \frac{1}{M_2} + \frac{d.\frac{1}{M_2}}{dm_1}\frac{k}{1} + \frac{d^2.\frac{1}{M_2}}{dm_1^2}\frac{k^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs, en se bornant aux termes où k ne passe pas la première puissance, on trouvera, après avoir effacé les quantités qui se détruisent, un résultat indépendant de k: savoir,

$$-\frac{1}{k}\left\{\frac{k\,e^{m_1x}\int e^{-m_1x}Vxdx-ke^{m_1x}x\int e^{-m_1x}Vdx}{M_2}-\frac{d.\frac{1}{M_2}}{dm_1}ke^{m_1x}\int e^{-m_1x}Vdx\right\}$$

$$=\frac{e^{m_1x}(x\int e^{-m_1x}Vdx-\int e^{-m_1x}Vxdx)}{M_2}+\frac{d.\frac{1}{M_2}}{dm_1}e^{m_1x}\int e^{-m_1x}Vdx.$$

Telle est la quantité qu'il faut substituer aux deux premiers termes de y lorsque $m_1=m_2$, en observant que les intégrales indiquées comprennent implicitement les constantes arbitraires.

Lorsqu'on aura $m_1=m_2=m_3$, on mettra les trois premiers termes de y sous la forme

$$\frac{1}{(m_1-m_2)(m_1-m_3)(m_2-m_3)}\left\{\frac{(m_2-m_3)e^{m_1x}\int e^{-m_1x}Vdx}{(m_1-m_4)\ldots(m_1-m_n)}-\right.$$

$$\left.\frac{(m_1-m_3)e^{m_2x}\int e^{-m_2x}Vdx}{(m_2-m_4)\ldots(m_2-m_n)}+\frac{(m_1-m_2)e^{m_3x}\int e^{-m_3x}Vdx}{(m_3-m_4)\ldots(m_3-m_n)}\right\}.$$

On fera $(m_1-m_4)\ldots(m_1-m_n)=M_3$, $m_2=m_1+h$, $m_3=m_1+k$; le coefficient $\frac{1}{(m_1-m_2)(m_1-m_3)(m_2-m_3)}$ deviendra $\frac{1}{h^2k-hk^2}$, et par conséquent il faudra, pour obtenir les termes indépendans des quantités h et k, pousser le développement jusqu'aux termes affectés de h^2k et de hk^2; on aura

$$m_2-m_3=h-k,\quad m_1-m_3=-k,\quad m_1-m_2=-h,$$

$$\frac{1}{(m_2-m_4)\ldots(m_2-m_n)}=\frac{1}{M_3}+\frac{d.\frac{1}{M_3}}{dm_1}\frac{h}{1}+\frac{d^2.\frac{1}{M_3}}{dm_1^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

$$\frac{1}{(m_3-m_4)\ldots(m_3-m_n)}=\frac{1}{M_3}+\frac{d.\frac{1}{M_3}}{dm_1}\frac{k}{1}+\frac{d^2.\frac{1}{M_3}}{dm_1^2}\frac{k^2}{1.2}+\text{etc.}$$

$$e^{m_2x}=e^{m_1x}\left(1+\frac{hx}{1}+\frac{h^2x^2}{1.2}+\text{etc.}\right),\quad e^{m_3x}=e^{m_1x}\left(1+\frac{kx}{1}+\frac{k^2x^2}{1.2}+\text{etc.}\right)$$

$$\int e^{-m_2x}Vdx=\int e^{-m_1x}Vdx-h\int e^{-m_1x}Vxdx+\frac{h^2}{2}\int e^{-m_1x}Vx^2dx+\text{etc.}$$

$$\int e^{-m_3x}Vdx=\int e^{-m_1x}Vdx-k\int e^{-m_1x}Vxdx+\frac{k^2}{2}\int e^{-m_1x}Vx^2dx+\text{etc.}$$

et on trouvera, après les substitutions et les réductions,

$$\frac{e^{m_1 x}\left(x^2\int e^{-m_1 x}V dx - 2x\int e^{-m_1 x}V x dx + \int e^{-m_1 x}V x^2 dx\right)}{2M_3}$$

$$+e^{m_1 x}\left(x\int e^{-m_1 x}V dx - \int e^{-m_1 x}V x dx\right)\frac{d\frac{1}{M_3}}{dm_1} + \frac{e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x}V dx}{2}\,\frac{d^2\frac{1}{M_3}}{dm_1}$$

au lieu des trois premiers termes de la valeur de y.

La marche de ce procédé est assez claire maintenant pour qu'on puisse l'étendre à un nombre quelconque de racines égales ; d'ailleurs les deux résultats que nous avons obtenus suivent une loi facile à saisir, et peuvent s'écrire ainsi (n°. 487),

$$\frac{1}{M_2}e^{m_1 x}\int\int e^{-m_1 x}V dx^2 + \frac{d\frac{1}{M_2}}{dm_1}e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x}V dx,$$

$$\frac{1}{M_3}e^{m_1 x}\int\int\int e^{-m_1 x}V dx^3 + \frac{d\frac{1}{M_3}}{dm_1}e^{m_1 x}\int\int e^{-m_1 x}V dx^2 + \frac{d^2\frac{1}{M_3}}{2dm_1^2}e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x}V dx;$$

les constantes arbitraires sont implicitement comprises dans les intégrales indiquées. Les quantités M_2, M_3, etc. se déduisent immédiatement du produit $(m_1-m_2)(m_1-m_3)\ldots\ldots(m_1-m_n)$, dont la valeur est $nm_1^{n-1}+(n-1)Pm_1^{n-2}\ldots\ldots+T$ (n°. précéd.) et si on représente cette expression par M_1, on aura

$$M_2=\frac{M_1}{m_1-m_2}, \qquad M_3=\frac{M_1}{(m_1-m_2)(m_1-m_3)}, \text{ etc.}$$

651. Parmi les équations du premier degré à coefficiens variables, nous ne considérerons que la suivante

$$(a+bx)^n d^n y + P(a+bx)^{n-1}d^{n-1}y\,dx + Q(a+bx)^{n-2}d^{n-2}y\,dx^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Uy\,dx^n = V dx^n,$$

dans laquelle P, Q,.....U sont des constantes et V une fonction quelconque de x; nous ferons $a+bx=bt$; nous représenterons par W ce que devient la fonction V, lorsqu'on y met $t-\frac{a}{b}$ au lieu de x, par P', Q',....U' les quantités Pb^{-1}, Qb^{-2},.... Ub^{-n}, et nous aurons

$$t^n d^n y + P't^{n-1}d^{n-1}y\,dt + Q't^{n-2}d^{n-2}y\,dt^2 \ldots\ldots + U'y\,dt^n = b^{-n}W dt^n,$$

· équation

équation qui dépendra de

$t^n d^n z + P' t^{n-1} d^{n-1} z dt + Q' t^{n-2} d^{n-2} z dt^2 \ldots\ldots + U' z dt^n = 0$ (n°. 647);

on satisfait à cette dernière en prenant $z = t^m$; car en y substituant au lieu de z, dz, d^2z..... d^nz, les expressions t^m, $m t^{m-1} dt$, $m(m-1) t^{m-2} dt$,.....$m(m-1)\ldots(m-n+1) t^{m-n} d^n t$, elle deviendra

$m(m-1)\ldots(m-n+1) + P' m(m-1)\ldots(m-n+2) +$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + S' m(m-1) + T' m + U' = 0.$

Cette équation, qui ne s'élevera qu'au degré n, servira à déterminer toutes les valeurs de m ; formant ensuite celles de z, on en déduira l'expression générale de x, comme dans le n°. 649.

Legendre a fait voir que l'équation

$t^n d^n z + P t^{n-1} d^{n-1} z dt \ldots + S t^2 d^2 z dt^{n-2} + T t dz dt^{n-1} + U z dt^n = 0$

peut se transformer dans une autre du même ordre et du même degré et dont les coefficiens sont constans. Il suffit pour cela de faire $\frac{dt}{t} = du$, d'où il résulte $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{t\,du}$, et d'exprimer les coefficiens différentiels $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{d^3z}{dt^3}$, etc. par ceux qui répondent à l'hypothèse de du constant ; on trouvera par les formules du n°. 77,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t}\,\frac{dz}{du}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2z}{du^2} - \frac{dz}{du}\right)$$

$$\frac{d^3z}{dt^3} = \frac{1}{t^3}\left(\frac{d^3z}{du^3} - \frac{3d^2z}{du^2} + \frac{2dz}{du}\right)$$

$$\frac{d^4z}{dt^4} = \frac{1}{t^4}\left(\frac{d^4z}{du^4} - \frac{6d^3z}{du^3} + \frac{11d^2z}{du^2} - \frac{6dz}{du}\right)$$

etc.

les nombres qui multiplient $\frac{dz}{du}$, $\frac{d^2z}{du^2}$, etc. dans ces expressions, sont précisément les mêmes que ceux qui multiplient les puissances analogues de u dans le développement des produits,

$$u, \quad u(u-1), \quad u(u-1)(u-2), \text{ etc.}$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation proposée mise sous la forme

$$t^n\frac{d^n\zeta}{dt^n}+Pt^{n-1}\frac{d^{n-1}\zeta}{dt^{n-1}}+\ldots\ldots St^2\frac{d^2\zeta}{dt^2}+Tt\frac{d\zeta}{dt}+U\zeta=0$$

fera disparoître la variable t.

652. Si l'on a un nombre m d'équations différentielles du premier degré, renfermant un nombre $m+1$ de variables, une seule de ces variables sera indépendante, et les m autres en seront des fonctions implicites (n°. 68). Quand ces dernières, et leurs coefficiens différentiels, ne s'éleveront pas au delà de la première puissance dans les équations proposées, qui seront alors du premier degré, on pourra, par la méthode indiquée n°. 78, parvenir à une équation différentielle du premier degré entre l'une des fonctions à déterminer et la variable que l'on regarde comme indépendante; mais on peut quelquefois éviter les calculs de l'élimination, en intégrant conjointement les équations proposées par un procédé que nous ferons bientôt connoître.

Considérons d'abord les trois équations du premier degré et du premier ordre

$$Mu+Nx+Py+Q\frac{du}{dt}+R\frac{dx}{dt}+S\frac{dy}{dt}=T$$

$$M'u+N'x+P'y+Q'\frac{du}{dt}+R'\frac{dx}{dt}+S'\frac{dy}{dt}=T'$$

$$M''u+N''x+P''y+Q''\frac{du}{dt}+R''\frac{dx}{dt}+S''\frac{dy}{dt}=T'',$$

dans lesquelles les variables u, x et y sont regardées comme des fonctions implicites de t, et les coefficiens $M,N,\ldots T$, $M',N',\ldots T'$, $M'',N'',\ldots T''$ ne renferment que cette dernière. En éliminant de ces équations les variables x, y et leurs coefficiens différentiels, on en déduiroit entre u et t, une équation du premier degré, et du troisième ordre; en effet, si on différentie chacune de ces équations deux fois en regardant toujours dt comme constant, on obtiendra six nouvelles équations à joindre aux précédentes, et il ne faudra éliminer entre toutes que les huit quantités

$$x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^3x}{dt^3},\ \frac{d^3y}{dt^3};$$

il restera donc une équation dans laquelle les quantités u, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^3u}{dt^3}$, ne monteront qu'au premier degré. Il est facile de voir que cette équation sera de la forme

$$Au+B\frac{du}{dt}+C\frac{d^2u}{dt^2}+D\frac{d^3u}{dt^3}=T''',$$

et que les quantités T, T', T'', n'entreront que dans T'''; il suit de là que ces quantités n'augmentent pas la difficulté de l'intégration des équations proposées, puisque l'équation ci-dessus ne dépend que de $A\zeta+B\frac{d\zeta}{dt}+C\frac{d^2\zeta}{dt^2}+D\frac{d^3\zeta}{dt^3}=0$ (n°. 647) (*).

Lorsque par le moyen des valeurs de ζ, on aura trouvé l'expression générale de u, on la substituera dans les valeurs de x et de y données par l'élimination, et les résultats seront aussi les expressions générales des fonctions x et y, et il est important de remarquer qu'elles renfermeront chacune les trois constantes arbitraires qui se trouvent dans celle de u.

(*) Si l'on trouvoit quelque difficulté à saisir les conséquences déduites du calcul indiqué ici, et que je n'ai point développé à cause de sa longueur, il suffira d'achever l'élimination de x entre les équations

$$Mu+Nx+P\frac{du}{dt}+Q\frac{dx}{dt}=T$$

$$M'u+N'x+P'\frac{du}{dt}+Q'\frac{dx}{dt}=T',$$

qui ne renferment que trois inconnues, et qui donnent par leur différentiation

$$\frac{dM}{dt}u+\frac{dN}{dt}x+\left(M+\frac{dP}{dt}\right)\frac{du}{dt}+\left(N+\frac{dQ}{dt}\right)\frac{dx}{dt}+P\frac{d^2u}{dt^2}+Q\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dM'}{dt}u+\frac{dN'}{dt}x+\left(M'+\frac{dP'}{dt}\right)\frac{du}{dt}+\left(N'+\frac{dQ'}{dt}\right)\frac{dx}{dt}+P'\frac{d^2u}{dt^2}+Q'\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dT'}{dt}$$

En écrivant ainsi ces dernières

$$M_1u+N_1x+P_1\frac{du}{dt}+Q_1\frac{dx}{dt}+P\frac{d^2u}{dt^2}+Q\frac{d^2x}{dt^2}=T_1$$

$$M'_1u+N'_1x+P'_1\frac{du}{dt}+Q'_1\frac{dx}{dt}+P'\frac{d^2u}{dt^2}+Q'\frac{d^2x}{dt^2}=T'_1,$$

on parviendra sans peine à l'équation du second ordre en u et t, après avoir chassé x, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$, de ces équations et des proposées.

653. Par un procédé analogue à celui du n°. 647, l'intégration des trois équations proposées se ramène immédiatement à celle de ces mêmes équations lorsque T, T', T'' sont zéro. En effet, d'après ce qui précède la valeur de ζ, qui n'est que ce que devient u dans cette hypothèse, est de la forme $C_1\zeta_1+C_2\zeta_2+C_3\zeta_3$; pour conserver l'analogie nous changerons ζ_1, ζ_2, ζ_3, en u_1, u_2, u_3, en sorte que ces quantités désigneront des valeurs particulières de u satisfaisant aux équations

$$\left.\begin{aligned} &Mu+Nx+Py+Q\frac{du}{dt}+R\frac{dx}{dt}+S\frac{dy}{dt}=0\\ &M'u+N'x+P'y+Q'\frac{du}{dt}+R'\frac{dx}{dt}+S'\frac{dy}{dt}=0\\ &M''u+N''x+P''y+Q''\frac{du}{dt}+R''\frac{dx}{dt}+S''\frac{dy}{dt}=0 \end{aligned}\right\}(A);$$

et l'expression complète de u dans ces dernières sera $C_1u_1+C_2u_2+C_3u_3$; mais il est évident que x et y doivent être de la même forme et ne peuvent contenir, suivant ce qu'on a vu plus haut, que les mêmes constantes arbitraires: nous prendrons donc pour ces variables les expressions $C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3$, $C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, étant des valeurs particulières de x et de y, correspondantes aux valeurs respectives de u. On s'assureroit de même que dans le n°. 647, que ces expressions satisfont aux équations (A), et on peut les étendre aux équations proposées en y regardant les quantités C_1, C_2, C_3, comme variables. On trouvera alors

$$\begin{aligned} du&=C_1du_1+C_2du_2+C_3du_3+u_1dC_1+u_2dC_2+u_3dC_3\\ dx&=C_1dx_1+C_2dx_2+C_3dx_3+x_1dC_1+x_2dC_2+x_3dC_3\\ dy&=C_1dy_1+C_2dy_2+C_3dy_3+y_1dC_1+y_2dC_2+y_3dC_3; \end{aligned}$$

mettant ces valeurs, ainsi que celles de u, de x et de y, dans les équations proposées, et supprimant les termes nuls d'après les équations (A), on aura

$$\begin{aligned} &(Qu_1+Rx_1+Sy_1)dC_1+(Qu_2+Rx_2+Sy_2)dC_2+(Qu_3+Rx_3+Sy_3)dC_3=Tdt,\\ &(Q'u_1+R'x_1+S'y_1)dC_1+(Q'u_2+R'x_2+S'y_2)dC_2+(Q'u_3+R'x_3+S'y_3)dC_3=T'dt,\\ &(Q''u_1+R''x_1+S''y_1)dC_1+(Q''u_2+R''x_2+S''y_2)dC_2+(Q''u_3+R''x_3+S''y_3)dC_3=T''dt. \end{aligned}$$

On tirera de ces équations des valeurs de dC_1, dC_2, dC_3, qui seront de la forme θ_1dt, θ_2dt, θ_3dt, et donneront

$$C_1=\int\theta_1dt+c_1,\quad C_2=\int\theta_2dt+c_2,\quad C_3=\int\theta_3dt+c_3;$$

il ne nous reste donc plus qu'à nous occuper des équations (*A*).

654. Lorsque les coefficiens M, N, etc. M', N', etc. M'', N'', etc. sont constans, on peut supposer dans ces équations

$$u = e^{mt}, \quad x = \alpha e^{mt}, \quad y = \beta e^{mt},$$ et il vient

$$M + N\alpha + P\beta + Qm + R\alpha m + S\beta m = 0$$
$$M' + N'\alpha + P'\beta + Q'm + R'\alpha m + S'\beta m = 0$$
$$M'' + N''\alpha + P''\beta + Q''m + R''\alpha m + S''\beta m = 0$$

équations qui serviront à déterminer α, β et m. La résultante que l'on en déduira, en éliminant α et β, sera du troisième degré par rapport à m; en désignant ses racines par m_1, m_2, m_3, on aura

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = e^{m_1 t}, \; u_2 = e^{m_2 t}, \; u_3 = e^{m_3 t} \\ x_1 = \alpha e^{m_1 t}, \; x_2 = \alpha e^{m_2 t}, \; x_3 = \alpha e^{m_3 t} \\ y_1 = \beta e^{m_1 t}, \; y_2 = \beta e^{m_2 t}, \; y_3 = \beta e^{m_3 t} \end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} u = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + C_3 e^{m_3 t} \\ x = C_1\alpha e^{m_1 t} + C_2\alpha e^{m_2 t} + C_3\alpha e^{m_3 t} \\ y = C_1\beta e^{m_1 t} + C_2\beta e^{m_2 t} + C_3\beta e^{m_3 t} \end{array}\right.$$

Si les équations (*A*) étoient de la forme

$$Mu + Nx + Py + (a+bt)\left(Q\frac{du}{dt} + R\frac{dx}{dt} + S\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

$$M'u + N'x + P'y + (a+bt)\left(Q'\frac{du}{dt} + R'\frac{dx}{dt} + S'\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

$$M''u + N''x + P''y + (a+bt)\left(Q''\frac{du}{dt} + R''\frac{dx}{dt} + S''\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

on feroit comme dans le n°. 651, $a+bt = bs$, et $ds = s\,du$; les équations résultantes n'auroient plus que des coefficiens constans.

L'extension de ce qui précède à un nombre quelconque d'équations du premier ordre et du premier degré ne sauroit présenter de difficulté. On voit bien que quand l'équation en m aura des racines imaginaires, il faudra transformer en sinus et cosinus, les termes des expressions de x et de y qui contiendront ces racines, et si l'on a bien compris ce qui a été dit à cet égard pour les équations du premier degré à deux variables, ainsi que le procédé relatif au cas où l'équation en m a des racines égales, on ne sera embarrassé dans aucune des circonstances qui pourront se présenter.

655. Passons maintenant aux équations des ordres supérieurs au premier; soient les équations à trois variables

$$M u+N x+P\frac{du}{dt}+Q\frac{dx}{dt}+R\frac{d^2u}{dt^2}+S\frac{d^2x}{dt^2}=T$$

$$M'u+N'x+P'\frac{du}{dt}+Q'\frac{dx}{dt}+R'\frac{d^2u}{dt^2}+S'\frac{d^2x}{dt^2}=T'.$$

Si on éliminoit l'une des variables, x, par exemple, on arriveroit à une équation finale, en u, du premier degré et du quatrième ordre; mais en faisant

$$u=C_1u_1+C_2u_2+C_3u_3+C_4u_4$$
$$x=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3+C_4x_4,$$

expressions dans lesquelles u_1, u_2, u_3, u_4, x_1, x_2, x_3, x_4, désignent des valeurs particulières de u et de x, satisfaisant aux équations

$$\left.\begin{aligned} M u+N x+P\frac{du}{dt}+Q\frac{dx}{dt}+R\frac{d^2u}{dt^2}+S\frac{d^2x}{dt^2}&=0\\ M'u+N'x+P'\frac{du}{dt}+Q'\frac{dx}{dt}+R'\frac{d^2u}{dt^2}+S'\frac{d^2x}{dt^2}&=0\end{aligned}\right\}(B),$$

et regardant C_1, C_2, C_3, C_4, comme variables, on aura seulement

$$du=C_1du_1+C_2du_2+C_3du_3+C_4du_4$$
$$dx=C_1dx_1+C_2dx_2+C_3dx_3+C_4dx_4,$$

si de même que dans le n°. 647, on suppose que

$$u_1dC_1+u_2dC_2+u_3dC_3+u_4dC_4=0$$
$$x_1dC_1+x_2dC_2+x_3dC_3+x_4dC_4=0;$$

il viendra ensuite

$$\left.\begin{aligned} d^2u=\;& C_1d^2u_1+C_2d^2u_2+C_3d^2u_3+C_4d^2u_4\\ &+du_1dC_1+du_2dC_2+du_3dC_3+du_4dC_4\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} d^2x=\;& C_1d^2x_1+C_2d^2x_2+C_3d^2x_3+C_4d^2x_4\\ &+dx_1dC_1+dx_2dC_2+dx_3dC_3+dx_4dC_4\end{aligned}\right\}.$$

Ces valeurs étant substituées dans les équations proposées, les réduiront, en vertu des équations (B), à

$$\left.\begin{aligned} &(Rdu_1+Sdx_1)dC_1+(Rdu_2+Sdx_2)dC_2\\ &+(Rdu_3+Sdx_3)dC_3+(Rdu_4+Sdx_4)dC_4\end{aligned}\right\}=Tdt^2$$

$$\left.\begin{aligned} &(R'du_1+S'dx_1)dC_1+(R'du_2+S'dx_2)dC_2\\ &+(R'du_3+S'dx_3)dC_3+(R'du_4+S'du_4)dC_4\end{aligned}\right\}=T'dt^2;$$

avec ces deux équations et les précédentes on déterminera dC_1, dC_2, dC_3 et dC_4, en fonction de la variable t et de sa différentielle.

La régularité de ce procédé ne laisse aucun doute sur le succès de son application à un nombre quelconque d'équations du premier degré et d'un ordre quelconque; il suit de là que les théorêmes, démontrés n°. 647, pour les équations différentielles du premier degré à deux variables seulement, s'étendent aussi à un nombre m d'équations du premier degré, d'un ordre quelconque n et contenant $m+1$ variables.

Lorsque les coefficiens des équations (B) sont constans ou de la forme

$$M,\ N,\ P(a+bx),\quad Q(a+bx),\quad R(a+bx)^s,\quad S(a+bx)^s$$
$$M',\ N',\ P'(a+bx),\quad Q'(a+bx),\quad R'(a+bx)^s,\quad S'(a+bx)^s,$$

on obtient de même que dans le n°. 651 les valeurs de u et de x qui satisfont à ces équations.

656. D'Alembert est le premier qui se soit occupé de l'intégration immédiate de plusieurs équations différentielles, et la méthode qu'il imagina dans cette occasion est trop ingénieuse pour la passer sous silence. Soient 1°. les équations

$$(Mu+Nx)\,dt+P\,du+Q\,dx=T\,dt$$
$$(M'u+N'x)\,dt+P'du+Q'dx=T'dt;$$

si on multiplie la seconde par un facteur θ, fonction de t, et qu'on l'ajoute ensuite à la première, il viendra

$$[(M+M'\theta)u+(N+N'\theta)x]dt+(P+P'\theta)du+(Q+Q'\theta)dx=(T+T'\theta)dt,$$

résultat qui rentreroit dans l'équation du premier degré et du premier ordre, à deux variables seulement; si l'on avoit

$$du+\frac{Q+Q'\theta}{P+P'\theta}\,dx=d\left[u+\frac{N+N'\theta}{M+M'\theta}x\right],$$

puisqu'en faisant $u+\frac{N+N'\theta}{M+M'\theta}x=z$, on trouveroit

$$(M+M'\theta)z\,dt+(P+P'\theta)\,dz=(T+T'\theta)\,dt,$$

et par conséquent

$$z=e^{-\frac{M+M'\theta}{P+P'\theta}t}\left(\int e^{\frac{M+M'\theta}{P+P'\theta}}\frac{T+T'\theta}{P+P'\theta}dt+C\right).$$

Pour que la condition exigée soit remplie, il faut que

$$\frac{Q+Q'\theta}{P+P'\theta}=\frac{N+N'\theta}{M+M'\theta}, \quad d.\frac{N+N'\theta}{M+M'\theta}=0:$$

chassant θ de la seconde équation, on en déduira une relation entre les coefficiens M, N, P, Q, M', N', P', Q'; mais lorsque ces coefficiens seront constans, elle sera satisfaite immédiatement en supposant θ constant, et ce facteur sera déterminé par la première équation qui ne monte qu'au second degré. Si on désigne par θ_1 et θ_2, les deux valeurs de θ; par m_1 et m_2, celles de $\frac{M+M'\theta}{P+P'\theta}$; par n_1, n_2, celles de $\frac{N+N'\theta}{M+M'\theta}$; enfin par T_1, T_2, celles de $\frac{T+T'\theta}{P+P'\theta}$, on trouvera ces deux équations primitives

$$u+n_1x=e^{-m_1t}\left(\int e^{m_1t}T_1dt+C_1\right)$$
$$u+n_2x=e^{-m_2t}\left(\int e^{m_2t}T_2dt+C_2\right),$$

desquelles on tirera les expressions générales de u et de x.

2°. Soient les équations

$$(Mu+Nx+Py)dt+Q\,du+R\,dx+S\,dy=T\,dt$$
$$(M'u+N'x+P'y)dt+Q'du+R'dx+S'dy=T'dt$$
$$(M''u+N''x+P''y)dt+Q''du+R''dx+S''dy=T''dt;$$

on multipliera la deuxième par θ, la troisième par θ'; on les ajoutera ensuite avec la première, ce qui donnera

$$[(M+M'\theta+M''\theta')u+(N+N'\theta+N''\theta')x+(P+P'\theta+P''\theta')y]dt$$
$$+(Q+Q'\theta+Q''\theta')du+(R+R'\theta+R''\theta')dx+(S+S'\theta+S''\theta')dy=(T+T'\theta+T''\theta')dt;$$

pour ramener ce résultat à la forme d'une équation du premier degré et du premier ordre à deux variables, on fera

$$du+\frac{R+R'\theta+R''\theta'}{Q+Q'\theta+Q''\theta'}dx+\frac{S+S'\theta+S''\theta'}{Q+Q'\theta+Q''\theta'}dy=$$
$$d\left[u+\frac{N+N'\theta+N''\theta'}{M+M'\theta+M''\theta'}x+\frac{P+P'\theta+P''\theta'}{M+M'\theta+M''\theta'}y\right],$$

d'où il suit

$$\frac{R+R'\theta+R''\theta'}{Q+Q'\theta+Q''\theta'}=\frac{N+N'\theta+N''\theta'}{M+M'\theta+M''\theta'}, \quad \frac{S+S'\theta+S''\theta'}{Q+Q'\theta+Q''\theta'}=\frac{P+P'\theta+P''\theta'}{M+M'\theta+M''\theta'},$$
$$d.\frac{N+N'\theta+N''\theta'}{Q+Q'\theta+Q''\theta'}=0; \quad d.\frac{P+P'\theta+P''\theta'}{Q+Q'\theta+Q''\theta'}=0.$$

Les

Les deux dernières équations auront lieu d'elles-mêmes en prenant θ et θ' constans, si les coefficiens du premier membre des équations proposées sont constans aussi : les facteurs θ et θ' seront déterminés alors par les deux premières équations. Le résultat final en θ ou en θ' ne montera qu'au troisième degré ; on peut le simplifier, en observant que les équations proposées ont chacune un coefficient arbitraire (n°. 295) et faisant $Q+Q\theta+Q''\theta'=1$; puis posant $R+R'\theta+R''\theta'=\alpha$, $S+S'\theta+S''\theta'=\beta$, on trouvera pour $M+M'\theta+M''\theta'$, $N+N'\theta+N''\theta'$, $P+P'\theta+P''\theta'$, des expressions de la forme $A+A'\alpha+A''\beta$, $B+B'\alpha+B''\beta$, $C+C'\alpha+C''\beta$, et il viendra, entre α et β, les équations

$$\alpha=\frac{B+B'\alpha+B''\beta}{A+A'\alpha+A''\beta}, \qquad \beta=\frac{C+C'\alpha+C''\beta}{A+A'\alpha+A''\beta},$$

qui conduiront évidemment à une équation finale du troisième degré. Considérant donc chacune des racines de cette équation en particulier, on obtiendra trois équations primitives de la forme

$$u+n_1x+p_1y=e^{-m_1t}\left(\int e^{m_1t}T_1dt+C_1\right)$$
$$u+n_2x+p_2y=e^{-m_2t}\left(\int e^{m_2t}T_2dt+C_2\right)$$
$$u+n_3x+p_3y=e^{-m_3t}\left(\int e^{m_3t}T_3dt+C_3\right)\text{ (*).}$$

657. D'Alembert applique aux équations du premier degré d'un ordre quelconque ce procédé, qu'on étend sans peine à un nombre quelconque d'équations du premier degré et du premier ordre, et

(*) On parviendra directement à ce résultat, en transformant par l'élimination les équations proposées en trois autres, qui contiennent séparément les différentielles du, dx et dy, et qui soient par conséquent de la forme

$$du+(Au+Bx+Cy)dt=\tau dt$$
$$dx+(A'u+B'x+C'y)dt=\tau' dt$$
$$dy+(A''u+B''x+C''y)dt=\tau' dt;$$

on pourroit changer de même les équations du n°. précédent en

$$du+(Au+Bx)dt=\tau dt$$
$$dx+(A'u+B'x)dt=\tau' dt:$$

c'est ainsi que d'Alembert présente ces équations.

pour cela il ramène les premières aux secondes. Ayant par exemple deux équations de la forme

$$Mu+Nx+P\frac{du}{dt}+Q\frac{dx}{dt}+R\frac{d^2u}{dt^2}+S\frac{d^2x}{dt^2}=T$$

$$M'u+N'x+P'\frac{du}{dt}+Q'\frac{dx}{dt}+R'\frac{d^2u}{dt}+S'\frac{d^2x}{dt^2}=T',$$

il fait $du=p\,dt$, $dx=q\,dt$, et il a par conséquent entre les cinq variables t, u, x, p et q, les quatre équations du premier ordre,

$$(Mu+Nx+Pp+Qq)\,dt+R\,dp+S\,dq=T\,dt$$
$$(M'u+N'x+P'p+Q'q)\,dt+R'dp+S'dq=T'dt$$
$$p\,dt-du=0 \qquad q\,dt-dx=0,$$

qu'il traite alors par la méthode du n°. précédent.

658. Cet artifice d'analyse s'applique également aux équations du premier degré de tous les ordres, quel que soit leur nombre ; et ce fut par son moyen que d'Alembert intégra les équations du premier degré à deux variables seulement. En effet, si dans l'équation du troisième ordre, par exemple,

$$d^3y+Pd^2ydx+Q\,dyd\,x^2+Uyd\,x^3=Vd\,x^3,$$

on fait $dy=p\,dx$, $d^2y=dp\,dx=q\,dx^2$, elle deviendra

$$dq+Pq\,dx+Qp\,dx+Uy\,dx=V\,dx,$$

et on pourra traiter ensemble les trois équations

$$(Pq+Qp+Uy)\,dx+dq=V\,dx$$
$$q\,dx-dp=0$$
$$p\,dx-dy=0,$$

qui ne sont que du premier ordre. En opérant, comme dans le n°. 656, on trouvera

$$[(P+\theta)q+(Q+\theta')p+Uy]\,dx+dq-\theta\,dp-\theta'dy=V\,dx;$$

prenant ensuite $q-\theta p-\theta' y=\zeta$, et regardant θ et θ' comme des fonctions de x, il en résultera

$$dq-\theta\,dp-\theta'dy=d\zeta+p\,d\theta+y\,d\theta';$$

par là l'équation ci-dessus prendra la forme

$$\left[(P+\theta)q+\left(Q+\theta'+\frac{d\theta}{dx}\right)p+\left(U+\frac{d\theta'}{dx}\right)y\right]dx+d\zeta=V\,dx;$$

et si on la compare avec $Z\zeta dx + d\zeta = V dx$, dont l'intégrale est $\zeta = e^{-\int Z dx}(\int e^{\int Z dx} V dx + C)$, en observant que $\zeta = q - \theta p - \theta' y$, on aura

$$P + \theta = Z, \quad Q + \theta' + \frac{d\theta}{dx} = -Z\theta, \quad U + \frac{d\theta'}{dx} = -Z\theta' :$$

après avoir éliminé Z de ces trois équations, il en restera deux du premier ordre entre θ et θ', qui conduiront à une du second par rapport à θ ou à θ'. Lorsque les coefficiens P, Q et U seront constans, on pourra supposer que θ et θ' le soient aussi, et il viendra seulement

$$Q + \theta' = -(P+\theta)\theta, \qquad U = -(P+\theta)\theta',$$

$$q - \theta p - \theta' y = e^{-(P+\theta)x}\left(\int e^{(P+\theta)x} V dx + C\right).$$

Cette dernière équation en fournira trois, parce que l'équation finale en θ s'élevera au troisième degré ; on pourra donc déterminer séparément q, p et y. L'application de cette méthode à toute autre équation du premier ordre ne sauroit avoir aucune difficulté, et si l'on rencontroit pour θ des racines imaginaires ou des racines égales, on feroit usage des procédés du n°. 650.

659. On peut encore se servir, ainsi qu'il suit, des facteurs pour intégrer les équations du premier degré. Soient les équations à trois variables

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{d^n y}{dx^n} + B\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \ldots + P\frac{d^m y}{dx^m} + Q\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} \ldots + Uy \\ &+ A_1\frac{d^n \zeta}{dx^n} + B_1\frac{d^{n-1}\zeta}{dx^{n-1}} \ldots + P_1\frac{d^m \zeta}{dx^m} + Q_1\frac{d^{m-1}\zeta}{dx^{m-1}} \ldots + U_1\zeta \end{aligned}\right\} = V$$

$$\left.\begin{aligned} &P'\frac{d^m y}{dx^m} + Q'\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} \ldots + U'y \\ &+ P'_1\frac{d^m \zeta}{dx^m} + Q'_1\frac{d^{m-1}\zeta}{dx^{m-1}} \ldots + U'_1\zeta \end{aligned}\right\} = V$$

l'une de l'ordre n et l'autre de l'ordre m ; on multipliera la première par ξdx, la seconde par $\xi' dx$, l'on ajoutera les résultats, et il viendra

$$\left.\begin{aligned} &A\xi\frac{d^n y}{dx^{n-1}}+B\xi\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}}\ldots+P\,\xi\left|\frac{d^m y}{dx^{m-1}}+Q\,\xi\right|\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-2}}\ldots+V\,\xi\Big|y\\ &\qquad\qquad+P'\,\xi'\Big|\qquad\quad+Q'\xi'\Big|\qquad\qquad+V'\xi'\Big|\\ &+A_1\xi\frac{d^n\zeta}{dx^{n-1}}+B_1\xi\frac{d^{n-1}\zeta}{dx^{n-2}}\ldots+P_1\,\xi\left|\frac{d^m\zeta}{dx^{m-1}}+Q_1\xi\right|\frac{d^{m-1}\zeta}{dx^{m-2}}\ldots+V_1\,\xi\Big|\zeta\\ &\qquad\qquad+P'_1\xi'\Big|\qquad\quad+Q'_1\xi'\Big|\qquad\qquad+V'_1\xi'\Big|\end{aligned}\right\}$$
$$=(V\xi+V'\xi')\,dx\ldots\ldots\ldots\ldots(A):$$

il faudra déterminer les facteurs ξ et ξ' par la condition que cette dernière équation soit une différentielle complète. On trouvera par les formules du n°. 90, en observant que dx est constant, et en écrivant $\frac{d^n y}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}}$, etc. $\frac{d^n\zeta}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^{n-1}\zeta}{dx^{n-2}}$, etc. à la place de y_n, y_{n-1}, etc, ζ_n, ζ_{n-1}, etc. les deux équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^n.\xi A}{dx^n}-\frac{d^{n-1}.\xi B}{dx^{n-1}}\ldots\pm\frac{d^m.\xi P}{dx^m}\mp\frac{d^{m-1}.\xi Q}{dx^{m-1}}\ldots\pm\xi V\\ &\qquad\pm\frac{d^m.\xi' P'}{dx^m}\mp\frac{d^{m-1}.\xi' Q'}{dx^{m-1}}\ldots\pm\xi' V'\end{aligned}\right\}=0$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^n.\xi A_1}{dx^n}-\frac{d^{n-1}.\xi B_1}{dx^{n-1}}\ldots\pm\frac{d^m.\xi P_1}{dx^m}\mp\frac{d^{m-1}.\xi Q_1}{dx^{m-1}}\ldots\pm\xi V_1\\ &\qquad\pm\frac{d^m.\xi' P'_1}{dx^m}\mp\frac{d^{m-1}.\xi' Q'_1}{dx^{m-1}}\ldots\pm\xi' V'_1\end{aligned}\right\}=0$$

Lorsque ces conditions seront remplies, l'intégrale de l'équation (A) sera de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\beta\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\ldots+\varphi\frac{d^m y}{dx^m}+\chi\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\downarrow\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}\ldots+\omega\\ &\alpha_1\frac{d^{n-1}\zeta}{dx^{n-1}}+\beta_1\frac{d^{n-2}\zeta}{dx^{n-2}}\ldots+\varphi_1\frac{d^m\zeta}{dx^m}+\chi_1\frac{d^{m-1}\zeta}{dx^{m-1}}+\downarrow_1\frac{d^{m-2}\zeta}{dx^{m-2}}\ldots+\omega_1\end{aligned}\right\}=0.$$

Pour obtenir les valeurs de α, β, etc. α_1, β_1, etc. on différentiera et on comparera le résultat avec l'équation (A); on trouvera ainsi

$\xi A=\alpha$	$\xi A_1=\alpha_1$
$\xi B=\frac{d\alpha}{dx}+\beta$	$\xi B_1=\frac{d\alpha_1}{dx}+\beta_1$
$\xi C=\frac{d\beta}{dx}+\gamma$	$\xi C_1=\frac{d\beta_1}{dx}+\gamma_1$
.....	.....
$\xi P+\xi' P'=\frac{d\varphi}{dx}+\chi$	$\xi P_1+\xi' P'_1=\frac{d\varphi_1}{dx}+\chi_1$
$\xi Q+\xi' Q'=\frac{d\chi}{dx}+\downarrow$	$\xi Q_1+\xi Q'_1=\frac{d\chi_1}{dx}+\downarrow_1$,
etc.	etc.

Nous ne nous arrêterons pas à développer les expressions de α, β, etc. α_1, β_1, etc. nous nous bornerons à faire observer que les équations qui doivent donner les facteurs ξ et ξ' sont indépendantes des fonctions V et V', et que si l'on peut se procurer $n+m$ valeurs de ξ, et autant de ξ', on aura un pareil nombre d'équations de l'ordre $n-1$, entre les fonctions inconnues y, z, et leurs coefficiens différentiels; mais si $m>n$, la seule différentiation de la deuxième équation proposée, poussée jusqu'à l'ordre $n-1$, donnera $n-m$ équations, en y comprenant cette équation elle-même, et on aura par conséquent en tout $n+m+n-m$, ou $2n$ équations: si on en élimine les $2n-1$ inconnues,

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \quad z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}},$$

la résultante sera une équation primitive entre x, y et $n+m$ constantes arbitraires. Nous laissons au lecteur à faire l'application de cette méthode à un plus grand nombre d'équations du premier degré: lorsqu'on s'en sert pour l'équation de ce degré à deux variables seulement, elle conduit au même résultat que celle du n°. 647, mais d'une manière moins simple; car il faut multiplier l'équation d'où dépend le facteur ξ, le seul à considérer dans ce cas, par un nouveau facteur, et l'équation qui doit donner ce dernier, se déduit de la proposée en y faisant $V=0$. Les calculs à effectuer sont semblables à ceux qui précèdent; les formules relatives au premier facteur ξ s'obtiennent en supprimant dans celles qui ont été trouvées plus haut, tout ce qui a rapport à la variable z et à la seconde équation proposée.

660. Nous croyons devoir rapporter ici, d'après Euler, la solution d'un problême de Géométrie, qui conduit à des équations du premier degré de tous les ordres. Ce problême a pour objet la détermination des courbes qui ont des développées semblables à elles. On a déjà vu (n^os^ 273 et 278), que la cycloïde et la spirale logarithmique étoient dans ce cas; mais la question, envisagée sous le point de vue le plus général, est résolue par une infinité de courbes différentes.

On considère, dans cette recherche, une courbe comme ayant une infinité de développées, à commencer par celle qui la produit immédia-

tement, qu'on nomme la première développée ; vient après la développée de celle-ci, qu'on nomme la seconde développée, et ainsi de suite. La courbe AM, *fig.* 23, a pour première développée la courbe $A'M'$; celle-ci a pour développée $A''M''$, qui est par conséquent la seconde développée de AM, etc. Il est à propos de remarquer que les rayons de courbure des courbes représentées dans la figure citée, croissent tous en même tems, et qu'alors toutes les développées engendrent simultanément leur développante de la même manière ; c'est-à-dire, que tandis que $A'M'$ se développe pour produire AM, $A''M''$ se développe aussi pour produire $A'M'$, et $A'''M'''$, pour produire $A''M''$. Il n'en est pas de même dans les *fig.* 24 et 25 ; on voit par la première, que quand $A'M'$ se développe pour engendrer AM, $A''M''$ s'enveloppe pour former $A'M'$, puisqu'à mesure qu'on avance de A' vers M', le rayon de courbure $M'M''$ se raccourcit, tandis que MM' augmente. La figure 25 présente le même renversement, mais pour la troisième développée ; ainsi tandis que $A'M'$ et $A''M''$ se développent, $A'''M'''$ s'enveloppe.

FIG. 23.

Cela posé, si on regarde les courbes AM et $A'M'$, *fig.* 23, comme des assemblages d'arcs de cercles, décrits sur les rayons de courbures consécutifs, les secteurs $Mm'm$, $M'm''m'$, $M''m'''m''$, etc. terminés par les rayons MM', $M'M''$, mm', $m'm''$, $M'M''$, $M''M'''$, $m'm''$, $m''m'''$, etc. perpendiculaires deux à deux, seront semblables et donneront $Mm:M'm':M''m''$:etc. :: $MM':M'M'':M''M'''$:etc. En faisant

$$MM'=r, \qquad M'M''=r', \qquad M''M'''=r'', \quad \text{etc.}$$
$$Mm=ds, \qquad M'm'=ds', \qquad M''m''=ds'', \quad \text{etc.}$$

on aura aussi $M'm'=dr$, $M''m''=dr'$, etc. et par conséquent

$$r'=\frac{rdr}{ds} \qquad ds'=dr$$
$$r''=\frac{r}{ds}d\left(\frac{rdr}{ds}\right) \qquad ds''=d\left(\frac{rdr}{ds}\right)$$
$$r'''=\frac{r}{ds}d\left(\frac{r}{ds}d\left(\frac{rdr}{ds}\right)\right) \qquad ds'''=d\left(\frac{r}{ds}d\left(\frac{rdr}{ds}\right)\right)$$
$$r''''=\frac{r}{ds}d\left(\frac{r}{ds}d\left(\frac{r}{ds}d\left(\frac{rdr}{ds}\right)\right)\right) \qquad ds''''=d\left(\frac{r}{ds}d\left(\frac{r}{ds}d\left(\frac{rdr}{ds}\right)\right)\right)$$
etc. etc.

On aura l'équation de telle développée que l'on voudra, par le moyen de son arc et de son rayon de courbure, en combinant ensemble les équations qui se correspondent dans ces deux suites. Si quelques-unes des développées de la courbe proposée devoient être placées, par rapport à elle, dans une situation inverse des autres, il faudroit donner le signe — aux rayons de courbure de celle qui les suit immédiatement. Dans la figure 24, par exemple, $M'M''$ décroît tandis que MM' augmente; on a donc

$$dr' = -d\left(\frac{r\,dr}{ds}\right) = ds'', \qquad r'' = -\frac{r}{ds}\,d\left(\frac{r\,dr}{ds}\right).$$

Soit pour abréger $\frac{ds}{r} = dv$, et prenons cette différentielle pour constante; nous aurons

$$r' = \frac{dr}{dv}, \quad r'' = \pm\frac{d^2r}{dv^2}, \quad r''' = \pm\frac{d^3r}{dv^3}, \quad r'''' = \pm\frac{d^4r}{dv^4}, \text{ etc.}$$

661. Lorsque la courbe AM doit être semblable à l'une de ses développées et placée dans le même sens qu'elle, il faut que les arcs AM, comptés depuis le premier point du développement, soient proportionnels à ceux qui leur correspondent dans la développée, et qu'il en soit de même du rayon de courbure. S'il s'agissoit, par exemple, de la seconde développée, on auroit pour tous ses points, $AM : A''M'' :: MM' : M''M''' :: 1 : a$, a étant une constante; on tireroit de là $s'' = as$, $r'' = ar$, et substituant dans l'équation $r'' = \frac{d^2r}{dv^2}$, il en résulteroit $\frac{d^2r}{dv^2} - ar = 0$. En général, $\frac{d^nr}{dv^n} - ar = 0$ sera l'équation de la courbe directement semblable à sa développée de l'ordre n, et dans son intégrale

$$r = C_1 e^{m_1 v} + C_2 e^{m_2 v} \ldots\ldots + C_n e^{m_n v} \text{ (n°. 648)},$$

les lettres m_1, m_2, $m_3 \ldots m_n$, désigneront les racines de l'équation $m^n - a = 0$, faciles à obtenir par les formules du n°. 167. Cette intégrale n'offre qu'une relation entre le rayon de courbure r et la fonction v; et puisque $\frac{ds}{r}$ est l'expression de l'arc qui mesure l'angle $Mm'm$ sur un cercle décrit d'un rayon égal à l'unité, il s'ensuit que la

fonction $v=\int\frac{ds}{r}$ donne l'angle que fait le rayon de courbure MM', avec celui qui se rapporte au premier point de la courbe cherchée, ou ce qui est la même chose, l'angle que font entr'elles les tangentes menées aux deux extrémités de l'arc AM. Cette manière de présenter l'équation d'une courbe, est remarquable en ce qu'elle n'employe que des quantités absolument inhérentes à la courbe proposée, et qu'elle ne laisse d'arbitraire que le choix du premier point. Pour passer des coordonnées r et v aux coordonnées rectangles x et y, il suffit de se rappeler, que si l'on fait $dy=pdx$, on aura $ds=dx\sqrt{1+p^2}$, $r=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dx}{dp}$, soit qu'on regarde dx comme constant ou comme variable (n°. 273), et par conséquent

$$dv=\frac{ds}{r}=\frac{dp}{1+p^2},\quad v=\int\frac{dp}{1+p^2}.$$

Substituant au lieu de r et de v leurs valeurs, on obtiendra

$$dx=\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\left[C_1e^{m_1\int\frac{dp}{1+p^2}}+C_2e^{m_2\int\frac{dp}{1+p^2}}\ldots\ldots+C_ne^{m_n\int\frac{dp}{1+p^2}}\right],$$

et, à cause de $dy=pdx$,

$$dy=\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\left[C_1e^{m_1\int\frac{dp}{1+p^2}}+C_2e^{m_2\int\frac{dp}{1+p^2}}\ldots\ldots+C_ne^{m_n\int\frac{dp}{1+p^2}}\right].$$

En intégrant par parties, d'après la seconde formule du n°. 431, on trouvera

$$\int\frac{e^{m_1\int\frac{dp}{1+p^2}}dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^{m_1\int\frac{dp}{1+p^2}}p}{\sqrt{1+p^2}}+\frac{m_1e^{m_1\int\frac{dp}{1+p^2}}}{\sqrt{1+p^2}}-m_1^2\int\frac{e^{m_1\int\frac{dp}{1+p^2}}dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où il suit

$$\int\frac{e^{m_1\int\frac{dp}{1+p^2}}dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^{m_1\int\frac{dp}{1+p^2}}(p+m_1)}{(1+m_1^2)\sqrt{1+p^2}};$$

on

on parviendra d'une manière semblable à

$$\int \frac{e^{m_1 \int \frac{dp}{1+p^2}} p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^{m_1 \int \frac{dp}{1+p^2}} (m_1 p - 1)}{(1+m_1^2)\sqrt{1+p^2}}.$$

Traitant ainsi tous les termes des valeurs de dx et dy, et comprenant dans les constantes arbitraires les diviseurs $1+m_1^2$, $1+m_2^2$, etc. on arrivera alors à

$$x+A = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[C_1(p+m_1)e^{m_1\int\frac{dp}{1+p^2}} \ldots + C_n(p+m_n)e^{m_n\int\frac{dp}{1+p^2}}\right]$$

$$y+B = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[C_1(m_1p-1)e^{m_1\int\frac{dp}{1+p^2}} \ldots + C_n(m_np-1)e^{m_n\int\frac{dp}{1+p^2}}\right],$$

équations dans lesquelles A et B désignent deux nouvelles constantes.

Si on avoit $C_2, \ldots\ldots C_n = 0$, on éliminerait $\frac{C_1 e^{m_1\int\frac{dp}{1+p^2}}}{\sqrt{1+p^2}}$, en divisant la seconde équation par la première, ce qui donneroit $\frac{y+B}{x+A} = \frac{m_1 p - 1}{p+m_1}$. Il est aisé de voir que ce cas revient à celui des courbes qui sont directement semblables à leur première développée, et qu'alors on a $m-a=0$; en mettant ensuite, dans l'équation précédente, x et y, au lieu de $x+B$ et de $y+B$, ce qui ne change rien à p, elle devient $a(x\,dy - y\,dx) = x\,dx + y\,dy$, équation différentielle de la spirale logarithmique (n°. 605).

Dans le cas général, les valeurs de $x+A$ et de $y+B$, contiendront des imaginaires qu'il sera facile de chasser, par les expressions des exponentielles en sinus et cosinus, en observant que $\int\frac{dp}{1+p^2} = \text{arc}(\text{tang} = p) = v$, et que par conséquent

$$p = \text{tang}\, v, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \cos v, \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \sin v.$$

On déduit immédiatement de là des valeurs de x et de y en v

et en s; car de $ds=dx\sqrt{1+p^2}$, on tire $dx=ds\cos v$, $dy=pdx=ds\operatorname{tang} v\cos v=ds\sin v$, et $x=\int ds\cos v$, $y=\int ds\sin v$; mettant au lieu de ds, sa valeur rdv, on aura encore

$$x=\int rdv\cos v, \qquad y=\int rdv\sin v,$$

formules générales qui serviront à transformer les coordonnées s et v, ou r et v, en coordonnées rectangles x et y.

Dans tout ce qui précède, on a supposé que la courbe cherchée étoit directement semblable à la développée à laquelle on la comparoit; mais il peut arriver qu'elle soit placée dans une situation inverse: telle est la cycloïde, qui est engendrée par une autre cycloïde égale, mais située en sens contraire. Ce second cas est compris implicitement dans le premier. Lorsque la première développée est en sens inverse, la seconde développée se trouve directement semblable à la proposée, et elle s'enveloppe lorsque la première se développe; on aura donc égard à cette circonstance, en prenant l'équation $r''=-\frac{d^2r}{dv^2}$, qui conduit à $\frac{d^2r}{dv^2}+ar=0$. Si la courbe cherchée devoit être inversement semblable à sa troisième développée, alors elle le seroit directement à sa sixième, avec cette restriction que celle-ci s'envelopperoit pendant que l'autre se développeroit; on prendroit donc dans ce cas $\frac{d^6r}{dv^6}+ar=0$. En général, pour avoir la courbe inversement semblable à sa développée de l'ordre n, il faudra prendre l'équation $\frac{d^{2n}r}{dv^{2n}}+ar=0$.

Usage des équations différentielles du premier degré, pour intégrer par approximation.

662. La méthode des substitutions successives, combinée avec l'intégration des équations du premier degré, donne le procédé le plus commode et le plus utile pour intégrer par approximation les équations différentielles. Prenons d'abord un exemple; soit l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}+y+\alpha y^3=b$, dans laquelle α désigne une quantité très-petite; lorsqu'on néglige cette quantité, la proposée se réduit à $\frac{d^2y}{dx^2}+y=b$, et si on compare cette dernière à l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=R$, traitée

n°. 623, on trouvera que son intégrale est $y=b+p\cos x+q\sin x$. Représentons par Y cette première valeur de y, et faisons $y=Y+\alpha y'$; en substituant dans la proposée, nous trouverons

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+Y+\alpha\left(\frac{d^2y'}{dx^2}+y'+Y^2\right)+2\alpha^2Yy'+\alpha^3y'^2=b,$$

résultat qui se réduit à $\frac{d^2y'}{dx^2}+y'=-Y^2$, en négligeant les termes multipliés par α^2 et α^3, et en observant que $\frac{d^2Y}{dx^2}+Y=b$. Or

$$Y^2=b^2+2b(p\cos x+q\sin x)+(p\cos x+q\sin x)^2$$

et $(p\cos x+q\sin x)^2=p^2\cos x^2+2pq\cos x\sin x+q^2\sin x^2=$
$\frac{1}{2}p^2(\cos 2x+1)+pq\sin 2x+\frac{1}{2}q^2(1-\cos 2x)$ (*Int.* n°s. 42, 43); mettant la valeur de Y^2 dans l'équation précédente, elle deviendra

$$\frac{d^2y'}{dx^2}+y'=-\left\{\begin{matrix}b^2+\frac{1}{2}(p^2+q^2)+2bp\cos x+\frac{1}{2}(p^2-q^2)\cos 2x\\ +2bq\sin x+\qquad pq\sin 2x\end{matrix}\right\};$$

comparant cette dernière à l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=R$, nous trouverons

$$a=1,\quad R=-\left\{\begin{matrix}b^2+\frac{1}{2}(p^2+q^2)+2bp\cos x+\frac{1}{2}(p^2-q^2)\cos 2x\\ +2bq\sin x+\qquad pq\sin 2x\end{matrix}\right\}.$$

Prenons pour plus de généralité $R=A+B\cos\beta x+B'\sin\beta x$, et développons l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y'}{dx^2}+a^2y'=A+B\cos\beta x+B'\sin\beta x.$$

En substituant à la place de R sa valeur, et en changeant y en y', p en p' et q en q', dans l'équation

$$y=p\cos ax+q\sin ax+\frac{\sin ax\int R\,dx\cos ax-\cos ax\int R\,dx\sin ax}{a},$$

obtenue n°. 623, nous aurons $y'=p'\cos ax+q'\sin ax+\frac{A}{a^2}$

$$+\frac{B}{a}(\sin ax\int dx\cos ax\cos\beta x-\cos ax\int dx\sin ax\cos\beta x)$$

$$+\frac{B'}{a}(\sin ax\int dx\cos ax\sin\beta x-\cos ax\int dx\sin ax\sin\beta x);$$

les deux dernières lignes de ce résultat s'intégrent par les formules du n°. 442, en observant que

$$\cos ax\cos\beta x = \tfrac{1}{2}\cos(a+\beta)x + \tfrac{1}{2}\cos(a-\beta)x$$
$$\sin ax\cos\beta x = \tfrac{1}{2}\sin(a+\beta)x + \tfrac{1}{2}\sin(a-\beta)x$$
$$\cos ax\sin\beta x = \tfrac{1}{2}\sin(a+\beta)x - \tfrac{1}{2}\sin(a-\beta)x$$
$$\sin ax\sin\beta x = -\tfrac{1}{2}\cos(a+\beta)x + \tfrac{1}{2}\cos(a-\beta)x,$$

et il vient $y' = p'\cos ax + q'\sin ax + \frac{A}{a^2}$

$$+\frac{B}{2a}\left[\sin ax\left(\frac{\sin(a+\beta)x}{a+\beta} + \frac{\sin(a-\beta)x}{a-\beta}\right) + \cos ax\left(\frac{\cos(a+\beta x)}{a+\beta} + \frac{\cos(a-\beta)x}{a-\beta}\right)\right]$$
$$-\frac{B'}{2a}\left[\sin ax\left(\frac{\cos(a+\beta)x}{a+\beta} - \frac{\cos(a-\beta)x}{a-\beta}\right) - \cos ax\left(\frac{\sin(a+\beta)x}{a+\beta} - \frac{\sin(a-\beta)x}{a-\beta}\right)\right],$$

expression équivalente à

$$y' = p'\cos ax + q'\sin ax + \frac{A}{a^2} + \frac{B}{a^2-\beta^2}\cos\beta x + \frac{B'}{a^2-\beta^2}\sin\beta x.$$

Lorsqu'on a $\beta = a$, les deux derniers termes de cette valeur deviennent infinis; il faut recourir immédiatement à l'intégrale générale et la développer dans cette hypothèse : on trouve

$$y' = p'\cos ax + q'\sin ax + \frac{A}{a^2} + \frac{B}{2a}x\sin ax - \frac{B'}{2a}x\cos ax.$$

On parviendroit au même résultat en mettant l'expression obtenue précédemment sous la forme,

$$y' = p'\cos ax + q'\sin ax + \frac{A}{a^2} + \frac{B(\cos\beta x - \cos ax)}{a^2-\beta^2} + \frac{B'(\sin\beta x - \sin ax)}{a^2-\beta^2},$$

ce qui revient à changer les constantes, et à prendre $p' - \frac{B}{a^2-\beta^2}$ et $q' - \frac{B'}{a^2-\beta^2}$, au lieu de p' et de q'; la supposition de $\beta = a$ rend alors les deux derniers termes $\frac{0}{0}$, et l'application de la méthode du n°. 139 donne leur vraie valeur.

Quand la valeur de Q sera de la forme $A + B\cos\beta x + B'\sin\beta x + C\cos\gamma x + C'\sin\gamma x$, il suffira, pour avoir égard aux nouveaux termes $C\cos\gamma x$, $C'\sin\gamma x$, d'ajouter au résultat trouvé ci-dessus, la quantité $\frac{C}{a^2-\gamma^2}\cos\gamma x + \frac{C'}{a^2-\gamma^2}\sin\gamma x$, et ainsi de suite, pour tel nombre de termes que l'on voudra.

Cela posé, reprenons l'équation

$$\frac{d^2y'}{dx^2}+y'=-\left\{\begin{array}{r} b^2+\frac{1}{2}(p^2+q^2)+2bp\cos x+\frac{1}{2}(p^2-q^2)\cos 2x \\ +2bq\sin x+\quad pq\sin 2x \end{array}\right\},$$

nous aurons $a=1$, $A=-\frac{2b^2+p^2+q^2}{2}$; les deux termes $2bp\cos x$ et $2bq\sin x$ donneront, à cause de $\beta=1$, $bpx\sin x-bqx\cos x$; faisant ensuite $\beta=2$, on trouvera, pour les termes $\frac{1}{2}(p^2-q^2)\cos 2x$ et $pq\sin 2x$, $-\frac{p^2-q^2}{6}\cos 2x-\frac{pq}{3}\sin 2x$. Enfin on supprimera les constantes arbitraires p' et q', parce que la première, valeur de y, ou Y, en contient déjà un nombre suffisant, et il viendra

$$y'=-\frac{2b^2+p^2+q^2}{2}-bx(p\sin x-q\cos x)+\frac{p^2-q^2}{6}\cos 2x+\frac{pq}{3}\sin 2x;$$

on aura donc pour la seconde valeur approchée

$$y=b-\frac{a(2b^2+p^2+q^2)}{2}+(p+abqx)\cos x+\frac{a(p^2-q^2)}{6}\cos 2x$$
$$+(q-abpx)\sin x+\frac{apq}{3}\sin 2x.$$

Si l'on ne trouvoit pas cette expression suffisamment exacte, on feroit $y'=Y'+\alpha y''$, Y' étant la valeur de y' obtenue plus haut; et on substitueroit dans l'équation $\frac{d^2y'}{dx^2}+y'+Y^2+2\alpha Yy'+\alpha^2y'^2=0$, d'où dépend y', lorsqu'on ne néglige aucun terme; il viendroit

$$\frac{d^2Y'}{dx^2}+Y'+Y^2+\alpha\left(\frac{d^2y''}{dx^2}+y''+2YY'\right)+\alpha^2\left\{\begin{array}{r}(2Yy''+Y'^2)\\ +2\alpha^3Y'y''+\alpha^4y''^2\end{array}\right\}=0;$$

résultat qui se réduit à $\frac{d^2y''}{dx^2}+y''+2YY'=0$, en effaçant les termes $\frac{d^2Y'}{dx^2}+Y'+Y^2$, qui se détruisent entr'eux, et en négligeant ceux qui restent affectés de α, après qu'on a divisé par cette quantité. Cette dernière équation s'intégreroit comme l'équation approchée en y', et la valeur qu'on en tireroit pour y'', donneroit les termes qui doivent être multipliés par α^2 dans l'expreſſion de y.

663. La marche de la méthode que nous venons d'employer est assez évidente pour qu'on puisse en continuer l'application aussi loin

que l'exigera le degré de précision auquel on veut atteindre ; mais elle peut être simplifiée en remontant à la forme qu'elle donne à la valeur de y. Il est aisé de voir en effet qu'elle revient à supposer

$$y = Y + \alpha Y' + \alpha^2 Y'' + \alpha^3 Y''' + \text{etc.}$$

après les substitutions qui résultent de cette hypothèse, l'équation proposée, ordonnée par rapport à α, deviendra

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2Y}{dx^2} + Y - b + \alpha\left(\frac{d^2Y'}{dx^2} + Y' + Y^2\right) + \alpha^2\left(\frac{d^2Y''}{dx^2} + Y'' + 2YY'\right)\\ + \alpha^3\left(\frac{d^2Y'''}{dx^2} + Y''' + Y'^2 + 2YY''\right) + \text{etc.}\end{aligned}\right\} = 0$$

et en égalant séparément à zéro le coefficient de chaque puissance de α, on aura les équations

$$\begin{aligned}\frac{d^2Y}{dx^2} + Y &= b\\ \frac{d^2Y'}{dx^2} + Y' &= -Y^2\\ \frac{d^2Y''}{dx^2} + Y'' &= -2YY'\\ \frac{d^2Y'''}{dx^2} + Y''' &= -Y'^2 - 2YY''\end{aligned}$$

etc.

La première donnera la valeur de Y, qu'on substituera dans la seconde pour obtenir celle de Y', et ainsi de suite. L'intégration de toutes ces équations s'effectuera comme celle de

$$\frac{d^2y'}{dx^2} + y' = A + B\cos\beta x + B'\sin\beta x \quad (\text{n°. précéd.}),$$

et en se bornant aux termes multipliés par α^2, on trouvera de même que ci-dessus

$$\begin{aligned}Y &= b + p\cos x + q\sin x\\ Y' &= -\tfrac{1}{3}(2b^2 + p^2 + q^2) + bqx\cos x + \tfrac{1}{6}(p^2 - q^2)\cos 2x\\ &\quad - bpx\sin x + \tfrac{1}{3}pq\sin 2x\\ Y'' &= b(2b^2 + p^2 + q^2) - [\tfrac{1}{12}q(18b^2 + 5p^2 + 5q^2)x + \tfrac{1}{2}pb^2x^2]\cos x\\ &\quad + [\tfrac{1}{12}p(18b^2 + 5p^2 + 5q^2)x - \tfrac{1}{2}qb^2x^2]\sin x\\ &\quad - [\tfrac{1}{3}b(p^2 - q^2) - \tfrac{2}{3}bpqx]\cos 2x + \tfrac{1}{48}p(p^2 - 3q^2)\cos 3x\\ &\quad - [\tfrac{1}{3}b(p^2 - q^2) + \tfrac{2}{3}bpqx]\sin 2x + \tfrac{1}{48}q(3p^2 - q^2)\sin 3x,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$y=b-\alpha\left(\tfrac{1}{2}-\alpha b\right)\left(2b^2+p^2+q^2\right)$$
$$+\left[p+\alpha bqx-\tfrac{1}{12}\alpha^2qx\left(18b^2+5p^2+5q^2\right)-\tfrac{1}{4}\alpha^2pb^2x^2\right]\cos x$$
$$+\left[q-\alpha bpx+\tfrac{1}{12}\alpha^2px\left(18b^2+5p^2+5q^2\right)-\tfrac{1}{4}\alpha^2qb^2x^2\right]\sin x$$
$$+\alpha\left[\tfrac{1}{6}\left(p^2-q^2\right)-\tfrac{1}{3}\alpha b\left(p^2-q^2\right)+\tfrac{2}{3}\alpha bpqx\right]\cos 2x$$
$$+\alpha\left[\tfrac{1}{3}pq-\tfrac{1}{3}\alpha b\left(p^2-q^2\right)-\tfrac{2}{3}\alpha bpqx\right]\sin 2x$$
$$+\tfrac{1}{48}\alpha^2p\left(p^2-3q^2\right)\cos 3x+\tfrac{1}{48}\alpha^2q\left(3p^2-q^2\right)\sin 3x.$$

Cette méthode s'appliquera avec succès aux équations de la forme $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=R+\alpha S$, R et S étant des fonctions rationnelles et entières, l'une de x, l'autre de x et de y, et α désignant toujours une quantité très-petite. En faisant dans une semblable équation $y=Y+\alpha Y'+\alpha^2Y''+$ etc. et en égalant séparément à zéro les quantités qui multiplient chaque puissance de α, on en tirera des équations de la forme

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+a^2Y=R$$
$$\frac{d^2Y'}{dx^2}+a^2Y'=S'$$
$$\frac{d^2Y''}{dx^2}+a^2Y''=S''$$
etc.

dans lesquelles S' ne dépendra que de x et de Y, S'' de x et de Y', et ainsi de suite.

Il est évident que la méthode qui nous occupe s'étend en général aux équations du premier degré de la forme

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+b\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\ldots\ldots+hy=R+\alpha S,$$

$a, b, \ldots\ldots h$, étant des coefficiens constans, et que les opérations à faire dans tous les cas seront absolument semblables à celles de l'exemple précédent.

664. Il arrive souvent que la série $Y+\alpha Y'+\alpha^2Y''+$ etc. ne se présente pas sous la forme la plus commode pour l'approximation; la série qui exprime la valeur de y dans l'exemple du n°. précédent, et qui revient à

$$A+(B+Cx+Dx^2)\cos x+(E+Fx)\cos 2x+G\cos 3x$$
$$+(B'+C'x+D'x^2)\sin x+(E'+F'x)\sin 2x+G'\cos 3x,$$

ne peut donner un résultat approché que tant que la valeur de x est très-petite, tandis que si l'on avoit

$$y=A_1+B_1\cos\beta x+C_1\cos\gamma x+\text{etc.},$$
$$+B'_1\sin\beta x+C'_1\sin\gamma x+\text{etc.}$$

et que les coefficiens A_1, B_1, B_2,.... B'_1, B'_2, etc. formassent une suite convergente, l'expression de y seroit elle-même toujours convergente, puisque les fonctions $\cos\beta x$, $\cos\gamma x$, etc. $\sin\beta x$, $\sin\gamma x$, etc. ne peuvent jamais surpasser l'unité. Il est donc bien important de chercher à ramener l'une de ces formes à l'autre, et il est naturel de penser qu'on doit y réussir au moins toutes les fois que l'équation proposée ne contient pas la variable x elle-même, mais seulement des sinus et des cosinus de cette quantité et de ses multiples.

Supposons qu'une telle équation ait donné

$$y=P+P'x+P''x^2+P'''x^3+\text{etc.}$$

P, P', P'' etc. ne contenant que des exponentielles, des sinus et des cosinus des multiples de x, et enfin les constantes arbitraires p et q, etc. introduites par l'intégration; nous aurons

$$dy=\frac{dP}{dx}+P'+\left(\frac{dP'}{dx}+2P''\right)x+\left(\frac{dP''}{dx}+3P'''\right)x^2+\text{etc.}$$
$$d^2y=\frac{d^2P}{dx^2}+2\frac{dP'}{dx}+2P''+\left(\frac{d^2P'}{dx^2}+4\frac{dP''}{dx}+6P'''\right)x+\text{etc.}$$

etc.

valeurs qui, conjointement avec celle de y, doivent satisfaire à l'équation proposée; mais comme cette équation ne contient pas x, il faut que tous les termes affectés des puissances de x se détruisent entr'eux: il suit donc de là que les termes qui en sont indépendans satisfont aussi séparément à la même équation, en sorte qu'on la rend identique lorsqu'on y fait seulement

$$y=P,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dP}{dx}+P',\quad d^2y=\frac{d^2P}{dx^2}+2\frac{dP'}{dx}+2P'',\ \text{etc.}$$

Ces valeurs ne s'accordent pas entr'elles; car la deuxième n'est pas la différentielle de la première, ni la troisième celle de la seconde, et ainsi de suite; mais on fait cesser la contradiction, en regardant les constantes arbitraires, comme variables, et en les déterminant de manière

manière à rétablir la subordination exigée. En différentiant les expressions de y et de $\frac{dy}{dx}$, sous ce point de vue, il vient

$$dy=\frac{dP}{dx}dx+\frac{dP}{dp}dp+\frac{dP}{dq}dq$$

$$d.\frac{dy}{dx}=\frac{d^2P}{dx^2}dx+\frac{d^2P}{dxdp}dp+\frac{d^2P}{dxdq}dq+\frac{dP'}{dx}dx+\frac{dP'}{dp}dp+\frac{dP'}{dq}dq;$$

etc.

et en égalant ces résultats aux valeurs rapportées ci-dessus, on obtient les équations de condition

$$\frac{dP}{dp}dp+\frac{dP}{dq}dq=P'dx$$

$$\left(\frac{d^2P}{dxdp}+\frac{dP'}{dp}\right)dp+\left(\frac{d^2P}{dxdq}+\frac{dP'}{dq}\right)dq=\left(\frac{dP'}{dx}+2P''\right)dx;$$

etc.

qui serviront à déterminer p et q, puisque leur nombre sera égal à l'exposant de l'ordre de l'équation proposée; et n'étant elles-mêmes que du premier ordre, leur intégration n'introduira qu'autant de nouvelles constantes qu'il en faut pour que l'expression de y soit complète. La variable x pourra reparoître dans les expressions des quantités p, q, etc. et cela arrivera nécessairement lorsque l'intégrale de l'équation proposée devra la contenir elle-même. Il est à propos de remarquer que, suivant ce procédé, il ne faut considérer dans la série qui exprime y, que les termes qui sont affectés des puissances de x, d'un exposant égal à celui de l'ordre de l'équation proposée. Si cette série étoit

$$y=P+P'(x+p)+P''(x+p)^2+P'''(x+p)^3+\text{etc.}$$

il seroit nécessaire de la transformer dans une autre, parce que la constante arbitraire p disparoîtroit de l'équation proposée en même tems que x, et la méthode ne donneroit plus aucun résultat.

Revenons maintenant à l'exemple du n°. 662, et pour ne pas trop compliquer le calcul, ne poussons l'approximation que jusqu'aux termes affectés de la première puissance de a; nous aurons

$$y=b-\tfrac{1}{2}a(2b^2+p^2+q^2)+(p+abqx)\cos x+\tfrac{1}{6}a(p^2-q^2)\cos 2x$$
$$+(q-abpx)\sin x+\tfrac{1}{3}apq\sin 2x.$$

En donnant à cette expression la forme $P+P'x+P''x^2+$ etc. nous trouverons

$$P=b+p\cos x+q\sin x-\alpha\left[\frac{2b^2+p^2+q^2}{2}-\frac{p^2-q^2}{6}\cos 2x-\frac{pq}{3}\sin 2x\right]$$

$$P'=\alpha\,(bq\cos x-bp\sin x),\qquad P''=0;$$

au moyen de ces valeurs les équations (A) deviendront

$$\left.\begin{array}{l} dp\cos x+dq\sin x-\alpha\left(pdp+qdq-\dfrac{pdp-qdq}{3}\cos 2x-\dfrac{pdq+qdp}{3}\sin 2x\right) \\ =\alpha\,dx\,(bq\cos x-bp\sin x), \\ -dp\sin x+dq\cos x-2\alpha\left(\dfrac{pdp-qdq}{3}\sin 2x-\dfrac{pdq+qdp}{3}\cos 2x\right) \\ +\alpha\,(bdq\cos x-bdp\sin x) \\ =-\alpha\,dx\,(bq\sin x+bp\cos x). \end{array}\right\}$$

Si dans ces équations l'on ne tenoit compte que des termes indépendans de α, elles donneroient seulement

$$dp\cos x+dq\sin x=0,\qquad -dp\sin x+dq\cos x=0,$$

équations qui ne s'accordent entr'elles que quand on suppose $dp=0$, $dq=0$; il suit de là que $\frac{dp}{dx}$ et $\frac{dq}{dx}$, sont au moins des quantités fort petites ou de l'ordre de α, et qu'il faut par conséquent regarder comme multipliés par α^2, les termes où les différentielles dp et dq sont déjà multipliées par α. Cette considération réduit les deux équations précédentes à

$$dp\cos x+dq\sin x=\alpha\,bdx\,(q\cos x-p\sin x)$$
$$dp\sin x-dq\cos x=\alpha\,bdx\,(q\sin x+p\cos x),$$

et elles se changent alors en

$$dp=\alpha\,bq\,dx,\qquad dq=-\alpha\,bp\,dx,$$

en éliminant successivement les variables p et q dans le second membre. Ces dernières équations s'intégrent facilement par la méthode de d'Alembert (n°. 656); on y satisfait d'ailleurs en prenant $p=e^{mx}$, $q=Ae^{mx}$, et il vient, suivant le procédé du n°. 654, $m=\alpha bA$, $mA=-\alpha b$, d'où l'on tire $m=\pm\alpha b\sqrt{-1}$, $A=\pm\sqrt{-1}$, et par conséquent

$$p=Ce^{\alpha bx\sqrt{-1}}+C'e^{-\alpha bx\sqrt{-1}},\qquad q=\left(Ce^{\alpha bx\sqrt{-1}}-C'e^{-\alpha bx\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1};$$

on transformera ces valeurs en

$$p=c\sin(\alpha bx+c'),\qquad q=c\cos(\alpha bx+c')\text{ (n°. 617)};$$

on les substituera ensuite dans P, en observant que $p^2+q^2=c^2$, et en réduisant les produits de sinus et de cosinus en sinus et cosinus d'arcs multiples : on aura enfin

$$y=b-\tfrac{1}{2}a(2b^2+c^2)+\left\{\begin{array}{l} c\sin[(1+ab)x+c'] \\ -\tfrac{1}{2}ac^2\cos 2[(1+ab)x+c'] \end{array}\right\}.$$

Cette seconde expression de y a sur la première l'avantage de donner toujours une approximation sûre, quelle que soit la valeur de x, c'est-à-dire, quel que soit le nombre de circonférences dont cet arc puisse être composé. Les nouvelles constantes c et c', se déterminent par les valeurs que l'on assigne aux constantes primitives p, et q, lorsque $x=0$.

665. Nous n'avons considéré jusqu'ici qu'une seule équation; mais on en rencontre souvent un plus grand nombre, de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=R+\alpha S$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a_1^2y=R_1+\alpha S_1$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+a_2^2z=R_2+\alpha S_2,$$

dans lesquelles R, R_1, R_2, sont des fonctions rationnelles et entières de sinus et de cosinus de l'arc t, et S, S_1, S_2, renferment, avec ces sinus et ces cosinus, les variables x, y et z mêlées entr'elles. Dans ce cas on peut encore faire

$$x=X+\alpha X'+\alpha^2X''+\text{etc.}$$
$$y=Y+\alpha Y'+\alpha^2Y''+\text{etc.}$$
$$z=Z+\alpha Z'+\alpha^2Z''+\text{etc.}$$

et désignant par

$$\alpha S'+\alpha^2S''+\text{etc.}\qquad \alpha S_1'+\alpha^2S_1''+\text{etc.}\qquad \alpha S_2'+\alpha^2S_2''+\text{etc.}$$

ce que deviennent respectivement αS, αS_1, αS_2, par cette supposition, on trouvera, en opérant comme dans le n°. 663, que les quantités X, Y et Z, X', Y' et Z', sont données par les équations

$$\frac{d^2X}{dt^2}+a^2X=R,\qquad \frac{d^2Y}{dt^2}+a_1^2Y=R_1,\qquad \frac{d^2Z}{dt^2}+a_2^2Z=R_2$$

$$\frac{d^2X'}{dt^2}+a^2X'=S',\qquad \frac{d^2Y'}{dt^2}+a_1^2Y'=S_1',\qquad \frac{d^2Z'}{dt^2}+a_2^2Z'=S_2';$$

etc.

L'arc t pourra quelquefois entrer dans les expressions de X', Y', Z', etc. et pour le faire disparoître, il faudra recourir au procédé du n°. précéd. Pour ne donner qu'un exemple très-simple de ce cas, nous prendrons les équations

$$\frac{dy}{dx}=(1+2\alpha x)z, \qquad \frac{dz}{dx}=-(1+2\alpha x)y,$$

qui, quoiqu'elles contiennent l'arc x, n'en ont pas moins des intégrales indépendantes de cet arc. En effet, il ne faut pas toujours conclure de ce qu'il entre des arcs dans les équations proposées qu'il doit s'en trouver dans leurs intégrales; car on peut éliminer la variable x entre chacune de ces équations et sa différentielle*, et parvenir ainsi à deux nouvelles équations dans lesquelles il n'y aura point d'arcs. C'est aux intégrales approchées de celle-ci qu'il faudroit appliquer le procédé du n°. précéd. pour faire disparoître les arcs de cercles; mais on parvient au même but en intégrant immédiatement les proposées, après y avoir introduit une constante arbitraire par la substitution de $x+h$, au lieu de x, qui les change en

$$\frac{dy}{dx}=mz+2\alpha xz, \qquad \frac{dz}{dx}=-my-2\alpha xy,$$

lorsqu'on fait pour abréger $1+2\alpha h=m$.

Si on remplace y et z, par les séries $Y+\alpha Y'+$etc., $Z+\alpha Z'+$etc. on obtiendra les équations

$$\frac{dY}{dx}-mZ=0, \qquad \frac{dZ}{dx}+mY=0$$

$$\frac{dY'}{dx}-mZ'=2xZ, \qquad \frac{dZ'}{dx}+mY'=-2xY,$$

etc.

dont les intégrales seront

$$Y=p\cos mx+q\sin mx, \qquad Z=q\cos mx-p\sin mx$$

$$Y'=x^2(q\cos mx-p\sin mx), \qquad Z'=-x^2(p\cos mx+q\sin mx),$$

etc.

et donneront par conséquent

$$y=p\cos mx+q\sin mx+\alpha x^2(q\cos mx-p\sin mx)+\text{etc.}$$

$$z=q\cos mx-p\sin mx-\alpha x^2(p\cos mx+q\sin mx)+\text{etc.}$$

On fera varier les trois constantes p, q et h, pour chasser l'arc x

de ces expressions ; mais il faut se rappeler que l'une d'elles doit être traitée comme provenant d'une équation du second ordre, en vertu de l'introduction de la constante arbitraire h. Considérons ainsi l'expression de y ; en la comparant à $y=P+P'x+P''x^2+$etc. nous trouverons

$P=p\cos mx+q\sin mx$, $\quad P'=0$, $\quad P''=\alpha(q\cos mx-p\sin mx)$,

et à cause de la variabilité de h, les deux équations de condition du n°. précéd. deviendront

$$\frac{dP}{dp}dp+\frac{dP}{dq}dq+\frac{dP}{dh}dh=P'dx$$

$$\left(\frac{d^2P}{dxdp}+\frac{dP'}{dp}\right)dp+\left(\frac{d^2P}{dxdq}+\frac{dP'}{dq}\right)dq+\left(\frac{d^2P}{dxdh}+\frac{dP'}{dh}\right)dh=\left(\frac{dP'}{dx}+2P''\right)dx$$

nous aurons donc, en observant que $dm=2\alpha dh$

$$dp\cos mx+dq\sin mx+2\alpha x\,dh(q\cos mx-p\sin mx)=0\ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{r} m\,dq\cos mx-m\,dp\sin mx-2\alpha mx\,dh(p\cos mx+q\sin mx) \\ +2\alpha\,dh(q\cos mx-p\sin mx) \end{array}\right\}=$$

$$2\alpha\,dx(q\cos mx-p\sin mx)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Comparant ensuite l'expression de z avec la série $P+P'x+P''x^2$, etc. on aura

$P=q\cos mx-p\sin mx$, $P'=0$, $P''=-\alpha(p\cos mx+q\sin mx)$; et la première équation de condition, la seule qu'il faille employer, puisqu'on ne regarde z que comme l'intégrale d'une équation du premier ordre, deviendra

$$dq\cos mx-dp\sin mx-2\alpha x\,dh(p\cos mx+q\sin mx)=0\ldots(3)$$

Cette équation réduira l'équation (2) à

$$2\alpha\,dh(q\cos mx-p\sin mx)=2\alpha\,dx(q\cos mx-p\sin mx),$$

ou à $dh=dx$, d'où on tire $h=x+H$, H étant une des nouvelles constantes arbitraires : formant de plus avec l'équation (3) et l'équation (1) les équations

$$(1)\cos mx-(3)\sin mx=0,\quad (1)\sin mx+(3)\cos mx=0,$$

et, mettant dx au lieu de dh, on trouvera

$$dp+2\alpha qx\,dx=0,\qquad dq-2\alpha px\,dx=0.$$

En posant $2x\,dx=dt$, on aura, par le n°. 654

$$p=c\cos(\alpha x^2+c_1),\qquad q=c\sin(\alpha x^2+c_1).$$

La substitution de ces valeurs dans celles de y et de z, réduites aux termes indépendans des arcs de cercle, donnera

$$y = c\cos(\alpha x^2 + c_1)\cos(x + 2\alpha Hx + 2\alpha x^2) + c\sin(\alpha x^2 + c_1)\sin(x + 2\alpha Hx + 2\alpha x^2)$$
$$z = c\sin(\alpha x^2 + c_1)\cos(x + 2\alpha Hx + 2\alpha x^2) - c\cos(\alpha x^2 + c_1)\sin(x + 2\alpha Hx + 2\alpha x^2),$$

ou

$$y = c\cos(x + 2\alpha Hx + \alpha x^2 - c_1),$$
$$z = -c\sin(x + 2\alpha Hx + \alpha x^2 - c_1),$$

résultats qui contiennent une constante arbitraire surabondante, savoir H; mais si on les met, ainsi que leurs différentielles, dans l'une des équations proposées, on trouvera

$1 + 2\alpha H + 2\alpha x = 1 + 2\alpha x$, d'où il suit $H = 0$, et on aura enfin

$$y = \cos(x + \alpha x^2 - c_1), \quad z = -c\sin(x + \alpha x^2 - c_1).$$

Il est très-remarquable que ces dernieres intégrales rentrent dans les intégrales exactes des équations proposées, qu'il est facile d'obtenir, en faisant $(1 + 2\alpha x)dx = dt$; et cela arrive parce que la méthode d'approximation poussée plus loin, ne donnant que des termes affectés de x^4 et des puissances supérieures, n'apporteroit aucun changement aux expressions de P et de P', qui seules concourent à former les valeurs de y et de z.

666. On voit par cet exemple et par celui du n°. 664, que la disparition de l'arc x a introduit sous les sinus et les cosinus des expressions de y, et de y et de z, un nouvel arc multiple du premier, savoir αbx dans un cas et $(1 + \alpha x)x$ dans l'autre. Ceci prouve que les intégrales approchées, obtenues d'abord, ne different de celles qui sont débarrassées de l'arc de cercle que parce qu'elles contiennent l'expression en série des sinus et des cosinus d'un certain arc, et que le procédé du n°. 664 remplace ces séries par les fonctions dont elles sont les développemens. En effet lorsqu'on substitue aux sinus et aux cosinus qui entrent dans les équations proposées, leurs valeurs exponentielles, et que l'on pousse l'approximation assez loin, il est possible de grouper les termes déduits immédiatement des substitutions successives, de manière à former des séries dont la marche régulière fait reconnoître sur le champ les fonctions qui les ont engendrées; c'est ce qu'a montré M. Trembley dans les Mémoires de l'Académie de Berlin (vol. de 1786 — 1787); mais par des calculs beaucoup trop longs pour trouver place ici.

Il y auroit encore beaucoup de choses à dire sur les méthodes d'ap-

proximation qu'on a présentées sous un assez grand nombre de points de vue, qui peuvent tous néanmoins se rapporter aux principes posés ci-dessus; nous ne saurions entrer dans ces détails, pour lesquels il faut consulter les excellens Mémoires d'Astronomie-physique de Lagrange et de Laplace. Nous n'avons eu pour but en traitant ce sujet que de rattacher à l'ensemble des méthodes du Calcul intégral, plusieurs procédés qui jusqu'à présent n'avoient été exposés qu'isolément (*).

(*) La variation des constantes arbitraires, employée comme dans les nos 647, 655, conduit aussi à une méthode d'approximation. Si y désigne l'intégrale complète de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n}+U=0$, U étant une fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d_{n-1}y}{dx^{n-1}}$, elle contiendra n constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots c_n$, et si on fait varier ces constantes pour que la valeur de y puisse convenir à l'équation $\frac{d^n y}{dx^n}+U=\alpha V$, dans laquelle V représente une fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, on aura au lieu de $\frac{dy}{dx}dx$, l'expression

$$\frac{dy}{dx}dx+\frac{dy}{dc_1}dc_1+\frac{dy}{dc_2}dc_2\ldots+\frac{dy}{dc_n}dc_n=0$$

qui se réduira à $\frac{dy}{dx}$ seulement, si l'on pose

$$\frac{dy}{dc_1}dc_1+\frac{dy}{dc_2}dc_2\ldots+\frac{dy}{dc_n}dc_n=0\ldots\ldots(1).$$

On trouvera encore $\frac{d^2y}{dx^2}$, pour le second coefficient différentiel, si l'on fait

$$\frac{d^2y}{dx\,dc_1}dc_1+\frac{d^2y}{dx\,dc_2}dc_2\ldots+\frac{d^2y}{dx\,dc_n}dc_n=0\ldots(2);$$

et en continuant ainsi jusqu'à $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ inclusivement, on aura $n-1$, équations dont la dernière sera

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}dc_1}dc_1+\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}dc_2}dc_2\ldots+\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}dc_n}dc_n=0\ldots(n-1);$$

puis au lieu de $\frac{d^ny}{dx^n}dx$, il viendra

$$\frac{d^ny}{dx^n}dx+\frac{d^ny}{dx^{n-1}dc_1}dc_1+\frac{d^ny}{dx^{n-1}dc_2}dc_2\ldots+\frac{d^ny}{dx^{n-1}dc_n}dc_n.$$

Les valeurs de $y, \frac{dy}{dx}\ldots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, étant demeurées les mêmes que si $c_1, c_2, \ldots c_n$ n'eussent pas varié, les quantités U et V n'éprouveront aucun changement par

Réflexions générales sur les équations différentielles et sur les transcendantes.

667. Il y a dans tous les ordres des équations différentielles susceptibles de solutions particulières comme dans le premier; et par les mêmes raisons (n°. 577). Soit $U=0$, l'intégrale complète de l'équation du second ordre $V=0$; la fonction U contiendra deux constantes arbitraires c_1 et c_2; et si on les élimine entre les trois équations $U=0$, $dU=0$, $d^2U=0$, on retombera sur l'équation $V=0$. Supposons maintenant que l'on regarde ces quantités comme variables; l'équation $dU=0$ prendra la forme

$$\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dx}dy+\frac{dU}{dc_1}dc_1+\frac{dU}{dc_2}dc_2=0,$$

et se réduira à $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=0$, si $\frac{dU}{dc_1}dc_1+\frac{dU}{dc_2}dc_2=0$.

Différentions de nouveau pour obtenir d^2U, mais en regardant c_1 et c_2 comme variables, prenons d'ailleurs dx constant, et faisons pour abréger $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=U'$, il viendra

$$\frac{dU'}{dx}dx+\frac{dU'}{dy}dy+\frac{dU'}{d^2y}d^2y+\frac{dU'}{dc_1}dc_1+\frac{dU'}{dc_2}dc_2=0:$$

---

substitution de ces valeurs; et en mettant aussi celle de $\frac{d^ny}{dx^n}dx$, dans l'équation $\frac{d^ny}{dx^n}+U=\alpha V$ multipliée par dx, on obtiendra

$$\frac{d^ny}{dx^{n-1}dc_1}dc_1+\frac{d^ny}{dx^{n-1}dc_2}dc_2\ldots+\frac{d^ny}{dx^{n-1}dc_n}=\alpha V dx\ldots.(n),$$

en observant que la quantité $\frac{d^ny}{dx^n}dx+Udx$ est nulle par l'hypothèse. Lorsque les équations (1), (2),....(n), qui ne sont que du premier ordre, et ne renferment implicitement que les variables x, c_1, c_2,....c_n, pourront s'intégrer, on parviendra à l'expression rigoureuse et complète de y; et si on en tire les valeurs de dc_1, dc_2, ...dc_n, les résultats, qui seront de la forme

$$dc_1=\alpha A V dx,\quad dc_2=\alpha A_2 V dx,\ldots.dc_n=\alpha A_n V dx,$$

A_1, A_2,...A_n contenant c_1, c_2...c_n et x, font voir que quand α sera une quantité très-petite, les coefficiens différentiels $\frac{dc_1}{dx}$, $\frac{dc_2}{dx}$,....$\frac{dc_n}{dx}$, seront eux-mêmes très-petits, en sorte qu'on pourra, pour une première approximation, regarder c_1, c_2,....c_n comme constans dans le second membre, et poursuivre leur recherche par le moyen des substitutions successives, ou par tout autre procédé approximatif·

l'on

l'on réduira cette équation à ses trois premiers termes, que nous représenterons par U'', en posant $\frac{dU'}{dc_1}dc_1 + \frac{dU'}{dc_2}dc_2 = 0$. Ainsi pour toutes les valeurs de c_1 et de c_2 qui résultent des équations

$$\frac{dU}{dc_1}dc_1 + \frac{dU}{dc_2}dc_2 = 0, \qquad \frac{dU'}{dc_1}dc_1 + \frac{dU'}{dc_2}dc_2 = 0;$$

les équations $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$, qui sont les mêmes que $U = 0$, $dU = 0$, $d^2U = 0$, prises dans l'hypothèse de c_1 et c_2 constants, auront lieu et satisferont encore à l'équation $V = 0$, indépendante par sa nature des valeurs que peuvent prendre c_1 et c_2 (note de la page 395, premier vol.). Cela posé si on élimine c_1, c_2 et $\frac{dc_2}{dc_1}$ entre les quatre équations

$$U = 0,\ U' = 0,\ \frac{dU}{dc_1} + \frac{dU}{dc_2}\cdot\frac{dc_2}{dc_1} = 0,\ \frac{dU'}{dc_1} + \frac{dU'}{dc_2}\cdot\frac{dc_2}{dc_1} = 0 \quad \text{...(A)}$$

on obtiendra un résultat du premier ordre qui satisfera aussi à l'équation $V = 0$, parce qu'il donnera par la différentiation une nouvelle équation indépendante de c_1 et de c_2, et ayant nécessairement lieu en même tems que celle qui dérive de $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$. Cette équation du premier ordre, ainsi que son intégrale qui ne renferme qu'une seule constante arbitraire, seront donc des solutions particulières de $V = 0$. Il pourroit arriver que la combinaison des quantités c_1 et c_2 fût telle dans $U = 0$, que leur élimination des équations (A) conduisît à un résultat délivré des différentielles dx et dy, et offrant par conséquent une solution particulière de la proposée, exprimée par une équation primitive dépourvue de constantes arbitraires.

Pour généraliser ces considérations nous supposerons que $U = 0$, renferme n constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots c_n$, et nous représenterons par $d'U$ la partie de la différentielle de U que l'on obtient en faisant varier ces quantités, en sorte que la différentielle complète de U sera $dU + d'U$, expression dans laquelle

$$dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy,$$

$$d'U = \frac{dU}{dc_1}dc_1 + \frac{dU}{dc_2}dc_2 \ldots\ldots + \frac{dU}{dc_n}dc_n;$$

Il suit de cette notation et du n°. 27, que

$$d'dU = dd'U, \quad d'd^2U = d^2d'U, \quad \ldots\ldots \quad d'd^nU = d^nd'U.$$

Ceci étant bien conçu, il est facile de voir que si l'équation $V = 0$ est celle qui résulte de l'élimination des n constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$, entre $U = 0$ et ses n différentielles successives $dU = 0$, $d^2U = 0, \ldots$ $\ldots d^nU = 0$, elle sera encore satisfaite par les mêmes équations, en supposant $c_1, c_2 \ldots c_n$, variables, pourvu que l'on ait les suivantes :

$$d'U = 0, \quad dd'U = 0, \quad d^2d'U = 0, \quad \ldots\ldots \quad d^{n-1}d'U = 0$$

qui reviennent à

$$d'U = 0, \quad d'dU = 0, \quad d'd^2U = 0, \quad \ldots\ldots \quad d'd^{n-1}U = 0;$$

et en vertu desquelles les différentielles complètes

de U, dU, $\ldots\ldots$ $d^{n-1}U$,

exprimées par

$$dU + d'U, \quad d^2U + d'dU, \quad \ldots\ldots \quad d^nU + d'd^{n-1}U,$$

se réduisent à

$$dU, \quad d^2U, \quad \ldots\ldots \quad d^nU.$$

Il est évident que les équations

$$d'U = 0, \quad dd'U = 0, \quad \ldots\ldots d^{n-1}d'U = 0,$$

seront de la forme

$$\begin{aligned} P_1dc_1 + \quad & P_2dc_2 \ldots\ldots\ldots + \quad P_ndc_n = 0, \\ dP_1dc_1 + \quad & dP_2dc_2 \ldots\ldots\ldots + \quad dP_ndc_n = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^{n-1}P_1dc_1 + \; & d^{n-1}P_2dc_2 \ldots\ldots\ldots + d^{n-1}P_ndc_n = 0 \end{aligned}$$

$P_1, P_2, \ldots P_n$, désignant des fonctions primitives, et que par conséquent on peut éliminer entre ces équations qui sont au nombre de n, et les n autres équations

$$U = 0, \quad dU = 0, \quad \ldots\ldots\ldots d^{n-1}U = 0,$$

les $2n-1$ inconnues $c_1, c_2 \ldots c_n, \frac{dc_2}{dc_1}, \frac{dc_3}{dc_1} \ldots\ldots \frac{dc_n}{dc_1}$.

L'équation finale que l'on obtiendra et qui satisfera à la proposée $V = 0$, ne pourra s'élever au-delà de l'ordre $n-1$ par rapport aux variables x et y ; son intégrale ne renfermera donc au plus, que $n-1$ constantes arbitraires : d'où il suit que *La solution particulière la plus étendue que puisse avoir une équation différentielle de l'ordre* n *ne sauroit être exprimée par une équation primitive contenant plus de* n—1 *constantes arbitraires.*

668. Nous allons, d'après le Gendre, déduire de cette remarque la méthode qui sert à tirer immédiatement des équations différentielles leurs solutions particulières. Soit Y une valeur quelconque de y, satisfaisant à la proposée $V = 0$, et renfermant un nombre de constantes égal ou moindre que celui que comporte l'ordre de cette équation. Si l'on imagine que ces constantes viennent à varier, Y deviendra $Y + \frac{dY}{dc_1} dc_1 + \frac{dY}{dc_2} dc_2 + \text{etc.}$ ou $Y + d'Y$, et dY, d^2Y, etc. se changeront respectivement en $dY + d'dY$, $d^2Y + d'd^2Y$, etc. La substitution de ces valeurs dans l'équation $V = 0$ s'effectuera en la différentiant par rapport à y, dy, d^2y, ... $d^n y$, avec la caractéristique d', et en écrivant Y au lieu de y: on trouvera ainsi $V + d'V = 0$, et par conséquent $d'V = 0$, équation de la forme

$$M d' \frac{d^n Y}{dx^n} + N d' \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} \ldots\ldots + R d' \frac{dY}{dx} + S d' Y = 0,$$

ou

$$M \frac{d^n d' Y}{dx^n} + N \frac{d^{n-1} d' Y}{dx^{n-1}} \ldots\ldots + R d \frac{d' Y}{dx} + S d' Y = 0, \quad (1)$$

en intervertissant l'ordre des caractéristiques d et d'. Il est important de remarquer que $d'Y$ n'entre point dans les coefficiens M, N, ... S et T, parce qu'il s'ensuit que l'équation (1) est du premier degré par rapport à cette quantité.

Chacun des termes de l'expression $d'Y = \frac{dY}{dc_1} dc_1 + \frac{dY}{dc_2} dc_2 + \text{etc.}$ satisfait en particulier à l'équation (1) quelque valeur qu'on donne à c_1, c_2, etc. après la différentiation. Lorsque ces quantités ont reçu une détermination spéciale, l'équation (1) ne renferme plus que la variable x, et la fonction $d'Y$, dont les valeurs particulières sont ce que deviennent $\frac{dY}{dc_1}$, $\frac{dY}{dc_2}$, etc. dans l'hypothèse établie. Présentons maintenant ces considérations dans un ordre inverse, et supposons que n'ayant qu'une valeur particulière de Y, dans laquelle toutes les constantes soient déterminées, on veuille obtenir $d'Y$ par l'intégration de l'équation (1); il est évident que si l'expression générale de Y qui est inconnue, est l'intégrale complète, celle de $d'Y$ devra renfermer un nombre n de constantes arbitraires: l'équation (1) sera donc essentielle-

ment de l'ordre n dans ce cas, et ne pourra manquer par conséquent du terme $M\frac{d^n d'Y}{dx^n}$. Mais si l'expression de Y n'est qu'une solution particulière, $d'Y$ ne contenant plus n constantes arbitraires, il faudra que l'équation (1) se réduise à l'ordre $n-1$, ou à tout autre ordre inférieur, selon le nombre de constantes qui entrent dans la valeur la plus générale de Y; le terme $M\frac{d^n d'y}{dx^n}$ et quelques-uns des suivans manqueront donc alors, ce qui suppose qu'on aura $M=0$, $N=0$, etc.

Puisque c'est dans la propriété de rendre nuls ces coefficiens, que consiste le caractère des solutions particulières, il s'ensuit que l'*on découvrira ces solutions, en cherchant parmi les facteurs du coefficient* M *ceux qui étant égalés à zéro, donnent une équation qui s'accorde avec la proposée* $V=0$.

669. Ce qui précède suppose que l'équation (1) soit préparée de manière qu'aucun de ses coefficiens ne puisse devenir infini, par l'effet de quelque relation particulière entre les variables x et y. Si l'on prend l'équation $V=0$, du premier ordre, l'équation (1) deviendra $M\frac{dd'y}{dx}+Nd'y=0$; on reconnoîtra sans peine que le cofficient M est ici le même que dans le n°. 580, et on verra que la règle énoncée ci-dessus s'accorde avec celle du n°. cité.

Passons aux équations du second ordre, et prenons pour exemple l'équation

$$y-\frac{x\,dy}{dx}+\frac{x^2d^2y}{2\,dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}-\frac{x\,d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{d^2y^2}{dx^4}=0\ \ldots\ldots(A)$$

l'équation (1) sera pour ce cas

$$d'y-\frac{x\,dd'y}{dx}+\frac{x^2d^2d'y}{2\,dx^2}-2\left(\frac{dy}{dx}-\frac{x\,d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{d\,d'y}{dx}-\frac{x\,d^2d'y}{dx^2}\right)-2\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{d^2d'y}{dx^2}=0;$$

et le coefficient de $\frac{d^2d'y}{dx^2}$ étant égalé à zéro donnera

$$\frac{x^2}{2}+2x\left(\frac{dy}{dx}-\frac{x\,d^2y}{dx^2}\right)-\frac{2\,d^2y}{dx^2}=0.$$

Pour reconnoître si cette équation s'accorde avec la proposée, il faut

substituer dans la dernière, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ tirée de la première; on trouvera $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{4}x^2 + x\frac{dy}{dx}}{1+x^2}$, et

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{2}x^3 + x\right)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{16}x^4 - y(1+x^2) = 0 \ldots\ldots\ldots (B)$$

équation qui, étant différentiée, s'accorde avec la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ trouvée précédemment, et est par conséquent une solution particulière de la proposée. En la résolvant par rapport à $\frac{dy}{dx}$, elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{4dy + 2xdx + x^3dx}{\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}} = dx\sqrt{1+x^2},$$

et donne par son intégration

$$\sqrt{16y + 4x^2 + x^4} = x\sqrt{1+x^2} + l\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C,$$

équation qui satisfait aussi à la proposée et ne renferme qu'une constante arbitraire.

La proposée (A) est le résultat de l'élimination de c_1 et c_2 entre l'équation primitive $y = \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_1^2 + c_2^2$ et ses différentielles première et seconde; en appliquant à cette intégrale le procédé du n°. 667, on aura

$$U = \tfrac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_1^2 + c_2^2 - y = 0, \quad dU = (c_1x + c_2)dx - dy = 0$$
$$d^2U = (\tfrac{1}{2}x^2 + 2c_1)dc_1 + (x + 2c_2)dc_2 = 0, \quad dd^2U = (xdc_1 + dc_2)dx = 0$$

on tire de la dernière de ces équations, $\frac{dc_2}{dc_1} = -x$; après la substitution de cette valeur il ne restera plus qu'à éliminer c_1 et c_2 entre ces trois équations

$$c_1x^2 + 2c_2x + 2c_1^2 + 2c_2^2 - 2y = 0, \quad (c_1x + c_2)dx - dy = 0;$$
$$-x^2 + 4(c_1 - c_2x) = 0,$$

et on retrouvera ainsi l'équation (B).

L'équation (B) est susceptible elle-même d'une solution particulière exprimée par une équation primitive. En effet si on égale à zéro

le coefficient de $\frac{d\,d'y}{dx}$ dans

$$2\frac{dy}{dx}\,\frac{d\,d'y}{dx}+\left(\tfrac{1}{2}x^3+x\right)\frac{d\,d'y}{dx}-d'y\,(1+x^2)=0,$$

on trouvera $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x$, et substituant dans (B), on obtiendra $y=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{16}x^4$. Il ne faut pas se hâter de conclure que cette solution particulière convient à l'équation proposée (A), que les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ déduites de l'intégrale complète de l'équation (B), rendent identique ; car ces valeurs exigent ou que la quantité C soit constante ou que les deux équations $\frac{dy}{dC}=0$, $\frac{d^2y}{dx\,dC}=0$, ayent lieu en même tems ; mais la solution particulière de (B) ne suppose que l'existence de l'équation $\frac{dy}{dC}=0$, qui n'entraîne pas nécessairement celle de $\frac{d^2y}{dx\,dC}=0$. Aussi trouve-t-on que dans l'exemple qui nous occupe l'équation $y=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{16}x^4$ ne satisfait point à l'équation (A).

Considérons encore l'équation

$$(xy-1)\left(2xy\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{dy}{dx}+x\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2-xy\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{dy^2}{dx^2}=0\,;$$

en formant l'équation (1) et égalant à zéro le coefficient de $\frac{d^2d'y}{dx^2}$, on trouvera

$$4xy\,(xy-1)\left(2xy\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{dy}{dx}+x\frac{dy^2}{dx^2}\right)=0.$$

Cette équation se décompose en trois facteurs dont le second $xy-1=0$ est le seul qui s'accorde avec la proposée, et donne par conséquent une solution particulière, qui se trouve exprimée comme on voit par une équation primitive sans constantes arbitraires ; le terme affecté de $\frac{d\,d'y}{dx^2}$ doit donc disparoître de l'équation (1) en même tems que celui qui est multiplié par $\frac{d^2d'y}{dx^2}$, et c'est ce qui arrive en effet lorsque l'on suppose $xy=1$.

L'équation proposée résulte de l'élimination de c_1 dans l'équation

$$y\frac{dy^2}{dx^2}-2c_1xy\frac{dy}{dx}+c_1^2x=0,$$

et en faisant varier c_1 dans cette intégrale, on trouvera la solution particulière que nous venons d'obtenir.

670. La méthode du n°. 668 réussit également lorsqu'on a m équations différentielles entre $m+1$ variables. Pour donner un exemple de ce cas, prenons les équations

$$\left.\begin{aligned}(y^2-2mx)\,dy-m^2d\zeta+2myd x=0\\ \zeta dy^2+y\,d\zeta dy+2m\,d\zeta dx=0\end{aligned}\right\};$$

les intégrales complètes de ces équations ne pouvant renfermer que deux constantes arbitraires, leurs solutions particulières n'en sauroient contenir qu'une, au plus. En imaginant donc que les fonctions y et ζ deviennent $y+d'y$, $\zeta+d'\zeta$, par l'effet d'une variation quelconque des constantes arbitraires, et différentiant sous ce point de vue les équations proposées, en y regardant par conséquent x comme constant, on obtiendra des résultats de la forme

$$\left.\begin{aligned}M\,dd'y+N\,dd'\zeta+P\,d'y+Q\,d'\zeta=0\\ M'dd'y+N'dd'\zeta+P'd'y+Q'd'\zeta=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(2).$$

Multipliant la seconde de ces équations par un facteur θ, et l'ajoutant à la première, pour les intégrer toutes deux en même tems, on trouve

$$(M+\theta M')dd'y+(N+\theta N')dd'\zeta+(P+P'\theta)d'y+(Q+Q'\theta)d'\zeta=0.$$

Si les termes $dd'y$ et $dd'\zeta$ restoient dans cette équation, les valeurs de $d'y$ et $d'\zeta$, que l'on en déduiroit, contiendroient deux constantes arbitraires; mais si ces termes disparoissent, on aura seulement l'équation $(P+P'\theta)d'y+(Q+Q'\theta)d'\zeta=0$, qui donnera entre $d'y$ et $d'\zeta$ une relation, au moyen de laquelle on chassera l'une de ces quantités des équation (2), et on obtiendra l'autre par une équation du premier ordre. Pour que $dd'y$ et $dd'\zeta$ disparoissent, il faut qu'on ait $M+\theta M'=0$, $N+\theta N'=0$, d'où l'on tire $MN'-M'N=0$, en éliminant θ; telle est l'équation qui doit avoir lieu avec les proposées pour qu'elles soient susceptibles de solutions particulières.

Dans l'exemple proposé on trouve

$$\begin{aligned}M&=y^2-2mx, & N&=m^2,\\ M'&=2\zeta dy+y\,d\zeta, & N'&=y\,dy+2m\,dx,\end{aligned}$$

et l'équation de condition $MN'-M'N=0$, devient

$$(y^2-2mx)(y\,dy+2m\,dx)+m^2(2z\,dy+y\,dz)=0.$$

Eliminant entre cette équation et les deux proposées, les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, on obtiendra l'équation primitive $yz-x^2=0$, de laquelle il résulte $z=\frac{x^2}{y}$, $dz=\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy$; et mettant ces valeurs dans les proposées, on tirera également de l'une et de l'autre, $(y^2-mx)\,dy+2m\,y\,dx=0$, équation qui s'intégre après avoir été multipliée par $y^{-\frac{3}{2}}$, et donne $3mx+y^2=C\sqrt{y}$: les proposées ont donc pour solution particulière le systême des deux équations $yz-x^2=0$, $3mx+y^2=C\sqrt{y}$.

On peut parvenir à ce résultat et en même tems aux intégrales complètes de la proposée par la seule élimination de z, entr'elles; car en faisant pour abréger $dy=p\,dx$, $dp=q\,dx$, on trouvera que l'équation finale en y peut s'écrire ainsi

$$(p^3-mq)(py^2-mpx+2my)=0,$$

le second facteur $py^2-mx+2my=0$, qui n'est autre chose que $(y^2-mx)\,dy+2m\,y\,dx=0$, donne, par sa combinaison avec les proposées, l'équation $yz-x^2=0$, et conduit ainsi à la solution particulière. En intégrant le premier facteur $p^3-mq=0$ par la méthode du n°. 609, on obtiendra l'équation primitive $(y+c_1)^2=2m(c_2-x)$; substituant dans la proposée les valeurs de y et de dy tirées de cette équation et chassant $\frac{dz}{dx}$ des résultantes, il viendra

$$m^2z+2mx(y+2c_1)+y(y+2c_1)^2=0.$$

Le systême composé de cette équation et de la précédente, offre l'intégrale complète des proposées. Il en existe un plus simple auquel on parvient ainsi qu'il suit: si on chasse x des équations

$$(y+c_1)^2-2m(c_2-x)=0,$$
$$m^2z+2mx(y+2c_1)+y(y+2c_1)^2=0,$$

on aura

$$m^2z+(2mc_2-c_1^2)(y+2c_1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

d'où on tirera $y+2c_1=-\frac{m^2z}{2mc_2-c_1^2}$.

La

La première des équations ci-dessus étant développée peut se mettre sous la forme $y(y+2c_1)-(2mc_2-c_1^2)+2mx=0$, et devient

$$m^2\zeta y+(2mc_2-c_1^2)^2-2mx(2mc_2-c_1^2)=0 \quad \ldots\ldots (b)$$

lorsqu'on y substitue la valeur de $y+2c_1$. Changeant ensuite de constantes arbitraires et écrivant c_1 et c_2 au lieu de $\frac{2mc_2-c_1^2}{m}$ et de $\frac{2c_1(2mc_2-c_1^2)}{m}$, les équations (a) et (b) se réduiront à

$$m\zeta+c_1y+c_2=0, \qquad \zeta y-2c_1x+c_1^2=0.$$

On déduira facilement de ces intégrales la solution particulière que nous avons obtenue plus loin ; la seconde étant différentiée par rapport à c_1 donne $c_1=x$, et devient par cette valeur $\zeta y-x^2=0$: le reste de l'opération s'exécute comme ci-dessus.

671. Ceux qui auront bien entendu les considérations dont nous avons fait usage dans le n°. 580, pour déduire immédiatement des équations différentielles du premier ordre à deux variables, leurs solutions particulières, pourront les appliquer, ainsi que l'a fait Lagrange, aux équations des ordres supérieurs, et trouveront que pour l'ordre n il faut faire successivement $\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{0}{0}$ et $\frac{d^nx}{dy^n}=\frac{0}{0}$.

Cette règle rentre dans celle du n°. 668 ; car il est évident que le premier membre de l'équation (1), en y changeant la caractéristique d en δ, exprime la partie de la différentielle complète de $V=0$, due à la variation de y et de ses coefficiens différentiels : cette dernière sera donc

$$M\frac{d^{n+1}y}{dx^n}+N\frac{d^ny}{dx^{n-1}}\ldots\ldots R\frac{d^2y}{dx}+Sdy+Tdx=0;$$

et se réduira à $N\frac{d^ny}{dx^{n-1}}\ldots\ldots R\frac{d^2y}{dx}+Sdy+Tdx=0$;

et comme elle donne en général

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\frac{-N\frac{d^ny}{dx^n}\ldots\ldots-R\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-T}{M},$$

il s'ensuit que la supposition de $M=0$ rend $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\frac{0}{0}$.

Jusqu'ici nous avons considéré y comme fonction de x ; mais les

solutions particulières de la forme $x=const.$ ne sont point comprises sous ce point de vue. Pour obtenir ces dernières, il faudra transformer l'équation proposée dans une autre où dy soit constante ; on trouvera par rapport à la variable x, une équation analogue à l'équation (1), et on en tirera les mêmes conséquences que de celle-là.

En rapprochant du procédé exposé au commencement du n°. 667, ce qui a été dit dans le n°. 290, on en conclura comme dans le n°. 608 que les solutions particulières des équations différentielles appartiennent à la courbe touchée par toutes celles que représentent les différens cas de l'intégrale complète, et que les contacts sont de l'ordre de l'équation différentielle : on pourra donc par ce qui précède trouver la courbe touchée, lorsqu'on aura l'équation primitive ou l'équation différentielle des courbes touchantes. La question inverse, celle de trouver les courbes touchantes par le moyen de la courbe touchée, se résout par la théorie des osculations (n°. 259) ; car il est aisé de voir que la recherche des tangentes et des cercles osculateurs n'en est qu'un cas particulier.

672. Il y a dans chaque ordre une classe d'équations différentielles qui jouissent comme celles du premier alinéa du n°. 578, de la propriété de s'intégrer très-facilement après avoir été différentiées. En effet, si l'équation

$$M\frac{d^{n+1}y}{dx^n}+N\frac{d^ny}{dx^{n-1}}\ldots\ldots+R\frac{d^2y}{dx^2}+S\frac{dy}{dx}+Tdx=0,$$

différentielle complète de la proposée $V=0$, se réduit d'elle-même au seul terme $M\frac{d^{n+1}y}{dx^n}=0$, il en résultera ou $M=0$, ou $\frac{d^{n+1}y}{dx^n}=0$: le premier facteur, qui ne sauroit être d'un ordre plus élevé que l'ordre n, étant combiné avec $V=0$, servira à éliminer $\frac{d^ny}{dx^n}$ de cette équation, et conduira par conséquent à une solution particulière de l'ordre $n-1$.

L'équation $\frac{d^{n+1}y}{dx^n}=0$, s'intègre sur le champ et donne

$$y=C_{n+1}+C_nx+\frac{1}{2}C_{n-1}x^2+\frac{1}{2.3}C_{n-2}x^3\ldots\ldots+\frac{1}{2.3\ldots n}C_1x^n;$$

mais cette expression de y contenant $n+1$, constantes arbitraires,

en renferme une de plus qu'il n'en doit entrer dans l'intégrale complète de la proposée $V=0$: si donc on substitue dans cette dernière les valeurs de y et de ses différentielles, il restera une équation entre C_{n+1}, $C_n \ldots\ldots C_1$, seulement, et au moyen de laquelle on déterminera celle de ces quantités qui se trouve surabondante.

Posons pour fixer les idées que la proposée soit du second ordre; on aura $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, $y=C_2+C_1x+\frac{1}{2}C_1x^2$,

d'où on tirera $dy=(C_1+C_1x)\,dx$, $d^2y=C_1dx^2$. Par le moyen de ces valeurs on peut déterminer la forme même de l'équation à laquelle elles doivent satisfaire; car l'équation finale entre C_1, C_2 et C_3 donnera nécessairement $C_3=f(C_1, C_2)$, f désignant une fonction connue, et comme on a

$$C_1=\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad C_2=\frac{dy}{dx}-C_1x=\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$C_3=y-C_2x-\tfrac{1}{2}C_1x^2=y-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2},$$

il s'ensuit $y-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$:

telle est la forme que doit avoir l'équation différentielle proposée; et son intégrale sera $y=f(C_1, C_2)+C_2x+\frac{1}{2}C_1x^2$.

Il est visible que l'équation

$$y-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2d^2y}{2dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{d^2y^2}{dx^4}=0,$$

dont nous nous sommes occupés dans le n°. 669, se trouve comprise dans la précédente, et que

$$f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\frac{d^2y^2}{dx^4}=0.$$

En la différentiant elle donne

$$\left(2(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-\frac{x^2}{2}\right)\frac{d^3y}{dx^3}=0;$$

le facteur $2(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-\frac{x^2}{2}$, égalé à zéro, fournit précisément l'équation qui, dans le n°. cité, nous a conduits à la solution particulière de la proposée; et l'expression générale de l'in-

tégrale complète résultante du facteur $\frac{d^3y}{dx^3}$ égalé à zéro, devient pour ce cas $y = C''_1 + C'_2 + C_2 x + \frac{1}{2} C_1 x^2$.

673. Il est facile de reconnoître, *à priori*, la cause de la simplification opérée par la différentiation dans la classe d'équations que nous venons de traiter. Lorsqu'après avoir différentié trois fois l'équation $y = C_3 + C_2 x + \frac{1}{2} C_1 x^2$, on en chasse les constantes C_3, C_2, C_1, le résultat qu'on obtient doit convenir également à toutes les équations qu'on formeroit, soit en donnant des valeurs particulières à ces quantités, soit en établissant entr'elles des relations quelconques; il s'accordera donc avec l'équation différentielle déduite de $y = f(C_2, C_1) + C_2 x + \frac{1}{2} C_1 x^2$ par l'élimination de C_1 et de C_2; et sera par conséquent un des facteurs de la différentielle de cette équation : on le distinguera de ceux qui donnent des solutions particulières en ce qu'il est le seul qui s'élève au troisième ordre, tandis que les autres ne passent pas le second. Le même raisonnement peut s'appliquer à une équation algébrique quelconque, et on en conclura que l'équation différentielle déduite de

$$y^m + (A + Bx) y^{m-1} + (C + Dx + Ex^2) y^{m-2} + \text{etc.} = 0$$

par l'élimination des constantes A, B, C, etc. supposées indépendantes les unes des autres, doit s'accorder avec toutes celles des ordres inférieurs, qui résulteroient des diverses équations primitives que l'on formeroit en établissant des relations entre ces mêmes constantes. Mais comme aucune d'elles ne passe le premier degré dans l'équation ci-dessus, le résultat de leur élimination ne montera pas au delà de ce degré par rapport au coefficient différentiel de l'ordre le plus élevé; car l'équation différentielle de l'ordre inférieur, réduite à ne contenir qu'une seule constante K, sera nécessairement de la forme $P + KQ = 0$, et donnera $P\,dQ - Q\,dP = 0$.

Il suit de là que les équations du n°. précédent ne sont pas les seules que la différentiation rende plus faciles à intégrer, et qu'en général il peut être utile de traiter de même les équations dans lesquelles les coefficiens différentiels passent le premier degré, puisqu'en différentiant ces équations un nombre de fois suffisant pour en chasser toutes les constantes qu'elles pourroient encore contenir;

et parvenir à un résultat du premier degré par rapport au coefficient différentiel de l'ordre le plus élevé, on doit retomber sur l'une des différentielles de l'équation primitive à constantes indépendantes, dont leur intégrale n'est qu'un cas particulier. Quand on pourra remonter ensuite à cette équation primitive, on obtiendra l'intégrale de l'équation différentielle proposée, en réduisant le nombre de constantes arbitraires à celui qu'exige l'ordre dont est celle-ci. Si m désigne cet ordre, et que l'on soit descendu par la différentiation jusqu'à l'ordre $m+n$, ce qui aura introduit $m+n$, constantes arbitraires, on déterminera les n surabondantes, en substituant dans l'équation proposée et dans ses différentielles, prises jusqu'à l'ordre $m+n-1$ inclusivement, les valeurs de y, de $\frac{dy}{dx}$, etc. déduites de l'équation primitive obtenue.

674. Eclaircissons ceci par quelques exemples : soit l'équation

$$Axy\frac{dy^2}{dx^2}+(x^2-Ay^2-B)\frac{dy}{dx}-xy=0;$$

en la différentiant on obtient

$$d^2y\left(2Ax\frac{dy}{dx}+x^2-Ay^2-B\right)+\left(A\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)\left(x\frac{dy}{dx}-1\right)=0,$$

et si on élimine B, on trouvera un résultat divisible par $A\frac{dy^2}{dx^2}+1$

et réductible à $xyd^2y+dy(xdy-ydx)=0$, ou à $\frac{x}{y}d^2y-dyd\frac{x}{y}=0$;

dont l'intégrale première est $\frac{dy}{dx}=C_1\frac{x}{y}$, et l'intégrale seconde $y^2=C_1x^2+C_2$. Pour déterminer la constante surabondante, on substituera dans la proposée les valeurs de y et dy données par cette intégrale, et on aura $C_1B=C_2(C_1A+1)$; tirant de cette dernière équation la valeur de C_2, on trouvera $y^2-C_1x^2=\frac{C_1B}{C_1A+1}$.

L'équation différentielle dont nous venons d'obtenir l'intégrale est celle des lignes de courbure des surfaces du second degré comprises dans l'équation $b^2c^2x'^2+a^2c^2y'^2+a^2b^2z'^2=a^2b^2c^2$,

ainsi qu'on peut s'en assurer en appliquant à ces surfaces les formules

du n°. 331, et en faisant dans le résultat

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}=A, \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}=B,$$

Monge a donné, dans ses leçons à l'Ecole Polytechnique, et dans le deuxième cahier du Journal de cette Ecole, des remarques très-élégantes sur la construction de ces lignes de courbure et sur leur usage dans l'*appareil* des voûtes elliptiques.

675. Il n'est pas toujours nécessaire d'éliminer toutes les constantes que contient l'équation différentielle proposée; il suffit de parvenir à l'équation qu'on auroit obtenue en éliminant comme des quantités indépendantes, tous les coefficiens dans lesquels entroient les constantes qui ont disparu dans la formation de la proposée. Il suffiroit, par exemple, de différentier une seule fois l'équation

$$\frac{dy^2}{dx^2}[(x^2+y^2+b^2)^2-4a^2x^2]+8a^2xy\frac{dy}{dx}+(x^2+y^2+b^2)^2-4a^2y^2=0,$$

et d'en éliminer b. Pour effectuer ce calcul avec facilité on résoudra la proposée par rapport à la quantité $x^2+y^2+b^2$, regardée comme une inconnue, et en faisant $dy=pdx$, on trouvera

$$x^2+y^2+b^2=\frac{2a(px-y)}{\sqrt{1+p^2}}.$$

La différentiation seule fera disparoître b, et en divisant par $x+py$, on aura

$$\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}-dx=0,$$

équation dont l'intégrale première est $\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}-(x-C_1)=0$, et qui a par conséquent pour intégrale seconde $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2$. On trouve entre les constantes C_1 et C_2 la relation $C_1^2+C_2^2=a^2-b^2$.

Monge, à qui l'on doit la méthode que nous venons d'exposer, pense qu'elle est une des plus propres à conduire à l'intégrale des équations différentielles qui dérivent d'une équation primitive algébrique. Il desireroit que l'on construisît des tables qui montrassent sous une forme réduite, le résultat d'élimination des coefficiens qui entrent dans les équations à deux variables, du premier, du second, du troisième, du quatrième, etc. ordres. Ces tables feroient dispa-

roître la difficulté d'intégrer la dernière équation différentielle, difficulté qui peut être assez grande; car il est facile de voir que mettre, comme le propose Monge dans son mémoire, cette équation sous la forme $PdQ-QdP=0$, est une opération aussi difficile que celle de trouver le facteur. Mais avant de comparer l'équation proposée aux formules de la table, il faudroit la débarrasser des facteurs rationnels qu'elle pourroit contenir et dont l'ordre seroit inférieur au sien.

L'idée de construire des tables, qui contiennent les équations différentielles qui répondent aux diverses classes de formes que peuvent prendre les équations primitives, s'est déjà présentée à plusieurs Géomètres, ainsi que nous l'avons remarqué, n°. 566; mais malheureusement le nombre de formes qu'il est possible d'exprimer, soit algébriquement, soit avec les transcendantes connues, étant très-limité et presqu'infiniment petit par rapport à celui des équations différentielles, il arrive dans le Calcul intégral, ainsi que dans toutes les méthodes inverses, que les cas les plus rares sont ceux où l'on parvient à un résultat assignable sous une forme finie: l'intégration doit donc conduire le plus souvent à des fonctions transcendantes très-différentes entr'elles, de même que l'extraction des racines, par exemple, donne lieu à des irrationnelles qui ne peuvent se convertir les unes dans les autres. Ces considérations me portent à croire que ce qui peut le plus contribuer aux progrès du Calcul intégral, c'est la classification exacte des divers genres de transcendantes absolument irréductibles, et par là essentiellement distincts, et la recherche des propriétés particulières à chacun de ces genres. Le Calcul intégral offre lui-même des moyens pour parvenir à ce but, et je vais montrer qu'on en peut déduire la nature et les propriétés des fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires, indépendamment de tout ce qu'on sait d'ailleurs sur ces fonctions.

676. L'équation $y\,dx+x\,dy=0$ est intégrable, comme on sait, et donne sur le champ $xy=a$; mais si on en sépare les variables, elle deviendra $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$. Supposons, pour un moment, que l'on ignore que l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ est lx, et représentons-la par $f(x)$,

notation absolument indéterminée, en sorte qu'on ait

$$\int\frac{dx}{x}=f(x),\quad \int\frac{dy}{y}=f(y).$$

Il résultera de l'équation $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$, que $f(x)+f(y)=\beta$; et que par conséquent la somme de $f(x)$ et de $f(y)$, est constante lorsque le produit des variables x et y est constant. Pour établir, s'il est possible, une relation entre les deux constantes α et β, donnons une valeur déterminée à l'une des variables. On voit d'abord que la supposition de x ou de y nuls, donneroit $\alpha=\frac{1}{0}$ et n'apprendroit rien; mais en faisant $y=1$, nous aurons $x=\alpha$, et par conséquent $f(\alpha)+f(1)=\beta$, $f(\alpha)$ et $f(1)$ désignant ce que deviennent $f(x)$ et $f(y)$, lorsqu'on substitue α et 1 au lieu de x et de y; cette valeur changera l'équation $f(x)+f(y)=\beta$ en $f(x)+f(y)=f(\beta)+f(1)$. Il n'est pas difficile de reconnoître que cette équation renferme la propriété fondamentale des logarithmes; car lorsqu'on les déduit de la comparaison d'une progression géométrique, commençant par l'unité, avec une progression arithmétique qui ne commence pas par zéro, il faut toujours retrancher de la somme des logarithmes des facteurs, celui de l'unité, égal au premier terme de la progression arithmétique, pour avoir le logarithme du produit. Pour rendre l'usage des logarithmes plus commode, on prend le premier terme de la progression arithmétique égal à zéro, ce qui revient à supposer $f(1)=0$: le Calcul intégral fait voir aussi que l'on peut se permettre cette simplification; car si on fait $x=1+u$, et qu'on développe $\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{1+u}$ en série, on aura

$$f(x)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\text{etc.}+\textit{const.}$$

et dans le cas de $u=0$, lorsqu'on néglige la constante arbitraire, cette série s'anéantit. D'après ces remarques, on aura donc les deux équations $xy=\alpha$, $f(x)+f(y)=f(\alpha)$, desquelles on tirera toute la théorie connue des logarithmes, et l'on sait que celle des exponentielles s'en déduit immédiatement.

677. Considérons maintenant l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}+\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}}=0;$$

nous en tirerons $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{A+By+Cy^2}}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$,

et $(A+Bx+Cx^2)dy^2=(A+By+Cy^2)dx^2$.

Différentiant cette équation, pour chercher par le procédé du n°. 673, si elle n'auroit pas une intégrale algébrique, nous trouverons, en divisant par dy,

$$2d^2y(A+Bx+Cx^2)+dydx(B+2Cx)=dx^2(B+2Cy).$$

Différentiant de nouveau et réduisant, il viendra

$$2d^3y(A+Bx+Cx^2)+3d^2y\,dx(B+2Cx)=0;$$

faisons pour abréger $dy=p\,dx$, $d^2y=q\,dx^2$, et nous changerons cette équation en $2dq(A+Bx+Cx^2)+3q\,dx(B+2Cx)=0$,

d'où nous déduirons $\frac{2dq}{q}+\frac{3(B+2Cx)dx}{A+Bx+Cx^2}=0$,

et $q^2(A+Bx+Cx^2)^3=\alpha^2$, en intégrant. Substituons la valeur que donne cette équation pour q, dans l'équation du second ordre transformée en $2q(A+Bx+Cx^2)+p(B+2Cx)=B+2Cy$, et nous aurons $p=\frac{(B+2Cy)\sqrt{A+Bx+Cx^2}-2\alpha}{(B+2Cx)\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$;

enfin mettant cette valeur de p, dans l'équation proposée, nous obtiendrons

$$(B+2Cy)\sqrt{A+Bx+Cx^2}+(B+2Cx)\sqrt{A+By+Cy^2}=2\alpha \quad (1).$$

Si de plus nous désignons par $f(x)$ l'intégrale de la fonction $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, il résultera de l'équation proposée

$$f(x)+f(y)=\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

On parvient à l'équation (1) d'une manière très-simple, en intégrant par parties chacun des termes de la proposée mise sous la forme

$dx\sqrt{A+By+Cy^2}+dy\sqrt{A+Bx+Cx^2}=0$, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} &x\sqrt{A+By+Cy^2}-\int\frac{(B+2Cy)\,x\,dy}{2\sqrt{A+By+Cy^2}}\\ &+y\sqrt{A+Bx+Cx^2}-\int\frac{(B+2Cx)\,y\,dx}{2\sqrt{A+Bx+Cx^2}}\end{aligned}\right\}=\alpha;$$

on multipliera ensuite l'équation proposée par x, par y et par xy successivement, et on en tirera

$$\int\frac{x\,dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}}=-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=-\frac{1}{C}\int\frac{(Cx+\frac{1}{2}B)\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}+\frac{B}{2C}\int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$$
$$=-\frac{1}{C}\sqrt{A+Bx+Cx^2}+\frac{B}{2C}\int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

$$\int\frac{y\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=-\int\frac{y\,dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}}=-\frac{1}{C}\int\frac{(Cy+\frac{1}{2}B)\,dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}}+\frac{B}{2C}\int\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}}$$
$$=-\frac{1}{C}\sqrt{A+By+Cy^2}+\frac{B}{2C}\int\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}};$$

$$\int\frac{xy\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=-\int\frac{xy\,dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}};$$

enfin on substituera ces valeurs dans l'intégrale ci-dessus, on effacera les termes qui se détruisent entr'eux, soit explicitement, soit en vertu de l'équation proposée, et le résultat sera l'équation (1).

Les équations (1) et (2) renferment le caractère essentiel de la fonction f, et pour la prendre dans un cas très-simple, supposons qu'on ait $A=1$, $B=0$, $C=-1$, c'est-à-dire, que la proposée soit $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$; les équations (1) et (2) deviendront

$$y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}=\alpha,\qquad f(x)+f(y)=\beta.$$

Pour connoître la relation des constantes, faisons $y=0$; nous tirerons de (1), $x=\alpha$, et de (2), $f(\alpha)=\beta-f(0)$. Si on développe $\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$ en série, on verra qu'elle s'évanouit lorsque $y=0$, quand on supprime la constante arbitraire: on pourra donc prendre $f(0)=0$, ce qui donnera $\beta=f(\alpha)$, et par conséquent $y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}=\alpha$, $f(x)+f(y)=f(\alpha)$.

Si l'on fait $f(x)=x'$, $f(y)=y'$, on pourra concevoir que $x=f'(x')$, $y=f'(y')$, en désignant par f' une nouvelle fonction, inverse de la première; il s'en suivra que $f(\alpha)=x'+y'$ et que $\alpha=f'(x'+y')$: on aura donc

$$f'(y')\sqrt{1-f'(x')^2}+f'(x')\sqrt{1-f'(x')^2}=f'(x'+y'),$$

résultat qui est évidemment la traduction de l'équation

$$\sin y'\cos x'+\sin x'\cos y'=\sin(x'+y'),$$

qui peut servir de base à toute la théorie des fonctions circulaires.

L'analogie que nous avons fait remarquer dans le n°. 496, entre les secteurs hyperboliques et les arcs de cercle, se manifeste encore ici; car si l'on prend $A=1$, $B=0$, $C=1$, on aura l'équation $\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1+y^4}}=0$, de laquelle on tirera, comme ci-dessus,

$$y\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{1+y^4}=\alpha, \qquad f(x)+f(y)=f(\alpha);$$

en sorte qu'il n'y aura de différence entre les deux cas que relativement aux circonstances de la réalité des fonctions.

678. Passons à l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}+\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}=0,$$

qui contient une transcendante d'un genre plus élevé que les précédentes. Nous n'essayerons pas d'appliquer à cette équation la méthode du n°. 673, car elle pourroit mener beaucoup trop loin; mais nous ferons usage d'un procédé dû à Lagrange, simplifié par Euler, et au moyen duquel on parvient à trouver une nouvelle équation du premier ordre, qui, par sa combinaison avec la proposée, conduit à l'intégrale cherchée. Concevons que x et y soient deux fonctions d'une même variable indépendante t, il viendra $\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}$, d'où il suit

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4},$$

$$\frac{dy}{dt}=-\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}.$$

En faisant disparoître les radicaux et en différentiant ensuite chacune de ces équations, nous trouverons

$$\frac{2\,d^2x}{dt^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3\,;$$

$$\frac{2\,d^2y}{dt^2} = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3\,;$$

prenant la somme de celles-ci, nous aurons l'équation

$$2\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 2B + 2C(x+y) + 3D(x^2+y^2) + 4E(x^3+y^3)$$

que nous changerons en

$$\frac{d^2p}{dt^2} = B + Cp + \tfrac{3}{4}D(p^2+q^2) + \tfrac{1}{2}E(p^3+3pq^2)\,;$$

en faisant $x+y=p$ et $x-y=q$, transformation de laquelle il résulte

$$x = \tfrac{1}{2}(p+q)\,;\quad y = \tfrac{1}{2}(p-q)\,;\quad dx^2 - dy^2 = dp\,dq.$$

Si l'on substitue dans la dernière de ces équations les valeurs de dx^2 et de dy^2, puis celles de x et de y en p et q, on aura

$$\frac{dp\,dq}{dt^2} = Bq + Cpq + \tfrac{1}{4}D(3p^2q + q^3) + \tfrac{1}{2}E(p^3q + pq^3)\,;$$

Retranchant cette valeur de $\frac{dp\,dq}{dt}$, de celle de $\frac{d^2p}{dt^2}$, multipliée par q;

on trouvera $$q\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp\,dq}{dt^2} = \tfrac{1}{2}Dq^3 + Epq^3\,;$$

cette équation devient intégrable lorsqu'on la multiplie par $\frac{2\,dp}{q^3dt}$;

et donne $\frac{dp^2}{q^2dt^2} = \alpha^2 + Dp + Ep^2$, ou $\frac{dp}{dt} = q\sqrt{\alpha^2 + Dp + Ep^2}$.

Maintenant, il suit de l'équation proposée que $\frac{dp}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} =$

$$\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4} - \sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}\,;$$

mettant cette valeur, ainsi que celles de p et de q dans l'équation précédente, elle donnera, pour l'intégrale demandée,

$$\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4} - \sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}$$

$$= (x-y)\sqrt{\alpha^2 + D(x+y) + E(x+y)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

Cette équation n'est pas la seule intégrale que l'on puisse obtenir pour l'équation proposée. En mettant la valeur de $\frac{dp}{dt}$ trouvée ci-dessus, dans celle de $\frac{dp\,dq}{dt^2}$, on parviendroit à l'équation

$$\frac{dq}{dt} = \frac{B + Cp + \frac{1}{4}D(3p^2+q^2) + \frac{1}{2}E(p^3+pq^2)}{\sqrt{\alpha^2+Dp+Ep^2}},$$

dans laquelle on substitueroit au lieu des quantités p, q et $\frac{dq}{dt}$, leurs valeurs, $x+y$, $x-y$, et $\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4} + \sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}$: on pourroit ensuite combiner de diverses manières cette nouvelle intégrale avec la précédente.

679. L'équation (1) devient illusoire lorsque la quantité $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$ est un quarré. Soit en effet

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4 = (a+bx+cx^2)^2,$$
$$A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4 = (a+by+cy^2)^2,$$

il en résultera

$$A=a^2, \quad B=2ab, \quad C=2ac+b^2, \quad D=2bc, \quad E=c^2,$$

et l'équation (1) se changera en

$$b+c(x+y) = \sqrt{\alpha^2+2bc(x+y)+c^2(x+y)^2},$$

élevant au quarré les deux membres de cette dernière, on ne trouvera que $b^2=\alpha$, ce qui ne peut rien apprendre. La méthode du n°. 139 conduira à la véritable intégrale dans ce cas, en faisant

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4} = \sqrt{(a+bx+cx^2)^2+k};$$
$$\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4} = \sqrt{(a+by+cy^2)^2+k.}$$

Si on développe le second membre de ces équations suivant les puissances de k, en s'arrêtant au deuxième terme, on trouvera

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)^2+k} = (a+bx+cx^2) + \frac{k}{2(a+bx+cx^2)},$$

$$\sqrt{(a+by+cy^2)^2+k} = (a+by+cy^2) + \frac{k}{2(a+by+cy^2)};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1), en observant que D et E restent les mêmes dans l'hypothèse actuelle que dans la précédente, on aura, après avoir réduit au même dénominateur les termes multipliés par k, et divisé les deux membres par $x-y$,

$$b+c(x+y)-\frac{(b+c(x+y))k}{2(a+bx+cx^2)(a+by+cy^2)}=\sqrt{a^2+2bc(x+y)+c^2(x+y)^2},$$

On élevera au quarré, en négligeant la seconde puissance de k; après la réduction, il restera

$$b^2-\frac{k[b+c(x+y)]^2}{(a+bx+cx^2)(a+by+cy^2)}=a^2;$$

et si l'on prend $b^2-a^2=ka'$, ce qui revient à un changement de constante arbitraire, on obtiendra

$$a'(a+bx+cx^2)(a+by+cy^2)=[b+c(x+y)]^2:$$

telle est l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{a+bx+cx^2}+\frac{dy}{a+by+cy^2}=0,$$

dans laquelle se change la proposée lorsque les quantités soumises aux radicaux sont des quarrés parfaits.

680. Les calculs nécessaires pour faire disparoître les radicaux de l'équation (1) et parvenir ainsi à une intégrale rationnelle de la proposée, sont assez longs; et il faut avoir soin de débarrasser le résultat qu'on obtient des facteurs qui lui sont étrangers. Mais le moyen suivant, dont s'est servi Lagrange, conduit immédiatement à l'équation finale la plus simple. Il est fondé sur ce que

$$\sqrt{X}+\sqrt{Y}=\frac{X-Y}{\sqrt{X}-\sqrt{Y}};$$ or dans l'exemple actuel

$$X-Y=B(x-y)+C(x^2-y^2)+D(x^3-y^3)+E(x^4-y^4),$$

$$\sqrt{X}-\sqrt{Y}=(x-y)\sqrt{a^2+D(x+y)+E(x+y)^2},$$

et par conséquent

$$\sqrt{X}+\sqrt{Y}=\frac{B+C(x+y)+D(x^2+xy+y^2)+E(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}{\sqrt{a^2+D(x+y)+E(x+\mathcal{C}}}$$

En combinant cette valeur de $\sqrt{X}+\sqrt{Y}$ avec celle de $\sqrt{X}-\sqrt{Y}$, on trouve

$$\sqrt{X}=\frac{\alpha^2(x-y)+B+C(x+y)+D(2x^2+xy)+E(2x^3+2x^2y)}{2\sqrt{\alpha^2+D(x+y)+E(x+y)^2}}.$$

Si maintenant on fait disparoître le dénominateur du second membre; que l'on éleve chaque membre au quarré, que l'on mette au lieu de X la quantité qu'il représente, enfin que l'on ordonne le résultat par rapport aux puissances de $x+y$ et de xy, on aura

$$\left.\begin{array}{l} B^2-4A\alpha^2+(2BC-4AD-2B\alpha^2)(x+y)+ \\ (C^2-4AE-2C\alpha^2+\alpha^4)(x^2+y^2)+2(C^2-4AE-BD-\alpha^4)xy \\ +2(CD-2BE-D\alpha^2)(x+y)xy+(D^2-4E\alpha^2)x^2y^2 \end{array}\right\}=0.$$

Il est bon de remarquer que cette équation est en même tems l'intégrale de la proposée et de

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}-\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}=0,$$

et qu'on peut la mettre sous la forme

$$A'+B'(x+y)+C'(x^2+y^2)+D'xy+E'(x+y)xy+F'x^2y^2=0;$$

c'est ainsi qu'elle s'est présentée d'abord à Euler, qui la trouva par hasard, en cherchant s'il étoit possible de déterminer les coefficiens A', B', etc. de manière qu'elle satisfît à l'équation différentielle proposée. Pour remplir cet objet, il faut la différentier, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l} [B'+2C'x+D'y+E'(2xy+y^2)+2F'xy^2]dx \\ +[B'+2C'y+D'x+E'(2xy+x^2)+2F'x^2y]dy \end{array}\right\}=0;$$

puis la résoudre successivement par rapport à x et par rapport à y; on trouve alors

$$2x(C'+E'y+F'y^2)+B'+D'y+E'y^2=$$
$$\pm\sqrt{(B'+D'y+E'y^2)^2-4(A'+B'y+C'y^2)(C'+E'y+F'y^2)}$$
$$2y(C'+E'x+F'x^2)+B'+D'x+E'x^2=$$
$$\pm\sqrt{(B'+D'x+E'x^2)^2-4(A'+B'x+C'x^2)(C'+E'x+F'x^2)},$$

et comme les premiers membres de ces équations sont précisément les coefficiens de dx et dy dans l'équation différentielle rapportée

plus haut, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\pm dx\sqrt{(B'+D'y+E'y^2)^2-4(A'+B'y+C'y^2)(C'+E'y+F'y^2)}\\ \pm dy\sqrt{(B'+D'x+E'x^2)^2-4(A'+B'x+C'x^2)(C'+E'x+F'x^2)}\end{array}\right\}=0,$$

On ramenera les radicaux de ce résultat à la forme

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4},\quad \sqrt{A+By^2+Cy^2+Dy^3+Ey^4},$$

et par conséquent l'équation ci-dessus à celles que nous avons intégrées, en faisant

$$\begin{aligned}A&=B'^2-4A'C'\\ B&=2B'D'-4(A'E'+B'C')\\ C&=2B'E'+D'^2-4(A'F'+C'^2+B'E')\\ D&=2D'E'-4(B'F'+C'E')\\ E&=E'^2-4C'F'.\end{aligned}$$

Ces équations n'étant qu'au nombre de 5, un des 6 coefficiens A', B', C', D', E', F', restera indéterminé et tiendra lieu de constante arbitraire.

681. Lorsqu'on fait $E=0$ et $D=0$, on retombe sur $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}+\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}}=0$, dont nous nous sommes occupés dans le n°. 677; l'équation (1) devient dans ce cas

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2}-\sqrt{A+By+Cy^2}=\alpha(x-y)$$

et donne une intégrale plus simple que l'équation (1) du n°. cité, intégrale que l'on déduiroit aussi de l'application immédiate du procédé de Lagrange à l'équation proposée dans ce n°.; mais qui est sujette à l'inconvénient qu'on a fait remarquer dans le n°. 679. Quant à l'intégrale rationnelle, elle seroit seulement de la forme

$$A'+B'(x+y)+C'(x^2+y^2)+D'xy=0,$$

ainsi qu'on peut s'en convaincre, soit en faisant évanouir les radicaux, comme ci-dessus, soit par la différentiation.

682. Si nous désignons par $f(x)$ et par $f(y)$, les intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$, $\int\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$, nous aurons pour déterminer les propriétés de cette espece de fonctions transcendantes, les deux équations;

V

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4} - \sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4} = (x-y)\sqrt{\alpha^2+D(x+y)+E(x+y)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$f(x)+f(y)=\beta \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

On se convaincra par le développement en série, que $f(y)$ devient nulle lorsque $y=0$; et en représentant par a la valeur que reçoit x dans la même circonstance, on aura $\beta=f(a)$, puis faisant $x=a$, et $y=0$, dans l'équation (1), on la changera en cette autre :

$$\sqrt{A+Ba+Ca^2+Da^3+Ea^4} - \sqrt{A} = \sqrt{\alpha^2+Da+Ea^2}$$

dont on tirera la valeur de α. C'est ainsi qu'on peut assigner dans le cas actuel la relation que doivent avoir les constantes α et β, et en vertu de laquelle l'équation (1) fera connoître celle qui existe entre les trois quantités x, y et α, lorsque $f(x)+f(y)=f(a)$. Nous ne suivrons pas plus loin les conséquences des équations (1) et (2), parce que nous parviendrons à des résultats plus simples en donnant une autre forme aux fonctions transcendantes qui entrent dans l'équation proposée.

683. Nous avons montré dans le n°. 512 que les transcendantes de la forme $\int \frac{Pdx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$ pouvoient toujours se ramener à d'autres comprises dans l'expression $\int \frac{A+B\sin\varphi^m}{C+D\sin\varphi^n}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$; nous considérerons donc ces dernières, et nous nous occuperons de l'équation

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}} = 0.$$

On pourroit introduire dans l'équation (1) du n°. précédent, les variables $\sin\varphi$ et $\sin\psi$; mais il sera plus simple d'intégrer immédiatement la propoée. Pour cela on fera

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}, \qquad \frac{d\psi}{dt} = -\sqrt{1-e^2\sin\psi^2},$$

et on en déduira

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = 1-e^2\sin\varphi^2; \qquad \frac{d\psi^2}{dt^2} = 1-e^2\sin\psi^2,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -e^2\sin\varphi\cos\varphi; \qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} = -e^2\sin\psi\cos\psi;$$

En ajoutant et retranchant successivement les deux dernières équations, on aura

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{d^2\psi}{dt^2}=-e^2(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\psi\cos\psi)=-\tfrac{1}{2}e^2(\sin 2\varphi+\sin 2\psi)\ ;$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\frac{d^2\psi}{dt^2}=-e^2(\sin\varphi\cos\varphi-\sin\psi\cos\psi)=-\tfrac{1}{2}e^2(\sin 2\varphi-\sin 2\psi).$$

Si l'on prend $p=\varphi+\psi$; $q=\varphi-\psi$, il viendra

$\varphi=\frac{1}{2}(p+q)$, $\psi=\frac{1}{2}(p-q)$, $d^2\varphi+d^2\psi=d^2p$, $d^2\varphi-d^2\psi=d^2q$;

$$\frac{d^2p}{dt^2}=-\tfrac{1}{2}e^2[\sin(p+q)+\sin(p-q)]=-e^2\sin p\cos q\ ;$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}=-\tfrac{1}{2}e^2[\sin(p+q)-\sin(p-q)]=-e^2\cos p\sin q\ ;$$

mais on a aussi

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=\frac{d\varphi^2}{dt^2}-\frac{d\psi^2}{dt^2}=-e^2(\sin\varphi^2-\sin\psi^2)=\tfrac{1}{2}e^2(\cos 2\varphi-\cos 2\psi)$$

$$=\tfrac{1}{2}e^2[\cos(p+q)-\cos(p-q)]=-e^2\sin p\sin q.$$

Divisant les équations $\frac{d^2p}{dt^2}=-e^2\sin p\cos q$ et $\frac{d^2q}{dt^2}=-e^2\cos p\sin q$, par $\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=-e^2\sin p\sin q$, on aura

$$\frac{d^2p}{dp\,dq}=\frac{\cos q}{\sin q}\quad\text{ou}\quad\frac{d^2p}{dp}=\frac{dq\cos q}{\sin q}\ ,$$

$$\frac{d^2q}{dp\,dq}=\frac{\cos p}{\sin p}\quad\text{ou}\quad\frac{d^2q}{dq}=\frac{dp\cos p}{\sin p}\ .$$

Ces deux résultats s'intégrent et donnent

$$1.\frac{dp}{dt}=1.\sin q+1\alpha\ ,\qquad 1.\frac{dq}{dt}=1.\sin p+1\alpha'\ ;$$

et passant aux nombres,

$$\frac{dp}{dt}=\alpha\sin q\ ;\qquad\frac{dq}{dt}=\alpha'\sin p\ ;$$

remplaçant p et q par leurs valeurs $\varphi+\psi$ et $\varphi-\psi$; et $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, par celles de $\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}-\frac{d\psi}{dt}$, on aura

$$\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}-\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}=\alpha\sin(\varphi-\psi)\ ;$$

$$\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}+\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}=\alpha'\sin(\varphi+\psi)\ ;$$

Chacune de ces équations est une intégrale de la proposée; mais on peut en obtenir une troisième qui sera plus simple, en éliminant dt entre les équations $\frac{dp}{dt} = \alpha \sin q$, $\frac{dq}{dt} = \alpha' \sin p$; la résultante $\alpha\, dq \sin q = \alpha' dp \sin p$, et son intégrale $\alpha \cos q = \alpha' \cos p + \alpha''$, conviendront à l'équation proposée, lorsqu'on aura réduit à une seule les trois constantes arbitraires qu'elle renferme. Pour y parvenir, on supposera que φ se change en μ quand $\psi = 0$, et les deux intégrales, trouvées ci-dessus, donneront

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 - e^2 \sin \mu^2}}{\sin \mu}, \qquad \alpha' = \frac{1 + \sqrt{1 - e^2 \sin \mu^2}}{\sin \mu};$$

mettant ces valeurs dans l'équation $\alpha \cos q = \alpha' \cos p + \alpha''$, qui, dans l'hypothèse actuelle où $p = q = \mu$, devient $(\alpha - \alpha')\cos\mu = \alpha''$, nous aurons $\alpha'' = -\frac{2\cos\mu}{\sin\mu}$. Substituant ensuite dans $\alpha \cos q = \alpha' \cos p + \alpha''$ après y avoir mis $\varphi + \psi$ et $\varphi - \psi$ à la place de p et de q, nous obtiendrons

$$\cos(\varphi - \psi)(-1 + \sqrt{1 - e^2 \sin\mu^2}) = \cos(\varphi + \psi)(1 + \sqrt{1 - e^2 \sin\mu^2}) - 2\cos\mu,$$

résultat qui se réduira successivement à

$$\cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi) + (\cos(\varphi + \psi) - \cos(\varphi - \psi))\sqrt{1 - e^2 \sin\mu^2} = 2\cos\mu,$$

$$\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - e^2 \sin\mu^2} = \cos\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

Maintenant si on désigne $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin\varphi^2}}$ par $f(\varphi)$, on aura $f(\varphi) + f(\psi) = \beta$; faisant $\psi = 0$ et $\varphi = \mu$, il viendra $\beta = f(\mu)$; d'où il suit $f(\varphi) + f(\psi) = f(\mu) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$.

Si l'équation proposée étoit

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin\varphi^2}} - \frac{d\psi}{\sqrt{1 - e^2 \sin\psi^2}} = 0,$$

on trouveroit, en changeant le signe de $\sqrt{1 - e^2 \sin\psi^2}$ dans les deux dernières équations de la page précédente, et en opérant comme ci-dessus; $\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - e^2 \sin\mu^2} = \cos\mu \ldots\ldots (5)$; et on auroit dans ce cas $f(\varphi) - f(\psi) = f(\mu) \ldots\ldots (6)$.

Legendre, dans son Mémoire sur les Transcendantes elliptiques, a déduit de la combinaison des équations que nous venons d'obtenir, plusieurs belles propriétés de ces fonctions, et nous allons faire connoître cette partie de son travail.

684. Le premier usage qu'on peut faire des équations (3) et (4), consiste à trouver l'arc μ, qui répond à la somme des fonctions $f(\varphi)$ et $f(\psi)$, lorsqu'on connoît les arcs φ et ψ. Il faut pour cela résoudre l'équation (3) par rapport à $\sin\mu$ et à $\cos\mu$; mais on arrivera plus facilement au résultat, en mettant dans les deux équations qui terminent la page 434, les valeurs de α et de α', rapportées page 435; et en éliminant successivement $\sqrt{1-e^2\sin\mu^2}$ et $\sin\mu$: on obtiendra, après les réductions et les développemens nécessaires,

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi^2\cos\psi^2 - \cos\varphi^2\sin\psi^2}{\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2} - \sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}};$$

$$\sqrt{1-e^2\sin\mu^2} = \frac{\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2} - \sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}}{\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2} - \sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}.$$

On multipliera ensuite les deux termes de chacune de ces fractions par

$$\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2} + \sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2};$$

on les divisera en même tems par $\sin\varphi^2\cos\psi^2 - \cos\varphi^2\sin\psi^2$; en observant que cette quantité n'est autre chose que

$$(1-\cos\varphi^2)\cos\psi^2 - (1-\cos\psi^2)\cos\varphi^2 = \cos\psi^2 - \cos\varphi^2;$$
$$(1-\sin\psi^2)\sin\varphi^2 - (1-\sin\varphi^2)\sin\psi^2 = \sin\varphi^2 - \sin\psi^2,$$

et il viendra

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2} + \sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}{1-e^2\sin\varphi^2\sin\psi^2};$$

$$\sqrt{1-e^2\sin\mu^2} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}\cdot\sqrt{1-e^2\sin\psi^2} - e^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-e^2\sin\varphi^2\sin\psi^2}.$$

Substituant cette dernière valeur dans l'équation (3), on aura

$$\cos\mu = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}\cdot\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}}{1-e^2\sin\varphi^2\sin\psi^2};$$

d'où on déduira

$$\tang\mu = \frac{\tang\varphi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2} + \tang\psi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}{1-\tang\varphi\tang\psi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}\cdot\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}}.$$

Cette dernière expression donnera $\mu = \varphi' + \psi'$, si on prend

$\text{tang}\,\varphi' = \text{tang}\,\varphi\sqrt{1 - e^2\sin\psi^2}$, $\text{tang}\,\psi' = \text{tang}\,\psi\sqrt{1 - e^2\sin\varphi^2}$;

et on calculera facilement $\sqrt{1 - e^2\sin\varphi^2}$, $\sqrt{1 - e^2\sin\psi^2}$, en faisant $e\sin\varphi = \sin\alpha$ et $e\sin\psi = \sin\beta$, parce que ces radicaux deviendront respectivement $\cos\alpha$, $\cos\beta$.

685. Dans le cas où $\sqrt{1 - e^2\sin\psi^2}$ seroit affecté du signe — dans l'équation proposée, on trouveroit, en opérant comme ci-dessus,

$$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2} - \sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}{1-e^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

$$\sqrt{1-e^2\sin\mu^2} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}\cdot\sqrt{1-e^2\sin\psi^2} + e^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1-e^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}\cdot\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}}{1-e^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

$$\text{tang}\,\mu = \frac{\text{tang}\,\varphi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2} - \text{tang}\,\psi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}{1 + \text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\psi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}\cdot\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}};$$

686. On peut maintenant trouver les sinus et les cosinus des arcs correspondans à des fonctions multiples. Occupons-nous d'abord du cas le plus simple; désignons par φ_2 l'arc qui répond au double de la fonction $f(\varphi)$, en sorte qu'on ait $f(\varphi_2) = 2f(\varphi)$. En faisant $\psi = \varphi$ et $\mu = \varphi_2$, dans les valeurs de $\sin\mu$, de $\cos\mu$ et de $\text{tang}\,\mu$, déduites des équations (3) et (4), nous aurons

$$\sin\varphi_2 = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}{1-e^2\sin\varphi^4},$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1-2\sin\varphi^2+e^2\sin\varphi^4}{1-e^2\sin\varphi^4};$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \text{tang}\,\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}.$$

La dernière de ces formules se prête facilement au calcul, en prenant $\sin\alpha = e\sin\varphi$; $\sin\alpha_2 = e\sin\varphi_2$, $\sin\alpha_4 = e\sin\varphi_4$, etc. ce qui donnera $\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi_2 = \cos\alpha\,\text{tang}\,\varphi$, $\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi_4 = \cos\alpha_2\,\text{tang}\,\varphi_2$, etc.

Si l'on désigne par $\varphi_{\frac{1}{2}}$ l'arc qui répond à $\frac{1}{2}f(\varphi)$, par $\varphi_{\frac{1}{4}}$ celui qui répond à $\frac{1}{4}f(\varphi)$, etc. et que dans l'équation (3), on change φ et ψ en $\varphi_{\frac{1}{2}}$ et μ en φ, on en déduira

$\sin\varphi_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{\left(\frac{1+R}{2}\right)}}$, en posant pour abréger $\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2} = R$.

En prenant $\sin\alpha = e\sin\varphi$, on aura $\sqrt{\dfrac{1+R}{2}} = \cos\frac{1}{2}\alpha$,

et par conséquent $\sin\varphi_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$; faisant encore $\sin\alpha_{\frac{1}{2}} = e\sin\varphi_{\frac{1}{2}}$,

il en résultera $\sin\varphi_{\frac{1}{4}} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\varphi_{\frac{1}{2}}}{\cos\frac{1}{2}\alpha_{\frac{1}{2}}}$, et ainsi de suite.

Passons à la recherche des arcs correspondans à des multiples et à des fractions quelconques de la fonction $f(\varphi)$. Soient $\varphi_{n-\frac{1}{i}}$, φ_n, $\varphi_{n+\frac{1}{i}}$, trois arcs qui, d'après la notation adoptée, répondent aux fonctions $(n-1)f(\varphi)$, $nf(\varphi)$, $(n+1)f(\varphi)$; comme

$$f(\varphi_{n+\frac{1}{i}}) = (n+1)f(\varphi) = nf(\varphi) + f(\varphi),$$
$$f(\varphi_{n-\frac{1}{i}}) = (n-1)f(\varphi) = nf(\varphi) - f(\varphi),$$

on changera dans les expressions de $\sin\mu$ et de $\cos\mu$ du n°. 684, $\downarrow$ en φ_n, μ en $\varphi_{n+\frac{1}{i}}$, et dans celles du n°. 685, $\downarrow$ en φ, φ en φ_n, μ en $\varphi_{n-\frac{1}{i}}$, et on formera les équations

$$\sin\varphi_{n+\frac{1}{i}} + \sin\varphi_{n-\frac{1}{i}} = \frac{2R\cos\varphi\sin\varphi_n}{1-e^2\sin\varphi^2\sin\varphi_n^2},$$

$$\cos\varphi_{n+\frac{1}{i}} + \cos\varphi_{n-\frac{1}{i}} = \frac{2\cos\varphi\cos\varphi_n}{1-e^2\sin\varphi^2\sin\varphi_n^2}.$$

En faisant successivement $n = 1, 2, 3$, etc. on tirera de ces équations les expressions de $\sin\varphi_2$, $\sin\varphi_3$, etc. Soit pour abréger

$$2R\cos\varphi = p, \quad 1-e^2\sin\varphi^4 = q, \quad e^2\sin\varphi^4 = 1-q = r,$$

il viendra $\sin\varphi_2 = \dfrac{p}{q}\sin\varphi$,

$$\sin\varphi_3 = \frac{p^2-q^2}{q^2-rp^2}\sin\varphi,$$

$$\sin\varphi_4 = \frac{(1+r)p^2-2q^2}{q^4-rp^4}pq\sin\varphi,$$

$$\sin\varphi_5 = \frac{q^6-3p^2q^4+(1+2r)p^4q^2-r^2p^6}{q^6-3rp^2q^4+r(r+2)p^4q^2-rp^6}\sin\varphi,$$

etc.

Les développemens de ces formules seroient très-compliqués ; la recherche des tangentes conduit à des résultats plus simples. Les deux équations dont on a tiré les précédentes étant divisées l'une par l'autre, donneront $\frac{\sin\varphi_{n+1}+\cos\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_{n+1}+\cos\varphi_{n-1}} = R\,\text{tang}\,\varphi_n$;

ou $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1}) = R\,\text{tang}\,\varphi_n$;

on déduit de cette dernière

$$\begin{aligned}\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi &= R\,\text{tang}\,\varphi\,;\\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi) &= R\,\text{tang}\,\varphi_2\,;\\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi_4+\varphi_2) &= R\,\text{tang}\,\varphi_3\,,\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Si dans les équations que nous venons d'obtenir, on regarde $\sin\varphi$, ou $\text{tang}\,\varphi$, comme l'inconnue, on aura celles qu'il faut résoudre pour diviser la fonction f en plusieurs parties égales par le moyen de l'arc auquel on la rapporte. En faisant, par exemple, $\sin\varphi_3 = a$ et $\sin\varphi = x$, il vient

$$a = \frac{(3-4(1+e^2)x^2+6e^2x^4-e^4x^6)\,x}{1-6e^2x^4+4e^2(1+e^2)x^6-3e^4x^8}\,;$$

cette équation monte au neuvième degré, et l'on en auroit une du vingt-cinquième, si l'on cherchoit à obtenir l'arc qui répond à un cinquième de la fonction.

687. Les équations deviennent beaucoup moins compliquées quand la fonction à diviser en parties égales répond à un arc de 90°, parce qu'il s'établit alors des relations très-simples entre φ_{n-1} et φ, φ_{n-2} et φ_2, etc. En effet si on suppose $\mu = 90°$ dans l'équation (3), elle devient $\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-e^2} = 0$ et donne $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi\sqrt{1-e^2}}$ $= 0$, ou $\text{tang}\,\varphi = \frac{\cot\psi}{\sqrt{1-e^2}}$; mais en prenant μ pour φ_n, on pourra écrire φ_{n-i} et φ_i à la place de φ et de ψ, en sorte qu'on aura $\text{tang}\,\varphi_{n-i} = \frac{\cot\varphi_i}{\sqrt{1-e^2}}$, d'où on tirera $\text{tang}\,\varphi_{n-1} = \frac{\cot\varphi}{\sqrt{1-e^2}}$, $\text{tang}\,\varphi_{n-2} = \frac{\cot\varphi_2}{\sqrt{1-e^2}}$, etc. Maintenant que l'on mette φ_n ou 90° au lieu de φ_{n+1}, φ_{n-1} au lieu de φ_n, et φ_{n-2} au lieu de φ_{n-1}, dans l'équa-

tion $\tang \frac{1}{2}(\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1}) = R \tang \varphi_n$; on en tirera

$$\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi_{n-2}) = R \tang \varphi_{n-1};$$

la même équation donnera $\tang \frac{1}{2}(\varphi_{n-1}+\varphi_{n-3}) = R \tang \varphi_{n-2}$, etc. Pendant qu'on descendra ainsi de φ_n vers φ, on formera les équations qui donnent φ_2, φ_1, etc. en partant de φ; on cherchera dans ces deux suites d'équations celles qui pourront conduire à une équation dans laquelle il n'entre plus que l'arc φ. S'il falloit diviser la fonction en trois parties égales, l'équation $\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_{n-2}) = R \tang \varphi_{n-1}$ donneroit immédiatement $\tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) = R \frac{\cot \varphi}{\sqrt{1-e^2}}$; en observant que $\tang \varphi_{n-1} = \frac{\cot \varphi}{\sqrt{1-e^2}}$; posant ensuite $\sin \varphi = x$ et développant, on trouveroit

$$e^2x^4 - 2e^2x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Dans le cas où l'on voudroit partager la fonction en cinq parties égales, on auroit d'abord $\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_3) = R \frac{\cot \varphi}{\sqrt{1-e^2}}$, et on combineroit cette équation avec $\tang \frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi) = R \tang \varphi_2$; on trouveroit par les formules du n°. 684 que $\tang \varphi_2 = \frac{2R \sin \varphi \cos \varphi}{1 - 2\sin \varphi^2 + e^2 \sin \varphi^4}$; et faisant $\sin \varphi = x$, il résulteroit de l'élimination de φ_3,

$$\frac{(1+x)\sqrt{1-e^2x^2}}{x\sqrt{1-e^2}} = \frac{1 + 2x - 2e^2x^3 - e^2x^4}{1 - 2x + 2e^2x^3 - e^2x^4}.$$

688. Ce qui précède suffit pour trouver dans tous les cas la relation qui doit avoir lieu entre φ_n et φ pour que $f(\varphi_n) = n f(\varphi)$, et l'on en déduira aisément celle des arcs φ et ψ déterminés par l'équation $f\psi) = \frac{m}{n} f(\varphi)$; car en faisant $m f(\varphi) = f(\omega)$, on aura $n f(\psi) = f(\omega)$; et lorsqu'on sera parvenu aux équations algébriques que supposent entre les sinus et cosinus des arcs φ et ω, ψ et ω, les conditions précédentes, il ne restera plus qu'à chasser ω.

Il suit de là qu'on peut intégrer algébriquement l'équation

$$\frac{m\,d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} + \frac{n\,d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}} = 0.$$

Pour

Pour y parvenir on prendra d'abord l'intégrale transcendante qui est

$$mf(\varphi) + nf(\psi) = nf(\mu),$$

μ étant ce que devient ψ, lorsque $\varphi = 0$; on y introduira un nouvel arc ω tel qu'on ait $f(\omega) = f(\mu) - f(\psi)$, et elle deviendra $mf(\varphi) = nf(\omega)$. L'élimination de ω entre les équations algébriques qui correspondent aux deux équations transcendantes que nous venons de trouver, donnera l'intégrale algébrique de l'équation proposée.

Soit en général l'équation

$$\frac{m\,d\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin\varphi^2}} + \frac{n\,d\psi}{\sqrt{1 - e^2\sin\psi^2}} + \frac{p\,d\omega}{\sqrt{1 - e^2\sin\omega^2}} + \text{etc.} = 0,$$

composée d'un nombre quelconque de termes, mais limité ; son intégrale transcendante sera

$$mf(\varphi) + nf(\psi) + pf(\omega) + \text{etc.} = f(\mu),$$

et on pourra en déduire une intégrale algébrique, en faisant

$mf(\varphi) = f(\varphi')$, $nf(\psi) = f(\psi')$, $pf(\omega) = f(\omega')$, etc.

ce qui donnera

$$f(\varphi') + f(\psi') + f(\omega') + \text{etc.} = f(\mu).$$

La question sera ramenée à trouver les relations algébriques qui correspondent aux équations précédentes ; or on a déjà vu comment il falloit s'y prendre pour les premières, et quant à la dernière on la décomposera en d'autres qui n'ayent que trois termes. Supposons pour fixer les idées, qu'elle n'en ait elle-même que quatre ; on posera $f(\varphi') + f(\psi') = f(\mu')$ et il viendra $f(\mu') + f(\omega') = f(\mu)$; en chassant μ' des équations algébriques qui correspondent à celles-ci, on obtiendra une résultante algébrique entre les sinus et les cosinus des arcs φ', ψ', ω' et μ. On la combinera avec les équations algébriques qui répondent aux premières équations transcendantes, pour éliminer φ', ψ', ω', etc. et l'équation finale sera l'intégrale algébrique de la proposée : une fonction du sinus et du cosinus de l'arc μ tiendra lieu de constante arbitraire.

Il suit de ce qui vient d'être dit que l'équation

$$\frac{m\,dx}{R(x)} + \frac{n\,dy}{R(y)} + \frac{p\,dz}{R(z)} + \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle $R(x)$ désigne le radical $\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}$ et ainsi des autres, et qui peut se réduire à la précédente, est inté-

grable algébriquement. Si l'on prend pour z et pour les variables suivantes des fonctions de x et de y, cette équation en fournira une infinité d'autres à deux variables seulement, et de formes très-diverses, qui toutes seront susceptibles d'une intégrale algébrique. Jusqu'à présent on n'a pu rien obtenir pour le cas où le radical contiendroit plus de quatre termes.

689. L'on est parvenu à évaluer les arcs de cercle par la bissection en calculant successivement le sinus de la moitié, du quart, du huitième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on fût arrivé à un arc assez petit pour être sensiblement égal à son sinus; on peut en faire autant à l'égard de la fonction $f(\varphi)$ en calculant successivement les arcs $\varphi_{\frac{1}{2}}$, $\varphi_{\frac{1}{4}}$, $\varphi_{\frac{1}{8}}$, ... qui répondent à $\frac{1}{2}f(\varphi)$, $\frac{1}{4}f(\varphi)$, $\frac{1}{8}f(\varphi)$, etc.

Si la quantité e n'est pas trop approchante de l'unité et que l'on ne prenne pas $\varphi > 90°$, les arcs $\varphi_{\frac{1}{2}}$, $\varphi_{\frac{1}{4}}$, $\varphi_{\frac{1}{8}}$, etc. décroîtront assez rapidement, et comme, lorsque φ est très-petit, la fonction $f(\varphi)$ en diffère peu, il s'ensuit que le dernier arc auquel on s'arrêtera dans la suite des bissections, donnera une valeur approchée d'une fraction de la fonction $f(\varphi)$. Nous allons rapporter ici l'exemple qu'a choisi Legendre.

Soit $e = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sin 75°$, et $\tang \varphi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$; on tire de là, par le moyen des formules du n°. 686,

φ	$= 47°$	$3' \cdot 30'',948$	α	$= 45$	$0 \quad 0'',000$
$\varphi_{\frac{1}{2}}$	$= 25$	$36 \quad 5,659$	$\alpha_{\frac{1}{2}}$	$= 24$	$40 \quad 10,959$
$\varphi_{\frac{1}{4}}$	$= 13$	$6 \quad 30,907$	$\alpha_{\frac{1}{4}}$	$= 12$	$39 \quad 15,757$
$\varphi_{\frac{1}{8}}$	$= 6$	$35 \quad 40,703$	$\alpha_{\frac{1}{8}}$	$= 6$	$22 \quad 8,351$
$\varphi_{\frac{1}{16}}$	$= 3$	$18 \quad 8,734$	$\alpha_{\frac{1}{16}}$	$= 3$	$11 \quad 23,211$
$\varphi_{\frac{1}{32}}$	$= 1°$	$39' \quad 6'',667$			

Le dernier de ces arcs, ne surpassant que très-peu la moitié de l'avant-dernier, est déjà fort près de la limite cherchée; mais les différences entre chaque arc et la moitié de celui qui le précède, suivant à peu près la progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{4}$,

on trouvera qu'en partant de $\varphi_{\frac{1}{32}} - \frac{1}{2}\varphi_{\frac{1}{16}} = 2'',3$, leur somme est environ $2'',3 \times \frac{4}{3}$, ou $3'',067$. En ajoutant ce nombre à $\frac{1}{2}\varphi_{\frac{1}{16}}$, on obtiendra $1°.\,39'\,7'',434$, et 32 fois cet arc, ou
$52°\,51'\,57'',9 = 0,922687$, en parties du rayon, sera la valeur approchée de $f(\varphi)$.

690. Après avoir considéré les fonctions elliptiques de la première espèce, passons à celles de la seconde. Désignons par $f_1(\varphi)$, $f_1(\psi)$, les deux fonctions $\int \frac{(A+B\sin\varphi^2)\,d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$, $\int \frac{(A+B\sin\psi^2)\,d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}}$, qui sont de cette espèce, et supposons que les arcs φ et ψ soient tels qu'on ait l'équation (4) du n°. 683, ou

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Il résulte de cette hypothèse

$$f_1(\varphi) + f_1(\psi) = \int \frac{B(\sin\varphi^2 - \sin\psi^2)\,d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} + const. \ldots\ldots\ldots (A);$$

le second membre de cette équation est intégrable algébriquement, en vertu de la relation établie entre φ et ψ.

Pour le prouver, reprenons l'équation (3) du n°. cité. En la différentiant elle nous donnera

$$-d\varphi\sin\varphi\cos\psi - d\psi\sin\psi\cos\varphi = \sqrt{1-e^2\sin\mu^2}.d.\sin\varphi\sin\psi;$$

élevons maintenant au quarré, et nous aurons

$$(d\varphi\sin\varphi\cos\psi + d\psi\sin\psi\cos\varphi)^2 = (1-e^2\sin\mu^2)(d.\sin\varphi\sin\psi)^2:$$

nous tirerons de là

$$(d.\sin\varphi\sin\psi)^2 - (d\varphi\sin\varphi\cos\psi + d\psi\sin\psi\cos\varphi)^2 = e^2\sin\mu^2(d.\sin\varphi\sin\psi)^2,$$

ce qui se réduit à

$$(\cos\varphi^2\sin\psi^2 - \sin\varphi^2\cos\psi^2)\,d\varphi^2 + (\sin\varphi^2\cos\psi^2 - \cos\varphi^2\sin\psi^2)\,d\psi^2 = e^2\sin\mu^2(d.\sin\varphi\sin\psi)^2.$$

Multipliant cette équation par e^2, mettant $1-\sin\psi^2$ pour $\cos\psi^2$, dans le coefficient de $d\varphi^2$, $1-\sin\varphi^2$, pour $\cos\varphi^2$, dans celui de $d\psi^2$, et réduisant, on trouvera

$$e^2(\sin\psi^2 - \sin\varphi^2)\,d\varphi^2 + e^2(\sin\varphi^2 - \sin\psi^2)\,d\psi^2 = e^4\sin\mu^2(d.\sin\varphi\sin\psi)^2;$$

ajoutant enfin au premier membre de cette équation la suivante,

$$(1-e^2\sin\psi^2)\,d\varphi^2 + 2d\varphi d\psi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}.\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2} + (1-e^2\sin\varphi^2)\,d\psi^2 = 0,$$

qu'on obtient en quarrant l'équation (*a*), il viendra après les réductions et l'extraction des racines quarrées de chaque membre du résultat,

$$d\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}+d\psi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}=e^2\sin\mu\, d.\sin\varphi\sin\psi.....(B).$$

Si l'on substitue dans cette dernière équation, à la place de $d\psi$, sa valeur prise dans l'équation (*a*), elle donnera

$$\frac{(\sin\varphi^2-\sin\psi^2)\,d\varphi^2}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}=-\sin\mu\, d.\sin\varphi\sin\psi;$$

remontant à l'équation (*A*), on la transformera, par le moyen de celle-ci, en $f_1(\varphi)+f_1(\psi)=-B\sin\mu\sin\varphi\sin\psi+const.$

Pour déterminer la constante, on observera que φ doit devenir égal à μ lorsque $\psi=0$, et que par conséquent $const=f_1(\mu)$; on aura donc ainsi $f_1(\varphi)+f_1(\psi)-f_1(\mu)=-B\sin\mu\sin\varphi\sin\psi$,

en même tems que $f(\varphi)+f(\psi)-f(\mu)=0$.

691. On peut déduire de l'équation

$$f_1(\varphi)+f_1(\psi)-f_1(\mu)=-B\sin\mu\sin\varphi\sin\psi.....(C);$$

relativement à la fonction f_1, un grand nombre de propriétés analogues à celles de la fonction f. Si l'on prend d'abord $\varphi=\psi$, on aura $\mu=\varphi_2$, puisque l'équation $f(\varphi)+f(\psi)=f(\mu)$, deviendra $2f(\varphi)=f(\mu)=f(\varphi_2)$; dans la même hypothèse l'équation (*C*) donnera $f_1(\varphi_2)-2f_1(\varphi)=B\sin\varphi_2\sin\varphi\sin\varphi$.

Faisant ensuite $\psi=\varphi_2$, on trouvera $\mu=\varphi_3$,

$$f_1(\varphi_3)-f_1(\varphi_2)-f_1(\varphi)=B\sin\varphi_3\sin\varphi_2\sin\varphi;$$

mettant pour $f_1(\varphi_2)$ sa valeur trouvée précédemment, on aura

$$f_1(\varphi_3)-3f_1(\varphi)=B(\sin\varphi_3\sin\varphi_2+\sin\varphi_2\sin\varphi)\sin\varphi:$$

on obtiendra de la même manière

$$f_1(\varphi_4)-4f_1(\varphi)=B(\sin\varphi_4\sin\varphi_3+\sin\varphi_3\sin\varphi_2+\sin\varphi_2\sin\varphi)\sin\varphi,$$

etc.

d'où l'on voit que de la relation $nf(\varphi)=f(\varphi_n)$, il résulte $f_1(\varphi_n)-nf_1(\varphi)$ égale à une quantité algébrique.

On prouvera d'une manière analogue que si les arcs φ,ψ,ω, etc. sont tels que

$$mf(\varphi)+nf(\psi)+pf(\omega)+\text{etc.}=0,$$

la quantité $mf_1(\varphi)+nf_1(\psi)+pf_1(\omega)+\text{etc.}$

aura une expression algébrique. Il est à propos de remarquer dans cette occasion que les fonctions $f(\varphi)$ et $f_1(\varphi)$ sont en général

du même signe que l'arc ϕ, et que par conséquent on pourroit satisfaire à la première des deux équations ci-dessus de bien des manières; mais si on n'y considère les fonctions que positivement, il faudra que quelques-uns des coefficiens m, n, p, etc. soient négatifs, et elle n'aura plus lieu que d'une seule manière.

692. Le résultat de la comparaison des transcendantes de la troisième espèce, comprises dans la formule $\int \frac{(A+B\sin\varphi^2)\,d\varphi}{(C+D\sin\varphi^2)\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$, est une quantité logarithmique. En effet, l'expression

$$\int \frac{(A+B\sin\varphi^2)\,d\varphi}{(C+D\sin\varphi^2)\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} + \int \frac{(A+B\sin\psi^2)\,d\psi}{(C+D\sin\psi^2)\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}} =$$

$$\int \frac{(A+B\sin\varphi^2)(C+D\sin\psi^2)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} + (A+B\sin\psi^2)(C+D\sin\varphi^2)\frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}}}{(C+D\sin\varphi^2)(C+D\sin\psi^2)},$$

se réduit à $\int \frac{(BC-AD)(\sin\varphi^2-\sin\psi^2)\,d\varphi}{(C+D\sin\varphi^2)(C+D\sin\psi^2)\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$,

lorsqu'on y met, au lieu de $\frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}}$, sa valeur tirée de l'équation $\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}} = 0$;

mais comme

$$\frac{(\sin\varphi^2-\sin\psi^2)\,d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} = -\sin\mu\, d.\sin\phi\sin\psi \text{ (n°. 690)},$$

on aura

$$\int \frac{(BC-AD)(\sin\varphi^2-\sin\psi^2)\,d\varphi}{(C+D\sin\varphi^2)(C+D\sin\psi^2)\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}} = \int \frac{(BC-AD)\,dq\sin\mu}{C^2+CDp+D^2q^2},$$

en faisant pour abréger $\sin\varphi^2+\sin\psi^2 = p$, $\sin\phi\sin\psi = q$.

On obtiendra la valeur de p, par le moyen de l'équation (3) (n°. 683), qui, étant mise sous la forme

$$\cos\phi\cos\psi = \cos\mu + \sin\phi\sin\psi\sqrt{1-e^2\sin\mu^2},$$

et élevée au quarré, donne

$$\cos\varphi^2\cos\psi^2 = \cos\mu^2 + 2\cos\mu\sin\phi\sin\psi\sqrt{1-e^2\sin\mu^2} + \sin\phi^2\sin\psi^2(1-e^2\sin\mu^2);$$

or $\cos\varphi^2\cos\downarrow^2 = 1-(\sin\varphi^2+\sin\downarrow^2)+\sin\varphi^2\sin\downarrow^2 = 1-p+q^2$;

il vient donc $1-p = \cos\mu^2+2q\cos\mu\sqrt{1-e^2\sin\mu^2}-q^2e^2\sin\mu^2$,

d'où il résulte $p = 1-\cos\mu^2-2q\cos\mu\sqrt{1-e^2\sin\mu^2}+q^2e^2\sin\mu^2$

$= \sin\mu^2-2q\cos\mu\sqrt{1-e^2\sin\mu^2}+q^2e^2\sin\mu^2$.

Substituant cette valeur, on aura $\int\frac{(BC-AD)\,dq\sin\mu}{C^2+CDp+D^2q^2} =$

$$\int\frac{(BC-AD)\,dq\sin\mu}{C^2+CD\sin\mu^2-2CDq\cos\mu\sqrt{1-e^2\sin\mu^2}+(D^2+CDe^2\sin\mu^2)q^2};$$

représentant la dernière intégrale par $\int Q\,dq$, et désignant par $f_2(\varphi)$ et $f_2(\downarrow)$, les transcendantes proposées, il viendra

$$f_2(\varphi)+f_2(\downarrow) = \int Q\,dq + const.$$

Il est facile de s'assurer que $\int Q\,dq$ s'évanouit lorsque $\downarrow=0$, ou $\varphi=0$, puisqu'alors il en arrive autant à q ainsi qu'à dq; mais comme μ désigne ce que devient φ quand $\downarrow=0$, nous aurons encore dans ce cas, $const. = f_2(\mu)$, d'où nous conclurons

$$f_2(\varphi)+f_2(\downarrow)-f_2(\mu) = \int Q\,dq;$$

et il est évident que $\int Q\,dq$ ne peut dépendre que des arcs de cercle ou des logarithmes.

On tireroit de cette équation des conséquences analogues à celles que nous avons déduites dans le n°. précéd. de l'équation

$$f_1(\varphi)+f_1(\downarrow)-f_1(\mu) = -B\sin\mu\sin\varphi\sin\downarrow,$$

et on prouveroit que la quantité

$$mf_2(\varphi)+nf_2(\downarrow)+pf_2(\omega)+\text{etc.}$$

pourra s'exprimer par les logarithmes et les arcs de cercle, si l'on a d'ailleurs $mf(\varphi)+nf(\downarrow)+pf(\omega)+\text{etc.} = 0$.

693. On peut étendre ce qui précède aux expressions de la forme $\int\frac{\Phi\,d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$, dans laquelle Φ désigne une fonction rationnelle et paire de $\sin\varphi$. Si on représente cette intégrale par $F(\varphi)$, et que l'on prenne en $\sin\downarrow$, une fonction Ψ, semblable à Φ, on aura

$$\int\frac{\Phi\,d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}+\int\frac{\Psi\,d\downarrow}{\sqrt{1-e^2\sin\downarrow^2}} =$$

$$F(\varphi)+F(\downarrow)-F(\mu) = \int\frac{(\Phi-\Psi)\,d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}},$$

dans l'hypothèse de $\frac{d\phi}{\sqrt{1-e^2\sin\phi^2}}+\frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}}=0.$

Faisant, comme précédemment, $\sin\phi^2+\sin\psi^2=p$, $\sin\phi\sin\psi=q$, on trouvera $\sin\phi^2=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q^2}$,

$$\sin\psi^2=\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-4q^2};$$

après la substitution de ces valeurs, les fonctions Φ et Ψ deviendront de la forme $M+N\sqrt{p^2-4q^2}$, $M-N\sqrt{p^2-4q^2}$, M et N étant des fonctions rationnelles de p et de q : on aura donc

$$\Phi-\Psi=2N\sqrt{p^2-4q^2}=2N(\sin\phi^2-\sin\psi^2),$$

et par conséquent

$$\int\frac{(\Phi-\Psi)\,d\phi}{\sqrt{1-e^2\sin\phi^2}}=\int\frac{2N(\sin\phi^2-\sin\psi^2)d\phi}{\sqrt{1-e^2\sin\phi^2}}=-2\sin\mu\int N\,d.\sin\phi\sin\psi$$

(n°. 690), d'où il suit

$$F(\phi)+F(\phi)-F(\mu)=-2\sin\mu\int N\,dq.$$

L'intégrale $\int N\,dq$, qui ne renferme les quantités p et q que sous une forme rationnelle, ne dépendra que des logarithmes et des arcs de cercle, lorsqu'on aura remplacé p par sa valeur trouvée dans le n°. 692; et si l'on a l'équation

$$m\,f(\phi)+n\,f(\psi)+p\,f(\omega)+\text{etc.}=0;$$

la quantité $mF(\phi)+nF(\psi)+mF(\omega)+\text{etc.}$

pourra s'exprimer soit algébriquement, soit par les logarithmes et par les arcs de cercle. Il ne faut pas perdre de vue que la fonction $\int\frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$ se ramène à celle que nous venons de traiter, parce qu'il s'ensuit que si on désigne cette fonction par $F(x)$, on pourra toujours, dans une certaine relation entre x, y, z, etc. déterminer la quantité $mF(x)+nF(y)+pF(z)+\text{etc.}$ par les logarithmes et les arcs de cercle.

694. L'équation

$$d\phi\sqrt{1-e^2\sin\phi^2}+d\psi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}=e^2\sin\mu\,d.\sin\phi\sin\psi,$$

que nous avons obtenue ci-dessus, n°. 690, et de laquelle on tire

$$\int d\phi\sqrt{1-e^2\sin\phi^2}+\int d\psi\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}=e^2\sin\mu\sin\phi\sin\psi+\textit{const.}$$

renferme des propriétés intéressantes par rapport à la division des arcs d'ellipse. En effet, si l'on désigne

$\int d\varphi \sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}$ par $E(\varphi)$, $\int d\psi \sqrt{1-e^2\sin\psi^2}$ par $E(\psi)$;

la constante, déterminée de manière que φ devienne μ lorsque $\psi=0$, sera $E(\mu)$, et l'on aura ainsi

$$E(\varphi)+E(\psi)-E(\mu)=e^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D).$$

Il est évident, par le n°. 509, que $E(\varphi)$, $E(\psi)$ et $E(\mu)$, expriment les arcs elliptiques comptés depuis le petit axe et correspondans aux arcs φ, ψ et μ, comptés de la même ligne, sur le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. Nous ne détaillerons pas ici toutes les conséquences que l'on peut tirer de l'équation (D); on les trouvera dans un Mémoire de Legendre, imprimé parmi ceux de l'Académie (année 1786) : nous nous bornerons seulement à observer que si l'on fait $\varphi=\psi$, ce qui donnera $2E(\varphi)-E(\mu)=e^2\sin\mu\sin\varphi^2$, et changera l'équation (3) du n°. 683 en $\cos\varphi^2-\sin\varphi^2\sqrt{1-e^2\sin\mu^2}=\cos\mu$, d'où on tirera $\sin\varphi^2=\dfrac{1-\cos\mu}{1+\sqrt{1-e^2\sin\mu^2}}$, l'arc elliptique correspondant à φ ne différera de la moitié de l'arc correspondant à μ, que par une quantité algébrique, qui représente toujours une ligne droite rigoureusement assignable.

En général l'équation (D) fournit le moyen de trouver toujours deux arcs elliptiques dont la différence soit égale à une ligne droite. Si l'on prend, *fig.* 26, $BM=E(\mu)$, $BP=E(\varphi)$, $BQ=E(\psi)$, on aura

FIG. 26.

$$BP-QM=BP+BQ-BM=E(\varphi)+E(\psi)-E(\mu)=e^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi;$$

les arcs BP et QM jouiront donc de la propriété demandée.

FIG. 27. Quand l'arc μ sera égal au quart d'ellipse BA, *fig.* 27, la relation des angles φ et ψ se simplifiera beaucoup; car à cause de $\mu=90°$, on aura $\cos\mu=0$, $\sin\mu=1$, l'équation (3) deviendra

$$\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-e^2}=0:$$

on en tirera $\cot\varphi=\operatorname{tang}\psi\sqrt{1-e^2}$,

et $e^2\sin\mu\sin\varphi\sin\psi=\dfrac{e^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}$.

Telle sera la différence des arcs BP et AQ, et les lecteurs attentifs trouveront

trouveront sans peine que l'expression précédente est aussi celle de la différence des tangentes PS et QT, en sorte que
$BP-AQ=PS-QT$.

Lorsque $\varphi=\downarrow$, il en résulte $\cos\varphi^2-\sin\varphi^2\sqrt{1-e^2}=0$, ou $\text{tang}\,\varphi=\frac{1}{\sqrt{b}}$, en faisant pour abréger $\sqrt{1-e^2}=b$; on trouve ensuite que $\frac{e^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}=1-b$, en observant que $e^2=1-b^2$. On conclura de là que si le point K répond à l'arc $\varphi=\downarrow$, la différence des arcs BK et AK sera égale à celle des demi-axes AC et BC; et il sera facile de voir en même tems que si l'on mène la tangente au point K, la partie de cette ligne comprise entre le point K et l'axe CB prolongé, sera égale à AC, tandis que l'autre partie, terminée au prolongement de l'axe AC, sera égale à BC.

695. L'équation $\cos\varphi\cos\downarrow-\sin\varphi\sin\downarrow\sqrt{1-e^2\sin\mu^2}=\cos\mu$; que nous avons obtenue comme l'intégrale de $\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}+\frac{d\downarrow}{\sqrt{1-e^2\sin\downarrow^2}}=0$, peut être rapportée à un triangle sphérique. En effet, dans le triangle quelconque ABC, *fig.* 28, on a par les formules connues FIG. 28.

$$\cos AC\cos BC+\cos C\sin AC\sin BC=\cos AB;$$

et comparant cette équation avec la première des précédentes, on trouve que les côtés AC, BC et AB, sont respectivement égaux aux arcs φ, $\downarrow$ et μ, et que $\cos C=-\sqrt{1-e^2\sin\mu^2}$. Il suit de ce dernier résultat que l'angle C est obtus, et que $\cos C^2=1-e^2\sin\mu^2$, d'où $e^2=\frac{1-\cos C^2}{\sin\mu^2}=\frac{\sin C^2}{\sin\mu^2}$, ce qui nous apprend que la quantité e exprime le rapport des sinus des angles aux sinus des côtés qui leur sont opposés, et que lorsqu'on regarde l'arc μ comme constant, l'angle C et le côté opposé AB demeurent invariables, tandis que le reste du triangle change d'une manière quelconque.

On sait qu'il existe un rapport entre les variations infiniment petites des deux côtés AC et BC, et il est facile de prévoir que

cette variation doit s'accorder avec l'équation

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}+\frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}}=0$$: c'est ce qu'on trouve en effet; car les analogies différentielles rapportées dans tous les traités complets de Trigonométrie sphérique, donnent $d.AC:d.BC::\cos B:\cos A$, et par conséquent $d\varphi:\pm d\psi::\cos B:\cos A$. J'ai mis le signe $\pm$ à $d\psi$, parce qu'il peut arriver que l'un des arcs φ ou ψ diminue, tandis que l'autre croît. On tirera de là $\frac{d\varphi}{\cos B}=\pm\frac{d\psi}{\cos A}$; mais comme $\frac{\sin A}{\sin BC}=\frac{\sin B}{\sin AC}=\frac{\sin C}{\sin AB}=e$, on aura

$$\sin A=e\sin BC=e\sin\psi,\qquad \sin B=e\sin AC=e\sin\varphi,$$

$$\cos A=\sqrt{1-e^2\sin\psi^2},\qquad \cos B=\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2},$$

et enfin $$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}=\pm\frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}}.$$

Le signe inférieur convient au cas que nous avons considéré plus haut; lorsque le signe supérieur a lieu, l'angle C est aigu et l'intégrale est dans ce cas

$$\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-e^2\sin\mu^2}=\cos\mu.$$

Il est évident qu'en prenant une marche inverse à celle que nous venons de suivre, d'après Lagrange, c'est-à-dire, en formant d'abord l'équation différentielle, on en auroit obtenu l'intégrale par les seuls principes de la Trigonométrie sphérique.

696. Considérons en particulier l'équation

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}=\frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin\psi^2}}.$$

Son intégrale transcendante sera $f(\psi)=f(\varphi)+f(\mu)$; et si l'on change φ en ψ, ψ en ω, on aura $f(\omega)=f(\psi)+f(\mu)$, ce qui revient à $f(\omega)=f(\varphi)+2f(\mu)$. Pour trouver l'arc ω, il suffira de former un second triangle CBA', ayant le côté CB commun avec le premier triangle ACB, et le côté $A'B=AB$. Il est facile de parvenir à la relation algébrique des sinus des arcs φ, ψ et ω; car si du point B on abaisse un arc BD' perpendiculaire sur AC, le point D' sera le milieu de AA';

l'on aura $CD' = \frac{AC+A'C}{2} = \frac{\varphi+\omega}{2}$, et le triangle $CD'B$, rectangle en D', donnera $1 : \cos C :: \text{tang } CB : \text{tang } CD'$, ou

$$\text{tang } \frac{\varphi+\omega}{2} = \cos C \text{ tang } \downarrow.$$

Si on mettoit ω à la place de $\downarrow$, et ω' à celle de ω, on trouveroit

$$f(\omega') = f(\omega) + f(\mu), \text{ ou } f(\omega') = f(\varphi) + 3f(\mu);$$

en construisant un troisième triangle $CA'B'$, dans lequel $A'B' = AB$, dont le côté $A'C$ soit commun avec le précédent, et en abaissant l'arc $A'D''$ perpendiculaire sur BC, on trouveroit comme ci-dessus

$$\text{tang } \frac{\downarrow+\omega'}{2} = \cos C \text{ tang } \omega.$$

Dans le cas où le premier triangle ABC seroit isocèle, et où l'on auroit $\varphi = \mu$, c'est-à-dire, $AC = AB$, il en résulteroit

$$f(\downarrow) = 2f(\varphi), \quad f(\omega) = 3f(\varphi), \quad f(\omega') = 4f(\varphi) \text{ etc.}$$

et en abaissant du point A un arc AD perpendiculaire sur BC on auroit pour déterminer $\downarrow$, l'équation

$$\text{tang } \frac{\downarrow}{2} = \cos C \text{ tang } \varphi.$$

Cette construction est remarquable par son analogie avec celle que Newton a donnée pour la multiplication des angles, dans la XXIX^me^ Question géométrique de son Arithmétique universelle (*).

(*) Si dans un angle aigu ACB, *fig.* 29, on prend $AC = AB = BA' = A'B'$ etc. il résulte des Elémens de Géométrie que $BAA' = ACB + ABC = 2ACB$, que $A'BB' = BCA' + CA'B = 3ACB$, etc. et que les rapports $\frac{AD}{CD}$, $\frac{BD'}{CD'}$, $\frac{A'D''}{CD''}$, etc. FIG. 29.

expriment les tangentes des multiples de l'angle ACB. Si l'on représente AC ou AB par $\mu = \varphi$, CB par $\downarrow$, CA' par ω, CB' par ω', etc. les triangles rectangles CAD, CBD', $CA'D''$, etc. donneront $CD = \frac{\downarrow}{2}$, $CD' = \frac{\varphi+\omega}{2}$, $CD'' = \frac{\downarrow+\omega}{2}$, etc.

$$\frac{\downarrow}{2} = \varphi \cos C, \quad \frac{\varphi+\omega}{2} = \downarrow \cos C, \quad \frac{\downarrow+\omega'}{2} = \omega \cos C:$$

on aura d'ailleurs, par les triangles CAB, CBA', etc.

$$AB : CB :: \sin ACB : \sin 2ACB, \text{ ou } \varphi : \downarrow :: \sin C : \sin 2C,$$
$$CB : CA' :: \sin 2ACB : \sin 3ACB, \quad \downarrow : \omega :: \sin 2C : \sin 3C,$$
etc.

697. Voilà à peu près tout ce qu'on sait sur la comparaison des fonctions transcendantes. Pour pousser cette comparaison aussi loin qu'il est possible, il faudroit s'occuper des fonctions transcendantes dont les différentielles ne peuvent être exprimées par une seule variable; telle est, par exemple, la fonction y dans l'équation $dy+by^n dx=ax^m dx$ dont il ne paroît pas qu'on puisse séparer les variables en général (n°. 550). Si l'on conçoit une nouvelle abscisse x', à laquelle corresponde la fonction y', on aura encore $dy'+by'^n dx'=ax'^m dx'$; il seroit bien important de chercher si l'on ne pourroit pas établir entre x et x' une relation, soit algébrique, soit par le moyen des arcs de cercle et des logarithmes, telle qu'il en résultât une de la même nature entre les fonctions y et y'. Il faudroit pour cela qu'en éliminant les variables x et x', au moyen de l'équation qui les lie l'une à l'autre, combinée avec les deux précédentes, on parvînt à une équation intégrable entre les fonctions y, y' et leurs différentielles. Telle est à peu près la route qui semble devoir mener à des résultats importans sur les propriétés des fonctions transcendantes; mais pour pouvoir la suivre avec succès, il convient d'abord de perfectionner et d'abréger le procédé de l'élimination entre les équations différentielles, et ensuite de chercher des méthodes sûres pour reconnoître celles de ces équations dont l'intégrale peut s'obtenir par des fonctions algébriques, logarithmiques ou circulaires. La théorie des séries que nous exposons dans le Traité des différences qui termine cet ouvrage, nous donnera aussi des moyens pour connoître la nature de quelques transcendantes très-remarquables.

CHAPITRE IV.

De l'intégration des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables.

698. LES fonctions qui dépendent de deux ou d'un plus grand nombre de variables, diffèrent de celles d'une seule en ce qu'elles ont pour chaque ordre plusieurs coefficiens différentiels. Si z, par exemple, est une fonction de deux variables, il aura, pour le premier ordre, deux coefficiens différentiels, savoir: $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$; l'un pris en faisant varier x seul, et l'autre en faisant varier y seul: dans le second ordre le nombre de coefficiens différentiels s'éleve à trois, et s'accroît ainsi successivement d'ordre en ordre (n°. 30). Pour remonter des coefficiens différentiels d'une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables, à cette fonction, il se présente plusieurs cas: 1°. on peut avoir tous ses coefficiens différentiels d'un même ordre exprimés par les variables indépendantes; 2°. la fonction elle-même peut entrer avec les variables indépendantes, dans les expressions des coefficiens différentiels; 3°. enfin, on peut n'avoir qu'une relation entre ces coefficiens, la fonction dont ils dérivent et les variables indépendantes. Nous nous occuperons d'abord des deux premiers cas qui sont les plus simples.

Recherche d'une fonction de plusieurs variables, lorsque tous ses coefficiens différentiels d'un même ordre sont donnés explicitement ou implicitement.

699. Lorsque les coefficiens différentiels du premier ordre d'une fonction à deux variables sont connus, on en déduit sa différentielle première, *et vice versa*: si $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, on aura $dz=p\,dx+q\,dy$. Pour obtenir z, il faudra intégrer la différentielle $p\,dx+q\,dy$ par le procédé que nous avons appliqué, n°. 552, à la différentielle $M\,dx+N\,dy$, ce qui ne se pourra à moins que les fonctions données p et q ne satisfassent à l'équation de condition $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$. Lorsque cette

circonstance n'aura pas lieu, on en pourra conclure que l'expression $pdx+qdy$ n'est la différentielle d'aucune fonction de deux variables, et ne signifiera rien du tout, tant qu'on y regardera en même tems les deux variables x et y comme indépendantes.

700. Occupons-nous encore des fonctions de trois variables.

Soit $dz = n\,du + p\,dx + q\,dy$, c'est-à-dire que $\frac{dz}{du} = n$, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy}$, $= q$, n, p et q, étant des fonctions de u, x et y; on intégrera d'abord par rapport à l'une de ces variables, comme si les deux autres étoient constantes. Faisons $\int n\,du = U$, et nous aurons $z = U+V$, V désignant une fonction dans laquelle u n'entre pas. Si n contient en même tems u, x et y, on aura en différentiant

$$dz = \frac{dU}{du}du + \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy$$

ou

$$dz = n\,du + \left(\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dU}{dy} + \frac{dV}{dy}\right)dy,$$

puisque $\frac{dU}{du}du = n\,du$. Si on retranche cette valeur de dz de la proposée, il viendra

$$\left(p - \frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx}\right)dx + \left(q - \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dy}\right)dy = 0;$$

et comme les deux variables x et y sont indépendantes l'une de l'autre, il faudra qu'on ait séparément les équations

$$p - \frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx} = 0, \qquad q - \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dy} = 0,$$

desquelles on tirera

$$\frac{dV}{dx} = p - \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{dV}{dy} = q - \frac{dU}{dy}.$$

Or $\frac{dU}{dx}$ et $\frac{dU}{dy}$ sont des fonctions connues; on aura donc V en intégrant, par rapport aux deux variables x et y, la différentielle

$$\left(p - \frac{dU}{dx}\right)dx + \left(q - \frac{dU}{dy}\right)dy,$$

au moyen du procédé du n°. 552, procédé qui suppose que l'équation de condition

$$\frac{dp}{dy} - \frac{d^2U}{dx\,dy} = \frac{dq}{dy} - \frac{d^2U}{dx\,dy}$$

soit satisfaite. Cette équation se réduira à

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \quad \text{à cause de} \quad \frac{d^2U}{dx\,dy} = \frac{d^2U}{dx\,dy};$$

de plus, il convient d'observer que V ne devant pas contenir u, on doit avoir

$$\frac{dV}{dx\,du} = 0, \qquad \frac{dV}{dy\,du} = 0;$$

ce qui donne

$$\frac{dp}{du} = \frac{d^2U}{dx\,du}; \qquad \frac{dq}{du} = \frac{d^2U}{dy\,du};$$

et par conséquent

$$\frac{dp}{du} = \frac{dn}{dx}, \quad \frac{dp}{du} = \frac{dn}{dy}, \text{ puisque } \frac{d^2U}{dx\,du} = \frac{d.\frac{dU}{du}}{dx}, \quad \frac{d^2U}{dy\,du} = \frac{d.\frac{dU}{du}}{dy},$$

et $\dfrac{dU}{du} = n.$

Les équations

$$\frac{dn}{dx} = \frac{dp}{du}, \qquad \frac{dn}{dy} = \frac{dq}{du}, \qquad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx},$$

expriment les conditions qui doivent être satisfaites pour que l'expression $dz = n\,du + p\,dx + q\,dy$ soit la différentielle d'une fonction des trois variables u, x et y. On auroit pu les déduire des équations générales du n°. 90, et plus simplement encore, en observant, d'après le n°. 84, que si l'on fait successivement dy, dx et du nuls, c'est-à-dire, si l'on regarde alternativement y, x et u comme constans, la différentielle proposée doit présenter trois différentielles complètes entre deux variables, savoir :

$dz = n\,du + p\,dx$, $\quad dz = n\,du + q\,dy$, $\quad dz = p\,dx + q\,dy$,

et desquelles il résultera nécessairement

$$\frac{dn}{dx} = \frac{dp}{du}, \qquad \frac{dn}{dy} = \frac{dq}{du}, \qquad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}.$$

Nous ne poursuivrons pas plus loin ce sujet; ce qui précède suffit

pour montrer comment on doit opérer sur une différentielle du premier ordre, renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes ; et il est facile d'en déduire le procédé qui conduiroit aux différentielles des ordres supérieurs, dans lesquelles on doit regarder d^1u, d^2x, d^2y, etc. comme de nouvelles variables.

701. Passons au cas où la fonction cherchée entre dans l'expression de ses coefficiens différentiels, qui, de cette manière, sont tous donnés implicitement. Supposons premièrement que la fonction cherchée z ne dépende que des deux variables x et y; nous aurons encore $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$; p et q contenant en même tems x, y et z, et de là nous déduirons l'équation différentielle $dz = pdx + qdy$, à laquelle on rapportera l'équation quelconque $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, en faisant $-\frac{P}{R} = p$, $-\frac{Q}{R} = q$. Pour que p et q soient les coefficiens différentiels d'une fonction de deux variables, il faut toujours que $\frac{d(p)}{dy} = \frac{d(q)}{dx}$. On a employé ici la notation du n°. 70 pour marquer qu'il faut faire vraier dans p et dans q, en même tems que x et y, la fonction z qui contient implicitement ces variables ; en opérant ainsi, et mettant p et q au lieu de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$, on trouvera

$$\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz},$$

ou

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{dz} - p\frac{dq}{dz} = 0 \quad \ldots\ldots\ (A)$$

Si l'on substitue $-\frac{P}{R}$, $-\frac{Q}{R}$ à la place de p et de q, il viendra, après les réductions,

$$P\frac{dR}{dy} - R\frac{dP}{dy} + R\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dR}{dx} + Q\frac{dP}{dz} - P\frac{dQ}{dz} = 0 \ldots (B),$$

équation qui exprime les relations qui doivent exister entre P, Q et R, pour que dans l'équation différentielle $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, z puisse être regardé comme une fonction des deux variables x et y,

et

et que l'intégrale de cette équation soit par conséquent exprimée par une seule équation primitive entre les trois variables x, y et z. Il suit de là que dans une équation différentielle à trois variables, prise au hasard, on ne peut pas toujours supposer que l'une des variables soit fonction des deux autres. Pendant long-tems on appeloit *équations absurdes*, et on regardoit comme insignifiantes, celles qui ne satisfaisoient pas à l'équation (B); mais Monge a fait voir que toutes les équations différentielles à trois variables avoient une signification réelle; et que tandis que celles dont l'intégrale étoit exprimée par une seule équation entre trois variables, appartenoient à des surfaces courbes, chacune des autres représentoit une infinité de courbes à double courbure, jouissant d'une propriété commune. Nous ne nous occuperons pour le moment que des premières; mais dans la suite nous reviendrons sur les dernières.

702. Lorsque l'équation (B) devient identique par la substitution des valeurs de P, Q et R, il n'en résulte pas toujours que l'équation $Pdx+Qdy+Rdz=0$ soit une différentielle exacte; mais du moins, on peut la rendre telle en la multipliant par un facteur. En effet soit μ ce facteur, et supposons que $\mu Pdx+\mu Qdy+\mu Rdz$ soit une différentielle exacte, on aura (n°. 700)

$$\frac{d.\mu R}{dy}=\frac{d.\mu Q}{dz},\qquad \frac{d.\mu R}{dx}=\frac{d.\mu P}{dz},\qquad \frac{d.\mu Q}{dx}=\frac{d.\mu P}{dy}.$$

Ces équations étant développées deviendront

$$\left.\begin{aligned}\mu\left(\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}\right)+R\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{dz}&=0\\ \mu\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+R\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{dz}&=0\\ \mu\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)+Q\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{dy}&=0\end{aligned}\right\}\ (C);$$

on éliminera μ, en multipliant la première par P, la seconde par $-Q$, la troisième par R, et en ajoutant les produits: leur somme sera divisible par μ, et donnera

$$P\frac{dR}{dy}-P\frac{dQ}{dz}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}+R\frac{dQ}{dx}-R\frac{dP}{dy}=0,$$

équation qui est la même que (*B*), et lorsqu'elle sera satisfaite, la détermination de μ ne dépendra que de deux quelconques des trois équations (*C*).

703. Au lieu de chercher à tirer μ des équations (*C*), il vaut mieux tâcher d'intégrer immédiatement la proposée, en regardant comme constante une des trois variables qu'elle renferme. Si l'on fait $dz = 0$, par exemple, l'équation proposée se réduira à $Pdx + Qdy = 0$: représentons par $U = C$ l'intégrale de cette dernière équation; nous aurons en la différentiant $\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy = \mu Pdx + \mu Qdy$, μ désignant le facteur qui rend $Pdx + Qdy$ une différentielle exacte par rapport aux variables x et y. Si maintenant on fait varier z, et que l'on regarde la constante arbitraire comme une fonction de z, il viendra

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz - \frac{dC}{dz}dz = 0,$$

ou

$$\mu Pdx + \mu Qdy + \left(\frac{dU}{dz} - \frac{dC}{dz}\right)dz = 0;$$

retranchant de cette équation la proposée multipliée par μ, on trouvera

$$\mu R - \frac{dU}{dz} + \frac{dC}{dz} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dC}{dz} = \frac{dU}{az} - \mu R,$$

et il faudra que le second membre de cette dernière équation se réduise à une fonction de z seul. Cette condition conduira aux deux équations

$$\frac{d^2U}{dz\,dx} - \frac{d.\mu R}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2U}{dz\,dy} - \frac{d.\mu R}{dy} = 0,$$

qui reviennent à

$$\frac{d.\mu R}{dx} = \frac{d.\mu P}{dz}, \qquad \frac{d.\mu R}{dy} = \frac{d.\mu Q}{dz} = 0;$$

on aura d'ailleurs $\frac{d.\mu P}{dy} = \frac{d.\mu Q}{dx}$, puisque le facteur μ rend intégrable la différentielle $P\,dx + Q\,dy$. Donnons maintenant quelques exemples.

704. Occupons-nous en premier lieu de l'équation

$$dx(ay - bz) + dy(cz - ax) + dz(bx - cy) = 0:$$

elle donne

$$P = ay - bz, \qquad Q = cz - ax, \qquad R = bx - cy;$$

et ces valeurs rendent l'équation (B) identique. En procédant à l'intégration par la méthode du n°. précédent, nous aurons, dans l'hypothèse de z constant, $dx(ay-bz)+dy(cz-ax)=0$, d'où nous tirerons

$\frac{dx}{cz-ax}+\frac{dy}{ay-bz}=0$, et en intégrant, $\frac{1}{a}l\left(\frac{ay-bz}{cz-ax}\right)=C$: passant aux nombres et changeant de constante, nous trouverons $\frac{ay-bz}{cz-ax}=C$. Prenant ensuite la différentielle de cette dernière équation, en faisant varier à la fois x, y, z et C, nous obtiendrons

$$\frac{adx(ay-bz)+ady(cz-ax)+adz(bx-cy)}{(cz-ax)^2}=dC;$$

comparant cette équation avec la proposée multipliée par $\frac{1}{(cz-ax)^2}$, il viendra $dC=0$, d'où il suit que la quantité C n'est dans l'exemple actuel qu'une constante arbitraire, et que par conséquent la proposée a pour intégrale complète $\frac{ay-bz}{cz-ax}=C$. Le facteur μ est ici $\frac{1}{(cz-ax)^2}$, et comme l'équation proposée est symétrique, à l'égard de chacune des variables qu'elle renferme, il est évident que les facteurs $\frac{1}{(ay-bz)^2}$, $\frac{1}{(bx-cy)^2}$, la rendront également intégrable. On trouve plusieurs facteurs, parce que l'on peut procéder à l'intégration en regardant à volonté, ou z, ou y, ou x, comme constant.

705. Soit l'équation

$$dx(y^2+yz+z^2)+dy(x^2+xz+z^2)+dz(x^2+xy+y^2)=0,$$

nous aurons

$$P=y^2+yz+z^2, \quad Q=x^2+xz+z^2, \quad R=x^2+xy+y^2;$$

l'équation (B) deviendra identique par ces valeurs; et en faisant $dz=0$, on aura à intégrer l'équation

$$(y^2+yz+z^2)dx+(x^2+xz+z^2)dy=0,$$

qu'on mettra sous la forme

$$\frac{dx}{x^2+xz+z^2}+\frac{dy}{y^2+yz+z^2}=0,$$

et dont l'intégrale sera

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\left[\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x\sqrt{3}}{2z+x}\right)+\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{y\sqrt{3}}{2z+y}\right)\right]=C\,;$$

ou $$\frac{2}{z\sqrt{3}}.\,\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{(xz+yz+xy)\sqrt{3}}{2z^2+xz+yz-xy}\right)=C\,,$$

en réunissant les deux arcs dans un seul.

Si on regarde C comme une fonction inconnue de z, on y pourra comprendre le facteur $\frac{2}{z\sqrt{3}}$, et, prenant la tangente à la place de l'arc, écrire $$\frac{xz+yz+xy}{2z^2+xz+yz-xy}=C.$$

On trouvera ensuite, après avoir différentié cette équation, en y faisant varier toutes les quantités qu'elle renferme, et effectué toutes les réductions qui se présentent,

$$\frac{2zdx(y^2+yz+z^2)+2zdy(x^2+xz+z^2)-2xdz(y^2+yz+z^2)-2ydz(x^2+xz+z^2)}{(2z^2+xz+yz-xy)^2}=dC;$$

retranchant de ce résultat la proposée multipliée par

$$\frac{2z}{(2x^2+xz+yz-xy)^2},$$ on obtiendra

$$\frac{-2zdz(x^2+xy+y^2)-2xdz(y^2+yz+z^2)-2ydz(x^2+xz+z^2)}{(2z^2+xz+yz-xy)^2}=dC$$

On ne voit pas d'abord comment x et y peuvent disparoître de l'expression de dC, mais il faut commencer par la réduire autant qu'il est possible, et avec un peu d'attention on trouvera

$$-\frac{2dz(x+y+z)(xy+xz+yz)}{(2z^2+xz+yz-xy)^2}=dC\,;$$

puis on combinera cette équation avec

$$\frac{xy+xz+yz}{2z^2+xz+yz-xy}=C.$$

En éliminant premièrement le dénominateur $2z^2+xz+yz-xy$, on aura $-\frac{2C^2dz(x+y+z)}{xy+xz+yz}=dC$; et si cette expression peut se transformer en une autre qui ne contienne que z et C, il faudra nécessairement que si l'on en chasse y par le moyen de sa valeur prise dans l'équation $\frac{xy+xz+yz}{2z^2+xz+yz-xy}=C$, x s'en aille en

même tems. Or on a par cette dernière, $y=\frac{2C\zeta^2+Cx\zeta-x\zeta}{x+\zeta+C(x-\zeta)}$; substituant cette valeur, on obtiendra, après les réductions,

$$-\frac{2C^2d\zeta(1+C)(x^2+x\zeta+\zeta^2)}{2C\zeta(x^2+x\zeta+\zeta^2)}=dC,$$

ce qui donne $-\frac{C(1+C)d\zeta}{\zeta}=dC$, et par conséquent

$$-\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{dC}{C(1+C)}=\frac{dC}{C}-\frac{dC}{1+C}.$$

On trouvera par l'intégration $\zeta=\frac{\alpha(1+C)}{C}$, α étant la constante arbitraire; et prenant la valeur de C, pour la substituer dans $\frac{xy+x\zeta+y\zeta}{2\zeta^2+x\zeta+y\zeta-xy}=C$, on parviendra à l'équation $\frac{\alpha}{\zeta-\alpha}=\frac{xy+x\zeta+y\zeta}{2\zeta^2+x\zeta+y\zeta-xy}$, qui sera l'intégrale de la proposée, et à laquelle on pourra donner la forme $xy+x\zeta+y\zeta=\alpha(x+y+\zeta)$.

Si l'on différentie ce résultat, en l'écrivant successivement des deux manières suivantes,

$$\frac{(xy+x\zeta+y\zeta)}{x+y+\zeta}=\alpha, \qquad \frac{x+y+\zeta}{xy+x\zeta+y\zeta}=\frac{1}{\alpha},$$

on trouvera que le facteur μ est $\frac{1}{(x+y+\zeta)^2}$, dans le premier cas; et $\frac{1}{(xy+x\zeta+y\zeta)^2}$, dans le second.

706. Nous prendrons pour dernier exemple l'équation

$$dx(x^2-y^2+\zeta^2)-\zeta^2dy+\zeta d\zeta(y-x)+\frac{xd\zeta}{\zeta}(y^2-x^2)=0,$$

pour l'intégration de laquelle Euler a employé plusieurs artifices d'analyse très-remarquables. Il est facile de s'assurer que cette équation satisfait à l'équation de condition (B); et en y regardant ζ comme constant, il vient $dx(x^2-y^2+\zeta^2)-\zeta^2dy=0$.

L'intégrale de cette dernière ne se présente pas tout de suite, car elle rentre dans l'équation de Riccati; mais comme on y satisfait en supposant $y=x$, on fera, d'après le procédé du n°. 584, $y=x+\frac{\zeta^2}{t}$,

en substituant et en réduisant, on trouvera $-dx(2tx+\zeta^2)+\zeta^2 dt=0$, d'où on déduira $dt-\frac{2tx}{\zeta^2}dx=dx$, équation du premier degré et du premier ordre, et dont l'intégrale est

$$t=e^{\frac{xx}{zz}}\left(\int e^{-\frac{xx}{zz}}dx+C\right)\ (\text{n°. 547});$$

et puisque $t=\frac{\zeta^2}{y-x}$, on aura

$$\int e^{-\frac{xx}{zz}}dx=\frac{e^{-\frac{xx}{zz}}\zeta^2}{y-x}+C,$$

en prenant $+C$ au lieu de $-C$.

Pour différentier le premier membre de cette équation, par rapport à ζ, il faudra recourir au procédé du n°. 552, qui donnera

$$\frac{d.\int e^{-\frac{xx}{zz}}dx}{d\zeta}=\int\frac{2e^{-\frac{xx}{zz}}x^2dx}{\zeta^3}=\frac{2}{\zeta^3}\int e^{-\frac{xx}{zz}}x^2dx,$$

à cause que dans l'intégration indiquée, ζ doit être regardé comme constant; achevant ensuite, suivant les règles ordinaires, la différentiation par rapport à toutes les variables, on trouvera

$$e^{-\frac{xx}{zz}}dx+\frac{2d\zeta}{\zeta^3}\int e^{-\frac{xx}{zz}}x^2dx=$$

$$e^{-\frac{xx}{zz}}\left(\frac{2\zeta d\zeta}{y-x}-\frac{\zeta^2dy-\zeta^2dx}{(y-x)^2}+\frac{2x^2d\zeta-2x\zeta dx}{\zeta(y-x)}\right)+dC.$$

Il reste maintenant à faire disparoître l'intégrale indiquée dans le premier membre, sans recourir à une nouvelle différentiation, et pour y parvenir, il faut tâcher de la ramener à $\int e^{-\frac{xx}{zz}}dx$, dont on a déjà la valeur. Or on voit sans peine que

$$\int e^{-\frac{xx}{zz}}x^2dx=\frac{\zeta^2}{2}\int x.2e^{-\frac{xx}{zz}}\frac{xdx}{\zeta^2}=-\frac{\zeta^2}{2}\left(e^{-\frac{xx}{zz}}x-\int e^{-\frac{xx}{zz}}dx\right);$$

substituant ce résultat dans l'équation ci-dessus, et remplaçant $\int e^{-\frac{xx}{zz}}dx$ par $\frac{e^{-\frac{xx}{zz}}\zeta^2}{y-x}+C$, on la change en

$$e^{-\frac{xx}{zz}}\left(dx-\frac{xd\zeta}{\zeta}+\frac{\zeta d\zeta}{y-x}\right)+\frac{Cd\zeta}{\zeta}=$$

$$e^{-\frac{xx}{zz}}\left(\frac{2\zeta d\zeta}{y-x}-\frac{\zeta^2dy-\zeta^2dx}{(y-x)^2}+\frac{2x^2d\zeta}{\zeta(y-x)}-\frac{2xdx}{y-x}\right)+dC:$$

passant ensuite dans le premier membre le terme dC, réunissant tous les autres dans le second, et leur donnant $(y-x)^3$ pour dénominateur commun, on trouvera $\frac{Cdz-zdC}{z} =$

$$-\frac{e^{-\frac{xx}{zz}}}{(y-x)^3}\left[dx(y^2-x^2-z^2)+z^2dy-zdz(y-x)-\frac{xdz}{z}(y^2-x^2)\right].$$

Le second membre de cette dernière équation se réduit à zéro en vertu de la proposée, et le premier donne $Cdz-zdC=0$, ou $C=az$; l'intégrale cherchée sera donc

$$\int e^{-\frac{xx}{zz}}dx=\frac{e^{-\frac{xx}{zz}}z^2}{y-x}+az:$$

il faut se rappeler que sous le signe $\int$, z est constant. Il est facile de voir que dans cet exemple, $\frac{e^{-\frac{xx}{zz}}}{(y-x)^3}$ est le facteur propre à rendre l'équation proposée intégrable.

707. Les trois équations que nous venons d'intégrer sont homogènes par rapport aux variables x, y et z, et peuvent être traitées d'une manière plus simple, en ayant égard à cette circonstance. En effet, si dans l'équation $Pdx+Qdy+Rdz=0$, supposée homogène, on fait $x=pz$, $y=qz$, on aura $P=z^nS$, $Q=z^nT$, $R=z^nV$, S, T, V, étant des fonctions de p et de q, indépendantes de z (n°. 66), et on trouvera

$$dx=pdz+zdp, \quad dy=qdz+zdq;$$

au moyen de ces valeurs, l'équation proposée deviendra

$$Szdp+Tzdq+(pS+qT+V)dz=0,$$

et on en tirera $\frac{dz}{z}=-\frac{Sdp+Tdq}{pS+qT+V}$.

Le premier membre étant une différentielle exacte, il faudra que le second en soit pareillement une, pour qu'on puisse intégrer la proposée; l'équation de condition prise par rapport aux variables p et q, sera

$$\frac{d.\frac{S}{pS+qT+V}}{dq}=\frac{d.\frac{T}{pS+qT+V}}{dp},$$

et donnera par son développement

$$\left.\begin{aligned}(qT+V)\frac{dS}{dq}-(pS+V)\frac{dT}{dp}+pT\frac{dS}{dp}-qS\frac{dT}{dq}\\ +T\frac{dV}{dp}-S\frac{dV}{dq}\end{aligned}\right\}=0.$$

Lorsqu'elle sera satisfaite, la proposée aura pour intégrale

$$1\zeta=C-\int\frac{S\,dp+T\,dq}{pS+qT+V}.$$

708. Dans le premier exemple (n°. 704), où

$$P=ay-b\zeta,\quad Q=c\zeta-ax,\quad R=bx-cy,$$

on trouve $S=aq-b$, $T=c-ap$, $V=bp-cq$,

d'où il résulte $\dfrac{d\zeta}{\zeta}=-\dfrac{(aq-b)\,dp+(c-ap)\,dq}{0}$;

négligeant le premier membre à l'égard du second, il vient à intégrer $(aq-b)\,dp+(c-ap)\,dq=0$, ce qui donne

$$1\,\frac{aq-b}{c-ap}=1\,\frac{ay-b\zeta}{c\zeta-ax}=C.$$

On a pour le deuxième exemple (n°. 705),

$$S=q^2+q+1,\quad T=p^2+p+1,\quad V=p^2+pq+q^2,$$

$$\frac{d\zeta}{\zeta}=-\frac{(q^2+q+1)\,dp+(p^2+p+1)\,dq}{(p+q+1)(pq+p+q)};$$

le second membre de cette équation se décompose en

$$\frac{dp+dq}{p+q+1}-\frac{(q+1)\,dp+(p+1)\,dq}{pq+p+q}$$

et a pour intégrale $-1.\dfrac{pq+p+q}{p+q+1}$: on conclut facilement de là que celle de la proposée est

$$\frac{\zeta(pq+p+q)}{p+q+1}=\frac{xy+x\zeta+y\zeta}{x+y+\zeta}=C.$$

Enfin, dans le dernier exemple (n°. 706), on obtient

$$S=p^2-q^2+1,\quad T=-1,\quad V=q-p+p(q^2-p^2),$$

$$\frac{d\zeta}{\zeta}=-\frac{(p^2-q^2+1)\,dp-dq}{0},$$

et par conséquent $dq=(p^2-q^2+1)\,dp$;

on satisfait à cette équation en prenant $q=p$, et l'on parvient à son

son intégrale par la supposition de $q=p+\frac{1}{r}$ qui conduit à $dr-2prdp=dp$. On tire de cette dernière équation

$$e^{-pp}r=\int e^{-pp}dp+C, \text{ ou } \frac{e^{-pp}}{q-p}=\int e^{-pp}dp+C,$$

résultat qu'il est aisé de ramener à celui du n°. cité.

On pourroit, en se procurant des intégrales, ou des solutions particulières des équations à trois variables, former le facteur μ, comme dans le n°. 591, suivant la méthode de M. Trembley : on obtiendroit la valeur des exposans indéterminés, en substituant l'expression de μ dans l'une des équations d'où il dépend ; mais il faudroit de plus s'assurer que la même expression satisfait à l'autre équation.

709. Lorsque les différentielles dx, dy et dz, montent au delà du premier degré dans l'équation proposée, elle ne peut s'intégrer par ce qui précède, que quand elle satisfait à une nouvelle condition que nous allons faire connoître. Prenons pour exemple l'équation

$$Pdx^2+Qdy^2+Rdz^2+2Sdxdy+2Tdxdz+2Vdydz=0;$$

elle ne sauroit résulter de la différentiation d'une équation primitive entre les variables x, y et z, à moins qu'elle ne puisse se ramener à la forme $P'dx+Q'dy+R'dz=0$. En effet, quelle que soit l'intégrale, on peut toujours en déduire, par la différentiation, $dz=pdx+qdy$, p et q désignant des fonctions quelconques de x, y et z ; il faut donc qu'en résolvant la proposée par rapport à dz, les différentielles dx et dy sortent toutes deux du radical : or c'est ce qui n'arrive pas toujours ; car on a

$$dz=\frac{-Tdx-Vdy\pm\sqrt{(T^2-PR)dx^2+2(TV-RS)dxdy+(V^2-QR)dy^2}}{R},$$

et si la quantité, qui est sous le radical, n'est pas un quarré parfait, ou du moins si l'on n'a pas $(TV-RS)^2=(T^2-PR)(V^2-QR)$, les différentielles dx et dy resteront engagées sous ce radical. En général, quel que soit le degré de l'équation proposée, par rapport à dz, dx, dy, il faut qu'étant ordonnée suivant les

puissances de dz, elle puisse se décomposer en facteurs de la forme $dz - p\,dx - q\,dy = 0$.

710. Occupons-nous encore des équations du premier ordre à quatre variables. Soit $N\,du + P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, une équation de ce genre; si elle résulte de la différentiation d'une équation primitive entre les variables u, x, y et z, on y pourra regarder l'une de ces variables comme une fonction des trois autres, et on en tirera

$$dz = -\frac{N}{R}du - \frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy,$$

en comparant cette expression avec

$$dz = \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

il viendra

$$-\frac{N}{R} = \frac{dz}{du}, \qquad -\frac{P}{R} = \frac{dz}{dx}, \qquad -\frac{Q}{R} = \frac{dz}{dy},$$

ce qui ne peut avoir lieu à moins que les conditions suivantes

$$\frac{d\left(\frac{N}{R}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{P}{R}\right)}{du}, \quad \frac{d\left(\frac{N}{R}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{Q}{R}\right)}{du}, \quad \frac{d\left(\frac{P}{R}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{Q}{R}\right)}{dx},$$

relatives aux différentielles complètes à trois variables (n°. 700) ne soient remplies. Si l'on effectue les différentiations indiquées, en observant que N, P, Q et R, peuvent contenir z, et en substituant à $\frac{dz}{du}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, leurs valeurs $-\frac{N}{R}$, $-\frac{P}{R}$, $-\frac{Q}{R}$, on obtiendra trois équations analogues à l'équation (B) du n°. 701, savoir :

$$P\frac{dR}{du} - R\frac{dP}{du} + R\frac{dN}{dx} - N\frac{dR}{dx} + N\frac{dP}{dz} - P\frac{dN}{dz} = 0,$$

$$Q\frac{dR}{du} - R\frac{dQ}{du} + R\frac{dN}{dy} - N\frac{dR}{dy} + N\frac{dQ}{dz} - Q\frac{dN}{dz} = 0,$$

$$Q\frac{dR}{dx} - R\frac{dQ}{dx} + R\frac{dP}{dy} - P\frac{dR}{dy} + P\frac{dQ}{dz} - Q\frac{dP}{dz} = 0.$$

Il doit être évident maintenant qu'en opérant sur une équation du premier ordre, contenant un nombre m de variables et dans laquelle les différentielles ne s'élèvent pas au delà du premier degré,

comme nous venons de la faire sur la proposée à quatre variables, on trouveroit autant d'équations de condition qu'il y a de manières de combiner $m-1$ variables deux-à-deux, c'est-à-dire, $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

711. La méthode précédente paroît la plus simple qu'on puisse employer pour obtenir les conditions sans lesquelles les équations différentielles contenant plus de deux variables ne peuvent résulter de la différentiation d'une seule équation primitive; la considération du facteur conduiroit au même but. En multipliant l'équation

$$N\,du+P\,dx+Q\,dy+R\,d\zeta=0,$$

par un facteur μ, pour la rendre immédiatement intégrable, et prenant les équations de condition de la différentielle

$$\mu N\,du+\mu P\,dx+\mu Q\,dy+\mu R\,d\zeta=0,$$

suivant le n°. 84, ou le n°. 700, on aura

$$\frac{d.\mu N}{dx}=\frac{d.\mu P}{du},\quad \frac{d.\mu N}{dy}=\frac{d.\mu Q}{du},\quad \frac{d.\mu N}{d\zeta}=\frac{d.\mu R}{du}$$

$$\frac{d.\mu P}{dy}=\frac{d.\mu Q}{dx},\quad \frac{d.\mu P}{d\zeta}=\frac{d.\mu R}{dx},\quad \frac{d.\mu Q}{d\zeta}=\frac{d.\mu R}{dy};$$

il reste à développer maintenant ces équations. Si l'on prend dans la troisième, la cinquième et la sixième les valeurs de $\frac{d\mu}{du}$, $\frac{d\mu}{dx}$ et $\frac{d\mu}{dy}$, pour les substituer dans les trois autres, μ et $\frac{d\mu}{d\zeta}$ disparoîtront en même tems, et l'on retombera sur les équations du n°. précédent. Il suit de là que trois des équations rapportées ci-dessus suffisent pour la détermination du facteur μ. Ces équations ne doivent pas être prises au hasard; il faut qu'entre elles trois, elles contiennent les quatre coefficiens différentiels, $\frac{d\mu}{du}$, $\frac{d\mu}{dx}$, $\frac{d\mu}{dy}$, $\frac{d\mu}{d\zeta}$.

En général, si l'équation proposée renferme m variables, on aura $\frac{m(m-1)}{2}$ équations de condition entre μ et les fonctions qui multiplient du, dx, dy, $d\zeta$, etc. mais d'après le n°. précédent, il y aura $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ équations indépendantes de μ, et relatives

à la possibilité d'intégrer la proposée par une seule équation primitive; il restera donc $\frac{m(m-1)}{2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$, ou $m-1$ équations pour déterminer μ, c'est-à-dire, une de moins que ce facteur n'a de coefficiens différentiels, ou que la proposée ne renferme de variables.

712. Il n'est pas inutile de montrer comment on peut faire servir aux recherches qui nous occupent, les équations de condition rapportées dans le n°. 90. Soit $V=0$ l'équation différentielle proposée; il faudra que μV soit une différentielle exacte, et comme nous ne supposons encore V que du premier ordre, μ sera une fonction primitive, et nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d.\mu V}{du} - d\frac{d.\mu V}{du_1} &= 0\\
\frac{d.\mu V}{dx} - d\frac{d.\mu V}{dx_1} &= 0\\
\frac{d.\mu V}{dy} - d\frac{d.\mu V}{dy_1} &= 0\\
\frac{d.\mu V}{dz} - d\frac{d.\mu V}{dz_1} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C),$$

le nombre de ces équations étant en général égal à celui des variables de l'équation proposée. Leurs développemens sont

$$\mu\frac{dV}{du} + V\frac{d\mu}{du} - d\mu\frac{dV}{du_1} - \mu d\frac{dV}{du_1} = 0$$
$$\mu\frac{dV}{dx} + V\frac{d\mu}{dx} - d\mu\frac{dV}{dx_1} - \mu d\frac{dV}{dx_1} = 0$$
$$\mu\frac{dV}{dy} + V\frac{du}{dy} - d\mu\frac{dV}{dy_1} - \mu d\frac{dV}{dy_1} = 0$$
$$\mu\frac{dV}{dz} + V\frac{d\mu}{dz} - d\mu\frac{dV}{dz_1} - \mu d\frac{dV}{dz_1} = 0$$

et devront être identiquement nuls si l'équation $V=0$ admet une intégrale; mais alors l'équation $V=0$ deviendra identique, si l'on y substitue la valeur de z, tirée de la différentielle immédiate de cette intégrale: la même opération fera donc évanouir séparément les termes qui ne sont pas multipliés par V, puisque ceux

qui le sont disparoîtront d'eux-mêmes, et on aura

$$\left.\begin{aligned}
&\mu\left(\frac{dV}{du}-d\frac{dV}{du_1}\right)-d\mu\,\frac{dV}{du_1}=0\\
&\mu\left(\frac{dV}{dx}-d\frac{dV}{dx_1}\right)-d\mu\,\frac{dV}{dx_1}=0\\
&\mu\left(\frac{dV}{dy}-d\frac{dV}{dy_1}\right)-d\mu\,\frac{dV}{dy_1}=0\\
&\mu\left(\frac{dV}{dz}-d\frac{dV}{dz_1}\right)-d\mu\,\frac{dV}{dz_1}=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(D).$$

Si l'on divise ces dernières équations par μ, et que l'on en chasse ensuite la fonction $\frac{d\mu}{\mu}$, on obtiendra les trois résultantes,

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{dV}{du}-d\frac{dV}{du_1}\right)\frac{dV}{dx_1}-\left(\frac{dV}{dx}-d\frac{dV}{dx_1}\right)\frac{dV}{du_1}=0\\
&\left(\frac{dV}{du}-d\frac{dV}{du_1}\right)\frac{dV}{dy_1}-\left(\frac{dV}{dy}-d\frac{dV}{dy_1}\right)\frac{dV}{du_1}=0\\
&\left(\frac{dV}{du}-d\frac{dV}{du_1}\right)\frac{dV}{dz_1}-\left(\frac{dV}{dz}-d\frac{dV}{dz_1}\right)\frac{dV}{du_1}=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(E);$$

mais V étant $N\,du+P\,dx+Q\,dy+R\,dz=Nu_1+Px_1+Qy_1+Rz_1$,

on aura

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{du}&=\frac{dN}{du}u_1+\frac{dP}{du}x_1+\frac{dQ}{du}y_1+\frac{dR}{du}z_1,\\
\frac{dV}{dx}&=\frac{dN}{dx}u_1+\frac{dP}{dx}x_1+\frac{dQ}{dx}y_1+\frac{dR}{dx}z_1,\\
\frac{dV}{dy}&=\frac{dN}{dy}u_1+\frac{dP}{dy}x_1+\frac{dQ}{dy}y_1+\frac{dR}{dy}z_1,\\
\frac{dV}{dz}&=\frac{dN}{dz}u_1+\frac{dP}{dz}x_1+\frac{dQ}{dz}y_1+\frac{dR}{dz}z_1,\\
\frac{dV}{du_1}&=N,\ \frac{dV}{dx_1}=P,\ \frac{dV}{dy_1}=Q,\ \frac{dV}{dz_1}=R;\\
d\frac{dV}{du_1}&=\frac{dN}{du}u_1+\frac{dN}{dx}x_1+\frac{dN}{dy}y_1+\frac{dN}{dz}z_1,\\
d\frac{dV}{dx_1}&=\frac{dP}{du}u_1+\frac{dP}{dx}x_1+\frac{dP}{dy}y_1+\frac{dP}{dz}z_1,\\
d\frac{dV}{dy_1}&=\frac{dQ}{du}u_1+\frac{dQ}{dx}x_1+\frac{dQ}{dy}y_1+\frac{dQ}{dz}z_1;\\
d\frac{dV}{dz_1}&=\frac{dR}{du}u_1+\frac{dR}{dx}x_1+\frac{dR}{dy}y_1+\frac{dR}{dz}z_1.
\end{aligned}$$

Il faudra chasser ζ_1 de ces expressions, au moyen de sa valeur $-\frac{Nu_1+Px_1+Qy_1}{R}$ déduite de l'équation proposée ; on les substituera ensuite dans les équations (E) ; on égalera séparément à 0 dans chaque résultante, les termes que multiplie u_1, ceux que multiplie x_1, ceux que multiplie y_1, et en supprimant les facteurs communs, on trouvera les équations du n°. 710. Pour déterminer le facteur μ, il suffira d'employer l'une quelconque des équations (E), la première, par exemple ; on y mettra d'abord les valeurs de $\frac{dV}{du}$, $\frac{dV}{du_1}$, $d\frac{dV}{du_1}$, données plus haut ; on écrira ensuite $\frac{d\mu}{du}u_1+\frac{d\mu}{dx}x_1+\frac{d\mu}{dy}y_1+\frac{d\mu}{d\zeta}\zeta_1$, au lieu de $d\mu$; on éliminera ζ_1 comme ci-dessus, et on égalera séparément à zéro les coefficiens de u_1, de x_1 et de y_1 : on aura par ce moyen trois équations, dont deux, à la vérité, ne seront pas de la forme de celles du n°. précédent, mais s'y ramèneront facilement, en les combinant avec la troisième. En effet, il viendra

$$\mu\left\{\begin{array}{l}\left(N\frac{dN}{d\zeta}-N\frac{dR}{du}\right)u_1+\left(R\frac{dP}{du}-P\frac{dR}{du}+P\frac{dN}{d\zeta}-R\frac{dN}{dx}\right)x_1\\ \qquad+\left(R\frac{dQ}{du}-Q\frac{dR}{du}+Q\frac{dN}{d\zeta}-R\frac{dN}{dy}\right)y_1\end{array}\right\}=0;$$

$$-N\left\{\begin{array}{l}\left(R\frac{d\mu}{du}-N\frac{d\mu}{d\zeta}\right)u_1+\left(R\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{d\zeta}\right)x_1\\ \qquad+\left(R\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{d\zeta}\right)y_1\end{array}\right\}$$

d'où l'on tirera,

1°. en divisant par N le coefficient de u_1 et en l'égalant à zéro,

$$\mu\left(\frac{dN}{d\zeta}-\frac{dR}{du}\right)-\left(R\frac{d\mu}{du}-N\frac{d\mu}{d\zeta}\right)=0\ ;$$

2°. en égalant à zéro le coefficient de x_1,

$$\mu\left(R\frac{dP}{du}-P\frac{dR}{du}+P\frac{dN}{d\zeta}-R\frac{dN}{dx}\right)-N\left(R\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{d\zeta}\right)=0\ ;$$

3°. en égalant à zéro celui de y_1,

$$\mu\left(R\frac{dQ}{du}-Q\frac{dR}{du}+Q\frac{dN}{d\zeta}-R\frac{dN}{dy}\right)-N\left(R\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{d\zeta}\right)=0.$$

Si, par le moyen de la première de ces équations, on élimine $\frac{dN}{dz}$ de la seconde et de la troisième, et que l'on divise les deux résultats par R, on trouvera

$$\mu\left(\frac{dP}{du}-\frac{dN}{dx}\right)-\left(N\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{du}\right)=0,$$

$$\mu\left(\frac{dQ}{du}-\frac{dN}{dy}\right)-\left(N\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{du}\right)=0.$$

Cet exemple montre assez comment il faudra s'y prendre quand l'équation différentielle proposée renfermera plus de quatre variables; on peut sans nuire à la généralité des résultats supposer que l'une des différentielles, celle de x, par exemple, soit constante, et supprimer en conséquence la première des équations (C), qui se rapporte à cette variable.

713. Nous ne nous étendrons pas beaucoup sur les équations différentielles des ordres supérieurs, et nous ne considérerons en particulier que celles qui ne renferment que trois variables. On peut toujours dans ces équations, supposer constantes deux des différentielles premières, et si ces différentielles sont dx et dy, il en résultera

$$d^2z=\frac{d^2z}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2z}{dx\,dy}dx\,dy+\frac{d^2z}{dy^2}dy^2 \quad (\text{n°. 31});$$

en sorte que la fonction z n'a dans le second ordre que trois coefficiens différentiels, savoir: $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$. Nous les représenterons par r, s et t, et nous écrirons désormais

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$
$$d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2,$$

sur quoi il faut remarquer que les équations

$$d\frac{dz}{dx}=\frac{d^2z}{dx^2}dx+\frac{d^2z}{dx\,dy}dy, \qquad d\frac{dz}{dy}=\frac{d^2z}{dx\,dy}dx+\frac{d^2z}{dy^2}dy,$$

donnent $dp=r\,dx+s\,dy$, $dq=s\,dx+t\,dy$.

Quand dx et dy ne varient pas, la seconde différentiation et toutes celles qui la suivent peuvent faire disparoître deux constantes; en effet, si l'équation primitive contient deux termes de la forme Ax^2+By^2, leur différentielle seconde sera nulle; il en sera de même de la différentielle troisième de Ax^3+By^3, et ainsi de suite.

Les différentielles premières et secondes de l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

sont dans cette hypothèse,

$$(x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz=0,$$
$$dx^2+dy^2+dz^2+(z-c)d^2z=0,$$

et se transforment en

$$[(x-a)+(z-c)p]dx+[(y-b)+(z-c)q]dy=0.$$
$$[1+p^2+(z-c)r]dx^2+[pq+(z-c)s]2dxdy+[1+q^2+(z-c)t]dy^2=0.$$

A cause de l'indépendance des variables x et y, et de leurs différentielles, la première des équations ci-dessus se décompose en

$$x-a+(z-c)p=0, \quad y-b+(z-c)q=0,$$

et donne les coefficients différentiels p et q; la seconde se partage en trois autres, savoir

$$1+p^2+(z-c)r=0, \quad pq+(z-c)s=0, \quad 1+q^2+(z-c)t=0.$$

Si on faisoit varier dx et dy aussi bien que dz, en différentiant $dz=pdx+qdy$, on trouveroit $d^2z=rdx^2+2sdxdy+tdy^2+pd^2x+qd^2y$; et comme toute équation différentielle, quel que soit le nombre de variables qu'elle renferme et l'ordre où elle s'élève, doit toujours se transformer en une autre qui ne contienne que des cofficiens différentiels, il s'ensuit que si l'on met les valeurs précédentes de dz et de d^2z, dans une équation quelconque du second ordre à trois variables, il n'y doit rester que les lettres x, y, z, p, q, r, s et t: ceci est analogue à ce qu'on a vu n°. 64, pour les équations à deux variables et repose sur les mêmes principes.

Soit l'équation

$$(x\,dx+z\,dz)\,d^2y-z\,dy\,d^2z-dy\,(dx^2+dy^2+dz^2)=0,$$

dans laquelle dx seul est regardé comme constant; si l'on y met $p\,dx+q\,dy$ et $r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2+q\,d^2y$, au lieu de dz et de d^2z, elle deviendra

$$\left.\begin{aligned}(x+zp)\,dx\,d^2y-z\,dy\,(r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2)\\-dy\,[(1+p^2)\,dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2]\end{aligned}\right\}=0$$

et ne pourra par conséquent avoir lieu à moins que $x+zp=0$. Avec cette condition, elle se réduira à

$$(1+p^2+zr)\,dx^2+(pq+zs)2\,dx\,dy+(1+q^2+zt)\,dy^2=0,$$

et donnera les trois coefficiens différentiels r, s et t, au moyen des équations $1+p^2+zr=0$, $pq+zs=0$, $1+q^2+zt=0$, qui

qui s'obtiennent en égalant à zéro les coefficiens de dx^3, $dxdy$ et dy^3; mais il faudra que ces équations s'accordent avec $x+\zeta p=0$. Cette dernière étant multipliée par dx prend la forme $xdx+\zeta\frac{d\zeta}{dx}dx=0$, et en l'intégrant par rapport à x et à ζ, on trouve $x^2+\zeta^2=2C$, en observant que la constante C doit être regardée comme une fonction de y. Différentiant ensuite et faisant varier C, il en résultera

$$x\,dx+\zeta\,d\zeta=dC,\qquad dx^2+d\zeta^2+\zeta\,d^2\zeta=d^2C;$$

substituant dans la proposée les valeurs de $x\,dx+\zeta\,d\zeta$ et de $dx^2+d\zeta^2$ que donnent ces équations, on la change en

$$dC\,d^2y-dy\,d^2C-dy^3=0,\qquad \text{d'où on tirera}$$

$$\frac{dy\,d^2C-dC\,d^2y}{dy^3}=-dy,\quad \frac{dC}{dy}=-y+A,\quad C=-\frac{y^2}{2}+Ay+B,$$

et de là, pour l'intégrale de la proposée, $x^2+y^2+\zeta^2=2Ay+2B$.

714. Les conditions relatives à l'intégrabilité des équations différentielles à *trois variables*, se multiplient à mesure que l'on passe à des ordres plus élevés, et se déduisent des équations du n°. 90, comme celles qui ont rapport au premier ordre. $V=0$, désignant toujours l'équation différentielle proposée, et contenant x, y, ζ, x_1, y_1, ζ_1, x_2, y_2, ζ_2, le facteur μ pourra renfermer x_1, y_1, ζ_1; on aura les équations

$$\frac{d.\mu V}{dx}-d\frac{d.\mu V}{dx_1}+d^2\frac{d.\mu V}{dx_2}=0,$$

$$\frac{d.\mu V}{dy}-d\frac{d.\mu V}{dy_1}+d^2\frac{d.\mu V}{dy_2}=0,$$

$$\frac{d.\mu V}{d\zeta}-d\frac{d.\mu V}{d\zeta_1}+d^2\frac{d.\mu V}{d\zeta_2}=0,$$

dont les développemens se réduisent à

$$\mu\left(\frac{dV}{dx}-d\frac{dV}{dx_1}+d^2\frac{dV}{dx_2}\right)-d\mu\left(\frac{dV}{dx_1}-2d\frac{dV}{dx_2}\right)+d^2\mu\frac{dV}{dx_2}=0,$$

$$\mu\left(\frac{dV}{dy}-d\frac{dV}{dy_1}+d^2\frac{dV}{dy_2}\right)-d\mu\left(\frac{dV}{dy_1}-2d\frac{dV}{dy_2}\right)+d^2\mu\frac{dV}{dy_2}=0,$$

$$\mu\left(\frac{dV}{d\zeta}-d\frac{dV}{d\zeta_1}+d^2\frac{dV}{d\zeta_2}\right)-d\mu\left(\frac{dV}{d\zeta_1}-2d\frac{dV}{d\zeta_2}\right)+d^2\mu\frac{dV}{d\zeta_2}=0,$$

parce que μ ne contient point x_1, y_1 et ζ_1, et que les termes multipliés par V et dV sont nuls en vertu de l'équation $V=0$, qui doit rendre les précédentes identiques. Si l'on en élimine μ et ses différentielles, les résultantes exprimeront les conditions auxquelles la proposée doit satisfaire pour qu'étant multipliée par le facteur μ, elle devienne la différentielle d'une équation du premier ordre. On voit que cette opération donne deux équations finales (n°. 78), desquelles il faudra chasser ζ_0 et ζ_1, par le moyen des équations $V=0$, $dV=0$.

Prenons pour exemple l'équation

$$(x\,dx+\zeta\,d\zeta)\,d^2y-\zeta\,dy\,d^2\zeta-dy\,(dx^2+dy^2+d\zeta^2)=0,$$

déjà traitée, n°. précédent ; nous en tirerons

$$V=(xx_1+\zeta\zeta_1)\,y_2-\zeta\zeta_2y_1-y_1(x_1^2+y_1^2+\zeta_1^2)=0.$$

La première des équations de condition rapportées ci-dessus, devient inutile parce que dx est regardé comme constant, et nous aurons seulement

$$\frac{dV}{dy}=0,\quad \frac{dV}{dy_1}=-\zeta\zeta_2-x_1^2-3y_1^2-\zeta_1^2,\quad \frac{dV}{dy_2}=xx_1+\zeta\zeta_1,$$

$$\frac{dV}{d\zeta}=\zeta_1y_2-\zeta_2y_1,\quad \frac{dV}{d\zeta_1}=\zeta y_2-2y_1\zeta_1,\quad \frac{dV}{d\zeta_2}=-\zeta y_1.$$

Ces valeurs étant mises dans la seconde et la troisième des équations citées, donneront

$$\left.\begin{aligned}(6\zeta_1\zeta_2+6y_1y_2+2\zeta\zeta_3)\mu+(3x_1^2+3y_1^2+3\zeta_1^2+3\zeta\zeta_2)\,d\mu\\+(xx_1+\zeta\zeta_1)\,d^2\mu\end{aligned}\right\}=0,$$

$$2y_1\mu+3y_2\,d\mu+y_1\,d^2\mu=0;$$

éliminons d'abord $d^2\mu$ et nous aurons

$$\left.\begin{aligned}(6y_1\zeta_1\zeta_2+6y_1^2y_2+2\zeta\zeta_2y_1-2xx_1y_2-2\zeta\zeta_1y_2)\,\mu\\+(3x_1^2y_1+3y_1^3+3y_1\zeta_1^2+3y_1\zeta\zeta_2-3xx_1y_2-3\zeta\zeta_1y_2)\,d\mu\end{aligned}\right\}=0.$$

Il reste encore à éliminer μ et $d\mu$, mais on peut s'en dispenser parce que l'équation ci-dessus devient elle-même identique, lorsqu'on y substitue pour ζ_2 et ζ_3 leurs valeurs déduites de $V=0$ et $dV=0$.

715. Nous terminerons ce que nous avons à dire sur les équations de condition, en cherchant celles qui doivent avoir lieu pour qu'une équation différentielle contenant trois ou un plus grand nombre de variables, et d'un ordre supérieur au premier, admette une intégrale seconde, troisième, etc.

Soit $V_2 = 0$ une équation différentielle dont le facteur soit μ_2, et désignons par V_1 l'intégrale de la différentielle exacte $\mu_2 V_2$. D'après ce qui précède, les équations

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dV_2}{dx} - d\frac{dV_2}{dx_1} + d^2\frac{dV_2}{dx_2} - \text{etc.}\right)\mu_2 - \left(\frac{dV_2}{dx_1} - 2d\frac{dV_2}{dx_2} + \text{etc.}\right)d\mu_2 \\ + \left(\frac{dV_2}{dx_2} - \text{etc.}\right)d^2\mu_2 - \text{etc.}\end{aligned}\right\} = 0$$

etc. .....

dont le nombre est égal à celui des variables, seront satisfaites ; il faudra ensuite que l'équation $V_1 = 0$ ait un facteur μ_1 qui la rende une différentielle exacte, pour que la proposée ait une intégrale seconde, et cela n'aura lieu qu'autant que les équations

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dV_1}{dx} - d\frac{dV_1}{dx_1} + d^2\frac{dV_1}{dx_2} - \text{etc.}\right)\mu_1 - \left(\frac{dV_1}{dx_1} - 2d\frac{dV_1}{dx_2} + \text{etc.}\right)d\mu_1 \\ + \left(\frac{dV_1}{dx_2} - \text{etc.}\right)d^2\mu_1 + \text{etc.}\end{aligned}\right\} = 0$$

etc. .....

seront satisfaites. Mais puisqu'il y a entre $\mu_2 V_2$ et V_1 la même subordination qu'entre les fonctions U_2 et U_1, du n°. 88, nous aurons, comme dans ce numéro

$$\frac{dV_1}{dx} = \frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_1} - d\frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_2} + d^2\frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_3} - \text{etc.}$$

$$\frac{dV_1}{dx_1} = \frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_2} - d\frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_3} + \text{etc.}$$

$$\frac{dV_1}{dx_2} = \frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_3} - \text{etc.}$$

etc. .....

et en substituant ces valeurs dans les équations ci-dessus, nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_1} - 2d\frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_2} + 3d^2\frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_3} - \text{etc.}\right)\mu_1 \\ &- \left(\frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_2} - 3d\frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_3} + \text{etc.}\right)d\mu_1 \\ &+ \left(\frac{d.\,\mu_2 V_2}{dx_3} - \text{etc.}\right)d^2\mu_1 \\ &- \text{etc.}\end{aligned}\right\} = 0,$$

etc. .....

Il faut, en développant ces dernières équations, observer que les différentielles de l'ordre de V_2 n'entrent point dans V_1, et que tous les termes qui seront multipliés par V_2, dV_2, d^2V_2, etc. après les différentiations, disparoîtront à cause des équations $V_2 = 0$, $dV_2 = 0$, $d^2V_2 = 0$, etc. Avec ces attentions on aura

$$\left.\begin{aligned} &\left(\mu_2\frac{dV_2}{dx_1} - 2d.\mu_2\frac{dV_2}{dx_2} + 3d^2.\mu_2\frac{dV_2}{dx_3} - \text{etc.}\right)\mu_1 \\ -&\left(\mu_2\frac{dV_2}{dx_2} - 3d.\mu_2\frac{dV_2}{dx_3} + \text{etc.}\right)d\mu_1 \\ +&\left(\mu_2\frac{dV_2}{dx_3} - \text{etc.}\right)d^2\mu_1 \\ -&\ \text{etc.} \end{aligned}\right\} = 0 ;$$

chaque variable donnera une semblable équation, qu'il faudra réunir à celles qui sont relatives à l'intégrale première, et traiter de même. On parviendra d'une manière analogue aux équations de condition relatives à l'intégrale troisième, en se servant des formules du numéro 89.

En appliquant les équations que nous venons de trouver à l'équation

$$V = (xx_1 + \zeta\zeta_1)y_2 - \zeta\zeta_2 y_1 - y_1(x_1^2 + y_1^2 + \zeta_1^2) = 0 ,$$

que déjà nous savons être susceptible d'une intégrale première, elles donneront

$$\left.\begin{aligned} &[(3x_1^2 + 3y_1^2 + 3\zeta_1^2 + 3\zeta\zeta_2)\mu_2 + (2xx_1 + 2\zeta\zeta_1)d\mu_2]\mu_1 \\ &\qquad + \quad (xx_1 + \zeta\zeta_1)\mu_2 d\mu_1 \end{aligned}\right\} = 0 ,$$

$$(3y_2\mu_2 + 2y_1 d\mu_2)\mu_1 + y_1\mu_2 d\mu_1 = 0 ;$$

l'élimination de $d\mu_1$ fera disparoître $d\mu_1$, μ_1, μ_2 et $d\mu_2$, et il viendra

$$3x_1^2y_1 + 3y_1^3 + 3y_1\zeta_1^2 + 3\zeta\zeta_2 y_1 - 3xx_1y_2 - 3\zeta\zeta_1 y_2 = 0 ,$$

équation que la valeur de ζ_2 tirée de la proposée rendra identique, ce qui prouve que celle-ci a une intégrale seconde ; et en effet nous avons trouvé, n°. 713, l'équation primitive d'où elle tire son origine.

Intégration des équations différentielles partielles du premier ordre.

716. Nous allons passer au troisième cas de la recherche des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables. Dans ce cas, on n'a pour déterminer la fonction inconnue que quelques uns de ses coefficiens différentiels d'un certain ordre, ou une seule équation entr'eux. Il constitue ce que l'on appelle *le Calcul intégral aux différences*

partielles, et qu'on devroit nommer, d'après les remarques du n°. 30, *Calcul intégral des différentielles partielles;* car les coefficiens différentiels, considérés isolément, ne font connoître que les différentielles partielles, et non pas les différences qui sont l'objet d'un calcul à part, qu'on trouvera dans le traité des séries qui termine cet ouvrage. Le coefficient $\frac{d^{m+n}\zeta}{dx^m dy^n}$, étant multiplié par $dx^m dy^n$, devient $\frac{d^{m+n}\zeta}{dx^m dy^n} dx^m dy^n$, et exprime alors la différentielle $m^{ème}$, par rapport à x, de la différentielle $n^{ème}$ de ζ, par rapport à y, *et vice versa*, ce que l'on peut écrire ainsi : $\frac{d^{m+n}\zeta}{dx^m dy^n} dx^m dy^n = d_x^m d_y^n \zeta$; l'y inférieur indiquant des différentiations où l'on ne fait varier que y seul, et l'x des différentiations dans lesquelles on ne fait varier que x.

717. La plus simple des équations différentielles partielles, est celle qui ne renferme que l'un des coefficiens du premier ordre et les variables indépendantes. Soit, par exemple, $\frac{d\zeta}{dx} = R$, R ne contenant point ζ ; en multipliant par dx, on obtiendra $\frac{d\zeta}{dx} dx = R dx$, ou $d_x \zeta = R dx$; et en intégrant par rapport à x seulement, il viendra $\zeta = \int R dx + C$. Dans ce résultat C n'indique pas une simple constante arbitraire, mais une fonction, absolument indéterminée, de toutes les variables autres que x, que pourroit contenir la fonction ζ. Si, par exemple, ζ dépendoit en même tems de x et de y, on auroit $\zeta = \int R dx + \varphi(y)$, en désignant par φ une fonction arbitraire composée d'une manière quelconque de la variable y mêlée avec des constantes. Quand ζ sera une fonction de trois variables, u, x et y, on aura alors $\zeta = \int R dx + \varphi(u, y)$, et $\varphi(u, y)$ représentera une fonction arbitraire dans laquelle les variables u, et y pourront être combinées d'une manière quelconque, soit entr'elles, soit avec des constantes. En général pour un nombre quelconque de variables indépendantes s, t, u, x, y, etc. l'intégrale de $\frac{d\zeta}{dx} = R dx$, sera $\zeta = \int R dx + \varphi(s, t, u, y, \text{etc.})$, parce qu'il est évident que la fonction $\varphi(s, t, u, y, \text{etc.})$, quelle qu'elle soit, ne variant point quand x varie, on a toujours $\frac{d\zeta}{dx} = R dx$.

Nous venons de supposer que ζ n'entre pas dans R; s'il s'y trouvoit, il faudroit intégrer, par quelques-unes des méthodes du Chapitre III, en ne regardant comme variables que x et ζ seulement, l'équation $\frac{d\zeta}{dx}dx - R\,dx = 0$, ou $d_x\zeta - R\,dx = 0$; et désignant son intégrale par V, on auroit $V = \varphi(s, t, u, y, \text{etc.})$ pour l'équation primitive de laquelle dépend la fonction ζ. En effet, si on différentie cette équation en ne faisant varier que x et ζ, le résultat sera de la forme $P d_x\zeta + Q\,dx = 0$, et tel que $-\frac{Q}{P} = R$, ce qui donne $\frac{d\zeta}{dx} = R$.

Désormais au lieu de l'équation $d_x\zeta - R\,dx = 0$, nous écrirons simplement $d\zeta - R\,dx = 0$, et il en sera de même de toute autre semblable, parce que l'absence des différentielles du, dy, etc. fait bien voir que celle de ζ ne se rapporte qu'à la variable x.

718. Occupons-nous maintenant des équations différentielles partielles dans lesquelles entrent plusieurs coefficiens du premier ordre, et supposons d'abord que la fonction cherchée ζ ne dépende que des variables x, y; pour abréger, faisons, comme dans le n°. 699, $\frac{d\zeta}{dx} = p$, $\frac{d\zeta}{dy} = q$, et par conséquent $d\zeta = p\,dx + q\,dy$. Cela posé, soit l'équation $Pp + Qq = 0$, P et Q étant des fonctions données en x et en y; on en tirera $p = -\frac{Qq}{P}$; substituant dans la valeur de $d\zeta$, on aura $d\zeta = \frac{q}{P}(P\,dy - Q\,dx)$, et q restera absolument indéterminé: mais pour qu'on puisse trouver pour ζ une fonction primitive de deux variables, il faut que $\frac{q}{P}(P\,dy - Q\,dx)$ soit une différentielle exacte. Si la quantité $P\,dy - Q\,dx$ en est une, en sorte qu'on ait $P\,dy - Q\,dx = dU$, il est évident qu'on satisfera à la condition d'intégrabilité, en regardant $\frac{q}{P}$ comme une fonction quelconque de U, que l'on représentera par $\varphi'(U)$: il en résultera $d\zeta = \varphi'(U)dU$, $\zeta = \int \varphi'(U)\,dU = \varphi(U)$. Il est inutile d'ajouter une constante arbitraire, car elle se trouve comprise implicitement dans la fonction arbitraire $\varphi(U)$.

On pourroit croire qu'il seroit plus général de faire $\frac{q}{p} = \downarrow(U, \zeta)$, ce qui changeroit l'équation $d\zeta = \frac{q}{p}(P\,dy - Q\,dx)$ en $d\zeta - \downarrow(U, \zeta)\,dU = 0$; mais comme celle-ci doit toujours être supposée intégrable, puisqu'elle ne contient que deux variables; il est évident qu'on n'en sauroit conclure autre chose, *sinon* que ζ est une fonction quelconque de U, ou que $\zeta = \varphi(U)$, de même que ci-dessus.

Soit, par exemple, l'équation $qx - py = 0$, qui appartient à tous les solides de révolution dont l'axe coïncide avec celui de ζ (n°. 336); elle donne $P = -y$, $Q = x$, $d\zeta = -\frac{q}{y}(x\,dx + y\,dy)$, et par conséquent $\zeta = \varphi(x^2 + y^2)$, ainsi que nous l'avons déduit des considérations géométriques dans le n°. cité.

Lorsque la fonction $Pdy - Qdx$ n'est pas une différentielle exacte, elle peut du moins le devenir par la multiplication d'un facteur μ, que l'on découvrira en intégrant l'équation $Pdy - Qdx = 0$; on aura dans ce cas $d\zeta = \frac{q}{P\mu}(\mu P\,dy - \mu Q\,dx)$. On rendra encore le second membre de cette équation intégrable, en faisant $\frac{q}{P\mu} = \varphi'(U)$, si $dU = \mu P\,dy - \mu Q\,dx$: on trouvera par ce moyen $\zeta = \int \varphi'(U)\,dU = \varphi(U)$.

L'équation $px + qy = 0$ s'intégre par le procédé ci-dessus; on en tire $d\zeta = \frac{q}{x}(x\,dy - y\,dx)$. On rend la fonction $x\,dy - y\,dx$ différentielle exacte en la multipliant par $\frac{1}{x^2}$, et il vient $d\zeta = qx\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right)$, $\zeta = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$; l'équation proposée appartient donc à une des familles de surfaces courbes, traitées dans le numéro 344.

Il est facile de voir que l'intégration des équations

$$Xp + Yq = 0\,, \qquad Yp + Xq = 0\,,$$

dans lesquelles X est une fonction de x seul et Y une fonction de y seul, se ramène à celles des fonctions d'une seule variable. En effet

l'expression $Pdy - Qdx = 0$, devient $Xdy - Ydx$ dans le premier cas, et $Ydy - Xdx$ dans le second ; on a donc pour l'une, $\mu = \frac{1}{XY}$, $U = \int \frac{dy}{Y} - \int \frac{dx}{X}$, et pour l'autre $U = \int Ydy - \int Xdx$.

Nous voilà donc parvenus à intégrer en général l'équation $Pp + Qq = 0$, lorsque P et Q sont des fonctions de x et de y, c'est-à-dire, à trouver l'expression de la fonction z, entre les deux coefficiens différentiels de laquelle il existe la relation exprimée par l'équation proposée, et cela en supposant seulement que l'on puisse rendre la fonction $Pdy - Qdx$ différentielle exacte par le moyen d'un facteur, ou, ce qui revient au même, que l'on puisse intégrer l'équation à deux variables $Pdy - Qdx = 0$ (n°. 555). En général on regarde une équation différentielle partielle quelconque comme intégrée, lorsqu'elle se trouve ramenée à des équations différentielles à deux variables.

719. Si dans le n°. 83 nous avons vu que les équations différentielles du premier ordre se déduisoient des équations primitives à trois variables, par l'élimination d'une fonction arbitraire, nous venons aussi de retrouver cette même fonction arbitraire par l'intégration de l'équation $Pp + Qq = 0$, et nous n'aurions obtenu que deux constantes arbitraires en faisant seulement $\frac{q}{P} = a$; il seroit venu par cette supposition, $dz = a\,dU$, $z = aU + b$. Il est très-remarquable que ce résultat, quoique moins général que celui du numéro précédent, nous y ramène néanmoins. En effet, les quantités a, b, que nous avons d'abord supposées constantes, peuvent varier, pourvu que ce soit de manière que la différentielle de z se réduise toujours à $a\,dU$; en différentiant par rapport à toutes les quantités, on trouve $dz = a\,dU + U\,da + db$, et ce résultat donnera seulement $dz = a\,dU$, si $U\,da + db = 0$, ou $\frac{db}{da} = U$. Posons donc $b = \downarrow(a)$, $\downarrow$ désignant une fonction quelconque ; nous aurons $\downarrow'(a) = U$, d'où il suit que $a = \downarrow_1(U)$, $\downarrow_1$ étant une fonction inverse de celle que représente $\downarrow'$; substituant cette valeur de a et celle de b qui en résulte, dans

dans l'expression de ζ, on trouve $\zeta = U\downarrow_1(U) + \downarrow[\downarrow_1(U)]$, équation dont le second membre n'est autre chose qu'une fonction arbitraire de U; et l'on peut par conséquent écrire $\zeta = \varphi(U)$. Nous aurons par la suite occasion de généraliser ce procédé.

720. Considérons à présent l'équation $Pp + Qq = R$, dans laquelle P, Q, R, contiennent à-la-fois x, y et ζ, et par conséquent la plus générale qu'il soit possible d'avoir entre les coefficiens du premier ordre p et q, lorsqu'ils ne passent pas le premier degré. Prenant la valeur de p dans cette équation pour la substituer dans $d\zeta = p\,dx + q\,dy$, nous trouverons

$$P\,d\zeta - R\,dx = q\,(P\,dy - Q\,dx),$$

le coefficient q restant toujours indéterminé. Il se présente ici deux cas; 1°. la composition de P, Q et R, peut être telle que la fonction $P\,d\zeta - R\,dx$ ne renferme que les variables ζ et x dont elle contient les différentielles, tandis que la fonction $P\,dy - Q\,dx$ ne renferme que x, y; 2°. l'une ou l'autre de ces fonctions, ou même toutes deux, peuvent renfermer les trois variables x, y et ζ.

Dans le premier cas, il existe un facteur μ qui rend $P\,dy - Q\,dx$ différentielle exacte, et un facteur μ' qui opère la même chose sur $P\,d\zeta - R\,dx$; désignant ces différentielles exactes par U et V, on aura $P\,dy - Q\,dx = \frac{1}{\mu}\,dU$, $P\,d\zeta - R\,dx = \frac{1}{\mu'}\,dV$, et l'équation ci-dessus deviendra $dV = \frac{q\mu'}{\mu}\,dU$. Elle ne peut être intégrable à moins que $\frac{q\mu'}{\mu}$ ne soit une fonction quelconque de U; posant donc $\frac{q\mu'}{\mu} = \varphi'(U)$, on a $dV = \varphi'(U)\,dU$, et en intégrant il vient $V = \varphi(U)$, résultat dans lequel φ désigne toujours une fonction arbitraire.

Pour donner un exemple de ce cas, proposons-nous d'intégrer l'équation $px + qy = n\zeta$; nous aurons $P = x$, $Q = y$, $R = n\zeta$, $P\,dy - Q\,dx = x\,dy - y\,dx$, $P\,d\zeta - R\,dx = x\,d\zeta - n\zeta\,dx$. On trouve par l'intégration des équations $x\,dy - y\,dx = 0$, $x\,d\zeta - n\zeta\,dx = 0$, que les facteurs μ et μ' sont respectivement

$\frac{1}{x^n}$, $\frac{1}{x^{n+1}}$, et que par conséquent $U=\frac{y}{x}$, $V=\frac{\zeta}{x^n}$; il s'ensuit donc $\frac{\zeta}{x^n}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ou $\zeta=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, c'est-à-dire, que ζ est une fonction homogène en x et y, du degré n. En effet l'équation $px+qy=n\zeta$, n'est autre chose que le théorême des fonctions homogènes donné n°. 91, et dont ce qui précède fournit encore une démonstration pour le cas de deux variables.

En prenant $n=1$, on tombe sur l'équation $px+qy=\zeta$, qui appartient aux surfaces coniques, dont le sommet est placé à l'origine des coordonnées (n°. 334); et on trouve que l'intégrale de cette équation est $\frac{\zeta}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ainsi qu'on la déduiroit des considérations géométriques du n°. cité.

721. Quand les variables x, y et ζ, sont mêlées indistinctement dans les fonctions $Pdy-Qdx$, $Pd\zeta-Rdx$, il n'est plus possible de les rendre intégrables, chacune en particulier, par le moyen de facteurs, et cela parce qu'on ne sauroit intégrer isolément les équations $Pdy-Qdx=0$, $Pd\zeta-Rdx=0$; car il faut bien remarquer que ζ ne doit pas être supposé constant dans la première, ni x dans la seconde. Lagrange a fait voir le premier que néanmoins si l'on intégroit conjointement ces équations, et qu'on en déduisît deux équations primitives, renfermant chacune une constante arbitraire, de manière qu'on eût $U=a$, $V=b$, U et V étant des fonctions données en x, y et ζ, l'intégrale de la proposée $Pp+Qq=R$ seroit $V=\varphi(U)$, φ désignant toujours une fonction arbitraire. Cette proposition importante paroît démontrée assez simplement de la manière suivante.

Puisque les équations $U=a$, $V=b$, sont supposées déduites des équations $Pdy-Qdx=0$, $Pd\zeta-Rdx=0$, il faut que leurs différentielles ayent lieu en même tems que ces dernières, c'est-à-dire, que si l'on met dans les équations

$$\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{d\zeta}d\zeta=0,$$
$$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{d\zeta}d\zeta=0;$$

les valeurs de dy et de dz, tirées de $Pdy+Qdx=0$, $Pdz+Rdx=0$, on parvienne à des résultats identiquement nuls. Ces résultats sont

$$\frac{dU}{dx}P+\frac{dU}{dy}Q+\frac{dU}{dz}R=0,$$

$$\frac{dV}{dx}P+\frac{dV}{dy}Q+\frac{dV}{dz}R=0;$$

on en tire

$$\frac{dU}{dx}=-\frac{dU}{dy}\frac{Q}{P}-\frac{dU}{dz}\frac{R}{P},$$

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{dV}{dy}\frac{Q}{P}-\frac{dV}{dz}\frac{R}{P};$$

mais l'équation $V=\phi(U)$ donne $dV=\phi'(U)dU$, ou, en développant,

$$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz=\phi'(U)\left[\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{dz}dz\right];$$

substituant dans cette équation les valeurs précédentes de $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dV}{dx}$, on trouvera

$$\frac{dV}{dy}(Pdy-Qdx)+\frac{dV}{dz}(Pdz-Rdx)=$$
$$\phi'(U)\left[\frac{dU}{dy}(Pdy-Qdx)+\frac{dU}{dz}(Pdz-Rdx)\right],$$

d'où l'on déduira

$$Pdz-Rdx=-\frac{\frac{dV}{dy}-\phi'(U)\frac{dU}{dy}}{\frac{dV}{dz}-\phi'(U)\frac{dU}{dz}}(Pdy-Qdx),$$

équation qui rentre dans $Pdz-Rdx=q(Pdy-Qdx)$, puisque q et $\phi'(U)$ sont des fonctions indéterminées, et que par conséquent on peut supposer que

$$-\frac{\frac{dV}{dy}-\phi'(U)\frac{dU}{dy}}{\frac{dV}{dz}-\phi'(U)\frac{dU}{dz}}=q.$$

Quand on fait $\phi(U)=a$, l'intégrale $V=\phi(U)$ se réduit

à $V=b$, ce qui nous apprend que $V=b$ est une intégrale particulière de la proposée. Il en seroit de même de $U=a$, car de $V=\varphi(U)$, on tire $U=\varphi_1(V)$, φ_1 étant une fonction inverse de φ, arbitraire par conséqent, et qu'on peut supposer égale à a.

722. Tirer des équations $Pdy-Qdx=0$, $Pdz-Rdx=0$, deux équations primitives de la forme $U=a$, $V=b$, c'est la même chose que de les intégrer; et pour cela il faut, en général, éliminer entr'elles, suivant le procédé du n°. 78, une des variables x, y, z et ses différentielles. On parviendra à une résultante du second ordre et à deux variables seulement, dont l'intégrale, si l'on peut l'obtenir, renfermera deux constantes arbitraires a et b. On combinera ensuite la différentielle première de celle-ci avec les proposées, pour en chasser $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, ce qui conduira à une seconde équation primitive, dans laquelle il n'entrera point de nouvelles constantes arbitraires, et qui, conjointement avec la précédente, donnera les valeurs de a et de b, c'est-à-dire, les fonctions U et V.

Il n'est pas toujours nécessaire de descendre jusqu'au second ordre pour changer les équations $Pdy-Qdx=0$, $Pdz-Rdx=0$, en d'autres qui soient intégrables; il suffit quelquefois d'en éliminer une différentielle, ou même une fonction primitive qui leur seroit commune. Si l'on chasse dx, par exemple, il viendra $Qdz-Rdy=0$; et si cette dernière équation est intégrable, on pourra par son moyen déduire une équation primitive de l'une quelconque des deux premières. On arrive immédiatement à l'équation $Qdz-Rdy=0$, en éliminant de $dz=pdx+qdy$, par le moyen de l'équation différentielle partielle $Pp+Qq=R$, le coefficient q, au lieu du coefficient p, que nous avons chassé dans le n°. 720; car il vient alors $Qdz-Rdy=p(Qdx-Pdy)$, ce qui conduit à $Qdx-Pdy=0$, $Qdz-Rdy=0$. Il suit de-là que pour intégrer l'équation $Pp+Qq=R$, il faut intégrer deux quelconques des trois suivantes:

$$Pdy-Qdx=0,$$
$$Pdz-Rdx=0,$$
$$Qdz-Rdy=0.$$

Appliquons maintenant ces formules à quelques exemples.

723. Soit 1°. l'équation $px + q\zeta + y = 0$; en la comparant à $Pp + Qq = R$, on en tire

$$x\,dy - \zeta\,dx = 0\,,$$
$$x\,d\zeta + y\,dx = 0\,,$$
$$\zeta\,d\zeta + y\,dy = 0.$$

Il n'y a que la dernière de ces équations qui soit immédiatement intégrable ; elle donne $\zeta^2 + y^2 = a^2$. Substituant dans la seconde la valeur de y, on aura $x\,d\zeta + dx\sqrt{a^2 - \zeta^2} = 0$,

ou $\dfrac{d\zeta}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}} + \dfrac{dx}{x} = 0$, équation dont l'intégrale est

$\text{arc}\left(\sin = \dfrac{\zeta}{a}\right) + lx = lb$, et devient $x\,e^{\text{arc}\left(\sin = \frac{\zeta}{a}\right)} = b$,

en passant aux nombres ; prenant les valeurs de a et de b, on trouvera $U = \sqrt{y^2 + \zeta^2}$, $V = x\,e^{\text{arc}\left(\sin = \frac{\zeta}{a}\right)}$,

d'où l'on déduira $x\,e^{\text{arc}\left(\sin = \frac{\zeta}{\sqrt{(yy+\zeta\zeta)}}\right)} = \varphi(y^2 + \zeta^2)$, pour l'intégrale de la proposée.

2°. L'équation $(x-\alpha)(b'+q) - (y-\beta)(a'+p) + \zeta(b'p - a'q) = 0$, appartenant aux surfaces de révolution (n°. 336), mise sous la forme $(y - b'\zeta - \beta)p - (x - a'\zeta - \alpha)q = b'(x-\alpha) - a'(y-\beta)$, se réduit à $(y' - b'\zeta)p - (x' - a'\zeta)q = b'x' - a'y'$, en faisant $x - \alpha = x'$, $y - \beta = y'$, ce qui ne change rien à p ni à q, et donne $d\zeta = p\,dx' + q\,dy'$: son intégrale dépend de celles des suivantes

$$(y' - b'\zeta)\,dy' + (x' - a'\zeta)\,dx' = 0\,,$$
$$(y' - b'\zeta)\,d\zeta - (b'x' - a'y')\,dx' = 0\,,$$
$$(x' - a'\zeta)\,d\zeta + (b'x' - a'y')\,dy' = 0.$$

Aucune de ces équations n'est intégrable par elle-même ; mais si on multiplie la seconde par a', la troisième par b', qu'on prenne ensuite leur différence, le résultat, divisé par $b'x' - a'y'$, donnera

$d\zeta + a'dx' + b'dy' = 0$, et par conséquent $\zeta + a'x' + b'y' = a$.

Retranchant la seconde équation, multipliée par x', de la troisième multipliée par y', et divisant par $b'x' - a'y'$, on obtiendra

$$\zeta\,d\zeta + x'dx' + y'dy' = 0, \text{ d'où } \zeta^2 + x'^2 + y'^2 = b\,;$$

l'intégrale de la proposée sera donc $x'^2 + y'^2 + \zeta^2 = \varphi(\zeta + a'x' + b'y')$ ou bien $\zeta + a'x' + b'y' = \varphi(x'^2 + y'^2 + \zeta^2)$, et rentrera dans l'équa-

tion primitive trouvée dans le numéro cité, lorsqu'on remettra $x-\alpha$ et $y-\beta$, au lieu de x' et de y'.

724. Pour ne rien laisser à désirer, nous allons passer en revue dans cet article, les principales formes d'équations différentielles partielles du premier ordre qui présentent quelque facilité pour l'intégration.

1°. L'équation assez générale $Xp+Yq=Z$, dans laquelle X désigne une fonction de x, Y une fonction de y et Z une fonction de z, ne dépend que des équations différentielles

$$Xdy-Ydx=0\,, \qquad Xdz-Zdx=0\,,$$

dont les intégrales sont

$$\int\frac{dy}{Y}-\int\frac{dx}{X}=a\,, \qquad \int\frac{dz}{Z}-\int\frac{dx}{X}=b,$$

et donnent par conséquent $\int\frac{dz}{Z}-\int\frac{dx}{X}=\varphi\left(\int\frac{dy}{Y}-\int\frac{dx}{X}\right)$.

2°. Lorsque z n'entre point dans les fonctions P et Q, l'intégration de l'équation $Pp+Qq=R$ se rapporte immédiatement à celle de deux équations du premier ordre à deux variables; car l'équation $Pdy-Qdx=0$, qui ne contient que x et y, étant intégrée, servira à éliminer y de l'équation $Pdz-Rdx=0$. Les variables se sépareroient sur le champ dans cette dernière, si, R étant de la forme $R'Z$, R' ne contenoit que x et y; on auroit alors $Pdz-R'Zdx=0$, d'où on tireroit $\frac{dz}{Z}-\frac{R'dx}{P}=0$.

L'équation $Pp+Qq+Rz=R'$, du premier degré seulement, tant par rapport à la fonction z, que par rapport à ses coefficiens différentiels, s'intégre par le moyen des équations suivantes

$$Pdy-Qdx=0\,, \qquad Pdz+Rzdx=R'dx\,,$$

dont la seconde devient une équation du premier degré à deux variables, lorsqu'avec le secours de l'intégrale de la première, on en chasse la variable y.

3°. Quand la proposée se réduit à $Pp+Qq=0$, P et Q étant d'ailleurs quelconques, l'équation $Pdz-Rdx=0$ donne alors $dz=0$, ou $z=a$; on doit par conséquent intégrer l'équation $Pdy-Qdx=0$, en regardant z comme constant: si $U=b$ représente le résultat, $z=\varphi(U)$ sera l'intégrale de $Pp+Qq=0$, et la même que si P et Q ne contenoient que x, y, et une constante au

lieu de ζ. Monge avoit fait, dès 1771, cette importante remarque qui le conduisit à la proposition démontrée dans le n°. 721, qu'il avoit aussi trouvée de son côté, et qu'il publia en 1784, sans connoître le mémoire de Lagrange, imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin, année 1779 (*).

4°. Supposons enfin que l'équation $Pp+Qq=R$ soit homogène en x, y et ζ. Dans ce cas, il faudra faire $x=t\zeta$, $y=u\zeta$; les fonctions P, Q et R, prendront la forme $P'\zeta^n$, $Q'\zeta^n$, $R'\zeta^n$; les équations $Pd\zeta-Rdx=0$, $Qd\zeta-Rdy=0$, se changeront en

$$P'd\zeta-R'(td\zeta+\zeta dt)=0, \quad Q'd\zeta-R'(ud\zeta+\zeta du)=0,$$

ou, ce qui est la même chose, en

$$(P'-R't)\frac{d\zeta}{\zeta}-R'dt=0, \quad (Q'-R'u)\frac{d\zeta}{\zeta}-R'du=0,$$

et par l'élimination de $\frac{d\zeta}{\zeta}$, conduiront à l'équation

$$(Q'-R'u)dt-(P'-R't)du=0,$$

qui ne renferme que les deux variables u et t. Lorsqu'on pourra l'intégrer, on prendra l'expression de t en u, pour la substituer dans l'une ou l'autre des équations

$$\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{R'dt}{P'-R't}, \quad \frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{R'du}{Q'-R'u},$$

déduites des précédentes.

Soit pour exemple l'équation $px\zeta+qy\zeta=xy$; on en tire

$$P=x\zeta=t\zeta^2, \quad Q=y\zeta=u\zeta^2, \quad R=xy=tu\zeta^2,$$
$$P'=t, \quad Q'=u, \quad R'=tu.$$

L'équation $(Q'-R'u)dt-(P'-R't)du=0$ deviendra $(u-tu^2)dt-(t-t^2u)du=0$, ou $(1-ut)(udt-tdu)=0$; en intégrant $udt-tdu=0$, on obtiendra

$\frac{t}{u}=a$, $t=au$, et $\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{R'du}{Q'-R'u}$ se changera en

---

(*) Dans les notes que j'ai prises sur les leçons qu'il donnoit en 1780, à quelques personnes, du nombre desquelles j'étois, l'équation $Kp+Rq+M=0$ est ramenée à intégrer conjointement les équations $d\zeta+\frac{M}{R}dy=0$, $Rdx-Kdy=0$.

$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{u\,t\,du}{u - u^2 t} = \frac{t\,du}{1 - ut} = \frac{a\,u\,du}{1 - au^2}$, ce qui donne successivement $l\zeta = -\frac{1}{2}l(1-au^2) + lb$, $\zeta\sqrt{1-au^2} = b$, $\zeta\sqrt{1-ut} = \varphi\left(\frac{u}{t}\right)$, et enfin $\sqrt{\zeta^2 - xy} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ou plus simplement $\zeta^2 - xy = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

La proposée s'intègre aussi sans le secours d'aucune transformation, après qu'on l'a divisée par $x\,y\,\zeta$: elle devient alors $\frac{p}{y} + \frac{q}{x} = \frac{1}{\zeta}$; le système des équations $P\,dy - Q\,dx = 0$, $P\,d\zeta - R\,dx = 0$, conduit aux suivantes $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$, $\frac{d\zeta}{y} - \frac{dx}{\zeta} = 0$. La première de celles-ci a pour intégrale $\frac{y}{x} = a$, et donne $y = a\,x$, ce qui réduit la seconde à $\zeta\,d\zeta - a\,x\,dx = 0$, d'où l'on tire $\zeta^2 - a\,x^2 = b$; remettant au lieu de a sa valeur $\frac{y}{x}$, on obtient comme ci-dessus $\zeta^2 - xy = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

725. La méthode dont nous venons de faire usage peut se généraliser pour les équations différentielles partielles contenant un nombre quelconque de variables. Si la fonction ζ dépend des variables u, x, y et ζ, on aura $d\zeta = n\,du + p\,dx + q\,dy$; l'équation du premier ordre $Nn + Pp + Qq = R$, dans laquelle u, x, y et ζ peuvent entrer à la fois, ne détermine que trois des coefficiens différentiels n, p et q : on en tire, par exemple, $n = \frac{R - Qq - Pp}{N}$. Substituant cette valeur dans celle de ζ, on trouvera

$$N\,d\zeta - R\,du = p\,(N\,dx - P\,du) + q\,(N\,dy - Q\,du);$$

la seule condition qui reste à remplir, par le moyen des coefficiens p et q qui demeurent indéterminés, c'est que l'équation ci-dessus soit intégrable.

Lorsque les expressions

$$N\,dx - P\,du, \quad N\,dy - Q\,du, \quad N\,d\zeta - R\,du,$$

seront intégrables par elles-mêmes, ou pourront le devenir étant multipliées respectivement par des facteurs μ, μ', μ'', si dT, dU et dV désignent

désignent les différentielles exactes qui en résulteront, on aura

$$Ndx - Pdu = \frac{1}{\mu} dT,\ Ndy - Qdu = \frac{1}{\mu'} dU,\ Ndz - Rdu = \frac{1}{\mu''} dV,$$

et par conséquent $dV = \frac{p\mu''}{\mu} dT + \frac{q\mu''}{\mu'} dU$.

On satisfera d'abord à cette équation en prenant

$\frac{p\mu''}{\mu} = \varphi'(T)$, $\frac{q\mu''}{\mu'} = \psi'(U)$, ce qui donnera

$dV = \varphi'(T)\,dT + \psi'(U)\,dU$ et $V = \varphi(T) + \psi(U)$; mais on aura un résultat plus général, en supposant seulement que $\frac{p\mu''}{\mu} dT$ et $\frac{q\mu''}{\mu'} dU$ soient les deux termes de la différentielle d'une fonction quelconque des deux quantités T et U; car on conclura de-là, $V = \varphi(T, U)$.

Si l'on se bornoit à prendre $\frac{p\mu''}{\mu} = a$, $\frac{q\mu''}{\mu'} = b$, a et b étant des constantes, on auroit, en intégrant, $V = aT + bU + c$. Cette équation, beaucoup moins générale que la précédente, puisqu'elle ne renferme que trois constantes arbitraires, peut néanmoins y conduire. En effet, si, comme dans le n°. 719, on différentie, en faisant varier a, b et c, en même tems que T, U et V, on trouvera

$$dV = adT + bdU + Tda + Udb + dc = 0;$$

mais l'équation différentielle partielle proposée ne donnant que $dV = adT + bdU$, il faudra qu'on ait $Tda + Udb + dc = 0$. Cette condition exige que $Tda + Udb$ soit une différentielle exacte, puisque dc en est une, ce qui ne se peut à moins que T et U ne soient des fonctions de a et de b, et réciproquement a et b des fonctions de T et de U; et par conséquent on aura encore $V = \varphi(T, U)$.

Pour trouver les fonctions μ, μ', μ'', il faut intégrer les équations

$$Ndx - Pdu = 0,\quad Ndy - Qdu = 0,\quad Ndz - Rdu = 0;$$

et si on met les résultats sous la forme

$$T = a,\qquad U = b,\qquad V = c;$$

les fonctions T, U, V, seront celles qu'il faudra employer dans l'intégrale $V = \varphi(T, U)$.

726. Les trois équations différentielles, rapportées ci-dessus, ne sont pas les seules dont l'intégration puisse conduire à celle de la proposée; si on eut chassé p ou q de l'expression de $d\zeta$, on en auroit obtenu d'autres qui, à la vérité, ne sont que des conséquences des premières, mais qui peuvent quelquefois se présenter sous une forme intégrable lorsque les autres s'y refusent. Au lieu de nous arrêter à chercher ces équations, qu'il est si facile de trouver, nous allons démontrer qu'il suffit que les équations $T=a$, $U=b$, $V=c$, satisfassent aux équations différentielles

$$N\,dx-P\,du=0, \quad N\,dy-Q\,du=0, \quad N\,d\zeta-R\,du=0,$$

pour que l'intégrale de la proposée soit $V=\varphi(T, U)$.

Ces dernières donnent

$$dx=\frac{P\,du}{N}, \quad dy=\frac{Q\,du}{N}, \quad d\zeta=\frac{R\,du}{N};$$

et en différentiant les premières, on a

$$\frac{dT}{du}du+\frac{dT}{dx}dx+\frac{dT}{dy}dy+\frac{dT}{d\zeta}d\zeta=0,$$
$$\frac{dU}{du}du+\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{d\zeta}d\zeta=0,$$
$$\frac{dV}{du}du+\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{d\zeta}d\zeta=0,$$

équations qui, par la substitution des valeurs de dx, dy et $d\zeta$, deviennent

$$\frac{dT}{du}N+\frac{dT}{dx}P+\frac{dT}{dy}Q+\frac{dT}{d\zeta}R=0,$$
$$\frac{dU}{du}N+\frac{dU}{dx}P+\frac{dU}{dy}Q+\frac{dU}{d\zeta}R=0,$$
$$\frac{dV}{du}N+\frac{dV}{dx}P+\frac{dV}{dy}Q+\frac{dV}{d\zeta}R=0;$$

et d'où on tire

$$\frac{dT}{du}=-\frac{dT}{dx}\frac{P}{N}-\frac{dT}{dy}\frac{Q}{N}-\frac{dT}{d\zeta}\frac{R}{N},$$
$$\frac{dU}{du}=-\frac{dU}{dx}\frac{P}{N}-\frac{dU}{dy}\frac{Q}{N}-\frac{dU}{d\zeta}\frac{R}{N},$$
$$\frac{dV}{du}=-\frac{dV}{dx}\frac{P}{N}-\frac{dV}{dy}\frac{Q}{N}-\frac{dV}{d\zeta}\frac{R}{N}.$$

Mais comme il résulte de la supposition de $V=\varphi(T,U)$ que $dV=\varphi' dT+\varphi'' dU$, φ' et φ'' étant des fonctions indéterminées de T et de U, assujetties à la seule condition $\frac{d\varphi'}{dU}=\frac{d\varphi''}{dT}$, on aura par conséquent

$$\begin{aligned}&\frac{dV}{du}du+\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{d\zeta}d\zeta\\ =&\varphi'\left(\frac{dT}{du}du+\frac{dT}{dx}dx+\frac{dT}{dy}dy+\frac{dT}{d\zeta}d\zeta\right)\\ +&\varphi''\left(\frac{dU}{du}du+\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{d\zeta}d\zeta\right);\end{aligned}$$

si dans cette équation, on met pour $\frac{dT}{du}$, $\frac{dU}{du}$, $\frac{dV}{du}$, les valeurs trouvées plus haut, elle deviendra

$$\begin{aligned}&\frac{dV}{dx}(Ndx-Pdu)+\frac{dV}{dy}(Ndy-Qdu)+\frac{dV}{d\zeta}(Nd\zeta-Rdu)\\ =&\varphi'\left\{\frac{dT}{dx}(Ndx-Pdu)+\frac{dT}{dy}(Ndy-Qdu)+\frac{dT}{d\zeta}(Nd\zeta-Rdu)\right\}\\ +&\varphi''\left\{\frac{dU}{dx}(Ndx-Pdu)+\frac{dU}{dy}(Ndy-Qdu)+\frac{dU}{d\zeta}(Nd\zeta-Rdu)\right\};\end{aligned}$$

et on en déduira

$$Nd\zeta-Rdu=\begin{cases}-\dfrac{\frac{dV}{dx}-\varphi''\frac{dU}{dx}-\varphi'\frac{dT}{dx}}{\frac{dV}{d\zeta}-\varphi''\frac{dU}{d\zeta}-\varphi'\frac{dT}{d\zeta}}(Ndx-Pdu)\\ -\dfrac{\frac{dV}{dy}-\varphi''\frac{dU}{dy}-\varphi'\frac{dT}{dy}}{\frac{dV}{d\zeta}-\varphi''\frac{dU}{d\zeta}-\varphi'\frac{dT}{d\zeta}}(Ndy-Pdu);\end{cases}$$

équation qui rentre dans

$$Nd\zeta-Rdu=p(Ndx-Pdu)+q(Ndy-Qdu),$$

puisque φ' et φ'' sont arbitraires ainsi que p et q.

On peut étendre ce qui précède au cas où la fonction cherchée

dépend d'un nombre quelconque de variables; nous en conclurons que si l'on a $dz = m\,dt + n\,du + p\,dx + q\,dy$,

$$Mm + Nn + Pp + Qq = R,$$

et qu'on parvienne à déduire des équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} M\,du - N\,dt &= 0 \\ M\,dx - P\,dt &= 0 \\ M\,dy - Q\,dt &= 0 \\ M\,dz - R\,dt &= 0 \end{aligned}\right\},$$

les équations primitives $S = a$, $T = b$, $U = c$, $V = e$;
l'intégrale de l'équation différentielle partielle proposée sera

$$V = \varphi(S, T, U).$$

En général, si la fonction cherchée dépend de m variables, ou, ce qui revient au même, si l'équation différentielle partielle proposée contient $m+1$ variables, et que les coefficiens différentiels n'y montent pas au delà du premier degré, l'intégration de cette équation sera ramenée à celle de m équations différentielles du premier ordre entre $m+1$ variables, intégration que l'on doit toujours regarder comme possible, quoiqu'on ne puisse l'effectuer que dans un petit nombre de cas (n°. 652). Il suit de là qu'il existe toujours une fonction primitive qui satisfait à une équation quelconque du premier degré, entre les coefficiens différentiels du premier ordre.

727. Après avoir ramené une équation différentielle partielle à un système d'équations différentielles totales, il ne sera pas inutile de montrer qu'on peut revenir de celles-ci à la première.

Si dans la dernière des équations

$N\,dx - P\,du = 0$, $N\,dy - Q\,du = 0$, $N\,dz - R\,du = 0$,

déduites de $Nn + Pp + Qq = R$ (n°. précédent), on met au lieu de dz sa valeur $n\,du + p\,dx + q\,dy$, elle deviendra $N(n\,du + p\,dx + q\,dy) = R\,du$; chassant dx, et dy, par le moyen des deux premières, on retombera sur la proposée $Nn + Pp + Qq = R$.

En traitant de même les trois équations différentielles quelconques à quatre variables,

$$\begin{aligned} N'\,du + P'\,dx + Q'\,dy + R'\,dz &= 0, \\ N''\,du + P''\,dx + Q''\,dy + R''\,dz &= 0, \\ N'''\,du + P'''\,dx + Q'''\,dy + R'''\,dz &= 0, \end{aligned}$$

on en déduira aussi une équation du premier degré entre les coefficiens différentiels du premier ordre de la fonction z. Ces considérations, qui s'étendent à un nombre m d'équations différentielles du premier ordre entre $m+1$ variables, prouvent qu'un pareil système d'équations considérées comme ayant lieu simultanément, équivaut toujours à une équation différentielle partielle.

728. Nous ne donnerons que deux exemples; le premier, renfermant quatre variables, sera

$$(x+y+z)n+(u+y+z)p+(u+x+z)q=u+x+y,$$
$$(x+y+z)dx-(u+y+z)du=0,$$
$$(x+y+z)dy-(u+x+z)du=0,$$
$$(x+y+z)dz-(u+x+y)du=0.$$

Celles-ci ne paroissent pas d'abord intégrables, cependant si on les met sous la forme

$$dx=\frac{u+y+z}{x+y+z}du,\quad dy=\frac{u+x+z}{x+y+z}du,\quad dz=\frac{u+x+y}{x+y+z}du,$$

qu'on retranche du dans chaque membre, que l'on réduise ensuite, on trouvera

$$dx-du=\frac{(u-x)du}{x+y+z},\quad dy-du=\frac{(u-y)du}{x+y+z},\quad dz-du=\frac{(u-z)du}{x+y+z};$$

mais on a aussi $dx+dy+dz=\frac{3u+2x+2y+2z}{x+y+z}du$; ajoutant de part et d'autre du et réduisant au même dénominateur, il viendra

$$du+dx+dy+dz=\frac{(u+x+y+z)3du}{x+y+z},$$ d'où on tirera

$$\frac{du}{x+y+z}=\frac{du+dx+dy+dz}{3(u+x+y+z)}.$$ Soit fait $u+x+y+z=v$; il en résultera $\frac{du}{x+y+z}=\frac{dv}{3v}$: substituant cette valeur dans le second membre des trois dernières équations obtenues ci-dessus, on aura

$$\frac{dx-du}{u-x}=\frac{dv}{3v},\quad \frac{dy-du}{u-y}=\frac{dv}{3v},\quad \frac{dz-du}{u-z}=\frac{dv}{3v};$$

les intégrales de ces équations, sont

$$(x-u)^3v=a,\quad (y-u)^3v=b,\quad (z-u)^3v=c;$$

et celle de la proposée sera par conséquent

$$(z-u)^3v=\varphi[(x-u)^3v,\ (y-u)^3v].$$

On peut donner à cette dernière une forme plus symétrique en prenant $\downarrow[(x-u)^3v, (y-u)^3v, (\zeta-u)^3v] = 0$, c'est-à-dire, une équation quelconque entre les trois quantités $(x-u)^3v$, $(y-u)^3v$, $(\zeta-u)^3v$.

Le second exemple sera l'équation

$$mt + nu + px + qy = \alpha\zeta$$

entre les cinq variables t, u, x, y et ζ; on en déduira les quatre équations suivantes :

$$t\,du - u\,dt = 0,$$
$$t\,dx - x\,dt = 0,$$
$$t\,dy - y\,dt = 0,$$
$$t\,d\zeta - \alpha\zeta\,dt = 0,$$

dont les intégrales sont

$$\frac{u}{t} = a, \quad \frac{x}{t} = b, \quad \frac{y}{t} = c, \quad \frac{\zeta}{t^\alpha} = e;$$

on aura par conséquent $\frac{\zeta}{t^\alpha} = \varphi\left(\frac{u}{t}, \frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$ ou $\zeta = t^\alpha\varphi\left(\frac{u}{t}, \frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$, ce qui nous apprend que la fonction ζ est homogène par rapport aux variables t, u, x, y, et du degré α; et en effet, l'équation proposée est un cas du théorême des fonctions homogènes (n°. 91).

729. Lorsque le nombre des coefficiens différentiels de la fonction cherchée surpasse deux, il peut arriver que l'on ait plusieurs équations sans que pour cela ils soient tous déterminés. Si, par exemple, ζ dépendoit des trois variables u, x, et y, on auroit ..... $d\zeta = n\,du + p\,dx + q\,dy$, et les deux équations

$$Nn + Pp + Qq = R, \qquad N'n + P'p + Q'q = R'$$

laisseroient encore indeterminé un de trois coefficiens n, p et q. Si on prenoit les valeurs de n et de p, on les trouveroit de la forme

$$n = \frac{\beta q + \gamma}{\alpha}, \qquad p = \frac{\beta' q + \gamma'}{\alpha},$$

et en les substituant dans celle de $d\zeta$, on obtiendroit pour résultat

$$\alpha\,d\zeta - \gamma\,du - \gamma' dx = q(\beta\,du + \beta' dx + \alpha\,dy).$$

Il ne s'agiroit plus pour intégrer l'équation proposée, que de parvenir à des équations primitives, $U = a$, $V = b$, qui satisfassent aux équations $\alpha\,d\zeta - \gamma\,du - \gamma' dx = 0$, $\beta\,du + \beta' dx + \alpha\,dy = 0$, et l'on en concluroit encore $V = \varphi(U)$, intégrale dont la vérité se prouveroit par le raisonnement du numéro précédent.

Il ne sauroit exister dans tous les cas une fonction de trois variables, qui, prise pour ζ, satisfît aux deux équations proposées; car les équations

$$\alpha d\zeta - \gamma du - \gamma' dx = 0, \qquad \beta du + \beta' dx + \alpha dy = 0,$$

renfermant entr'elles deux quatre variables, on en déduit par l'élimination une équation finale contenant encore trois variables, et ne pouvant par conséquent dériver d'une seule équation primitive que dans certains cas (n°. 701). Ceci montre une différence essentielle entre la question qui nous occupe maintenant et celle que nous avons traitée dans les n°s précédens, dont la solution ne donne jamais qu'une seule relation entre toutes les variables.

Cette conclusion s'accorde avec ce qui a été démontré dans le n°. 702. Les équations (C) de ce numéro sont, par rapport à la fonction μ, des équations différentielles partielles; deux quelconques d'entr'elles suffisent pour la déterminer, et si l'on prend dans les deux premières, par exemple, les valeurs des coefficiens $\frac{d\mu}{dx}$, $\frac{d\mu}{dy}$, pour les mettre dans l'équation

$$d\mu = \frac{d\mu}{dx}dx + \frac{d\mu}{dy}dy + \frac{d\mu}{d\zeta}d\zeta,$$

on trouvera un résultat de la forme

$$\alpha d\mu - \gamma dx - \gamma' dy = \frac{d\mu}{d\zeta}(\beta dx + \beta' dy + \alpha d\zeta),$$

qui ne sauroit donner pour μ une fonction des trois variables x, y et ζ que dans le cas où les équations différentielles

$$\alpha d\mu - \gamma dx - \gamma' dy = 0, \qquad \beta dx + \beta' dy + \alpha d\zeta = 0,$$

pourroient dériver de deux équations primitives seulement.

Le cercle vicieux dans lequel nous sommes tombés en cherchant le facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle à trois variables, a également lieu pour celles qui n'en renferment que deux. On a vu (n°. 554) que le facteur relatif à $Mdx + Ndy = 0$, étoit donné par l'équation

$$M\frac{d\zeta}{dy} - N\frac{d\zeta}{dx} + \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)\zeta = 0,$$

qui se change en $Mq - Np + R\zeta = 0$, si l'on fait

$\frac{d\zeta}{dx} = p$, $\frac{d\zeta}{dy} = q$, $\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = R$, et dépend par conséquent des suivantes

$$M dx + N dy = 0 ; \qquad N d\zeta + R\zeta dx = 0 ;$$

mais malheureusement la première, qui ne contient que les variables x et y, est précisément la proposée.

730. La grange a fait voir que l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre qui passent le premier degré, par rapport aux coefficiens différentiels, pouvoit se ramener à celle des équations de ce degré. En combinant cette remarque avec la méthode du n°. 726, Charpit, jeune homme que la mort a enlevé au moment où ses talens donnoient les plus grandes espérances, est parvenu à réduire l'intégration de l'équation différentielle partielle du premier ordre contenant m variables, à celle d'un pareil nombre d'équations différentielles entre $m+1$ variables. Je vais faire connoître son travail qui fut présenté à l'académie des sciences, mais qui n'a point vu le jour.

L'équation différentielle partielle du premier ordre à trois variables la plus générale, n'offrant qu'une relation entre les quantités x, y, ζ, p et q, ne détermine que l'expression de l'un des coefficiens p ou q en fonction de l'autre et des variables x, y et ζ; lorsqu'on a substitué cette expression dans l'équation $d\zeta = p\,dx + q\,dy$, il n'y a plus qu'à faire en sorte que cette dernière, qui renferme encore un coefficient différentiel indéterminé, puisse dériver d'une seule équation primitive; car sans cela il seroit absurde de supposer que p et q fussent les coefficiens différentiels d'une fonction de deux variables. Pour que cette condition soit remplie, il faut que l'équation (A) du n°. 701, c'est-à-dire,

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{d\zeta} - p\frac{dq}{d\zeta} = 0 , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

devienne identique.

Si l'on y met la valeur de l'un des coefficiens p ou q, celle de p, par exemple, et que par le moyen de cette valeur on chasse $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{d\zeta}$, elle deviendra une équation différentielle partielle du premier ordre par rapport à q; mais, en vertu de l'équation proposée, p est une fonction de q, x, y, ζ, et q étant lui-même une fonction de x, y, ζ,

il

il faudra changer $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{dz}$ en $\frac{d(p)}{dy}$ et $\frac{d(p)}{dz}$ (n°. 70) : on aura

$$\frac{d(p)}{dy} = \frac{dp}{dq}\frac{dq}{dy} + \frac{dp}{dy}, \qquad \frac{d(p)}{dz} = \frac{dp}{dq}\frac{dq}{dz} + \frac{dp}{dz}.$$

Par le moyen de ces expressions, l'équation (A) qui ne doit déterminer que q, et dans laquelle par conséquent les variables x, y, z, doivent être regardées comme indépendantes, deviendra

$$\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dq}\frac{dq}{dy} + \left(p - q\frac{dp}{dq}\right)\frac{dq}{dz} = \frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz} \ldots\ldots (1);$$

et faisant $\frac{dq}{dx} = N$, $\frac{dq}{dy} = P$, $\frac{dq}{dz} = Q$, on aura

$$dq = N dx + P dy + Q dz,$$

$$N - \frac{dp}{dq}P + \left(p - q\frac{dp}{dq}\right)Q = \frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz}.$$

Par la méthode du n°. 726, on fera dépendre cette dernière équation des suivantes,

$$\left.\begin{aligned} dy + \frac{dp}{dq}dx &= 0 \\ dz - \left(p - q\frac{dp}{dq}\right)dx &= 0 \\ dq - \left(\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz}\right)dx &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2);$$

il ne s'agira plus que de tirer de celles-ci trois équations primitives de la forme $T = a$, $U = b$, $V = c$, pour avoir $V = \varphi(T, U)$, intégrale de l'équation (1) qui doit donner la valeur de q.

Cette valeur contiendra une fonction arbitraire de deux quantités; mais on n'a pas besoin d'une expression si générale du coefficient q; il suffit d'en avoir une qui contienne une constante arbitraire, parce que si on la substitue dans $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, après en avoir chassé p, au moyen de la proposée, qu'on intégre l'équation résultante qui ne sera plus qu'entre les variables x, y, z et leurs différentielles, on obtiendra une équation primitive renfermant deux constantes arbitraires, et dans laquelle on pourra, par un procédé semblable à celui du n°. 725, introduire une fonction arbitraire.

731. Supposons en effet que $Z = 0$ soit l'intégrale de l'équation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, et que Z contienne les deux constantes a et b; en les faisant varier, on aura

$$dZ = \frac{dZ}{dx}dx + \frac{dZ}{dy}dy + \frac{dZ}{dz}dz + \frac{dZ}{da}da + \frac{dZ}{db}db :$$

ce résultat ne sauroit satisfaire à $dz - p\,dx - q\,dy = 0$; que dans l'hypothèse de

$$\frac{dZ}{da}da + \frac{dZ}{db}db = 0 ;$$

mais a et b étant absolument indéterminés, on peut faire $b = \varphi(a)$; φ désignant une fonction quelconque, et il viendra $\frac{dZ}{da} + \frac{dZ}{db}\varphi'(a) = 0$.

Si l'on élimine a et b entre les trois équations

$$b - \varphi(a) = 0 , \qquad Z = 0 , \qquad \frac{dZ}{da} + \frac{dZ}{db}\varphi'(a) = 0 ;$$

la résultante satisfera encore à l'équation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, qui doit avoir lieu quels que soient a et b, et sera par conséquent l'intégrale de la proposée, on peut la représenter par le systême des deux équations $(Z) = 0$, $\frac{d(Z)}{da} = 0$,

en désignant par (Z) ce que devient Z, lorsqu'on y met $\varphi(a)$ au lieu de b.

En général, si $Z = 0$ désigne l'intégrale d'une équation différentielle partielle du premier ordre, entre m variables, et que Z renferme $m-1$ constantes arbitraires, on en pourra tirer l'intégrale générale, qui doit contenir une fonction arbitraire de $m-1$ quantités différentes. Soit Z une fonction de t, u, x, y, z et des constantes a, b, c, e; sa différentielle, prise en faisant varier a, b, c, e, en même tems que t, u, x, y, z, sera

$$dz = \frac{dZ}{dt}dt + \frac{dZ}{du}du + \frac{dZ}{dx}dx + \frac{dZ}{dy}dy + \frac{dZ}{dz}dz + \frac{dZ}{da}da + \frac{dZ}{db}db + \frac{dZ}{dc}dc + \frac{dZ}{de}de ,$$

et satisfera encore à l'équation différentielle partielle proposée, si

$$\frac{dZ}{da}da + \frac{dZ}{db}db + \frac{dZ}{dc}dc + \frac{dZ}{de}de = 0.$$

On remplira cette condition en établissant entre les quantités indéterminées a, b, c, e, la relation $e = \varphi(a, b, c)$, dans laquelle φ désigne une fonction quelconque, et qui donne $de = \varphi' da + \varphi'' db + \varphi''' dc$; l'équation ci-dessus se changera en

$$\left(\frac{dZ}{da} + \frac{dZ}{de}\varphi'\right)da + \left(\frac{dZ}{db} + \frac{dZ}{de}\varphi''\right)db + \left(\frac{dZ}{dc} + \frac{dZ}{de}\varphi'''\right)dc = 0;$$

et se partagera dans les suivantes

$$\frac{dZ}{da} + \frac{dZ}{de}\varphi' = 0, \quad \frac{dZ}{db} + \frac{dZ}{de}\varphi'' = 0, \quad \frac{dZ}{dc} + \frac{dZ}{de}\varphi''' = 0;$$

qui serviront, conjointement avec l'équation $e = \varphi(a, b, c)$, à éliminer les quantités a, b et c, de l'équation $Z = 0$: l'intégrale générale de la proposée sera donc exprimée par le système des quatre équations

$$(Z) = 0, \quad \frac{d(Z)}{da} = 0, \quad \frac{d(Z)}{db} = 0, \quad \frac{d(Z)}{dc} = 0,$$

(Z) étant ce que devient Z quand on y substitue $\varphi(a, b, c)$ au lieu de e.

732. En se rappelant maintenant ce qui a été dit, n°. 721, sur les équations à trois variables, et ce que montre évidemment l'intégrale $V = \varphi(T, U)$: que chacune des équations $T = a$, $U = b$, $V = c$, satisfait en particulier à l'équation différentielle partielle d'où cette intégrale est tirée, on en conclura que pour avoir une valeur de q qui satisfasse à l'équation (1) et qui ne contienne qu'une constante arbitraire, il suffit de déduire des équations (2) une seule équation intégrable. Si l'on pouvoit en obtenir deux contenant en même tems les quantités x, y, z et q, l'élimination de q entre leurs intégrales, conduiroit à une équation primitive entre x, y, z et deux constantes arbitraires, par le moyen de laquelle on trouveroit l'intégrale générale de la proposée, suivant le procédé du numéro précédent. Enfin, quand on aura les trois équations primitives $T = a$, $U = b$, $V = c$, on en éliminera le coefficient q et l'une des constantes arbitraires, pour parvenir à une résultante qui ne renferme que les variables x, y, z et deux constantes.

Il est à propos de remarquer que la seconde des équations (2), se change en $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, lorsqu'on en chasse $\frac{dp'}{dq}$ par le moyen de la première.

Appliquons ce qui précède à l'équation $p=(qy+z)^2$; nous en tirerons

$$\frac{dp}{dq}=2(qy+z)y\,,\quad \frac{dp}{dy}=2(qy+z)q\,;\quad \frac{dp}{dz}=2(qy+z)\,;$$

les équations (2) deviendront

$$dy+2(qy+z)y\,dx=0\,,$$
$$dz+(qy+z)(qy-z)\,dx=0\,,$$
$$dq-4(qy+z)q\,dx=0\,,$$

et éliminant $qy+z$ entre la première et la dernière, nous trouverons $2q\,dy+y\,dq=0$, d'où nous tirerons $qy^2=a$. Cette seule intégrale nous suffira, et en substituant la valeur de q qu'elle donne, dans l'équation $dz-(qy+z)^2dx-q\,dy=0$, qui résulte de $dz-p\,dx-q\,dy=0$, lorsqu'on en chasse p, nous trouverons $dz-\left(\frac{a}{y^2}+z\right)^2dx-\frac{a}{y^2}dy=0$, équation qui s'intégre facilement par le procédé du n°. 703, en supposant d'abord que x soit constant; car on trouvera successivement

$$dz-\frac{a}{y^2}dy=0\,,\quad z+\frac{a}{y}=C\,,\quad \left(\frac{a}{y}+z\right)^2dx=dC\,,$$
$$C^2dx=dC\,,\quad x=-\frac{1}{C}-b\,,\quad C=-\frac{1}{x+b}\,;$$

et enfin $z+\frac{a}{y}+\frac{1}{x+b}=0$, ou $(zy+a)(x+b)+y=0$.

Faisant $b=\varphi(a)$ et différentiant ensuite par rapport à a seulement, on aura pour l'intégrale de la proposée le systême des deux équations

$$(zy+a)[x+\varphi(a)]+y=0\,,$$
$$x+\varphi(a)+(zy+a)\varphi'(a)=0\,,$$

entre lesquelles il faudra éliminer a, ce qui ne pourra s'effectuer qu'après qu'on aura donné à la fonction φ une forme déterminée.

Nous allons passer en revue les cas dans lesquels on peut intégrer les équations différentielles partielles du premier ordre, et nous commencerons par ceux où, comme dans l'exemple ci-dessus, les équations (2) conduisent immédiatement à une équation du premier ordre qui soit intégrable.

733. Pour que l'équation $dq-\left(\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}\right)dx=0$ soit intégrable indépendamment des deux autres, il faut que la proposée soit

elle qu'il en résulte $\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}=f(q,x)$, f désignant une fonction donnée. En considérant dans cette dernière équation p comme une fonction des variables q, x, y et z, et en l'intégrant sous ce point de vue, par la règle du n°. 726, elle fera connoître la forme que doit avoir la proposée pour tomber dans le cas actuel. Or on en tire $\frac{dp}{dy}=f(q,x)-q\frac{dp}{dz}$; substituant dans

$$dp=\frac{dp}{dq}dq+\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz;$$

on parvient aux équations

$$dq=0,\quad dx=0,\quad dz-q\,dy=0,\quad dp-f(q,x)dy=0;$$

dont les intégrales sont

$$q=a,\quad x=b,\quad z-qy=c,\quad p-yf(q,x)=c,$$

et qui donnent par conséquent $p-yf(q,x)=\varphi(q,x,z-qy)$; φ étant une fonction quelconque des trois quantités q, x et $z-qy$.

Quand on aura en effet $p=yf(q,x)+\varphi(q,x,z-qy)$; l'équation $dz-p\,dx-q\,dy=0$ deviendra $dz-y\,dx\,f(q,x)-dx\,\varphi(q,x,z-qy)-q\,dy=0$, de laquelle il faudra éliminer q ou x, au moyen de l'intégrale de l'équation $dq-dx\,f(q,x)=0$. Celle-ci changera la précédente en

$$dz-y\,dq-q\,dy-dx\,\varphi(q,x,z-qy)=0;$$

si l'on intégre cette dernière par rapport à z et à y, d'après la méthode du n°. 703, on aura

$$z-qy=C,\quad dC=dx\,\varphi(q,x,C),$$

en remplaçant $z-qy$ par C; et comme, en vertu de l'équation $dq-dx\,f(q,x)=0$, q est une fonction de x seul, la quantité C sera aussi une fonction de la même variable: l'équation $z-qy=C$ contiendra deux constantes arbitraires, l'une venant de q et l'autre de C, et conduira par conséquent à l'intégrale générale de la proposée.

En réduisant l'expression générale de p à cette forme particulière, $p=\varphi(q,x,z-qy)$, c'est-à-dire, en supposant $f(q,x)=0$, on a $dq=0$, ce qui donne $q=a$; ; et C s'obtiendra par le moyen de $dC=dx\,\varphi(a,x,C)$.

Si la fonction φ ne contient pas $z-qy$, on aura $C=\int dx\,\varphi(a,x)+b$

et par conséquent $z - ay - \int dx\,\varphi(a,x) = b$; posant $b = \downarrow(a)$, et différentiant par rapport à a, on formera ce système d'équations:

$$\left.\begin{aligned} z - ay - \int dx\,\varphi(a,x) &= \downarrow(a) \\ -y - \int dx\,\frac{d\varphi(a,x)}{da} &= \downarrow'(a) \end{aligned}\right\},$$

qui représentera l'intégrale de la proposée $p = \varphi(q,x)$.

Lorsque l'on a seulement $p = \varphi(q)$, les fonctions $\varphi(a,x)$ et $\frac{d\varphi(a,x)}{da}$ se réduisent à $\varphi(a)$ et $\varphi'(a)$; il en résulte

$$\left.\begin{aligned} z - ay - x\varphi(a) &= \downarrow(a) \\ -y - x\varphi'(a) &= \downarrow'(a) \end{aligned}\right\},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé, n°. 342, pour les surfaces développables, dont $p = \varphi(q)$ représente l'équation différentielle partielle du premier ordre.

734. Si l'on tiroit de la proposée la valeur de q, au lieu de celle de p, il faudroit changer p en q, x en y, et réciproquement, dans les équations (2); l'équation $dq - \left(\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz}\right)dx = 0$, seroit remplacée par $dp - \left(\frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz}\right)dy = 0$, et en opérant comme ci-dessus, on trouvera que celle-ci prendra la forme $dq - dy\,f(p,y) = 0$, lorsque la proposée donnera pour q une expression comprise dans la formule $q = f(p,y) + \varphi(p,y,z - px)$.

735. Si l'on élimine dx entre la première et la dernière des équations (2), on obtiendra

$$\frac{dp}{dq}dq + \left(\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz}\right)dy = 0,$$

équation qui sera intégrable lorsqu'on aura

$$\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz} = \frac{dp}{dq}f(q,y),$$

parce qu'elle deviendra dans ce cas $dq + f(q,y)\,dy = 0$. En tirant de cette dernière l'expression p, comme on l'a fait à l'égard de celle du n°. 733, on trouvera

$dx = 0$, $\quad dq + f(q,y)\,dy = 0$, $\quad dz - q\,dy = 0$, $\quad dp = 0$.

Soit $T=b$, l'intégrale de $dq+f(q,y)dy=0$; on s'en servira pour éliminer y de l'équation $d\zeta-qdy=0$, qui donne $\zeta-\int qdy=v$, et on aura par conséquent $p=\phi(x, T, \zeta-\int qdy)$. Il faut observer que la fonction f étant indéterminée, la fonction T le sera pareillement.

Toute équation différentielle partielle qui donnera pour p une valeur de cette forme, s'intégrera facilement; car en faisant $\zeta-\int qdy=v$, ou $d\zeta-qdy=dv$, dans $d\zeta=pdx+qdy$, il vient $dv=pdx$; substituant la valeur de p, on trouve $dv=dx\phi(x, T, v)$, équation qui ne renferme que deux variables, savoir: v et x, puisqu'en vertu de $dq+f(q, y)dy=0$ on a $T=b$, et dont l'intégrale contiendra deux constantes arbitraires (*).

(*) Legendre, qui a traité le sujet dont nous nous occupons ici, dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences en 1787, a remarqué que si l'on vouloit vérifier l'expression générale de p, c'est-à-dire, s'assurer qu'elle rend l'équation $d\zeta=pdx+qdy$ intégrable, il faudroit trouver, dans l'hypothèse où q et y seroient indépendans, les coefficiens différentiels de l'intégrale $\int qdy$, dans laquelle on a supposé la fonction T constante. Voici comment on résout cette question: soit $w=\int Wdy$, W étant une fonction quelconque de q et de y; il est évident que pour compléter l'intégrale $\int Wdy$, lorsqu'on l'aura obtenue, il faudra y ajouter une fonction arbitraire de la quantité prise pour constante; on aura par conséquent $w=\int Wdy+\downarrow(T)$, et en différentiant, il viendra

$$dw=Wdy+dy(T)\left[\frac{dT}{dq}dq+\frac{dT}{dy}dy\right].$$

On ne sauroit regarder, dans cette expression, x et y comme indépendans, à moins qu'elle ne soit une différentielle exacte, ce qui exige qu'on ait

$$\frac{dW}{dq}+\frac{dT}{dy}\frac{d.\downarrow'(T)}{dq}=\frac{dT}{dq}\frac{d.\downarrow'(T)}{dy};$$

condition qui servira à déterminer la fonction $\downarrow'(T)$. Il n'est pas nécessaire néanmoins d'obtenir cette fonction pour l'objet que nous avons en vue; il suffit de prendre $\frac{d\int qdy}{dq}=\downarrow'(T)\frac{dT}{dq}$, $\frac{d\int qdy}{dy}=q+\downarrow'(T)\frac{dT}{dy}$, et d'observer que T étant l'intégrale de $dq+f(q, y)dy=0$, il en résulte $\frac{dT}{dy}-f(q, y)\frac{dT}{dq}=0$, pour rendre l'équation $\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{d\zeta}=\frac{dp}{dq}f(q, y)$ identique, au moyen de la valeur de p.

En préparant les équations (2), d'après la remarque du n°. précédent, et en opérant comme ci-dessus, on trouveroit que l'équation différentielle partielle, qui conduiroit à une valeur de la forme $q=\varphi(y, T, z-\int p\,dx)$, T désignant l'intégrale de $dp+f(p,x)dx=0$, est intégrable.

736. Si on élimine dx entre la dernière et l'avant-dernière des équations (2), on trouvera

$$dq\left(p-q\frac{dp}{dq}\right)-dz\left(\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}\right)=0,$$

et cette équation deviendra intégrable lorsqu'elle pourra se réduire à $dq-f(q,z)dz=0$, ce qui suppose qu'on ait

$$\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}=\left(p-q\frac{dp}{dq}\right)f(q,z),$$

d'où on tirera

$$dx=0,\ dq-f(q,z)\,dy=0,\ dz-q\,dy=0,\ dp-pf(q,z)dy=0.$$

La dernière équation se mettra sous la forme $q\,dp-p\,dq=0$, quand on y aura remplacé $f(q,z)\,dy$ par sa valeur $\frac{dq}{q}$, tirée de la seconde; et $dz-q\,dy=0$, aura pour intégrale $y-\int\frac{dz}{q}=q$, en chassant q ou z par le moyen de celle de $dq-f(q,z)dz=0$, que nous désignerons par $T=c$: nous conclurons de là que

$$\frac{p}{q}=\varphi\left(x, y-\int\frac{dz}{q}, T\right),\ \text{ou}\ p=q\varphi\left(x, y-\int\frac{dz}{q}, T\right).$$

Pour intégrer les équations différentielles partielles qui auront cette forme, on fera $y-\int\frac{dz}{q}=v$, ce qui donnera $dy=dv+\frac{dz}{q}$, et réduira l'équation $dz=p\,dx+q\,dy$, à $p\,dx+q\,dv=0$, ou à $\frac{p}{q}dx+dv=0$, ou enfin à $dx\,\varphi(x,v,c)+dv=0$, en mettant pour $\frac{p}{q}$ sa valeur, et en changeant $y-\int\frac{dz}{q}$ en v, et T en c.

Ce cas se déduiroit du précédent en permutant les variables y et z entr'elles, c'est-à-dire, en prenant y pour la fonction cherchée, et en considérant x et z comme les deux variables indépendantes; on auroit

auroit ainsi $dy=\frac{dz}{q}-\frac{p}{q}dx$, au lieu de $dz=pdx+qdy$, et si l'on changeoit y en z et z en y, q en $\frac{1}{q}$ et p en $-\frac{p}{q}$, dans l'expression de p du n°. cité, on retomberoit sur celle que nous venons d'obtenir.

Il est facile de voir que si l'équation différentielle partielle proposée ne renfermoit que p, q et z, on auroit pour déterminer q l'équation $$dq\left(p-q\frac{dp}{dq}\right)-\frac{dp}{dz}qdz=0,$$ dans laquelle il n'entreroit que les deux variables q et z. En l'écrivant comme il suit, $pdq-q\left(\frac{dp}{dq}dq+\frac{dp}{dz}dz\right)=0$, on en tire sur-le-champ $pdq-qdp=0$, d'où $p=aq$; combinant cette équation avec $dz=pdx+qdy$, on obtient $\frac{dz}{q}=dy+adx$, et en mettant aq à la place de p, dans la proposée, on en déduira une expression de q en fonction de z, qui rendra $\frac{dz}{q}$ intégrable: on aura donc $\int\frac{dz}{q}=y+ax+b$, a et b étant deux constantes arbitraires.

737. Après avoir épuisé les cas dans lesquels la valeur de q, qui satisfait à l'équation (1) du n°. 730, ne dépend que d'une seule équation du premier ordre, nous allons indiquer rapidement ceux où elle peut s'obtenir en intégrant conjointement deux équations du premier ordre à trois variables, ou, ce qui est la même chose, une équation du second ordre à deux variables. Ces derniers cas sont un peu plus simples que le cas général, parce que, pour parvenir dans celui-ci à une équation intégrable, il faut éliminer deux des quatre variables q, x, y et z, entre les équations (2), et qu'alors la résultante s'élève au troisième ordre.

1°. La première et la dernière des équations (2) ne seront intégrables conjointement qu'autant qu'elles ne renfermeront que les trois variables q, x et y; il faudra donc qu'on ait $$\frac{dp}{dq}=f(x,y,q),\quad \frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}=F(x,y,q).$$

La première de celles-ci étant intégrée par rapport à p, donne $p=\int dq\, f(x,y,q)+\varphi(x,y,z)$, et les variables x et y doivent être regardées comme constantes sous le signe $\int$ (n°. 717); la fonction $f(x,y,q)$ étant arbitraire, pour abréger, nous écrirons $f(x,y,q)$, au lieu de $\int dp\, f(x,y,q)$, et nous aurons par là $p=f(x,y,q)+\varphi(x,y,z)$. Nous prendrons ensuite les valeurs de $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{dz}$, pour les substituer dans la seconde équation de condition rapportée ci-dessus, qui deviendra

$$\frac{d.f(x,y,q)}{dy}+\frac{d.\varphi(x,y,z)}{dy}+q\frac{d.\varphi(x,y,z)}{dz}=F(x,y,q);$$

dans cet état elle ne peut avoir lieu, en supposant que les variables x, y, z et q soient indépendantes, ainsi que cela doit être dans l'expression de p, que quand le premier membre est, comme le second, une fonction sans z, condition de laquelle il résulte

$$\frac{d^2\varphi(x,y,z)}{dy\,dz}+q\frac{d^2\varphi(x,y,z)}{dz^2}=0.$$

Quoique cette équation soit entre des coefficiens différentiels du second ordre, elle peut cependant se traiter comme celles du premier; car en faisant $\frac{d.\varphi(x,y,z)}{dz}=u$, elle se change en $\frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz}=0$, et conduit par son intégration à $u=\downarrow(q,x,z-qy)$, ou $\frac{d.\varphi(x,y,z)}{dz}=\downarrow(x)$ seulement, parce que φ ne contient pas q : on a donc $\varphi(x,y,z)=z\downarrow(x)$, et par conséquent $p=f(x,y,q)+z\downarrow(x)$. Voilà sous quelle forme doit se présenter la valeur de p, dans le cas que nous traitons; on voit qu'elle peut contenir z sous certaines conditions.

Si cette variable ne s'y trouvoit point, on auroit alors $p=f(x,y,q)$; c'est donc à ce cas que se rapporte toute équation différentielle partielle du premier ordre entre p, q, x et y, et son intégration ne présentera pas plus de difficulté que celle de l'équation où p et q ne montent qu'au premier degré, parce que $dz-p\,dx-q\,dy=0$, deviendra immédiatement intégrable par la substitution des valeurs de p et de q.

2°. La dernière et l'avant-dernière des équations (2), combinées ensemble, deviendront intégrables conjointement si l'on a

$$p - q\frac{dp}{dq} = f(q, x, \zeta), \quad \frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{d\zeta} = F(q, x, \zeta),$$

parce qu'elles ne renfermeront alors que les trois variables q, x et ζ. La première de ces conditions donne $\frac{p}{q} = f(q, x, \zeta) + \varphi(x, y, \zeta)$ ou $p = f(q, x, \zeta) + q\varphi(x, y, \zeta)$, en changeant la fonction f; en opérant comme dans le cas précédent, on verra qu'il faut, pour satisfaire à la seconde condition, que $\frac{d.\varphi(x, y, \zeta)}{dy} + q\frac{d.\varphi(x, y, \zeta)}{d\zeta}$ soit une fonction sans y, ou que

$$\frac{d^2\varphi(x, y, \zeta)}{dy^2} + q\frac{d^2\varphi(x, y, \zeta)}{dy\,d\zeta} = 0:$$

on tirera de là $\varphi(x, y, \zeta) = y\downarrow(x)$, en observant que φ ne contient pas q, et on aura enfin $p = f(q, x, \zeta) + q\,y\downarrow(x)$.

Il est à propos de remarquer que ce cas peut se déduire du précédent, en prenant y pour la fonction cherchée, x et ζ pour les variables indépendantes, et en écrivant y au lieu de ζ, et ζ au lieu de y, $\frac{1}{q}$ et $-\frac{p}{q}$ au lieu de q et de p, d'après la formule $dy = \frac{d\zeta}{q} - \frac{p}{q}dx$.

3°. Si l'on chasse dx des trois équations (2), les résultantes

$$\frac{dp}{dq}d\zeta + \left(p - q\frac{dp}{dq}\right)dy = 0, \quad \frac{dp}{dq}dq + \left(\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{d\zeta}\right)dy = 0,$$

seront intégrables conjointement, lorsque l'on aura

$$p - q\frac{dp}{dq} = \frac{dp}{dq}f(q, y, \zeta) \qquad \frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{d\zeta} = \frac{dp}{dq}F(q, y, \zeta).$$

Sans recourir à l'intégration, on peut découvrir facilement la forme de la valeur de p, qui satisfait à ces dernières équations; et avec un peu d'attention, on verra que si p contient x, ce ne peut être que dans un facteur indépendant des autres variables q, y, ζ, et qui, se trouvant commun aux quantités p, $\frac{dp}{dq}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{d\zeta}$, disparoîtra par la division: on prendra donc

$p = \varphi(x)\downarrow(q, y, z)$, et on observera que la fonction $\downarrow$ étant liée avec la fonction f, restera indéterminée comme elle.

Si on substitue cette expression de p dans $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, on obtiendra l'équation $dz - q\,dy - dx\,\varphi(x)\downarrow(q, y, z) = 0$, dans laquelle on pourra changer $dx\,\varphi(x)$ en dx', et faire par conséquent $x' = \int \varphi(x)\,dx$, sans nuire à la généralité du résultat, puisque q ne contient pas x; on aura alors $dx' = \frac{dz - q\,dy}{\downarrow(q, y, z)}$, équation dont le second membre deviendra, après la substitution de la valeur de q, une différentielle exacte par rapport aux variables y et z.

738. Il sera possible, dans beaucoup de cas, de ramener aux formes déterminées précédemment, des équations qui paroissent s'y refuser, en employant des transformations convenables. Nous allons en faire connoître une des plus remarquables, qui conduit à l'intégration d'une classe d'équations très-étendue, et qui nous sera d'un grand secours lorsque nous passerons aux équations différentielles partielles du second ordre.

Cette transformation s'effectue en faisant $px + qy - z = v$, ce qui donne $dv = x\,dp + y\,dq$. Si on parvenoit à rendre la fonction $x\,dp + y\,dq$ intégrable, la fonction $p\,dx + q\,dy$ le deviendroit en même-tems, puisqu'en intégrant par parties on a $z = px + qy - \int(x\,dp + y\,dq)$. Dans le cas où l'équation proposée seroit entre les quantités x, y, p, q et $px + qy - z$ ou v, on pourroit, en vertu de l'équation $dv = x\,dp + y\,dq$, regarder p et q comme les variables indépendantes, v comme la fonction cherchée, x et y comme ses coefficiens différentiels.

Il suit de là, que l'équation $x + y\,f(p, q, v) = F(p, q, v)$ s'intégreroit par la méthode du n°. 726, et dépendroit immédiatement des équations $dq - dp\,f(p, q, v) = 0$, $dv - dp\,F(p, q, v) = 0$. Si l'on parvenoit à tirer de celles-ci des équations primitives, $U = a$, $V = b$, on éliminoit p et q entre ces dernières et la proposée; la résultante contenant deux constantes arbitraires, donneroit l'intégrale générale demandée. (n°. 731).

739. Au lieu d'éliminer entre les équations (2) pour en déduire une résultante qui ne renferme plus que deux variables, on peut

chercher à les intégrer conjointement suivant le procédé du n°. 656. Si on multiplie la première par μ, la seconde par μ', la troisième par μ'', et qu'on les ajoute ensuite, on trouvera

$$\mu''dq+\mu'd\zeta+\mu dy-\left(\mu''\frac{dp}{dy}+\mu''q\frac{dp}{d\zeta}+\mu'p-\mu'q\frac{dp}{dq}-\mu\frac{dp}{dq}\right)dx=0;$$

il faudra déterminer μ, μ' et μ'', de manière que le premier membre de cette équation soit une différentielle exacte; mais comme cette détermination surpasse de beaucoup les forces actuelles de l'analyse, renversons la question ainsi que l'a fait Legendre dans le mémoire dont cet article et les deux précédens sont extraits: supposons que $\theta=a$ soit l'intégrale de l'équation ci-dessus, et cherchons la forme de l'équation différentielle partielle qui répond à cette intégrale. En faisant

$$d\theta=\alpha\,dq+\beta\,d\zeta+\gamma\,dy+\delta\,dx=0,$$

et en comparant avec la proposée, nous aurons

$$\alpha=\mu'',\quad \beta=\mu',\quad \gamma=\mu$$

$$\delta=-\left(\mu''\frac{dp}{dy}+\mu''q\frac{dp}{d\zeta}+\mu'p-\mu'q\frac{dp}{dq}-\mu\frac{dp}{dq}\right);$$

les trois premières équations donneront immédiatement les facteurs μ, μ' et μ'': nous emploierons la dernière à déterminer p au moyen des variables q, x, y et ζ, et en prenant la valeur $\frac{dp}{dy}$; nous trouverons par la méthode du n°. 726, que pour cela il faut intégrer les quatre équations

$$\left.\begin{aligned}\mu''dq+(\mu'q+\mu)dy&=0,\\ dx&=0,\\ d\zeta-qdy&=0,\\ \mu''dp+(\delta+\mu'p)dy&=0,\end{aligned}\right\}\text{ équivalentes à }\left\{\begin{aligned}d\theta&=0;\\ dx&=0;\\ d\zeta-qdy&=0,\\ \alpha dp+(\delta+\beta p)dy&=0,\end{aligned}\right.$$

car si l'on met dans la première pour μ, μ' et μ'' leurs valeurs, elle se changera en $\alpha dq+\beta q dy+\gamma dy=0$, et sera ce que devient $d\theta=0$, en vertu de la seconde et de la troisième. Cela posé, on tirera de $\theta=a$ une valeur de q en x, y et ζ, qui rendra l'équation $d\zeta-qdy=0$ intégrable, parce que $dx=0$ donne $x=b$. Soit $\lambda=c$, l'équation primitive dont elle dérive; on pourra, au moyen de cette équation et de $\theta=a$, chasser q et ζ de α, β, δ;

l'équation $\alpha\,dp + (\delta + \beta p)\,dy = 0$ aura alors pour intégrale

$$p = e^{-\int \frac{\beta dy}{\alpha}} \left(-\int e^{\int \frac{\beta dy}{\alpha}} \delta dy + e\right) \text{ (n°. 547)},$$

et comme lorsqu'on a $S = a$, $T = b$, $U = c$, $V = e$, il s'ensuit $V = \varphi(S, T, U)$; cela revient à faire $e = \varphi(a, b, c)$: mettant donc cette expression pour e, en substituant au lieu de a, b, c, leurs valeurs, θ, x et λ, on aura

$$p = e^{-\int \frac{\beta dy}{\alpha}} \left(-\int e^{\int \frac{\beta dy}{\alpha}} \delta dy + \varphi(\theta, x, \lambda)\right).$$

En prenant θ à volonté, on déduira de cette expression une infinité d'équations différentielles partielles, pour lesquelles on aura une valeur de q contenant une constante arbitraire, et qui comprendront celles que nous avons obtenues dans les articles précédens.

Soit pour exemple $\theta = \frac{qx\zeta}{y} = a$; on aura dans ce cas

$$d\theta = \frac{x\zeta}{y} dq + \frac{qx}{y} d\zeta - \frac{qx\zeta}{y^2} dy + \frac{q\zeta}{y} dx$$

$$\alpha = \frac{x\zeta}{y}, \beta = \frac{qx}{y}, \gamma = -\frac{qx\zeta}{y^2}, \delta = \frac{q\zeta}{y}, \quad q = \frac{ay}{x\zeta};$$

l'équation $d\zeta - q\,dy = 0$ deviendra $\zeta d\zeta - \frac{ay\,dy}{x} = 0$; l'on en tirera $\zeta^2 - \frac{ay^2}{x} = \lambda = c$, $\zeta = \frac{\sqrt{cx + ay^2}}{x^{\frac{1}{2}}}$, et on trouvera ensuite

$$q = \frac{ay}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{cx + ay^2}}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{ay}{cx + ay^2}, \quad \frac{\delta}{\alpha} = \frac{ay}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{cx + ay^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans celle de p, et effectuant les intégrations, on obtiendra $p = (cx + ay)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{ay^2}{2x^{\frac{3}{2}}} + e\right)$;

x étant regardé comme constant, on peut prendre $ex^{\frac{1}{2}} - \frac{cx}{2x^{\frac{3}{2}}}$, au lieu de e, et comme $cx + ay^2 = x\zeta^2$; $\zeta^2 - \frac{ay^2}{x} = \zeta^2 - qy\zeta$ il viendra enfin

$$p = -\frac{\zeta}{2x} + \frac{1}{\zeta}\varphi\left(\frac{qx\zeta}{y}, x, \zeta^2 - qy\zeta\right).$$

Lorsque l'on tombera sur une équation différentielle partielle de cette forme, la valeur $q = \frac{ay}{x\zeta}$, et celle de p qui en est la conséquence, rendront intégrable l'équation $d\zeta - pdx - qdy = 0$.

740. On facilite beaucoup dans un grand nombre de cas l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, à trois variables, en les partageant en deux autres par l'introduction d'une quantité indéterminée, ainsi qu'on va le voir dans les exemples suivans :

1°. Soit l'équation $f(p, x) = F(q, y)$; si on fait $f(p, x) = \omega$, on aura en même-tems $F(q, y) = \omega$, et on déduira de ces deux équations $p = f_{,}(\omega, x)$, $q = F_{,}(\omega, y)$, $f_{,}$ et $F_{,}$ étant des fonctions inverses de celles que désignent f et F. L'équation $d\zeta = pdx + qdy$ deviendra

$$d\zeta = dx\, f_{,}(\omega, x) + dy\, F_{,}(\omega, y);$$

en y regardant ω comme constant, elle pourra s'intégrer, et donnera

$$\zeta = \int dx\, f_{,}(\omega, x) + \int dy\, F_{,}(\omega, y) + C:$$

supposant ensuite $C = \varphi(\omega)$ et faisant varier ω seulement, on aura pour l'intégrale de la proposée, le système des équations

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \int dx\, f_{,}(\omega, x) + \int dy\, F_{,}(\omega, y) + \varphi(\omega) \\ 0 &= \int dx\, \frac{d.f_{,}(\omega, x)}{d\omega} + \int dy\, \frac{d.F_{,}(\omega, y)}{d\omega} + \varphi'(\omega) \end{aligned}\right\} (*).$$

(*) On parviendroit au même résultat, en supposant ω variable, dans l'équation $d\zeta = dx\, f_{,}(\omega, x) + dy F_{,}(\omega, y)$; car si on représente par P et par Q les intégrales $\int dx\, f_{,}(\omega, x)$, $\int dy F_{,}(\omega, y)$, prises en n'ayant égard qu'aux variables x et y, on trouvera, en intégrant par parties,

$\zeta = P + Q - \int\left(\frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega}\right)d\omega$ (n°. 361), et il faudra, pour que la dernière intégration indiquée puisse s'effectuer, que $\frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega} = \varphi'(\omega)$, d'où il s'ensuivra $\int\left(\frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega}\right)d\omega = \varphi(\omega)$: on aura donc

$$\zeta + \varphi(\omega) = P + Q, \qquad \varphi'(\omega) = \frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega}.$$

Il suffit souvent de substituer dans l'équation $d\zeta = pdx + qdy$, la valeur de p

2°. Pour traiter l'équation $p=q^n XYZ$, dans laquelle X, Y et Z, ne renferment respectivement que x, y et z, on fera $p=\omega X Z'$; il en résultera $q^n YZ=\omega Z'$, d'où on tirera $q=\sqrt[n]{\frac{\omega Z'}{YZ}}$, et si, pour abréger, on fait $\frac{Z'}{Z}=Z''^n$, il viendra $q=Z''\sqrt[n]{\frac{\omega}{Y}}$: substituant dans $dz=p\,dx+q\,dy$, on trouvera

$$dz=\omega X Z'\,dx+Z''dy\sqrt[n]{\frac{\omega}{Y}}.$$

Il est facile de voir qu'on ramenera ce cas au précédent, en prenant $Z''=Z'$; car on aura alors $\frac{dz}{Z'}=\omega X\,dx+\omega^{\frac{1}{n}}\frac{dy}{\sqrt[n]{Y}}$, et par conséquent $\int\frac{dz}{Z'}=\omega\int X\,dx+\omega^{\frac{1}{n}}\int\frac{dy}{\sqrt[n]{Y}}+C$:

---

ou de q, tirée immédiatement de la proposée, et d'intégrer ensuite le résultat par parties. Lorsqu'on a, par exemple, $p=f(q)$, il vient $dz=dx\,f(q)+q\,dy$, et on trouve $z=x f(q)+qy-\int(x f'(q)+y)dq$; et comme l'intégration indiquée ne peut s'effectuer qu'en prenant $x f'(q)+y=\varphi'(q)$, il en résulte

$$z+\varphi(q)=x f(q)+qy, \qquad \varphi'(q)=x f'(q)+y.$$

Soit encore $p=y f(q,x)+F(q,x)$; on aura dans ce cas

$$dz=y\,dx f(q,x)+dx F(q,x)+q\,dy:$$

en intégrant d'abord par rapport à y, on trouvera

$$z=qy-\int[y\,dq-y\,dx f(q,x)-dx F(q,x)]$$
$$=qy-\int y[dq-dx f(q,x)]+\int dx F(q,x).$$

Si on fait $\mu[dq-dx f(q,x)]=dv$, μ étant le facteur propre à rendre le premier membre différentielle exacte, et que l'on tire de l'intégrale une valeur de q en v et x, on changera $\int dx F(q,x)$ en $\int dx F_1(v,x)$; désignant par V ce que devient cette dernière intégrale, lorsqu'elle est prise par rapport à x seul, on obtiendra $\int dx F_1(v,x)=V-\int\frac{dV}{dv}dv$, et $z=qy+V-\int\left(\frac{y}{\mu}-\frac{dV}{dv}\right)dv$, d'où l'on déduira $\frac{y}{\mu}-\frac{dV}{dv}=\varphi'(v)$, et par conséquent

$$z+\varphi(v)=qy+V, \qquad \varphi'(v)=\frac{y}{\mu}-\frac{dV}{dv}$$

résultat dans lequel on doit remplacer q par sa valeur en v et x. C'est à peu près ainsi qu'Euler, à qui l'on doit le Calcul intégral des différentielles partielles, traite les équations du premier ordre à trois variables.

la

la fonction inconnue Z' sera déterminée par l'équation

$Z' = Z'' = \sqrt[n]{\frac{Z'}{Z}}$, qui donnera $Z' = \frac{1}{\sqrt[n-1]{Z}}$.

La décomposition de l'équation proposée en deux autres, peut s'effectuer d'une infinité de manières, et il n'est pas toujours aussi aisé que dans les exemples ci-dessus, de tomber sur celle qui mène à des expressions de p et de q, propres à rendre l'équation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ intégrable, en n'ayant égard qu'aux variables x, y et z; mais en combinant ce moyen avec celui de Charpit, on en déduira de nouvelles transformations des équations (1) et (2). En effet, lorsqu'on exprime les valeurs de p et de q en x, y, z et en ω, on trouve, en faisant tout varier, des différentielles complètes de la forme

$$dp = A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,d\omega$$
$$dq = A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz + D'\,d\omega$$

et si l'on regarde ω comme une fonction inconnue de x, y et z, on aura

$$\frac{d(p)}{dx} = A + D\frac{d\omega}{dx},\quad \frac{d(p)}{dy} = B + D\frac{d\omega}{dy},\quad \frac{d(p)}{dz} = C + D\frac{d\omega}{dz},$$

$$\frac{d(q)}{dx} = A' + D'\frac{d\omega}{dx},\quad \frac{d(q)}{dy} = B' + D'\frac{d\omega}{dy},\quad \frac{d(q)}{dz} = C' + D'\frac{d\omega}{dz},$$

ce qui changera l'équation (1) en cette autre :

$$B - A' + Cq - Cp + D\frac{d\omega}{dy} - D'\frac{d\omega}{dx} + (Dq - D'p)\frac{d\omega}{dz} = 0;$$

dont il faudra tirer une valeur de ω avec une constante arbitraire. Ayant obtenu cette valeur, on la substituera dans celles de p et de q, et par ce moyen $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ deviendra susceptible de dériver d'une seule équation primitive.

741. Charpit a étendu sa méthode aux équations différentielles partielles contenant un nombre quelconque de variables ; mais l'application que j'en vais faire, aux équations à quatre variables, suffira pour en donner une idée complète. Soit donc, $dz = n\,du + p\,dx + q\,dy$, et supposons que l'équation proposée renferme les variables u, x, y, z, et les coefficiens différentiels n, p et q;

on prendra la valeur de l'un de ces derniers, de n par exemple; et lorsqu'on l'aura substituée dans $dz - n\,du - p\,dx - q\,dy = 0$, il suffira de déterminer les deux autres p et q, de manière que cette équation puisse dériver d'une seule équation primitive entre u, x, y et z, ce qui exige que les équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dn}{dx} - \frac{dp}{du} + p\frac{dn}{dz} - n\frac{dp}{dz} = 0 \\ &\frac{dn}{dy} - \frac{dq}{du} + q\frac{dn}{dz} - n\frac{dq}{dz} = 0 \\ &\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{dz} - p\frac{dq}{dz} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

soient satisfaites (n°. 710). Les deux premières donneront l'expression de p et celle de q, lorsqu'on en aura chassé n au moyen de l'équation proposée; mais ces expressions ne pourront être admises que lorsqu'elles rendront la troisième équation identique. Avant d'appliquer ici le procédé du n°. 726, il faut observer que n étant, en vertu de l'équation proposée, une fonction des quantités x, y, z, p et q, sa différentielle complète doit avoir la forme

$$dn = A\,du + B\,dx + C\,dy + D\,dz + E\,dp + F\,dq,$$

et qu'on doit par conséquent changer $\frac{dn}{dx}$, $\frac{dn}{dy}$, $\frac{dn}{dz}$, en

$$\frac{d(n)}{dx} = B + E\frac{dp}{dx} + F\frac{dq}{dx}$$

$$\frac{d(n)}{dy} = C + E\frac{dp}{dy} + F\frac{dq}{dy}$$

$$\frac{d(n)}{dz} = D + E\frac{dp}{dz} + F\frac{dq}{dz}.$$

Substituant ces valeurs dans les deux premières équations (1), on trouvera

$$B + Dp - \frac{dp}{du} + E\frac{dp}{dx} + (Ep - n)\frac{dp}{dz} + F\left(\frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz}\right) = 0,$$

$$C + Dq - \frac{dq}{du} + F\frac{dq}{dy} + (Fq - n)\frac{dq}{dz} + E\left(\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz}\right) = 0;$$

résultats auxquels on pourra donner la forme

$$\left.\begin{aligned} B+Dp-\frac{dp}{du}+E\frac{dp}{dx}+F\frac{dp}{dy}+(Ep+Fq-n)\frac{dp}{d\zeta}=0\\ C+Dq-\frac{dq}{du}+E\frac{dq}{dx}+F\frac{dq}{dy}+(Ep+Fq-n)\frac{dq}{d\zeta}=0 \end{aligned}\right\}(2),$$

en observant que d'après la troisième équation (1)

$$\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{d\zeta}=\frac{dq}{dx}+p\frac{dq}{d\zeta}.$$

Si l'on regarde, dans la première de ces équations, les coefficiens q et n, et dans la seconde les coefficiens p et n, comme des fonctions données en u, x, y, ζ, et que l'on en tire les valeurs de $\frac{dp}{du}$, et de $\frac{dq}{du}$, pour les substituer dans

$$dp=\frac{dp}{du}du+\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{d\zeta}d\zeta,$$

$$dq=\frac{dq}{du}du+\frac{dq}{dx}dx+\frac{dq}{dy}dy+\frac{dq}{d\zeta}d\zeta,$$

suivant le procédé du n°. 726, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} dp-(B+Dp)du=&\ \frac{dp}{dx}(dx+Edu)+\frac{dp}{dy}(dy+Fdu)\\ &+\frac{dp}{d\zeta}(d\zeta+(Ep+Fq-n)du)\\ dq-(C+Dq)du=&\ \frac{dq}{dx}(dx+Edu)+\frac{dq}{dy}(dy+Fdu)\\ &+\frac{dq}{d\zeta}(d\zeta+(Ep+Fq-n)du) \end{aligned}\right\}\cdots(3);$$

d'où l'on conclura que, pour arriver aux équations primitives qui doivent donner p et q, il faut intégrer ces deux systêmes d'équations

$$\left.\begin{aligned} dx+Edu=0\\ dy+Fdu=0\\ d\zeta+(Ep+Fq-n)du=0\\ dp-(B+Dp)du=0 \end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned} dx+Edu=0\\ dy+Fdu=0\\ d\zeta+(Ep+Fq-n)du=0\\ dq-(C+Dq)du=0 \end{aligned}\right\};$$

mais les trois premières équations de chaque système étant les mêmes; il suffira d'intégrer conjointement les cinq équations

$$\left.\begin{aligned} dx + E\,du &= 0 \\ dy + F\,du &= 0 \\ dz + (Ep + Fq - n)\,du &= 0 \\ dp - (B + Dp)\,du &= 0 \\ dq - (C + Dq)\,du &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

qui comprennent entr'elles les six variables u, x, y, z, p et q, opération qu'on peut toujours supposer possible (n°. 652).

Nous observerons qu'il n'est pas toujours nécessaire d'employer pour p et q, les expressions les plus générales qui puissent satisfaire aux équations (2). On atteindra le but qu'on se propose dès qu'on aura une valeur de p et une de q, contenant chacune une constante arbitraire, et satisfaisant à la troisième équation (1); parce que ces valeurs, jointes à celles de n, rendront possible l'intégration de l'équation $dz - n\,du - p\,dx - q\,dy = 0$, par une seule équation primitive renfermant une troisième constante arbitraire, et de laquelle on déduira l'intégrale générale de la proposée, d'après le procédé du n°. 731.

Mais lorsque les valeurs de p et de q, obtenues seulement avec des constantes, ne satisferont pas à la troisième équation (1), il faudra recourir aux expressions générales, et chercher à déterminer par cette équation les fonctions arbitraires qu'elles renferment.

742. Eclaircissons ce qui précède, par quelques applications: 1°. soient N, P, Q, trois fonctions données, contenant respectivement n et u, p et x, q et y; proposons-nous d'intégrer l'équation $N = \mathrm{f}(P, Q)$, f désignant une fonction quelconque. En faisant

$$d.\mathrm{f}(P, Q) = \mathrm{f}'\,dP + \mathrm{f}''\,dQ,$$

nous aurons

$$\frac{dN}{du}du + \frac{dN}{dn}dn = \mathrm{f}'\left(\frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dp}dp\right) + \mathrm{f}''\left(\frac{dQ}{dy}dy + \frac{dQ}{dq}dq\right);$$

posant $\frac{dN}{dn} = N'$, nous trouverons

$$A=-\frac{1}{N'}\frac{dN}{du}, \qquad B=\frac{f'}{N'}\frac{dP}{dx}, \qquad C=\frac{f''}{N'}\frac{dQ}{dy},$$

$$D=0, \qquad E=\frac{f'}{N'}\frac{dP}{dp}, \qquad F=\frac{f''}{N'}\frac{dQ}{dq},$$

et les équations (4) deviendront

$$N'dx+f'\frac{dP}{dp}du=0, \qquad N'dy+f''\frac{dQ}{dq}du=0;$$

$$N'dz+\left(f'p\frac{dP}{dp}+f''q\frac{dQ}{dq}\right)du-N'n\,du=0,$$

$$N'dp-f'\frac{dP}{dx}du=0, \qquad N'dq-f''\frac{dQ}{dy}du=0.$$

Si par le moyen des deux premières on élimine du des deux dernières, il viendra

$$\frac{dP}{dp}dp+\frac{dP}{dx}dx=0; \qquad \frac{dQ}{dq}dq+\frac{dQ}{dy}dy=0,$$

équations dont les intégrales sont $P=a$, $Q=b$, et donnent par conséquent $N=f(a,b)$. La résolution des trois équations

$$P=a, \quad Q=b, \quad N=f(a,b)$$

pourra conduire à des résultats de la forme

$$n=N_{,}, \quad p=P_{,}, \quad q=Q_{,},$$

et dans lesquels il faut observer que $N_{,}$ est une fonction de a, b et u; $P_{,}$ une fonction de a et x, $Q_{,}$ une fonction de b et y. Les valeurs de p et de q satisfont évidemment à la troisième équation (1), et l'équation $dz=ndu+pdx+qdy$ se changera par la substitution de ces valeurs en cette autre, $dz=N_{,}du+P_{,}dx+Q_{,}dy$, dont chaque terme pourra s'intégrer à part, en sorte qu'on aura

$$z+c=\int N_{,}du+\int P_{,}dx+\int Q_{,}dy,$$

équation qui renferme trois constantes arbitraires, savoir: a, b et c.

Supposons, pour donner un exemple, que

$$N=nU, \qquad P=pX, \qquad Q=qY,$$

U, X et Y ne renfermant respectivement que u, x et y; les équations $P=a$, $Q=b$, $N=f(a,b)$, donneront alors

$$n=\frac{f(a,b)}{U}, \quad p=\frac{a}{X}, \quad q=\frac{b}{Y};$$

d'où l'on tirera

$$\zeta + c = \mathrm{f}(a, b)\int \frac{du}{U} + a\int \frac{dx}{X} + b\int \frac{dy}{Y}.$$

Si l'on fait $c = \varphi(a, b,)$, $dc = \varphi' da + \varphi'' db$, et qu'on différentie l'équation ci-dessus par rapport à a, et par rapport à b, l'intégrale générale de la proposée sera exprimée par le systême des équations

$$\left.\begin{aligned} \zeta + \varphi(a, b) &= \mathrm{f}(a, b)\int \frac{du}{U} + a\int \frac{dx}{X} + b\int \frac{dy}{Y} \\ \varphi' &= \mathrm{f}'\int \frac{du}{U} + \int \frac{dx}{X} \\ \varphi'' &= \mathrm{f}''\int \frac{du}{U} + \int \frac{dy}{Y} \end{aligned}\right\} (\text{n°. } 731).$$

Nous observerons qu'en imitant le procédé du n°. 740, on peut partager toute équation différentielle partielle à quatre variables, en trois autres, en y introduisant deux indéterminées, et tirer ensuite des valeurs de n, p, q, en fonction de ces indéterminées. D'après cette méthode, on feroit immédiatement $P = a$, $Q = b$, dans l'équation $N = \mathrm{f}(P, Q)$, d'où il résulteroit $N = \mathrm{f}(a, b)$; et on auroit comme ci-dessus $n = N_{,}$, $p = P_{,}$, $q = Q_{,}$.

2°. On pourroit chercher quelle doit être l'équation différentielle partielle proposée pour que les équations (4) conduisent à deux équations immédiatement intégrables, et faire dans le cas actuel, comme dans celui de trois variables, l'énumération des formes qui se prêtent le plus facilement à l'intégration. Nous ne donnerons qu'un seul exemple de cette recherche; et nous supposerons que les deux dernieres des équations (4), savoir:

$$dp - (B + Dp)\,du = 0,$$
$$dq - (C + Dq)\,du = 0,$$

soient de la forme

$$dp - \mathrm{f}(p, q, u)\,du = 0,$$
$$dp - \mathrm{f}_{,}(p, q, u)\,du = 0;$$

nous aurons par conséquent

$$B + Dp = \mathrm{f}(p, q, u),$$
$$C + Dq = \mathrm{f}_{,}(p, q, u).$$

Tirant de ces équations les valeurs de B et de C pour les substituer dans l'expression de dn, (n°. précéd.) nous obtiendrons

$$dn - dx\,f(p,q,u) - dy\,f_1(p,q,u)$$
$$= A\,du + D(d\zeta - p\,dx - q\,dy) + E\,dp + F\,dq,$$

résultat dont l'intégration dépend de celle de

$$du = 0, \quad dp = 0, \quad dq = 0,$$
$$d\zeta - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dn - dx\,f(p,q,u) - dy\,f_1(p,q,u) = 0;$$

et qui donne par conséquent

$$n - x\,f(p,q,u) - y\,f_1(p,q,u) = \varphi(u,p,q,\zeta - p\,x - q\,y),\ (\text{n°. } 726),$$

puisque d'après les trois premières équations, u, p et q, peuvent être regardés comme constans dans les deux dernières.

Quand la proposée sera comprise dans cette forme, on fera $\zeta - p\,x - q\,y = v$, ce qui donnera $d\zeta - p\,dx - q\,dy - x\,dp - y\,dq = dv$, et changera l'équation $d\zeta - n\,du - p\,dx - q\,dy = 0$ en

$$dv = n\,du - x\,dp - y\,dq,$$

qui deviendra $dv = du\,\varphi(u,p,q,v)$, après qu'on y aura mis la valeur de n et celles de dp et de dq. Cette équation ne renfermera que deux variables ; car il suit de l'hypothèse établie, que p et q sont des fonctions de u, que les fonctions $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{d\zeta}$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dy}$, $\frac{dq}{d\zeta}$, sont nulles, et que par conséquent la troisième équation (1) est satisfaite.

3°. Il existe pour les équations à quatre variables une transformation analogue à celle du n°. 738, et qui procure les mêmes avantages. Si l'on fait $\zeta - n\,u - p\,x - q\,y = v$, on aura $dv = u\,dn + x\,dp + y\,dq$, à cause de $d\zeta = n\,du + p\,dx + q\,dy$; et il suit de-là que dans toute équation de la forme $f(n,p,q,v,u,x,y) = 0$, on pourra traiter n, p, q comme des variables indépendantes, et v comme une fonction cherchée dont les coefficiens différentiels sont u, x, y. Quand cette équation sera

$$u + x\,f_1(n,p,q,v) + y\,f_2(n,p,q,v) = f_3(n,p,q,v),$$

on lui appliquera immédiatement la méthode du n°. 726, puisque les coefficiens différentiels u, x et y n'y passeront pas le premier degré ; et si l'on parvient à trois équations primitives, contenant chacune une constante arbitraire, on les combinera avec la proposée, pour

éliminer u, p et q, et on déduira de la résultante, par le procédé du n°. 731, l'intégrale cherchée.

Quand la proposée est seulement de la forme $f(n, p, q, v) = 0$, on y peut supposer n, p, q, constans; parce que dans cette hypothèse l'équation $dv = udn + xdp + ydq$ donne aussi v constant: on prendra donc alors $n = \varphi(p, q)$ φ désignant une fonction arbitraire, et l'intégrale cherchée sera représentée par le systême des équations

$$V = 0, \qquad \frac{dV}{dp} = 0, \qquad \frac{dV}{dq} = 0,$$

dans lesquelles $V = f[\varphi(p, q), p, q, v]$.

De l'intégration des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au premier.

743. Lorsqu'on passe au second ordre, les coefficiens différentiels de cet ordre sont au nombre de trois pour une fonction de deux variables, et une équation différentielle partielle du même ordre peut exprimer en général une relation entre les variables indépendantes, la fonction cherchée, et ses coefficiens différentiels, tant du second ordre que du premier.

L'analogie fait voir que l'équation générale d'un ordre quelconque, et d'un nombre quelconque de variables, doit renfermer les variables indépendantes, la fonction cherchée, et ses coefficiens différentiels depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre dont elle est inclusivement. Avant de nous occuper de ce cas général, nous en ferons connoître quelques-uns qui s'abaissent à des ordres inférieurs à celui dont ils sont.

1°. Toute équation à trois variables qui sera de la forme

$$f\left\{x, y, \frac{d^n z}{dy^n}, \frac{d^{n+1} z}{dx\,dy^n}, \frac{d^{n+2} z}{dx^2 dy^n}, \ldots\ldots \frac{d^{n+m} z}{dx^m dy^n}\right\} = 0,$$

quoique de l'ordre $m+n$, se ramène sur-le-champ à une équation de l'ordre m, en faisant $\frac{d^n z}{d^n y} = v$, parce qu'elle se change en

$$f\left\{x, y, v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2 v}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^m v}{dx^m}\right\} = 0.$$

On y doit supposer alors y constant, puisque tous les coefficiens différentiels de v qu'elle contient sont relatifs à x, et elle peut par conséquent se traiter par les méthodes du chapitre précédent, comme

ne

ne contenant que deux variables, savoir : x et ν ; mais il est évident que pour donner à l'expression de ν toute la généralité dont elle est susceptible, il sera nécessaire de remplacer les m constantes arbitraires qu'elle doit renfermer, par autant de fonctions arbitraires de la variable y prise d'abord pour constante. Ayant obtenu ν, on remontera à z, par le moyen de l'équation $\frac{d^n z}{dy^n} = \nu$; dans laquelle on doit maintenant regarder x comme constant, et qui, devenant par là une équation de l'ordre n entre deux variables seulement, pourra se traiter par la méthode du chapitre précédent, en observant néanmoins de changer en fonctions arbitraires de x, les n constantes arbitraires introduites par cette nouvelle intégration.

2°. Les équations de la forme

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^nz}{dx^n}\right) = 0,$$

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots\ldots \frac{d^nz}{dy^n}\right) = 0,$$

peuvent toujours être traitées immédiatement, comme s'il n'y entroit que deux variables, savoir : x et z dans la première, y et z dans la seconde ; et après l'intégration, on substituera aux constantes, dans l'une des fonctions de y, et dans l'autre des fonctions de x.

Les équations du second ordre,

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + P\frac{dz}{dx} = Q, \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} + P\frac{dz}{dy} = Q;$$

dans lesquelles P et Q ne contiennent que x et y, se rapportent à la première forme. En faisant $\frac{dz}{dx} = \nu$, la première devient $\frac{d\nu}{dy} + P\nu = Q$, équation du premier dégré et du premier ordre, par rapport aux variables ν et y, et dont l'intégrale est

$$\nu = e^{-\int P dy}\left(\int e^{\int P dy} Q dy + C\right) \qquad (\text{n°. } 547).$$

Si l'on met pour ν sa valeur $\frac{dz}{dx}$, et qu'on change C en $\varphi(x)$; on aura $\frac{dz}{dx} = e^{-\int P dy}\left[\int e^{\int P dy} Q dy + \varphi(x)\right]$; en intégrant cette

fois, par rapport à z et à x seuls, on trouvera

$$z = \int dx\, e^{-\int P dy} \left[\int e^{\int P dy}\, Q dy + \varphi(x) \right] + \psi(y);$$

en traitant de même la seconde équation, on arriveroit à

$$z = \int dy\, e^{-\int P dx} \left[\int e^{\int P dx}\, Q dx + \varphi_1(y) \right] + \psi(x).$$

Lorsqu'on aura $P = 0$, les résultats ci-dessus se réduiront

$$z = \int dx \int Q\, dy + \int dx\, \varphi(x) + \psi(y),$$

dans un cas, et dans l'autre à

$$z = \int dy \int Q\, dx + \int dy\, \varphi(y) + \psi(x);$$

mais comme la fonction φ est arbitraire, on écrira simplement

$$z = \int dx \int Q\, dy + \phi(x) + \psi(y),$$
$$z = \int dy \int Q\, dx + \varphi(y) + \psi(x).$$

Nous observerons que ces deux cas ne dépendent que de l'intégration des fonctions d'une seule variable, et ont été traités sous ce point de vue, dans le n°. 520.

On a des exemples de la seconde forme générale dans les deux équations

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} = Q; \qquad \frac{d^2 z}{dy^2} + P\frac{dz}{dy} = Q,$$

lorsqu'on suppose que P et Q renferment x, y et z; la première doit être traitée comme une équation du premier degré et du second ordre, entre les variables x et z, les constantes arbitraires dues à son intégration seront des fonctions de y : on opérera de la même manière sur la deuxième, par rapport aux variables y et z, et on changera les constantes arbitraires en fonctions de x. Pour ne donner que le cas le plus simple, nous réduirons les équations proposées à $\frac{d^2 z}{dx^2} = Q$, $\frac{d^2 z}{dy^2} = Q$,

et nous supposerons que Q ne contienne que x et y; les formules du n°. 486 nous donneront immédiatement

$$z = \int dx \int Q\, dx + Cx + C', \quad z = \int dy\, Q \int dy + Cy + C',$$

d'où nous conclurons

$$z = \int dx \int Q\, dx + x\varphi(y) + \psi(y), \quad z = \int dy \int Q dy + y\varphi(x) + \psi(x).$$

744. Il existe des formes analogues pour les équations différentielles particlles d'un nombre quelconque de variables; dans le cas où il

y en aura quatre, savoir : u, x, y, ζ, l'équation correspondante à la première du n°. précédent, sera

$$f\left\{u, x, y, \frac{d^{n+p}\zeta}{dx^n dy^p}, \frac{d^{n+p+1}\zeta}{du\,dx^n dy^p}, \ldots\ldots \frac{d^{m+n+p}\zeta}{du^m dx^n dy^p}\right\} = 0,$$

qu'on changera en

$$f\left\{u, x, y, v, \frac{dv}{du}, \ldots\ldots \frac{d^m v}{du^p}\right\} = 0,$$

si l'on fait $\frac{d^{n+p}\zeta}{dx^n dy^p} = v$, et qu'il faudra intégrer en regardant x et y comme constans. On remplacera par conséquent les constantes arbitraires par des fonctions arbitraires de x et de y, et en désignant par $f_{,}(u, x, y, v) = 0$ le résultat, on aura l'équation $f_{,}\left(u, x, y, \frac{d^{n+p}\zeta}{dx^n dy^p}\right) = 0$, dans laquelle on supposera $\frac{d^p\zeta}{dy^p} = w$; et qui deviendra $f_{,}\left(u, x, y, \frac{d^n w}{dx^n}\right) = 0$. Dans cette nouvelle équation, u et y devront être traités comme constans, et les constantes arbitraires remplacées par des fonctions de u et de y; si l'on en tire l'équation primitive $f_{,,}(u, x, y, w) = 0$, il ne restera plus pour avoir ζ, qu'à intégrer, par rapport à y et à ζ, l'équation $f_{,,}\left(u, x, y, \frac{d^p\zeta}{dy^p}\right) = 0$, en observant de changer les constantes arbitraires en fonctions arbitraires de u et de x. On voit par ce procédé, que l'intégrale de la proposée renfermera trois espèces de fonctions arbitraires; les unes ne contenant que x et y; les autres que u et y, et les dernières que u et x, et c'est en effet ce que nous avons trouvé dans le n°. 529, en intégrant l'équation $\frac{d^3 u}{dx\,dy\,d\zeta} = V$, comprise dans celle que nous venons de considérer.

Les équations de la forme

$$f\left\{u, x, y, \zeta, \frac{d\zeta}{du}, \frac{d^2\zeta}{du^2}, \ldots\ldots \frac{d^m\zeta}{du^m}\right\} = 0,$$

qui ne contiennent que les coefficiens différentiels de ζ, pris par rapport à une seule des variables indépendantes, ne sont au fond

que des équations différentielles à deux variables, dans l'intégrale desquelles il faut changer les constantes arbitraires en fonctions des variables supposées constantes.

745. Passons maintenant aux équations à trois variables, qui renferment tous les coefficiens différentiels de l'ordre le plus élevé, et commençons par celle du second, en supposant que les coefficiens différentiels de cet ordre soient au premier degré seulement. Pour simplifier les calculs, nous ferons usage des dénominations établies n°. 713, savoir :

$$dz = p\,dx + q\,dy$$
$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy$$
$$d^2z = dp\,dx + dq\,dy = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

L'équation différentielle partielle du second ordre et à trois variables, considérée dans le cas général, ne peut donner que l'expression de l'un des coefficiens r, s, t, en fonction des deux autres et des quantités p, q, x, y, z; et en la combinant avec les équations $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$, on ne pourra éliminer que deux de ces coefficiens. Représentons la proposée par $Rr + Ss + Tt = V$, et supposons que les quantités R, S, T et V renferment, d'une manière quelconque, x, y, z, p et q; substituons-y les valeurs de r et de t, tirées des équations $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$, et qui sont

$$r = \frac{dp - s\,dy}{dx}, \qquad t = \frac{dq - s\,dx}{dy};$$

nous trouverons

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = s\,(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2),$$

équation dans laquelle le coefficient s reste indéterminé, et qui seroit satisfaite indépendamment de ce coefficient, si l'on avoit en même-tems

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = 0$$
$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0.$$

En résolvant la dernière de ces équations par rapport à dy, on en déduira deux autres qui pourront être représentées par $dy - m'\,dx = 0$, $dy - m''\,dx = 0$, m' et m'' étant les racines de l'équation $Rm^2 - Sm + T = 0$. Si l'on met successivement chacune des valeurs de dy dans $R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = 0$;

on aura les deux systêmes d'équations :

$$\left.\begin{aligned} dy - m'dx &= 0 \\ Rm'dp + Tdq - Vm'dx &= 0 \end{aligned}\right\}(1), \qquad \left.\begin{aligned} dy - m''dx &= 0 \\ Rm''dp + Tdq - Vm''dx &= 0 \end{aligned}\right\}(2),$$

à chacun desquels il faudra joindre l'équation $dz = pdx + qdy$, qui exprime la relation qu'ont avec la fonction z, les coefficiens p et q ; et si on peut tirer de l'un quelconque de ces systêmes, deux équations primitives de la forme $M = a$, $N = b$, l'intégrale première de la proposée sera $N = \varphi(M)$, φ désignant une fonction arbitraire. Cette proposition est analogue à celle du n°. 721, et se prouve de la même manière.

Par les équations $M = a$, $N = b$, on a d'abord

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dp}dp + \frac{dM}{dq}dq = 0,$$

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \frac{dN}{dp}dp + \frac{dN}{dq}dq = 0;$$

mettant dans ces dernières, au lieu de dz, sa valeur tirée de $dz = pdx + qdy$, et celles de dy et de dq, tirées des équations (1), on trouvera

$$\left(\frac{dM}{dx} + m'\frac{dM}{dy} + (p + qm')\frac{dM}{dz} + \frac{Vm'}{T}\frac{dM}{dq}\right)dx + \left(\frac{dM}{dp} - \frac{Rm'}{T}\frac{dM}{dq}\right)dp = 0,$$

$$\left(\frac{dN}{dx} + m'\frac{dN}{dy} + (p + qm')\frac{dN}{dz} + \frac{Vm'}{T}\frac{dN}{dq}\right)dx + \left(\frac{dN}{dp} - \frac{Rm'}{T}\frac{dN}{dq}\right)dp = 0,$$

équations qui doivent être identiques, et qui se partagent par conséquent dans les suivantes :

$$\frac{dM}{dx} + m'\frac{dM}{dy} + (p + qm')\frac{dM}{dz} + \frac{Vm'}{T}\frac{dM}{dq} = 0,$$

$$\frac{dM}{dp} - \frac{Rm'}{T}\frac{dM}{dq} = 0,$$

$$\frac{dN}{dx} + m'\frac{dN}{dy} + (p + qm')\frac{dN}{dz} + \frac{Vm'}{T}\frac{dN}{dq} = 0;$$

$$\frac{dN}{dp} - \frac{Rm'}{T}\frac{dN}{dq} = 0.$$

L'équation $N=\varphi(M)$ étant différentiée, donne $dN=\varphi'(M)\,dM$, ou

$$\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz+\frac{dN}{dp}dp+\frac{dN}{dq}dq=$$
$$\varphi'(M)\left\{\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\frac{dM}{dp}dp+\frac{dM}{dq}dq\right\};$$

si l'on substitue dans cette dernière les valeurs de

$\frac{dM}{dx}$, $\frac{dM}{dp}$, $\frac{dN}{dx}$, $\frac{dN}{dp}$, prises dans les quatre précédentes,

et qu'on change dz en $pdx+qdy$, on obtiendra

$$\left(\frac{dN}{dy}+q\frac{dN}{dz}\right)(dy-m'dx)+\frac{1}{T}\frac{dN}{dq}(Rm'dp+Tdq-Vm'dx)=$$
$$\varphi'(M)\left\{\left(\frac{dM}{dy}+q\frac{dM}{dz}\right)(dy-m'dx)+\frac{1}{T}\frac{dM}{dq}(Rm'dp+Tdq-Vm'dx)\right\},$$

ce qui revient à $Rm'dp+Tdq-Vm'dx=\omega(dy-m'dx)$,

en faisant $\omega=-\dfrac{\frac{dN}{dy}+q\frac{dN}{dz}-\varphi(M)\left(\frac{dM}{dy}+q\frac{dM}{dz}\right)}{\frac{1}{T}\left(\frac{dN}{dq}-\varphi(M)\frac{dM}{dq}\right)}$.

Si l'on remet $rdx+sdy$ et $sdx+tdy$, pour dp et dq, et que l'on égale à zéro ce qui multiplie chacune des différentielles indépendantes dx et dy, on obtiendra

$$Rm'r+Ts-Vm'=-\omega m', \qquad Rm's+Tt=\omega,$$

d'où $Rm'r+Rm'^2s+Ts+Tm't-Vm'=0$, en chassant ω; enfin l'équation (A) donnant $Rm'^2=Sm'-T$ réduit la précédente à $m'^2(Rr+Ss+Tt-V)=0$, et l'on rentre ainsi dans la proposée.

746. Le théorême que nous venons de démontrer n'a pas la même généralité que celui du n°. 721, car il faut bien remarquer que les équations (1) peuvent renfermer à la fois les cinq variables x, y, z, p et q, et qu'en y joignant même l'équation $dz=pdx+qdy$, on ne sauroit parvenir, par l'élimination, qu'à une résultante contenant trois variables, laquelle par conséquent ne pourroit dériver d'une seule équation primitive, que sous certaines conditions (n°. 714). On se tromperoit néanmoins si l'on concluoit de là que quand les conditions dont on vient de parler ne sont pas remplies, l'équation différentielle partielle proposée ne peut elle-

même dériver d'une seule équation primitive. Nous reviendrons sur ce sujet après que nous aurons montré le parti qu'on peut tirer du théorême précédent, et des analogues qu'il a dans tous les ordres.

747. Considérons d'abord l'équation $Ar + Bs + Ct = V$, dans laquelle A, B et C sont constans, et V est une fonction de x et de y. L'équation (A) devient pour ce cas $Am^2 - Bm + C = 0$; ses racines m' et m'' sont constantes, et les deux systêmes d'équation (1) et (2) donnent par l'intégration,

$$\left.\begin{array}{r} y - m'x = a \\ Am'p + Cq - m'\int V dx = b \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y - m''x = a' \\ Am''p + Cq - m''\int V dx = b' \end{array}\right\} :$$

l'intégrale $\int V dx$ ne dépend que d'une seule variable, parce qu'on peut chasser y de V, au moyen de sa valeur prise dans la première équation de chaque systême. On aura donc en même tems ces deux intégrales premières de la proposée,

$$Am'p + Cq - m'\int V dx = \varphi(y - m'x),$$
$$Am''p + Cq - m''\int V dx = \downarrow(y - m''x);$$

et en intégrant l'une quelconque de ces équations, on arrivera à l'intégrale seconde. Prenons la première, par exemple, elle donne $p = -\frac{C}{Am'}q + \frac{1}{A}\int V dx + \varphi(y - m'x)$; on peut pour simplifier, mettre m'' au lieu de $\frac{C}{Am'}$, puisqu'en vertu de l'équation (A) $m'm'' = \frac{C}{A}$; en substituant dans $dz = pdx + qdy$, on trouvera

$$dz - \frac{dx}{A}\int V dx - dx\varphi(y - m'x) = q(dy - m''dx):$$

les équations à intégrer seront donc

$$dy - m''dx = 0, \qquad dz - \frac{dx}{A}\int V dx - dx\varphi(y - m'x) = 0.$$

On tire de l'une, $y - m''x = a'$, ce qui change l'autre en

$$dz - \frac{dx}{A}\int V dx - dx\varphi[a + (m'' - m')x] = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z - \frac{1}{A}\int dx \int V dx - \frac{1}{m'' - m'}\varphi(a + (m'' - m')x) = b',$$

et devient $\zeta - \frac{1}{A}\int dx \int V dx - \varphi(y - m'x) = b'$, lorsqu'on remet pour a sa valeur, en observant que φ est une fonction arbitraire, dont les dérivées sont arbitraires aussi, et dans laquelle on peut comprendre telle quantité constante qu'on voudra. Il faut aussi remarquer que pour obtenir $\int dx \int V dx$, on doit intégrer une première fois par rapport à x, en substituant au lieu de y sa valeur, tirée de l'équation $y - m'x = a$, comme il a été dit plus haut ; mais lorsqu'on sera parvenu au résultat, on remettra au lieu de a sa valeur $y - m'x$, et avant d'effectuer la seconde intégration, on changera y en $a' + m''x$, ainsi que l'exige l'équation $y - m''x = a'$ trouvée en dernier lieu. En général, quand on aura plusieurs de ces intégrations successives à effectuer, on ne pourra jamais employer à leur simplification que les équations qui doivent avoir lieu en même-tems qu'elles. Avec ces attentions, l'intégrale seconde de l'équation proposée, $Ar + Bs + Ct = V$, sera

$$\zeta - \frac{1}{A}\int dx \int V dx = \varphi(y - m'x) + \downarrow(y - m''x).$$

Prenons pour exemple l'équation $r + Bs + Ct = xy$; nous aurons $A = t$; l'équation (A) deviendra $m^2 - Bm + C = 0$; nous pourrons par conséquent mettre $m' + m''$ pour B et $m'm''$ pour C: les intégrales premières donneront alors

$$p + m''q - \tfrac{1}{6}(3x^2y - m'x^3) = \varphi(y - m'x),$$
$$p + m'q - \tfrac{1}{6}(3x^2y - m''x^3) = \downarrow(y - m''x);$$

l'intégrale seconde sera

$$\zeta - \frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{4.6}(m' + m'')x^4 = \varphi(y - m'x) + \downarrow(y - m''x).$$

Il est évident que les valeurs de p et de q, tirées des deux intégrales premières combinées ensemble, doivent rendre l'équation $d\zeta = pdx + qdy$ différentielle exacte; on pourra donc obtenir l'intégrale seconde toutes les fois que l'on sera parvenu aux deux intégrales premières, et pour cela on n'aura qu'à substituer les valeurs de p et de q dans $d\zeta = pdx + qdy$, et à intégrer ensuite cette équation suivant le procédé du n°. 703.

En

En appliquant cette méthode à l'exemple ci-dessus, on trouvera

$$q = \tfrac{1}{6}x^3 + \frac{\psi'(y-m''x) - \varphi'(y-m'x)}{m'-m''}$$

$$p = \frac{1}{6}(3x^2y - (m'+m'')x^3) + \frac{m'\varphi'(y-m'x) - m''\psi'(y-m''x)}{m'-m''},$$

si l'on met φ' et ψ' pour φ et ψ. Pour intégrer $d\zeta = pdx + qdy$, on regardera d'abord x comme constante, et on aura $\zeta = \int q dy + C$; multipliant la valeur de q par dy, on obtiendra

$$\int q\,dy = \tfrac{1}{6}x^3y + \frac{\psi(y-m''x) - \varphi(y-m'x)}{m'-m''};$$

différentiant ensuite ζ par rapport à x, il en résultera

$$p = \tfrac{1}{2}x^2y + \frac{m'\varphi'(y-m'x) - m''\psi'(y-m''x)}{m'-m''} + \frac{dC}{dx};$$

comparant enfin cette valeur à celle qu'on a trouvée plus haut, on en déduira $\frac{dC}{dx} = -\frac{1}{6}(m'+m'')x^3$, $C = -\frac{(m'+m'')x^4}{4.6}$,

et par conséquent

$$\zeta - \frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{4.6}(m'+m'')x^4 = \varphi(y-m'x) + \psi(y-m''x),$$

en changeant les fonctions arbitraires.

748. Les deux équations

$$x^2r + 2xys + y^2t = 0, \qquad q^2r - 2pqs + p^2t = 0,$$

s'intègrent très-facilement par la méthode du n°. 745. L'équation (A) a ses racines égales dans l'un et dans l'autre cas, et donne $m' = \frac{y}{x}$ pour le premier; d'où il suit

$dy - \frac{y}{x}dx = 0$, $\qquad xdp + ydq = 0$: en intégrant on trouve

$y = ax$, $p + aq = b$, et par conséquent $p + \frac{qy}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Si l'on traite cette intégrale première par le procédé du n°. 726, on la fera dépendre des équations

$$xdy - ydx = 0, \qquad d\zeta - dx\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

dont la première conduit encore à $y = ax$; on tire alors de la seconde $\zeta - x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = b$, et il en résulte $\zeta = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Telle est l'intégrale seconde de la première des deux équations proposées.

Pour l'équation $q^2r - 2pqs + p^2t = 0$, nous aurons

$$m' = -\frac{p}{q}, \qquad p\,dx + q\,dy = 0, \text{ ou } d\zeta = 0, \text{ et } qdp - pdq = 0,$$

ce qui donne sur-le-champ $\zeta = a$, $p = bq$ et par conséquent $p = q\,\varphi(\zeta)$. Cette intégrale première se ramène aux équations

$$dx\,\varphi(\zeta) + dy = 0, \qquad d\zeta = 0,$$

et fait trouver $\zeta = \downarrow[x\varphi(\zeta) + y]$ pour l'intégrale seconde cherchée, résultat qu'on peut mettre sous la forme $y = x\varphi(\zeta) + \downarrow(\zeta)$.

749. Il n'est pas toujours aussi facile que dans les exemples précédens, de passer des intégrales premières aux intégrales secondes. Soit l'équation $r(1 + q^2 + pq) + s(q^2 - p^2) - t(1 + p^2 + pq) = 0$; en y faisant pour abréger $p + q = \alpha$, elle deviendra

$$r(1 + q\alpha) + s(q - p)\alpha - t(1 + p\alpha) = 0;$$

l'équation (A) se changera en $(1 + q\alpha)m^2 - (q - p)\alpha m - (1 + p\alpha) = 0$, et donnera par sa résolution $m = 1$, $m = -\dfrac{1 + p\alpha}{1 + q\alpha}$: la proposée se trouve ainsi ramenée aux deux systèmes d'équations

$$\left.\begin{matrix} dy - dx = 0 \\ dp(1 + q\alpha) - dq(1 + p\alpha) = 0 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} dy(1 + q\alpha) + dx(1 + p\alpha) = 0 \\ dp + dq = 0 \end{matrix}\right\}.$$

On tire d'abord de la deuxième équation du second, $p + q = b$, et la première, $dy + dx + \alpha(p\,dx + q\,dy) = 0$, conduit à $y + x + (p + q)\zeta = a$, d'où il suit $y + x + (p + q)\zeta = \varphi(p + q)$.

Le premier système donne $y - x = a$, et pour en intégrer la seconde équation, il est commode de prendre $p - q = \beta$; il résulte de là, et de $p + q = \alpha$, que

$$p = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad q = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta), \quad dp = \tfrac{1}{2}(d\alpha + d\beta), \quad dq = \tfrac{1}{2}(d\alpha - d\beta),$$

et qu'alors $dp(1 + q\alpha) - dq(1 + p\alpha) = 0$, peut se mettre sous la forme $\dfrac{d\beta}{\beta} = \dfrac{\alpha\,d\alpha}{2 + \alpha^2}$: on aura donc $\beta = b\sqrt{2 + \alpha^2}$, et par conséquent $p - q = \downarrow(x - y)\sqrt{2 + (p + q)^2}$.

L'intégrale première trouvée d'abord, contenant à la fois, sous la fonction arbitraire et hors de cette fonction, les coefficiens p et q, ne mèneroit pas aisément à l'intégrale seconde. En donnant à l'équation $d\zeta = pdx + qdy$, la forme $d\zeta = p(dx - dy) + (p + q)dy$, on

auroit à intégrer $dx - dy = 0$, $dz - (p+q)\,dy = 0$, et l'on y parviendroit en particularisant la fonction φ, parce qu'on pourroit prendre alors la valeur de $p+q$ en x, y, z, pour la substituer dans la seconde des équations ci-dessus; mais ce procédé a l'inconvénient d'exiger que l'on traite à part chacun des cas particuliers que peut présenter l'équation différentielle partielle $x+y+z(p+q)=\varphi(p+q)$: d'ailleurs, il s'appliqueroit à toutes les équations de la forme

$$f[x, y, z, p+q, \varphi(x, y, z, p+q)] = 0,$$

f étant une fonction donnée, et φ une fonction arbitraire.

L'intégrale première $p - q = \frac{1}{2}(x-y)\sqrt{2+(p+q)^2}$ que nous avons obtenue en dernier lieu, va nous donner l'intégrale seconde de la proposée, en y faisant $p+q=\alpha$, $p-q=\beta$, ce qui la change en $\beta = \frac{1}{2}(x-y)\sqrt{2+\alpha^2}$. En effet, on a dans la même hypothèse

$$dz = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)dx + \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)dy = \tfrac{1}{2}\alpha(dx+dy) + \tfrac{1}{2}\beta(dx-dy);$$

et si l'on met pour β sa valeur, il viendra

$$dz = \tfrac{1}{2}\alpha(dx+dy) + \tfrac{1}{2}(dx-dy)\tfrac{1}{2}(x-y)\sqrt{2+\alpha^2},$$

équation qui est intégrable lorsqu'on y regarde α comme constant: d'après le n°. 740, l'intégrale de la proposée sera donc représentée par le système des équations

$$z + \varphi(\alpha) = \tfrac{1}{2}\alpha(x+y) + \tfrac{1}{2}(x-y)\sqrt{2+\alpha^2}$$

$$\varphi'(\alpha) = \tfrac{1}{2}(x+y) + \tfrac{1}{2}(x-y)\frac{\alpha}{\sqrt{2+\alpha^2}}.$$

750. Les géomètres se sont beaucoup occupés de l'équation

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Nz = M,$$

qui est du premier degré, tant par rapport aux coefficiens différentiels du premier ordre, que par rapport à ceux du second et à la fonction cherchée z, parce qu'on y suppose que R, S, T, P, Q, N et M, ne contiennent que les variables x et y. En y appliquant la méthode du n°. 745, on obtiendra deux systêmes d'équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} dy - m\,dx &= 0 \\ R\,m\,dp + T\,dq + (Pp + Qq + Nz - M)\,m\,dx &= 0 \end{aligned}\right\} (1),$$

qu'on ne sauroit intégrer en général, quelle que soit celle des valeurs de m qu'on emploie, lors même que les quantités R, S, T, P, Q et N, seroient constantes, puisqu'ils renferment à la fois les variables x, y, z, p et q; cherchons donc les équations de

condition qui doivent avoir lieu pour qu'on puisse en déduire des équations primitives.

L'équation $dy - m\,dx = 0$ ne renfermant que les deux seules variables x et y, est nécessairement intégrable : concevons qu'on en ait tiré la valeur de y en x ; on pourra par son moyen réduire l'équation

$$R\,m\,dp + T\,dq + (Pp + Qq + N\zeta - M)\,m\,dx = 0\,,$$

à ne contenir que quatre variables, savoir : x, ζ, p et q ; on joindra à cette dernière l'équation $d\zeta = p\,dx + q\,dy$, mise sous la forme $d\zeta = (p + mq)\,dx$, et on cherchera à les intégrer conjointement. Pour cela on multipliera la première par μ, la seconde par μ' ; en ajoutant les résultats, il viendra

$$\left.\begin{array}{r} \mu R\,m\,dp + \mu T\,dq + \mu'\,d\zeta \\ +[(\mu mP - \mu')p + (\mu mQ - \mu' m)\,q + \mu\,mN\zeta - \mu\,mM]\,dx \end{array}\right\} = 0\,;$$

l'équation ci-dessus étant du premier degré par rapport aux variables p, q, ζ, et à leurs différentielles, ne peut résulter que d'une équation primitive de la forme $\alpha p + \beta q + \gamma\zeta + \delta = b$,

qui donneroit $\alpha\,dp + \beta\,dq + \gamma\,d\zeta + p\,d\alpha + q\,d\beta + \zeta\,d\gamma + d\delta = 0$:

il faudra donc qu'on ait $\mu Rm = \alpha$, $\mu T = \beta$, $\mu' = \gamma$,

et par conséquent

$$\begin{aligned} d.\mu Rm &= (\mu mP - \mu')\,dx \\ d.\mu T &= (\mu mQ - \mu' m)\,dx \\ d\mu' &= \mu\,mN\,dx \\ d\delta &= -\mu mM dx. \end{aligned}$$

La dernière de ces équations servira à déterminer δ lorsque μ sera connu ; en éliminant μ entre la première et la seconde, on obtiendra

$$m\,d.\mu Rm - d.\mu T = (mP - Q)\,m\mu dx \;\ldots\ldots\; (a)\,,$$

équation dans laquelle on pourra séparer les variables μ et x, en lui donnant la forme

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{(mP\,dx - Q\,dx - d.Rm)\,m + dT}{Rm^2 - T}\,,$$

et qui s'intègrera puisque l'on suppose que P, Q, R, T et m sont changés en fonctions de x, au moyen de l'intégrale de l'équation $dy - m\,dx = 0$. La première des équations qui nous occupent, donne immédiatement

$$\mu' = \frac{\mu\,m\,P\,dx - d.\mu Rm}{dx}\,;$$

et si l'on substitue dans la troisième, la différentielle de cette valeur, on trouvera

$$dx d.\mu mP - d^2.\mu Rm = \mu mN dx^2 \ldots\ldots\ldots (b);$$

il faudra que la valeur de μ, déduite de (a), satisfasse encore à cette équation, qui exprimera par conséquent la condition qui doit avoir pour que l'on puisse déduire des équations différentielles (1), deux équations primitives. On obtiendra la relation que cette condition suppose entre les quantités R, T, P, Q, N et m, en éliminant μ de (b) par le moyen de (a), et si l'on vouloit effectuer les différentiations avant que y ait été chassé des fonctions R, T, P, Q, N et m, il faudroit au lieu de dR, par exemple, écrire $\left(\frac{dR}{dx} + m\frac{dR}{dy}\right) dx$, quantité à laquelle se réduit la différentielle complète de R, dans le cas où $dy - mdx = 0$: on auroit également $dm = \left(\frac{dm}{dx} + m\frac{dm}{dy}\right) dx$, et il en seroit de même de toutes les quantités à différentier, excepté des facteurs μ et μ', qui ne contiennent point y.

751. Au lieu d'effectuer ces calculs qui meneroient à des résultats aussi compliqués qu'inutiles, il vaudra mieux appliquer immédiatement les équations (a) et (b) à quelques exemples. Pour cela nous particulariserons l'équation différentielle proposée, en supposant que les quantités R, S, T, P, Q et M soient constantes ; dans cette hypothèse m sera constante, les équations (a) et (b) deviendront

$$(Rm^2 - T)\, d\mu = (mP - Q)\, m\mu dx,$$
$$Pdx d\mu - Rd^2\mu = \mu N dx^2;$$

si, pour abréger, on fait $\frac{(mP - Q)\, m}{Rm^2 - T} = n$, la première donnera

$$\frac{d\mu}{\mu} = ndx, \qquad \mu = e^{\int ndx},$$

et substituant l'expression de μ dans la seconde, on aura $Pn - Rn^2 = N$: lorsque les quantités R, S, T, P, Q et N, satisferont à cette équation, la proposée sera intégrable. En effet, l'équation

$$\mu' = \frac{\mu mPdx - d.\mu Rm}{dx} \text{ donnera} \qquad \mu' = m(P - nR)\, e^{\int ndx};$$

et l'on conclura de là

$$\alpha = mRe^{\int ndx}, \quad \beta = Te^{\int ndx}, \quad \gamma = m(P - nR)\, e^{\int ndx}, \quad \delta = -m\int Me^{\int ndx} dx :$$

quoique M puisse contenir y, l'intégrale $\int M e^{n\cdot x} dx$ ne dépendra pourtant que de la seule variable x, parce que l'équation $dy - m dx = 0$ donne $y - mx = a$. Le systême des équations (1) conduira donc à

$$\left.\begin{aligned} y - mx &= a \\ e^{nx}[mRp + Tq + m(P - nR)\zeta] - m\int M e^{nx} dx &= b \end{aligned}\right\},$$

et les intégrales premières de la proposée seront

$$e^{n'x}[m'Rp + Tq + m'(P - n'R)\zeta] - m'\int M' e^{n'x} dx = \varphi(y - m'x)$$
$$e^{n''x}[m''Rp + Tq + m''(P - n''R)\zeta] - m''\int M'' e^{n''x} dx = \downarrow(y - m''x),$$

n' et n'', M' et M'', étant ce que deviennent n et M, lorsqu'on y substitue, à la place de m, les deux racines de l'équation $Rm^2 - Sm + T = 0$. Pour obtenir l'intégrale seconde, on mettra la première des équations ci-dessus sous la forme

$$p + m''q + \frac{P - n'R}{R}\zeta - \frac{e^{-n'x}}{R}\int M' e^{n'x} dx = e^{-n'x}\varphi(y - m'x),$$

en observant que $\frac{T}{m'R} = m''$; et on aura à traiter les équations

$$dy - m''dx = 0,$$
$$d\zeta + \frac{P - n'R}{R}\zeta\, dx - \frac{e^{-n'x}dx}{R}\int M' e^{n'x} dx - e^{-n'x} dx\, \varphi(y - m'x) = 0.$$

On tirera de l'une $y - m''x = a'$, et l'autre deviendra, en vertu de celle-ci, une équation du premier degré et du premier ordre à deux variables; son intégration ne dépendra que de celle des fonctions d'une seule variable, lorsqu'on aura $P - n'R = 0$.

Nous prendrons pour second exemple $(x + y)(r - t) + 4p = 0$; nous aurons $R = -T = x + y$, $S = 0$, $P = 4$, $Q = 0$, $N = 0$, $M = 0$, d'où nous conclurons $m = \pm 1$. En employant la première valeur de m, l'équation $dy - mdx = 0$, nous donne $y - x = a$, d'où il suit $R = a + 2x$, $T = -(a + 2x)$, $\frac{d\mu}{\mu} = 0$, et μ *const*, expressions qui rendent l'équation (b) identique; faisant $\mu = 1$, nous trouverons

$$\mu' = 2, \quad \alpha = 2x + a, \quad \beta = -(2x + a), \quad \gamma = 2, \quad \delta = 0;$$

et en remettant pour a sa valeur $y - x$, nous obtiendrons

$$(x + y)(p - q) + 2\zeta = \varphi(y - x),$$

pour l'une des intégrales premières de la proposée.

On déduira l'intégrale seconde, de celles des équations

$$dx+dy=0, \quad d\zeta+\frac{2\zeta}{x+y}dx-\frac{dx}{x+y}\varphi(y-x)=0,$$

dont la première, donnant $x+y=a'$, réduit la seconde à

$$d\zeta+\frac{2\zeta dx}{a'}-\frac{dx}{a'}\varphi(a'-2x)=0:$$

cette dernière a pour intégrale

$$\zeta=e^{-\frac{2x}{a'}}\left(\int e^{\frac{2x}{a'}}\frac{dx}{a'}\varphi(a'-2x)+b'\right);$$

et on en tirera par conséquent

$$\zeta=e^{-\frac{2x}{a'}}\left(\int e^{\frac{2x}{a'}}\frac{dx}{a'}\varphi(a'-2x)+\downarrow(a'),\right.$$

résultat dans lequel il faudra substituer $x+y$ au lieu de a', après qu'on aura effectué l'intégration indiquée, ce qui ne pourra avoir lieu qu'ensuite d'une détermination particulière de la fonction φ.

Si nous eussions fait $m=-1$, nous aurions eu

$R=a$, $T=-a$, $dR=0$, $dT=0$, $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{2dx}{a}$, et $\mu=\frac{2x}{a}$; mais alors l'équation (b), au lieu d'être identique, seroit devenue $\frac{8dx}{a}=0$: on ne peut donc obtenir qu'une seule équation du premier ordre, entre p, q, x, y et ζ, qui satisfasse la proposée, laquelle n'a par conséquent qu'une seule intégrale première. Nous expliquerons plus bas cette espèce de paradoxe, en faisant voir qu'il y a des équations qui n'en ont aucune, et qui dérivent cependant d'une équation primitive.

752. Les équations du troisième ordre dans lesquelles les coefficiens différentiels de cet ordre ne passent pas le premier degré, peuvent être traitées par un procédé analogue à celui du n°. 745. Ces équations sont de la forme

$$A\frac{d^3\zeta}{dx^3}+B\frac{d^3\zeta}{dx^2dy}+C\frac{d^3\zeta}{dxdy^2}+D\frac{d^3\zeta}{dy^3}=V,$$

A, B, C, D, V étant des fonctions de x, y, ζ, et des coefficiens différentiels des ordres inférieurs au troisième. En conservant, dans cet article, les notations établies dans les précédens, nous ferons de plus, pour abréger,

$$dr=d.\frac{d^2\zeta}{dx^2}=\frac{d^3\zeta}{dx^3}dx+\frac{d^3\zeta}{dx^2dy}dy=\alpha dx+\beta dy,$$

$$ds=d.\frac{d^2\zeta}{dxdy}=\frac{d^3\zeta}{dx^2dy}dx+\frac{d^3\zeta}{dxdy^2}dy=\beta dx+\gamma dy,$$

$$dt=d.\frac{d^2\zeta}{dy^2}=\frac{d^3\zeta}{dxdy^2}dx+\frac{d^3\zeta}{dy^3}dy=\gamma dx+\delta dy,$$

ce qui nous donnera

$$d^2\zeta=\alpha dx^2+2\beta dx^2dy+2\gamma dxdy^2+\delta dy^2,$$

et changera l'équation proposée en

$$A\alpha+B\beta+C\gamma+D\delta=V.$$

En la combinant avec les trois suivantes;

$$dr=\alpha dx+\beta dy,\qquad ds=\beta dx+\gamma dy,\qquad dt=\gamma dx+\delta dy,$$

on pourra éliminer trois des coefficiens $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; les trois derniers, par exemple, opération qui s'effectuera commodément ainsi qu'il suit. On multipliera la proposée par dx, on fera, pour abréger $dy=mdx$, et on aura

$$A\alpha dx+B\beta dx+C\gamma dx+D\delta dx=Vdx,$$

$$\left.\begin{aligned} dr&=\alpha dx+\beta m dx\\ ds&=\beta dx+\gamma m dx\\ dt&=\gamma dx+\delta m dx\end{aligned}\right\}\text{ d'où }\left\{\begin{aligned}\alpha dx&=dr-\beta m dx\\ \beta dx&=ds-\gamma m dx\\ \gamma dx&=dt-\delta m dx,\end{aligned}\right.$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\alpha dx&=dr-m\,ds+m^2dt-\delta m^3dx,\\ \beta dx&=\quad ds-m\,dt+\delta m^2dx,\\ \gamma dx&=\quad\quad dt-\delta m\,dx,\end{aligned}$$

d'où on tirera

$$\begin{aligned}&A\,dr+(B-Am)\,ds+(C-Bm+Am^2)\,dt-Vdx\\&=\delta dx(Am^3-Bm^2+Cm-D);\end{aligned}$$

δ restera indéterminé dans cette équation, qui seroit satisfaite indépendamment de ce coefficient, si l'on avoit en même tems

$$Am^3-Bm^2+Cm-D=0,\qquad\qquad(A)$$
$$A\,dr+(B-Am)\,ds+(C-Bm+Am^2)\,dt-Vdx=0.$$

Si on remettoit pour m sa valeur $\frac{dy}{dx}$, on changeroit ces deux équations en

$$Ady^3-Bdxdy^2+Cdx^2dy-Ddx^3=0$$
$$Adrdx^2+(Bdx^2-Adxdy)ds+(Cdx^2-Bdxdy+Ady^2)dt-Vdx^3=0.$$

Cela

Cela posé, si l'on parvient à intégrer conjointement les deux équations

$$\left.\begin{aligned} dy - m\,dx &= 0 \\ A\,dr + (B - A\,m)\,ds + (C - B\,m + A\,m^2)\,dt - V\,dx &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1);$$

ou à en tirer deux équations primitives de la forme $M = a$, $N = b$; on aura $N = \varphi(M)$, pour l'une des intégrales premières de la proposée.

Il faut observer que les équations (1) renferment en général huit variables, savoir : x, y, z, p, q, r, s, t, entre lesquelles on aura les trois équations

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy :$$

en supposant donc qu'on élimine le plus grand nombre possible de ces variables, il en restera encore quatre dans la résultante, qui, par conséquent ne pourra s'intégrer qu'avec certaines conditions. Lorsque les trois systêmes d'équations (1) sont différens, et intégrables chacun en particulier, on obtient par leur moyen trois intégrales premières de la proposée.

En procédant comme dans le n°. 745, nous allons prouver la vérité de la proposition avancée ci-dessus. Nous aurons d'abord

$$\left.\begin{aligned} dM = \frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dp}dp + \frac{dM}{dq}dq \\ + \frac{dM}{dr}dr + \frac{dM}{ds}ds + \frac{dM}{dt}dt \end{aligned}\right\} = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} dN = \frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \frac{dN}{dp}dp + \frac{dN}{dq}dq \\ + \frac{dN}{dr}dr + \frac{dN}{ds}ds + \frac{dN}{dt}dt \end{aligned}\right\} = 0;$$

nous mettrons ensuite, au lieu des différentielles, dz, dp et dq, leurs valeurs

$$p\,dx + q\,dy, \qquad r\,dx + s\,dy, \qquad s\,dx + t\,dy;$$

nous éliminerons dy et dr, au moyen des équations (1), et nous égalerons séparément à zéro le coefficient de chacune des différentielles restantes, dx, ds et dt; nous trouverons ainsi :

$$\frac{dM}{dx}+\frac{dM}{dy}m+\frac{dM}{dz}(p+qm)+\frac{dM}{dp}(r+sm)+\frac{dM}{dq}(s+tm)+\frac{dM}{dr}\frac{V}{A}=0,$$

$$\frac{dM}{ds}-\frac{dM}{dr}\frac{B-Am}{A}=0,\quad \frac{dM}{dt}-\frac{dM}{dr}\frac{C-Bm+Am^2}{A}=0,$$

$$\frac{dN}{dx}+\frac{dN}{dy}m+\frac{dN}{dz}(p+qm)+\frac{dN}{dp}(r+sm)+\frac{dN}{dq}(s+tm)+\frac{dN}{dt}\frac{V}{A}=0,$$

$$\frac{dN}{ds}-\frac{dN}{dr}\frac{B-Am}{A}=0,\quad \frac{dN}{dt}-\frac{dN}{dr}\frac{C-Am+Am^2}{A}=0.$$

Nous tirerons de ces équations, les valeurs de

$$\frac{dM}{dx},\ \frac{dM}{ds},\ \frac{dM}{dt},\qquad \frac{dN}{dx},\ \frac{dN}{ds},\ \frac{dN}{dt},$$

pour les substituer dans le développement de $dN=\varphi(M)\,dM$, qui prendra par ce moyen la forme

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{dN}{dy}+\frac{dN}{dz}q+\frac{dN}{dp}s+\frac{dN}{dq}t\right)(dy-m\,dx)+\\ \frac{1}{A}\frac{dN}{dr}[Adr+(B-Am)ds+(C-Bm+Am^2)dt-Vdx]\end{array}\right\}=$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi'(M)\left(\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}q+\frac{dM}{dp}s+\frac{dM}{dq}t\right)(dy-m\,dx)+\\ \frac{\varphi'(M)}{A}\frac{dM}{dr}[Adr+(B-Am)ds+(C-Bm+Am^2)dt-Vdx)],\end{array}\right.$$

et se changera en

$$Adr+(B-Am)\,ds+(C-Bm+Am^2)dt-Vdx=\omega(dy-m\,dx),$$

si l'on fait

$$\omega=-\frac{\frac{dN}{dy}+\frac{dN}{dz}q+\frac{dN}{dp}s+\frac{dN}{dq}t-\varphi'(M)\left(\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}q+\frac{dM}{dp}s+\frac{dM}{dq}t\right)}{\frac{1}{A}\frac{dN}{dr}-\frac{\varphi'(M)}{A}\frac{dM}{dr}};$$

en remplaçant dr, ds et dt, par leurs valeurs

$$\alpha\,dx+\beta\,dy,\quad \beta\,dx+\gamma\,dy,\quad \gamma\,dx+\delta\,dy,$$

égalant ensuite à zéro ce qui multiplie dx et ce qui multiplie dy, on obtiendra les équations

$$A\alpha+(B-Am)\beta+(C-Bm+Am^2)\gamma-V=-\omega m,$$

$$A\beta+(B-Am)\gamma+(C-Bm+Am^2)\delta=\omega,$$

entre lesquelles éliminant ω, il viendra

$$A\alpha+B\beta+C\gamma+(Cm-Bm^2+Am^3)\delta-Vdx=0;$$

mais l'équation (A) donnant $Cm-Bm^2+Am^3=D$, réduit la précédente à la proposée, qui, comme on voit, a lieu indépendamment de ω.

La marche des calculs précédens est absolument la même que celle des calculs du n°. 745; les uns et les autres sont fondés sur les mêmes raisonnemens, et leur rapprochement prouve d'une manière évidente qu'ils peuvent s'appliquer à l'équation différentielle partielle

$$A\frac{d^n\zeta}{dx^n}+B\frac{d^n\zeta}{dx^{n-1}dy}+C\frac{d^n\zeta}{dx^{n-2}dy^2}\ldots\ldots+T\frac{d^n\zeta}{dxdy^{n-1}}+U\frac{d^n\zeta}{dy^n}=V,$$

qui représente toutes celles de l'ordre n, dans lesquelles les coefficiens de cet ordre ne sont qu'au premier degré : on ramènera donc cette équation à deux autres, d'une forme analogue à celle des équations (1), et qui ne pourront s'intégrer conjointement qu'avec certaines conditions.

753. Proposons-nous maintenant d'intégrer l'équation

$$A\frac{d^3\zeta}{dx^3}+B\frac{d^3\zeta}{dx^2dy}+C\frac{d^3\zeta}{dxdy^2}+D\frac{d^3\zeta}{dy^3}=V,$$

ou $$A\alpha+B\beta+C\gamma+D\delta=V,$$

dans le cas où les quantités A, B, C, D sont des constantes, et où la fonction V ne renferme que les variables x et y. Les valeurs de m sont constantes alors, et les équations (1) donnent

$$y-m'x=a$$

$$Ar+(B-Am')s+(C-Bm'+Am'^2)t-\int V\,dx=b,$$

en observant de remplacer y dans $\int V\,dx$, par sa valeur $a+m'x$, tirée de la première; et en désignant par V', ce que devient V par cette substitution, on aura par conséquent pour l'intégrale première de la proposée,

$$Ar+(B-Am')s+(C-Bm'+Am'^2)t-\int V'\,dx=\varphi(y-m'x);$$

lorsque les trois racines de l'équation (A) seront inégales, on aura encore les deux intégrales suivantes :

$$Ar+(B-Am'')s+(C-Bm''+Am''^2)t-\int V''\,dx=\chi(y-m''x)$$

$$Ar+(B-Am''')s+(C-Bm'''+Am'''^2)t-\int V'''\,dx=\psi(y-m'''x)$$

φ, ψ et π, étant trois fonctions arbitraires.

Faisons pour plus de simplicité $V=0$, nous aurons l'équation

$$A\alpha+B\beta+C\gamma+D\delta=0$$

dont les trois intégrales premières seront :

$$Ar+(B-Am')s+(C-Bm'+Am'^2)t=\varphi(y-m'x),$$
$$Ar+(B-Am'')s+(C-Bm''+Am''^2)t=\chi(y-m''x),$$
$$Ar+(B-Am''')s+(C-Bm'''+Am'''^2)t=\downarrow(y-m'''x).$$

754. Il seroit facile de remonter, par des intégrations successives, de l'une quelconque de ces équations, à l'intégrale troisième de la proposée ; on pourroit encore y parvenir en prenant les valeurs des coefficiens différentiels r, s et t, et en les substituant dans l'équation $d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2$, qui deviendroit alors une différentielle exacte ; mais on l'obtiendra immédiatement, en prenant $z=\varphi(y-m'x)+\chi(y-m''x)+\downarrow(y-m'''x)$. Cette remarque est fondée sur ce que chacune des trois équations

$$z=(y-m'x),\qquad z=\chi(y-m''x),\qquad z=\downarrow(y-m'''x),$$

satisfait en particulier à la proposée, ainsi qu'on peut s'en assurer en cherchant les expressions des coefficiens différentiels. On trouvera pour la première, par exemple,

$$\alpha=-m^3\varphi'''(y-m'x),\qquad \beta=m^2\varphi'''(y-m'x)$$
$$\gamma=-m\varphi'''(y-m'x),\qquad \delta=\varphi'''(y-m'x),$$

valeurs qui réduiront la proposée à $Am^3-Bm^2+Cm-D=0$; et en raisonnant ici, comme on l'a fait à l'égard des équations différentielles à deux variables dans le n°. 647, on se convaincra que la valeur générale de la fonction z doit être composée de la somme des valeurs particulières rapportées ci-dessus.

755. L'équation générale

$$A\frac{d^nz}{dx^n}+B\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}+C\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}\ldots+T\frac{d^nz}{dx\,dy^{n-1}}+U\frac{d^nz}{dy^n}=0$$

se traite de la même manière ; on y satisfait en faisant $z=\varphi(y-mx)$; car dans cette hypothèse les expressions des coefficiens différentiels sont de la forme

$$\frac{d^nz}{dx^n}=\pm\lambda m^n,\quad \frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}=\mp\lambda m^{n-1},\ldots\frac{d^nz}{dx\,dy^{n-1}}=-\lambda m,\quad \frac{d^nz}{dy^n}=+\lambda,$$

le signe supérieur ayant lieu lorsque n est pair, et le signe inférieur lorsque cet exposant est impair, λ désignant d'ailleurs une fonction dérivée de φ ; en les substituant dans la proposée, on aura

$$\pm Am^n\mp Bm^{n-1}\ldots\ldots\ldots-Tm+U=0\quad(A),$$

équation qui détermine la constante m. Si l'on représente ses racines par m', m'', m''', m'''', etc, on pourra prendre

$$z = \varphi(y - m'x) + \chi(y - m''x) + \psi(y - m'''x) + \omega(y - m''''x) + \text{etc.};$$

Cette valeur de z perdra de sa généralité lorsque l'équation (A) aura des racines égales entr'elles, parce que dans ce cas plusieurs des fonctions arbitraires renfermeront la même quantité et n'en représenteront plus qu'une par conséquent. Si l'on avoit, par exemple, $m'' = m'$, les deux termes $\varphi(y - m'x) + \chi(y - m''x)$ deviendroient équivalens à $\varphi_1(y - m'x)$. On obvie à cet inconvénient par le même artifice d'analyse qu'on emploie à l'égard des équations à deux variables dans un cas semblable (n°. 648). On prend $m'' = m' + k$, et $\chi(y - m''x)$ devient $\chi(y - m'x - kx)$; on developpe cette dernière fonction suivant les puissances de k, et on obtient par le théorême de Taylor:

$$\chi(y - m'x) - \frac{kx}{1}\chi'(y - m'x) + \frac{k^2x^2}{1.2}\chi''(y - m'x) + \text{etc.}$$

on fait ensuite $-k\chi'(y - m'x) = \chi_1(y - m'x)$, d'où il suit $k^2\chi''(y - m'x) = -k\chi'_1(y - m'x)$, etc.; les deux premiers termes de la valeur de z se trouvent alors remplacés par la série

$$\varphi(y - m'x) + \chi(y - m'x) + x\chi_1(y - m'x) - \frac{kx^2}{2}\chi'_1(y - m'x) + \text{etc.};$$

changeant comme ci-dessus, $\varphi(y - m'x) + \chi(y - m'x)$ en $\varphi_1(y - m'x)$, en faisant $k = 0$, on aura seulement $\varphi_1(y - m'x) + x\chi_1(y - m'x)$, quantité irréductible, qui contient encore deux fonctions arbitraires.

L'expression de z se particularisera de nouveau, si on a en même temps $m''' = m'' = m'$; la fonction ψ s'ajoutera avec la fonction φ_1; mais si on fait $m''' = m' + k$, on aura

$$\psi(y - m'''x) = \psi(y - m'x - kx) =$$

$$\psi(y - m'x) - \frac{kx}{1}\psi'(y - m'x) + \frac{k^2x^2}{1.2}\psi''(y - m'x) - \frac{k^3x^3}{1.2.3}\psi'''(y - m'x) + \text{etc.}$$

on changera $\varphi_1(y - m'x) + \psi(y - m'x)$ en $\varphi_2(y - m'x)$,

$\chi_1(y - m'x) - k\psi'(y - m'x)$ en $\chi_2(y - m'x)$,

$\frac{k^2}{2}\psi''(y - m'x)$ en $\psi_2(y - m'x)$,

ce qui donnera $k^3\psi'''(y - m'x) = 2k\psi'_2(y - m'x)$, etc.

les trois premiers termes de l'expression de ζ seront remplacés par la série

$$\varphi_0(y-m'x)+x\chi_0(y-m'x)+x^2\psi_0(y-m'x)+\frac{kx^3}{3}\psi'_0(y-m'x)+\text{etc.}$$

qui se réduit à

$$\varphi_0(y-m'x)+x\chi_0(y-m'x)+x^2\psi_0(y-m'x),$$

quand on suppose $k=0$, ou $m'''=m''=m'$. Ceci suffit pour faire voir la forme que doit avoir ζ, lorsque l'équation (A) a un nombre quelconque de racines égales.

756. Pour donner un exemple propre au troisième ordre, nous prendrons l'équation $t^3\alpha+3t^2u\beta+3tu^2\gamma+u^3\delta=0$, dans laquelle $u=-s+\sqrt{s^2-rt}$. L'équation (A) devenant pour ce cas $t^3m^3-3t^2um^2+3tu^2m-u^3=0=(tm-u)^3$, donne $m=\frac{u}{t}$; les équations (1) se réduisent alors à

$$dy-\frac{u}{t}dx=0, \qquad t^2dr+2tuds+u^2dt=0;$$

on chassera ds de la seconde, au moyen de $u=-s+\sqrt{s^2-rt}$, qui donne $s=-\frac{rt+u^2}{2u}$, $ds=-\frac{u(rdt+tdr+udu)-rtdu}{2u^2}$, et on obtiendra $u^3dt-u^2tdu-rtudt+rt^2du=0$. Ce résultat peut être écrit ainsi : $(udt-tdu)(u^2-rt)=0$, et se décompose par conséquent en deux facteurs, dont le premier a pour intégrale $\frac{u}{t}=a$. L'équation $dy-\frac{u}{t}dx=0$ s'intégre avec le secours de la précédente ; on en tire $dy=adx$, $y=ax+b$, et on a pour l'intégrale première de la proposée $y=\frac{u}{t}x+\varphi\left(\frac{u}{t}\right)$. Si l'on remettoit pour u sa valeur, cette équation passeroit le premier degré par rapport aux coefficiens du second ordre, et ne pourroit pas s'intégrer par le procédé du n°. 745 ; mais on peut employer à sa place les deux équations $dy-\frac{u}{t}dx=0$, $\frac{u}{t}=a$, en les mettant sous la forme

$$dy-adx=0, \qquad r+2as+a^2t=0.$$

La dernière a pour intégrale $\zeta=\chi(y-ax)+x\psi(y-ax)$ (n°. préc.); mais d'après ce qui a été démontré n°. 752, il suffit d'obtenir deux

équations primitives qui satisfassent aux équations (1), pour intégrer à la proposée; or, celle que nous venons d'obtenir satisfait déjà à $\frac{u}{z}=a$: en la combinant donc avec l'intégrale de $dy-adx=0$, qui est $y=ax+b$, et faisant $b=\varphi(a)$, on en déduira une équation primitive qui satisfera nécessairement à la proposée, et qui sera $z=\chi(\varphi(a))+x\downarrow(\varphi(a))$, ou $z=\chi(a)+x\downarrow(a)$, en changeant les fonctions χ et $\downarrow$: la quantité a sera déterminée par l'équation $y=ax+\varphi a$. Le système de ces deux équations ne contenant plus de coefficiens différentiels, sera l'intégrale troisième de la proposée. Nous ferons remarquer que ces deux équations sont celles qui ont été trouvées dans le n°. 344, pour les surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite, dont la proposée est par conséquent l'équation différentielle; et nous donnerons bientôt un moyen fort simple pour revenir des premières à la dernière.

757. L'application que nous allons faire de la méthode du n°. 745, aux équations différentielles partielles du second ordre à quatre variables, montrera comment cette méthode peut s'étendre aux équations dans lesquelles les coefficiens différentiels de l'ordre le plus élevé ne paroissent qu'au premier degré, quels que soient d'ailleurs cet ordre et le nombre des variables. Soit

$$A\frac{d^2z}{du^2}+B\frac{d^2z}{dx^2}+C\frac{d^2z}{dy^2}+D\frac{d^2z}{du\,dx}+E\frac{d^2z}{du\,dy}+F\frac{d^2z}{dx\,dy}=V,$$

A, B, C, D, E, F, V, étant des fonctions des quatre variables u, x, y, z, et des coefficiens différentiels du premier ordre;

on aura $$dz=\frac{dz}{du}du+\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$$

$$d.\frac{dz}{du}=\frac{d^2z}{du^2}du+\frac{d^2z}{du\,dx}dx+\frac{d^2z}{du\,dy}dy$$

$$d.\frac{dz}{dx}=\frac{d^2z}{dx\,du}du+\frac{d^2z}{dx^2}dx+\frac{d^2z}{dx\,dy}dy$$

$$d.\frac{dz}{dy}=\frac{d^2z}{dy\,du}du+\frac{d^2z}{dy\,dx}dx+\frac{d^2z}{dy^2}dy.$$

En faisant pour abréger $\frac{dz}{du}=n$, $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$,

on tirera des équations ci-dessus

$$\frac{d^2\zeta}{du^2} = \frac{1}{du}\left(dn - \frac{d^2\zeta}{du\,dx}dx - \frac{d^2\zeta}{du\,dy}dy\right)$$
$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{1}{dx}\left(dp - \frac{d^2\zeta}{du\,dx}du - \frac{d^2\zeta}{dx\,dy}dy\right)$$
$$\frac{d^2\zeta}{dy^2} = \frac{1}{dy}\left(dq - \frac{d^2\zeta}{du\,dy}du - \frac{d^2\zeta}{dx\,dy}dx\right)$$

et par le moyen de ces valeurs, la proposée deviendra

$$Adndxdy + Bdpdudy + Cdqdudx - Vdudxdy;$$

$$= \begin{cases} \frac{d^2\zeta}{dudx}(Adx^2dy + Bdu^2dy - Ddudxdy) \\ + \frac{d^2\zeta}{dudy}(Adxdy^2 + Cdu^2dx - Edudxdy) \\ + \frac{d^2\zeta}{dxdy}(Bdudy^2 + Cdudx^2 - Fdudxdy): \end{cases}$$

rien ne détermine les trois coefficiens $\frac{d^2\zeta}{du\,dx}$, $\frac{d^2\zeta}{du\,dy}$, $\frac{d^2\zeta}{dx\,dy}$; et pour que l'équation que nous venons d'obtenir ait lieu indépendamment de ces coefficiens, il faudra qu'on ait en même tems

$$Adx^2dy + Bdu^2dy - Ddudxdy = 0$$
$$Adxdy^2 + Cdu^2dy - Edudxdy = 0$$
$$Bdudy^2 + Cdudx^2 - Fdudxdy = 0$$
$$Adndxdy + Bdpdudy + Cdqdudx - Vdudxdy = 0;$$

Si l'on fait $dx = hdu$, $dy = kdu$, les trois premières de ces équations pourront être mises sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} Ah^2 - Dh + B = 0 \\ Ak^2 - Ek + C = 0 \\ Bk^2 - Fhk + Ch^2 = 0 \end{array}\right\} (A),$$

et comme elles ne renferment que deux inconnues, elles ne pourront avoir lieu simultanément que d'après une condition exprimée par l'équation qui résulte de l'élimination de h et de k. Cette équation est

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = 4ABC + DEF,$$

et

et quand elle sera satisfaite, on aura entre les sept variables u, x, y, ζ, n, p et q, les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &dx - h\,du = 0 \\ &dy - k\,du = 0 \\ &Ahk\,dn + Bk\,dp + Ch\,dq - Vhk\,du = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1);$$

on prouvera, comme dans le n°. 752, que si l'on peut tirer de ces dernières trois équations primitives de la forme $L=a$, $M=b$, $N=c$, l'intégrale première de la proposée sera $N=\varphi(L, M)$. Pour faciliter l'intégration des équations (1), on y joindra, s'il est nécessaire, l'équation $d\zeta = n\,du + p\,dx + q\,dy$, qui contient la relation qu'ont, avec la fonction ζ, les coefficiens n, p, q.

Il est bon de remarquer que l'équation de condition rapportée plus haut est précisément la même que celle qui doit avoir lieu pour que le polynome $Au^2 + Bx^2 + Cy^2 + Dux + Euy + Fxy$ soit décomposable en deux facteurs de la forme $\alpha u + \beta x + \gamma y$.

758. Si l'on suppose que les quantités A, B, C, D, E, F, soient constantes, qu'elles satisfassent à l'équation de condition trouvée plus haut, et que V ne renferme que u, x et y, les équations (1) auront pour intégrales

$$x - hu = a,$$
$$y - ku = b,$$
$$Ahkn + Bkp + Chq - \int Vhk\,du = c,$$

dont les deux premières serviront à chasser x et y de V, dans la dernière. On déduira de là $Ahkn + Bkp + Chq - hk\int V\,du = \varphi(x - hu, y - ku)$, et en substituant successivement dans ce résultat, les deux valeurs dont chacune des quantités h et k est susceptible, on obtiendra les deux intégrales premières de la proposée. Il faudra, après l'intégration de $\int V\,du$, remettre au lieu des constantes a et b leurs valeurs.

En appliquant le procédé du n°. 726, à l'équation précédente, on trouvera que l'intégrale seconde de la proposée dépend de

$$dx - h'\,du = 0, \qquad dy - k'\,du = 0,$$
$$A\,d\zeta + du\int V\,du - du\,\varphi(x - hu, y - ku) = 0;$$

en observant que si l'on désigne par h et h', k et k', les valeurs de h et de k, on aura, par les deux premières équations (A), $B = Ahh'$, $C = Akk'$. Les deux premières équations ci-dessus donneront

$$x - h'u = a', \qquad y - k'u = b',$$

et par leur moyen, la troisième conduira à

$$Az + \int du \int V du - \int du\, \varphi [a' + (h' - h)u,\ b' + (k' - k)u] = c.$$

La seconde intégration du terme $\int du \int V du$, s'effectuera en substituant dans l'expression de $\int V du$, obtenue par la première, les valeurs de x et de y, en a', b' et u; de plus, il est facile de voir que l'expression $du\, \varphi [a' + (h' - h)u,\ b' + (k' - k)u]$ peut s'identifier avec la différentielle de $\varphi_1 [a' + (h' - h)u,\ b'(k' - k)u]$, dont la forme sera, suivant la notation que nous avons adoptée jusqu'ici,

$$\varphi'_1 . (h' - h)du + \varphi''_1 . (k' - k)\, du :$$

pour cela il suffit de décomposer la fonction arbitraire φ en deux parties, dont l'une soit $\varphi'_1 . (h' - h)\, du$, et l'autre $\varphi''_1 . (k' - k)\, du$. D'après ces remarques, la dernière des intégrales trouvées précédemment se changera en

$$Az + \int du \int V du - \varphi_1 (x - hu,\ y - ku) = c,$$

lorsqu'on remplacera a' et b' par leurs valeurs, et l'on en conclura que l'intégrale seconde de la proposée est

$$Az + \int du \int V du = \varphi_1 (x - hu,\ y - ku) + \psi (x - h'u,\ y - k'u).$$

759. Nous avons déjà fait observer (n°. 746) qu'il ne falloit pas croire que les équations différentielles partielles proposées fussent impossibles, ou n'eussent point d'intégrale seconde, lorsque le système d'équations différentielles totales, auquel on les ramène, ne pouvoit conduire à deux équations primitives; nous allons prouver cette assertion par des exemples, et nous remonterons ensuite à la cause de l'espèce de paradoxe qu'elle semble présenter au premier coup-d'œil. Ce point, l'un des plus importans de la théorie des équations différentielles partielles, n'a pas encore été suffisamment éclairci, du moins dans tous les traités qui ont paru jusqu'à ce jour; mais nous espérons que ce qui suit ne laissera aucune obscurité sur ce sujet.

Dès les premiers pas qu'Euler fit dans le Calcul intégral des différentielles partielles, il remarqua qu'il y avoit des équations du second ordre qui ne pouvoient s'intégrer, et auxquelles cependant on satisfaisoit d'une infinité de manières : telle est par exemple l'équation très-simple $\frac{d^2 z}{dx\, dy} = az$. En y faisant $z = Ae^{ax} Y$, et en supposant

que Y ne renferme que y, on trouve $\alpha e^{\alpha x}\frac{dY}{dy}=\alpha e^{\alpha x}Y$, ce qui donne $\frac{dy}{Y}=\frac{\alpha dy}{\alpha}$, $Y=e^{\frac{\alpha y}{\alpha}}$, et par conséquent $\zeta=Ae^{\alpha x+\frac{\alpha y}{\alpha}}$. Les quantités α et A demeurant indéterminées dans cette expression, il s'ensuit que l'on peut prendre

$$\zeta=Ae^{\alpha x+\frac{\alpha y}{\alpha}}+Be^{\alpha x+\frac{\alpha y}{\beta}}+Ce^{\alpha x+\frac{\alpha y}{\gamma}}+\text{etc.}$$

et donner au second membre autant de termes qu'on voudra.

L'équation $Rr+Ss+Tt+Pp+Qq+N\zeta=0$, qui, lors même que R, S, T, P, Q, N, sont constans, ne peut s'intégrer par le procédé du n°. 750, qu'avec une condition, se réduit à

$$Rm^2+Smn+Tn^2+Pm+Qn+N=0,$$

par la supposition de $\zeta=Ae^{mx+ny}$, et comme A reste indéterminé ainsi que l'un des exposans m, n, on aura, si l'on veut,

$$\zeta=Ae^{mx+ny}+Be^{m'x+n'y}+Ce^{m''x+n''y}+\text{etc.},$$

pourvu qu'il y ait entre m' et n', entre m'' et n'', etc. les mêmes relations qu'entre m et n.

760. Ces solutions sont, comme on voit, très-générales, mais elles n'ont pas cependant la même étendue que celles qui contiennent deux fonctions arbitraires, et l'on peut en obtenir de cette espèce dans quelques-uns des cas où l'on ne sauroit intégrer les équations (1). L'équation

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2}-\frac{d^2\zeta}{dy^2}-\frac{2}{x}\frac{d\zeta}{dx}=0, \text{ ou } r-t-\frac{2p}{x}=0,$$

conduit aux deux systêmes d'équations différentielles totales;

$$\left.\begin{aligned} dy-dx&=0\\ dp-dq-\frac{2pdx}{x}&=0\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned} dy+dx&=0\\ dp+dq-\frac{2pdx}{x}&\end{aligned}\right\}\ (a),$$

dont aucun ne satisfait à la condition du n°. 750, et cependant l'équation proposée a pour intégrale seconde

$$\zeta=\varphi(y+x)+\downarrow(y-x)-x[\varphi'(y+x)-\downarrow'(y-x)],$$

φ et $\downarrow$ étant des fonctions arbitraires dont φ' et $\downarrow'$ représentent les coefficiens différentiels, en sorte que

$$d.\varphi(x+y)=\varphi'(x+y)(dx+dy),\quad d.\downarrow(y-x)=\downarrow'(y-x)(dx-dy).$$

Si l'on différentie cette intégrale pour en éliminer les fonctions arbi-

traires, on reconnoîtra bientôt pourquoi les équations (*a*) ne conduisent point à sa différentielle première. En effet, on trouve

$$p=\frac{dz}{dx}=-x[\varphi''(y+x)+\psi''(y-x)],$$

$$q=\frac{dz}{dy}=-x[\varphi''(y+x)-\psi''(y-x)]+\varphi'(y+x)+\psi'(y-x);$$

résultat dont il est impossible d'éliminer une des deux fonctions arbitraires, et de déduire par conséquent, entre p, q, x, y et l'autre fonction arbitraire, une équation primitive, comme seroit celle que donneroient les équations (1), si elles étoient conjointement intégrables. En passant au second ordre, on obtient

$$r=-[\varphi''(y+x)+\psi''(y-x)]-x[\varphi'''(y+x)-\psi'''(y-x)]$$
$$s=-x[\varphi'''(y+x)+\psi'''(y-x)]$$
$$t=-x[\varphi'''(y+x)-\psi'''(y-x)]+\varphi''(y+x)+\psi''(y-x);$$

la dernière de ces équations étant retranchée de la première, conduit à la suivante: $r-t=-2[\varphi''(y+x)+\psi''(y-x)]$, dont le second membre est égal à $\frac{2p}{x}$, en vertu de l'une des différentielles premières, et l'on retombe par conséquent sur la proposée $r-t-\frac{2p}{x}=0$. On voit, par ce qui précède, que cette équation ne sauroit avoir d'intégrale première, dans le sens qu'on attache à ce mot, parce que les deux fonctions arbitraires ne peuvent s'éliminer qu'en même tems, et seulement lorsqu'on est parvenu au second ordre.

Si l'on prend les différentielles totales des expressions de p et de q, on aura ces deux équations

$$dp=-dx[\varphi''(y+x)+\psi''(y-x)]-x(dy+dx)\varphi'''(y+x)-x(dy-dx)\psi'''(y-x)$$
$$dq=-dx[\varphi''(y+x)-\psi''(y-x)]-x(dy+dx)\varphi'''(y+x)+(dy+dx)\varphi''(y+x)$$
$$+x(dy-dx)\psi'''(y+x)+(dy-dx)\psi''(y-x)$$

d'où l'on pourra chasser alternativement l'une et l'autre des fonctions φ et ψ, au moyen de la valeur de p, et il viendra

$$\left.\begin{aligned} dp+dq+\frac{p}{x}(dy-dx)&=-2x(dy+dx)\varphi'''(y+x)\\ dp-dq-\frac{p}{x}(dy+dx)&=-2x(dy-dx)\psi'''(y-x)\end{aligned}\right\}(b);$$

ces dernières équations tiennent, en quelque sorte, lieu des intégrales premières qui manquent à la proposée, mais elles ne peuvent néanmoins les remplacer parce qu'on ne sauroit les intégrer conjointement. En les ajoutant et en les retranchant, on en déduit

$$dp - \frac{p}{x}dx = -x(dy+dx)\varphi'''(y+x) - x(dy-dx)\downarrow'''(y-x)$$

$$dq + \frac{p}{x}dy = -x(dy+dx)\varphi'''(y+x) + x(dy-dx)\downarrow'''(y-x)$$

la première de celles-ci a pour intégrale

$$p = -x[\varphi''(y+x) + \downarrow''(y-x)];$$

valeur qui change la seconde en

$$\left.\begin{aligned} dq = dy[\varphi''(y+x)+\downarrow''(y-x)] - x(dy+dx)\varphi'''(y+x) \\ + x(dy-dx)\downarrow'''(y-x) \end{aligned}\right\} =$$

$$\left.\begin{aligned} -d[x\varphi''(y+x) - x\downarrow''(y-x)] + (dy+dx)\varphi''(y+x) \\ + (dy-dx)\downarrow''(y-x) \end{aligned}\right\}$$

et en intégrant on parvient à

$$q = -x[\varphi''(y+x) - \downarrow''(y-x)] + \varphi'(y+x) + \downarrow'(y-x);$$

La valeur de p et celle de q étant substituées ensuite dans $dz = pdx + qdy$, donnent un résultat intégrable, et duquel on tire

$$z = \varphi(y+x) + \downarrow(y-x) - x[\varphi'(y+x) - \downarrow'(y-x)];$$

on intégreroit donc la proposée si l'on pouvoit déduire *à priori* les équations (b) des équations (a).

Il est facile de voir maintenant pourquoi l'équation

$$r - t + \frac{4}{x+y}p = 0,$$

que nous avons traitée dans le n°. 751, n'a qu'une seule intégrale première : c'est qu'il est impossible de faire disparoître, avant le second ordre, la fonction φ affectée du signe f, et qu'on ne peut éliminer au premier que la fonction $\downarrow$.

761. En suivant ces considérations, on est conduit naturellement à chercher s'il est toujours possible de supposer qu'une équation différentielle partielle du second ordre dérive d'une équation primitive renfermant deux fonctions arbitraires. En différentiant, jusqu'au second ordre, une équation $U=0$, entre x, y et z, par rapport

à chacune des variables indépendantes, on n'a que les six équations

$$\left.\begin{array}{lll} U=0, & \dfrac{d(U)}{dx}=0, & \dfrac{d(U)}{dy}=0, \\ \dfrac{d^2(U)}{dx^2}=0, & \dfrac{d^2(U)}{dxdy}=0, & \dfrac{d^2(U)}{dy^2}=0, \end{array}\right\} \text{(n°. 82)},$$

entre lesquelles on ne peut par conséquent éliminer que cinq quantités ; cependant si U contenoit deux fonctions arbitraires $\varphi(t)$, $\downarrow(u)$, il faudroit, pour arriver à une équation délivrée de ces fonctions, pouvoir chasser des équations ci-dessus, les six quantités $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, $\downarrow(u)$, $\downarrow'(u)$, $\downarrow''(u)$, ce qui ne sauroit s'effectuer à moins qu'il n'en disparoisse plusieurs à la fois. Si l'on prend pour exemple l'équation $M=\varphi(t)+N\downarrow(u)$, on obtiendra, par un calcul facile, mais trop long pour trouver place ici, l'équation de condition qui doit avoir lieu entre les fonctions données M, N, t et u, pour que les fonctions arbitraires φ et $\downarrow$ puissent s'éliminer par deux différentiations.

En effectuant le même calcul sur l'équation particulière $z=\varphi(x+y)+xy\downarrow(x-y)$, et n'écrivant pour abréger que φ, $\downarrow$ etc., au lieu de $\varphi(x+y)$, $\downarrow(x-y)$ etc., on aura les six équations

$$\begin{aligned} z &= \varphi + xy\downarrow \\ p &= \varphi' + xy\downarrow' + y\downarrow \\ q &= \varphi' - xy\downarrow' + x\downarrow \\ r &= \varphi'' + xy\downarrow'' + 2y\downarrow' \\ s &= \varphi'' - xy\downarrow'' + (x-y)\downarrow' + \downarrow \\ t &= \varphi'' + xy\downarrow'' - 2x\downarrow' : \end{aligned}$$

la seconde et la troisième donnent d'abord

$$p-q=2xy\downarrow'+(y-x)\downarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a);$$

on tire ensuite des trois dernières, les équations

$$r-t=2(y+x)\downarrow' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

$$r-2s+t=4xy\downarrow''+4(y-x)\downarrow'-2\downarrow \ldots\ldots\ldots (c),$$

et l'on n'a pour éliminer les trois fonctions indéterminées $\downarrow$, $\downarrow'$, $\downarrow''$, qu'un pareil nombre d'équations, savoir : (a), (b) et (c). On s'en procurera une quatrième en prenant la différentielle totale de (b), qui sera $dr-dt=2(dy+dx)\downarrow'+2(y+x)\downarrow''(dy-dx)$ (d). L'équation primitive proposée conduira donc à une équation différentielle totale entre les coefficiens des deux premiers ordres et les

variables indépendantes; il est à propos de remarquer qu'une semblable équation équivaut à deux équations différentielles partielles du troisième ordre, parce qu'en substituant au lieu de dr, ds, dt, leurs valeurs $\alpha dx + \beta dy$, $\beta dx + \gamma dy$, $\gamma dx + \delta dy$, (n°. 752), on pourra égaler séparément à zéro, la quantité qui multiplie dx et celle qui multiplie dy. On trouveroit le même résultat en formant immédiatement toutes les différentielles de la proposée jusqu'au troisième ordre inclusivement; car on obtiendroit par ce moyen dix équations, en comptant la proposée, et l'on n'auroit à éliminer que les huit indéterminées φ, φ', φ'', φ''', $\downarrow$, $\downarrow'$, $\downarrow''$, $\downarrow'''$: il resteroit donc deux équations délivrées des fonctions arbitraires φ et $\downarrow$.

762. On peut prévoir aisément à quel ordre doit s'élever l'équation résultante de l'élimination d'un nombre m de fonctions arbitraires contenues dans une équation primitive. Supposons, par exemple, que cette équation ne renferme que trois variables, elle fournira 2 équations au premier ordre, 3 au second, 4 au troisième; et par conséquent le nombre total des équations obtenues jusqu'au $n^{ème}$ ordre inclusivement, en y comprenant aussi la proposée, sera exprimé par

$$1 + 2 + \ldots\ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

mais d'un autre côté, chaque différentiation introduit dans le calcul une nouvelle fonction arbitraire, en sorte que le nombre des inconnues augmente de m en passant d'un ordre quelconque à celui qui le suit, et que par conséquent ce nombre sera $m(n+1)$ au $n^{ème}$ ordre : il faudra donc, pour que l'élimination devienne possible, que l'on ait,

$$m(n+1) < \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \text{ ou } 2m < n+2, \text{ ou } n > 2m-2,$$

c'est-à-dire qu'il faudra pousser les différentiations jusqu'à l'ordre marqué par $2m-1$: le nombre des équations restantes après l'élimination sera $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - m(n+1)$. Si l'on fait $m=3$, l'on aura $n=5$, et on obtiendra trois équations finales entre les coefficiens différentiels du $5^{ème}$ ordre.

C'est par de semblables considérations que l'on calculeroit l'ordre

auquel peut s'élever l'équation résultante de l'élimination d'une fonction quelconque, commune à deux équations différentielles partielles de tel ordre qu'on voudra. S'il falloit, par exemple, éliminer entre deux équations différentielles partielles de l'ordre m la fonction z, dépendante des trois variables u, x et y, on verroit que cette fonction ayant 3 coefficiens au premier ordre, 6 au second, 10 au troisième, etc., le nombre des inconnues, lorsqu'on sera parvenu à l'ordre n, s'élèvera à

$$1+3+6+10\ldots\ldots+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3};$$

mais en prenant les différentielles partielles de chacune des proposées depuis l'ordre $m+1$ jusqu'à l'ordre n inclusivement, on se procurera un nombre d'équations exprimé par

$$2\left[1+3+6\ldots+\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2}\right]=\frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{3}$$

et pour que l'élimination puisse avoir lieu, il faudra que l'on ait

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}<(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3).$$

Il faut bien remarquer que l'ordre calculé par ces formules, sera le plus élevé, auquel puisse atteindre l'équation finale, dans le cas général, mais que par l'effet des relations particulières qui peuvent se trouver entre les termes des équations proposées, on obtiendra des résultats plus simples. Lorsqu'il s'agit, par exemple, d'éliminer d'une équation primitive à trois variables, des fonctions arbitraires qui ne comprennent que la même quantité, il suffit de descendre jusqu'à l'ordre marqué par le nombre de ces fonctions, et le procédé d'élimination se simplifie beaucoup. En effet, il est facile de conclure du n°. 727, que pour revenir de l'intégrale $N=\varphi(M)$ à l'équation différentielle partielle qui lui correspond, il n'y a qu'à éliminer $\frac{dy}{dx}$, entre les deux équations $dM=0$, $dN=0$, prises en faisant varier en même-tems x, y, z, et les coefficiens différentiels. En vertu de la première, $\varphi(M)$ doit être regardée comme une constante et disparoît du résultat; et si l'équation proposée contenoit encore d'autres fonctions de M, elles ne varieroient pas non plus,

plus, et ne se retrouveroient dans le résultat que comme multiplicateurs des quantités variables qu'elles affectent. Si l'on donne à ce résultat la forme $N' = \downarrow(M)$, $\downarrow$ étant une des fonctions arbitraires restantes, une nouvelle différentiation effectuée dans la même hypothèse que la précédente, c'est-à-dire en prenant $dM = 0$, chassera cette fonction; on poursuivroit de même s'il y avoit plus de deux fonctions arbitraires. Les exemples suivans feront connoître l'utilité de cette méthode.

763. Nous avons trouvé dans le n°. 344, que l'équation primitive des surfaces composées de lignes droites assujetties à passer par l'axe des z, étoit $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \downarrow\left(\frac{y}{x}\right)$; pour arriver à l'équation différentielle partielle, il faut éliminer les fonctions arbitraires φ et $\downarrow$. En regardant la quantité $\frac{y}{x}$ comme constante, on aura $x\,dy - y\,dx = 0$, et en différentiant dans cette hypothèse, il viendra

$$dz = dx\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ ou } p\,dx + q\,dy = dx\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

chassant $\frac{dy}{dx}$ de cette équation au moyen de la première, on obtiendra $px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. On différentiera de nouveau en traitant toujours $\frac{y}{x}$ comme une constante, et on trouvera

$$p\,dx + x\,dp + q\,dy + y\,dq = dx\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

résultat qu'on changera en

$$(p + rx + sy)\,dx + (q + sx + ty)\,dy = dx\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

en substituant $r\,dx + s\,dy$, $s\,dx + t\,dy$ au lieu de dp et de dq, et qui deviendra

$$(p + rx + sy)\,x + (q + sx + ty)\,y = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

après l'élimination de $\frac{dy}{dx}$. Si on en retranche l'équation

$$px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

on aura $rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0$ pour l'équation différentielle partielle cherchée, qui sera par conséquent du second ordre.

Quand même la quantité comprise sous les fonctions arbitraires ne seroit pas donnée explicitement, mais dépendroit d'une seconde équation, l'élimination s'opéreroit encore comme ci-dessus. Nous allons prendre pour exemple le systême d'équations

$$y = ax + \varphi(a), \qquad z = x\downarrow(a) + \pi(a),$$

qui appartient à toutes les surfaces formées de lignes droites (n°.344). Pour pouvoir supposer constante la quantité a, il faut qu'on ait l'équation $\frac{da}{dx}dx + \frac{da}{dy}dy = 0$, qui ne nous apprend autre chose, sinon que $\frac{dy}{dx}$ a une valeur particulière, mais inconnue; nous désignerons cette valeur par m, et nous aurons ainsi mdx au lieu de dy, $(p+qm)dx$ au lieu de dz. Dans cette hypothèse les différentielles des équations ci-dessus donneront $m = a$, $p + mq = \downarrow(a)$, d'où on tirera $p + aq = \downarrow(a)$;
différentiant la dernière de celles-ci, il viendra $r + ms + a(s + mt) = 0$, en observant que

$$dp = (r + sm)dx, \qquad dq = (s + tm)dx;$$

mettant pour m sa valeur a, nous trouverons $r + 2as + a^2t = 0$, résultat dans lequel il n'y a plus qu'à éliminer a. Pour cela, il faut différentier encore une fois en faisant comme précédemment,

$$dr = \alpha dx + \beta dy, \quad ds = \beta dx + \gamma dy, \quad dt = \gamma dx + \delta dy,$$

ce qui devient d'après l'hypothèse établie

$$dr = (\alpha + \beta m)dx, \quad ds = (\beta + \gamma m)dx, \quad dt = (\gamma + \delta m)dx,$$

et donne

$$\alpha + \beta m + 2a(\beta + \gamma m) + a^2(\gamma + \delta m) = 0;$$

substituant a au lieu de m dans cette dernière équation, nous aurons enfin le systême des équations

$$r + 2as + a^2t = 0$$
$$\alpha + 3a\beta + 3a^2\gamma + a^3\delta = 0,$$

qui rentre dans celui dont nous nous sommes occupés n°. 756.

On trouveroit la même chose en différentiant trois fois de suite chacune des équations proposées, et en faisant

$$dy = mdx, \quad dm = m'dx, \quad dm' = m''dx:$$

on auroit de cette manière

$$m=a, \qquad m'=0, \qquad m''=0,$$
$$p+mq=\downarrow(a), \quad r+2ms+m^2t=0, \quad \alpha+3\beta m+3\gamma m^2+\delta m^3=0;$$

et il faudroit éliminer m entre les deux dernières.

764. Après cette digression, reprenons la suite de nos remarques sur la nature des intégrales des équations différentielles partielles. Nous avons vu qu'en poussant jusqu'au second ordre les différentiations relatives à chaque variable, on tireroit de l'équation primitive $U=0$ renfermant x, y et z, les suivantes :

$$U=0, \quad \frac{d(U)}{dx}=0, \quad \frac{d(U)}{dy}=0,$$
$$\frac{d^2(U)}{dx^2}=0, \quad \frac{d^2(U)}{dxdy}=0, \quad \frac{d^2(U)}{dy^2}=0;$$

tout ce qu'on peut faire dans le cas général, c'est d'éliminer cinq constantes entre ces six équations, et pour cela il faut les employer toutes à la fois, car si l'on passoit successivement d'un ordre à un autre on n'en pourroit chasser que quatre. En effet, si l'on élimine d'abord deux constantes entre les trois premières, le résultat que nous désignerons par $U'=0$, ne sera susceptible que de deux différentielles partielles $\frac{d(U')}{dx}=0, \frac{d(U')}{dy}=0$, entre lesquelles on ne pourra éliminer que deux nouvelles constantes, et dans le passage de l'équation primitive à l'équation finale du second ordre on n'aura fait disparoître que quatre constantes. Il est facile d'étendre ces considérations à un ordre quelconque, et l'on verra ainsi que l'équation différentielle partielle de l'ordre n ne peut résulter, en général, que de l'élimination de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ constantes dans une équation primitive.

Lagrange qui a présenté le premier la formation des équations différentielles partielles sous ce point de vue, nomme *Intégrales complètes* celles qui renferment autant de constantes qu'en comporte l'ordre de l'équation différentielle qui leur correspond, pour les distinguer des intégrales générales dans lesquelles il entre des fonctions arbitraires. Il suit par conséquent de ce qui précède, que la

première intégrale complète ne doit renfermer que deux constantes arbitraires, la seconde cinq, la troisième neuf, etc. On doit aussi conclure de là qu'il existe des équations différentielles partielles du second ordre, qui ne sauroient avoir des intégrales premières complètes ; car une intégrale de cette nature ne pouvant, en général, contenir que deux constantes de plus que l'équation différentielle partielle dont elle est tirée, il faudroit que les cinq constantes que l'on se propose d'éliminer entrassent dans U de manière à disparoître en deux groupes, l'un de trois et l'autre de deux.

Nous allons éclaircir ces notions par quelques exemples.

Soit d'abord l'équation

$$z = f(a, b, a', b', c') + ax + by + a'x^2 + b'xy + c'y^2,$$

f désignant une fonction donnée ; on en déduira par la différentiation

$$p = a + 2a'x + b'y, \quad q = b + b'x + 2c'y,$$
$$r = 2a', \quad s = b, \quad t = 2c' :$$

tirant de ces dernières les valeurs des cinq constantes a, b, a', b', c' pour les substituer dans la première, on aura

$$z = px + qy - \tfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + f(p - rx - sy, \quad q - ty - sx, \quad \tfrac{1}{2}r, \quad s, \quad \tfrac{1}{2}t).$$

Si l'on veut que cette équation puisse dériver d'une équation du premier ordre contenant seulement deux constantes, il faut nécessairement qu'il en disparoisse en même tems trois à la première différentiation de la proposée ; or, si on retranche de celle-ci les valeurs de p et de q, multipliées respectivement par x et par y, on trouve

$$z - px - qy = f(a, b, a', b', c') - (a'x^2 + b'xy + c'y^2),$$

résultat qui ne rempliroit la condition demandée, que si la fonction f ne contenoit point a', b', c', parce qu'alors on élimineroit par son moyen la quantité $a'x^2 + b'xy + c'y^2$: l'équation finale

$$2z - px - qy = 2f(a, b) + ax + by$$

ne renfermeroit plus que deux constantes a et b, et seroit l'intégrale première de

$$z = px + qy - \tfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + f(p - rx - sy, q - ty - sx).$$

765. Pour compléter la théorie que nous venons d'exposer, il nous reste à montrer la relation qui existe entre les intégrales complètes et les intégrales générales. Nous avons déjà vu n°. 731, comment on introduisoit une fonction arbitraire dans une équation primitive contenant deux constantes arbitraires ; le même procédé

s'applique en général à l'intégrale première complète de toute équation différentielle partielle à trois variables, de quelque ordre qu'elle soit. Si $U' = a$ est, par exemple, l'intégrale première d'une équation du second ordre, que U' renferme les deux constantes a et b, et que l'on fasse $\frac{dU'}{da}da + \frac{dU'}{db}db = 0$, l'équation $U' = 0$ satisfera encore à la proposée quoique l'on ait cessé de regarder a et b comme des constantes, puisqu'on aura toujours $\frac{d(U')}{dx}dx + \frac{d(U')}{dy}dy = 0$, ainsi qu'auparavant : posant donc $b = \varphi(a)$, il en résultera $\frac{dU'}{da} + \frac{dU'}{db}\varphi'(a) = 0$, et l'intégrale générale sera représentée comme dans le n°. cité, par le système des deux équations,

$$(U') = 0, \qquad \frac{d(U')}{da} = 0.$$

Si l'on considère aussi comme variables les cinq constantes arbitraires qui entrent dans l'intégrale seconde et complète $U = 0$, on ne pourra satisfaire à la proposée du deuxième ordre, dans cette hypothèse, qu'en supposant que les fonctions ζ, p et q, ne partagent point les changemens qu'éprouvent ces quantités; c'est-à-dire, que si on les désigne par a, b, a', b', c', il faudra qu'on ait en même tems

$$\frac{d\zeta}{da}da + \frac{d\zeta}{db}db + \frac{d\zeta}{da'}da' + \frac{d\zeta}{db'}db' + \frac{d\zeta}{dc'}dc' = 0,$$
$$\frac{dp}{da}da + \frac{dp}{db}db + \frac{dp}{da'}da' + \frac{dp}{db'}db' + \frac{dp}{dc'}dc' = 0,$$
$$\frac{dq}{da}da + \frac{dq}{db}db + \frac{dq}{da'}da' + \frac{dq}{db'}db' + \frac{dq}{dc'}dc' = 0;$$

ce qui revient à

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dU}{da}da + \frac{dU}{db}db + \frac{dU}{da'}da' + \frac{dU}{db'}db' + \frac{dU}{dc'}dc' = 0\\
&\frac{dU_{'}}{da}da + \frac{dU_{'}}{db}db + \frac{dU_{'}}{da'}da' + \frac{dU_{'}}{db'}db' + \frac{dU_{'}}{dc'}dc' = 0\\
&\frac{dU_{''}}{da}da + \frac{dU_{''}}{db}db + \frac{dU_{''}}{da'}da' + \frac{dU_{''}}{db'}db' + \frac{dU_{''}}{dc'}dc' = 0
\end{aligned}\right\}(A);$$

en faisant pour abréger $\frac{d(U)}{dx} = U_{,}$, $\frac{d(U)}{dy} = U_{,,}$.

On n'a par ce moyen que trois équations pour déterminer les cinq quantités a, b, a', b', c' : il semble donc qu'on peut regarder deux d'entr'elles comme des fonctions arbitraires des trois autres, et faire, par exemple, $a = \varphi(a', b', c')$, $b = \downarrow(a', b', c')$,

$da = \varphi_{,}da' + \varphi_{,,}db' + \varphi_{,,,}dc'$, $db = \downarrow_{,}da' + \downarrow_{,,}db' + \downarrow_{,,,}dc'$;

mais pour arriver à un résultat, il faut parvenir à déduire des équations (A), trois équations primitives entre les variables x, y, z et les quantités a', b', c', en restreignant d'ailleurs le moins qu'il est possible la généralité des fonctions φ et $\downarrow$.

Soit, pour exemple, l'équation

$$z = a' + b'x + c'y + ax^2 + bxy + may^2,$$

qui est l'intégrale seconde complète de $t - mr = 0$; les équations (A) deviendront

$$\left.\begin{array}{l} da' + x\,db' + y\,dc' + x^2da + xy\,db + my^2da = 0 \\ db' + 2x\,da + y\,db = 0 \\ dc' + x\,db + 2my\,da = 0 \end{array}\right\} (a);$$

multipliant la seconde par μ et l'ajoutant à la dernière, il viendra

$$\mu db' + dc' + x(2\mu da + db) + y(\mu db + 2mda) = 0.$$

Il faut faire en sorte que les deux quantités qui affectent x et y, soient multiples l'une de l'autre; or, c'est ce qui arrivera si on met la seconde sous la forme $\mu\left(db + \frac{2mda}{\mu}\right)$ et qu'on fasse $\frac{m}{\mu} = \mu$, on aura alors $\mu = \pm\sqrt{m}$, et

$$\left.\begin{array}{l} dc' - db'\sqrt{m} + (x + y\sqrt{m})(db + 2da\sqrt{m}) = 0 \\ dc' - db'\sqrt{m} + (x - y\sqrt{m})(db - 2da\sqrt{m}) = 0 \end{array}\right\} (b).$$

Les différentielles

$$dc' + db'\sqrt{m}, \quad db + 2da\sqrt{m}, \quad dc' - db'\sqrt{m}, \quad db - 2da\sqrt{m},$$

considérées isolément, ont pour intégrales

$$c' + b'\sqrt{m}, \quad b + 2a\sqrt{m}, \quad c' - b'\sqrt{m}, \quad b - 2a\sqrt{m};$$

et si, en imitant le procédé du n°. 731, on fait

$$c' + b'\sqrt{m} = \varphi(b + 2a\sqrt{m}), \quad c' - b'\sqrt{m} = \downarrow(b - 2a\sqrt{m}),$$

les équations (b) prenant la forme d'équations primitives deviendront

$$\varphi'(b + 2a\sqrt{m}) + x + y\sqrt{m} = 0, \quad \downarrow'(b - 2a\sqrt{m}) + x - y\sqrt{m} = 0.$$

Posant ensuite $x+y\sqrt{m}=t$, $x-y\sqrt{m}=u$, et appliquant les caractéristiques des fonctions dans un sens inverse, on aura

$$b+2a\sqrt{m}=\varphi(t) \qquad b-2a\sqrt{m}=\psi(u),$$

ce qui changera les équations (b) en

$$dc'+db'\sqrt{m}+t\varphi'(t)\,dt=0, \qquad dc'-db'\sqrt{m}+u\varphi(u)\,du=0,$$

dont les intégrales seront

$$c'+b'\sqrt{m}+\int t\varphi(t)\,dt=0, \qquad c'-b'\sqrt{m}+\int u\psi(u)\,du=0:$$

tirant de ces équations et des précédentes, les valeurs des quatre quantités a, b, b', c', on trouve

$$b=\tfrac{1}{2}[\varphi(t)+\psi(u)], \qquad a=\frac{1}{4\sqrt{m}}[\varphi(t)-\psi(u)]$$

$$c'=-\tfrac{1}{2}[\int t\varphi'(t)dt+\int u\psi'(u)\,du], \quad b'=-\frac{1}{2\sqrt{m}}[\int t\varphi'(t)dt-\int u\psi'(u)\,du]$$

chassant ensuite ces quantités, ainsi que x et y, de la première des équations (a), on obtient

$$da'-\frac{t^2\varphi'(t)\,dt-u^2\psi'(u)\,du}{4\sqrt{m}}=0,$$

d'où il suit $$a'=\frac{\int t^2\varphi'(t)\,dt-\int u^2\psi'(u)\,du}{4\sqrt{m}}.$$

Enfin, par la substitution de cette valeur et des précédentes, l'intégrale complète proposée deviendra

$$z=\frac{\int t^2\varphi'(t)dt-2x\int t\varphi'(t)dt+t^2\varphi(t)}{4\sqrt{m}}+\frac{\int u^2\psi'(u)du-2u\int u\psi'(u)du+u^2\psi(u)}{4\sqrt{m}},$$

et comme les fonctions φ et ψ sont absolument arbitraires, on pourra écrire simplement $z=\varphi(t)+\psi(u)$, ou

$$z=\varphi(x+y\sqrt{m})+\psi(x-y\sqrt{m}),$$

résultat qu'on déduiroit immédiatement de $t-mr=0$, par la méthode du n°. 745. Cet exemple, quoique fort simple, entraîne, comme on voit, un calcul assez compliqué, et l'on ne connoît encore aucun moyen pour déterminer, en général, la forme des fonctions qui peuvent satisfaire aux équations (A).

766. La théorie que nous venons d'exposer sur les intégrales des équations différentielles partielles, montre que ce genre d'équations a aussi ses solutions particulières, et donne les moyens de les trouver. En effet, si $U=0$, désigne l'intégrale complète d'une équation

différentielle partielle du premier ordre, et que a et b soient les constantes arbitraires, le système des équations

$$V=0, \qquad \frac{dV}{da}da+\frac{dV}{db}db=0,$$

comprendra toutes les manières possibles de satisfaire à la proposée, et la généralité de l'intégrale $V=0$ dépendra de celle de la détermination des quantités a, b. Nous avons fait, dans le n°. 731, $b=\varphi(a)$, ce qui nous a conduits à l'intégrale générale; mais on peut aussi poser en même-tems $\frac{dV}{da}=0$, $\frac{dV}{db}=0$: ces équations détermineront a et b en x, y et z. Après la substitution des valeurs qu'elles auront données, $V=0$ ne contiendra plus de constantes arbitraires, et sera par conséquent la solution la plus particulière que l'on puisse obtenir pour l'équation différentielle partielle proposée. Il est facile de voir que ce raisonnement conduit aussi aux solutions particulières des équations différentielles partielles des ordres supérieurs, lorsqu'on connoît leur intégrale première complète, et que les solutions obtenues alors sont exprimées par des équations d'un ordre immédiatement inférieur.

Soit pour exemple l'équation $z=ax+by+f(a,b)$; dans laquelle f représente une fonction donnée des constantes a, b; il est facile de reconnoître que cette équation est l'intégrale complète de $z=px+qy+f(p,q)$, et on reviendroit de celle-ci à la première, par la transformation du n°. 738. Cela posé, en faisant varier a et b, on trouvera

$$xda+ydb+f'da+f''db=0,$$

d'où on tirera $x+f'=0$, $y+f''=0$,

équations au moyen desquelles on éliminera a et b, de

$$z=ax+by+f(a,b),$$

et la résultante sera la solution particulière de $z=px+qy+f(p,q)$.

Si l'on avoit $f(a,b)=\alpha\sqrt{1+a^2+b^2}$, l'intégrale proposée et l'équation différentielle partielle correspondante, deviendroient

$$z=ax+by+\alpha\sqrt{1+a^2+b^2},$$
$$z=px+qy+\alpha\sqrt{1+p^2+q^2};$$

les

les équations qui doivent donner la solution particulière seroient alors

$$x+\frac{\alpha a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=0, \qquad y+\frac{\alpha b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=0;$$

on en tireroit

$$a=-\frac{x}{\sqrt{\alpha^2-x^2-y}}, \qquad b=-\frac{y}{\sqrt{\alpha^2-x^2-y^2}};$$

et ces valeurs conduiroient à l'équation

$$\zeta=\sqrt{\alpha^2-x^2-y^2},$$

qui satisfait à l'équation différentielle partielle proposée, et n'est point comprise dans son intégrale complète, ni même dans son intégrale générale, exprimée par le système des équations

$$\zeta=ax+y\varphi(a)+\alpha\sqrt{1+a^2+\varphi(a)^2}$$
$$0=ax+y\varphi'(a)+\frac{\alpha(a+\varphi'(a))}{\sqrt{1+a^2+\varphi(a)^2}}.$$

Les équations (*A*) du n°. 765, jointes à $U=0$, forment un système dans lequel sont comprises implicitement toutes les équations primitives qui peuvent satisfaire à l'équation différentielle partielle du second ordre correspondante à $U=0$. Si l'on élimine des équations (*A*) deux des différentielles da, db, dc, da', db', qui n'y entrent qu'au premier degré, et qu'on égale séparément à zéro les coefficiens des trois qui restent dans l'équation finale, on aura trois nouvelles équations à combiner avec

$$U=0, \qquad \frac{d(U)}{dx}=0, \qquad \frac{d(U)}{dy}=0,$$

pour chasser les cinq quantités a, b, c, a', b' : la résultante sera une solution particulière, du premier ordre, de l'équation du second ordre proposée.

767. En appliquant au sujet qui nous occupe dans ce moment, les principes et la notation employés dans le n°. 668, on en déduira le procédé qu'il faut suivre pour tirer immédiatement des équations différentielles partielles leurs solutions particulières. Soient

$$d'\zeta, \quad d'\frac{d\zeta}{dx}, \quad d'\frac{d\zeta}{dy}, \quad d'\frac{d^2\zeta}{dx^2}, \text{ etc.}$$

les parties que produisent dans la différentielle totale des fonctions ζ, $\frac{d\zeta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dy}$, $\frac{d^2\zeta}{dx^2}$, etc. la variation des constantes arbitraires de l'intégrale complète; en différentiant la proposée par rapport à la caractéristique d', on aura, si cette équation est du premier ordre, un résultat de la forme

$$Pd'\frac{d\zeta}{dx} + Qd'\frac{d\zeta}{dy} + Rd'\zeta = 0,$$

qui deviendra $$P\frac{dd'\zeta}{dx} + Q\frac{dd'\zeta}{dy} + Rd'\zeta = 0,$$

en intervertissant l'ordre des caractéristiques d et d', et sera par rapport à $d'\zeta$, une équation différentielle partielle du premier ordre.

Il faut, dans le cas des solutions particulières, que l'on ne puisse rendre à la valeur de ζ sa généralité par le moyen de celle qu'auroit $d'\zeta$, qui contiendroit nécessairement une fonction arbitraire, si l'on n'avoit pas en même-tems $P = 0$, $Q = 0$. Telles sont les équations qui doivent avoir lieu conjointement avec la proposée, pour que celle-ci ait une solution particulière; et le facteur commun qui les rend identiques toutes trois, sera la solution cherchée.

Pour déduire immédiatement de l'équation différentielle partielle

$$\zeta = px + qy + f(p, q),$$

la solution particulière que nous avons obtenue, au moyen de son intégrale complète, dans le n°. précédent, différentions-la par rapport à la caractéristique d', c'est-à-dire en ne faisant varier que les fonctions ζ, p et q; nous en tirerons

$$d'\zeta = (x + f')\,d'p + (y + f'')\,d'q,$$

et nous conclurons de là les équations

$$x + f' = 0, \qquad y + f'' = 0,$$

qui, par l'élimination de p et de q, nous conduiront au même résultat que ci-dessus, puisqu'elles sont de la même forme que les équations dérivées de l'intégrale complète.

Lorsque $f(p, q) = \alpha\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, les équations précédentes deviendront

$$x + \frac{\alpha p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0, \quad y + \frac{\alpha q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0,$$

et l'on trouvera par conséquent, comme ci-dessus,

$$\zeta = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

pour la solution particulière de l'équation

$$\zeta = px + qy + a\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Quand l'équation proposée sera du second ordre, sa différentielle prise par rapport à la caractéristique d', pourra être représentée par

$$R\frac{d^2d'\zeta}{dx^2} + S\frac{d^2d'\zeta}{dxdy} + T\frac{d^2d'\zeta}{dy^2} + P\frac{dd'\zeta}{dx} + Q\frac{dd'\zeta}{dy} + Nd'\zeta = 0;$$

si cette dernière restoit complète, elle seroit du second ordre par rapport à $d'\zeta$, et pourroit avoir par conséquent la même généralité que la proposée: pour la restreindre, il faudra faire disparoître les termes de l'ordre le plus élevé, en supposant

$$R = 0, \quad S = 0, \quad T = 0;$$

et lorsque ces dernières s'accorderont avec la proposée, le facteur commun qui en résultera sera la solution particulière demandée.

Nous ne pousserons pas plus loin cette méthode, que d'après ce qui précède, il est facile d'étendre à tel ordre et à tel nombre de variables qu'on voudra; nous l'avons présentée d'après le mémoire de Legendre, déjà cité n°. 668; mais on peut aussi la déduire des principes de Lagrange exposés dans le n°. 580.

768. Après avoir inutilement tenté de découvrir l'intégrale première de l'équation $\frac{1}{a^2}\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{\beta\zeta}{x^2}$, à laquelle il avoit été conduit par des recherches sur la propagation du son, Euler imagina de chercher immédiatement la forme de son intégrale seconde, et trouva que l'on pouvoit satisfaire à cette équation par la suite indéfinie

$$\zeta = Ay^n\varphi(y \pm ax) + By^{n+1}\varphi'(y \pm ax) + Cy^{n+2}\varphi''(y \pm ax) + \text{etc.}$$

dans laquelle φ, φ', φ'', etc. représentent les coefficiens différentiels de la fonction φ; il devina la forme des quantités qui devoient entrer sous les fonctions arbitraires, par celles que renfermoit l'intégrale de l'équation $\frac{1}{a^2}\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{d^2\zeta}{dy^2}$, qui est, par rapport aux termes du second ordre, la même que la précédente et qui s'intégre facilement. Enfin, pour

déterminer les coefficiens constans A, B, C, etc. il substitua les valeurs de ζ, $\frac{d^n\zeta}{dx^n}$, $\frac{d^n\zeta}{dy^n}$, dans l'équation proposée, et il égala ensuite à zéro le multiplicateur de chaque fonction arbitraire. En effectuant ces opérations on trouve

$$\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Ay^n\varphi''+\text{etc.}\\
=&n(n-1)Ay^{n-2}\varphi+(n+1)nBy^{n-1}\varphi'+(n+2)(n+1)Cy^n\varphi''+\text{etc.}\\
&\qquad\qquad+\quad 2nAy^{n-1}\varphi'+\quad 2(n+1)By^n\varphi''+\text{etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\quad Ay^n\varphi''+\text{etc.}\\
+&\quad\beta Ay^{n-2}\varphi+\quad\beta By^{n-1}\varphi'+\quad\beta Cy^n\varphi''+\text{etc.}
\end{aligned}$$

les fonctions arbitraires étant indiquées seulement par leurs caractéristiques, pour abréger, et l'on conclut de là

$$\begin{aligned}
&n(n-1)+\beta=0,\\
&(n+1)nB+2nA+\beta B=0,\\
&(n+2)(n+1)C+2(n+1)B+\beta C=0,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

La première de ces équations exprime une condition, car elle détermine β et donne $\beta=-n(n-1)$; on tire ensuite de la seconde $B=-A$, et les équations qui viennent après se réduisent à

$$\left.\begin{aligned}
&2(n+1)B+2(2n+1)C=0\\
&2(n+2)C+2(3n+3)D=0\\
&2(n+3)D+2(4n+6)E=0\\
&2(n+4)E+2(5n+10)F=0\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\quad\text{ou}\quad\left\{\begin{aligned}
&(n+1)B+2(n+\tfrac{1}{2})C=0\\
&(n+2)C+3(n+\tfrac{3}{2})D=0\\
&(n+3)D+4(n+\tfrac{3}{2})E=0\\
&(n+4)E+5(n+\tfrac{4}{2})F=0\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

Prenant les valeurs des coefficiens, après avoir substitué $-A$ au lieu de B, on aura

$$\begin{aligned}
C&=-\frac{(n+1)B}{2(n+\frac{1}{2})}=+\frac{n+1}{2(n+\frac{1}{2})}A\\
D&=-\frac{(n+2)C}{3(n+\frac{3}{2})}=-\frac{n+2}{2\cdot3(n+\frac{1}{2})}A\\
E&=-\frac{(n+3)D}{4(n+\frac{3}{2})}=+\frac{(n+2)(n+3)}{2\cdot3\cdot4(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}A\\
F&=-\frac{(n+4)E}{5(n+\frac{4}{2})}=-\frac{(n+3)(n+4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}A\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

On reconnoît à l'inspection de ces résultats, que la série prise pour représenter ζ, se terminera toutes les fois que n sera un nombre entier négatif. Il suit de là que l'équation

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{d^2\zeta}{dy^2} - \frac{i(i+1)\zeta}{x^2},$$

dans laquelle se change la proposée, lorsqu'on fait $n = -i$, ce qui donne $\beta = -i(i+1)$, a pour intégrale seconde une équation de la forme

$$\zeta = \begin{cases} \frac{1}{y^i}[\varphi(y+ax) + \psi(y-ax)] \\ -\frac{1}{y^{i-1}}[\varphi'(y+ax) + \psi'(y-ax)] \\ +\frac{i-1}{2(i-\frac{1}{2})y^{i-2}}[\varphi''(y+ax) + \psi''(y-ax)] \\ + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

car puisqu'on y satisfait également en mettant $y+ax$ et $y-ax$, sous les fonctions arbitraires, on peut affecter chacune de ces quantités d'une caractéristique différente et comprendre le coefficient indéterminé A dans les fonctions. Si l'on prend $i = 1$, ce qui est le cas le plus simple, la proposée et son intégrale deviendront respectivement

$$\frac{1}{a^2}\frac{a^2\zeta}{dx^2} = \frac{d^2\zeta}{dy^2} - \frac{\zeta}{x^2},$$

$$\zeta = \frac{1}{y}[\varphi(y+ax) + \psi(y-ax)] - \varphi'(y+ax) - \psi'(y-ax).$$

La même méthode pourroit s'appliquer à l'équation différentielle partielle du second ordre et du premier degré,

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + N\zeta = M, \quad (1)$$

si l'on parvenoit à connoître les quantités qui doivent entrer sous les fonctions; nous allons montrer, par une transformation très-remarquable que ces quantités ne dépendent que des termes du second ordre.

769. Supposons qu'à la place des variables x et y, on en introduise deux autres u et v, qui soient des fonctions quelconques des premières, ζ sera dans cette hypothèse une fonction de u et de v, et l'on aura

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy,$$

$$dv=\frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy,$$

$$dz=\frac{dz}{du}du+\frac{dz}{dv}dv;$$

substituant dans la dernière équation les expressions de du et de dv, on trouvera

$$dz=\left(\frac{dz}{du}\frac{du}{dx}dx+\frac{dz}{dv}\frac{dv}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{du}\frac{du}{dy}+\frac{dz}{dv}\frac{dv}{dy}\right)dy,$$

et comparant avec $dz=pdx+qdy$, il viendra

$$p=\frac{dz}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dz}{dv}\frac{dv}{dx},\qquad q=\frac{dz}{du}\frac{du}{dy}+\frac{dz}{dv}\frac{dv}{dy}.$$

En différentiant ces expressions on obtiendra

$$r=\frac{d^2z}{du^2}\frac{du^2}{dx^2}+2\frac{d^2z}{du\,dv}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+\frac{d^2z}{dv^2}\frac{dv^2}{dx^2}+\frac{dz}{du}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{dz}{dv}\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$s=\frac{d^2z}{du^2}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+\frac{d^2z}{du\,dv}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}+\frac{d^2z}{dv^2}\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy}+\frac{dz}{du}\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{dz}{dv}\frac{d^2v}{dx\,dy}+\frac{d^2z}{du\,dv}\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}$$

$$t=\frac{d^2z}{du^2}\frac{du^2}{dy^2}+2\frac{d^2z}{du\,dv}\frac{du}{dy}\frac{dv}{dy}+\frac{d^2z}{dv^2}\frac{dv^2}{dy^2}+\frac{dz}{du}\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{dz}{dv}\frac{d^2v}{dy^2};$$

par la substitution de ces valeurs l'équation

$$Rr+Ss+Tt+Pp+Qq+Nz=M,$$

deviendra

$$\left.\begin{aligned}&\left(R\frac{du^2}{dx^2}+S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+T\frac{du^2}{dy^2}\right)\frac{d^2z}{du^2}\\+&\left(2R\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+S\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)+2T\frac{du}{dy}\frac{dv}{dy}\right)\frac{d^2z}{du\,dv}\\+&\left(R\frac{dv^2}{dx^2}+S\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy}+T\frac{dv^2}{dy^2}\right)\frac{d^2z}{dv^2}\\+&\left(R\frac{d^2u}{dx^2}+S\frac{d^2u}{dx\,dy}+T\frac{d^2u}{dy^2}+P\frac{du}{dx}+Q\frac{du}{dy}\right)\frac{dz}{du}\\+&\left(R\frac{d^2v}{dx^2}+S\frac{d^2v}{dx\,dy}+T\frac{d^2v}{dy^2}+P\frac{dv}{dx}+Q\frac{dv}{dy}\right)\frac{dz}{dv}\\&+Nz\end{aligned}\right\}=M,$$

On peut disposer des fonctions u et v pour simplifier cette équation; si l'on fait

$$\left.\begin{aligned} R\frac{du^2}{dx^2}+S\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+T\frac{du^2}{dy^2}=0 \\ R\frac{dv^2}{dx^2}+S\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy}+T\frac{dv^2}{dy^2}=0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(a),$$

les termes affectés de $\frac{d^2\zeta}{du^2}$ et de $\frac{d^2\zeta}{dv^2}$, disparoîtront et elle prendra la forme

$$\frac{d^2\zeta}{du\,dv}+P_1\frac{d\zeta}{du}+Q_1\frac{d\zeta}{dv}+N_1\zeta=M_1 \qquad (z)$$

on changera les quantités S_1, P_1, Q_1, N_1 et M_1, en fonctions de u et de v, lorsqu'on aura déterminé ces dernières par le moyen des équations posées ci-dessus, qui se réduiront à

$$\left.\begin{aligned} Rm^2+Sm+T=0, \\ Rn^2+Sn+T=0, \end{aligned}\right\}\ (b)$$

si l'on y fait $\frac{du}{dx}=m\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}=n\frac{dv}{dy}$.

Il suit de là, que m et n seront les racines de l'une quelconque des équations (b), et ne renfermeront que les variables x et y; substituant donc les valeurs de $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dv}{dx}$, dans celles de du et de dv, on aura

$$du=\frac{du}{dy}(dy+m\,dx), \qquad dv=\frac{dv}{dy}(dy+n\,dx),$$

et comme il ne s'agit que de satisfaire aux équations (a), on pourra regarder les coefficiens indéterminés $\frac{du}{dy}$ et $\frac{dv}{dy}$, comme les facteurs propres à rendre les fonctions $dy+m\,dx$ et $dy+n\,dx$, différentielles exactes; en désignant par U et V, les intégrales de ces différentielles, on aura les équations $u=U$, $v=V$, qui serviront à déterminer x et y, en u et v. (*)

(*) Si l'on pouvoit intégrer l'équation (2), l'équation (1) seroit censée intégrée, puisque la recherche de u et de v ne dépend que des équations du premier ordre; or voici comment Euler traite l'équation (2). Il fait $\zeta=\alpha^n\beta$, α et β étant deux

770. Supposons maintenant que ζ soit développé dans une série de la forme

$$A + B\varphi(\alpha) + C\varphi'(\alpha) + D\varphi''(\alpha) + \text{etc.}$$
$$+ B_1\psi(\beta) + C_1\psi'(\alpha) + D_1\psi''(\beta) + \text{etc.}$$

et substituons, dans l'équation (2), cette expression ainsi que celles qui en résultent pour les coefficiens différentiels de ζ, afin de déterminer les quantités α et β comprises sous les fonctions arbitraires. Nous pourrons d'abord faire abstraction de l'une de ces fonctions, de ψ, par exemple; car il est aisé de voir que les termes qu'elle produira dans le résultat final, seront semblables à ceux que donne

---

fonctions indéterminées de u et de v; en substituant les valeurs de ζ et de ses coefficiens différentiels dans la proposée, il obtient

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2v}{du\,dv} + \left(\frac{d\alpha}{dv} + P_1\right)\frac{d\beta}{du} + \left(\frac{d\alpha}{du} + Q_1\right)\frac{d\beta}{dv}\\ &+ \left(\frac{d^2\alpha}{du\,dv} + \frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv} + P_1\frac{d\alpha}{dv} + Q_1\frac{d\alpha}{dv} + N_1\right)\beta\end{aligned}\right\} = M_1 e^{-\alpha},$$

et pour réduire cette dernière à la forme

$$\frac{d^2\beta}{du\,dv} + \left(\frac{d\alpha}{dv} + P_1\right)\frac{d\beta}{du} = Me^{-\alpha},$$

qui s'intégre facilement par rapport à la fonction β, lorsque α est donné en u et v (n°. 743), il suppose qu'on ait $\frac{d\alpha}{du} + Q_1 = 0$,

$$\frac{d^2\alpha}{du\,dv} + \frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv} + P_1\frac{d\alpha}{du} + Q_1\frac{d\alpha}{dv} + N_1 = 0.$$

Il tire de la première de ces équations, $\alpha = -\int Q_1\,du + V$, V désignant une fonction arbitraire de v, et il change la seconde en $N_1 - P_1Q_1 - \frac{dQ_1}{dv} = 0$, en y mettant à la place de $\frac{d\alpha}{du}$ et de $\frac{d^2\alpha}{du\,dv}$, leurs valeurs $-Q_1$ et $-\frac{dQ_1}{dv}$. Lorsque les quantités N_1, P_1 et Q_1, satisferont à cette équation, la proposée s'intégrera avec deux fonctions arbitraires, l'une de u et l'autre de v; c'est pourquoi on peut négliger V dans l'expression de α: on obtiendra β, en changeant x en u, y en v, P en $\frac{d\alpha}{dv} + P_1$, et Q en $M_1e^{-\alpha}$, dans l'intégrale de l'équation $\frac{d^2\zeta}{dx\,dy} + P\frac{d\zeta}{dx} = Q$, trouvée n°. 743. La valeur de N_1, donnée par l'équation de condition, étant mise dans l'équation (2), celle-ci devient

$$\frac{d^2\zeta}{du\,dv} + P_1\frac{d\zeta}{du} + Q_1\frac{d\zeta}{dv} + \left(P_1Q_1 + \frac{dQ_1}{dv}\right)\zeta = M_1;$$

la

la fonction φ, et seroient susceptibles d'être traités comme ces derniers. En prenant donc seulement

$$\zeta = A + B\varphi(\alpha) + C\varphi'(\alpha) + D\varphi''(\alpha) + \text{etc.}$$

nous trouverons

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\zeta}{du} = \frac{dA}{du} + \frac{dB}{du}\varphi(\alpha) + \frac{dC}{du}\varphi'(\alpha) + \text{etc.}\\ + B\frac{d\alpha}{du}\varphi'(\alpha) + C\frac{d\alpha}{du}\varphi''(\alpha) + \text{etc.}\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dv} = \frac{dA}{dv} + \frac{dB}{dv}\varphi(\alpha) + \frac{dC}{dv}\varphi'(\alpha) + \text{etc.}\\ + B\frac{d\alpha}{dv}\varphi'(\alpha) + C\frac{d\alpha}{dv}\varphi''(\alpha) + \text{etc.}\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\zeta}{du\,dv} = \frac{d^2A}{du\,dv} + \frac{d^2B}{du\,dv}\varphi(\alpha) + \frac{d^2C}{du\,dv}\varphi'(\alpha) + \text{etc.}\\ + \frac{dB}{du}\frac{d\alpha}{dv}\varphi'(\alpha) + \frac{dC}{du}\frac{d\alpha}{dv}\varphi''(\alpha) + \text{etc.}\\ + \frac{dB}{dv}\frac{d\alpha}{du}\varphi'(\alpha) + \frac{dC}{dv}\frac{d\alpha}{du}\varphi''(\alpha) + \text{etc.}\\ + B\frac{d^2\alpha}{du\,dv}\varphi'(\alpha) + C\frac{d^2\alpha}{du\,dv}\varphi''(\alpha) + \text{etc.}\\ + B\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}\varphi''(\alpha) + C\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}\varphi'''(\alpha) + \text{etc.}\end{aligned}\right\};$$

formule qui renferme une infinité d'équations intégrables du premier degré et du second ordre. On pourroit faire disparoître dans la transformée le terme affecté de $\frac{d\beta}{du}$, au lieu de celui qui contient $\frac{d\beta}{dv}$, et l'on arriveroit ainsi à

$$\frac{d^2\zeta}{du\,dv} + P_1\frac{d\zeta}{du} + Q_1\frac{d\zeta}{dv} + \left(P_1Q_1 + \frac{dP_1}{du}\right)\zeta = M_1.$$

Si l'on prend pour exemple $\frac{d^2\zeta}{du\,dv} + a\frac{d\zeta}{du} + b\frac{d\zeta}{dv} + c\zeta = M_1$;

on trouvera l'équation de condition $c - ab = 0$, puis $\alpha = -bu$, d'où

$$\frac{d^2\beta}{du\,dv} + a\frac{d\beta}{du} = M_1e^{bu},$$

$$\beta = -e^{-av}\int du\int e^{av+bu}M_1\,dv + e^{-av}\varphi(u) + \downarrow(v),$$

et par conséquent

$$\zeta = e^{-av-bu}\int du\int e^{av+bu}M_1\,dv + e^{-av}\varphi(u) + e^{-bu}\downarrow(v).$$

substituant ces expressions dans l'équation (2), ordonnant le résultat par rapport aux fonctions arbitraires, égalant à zéro ce qui multiplie chacune d'elles, et nous bornant, pour plus de simplicité, aux trois premiers termes de la valeur de z, nous obtiendrons les équations

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2A}{du\,dv}+P_1\frac{dA}{du}+Q_1\frac{dA}{dv}+N_1A=M_1,\\
&\frac{d^2B}{du\,dv}+P_1\frac{dB}{du}+Q_1\frac{dB}{dv}+N_1B=0,\\
&\frac{d^2C}{du\,dv}+P_1\frac{dC}{du}+Q_1\frac{dC}{dv}+N_1C\\
&+B\left(\frac{d^2\alpha}{du\,dv}+P_1\frac{d\alpha}{du}+Q_1\frac{d\alpha}{dv}\right)+\frac{dB}{du}\frac{d\alpha}{dv}+\frac{dB}{dv}\frac{d\alpha}{du}\\
&\frac{dC}{du}\frac{d\alpha}{dv}+\frac{dC}{dv}\frac{d\alpha}{du}+C\left(\frac{d^2\alpha}{du\,dv}+P_1\frac{d\alpha}{du}+Q_1\frac{d\alpha}{dv}\right)+B\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}=0,\\
&C\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}=0,
\end{aligned}\right\}=0,$$

qu'il ne sera pas nécessaire d'intégrer complètement, mais auxquelles il suffira de satisfaire, pour avoir les fonctions A, B, C, etc.

La dernière donne d'abord $\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}=0$, qui se décompose dans les facteurs $\frac{d\alpha}{du}=0$, $\frac{d\alpha}{dv}=0$, desquels il résulte que α ne sauroit être qu'une fonction de v sans u, ou une fonction de u sans v; et comme il est évident que quel que soit le nombre de termes qu'on donne à la série qui représente z, on parviendra toujours à une dernière équation de condition de la même forme que dans le cas particulier que nous venons d'examiner, nous conclurons de là que les fonctions arbitraires qui peuvent entrer dans la valeur de z, sont nécessairement de la forme $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, du moins lorsque la transformation employée ci-dessus peut s'effectuer.

771. Il se présente en effet deux cas dans lesquels elle ne sauroit avoir lieu : 1°. Lorsque les racines des équations (b) (n°. précéd.) sont égales, ce qui arrive quand on a $4RT=S^2$; il vient alors

$$u=\int\frac{du}{dy}(dy+m\,dx),\qquad v=\int\frac{dv}{dy}(dy+m\,dx),$$

d'où il résulte que les variables u et v ne peuvent être regardées comme indépendantes : on se bornera dans ce cas à chasser une seule des variables x et y. En supposant, par exemple, que x est donné en u, par le moyen de l'équation $u = U$, on aura

$$\frac{du}{dx} = m\frac{du}{dy}, \qquad p = m\frac{d\zeta}{du}\frac{du}{dy}, \qquad q = \frac{d\zeta}{du}\frac{du}{dy} + \frac{d\zeta}{dy}\ (*)$$

$$r = m^2\frac{d^2\zeta}{du^2}\frac{du^2}{dy^2} + m\frac{d\zeta}{du}\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d\zeta}{du}\frac{du}{dy}\frac{dm}{dx}$$

$$s = m\frac{d^2\zeta}{du^2}\frac{du^2}{dy^2} + m\frac{d\zeta}{du}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d\zeta}{du}\frac{du}{dy}\frac{dm}{dy}$$

$$t = \frac{d^2\zeta}{du^2}\frac{du^2}{dy^2} + \frac{d\zeta}{du}\frac{du^2}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2};$$

avec ces valeurs, et en observant $Rm^2 + Sm + T = 0$, on donnera à la proposée la forme $\frac{d^2\zeta}{dy^2} + Q_1\frac{d\zeta}{dy} + P_1\frac{d\zeta}{du} + N_1\zeta = M_1$.

2°. Quand on a en même tems $S = 0$, $T = 0$, dans l'équation (1), il résulte des équations (a) $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{dv}{dx} = 0$, ce qui fait voir que les nouvelles variables u et v ne dépendent que de y; mais comme l'équation proposée est alors

$$Rr + Pp + Qq + N\zeta = M,$$

en divisant tous ses termes par P, on lui donnera la forme

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + P_1\frac{d\zeta}{dx} + Q_1\frac{d\zeta}{dy} + N_1\zeta = M_1,$$

semblable à celle de l'équation du cas précédent: il suffira donc d'examiner en particulier l'équation ci-dessus, pour savoir à quoi s'en tenir sur les exceptions annoncées au commencement de cet article. Si l'on y fait $\zeta = A + B\varphi(\alpha) + C\varphi'(\alpha) + D\varphi''(\alpha) + \text{etc.}$

(*) Il faut bien se garder de confondre le $\frac{d\zeta}{dy}$ du second membre de la dernière de ces expressions, avec q, qui représente aussi le coefficient différentiel $\frac{d\zeta}{dy}$, mais avant la transformation; car l'élimination de x, au moyen de l'équation $u = U$, changera la forme de ζ par rapport à la variable y, lorsque U contiendra cette variable.

en opérant comme dans le n°. précédent, on trouvera

$$\frac{d^2A}{dx^2} + P_1\frac{dA}{dx} + Q_1\frac{dA}{dy} + N_1A = M_1$$

$$\frac{d^2B}{dx^2} + P_1\frac{dB}{dx} + Q_1\frac{dB}{dy} + N_1B = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2C}{dx^2} + P_1\frac{dC}{dx} + Q_1\frac{dC}{dy} + N_1C \\ + B\frac{d^2\alpha}{dx^2} + 2\frac{dB}{dx}\frac{d\alpha}{dx} + P_1B\frac{d\alpha}{dx} + Q_1B\frac{d\alpha}{dy}\end{aligned}\right\} = 0$$

$$2\frac{dC}{dx}\frac{d\alpha}{dx} + C\frac{d^2\alpha}{dx^2} + B\frac{d\alpha^2}{dx^2} = 0,$$

$$C\frac{d\alpha^2}{dx^2} = 0.$$

La dernière de ces équations donne $\frac{d\alpha}{dx} = 0$; l'avant-dernière donne $C = 0$, ce qui réduit la troisième à $Q_1B\frac{d\alpha}{dy} = 0$; mais comme on ne sauroit anéantir B, sans faire disparoître la fonction arbitraire φ, on ne peut remplir la condition actuelle que de deux manières, savoir: quand $Q_1 = 0$, ou quand $\frac{d\alpha}{dy} = 0$. Le premier cas est le seul qui admette une fonction arbitraire; car dans le second $\alpha = const$, puisque l'on a en même tems $\frac{d\alpha}{dx} = 0$, et $\frac{d\alpha}{dy} = 0$. Il est d'ailleurs évident, qu'à cause de $\frac{d\alpha}{dy} = 0$, α ne renferme que y, et que par conséquent $\varphi(\alpha)$ revient à $\varphi(y)$: on trouveroit aussi que $\downarrow(\beta)$ se change en $\downarrow(y)$. On se convaincra sans peine que l'on obtiendroit des résultats semblables aux précédens, quel que fût le nombre des termes de la valeur de ζ, et Laplace, qui présenta le premier aux Géomètres les considérations exposées dans cet article et dans les deux précédens, en conclut que l'équation

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + P_1\frac{d\zeta}{dx} + Q_1\frac{d\zeta}{dy} + N_1\zeta = M_1,$$

n'admet pas d'intégrale générale lorsque Q_1 n'est pas nul, quoique

cependant elle puisse être encore susceptible, dans ce cas, d'une infinité de solutions particulières très-étendues. Pour en donner un exemple il prend l'équation

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + a\frac{d\zeta}{dx} + b\frac{d\zeta}{dy} + c\zeta = 0,$$

dans laquelle a, b, c désignent des constantes, et il y satisfait par un procédé analogue à celui que nous avons appliqué, dans le n°. 779, à l'équation $Rr + Ss + Pp + Qq + N\zeta = 0$, dont celle-ci n'est qu'un cas particulier.

772. Revenons maintenant à l'équation (2), en y supposant d'abord $M_1 = 0$, circonstance d'après laquelle on peut supprimer A dans l'expression de ζ, et la réduire à

$$B\varphi(u) + C\varphi'(u) + D\varphi''(u) + \text{etc.}$$
$$+ B_1\psi(v) + C_1\psi'(v) + D_1\psi''(v) + \text{etc.}$$

Si, en n'ayant égard qu'à l'une des fonctions arbitraires, la valeur de ζ ne doit renfermer qu'un seul terme, c'est-à-dire, si l'on doit avoir $\zeta = B\varphi(u)$ seulement, la substitution de cette valeur dans l'équation (2) devenue

$$\frac{d^2\zeta}{du\,dv} + P_1\frac{d\zeta}{du} + Q_1\frac{d\zeta}{dv} + N_1\zeta = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

par la suppression de son second membre, donnera les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2B}{du\,dv} + P_1\frac{dB}{du} + Q_1\frac{dB}{dv} + N_1B = 0 \\ \frac{dB}{dv} + P_1B = 0 \end{aligned}\right\};$$

et l'on verra facilement qu'il faut, pour que ces équations s'accordent, que la première soit de la forme

$$\frac{d.\left(\frac{dB}{dv} + P_1B\right)}{du} + \mu\left(\frac{dB}{dv} + P_1B\right) = 0,$$

μ étant un facteur quelconque. En effectuant la différentiation indiquée, et en comparant le résultat avec la proposée, on obtiendra

$$\mu = Q_1,\ N_1 = P_1Q_1 + \frac{dP_1}{du};$$

la dernière de ces équations exprimera donc la condition qui doit avoir lieu pour que ζ ait la forme qu'on lui suppose; et lorsqu'elle sera satisfaite, l'intégration de l'équation du premier ordre $\frac{dB}{dv} + P_1 B = 0$, dont il suffit de tirer une valeur particulière de B, donnera $B = e^{-\int P_1 dv}$.

Les opérations que nous venons d'effectuer sur B, peuvent être rapportées immédiatement à la fonction ζ; car la quantité $\frac{dB}{dv} + P_1 B$, équivaut à $\frac{1}{\varphi(u)}\left(\frac{d\zeta}{dv} + P_1\zeta\right)$, dans l'hypothèse de $\zeta = B\varphi(u)$. En faisant par conséquent $\frac{d\zeta}{dv} + P_1\zeta = \zeta'$, on aura $\zeta' = 0$, et l'on conclura de là que l'équation (3), qui peut être mise sous la forme

$$\frac{d.\left(\frac{d\zeta}{dv} + P_1\zeta\right)}{du} + Q_1\left(\frac{d\zeta}{dv} + P_1\zeta\right) + \zeta\left(N_1 - P_1 Q_1 - \frac{dP_1}{du}\right) = 0,$$

ou sous celle-ci $\frac{d\zeta'}{du} + Q_1\zeta' + \alpha\zeta = 0$ ..... (α)

en faisant pour abréger $N - P_1 Q_1 - \frac{dP_1}{du} = \alpha$, ne sauroit avoir lieu en même tems que $\zeta' = 0$, à moins qu'on n'ait $\alpha = 0$ ou

$$N_1 - P_1 Q_1 - \frac{dP_1}{du} = 0.$$

Si l'équation (α) ne devient pas identique d'après l'équation $\zeta' = 0$, on pourra la regarder comme une transformée de l'équation (3) qui donneroit ζ, si l'on connoissoit ζ'; et si cette dernière fonction étoit de la forme $B'\pi(u)$, il en résulteroit

$$\zeta = -\frac{1}{\alpha}\left(Q_1 B' + \frac{dB'}{du}\right)\pi(u) + B'\pi'(u):$$

l'expression de ζ contiendroit par conséquent deux termes; mais pour obtenir ζ', il faudroit éliminer ζ entre l'équation (α) et $\frac{d\zeta}{dv} + P_1\zeta = \zeta'$; or, c'est ce qui s'effectuera ainsi qu'il suit. En divisant toute l'équation (α) par α, et en la différentiant par rapport à v, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\zeta'}{du\,dv}-\frac{1}{\alpha^2}\frac{d\alpha}{dv}\frac{d\zeta'}{du}+\frac{Q_1}{\alpha}\frac{d\zeta'}{dv}\\&+\left(\frac{1}{\alpha}\frac{dQ_1}{dv}-\frac{1}{\alpha^2}Q_1\frac{d\alpha}{dv}\right)'+\frac{d\zeta}{dv}\end{aligned}\right\}=0;$$

si l'on ajoute à ce résultat l'équation (α) divisée par α et multipliée par P_1, la somme se réduira, au moyen de l'équation $\frac{d\zeta}{dv}+P_1\zeta=\zeta'$, à

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\zeta'}{du\,dv}+\left(P_1-\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dv}\right)\frac{d\zeta'}{du}+Q_1\frac{d\zeta'}{dv}\\&+\left(\alpha-\frac{Q_1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dv}+\frac{dQ_1}{dv}+P_1Q_1\right)\zeta'\end{aligned}\right\}:$$

posant $P_1-\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dv}=P'_1$, $\alpha-\frac{Q_1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dv}+\frac{dQ_1}{dv}+P_1Q_1=N'_1$,

on aura cette nouvelle transformée

$$\frac{d^2\zeta'}{du\,dv}+P'_1\frac{d\zeta'}{du}+Q'_1\frac{d\zeta'}{dv}+N'_1\zeta'=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Puisque cette équation est semblable à l'équation (3), nous trouverons, par les raisonnemens faits plus haut relativement à celle-ci, que ζ' sera de la forme $B'\pi(u)$, si l'on a

$$N'_1=P'_1Q'_1+\frac{dP'_1}{du},$$

et qu'alors l'équation (4), qui prend la forme

$$\frac{d\zeta''}{du}+Q_1\frac{d\zeta''}{du}+\alpha'\zeta'=0;\ \ldots\ldots\ldots\ (\alpha')$$

en faisant

$$\frac{d\zeta'}{dv}+P'_1\zeta'=\zeta'', \qquad N'_1-P'_1Q_1-\frac{dP'_1}{du}=\alpha';$$

deviendra identique dans l'hypothèse de $\zeta''=0$.

Quand cette dernière condition n'aura pas lieu ζ' ne pourra être exprimé par un seul terme; il faudra opérer sur l'équation (α') comme on a fait à l'égard de l'équation (α), afin de chercher s'il n'est pas possible d'obtenir une expression de ζ'' qui soit de la forme $B''\pi(u)$; et il est facile de voir, en remontant de ζ'' à ζ' et de ζ' à ζ par les équations (α') et (α), que ζ' sera de la forme $B'\pi(u)+C'\pi'(u)$,

et ζ de la forme $B\pi(u) + C\pi'(u) + D\pi''(u)$; ce dernier auroit donc alors trois termes. Sans effectuer les calculs, les analogies que présente le systême des notations employées ci-dessus, font voir que pour obtenir les équations relatives à ce cas, il suffit de changer dans celles qui ont rapport au précédent,

$$P_1 - \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dv} = P'_1 \text{ en } P'_1 - \frac{1}{\alpha'}\frac{d\alpha'}{dv} = P''_1$$

$$\alpha - \frac{Q_1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dv} + \frac{dQ_1}{dv} + P_1 Q_1 = N_1 \text{ en } \alpha - \frac{Q_1}{\alpha'}\frac{d\alpha'}{dv} + \frac{dQ_1}{dv} + P'_1 Q_1 = N''_1 ;$$

on arrivera de cette manière à

$$\frac{d^2\zeta''}{du\,dv} + P''_1\frac{d\zeta''}{du} + Q_1\frac{d\zeta''}{du} + N''_1\zeta'' = 0 ; \ldots\ldots (\zeta)$$

équation que l'on mettra sous la forme

$$\frac{d\zeta'''}{du} + Q_1\frac{d\zeta'''}{du} + \alpha''\zeta'' = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha'')$$

en faisant

$$\frac{d\zeta''}{dv} + P''_1\zeta'' = \zeta''', \qquad N''_1 - P''_1 Q_1 - \frac{dP''_1}{du} = \alpha'',$$

et qui sera satisfaite par $\zeta''' = 0$, si l'on a $\alpha'' = 0$. Rien n'empêche maintenant que l'on ne pousse ce procédé aussi loin qu'on voudra ; il ne reste plus qu'à montrer comment il conduit à la valeur générale de ζ. Supposons que l'opération s'arrête d'elle-même à la troisième transformée, c'est-à-dire qu'on ait

$$\alpha'' = N''_1 - P''_1 Q_1 - \frac{dP''_1}{du} = 0,$$

l'équation (α'') se réduit alors à $\frac{d\zeta'''}{du} + Q_1\zeta''' = 0$;

on y satisferoit si l'on faisoit ζ'', mais comme elle n'est que du premier ordre on en tire sur-le-champ cette valeur générale :

$\zeta''' = e^{-\int Q_1 du}\downarrow(v)$. L'équation $\frac{d\zeta''}{dv} - P''_1\zeta'' = \zeta'''$ devient ensuite

$$\frac{d\zeta''}{dv} + P''_1\zeta'' = e^{-\int Q_1 du}\downarrow(v)$$

et donne par son intégration

$$\zeta'' = e^{-\int P''_1 dv}\left[\varphi(u) + \int e^{\int P''_1 dv - \int Q_1 du} dv \downarrow(v)\right];$$

de

de simples différentiations suffisent à présent pour arriver jusqu'à l'expression de ζ; on tire en effet des équations (α') et (α)

$$\zeta' = \frac{-\frac{d\zeta''}{du} - Q_1\zeta''}{N''_1 - P'_1 - \frac{dP_1}{du}}, \qquad \zeta = \frac{-\frac{d\zeta'}{du} - Q_1\zeta'}{N_1 - P_1Q_1 - \frac{dP'_1}{du}},$$

et la dernière de ces valeurs étant développée, renfermera deux fonctions arbitraires, dont une seulement, savoir $\downarrow(\nu)$, sera comprise sous des signes d'intégration.

773. Pour rendre l'exposition de la méthode plus simple, nous avons fait dans l'équation (z), $M_1 = 0$; voici comment il faudroit opérer si cette équation étoit complète, et qu'on eût par conséquent

$$\frac{d^2\zeta}{du\,d\nu} + P_1\frac{d\zeta}{du} + Q_1\frac{d\zeta}{d\nu} + N_1\zeta = M_1, \ldots\ldots\ldots (z).$$

On feroit encore $\frac{d\zeta}{d\nu} + P_1\zeta = \zeta'$, et la transformée que nous avons désignée par (α) seroit remplacée par

$$\frac{d\zeta'}{du} + Q_1\zeta' + \alpha\zeta = M_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)',$$

α conservant la même valeur que ci-dessus; on tireroit de celle-ci

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d\zeta'}{du} + \frac{Q_1}{\alpha}\zeta' + \zeta = \frac{M_1}{\alpha},$$

on différentieroit cette dernière par rapport à ν, on l'ajouteroit au résultat, après l'avoir multipliée par P_1, et on feroit la réduction que donne l'équation $\frac{d\zeta}{du} + P_1\zeta = \zeta'$: on parviendroit ainsi à une équation du second ordre délivrée de ζ, et qui prendroit la forme

$$\frac{d^2\zeta'}{du\,d\nu} + P'_1\frac{d\zeta'}{d\nu} + Q_1\frac{d\zeta'}{d\nu} + N'_1\zeta' = M'_1,$$

en posant

$$P_1 - \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\nu} = P'_1;$$

$$\alpha - \frac{Q_1}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\nu} + \frac{dQ_1}{d\nu} + P_1Q_1 = N'_1;$$

$$\frac{dM_1}{d\nu} - \frac{M_1}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\nu} + P_1M_1 = M'_1.$$

On feroit ensuite $\frac{d\zeta'}{dv} + P'_1\zeta' = \zeta''$, d'où il résulteroit

$$\frac{d\zeta''}{du} + Q_1\zeta'' + \alpha'\zeta' = M'_1 \ldots\ldots (\alpha')',$$

au lieu de l'équation (α'), et puis on arriveroit à

$$\frac{d^2\zeta''}{du\,dv} + P''_1\frac{d\zeta''}{du} + Q_1\frac{d\zeta''}{dv} + N''_1\zeta'' = M''_1,$$

équation dans laquelle les quantités P''_1, N''_1, M''_1, se forment en marquant d'un accent chaque lettre des expressions de P'_1, N'_1, M'_1; quant à Q_1, il est commun à toutes les transformées : la marche est maintenant assez évidente pour continuer autant qu'il sera nécessaire.

Si dans la suite des quantités $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, etc. on en rencontre une qui soit nulle, qu'on ait, par exemple, $\alpha'' = 0$, ζ''' sera déterminé par l'équation $\frac{d\zeta'''}{du} + Q_1\zeta'' = M''_1$,

de laquelle on tirera

$$\zeta''' = e^{-\int Q_1 du}\left[\downarrow(v) + \int e^{\int Q_1 du} M''_1 du\right];$$

et en intégrant ensuite l'équation $\frac{d\zeta''}{dv} + P''_1\zeta'' = \zeta'''$,

on obtiendra

$$\zeta'' = e^{-\int P''_1 du}\left\{\varphi(u) + \int e^{\int P''_1 du - \int Q_1 dv} \times dv\left[\downarrow(v) + \int e^{\int Q_1 du} M''_1 du\right]\right\};$$

on remontera enfin à ζ par les expressions suivantes,

$$\zeta' = \frac{-\frac{d\zeta''}{du} - Q_1\zeta'' + M'_1}{N'_1 - P'_1 Q_1 - \frac{dP'_1}{du}}, \qquad \zeta = \frac{-\frac{d\zeta'}{du} - Q_1\zeta' + M_1}{N_1 - P_1 Q_1 - \frac{dP_1}{du}},$$

tirées des transformées $(\alpha')'$ et $(\alpha)'$.

Dans la valeur de ζ déduite des formules précédentes, c'est la fonction $\downarrow(v)$ qui se trouve engagée sous les signes d'intégration; mais il pourroit arriver que ce dût être la fonction $\varphi(u)$, et alors la suite des transformations indiquées ci-dessus deviendroit indéfinie. Pour parvenir à un résultat composé d'un nombre fini de termes, il faudroit opérer par rapport à l'autre fonction arbitraire, en supposant d'abord $\zeta = A + B_1\downarrow(v) + \text{etc.}$ et faire

en conséquence $\frac{d\zeta}{du}+Q_1\zeta=\zeta'$, ce qui se réduit, comme on voit, à changer dans les diverses transformées rapportées précédemment, et dans les expressions qui en dérivent, u en v, P_1 en Q_1 et réciproquement.

774. Appliquons à l'équation

$$ar+bs+ct+\frac{ep+fq}{hx+ky}+\frac{g\zeta}{(hx+ky)^2}=M,$$

où a, b, c, e, f, g, h, k, sont des constantes, la méthode des articles précédens. Les équations (b) deviennent

$$am^2+bm+c=0, \qquad an^2+bn+c=0,$$

et donnent $m=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $n=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

d'où il suit

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\frac{du}{dy}, \qquad \frac{dv}{dx}=\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=\frac{dv}{dy}.$$

Passant aux intégrales de ces équations, on trouve

$$u=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)x+y, \quad v=\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)x+y,$$

et l'on en déduit

$$x=\frac{a(u-v)}{\sqrt{b^2-4ac}}, \qquad y=\frac{(b+\sqrt{b^2-4ac})u-(b-\sqrt{b^2-4ac})v}{2\sqrt{b^2-4ac}},$$

$$p=\frac{d\zeta}{du}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+\frac{d\zeta}{dv}\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right),$$

$$q=\frac{d\zeta}{du}+\frac{d\zeta}{dv},$$

$$r=\frac{d^2\zeta}{du^2}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2+2c\,\frac{d^2\zeta}{dudv}+\frac{d^2\zeta}{dv^2}\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2,$$

$$s=\frac{d^2\zeta}{du^2}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)-b\,\frac{d^2\zeta}{dudv}+\frac{d^2\zeta}{dv^2}\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right),$$

$$t=\frac{d^2\zeta}{du^2}+2\,\frac{d^2\zeta}{dudv}+\frac{d^2\zeta}{dv^2}.$$

En substituant ces valeurs dans la proposée, les termes multipliés

par $\frac{d^2\zeta}{du^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dv^2}$, se détruiront, et si l'on met les valeurs de x et de y dans M_1, et que l'on fasse, pour abréger,

$$\frac{2ah+k(b+\sqrt{b^2-4ac})}{2\sqrt{b^2-4ac}}=h_1,\quad -\frac{2ah+k(b-\sqrt{b^2-4ac})}{2\sqrt{b^2-4ac}}=k_1,$$

$$\frac{2af-be+e\sqrt{b^2-4ac}}{2(4ac-b^2)}=e_1,\quad \frac{2af-be-e\sqrt{b^2-4ac}}{2(4ac-b^2)}=f_1,$$

$$\frac{g}{4ac-b^2}=g_1,\qquad \frac{M}{4ac-b^2}=M_1,$$

on aura

$$\frac{d^2\zeta}{du\,dv}+\frac{e_1}{h_1u+k_1v}\frac{d\zeta}{du}+\frac{f_1}{h_1u+k_1v}\frac{d\zeta}{dv}+\frac{g_1\zeta}{(h_1u+k_1v)^2}=M_1;$$

posant ensuite $h_1u=u_1$, $k_1v=v_1$, il en résultera

$$\frac{d\zeta}{du}=h_1\frac{d\zeta}{du_1},\qquad \frac{d\zeta}{dv}=k_1\frac{d\zeta}{dv_1},\qquad \frac{d^2\zeta}{du\,dv}=h_1k_1\frac{d^2\zeta}{du_1\,dv_1},$$

$$\frac{d^2\zeta}{du_1dv_1}+\frac{e_1}{k_1(u_1+v_1)}\frac{d\zeta}{du_1}+\frac{f_1}{h_1(u_1+v_1)}\frac{d\zeta}{dv_1}+\frac{g_1\zeta}{h_1k_1(u_1+v_1)^2}=\frac{M_1}{h_1k_1},$$

équation qui revient à

$$\frac{d^2\zeta}{du\,dv}+\frac{e_1}{u+v}\frac{d\zeta}{du}+\frac{f_1}{u+v}\frac{d\zeta}{dv}+\frac{g_1\zeta}{(u+v)^2}=M_1,$$

en écrivant e_1, f_1, g_1, M_1, au lieu de $\frac{e_1}{k_1}$, $\frac{f_1}{h_1}$, $\frac{g_1}{h_1k_1}$, $\frac{M_1}{h_1k_1}$, et en changeant u_1 et v_1, en u et v.

Si on la compare avec l'équation (2), on aura

$$P_1=\frac{e_1}{u+v},\qquad Q_1=\frac{f_1}{u+v},\qquad N_1=\frac{g_1}{(u+v)^2},$$

d'où l'on déduira

$$\alpha=\frac{g_1-e_1f_1+e_1}{(u+v)^2},\qquad P'_1=\frac{e_1+2}{u+v},\qquad N'_1=\frac{g_1+f_1+e_1}{(u+v)^2},$$

$$M'_1=\frac{dM_1}{dv}+\frac{e_1+2}{u+v}M_1;$$

la transformée (4) deviendra donc

$$\frac{d^2\zeta'}{du\,dv}+\frac{e'_1}{u+v}\frac{d\zeta'}{du}+\frac{f_1}{u+v}\frac{d\zeta'}{dv}+\frac{g'_1\zeta'}{(u+v)^2}=M'_1,$$

en faisant $e_1+2=e'_1$, $g_1+f_1+e_1=g'_1$.

On trouvera ensuite

$$\alpha'=\frac{g'_1-e'_1f_1+e'_1}{(u+v)^2},\quad P''_1=\frac{e'_1+2}{u+v},\quad N''_1=\frac{g'_1+f_1+e'_1}{(u+v)^2},$$

$$M''_1=\frac{dM'_1}{dv}+\frac{e'_1+2}{u+v}M'_1;$$

la transformée (5) deviendra par conséquent

$$\frac{d^2\zeta''}{du\,dv}+\frac{e''_1}{u+v}\frac{d\zeta''}{du}+\frac{f_1}{u+v}\frac{d\zeta''}{dv}+\frac{g''_1\zeta''}{(u+v)^2}=M''_1,$$

en prenant $e'_1+2=e''_1$, $g'_1+f_1+e'_1=g''_1$,

ce qui donne $$\alpha''=\frac{g''_1-e''_1f_1+e''_1}{(u+v)^2}.$$

Il suffit des résultats ci-dessus, pour faire connoître la loi que suivent les quantités e_1, e'_1, e''_1, etc. g_1, g'_1, g''_1, etc. $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc. car on trouve

$$\begin{aligned} e'_1&=e_1+2 & g'_1&=g_1+f_1+e_1-1+1.1\\ e''_1&=e_1+4 & g''_1&=g_1+2(f_1+e_1)-2+2.2\\ e'''_1&=e_1+6 & g'''_1&=g_1+3(f_1+e_1)-3+3.3\\ &\text{etc.} & &\text{etc.}\end{aligned}$$

et désignant par i le rang d'une transformée quelconque, on a

$$e_1^{(i)}=e_1+2i,\quad g_1^{(i)}=g_1+(f_1+e_1-1)i+i^2,$$

$$\alpha^{(i)}=\frac{g_1^{(i)}-f_1e_1^{(i)}+e_1^{(i)}}{(u+v)^2}=\frac{g_1-f_1e_1+(1+e_1-f_1)i+i^2}{(u+v)^2};$$

l'équation de condition donnée par $\alpha^i=0$, sera donc

$$g_1-f_1e_1+e_1+(1+e_1-f_1)i+i^2=0;$$

en la résolvant par rapport à i, elle donnera

$$i=\frac{f_1-e_1-1\pm\sqrt{(f_1+e_1-1)^2-4g_1}}{2}.$$

Il faudra que cette valeur de i soit un nombre entier positif pour que l'on puisse obtenir une dernière transformée par rapport à $\varphi(u)$, et que l'expression de ζ soit terminée. Si l'on change e_1 en f_1, et f_1 en e_1, dans la valeur de i, on aura

$$i=\frac{e_1-f_1-1\pm\sqrt{(f_1+e_1-1)^2-4g_1}}{2};$$

cette expression marque le rang de la dernière transformée qu'on

obtiendra en opérant par rapport à la fonction v : il faut donc qu'elle donne encore pour i un nombre entier positif. Alors l'expression de z sera terminée et la fonction v n'y sera pas engagée sous le signe $\int$: hormis ce cas et le précédent, l'expression générale de z ne peut s'obtenir que par une suite infinie.

Pour particulariser ce qui précède, par une application, supposons qu'on ait $g''_i - e''_i f_i + e''_i = 0$; il résultera de là $\frac{dz'''}{du} + \frac{f_i z'''}{u+v} = M''_i$, et M''_i s'obtiendra par les équations

$$M'_i = \frac{dM_i}{dv} + \frac{e_i + 2}{u+v} M_i, \qquad M''_i = \frac{dM'_i}{dv} + \frac{e'_i + 2}{u+v} M'_i,$$

d'où on tirera

$$M''_i = \frac{d^2 M_i}{dv^2} + \frac{2(e_i+3)}{u+v}\frac{dM_i}{dv} + \frac{(e_i+2)(e_i+3)}{(u+v)^2} M_i.$$

L'équation en z''' étant intégrée donnera

$$z''' = (u+v)^{-f_i}\left[\downarrow(v) + \int M''_i du (u+v)^{f_i}\right];$$

on aura ensuite $\frac{dz''}{dv} + \frac{(e_i+4)z''}{u+v} = z'''$,

d'où l'on déduira

$$z'' = (u+v)^{-(e_i+4)}\left\{\varphi(u) + \int (u+v)^{e_i - f_i + 4} \times dv\left[\downarrow(v) + \int M''_i du (u+v)^{f_i}\right]\right\};$$

on passera de cette valeur à celle de z, par les formules suivantes :

$$z' = \frac{-\frac{dz''}{du} - \frac{f_i z''}{u+v} + M'_i}{g_i - e_i f_i + 2e_i - f_i + 2}, \qquad z = \frac{-\frac{dz'}{du} - \frac{f_i z'}{u+v} + M_i}{g_i - e_i f_i + e_i}.$$

775. Il est facile de voir que l'expression de z, qui doit résulter de la méthode précédente, sera de la forme

$$z = A + B\varphi(u) + C\varphi'(u) + D\varphi''(u) + \text{etc.}$$
$$+ B\int \beta_i dv \downarrow(v) + C_i \int B_i \gamma_i dv \downarrow(v) + \text{etc.}$$

et qu'une des fonctions arbitraires sera entièrement dégagée des signes d'intégration. On pourroit croire que lorsque cette expression ne se termine pas, la partie qui renferme la fonction $\varphi(u)$ et ses dérivées, n'est que le développement d'une autre expression finie, dans laquelle la même fonction se trouve ainsi que $\downarrow(v)$, com-

prise sous les signes $\int$, et que par conséquent on doit supposer pour plus de généralité

$$\begin{aligned}\zeta = A &+ \varphi(u) + C\varphi'(u) + \text{etc.} && + B_1\psi(v) + C_1\psi'(v) + \text{etc.}\\ &+ B'\int\beta du\varphi(u) + C'\int\gamma du\varphi(u) + \text{etc.} && + B'\int\beta_1 dv\psi(v) + C'\int\gamma_1 dv\psi(v) + \text{etc.}\\ &+ B''\int\beta'' du\int\beta' du\varphi(u) + \text{etc.} && + B''_1\int\beta''_1 dv\int\beta'_1 dv\psi(v) + \text{etc.}\end{aligned}$$

mais Laplace, dans un mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie des Sciences pour l'année 1773, et dont nous avons tiré tout ce qui précède, prouve que les termes affectés du signe $\int$ doivent disparoître par rapport à l'une ou à l'autre des fonctions. Nous regrettons de ne pouvoir rapporter ici la discussion dans laquelle il entre sur les différens cas que peut présenter l'expression ci-dessus, et dont il résulte la démonstration complète de la proposition avancée; cependant, pour donner une idée de son raisonnement, nous le suivrons dans l'examen qu'il fait du premier cas, où ζ ne contient qu'un seul terme dans lequel la fonction $\varphi(u)$ soit affectée du signe $\int$.

En n'ayant égard qu'à cette fonction, on aura dans l'hypothèse présente $\zeta = A + B\varphi(u) + C\varphi'(u) + \text{etc.} + B'\int\beta du\varphi(u)$, et substituant cette valeur dans l'équation

$$\frac{d^2\zeta}{du\,dv} + P_1\frac{d\zeta}{du} + Q_1\frac{d\zeta}{dv} + N_1\zeta = M_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

on obtiendra un résultat de la forme

$$\left.\begin{aligned}&(A) + (B)\varphi(u) + (C)\varphi'(u) + \text{etc.}\\ &+\left(\frac{d^2B'}{du\,dv} + P_1\frac{dB'}{du} + Q_1\frac{dB'}{dv} + N_1B'\right)\int\beta\,du\,\varphi(u)\\ &+\left(\frac{dB'}{du} + Q_1B'\right)\int\frac{d\beta}{dv}du\,\varphi(u)\end{aligned}\right\} = M \ldots\ldots (\int),$$

(A), (B), etc. désignant respectivement des fonctions données de A, B, etc. Comme on suppose que l'intégrale $\int\beta du\varphi(u)$ est absolument irréductible, il faut pour qu'elle disparoisse que ce qui la multiplie s'anéantisse; il en doit être de même de $\int\frac{d\beta}{dv}du\,\varphi(u)$; mais quand cette condition sera remplie, on aura en même tems les deux équations

$$\frac{d^2B'}{du\,dv} + P_1\frac{dB'}{du} + Q_1\frac{dB'}{dv} + N_1B' = 0, \qquad \frac{dB'}{du} + Q_1B' = 0,$$

et l'on prouvera, comme dans le n°. 772, que l'on satisfait à l'équation proposée en prenant seulement $\zeta = B'\downarrow(\nu)$. Si les deux équations précédentes n'ont pas lieu, on fera

$$\frac{\frac{d^2B'}{du\,d\nu} + P_1\frac{dB'}{du} + Q_1\frac{dB'}{d\nu} + N_1B'}{\frac{dB'}{du} + Q_1B'} = K,$$

et l'équation $(\int)$ prendra la forme

$$\int \frac{d\beta}{d\nu}\,du\varphi(u) + K\int\beta du\,\varphi(u) = (A)' + (B)'\varphi(u) + (C)'\varphi'(u) + \text{etc.}$$

différentiant cette dernière équation par rapport à u, il viendra,

$$\frac{d\beta}{d\nu}\varphi(u) + K\beta\varphi(u) + \frac{dK}{du}\int\beta du\,\varphi(u) = \frac{d(A)'}{du} + \frac{d.(B)'\varphi'u)}{du} + \text{etc.}$$

ce qui ne sauroit être à moins qu'on n'ait $\frac{dK}{du} = 0$, puisqu'on tireroit de là, contre l'hypothèse, une valeur de $\int\beta\,du\,\varphi(u)$ délivrée du signe $\int$. En prenant donc $\frac{dK}{du} = 0$, on en conclura que K ne renferme que ν, et en passant cette quantité sous le signe $\int$, on aura, par l'avant-dernière équation,

$$\int\left(\frac{d\beta}{d\gamma} + K\beta\right)du\,\varphi(u) = (A)' + (B)'\varphi'(u) + (C)'\varphi'(u), \text{ etc.}$$

et comme le signe $\int$ du premier membre de celle-ci n'est relatif qu'à u, on peut, en la multipliant par $e^{\int K d\nu}d\nu$, l'écrire ainsi:

$$\int e^{\int K d\nu}(d\beta + K\beta d\nu)\varphi(u) = e^{\int K d\nu}d\nu\,[(A)' + (B)'\varphi(u) + \text{etc.}]$$

chacun de ses membres étant alors intégrable par rapport à ν, on en déduit

$$\int e^{\int K d\nu}\beta\,du\,\varphi(u) = (A)_1 + (B)_1\varphi(u) + \text{etc.}$$

en désignant par $(A)_1$, $(B)_1$, etc. les quantités

$$\int e^{\int K d\nu}(A)'\,du, \qquad \int e^{\int K d\nu}(B)'\,du, \text{etc.}$$

et en ne perdant pas de vue que l'intégration qui reste à effectuer dans le premier membre suppose ν constant, on pourra faire sortir $e^{\int K d\nu}$ du signe $\int$, et obtenir par conséquent

$$\int\beta\,du\,\varphi(u) = [(A)_1 + (B)_1\varphi(u) + \text{etc.}]\,e^{-\int K d\nu};$$

mais si cette équation avoit lieu, on auroit encore $\int\beta\,du\,\varphi_1(u)$ exprimée en quantités délivrées du signe $\int$ par rapport à la variable u:

donc

donc elle n'a pas lieu, donc on a nécessairement $\frac{dB'}{du} + Q_1 B' = 0$, condition qui entraîne aussi la suivante :

$$\frac{dB'}{du\,dv} + P_1 \frac{dB'}{du} + Q_1 \frac{dB'}{dv} + N_1 B' = 0,$$

car sans cela l'équation (f) donneroit elle-même une valeur de $\int \beta du \varphi(u)$, délivrée du signe d'intégration. Il est donc hors de doute que l'on peut toujours exclure ce terme de la valeur complète de ζ. C'est par des considérations semblables que Laplace parvient à généraliser sa conclusion, mais la présence de plusieurs termes affectés du signe $\int$ dans la valeur de ζ, exige des artifices d'analyse assez délicats, dont le détail ne sauroit trouver place ici.

776. Nous avons jusqu'à présent supposé que, parce que la proposée (2) étoit du premier degré par rapport à ζ et à ses coefficiens différentiels, les fonctions arbitraires ne pouvoient pas s'élever au-delà de ce degré dans son intégrale. Cette hypothèse paroît d'elle-même assez naturelle, et se prouve d'ailleurs facilement ainsi qu'il suit : Quelle que soit l'intégrale de l'équation (2), on peut toujours concevoir qu'on en ait tiré une expression de ζ de la forme $\zeta = V$, V renfermant les variables x, y et les fonctions arbitraires; maintenant si l'on prend à la place de l'une des fonctions arbitraires, de $\varphi(u)$, par exemple, $f(u) + \alpha \varphi_1(u)$, f désignant une fonction déterminée de u, α étant une quantité très-petite, et que l'on développe la fonction ζ suivant les puissances de cette dernière quantité, elle prendra la forme

$$\zeta = V_1 + \alpha V'_1 + \alpha^2 V''_1 + \text{etc.}$$

Après la substitution de cette série, l'équation (2) se partagera en d'autres équations, formées par les quantités qui multiplient chaque puissance de α, en sorte qu'on aura

$$\frac{d^2 V_1}{du\,dv} + P_1 \frac{dV_1}{du} + Q_1 \frac{dV_1}{dv} + N_1 V_1 = 0$$

$$\frac{d^2 V'_1}{du\,dv} + P_1 \frac{dV'_1}{du} + Q_1 \frac{dV'_1}{dv} + N_1 V'_1 = 0$$

$$\frac{d^2 V''_1}{du\,dv} + P_1 \frac{dV''_1}{du} + Q_1 \frac{dV''_1}{dv} + N_1 V''_1 = 0,$$

etc.

Ces équations étant nécessairement identiques, il s'ensuit que l'expression $\zeta = V_1 + \alpha V'_1$, satisfait en particulier à l'équation proposée; il est d'ailleurs évident, par les loix de la différentiation, que V'_1 ne peut contenir $\varphi_1(u)$ qu'au premier degré: changeant donc $\alpha\varphi_1(u)$ en $\varphi(u)$, on aura la valeur de ζ qui ne contiendra la fonction arbitraire qu'au premier degré: on pourroit raisonner de même à l'égard de $\downarrow(v)$.

777. La transformation du n°. 769 sur laquelle repose la méthode du n°. 772, quoique toujours possible, ne peut pas toujours s'effectuer; car elle suppose l'intégration de deux équations différentielles partielles du premier ordre. Pour parer à cet inconvénient, Legendre a cherché quelles devoient être, par rapport à l'équation

$$r + Ss + Tt + Pp + Qq + N\zeta = 0,$$

les transformations opérées dans le n°. 772 sur l'équation (3), et il a trouvé que l'on pouvoit représenter la première par le système des deux équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dx} + m\frac{d\zeta}{dy} + K\zeta &= \zeta' \\ \frac{d\zeta'}{dx} + n\frac{d\zeta'}{dy} + L\zeta' &= \alpha\zeta \end{aligned}\right\},$$

en désignant par m et n les racines de l'équation

$$m^2 - Sm + T = 0, \quad \ldots\ldots \quad (A),$$

et en faisant

$$K = \frac{\frac{dm}{dx} + (S - m)\frac{dm}{dy} + Pm - Q}{2m - S}, \qquad L = P - K,$$

$$\alpha = \frac{dK}{dx} + n\frac{dK}{dy} + LK - N;$$

cette assertion se vérifie en éliminant ζ', parce qu'alors on retombe sur l'équation proposée.

Il est évident que lorsqu'on aura $\alpha = 0$, l'équation proposée sera ramenée au premier ordre, et par conséquent censée intégrée, puisque pour avoir ζ', il suffira d'intégrer l'équation

$$\frac{d\zeta'}{dx} + n\frac{d\zeta'}{dy} + L\zeta' = 0.$$

Quand α ne sera pas égal à zéro, on ne pourra obtenir ζ'' que par l'équation du second ordre qui résulteroit de l'élimination de ζ dans le système rapporté ci-dessus, et cette dernière se transformera comme la proposée; Legendre a trouvé qu'elle étoit équivalente à

$$\frac{d\zeta'}{dx} + m\frac{d\zeta'}{dy} + K'\zeta' = \zeta'',$$
$$\frac{d\zeta''}{dx} + n\frac{d\zeta''}{dy} + L'\zeta'' = \alpha'\zeta',$$

en faisant

$$I = \frac{\frac{dn}{dx} + m\frac{dn}{dy} - \frac{dm}{dx} - n\frac{dm}{dy}}{n-m}, \qquad \beta = \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{m}{\alpha}\frac{d\alpha}{dy};$$

$$K' = K - I - \beta, \qquad L' = L + I,$$

$$\alpha' = \alpha + \frac{dK'}{dx} + n\frac{dK'}{dy} + IK' - \frac{dL}{dx} - m\frac{dL}{dy} - IL.$$

Lorsque α' se trouvera nul, on obtiendra ζ'', en intégrant l'équation du premier ordre $\frac{d\zeta''}{dx} + n\frac{d\zeta''}{dy} + L'\zeta'' = 0$, et l'intégration de la première équation du système ci-dessus donnera ζ'.

Si α n'est pas nul on formera deux nouvelles équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\zeta''}{dx} + m\frac{d\zeta''}{dy} + K''\zeta'' &= \zeta''' \\ \frac{d\zeta'''}{dx} + n\frac{d\zeta'''}{dy} + L''\zeta''' &= \alpha''\zeta'' \end{aligned}\right\},$$

en prenant

$$\beta' = \frac{1}{\alpha'}\frac{d\alpha'}{dx} + \frac{m}{\alpha'}\frac{d\alpha'}{dy},$$

$$K'' = K' - I - \beta', \qquad L'' = L' + I,$$

$$\alpha'' = \alpha' + \frac{dK''}{dx} + n\frac{dK''}{dy} + IK'' - \frac{dL'}{dx} - m\frac{dL'}{dy} - IL';$$

on continuera de la même manière, en observant que les trois quantités m, n, I, demeurent toujours les mêmes.

Pour montrer comment on trouve la valeur générale de ζ par

le moyen de ces transformées, supposons que le troisième système d'équation soit le dernier, c'est-à-dire qu'on ait $\alpha''=0$; l'intégration de l'équation $\frac{d\zeta'''}{dx}+n\frac{d\zeta'''}{dy}+L''\zeta'''=0$, donnera ζ''', et lorsque cette fonction sera connue, on aura ζ'' par l'équation

$$\frac{d\zeta''}{dx}+m\frac{d\zeta''}{dy}+K''\zeta''=\zeta''':$$

on obtiendra ensuite, par la dernière équation du second système et par celle du premier,

$$\zeta'=\frac{\frac{d\zeta''}{dx}+n\frac{d\zeta''}{dy}+L'\zeta''}{\alpha'},\qquad \zeta=\frac{\frac{d\zeta'}{dx}+n\frac{d\zeta'}{dy}+L\zeta'}{\alpha}.$$

Les valeurs de L'' et de K'' ne sont pas de la même forme; on a $L''=L+2I$; $K''+2I-\beta-\beta'$, et on trouveroit en général $L'''\cdots(i)=L+iI$;

$$K'''\cdots(i)=K+iI-\beta-\beta'\ldots-\beta''\cdots(i-1);$$

ainsi les premiers membres des équations d'un même système ne sont pas semblables, mais on peut toujours les rendre tels. Dans notre exemple, il suffit pour cela de faire $\zeta''=\alpha\alpha'Z''$, et il en résulte $\frac{dZ''}{dx}+m\frac{dZ''}{dy}+(K+2I)Z''=\frac{\zeta'''}{\alpha\alpha'}$.

L'expression développée de ζ sera encore par cette méthode de la même forme que par celle du n°. 775; les fonctions arbitraires renfermeront les intégrales des différentielles exactes $\mu(dy-mdx)$, $\mu'(dy-ndx)$, et il n'y aura toujours qu'une de ces fonctions qui soit affectée du signe $\int$. Mais si au lieu d'intégrer complètement l'équation

$$\frac{d\zeta'''}{dx}+n\frac{d\zeta'''}{dy}+L''\zeta'''=0,$$

on se bornoit à y satisfaire, en faisant $\zeta'''=0$, le résultat final ne contiendroit qu'une seule fonction arbitraire, et seroit de la forme

$$\zeta=B\varphi(u)+C\varphi'(u)+D\varphi''(u)+, \text{ etc.}$$

Appliquons avec l'auteur, cette méthode à l'équation $r-a^2y^{2b}t=0$;

nous aurons $m = ay^b$, $n = -ay^b$, $I = 0$;

et faisant $\frac{dm}{dy} = m'$, $\frac{b-1}{b} = c$, il viendra $m\frac{dm'}{dy} = cm'^2$,

$$K = -\tfrac{1}{2}m', \qquad \alpha = \frac{2c-1}{4}m'^2,$$

$$L = +\tfrac{1}{2}m', \qquad \beta = 2cm',$$

$$K' = -(\tfrac{1}{2}+2c)m', \quad \alpha' = \frac{(2c+1)(4c-1)}{4}m'^3,$$

$$L' = +\tfrac{1}{2}m', \qquad \beta' = 2cm',$$

$$K'' = -(\tfrac{1}{2}+4c)m', \quad \alpha'' = \frac{(4c+1)(6c-1)}{4}m'^4,$$

$$L'' = +\tfrac{1}{2}m', \qquad \beta'' = 2cm'.$$

Dans cet exemple les quantités K, L et β, ne changent point, et les quantités α suivent une loi telle qu'il en résulte

$$\alpha^{(i)} = \frac{(2ic+1)(2i+2c-1)}{4},$$

expression qui s'évanouira si l'on a $2ic+1=0$, ou $(2i+2)c-1=0$, ou en général $2i'c \pm 1 = 0$, ce qui donne $c = \mp\frac{1}{2i'}$, $b = \frac{2i'}{2i' \pm 1}$; et l'on voit par là que l'équation proposée sera intégrable dans les mêmes cas que celle de Riccati (n°. 550).

778. L'équation $r + Ss + Tt + Pp + Qq + Nz = 0$, dont Legendre s'est occupé exclusivement paroît moins générale que l'équation $Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Nz = M$..... (1), que nous avons traitée dans le n°. 770; mais on peut d'abord dégager le coefficient différentiel r de son multiplicateur R, ce qui donne

$$r + Ss + Tt + Pp + Qq + Nz = M,$$

en changeant convenablement les valeurs des lettres S, T, P, Q, N, M, et si l'on suppose $Z = A + Z$, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2A}{dx^2} + S\frac{d^2A}{dx\,dy} + T\frac{d^2A}{dy^2} + P\frac{dA}{dx} + Q\frac{dA}{dy} + NA \\ &+\frac{d^2Z}{dx^2} + S\frac{d^2Z}{dx\,dy} + T\frac{d^2Z}{dy^2} + P\frac{dZ}{dx} + Q\frac{dZ}{dy} + NZ \end{aligned}\right\} = M,$$

équation qui se réduit à

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + S\frac{d^2Z}{dxdy} + T\frac{d^2Z}{dy^2} + P\frac{dZ}{dx} + Q\frac{dZ}{dy} + NZ = 0,$$

lorsque l'on a

$$\frac{d^2A}{dx^2} + S\frac{d^2A}{dxdy} + T\frac{d^2A}{dy^2} + P\frac{dA}{dx} + Q\frac{dA}{dy} + NA = M.$$

Il suffit de satisfaire à cette dernière par une valeur particulière de A, et comme elle est la même que la proposée, il s'ensuit qu'en connoissant seulement une valeur particulière de ζ, on fera toujours disparoître le second membre M de celle-ci.

779. Les équations du premier degré présentent dans le troisième ordre de nouvelles difficultés qui ne se rencontrent point dans le second. Lorsque suivant l'esprit de la méthode exposée dans le n°. 777, on regarde l'équation

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^3\zeta}{dx^3} + A\frac{d^3\zeta}{dx^2dy} + B\frac{d^3\zeta}{dxdy^2} + C\frac{d^3\zeta}{dy^3}\\ + D\frac{d^2\zeta}{dx^2} + E\frac{d^2\zeta}{dxdy} + F\frac{d^2\zeta}{dy^2}\\ + G\frac{d\zeta}{dx} + H\frac{d\zeta}{dy} + K\zeta\end{aligned}\right\} = 0$$

comme le résultat de l'élimination de ζ', entre les deux équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dx} + L\frac{d\zeta}{dy} + M\zeta = \zeta'\\ \frac{d^2\zeta'}{dx^2} + S\frac{d^2\zeta'}{dxdy} + T\frac{d^2\zeta'}{dy^2} + P\frac{d\zeta'}{dx} + Q\frac{d\zeta'}{dy} + N\zeta' = \alpha\zeta\end{aligned}\right\},$$

on ne peut plus déterminer les quantités L et M, de manière qu'en supposant l'expression générale de ζ composée d'un nombre fini de termes de la forme $a\varphi(u) + b\varphi'(u) + c\varphi''(u) +$, &c. celle de ζ' contienne un terme de moins, et que l'équation finale en ζ' soit en même tems semblable à la proposée. Legendre a résolu néanmoins dans cet ordre un cas très-étendu, celui dans lequel la fonction cherchée ne se trouve différentiée qu'une seule fois par rapport à l'une des variables.

La formule qui le représente est

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^3\zeta}{dx^3}+A\frac{d^2\zeta}{dx^2dy}+B\frac{d^2\zeta}{dx^2}+C\frac{d^2\zeta}{dxdy}\\+D\frac{d\zeta}{dx}+E\frac{d^2\zeta}{dy}+F\zeta\end{aligned}\right\}=0;$$

et deux des trois fonctions arbitraires que comporte l'intégrale générale ne renferment que la seule variable y. En prenant

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dx}+M\zeta=\zeta'\\\frac{d^2\zeta'}{dx^2}+S\frac{d^2\zeta'}{dxdy}+P\frac{d\zeta'}{dx}+Q\frac{d\zeta'}{dy}+N\zeta'=\alpha\zeta\end{aligned}\right\},$$

les quantités M, S, P, Q, N, sont déterminées ainsi :

$$S=A,\quad P=A-M,\quad Q=C-AM,$$

$$N=D-BM+M^2-A\frac{dM}{dy}-2\frac{dM}{dx},\quad \frac{dM}{dx}=M^2+\frac{E-CM}{A},$$

$$\alpha=\frac{d^2M}{dx^2}+S\frac{d^2M}{dxdy}+P\frac{dM}{dx}+Q\frac{dM}{dy}+NM-F.$$

D'après ces valeurs, l'équation transformée en ζ' est de la même forme que la proposée, et si on la représente par

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^3\zeta'}{dx^3}+A'\frac{d^3\zeta'}{dx^2dy}+B'\frac{d^2\zeta'}{dx^2}+C'\frac{d^2\zeta'}{dxdy}\\+D'\frac{d\zeta'}{dx}+E'\frac{d\zeta'}{dy}+F'\zeta\end{aligned}\right\}=0,$$

on aura

$$A'=A$$

$$B'=P+M-\frac{d\alpha}{\alpha dx}$$

$$C'=Q+\frac{dA}{dx}+A\left(M-\frac{d\alpha}{\alpha dx}\right)$$

$$D'=N+\frac{dP}{dx}+P\left(M-\frac{d\alpha}{\alpha dx}\right)$$

$$E'=\frac{dQ}{dx}+Q\left(M-\frac{d\alpha}{\alpha dx}\right)$$

$$F'=\frac{dN}{dx}+N\left(M-\frac{d\alpha}{\alpha dx}\right)-\alpha;$$

faisant ensuite

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\zeta'}{dx} + M'\zeta' = \zeta'' \\ &\frac{d^2\zeta''}{dx^2} + S'\frac{d^2\zeta''}{dx\,dy} + P'\frac{d\zeta''}{dx} + Q'\frac{d\zeta''}{dy} + N'\zeta'' = \alpha'\zeta' \end{aligned}\right\},$$

les fonctions S', P', Q', N', M' et α', seront déterminées par des équations semblables à celles d'où dépendent S, P, Q, N et M, et rien n'empêche que l'on n'effectue, d'après les mêmes loix, tel nombre que l'on voudra de transformations successives. Si dans la suite des quantités α, α', α'', etc. il s'en trouve une qui soit nulle, l'intégration de la proposée sera ramenée à celle d'une équation du premier ordre et d'une autre du second. Si l'on suppose, par exemple, $\alpha'' = 0$, on aura

$$\frac{d\zeta''}{dx} + M''\zeta'' = \zeta'''$$

$$\frac{d^2\zeta'''}{dx^2} + S''\frac{d^2\zeta'''}{dx\,dy} + P''\frac{d\zeta'''}{dx} + Q''\frac{d\zeta'''}{dy} + N''\zeta''' = 0;$$

et si l'on peut intégrer complètement la dernière de ces équations, on aura ζ''' avec deux fonctions arbitraires : la première donnera ζ'' avec une nouvelle fonction : on remontera ensuite à ζ, par de simples différentiations, au moyen des transformées

$$\frac{d^2\zeta''}{dx^2} + S'\frac{d^2\zeta''}{dx\,dy} + P'\frac{d\zeta''}{dx} + Q'\frac{d\zeta''}{dy} + N'\zeta'' = \alpha'\zeta'$$

$$\frac{d^2\zeta'}{dx^2} + S\frac{d^2\zeta'}{dx\,dy} + P\frac{d\zeta'}{dx} + Q\frac{d\zeta'}{dy} + N\zeta' = \alpha\zeta.$$

Quand même l'équation en ζ''' ne pourroit pas s'intégrer, on obtiendroit encore une expression de ζ contenant une fonction arbitraire, parce qu'on satisfait à cette équation en faisant $\zeta''' = 0$, d'où il résulte $\frac{d\zeta''}{dx} + M\zeta'' = 0$; la valeur de ζ que l'on tireroit de là seroit de la forme $\zeta = a\varphi(u) + b\varphi'(u) + c(u) + \text{etc.}$

780. Dans les cas qui échappent à la méthode précédente, il faut employer immédiatement celle des coefficiens indéterminés, en prenant pour ζ une série de la forme

$\zeta =$

$$\zeta = \alpha\,\varphi(u) + \beta\,\varphi'(u) + \gamma\,\varphi''(u) + \text{etc.}$$
$$+ \alpha_1\chi(v) + \beta_1\chi'(v) + \gamma_1\chi''(v) + \text{etc.}$$
$$+ \alpha_2\psi(w) + \beta_2\psi'(w) + \gamma_2\psi(w) + \text{etc.}$$

mais en substituant cette valeur dans l'équation

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^3\zeta}{dx^3} + A\frac{d^3\zeta}{dx^2dy} + B\frac{d^3\zeta}{dxdy^2} + C\frac{d^3\zeta}{dy^3}\\ &+D\frac{d^2\zeta}{dx^2} + E\frac{d^2\zeta}{dxdy} + F\frac{d^2\zeta}{dy^2}\\ &+G\frac{d\zeta}{dx} + H\frac{d\zeta}{dy} + I\zeta\end{aligned}\right\} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (\zeta)'''\,;$$

il suffira d'avoir égard à une seule des trois fonctions arbitraires; car, il est évident que les coefficiens correspondans de chacune de ces fonctions, dépendront des mêmes équations. Supposons que l'on ne conserve que la première ligne de l'expression de ζ; on trouvera, après avoir effectué les différentiations que demande l'élimination des coefficiens $\frac{d^3\zeta}{dx^3}$, $\frac{d^3\zeta}{dx^2dy}$, etc. et ordonné le résultat par rapport à la fonction $\varphi(u)$ et à ses dérivées, une équation de la forme

$$(1)\,\varphi(u) + (2)\,\varphi'(u) + (3)\,\varphi''(u) + (4)\,\varphi'''(u) + \text{etc.}$$

(1), (2), (3), (4), etc. désignant des fonctions des quantités indéterminées α, β, γ, etc. et de leurs coefficiens différentiels. On remarquera d'abord que la dernière fonction dérivée de φ, à laquelle on s'arrêtera, sera multipliée par

$$\frac{du^3}{dx^3} + A\frac{du^2}{dx^2}\frac{du}{dy} + B\frac{du}{dx}\frac{du^2}{dy^2} + C\frac{du^3}{dy^3},$$

quantité qui d'ailleurs entrera dans tous les développemens des fonctions (1), (2), etc. si on l'égale à zéro, on en déduira l'expression de u; car en faisant $\frac{du}{dx} = m\frac{du}{dy}$, on aura

$$m^3 + Am^2 + Bm + C = 0, \qquad du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = \frac{du}{dy}(dy + mdx);$$

d'où l'on déduira u, en déterminant m en x et y, et en regardant $\frac{du}{dy}$ comme le facteur propre à rendre $dy + m\,dx$ intégrable.

Cela posé, ordonnant les développemens des fonctions (1), (2), (3), (4), etc. par rapport aux lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. ils prendront respectivement les formes

$(\alpha)''', \quad (\beta)''' + (\alpha)'', \quad (\gamma)''' + (\beta)'' + (\alpha)', \quad (\delta)''' + (\gamma)'' + (\beta)'$, etc.

dans laquelle chaque terme désigne une fonction qui ne renferme d'indéterminée que celle qui se trouve écrite entre les parenthèses, et où le nombre des accens marque l'ordre des termes; en sorte que $(\alpha)'$, par exemple, est une fonction différentielle partielle du premier ordre en α, $(\alpha)''$ une du second, $(\alpha)'''$ une du troisième. Il faut remarquer que la composition de cette dernière en α est la même que celle du premier membre de l'équation proposée que nous avons marquée aussi du signe $(\zeta)'''$. En égalant donc à zéro les multiplicateurs de la fonction φ et de ses dérivées, on obtiendra les équations

$$\begin{aligned}
&(\alpha)''' = 0\\
&(\beta)''' + (\alpha'') = 0\\
&(\gamma)''' + (\beta)'' + (\alpha)' = 0\\
&(\delta)''' + (\gamma)'' + (\beta)' = 0\\
&(\varepsilon)''' + (\delta)'' + (\gamma)' = 0,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Si l'expression ζ doit se terminer au premier terme, on aura $\beta = 0$, $\gamma = 0$ etc., et il ne restera que les trois équations

$$(\alpha') = 0, \qquad (\alpha)'' = 0, \qquad (\alpha)''' = 0;$$

la première qui n'est que du premier ordre, donnera α, et les deux autres seront des équations de condition auxquelles devra satisfaire la valeur de α, pour qu'en effet ζ ait la forme qu'on lui suppose. En donnant deux termes à l'expression de ζ, il faudra tenir compte de α et de β, et on aura pour ce cas les équations

$(\beta)' = 0$, $(\beta)'' + (\alpha)' = 0$, $(\beta)''' + (\alpha)'' = 0$, $(\alpha)''' = 0$:

la première sera du premier ordre par rapport à β, la seconde sera du même ordre par rapport à α, et les deux dernières seront les équations de condition qui doivent être satisfaites pour qu'on ait $\zeta = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi'(u)$. En continuant ainsi on trouvera que chaque coefficient est donné par une équation du premier ordre, et qu'il reste toujours deux équations de condition.

Il seroit facile de généraliser cette méthode pour un ordre quel-

conque, et de l'étendre même aux équations différentielles partielles à quatre variables, en observant d'abord qu'il y a toujours une équation de condition relative aux quantités qui entrent sous les fonctions arbitraires (n°. 757); mais je dois terminer ici ce qui regarde les équations différentielles partielles du premier degré; ce qui précède me paroît suffisant pour donner une idée complète des recherches que les Analystes ont faites sur ce genre d'équations, auquel se rapportent en général les méthodes d'approximation. On ne sauroit d'ailleurs pousser les calculs plus loin, sans tomber dans des résultats excessivement compliqués; il paroît même nécessaire de recourir à de nouvelles notations qui soient adaptées au système d'opérations que prescrivent les méthodes dont on fait usage. Par ce moyen on régulariseroit les expressions, de manière à en rendre la loi évidente, on embrasseroit l'ensemble des recherches dans un seul calcul; tel est le but que s'est proposé, et qu'a rempli dans plusieurs mémoires qu'il m'a communiqués, Français, professeur de mathématiques à Colmar.

781. La transformation du n°. 769 peut être employée avec succès pour l'intégration de plusieurs équations; elle change en une équation différentielle à deux variables seulement, l'équation

$$\begin{aligned} V = {} & A\zeta \\ & + C\left(x\frac{d\zeta}{dx} + y\frac{d\zeta}{dy}\right) \\ & + C\left(x^2\frac{d^2\zeta}{dx^2} + 2xy\frac{d^2\zeta}{dxdy} + \frac{d^2\zeta}{dy^2}\right) \\ & + D\left(x^3\frac{d^3\zeta}{dx^3} + 3x^2y\frac{d^3\zeta}{dx^2dy} + 3xy^2\frac{d^3\zeta}{dxdy^2} + y^3\frac{d^3\zeta}{dy^3}\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + N\left(x^n\frac{d^n\zeta}{dx^n} + nx^{n-1}y\frac{d^{n-1}\zeta}{dx^{n-1}dy} \cdots\cdots\cdots + y^n\frac{d^n\zeta}{dy^n}\right) \end{aligned}$$

de quelqu'ordre qu'elle soit. Il suffit pour cela de prendre $u = \frac{x}{y}$ et $v = y$; on obtient, en effectuant les calculs nécessaires;

$$V = A\zeta + Bv\frac{d\zeta}{dv} + Cv^2\frac{d^2\zeta}{dv^2} \cdots\cdots\cdots\cdots + Nv^n\frac{d^n\zeta}{dv^n}.$$

Cette équation, dans laquelle u doit être regardé comme constant, est semblable à celle du n°. 651, et se transforme de même en une autre où $\zeta, \frac{d\zeta}{dv}, \frac{d^2\zeta}{dv^2}$, etc. ne sont multipliés que par des constantes. Après l'intégration, on changera les constantes arbitraires en fonctions arbitraires de u. Au reste, il est facile de voir que l'équation proposée se prête également à l'application de la méthode du n°. 752; qu'elle a des intégrales de tous les ordres inférieurs à l'ordre n, et que les fonctions arbitraires renferment toutes la même quantité $\frac{x}{y}$.

782. Legendre a donné une transformation pour changer l'équation

$$R\frac{d^2z}{dx^2} + S\frac{d^2z}{dxdy} + T\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

lorsque R, S et T, ne contiennent que les coefficiens différentiels du premier ordre p et q, en une autre de la forme

$$R\frac{d^2v}{dp^2} + S\frac{d^2v}{dpdq} + T\frac{d^2v}{dq^2} = 0,$$

où R, S et T, sont les mêmes que dans la proposée, mais qui est plus simple, parce qu'en y regardant u comme une fonction de p et de q, elle ne renferme plus que des coefficiens du second ordre de cette fonction. Dans cette hypothèse on fait

$xdp + ydq = dv$; il vient $x = \frac{dv}{dp}$, $y = \frac{dv}{dq}$, et $v = px + qy - z$,

puisqu'on a $z = px + qy - \int(xdp + ydq)$:

il suit de là que quand v sera connu, z le sera également. Pour exprimer maintenant le coefficient différentiel $\frac{d^2z}{dx^2}$, par le moyen des nouvelles variables, il faut observer que $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, en regardant y comme constant, et que cette hypothèse donne $d.\frac{dv}{dq} = 0$, ou $\frac{d^2v}{dpdq}dp + \frac{d^2v}{dq^2}dq = 0$. L'on a en même-tems

$$dx = \frac{d^2v}{dp^2}dp + \frac{d^2v}{dpdq}dq;$$

chassant dq de cette expression, on trouvera

$$dx = \left(\frac{d^2v}{dp^2} - \frac{\left(\frac{d^2v}{dp\,dq}\right)^2}{\frac{d^2v}{dq^2}}\right)dp;$$

d'où on tirera $\frac{dx}{dp} = \frac{\frac{d^2v}{dp^2}\frac{d^2v}{dq^2} - \left(\frac{d^2v}{dp\,dq}\right)^2}{\frac{d^2v}{dq^2}}$,

et par conséquent $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{\frac{d^2v}{dq^2}}{\frac{d^2v}{dp^2}\frac{d^2v}{dq^2} - \left(\frac{d^2v}{dp\,dq}\right)^2}$;

on obtiendra par de semblables opérations

$$\frac{d^2\zeta}{dx\,dy} = \frac{-\frac{d^2v}{dp\,dq}}{\frac{d^2v}{dp^2}\frac{d^2v}{dq^2} - \left(\frac{d^2v}{dp\,dq}\right)^2}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dy^2} = \frac{\frac{d^2v}{dp^2}}{\frac{d^2v}{dp^2}\frac{d^2v}{dq^2} - \left(\frac{d^2v}{dp\,dq}\right)^2},$$

et substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on la changera en cette autre $R\frac{d^2v}{dq^2} - S\frac{d^2v}{dp\,dq} + T\frac{d^2v}{dq^2} = 0.$

783. L'équation $(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0 \ldots\ldots (1)$, appartenante aux surfaces dont les rayons de courbure sont égaux et de signes contraires (n°. 327), surfaces qui, comme nous le montrerons dans le chapitre suivant, ont le *minimum* d'étendue entre des limites données, s'intègre avec le secours de la transformation ci-dessus. On en déduit d'abord

$$(1+q^2)\frac{d^2v}{dq^2} + 2pq\frac{d^2v}{dp\,dq} + (1+p^2)\frac{d^2v}{dp^2} = 0 \ldots\ldots\ldots (2),$$

et l'on a, pour déterminer les expressions des variables primitives

x, y et z, les équations $x = \frac{dv}{dp}$, $y = \frac{dv}{dq}$, $z = px + qy - v$; on peut aussi tirer de celles-ci et de la précédente des équations différentielles partielles du second ordre, entre x, p et q, entre y, p et q, entre z, p et q. En effet, il suit des unes

$$\frac{d^2v}{dp^2} = \frac{dx}{dp}, \qquad \frac{d^2v}{dp\,dp} = \frac{dx}{dq} = \frac{dy}{dp}, \qquad \frac{d^2v}{dq^2} = \frac{dy}{dq},$$

et par le moyen de ces valeurs, l'autre devient

$$(1 + q^2)\frac{dy}{dq} + 2pq\frac{dx}{dq} + (1 + p^2)\frac{dx}{dp} = 0;$$

pour en éliminer $\frac{dy}{dq}$, il suffit de la différentier par rapport à p et de substituer aux coefficiens différentiels de y leurs valeurs, en observant que l'équation $\frac{dy}{dp} = \frac{dx}{dq}$ donne $\frac{d^2y}{dp\,dq} = \frac{d^2x}{dq^2}$; le résultat sera

$$\left.\begin{aligned}(1 + q^2)\frac{d^2x}{dq^2} + 2pq\frac{d^2x}{dp\,dq} + (1 + p^2)\frac{d^2x}{dp^2} \\ + \ 2q\frac{dx}{dq} + \qquad 2p\frac{dx}{dp}\end{aligned}\right\} = 0 \ldots\ldots\ldots (3):$$

on obtiendroit pour y et pour z de semblables équations. En appliquant à l'équation (2) la méthode du n°. 745, on trouvera que les quantités qui doivent entrer sous les fonctions arbitraires, dépendent des équations

$$dp - m'dq = 0, \qquad dp - m''dq = 0,$$

m' et m'' étant les racines de l'équation

$$(1 + q^2)m^2 - 2pq\,m + 1 + p^2 = 0,$$

mais au lieu d'intégrer les deux premières en particulier, on peut prendre à leur place l'équation

$$(1 + q^2)\frac{dp^2}{dq^2} - 2pq\frac{dp}{dq} + 1 + p^2 = 0,$$

qui les comprend implicitement, et qui est de celles que la différentiation rend faciles à intégrer (n°. 578). En y faisant $p = aq + \alpha$, a et α désignant des constantes, on la réduit à $1 + a^2 + \alpha^2 = 0$, d'où l'on tire $\alpha = \pm\sqrt{-1 - a^2}$; la constante a demeurant

arbitraire, on peut donner à α les deux valeurs

$$\alpha = +\sqrt{-1-a^2}, \qquad \alpha = -\sqrt{-1-b^2}.$$

On obtiendra par ce moyen deux intégrales de l'équation ci-dessus, savoir :

$$p = aq + \sqrt{-1-a^2}, \qquad p = bq - \sqrt{-1-b^2},$$

et les valeurs de a et de b, déduites de ces équations, seront les quantités que doivent comprendre les fonctions arbitraires. On peut simplifier l'équation (2) en la transformant par le procédé du n°. 769, de manière que a et b remplacent les variables indépendantes p et q, et pour abréger on mettra α au lieu de $\sqrt{-1-a^2}$, et β au lieu de $\sqrt{-1-b^2}$; on trouvera après les opérations nécessaires,

$$(a-b)\frac{d^2v}{da\,db} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{dv}{da} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{dv}{db} = 0.$$

Cette équation n'a point d'intégrales de l'ordre immédiatement inférieur; il n'en est pas de même de l'équation (3), que la transformation indiquée ci-dessus, réduit à $\frac{d^2x}{da\,db} = 0$,

et dont l'intégrale seconde sera par conséquent $x = \varphi(a) + \downarrow(b)$. Les équations en y et en z, analogues à l'équation (3), donneroient

$$y = \varphi_1(a) + \downarrow_1(b), \qquad z = \varphi_2(a) + \downarrow_2(b);$$

mais il y a entre les six fonctions φ, φ_1, φ_2, $\downarrow$, $\downarrow_1$ et $\downarrow_2$, des relations telles qu'il n'en reste que deux d'arbitraires.

1°. L'équation $x = \frac{dv}{dp}$, donne $\frac{dv}{dp}dp = [\varphi(a) + \downarrow(b)]\,dp$,

en supposant q constant; et comme des équations

$$p = aq + \alpha, \qquad p = bq - \beta,$$

on tire dans cette hypothèse,

$$dp = \left(q + \frac{d\alpha}{da}\right)da, \qquad dp = \left(q - \frac{d\beta}{db}\right)db,$$

en faisant $\frac{d\alpha}{da} = \alpha'$, $\frac{d\beta}{db} = \beta'$, on aura

$$\frac{dv}{dp}dp = (q+\alpha')\,\varphi(a)\,da + (q-\beta')\downarrow(b)\,db:$$

si l'on change dans cette dernière équation $\varphi(a)$ et $\downarrow(a)$, en $\varphi'(a)$

et $\psi'(a)$, et que l'on intègre le second membre par parties, en y regardant y comme constant, il viendra

$$v = q[\varphi(a) + \psi(b)] + a\varphi'(a) - b\psi'(b) - \int a\varphi''(a)\,da + \int b\psi''(b)\,db + \pi(q).$$

Supposant ensuite p constant, on a $y = \frac{dv}{dq}$, et les équations

$$p = aq + \alpha, \qquad p = bq - \beta$$

donnent alors

$$\frac{da}{dq} = \frac{-a}{q + \alpha'}, \qquad \frac{db}{dq} = \frac{-b}{q - \beta'};$$

avec ces valeurs et celle de $\frac{dv}{dq}$, on obtient

$$y = \varphi(a) - a\varphi'(a) + \psi(b) - b\psi'(b) + \pi'(q);$$

mais y devant être de la forme $\varphi_1(a) + \psi_1(b)$ ne sauroit contenir le terme $\pi'(q)$: on a donc seulement

$$y = \varphi(a) - a\varphi'(a) + \psi(b) - b\psi'(b),$$

et mettant les valeurs de p, q, x, y, v, dans l'équation $z = px + yq - v$, on trouve $z = -\int a\varphi''(a)\,da + \int \beta\psi''(b)\,db$.

L'intégrale de l'équation proposée sera donc le résultat de l'élimination des quantités a et b, entre les trois équations

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi'(a) + \psi'(b) \\ y &= \varphi(a) - a\varphi'(a) + \psi(b) - b\psi'(b) \\ z &= -\int a\varphi''(a)da + \int \beta\psi''(b)\,db \end{aligned}\right\},$$

élimination qui sera impossible tant que les fonctions resteront arbitraires, et même dans le plus grand nombre de cas où ces fonctions seront déterminées ; mais on pourra toujours, pour les diverses formes assignées aux fonctions φ et ψ, et en supposant seulement la quadrature des courbes, construire les valeurs de x, y, z, correspondantes à des valeurs données de a et de b.

Si l'on fait $da' = \alpha''da$, $d\beta' = \beta''db$, $\int \alpha''\varphi(a)da = \varphi_1$, $\int \beta''\psi(b)db = \psi_1$, on parviendra à un résultat entièrement délivré de signes d'intégration, parce qu'en intégrant par parties, on trouvera

$$\int a\varphi''(a)\,da = a\varphi'(a) - a'\varphi(a) + \int \alpha''\varphi(a)\,da$$
$$\int \beta\psi''(b)\,db = \beta\psi'(b) - \beta'\psi(b) + \int \beta''\psi(b)\,db;$$

et comme on aura $\varphi(a) = \frac{1}{\alpha''}\varphi'_1(a)$, $\psi(b) = \frac{1}{\beta''}\psi'_1(b)$, on en conclura $\varphi'(a) = \frac{1}{\alpha''}\varphi''_1(a) - \frac{\alpha'''}{\alpha''^2}\varphi'_1(a)$, $\psi'(a) = \frac{1}{\beta''}\psi''_1(a) - \frac{\beta'''}{\beta''^2}\psi'_1(b)$: mettant

mettant à la place de α'', α''', β'', β''', leurs valeurs, en laissant toujours pour abréger, α et β à la place de $\sqrt{-1-a^2}$ et de $\sqrt{-1-b^2}$, on obtiendra

$$x = \alpha^3\varphi''_{,}(a) - 3\alpha a\varphi'_{,}(a) + \beta^3\psi''_{,}(b) - 3\beta b\psi'_{,}(b)$$
$$y = -\alpha^3 a\varphi''_{,}(a) + (2a-1)\alpha\varphi'(a) - \beta^3 b\psi''_{,}(b) + (2b-1)\beta\psi'_{,}(b)$$
$$z = -\alpha^4\varphi''_{,}(a) + 2\alpha^2 a\varphi'_{,} - \varphi_{,}(a) + \beta^4\psi''_{,}(b) - 2\beta^2 b\psi'_{,}(b) + \psi_{,}(b).$$

784. Legendre transforme en une autre du premier degré, et sans coefficiens différentiels du premier ordre, l'équation $r = f(s, t)$, dans laquelle f désigne une fonction donnée de s et de t, et qui représente toutes celles qui ne contiennent que les coefficiens différentiels du second ordre. Pour cela il observe que les équations

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy, \quad \text{donnant}$$
$$p = rx + sy - \int(x\,dr + y\,ds), \qquad q = sx + ty - \int(x\,ds + y\,dt),$$

il s'ensuit que $x\,dr + y\,ds$ et $x\,ds + y\,dt$, doivent être des différentielles exactes : considérant ensuite x et y, comme des fonctions de s et de t, et faisant $x\,ds + y\,dt = dv$, il trouve $x = \frac{dv}{ds}$, $y = \frac{dv}{dt}$

Mais l'équation proposée conduit à $dr = S\,ds + T\,dt$; par le moyen de cette valeur, la fonction $x\,dr + y\,ds$ devient $(Sx + y)\,ds + Tx\,dt$, et comme elle doit être une différentielle exacte, il en résulte l'équation

$$\frac{d.(Sx + y)}{dt} = \frac{d.Tx}{ds},$$

dont le développement se réduit à

$$S\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = T\frac{dx}{ds}$$

à cause que $\frac{dS}{dt} = \frac{dT}{ds}$: substituant les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{dt}$, on aura la transformée $\frac{d^2v}{dt^2} + S\frac{d^2v}{ds\,dt} - T\frac{dv}{ds^2} = 0$,

qui n'est, comme on voit, que du premier degré, par rapport à la fonction v, puisque S et T ne contiennent que les variables s et t. Lorsque v sera connu, on en déduira d'abord x et y, en s et t, puis on trouvera

$$q = sx + ty - v, \qquad p = rx + sy - \int(x\,dr + y\,ds),$$
$$z = px + qy - \int(x\,dp + y\,dq),$$

et les intégrations indiquées pourront s'effectuer, ou se ramener du moins à celles des fonctions d'une seule variable.

785. Les cas que nous venons de parcourir sont à-peu-près les seuls pour lesquels on puisse espérer quelque succès dans l'intégration des équations différentielles partielles qui passent le premier degré par rapport aux coefficiens du second ordre; on pourroit, à la vérité, traiter ces équations par une méthode semblable à celle du n°. 730 : en éliminant, par exemple r et s, par le moyen des équations $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$, et cherchant à déterminer le coefficient restant t, de manière que l'équation résultante de cette élimination devienne intégrable. Si l'on parvenoit à obtenir une expression de t qui remplît ce but et qui contînt une constante arbitraire, on en déduiroit, comme dans le n°. 731, l'intégrale première de la proposée; mais en opérant ainsi, on tomberoit le plus souvent dans des calculs impraticables, et l'on rencontreroit beaucoup de conditions auxquelles on ne sauroit satisfaire que dans un petit nombre de cas.

Pour éviter une partie de ces difficultés, on a pris une marche opposée, on a cherché les équations différentielles partielles qui répondoient à des intégrales premières de forme donnée. Si l'on prend, par exemple, $N = \varphi(M)$, et que l'on suppose que M et N contiennent en même tems les coefficiens du premier ordre p et q, on trouvera par l'élimination de la fonction arbitraire φ,

$$\frac{\frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dz}p + \frac{dN}{dp}r + \frac{dN}{dq}s}{\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dz}p + \frac{dM}{dp}r + \frac{dM}{dq}s} = \frac{\frac{dN}{dy} + \frac{dN}{dz}q + \frac{dN}{dp}s + \frac{dN}{dq}t}{\frac{dM}{dy} + \frac{dM}{dz}q + \frac{dM}{dp}s + \frac{dM}{dq}t};$$

et en développant les produits indiqués, on obtiendra la forme de l'équation du second ordre, la plus générale qui puisse avoir dans son intégrale première, une fonction arbitraire d'une quantité déterminée explicitement au moyen des variables de la proposée. Pour simplifier le résultat, supposons que N ne contienne que z et p, et que M ne renferme que q, x et y; nous aurons

$$\frac{dN}{dx} = 0, \quad \frac{dN}{dy} = 0, \quad \frac{dN}{dq} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0, \quad \frac{dM}{dp} = 0,$$

et il viendra

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN}{dp}\frac{dM}{dq}(rt-s^2)+\frac{dN}{d\zeta}\frac{dM}{dq}(pt-qs)+\frac{dN}{dp}\frac{dM}{dy}r-\frac{dN}{dp}\frac{dM}{dx}s\\ +\frac{dN}{d\zeta}\frac{dM}{dy}p-\frac{dN}{d\zeta}\frac{dM}{dx}q\end{aligned}\right\}=0.$$

Cette équation se rapporte à

$$A(rt-s^2)+B(pt-qs)+Cr-Cs+Dp-D'q=0;$$

et il suit de sa formation, que pour intégrer celle-ci, il faut la regarder comme la résultante de l'élimination d'une indéterminée ω entre deux autres de la forme

$$\frac{\alpha r+\beta p}{\alpha' s+\gamma'}=\omega \qquad \frac{\alpha s+\beta q}{\alpha' t+\beta'}=\omega.$$

En comparant le résultat de cette élimination avec la proposée, on trouvera

$$\alpha\alpha'=A,\quad \alpha'\beta=B,\quad \beta'\alpha=C,\quad \gamma'\alpha=C',\quad \beta'\beta=D,\quad \gamma'\beta=D';$$

de ces six équations, on tirera

$$\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{A}{C}=\frac{\alpha'}{\beta'},\ \frac{A}{C'}=\frac{\alpha'}{\gamma'},\ \frac{B}{D}=\frac{\alpha'}{\beta'},\ \frac{B}{D'}=\frac{\alpha'}{\gamma'},\ \frac{C}{D}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{C'}{D'},$$

et on aura par conséquent les conditions

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{C'}{D'}:$$

lorsqu'elles seront remplies, il faudra chercher à intégrer l'équation

$$\alpha\,dp+\beta\,d\zeta=\omega(\alpha'dq+\beta'dx+\gamma'dy)$$

qui résulte de l'élimination des coefficiens r, s et t, entre les deux équations hypothétiques posées ci-dessus, et

$$dp=r\,dx+s\,dy, \qquad dq=s\,dx+t\,dy.$$

On pourroit multiplier beaucoup les formes des intégrales, mais on ne parviendroit par ce moyen qu'à intégrer des classes particulières d'équations.

786. Monge, qui trouva le premier l'intégrale de l'équation $(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$, mais par un procédé différent de celui que nous avons employé (n°. 783) pour y parvenir, ayant remarqué que les variables primitives x, y et z, étoient exprimées chacune en particulier par deux nouvelles variables a et b,

a pensé qu'en généralisant cette forme on parviendroit à intégrer des équations différentielles partielles qui échappent aux méthodes connues, parce qu'elles supposent entre x, y et z, des relations impossibles à exprimer immédiatement par les signes des diverses opérations introduites jusqu'à présent dans l'analyse. Dans cette vue il propose de regarder x, y et z, comme des fonctions de a et de b, en sorte qu'on ait

$$dx = \frac{dx}{da}\,da + \frac{dx}{db}\,db,$$

$$dy = \frac{dy}{da}\,da + \frac{dy}{db}\,db,$$

$$dz = \frac{dz}{da}\,da + \frac{dz}{db}\,db,$$

et de transformer l'équation différentielle proposée en une autre qui ne contienne que des coefficiens différentiels relatifs aux variables a et b. Voici les principaux passages du calcul qu'il faut effectuer pour opérer cette transformation :

1°. on a
$$\frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{da} = p\frac{dx}{da} + q\frac{dy}{da}$$
$$\frac{dz}{db} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{db} = p\frac{dx}{db} + q\frac{dy}{db},$$

et si pour abréger on fait

$$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} = Z$$
$$\frac{dz}{da}\frac{dx}{db} - \frac{dz}{db}\frac{dx}{da} = Y$$
$$\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dz}{da} = X,$$

on trouvera $p = -\frac{X}{Z}$, $q = -\frac{Y}{Z}$; on aura de plus les deux équations identiques

$$Z\frac{dz}{da} + Y\frac{dy}{da} + X\frac{dx}{da} = 0, \quad Z\frac{dz}{db} + Y\frac{dy}{db} + X\frac{dx}{db} = 0 \ldots (A)$$

2°. En passant aux coefficiens du second ordre, on trouvera

$$\frac{d^2\zeta}{da^2} = r\,\frac{dx^2}{da^2} + 2s\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + t\,\frac{dy^2}{da^2} + p\,\frac{d^2x}{da^2} + q\,\frac{d^2y}{da^2}$$

$$\frac{d^2\zeta}{da\,db} = r\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + s\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + s\frac{dx}{db}\frac{dy}{da} + t\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} + p\frac{d^2x}{da\,db} + q\frac{d^2y}{da\,db}$$

$$\frac{d^2\zeta}{db^2} = r\,\frac{dx^2}{db^2} + 2s\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} + t\,\frac{dy^2}{db^2} + p\,\frac{d^2x}{db^2} + q\,\frac{d^2y}{db^2};$$

substituant dans ces équations les valeurs de p et de q, on aura

$$Z\,\frac{d^2\zeta}{da^2} + Y\,\frac{d^2y}{da^2} + X\,\frac{d^2x}{da^2} = Z\left\{ r\,\frac{dx^2}{da^2} + 2s\,\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + t\,\frac{dy^2}{da^2} \right\}$$

$$Z\frac{d^2\zeta}{da\,db} + Y\frac{d^2y}{da\,db} + X\frac{d^2x}{da\,db} = Z\left\{ r\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + s\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + s\frac{dx}{db}\frac{dy}{da} + t\frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \right\}.$$

$$Z\,\frac{d^2\zeta}{db^2} + Z\,\frac{d^2y}{db^2} + X\,\frac{d^2x}{db^2} = Z\left\{ r\,\frac{dx^2}{db^2} + 2s\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} + t\,\frac{dy^2}{db^2} \right\},$$

d'où on tirera pour r, s et t, les valeurs suivantes, en faisant les réductions qui peuvent s'offrir immédiatement ou résulter des équations (A):

$$\begin{aligned}
rZ^3 = +\ & \frac{dy^2}{db^2}\left\{ Z\frac{d^2\zeta}{da^2} + Y\frac{d^2y}{da^2} + X\frac{d^2x}{da^2} \right\} \\
- & 2\frac{dy}{db}\frac{dy}{da}\left\{ Z\frac{d^2\zeta}{da\,db} + Y\frac{d^2y}{da\,db} + X\frac{d^2x}{da\,db} \right\} \\
+ & \frac{dy^2}{da^2}\left\{ Z\frac{d^2\zeta}{db^2} + Y\frac{d^2y}{db^2} + X\frac{d^2x}{db^2} \right\} \\
sZ^3 = - & \frac{dx}{db}\frac{dy}{db}\left\{ Z\frac{d^2\zeta}{da^2} + Y\frac{d^2y}{da^2} + X\frac{d^2x}{da^2} \right\} \\
& + \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right)\left\{ Z\frac{d^2\zeta}{da\,db} + Y\frac{d^2y}{da\,db} + X\frac{d^2x}{da\,db} \right\} \\
- & \frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\left\{ Z\frac{d^2\zeta}{db^2} + Y\frac{d^2y}{db^2} + X\frac{d^2x}{db^2} \right\}, \\
tZ^3 = + & \frac{dx^2}{db^2}\left\{ Z\frac{d^2\zeta}{da^2} + Y\frac{d^2y}{da^2} + X\frac{d^2x}{da^2} \right\} \\
- & 2\frac{dx}{db}\frac{dx}{da}\left\{ Z\frac{d^2\zeta}{da\,db} + Y\frac{d^2y}{da\,db} + X\frac{d^2x}{da\,db} \right\} \\
+ & \frac{dx^2}{da^2}\left\{ Z\frac{d^2\zeta}{db^2} + Y\frac{d^2y}{db^2} + X\frac{d^2x}{db^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Il est facile maintenant d'étendre cette transformation à tel ordre qu'on voudra; quant au secours qu'on en tire pour intégrer une équation différentielle partielle, il consiste en ce que l'on peut établir entre les coefficiens différentiels des fonctions x, y, z, dont la composition en a et b est inconnue, des relations qui simplifient beaucoup la proposée.

En effet, si l'on substitue dans l'équation

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

les valeurs de p, q, r, s et t, déduites des formules précédentes, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dx^2}{db^2}+\frac{dy^2}{db^2}+\frac{dz^2}{db^2}\right)\left(Z\frac{d^2z}{da^2}+Y\frac{d^2y}{da^2}+X\frac{d^2x}{da^2}\right)\\ -2&\left(\frac{dx}{db}\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}\frac{dy}{da}+\frac{dz}{db}\frac{dz}{da}\right)\left(Z\frac{d^2z}{da\,db}+Y\frac{d^2y}{da\,db}+X\frac{d^2x}{da\,db}\right)\\ +&\left(\frac{dx^2}{da^2}+\frac{dy^2}{da^2}+\frac{dz^2}{da^2}\right)\left(Z\frac{d^2z}{db^2}+Y\frac{d^2y}{db^2}+X\frac{d^2x}{db^2}\right)\end{aligned}\right\}=0;$$

et pour satisfaire à cette équation, on fera

$$\frac{dx^2}{db^2}+\frac{dy^2}{db^2}+\frac{dz^2}{db^2}=0, \qquad \frac{dx^2}{da^2}+\frac{dy^2}{da^2}+\frac{dz^2}{da^2}=0,$$

$$\frac{d^2z}{da\,db}=0, \qquad \frac{d^2y}{da\,db}=0, \qquad \frac{d^2x}{da\,db}=0.$$

Les trois dernières de ces équations ont pour intégrales secondes $z=\varphi_2(a)+\psi_2(b)$, $y=\varphi_1(a)+\psi_1(b)$, $x=\varphi(a)+\psi(b)$; mais les fonctions $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \psi, \psi_1, \psi_2$, doivent satisfaire aux deux premières qui donnent

$$\psi'(b)^2+\psi'_1(b)^2+\psi'_2(b)^2=0, \qquad \varphi'(a)^2+\varphi'_1(a)^2+\varphi'_2(a)^2=0:$$

d'après ces conditions, l'intégrale de la proposée sera représentée par le système des équations

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(a)+\psi(b)\\ y&=\varphi_1(a)+\psi_1(b)\\ z&=\int da\sqrt{-\varphi'(a)^2-\varphi'_1(a)^2}+\int db\sqrt{-\psi'(b)^2-\psi'_1(b)^2}\end{aligned}\right\}.$$

Il est visible qu'on ne diminuera pas la généralité de ce résultat en écrivant a et b, au lieu de $\varphi(a)$ et $\psi(b)$, et en mettant par conséquent 1 à la place de $\varphi'(a)$ et de $\psi'(a)$; il ne restera plus

que deux fonctions arbitraires, et l'on aura, en supprimant les chiffres dont leurs caractéristiques sont affectées

$$\left.\begin{aligned} x &= a + b \\ y &= \varphi(a) + \psi(b) \\ z &= \int da\sqrt{-1-\varphi'(a)^2} + \int db\sqrt{-1-\psi'(b)^2} \end{aligned}\right\}.$$

Pour revenir de ces équations à la proposée, on les différentiera par rapport à x et à y successivement, en regardant a et b comme des fonctions de ces variables. Faisant pour abréger

$$da = p'dx + q'dy, \qquad db = p''dx + q''dy,$$

et n'écrivant que les caractéristiques des fonctions arbitraires, on trouvera, par les deux premières équations,

$$\begin{aligned} p' + p'' &= 1, & \varphi' p' + \psi' p'' &= 0, \\ q' + q'' &= 0, & -\varphi' q' + \psi' q'' &= 1, \end{aligned}$$

d'où on tirera

$$p' = \frac{\psi'}{\psi' - \varphi'}, \qquad p'' = \frac{-\varphi'}{\psi' - \varphi'},$$

$$q' = \frac{-1}{\psi' - \varphi'}, \qquad q'' = \frac{1}{\psi' - \varphi'};$$

la troisième donnera

$$p = p'\sqrt{-1-\varphi'^2} + p''\sqrt{-1-\psi'^2}$$

$$q = q'\sqrt{-1-\varphi'^2} + q''\sqrt{-1-\psi'^2};$$

mettant dans celles-ci pour p', p'', q' et q'', leurs valeurs, et éliminant alternativement chacun des radicaux, on obtiendra

$$p + q\psi' = \sqrt{-1-\psi'^2}$$

$$p + q\varphi' = \sqrt{-1-\varphi'^2}.$$

La première de ces équations étant différentiée, mène à

$$r + s\psi' = -p''\left(q\psi'' + \frac{\psi'\psi''}{\sqrt{-1-\psi'^2}}\right)$$

$$s + t\psi' = -q''\left(q\psi'' + \frac{\psi'\psi''}{\sqrt{-1-\psi'^2}}\right),$$

d'où il résulte $\frac{r + s\psi'}{s + t\psi'} = \frac{p''}{q''} = -\varphi'$, ce qui revient à

$$r + s(\varphi' + \psi') + t\varphi'\psi' = 0;$$

mais l'une et l'autre se changent en

$$1 + p^2 + 2pq\psi' + (1 + q^2)\psi'^2 = 0$$
$$1 + p^2 + 2pq\phi' + (1 + q^2)\phi'^2 = 0,$$

lorsqu'on en chasse les radicaux, ont également pour racines ϕ' et ψ', et font voir par conséquent que

$$\phi' + \psi' = -\frac{2pq}{1+q^2}, \qquad \phi'\psi' = \frac{1+p^2}{1+q^2};$$

on a donc enfin

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

De la construction géométrique des équations différentielles partielles, et de la détermination des fonctions arbitraires que renferment leurs intégrales.

787. Nous avons déjà fait voir, dans le cinquième chapitre du volume précédent, que les équations différentielles partielles à trois variables appartenoient à des familles de surfaces courbes, liées entr'elles par une génération ou une construction commune; pour compléter ce que nous avons dit alors, il nous reste à montrer comment on construit les surfaces qui sont le lieu d'une équation proposée. Nous commencerons par exposer une construction analogue à celle que nous avons donnée n°. 596 pour les équations différentielles à deux variables, et qui jettera un grand jour sur le sujet que nous allons traiter.

Soit $V = 0$, une équation différentielle partielle quelconque du premier ordre; on ne peut tirer d'une équation de ce genre que la valeur de l'un des coefficiens différentiels. Supposons qu'on ait pris celle de $\frac{dz}{dy}$ ou de q; les quantités x, y, z et $\frac{dz}{dx}$ ou p, resteront indéterminées, sans être néanmoins indépendantes les unes des autres, car p exprime la tangente de l'angle que fait avec le plan des x, y, représenté par BAC, *fig.* 30, la tangente à la courbe XM résultante d'une section faite dans la surface proposée par un plan $M'MX$ parallèle à celui des x, z, que désigne BAD. Ce coefficient sera donc déterminé si l'on se donne cette section; menant alors par l'ordonnée $M'M$ un plan $M'MY$ parallèle au plan CAD des y, z, et tirant la ligne MN qui fasse avec le plan BAC un angle dont la tangente soit q, cette ligne sera la tangente de la section MY faite par le plan $M'MY$ dans la surface cherchée. En opérant ainsi sur chaque point de la section XM, on trouvera une suite de lignes MN,

FIG. 30.

mn etc., qui toucheront la surface demandée. Si l'on mène ensuite le plan xNn parallèle à XMM' et à une très-petite distance de ce dernier, il coupera les lignes MN, mn etc. dans des points N, n, etc. qui pourront être regardés comme appartenant à la surface qu'on se propose de construire; car il est évident que plus les plans XMm, xNn, seront près l'un de l'autre, ainsi que les points M, m, etc. moins la courbe xNn, qui passera par la suite de ces points, différera de la section parallèle et consécutive à la première XM, qu'on s'est donnée d'abord. En opérant sur la courbe xNn, comme sur celle-ci, on trouveroit une troisième section parallèle à BAD, et ainsi de suite. On voit, par cette construction, que la première section XM est entièrement arbitraire, et que même il n'est pas nécessaire qu'elle soit assujettie à la loi de continuité, c'est-à-dire, que toutes ses parties puissent être décrites par une même loi, ou dépendent de la même équation.

Si l'on avoit, au lieu d'une équation différentielle partielle, une équation différentielle totale, on connoîtroit alors p et q indépendamment l'un de l'autre, et il ne faudroit qu'un seul point pour déterminer la surface cherchée. En effet, si le point M étoit donné, en construisant l'équation différentielle à deux variables $\frac{d\zeta}{dx} = p$, on auroit d'abord le point m dans la section XM parallèle au plan BAD des x, ζ. A partir du même point M, on construiroit le point N dans la section YM, au moyen de l'équation $\frac{d\zeta}{dy} = q$, et l'on obtiendroit ensuite le point n, en le considérant comme faisant partie de la section xN, dont l'équation différentielle se déduit de $\frac{d\zeta}{dx} = p$, en y mettant PN' et $N'N$ au lieu de y et de ζ, ou comme faisant partie de la section ym, dont l'équation se tire de $\frac{d\zeta}{dy} = q$, en y mettant Qm' et mm', au lieu de x et de ζ; et de là résulte une relation nécessaire entre p et q, pour que le point n trouvé de ces deux manières soit unique : cette relation est, comme on l'a vu n° 310, l'équation de condition $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$.

788. Il est trop facile de trouver le procédé analytique équivalent aux constructions précédentes pour nous y arrêter ; mais pour mieux faire concevoir l'étendue des équations différentielles partielles, nous considérerons la suivante : $p = f(x, y, z)$. Cette équation laisse q absolument indéterminé, et nous apprend seulement que les sections telles que XM, parallèles au plan des x, z, doivent être des courbes comprises dans l'équation primitive que l'on obtiendroit en intégrant, par rapport à x et à z seulement, l'équation $\frac{dz}{dx} = f(x, y, z)$; or, pour une même valeur de y, cette équation primitive qui contiendra nécessairement une constante arbitraire, fournira une infinité de courbes, toutes situées dans le même plan, et on ne pourra la particulariser qu'en se donnant un point par lequel doive passer la courbe dont on a fait choix. Prenant ensuite pour y une valeur PN', très-peu différente de PM', on aura une nouvelle section que l'on ne pourra déterminer qu'en fixant à volonté un de ses points ; et en opérant ainsi de proche en proche, on formera une suite de points qui ne seront liés entr'eux par aucune condition, et qui pourront appartenir par conséquent à telle espèce de lignes qu'on voudra, soit continue soit discontinue (*).

789 Proposons-nous d'abord de construire l'intégrale de l'équation $Pp + Qq = 0$, lorsque P et Q ne renferment que x et y ; cette intégrale est de la forme $z = \phi(U)$, U désignant une fonction donnée en x et y, et telle que $dU = \mu P dy - \mu Q dx$ (n°. 718).

(*) Il est à propos de remarquer que l'équation $Pp + Qq = R$ peut être ramenée à la forme de celle que nous venons de considérer, en changeant l'une des variables. En effet, si l'on introduit à la place de y, par exemple, une variable v, qui dépende en même tems de x et de y, on aura

$$p = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dx}, \qquad q = \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dy},$$

d'où on tirera l'équation

$$P\frac{dz}{dx} + \left(P\frac{dv}{dx} + Q\frac{dv}{dy}\right)\frac{dz}{dv} = R,$$

qui se réduit à $\frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}$, lorsqu'on fait $P\frac{dv}{dx} + Q\frac{dv}{dy} = 0$, et l'on n'aura besoin que de connoître une valeur particulière de v satisfaisant à cette dernière.

Nous remarquerons que lorsqu'on suppose U constant, z le devient aussi, en sorte que si l'on fait $U = a$, on trouve $z = b$; mais l'équation $U = a$ peut être regardée comme celle d'une surface cylindrique élevée perpendiculairement au plan des x, y, sur la courbe qu'elle représente (n°. 346) : cette surface cylindrique rencontrera la surface demandée, suivant une courbe dont $U = a$ sera la projection sur le plan des x, y, et dont l'autre projection sur le plan des x, z, ou sur celui de y, z, sera $z = b$. Cela posé, si on prend la constante a, de manière que la courbe $M'N'$, *fig.* 31, FIG. 31. tracée sur le plan BAC des x, y, et construite d'après l'équation $U = a$, passe par le point M' dont on veut obtenir l'ordonnée $M'M$, parallèle à l'axe des z, AD, il ne s'agira plus que de déterminer la constante b dans l'équation $z = b$, en satisfaisant à la condition que la surface demandée passe par la courbe donnée NR, dont nous supposons que les projections soient $R'N'$, $R''N''$. Pour cela on observera qu'on doit avoir $z = b$, sur chacun des points de la courbe $M'N'$, et que par conséquent si on prolonge cette courbe jusqu'à ce qu'elle rencontre la projection $N'R'$ de la courbe donnée, l'ordonnée $N'N$ de cette dernière donnera la grandeur de b, puisque le point N doit appartenir à la surface demandée. Si donc on mène $N'Q$ parallèlement à l'axe des y, AC, et qu'on élève QN'' perpendiculairement sur AB, la ligne $M''N''$ parallèle à AB, sera le lieu de l'équation $z = b$, et contiendra les projections de tous les points qui répondent sur la surface demandée, à chacun de ceux de la courbe $M'N'$.

Monge, à qui l'on doit cette construction et celle que nous donnerons plus bas, ne se borne pas à la déduire de l'équation $z = \varphi(U)$, il prouve encore immédiatement qu'elle satisfait à l'équation différentielle partielle proposée. Pour cela, il observe que si l'on fait dans la surface obtenue par son procédé, deux sections respectivement parallèles aux plans BAD et DAC, *fig.* 32, l'un des x, z, l'autre FIG. 32. des y, z, et que l'on tire les tangentes MX' et MY', de ces sections, on aura $M'X' = \frac{z}{p}$, $M'Y' = \frac{z}{q}$ (n°. 324); mais si par le point M' on construit la courbe $M'N'$ dont l'équation est $U = a$, et qu'on élève sur cette courbe, perpendiculairement au plan ABC, une sur-

face cylindrique, l'intersection de cette surface et de la proposée sera une courbe plane MN égale et parallèle à $M'N'$. Il est aisé de voir que l'élément Mn de cette courbe, compris dans le plan tangent $X'MY'$, sera parallèle à la commune section $Y'X'$ du même plan tangent avec le plan ABC; il en sera de même de sa projection $M'n'$, et l'on aura par conséquent les triangles semblables $M'X'Y'$ et $M'm'n'$, qui donneront $M'm' : m'n' :: M'Y' : M'X'$; or, $M'm'$ et $m'n'$, représentent dy et dx, dans la courbe $M'N'$, pour lequelle on a $U=a$, ou

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy = 0 :$$

la proportion précédente deviendra donc

$dy : dx :: \frac{\zeta}{q} : \frac{\zeta}{p}$ ou $dy : dx :: p : q$, d'où on tirera $dy = -\frac{p\,dx}{q}$, en observant que d'après la figure, y diminue lorsque x augmente, et substituant dans l'équation précédente, qui, par l'hypothèse, revient à $Pdy - Qdx = 0$, on trouvera $Pp + Qq = 0$, c'est-à-dire, l'équation différentielle partielle proposée.

790. Passons maintenant à l'équation générale $Pp + Qq = R$, dont l'intégrale est de la forme $V = \varphi(U)$ (n°. 721). Dans ce cas on a en même-tems $U = a$, $V = b$, et comme on suppose que U et V contiennent les trois variables x, y et ζ, il s'ensuit que les points que l'on considère dans la surface demandée, sont sur la courbe d'intersection de deux surfaces ayant pour équations $U = a$, $V = b$. Les projections en x, y et ζ, de cette intersection, s'obtiendront en éliminant alternativement ζ et y, entre les équations $U = a$, $V = b$. Soient,

$$f_{,}(x, y, a, b) = 0, \qquad f_{,,}(x, \zeta, a, b) = 0,$$

les deux résultats; concevons que l'on ait donné à la constante a une valeur telle que la courbe $M'N'$ *fig.* 33, représentée par l'équation $f_{,}(x, y, a, b) = 0$, passe par le point M' dont on cherche l'ordonnée. Si la valeur de b étoit celle qui remplit la condition exigée, d'après laquelle la surface demandée doit passer par la courbe donnée, NR, dont les projections sont $N'R'$, $N''R''$, en construisant la courbe $N''M''$ à laquelle appartient $f_{,,}(x, \zeta, a, b) = 0$, les points N' et N'' seroient les projections d'un même point N, déterminé par la rencontre de la courbe NR, et de celle qui est l'intersection des

FIG 33.

surfaces représentées par les équations $U=a, V=b$. Il n'arrivera sans doute presque jamais, qu'en prenant b au hasard, on tombe d'abord sur la valeur convenable; mais voici un moyen d'y parvenir par une suite d'opérations géométriques.

Supposons que la première valeur de b ait donné les courbes $M'N'_1$, et $N''_1n''_1$, l'une sur le plan BAC, l'autre sur le plan BAD, et que N''_1 soit, sur la seconde, le point correspondant à l'intersection N'_1 de la première avec la projection $N'R'$ de la courbe donnée; ce point ne se trouvant pas sur la courbe $N''R''$, on prendra pour b, une nouvelle valeur peu différente de celle qu'on lui avoit d'abord supposée, en déterminant toujours a de manière que la nouvelle courbe $M'N'_2$ résultante de l'équation $f_1(x,y,a,b)=0$, passe par le point M'; on cherchera ensuite sur le plan DAB, dans la courbe $N''_2n''_2$ donnée par l'équation $f_{11}(x,z,a,b)=0$, le point N''_2 correspondant au point N'_2. Sil ne tombe pas sur la courbe $R''N''$, on procédera, comme précédemment, à la recherche d'un troisième point, et ainsi de suite; puis par les points N''_1, N''_2, etc. on fera passer une courbe, dont la rencontre avec $N''R''$, sera le point cherché N'': de celui-ci on conclura N' par le moyen de la projection $N'R'$ de la courbe donnée. On aura alors deux points M', N', pour déterminer les constantes a et b, dans l'équation $f_1(x,y,a,b)=0$ qui fait connoître la courbe $M'N'$; et tous les points qui répondront perpendiculairement au-dessus de ceux de cette courbe dans la surface demandée, auront, dans le plan BAD, leurs projections sur la courbe $M''N''$, résultante de l'équation $f_{11}(x,z,a,b)=0$.

Il est bien évident que cette construction ne suppose aucune continuité dans les projections $N'R'$ et $N''R''$, de la courbe par laquelle doit passer la surface demandée; on peut donc prendre au lieu de cette courbe une ligne tracée d'une manière quelconque, ou même au hasard.

Nous ne suivrons pas Monge dans la démonstration qu'il donne de cette construction, qui se trouve suffisamment prouvée par elle-même puisqu'elle exprime les conditions de l'intégrale, et d'ailleurs on peut consulter le mémoire dont elle est tirée.

791. Pour montrer, par un exemple, l'emploi des équations différentielles particlles du premier ordre dans les questions géométriques,

nous résoudrons ce problême : *Trouver l'équation d'une surface qui coupe sous un angle donné, toutes les surfaces comprises dans une même équation différentielle totale du premier ordre.* Il est, par rapport aux surfaces, ce qu'est, par rapport aux lignes, celui des trajectoires dont nous nous sommes occupés n°. 605.

Soit $dz' = Pdx' + Qdy'$ l'équation des surfaces coupées, et représentons par $dz = p\,dx + q\,dy$ celle de la surface coupante. Cela posé, il est aisé de voir que pour connoître l'angle que font, dans un point quelconque de leur commune section, deux surfaces qui se coupent, il faut mener par ce point un plan tangent ou une normale à chacune d'elles, et chercher ensuite l'angle compris entre ces plans ou entre ces lignes. Or, l'équation du plan tangent des surfaces coupées, sera (n°. 322)

$$Z - z' = P(X - x') + Q(Y - y'),$$

et celle du plan tangent de la surface coupante,

$$Z - z = P(X - x) + Q(Y - y),$$

en désignant par X, Y, Z, les coordonnées des points quelconques de l'espace; de plus, si l'on nomme α l'angle que forment ces plans, on aura (n°. 303) $\cos\alpha = \dfrac{1 + Pp + Qq}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$.

Telle est l'équation différentielle partielle qui exprime les conditions de la question proposée.

Le cas le plus simple est celui où l'on a $\cos\alpha = 0$, et dans lequel la surface coupante doit rencontrer à angle droit les surfaces coupées : l'équation précédente se réduit alors à $Pp + Qq + 1 = 0$, et son intégrale dépend de celles de deux quelconques des trois équations

$$Pdy - Qdx = 0, \quad Pdz + dx = 0, \quad Qdz + dy = 0 \text{ (n°. 722)},$$

Supposons que les surfaces coupées soient des ellipsoïdes ayant leur centre à l'origine, leur équation sera

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D^2 \quad \text{(n°. 312)},$$

et si l'on ne veut considérer que la suite de celles qui résultent des diverses valeurs que peut prendre la constante D, on aura

$$Axdx + Bydy + Czdz = 0, \quad \text{d'où } dz = -\frac{Ax}{Cz}dx - \frac{By}{Cz}dy,$$

et par conséquent $P = -\frac{Ax}{C\zeta}$, $Q = -\frac{By}{C\zeta}$; les deux dernières des équations à intégrer deviendront

$$Ax\,d\zeta - C\zeta\,dx = 0, \qquad By\,d\zeta - C\zeta\,dy = 0,$$

et donneront

$$\frac{\zeta^A}{x^C} = a, \quad \frac{\zeta^B}{y^C} = b, \quad \frac{\zeta^B}{y^C} = \varphi\left(\frac{\zeta^A}{x^C}\right).$$

En prenant $A = B = C$, les surfaces coupées se changeront dans une suite de sphères concentriques dont le rayon sera $\sqrt{D}$, et l'équation de la surface coupante sera $\frac{\zeta}{y} = \varphi\left(\frac{\zeta}{x}\right)$, c'est-à-dire, celle des surfaces coniques, ayant leur sommet à l'origine des coordonnées.

792. Donnons encore un exemple ; nous le tirerons des surfaces *équivalentes*, dont voici le caractère. Si l'on suppose que

$$d\zeta = pdx + qdy \text{ et } d\zeta = Pdx + Qdy,$$

soient les équations de deux surfaces courbes, les différentielles de leurs aires auront pour expressions

$$dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}, \qquad dxdy\sqrt{1+P^2+Q^2},$$

et seront égales si l'on a

$$p^2 + q^2 = P^2 + Q^2;$$

les aires indéfinies seront aussi égales entr'elles, puisqu'elles seront composées d'un même nombre d'élémens égaux : les surfaces proposées seront donc équivalentes, quoique pouvant d'ailleurs différer beaucoup, puisqu'on satisfait à l'équation ci-dessus, en prenant

$$p = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{y}{a}, \quad P = \frac{y}{a}, \quad Q = \frac{x}{a},$$

ce qui suppose qu'on ait $d\zeta = \frac{xdx + ydy}{a}$, $d\zeta = \frac{ydx + xdy}{a}$,

d'où il suit $2a\zeta = x^2 + y^2$, $a\zeta = xy$, en négligeant les constantes. Les surfaces données par ces équations sont de nature très-différente, mais elles jouissent de cette propriété remarquable, que si l'on prend sur le plan des x, y, une courbe quelconque, et qu'on élève sur cette courbe un cylindre dont la droite génératrice soit parallèle à l'axe de ζ, il coupera sur l'une et l'autre des surfaces proposées des portions de même étendue. C'est Euler

qui fit connoître les surfaces équivalentes, et il remarqua, comme une espèce de paradoxe, que parmi les lignes, on n'en trouvoit aucune qui présentât la même propriété ; car lorsque sur deux lignes rapportées aux mêmes abscisses, les arcs compris entre les mêmes ordonnées, sont par-tout égaux entr'eux, ces lignes sont l'une et l'autre de même espèce, et ne différent entr'elles que par leur position. En effet, en nommant x, y, leurs coordonnées, et supposant qu'on ait dans l'une $dy=p\,dx$, et dans l'autre $dy=P\,dx$, il en résultera

$$\sqrt{1+p^2}=\sqrt{1+P^2}\text{, d'où } p=P\text{, et } y=\int p\,dx=\int P dx+C.$$

La recherche de toutes les surfaces qui sont équivalentes à une surface donnée, dépend de l'intégration d'une équation différentielle partielle de la forme $p^2+q^2=V$, V étant une fonction de x et de y. Supposons que la surface donnée soit le plan ayant pour équation $z=Ax+By+C$, nous aurons $P=A$, $Q=B$, et en faisant pour abréger $\sqrt{A^2+B^2}=m$, l'équation des surfaces demandées, sera $p^2+q^2=m^2$. Pour l'intégrer, Euler observe que l'on y satisfait en prenant $p=m\sin\omega$, $q=m\cos\omega$, puisqu'on a dans cette hypothèse $p^2+q^2=m^2$; il résulte de là

$$dz=p\,dx+q\,dy=m\,(dx\sin\omega+dy\cos\omega),$$

et d'après le procédé du n°. 740, on trouve

$$\left.\begin{aligned} z+\varphi(\omega)&=m\,(x\sin\omega+y\cos\omega)\\ \varphi'(\omega)&=m\,(x\cos\omega-y\sin\omega)\end{aligned}\right\}.$$

Lorsque $m=0$, on a $\varphi'(\omega)=0$, d'où $\varphi(\omega)=const.$ et la première des équations ci-dessus donne $z=const.$ dans ce cas l'intégrale perd de sa généralité et ne représente plus qu'un plan parallèle à celui de x, y ; mais l'équation du plan proposé se réduit à $z=C$; il est lui-même parallèle au plan des x, y, et toutes ses parties sont égales à leurs projections.

Si l'on fait $\omega=a$, $\varphi(\omega)=b$, a et b, désignant des constantes, on aura $\varphi'(\omega)=0$, et il faudra supprimer la seconde équation de l'intégrale qui deviendra dans ce cas

$$z+b=m\,(x\sin a+y\cos a),$$

équation d'un plan dont l'inclinaison sur celui de x, y, est la même que

que celle du plan proposé, puisqu'elles ont l'une et l'autre pour tangente $\sqrt{A^2+B^2}=m$ (n°. 304).

En prenant $\varphi(\omega)=m(a\sin\omega+b\cos\omega)-c$, il vient

$$a\cos\omega-b\sin\omega=x\cos\omega-y\sin\omega,$$

d'où on tire $\frac{\sin\omega}{\cos\omega}=\frac{x-a}{y-b}$, et par conséquent

$$\sin\omega=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}},\qquad \cos\omega=\frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

$$z-c=m\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2};$$

la dernière équation est celle d'un cône dont la base est un cercle parallèle au plan des x, y.

Il suit de là que l'aire d'une portion quelconque de ce cône est à celle de sa projection dans un rapport constant, et c'est ce dont on peut se convaincre *à priori*; car on trouve que l'élément de son aire, dont la projection est représentée par $dx\,dy$, a pour expression $dx\,dy\sqrt{1+m^2}$, de même que l'élément du plan proposé.

En général, il est facile de voir par la forme de l'intégrale obtenue précédemment, que les surfaces équivalentes au plan sont développables, et que l'aire d'une portion quelconque de ces surfaces est dans un rapport constant avec sa projection, d'où il résulte que si l'on construit sur le plan des x, y, une courbe qui soit quarrable, la surface cylindrique élevée sur cette courbe, parallèlement à l'axe de z, retranchera de la surface proposée une portion quarrable.

793. Euler donne, pour construire les surfaces équivalentes au plan, un procédé qui revient à celui-ci: sur le plan ABC, des x, y, *fig.* 34, on décrit une courbe quelconque $E'F'$, et par un point M', projection de celui qu'on cherche, on mène une droite $M'G'$, normale à la courbe $E'F'$, puis on élève $M'M$ perpendiculaire au plan ABC, et telle que l'on ait $\frac{MM'}{M'G'}=m$; le point M, trouvé de cette manière, appartient à la surface demandée, ainsi que tous ceux de la droite $G'M$. En effet, l'ensemble des droites menées comme la précédente, par chaque point de $E'F'$, FIG. 34.

formera une surface développable dont tous les élémens feront avec le plan ABC un angle dont la tangente sera égale à m, et d'après la propriété connue du plan, les aires des portions quelconques de ces élémens seront à celles de leurs projections comme $G'M : G'M'$, ou comme $1 : \cos AGM$ (*Essais de Géométrie sur les Surfaces courbes*, n°. 61). Il est évident que la courbe $E'F'$, qui particularise la surface proposée, et qui donneroit un cône si elle étoit un cercle, peut être discontinue ; en prenant même, au lieu de cette courbe, un assemblage de lignes droites, on auroit un polyèdre qui satisferoit encore à la question proposée. Nous remarquerons que puisque toutes les lignes MG' ont pour projections sur le plan ABC, les normales à la courbe $E'F'$, qui sont tangentes à la développée $I'H'$, de cette courbe, la même développée sera la projection de l'arrête de rebroussement de la surface proposée dont les lignes MG' sont les caractéristiques (n°. 342).

Monge, qui s'est occupé également de l'équation $p^2 + q^2 = m^2$, a trouvé pour son intégrale le systême des équations

$$\left.\begin{aligned} (x-\alpha)^2 + (y-\varphi(\alpha))^2 &= \frac{z^2}{m^2} \\ x-\alpha \;+ (y-\varphi(\alpha))\,\varphi' &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Quoique ce résultat paroisse différer de celui dont nous avons fait usage ci-dessus, il conduit néanmoins aux mêmes conclusions ; car la première équation est celle d'un cône droit par rapport au plan des x, y, et dont le côté fait avec ce plan un angle, ayant sa tangente égale à m ; la surface cherchée est considérée dans ce cas comme la limite d'une suite de cônes droits, auxquels les plans compris dans l'intégrale obtenue plus haut, sont tangens, ce qui donne évidemment la même construction que ci-dessus.

794. Les fonctions arbitraires qui entrent dans les équations du second ordre ne sont pas plus assujetties à la loi de continuité que celles qui complètent les intégrales des équations du premier ordre ; on s'en convaincra en considérant l'équation très-simple $s = 0$, ou $\frac{d^2 z}{dx\,dy} = 0$, dont l'intégrale est $z = \varphi(x) + \psi(y)$. Pour construire cette équation, il faut décrire sur le plan ABD des x, z, et

CAD des y, z, *fig.* 35, deux courbes quelconques $X''N''$ et $Y'''R'''$, continues ou discontinues, puis élever sur le point M', perpendiculairement au plan BAC des x, y, une ordonnée $M'M$ égale à la somme des ordonnées PN'' et QR''' correspondantes aux abscisses $AP=x$, $AQ=y$, dans les courbes $X''N''$ et $Y'''R'''$. FIG. 35.

Il est d'abord très-évident que cette construction convient rigoureusement à l'équation $z=\varphi(x)+\psi(y)$, car PN'' représente $\varphi(x)$ et QR''' représente $\psi(y)$; mais de plus, il est facile de voir qu'elle satisfait également bien à l'équation différentielle partielle proposée. En effet, quoiqu'on fasse varier en même-tems x et y, la différence entre l'ordonnée $M'M$ et celle qui résultera de ce changement ne sera composée que de deux parties, dont une, relative à la courbe $X''N''$ et représentée par $n''s''$, ne dépend que de x seulement, l'autre, relative à la courbe $Y'''R'''$ et représentée par $t'''r'''$, ne dépend que de y; la section faite par un plan mené perpendiculairement au plan ABC, sur la ligne qm' parallèle à QM', ne sera par conséquent que la courbe $X''N''$ élevée parallèlement à elle-même, d'une quantité égale à qr'''; les différentielles de ses ordonnées n'auront donc pas varié par son changement de position: on aura donc

$$\frac{d.pdx}{dy}=0, \qquad \text{ou } s=0.$$

Euler eut avec d'Alembert, à l'occasion du problême *des cordes vibrantes* qui conduit à l'équation $r=a^2t$, une longue contestation dans laquelle il soutint toujours et avec raison, que les fonctions arbitraires contenues dans l'intégrale de cette équation, pouvoient être discontinues. Les Géomètres qui sont entrés dans la carrière après ces deux grands hommes, ont pris part à cette dispute: les uns ont adopté l'opinion d'Euler, sans restriction, et les autres ont cru qu'elle devoit être modifiée. Arbogast, dans un mémoire couronné en 1790, par l'académie de Pétersbourg, a discuté les divers sentimens connus sur cette matière; par ses raisonnemens, analogues à ceux que je viens de rapporter, il me paroît prouvé que rien ne doit limiter la généralité des fonctions arbitraires, contenues dans les intégrales des équations différentielles partielles. Il remarque, par exemple, que puisque l'équation $r=a^2t$, sur laquelle a

roulé principalement la discussion, se transforme en $\frac{d^2\zeta}{du\,dv} = 0$, en faisant $u = x + ay$, $v = x - ay$; (n°. 769), c'est-à-dire, en changeant seulement la position des axes AB et AC, sur le plan ABC, son intégrale, qui se présente d'abord sous la forme $\zeta = \varphi(x+ay) + \downarrow(x-ay)$, devenant $\zeta = \varphi(u) + \downarrow(y)$, doit être construite de même que celle de l'équation $\frac{d^2\zeta}{dx\,dy} = 0$, du moins tant que l'on fait abstraction des circonstances physiques de la question proposée, qui peuvent restreindre la généralité des considérations géométriques.

795. Monge construit, par des opérations analogues à celles qui ont été indiquées dans le n°. 790, toutes les intégrales des équations différentielles partielles, lorsque les fonctions arbitraires ne dépendent que d'une seule quantité donnée en x, y et ζ. Nous nous bornerons ici à faire connoître l'esprit de son procédé.

Soit $V = 0$, l'intégrale proposée, V contenant x, y, ζ, les fonctions arbitraires $\varphi(U)$, $\chi(U)$, $\downarrow(U)$, etc. et U étant donné en x et y seulement. Pour déterminer la surface qui est le lieu de cette équation, on l'assujettira à passer par autant de courbes données qu'il y a de fonctions arbitraires, ce qui s'effectuera en formant l'équation $U = a$, et en assignant à la constante a, une valeur telle que la courbe que représente cette équation, passe par le point du plan des x, y, dont on cherche l'ordonnée ζ; on construira cette courbe; on remarquera les points où elle rencontre les projections sur le plan des x, y, des courbes données; enfin, on déterminera les constantes arbitraires dans lesquelles se changent les fonctions $\varphi(U)$, $\chi(U)$, $\downarrow(U)$, etc. par la supposition de $U = a$, de manière que les points d'intersection avec les courbes données de la surface à laquelle appartient, dans cette hypothèse, l'équation $V = 0$, correspondent à ceux où la courbe qui résulte de l'équation $U = a$, coupe les projections de ces mêmes courbes sur le plan des x, y.

796. La construction précédente étant traduite en calcul, donne le moyen de déterminer analytiquement les fonctions arbitraires φ, χ, $\downarrow$, etc. lorsqu'on a les équations des projections des courbes

données. Supposons en effet que ces équations soient

$$\left.\begin{matrix} y = \mathrm{f}(x) \\ z = \mathrm{F}(x) \end{matrix}\right\}, \qquad \left.\begin{matrix} y = \mathrm{f}_{,}(x) \\ z = \mathrm{F}_{,}(x) \end{matrix}\right\}, \qquad \left.\begin{matrix} y = \mathrm{f}_{,,}(x) \\ z = \mathrm{F}_{,,}(x) \end{matrix}\right\}, \text{ etc.}$$

Faisons comme plus haut $U = a$; à l'aide de cette équation et de l'intégrale proposée $V = 0$, nous pourrons chasser y et z, des six équations rapportées ci-dessus, qui ne renfermeront plus alors que les quantités a, $\varphi(a)$, $\chi(a)$, $\downarrow(a)$, etc. et la variable x; éliminant ensuite cette dernière entre les deux équations qui appartiennent à une même courbe, on aura un nombre de résultantes égal à celui des fonctions arbitraires, et desquelles on tirera les expressions de ces fonctions au moyen de la quantité a, qu'il faudra remplacer par U. Nous ne croyons pas devoir entrer dans de plus grands détails sur cette méthode, parce que nous en avons déjà fait usage dans le cinquième chapitre du volume précédent (n°. 334 et suivans), et nous renvoyons au Traité des séries et des différences, ce qui regarde les cas dans lesquels les fonctions arbitraires ne dépendent pas toutes de la même quantité, excepté pourtant celui de l'équation du premier degré et du second ordre, qui se présente fréquemment dans les recherches Physico-mathématiques, et pour lequel Laplace a donné une méthode très-élégante que nous allons exposer.

797. Nous choisirons, pour particulariser les fonctions arbitraires, ces deux conditions : qu'en prenant $y = \mathrm{f}(x)$, on ait 1°. $z = \mathrm{f}_{,}(x)$, 2°. $\frac{dz}{dx} = \mathrm{f}_{,,}(x)$, les trois fonctions f, $\mathrm{f}_{,}$ et $\mathrm{f}_{,,}$, étant données et indépendantes les unes des autres; et nous supposerons que l'équation différentielle partielle proposée, qui est alors

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Nz = M,$$

soit transformée en

$$\frac{d^{2}z}{du\,dv} + P_{,}\frac{dz}{du} + Q_{,}\frac{dz}{dv} + N_{,}z = M_{,} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

afin que son intégrale ne contienne que z et les quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires. En transformant de même les deux premières équations données, on en obtiendra d'autres que nous représenterons par $v = F(u)$, $z = F_{,}(u)$,
et d'où nous tirerons $dv = F'du$, $dz = F'_{,}du$;

en n'écrivant, pour abréger, que les caractéristiques des fonctions. Substituant ces valeurs dans l'expression générale $d\zeta = \frac{d\zeta}{du}du + \frac{d\zeta}{dv}dv$; nous aurons $F'_1 = \frac{d\zeta}{du} + \frac{d\zeta}{dv}F'$ ..... (*A*), et de plus, par la transformation indiquée, $\frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\zeta}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\zeta}{dv}\frac{dv}{dx}$ (n°. 769); les fonctions $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, données en u et v, aussi bien qu'en x et y, deviendront des fonctions de u seul lorsqu'on en chassera v, par le moyen de l'équation $v = F$; mais dans cette circonstance la troisième équation donnée $\frac{d\zeta}{dx} = f_2(x)$, prendra la forme $\frac{d\zeta}{dx} = F_2(u)$, en y mettant, au lieu de x sa valeur en u : nous parviendrons ainsi à cette nouvelle équation,

$$F_2 = \frac{d\zeta}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\zeta}{dv}\frac{dv}{dx} \text{ .....} (B),$$

dont la combinaison avec l'équation (*A*) nous fera connoître les expressions des coefficiens du premier ordre, $\frac{d\zeta}{du}$, $\frac{d\zeta}{dv}$, relatives aux relations établies entre x, y, ζ et $\frac{d\zeta}{dx}$: nous désignerons ces expressions par p_1 et q_1.

Cela posé, il faut déduire de ces résultats les valeurs des fonctions

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{du} + P_1\zeta, \qquad \zeta'' = \frac{d\zeta'}{du} + P'_1\zeta', \text{ etc.}$$

desquelles la méthode du n°. 773 fait successivement dépendre ζ; nous aurons d'abord pour la première, $\zeta' = p_1 + P_1F_1$. Pour obtenir ζ'', il faut connoître ce que devient $\frac{d\zeta'}{du}$, dans l'hypothèse établie; or en différentiant, par rapport à u, l'équation $\zeta' = \frac{d\zeta}{du} + P_1\zeta$, on trouve l'équation

$$\frac{d\zeta'}{du} = \frac{d^2\zeta}{du^2} + P_1\frac{d\zeta}{du} + \zeta\frac{dP_1}{du},$$

qui donneroit la valeur cherchée, si l'on avoit celle de $\frac{d^2\zeta}{du^2}$; mais

en mettant pour dv sa valeur $F'du$, on a

$d.\frac{d\zeta}{du}=\left(\frac{d^2\zeta}{du^2}+\frac{d^2\zeta}{dudv}F'\right)du$, ou $\frac{dp_1}{du}=\frac{d^2\zeta}{du^2}+\frac{d^2\zeta}{dudv}$, et en observant que l'équation (1) devient $\frac{d^2\zeta}{dudv}+P_1p_1+Q_1q_1+N_1F_1=M_1$, lorsqu'on y met pour ζ_1, $\frac{d\zeta}{du}$, $\frac{d\zeta}{dv}$, leurs valeurs, on en tirera l'expression de $\frac{d^2\zeta}{dudv}$, pour la substituer dans $\frac{dp_1}{du}=\frac{d^2\zeta}{du^2}+\frac{d^2\zeta}{dudv}$, qui ne renfermera plus que l'inconnue $\frac{d^2\zeta}{du^2}$, dont elle donnera par conséquent la valeur. Il ne reste plus qu'à trouver $\frac{d\zeta'}{dv}$, et pour cela on a l'équation $d\zeta'=\frac{d\zeta'}{du}du+\frac{d\zeta'}{dv}dv$, qui devient $\frac{dZ'}{du}=p'_1+\frac{d\zeta'}{dv}F'$, en représentant par Z', p'_1, les valeurs de ζ' et de $\frac{d\zeta'}{du}$, déterminées d'après ce qui précède, et en mettant $F'du$ au lieu de dv. Il est évident que ζ'', $\frac{d\zeta''}{du}$, $\frac{d\zeta''}{dv}$, s'obtiendront par le moyen des fonctions ζ', $\frac{d\zeta'}{du}$, $\frac{d\zeta}{dv}$, comme celles-ci ont été déduites de ζ, $\frac{d\zeta}{du}$ et $\frac{d\zeta}{dv}$, et qu'il en sera de même pour chacune des transformations successives de l'équation (1).

Si, comme nous l'avons supposé dans le n°. 773, ces transformations s'arrêtent à la fonction ζ''', on aura deux expressions de cette fonction, l'une déduite de ζ'' par le procédé précédent, et l'autre donnée par l'équation

$$\zeta'''=e^{-\int Q_1du}\left[\downarrow(v)+\int e^{\int Q_1du}M''_1du\right],$$

dont le second membre peut être changé en une fonction de v, en mettant dans les quantités $e^{-\int Q_1du}$, $\int e^{\int Q_1du}M''_1du$, au lieu de u, sa valeur en v; par ce moyen la fonction $\downarrow(v)$ sera déter-

minée, et on substituera ensuite son expression dans l'équation

$$\zeta'' = e^{-\int P'',du}\left\{\varphi(u)+\int e^{\int P'',du-\int Q,dv}\times dv\left[\psi(v)+\int e^{\int Q,dv}M'',du\right]\right\},$$

après y avoir remplacé ζ'', par sa valeur déduite de celle de ζ': on en chassera v, au moyen de l'équation $v=F(u)$, et on parviendra à une résultante qui ne contiendra plus que u et $\varphi(u)$, et donnera par conséquent la forme de cette fonction.

Des équations différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité.

798. Nous avons fait voir dans le n°. 701, qu'une équation différentielle du premier ordre à trois variables, de la forme $P\,dx+Q\,dy+R\,d\zeta=0$, ne pouvoit être satisfaite par une fonction de deux variables, qu'autant que l'équation

$$P\frac{dR}{dy}-R\frac{dP}{dy}+R\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{d\zeta}-P\frac{dQ}{d\zeta}=0$$

étoit identique par elle-même. Mais en établissant une dépendance quelconque entre x, y, ζ, on la changera dans une autre qui ne contiendra plus que deux de ces variables, et déterminera par conséquent l'une de celles-ci en fonction de l'autre. Si l'on avoit, par exemple, l'équation

$$\frac{d\zeta}{\zeta-c}=\frac{x\,dx+y\,dy}{x(x-a)+y(y-b)},$$

qui ne peut remplir la condition énoncée ci-dessus, tant que a et b ne sont pas nuls, et qu'on y fît $y=\varphi(x)$, φ désignant une fonction quelconque, elle se changeroit en

$$\frac{d\zeta}{\zeta-c}=\frac{[x+\varphi(x)\varphi'(x)]\,dx}{x(x-a)+\varphi(x)[\varphi(x)-b]}$$

et donneroit autant de relations différentes entre ζ et x, que l'on assigneroit de formes particulières à la fonction φ. Si l'on prend, par exemple, $\varphi(x)=x$, on aura

$$\frac{d\zeta}{\zeta-c}=\frac{2x\,dx}{x(x-a)+x(x-b)}=\frac{2\,dx}{2x-a-b},$$

d'où on tirera $\zeta-c=C(2x-a-b)$, C étant une constante arbitraire, et la proposée sera satisfaite par le système des équations

$$\left.\begin{aligned} y&=x\\ \zeta-c&=C(2x-a-b)\end{aligned}\right\}.$$

Newton, dans son Traité des Fluxions (*), avoit déjà indiqué

(*) *Newtoni opuscula*, tome I, page 83, édition de 1744.

cette

cette manière de résoudre les équations différentielles qui contenoient plus de deux variables; mais elle a l'inconvénient d'exiger une intégration pour chaque résultat qu'on veut obtenir, et Monge a remarqué en 1784, qu'on pouvoit, par l'introduction d'une fonction arbitraire, parvenir à un systême général d'équations qui en donnât une infinité de particuliers, satisfaisant tous à la proposée. J'aurai soin de faire connoître les considérations géométriques qui l'ont conduit à cette théorie; mais je commencerai par l'exposer sous un point de vue purement analytique.

799. Le même procédé que nous avons donné, n°. 703, pour intégrer l'équation $Pdx+Qdy+Rdz=0$, par une seule équation primitive, lorsque la chose est possible, conduit aussi à la solution la plus générale que l'on puisse obtenir pour cette équation, dans le cas contraire. En effet, si on l'intégre d'abord, en regardant une des variables qu'elle renferme comme constante, z, par exemple, que l'on représente par $U=C$, l'équation primitive qui répond à $Pdx+Qdy=0$, que l'on différentie cette équation primitive, en faisant varier à la fois x, y, z et C, et que l'on compare le résultat à la proposée, on arrivera à l'équation $\frac{dC}{dz}=\frac{dU}{dz}-\mu R$, μ étant le facteur qui rend $Pdx+Qdy$ une différentielle exacte. A la vérité, le second membre ne se réduira plus à une fonction de z seul, comme cela arrive dans le cas où la condition d'intégrabilité est remplie, et ne pourra donner C, comme l'exige cette condition; mais il est évident qu'en supposant toujours que C soit une fonction de z, l'équation proposée sera satisfaite par l'équation primitive $U=C$, si l'on a en même tems $\frac{dC}{dz}=\frac{dU}{dz}-\mu R=0$: faisant donc $C=\varphi(z)$, le systême des équations

$$\left.\begin{aligned} U&=\varphi(z)\\ \frac{dU}{dz}-\mu R&=\varphi'(z)\end{aligned}\right\}$$

satisfera à la proposée, quelle que soit la forme de la fonction φ, et pourra se particulariser d'une infinité de manières en prenant φ arbitrairement.

Appliquons ceci à l'équation

$$\frac{d\zeta}{\zeta - c} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x(x-a) + y(y-b)},$$

que nous avons prise pour exemple dans le n°. précédent ; nous aurons

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{x(x-a) + y(y-b)}, \qquad R = -\frac{1}{\zeta - c};$$

et faisant $\mu = x(x-a) + y(y-b)$, nous trouverons $U = x^2 + y^2$, nous obtiendrons par conséquent les équations

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \varphi(\zeta) \\ \frac{x(x-a) + y(y-b)}{\zeta - c} &= \varphi'(\zeta) \end{aligned}\right\}.$$

800. Ce résultat étant algébrique jouit nécessairement de la propriété de donner autant de solutions algébriques qu'on voudra de la proposée ; mais quand même il ne seroit pas tel, il n'en faudroit pas conclure néanmoins, qu'il n'existe point de fonction algébrique qui satisfasse à la proposée, car le système d'équations que nous venons d'obtenir n'est pas le seul que l'on en puisse déduire : on peut même faire en sorte que la fonction arbitraire dépende d'une quantité donnée.

Soit en général $f(x, y, \zeta)$, cette quantité ; si l'on fait $f(x, y, \zeta) = u$, on tirera de là l'expression de l'une des variables x, y, ζ, en fonction des deux autres et de u ; si l'on prend la valeur de ζ, par exemple, on aura $d\zeta = n\,du + p\,dx + q\,dy$, et substituant dans l'équation proposée $P\,dx + Q\,dy + R\,d\zeta = 0$, il viendra

$$R\,n\,du + (P + Rp)\,dx + (Q + Rq)\,dy = 0 :$$

en intégrant d'abord l'équation

$$(P + Rp)\,dx + (Q + Rq)\,dy = 0,$$

la fonction arbitraire qu'il faudra introduire, d'après le procédé ci-dessus renfermera la quantité donnée u.

C'est par le secours de semblables transformations que l'on peut chercher à satisfaire à l'équation $P\,dx + Q\,dy + R\,d\zeta = 0$, par un système d'équations primitives algébriques, et nous observerons que cette question fait, comme celles qui nous ont occupés dans le n°. 532 et suiv. partie de cette branche de l'analyse que l'on pourroit appeler *le Calcul intégral indéterminé*, parce qu'il s'agit de

trouver parmi le nombre infini d'équations primitives qui répondent à l'équation différentielle proposée, celles qui sont algébriques.

Si on vouloit déterminer la fonction arbitraire par la condition que l'une des équations primitives du système fût identique avec l'équation donnée $f(x, y, z) = 0$, on retomberoit sur une équation différentielle du premier ordre à deux variables; car en combinant cette équation avec les deux suivantes, par exemple,

$U = \varphi(z)$, $\frac{dU}{dz} - \mu R = \varphi'(z)$, pour en éliminer x et y, la résultante qu'on obtiendroit pourroit contenir en même tems

z, $\varphi(z)$ et $\varphi'(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}$.

801. Les équations différentielles qui renferment plus de trois variables sont susceptibles de remarques analogues aux précédentes. Pour le prouver, soit l'équation à quatre variables

$$N du + P dx + Q dy + R dz = 0,$$

qui ne satisfasse qu'à la dernière des conditions d'intégrabilité exprimées par les trois équations

$$P\frac{dR}{du} - R\frac{dP}{du} + R\frac{dN}{dx} - N\frac{dR}{dx} + N\frac{dP}{dz} - P\frac{dN}{dz} = 0;$$

$$Q\frac{dR}{du} - R\frac{dQ}{du} + R\frac{dN}{dy} - N\frac{dR}{dy} + N\frac{dQ}{dz} - Q\frac{dN}{dz} = 0;$$

$$Q\frac{dR}{dx} - R\frac{dQ}{dx} + R\frac{dP}{dy} - P\frac{dR}{dy} + P\frac{dQ}{dz} - Q\frac{dP}{dz} = 0,$$

(n°. 710), il s'ensuivra que si l'on fait $du = 0$, l'équation restante $P dx + Q dy + R dz = 0$, pourra s'intégrer par une seule équation primitive entre les trois variables x, y, z. Représentons cette dernière par $U = C$, nous aurons

$$\frac{dU}{dy} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dy} dz = \mu(P dx + Q dy + R dz),$$

et en la différentiant par rapport à u, x, y, z et C, en même tems, comparant ensuite le résultat avec la proposée, multipliée par μ, nous trouverons $\frac{dU}{dz} dz \mu N du = dC$, équation qui deviendra

$\frac{dU}{du} - \mu N = \varphi'(u)$, si l'on fait $C = \varphi(u)$, et d'où nous conclurons par conséquent que la proposée est équivalente au systême des équations

$$\left.\begin{aligned} U &= \varphi(u) \\ \frac{dU}{du} - \mu N &= \varphi'(u) \end{aligned}\right\}.$$

Lorsqu'aucune des conditions d'intégrabilité n'est remplie, il semble d'abord que l'équation proposée ne peut être représentée en général que par le systême de trois équations primitives parce qu'on ne peut l'intégrer que par rapport à deux des variables qu'elle contient. Supposons qu'on ait chassé pour cela les variables u et x, que l'on désigne par conséquent par μ, le facteur qui rend $Q\,dy + R\,dz$ différentielle exacte, et que U soit l'intégrale de cette fonction; l'équation $U = C$, différentiée en y faisant tout varier, donnera

$$\frac{dU}{du}\,du + \frac{dU}{dx}\,dx + \frac{dU}{dy}\,dy + \frac{dU}{dz}\,dz = dC,$$

et comparant avec la proposée, multipliée par μ, en observant que

$$\frac{dU}{dy}\,dy + \frac{dU}{dz}\,dz = \mu Q\,dy + \mu R\,dz,$$

on trouvera

$$\frac{dU}{du}\,du + \frac{dU}{dx}\,dx - dC = \mu N\,du + \mu P\,dx.$$

Pour satisfaire à cette équation, il faut faire $C = \varphi(u, x)$, φ désignant une fonction arbitraire, et posant à l'ordinaire $d\varphi(u,x) = \varphi_{,}(u,x)\,du + \varphi_{,,}(u,x)\,dx$, on égalera entr'elles les quantités qui multiplient du et celles qui multiplient dx dans chaque membre, afin d'obtenir les deux équations

$$\frac{dU}{du} - \varphi_{,}(u,x) = \mu N, \qquad \frac{dU}{dx} - \varphi_{,,}(u,x) = \mu P,$$

délivrées de différentielles; par ce moyen on aura, pour représenter la proposée, le systême des trois équations

$$\left.\begin{aligned} U &= \varphi(u,x) \\ \frac{dU}{du} - \mu N &= \varphi'(u,x) \\ \frac{dU}{dx} - \mu P &= \varphi''(u,x) \end{aligned}\right\}.$$

qui renferme une fonction arbitraire de deux quantités, et si l'on donne à cette fonction diverses formes, on en déduira autant de solutions de la proposée.

Mais on peut aussi satisfaire à la proposée avec deux équations seulement, en diminuant la généralité de la fonction arbitraire φ; car si l'on élimine les variables z et y des trois équations ci-dessus, la résultante ne contenant plus que

$$x,\ y,\ \varphi(x,y),\ \varphi_{,}(x,y),\ \varphi_{,,}(x,y)$$

sera simplement une équation différentielle partielle entre les variables x, y et la fonction φ, et lorsque cette fonction sera déterminée on pourra supprimer l'une quelconque des deux dernières équations du système rapporté ci-dessus. Cette remarque est tirée d'un mémoire que M. Paoli, professeur de mathématiques dans l'Université de Pise, a publié en 1793, sur le sujet qui nous occupe maintenant. (*)

Prenons pour exemple l'équation

$$x\,du + y\,dx + u\,dy + z\,dz = 0;$$

cette équation ne satisfaisant à aucune des conditions d'intégrabilité, il faut intégrer séparément deux de ses termes. En opérant sur les derniers, on trouve $2uy + z^2 = C$; l'on à $\mu = 2$, et il vient par conséquent

$$\begin{aligned} 2uy + z^2 &= \varphi(u,x) \\ 2y - 2x &= \varphi_{,}(u,x) \\ -2y &= \varphi_{,,}(u,x); \end{aligned}$$

éliminant y entre la seconde et la troisième de ces équations, on obtient $\varphi_{,}(u,x) + \varphi_{,,}(u,x) = -2x$, et en intégrant celle-ci, qui est différentielle partielle à l'égard de la fonction φ, on en déduit (n°. 721) $\varphi(u,x) + x^2 = \downarrow(u-x)$.

Substituant la valeur de $\varphi(u,x)$ dans les deux premières équations,

(*) Cet estimable Géomètre, l'un des plus distingués que possède maintenant l'Italie, a publié la même année, en deux volumes *in*-4°. un ouvrage qui a pour titre, *Elementi d'Algebra*, qui réunit à la méthode et à la clarté, l'avantage d'offrir toujours, ou un précis, ou une indication de ce qui a été fait de plus important, soit dans l'Algèbre, proprement dite, soit dans le Calcul différentiel et intégral, dans ces derniers tems.

on aura le système suivant :

$$\left.\begin{aligned} x^2+\zeta^2+2uy &= \psi(u-x)\\ 2y-2x &= \psi'(u-x)\end{aligned}\right\},$$

au moyen duquel on satisfera à la proposée par des fonctions de deux variables.

Il est à propos de remarquer que si l'on fait $u-x=t$ dans la proposée, elle se change en

$$xdx+ydx+xdy+\zeta d\zeta+tdy+xdt=0,$$

et devient intégrable lorsqu'on y suppose t constant ; on aura donc par le premier procédé exposé au commencement de cet article,

$$\left.\begin{aligned} x^2+2xy+\zeta^2+2ty &= \psi(t)\\ 2y-2x &= \psi'(t)\end{aligned}\right\},$$

résultat qui rentre dans le précédent, quand on remet $u-x$ à la place de t.

Si l'équation proposée contenoit cinq variables, en l'intégrant comme ci-dessus, on y introduiroit une fonction arbitraire de trois variables, et on auroit quatre équations, desquelles éliminant les deux variables qui n'entrent pas dans la fonction, on tireroit deux équations différentielles partielles par rapport à cette fonction. En intégrant l'une ou l'autre de ces dernières, ou une nouvelle équation qui en soit déduite, on obtiendra une valeur de la fonction arbitraire, qui permettra de négliger une des équations du système, et le réduira par conséquent à trois ; il arrivera même souvent qu'on pourra la réduire à deux.

Il est facile d'étendre ces recherches aux équations contenant un nombre quelconque de variables, lorsque les différentielles n'y passent point le premier degré, c'est pourquoi nous ne les pousserons pas plus loin ; nous passerons aux équations où les différentielles sont élevées à des puissances supérieures à la première, circonstance qui produit une nouvelle condition d'intégrabilité (n°. 709).

802. Soit l'équation $d\zeta^2=m^2(dx^2+dy^2)$ (A) ;

en y supposant x constant, elle donne $d\zeta=mdy$, et par conséquent $\zeta=my+C$; faisant ensuite varier y, ζ et C, on obtient $d\zeta=mdy+dC$, et substituant dans la proposée, en prenant $C=\varphi(x)$, $dC=\varphi'(x)dx$, on trouve $2mdydx\varphi'(x)+m^2dx^2\varphi'(x)^2=m^2dx^2$,

d'où on tire $2dy = \frac{m\,dx}{\varphi'(x)} - m\,dx\,\varphi'(x)$; il vient, en intégrant, $2y = \int \frac{m\,dx}{\varphi'(x)} - m\,\varphi(x)$: la proposée est donc représentée par le système des équations

$$\left.\begin{aligned} z &= my + \varphi(x) \\ 2y &= \int \frac{m\,dx}{\varphi'(x)} - m\,\varphi(x) \end{aligned}\right\}.$$

Ce résultat n'est pas le plus simple que l'on puisse obtenir parce qu'il contient un signe d'intégration; nous allons en trouver un autre qui sera délivré de ce signe, et qui donnera par conséquent autant de solutions algébriques que l'on voudra de l'équation (A).

Si l'on prend $\frac{dx}{dz} = a$, $\frac{dy}{dz} = \alpha$, a et α étant des constantes, on satisfera à cette équation en faisant $1 = m^2(a^2 + \alpha^2)$, d'où on tirera $\alpha = \frac{\sqrt{1 - m^2a^2}}{m}$; et en intégrant les équations hypothétiques, ci-dessus, on aura

$$\left.\begin{aligned} x &= az + b \\ y &= \frac{z\sqrt{1 - m^2a^2}}{m} + c \end{aligned}\right\} (B),$$

système qui satisfait à la proposée, et renferme trois constantes arbitraires a, b, c. Si on différentie chacune des équations qui le composent, les deux constantes b et c, disparoîtront d'elles-mêmes, et en éliminant a entre les différentielles

$$dx = a\,dz, \qquad dy = \frac{dz\sqrt{1 - m^2a^2}}{m},$$

on retombera sur l'équation (A); mais pour arriver au même résultat il n'est pas nécessaire de supposer que a, b, c, soient des constantes, il faut seulement que l'on ait les valeurs de dx et de dy trouvées plus haut. Or, en faisant varier les quantités a, b, c, dans les équations (B), on aura

$$\begin{aligned} dx &= a\,dz + z\,da + db \\ dy &= \frac{dz\sqrt{1 - m^2a^2}}{m} - \frac{mz\,a\,da}{\sqrt{1 - m^2a^2}} + dc, \end{aligned}$$

valeurs qui se réduiront aux précédentes, si l'on pose

$$2da + db = 0, \qquad -\frac{m2ada}{\sqrt{1-m^2a^2}} + dc = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (C),$$

et si l'on peut trouver pour a, b, c des expressions qui satisfassent à ces équations, on déduira, par leur moyen, des équations (B) de nouvelles solutions de la proposée. Prenons $a = \varphi(b)$, $c = \downarrow(b)$; en mettant ces valeurs dans les équations (B) et (C), nous aurons à la place de la proposée, le systême des quatre équations

$$x = 2\varphi(b) + b$$
$$0 = 2\varphi'(b) + 1$$
$$y = \frac{2\sqrt{1-m^2\varphi(b)^2}}{m} + \downarrow(b)$$
$$0 = -\frac{m2\varphi(b)\varphi'(b)}{\sqrt{1-m^2\varphi(b)^2}} + \downarrow'(b),$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{x-b}{2} - \varphi(b) = 0$$
$$-\frac{1}{2} - \varphi'(b) = 0$$
$$\frac{y-\downarrow(b)}{2} - \frac{\sqrt{1-m^2\left(\frac{x-b}{2}\right)^2}}{m} = 0$$
$$-\downarrow'(b) - \frac{m\left(\frac{x-b}{2}\right)}{\sqrt{1-m^2\left(\frac{x-b}{2}\right)^2}} = 0$$

Il est aisé de voir que la première de ces équations peut être identifiée avec la quatrième, en déterminant d'une manière convenable la fonction arbitraire φ, puisque toutes deux expriment une relation entre les mêmes quantités $\frac{x-b}{2}$ et b; on pourra donc remplacer la seconde qui est la différentielle de la première prise en ne faisant varier que b, par la différentielle de la quatrième prise dans

dans la même hypothèse, et qui sera par conséquent la différentielle seconde de la troisième. Si donc on représente cette troisième par $U = 0$, on aura, au lieu des quatre équations ci-dessus, les trois suivantes :

$$U = 0, \qquad \frac{dU}{db} = 0, \qquad \frac{d^2U}{db^2} = 0 ;$$

lesquelles ne contiendront plus qu'une seule fonction arbitraire; et lorsqu'on particularisera cette fonction, et qu'on éliminera ensuite la quantité b, on obtiendra deux équations primitives qui satisferont à la proposée.

Il est bon de remarquer que si l'on fait disparoître le radical contenu dans $U = 0$, il viendra

$$\left.\begin{aligned} 1 &= m^2\left[\left(\frac{x-b}{\zeta}\right)^2+\left(\frac{y-\varphi(b)}{\zeta}\right)^2\right] \\ 0 &= \quad x-b \quad +(y-\varphi(b)\varphi'(b) \\ 0 &= -1-\varphi'(b)^2+(y-\varphi(b))\varphi''(b) \end{aligned}\right\},$$

et que la première de ces équations se tire immédiatement de la proposée en y changeant

$$\frac{dx}{d\zeta} \text{ et } \frac{dy}{d\zeta} \text{ en } \frac{x-b}{\zeta}, \quad \frac{y-\varphi(b)}{\zeta}.$$

803. Ce résultat peut être généralisé, et Monge en trouve un semblable pour les équations de la forme

$$F\left(\frac{dx}{d\zeta}, \quad \frac{dy}{d\zeta}\right) = 0 ;$$

quelle que soit la fonction F. Pour y parvenir, j'observerai que d'après l'équation proposée, on a $\frac{dy}{d\zeta} = f\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)$, et qu'en posant $\frac{dx}{d\zeta} = a$, il vient $\frac{dy}{d\zeta} = f(a)$, ce qui donne par l'intégration

$$x = a\zeta + b, \qquad y = \zeta f(a) + c,$$

ou bien $$\frac{x-b}{\zeta} = a, \qquad \frac{y-c}{\zeta} = f\left(\frac{x-b}{\zeta}\right);$$

prenant ensuite $a = \varphi(b)$, $c = \downarrow(b)$, et faisant varier b, on aura les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-b}{\zeta} - \varphi(b) &= 0 \\ -\frac{1}{\zeta} - \varphi'(b) &= 0 \\ \frac{y-\psi(b)}{\zeta} - f\left(\frac{x-b}{\zeta}\right) &= 0 \\ -\psi'(b) + f'\left(\frac{x-b}{\zeta}\right) &= 0 \end{aligned}\right\},$$

dont la première et la dernière peuvent être identifiées l'une avec l'autre, et la seconde remplacée par conséquent par la différentielle de la dernière, prise par rapport à b seulement. Faisant donc

$$\frac{y-\psi(b)}{\zeta} - f\left(\frac{x-b}{\zeta}\right) = U,$$

les quatre équations ci-dessus se réduiront aux trois que voici :

$$U = 0, \qquad \frac{dU}{db} = 0, \qquad \frac{d^2U}{db^2},$$

et il est visible qu'au lieu de U, on peut écrire

$$F\left(\frac{x-b}{\zeta}, \frac{y-\varphi(b)}{\zeta}\right).$$

804. On peut faire de ce qui précède la base d'une théorie complète sur la formation des équations différentielles du premier ordre, à trois variables, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité. En effet, soient $v = 0$ et $v' = 0$, deux équations entre les trois variables x, y, ζ; il résultera de ce système, que deux quelconques des variables sont des fonctions de la troisième, et des constantes qui peuvent se trouver dans les équations proposées : si donc l'on différentie les équations $v = 0$, $v' = 0$, et que l'on y fasse ensuite $dy = p\,dx$, $d\zeta = q\,dx$, on aura

$$\frac{dv}{d\zeta}q + \frac{dv}{dy}p + \frac{dv}{dx} = 0, \qquad \frac{dv'}{d\zeta}q + \frac{dv'}{dy}p + \frac{dv'}{dx} = 0.$$

Maintenant on peut, entre les équations $v = 0$, $v' = 0$, et leurs différentielles, éliminer trois des constantes qu'elles contiennent; le résultat sera une équation différentielle du premier ordre, que nous représenterons par $W = 0$, et qui ne satisfera pas aux équations de condition d'où dépend l'intégrabilité dans le cas de trois variables.

Les équations $v = 0$, $v' = 0$, qui renferment autant de constantes arbitraires qu'il est possible d'en éliminer par la différentiation poussée jusqu'au premier ordre seulement, doivent être regardées comme représentant conjointement l'*intégrale complète* de l'équation $W = 0$; mais il existe bien d'autres manières de satisfaire à cette équation, car les équations différentielles

$$\frac{dv}{dz}q + \frac{dv}{dy}p + \frac{dv}{dx} = 0, \qquad \frac{dv'}{dz}q + \frac{dv}{dy}p + \frac{dv}{dx} = 0,$$

n'ont pas seulement lieu dans la supposition que les quantités éliminées, que nous désignerons par a, b, c, soient des constantes; mais elles sont encore vraies, lorsque ces quantités varient, pourvu qu'on ait

$$\frac{dv}{da}da + \frac{dv}{db}db + \frac{dv}{dc}dc = 0, \quad \frac{dv'}{da}da + \frac{dv'}{db}db + \frac{dv'}{dc}dc = 0.$$

On satisfait à ces dernières de vingt-cinq manières différentes, en regardant les quantitées a, b, c, comme variables; nous n'en rapporterons ici que cinq: par la première on suppose

$$\frac{dv}{da} = 0, \quad \frac{dv}{db} = 0, \quad \frac{dv}{dc} = 0, \quad \frac{dv'}{da} = 0, \quad \frac{dv'}{db} = 0, \quad \frac{dv'}{dc} = 0;$$

par la seconde,

$$\frac{dv}{da} = 0, \quad \frac{dv}{db} = 0, \quad \frac{dv}{dc} = 0, \quad \frac{dv'}{da} = 0, \quad \frac{dv'}{db}db + \frac{dv'}{dc}dc = 0;$$

par la troisième,

$$\frac{dv}{da} = 0, \quad \frac{dv}{db}db + \frac{dv}{dc}dc = 0, \quad \frac{dv'}{da} = 0, \quad \frac{dv'}{db}db + \frac{dv'}{dc}dc = 0;$$

par la quatrième,

$$\frac{dv}{da} = 0, \quad \frac{dv}{db}db + \frac{dv}{dc}dc = 0, \quad \frac{dv'}{da}da + \frac{dv'}{db}db' + \frac{dv'}{dc}dc = 0;$$

par la cinquième enfin,

$$\frac{dv}{da}da + \frac{dv}{db}db + \frac{dv}{dc}dc = 0, \quad \frac{dv'}{da}da + \frac{dv'}{db}db + \frac{dv'}{dc}dc = 0.$$

En examinant ces différens cas, on voit que l'on a successivement 6, 5, 4, 3 et 2, équations auxquelles il faut satisfaire avec les trois arbitraires a, b, c.

Lorsque les six équations du premier cas, par exemple, peuvent

s'accorder entr'elles, et que de plus leur co-existence réduit les deux équations $v = 0$ et $v' = 0$, à une seule, on a alors une solution particulière de l'équation $W = 0$, très-remarquable puisqu'elle est contenue dans une seule équation à trois variables, et qui par conséquent appartient à une surface courbe. Le cinquième cas offre la solution la plus générale ; on y peut regarder deux des quantités a, b et c, comme des fonctions de la troisième, et si sous ce point de vue on suppose $b = \varphi(a)$, $c = \psi(a)$, on aura, au lieu de l'équation $W = 0$, un système d'équations composé des quatre suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} v=0 & v'=0 \\ \frac{dv}{da}+\frac{dv}{db}\varphi'(a)+\frac{dv}{dc}\psi'(a)=0, & \frac{dv'}{da}+\frac{dv'}{db}\varphi'(a)+\frac{dv'}{dc}\psi'(a)=0 \end{array}\right\} (A).$$

Toutes les fois que de ces quatre équations il sera possible d'éliminer l'une des fonctions $\varphi(a)$ ou $\psi(a)$ et ses différentielles, en n'employant qu'une seule équation, on parviendra à un système de trois équations, qui, contenant une fonction arbitraire, sera l'*Intégrale générale* de la proposée, et en donnera autant d'intégrales particulières qu'on assignera de formes diverses à cette fonction.

Il est bon de remarquer que si l'on élimine x, y, z, des quatre équations (A), la résultante qui ne contiendra que a, $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\psi(a)$, $\psi'(a)$, exprimera la relation qu'ont ensemble les deux fonctions φ et ψ, relation qui, en général, est de la même nature que l'équation différentielle proposée, ainsi qu'on peut s'en assurer en mettant b, db, c, dc, au lieu des fonctions $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\psi(a)$, $\psi'(a)$. L'exemple suivant éclaircira ce qui précède.

805. Soit l'équation

$$(ydx-xdy)^2+(zdx-xdz)^2+(ydz-zdy)^2=m^2(dx^2+dy^2+dz^2);$$

qui dérive du système des équations

$$ax+by+z\sqrt{m^2-a^2-b^2}=m^2, \qquad x-a=c(y-b),$$

par l'élimination des constantes a, b et c. En traitant ces quantités comme des variables, on obtiendra les équations suivantes :

$$xda+ydb-\frac{z(ada+bdb)}{\sqrt{m^2-a^2-b^2}}=0, \qquad -da=(y-b)dc-cdb,$$

qui, jointes à celles dont elles sont tirées, représentent le systême des équations (*A*), et les deux premières donneront une des intégrales complètes de la proposée. Si on égale séparément à zéro les coefficiens de da et de db dans la première des différentielles, on aura

$$x = \frac{az}{\sqrt{m^2 - a^2 - b^2}}, \qquad y = \frac{bz}{\sqrt{m^2 - a^2 - b^2}};$$

substituant ces valeurs dans la première des intégrales, il viendra

$$z = \sqrt{m^2 - a^2 - b^2},$$

d'où $a = x$, $b = y$, valeurs qui rendent la seconde identique, et qui satisfont encore à $-da = (y - b)\,dc - c\,db$, puisque cette équation se réduit à $da = c\,db$, ou à $dx = c\,dy$, et rentre par conséquent dans $x - a = c(y - b)$. Il est donc évident que lorsqu'on prend $a = x$, $b = y$, les équations $v = 0$, $v' = 0$ et leurs différentielles, se réduisent à une seule, savoir :

$$x^2 + y^2 + z\sqrt{m^2 - x^2 - y^2} = m^2, \quad \text{ou } z = \sqrt{m^2 - x^2 - y^2}.$$

Cette équation, qui appartient à la sphère, ne renferme aucune constante arbitraire, et offre par conséquent une solution particulière de la proposée.

Si dans le systême des quatre équations que nous avons donné plus haut, comme équivalent à la proposée, on fait $b = \varphi(a)$, $c = \downarrow(a)$, il ne paroîtra pas possible de réduire ces quatre équations à trois ; mais on y parviendra en changeant la forme des constantes arbitraires, et en faisant

$$a = a'\sqrt{m^2 - a^2 - b^2}, \qquad b = b'\sqrt{m^2 - a^2 - b^2},$$

d'où il suit $$\sqrt{m^2 - a^2 - b^2} = \frac{m}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

On aura alors les équations

$$a'x + b'y + z = m\sqrt{1 + a'^2 + b'^2},$$

$$x - \frac{a'm}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}} = c\left(y - \frac{b'm}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}\right);$$

et leurs différentielles prises, en regardant a, b et c comme variables ; posant ensuite $b' = \varphi(a')$, $c = \downarrow(a')$, il viendra

$$a'x + y\varphi(a') + z = m\sqrt{1 + a'^2 + \varphi(a')^2},$$

$$x - \psi(a')y = \frac{m[a' - \psi(a')\varphi(a')]}{\sqrt{1 + a'^2 + \varphi(a')^2}},$$

$$x + y\varphi'(a') = \frac{m[a' + \varphi(a)\varphi'(a')]}{\sqrt{1 + a'^2 + \varphi(a')^2}},$$

$$d.[x - \psi(a')y] = md.\frac{a' - \psi(a')\varphi(a')}{\sqrt{1 + a'^2 + \varphi(a')^2}}.$$

Il est facile de faire rentrer la deuxième équation dans la troisième : il suffit pour cela de prendre $\psi(a') = -\varphi'(a')$; par ce moyen il ne reste plus que la première, la troisième et la quatrième équations et qui seront telles, qu'en faisant

$$a'x + y\varphi(a') + z - m\sqrt{1 + a'^2 + \varphi(a')^2} = U,$$

elles deviendront

$$U = 0, \quad \frac{dU}{da'} = 0, \quad \frac{d^2U}{da'^2} = 0,$$

intégrale générale de la proposée, qui s'accorde au fond avec celle qu'a trouvée Monge.

806. Il résulte de la théorie précédente que pour avoir l'intégrale générale d'une équation différentielle à trois variables qui ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, il faut d'abord en trouver une intégrale complète, par le moyen de deux équations primitives contenant trois constantes arbitraires ; joindre ensuite à ces équations leurs différentielles, prises en faisant varier seulement les arbitraires qu'elles renferment, et, soit en déterminant l'une de ces quantités, soit en l'éliminant, tâcher de réduire à trois, les quatre équations obtenues ainsi. Ces considérations, parfaitement semblables à celles du n°. 765, présentent les mêmes difficultés dans leur application ; mais en supposant l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre et d'un degré quelconque, on peut toujours obtenir, sous la même forme que celle des résultats du n°. précédent, l'intégrale générale d'une équation différentielle totale à trois variables, par le moyen d'une correspondance très-remarquable que Monge a découverte entre ces deux genres d'équations,

1°. Soit $V=0$, une équation différentielle partielle du premier ordre, entre p, q, x, y et z, ayant pour intégrale le système des équations $U=0$, $\frac{dU}{da}=0$; si l'on en chasse l'un des coefficiens p ou q, à l'aide de l'équation $dz=pdx+qdy$, et qu'on élimine ensuite celui qui reste, entre l'équation résultante et la différentielle prise par rapport à ce dernier coefficient seulement, on obtiendra une équation différentielle totale que nous désignerons par $W=0$, et dont l'intégrale générale sera comprise dans le système des trois équations $U=0$, $\frac{dU}{da}=0$, $\frac{d^2U}{da}=0$.

2°. On reviendra de l'équation $W=0$, à l'équation $V=0$, en substituant dans la première $pdx+qdy$ à dz, posant ensuite $\frac{dy}{dx}=\alpha$, ce qui fera disparoître dy et dx, et éliminant α, entre l'équation résultante et sa différentielle prise en ne faisant varier que α.

Si l'on chasse, par exemple, p de l'équation $p^2+q^2=m^2$, au moyen de sa valeur $\frac{dz-qdy}{dx}$, on trouvera

$$dz^2-2qdzdy+q^2(dx^2+dy^2)=m^2dx^2;$$

différentiant ce résultat en n'y faisant varier que q, il viendra $-dzdy+q(dx^2+dy^2)=0$, ou $-qdzdy+q^2(dx^2+dy^2)=0$, équation qui réduit la précédente à $dz^2-qdzdy=m^2dx$; éliminant q entre cette dernière et $-dzdy+q(dx^2+dy^2)=0$, obtenue ci-dessus, et supprimant le facteur commun dx^2, il en résultera

$$dz^2=m^2(dx^2+dy^2):$$

or, l'équation $p^2+q^2=m^2$ ayant pour intégrale générale

$$\left.\begin{aligned}(x-a)^2+(y-\varphi(a))^2&=\frac{z^2}{m^2}\\ x-a+(y-\varphi(a))\varphi'(a)&=0\end{aligned}\right\},$$

celle de l'équation différentielle totale que nous venons de trouver sera le système des trois équations

$$\left.\begin{aligned}(x-a)^2+(y-(\varphi))^2&=\frac{z^2}{m^2}\\ (x-a)+(y-\varphi(a))\varphi'(a)&=0\\ -1+\varphi'(a)^2+(y-\varphi(a))\varphi''(a)&=0\end{aligned}\right\},$$

comme dans le n°. 802.

Pour retomber sur l'équation différentielle partielle dont nous sommes partis, nous remplacerons dy par αdx, et $dz = pdx + qdy$ par $(p + q\alpha)\,dx$; par ce moyen l'équation

$$dz^2 = m^2(dx^2 + dy^2)$$ deviendra

$$p^2 - m^2 + 2pq\alpha + (q^2 - m^2)\alpha^2 = 0$$

dont la différentielle prise par rapport à α, est

$$pq + (q^2 - m^2)\alpha = 0, \text{ ou } pq\alpha + (q^2 - m^2)\alpha^2 = 0,$$

et nous aurons par conséquent à éliminer α entre les deux équations

$$p^2 - m^2 + pq\alpha = 0, \qquad pq + (q^2 - m^2)\alpha = 0,$$

ce qui nous donnera $p^2 + q^2 = m^2$.

Après avoir déduit d'une équation différentielle totale quelconque, à trois variables, $W = 0$, au moyen de ce procédé, l'équation différentielle partielle correspondante, $V = 0$, il ne s'agira plus que d'obtenir l'intégrale générale de celle-ci, sous la forme

$$U = 0, \qquad \frac{dU}{da} = 0,$$

pour en conclure celle de $W = 0$, sous la forme de

$$U = 0, \frac{dU}{da} = 0, \quad \frac{d^2U}{da^2} = 0.$$

Voici comment on peut prouver les deux propositions précédentes :

1°. Lorsque l'intégrale générale de l'équation différentielle partielle $V = 0$, est représentée par le systême de deux équations de la forme, $U = 0$, $\frac{dU}{da} = 0$, U contenant a et $\varphi(a)$, la première de celles-ci, si l'on y regarde a comme constant, est un cas particulier de l'intégrale complète de l'équation différentielle totale qui s'obtiendroit en substituant dans $dz = pdx + qdy$, la valeur de l'un des coefficiens p ou q, et en déterminant l'autre d'après la condition d'intégrabilité, de manière que son expression renfermât une constante arbitraire a (n°. 732). Si l'on suppose que l'équation U différentiée, en y regardant a comme constant, donne $dz = Pdx + Qdy$, on aura nécessairement $P = p$, $Q = q$, P et Q étant des fonctions de x, y, z et a, telles que si l'on élimine a des deux dernières équations, on retombera sur la proposée. Il suit de là que les deux systêmes d'équations

$$V = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} V=0 \\ d\zeta - p\,dx - q\,dy = 0 \end{array}\right\} (1) \quad \left.\begin{array}{l} U=0 \\ \dfrac{dU}{dx}dx+\dfrac{dU}{dy}dy+\dfrac{dU}{d\zeta}d\zeta=0 \end{array}\right\} (I)$$

auront lieu en même-tems quelque valeur que prenne la quantité a. Maintenant si l'on fait varier a seul dans le second système, cela reviendra à faire varier p et q seuls dans le premier, et il viendra ces deux nouveaux systêmes d'équations

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dV}{dp}dp+\dfrac{dV}{dq}dq=0 \\ dp\,dx+dq\,dy=0 \end{array}\right\} (2) \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{dU}{da}=0 \\ \dfrac{d^2U}{dx\,da}dx+\dfrac{d^2U}{dy\,da}dy+\dfrac{d^2U}{d\zeta\,da}d\zeta=0 \end{array}\right\} (II)$$

qui auront lieu simultanément avec les précédens, en supposant a constant quelle que soit d'ailleurs sa valeur. Le résultat de l'élimination de $p, q, \dfrac{dp}{dq}$, entre les équations (1) et (2), sera, par conséquent le même que l'équation différentielle totale obtenue par celle de a, $\varphi(a)$ et $\varphi'(a)$, entre les équations (I) et (II), et dont le systême des équations $U=0$, $\dfrac{dU}{da}=0$, offre par conséquent une solution. Mais les quatre systêmes rapportés ci-dessus ne cesseront pas d'exister ensemble, quand même a seroit supposé variable, si l'on a l'équation $\dfrac{d^2U}{da^2}=0$, parce qu'alors les différentielles de $U=0$, et de $\dfrac{dU}{da}=0$, prises en faisant varier a en même tems que x, y, ζ, exprimées en général par

$$\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{d\zeta}d\zeta+\frac{dU}{da}da=0,$$

$$\frac{d^2U}{dx\,da}dx+\frac{d^2U}{dy\,da}dy+\frac{d^2U}{d\zeta\,da}d\zeta+\frac{d^2U}{da^2}da=0,$$

rentreront dans les dernières de chacun des systêmes (I) et (II). Si donc on détermine a, par le moyen de l'équation $\dfrac{d^2U}{da^2}=0$, ou, ce qui revient au même, si l'on regarde cette quantité comme devant être éliminée entre $U=0$, $\dfrac{dU}{da}=0$, $\dfrac{d^2U}{da^2}=0$,

on aura les équations primitives qui représentent l'intégrale générale de l'équation différentielle totale résultante de l'élimination de $p, q, \frac{dp}{dq}$, entre les équations des systêmes (1) et (2). Mais il est aisé de voir que pour obtenir cette dernière il suffit de mettre dans $V = 0$, au lieu de p ou de q, sa valeur tirée de $d\zeta = pdx + qdy$ et de différentier ensuite par rapport à celui de ces coefficiens que l'on a conservé; ce qui est précisément la règle prescrite dans le n°. précédent pour arriver à l'équation $W = 0$.

2°. Pour démontrer le procédé qui sert à revenir de l'équation $W = 0$, à l'équation $V = 0$, supposons qu'on ait mis la première sous la forme

$$\frac{d\zeta}{dx} = f\left(x, y, \zeta, \frac{dy}{dx}\right);$$

changeant alors $d\zeta$ en $pdx + qdy$, et faisant $\frac{dy}{dx} = \alpha$, on aura

$$p + \alpha q = f(x, y, \zeta, \alpha).$$

Différentiant en ne faisant varier que α, ainsi que le prescrit la règle à démontrer, et représentant $\frac{df(x, y, \zeta, \alpha)}{d\alpha}$ par $f'(x, y, \zeta, \alpha)$, il viendra $q = f'(x, y, \zeta, \alpha)$; et par conséquent l'équation $V = 0$ sera le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$\left.\begin{aligned} p + \alpha q &= f(x, y, \zeta, \alpha) \\ q &= f'(x, y, \zeta, \alpha) \end{aligned}\right\} \quad (3):$$

il s'agit maintenant de prouver que si l'on applique à l'équation $V = 0$, le premier des procédés indiqués à la page 639, on retombera sur l'équation $W = 0$. Or, la dernière des équations (3) donne $\alpha = f_{,}(x, y, \zeta, q)$, $f_{,}$ étant une fonction déduite de f', ce qui change la première en

$$p + q f_{,}(x, y, \zeta, q) = f[x, y, \zeta, f_{,}(x, y, \zeta, q)].$$

Si on la différentie dans cet état par rapport à p et q seuls, en observant que l'hypothèse actuelle de différentiation suppose que l'on ait

$$dpdx + dqdy = (dp + \alpha dq)dx = (dp + dq f_{,}(x, y, \zeta, q))dx = 0,$$

et en prenant $\frac{df_{,}(x, y, \zeta, q)}{dq} = f'_{,}(x, y, \zeta, q)$,

on trouvera

$$q f'_{,}(x,y,z,q) = f'[x,y,z,f_{,}(x,y,z,q)]\,f'_{,}(x,y,z,q);$$

équation qui se décompose en deux facteurs, dont l'un

$$q = f'[x,y,z,f_{,}(x,y,z,q)];$$

est visiblement identique avec la seconde équation (3). Il suit de là que les systêmes d'équations

$$\left.\begin{aligned} V &= 0 \\ \frac{dV}{dp}dp + \frac{dV}{dq}dq &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \\ dp\,dx + dq\,dy &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} p + \alpha q &= f(x,y,z,\alpha) \\ q &= f'(x,y,z,\alpha) \\ \frac{dz}{dx} &= p + \alpha q \end{aligned}\right\}$$

sont équivalens, et puisque le dernier, délivré de p et de q, conduit à $W = 0$, il en doit être de même du premier; l'équation différentielle partielle $V = 0$, obtenue par l'élimination de α entre les deux premières équations du second systême, jouit donc de la propriété de reproduire $W = 0$, ainsi qu'on l'a supposé.

807. Venons maintenant aux considérations géométriques correspondantes à la théorie analytique exposée précédemment. Proposons-nous premièrement quelques questions qui nous conduisent à des équations différentielles qui ne satisfassent pas aux conditions d'intégrabilité.

Nous avons fait voir dans le chapitre V du volume précéd. que les surfaces courbes assujetties à une même génération, étoient comprises dans une équation différentielle partielle qui exprime le caractère particulier de la famille; lorsqu'une surface peut être engendrée de plusieurs manières, elle appartient nécessairement à plusieurs familles différentes, et elle satisfait par conséquent en même-tems à plusieurs équations différentielles partielles.

Supposons que l'on veuille trouver la surface qui fait partie des surfaces de révolution dont l'axe coïncide avec celui des z, et des surfaces coniques ayant leur sommet placé au point dont les coordonnées sont a, b, c; il faudra que son équation satisfasse

en même tems aux équations

$$py - qx = 0,$$
$$p(x-a) + q(y-b) = z - c \quad (\text{n}^\circ. 334).$$

On tire de celles-ci

$$p = \frac{(z-c)x}{x(x-a) + y(y-b)},$$
$$q = \frac{(z-c)y}{x(x-a) + y(y-b)},$$

et substituant dans $dz = p\,dx + q\,dy$, on a

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x(x-a) + y(y-b)}$$

pour l'équation différentielle totale de la surface cherchée. Cette équation ne sauroit s'intégrer par une seule équation primitive, tant que a et b, ne sont pas nuls, parce qu'en effet, comme il est aisé de le voir, il n'y a qu'une seule surface qui soit commune aux deux familles que nous considérons, savoir: le plan mené par le sommet du cône, perpendiculairement à l'axe des z, et dont l'équation, $z = c$, est une solution particulière de l'équation ci-dessus, mise sous la forme

$$(x(x-a) + y(y-b))\,dz = (z-c)(x\,dx + y\,dy).$$

Mais lorsqu'on a en même tems $a = b$, le sommet des surfaces coniques proposées se trouve dans l'axe des z; tous les cônes droits à base circulaire, ayant le même axe et le même sommet, font partie des surfaces de révolution décrites autour de cet axe, et l'équation différentielle précédente, réduite à

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2},$$

a pour intégrale l'équation primitive $z - c = C\sqrt{x^2 + y^2}$, qui appartient en effet à tous les cônes droits dont le sommet est placé dans l'axe des z à une distance c de l'origine des coordonnées.

808. Quand on regarde les variables x, y, z et les coefficiens p et q, comme des quantités communes entre les équations différentielles du premier ordre, on suppose que ces surfaces ont le même plan

tangent, et que par conséquent elles se touchent dans un certain nombre de leurs points (n°. 332). Si les surfaces proposées ne sont déterminées que par des équations différentielles partielles, l'équation différentielle totale résultante des conditions de contact doit représenter l'ensemble des courbes suivant lesquelles les surfaces d'une famille peuvent toucher celles de l'autre ; et lorsque cette équation satisfait aux conditions d'intégrabilité, il existe une suite de surfaces courbes qui appartiennent en même tems aux deux familles proposées, et sur lesquelles se trouvent toutes les courbes de contact de ces dernières.

Il est évident que l'on obtiendra les équations des courbes de contact en intégrant l'une des équations différentielles partielles proposées, et en assujettissant le résultat à satisfaire à l'autre. Dans l'exemple que nous nous sommes proposé, l'intégration de l'équation $py - qx = 0$, dépend de celle de

$$\begin{aligned} x\,dx + y\,dy &= 0, \\ d\zeta &= 0, \end{aligned}$$

et conduit à l'équation $x^2 + y^2 = \varphi(\zeta)$, de laquelle on déduit ces valeurs

$$x = \varphi'(\zeta)\,p, \qquad y = \varphi'(\zeta)\,q,$$

qui changent l'équation

$$p(x-a) + q(y-b) = \zeta - c$$

en $$x(x-a) + y(y-b) = (\zeta - c)\,\varphi(\zeta);$$

on a donc, comme dans le n°. 799, les deux équations :

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \varphi(\zeta) \\ \frac{x(x-a) + y(y-b)}{\zeta - c} &= \varphi'(\zeta) \end{aligned}\right\}.$$

On voit bien par les considérations actuelles, que l'intégrale générale de l'équation

$$P\,dx + Q\,dy + R\,d\zeta = 0$$

peut se présenter sous une infinité de formes différentes ; car il existe un nombre illimité de systêmes d'équations différentielles partielles qui conduisent au même résultat, ainsi qu'on peut s'en convaincre en prenant les deux équations

$$P'p + Q'q = R', \qquad P''p + Q''q = R'',$$

et en cherchant à déterminer les quantités P', Q', R', P'', Q'', R'' par la comparaison de la proposée avec le résultat qu'on obtiendroit en substituant dans $dz=pdx+qdy$, les valeurs de p et de q, tirées des équations ci-dessus.

809. On peut encore chercher des courbes par des conditions dont le nombre ne soit pas suffisant pour les déterminer; c'est ce qui a lieu, par exemple, lorsqu'on demande celles dont toutes les tangentes font le même angle avec le plan des x, y.

Il est facile de voir que dans une courbe quelconque la tangente de cet angle est exprimée par $\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$; et désignant par m la valeur constante qu'elle doit avoir dans la courbe cherchée, il en résultera $dz^2=m^2(dx^2+dy^2)$. Cette équation n'est pas suffisante pour déterminer la courbe demandée; en effet il est évident, 1°. que toutes les droites faisant avec le plan des x, y, un angle dont la tangente est exprimée par m, mais situées d'ailleurs d'une manière quelconque, résolvent la question proposée. 2°. Si l'on décrit sur le plan des x, y, une courbe quelconque $I'H'$, *fig.* 34, qu'on élève sur cette courbe un cylindre parallèle à l'axe des z, et que dans chaque plan tangent à ce cylindre, on mène des droites NG', $N_1G'_1$, etc. qui fassent avec le plan des x, y, l'angle dont la tangente est m, toutes ces droites formeront par leurs intersections successives, une courbe qui satisfera à la question proposée, et dont la nature n'est point déterminée puisqu'elle dépend de la courbe $I'H'$ qu'on peut prendre arbitrairement. Cette dernière solution est générale et comprend la précédente; on y retrouve toutes les circonstances que nous ont offertes les considérations analytiques. On voit d'abord que la suite des tangentes NG', $N_1G'_1$,... de la courbe proposée forme une surface développable dont tous les élémens sont également inclinés au plan des x, y, et qui rentre par conséquent dans celle que nous avons trouvée n°. 793, comme étant équivalente au plan, et dont l'équation différentielle partielle est $p^2+q^2=m^2$. Les lignes NG', $N_1G'_1$, etc. sont les caractéristiques de cette surface, et la courbe cherchée en est l'arrête de rebroussement. D'après ces remarques et d'après ce qui a été dit dans le n°. 342, on obtiendra

FIG. 34.

sur-le-champ l'équation générale de la courbe $NN_1N_2\ldots$ et il est prouvé que l'équation de la surface $G'G'_1G'_2\ldots N_2N_1N$ étant représentée par le système des équations

$$U=0,\ \frac{dU}{da}=0,$$

celle de la courbe $NN_1N_2\ldots$, sera comprise dans les trois suivantes :

$$U=0,\qquad \frac{dU}{da}=0,\qquad \frac{d^2U}{da^2}=0.$$

La courbe $NN_1N_2\ldots$ jouit encore de la propriété très-remarquable de s'étendre en ligne droite lorsqu'on développe le cylindre élevé sur la courbe $I'H'$, ce qui suit de sa propriété première, en vertu de laquelle elle fait toujours le même angle avec les lignes $N'N$, N'_1N_1, etc. qui deviennent parallèles entr'elles dans le développement. La courbe qui nous occupe s'obtiendroit donc aussi en traçant sur un plan une ligne droite qui fît avec une autre l'angle donné, et en roulant ensuite ce plan, de manière que la seconde droite s'appliquât sur la circonférence d'une courbe plane quelconque. Elle est par conséquent de la même nature que celles qui sont connues sous le nom d'*hélices*, et deviendroit le filet de vis ordinaire si la courbe $I'H'$ étoit un cercle.

810. Pour donner encore un exemple de ces considérations, proposons-nous de trouver la courbe que produiroit une ligne droite tracée dans un plan qui enveloppe une surface conique quelconque. Soit BAC, *fig.* 36, ce plan et LM la ligne droite donnée ; si FIG. 36.
du point A qu'on suppose devoir être appliqué au sommet du cône on abaisse sur LM, la perpendiculaire AN, cette dernière sera donnée, et nous la représenterons par m. Si nous menons ensuite par le point P une ligne quelconque AP, elle deviendra l'une des tangentes du cône, et ne changera point de grandeur lorsqu'on roulera le plan BAC sur cette surface. Or par le triangle rectangle PAN, nous obtiendrons $\overline{PN}^2=\overline{AP}^2-\overline{AN}^2$; nommant x, y, z, les coordonnées des points de l'espace, et plaçant le sommet du cône à l'origine de ces coordonnées, nous aurons $AP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, et PN, qui sera la longueur d'un arc quelconque de la courbe formée par l'envelop-

pement de la droite LM, aura pour expression $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, ce qui donnera par conséquent

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2-m^2}:$$

passant à la différentielle, pour faire disparoître le signe d'intégration, nous trouverons $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=d.\sqrt{x^2+y^2+z^2-m^2}$, ou $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\times\sqrt{x^2+y^2+z^2-m^2}=x\,dx+y\,dy+z\,dz$. Cette équation étant développée est précisément celle dont nous nous sommes occupés dans le n°. 805.

Il est facile de voir maintenant comment la sphère donnée par l'équation $\sqrt{x^2+y^2+z^2-m^2}=0$ satisfait à la précédente, ainsi que nous l'avons prouvé dans le n°. cité. La même remarque peut aussi se déduire immédiatement des considérations géométriques ; car toutes les lignes droites pour lesquelles on aura $AN=m$, seront tangentes au cercle décrit du point A comme centre avec un rayon $=m$, et ce cercle en s'appliquant sur le cône lorsque l'enveloppement s'effectuera, deviendra l'intersection du cône avec la sphère dont le rayon est m et dont le centre est au sommet. Chaque ligne droite enveloppée touchera donc la sphère dans un point ; cette dernière sera par conséquent une solution particulière de l'équation proposée ; de plus, les courbes formées par chacune des droites enveloppées, seront touchées par ces mêmes droites développées de chaque côté du point de contact ; enfin ces dernières toucheront la sphère quelque part puisque leur plus courte distance au sommet du cône sera égale à m. Il suit de là que la surface développable formée par l'ensemble des tangentes d'une même courbe sera circonscrite à la sphère, et que par conséquent, si l'on a pour cette famille de surfaces, $U=0$, $\frac{dU}{da}=0$, les équations des courbes cherchées seront

$$U=0,\quad \frac{dU}{da}=0,\quad \frac{d^2U}{da^2}=0.$$

Pour trouver $U=0$, nous observerons que les surfaces développables circonscrites à la sphère sont formées par les intersections consécutives d'une suite de plans tangens à cette sphère, et que si l'on désigne par a et b, les coordonnées sur le plan des x, y, du point de contact,

contact, l'équation de l'un des plans tangens que l'on veut considérer, sera $ax + by + z\sqrt{m^2 - a^2 - b^2} = m^2$ (n°. 322).

Si l'on prend $b = \varphi(a)$, et que l'on fasse varier a, pour obtenir un second plan tangent consécutif au premier, on aura les équations

$$ax + y\varphi(a) + z\sqrt{m^2 - a^2 - \varphi(a)^2} = m^2$$

$$x + y\varphi'(a) - \frac{z[a + \varphi(a)\varphi'(a)]}{\sqrt{m^2 - a^2 - \varphi(a)^2}} = 0,$$

dont la combinaison donnera la surface cherchée, et si l'on y joint la différentielle de la seconde, par rapport à a, on arrivera à un résultat qui s'accordera avec celui du n°. 805. On tirera des deux équations ci-dessus la suivante,

$$z - px - qy = m^2\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

qu'on déduiroit immédiatement de la proposée par le procédé du n°. 806, et qui est l'équation différentielle partielle de la famille des surfaces dont les courbes cherchées sont les arrêtes de rebroussement.

Il est bon d'observer que les droites tangentes à la sphère satisfont aussi à l'équation proposée; car c'est par cette considération que Monge a trouvé les intégrales complètes

$$ax + by + z\sqrt{m^2 - a^2 - b^2} = m^2$$

$$x - a = c(y - b),$$

dont nous avons fait usage pour parvenir à l'intégrale générale. La première est, comme nous l'avons déjà dit, celle du plan qui touche la sphère au point dont les coordonnées sont a, b et $\sqrt{m^2 - a^2 - b^2}$; la seconde appartient à une droite quelconque menée dans le plan des x, y, par le point dont les coordonnées sont a et b, et représente la projection qui détermine la tangente que l'on veut considérer.

811. La correspondance entre l'équation différentielle partielle $V = 0$ et l'équation différentielle totale $W = 0$, remarquée dans le n°. 806, se déduit aisément des considérations géométriques. En effet, lorsque l'intégrale de l'équation $V = 0$ est représentée par $U = 0$, $\frac{dU}{da} = 0$, elle est considérée comme appartenant à la surface limite de celles

que produit l'équation $U=0$, quand on y fait varier la quantité a (n°. 334). Les coordonnées x, y, z, des points pris sur la caractéristique, étant communes à deux génératrices, ne varient pas lorsque a varie, et par conséquent, en n'ayant égard qu'à ces points, la différentielle de l'équation $V=0$, se réduit à $\frac{dV}{dp}dp+\frac{dV}{dq}dq=0$; mais la même hypothèse donne $dpdx+dqdy=0$, puisque le changement de a n'influe pas non plus sur dz: on a donc pour une caractéristique en particulier, les équations

$$V=0, \quad \frac{dV}{dp}dy-\frac{dV}{dq}dx=0;$$

desquelles on chassera p ou q, à l'aide de $dz=pdx+qdy$. Les résultantes contiendront encore l'un de ces coefficiens, qui servira à particulariser la caractéristique que l'on considère; en l'éliminant, on passera à un résultat auquel chacune des caractéristiques satisfera, et par conséquent aussi l'arrête de rebroussement formée par leurs intersections successives, et ce résultat est l'équation $W=0$.

812. Les équations différentielles totales des ordres supérieurs, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité se résolvent, comme celles du premier, en employant plusieurs équations primitives simultanées; mais le nombre des cas où l'on peut en obtenir une intégrale générale est très-limité. Nous ne parlerons ici que de celles du deuxième ordre à trois variables, et nous considérerons seulement l'équation

$$Md^2x+Nd^2y+Pdx^2=Qdz^2,$$

dans laquelle on suppose la différentielle dz constante et les coefficiens M, N, P, Q, des fonctions de x, y, z, dx, dy et dz, telles, que le premier membre multiplié par un facteur μ soit une différentielle exacte par rapport aux variables x et y. En représentant par U' l'intégrale première de cette différentielle, il faudra, si U' est du degré n par rapport à dx, dy et dz, l'égaler à une fonction de la forme $\varphi'(z)dz^n$; on obtiendra ainsi l'équation $U'=\varphi'(z)dz^n$, dont la différentielle prise en faisant varier x, y, dx, dy et z, en même tems, et comparée avec la proposée, donnera

$$\varphi''(z)dz^n-\frac{dU'}{dz}=\mu Qdz,$$

puisque, par l'hypothèse

$$\frac{dU'}{d^2x}d^2x+\frac{dU'}{d^2y}d^2y+\frac{dU'}{dx}dx+\frac{dU'}{dy}dy$$
$$=\mu M d^2x+\mu N d^2y+\mu P dx^2,$$

La proposée sera donc représentée par le système des équations

$$\left.\begin{aligned} U'&=\varphi'(\zeta)\,d\zeta^2\\ \frac{dU'}{d\zeta}&=\varphi''(\zeta)\,d\zeta^2-\mu Q\,d\zeta\end{aligned}\right\}(A);$$

et sera par conséquent satisfaite par le nombre illimité de systêmes particuliers d'équations différentielles du premier ordre, qu'on obtiendra en particularisant la fonction arbitraire.

Il est évident que les équations primitives, qui satisfont à la proposée, ne peuvent admettre des fonctions plus générales que celles que renferment les équations (A), et pour les obtenir sans particulariser la fonction arbitraire φ, il faut que l'on puisse déduire de ces dernières deux nouvelles équations intégrables, en regardant x, y, ζ et $\varphi(\zeta)$, comme des variables distinctes. Pour donner un exemple de ce cas, prenons, avec M. Paoli, l'équation

$$\zeta d\zeta d^2x-2dy\,d^2y=\zeta d\zeta^3;$$

en y appliquant le procédé ci-dessus, nous trouverons

$$\left.\begin{aligned} \zeta d\zeta\,dx-dy^2&=\varphi'(\zeta)\,d\zeta^2\\ dx&=\varphi''(\zeta)\,d\zeta-\zeta d\zeta\end{aligned}\right\};$$

la dernière de celles-ci étant intégrée, donne $2x=2\varphi'(\zeta)-\zeta^2$, et substituant dans la première la valeur de dx, déduite de cette intégrale, il viendra

$$dy=d\zeta\sqrt{\zeta^2+\zeta\varphi''(\zeta)-\varphi'(\zeta)},$$

d'où nous conclurons que la proposée a pour intégrale générale primitive le systême des deux équations :

$$\left.\begin{aligned} 2x&=2\varphi'(\zeta)-\zeta^2\\ y&=\int d\zeta\sqrt{\zeta^2+\zeta\varphi''(\zeta)-\varphi'(\zeta)}\end{aligned}\right\}.$$

On pourroit croire que pour arriver à un systême d'équations primitives qui satisfasse à la proposée, il suffiroit d'intégrer en particulier chacune des équations (A) par le procédé du n°. 799, en y supposant ζ constant, ce qui introduiroit deux fonctions de ζ;

mais en opérant ainsi, on ne représenteroit cette dernière qu'avec quatre équations, entre lesquelles il faudroit éliminer une des fonctions introduites, ce qui ne se pourroit qu'en intégrant une équation différentielle, et par conséquent la difficulté seroit encore la même que celle que présentent les équations (*A*) : Monge est tombé sur plusieurs résultats de cette nature, d'une forme très-élégante, mais dont il n'est pas possible de tirer parti, et que par conséquent on ne sauroit regarder comme de véritables intégrales.

813. Nous avons fait voir dans le n°. 75, que toute équation du second ordre à deux variables, dans laquelle aucune différentielle n'est supposée constante, pouvoit toujours se traduire dans une autre qui devenoit significative, et cela en regardant x et y comme des fonctions implicites d'une nouvelle variable. Prenons pour exemple l'équation

$$Md^2x + Nd^2y + Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0,$$

rapportée dans le n°. cité ; si nous supposons $y = \varphi(t)$, nous en éliminerons y, dy et d^2y, et comme dt est supposé constant, le résultat sera une équation du second ordre toujours significative, lorsque l'on particularisera la fonction φ ; la relation qui en résultera entre x et t, étant jointe à l'équation hypothétique $y = \varphi(t)$, donnera une solution de la proposée.

Il est aisé de voir que l'on obtiendra un résultat plus général, en faisant $Mdx + Ndy = dt\varphi'(t)$, parce qu'en retranchant de la différentielle de cette équation, la proposée, les termes affectés des différentielles du second ordre disparoîtront, et qu'il viendra

$$\left(\frac{dM}{dx} - P\right)dx^2 + \left(\frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dx} - Q\right)dxdy + \left(\frac{dN}{dy} - R\right)dy^2 = \varphi''(t)dt^2 :$$

la proposée sera représentée par le système de cette équation et de la précédente, qui ne sont que du premier ordre. On peut toujours supposer que $Mdx + Ndy = dt\varphi'(t)$ soit intégrable, car il suffit pour cela de concevoir que la proposée soit

$$M'd^2x + N'd^2y + P'dx^2 + Q'dxdy + R'dy^2 = 0,$$

de la multiplier ensuite par le facteur μ propre à rendre $M'dx + N'dy$ une différentielle exacte, et de faire

$$\mu M' = M, \quad \mu N' = N, \quad \mu P' = P, \quad \mu Q' = Q, \quad \mu R' = R,$$

on aura alors le système des deux équations

$$\left.\begin{aligned} &\int(M\,dx+N\,dy)=\varphi(t)\\ &\left(\frac{dM}{dx}-P\right)dx^2+\left(\frac{dM}{dx}+\frac{dN}{dy}-Q\right)dx\,dy+\left(\frac{dN}{dy}-R\right)dy^2=\varphi''(t)\,dt^2 \end{aligned}\right\},$$

dont la première sera une équation primitive.

814. Non-seulement, comme nous l'avons observé dans le n°. 701, et comme nous venons de le prouver plus haut, les équations différentielles, qu'on appeloit autrefois absurdes, ne sont point insignifiantes ainsi qu'on l'a cru, mais il existe une foule de questions géométriques très-intéressantes qui conduisent à ces équations. Pour ne pas nous écarter de notre sujet, nous n'en citerons que deux qui pourront faire juger des autres.

Si l'on demandoit quelles sont les courbes à double courbure qui jouissent de la propriété d'avoir dans tous leurs points la même courbure que le cercle dont le rayon $=m$, il faudroit égaler à m^2 l'expression du quarré du rayon de courbure, trouvée dans le n°. 353, ce qui donneroit l'équation

$$\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^3}{(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2+(dx\,d^2z-dz\,d^2x)^2+(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2}=m^2,$$

qui est, comme on voit, du second ordre et à trois variables. Il est bon de remarquer que les courbes auxquelles elle appartient deviennent des cercles dans le développement de la surface formée par leurs tangentes. Le filet d'une vis à base circulaire est une de ces courbes.

Nous verrons dans le chapitre suivant, que la ligne la plus courte que l'on puisse mener entre deux points sur une surface dont l'équation est $dz=p\,dx+q\,dy$, s'obtient en joignant à celle-ci l'une quelconque des suivantes :

$$d\frac{dx}{ds}+p\,d\frac{dz}{ds}=0,\qquad d\frac{dy}{ds}+q\,d\frac{dz}{ds}=0,$$

dans lesquelles on a fait pour abréger $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Supposons que l'on ait d'ailleurs entre p et q une relation quelconque, l'équation $py-qx=0$, par exemple, qui appartient aux surfaces de révolution décrites autour de l'axe des z; si on la

combine avec $dz = p\,dx + q\,dy$, pour en tirer les expressions de p et de q, savoir :

$$p = \frac{x\,dz}{x\,dx + y\,dy}, \qquad q = \frac{y\,dz}{x\,dx + y\,dy};$$

et que l'on substitue ces expressions dans les équations rapportées ci-dessus, chacune de ces équations considérée isolément caractérisera les lignes les plus courtes que l'on puisse mener entre deux points sur les surfaces proposées en général.

CHAPITRE V.

De la méthode des Variations.

815. LORSQUE l'état de la question a déterminé une dépendance entre plusieurs variables, la différentiation ordinaire suppose que cette dépendance demeure toujours la même dans le cours du calcul; on conçoit que si l'une des variables doit être fonction des autres, la forme de cette fonction ne change point, et que par conséquent les accroissemens ou les décroissemens qu'elle éprouve sont, par sa nature ou par l'équation dont elle dépend, liées d'une manière invariable avec ceux que peuvent recevoir les quantités qui entrent dans sa composition. Divers problêmes de géométrie et de mécanique, proposés peu de tems après la découverte du calcul différentiel, ont bientôt fait sentir aux Analistes que ce point de vue n'étoit pas assez général, et qu'il y avoit des cas où il étoit nécessaire de supposer que la forme de la fonction variât elle-même; c'est là ce qui a donné naissance au calcul dont nous allons nous occuper, et dont la découverte est le résultat des premiers travaux de Lagrange. On avoit bien avant lui résolu des questions du genre de celles qu'on atteint par ce calcul; mais seulement par des procédés particuliers, qu'il falloit modifier selon les diverses circonstances que présentoient les applications qu'on avoit en vue.

Voici l'idée la plus générale que l'on puisse se former du calcul des variations :

Que les variables x et y, d'abord liées entr'elles par une équation ou une dépendance quelconque, viennent à changer parce que la forme de cette équation, ou la relation qui résulte de la dépendance établie entr'elles, a cessé d'être la même; on ne sauroit exprimer cette circonstance d'une manière plus générale qu'en regardant les accroissemens de x et de y, comme absolument indépendans l'un de l'autre,

parce qu'en effet, cette hypothèse, ne désignant aucune relation particulière entre x et y, les comprend toutes. Il suit de là que le calcul des variations ne peut être employé que pour des expressions auxquelles on a déjà appliqué le calcul différentiel, et qu'il ne diffère de ce dernier que par l'indépendance qu'il suppose entre des variables qu'on avoit regardées auparavant comme liées entr'elles par des relations constantes. L'exemple suivant éclaircira ces notions.

L'expression $\frac{ydx}{dy}$, qui appartient à la soutangente d'une courbe, représente une fonction déterminée de x, quand on y considère y comme une fonction dont la composition en x est connue, et si cette dernière vient à changer la première change aussi. On éprouvera peut-être quelques difficultés à concevoir comment on a pu soumettre au calcul la variabilité d'une fonction qui n'est que la dépendance abstraite dans laquelle plusieurs quantités se trouvent les unes à l'égard des autres; mais il est facile de les lever, en observant que la liaison entre les quantités y et x changera, si l'on fait varier la première indépendamment de la seconde. Ainsi dans l'exemple actuel, si l'on suppose que x demeurant le même, y et $\frac{dy}{dx}$ changent, la relation de y et de x, aura changé nécessairement, puisque ces quantités sont des conséquences immédiates de cette relation: on peut même ne faire varier que $\frac{dy}{dx}$, dans la formule $\frac{ydx}{dx}$, parce qu'elle ne dépend que d'une seule valeur de y; mais si l'on considéroit une expression qui fût affectée du signe $\int$, il faudroit faire varier en même tems y et $\frac{dy}{dx}$, car il suit de la théorie de la formation des intégrales, exposée dans le n°. 470, que la valeur d'une semblable fonction dépend des valeurs consécutives de y, lesquelles se déduisent de celles de $\frac{dy}{dx}$.

Recherche de la variation d'une fonction quelconque.

816. Il est évident que pour différentier sous ce point de vue quelque expression que ce soit, il suffit d'y faire varier y, dy, d^2y...etc. sans toucher à x; mais en traitant cette dernière variable comme la première;

première; on parvient à des résultats plus généraux et plus symétriques que ceux qu'on obtiendroit autrement; et qui conduisent à des remarques très-intéressantes sur la nature des formules différentielles, c'est pourquoi nous en userons ainsi dans le cours de ce chapitre. Pour ne pas confondre les signes de la nouvelle espèce de différentiation, dans laquelle x et y sont regardés comme indépendans, avec ceux de la première, où l'on considéroit une de ces variables comme fonction de l'autre, nous employerons, ainsi que Lagrange, la caractéristique δ, et nous supposerons avec lui, que quand y ne change que par l'effet du changement de x qui devient $x+dx$, sa différentielle est dy, mais que quand la relation de y et de x varie, ces deux quantités deviennent respectivement $x+\delta x$, $y+\delta y$; et nous désignerons sous le nom de *variations* les accroissemens δx et δy.

Il suit de là que de même qu'on a $du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$, u étant une fonction de x et de y, on aura aussi

$$\delta u=\frac{\delta u}{\delta x}\delta x+\frac{\delta u}{\delta y}\delta y;$$

en appliquant ceci à l'exemple $\frac{ydx}{dy}$, il faudra regarder $\frac{dx}{dy}$ comme fonction de x et de y, et il viendra d'après cela

$$\delta\frac{ydx}{dy}=\frac{dx\delta y}{dy}+y\delta\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

et $\delta\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{dy\delta dx-dx\delta dy}{dy^2}=\frac{dyd\delta x-dxd\delta y}{dy^2}$,

car $\delta dx=d\delta x$ $\delta dy=d\delta y$. Cette dernière remarque est de la plus grande importance dans le Calcul qui va nous occuper, et voici comment on peut en établir la vérité.

Soit V, une quantité quelconque; on aura $dV=V'-V$; V' étant la valeur consécutive de V, et en se bornant au premier terme du développement de V'; différentiant ensuite par rapport à la caractéristique δ, il viendra $\delta dV=\delta V'-\delta V$; mais pour obtenir $d\delta V$, il faudra changer de même δV en $\delta V'$, et prendre la différence des deux résultats : on trouvera donc ainsi $d\delta V=\delta V'-\delta V$, et par conséquent, $\delta dV=d\delta V$,

Il suit encore de là, que $\delta d^n V = d\delta d^{n-1} V = d^n \delta V$. En continuant ainsi, on obtiendra ce théorême général : $\delta d^n V = d^m \delta d^{n-m} V = d^n \delta V$, et il est facile de voir qu'il rentre dans celui qu'on a démontré n°. 27 (*).

817. Pour ne pas nous arrêter à des exemples particuliers, supposons que u soit une fonction de $x, y, \frac{dy}{dx} = p, \frac{dp}{dx} = q$, etc. on en trouvera la variation en différentiant à l'ordinaire, mais en se servant de la caractéristique δ au lieu de d; et la différentielle ordinaire étant,

$$du = X dx + Y dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

la variation sera

$$\delta u = X \delta x + Y \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.}$$

en observant que les quantités p, q, r, etc. doivent y être regardées comme renfermant deux variables indépendantes, x et y (n°. préc.); et que par conséquent on peut prendre leur variation dans deux

---

(*) Tout ce qui précède se peint ainsi qu'il suit, au moyen des considérations géométriques.

Lorsqu'on regarde y comme une fonction de x de forme constante, les diverses valeurs que peuvent prendre ces variables sont représentées par les ordonnées et les abscisses d'une même courbe CE, *fig.* 37; mais quand leur relation change, on
FIG. 37. passe de cette courbe à une autre quelconque $\gamma\varepsilon$, dont la nature dépend de la loi suivant laquelle ce changement a eu lieu. Nous avons déjà présenté de pareilles circonstances, en faisant varier les constantes qui entroient dans les équations des courbes ou des surfaces; mais alors nous ne considérions que des variations particulières, parce que nous regardions la forme de ces équations comme déterminée, tandis qu'ici nous supposons qu'elles soient quelconques: dans ce dernier état de choses, la ligne $M\mu$, qui exprime le changement qu'éprouve l'ordonnée PM ou y, en passant de la courbe CE à la courbe $\gamma\varepsilon$, est absolument indéterminée. Si l'on prend un second point M', que l'on mène l'ordonnée $P'M'$, consécutive à PM, et que l'on tire MR, $\mu\rho$, parallèles à AP, et $\mu m'$ parallèle à la courbe MM', on aura $m'\rho = M'R = dy$, et $m'\mu' = \mu'\rho - m'\rho$ sera le changement qu'éprouve dy dans le passage de la courbe CE à la courbe $\gamma\varepsilon$, ou δdy; mais on peut aussi regarder cette ligne comme la différence entre $M\mu = \delta . PM = M'm'$ et $M'\mu' = \delta . P'M'$, et elle deviendra ainsi $d\delta y$: on aura donc, comme ci-dessus, $\delta dy = d\delta y$. Ce n'est que pour ne pas compliquer la figure que nous avons fait varier AP ou x de la même quantité pour les deux courbes CE et $\gamma\varepsilon$.

hypothèses différentes, savoir : en ne faisant varier qu'une de ces quantités, ou en les faisant varier toutes les deux. Nous opérerons sous ce dernier point de vue, parce que, comme nous l'avons déjà dit, il est plus général, et que d'ailleurs on en tire les résultats qui conviennent au premier, en supprimant les termes relatifs à celle des variables que l'on veut traiter comme constante ; et à cause de

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{dy}{dx} \\ q &= \frac{dp}{dx} \\ r &= \frac{dq}{dx} \end{aligned}\right\} \text{ nous aurons } \left\{\begin{aligned} \delta p &= \frac{dx\delta dy - dy\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y - pd\delta x}{dx} \\ \delta q &= \frac{dx\delta dp - dp\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta p - qd\delta x}{dx} \\ \delta r &= \frac{dx\delta dq - dq\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta q - rd\delta x}{dx} ; \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

à l'aide de ces formules on trouvera la variation d'une expression quelconque, renfermant x, y, et leurs différentielles, de quelque ordre que ce soit.

818. On peut aussi demander la variation d'une formule intégrale, telle que $\int U$, U renfermant $x, y, dx, d^2x \ldots dy, d^2y \ldots$ car les formules de ce genre, exprimant certaines fonctions dont la composition dépend de la relation établie entre les variables x et y, éprouveront des changemens si l'on fait varier cette relation ; c'est-à-dire, si on regarde les variables x et y comme indépendantes l'une de l'autre dans les changemens qu'elles subissent. Il faudra donc appliquer à ce cas, les règles de différentiation que nous avons déjà employées pour la fonction u, et en observant que cette différentiation, n'ayant pas lieu dans la même acception où se trouve employé le signe $\int$ qui affecte la formule proposée, elle ne peut ni le détruire ni le modifier.

Nous allons donc établir ce théorême : $\delta \int U = \int \delta U$; en effet, $\delta \int U = \int U' - \int U$, U' étant ce que devient U lorsqu'on y met $x + \delta x$, et $y + \delta y$, au lieu de x et y, et comme on a $\int U' - \int U = \int (U' - U)$, $U' - U = \delta U$, il s'ensuit $\delta \int U = \int \delta U$,

819. Cela posé, soit U une fonction de x, y, et de leurs différentielles ; on aura

$$dU = M dx + N d^2x + P d^3x + Q d^4x + \text{etc.}$$
$$+ m dy + n d^2y + p d^3y + q d^4y + \text{etc.}$$

et par conséquent,

$$\delta U = M\delta x + N\delta dx + P\delta d^2x + Q\delta d^3x + \text{etc.}$$
$$+ m\delta y + n\delta dy + p\delta d^2y + q\delta d^3y + \text{etc.}$$

d'où il suit :

$$\int \delta U = \int (M\delta x + N\delta dx + P\delta d^2x + Q\delta d^3x + \text{etc.})$$
$$+ \int (m\delta y + n\delta dy + p\delta d^2y + q\delta d^3y + \text{etc.})$$

Cette expression n'est pas réduite à la forme la plus simple qu'elle puisse avoir; car si on intègre par parties, on aura :

$$\int M\delta x = \int M\delta x$$
$$\int N\delta dx = \int N d\delta x = N\delta x - \int dN\delta x$$
$$\int P\delta d^2x = \int Pd^2\delta x = Pd\delta x - \int dPd\delta x = Pd\delta x - dP\delta x + \int d^2P\delta x$$
$$\int Q\delta d^3x = \int Qd^3\delta x = Qd^2\delta x - \int dQd^2\delta x = Qd^2\delta x - dQd\delta x + \int d^2Qd\delta x$$
$$= Qd^2\delta x - dQd\delta x + d^2Q\delta x - \int d^3Q\delta x$$

etc. etc.

On aura pareillement,

$$\int m\delta y = \int m\delta y$$
$$\int n\delta dy = \int n d\delta y = n\delta y - \int dn\delta y$$
$$\int p\delta d^2y = \int p d^2\delta y = pd\delta y - dp\delta y + \int d^2p\delta y$$
$$\int q\delta d^3y = \int q d^3\delta y = qd^2\delta y - dqd\delta y + d^2q\delta y - \int d^3q\delta y$$

etc.

et en substituant, il viendra

$$\int \delta U = (N - dP + d^2Q - \text{etc.})\delta x + (P - dQ + \text{etc.})d\delta x + (Q - \text{etc.})d^2\delta x + \text{etc.}$$
$$+ (n - dp + d^2q - \text{etc.})\delta y + (p - dq + \text{etc.})d\delta y + (q - \text{etc.})d^2\delta y + \text{etc.}$$
$$+ \int (M - dN + d^2P - d^3Q + \text{etc.})\delta x$$
$$+ \int (m - dn + d^2p - d^3q + \text{etc.})\delta y$$

820. On remarquera, d'après cette formule, que si l'on avoit

$$M - dN + d^2P - d^3Q + \text{etc.} = 0$$
$$m - dn + d^2p - d^3q + \text{etc.} = 0$$

la variation $\int \delta U$ seroit entièrement délivrée du signe $\int$; mais ces équations sont précisément celles qui doivent avoir lieu pour que la fonction U soit intégrable par elle-même, (n°. 90), et nous allons le prouver *à priori*, en appliquant à la recherche de ces conditions la méthode même des variations.

En effet, soit U, la différentielle d'une fonction $'U$; on aura $d'U = U$, et par conséquent $\delta U = \delta d'U$, ou $= d\delta'U$, d'où

il suit que si U est une différentielle complète, δU en doit être pareillement une; et par conséquent lorsqu'on a fait sortir du signe $\int$, dans l'expression de $\int \delta U$, tous les termes qui peuvent s'intégrer, il faut que l'ensemble de ceux qui restent soit nul par lui-même, sans qu'on ait besoin de supposer pour cela aucune relation entre x, y, δx, et δy.

821. Ces remarques ne se bornent pas à l'expression de $\int U$; elles s'étendent également à celles de $\int\int U$, $\int\int\int U$, etc. quel que soit le nombre des signes d'intégration; et en cherchant la variation de ces dernières formules, comme on a fait à l'égard de $\int U$, on trouvera les équations de condition, qui doivent avoir lieu pour que la quantité U soit la différentielle complète d'une fonction $'U$, d'un ordre immédiatement inférieur, d'une fonction $''U$, d'un ordre inférieur de deux unités, etc., et ainsi de suite. Soit, pour y arriver,

$$\left.\begin{aligned} \delta U = {} & M\delta x + N d\delta x + P d^2\delta x + Q d^3\delta x + \text{etc.} \\ & + m\delta y + n d\delta y + p d^2\delta y + q d^3\delta y + \text{etc.} \end{aligned}\right\},$$

on aura, par ce qui précède,

$$\begin{aligned} \delta\int U = {} & (N - dP + d^2Q - \text{etc.})\delta x + (P - dQ + \text{etc.})d\delta x + (Q - \text{etc.})d^2\delta x + \text{etc.} \\ & + (n - dp + d^2q - \text{etc.})\delta y + (p - dq + \text{etc.})d\delta y + (q - \text{etc.})d^2\delta y + \text{etc.} \\ & + \int (M - dN + d^2P - d^3Q + \text{etc.})\delta x \\ & + \int (m - dn + d^2p - d^3q + \text{etc.})\delta y; \end{aligned}$$

mais $\delta\int U = \delta' U$, et à cause que $'U = d''U$, il viendra $\delta'' U = \delta\int' U = \int\delta' U = \int\delta\int U$: on obtiendra donc $\delta'' U$ en intégrant de nouveau $\delta\int U$, et en faisant sortir de dessous le premier signe d'intégration, tout ce qu'il sera possible d'intégrer. On trouvera ainsi

$$\begin{aligned} \int\delta\int U = \delta'' U = {} & \int (N - dP + d^2Q - \text{etc.})\delta x + \int (P - dQ + \text{etc.})d\delta x + \int (Q - \text{etc.})d^2\delta x + \text{etc.} \\ & + \int (n - dp + d^2q - \text{etc.})\delta y + \int (p - dq + \text{etc.})d\delta y + \int (q - \text{etc.})d^2\delta y + \text{etc.} \\ & + \int\int (M - dN + d^2P - d^3Q + \text{etc.})dx \\ & + \int\int (m - dn + d^2p - d^3q + \text{etc.})dy \end{aligned}$$

et en intégrant par parties les termes susceptibles de l'être, c'est-à-dire, tous ceux qui, comme $\int P d\delta x$, par exemple, contiennent des diff-

rentielles de δx et de δy, on aura $\int \delta \int U = \delta'' U$

$$= (P - dQ + dR - \text{etc.})\delta x + (Q - dR + \text{etc.})d\delta x + (R - \text{etc.})d^2\delta x + \text{etc.}$$
$$+ (p - dq + dr - \text{etc.})\delta y + (q - dr + \text{etc.})d\delta y + (r - \text{etc.})d^2\delta y + \text{etc.}$$
$$+ \int (N - 2dP + 3d^2Q - 4d^3R + \text{etc.})\delta x + \int\int (M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R - \text{etc.})\delta x$$
$$+ \int (n - 2dp + 3d^2q - 4d^3r + \text{etc.})\delta y + \int\int (m - dn + d^2p - d^3q + d^4r - \text{etc.})\delta y$$

Telle est l'expression de la variation d'une formule qui dépend de deux intégrations successives ; il est évident qu'elle ne peut être délivrée des signes d'intégration, à moins qu'on n'ait

$$N - 2dP + 3d^2Q - 4d^3R + \text{etc.} = 0$$
$$M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R - \text{etc.} = 0$$
$$n - 2dp + 3d^2q - 4d^3r + \text{etc.} = 0$$
$$m - dn + d^2p - d^3q + d^4r - \text{etc.} = 0$$

quand ces équations seront identiques, le résultat qui sera $\delta'' U$, n'aura besoin que d'être intégré une fois, par rapport aux variations, pour donner $''U$, ou l'intégrale seconde de la proposée.

Soit pour exemple $U = x\,d^2y + 2dx\,dy + y\,d^2x$; on aura

$$\delta U = d^2y\delta x + 2dyd\delta x + yd^2\delta x + d^2x\,\delta y + 2dx\,d\delta y + xd^2\delta y ;$$

$$M = d^2y, \quad N = 2dy, \quad P = y$$
$$m = d^2x, \quad n = 2dx, \quad p = x,$$

et par conséquent, les équations de condition ci-dessus, deviendront

$$2dy - 2dy = 0$$
$$d^2y - 2d^2y + d^2y = 0 ;$$
$$2dx - 2dx = 0$$
$$d^2x - 2d^2x + d^2x = 0,$$

d'où il résulte que la fonction proposée est immédiatement intégrable ; la partie $y\delta x + x\delta y$, délivrée du signe $\int$, donne, en l'intégrant par rapport aux variations, $''U = xy + C$.

822. Nous avons supposé que U contenoit seulement deux variables, x et y ; les procédés seroient encore les mêmes, et les résultats parfaitement analogues, s'il en contenoit trois, x, y et ζ, par exemple ; sa différentielle dU seroit de cette forme ;

$$dU = M\,dx + N\,d^2x + P\,d^3x + Q\,d^4x + \text{etc.}$$
$$+ m\,dy + n\,d^2y + p\,d^3y + q\,d^4y + \text{etc.}$$
$$+ \mu\,d\zeta + \nu\,d^2\zeta + \pi\,d^3\zeta + \rho\,d^4\zeta + \text{etc.}$$

et de là ; on tireroit δU en changeant un d en δ. Il est aisé de voir que la troisième variable z donneroit, sous le signe $\int$, la fonction

$$(\mu - dv + d^2\pi + d^3\rho + \text{etc.})\delta z,$$

et hors de ce signe, les termes

$$(v - d\pi + d^2\rho - \text{etc.})\delta z + (\pi - d\rho + \text{etc.})d\delta z + (\rho - \text{etc.})d^2\delta z + \text{etc.}$$

Cette marche convient évidemment à un nombre quelconque de variables, et il en résulte que si on vouloit chercher les équations de condition dans ce cas, en égalant à zéro la quantité qui, sous le signe $\int$, multiplie chaque variation indépendante, on auroit, pour une première intégration, autant d'équations que de variables ; deux fois autant, s'il s'agissoit de deux intégrations successives ; et en général, si m étoit le nombre des variables, et n celui des intégrations à effectuer, on auroit mn équations de condition.

Si on supposoit que la différentielle de l'une des variables, celle de x, par exemple, fût constante, on auroit alors N, P, Q, etc. égaux chacun à zéro, et la variation se réduiroit à

$$\begin{cases} (n - dp + d^2q - d^3r + \text{etc.})\delta y + (p - dq + \text{etc.})d\delta y + (q - \text{etc.})d^2\delta y + \text{etc.} \\ + \int M\delta x \\ + \int (m - dn + d^2p - \text{etc.})\delta y + \text{etc.} \end{cases}$$

et il faut observer que U pouvant dans ce cas être mis sous la forme de $V dx$, on aura en différentiant, par rapport à x, $M = \frac{dV}{dx}dx$, et par conséquent, $\int M\delta x = \int \frac{dV}{dx} dx\,\delta x = V\delta x$; la partie intégrée seroit donc augmentée de ce terme.

823. On peut donner à la variation de $\int U$ une autre forme ; en observant que toute expression différentielle ; pour signifier quelque chose, doit ne contenir que les variables

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\qquad d\frac{dy}{dx},\qquad d^2\frac{dy}{dx},\ \text{etc.}$$

et une puissance de dx qui rende le tout homogène. Cette manière de présenter les résultats, revient à regarder comme variables indépendantes, y et $\frac{dy}{dx}$; on pourra donc supposer $U = V dx$, V ne

renfermant plus que $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}, \frac{d^2\frac{dy}{dx}}{dx^2}$, etc. lorsqu'il s'agit d'une seule intégration, et $U = V dx^m$, s'il devoit y en avoir un nombre m à effectuer. Cela posé, on aura

$$\delta \int V dx = \int (V d\delta x + dx \delta V) = V \delta x - \int (dV \delta x - dx \delta V).$$

Soit, pour abréger, $dy = p dx$, $dp = q dx$, $dq = r dx$, etc. il viendra $dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$

et $\delta V = M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.}$

d'où on tirera

$$\delta \int V dx = \begin{cases} V \delta x + \int dx (M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.}) \\ \quad - \int \delta x (M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}) ; \end{cases}$$

ce qui se réduit à $\delta \int V dx =$

$$V \delta x + \int N (dx \delta y - dy \delta x) + \int P (dx \delta p - dp \delta x) + \int Q (dx \delta q - dq \delta x) + \int R (dx \delta r - dr \delta x) + \text{etc.}$$

Mais avant de passer aux intégrations par parties, il faut se rappeler qu'on a (n°. 817),

$$dx \delta p = d \delta y - p d \delta x$$
$$dx \delta q = d \delta p - q d \delta x$$
$$dx \delta r = d \delta q - r d \delta x$$
$$\text{etc.}$$

en substituant ces valeurs, et ayant égard à ce que $dy = p dx$, on obtiendra $\delta \int V dx =$

$$V \delta x + \int N dx (\delta y - p \delta x) + \int P d (\delta y - p \delta x) + \int Q d (\delta p - q \delta x) + \int R d (\delta q - r \delta x) + \text{etc.}$$

car il est aisé de voir que

$$\delta p - q dx = \frac{d \delta y - p d \delta x - dp \delta x}{dx} = \frac{d (\delta y - p \delta x)}{dx}$$

$$\delta q - r \delta x = \frac{d \delta p - q d \delta x - dq \delta x}{dx} = \frac{d (\delta p - q \delta x)}{dx}$$

$$\delta r - s \delta x = \frac{d \delta q - r d \delta x - dr \delta x}{dx} = \frac{d (\delta q - r \delta x)}{dx}$$

etc.

Soit

Soit fait pour abréger $\delta y - p\delta x = \omega$, on aura

$$\delta p - q\delta x = \frac{d\omega}{dx}$$

$$\delta q - r\delta x = \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx}$$

$$\delta r - s\delta x = \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx}$$

etc.

ce qui changera $\delta \int V dx$ en

$$V\delta x + \int N\omega dx + \int P d\omega + \int Q d \frac{d\omega}{dx} + \int R d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} + \int S d \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} + \text{etc.}$$

et intégrant par parties, on aura

$$\int P d\omega = P\omega - \int \omega dP$$

$$\int Q d \frac{d\omega}{dx} = Q \frac{d\omega}{dx} - \int dQ \frac{d\omega}{dx} = Q \frac{d\omega}{dx} - \int \frac{dQ}{dx} d\omega = Q \frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx} \omega + \int \omega d \frac{dQ}{dx}$$

etc.

et par conséquent,

$$\delta \int V dx = \int \omega dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dS}{dx} - \text{etc.} \right)$$

$$+ V\delta x + \omega \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} - \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dS}{dx} + \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{d\omega}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dS}{dx} - \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} \left(S - \text{etc.} \right).$$

Si on fait $\omega = 0$ dans cette formule, elle se réduit à $V\delta x$; et cela devoit arriver ainsi, car cette supposition donne $\delta y - p\delta x = 0$: elle établit donc entre δy et δx, la même relation qu'entre dy et dx, et ne doit par conséquent offrir que le résultat d'une différentiation ordinaire; mais dans ce cas, on auroit trouvé seulement $d \int V dx = V dx$.

Il est à propos de remarquer que le développement de la quantité $\int(dx\,\delta V - dV\delta\zeta)$, qui reviendra souvent dans le cours de ce chapitre, ainsi que d'autres de la même forme, se déduit de la formule précédente en y supprimant le seul terme $V\delta x$.

824. Si on met, au lieu de ω, sa valeur $\delta y - p\,\delta x$ dans la partie affectée du signe d'intégration, on aura :

$$\int\left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}d\frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx}d\frac{1}{dx}d\frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right]\delta y$$

$$-\int\left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}d\frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx}d\frac{1}{dx}d\frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right]p\,\delta x\,;$$

d'où il résulte évidemment qu'on obtiendroit deux équations identiques, en égalant séparément à zéro le coefficient de δy, et celui de δx ; ce qui fait voir aussi que pour toute fonction différentielle qui peut être mise sous la forme que nous lui supposons dans cet article, il y a toujours une condition de moins à vérifier relativement à son intégrabilité.

L'observation précédente s'étend nécessairement à la première forme que nous avons donnée à la variation de $\int U$ (n°. 819) ; car les fonctions δU et $\delta(V dx)$ doivent être identiques, et étant intégrées autant qu'il est possible, par rapport à la caractéristique d, on doit trouver dans l'une et l'autre circonstance les mêmes résultats. Il suit donc de là que lorsqu'on fera usage de la variation de $\int U$, et qu'on égalera à zéro la partie à intégrer, il faudra n'employer jamais qu'une des deux équations qu'elle peut fournir.

825. Il est clair que si l'on avoit trois variables au lieu de deux ; comme la différentielle de V pourroit être mise sous cette forme

$$dV = \begin{cases} M dx + N dy + P dp + Q dq + \text{etc.} \\ \qquad + N' d\zeta + P' dp' + Q' dq' + \text{etc.} \end{cases}$$

on auroit par rapport à ζ un résultat en N', P', Q', etc., absolument analogue à celui qu'a donné la variable y, et faisant $d\zeta - p'\delta x = \omega'$, on trouveroit la variation totale, en ajoutant aux termes déjà écrits leurs analogues en lettres accentuées.

Les remarques précédentes ont encore lieu ici ; et il est facile

de voir que la variation de la formule $\int V dx$, dans laquelle V ne renferme que des rapports différentiels,

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx}, \text{ etc.}$$

$$\frac{d\zeta}{dx}, \quad \frac{1}{dx} d \frac{d\zeta}{dx}, \text{ etc.}$$

ne donne lieu qu'à deux équations différentes, lorsqu'on égale à zéro l'ensemble des termes affectés du signe $\int$. Il faut pareillement en conclure que la formule indiquée, n°. 822, ne donne que deux équations nécessaires, lorsque U peut être ramenée à la forme $V dx$; et généralisant ce résultat, on verra que quand on prend la variation dans la première forme, U pouvant être transformée en $V dx$, il y a toujours une équation qui n'est qu'une suite des autres, et qu'on doit par conséquent négliger.

826. Si l'on fait dx constant, la formule du n°. 823 se réduira et deviendra

$$\delta \int V dx = \int \omega dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} \right)$$
$$+ V \delta x + \omega \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{d\omega}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{d^3\omega}{dx^3} \left(S - \text{etc.} \right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On reconnoîtra dans la partie soumise au signe $\int$, ce que devient l'équation de condition qui doit avoir lieu pour l'intégrabilité d'une fonction à deux variables, lorsque la différentielle de l'une d'elles est constante.

Cette équation de condition va nous offrir des théorêmes intéressans : si on la multiplie par dx, on trouvera

$$N dx - dP + \frac{d^2Q}{dx} - \frac{d^3R}{dx^2} + \frac{d^4S}{dx^3} - \text{etc.}$$

on aura, en intégrant

$$\int N dx - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \text{etc.} = A \ldots\ldots\ldots (1)$$

ce qui prouve *à posteriori* que $N dx$ est intégrable, puisqu'on a $\int N dx = A + P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}$, équation dont le second membre ne renferme que des fonctions intégrées.

Si on multiplie l'équation (1) par dx, et qu'on l'intègre, on aura $\int dx (\int N dx - P) + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \text{etc.} = Ax + B$, (2) d'où il suit que $\int dx (\int N dx - P)$ est également intégrable: on trouveroit d'une manière analogue, que les formules suivantes:

$$\int dx (\int dx (\int N dx - P) + Q)$$
$$\int dx (\int dx (\int N dx - P) + Q) - R)$$
etc. etc. etc.

sont toutes intégrables par elles-mêmes. On peut donner à ces théorêmes une forme plus simple, en les énonçant de la manière suivante:

Si V est une fonction de x, y, p, q, r, s, etc., intégrable par elle-même, qu'on ait $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \text{etc.}$, et que l'on fasse successivement

$P - \int N dx = N'$, $Q - \int N' dx = N''$, $R - \int N'' dx = N'''$, etc.

toutes les expressions comprises dans la suite,

$$N dx, \quad N' dx, \quad N'' dx, \quad N''' dx, \text{ etc.}$$

seront intégrables par elles-mêmes.

827. Soit V fonction de x, y, p, q, etc. et de $v = \int V' dx$; V' étant aussi fonction de x, y, p, q, etc. en sorte que

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + \text{etc.} + L dv$$
$$dV' = M' dx + N' dy + P' dp + Q' dq + \text{etc.}$$

on aura d'abord par le n°. 822,

$$\delta \int V dx = V \delta x - \int (dx \delta V - dV \delta x);$$

et faisant pour abréger

$$dV = d\downarrow + L dv,$$

on trouvera

$$\delta V = \delta \downarrow + L \delta v,$$

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int [dx \delta \downarrow - d\downarrow \delta x] + \int [L dx \delta v - L dv \delta x].$$

En observant que

$$\delta v = \delta \int V' dx = V' \delta x + \int [dx \delta V' - dV' \delta x],$$

posant ensuite $\int L dx = I$ et intégrant par parties, on obtiendra

$$\int [L dx \delta v - L dv \delta x] = I \int [dx \delta V' - dV' \delta x] - \int I [dx \delta V' - dV' \delta x];$$

substituant cette expression, il viendra

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int [dx \delta \downarrow - d\downarrow \delta x] + I \int [dx \delta V' - dV' \delta x] - \int I [dx \delta V' - dV' \delta x].$$

Mais on trouve dans le n°. 823 le développement de la fonction $dx \delta V - dV \delta x$, dans lequel V n'est autre chose que ce que représente $\downarrow$ dans ce moment, et V' a la même forme que $\downarrow$, aux accens près ; on aura donc immédiatement, pour les trois premiers termes,

$$\begin{aligned}
&\int \omega dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} + \text{etc.} \right) \\
&+ V \delta x + \omega \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} - \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dS}{dx} + \text{etc.} \right) \\
&\quad + \frac{d\omega}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dS}{dx} - \text{etc.} \right) \\
&\quad + \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} \right) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ I \int \omega dx \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dQ'}{dx} - \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dR'}{dx} + \text{etc.} \right) \\
&\quad + \omega \left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dR'}{dx} - \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dS'}{dx} + \text{etc.} \right) \\
&\quad + \frac{d\omega}{dx} \left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dS'}{dx} - \text{etc.} \right) \\
&\quad + \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} \left(R' - \frac{dS'}{dx} + \text{etc.} \right) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Quant au dernier, $\int I [dx \delta V' - dV' \delta x]$, en y mettant, au lieu de $dx \delta V' - dV' \delta x$, sa valeur déduite du n°. 823, il deviendra

$$\int I \left[dx \left(N' \omega + P' \frac{d\omega}{dx} + Q' \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} + R' \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} + \text{etc.} \right) \right.,$$

et en intégrant par parties,

$$\int \omega dx \left(IN' - \frac{d.IP'}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{d.IQ'}{dx} - \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d. \frac{d.IR'}{dx} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \omega \left(IP' - \frac{d.IQ'}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{d.IR'}{dx} - \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{d\omega}{dx} \left(IR' - \frac{d.IR'}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d.IS'}{dx} - \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{1}{dx} d \frac{d\omega'}{dx} \left(IR' - \frac{d.IS'}{dx} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \text{etc.}$$

Ce résultat étant retranché du précédent, on aura le développement de $\delta \int V dx$, dans l'hypothèse proposée.

828. Si l'on supposoit $dV = d\downarrow + Ldv + L_{,} dv_{,}$, etc.

$$v = \int V' dx, \qquad v_{,} = \int V'_{,} dx, \text{ etc.}$$

on verroit aisément que $\delta \int V dx$ deviendroit alors

$$V \delta x + \int (dx \delta \downarrow - d\downarrow \delta x) + \int (Ldx \delta v - Ldv \delta x) + \int (L_{,} dx \delta v_{,} - L_{,} dv_{,} \delta x);$$

et que, par conséquent, il suffiroit d'ajouter à l'expression de $\delta \int V dx$, trouvée plus haut, les développemens des termes

$I_{,} \int (dx \delta V'_{,} - dV'_{,} \delta x) - \int I_{,} (dx \delta V'_{,} - dV'_{,} \delta x)$, $I_{,}$ étant $\int_{,} L_{,} dx$: chaque nouvelle fonction de la forme $L_{,,} dv_{,,}$ en introduiroit de pareils dans $\delta \int v dx$.

829. Supposons que V' renferme une nouvelle intégrale $v' = \int V'' dx$, et qu'on ait par conséquent

$$dV' = M' dx + N' dy + P' dp + Q' dq + \text{etc.} + L' dv'$$
$$dV'' = M'' dx + N'' dy + P'' dp + Q'' dq + \text{etc.}$$

faisons toujours $dV = d\downarrow + L dv$, nous obtiendrons

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \delta \downarrow - d\downarrow \delta x) + \int (L dx \delta v - L dv \delta x)$$

et comme $\int (L dx \delta v - L dv \delta x) = \int (L dx \int (dx \delta V' - dV' \delta x))$, si l'on remplace dv et $\delta v'$, par $d\downarrow' + L' dv'$ et $\delta \downarrow' + L' \delta v'$, on trouvera

$$\int (L dx \delta v - L dv \delta x)$$
$$= \int (L dx \int (dx \delta \downarrow' - d\downarrow' \delta x) + \int (L dx \int (L' dx \delta v' - L' dv' \delta x));$$

mettant au lieu de dv' et de $\delta v'$, leurs valeurs $V'' dx$ et $\delta \int V'' dx$, nous aurons $\int (L' dx \delta v' - L' dv' \delta x) = \int (L' dx \int (dx \delta V'' - dV'' \delta x))$; par conséquent; $\int (L dx \delta v - L dv \delta x) =$

$$\int (Ldx \int (dx \delta \downarrow' - d\downarrow' \delta x)) + \int (L dx \int (L' dx \int (dx \delta V'' - dV'' \delta x)))$$

et

$$\delta \int V dx =$$
$$V \delta x + \int (dx \delta \downarrow - d\downarrow \delta x) + \int (Ldx \int (dx \delta \downarrow' - d\downarrow' \delta x)) + \int (Ldx \int L' dx \int (dx \delta V'' - dV'' \delta x))).$$

Il faut observer que ψ' est la même chose que V' dans le n°. 827 ; il suffit donc de calculer ce que donne le dernier terme de cette formule, et de l'ajouter au développement trouvé dans cet article, pour arriver au résultat que nous cherchons.

Soit fait $\int L\,dx = I$, nous aurions d'abord, en intégrant par parties,

$$I\int(L'dx\int(dx\delta V''-dV''\delta x))-\int(IL'dx\int(dx\delta V''-dV''\delta x))\,;$$

soit fait encore $\int L'dx = I'$, et $\int IL'dx = K'$, on trouvera pour le premier des deux termes ci-dessus

$$II'\int(dx\delta V''-dV''\delta x)-I\int I'(dx\delta V''-dV''\delta x),$$

et pour le second

$$-K'\int(dx\delta V''-dV''\delta x)+\int K'(dx\delta V''-dV''\delta x).$$

Des quatre nouveaux termes que nous venons d'obtenir, deux sont semblables à $I\int(dx\delta V'-dV'\delta x)$,
et deux autres à $\int I(dx\delta V'-dV'\delta x)$, expressions que nous avons traitées précédemment ; ainsi on trouvera facilement ce que les premières doivent donner dans le développement de $\int V\,dx$: on voit aussi quelle seroit la marche à suivre, si V'' renfermoit encore une nouvelle fonction intégrale, et ainsi du reste.

830. On a fait remarquer, n°. 825, que le résultat trouvé pour la formule $\int V\,dx$, dans le cas où V ne contient que x, y, et leurs différentielles, s'étendoit également au cas où cette fonction renfermeroit trois variables, x, y, z, et leurs différentielles ; on en peut dire autant des formules précédentes.

En effet, soit

$$\left.\begin{array}{l} dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr \\ \qquad\quad + N_{,}dz + P_{,}dp_{,} + Q_{,}dq_{,} + R_{,}dr_{,} \end{array}\right\} + L\,dv$$

$dz = p_{,}dx$, $dp_{,} = q_{,}dx$, $dq_{,} = r_{,}dx$, etc. $dv = V'dx$;

$$\left.\begin{array}{l} dV' = M'dx + N'dy + P'dp + Q'dq + R'dr \\ \qquad\quad + N'_{,}dz + P'_{,}dp_{,} + Q'_{,}dq_{,} + R'_{,}dr_{,} \end{array}\right\} + L'dv'$$

$dv' = \int V''dx$

etc.

il est d'abord évident qu'on aura, ainsi que dans le n°. précéd.

$$\left.\begin{array}{l} \delta\int V\,dx = V\delta x + \int(dx\delta\psi - d\psi\delta x) + \int(Ldx\int(dx\delta\psi' - d\psi'\delta x)) \\ \qquad\qquad + \int(Ldx\int(L'dx\int(dx\delta V'' - dV''\delta x))) \end{array}\right\}$$

on parviendra donc aux mêmes réductions ; et tout dépendra alors du développement de quantités de la forme $dx\delta\downarrow - d\downarrow\delta x$. Mais par le n°. 813, on aura

$$d\downarrow\delta x - d\downarrow\delta x = \begin{cases} N dx\,(\delta y - p\delta x) + P d(\delta y - p\delta x) + Q d(\delta p - q\delta x) + \text{etc.} \\ + N_{,} dx\,(\delta z - p_{,}\delta x) + P_{,} d(\delta z - p_{,}\delta x) + Q_{,} d(\delta p_{,} - q_{,}\delta x) + \text{etc.} \end{cases}$$

et en faisant, pour abréger $\delta y - p\,dx = \omega$, $\delta z - p_{,}\delta x = \omega_{,}$, il viendra

$$dx d\downarrow - d\downarrow\delta x = \begin{cases} dx\left\{ N\omega + P\dfrac{d\omega}{dx} + Q\dfrac{1}{dx}d\dfrac{d\omega}{dx} + R\dfrac{1}{dx}d\dfrac{1}{dx}d\dfrac{d\omega}{dx}\ldots \right\} \\ + dx\left\{ N_{,}\omega_{,} + P_{,}\dfrac{d\omega_{,}}{dx} + Q_{,}\dfrac{1}{dx}d\dfrac{d\omega_{,}}{dx} + R_{,}\dfrac{1}{dx}d\dfrac{1}{dx}d\dfrac{d\omega_{,}}{dx}\ldots \right\} \end{cases}$$

d'où il est facile de conclure qu'en exécutant les intégrations par parties, on trouvera deux suites des termes absolument semblables ; l'une en ω, N, P, Q, R, etc., que nous avons déjà rapportée plusieurs fois, l'autre en $\omega_{,}$, $N_{,}$, $P_{,}$, $Q_{,}$, $R_{,}$, etc. c'est pourquoi nous ne les écrirons point. Quant aux autres termes de la valeur de $\delta\int V dx$, ils se déduiront du développement dont on vient de parler, par les procédés employés dans les articles précédens, et en accentuant les lettres d'une manière convenable.

Nous croyons en avoir dit assez, pour mettre le lecteur à portée de trouver la variation d'une formule compliquée d'autant de signes d'intégration qu'on voudra, et contenant un nombre quelconque de variables dépendantes d'une seule ; nous allons passer à une question plus générale, qui renferme toutes celles que nous avons traitées jusqu'à présent.

831. Trouver la variation d'une fonction qui n'est donnée que par une équation différentielle.

Supposons d'abord que cette équation soit du premier ordre, par rapport à la fonction U, c'est-à-dire, qu'elle contienne $U, dU, x, y, z, dx, dy, dz, d^{2}x$..... etc. il est clair qu'en la différentiant de nouveau, on pourra lui donner cette forme :

$$\left.\begin{array}{l} d^{2}U + T dU + M dx + N d^{2}x + P d^{3}x + \text{etc.} \\ \qquad + M_{,} dy + N_{,} d^{2}y + P_{,} d^{3}y + \text{etc.} \\ \qquad + M_{,,} dz + N_{,,} d^{2}z + P_{,,} d^{3}z + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0\,;$$

d'où

d'où on tirera l'équation

$$\left.\begin{aligned} d\delta U + T\delta U + M\delta x + N d\delta x + P d^2\delta x + \text{etc.} \\ + M_{,}\delta y + N_{,} d\delta y + P_{,} d^2\delta y + \text{etc.} \\ + M_{,,}\delta z + N_{,,} d\delta z + P_{,,} d^2\delta z + \text{etc.} \end{aligned}\right\} = 0,$$

que, pour abréger, nous écrirons de la manière suivante:

$$d\delta U + T\delta U + \delta u = 0,$$

δu représentant la partie de l'équation précédente indépendante de δU; et il faut observer que $T, M, \ldots M_{,}, \ldots M_{,,}, \ldots$ peuvent contenir U, x, y, z, dx, dy, etc. Pour tirer de la dernière équation la valeur de δU; nous la multiplierons par un facteur λ, parce qu'il est aisé de voir qu'elle est du premier degré et du premier ordre, par rapport à δU, et que l'on pourra déterminer λ de manière à l'intégrer, ce qui débarassera la variation δU du signe d dont elle est affectée: on aura donc

$$\lambda d\delta U + T\lambda\delta U + \lambda\delta u = 0$$

et par conséquent $\int\lambda d\delta U + \int T\lambda\delta U + \int\lambda\delta u = 0$. En intégrant chaque terme par partie, et rassemblant ceux où δU demeure sous le signe $\int$, on obtiendra

$$\int\lambda\delta u + \lambda\delta U - \int d\lambda\delta U + \int T\lambda\delta U = 0;$$

en égalant à zéro l'ensemble des deux derniers termes de cette équation, on aura pour déterminer λ la suivante:

$$T\lambda - d\lambda = 0,$$

et il restera $\int\lambda\delta u + \lambda\delta U = 0$; cette dernière donnera la valeur de δU, lorsqu'on connoîtra celle de λ. Or, on a, par l'intégration de la première, $\lambda = e^{\int T}$; mettant cette valeur dans l'expression $\delta U = -\frac{\int\lambda\delta u}{\lambda}$, on aura $\delta U = e^{-\int T}\int e^{\int T}\delta u$: on n'a point ajouté de constante, parce qu'elle est censée comprise dans les intégrations à effectuer. Quant à l'expression $\int e^{\int T}\delta u$, on la développera par les formules des n^{os} 819 et 822, en faisant, pour abréger, $e^{\int T} = I$, et en substituant

$$IM, \quad IN, \ldots \quad IM_{,}, \quad IN_{,}, \ldots \quad IM_{,,}, \quad IN_{,,}, \ldots$$

aux quantités désignées par

$$M, \quad N, \ldots \quad m, \quad n, \ldots \quad \mu, \quad \nu, \ldots$$

dans les n^{os}. cités.

832. Soit en général une équation différentielle d'un ordre quelconque, et renfermant autant de variables qu'on voudra ; en la différentiant par rapport à la caractéristique δ, on pourra lui donner la forme suivante :

$$0 = T\delta U + T'\delta dU + T''\delta d^2U + T'''\delta d^3U + \text{etc.} + \delta u$$

δu étant toujours la partie de la variation indépendante de δU. Par la transposition permise du δ, cette équation deviendra différentielle du premier degré, par rapport à δU ; en la multipliant par λ, et en affectant tous ses termes du signe $\int$, on aura

$$0 = \int\lambda T\delta U + \int\lambda T'd\delta U + \int\lambda T''d^2\delta U + \int\lambda T'''d^3\delta U + \text{etc.} + \int\lambda\delta u$$

intégrant ensuite par parties, on trouvera

$$0 = \left\{\begin{matrix}\lambda T'\\ -d(\lambda T')\\ +d^2(\lambda T'')\\ -\text{etc.}\end{matrix}\right\}\delta U \left\{\begin{matrix}+\lambda T''\\ -d(\lambda T'')\\ +\text{etc.}\end{matrix}\right\}d\delta U \left\{\begin{matrix}+\lambda T'''\\ -\text{etc.}\end{matrix}\right\}d^2\delta U + \text{etc.} + \int\lambda\delta u$$
$$+\int[\lambda T - d(\lambda T') + d^2(\lambda T'') - d^3(\lambda T''') + \text{etc.}]\delta U$$

et égalant à zéro la fonction qui multiplie δU sous le signe $\int$, on obtiendra l'équation

$$\lambda T - d(\lambda T') + d^2(\lambda T'') - d^3(\lambda T''') + \text{etc.} = 0,$$

qui sera du premier degré par rapport à λ. Le nombre des constantes arbitraires de son intégrale sera égal à celui des termes qu'elle renferme diminué d'une unité, et par conséquent le même que celui des variations δU, $d\delta U$, $d^2\delta U$, etc. dans la partie délivrée du signe $\int$; on pourra donc profiter de ces constantes pour faire évanouir les multiplicateurs de $d\delta U$, $d^2\delta U$, dans cette partie, lorsqu'on assignera aux variables x, y, etc. des valeurs déterminées : mais on aura en général

$$\left.\begin{matrix}[\lambda T' - d(\lambda T'') + d^2(\lambda T''') - \text{etc.}]\delta U\\ +[\lambda T'' - d(\lambda T''') + \text{etc.}]d\delta U + [\lambda T''' - \text{etc.}]d^2\delta U + \text{etc.} + \int\lambda du\end{matrix}\right\} = 0.$$

833. Nous avons supposé les variables x, y, etc. et la fonction U, liées entr'elles par une seule équation ; mais s'il existoit entre x, y, z, etc. une relation telle qu'on eût

$$X dx + Y dy + Z dz + \text{etc.} = 0,$$

on en tireroit

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + \text{etc.} = 0 ;$$

on auroit donc, par ce moyen, l'expression de l'une des variations en fonction des autres; on la substitueroit dans celle de δU, trouvée comme dans les articles précédens, et par-là, le nombre des variations seroit diminué d'une unité dans le résultat.

On peut étendre ce raisonnement au cas où il existeroit plus d'une relation entre les variables.

834. Si l'équation différentielle proposée étoit mise sous une forme telle qu'elle ne contînt plus que

$$\left.\begin{array}{l} x,\ y,\ \dfrac{dy}{dx}=p,\quad \dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=p',\ \text{etc.} \\ z,\ \dfrac{dz}{dx}=q,\quad \dfrac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dx}=q',\ \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U,\ \dfrac{dU}{dx}=t,\quad \dfrac{d\left(\frac{dU}{dx}\right)}{dx}=t',\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

en la représentant par $V=0$, V étant fonction de

$$\begin{array}{l} x,\ y,\ z,\ldots U,\ p,\ p'\ldots. \\ \qquad\qquad q,\ q'\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad t,\ t'\ldots. \end{array}$$

il faudroit chercher le développement de l'équation $\delta V=0$; mais à cause de $dV=0$, on pourra former l'équation $dx\delta V-dV\delta x=0$, dont le premier membre offre une fonction semblable à toutes celles que nous avons traitées jusqu'ici. Faisant

$$\left.\begin{array}{l} dV=M\,dx+P\,dy+P'\,dp+P''\,dp'+\ldots \\ \qquad +Q\,dz+Q'\,dq+Q''\,dq'+\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad +T\,dU+T'\,dt+T''\,dt'+\ldots \end{array}\right\},$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l} \delta V=M\delta x+P\delta y+P'\delta p+P''\delta p'+\ldots \\ \qquad +Q\delta z+Q'\delta q+Q''\delta q'+\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad +T\delta U+T'\delta t+T''\delta t'+\ldots \end{array}\right\}$$

et posant

$$\delta y - p\delta x = \omega$$
$$\delta y - q\delta x = \omega'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta U - t\delta x = \Omega$$

on aura, par le n°. 823,

$$\left.\begin{aligned} dx\delta V - dV\delta x = {} & dx\left[P\omega + P'\frac{d\omega}{dx} + P''\frac{1}{dx}d\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\ldots\ldots\right] \\ & + dx\left[Q\omega' + Q'\frac{d\omega'}{dx} + Q''\frac{1}{dx}d\left(\frac{d\omega'}{dx}\right)\ldots\ldots\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + dx\left[T\Omega + T'\frac{d\Omega}{dx} + T''\frac{1}{dx}d\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)\ldots\ldots\right] \end{aligned}\right\} = 0,$$

Si on multiplie cette équation par un facteur λ, et qu'on la traite comme son analogue du n°. 832, c'est-à-dire, qu'on intègre chacun de ses termes par parties, de manière à ce qu'il ne reste plus sous le signe $\int$ aucune différentielle des quantités $\omega, \omega', \ldots\ldots \Omega$, on parviendra aux résultats suivans: λ sera donné par l'équation

$$\lambda T - \frac{d(\lambda T')}{dx} + \frac{1}{dx}d\frac{d(\lambda T'')}{dx} - \text{etc.} = 0;$$

et pour déterminer Ω, on aura

$$\left[\lambda T' - \frac{1}{dx}d(\lambda T'') + \frac{1}{dx}d(\lambda T''') - \text{etc.}\right]\Omega$$
$$+ \left(\lambda T'' - \frac{1}{dx}d(\lambda T''') + \text{etc.}\right)d\Omega \ldots + \int\lambda(dx\delta v - dv\delta x) = 0;$$

en représentant, pour abréger, par $\delta x dv - \delta v dx$ la partie indépendante de δU. Les conclusions sont d'ailleurs les mêmes ici que dans le n°. 832.

835. Jusqu'à présent, les formules que nous avons considérées ne renfermoient qu'une variable indépendante: toutes les autres étoient supposées des fonctions de celle-là, et se trouvoient soumises à la même intégration; mais il peut exister des fonctions qui dépendent de deux ou d'un plus grand nombre de variables, et la théorie analytique des surfaces courbes en offre des exemples. On a alors trois variables, dont une est fonction des deux autres, qui sont considérées comme indépendantes; et si

l'on désigne la première par ζ, et les dernières par x et y, il faudra pour obtenir la variation que la fonction ζ reçoit par un changement arrivé dans la relation qu'elle a avec x et y, différentier en regardant x, y et ζ, comme absolument indépendans, et par conséquent, opérer comme s'il s'agissoit d'une fonction de trois variables. Ceci n'est, comme on voit, qu'une extension de ce qui a été dit n°. 815, et qu'on peut pousser jusqu'à tel nombre de variables qu'on voudra; c'est pourquoi nous nous bornerons au cas où la fonction proposée renferme seulement deux variables indépendantes.

Nous ferons dans des calculs qui vont suivre :

$$d\zeta = p\,dx + p_{,}dy.$$

$$dp = q\,dx + q_{,}dy, \quad dp_{,} = q_{,}dx + q_{,,}dy$$

$$dq = r\,dx + r_{,}dy \quad dq_{,} = r_{,}dx + r_{,,}dy, \quad dq_{,,} = r_{,,}dx + r_{,,,}dy$$

etc.

Cela posé, cherchons d'abord la variation des coefficiens différentiels p et $p_{,}$. Puisque $p = \frac{d\zeta}{dx}$, $p_{,} = \frac{d\zeta}{dy}$,

il viendra $\delta p = \delta\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)$, $\delta p_{,} = \delta\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)$;

différentiant ces fractions à la manière ordinaire, et changeant un d en δ, on aura

$$\delta p = \frac{dx\,\delta d\zeta - d\zeta\,\delta dx}{dx^2}, \qquad \delta p_{,} = \frac{dy\,\delta d\zeta - d\zeta\,\delta dy}{dy^2},$$

transposant ensuite le δ après le d, il viendra

$$\delta p = \frac{dx\,d\delta\zeta - d\zeta\,d\delta x}{dx^2}, \qquad \delta p_{,} = \frac{dy\,d\delta\zeta - d\zeta\,d\delta y}{dy^2},$$

ou
$$\delta p = \frac{d\delta\zeta - \frac{d\zeta}{dx}d\delta x}{dx} = \frac{d\delta\zeta - p\,d\delta x}{dx}$$

$$\delta p_{,} = \frac{d\delta\zeta - \frac{d\zeta}{dy}d\delta y}{dy} = \frac{d\delta\zeta - p_{,}d\delta y}{dy}.$$

Dans chacune de ces formules, il y a une des variables qui est

regardée comme constante, savoir : y dans la première, et x dans la seconde.

Passons maintenant aux coefficiens du second ordre, qui sont

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2}=q, \quad \frac{d^2\zeta}{dx\,dy}=q_{,}, \quad \frac{d^2\zeta}{dy^2}=q_{,,}$$

ou $$q=\frac{dp}{dx}, \quad q_{,}=\frac{dp}{dy}=\frac{dp_{,}}{dx}, \quad q_{,,}=\frac{dp_{,}}{dy};$$

il est facile de voir que de même qu'on a

$$\delta p=\delta\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)=\frac{d\delta\zeta-pd\delta x}{dx},$$

on doit avoir

$$\delta q=\delta\left(\frac{dp}{dx}\right)=\frac{d\delta p-qd\delta x}{dx}$$

$$\delta q_{,}=\delta\left(\frac{dp}{dy}\right)=\delta\left(\frac{dp_{,}}{dx}\right)=\frac{d\delta p-q_{,}d\delta y}{dy}=\frac{d\delta p_{,}-q_{,}d\delta x}{dx}$$

$$\delta q_{,,}=\delta\left(\frac{dp_{,}}{dy}\right) \quad \frac{d\delta p_{,}-q_{,,}d\delta y}{dy},$$

Si l'on veut chasser les différentielles $d\delta p$, $d\delta p_{,}$, il n'y qu'à différentier successivement par rapport à x et à y, les valeurs de δp, $\delta p_{,}$, trouvées précédemment, et on aura

$$\frac{d\delta p}{dx}=\frac{d^2\delta\zeta}{dx^2}-\frac{qd\delta x}{dx}-\frac{pd^2\delta x}{dx^2},$$

à cause de $q=\frac{dp}{dx}$. On tirera de là

$$\delta q=\frac{d^2\delta\zeta}{dx^2}-\frac{2qd\delta x}{dx}-\frac{pd^2\delta x}{dx^2},$$

et on parviendra de la même manière à

$$\delta q_{,}=\frac{d^2\delta\zeta}{dxdy}-\frac{q_{,}d\delta x}{dx}-\frac{q_{,}d\delta y}{dy}-\frac{pd^2\delta x}{dxdy},$$

si on emploie pour q, sa valeur $\frac{dp}{dy}$; mais si l'on fait usage de l'autre valeur, qui est $\frac{dp_{,}}{dx}$, on trouvera

$$\delta q_{,}=\frac{d^2\delta\zeta}{dxdy}-\frac{q_{,}d\delta x}{dx}-\frac{q_{,}d\delta y}{dy}-\frac{p_{,}d^2\delta y}{dxdy};$$

enfin on aura $\delta q_{,,} = \frac{d^2\delta\zeta}{dy^2} - \frac{2q_{,,}d\delta y}{dy} - \frac{p_{,}d^2\delta y}{dy^2}$.

L'examen des deux valeurs de $\delta q_{,}$, nous conduit à cette remarque importante : que les termes $\frac{d^2\delta x}{dxdy}$ et $\frac{d^2\delta y}{dxdy}$, ne doivent point entrer dans le calcul, sans quoi ces valeurs différeroient l'une de l'autre. Il est d'ailleurs aisé de voir qu'ils impliquent contradiction ; car x et y étant supposés indépendans l'un de l'autre, il s'en suit que δx ne doit point varier, en conséquence des changemens de y, ni δy, en conséquence de ceux de x : on doit donc avoir $\frac{d\delta x}{dy} = 0$ et $\frac{d\delta y}{dx} = 0$ ce qui donne $\frac{d^2\delta x}{dxdy} = 0$ et $\frac{d^2\delta y}{dxdy} = 0$, et alors les deux valeurs de $\delta q_{,}$ deviennent identiques.

On peut, en suivant les conséquences des raisonnemens précédens, arriver à l'expression de la variation d'un coefficient différentiel quelconque ; et on obtiendra la variation d'une fonction de $x, y, \zeta, p, p_{,}, q$, etc. dx, dy, en prenant la différentielle de cette fonction, en changeant un d en δ, et en mettant, au lieu de δp, $\delta p_{,}$, δq, etc. les valeurs trouvées ci-dessus.

836. Dans beaucoup de cas, on pourra supposer que l'une des quantités x, y, ζ, varie seule, ce qui simplifiera considérablement les résultats ; et il est aisé de voir que cela est permis ; puisque l'on considère les fonctions proposées comme renfermant trois variables indépendantes, et que par conséquent, on est libre d'en faire varier seulement une ou deux. Il est plus commode de faire varier celle qu'on regarde comme fonction des deux autres ; les résultats ont alors une forme plus symmétrique.

Supposons qu'on ait choisi ζ ; on aura

$$\delta p = \frac{d\delta\zeta}{dx}, \quad \delta p_{,} = \frac{d\delta\zeta}{dy},$$

$$\delta q = \frac{d^2\delta\zeta}{dx^2}, \quad \delta q_{,} = \frac{d^2\delta\zeta}{dxdy}, \quad \delta q_{,,} = \frac{d^2\delta\zeta}{dy^2};$$

et en général

$$\delta\left(\frac{d^{m+n}\zeta}{dx^m dy^n}\right) = \frac{d^{m+n}\delta\zeta}{dx^m dy^n}.$$

Si l'on a une fonction V, telle que sa différentielle soit

$$dV = L\,dx + M\,dy + N\,d\zeta + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$
$$+ P_{,}dp_{,} + Q_{,}dq_{,} + R_{,}dr_{,} + \text{etc.}$$
$$+ Q_{''}dq_{''} + R_{''}dr_{''} + \text{etc.}$$
$$+ R_{'''}dr_{'''} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

on en tirera

$$\delta V = N\delta\zeta + P\delta p + Q\delta q + R\,\delta r + \text{etc.}$$
$$+ P_{,}\delta p_{,} + Q_{,}\delta q_{,} + R_{,}\delta r_{,} + \text{etc.}$$
$$+ Q_{''}\delta q_{''} + R_{''}\delta r_{''} + \text{etc.}$$
$$+ R_{'''}\delta r_{'''} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

et en mettant, au lieu de δp, δq, etc. $\delta p_{,}$, $\delta q_{,}$, etc. leurs valeurs, après avoir fait $\delta\zeta = \omega$, on trouvera

$$\delta V = N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} + R\frac{d^3\omega}{dx^3} + \text{etc.}$$
$$+ P_{,}\frac{d\omega}{dx} + Q_{,}\frac{d^2\omega}{dx\,dy} + R_{,}\frac{d^3\omega}{dx^2dy} + \text{etc.}$$
$$+ Q_{''}\frac{d^2\omega}{dy^2} + R_{''}\frac{d^3\omega}{dx\,dy^2} + \text{etc.}$$
$$+ R_{'''}\frac{d^3\omega}{dy^3} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

837. Soit V une fonction de $x, y, \zeta, p, p_{,}, q$, etc. et proposons nous de trouver la variation de $\int\int V\,dx\,dy$, formule qui se rapporte à celles dont nous nous sommes occupés n°. 520. Des deux signes d'intégration dont cette fonction est affectée, l'un est relatif à x et l'autre à y, en sorte qu'on pourroit l'écrire ainsi: $\int dy \int V\,dx$; dans la première intégration à exécuter, y doit être regardé comme une constante, et dans la seconde, c'est x qu'il faut traiter comme telle.

Représentons

Représentons dV et δV comme ci-dessus, et nous aurons

$$\delta\iint V\,dx\,dy=\iint dx\,dy\,\delta V=\iint dx\,dy\left\{\begin{array}{rrrrrrr} N\omega+P\frac{d\omega}{dx}+Q\frac{d^2\omega}{dx^2}+R\frac{d^3\omega}{dx^3}+\text{etc.}\\ +P_{/}\frac{d\omega}{dy}+Q_{/}\frac{d^2\omega}{dx\,dy}+R_{/}\frac{d^3\omega}{dx^2\,dy}+\text{etc.}\\ +Q_{//}\frac{d^2\omega}{dy^2}+R_{//}\frac{d^3\omega}{dx\,dy^2}+\text{etc.}\\ +R_{///}\frac{d^3\omega}{dy^3}+\text{etc.}\\ +\text{etc.}\end{array}\right.$$

Il reste maintenant à intégrer cette formule autant qu'il sera possible, afin de délivrer ω de tous les signes d dont il est affecté.

Pour cela, il faut se rappeler que si l'on a $\int T\frac{dv}{dx}dx$, on trouvera, en intégrant par parties et en regardant x comme seule variable, $Tv-\int v\,dx\,\frac{dT}{dx}$; et par conséquent,

$$\iint T\frac{dv}{dx}dx\,dy=\int Tv\,dy-\iint v\,dx\,dy\frac{dT}{dx}:$$

on obtiendra de la même manière

$$\iint T\frac{dv}{dy}dx\,dy=\int Tv\,dx-\iint v\,dx\,dy\,\frac{dT}{dy}.$$

En appliquant ces formules aux termes contenus dans la fonction proposée, on aura:

$$\iint P\,dx\,dy\frac{d\omega}{dx}=\int P\,\omega\,dy-\iint\omega\,dx\,dy\,\frac{dP}{dx},$$

$$\iint P_{/}dx\,dy\frac{d\omega}{dy}=\int P_{/}\omega\,dx-\iint\omega\,dx\,dy\,\frac{dP_{/}}{dy},$$

$$\iint Q\,dx\,dy\,\frac{d^2\omega}{dx^2}=\iint Q\,dy\,\frac{d\left(\frac{d\omega}{dx}\right)}{dx}dx=\int Q\,dy\,\frac{d\omega}{dx}-\iint dx\,dy\frac{d\omega}{dx}\,\frac{dQ}{dx};$$

mais $\iint dx\,dy\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{dQ}{dx}=\iint dy\,\frac{dQ}{dx}\,\frac{d\omega}{dx}dx=\int\omega\,dy\frac{dQ}{dx}-\iint\omega\,dy\,dx\frac{d^2Q}{dx^2}$,

et par conséquent

$$\int\int Q\,dx\,dy\,\frac{d^2\omega}{dx^2}=\int Q dy\,\frac{d\omega}{dx}-\int\omega dy\,\frac{dQ}{dx}+\int\int\omega dx\,dy\,\frac{d^2Q}{dx^2},$$

Ensuite

$$\int\int Q_1 dx\,dy\,\frac{d^2\omega}{dx\,dy}=\int Q_1 dx\,\frac{d\omega}{dx}-\int\int dx\,dy\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{dQ_1}{dy},$$

ou $$\int\int Q_1 dx dy\,\frac{d^2\omega}{dx dy}=\int Q_1 dx\,\frac{d\omega}{dx}-\int\omega dy\,\frac{dQ_1}{dy}+\int\int\omega\,dx\,dy\,\frac{d^2Q_1}{dx dy};$$

or $$\int Q_1 dx\,\frac{d\omega}{dx}=Q_1\omega-\int\omega\,dx\,\frac{dQ_1}{dx};$$

donc enfin

$$\int\int Q_1 dx\,dy\,\frac{d^2\omega}{dx dy}=Q_1\omega-\int\omega dx\,\frac{dQ_1}{dx}-\int\omega dy\,\frac{dQ_1}{dy}+\int\int\omega\,dx\,dy\,\frac{d^2Q_1}{dx dy};$$

de même

$$\int\int Q_{11} dx\,dy\,\frac{d^2\omega}{dy^2}=\int Q_{11} dx\,\frac{d\omega}{dy}-\int\omega dx\,\frac{dQ_{11}}{dy}+\int\int\omega\,dx\,dy\,\frac{d^2Q_{11}}{dy^2}.$$

En continuant ces opérations, on trouvera

$$\int\int R\,dx\,dy\,\frac{d^3\omega}{dx^3}=\int R\,dy\,\frac{d^2\omega}{dx^2}-\int\int dx dy\,\frac{d^2\omega}{dx^2}\,\frac{dR}{dx};$$

mais

$$\int\int dx\,dy\,\frac{d^2\omega}{dx^2}\,\frac{dR}{dx}=\int dy\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{dR}{dx}-\int\int dx\,dy\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{d^2R}{dx^2},$$

et $$\int\int dx\,dy\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{d^2R}{dx^2}=\int\omega\,dy\,\frac{d^2R}{dx^2}-\int\int\omega\,dx dy\,\frac{d^3R}{dx^3},$$

d'où il suit que

$$\int\int R dx dy\,\frac{d^3\omega}{dx^3}=\int R dy\,\frac{d^2\omega}{dx^2}-\int dy\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{dR}{dx}+\int\omega dy\,\frac{d^2R}{dx^2}-\int\int\omega dx dy\,\frac{d^3R}{dx^3};$$

puis $$\int\int R_1 dx\,dy\,\frac{d^3\omega}{dx^2 dy}=\int R_1 dx\,\frac{d^2\omega}{dx^2}-\int\int dx\,dy\,\frac{d^2\omega}{dx^2}\,\frac{dR_1}{dy},$$

$$\int\int dx\,dy\,\frac{d^2\omega}{dx^2}\,\frac{dR_1}{dy}=\int dy\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{dR_1}{dy}-\int\int dx\,dy\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{d^2R_1}{dy dx},$$

et $$\iint dx\,dy\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{d^{n}R_{,}}{dydx}=\int\omega\,dy\,\frac{d^{n}R_{,}}{dydx}-\iint\omega\,dx\,dy\,\frac{d^{2}R'}{dydx^{n}};$$

donc $$\iint R_{,}dx\,dy\,\frac{d^{3}\omega}{dx^{2}dy}$$

$$=\int R_{,}dx\,\frac{d^{n}\omega}{dx^{n}}-\int dy\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{dR_{,}}{dy}+\int\omega\,dy\,\frac{d^{n}R_{,}}{dydx}-\iint\omega\,dx\,dy\,\frac{d^{2}R_{,}}{dydx^{n}};$$

mais $$\int R_{,}dx\,\frac{d^{n}\omega}{dx^{n}}=R_{,}\,\frac{d\omega}{dx}-\int dx\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{dR_{,}}{dx},$$

et $$\int dx\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{dR_{,}}{dx}=\omega\,\frac{dR_{,}}{dx}-\int\omega\,dx\,\frac{d^{n}R}{dx^{n}};$$

donc enfin

$$\iint R_{,}dxdy\,\frac{d^{3}\omega}{dx^{n}dy}=R_{,}\,\frac{d\omega}{dx}-\omega\,\frac{dR_{,}}{dx}+\int\omega dx\,\frac{d^{n}R_{,}}{dx^{n}}-\int dy\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{dR_{,}}{dy}+\int\omega dy\,\frac{d^{n}R_{,}}{dydx}$$
$$-\iint\omega dxdy\,\frac{d^{3}R_{,}}{dydx^{n}}.$$

Le terme $\iint R_{,,}dx\,dy\,\frac{d^{3}\omega}{dxdy}$ se déduit du précédent, en y changeant $R_{,}$ en $R_{,,}$, et x en y : on a donc

$$\iint dxdy\,R_{,,}\,\frac{d^{3}\omega}{dxdy^{n}}=R_{,,}\,\frac{d\omega}{dy}-\omega\,\frac{dR_{,,}}{dy}+\int\omega dy\,\frac{d^{n}R_{,,}}{dy^{n}}-\int dx\,\frac{d\omega}{dy}\,\frac{dR_{,,}}{dx}+\int\omega dx\,\frac{d^{n}R_{,,}}{dxdy}$$
$$-\iint\omega dx\,dy\,\frac{d^{3}R_{,,}}{dxdy^{n}};$$

il en sera de même du terme $\iint R_{,,,}dx\,dy\,\frac{d^{3}\omega}{dy^{3}}$, qu'on tirera du développement de $\iint R\,dx\,dy\,\frac{d^{3}\omega}{dx^{3}}$, et pour lequel on aura

$$\iint R_{,,,}dxdy\,\frac{d^{3}\omega}{dy^{3}}=\int R_{,,,}dx\,\frac{d^{n}\omega}{dy^{n}}-\int dx\,\frac{d\omega}{dy}\,\frac{dR_{,,,}}{dy}+\int\omega dx\,\frac{d^{n}R_{,,,}}{dy^{n}}-\iint\omega dxdy\,\frac{d^{3}R_{,,,}}{dy^{3}}$$

On peut pousser ces intégrations partielles aussi loin qu'on voudra, et en ordonnant, par rapport à ω, les résultats qu'on obtiendra, on trouvera le développement qui suit :

$$\delta\iint V\,dx\,dy = \iint \omega\,dx\,dy\left\{N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots\ldots \text{etc} \right.$$
$$\left. - \frac{dP_{,}}{dy} + \frac{d^2Q_{,}}{dxdy} - \frac{d^3R_{,}}{dx^2dy} \ldots\ldots \text{etc.} \right.$$
$$\left. + \frac{d^2Q''}{dy^2} - \frac{d^3R_{,,}}{dxdy^2} \ldots\ldots \text{etc.} \right.$$
$$\left. - \frac{d^3R_{,,,}}{dy^3} \ldots\ldots \text{etc.} \right\}$$

$$+ \int \omega\,dy\left\{P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} \ldots \text{etc.}\right\} + \int \omega dx\left\{P_{,} - \frac{dQ_{,,}}{dy} + \frac{d^2R_{,,,}}{dy^2} \ldots\ldots \text{etc.}\right\}$$
$$\left. - \frac{dQ_{,}}{dy} + \frac{d^2R_{,}}{dxdy} \right\} \qquad \left. - \frac{dQ_{,}}{dx} + \frac{d^2R_{,,}}{dxdy} \right\}$$
$$\left. + \frac{d^2R_{,,}}{dy^2} \right\} \qquad \left. + \frac{d^2R_{,}}{dx^2} \right\}$$

$$+ \int dy\,\frac{d\omega}{dx}\left\{Q - \frac{dR}{dx} \ldots\ldots\ldots \text{etc.}\right\} + \int dx\,\frac{d\omega}{dy}\left\{Q_{,,} - \frac{dR_{,,,}}{dy} \ldots\ldots \text{etc.}\right\}$$
$$\left. - \frac{dR_{,}}{dy} \right\} \qquad \left. - \frac{dR_{,,}}{dx} \right\}$$

$$+ \int dy\,\frac{d^2\omega}{dx^2}\left\{R - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\right\} + \int dx\,\frac{d^2\omega}{dy^2}\left\{R_{,,} - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\right\}$$
$$\text{etc.}$$

$$+ \qquad \omega\left\{Q' - \frac{dR_{,}}{dx} + \text{etc.} \ldots\ldots\right\} + \qquad \frac{d\omega}{dx}\left\{R_{,} - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\right\}$$
$$\left. - \frac{dR_{,,}}{dy} \right\}$$

$$+ \qquad \frac{d\omega}{dy}\left\{R_{,,} - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\right\}$$
$$\text{etc.}$$

Cette expression offre trois sortes de termes ; les premiers affectés de deux signes d'intégration, les seconds soumis à un seul, relatif à l'une des variables x ou y, et enfin des termes tout à fait intégrés. D'après ce qu'on a dit, il est aisé de voir qu'en égalant à zéro les deux premières classes de termes, on aura les équations de condition qui doivent être satisfaites, pour qu'une fonction quelconque à trois variables, renfermant des différences partielles, soit intégrable; et la partie délivrée de tous les signes d'intégration, sera la variation de l'intégrale proposée.

838. Toutes les applications qu'on a faites jusqu'à présent du calcul des variations, ont eu pour objet des formules intégrales *indéterminées:* j'appelle ainsi les formules générales, telles que $\int y dx$, dans laquelle on n'assigne aucune forme particulière à la fonction y. On s'est proposé de trouver la relation qui devoit exister entre y et x, pour que ces formules prises entre des limites déterminées devinssent des *maxima* ou des *minima;* mais avant de passer à ces applications, il est à propos de rappeler ici ce qui a été dit dans le n°. 476, sur la nature des intégrales et sur leur division en *intégrales indéfinies* et en *intégrales définies.* Il ne peut être ici question que des dernières, qui sont les seules susceptibles d'une valeur fixe, et par conséquent, lorsque nous considérons la variation d'une formule intégrale, cette variation sera nécessairement assujettie aux limites assignées à cette intégrale, limites qui sont ou fixes ou variables, suivant la nature de la question proposée.

Pour éclaircir ceci, nous observerons que la formule $\int V dx$ peut toujours représenter la longueur de l'arc d'une courbe, ou la surface de cette courbe; alors si l'on demande la valeur de cette intégrale depuis un point fixe, pris dans le plan de la courbe proposée, jusqu'à un autre qui soit également fixe, et que l'on fasse varier y et x, indépendamment l'un de l'autre, on change momentanément la relation qui existoit entre ces quantités, et par conséquent, la nature de la courbe à laquelle elles appartiennent; mais puisque les points extrêmes sont fixes, il n'existe aucune variation pour eux, et toutes les courbes consécutives que l'on pourroit envisager, doivent passer par ces points (*). S'il s'agissoit au contraire d'une formule intégrale relative à la courbe AB, *fig.* 38, comprise entre deux autres courbes données AA' et BB', il est évident

FIG. 38.

(*) Les variations de x et de y étant regardées comme indépendantes les unes des autres, il s'ensuit nécessairement que celles d'un point n'ont aucune influence sur celles du suivant; et que par conséquent les courbes consécutives dont nous parlons ici ne sont assujetties à aucunes loix et peuvent être discontinues. Cette remarque sert pour montrer comment les méthodes employées par les Bernoulli et par Euler, pour résoudre le problême des isopérimètres auquel s'applique la méthode des variations, se rapprochent de cette méthode.

qu'en faisant varier l'intégrale qui exprime cette longueur, ses limites varient aussi; car en passant de AB à $A'B'$, les extrémités A et B se meuvent, et les abscisses qui répondent au commencement et à la fin de l'intégrale, après qu'elle a varié, ne sont pas celles qui convenoient à son état primitif.

Les développemens que nous avons donnés des variations que reçoivent les formules dans lesquelles il entre des intégrales indéterminées, offrent des moyens d'exprimer ces circonstances suivant la nature des questions qu'on peut avoir à traiter. En effet, ces développemens renferment deux sortes de termes, les uns sont affectés du signe $\int$, et les autres en sont délivrés; de là résulte une distinction importante à faire entre les premiers et les seconds: ceux-ci se rapportent entièrement à des points déterminés de l'intégrale proposée; et les autres représentent la somme de toutes les variations particulières qui affectent séparément chacun des élémens de l'intégrale, compris entre ces points.

Pour bien entendre ceci, il faut se rappeler qu'une intégrale peut être envisagée (n°. 470), comme la limite des sommes d'un nombre indéfini d'élémens, et par conséquent, si chacun d'eux varie, le résultat sera égal à la somme de ces variations partielles. Or des deux parties que contient le développement des variations, ce ne peut être que celle qui est restée sous le signe $\int$, qui représente cette somme des variations particulières à chaque point; car on ne sauroit l'obtenir qu'après avoir établi entre les variables une relation qui permette d'intégrer, tandis que la partie délivrée du signe $\int$ est indépendante de toute relation de cette espèce, et ne peut par conséquent avoir rapport qu'à des points isolés.

839. Cela posé, toutes les expressions que nous avons trouvées dans les articles précédens pouvant être mises sous cette forme: $\delta\varphi = \downarrow + \int\pi$, si on suppose que $x=a$, $y=b$, etc. soient les valeurs qui répondent à l'origine de l'intégrale, c'est-à-dire, au point où elle est nulle, $x=a'$, $y=b'$, etc. celles qui répondent à la fin, c'est-à-dire, au point où elle est complète; qu'on renferme entre des parenthèses ( ) les quantités relatives au premier point et entre des crochets [ ] celles qui se rapportent au dernier, on aura pour l'un $(\delta\varphi)=(\downarrow)$, pour l'autre $[\delta\varphi]=[\downarrow]+[\int\pi]$, et la

variation prise dans toute l'étendue de l'intégrale sera exprimée par

$$[\delta\varphi]-(\delta\varphi)=[\downarrow]-(\downarrow)+[\int\pi].$$

Il est évident que les termes $(\downarrow)$ et $[\downarrow]$, qui ne contiennent que les quantités a', b', etc. et leurs variations, s'anéantiront d'eux-mêmes lorsque ces quantités seront invariables, ou, ce qui revient au même, lorsque l'intégrale sera prise entre des limites constantes. On a vu, dans le n°. 819, que

$$\begin{aligned}\delta\int U=&(N-dP+d^2Q+\text{etc.})\delta x+(n-dp+d^2q-\text{etc.})\delta y\\&+(P-dQ+\text{etc.})d\delta x\qquad+(p-dq+\text{etc.})d\delta y+\text{etc.}\\&+\int(M-dN+d^2P-d^3Q+\text{etc.})\delta x+\int(m-dn+d^2p-d^3q+\text{etc.})\delta y;\end{aligned}$$

il s'ensuivra, en ayant égard à ce qui vient d'être dit, que si $\delta\int U$ doit être pris dans les limites indiquées plus haut, on aura

$$\begin{aligned}[\delta\int U]-(\delta\int U)=&\left\{\begin{array}{l}[N-dP+d^2Q-\text{etc.}]\delta a'+[n-dp+d^2q-\text{etc.}]\delta b'\\-(N-dP+d^2Q-\text{etc.})\delta a-(n-dp+d^2q-\text{etc.})\delta b\end{array}\right.\\&+\left\{\begin{array}{l}+[P-dQ+\text{etc.}]d\delta a'+[p-dq+\text{etc.}]d\delta b'+\text{etc.}\\-(P-dQ+\text{etc.})d\delta a-(p-dq+\text{etc.})d\delta b-\text{etc.}\end{array}\right.\\&+\left[\int\left\{M-dN+d^2P-d^3Q+\text{etc.}\right\}\delta x+\int\left\{m-dn+d^2p-d^3q+\text{etc.}\right\}\delta y\right].\end{aligned}$$

Toute la première partie de cette expression se réduira à zéro, si δa, $\delta a'$, etc. δb, $\delta b'$, ec. sont nuls; dans le cas contraire, s'il existe des conditions entre ces variations, il faudra y avoir égard, en introduisant dans l'équation précédente les relations données par la nature de la question.

840. Il est important de remarquer que cette expression suppose que l'origine des variables x, y, etc. soit fixe, et que les quantités a, b, etc. a', b', etc. n'entrent point dans la fonction U; car si le contraire avoit lieu, la variation ne seroit point complète, puisqu'en la calculant, on n'auroit pas eu égard à tous les termes qui doivent en faire partie.

Occupons-nous d'abord du cas où la quantité U renfermeroit a, b, etc. a', b', etc. il est évident qu'il faudroit ajouter à l'expression de δU du n°. 819 les termes suivans :

$$\begin{aligned}&A\,\delta a+B\,\delta b+\text{etc.}+A'\,\delta a'+B'\,\delta b'+\text{etc.}\\&+A_1\,d\delta a+B_1\,d\delta b+\text{etc.}+A'_1\,d\delta a'+B'_1\,d\,\delta b'+\text{etc.}\end{aligned}$$

et les variations δa, δb, etc. $\delta a'$, $\delta b'$, etc. étant indépendantes des variables x, y, etc. passeront hors du signe $\int$, tandis que A, A', etc. $A_,$, $A'_,$, etc. qui renferment ces variables et leurs différentielles, y resteront soumises; il faudra donc introduire dans la première partie de la variation les termes

$$\begin{gathered}\delta a \int A + \delta b \int B + \text{etc.} \qquad \delta a' \int A' + \delta b' \int B' + \text{etc.} \\ + d\delta a \int A_, + d\delta b \int B_, + \text{etc.} + d\delta a' \int A'_, + d\delta b' \int B'_, + \text{etc.}\end{gathered}$$

en ayant soin de prendre les intégrales entre les mêmes limites que la proposée.

841. Passons maintenant au cas où l'origine des coordonnées est supposée variable; concevons qu'on ait fait $x = x' - a, y = y' - b$, etc. et que l'origine des nouvelles coordonnées x', y', etc. soit fixe, mais que les quantités a, b, etc. soient variables; il est évident qu'on aura

$$\delta x = \delta x' - \delta a, \ \delta y = \delta y' - \delta b, \text{ etc.}$$

quant aux différentielles dx, etc. dy, etc. elles n'éprouvent aucune variation par rapport à a ou à b, puisqu'elles ne dépendent pas de ces quantités. Cela posé, substituant les valeurs qu'on vient de trouver dans δU (n°. 819), on aura

$$\begin{gathered}M(\delta x' - \delta a) + N\delta dx' + \text{etc.} \\ + m(\delta y' - \delta b) + n\delta dy' + \text{etc.}\end{gathered}$$

d'où il suit qu'il faudra joindre à la variation, trouvée dans le n°. cité, les deux termes $-\delta a \int M$, $-\delta b \int m$. Si maintenant on fait a, b, etc. égaux à zéro, sans néanmoins annuller δa, δb, etc. alors x' se changera en x, etc. et les fonctions M, m, seront les mêmes que celles du n°. cité. Il est aisé de voir pourquoi on n'a point annullé les variations δa, δb, etc. car on peut concevoir δa, δb, etc. comme le premier degré de grandeur de a, b, etc. on se convaincra d'ailleurs aisément que si l'origine des abscisses et celle des ordonnées ont un mouvement, on peut le transporter aux abscisses et aux ordonnées elles-mêmes, pourvu que ce soit avec un signe contraire, et écrire par conséquent $\delta x - \delta a$ et $\delta y - \delta b$, au lieu de δx et de δy. Les intégrales $\int M$ et $\int m$ doivent être prises dans les mêmes limites que la proposée.

842.

Application du Calcul des Variations à la recherche des *maxima* et des *minima*.

842. Ce sont des questions de *maxima* et de *minima*, qui ont donné naissance au Calcul des variations, et qui en forment les principales applications : on ne s'est guères occupé que des formules intégrales indéterminées; mais nous chercherons d'abord le *maximum* d'une fonction différentielle.

Nous prendrons pour exemple le problême suivant: *trouver la courbe dans laquelle la tangente, menée par le point dont l'abscisse est* x, *prolongée de part et d'autre du point de contact, jusqu'à la rencontre des ordonnées correspondantes aux abscisses* m *et* n, *détermine sur ces ordonnées des parties dont le produit soit un* maximum *ou un* minimum.

L'équation de la tangente étant en général

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),$$

en désignant par X et Y les coordonnées de la droite et par x et y celle de la courbe (n°. 238), les valeurs de Y qu'on obtiendra en faisant successivement $X=m$ et $X=n$, donneront la longueur de l'ordonnée, prise depuis l'axe des x, jusqu'à la tangente, et on trouvera pour ces longueurs

$$y+\frac{dy}{dx}(m-x), \qquad y+\frac{dy}{dx}(n-x);$$

c'est le produit de ces fonctions qui doit être un *maximum* ou un *minimum*. On ne fera varier dans ce produit que le coefficient $\frac{dy}{dx}$; en le représentant par p, on aura la fonction

$$[y+p(m-x)][y+p(n-x)],$$

dont la variation sera

$$[y+p(m-x)](n-x)\delta p+[y+p(n-x)](m-x)\delta p,$$

et il est évident qu'il faudra égaler cette variation à zéro pour obtenir l'équation du *maximum* ou du *minimum*; car en considérant la fonction proposée comme dépendante de p, on appliquera au cas actuel les raisonnemens du n°. 149 : en divisant donc par δp, il viendra

$$[y+p(m-x)](n-x)+[y+p(n-x)](m-x)=0,$$

d'où on tirera

$$\frac{dy}{y} = \frac{(2x-m-n)\,dx}{2(m-x)(n-x)} = \frac{dx}{2(x-m)} + \frac{dx}{2(x-n)},$$

et par conséquent $y^2 = C(x-m)(x-n)$.

Il est visible que cette équation appartient à l'ellipse ou à l'hyperbole, selon que C est négatif ou positif; on trouvera facilement que le premier axe est égal à $m-n$, et le second à $(m-n)\sqrt{C}$.

Pour s'assurer s'il y a *maximum* ou *minimum*, il faut avoir égard aux termes ultérieurs du développement de la variation, développement qui est semblable à celui de la différence, et dont le second terme se déduira par conséquent de la différentielle seconde de la fonction proposée, prise par rapport à p seul; on aura de cette manière $(m-x)(n-x)\delta p^2$,
d'où il suit qu'il y a *maximum* pour toutes les valeurs de x, qui rendent les deux quantités $m-x$ et $n-x$, de signes différens, et par conséquent la fonction ci-dessus négative: les autres valeurs de x répondront au *minimum*.

Ceci nous fait voir que dans l'ellipse, ou dans l'hyperbole la tangente d'un point quelconque coupe sur les perpendiculaires élevées aux extrémités du premier axe, des parties AS et BT, *fig.* 39, dont le produit est un *maximum* ou un *minimum*, par rapport à tous ceux qui résulteroient des parties déterminées par des lignes menées par le point M, dans une direction autre que celle de la tangente TS.

FIG. 39.

Lorsque dans $[y+p(m-x)][y+p(n-x)]$, on met pour p sa valeur tirée de l'équation différentielle obtenue plus haut, et qu'on y substitue ensuite celle de y que donne l'intégrale, ce produit se réduit à $\frac{C(m-n)^2}{4}$, demeure par conséquent le même dans tous les points de la courbe, et il en résulte que la quantité $AS \times BT$ est par-tout égale au quarré de la moitié du second axe.

Quand on considère une fonction différentielle d'un ordre supérieur au premier, il faut d'abord la réduire à ne renfermer que des coefficiens différentiels, $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, etc. on peut ensuite chercher les

maxima et les *minima* par rapport à chacun d'eux en particulier, en égalant successivement à zéro les variations que leurs changemens respectifs apportent dans la fonction proposée, et l'on obtiendra en général un nombre de solutions égal à celui des coefficiens p, q, etc. compris dans cette fonction.

843. L'application vraiment spéciale du Calcul des variations a pour objet les *maxima* et les *minima* des formules intégrales indéterminées; elle est fondée sur les mêmes principes que la théorie générale des *maxima* et des *minima* des fonctions déterminées, exposée dans le n°. 155. En effet, si on représente dx, dy,..d^nx, etc. par x_1, y_1,.....x_n, etc. le résultat de la substitution de

$$x+\delta x,\quad y+\delta y,\quad x_1+\delta x_1,\ldots.x_n+\delta x_n,\ \text{etc.}$$

dans une fonction quelconque de x, y, dx, dy, d^nx, etc. pourra s'ordonner comme celui de la substitution de

$$x+dx,\quad y+dy,\quad x_1+dx_1,\quad y_1+dy_1,\ldots.x_n+dx_n,\ \text{etc.}$$

ou comme le développement de la fonction d'un nombre quelconque de variables, rapporté dans le n°. 39; c'est-à-dire, qu'en écrivant δ au lieu de d, et désignant par u la fonction proposée, on aura

$$u+\frac{\delta u}{1}+\frac{\delta^2 u}{1.2}+\frac{\delta^3 u}{1.2.3}+\text{etc.}$$

δu ne contenant que des termes dans lesquels δx, δy,....., δx_1, δy_1,...δx_n, etc. ne montent qu'au premier degré, et qui pourront par conséquent changer de signes, devra s'anéantir lors du *maximum* ou du *minimum*, en vertu des articles rappelés ci-dessus: on aura donc pour l'un et l'autre cas $\delta u=0$. Maintenant si $u=\int U$, il viendra $\delta U=0$, à cause de $\delta u=\int \delta U$; et comme le développement de $\int \delta U$ est composé de deux parties, l'une de la forme

$$A\delta x+B\delta y\ldots.+A'd\delta x+B'd\delta y+\text{etc.}$$

l'autre de la forme $\int(\varphi\delta x+\chi\delta y+.....)$,

qu'on ne sauroit comparer entr'elles, puisque la dernière n'est point intégrable tant que δx et δy conservent l'indépendance qu'exige la généralité du calcul, on ne peut faire évanouir ce développement qu'en égalant séparément à zéro, dans l'une et l'autre de ses parties, es quantités qui multiplient les variations indépendantes. D'après ces

principes la fonction soumise au signe $\int$ donne les équations indéterminées $\varphi = 0$, $\chi = 0$, etc.
et quant à la fonction délivrée de ce signe, il faut égaler aussi à zéro le coefficient de chacune des variations qui restent indépendantes après qu'on a eu égard aux relations qui résultent des conditions relatives aux limites de u, en observant que les variations

$$d\delta x, \quad d^2\delta x, \ldots\ldots d\delta y, \quad d^2\delta y \ldots\ldots$$

ne sont point liées en général avec δx, δy, etc. Les équations qu'on en tirera appartenant à des points particuliers seront déterminées.

Pour compléter la théorie des *maxima* et des *minima* des formules intégrales indéterminées, il reste à assigner les caractères auxquels on peut distinguer le *maximum* du *minimum*, et il est aisé de voir qu'ici, comme dans le cas ordinaire, ces caractères dépendent en général de l'examen des termes du second ordre, dans le développement de la valeur consécutive à u, mais en prenant, comme ci-dessus, ce développement par rapport à la caractéristique δ. Cependant, avant de nous livrer à cette recherche, qui par elle-même est assez délicate, nous croyons devoir éclaircir ce qui précède par quelques exemples.

844. Soit d'abord $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$; en prenant la variation, on aura

$$\delta\left(\sqrt{dx^2+dy^2}\right) = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}};$$

comparant cette expression avec celle de δU (n°. 819), et faisant $\sqrt{dx^2+dy^2} = ds$, on trouvera

$$M = 0, \quad N = \frac{dx}{ds}, \quad m = 0, \quad n = \frac{dy}{ds},$$

et par conséquent

$$\delta\int U = \frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y - \int d\frac{dx}{ds}.\delta x - \int d\frac{dy}{ds}.\delta y.$$

En égalant à zéro les deux termes affectés du signe $\int$, on ne trouvera que cette équation $dx\,d^2y - dy\,d^2x$, qui revient à $\frac{dy}{dx} = 0$, et dont l'intégrale est par conséquent $y = Cx + C'$.

Si l'intégrale $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ doit être prise entre les limites

$$x = a, \quad y = b, \quad x = a', \quad y = b',$$

a', et b', étant des quantités invariables, la partie de la variation délivrée du signe $\int$ s'anéantit d'elle-même à cause de

$$\delta a = 0, \quad \delta b = 0, \quad \delta a' = 0, \quad \delta b' = 0,$$

et les constantes C et C' doivent être déterminées de manière qu'en faisant successivement $x = a$, $x = a'$, on ait $y = b$, $y = b'$.

La question que nous venons de résoudre, rapportée à la Géométrie, a pour objet de trouver la ligne la plus courte qu'on puisse mener entre deux points pris sur un plan, et notre résultat nous a conduits à l'équation d'une ligne droite, ainsi que cela devoit arriver.

Si le premier point étoit fixe, et que le dernier fût variable, on auroit seulement δa, δb, égaux à zéro, et il resteroit l'équation $da'\delta a' + db'\delta b' = 0$. Pour y satisfaire, en supposant que le dernier point doive se trouver sur une courbe ayant pour équation $dy' = \beta dx'$, il faudra qu'on ait $\delta b' = \beta \delta a'$; substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouvera $da' + \beta db' = 0$, et par conséquent $\frac{db'}{da'} = -\frac{1}{\beta}$, ce qui nous apprend que la droite cherchée doit couper à angles droits la courbe proposée. Il faudra donc déterminer les constantes C et C' par les deux conditions suivantes; 1°. que la droite proposée passe par le point dont les coordonnées sont a et b; 2°. qu'elle soit perpendiculaire à la courbe donnée par l'équation $dy' = \beta dx'$.

Satisfaire à ces conditions, c'est résoudre des problêmes qui n'entrent pas dans notre sujet, mais nous devons faire remarquer l'avantage que procurent les équations déterminées. Quoique l'équation $y = Cx + C'$ appartienne à la ligne qui est la plus courte entre deux points quelconques, il est évident que lorsque ces points ne sont pas déterminés, ainsi qu'il arrive dans la dernière hypothèse, on peut tirer une infinité de lignes droites qui, à la vérité, sont plus courtes que les lignes d'une autre nature, menées par les mêmes points, mais qui étant inégales entr'elles, doivent donner lieu à un *minimum* relatif. Le caractère qui convient à ce *minimum* ne sauroit être déduit de l'équation indéterminée, et l'idée qui se présente la première pour le trouver, seroit de chercher à exprimer la valeur

de l'intégrale $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ en fonction des constantes C et C', ce qu'on pourroit faire, en prenant la valeur de x et de y, à l'aide de l'équation de la courbe donnée et de celle de la plus courte ligne; différentiant ensuite le résultat de cette substitution, on auroit les valeurs de C et C' qui conviennent au *maximum* ou au *minimum* cherchés : mais les équations déterminées présentent un chemin bien plus court pour arriver au résultat, puisqu'elles font connoître immédiatement quelle est la condition à laquelle il faut satisfaire pour l'obtenir.

845. Proposons-nous pour second exemple $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$; nous aurons $$\delta\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\frac{dx\,d\delta x+dy\,d\delta y+dz\,d\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Soit fait pour abréger, $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=ds$; en comparant aux formules du n°. 822, il viendra

$$M=0,\quad N=\frac{dx}{ds},\quad m=0,\quad n=\frac{dy}{ds},\quad \mu=0,\quad \nu=\frac{dz}{ds},$$

et si on regarde les trois variables x, y, z, comme indépendantes, on trouvera, en égalant séparément à zéro les multiplicateurs des variations δx, δy, δz, les trois équations

$$d\frac{dx}{ds}=0,\qquad d\frac{dy}{ds}=0,\qquad d\frac{dz}{ds}=0,$$

dont deux suffiront pour déterminer la ligne droite qui résout la question proposée, savoir : celle de trouver la plus courte ligne qu'on puisse mener entre deux points de l'espace; mais si on veut que cette ligne soit toute entière sur une surface courbe, ayant pour équation $dz=\alpha\,dx+\beta\,dy$, il faudra que cette relation ait perpétuellement lieu entre les coordonnées x, y, et z, quelques variations qu'elles subissent d'ailleurs. On aura donc, en vertu de la remarque du n°. 833, $\delta z=\alpha\,\delta x+\beta\,\delta y$; en substituant dans la variation on trouvera :

$$\left(\frac{dx}{ds}+\alpha\frac{dz}{ds}\right)d\,\delta x+\left(\frac{dy}{ds}+\beta\frac{dz}{ds}\right)d\,\delta y$$

et les formules du n°. 819, donneront immédiatement

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\alpha\,d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0,\quad d\left(\frac{dy}{ds}\right)+\beta\,d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

Ces deux équations se réduisent à une seule, ainsi qu'on l'a fait voir n°. 824, et l'on peut encore s'en assurer en les ajoutant ensemble, après avoir multiplié la première par $2\frac{dx}{ds}$, et la seconde par $2\frac{dy}{ds}$, car on a alors

$$2\frac{dx}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right)+2\frac{dy}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)+2\frac{(\alpha dx+\beta dy)}{ds}d\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)=0$$

ou, en mettant $d\zeta$ pour $\alpha dx+\beta dy$ et en intégrant,

$$\frac{dx^2+dy^2+d\zeta^2}{ds^2}=C=1;$$

équation identique. Il suffira donc d'employer l'une quelconque de celles que l'on vient de trouver ; lorsque l'on voudra l'appliquer à une surface courbe en particulier, on mettra, au lieu de α, sa valeur en x, y, tirée de l'équation de cette surface, ainsi que celle de $d\zeta$; le résultat étant différentiel du second ordre, l'intégration introduira deux constantes arbitraires, qu'il faudra déterminer pour satisfaire aux conditions des points extrêmes et dont la valeur s'obtiendra en assujettissant la ligne cherchée à passer par ces points, s'ils sont fixes; mais s'il s'agissoit de trouver la plus courte ligne menée d'un point fixe à une courbe donnée, il faudroit avoir égard à l'équation du dernier point, qui est

$$\left(\frac{da'+\alpha d\zeta'}{ds'}\right)\delta a'+\left(\frac{db'+\beta d\zeta'}{ds'}\right)\delta b'=0.$$

Soit $dy'=\gamma dx'$ l'équation de projection en x, y, de la courbe donnée ; on aura $\delta b'=\gamma\delta a'$, et par conséquent,

$$(\delta a'+\alpha d\zeta')+(db'+\beta d\zeta')\gamma=0;$$

ce qui fait voir que la courbe résultante de l'équation indéterminée doit couper la courbe donnée à angles droits ; s' et ζ' désignent ici ce que deviennent s et ζ lorsqu'on met a' et b' au lieu de x et y, dans l'équation de la surface proposée.

Enfin, s'il s'agissoit de trouver la plus courte ligne qu'on puisse mener entre deux courbes, il faudroit de plus avoir égard à la variation du premier point; et comme elle fournit une équation entièrement semblable à celle du dernier, on en conclura que la ligne cherchée doit être perpendiculaire à la fois aux deux courbes données.

846. Cherchons quelle doit être la relation entre les variables x et y, pour que la formule $\int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2(y-K)}}$ soit un *minimum* (*) ; on aura $\delta U = \delta\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2(y-K)}}\right)$, et si on fait pour abréger

$$\sqrt{2(y-K)} = u, \qquad \sqrt{dx^2+dy^2} = ds,$$

il viendra

$$\delta U = \delta\left(\frac{ds}{u}\right) = \frac{-ds\,\delta y}{u^3} + \frac{dx\,\delta dx}{u\,ds} + \frac{dy\,\delta dy}{u\,ds},$$

et par conséquent

$$M = 0 \quad , \quad N = \frac{dx}{u\,ds} \quad (\text{n°. 819}),$$

$$m = -\frac{ds}{u^3}, \qquad n = \frac{dy}{u\,ds}.$$

La partie de la variation affectée du signe $\int$ donnera d'abord $dN = 0$, $m - dn = 0$; l'une de ces équations suffit pour déterminer la courbe : nous prendrons la première parce qu'elle est la plus simple, et comme elle donne $N = C$, nous en conclurons

$$\frac{dx}{u\,ds} = C, \quad \text{ou } \frac{dx}{ds} = Cu = C\sqrt{2(y-K)},$$

d'où on tire $dx = \frac{Cdy\sqrt{2(y-K)}}{\sqrt{1-2C^2(y-K)}}$,

Si l'intégrale $\int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2(y-K)}}$ doit être prise depuis $x=a$, $y=b$, jusqu'à $x=a'$, $y=b'$, on aura, pour le premier et le dernier point, les équations suivantes

$$\left.\begin{aligned} (N)\,\delta a + (n)\,\delta b = 0 \\ [N]\,\delta a' + [n]\,\delta b' = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Supposons pour plus de généralité que la constante K soit fonction des quantités a et b ; il faudra alors, d'après ce qui a été

(*) Ce problême est celui de la brachystochrône, ou de la courbe le long de laquelle un corps descend dans le moins de tems possible d'un point à un autre.

dit,

dit, n°. 840, faire varier l'intégrale proposée par rapport à ces quantités, en sorte qu'on aura de plus les termes

$$-\left(\frac{dK}{da}\delta a+\frac{dK}{db}\delta b\right)\int\frac{ds}{u^3};$$

à ajouter à la première des équations précédentes, qui deviendra

$$\left\{(N)-\frac{dK}{da}\left(\int\frac{ds}{u^3}\right)\right\}\delta a+\left\{(n)-\frac{dK}{db}\left(\int\frac{ds}{u^3}\right)\right\}\delta b=0.$$

Il reste à déterminer maintenant les quantités (N), $[N]$, (n), $[n]$, ainsi que l'intégrale $\int\frac{ds}{u^3}$, qui doit être prise entre les limites

$$x=a,\quad y=b,\quad \text{et } x=a',\quad y=b';$$

or l'équation $m-dn=0$ donne $-\frac{ds}{u^3}-d\frac{dy}{uds}=0$, et en intégrant,

$$-\int\frac{ds}{u^3}=C'+\frac{dy}{uds};$$

mais parce que l'intégrale doit commencer au point dont les coordonnées sont $x=a$, $y=b$, il s'ensuit qu'on a $C'+\left(\frac{dy}{uds}\right)=0$, ou $C'=-(n)$, pour ce point, et pour le dernier, il viendra

$$-\int\frac{ds}{u^3}=[n]-(n),$$

d'où il suit

$$\left\{(N)-\frac{dK}{da}\{(n)-[n]\}\right\}\delta a+\left\{(n)-\frac{dK}{db}\{(n)-[n]\}\right\}\delta b=0$$

$$[N]\delta a'+[n]\delta b'=0.$$

Ces équations peuvent être simplifiées en observant que $N=\frac{dx}{uds}=C$, que par conséquent $(N)=[N]=C$; et si l'on suppose que a et b, a' et b', appartiennent à des courbes données par les équations

$$da=\lambda db,\qquad da'=\lambda' db',$$

les précédentes deviendront

$$\left\{C-\frac{dK}{da}\{(n)-[n]\}\right\}\lambda+\left\{(n)-\frac{dK}{db}\{(n)-[n]\}\right\}=0$$

$$C\lambda'+[n]=0.$$

Lorsque $\frac{dK}{da}$ et $\frac{dK}{db}$ seront nuls, on aura

$$C\lambda+(n)=0, \qquad C\lambda'+[n]=0;$$

et à cause que

$$C=\frac{dx}{uds}, \qquad (n)=\left(\frac{dy}{uds}\right),$$

on en conclura que

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{C}{(n)}=-\frac{1}{\lambda}=-\frac{db}{da};$$

on trouvera de même

$$\left[\frac{dx}{dy}\right]=\frac{C}{[n]}=-\frac{1}{\lambda'}=-\frac{db'}{da'},$$

ce qui nous apprend que la courbe cherchée doit couper à angles droits les deux courbes données.

Enfin, lorsqu'on fait $K=b$, il vient $\frac{dK}{da}=0$, $\frac{dK}{db}=1$; l'équation

$$\left\{C-\frac{dK}{da}\left\{(n)-[n]\right\}\right\}\lambda+\left\{(n)-\frac{dK}{db}\left\{(n)-[n]\right\}\right\}=0,$$

relative au premier point, se réduit à $C\lambda+[n]=0$;
l'équation relative au dernier, demeurant la même, il suit de là que

$$\lambda=-\frac{[n]}{C}=\lambda',$$

d'où l'on voit que la deuxième courbe donnée doit encore être coupée à angle droit par la courbe cherchée, et que la tangente de la première, au point où elle rencontre la courbe cherchée, doit être parallèle à celle de la seconde, menée par son intersection avec la même courbe.

847. Soit encore $\int\frac{ydy^3}{dx^2+dy^2}$ (*); pour montrer comment on peut se servir de la formule du n°. 823, nous l'appliquerons à cet exemple, qui deviendra $\int\frac{p^3ydx}{1+p^2}$, en faisant $\frac{dy}{dx}=p$, et nous

(*) Ce problême a pour objet la recherche de la courbe qui produit par sa rotation autour de son axe, le solide qui éprouve la moindre résistance, lorsqu'il se meut dans un fluide dans le sens de cet axe.

aurons $V=\frac{p^3 y}{1+p^2}$, d'où il résultera

$$M=0, \quad N=\frac{p^3}{1+p^2}, \quad P=\frac{3p^2+p^4}{(1+p^2)^2}y.$$

La partie de la variation affectée du signe $\int$ donne l'équation $Ndx-dP=0$, et à cause de $M=0$, on a aussi $dV=Ndy+Pdp$; mettant au lieu de N dans cette dernière équation, sa valeur, prise dans la première, il viendra $dV=pdP+Pdp$, d'où $V=Pp+C$: la courbe cherchée aura pour équation

$$\frac{p^3 y}{1+p^2}=\frac{3p^2+p^4}{(1+p^2)^2}y+C,$$

ou en réduisant, $2p^3y+C(1+p^2)^2=0$, et par conséquent, $y=\frac{-C(1+p^2)^2}{2p^3}$, ou en changeant de constante, $y=\frac{C(1+p^2)^2}{p^3}$.

Cette équation étant jointe avec $\frac{dy}{dx}=p$ fera connoître la nature de la courbe. On tire de cette dernière $dx=\frac{dy}{p}$, et en intégrant par parties, $x=\frac{y}{p}+\int\frac{y\,dp}{p^2}$; formant au moyen de la première la valeur de $\frac{y\,dp}{p^2}$ et intégrant, on trouvera

$$C\left(-\frac{1}{4p^4}-\frac{1}{p^2}+1p\right)+C',$$

et par conséquent,

$$x=C'+C\left(\frac{3}{4p^4}+\frac{1}{p^2}+1+1p\right)$$

équation qu'il faudra combiner avec $y=\frac{C(1+p^2)^2}{p^3}$.

Si la courbe cherchée doit passer par deux points fixes, il est inutile d'avoir égard aux équations des premiers et derniers points; il suffit de déterminer les constantes de manière à satisfaire à la condition proposée; mais dans tout autre cas, il faut employer ces équations, et pour cela, il faut observer que la partie toute intégrée donne $V\delta x+P\omega=0$, ce qui devient,

$$(V-Pp)\delta x+P\delta y=0,$$

en mettant pour ω sa valeur $\delta y - p\,\delta x$. Les coordonnées du premier point étant désignées par a et b, celles du dernier par a' et b', il en résultera les deux équations suivantes :

$$\{(V)-(P)\}\delta a+(P)\delta b=0$$
$$\{[V]-[P]\}\delta a'+[P]\delta b'=0,$$

et si l'on fait les mêmes hypothèses que dans le n°. précédent, il faudra opérer sur ces équations comme sur leurs analogues, dans ce numéro.

848. Passons à des questions dans lesquelles la fonction proposée renferme des coefficiens différentiels du second ordre ; cherchons la relation que doivent avoir entr'elles les variables x et y, pour que l'expression $\int\frac{dx(1+p^2)^2}{q}$ soit un *maximum* ou un *minimum* : nous aurons ici

$$V=\frac{(1+p^2)^2}{q},\ M=0;\ N=0,\ P=\frac{4p(1+p^2)}{q},\ Q=-\frac{(1+p^2)^2}{q^2}.$$

L'équation indéterminée déduite de la formule du n°. 823, devient

$$-dP+\frac{1}{dx}d^2Q=0:$$

dx étant supposé constant, elle s'intègre immédiatement et donne

$$P=C+\frac{1}{dx}dQ;$$

et comme dans le cas présent, $dV=P\,dp+Q\,dq$, si l'on met au lieu de P la valeur qu'on vient d'obtenir, en observant que $\frac{dp}{dx}=q$, on aura

$$dV=C\,dp+q\,dQ+Q\,dq$$

dont l'intégrale est

$$V=C'+Cp+Qq.$$

Substituant maintenant au lieu de V et de Q leurs valeurs, il viendra

$$2(1+p^2)^2dx=C'\,dp+Cp\,dp,$$

d'où l'on tirera

$$dx=\frac{C'\,dp+Cp\,dp}{2(1+p^2)^2},\quad x=C''-\frac{C-C'p}{4(1+p^2)}+\frac{C'}{4}\int\frac{dp}{1+p^2};$$

mais à cause de $\int\frac{dp}{1+p^2}=\text{arc}\,(\text{tang}=p)$ et de $dy=pdx$, on trouvera

$$x=C''-\frac{C-C'p}{4(1+p^2)}+\frac{C'}{4}\,\text{arc}\,(\text{tang}=p),$$

$$y=px-\int x\,dp=(C''-\frac{C-C'p}{4(1+p^2)}+\frac{C'}{4}\,\text{arc}\,(\text{tang}=p))p$$
$$-\int(C''-\frac{C-C'p}{4(1+p^2)}+\frac{C'}{4}\,\text{arc}\,(\text{tang}=p))\,dp;$$

ou en changeant les constantes,

$$x=\frac{\alpha+\beta p+\gamma p^2}{1+p^2}+\beta\,\text{arc}\,(\text{tang}=p)$$

$$y=\frac{\alpha p+\beta p^2+\gamma p^3}{1+p^2}+\beta p\,\text{arc}\,(\text{tang}=p)$$
$$-\int\frac{(\alpha+\beta p+\gamma p^2)\,dp}{1+p^2}-\beta\int dp\,\text{arc}\,(\text{tang}=p).$$

L'élément de l'arc d'une courbe étant exprimé par $dx\sqrt{1+p^2}$, et le rayon de courbure par $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$, il est visible que l'expression du secteur compris entre cet élément et les deux rayons de courbure menés par ses extrêmités, sera

$$\frac{1}{2}\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}\times dx\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{2}\frac{(1+p^2)^2}{q}\,dx$$

et que par conséquent $\frac{1}{2}\int\frac{(1+p^2)^2\,dx}{q}$ donnera la valeur de l'espace renfermé entre une courbe, sa développée et deux de ses rayons de courbure : le problême ci-dessus, rapporté à la géométrie, a donc pour objet de déterminer les courbes dans lesquelles cet espace est un *maximum* ou un *minimum*.

En observant que

$$\int dp\,\text{arc}\,(\text{tang}=p)=p\,\text{arc}\,(\text{tang}=p)-\int\frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

on trouvera

$$y=\frac{\alpha p+\beta p^2+\gamma p^3}{1+p^2}-\int\frac{(\alpha+\gamma p^2)\,dp}{1+p^2},$$

$$\text{ou } y = \varepsilon + \frac{\alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3}{1+p^2} - (\gamma - \alpha)\,\text{arc}\,(\text{tang} = p) - \gamma p$$

$$= \frac{\varepsilon + (\alpha - \gamma)p + (\beta + \varepsilon)p^2}{1+p^2} + (\gamma - \alpha)\,\text{arc}\,(\text{tang} = p),$$

ε étant une nouvelle constante arbitraire, et si on élimine arc (tang $= p$), entre cette dernière valeur de y et celle de x, on obtiendra

$$(\gamma - \alpha)x - \beta y = \frac{(\alpha\gamma - \alpha^2 - \beta\varepsilon) + 2\beta(\gamma - \alpha)p + (\gamma^2 - \alpha\gamma - \beta^2 - \beta\varepsilon)p^2}{1+p^2}.$$

La nature d'une courbe ne changeant point lorsqu'on diminue ou que l'on augmente ses coordonnées d'une quantité constante, on peut supprimer un terme constant dans son équation : on aura ainsi

$$(\gamma - \alpha)x - \beta y = \frac{\beta^2 - (\gamma - \alpha)^2 + 2\beta(\gamma - \alpha)p}{1+p^2};$$

et écrivant α, au lieu de $\gamma - \alpha$, il viendra

$$\alpha x - \beta y = \frac{\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta p}{1+p^2},$$

soustrayant au second membre la constante β^2, on trouvera

$$\alpha x - \beta y = \frac{-\alpha^2 + 2\alpha\beta p - \beta^2 p^2}{1+p^2},$$

d'où on tirera $\quad \sqrt{\beta y - \alpha x} = \dfrac{\beta p - \alpha}{\sqrt{1+p^2}}$,

$$dx\sqrt{1+p^2} = \frac{\beta dy - \alpha dx}{\sqrt{\beta y - \alpha x}};$$

et comme $dx\sqrt{1+p^2}$ est l'élément de l'arc de la courbe, en le désignant par ds, on trouvera enfin

$$ds = \frac{\beta dy - \alpha dx}{\sqrt{\beta y - \alpha x}}, \qquad s = \zeta + 2\sqrt{\beta y - \alpha x}.$$

Cette équation, qu'avec un peu d'attention on reconnoîtra pour appartenir à une cycloïde, renferme implicitement quatre constantes arbitraires, à cause de celle que l'on a englobée dans les variables x et y, et nous apprend que parmi toutes les courbes qui peuvent passer par quatre points donnés, la cycloïde renferme, entre sa développée et ses rayons de courbure, un espace *maximum* ou *minimum*.

Les équations déterminées deviennent dans le cas qui nous occupe

$$(V)\delta a+\{\delta b-(p)\delta a\}\left\{(P)-\frac{d(Q)}{da}\right\}+d\{\delta b-(p)\delta a\}(Q)=0$$

$$[V]\delta a'+\{\delta b'-[p]\delta a'\}\left\{[P]-\frac{d[Q]}{da'}\right\}+d\{\delta b'-[p]\delta a'\}[Q]=0;$$

elles contiennent, outre les variations δa, δb, $\delta a'$, $\delta b'$, relatives à la première et à la dernière valeur des variables x et y, leurs différentielles $d\delta a$, $d\delta b$, $d\delta a'$, $d\delta b'$, que l'on peut écrire ainsi : δda, δdb, $\delta da'$, $\delta db'$, et qui, sous cette forme, exprimant des variations relatives à des valeurs de x et de y, consécutives à celles dont on vient de parler, sont indépendantes de $\delta a,\delta b,\delta a',\delta b'$, Il faudra donc vérifier ces équations en les décomposant en deux parties comme il suit :

$$(V)\delta a+\{\delta b-(p)\delta a\}\left\{(P)-\frac{d(Q)}{da}\right\}=0$$

$$d\{\delta b-(p)\delta a\}(Q)=0$$

$$[V]\delta a'+\{\delta b'-[p]\delta a'\}\left\{[P]-\frac{d[Q]}{da'}\right\}=0$$

$$d\{\delta b'-[p]\delta a'\}[Q]=0$$

d'où il résulte quatre conditions, et pour les remplir, on peut disposer d'un pareil nombre de constantes que renferment les expressions de x et de y, trouvées ci-dessus.

Si l'on se donnoit en même-tems la première et la dernière valeur de x et de y, et les valeurs correspondantes de p, ou, ce qui revient au même, le premier et le dernier point de la courbe cherchée, et la direction de sa tangente dans chacun de ces points, on détermineroit par-là toutes les constantes arbitraires; il est évident que dans cette hypothèse, les variations

$$\delta a,\delta b,\delta a',\delta b',\delta da,\delta db,\delta da',\delta db',$$

seroient nulles, et que par conséquent, les quatre équations précédentes deviendroient identiques par elles-mêmes. Mais si l'on ne fixoit d'abord que le premier et le dernier point, il viendroit seulement

$$\delta a=0,\quad \delta b=0,\quad \delta a'=0,\quad \delta b'=0;$$

il n'y auroit de satisfaites que la première et la troisième équation; et

il resteroit encore à vérifier la seconde et la quatrième, indépendamment des variations qu'elles contiennent, ce qui donneroit alors

$$(Q)=0, \quad [Q]=0.$$

En déterminant, d'après ces équations, les deux constantes demeurées arbitraires, on obtiendroit la relation de x et de y, qui répond au *maximum* ou au *minimum* absolu, parmi toutes celles qui résultent des différentes valeurs que peuvent prendre les constantes dont il s'agit.

Si l'on supposoit que la courbe cherchée dût être assujettie à toucher deux courbes données, l'une dans le premier point de l'intégrale, et l'autre dans le dernier; et que d'ailleurs ces points fussent indéterminés, les variations

$$\delta a, \ \delta b, \ \delta da, \ \delta db, \ \delta a', \ \delta b', \ \delta da', \ \delta db',$$

ne seroient liées entr'elles que par les équations de ces courbes, en sorte que si l'on avoit pour la première

$$dy=\pi dx, \quad d^2y=\rho dx^2+\pi d^2x$$

et pour la seconde

$$dy=\pi' dx \quad d^2y=\rho' dx^2+\pi' d^2x$$

il en résulteroit

$$\delta b=\pi\delta a, \quad \delta db=\rho\delta a^2+\pi\delta da;$$
$$\delta b'=\pi'\delta a', \quad \delta db'=\rho'\delta a'^2+\pi'\delta da'.$$

Si l'on faisoit la différentielle dx constante, on auroit

$$\delta da=0, \quad \delta da'=0, \quad \delta db=\rho\delta a^2, \quad \delta db'=\rho'\delta a'^2;$$

substituant ces valeurs dans les quatre équations déterminées, rapportées plus haut, elles deviendroient propres à déterminer les constantes arbitraires, de manière que l'intégrale proposée soit un *maximum* ou un *minimum* absolu, parmi les valeurs résultantes de toutes les courbes assujetties à toucher les deux courbes données.

849. L'exemple suivant, remarquable par sa simplicité, éclaircira complétement l'usage qu'on peut faire des équations déterminées pour résoudre dans toute leur étendue les questions *de maximis* et *minimis*, relatives aux formules intégrales indéterminées. Soit $\int\frac{d^2y^2}{dx^3}$, la

la différentielle dx étant supposée constante : en rapportant cette formule à $\int V dx$, on aura $V = \frac{d^2y^2}{dx^4} = q^2$ et $dV = 2qdq$, ce qui donne $M=0$, $N=0$, $P=0$, $Q=2q$, $R=0$, etc. l'équation indéterminée devient $2\frac{d^2q}{dx^2} = 0$, ou $2s=0$, ou enfin $d^4y=0$, et l'intégration donne

$$y = Cx^3 + C'x^2 + C''x + C'''.$$

Les quatre constantes arbitraires que renferme cette équation seroient déterminées, si la courbe devoit passer par quatre points donnés, ou si, devant passer par deux points donnés, on connoissoit les angles que les tangentes à chacun de ces points font avec l'axe des abscisses. Supposons que ce soit ce dernier cas qui ait lieu, et qu'on ait au commencement de la courbe $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx} = \alpha$, et à la fin $x=a'$, $y=b'$, et $\frac{dy}{dx} = \alpha'$.

L'équation proposée donne d'abord

$$\frac{dy}{dx} = 3Cx^2 + 2C'x + C'';$$

mais la condition de x et y nuls en même-tems, conduit à $C'''=0$; faisant ensuite $x=a'$, $y=b'$, il vient

$b' = Ca'^3 + C'a'^2 + C''a'$; mettant successivement, au lieu de $\frac{dy}{dx}$ les deux valeurs posées ci-dessus, il viendra

$$\alpha = C'', \qquad \alpha' = 3Ca'^2 + 2C'a' + C'',$$

et si pour simplifier on fait $b'=0$, on aura, pour déterminer C' et C'', les trois équations suivantes :

$$C'' = \alpha$$
$$Ca'^2 + C'a' + C'' = 0$$
$$3Ca'^2 + 2C'a' + C'' = \alpha'.$$

On tirera de-là $C'a' + 2C'' = -\alpha'$, ou $C' = -\frac{2\alpha + \alpha'}{a'}$; on aura aussi $Ca'^2 - C'' = \alpha$, et par conséquent $C = \frac{\alpha + \alpha'}{a'^2}$; en substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe cherchée, on obtiendra

$$y = \frac{\alpha + \alpha'}{a'^2}x^3 - \frac{2\alpha + \alpha'}{a'}x^2 + \alpha x.$$

Cette courbe sera entièrement déterminée, si les quantités a', α, et α', le sont ; mais si l'on ne donne que a' et α, on pourra demander que α' soit tel qu'il en résulte pour l'intégrale proposée un *minimum* parmi toutes les valeurs qu'elle pourroit prendre en employant l'espèce de courbe désignée par l'équation générale.

Pour y parvenir, nous observerons que l'équation déterminée est dans ce cas

$$V\delta x - \omega \frac{dQ}{dx} + \frac{d\omega}{dx} Q = 0 ;$$

séparant dans cette équation ce qui appartient au premier et au dernier point, qui sont supposés fixes, ainsi que le second point, il viendra, pour l'avant-dernier, $\frac{d\omega}{dx} Q = 0$, et par conséquent $[Q] = 0$; mettant au lieu de $[Q]$ sa valeur, on trouvera $[2q] = 0$, ou $2\alpha + 4\alpha' = 0$: introduisant ce résultat dans l'équation générale, on aura $y = \frac{\alpha x^3}{2a'^2} - \frac{3\alpha x^2}{2a'} + \alpha x$. Enfin si l'on veut aussi que α ne soit pas donné *à priori*, on le déterminera en faisant $(2q) = 0$, d'où il résultera $\alpha = 0$, $y = 0$, ce qui nous apprend que la courbe cherchée n'est autre chose, dans ce cas, que l'axe même des abscisses.

850. Passons maintenant au cas où l'intégrale proposée renferme une autre intégrale indéterminée, et supposons qu'on ait $\int y\,dx \int dx \sqrt{1+p^2}$. Cet exemple se rapporte au n°. 827 : en faisant $V = y\,dx \int dx \sqrt{1+p^2}$, il viendra

$$v = \int dx \sqrt{1+p^2}, \quad L = y, \quad V' = \sqrt{1+p^2},$$

$$M = 0, \qquad N = \int dx \sqrt{1+p^2}, \quad P = 0 ;$$

$$M' = 0, \qquad N' = 0, \qquad P' = \frac{P}{\sqrt{1+p^2}} ;$$

et si on désigne par A la valeur totale de I ou de $\int L\,dx$, prise entre les limites fixées par la nature de la question, cette valeur étant une constante, pourra passer sous les signes $\int$ et d, ce qui changera les formules du n°. cité, en

$$\delta\int V dx = \int \omega dx \left\{ \left\{ N + AN' - IN' \right\} + \frac{d\{P + AP' - IP'\}}{dx} + \frac{\{d^2Q + AQ' - IQ'\}}{dx^2} - \text{etc.} \right\}$$

$$+ V\delta x + \omega \left\{ \left\{ F + AP' - IP' \right\} - \frac{d\{Q + AQ' - IQ'\}}{dx} + \text{etc.} \right\}$$

$$+ \frac{d\omega}{dx} \left\{ \left\{ Q + AQ' - IQ' \right\} - \text{etc.} \right\}$$

$$+ \text{etc.}$$

en égalant à zéro la quantité qui multiplie ω, sous le signe $\int$, après y avoir substitué les valeurs rapportées ci-dessus, et effectué les différentiations indiquées, il viendra cette équation

$$\int dx \sqrt{1+p^2} - (A - \int y dx) \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}} dx} + \frac{py}{\sqrt{1+p^2}} = 0,$$

et pour en tirer parti, il faudra la différentier deux fois, afin d'en éliminer les intégrales qu'elle contient, ce qui fera disparoître en même-tems la constante A. Nous ne suivrons pas plus loin le calcul de cet exemple, qui deviendroit assez compliqué; nous observerons seulement que dans le cas actuel, comme dans tous les autres, la partie de la variation délivrée des signes $\int$ donnera des équations pour les limites de l'intégrale proposée, dont on pourra faire l'usage indiqué dans les n^{os}. 848 et 849.

851. Pour donner un exemple relatif aux n^{os}. 831, 834, proposons-nous de trouver la variation de la quantité U, déterminée par l'équation différentielle

$$dU = \gamma dx - \alpha U^n dx \sqrt{1+p^2},$$

Mettons cette équation sous la forme

$$\frac{dU}{dx} + \alpha U^n \sqrt{1+p^2} - \gamma = 0;$$

en la différentiant, nous obtiendrons

$$\frac{d^2U}{dx} + n\alpha U^{n-1} dU \sqrt{1+p^2} + \alpha U^n \frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = 0;$$

comparant ce résultat avec la formule du n°. 834, nous aurons

$$M=0,\quad P=0,\quad P'=\frac{\alpha U^n p}{\sqrt{1+p^2}},\quad Q=0,\quad Q'=0,\ \text{etc.}$$

$$T=n\alpha U^{n-1}\sqrt{1+p^2},\quad T'=1,$$

et l'équation

$$\lambda T-\frac{d(\lambda T')}{dx}+\frac{1}{dx}d\frac{d(\lambda T'')}{dx}-\text{etc.}=0$$

qui détermine λ, deviendra

$$n\alpha U^{n-1}\lambda\sqrt{1+p^2}-\frac{d\lambda}{dx}=0;$$

nous en tirerons

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=n\alpha U^{n-1}dx\sqrt{1+p^2},\qquad \lambda=Ce^{\int n\alpha U^{n-1}dx\sqrt{1+p^2}}.$$

L'équation

$$\left.\begin{array}{r}(\lambda T'-\frac{1}{dx}d(\lambda T'')+\text{etc.})\,\Omega+(\lambda T''-\text{etc.})\,d\Omega+\text{etc.}\ldots\\ +\int\lambda(dx\,\delta v-dv\,\delta x)\end{array}\right\}=0;$$

d'où dépend la variation Ω, se réduisant à

$$\lambda\Omega+\int\lambda(dx\,\delta v-dv\,\delta x)=0,$$

donne $\int\lambda(dx\,\delta v-dv\,\delta x)=0$,

lorsque $\Omega=0$; et comme nous n'avons d'ailleurs aucun terme à faire disparoître, nous poserons $C=1$ dans la valeur de λ. La fonction $\int\lambda(dx\,\delta v-dv\,\delta x)$ se développe ainsi qu'il suit :

$$\int\omega dx\left\{\lambda P-\frac{d(\lambda P')}{dx}+\frac{d^2(\lambda P'')}{dx^2}-\text{etc.}\right\}$$

$$+\omega\left\{\lambda P'-\frac{d(\lambda P'')}{dx}+\text{etc.}\right\}$$

$$+\frac{d\omega}{dx}\left\{\lambda P''-\text{etc.}\right\}$$

$$+\text{etc.}\qquad\qquad(\text{n°. 826});$$

nous en déduirons ces équations

$$\frac{d(\lambda P')}{dx}=0,\qquad \lambda P'=0$$

dont la première s'intègre sur-le-champ, et conduit à

$$\frac{\alpha U^n p}{\sqrt{1+p^2}}e^{\int L\,dx}=C,$$

en faisant pour abréger $L = n\alpha U^{n-1}\sqrt{1+p^2}$. Prenant les logarithmes et différentiant ensuite, on trouvera

$$Ldx = -\frac{ndU}{U} - \frac{dp}{p} + \frac{pdp}{1+p^2} = -\frac{dp}{(p1+p^2)} - \frac{ndU}{U},$$

et en remettant pour L sa valeur, il viendra

$$ndU + \alpha n U^n dx\sqrt{1+p^2} + \frac{Udp}{p(1+p^2)} = 0;$$

multipliant la proposée par n, et la retranchant de la précédente; on obtiendra

$$\frac{Udp}{p(1+p^2)} + n\gamma dx = 0,$$

d'où $$U = -\frac{n\gamma p\,dx(1+p^2)}{dp};$$

substituant au lieu de U cette valeur dans l'équation proposée, on aura celle de la courbe cherchée.

Si l'on fait $dx = -\frac{tdp}{n\gamma}$, il viendra

$$U = pt(1+p^2),\quad dU = pdt(1+p^2) + tdp(1+3p^2);$$

avec ces valeurs on changera l'équation proposée en

$$pdt(1+p^2) + tdp(1+3p^2) - \frac{\alpha p^n t^{n+1}(1+p^2)^{n+\frac{1}{2}}dp}{n\gamma} + \frac{tdp}{n} = 0,$$

qu'on mettra sous la forme

$$\frac{npdt(1+p^2) + tdp(n+1+3np^2)}{t^{n+1}p^{n+2}(1+p^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha dp}{\gamma p^2},$$

résultat dont l'intégrale est

$$\frac{1}{t^n p^{n+1}(1+p^2)^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha}{\gamma p} + \frac{\beta}{\gamma},$$

$\frac{\beta}{\gamma}$ étant la constante arbitraire; on tirera de là

$$t = \frac{\sqrt[n]{\gamma}}{p(1+p^2)^{1-\frac{1}{2n}}\sqrt[n]{\alpha+\beta p}},$$

$$dx = \frac{-dp}{np(1+p^2)^{1-\frac{1}{2n}}\sqrt[n]{\gamma^{n-1}(\alpha+\beta p)}},\quad dy = \frac{-dp}{n(1+p^2)^{1-\frac{1}{2n}}\sqrt[n]{\gamma^{n-1}(\alpha+\beta p)}};$$

en intégrant ces deux dernières expressions, on trouve:a

$$x=-\frac{1}{n\gamma}\int\frac{dp}{p(1+p^2)}\sqrt[n]{\frac{\gamma\sqrt{1+p^2}}{\alpha+\beta p}},\quad y=-\frac{1}{n\gamma}\int\frac{dp}{1+p^2}\sqrt[n]{\frac{\gamma\sqrt{1+p^2}}{\alpha+\beta p}},$$

et mettant la valeur de dx dans celle de U, on obtiendra

$$U=\sqrt[n]{\frac{\gamma\sqrt{1+p^2}}{\alpha+\beta p}}\ (*).$$

852. Les questions que nous avons traitées précédemment se rapportent à des *maxima* ou à des *minima* absolus; mais il s'en présente pour lesquelles on exige des *maxima* ou des *minima* relatifs. En voici un exemple : *Parmi toutes les relations que peuvent avoir entr'elles les variables* x, y, *et qui donnent une même valeur à l'intégrale indéterminée* $\int U$, *prise depuis* $x=a$ *jusqu'à* $x=a'$, *trouver celle qui rend la formule* $\int U'$ *un* maximum *ou un* minimum *dans les mêmes circonstances.*

Il est clair que pour satisfaire à cette question, il ne faut plus considérer les variations successives comme absolument indépendantes les unes des autres, puisque de leur ensemble, il ne doit résulter aucun changement dans la valeur de la formule $\int U$, et qu'on doit avoir $\delta\int U=0$; la condition commune aux *maxima* et aux *minima* donnant aussi $\delta\int U'=0$, il sembleroit d'abord que chacune de ces conditions dût conduire à une équation entre les variables x et y, et que le résultat final ne pût convenir par conséquent qu'à un nombre limité de points, et non pas à une courbe; mais nous allons montrer que les choses ne se passent point ainsi. C'est la partie de la variation qui reste engagée sous le signe $\int$, qui fournit l'équation entre x et y; or, si on représente par $\int V\omega$ et $\int V'\omega$ les résultats de ce genre, déduits respectivement des formules $\int U$ et $\int U'$, suivant le procédé du n°. 823, et qu'on regarde les intégrales comme la somme d'un nombre indéfini

(*) La question analytique résolue ci-dessus répond au problême de mécanique suivant ; *trouver la courbe le long de laquelle doit descendre un corps, soumis à l'action de la pesanteur, et éprouvant de la part du milieu dans lequel il se meut, une résistance proportionnelle à la puissance* 2n *de la vitesse, pour acquérir le* maximum *de vitesse,*

d'élémens, d'après ce qu'on a vu dans le n°. 471, on aura

$$\int V\omega = V_1\omega_1 + V_2\omega_2 + V_3\omega_3 + \text{etc.}$$
$$\int V'\omega = V'_1\omega_1 + V'_2\omega_2 + V'_3\omega_3 + \text{etc.}$$

et en égalant ces expressions à zéro, pour remplir les conditions exprimées par $\delta\int U = 0$, $\delta\int U' = 0$, on obtiendra les équations

$$V_1\omega_1 + V_2\omega_2 + V_3\omega_3 + \text{etc.} = 0$$
$$V'_1\omega_1 + V'_2\omega_2 + V'_3\omega_3 + \text{etc.} = 0.$$

La dernière de ces équations doit être vérifiée indépendamment d'aucune des valeurs consécutives assignées à ω, et que nous avons représentées par ω_1, ω_2, ω_3, etc. car ses termes expriment la variation des élémens de la seconde intégrale qu'on se propose de rendre un *maximum* ou un *minimum*, et chacun de ces élémens doit être lui-même un *maximum* ou un *minimum*; en effet, s'ils n'avoient pas tous cette propriété, on pourroit substituer aux élémens qui en sont privés de nouveaux élémens qui en jouiroient et qui par conséquent influeroient sur le résultat. La première équation au contraire ne doit être considérée que comme servant à déterminer l'une quelconque des variations par le moyen des autres. En prenant dans celle-ci la valeur de ω_1, pour la substituer dans l'autre, nous trouverons

$$[V'_2V_1 - V'_1V_2]\omega_2 + [V'_3V_1 - V'_1V_3]\omega_3 + \text{etc.} = 0.$$

C'est dans cette équation qu'il faudra égaler à zéro le coefficient de chaque variation, afin d'obtenir le *maximum* ou le *minimum* cherchés; or il suffit de le faire pour ω_2 seulement, parce que l'équation $V'_2V_1 - V'_1V_2 = 0$ étant posée, tous les coefficiens ultérieurs sont nuls, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre, en observant que

$V_2 = V_1 + dV_1$, $V_3 = V_2 + dV_2 = V_1 + 2dV_1 + d^2V_1$, etc.

$V'_2 = V'_1 + dV'_1$, $V'_3 = V'_2 + dV'_2 = V'_1 + 2dV'_1 + d^2V'_1$, etc.

L'équation ci-dessus se réduit, par la substitution des valeurs de V_2 et de V'_2, à $V_1dV'_1 - V'_1dV_1 = 0$ et donne $VdV' - V'dV = 0$, puisqu'elle a lieu dans toute l'étendue des intégrales proposées; on en déduit $V - CV' = 0$, ou, en changeant la constante arbitraire, $V + CV' = 0$, résultat qu'on obtiendroit en égalant immédiatement à zéro la variation de la formule $\int U + C\int U'$.

On peut encore prouver cette proposition en ajoutant entr'elles les équations

$$V_1\,\omega_1 + V_2\,\omega_2 + V_3\omega_3 + \text{etc.}$$
$$V'_1\omega_1 + V'_2\omega_2 + V'_3\omega_3 + \text{etc.}$$

après avoir multiplié la première par un facteur C, ce qui donnera

$$(CV_1 + V'_1)\,\omega_1 + (CV_2 + V'_2)\omega_2 + (CV_3 + V'_3)\omega_3 + \text{etc.}$$

et pour effectuer l'élimination de la variation ω, il faudra faire

$$CV_1 + V'_1 = 0.$$

Cette équation se présente sous deux faces, 1°. comme servant à déterminer C, 2°. comme établissant une relation entre V_1 et V'_1; c'est sous cette dernière qu'il faut l'envisager ici, parce que lorsqu'elle a lieu, les coefficiens de ω_2, ω_3, etc. dans l'équation restante, sont tous nuls, indépendamment de C.

Si on avoit deux conditions à remplir, indépendamment de celle du *maximum* ou du *minimum*, c'est-à-dire, que les intégrales indéterminées $\int U$ et $\int U'$ dussent être traitées comme constantes pendant qu'on fait varier x et y pour obtenir la relation qui convient au *maximum* ou au *minimum* de $\int U''$, on auroit les trois équations suivantes

$$V_1\,\omega_1 + V_2\,\omega_2 + V_3\,\omega_3 + \text{etc.} = 0$$
$$V'_1\,\omega_1 + V'_2\omega_2 + V'_3\,\omega_3 + \text{etc.} = 0$$
$$V''_1\,\omega_1 + V''_2\omega_2 + V''_3\,\omega_3 + \text{etc.} = 0,$$

en désignant par $\int V\omega$, $\int V'\omega$, $\int V''\omega$, la partie de $\delta\int U$, $\delta\int U'$, $\delta\int U''$, qui demeure engagée sous le signe $\int$. Multipliant la première et la seconde équation par des facteurs C et C', pour les ajouter ensuite à la troisième, on aura

$$(CV_1 + C'V'_1 + V''_1)\omega_1 + (CV_2 + C'V'_2 + V''_2)\omega_2 + (CV_3 + C'V'_3 + V''_3)\omega_3 + \text{etc.} = 0;$$

en raisonnant comme ci-dessus, on verra que les deux premières équations doivent servir à éliminer de la troisième deux variations, ω_1 et ω_2, par exemple, ce qu'on effectuera en faisant

$$CV_1 + C'V'_1 + V''_1 = 0, \qquad CV_2 + C'V'_2 + V''_2 = 0.$$

Lorsqu'on substitue dans la dernière de ces équations,

$$V_1 + dV_1, \qquad V'_1 + dV'_1, \qquad V''_1 + dV''_1,$$

à la place de V_2, V'_2, V''_2, elle se réduit, en vertu de la première, à $C\,dV_1 + C'dV'_2 + dV''_2 = 0$, et n'exprime par conséquent rien de nouveau lorsqu'on regarde C_1 et C' comme des constantes, puisqu'elle

qu'elle n'est dans ce cas que la différentielle de $CV_1+C'V'_1+V''_1=0$. On prouvera d'une manière semblable, que dans la même hypothèse les coefficiens des variations ω_3, ω_4, etc. dans l'équation-somme disparoissent d'eux-mêmes; la question ne fournit donc d'autre équation que $CV+CV'+CV''=0$, qu'on obtiendroit immédiatement en égalant à zéro la partie intégrale de la variation de l'expression $C\int U+C'\int U'+\int U''$, ou, ce qui est la même chose, en cherchant le *maximum* ou le *minimum* de $C\int U+C'\int U'+\int U''$.

On étendra sans peine ces considérations à tel nombre de conditions que l'on voudra, et l'on voit que chaque nouvelle condition que l'on joindra à celle du *maximum* ou du *minimum* introduira une constante arbitraire, qui représentera la valeur de l'intégrale que cette condition suppose invariable.

853. Supposons, pour donner un exemple, qu'on ait

$$U=\int dx\sqrt{1+p^2},\quad U'=\int y\,dx,\quad U''=\int y^2dx:$$

on cherchera la condition du *maximum* ou du *minimum* de la fonction

$$\int(C\sqrt{1+p^2}+C'y+y^2)dx,$$

et on trouvera, par la comparaison avec les formules du n°. 823,

$$(C'+2y)dx-Cd\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0,\text{ ou }(C'+2y)dx-\frac{C\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Si on multiplie cette équation par p, en observant que $pdx=dy$,

elle deviendra $(C'+2y)\,dy-\dfrac{Cpdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=0$, et son intégrale

sera $(C'+y)y-\dfrac{C}{\sqrt{1+p^2}}+C''=0$, en mettant $-C$ pour $2C$;

on en déduira $p=\dfrac{\sqrt{C^2-(C''+C'y+y^2)^2}}{C''+C'y+y^2}$, ce qui revient à

$$dx=\frac{(C''+C'y+y^2)\,dy}{\sqrt{C^2-(C''+C'y+y^2)^2}}.$$

Telle est l'équation différentielle du premier ordre de la courbe qui, parmi toutes celles dont la longueur et la surface sont les mêmes entre deux limites données, engendre par sa rotation autour de

l'axe des x le solide de plus grand ou de moindre volume. Cette courbe est connue sous le nom de *courbe élastique*, parce que c'est aussi celle qu'affecte un ressort pressé d'une manière quelconque par ses extrémités. L'intégration qui reste à effectuer introduiroit une quatrième constante arbitraire; deux de ces constantes se détermineront d'après les valeurs assignées pour la longueur et la surface de la courbe cherchée, et les deux autres, en assujettissant cette courbe à passer par deux points donnés.

Si l'on se fût borné à demander la courbe qui, sous un périmètre donné renferme le plus grand ou le plus petit espace, on n'auroit eu que la fonction $\int(C\sqrt{1+p^2}+y)\,dx$, de laquelle, en opérant comme ci-dessus, on auroit déduit l'équation

$$dx=\frac{(y-C')\,dy}{\sqrt{C^2-(y-C')^2}},$$

qui appartient évidemment au cercle.

854. Pour terminer les applications, il nous reste à donner un exemple qui soit relatif à la formule du n°. 837. Proposons-nous à cet effet de déterminer parmi toutes les surfaces courbes celle dont l'aire prise entre des limites données est un *maximum* ou un *minimum*. Nous aurons dans ce cas $V=\sqrt{1+p^2+p_,^2}$, et par conséquent

$$dV=\frac{p\,dp+p_,dp_,}{\sqrt{1+p^2+p_,^2}},\qquad \delta V=\frac{p\,\delta p+p_,\delta p_,}{\sqrt{1+p^2+p_,^2}}$$

$$N=0,\quad P=-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+p_,^2}},\quad P_,=\frac{p_,}{\sqrt{1+p^2+p_,^2}}.$$

En égalant à zéro la partie affectée du double signe d'intégration, et effectuant les différentiations indiquées, on formera l'équation différentielle partielle

$$(1+p_,^2)q-2pp_,q_,+(1+p^2)q_{,,}=0,$$

qui servira à déterminer la surface demandée, et qui deviendra

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0,$$

en changeant, d'après la notation adoptée dans le n°. 745, $p_,$ en q;

et q, $q_{,}$, $q_{,,}$ en r, s, t; c'est-à-dire, la même que celle que nous avons intégrée dans le n°. 783 (*).

855. Les termes $\int \omega dy \frac{p}{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}$, $\int \omega dx \frac{p_{,}}{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}$ sont relatifs aux limites dans lesquelles doit être comprise l'aire de la surface cherchée. Il est important de se rappeler ici que les limites des intégrales de la forme $\int\int V dx dy$ considérées comme appartenant à des aires de surfaces courbes, sont toujours des lignes, et que l'intégration qui s'effectue la première s'étend, en général, entre deux fonctions de la même variable. Si l'on commence par rapport à x, par exemple, les limites seront de la forme $x = f(y)$, $x' = f'(y)$, et celles de la dernière intégration relative à y, pourront être de la forme $y = a$, $y = a'$. Ces diverses espèces de limites présentent par rapport aux *maxima* et aux *minima* des circonstances analogues à celles qui ont lieu par rapport aux limites des intégrales telles que $\int V dx$.

Le cas le plus simple est celui dans lequel les lignes qui doivent terminer l'aire exprimée par l'intégrale proposée, sont données d'une manière absolue et n'éprouvent aucun changement par l'effet des variations. Les petits arcs Mm, et Nn, *fig.* 15, qui terminent le trapèze curviligne compris entre deux plans parallèles à celui des x et z, BAD, conservent la même grandeur et la même position; il faut FIG. 31.

(*) Cette équation a été présentée sous une autre forme par Lagrange qui la donna le premier. La quantité qu'on égale à zéro pour l'obtenir, étant de la forme $\frac{dP}{dx} - \frac{dP_{,}}{dy}$, donne $\frac{dP}{dx} + \frac{dP_{,}}{dy} = 0$, ou $\frac{dP}{dx} = -\frac{dP_{,}}{dy}$, et cette dernière équation exprime la condition qui doit avoir lieu pour que $Pdy - P_{,}dx$ soit une différentielle exacte; cette condition étant énoncée remplace donc l'équation ci-dessus, et pour caractériser la surface, dont l'aire est un *maximum* ou un *minimum*, on peut donc dire que sur cette surface la fonction $\frac{pdy - p_{,}dx}{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}$ est une différentielle exacte, en même tems que la fonction $pdx + p_{,}dy$, qui l'est dans toutes les surfaces en général. C'est ainsi que d'Alembert a toujours écrit les équations différentielles partielles, mais la notation d'Euler a prévalu comme étant beaucoup plus simple et plus commode.

par conséquent, quelques variations qu'ayent subi les sections MN et mn entre leurs extrémités, qu'aux points M, m, et N, n, où commence et où finit l'intégration relative à x, on ait δz ou $\omega = 0$; circonstance qui rend nuls par eux-mêmes les termes délivrés du signe d'intégration relatif à x, et multipliés par ωdy.

Si l'on effectuoit en premier lieu l'intégration qui se rapporte à y, on trouveroit d'abord hors du premier signe d'intégration les termes multipliés par ωdx, et les raisonnemens précédens montrent que dans le cas actuel ces termes disparoissent aussi d'eux-mêmes. Il suit de là que quand on demande la surface dont l'aire est un *minimum* entre des limites données, il suffit de considérer l'équation

$$(1 + p_1^2)q - 2pp_1q_1 + (1 + p^2)q_1 = 0;$$

les deux fonctions arbitraires introduites par l'intégration de cette équation, qui est du second ordre, doivent se déterminer en assujettissant la surface à laquelle elle appartient à passer par les lignes assignées pour les limites de l'aire exprimée par $\int dxdy\sqrt{1+p^2+p_1^2}$.

On pourroit rendre la question qui nous occupe plus générale en l'énonçant ainsi: *étant donné sur le plan des* x, y, *l'espace* M'GN', *terminé par une ou plusieurs courbes dont la nature soit connue, trouver parmi toutes les surfaces courbes qui peuvent reposer sur cet espace, celle dont le cylindre élevé sur la courbe* M'GN', *parallèlement à l'axe* AD, *des* z, *retranche une portion qui soit un* maximum *ou un* minimum. De cette manière les limites Mm et Nn, qui terminent chaque trapèze, ne sont plus fixes, les abscisses x et y ne varient point encore pour les points M' et N', mais δz change parce qu'on peut, aux sections MN et mn, en substituer d'autres qui rencontrent plus haut ou plus bas les parois du cylindre élevé sur la courbe $M'GN'$. Pour avoir le *maximum* absolu dans ce cas, il faut tenir compte des termes

$$\int \omega dy \frac{p}{\sqrt{1+p^2+p_1^2}}, \qquad \int \omega dx \frac{p_1}{\sqrt{1+p^2+p_1^2}},$$

qui donnent les équations $p = 0$, $p_1 = 0$, qui n'ayant lieu qu'aux limites de l'intégrale $\iint dxdy\sqrt{1+p^2+p_1^2}$ serviront à déterminer les fonctions arbitraires; elles font voir que la surface cherchée doit

avoir ses plans tangens parallèles à celui des x, y dans tous les points de son intersection avec le cylindre élevé sur la courbe $M'GN'$, et en effet cette surface se réduit alors à un plan parallèle au plan BAC des x, y.

Si l'aire $\int dx\,dy\sqrt{1+p^2+p_,^2}$ devoit être terminée par des surfaces qui ne fussent pas cylindriques, ou par des cylindres inclinés sur le plan des x, y, on ne pourroit plus regarder x et y comme invariables aux limites; car il est facile de voir que les ordonnées MM' et NN', mm' et nn', qui terminent les sections Mn et mn seroient déplacées par l'effet des variations, de même que les points extrêmes de la courbe AB, considérée dans le n°. 838: il faudroit pour ce cas introduire δx et δy dans le développement de $\delta\iint V dx\,dy$; nous ne saurions entrer dans ces détails, qui deviennent fort compliqués par le nombre et la nature des circonstances auxquelles on doit avoir égard et qui peuvent présenter des difficultés assez considérables, soit par rapport à la nature des conditions, soit par rapport à leur emploi, sur-tout lorsque la fonction V renferme des coefficiens différentiels des ordres supérieurs, mais nous avons cru devoir au moins mettre le lecteur sur la voie de ces considérations, dont on ne trouve aucune trace dans les ouvrages qui ont précédé celui-ci.

856. Si on demandoit quelles sont, parmi toutes les surfaces qui renferment des solides égaux, celles dont l'aire est un *minimum*, il faudroit considérer en même tems les deux fonctions

$$\iint z\,dx\,dy \text{ et } \iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+p_,^2} \text{ (n°. 852)}$$

et chercher, d'après le procédé du n°. 837, l'équation du *minimum* de la fonction

$$\iint (Cz+\sqrt{1+p^2+p_,^2})\,dx\,dy;$$

pour laquelle on trouveroit

$$N=C, \qquad P=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+p_,^2}}, \qquad P_,=\frac{p_,}{\sqrt{1+p^2+p_,^2}},$$

$$N-\frac{dP}{dx}-\frac{dP_,}{dy}=0;$$

en effectuant les calculs, il en résulteroit

$$C(1+p^2+p_,^2)^{\frac{3}{2}}-[(1+p_,^2)q-2pp_,q_,+(1+p^2)q_{,,}]=0.$$

Il est bon d'observer que l'équation de la sphère, $z^2+y^2+x^2=a^2$, et celle du cylindre $z^2+y^2=a^2$, satisfont à la précédente, et ne peuvent le faire à celle du n°. 854.

857. Passons maintenant à la recherche des caractères qui distinguent le *maximum* des intégrales indéterminées, de leur *minimum*. Nous avons déjà fait remarquer dans le n°. 843, que ces caractères dépendoient des termes du second ordre qui entrent dans le développement complet de la variation des intégrales proposées; pour traiter d'abord un cas fort simple, supposons que dans l'intégrale $\int V dx$, la fonction V ne renferme que les variables x, y et le coefficient différentiel du premier ordre, $\frac{dy}{dx}=p$. En prenant y et p pour variable indépendante, V se changera par la substitution de $y+\delta y$ et de $p+\delta p$, en

$$V+\frac{dV}{dy}\delta y+\frac{dV}{dp}\delta p+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2+2\frac{d^2V}{dydp}\delta y\,\delta p+\frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2\right\}+\text{etc.}$$

les termes du premier ordre $\frac{dV}{dy}\delta y+\frac{dV}{dp}\delta p$, étant multipliés par dx, et affectés ensuite du signe d'intégration, nous donneront le même résultat qu'on obtiendroit en faisant $\delta x=0$, dans la formule du n°. 823; si on le suppose annullé par la condition du *maximum* ou du *minimum*, la variation de $\int V dx$ sera réduite à

$$\tfrac{1}{2}\int dx\left\{\frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2+2\frac{d^2V}{dydp}\delta y\,\delta p+\frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2\right\},$$

en n'ayant égard qu'aux termes du second ordre, et pour qu'il y ait en effet *maximum* ou *minimum*, il faut, qu'indépendamment des variations δy et δp, cette expression conserve le même signe dans toute l'étendue comprise entre les limites assignées à l'intégrale $\int V dx$; mais à cause du signe d'intégration, il ne suffit pas ici, comme dans le n°. 155, d'examiner la valeur de la quantité

$$\frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2+2\frac{d^2V}{dydp}\delta y\,\delta p+\frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2$$

pour une seule valeur de x, il faut la suivre dans les différens états par lesquels elle doit passer en vertu des valeurs que reçoivent les variables x et y dans l'étendue de l'intégrale $\int V dx$.

Concevons qu'elle soit composée de deux parties; l'une, que nous représenterons par $F\delta y^2 + 2G\delta y\delta p + H\delta p^2$,
qui, satisfaisant aux conditions du n°. 155, demeure toujours de même signe: l'autre sera

$$\left(\frac{d^2V}{dy^2} - F\right)\delta y^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dydp} - G\right)\delta y\delta p + \left(\frac{d^2V}{dp^2} - H\right)\delta p^2.$$

Si l'on parvenoit à obtenir l'intégrale

$$\tfrac{1}{2}\int dx\left\{\left(\frac{d^2V}{dy^2} - F\right)\delta y^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dydp} - G\right)\delta y\delta p + \left(\frac{d^2V}{dp^2} - H\right)\delta p^2\right\},$$

en s'aidant, s'il est nécessaire, de la relation donnée entre x et y par l'équation du *maximum* ou du *minimum*, on appliqueroit à cette dernière partie les règles du n°. déjà cité. Or lorsqu'on aura mis à la place de δp, sa valeur $\frac{d\delta y}{dx}$ prise en faisant, d'après l'hypothèse établie, $\delta x = 0$, on simplifiera l'expression ci-dessus en intégrant par partie ceux de ces termes qui peuvent subir cette opération; on parviendra également à ce but, en observant que, pour que δy reste indéterminée, la fonction primitive cherchée ne peut avoir que la forme $\mu + \nu\delta y^2$. Prenant la différentielle de cette expression, et comparant le résultat terme à terme avec la fonction ci-dessus, on trouvera

$$d\mu = 0, \qquad d\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dy^2} - F\right)dx,$$

$$2\nu = \frac{d^2V}{dydp} - G, \qquad \frac{d^2V}{dp^2} - H = 0;$$

de la première de ces équations, on conclura que $\mu = C$, C étant une constante arbitraire, et on tirera des trois dernières

$$F = \frac{d^2V}{dy^2} - 2\frac{d\nu}{dx}, \qquad G = \frac{d^2V}{dydp} - 2\nu, \qquad H = \frac{d^2V}{dp^2};$$

les conditions auxquelles les fonctions F, G et H, sont assujetties sont les mêmes que celles qui ont été développées dans le n°. 155; et desquelles il résulte que pour que la quantité $F\delta y^2 + 2G\delta y\delta p + H\delta p^2$

conserve toujours le même signe, indépendamment de δy et de δp, il faut que la fonction $FH - G^2$ soit positive ou nulle, ce qui exige que les fonctions F et H soient du même signe; négatives dans le cas du *maximum* et positives dans celui du *minimum*. La première condition donne

$$\left(\frac{d^2V}{dy^2} - 2\frac{dv}{dx}\right)\frac{d^2V}{dp^2} - \left(\frac{d^2V}{dydp} - 2v\right)^2 > 0,$$

et lorsque v aura été déterminé de manière à y satisfaire, il y aura *maximum* ou *minimum*, suivant le signe de H, ou selon que le coefficient $\frac{d^2V}{dp^2}$ sera négatif ou positif.

Legendre, dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences en 1786, détermine v par l'équation

$$\left(\frac{d^2V}{dy^2} - 2\frac{dv}{dx}\right)\frac{d^2V}{dp^2} - \left(\frac{d^2V}{dydp} - 2v\right)^2 = 0;$$

la fonction $F\delta y^2 + 2G\delta y\delta p + H\delta p^2$ prend alors la forme $H\left(\frac{G}{H}\delta y + \delta p\right)^2$ et il vient

$$\delta\int V dx = C + v\delta y^2 + \int H dx\left(\frac{G}{H}\delta y + \delta p\right)^2.$$

En étendant ce résultat entre les limites assignées à l'intégrale $\int V dx$, la partie dégagée du signe $\int$ devient, d'après les remarques du n°. 839, $[v]\delta b'^2 - (v)\delta b^2$, et il faut déterminer la constante arbitraire que comporte la valeur de v, de manière que cette dernière quantité soit nulle ou de même signe que le coefficient H, d'où dépend le signe de $\int H dx\left(\frac{G}{H}\delta y + \delta p\right)^2$.

Lagrange a observé, dans sa Théorie des Fonctions, qu'il ne suffisoit pas de remplir ces conditions pour être assuré que l'intégrale précédente conservât le même signe dans toute son étendue. Il est bien vrai que la différentielle $H dx\left(\frac{G}{H}\delta y + \delta p\right)^2$ ne peut changer de signe tant que H n'en change point; mais on ne sauroit conclure de là qu'il en arrive autant à la fonction primitive qui lui correspond, si son coefficient $H\left(\frac{G}{H}\delta y + \delta p\right)^2$ pouvoit

pouvoit devenir infini dans cette même étendue (n°. 494). On doit donc préalablement chercher si l'une des fonctions F, G, H, ne passe pas par l'infini entre les limites de l'intégrale proposée, ce qui paroît en général très-difficile à reconnoître, parce qu'on ne peut y parvenir que lorsqu'on a intégré l'équation qui doit donner V. On se donne plus de latitude dans cette recherche en ne s'imposant que la condition

$$\left(\frac{d^2V}{dy^2} - 2\frac{dv}{dx}\right)\frac{d^2V}{dp^2} - \left(\frac{d^2V}{dydp} - 2v\right)^2 > 0;$$

mais il reste encore le plus souvent des difficultés insurmontables.

Soit pour exemple $V = p^2 + 2mpy + ny^2$, et supposons que l'intégrale $\int V\,dx$ soit prise entre des limites fixes, ce qui nous dispensera d'avoir égard à l'équation déterminée; l'équation indéterminée déduite de la formule du n°. 826, sera

$$ny - \frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{ou } ny - \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Cette équation s'intègre par la méthode du n°. 617, et donne

$$y = C_1 e^{x\sqrt{n}} + C_2 e^{-x\sqrt{n}},$$

résultat qui se met sous la forme

$$y = C\sin(kx + C_1),$$

quand n est une quantité négative représentée par $-k^2$. Cela posé, nous aurons

$$F = 2n - 2\frac{dv}{dx}, \qquad G = 2(m - v), \qquad H = 2;$$

la fonction H étant positive, la fonction proposée ne peut être qu'un *minimum*, si elle rend d'ailleurs positive l'expression

$$FH - G^2 = 4\left\{n - \frac{dv}{dx} - (m - v)^2\right\}.$$

Lorsque n sera une quantité positive, on remplira cette condition en faisant $v = m$, d'où il résultera $\frac{dv}{dx} = 0$, $\qquad FH - G^2 = 4n$;

mais dans le cas contraire, pour lequel on a

$$FH - G^2 = 4\left\{-k^2 - \frac{dv}{dx} - (m - v)^2\right\},$$

on ne voit pas comment on pourroit y satisfaire. Si pour déterminer v on pose l'équation $\frac{dv}{dx} + (m-v)^2 + k^2 = 0$,

et que pour l'intégrer on fasse $m - v = k\rho$, il viendra

$$d\rho = (1+\rho^2)k\,dx, \text{ d'où } \frac{d\rho}{1+\rho^2} = k\,dx,$$

$$\text{arc}(\text{tang} = \rho) = kx + C \text{ et } \rho = \text{tang}(kx + C).$$

La valeur de ρ ne convient à l'état de la question qu'autant que les limites de l'intégrale $\int V dx$ seront telles que l'arc $kx+C$ ne pourra pas devenir égal soit à $(i+\frac{1}{4})\pi$, soit à $(i+\frac{3}{4})\pi$, π désignant la circonférence du cercle et i un nombre entier ou zéro, puisque dans ces circonstances ρ seroit infini; il faut donc, pour être certain de l'existence du *minimum*, avec l'expression de ρ trouvée ci-dessus, ou avec celle de v, qui en est la suite, que les quantités a et a', valeurs extrêmes de x, ne fassent point tomber la quantité $kx + C$ dans aucun de ces cas.

L'impossibilité du *minimum*, pour certaines valeurs de k, devient évidente dans l'exemple actuel, en faisant $\delta y = i \sin x$, i désignant un coefficient très-petit, du même ordre que δy, et destiné à conserver l'homogénéité. En effet, on trouve $\delta p = \frac{d\delta y}{dx} = i\cos x$,

ce qui change la fonction $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2v}{dy^2}\delta y^2 + 2\frac{d^2v}{dydp}\delta y\delta p + \frac{d^2v}{dp^2}\delta p^2\right)$ en

$$i^2(n\sin x^2 + 2m\sin x\cos x + \cos x^2) = i^2\left(\frac{1+n}{2} + \frac{1-n}{2}\cos 2x + m\sin 2x\right);$$

par-là $\delta\int V dx$ devient

$$i^2\left(\frac{1+n}{2}x + \frac{1-n}{4}\sin 2x - \frac{m}{2}\sin 2x\right) + \text{const.}$$

la constante arbitraire devant être déterminée de manière que ce résultat soit nul lorsque $x = a$. Si l'on fait $a = 0$ et $a' = \frac{1}{2}\pi$, la valeur complète de $\delta\int V dx$ sera $\frac{1}{4}(1+n)i^2\pi$, et deviendra négative lorsqu'on aura $n = -k^2$ et $k^2 > 1$: il ne sera donc pas possible dans cette hypothèse de rendre la fonction $\delta\int V dx$ constamment positive quelque valeur qu'ait δy.

858. Occupons-nous maintenant du cas où la fonction V renfermeroit les coefficiens différentiels du premier et du second ordre $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=q$. Les termes du second ordre dans le développement de la variation fourniroient alors l'expression

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2V}{dy^2}\delta y^2+\dfrac{d^2V}{dp^2}\delta p^2+\dfrac{d^2V}{dq^2}\delta q^2\\ +2\dfrac{d^2V}{dydp}\delta y\delta p+2\dfrac{d^2V}{dydq}\delta y\delta q+2\dfrac{d^2V}{dpdq}\delta p\delta q\end{array}\right\};$$

nous représenterons par

$\frac{1}{2}(F\delta y^2+2G\delta y\delta p+H\delta p^2+2I\delta y\delta q+2K\delta p\delta q+L\delta q^2)dx$

la partie de cette expression qui doit demeurer affectée du signe $\int$ dans le développement de $\delta\int Vdx$, et en observant que

$$\delta p=\frac{d\delta y}{dx},\qquad \delta q=\frac{d\delta p}{dx},$$

on verra que la quantité qui peut être délivrée de ce signe doit être de la forme $\mu+\nu\delta y^2+2\varpi\delta y\delta p+\rho\delta p^2$,

on aura par conséquent $d(\mu+\nu\delta y^2+2\varpi\delta y\delta p+\rho\delta p^2)+\frac{1}{2}(F\delta y^2+2G\delta y\delta p+H\delta p^2+2I\delta y\delta q+2K\delta p\delta q+L\delta q^2)dx$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2V}{dy^2}\delta y^2+2\dfrac{d^2V}{dydp}\delta y\delta p+\dfrac{d^2V}{dp^2}\delta p^2\\ +2\dfrac{d^2V}{dydq}\delta y\delta q+2\dfrac{d^2V}{dpdq}\delta p\delta q+\dfrac{d^2V}{dq^2}\delta q^2\end{array}\right\}dx;$$

d'où on tirera $d\mu=0$, ou $\mu=const.$ et ensuite

$$F=\frac{d^2V}{dy^2}-2\frac{d\nu}{dx},\qquad G=\frac{d^2V}{dydp}-2\nu-2\frac{d\varpi}{dx}$$

$$H=\frac{d^2V}{dp^2}-4\varpi-2\frac{d\rho}{dx},\qquad I=\frac{d^2V}{dydq}-2\varpi$$

$$L=\frac{d^2V}{dq^2}\qquad K=\frac{d^2V}{dpdq}-2\rho.$$

Les quantités ν, ϖ, ρ, devront satisfaire aux conditions

$$FH-G^2>0,\qquad PR-Q^2>0,$$

dans lesquelles

$P=FH-G^2$, $Q=KF-GI$, $R=LF-I^2$ (n°. 155);

et comme il est visible par la dernière condition que L doit être du

même signe que F, il y aura *maximum* quand L sera négative, et *minimum* quand cette fonction sera positive, pourvu qu'aucune des fonctions F, G, H, I, K, L, ne devienne infinie entre les limites de l'intégrale ; et que la différence des valeurs de la fonction

$$\nu\,\delta y^2 + 2\varpi\,\delta y\,\delta p + \rho\,\delta p^2,$$

qui répondent à la fin et au commencement de l'intégrale proposée, soit de même signe que la fonction soumise au signe $\int$.

Legendre fait la quantité

$$F\delta y^2 + 2G\delta y\,\delta p + H\delta p^2 + 2I\delta y\,\delta q + 2K\delta p\,\delta q + L\delta q^2 = L(\alpha\,\delta y + \beta\,\delta p + \delta q)^2,$$

et il obtient alors les cinq équations

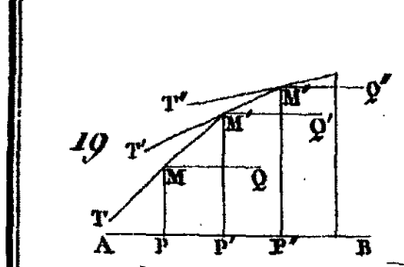
$$F = L\alpha^2, \quad G = L\alpha\beta, \quad H = L\beta^2, \quad I = L\alpha, \quad K = L\beta;$$

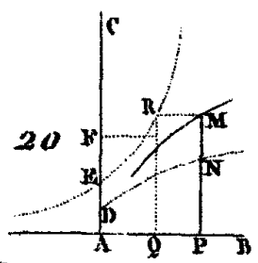
qu'il emploie à la détermination de ν, ϖ, ρ, α et β. Par ce procédé, chacune des trois premières fonctions dépend d'une équation du troisième ordre, et les constantes arbitraires serviront à rendre la partie déterminée de la variation, de même signe que la quantité L qui donne celui de la partie de cette même variation, soumise au signe $\int$.

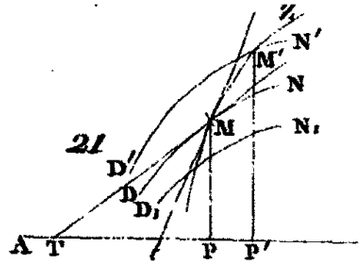
Nous laissons au lecteur à pousser plus loin l'application de cette méthode; nous observerons seulement que dans le cas où l'on fait varier δx, il faut donner au développement de la variation, la forme sous laquelle on l'a présentée dans le n°. 819, ou si l'on emploie celle du n°. 823, restituer dans les expressions de δp, δq, etc. les termes $-\frac{\delta p\,d\delta x}{dx}$, $-\frac{\delta q\,d\delta x}{dx}$, etc. qu'on a négligés, comme étant du second ordre.

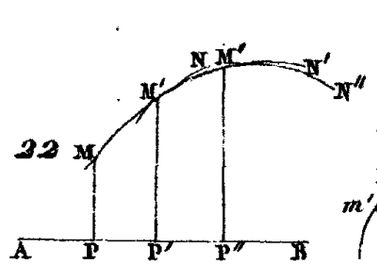
Fin de la seconde Partie.

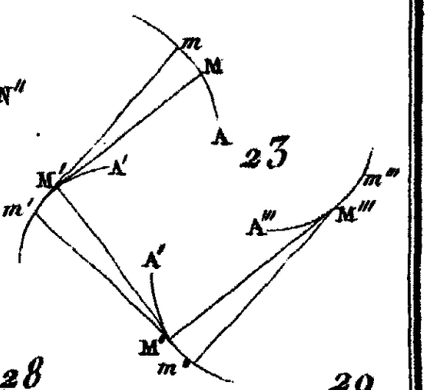
PLANCHE IIe.

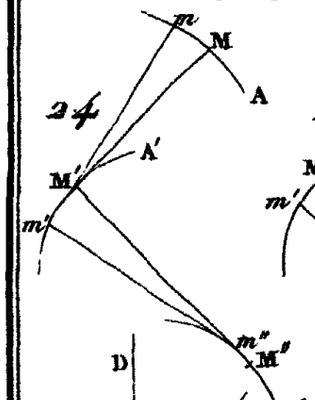


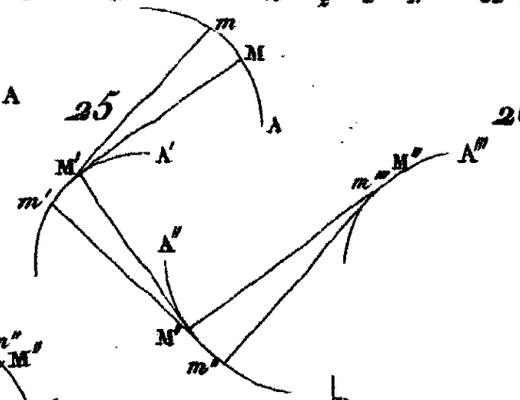


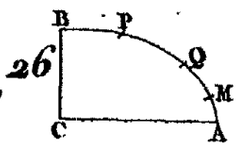


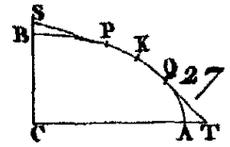


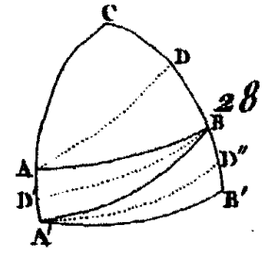


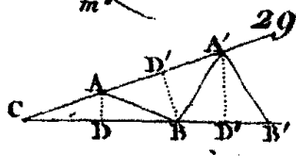


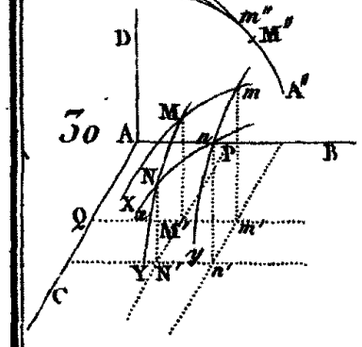


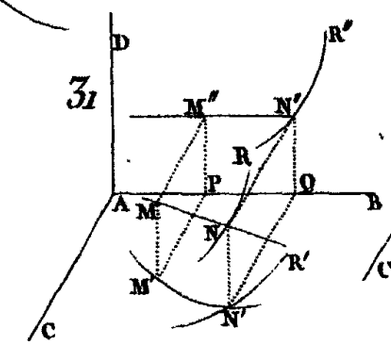


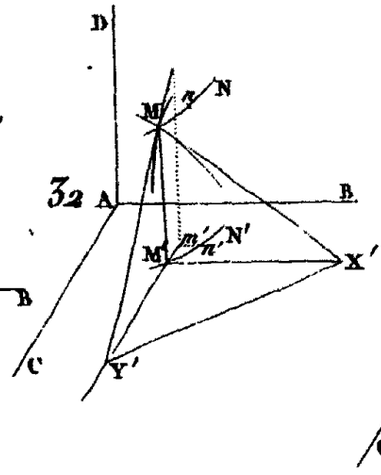


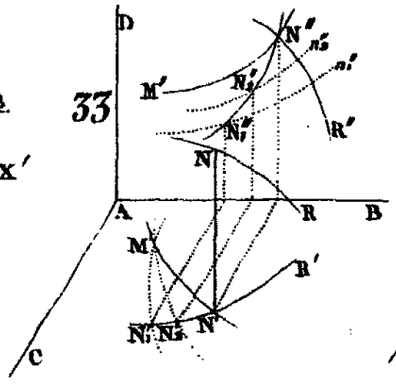


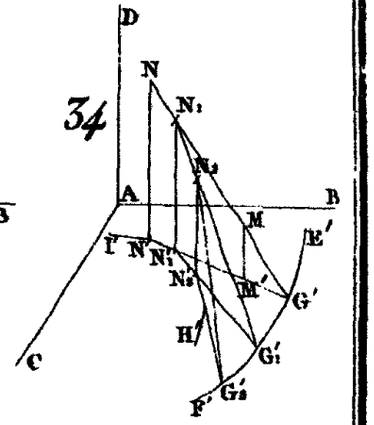


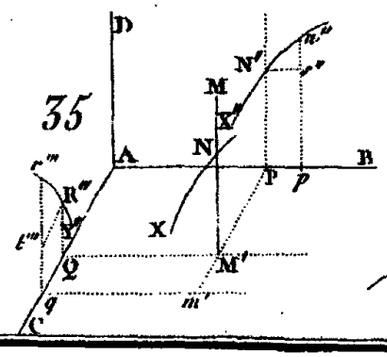


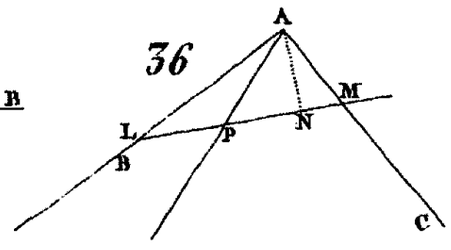


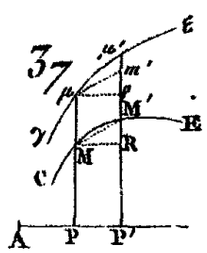


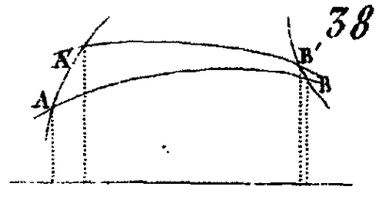


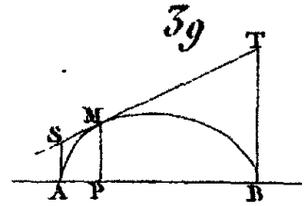












Parmisseau Sculp.

ADDITIONS.

OBSERVATION sur le n°. 703.

POUR ne rien laisser à desirer sur la méthode du n°. 703, il peut paroître nécessaire de prouver, *à priori*, que lorsque l'équation (*A*) du n°. 701 est identique par elle-même, l'intégration de l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$ ne dépend en effet que de celle des équations différentielles à deux variables, quoique p et q puissent contenir en même tems x, y et z; c'est ce que les calculs suivans mettent entièrement hors de doute.

Si l'on donne à l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$, la forme $dz - q\,dy = p\,dx$, que l'on désigne par μ le facteur qui rend le premier membre différentielle exacte, et qu'on intègre ce premier membre sans avoir égard au second, on aura $\int \mu (dz - q\,dy) = C$. Faisant pour abréger $\int \mu (dz - q\,dy) = U$, il viendra $U = C$, et différentiant cette équation, en faisant varier en même tems x, y, z dans U, et en regardant C comme une fonction de x, on obtiendra

$$\frac{dU}{dz}dz + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dx}dx = \frac{dC}{dx},$$

ou

$$\mu(dz - q\,dy) + \frac{dU}{dx}dx = \frac{dC}{dx},$$

en mettant pour les deux premiers termes du second membre leur valeur. Si l'on retranche de cette dernière équation la proposée multipliée par μ, il viendra

$$\frac{dU}{dx}dx = \frac{dC}{dx}dx - \mu p\,dx, \text{ ou } \mu p + \frac{dU}{dx} = \frac{dC}{dx};$$

et pour que la détermination de C puisse avoir lieu suivant l'hypothèse établie, il faut que le premier membre du résultat ci-dessus se réduise à une fonction de x et de C, au moins après qu'on en aura chassé z, au moyen de sa valeur prise dans l'équation $U = C$; on doit donc avoir dans cette hypothèse

$$\frac{d\left(\mu p + \frac{dU}{dx}\right)}{dy} = 0;$$

en observant de faire varier ζ comme une fonction de y. Développant cette équation, on en déduira

$$\mu\left(\frac{dp}{dy}+\frac{dp}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dy}\right)+p\left(\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\mu}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dy}\right)+\frac{d^2U}{dxdy}+\frac{d^2U}{dxd\zeta}\frac{d\zeta}{dy}=0;$$

mais $\frac{d^2U}{dxdy}=\frac{d\frac{dU}{dy}}{dx}=\frac{d.-\mu q}{dx}$, $\frac{d^2U}{dxd\zeta}=\frac{d\frac{dU}{d\zeta}}{dx}=\frac{d\mu}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dy}=q$;

et la condition par laquelle μ a été déterminé donnera

$$\frac{d\mu}{dy}=-\frac{d.\mu q}{d\zeta}=-\mu\frac{dq}{d\zeta}-q\frac{d\mu}{d\zeta};$$

d'après ces valeurs et les réductions qu'elles entraînent, l'équation précédente se change en

$$\frac{dp}{dy}-\frac{dq}{dx}+q\frac{dp}{d\zeta}-p\frac{dq}{d\zeta}=0,$$

et sera par conséquent satisfaite toutes les fois que l'équation (A) sera identique.

OBSERVATION sur le n°. 727.

Nous avons fait voir dans ce numéro, que l'on pouvoit changer plusieurs équations simultanées du premier ordre, en une équation différentielle partielle du même ordre; on peut par le même moyen transformer les équations différentielles totales des ordres supérieurs en équations différentielles partielles. L'équation générale du second ordre, par exemple, étant mise sous la forme $\frac{d^2y}{dx}-Rdx=0$, donne le système d'équations

$$d\zeta-Rdx=0, \qquad dy-\zeta dx=0,$$

lorsqu'on y fait $\frac{dy}{dx}=\zeta$; et d'après la remarque du n°. cité, on tire de ces deux équations la suivante, $p+q\zeta=R$, dans laquelle on a $d\zeta=pdx+qdy$, parce qu'on regarde $\frac{dy}{dx}$ comme une fonction de x et de y. Il est évident que si l'on parvenoit à intégrer l'équation différentielle partielle $p+q\zeta=R$, avec une constante

arbitraire seulement, on auroit une des intégrales premières de l'équation du second ordre.

Toutes les équations du troisième ordre peuvent être représentées par la formule $\frac{d^3y}{dx^3} - R\,dx = 0$; si l'on fait $\frac{dy}{dx} = \zeta$, $\frac{d\zeta}{dx} = \zeta'$, en regardant dx comme constant, on aura $\frac{d^3y}{dx^3} = d\zeta'$, en sorte que la proposée sera équivalente au systême des trois équations

$$\frac{dy}{dx} - \zeta = 0, \qquad \frac{d\zeta}{dx} - \zeta' = 0, \qquad d\zeta' - R\,dx = 0;$$

et si l'on considère ζ' comme une fonction des trois quantités x, y et ζ, d'où il résultera

$$d\zeta' = \frac{d\zeta'}{dx}dx + \frac{d\zeta'}{dy}dy + \frac{d\zeta'}{d\zeta}d\zeta,$$

on obtiendra

$$\frac{d\zeta'}{dx} + \frac{d\zeta'}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\zeta'}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dx} - R = 0,$$

ou

$$\frac{d\zeta'}{dx} + \zeta\frac{d\zeta'}{dy} + \zeta'\frac{d\zeta'}{d\zeta} - R = 0,$$

équation différentielle partielle du second ordre à trois variables, qui peut tenir lieu de la proposée en la combinant avec

$$\frac{dy}{dx} - \zeta = 0, \qquad \frac{d\zeta}{dx} - \zeta' = 0.$$

Ces transformations peuvent être poussées jusqu'où l'on voudra; mais nous ne nous y arrêterons pas, parce qu'elles renferment en elles-mêmes un cercle vicieux qui les rend à peu près inutiles pour l'intégration rigoureuse des équations différentielles totales des ordres supérieurs, et que le procédé qu'on en tireroit, pour intégrer par les séries ces mêmes équations, est plus compliqué et moins commode que les méthodes données pour le même objet dans le cours de cet ouvrage.

ERRATA.

PAGE 8, ligne 15, *au numérateur*, Az^n, *lisez* Az.

9, l. 5, *en remontant*, $\frac{P}{2}\frac{du}{u}$, *lis.* $\frac{P}{2}\int\frac{du}{u}$; $P\int\frac{1}{2}lu$, *lis.* $\frac{1}{2}Plu$;

15, l. 12, *au numérateur*, A^{n-1}, *lis.* A_{n-1}.

16, l. 10, d'où $A=\ldots$, *lis.* d'où $A_1=\ldots$

17, l. 21, $1.2.3\ldots(n+1)dQ$, *lis.* $1.2.3\ldots(n+1)dQdx^n$.

19, l. 3, $r^m\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\sin\varphi)^m$, *lis.* $r^m(\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\sin\varphi)^m$

22, l. 3, *en remont. au dénom.* $-x^6$, *lis.* $-x^n$.

23, l. 10 et 11, $\frac{1}{g}$, *lis.* $\frac{1}{f}$.

24, l. 7, *au dénom.* $n-a^{n-1}$, *lis.* na^{n-1}.

29, l. 4, *au dénom.* f, *lis.* f; l. 6, $\left(\frac{\varrho}{f}\right)^n z=x$, *lis.* $z=\left(\frac{\varrho}{f}\right)^n x$.

Ibid. l. 20, donc, *lis.* dont.

30, l. 14, *au numérateur*, zdz, *lis.* dz.

31, l. 5, *au numérateur*, $-2zdz$, *lis.* $-2dz$.

34, lig. 11, $\int$, *lis.* f.

35, l. 6, z^nq^n, *lis.* z^{nq}.

36, l. 23, $a\sqrt[5]{a+x}$, *lis.* $a\sqrt[3]{a+x}$; $-\sqrt{a-x^3}$, *lis.* $-\sqrt{a-x}$.

l. 24, $a\sqrt[5]{a-x}$, *lis.* $a\sqrt[3]{a+x}$, $+\sqrt{a-x^3}$, *lis.* $+\sqrt{a-x}$.

37, l. dernière, *à la fin*, *mettez* dz.

38, l. 7, *au dénom.* $u(uq-b)^{\frac{m}{n}+1}$, *lis.* $n(uq-b)^{\frac{m}{n}+1}$.

40, l. première, *avant* et, *mettez* dx.

l. 6, $b\int x^{m+\frac{p}{q}n-1}dx(\ldots$, *lis.* $b\int x^{m+n-1}dx(\ldots$

Ibid. $(a+bx)$, *lis.* $(a+bx^n)$.

l. 4, *en remont.* celle, *lis.* celle de.

Le dernier terme de la onzième formule du tableau de la page 40 doit avoir le signe —.

41, l. 3, *au dénom.* $(m-2n)$, *lis.* $(m-n)$.

l. 4 et 5, *au dénom.* $(m-3n)$, *lis.* $(m-2n)$.

l. 7 et 8, *au dénom.* $(m-in)$, *lis.* $(m-(i-1)n)$.

42, l. 14, de m, *lis.* de $-m$.

l. 18, $mq-inq-np$, *lis.* $mq-(i+1)nq-np$.

l. 19, $i=\ldots$ *lis.* $i+1=$

43, l. 5, $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$, *lis.* $(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}+1}$.

50, l. 5, *en remont.* U_{p+1}, *lis.* U^{p+1}.

51, l. 15, U_p^{+1}, *lis.* U^{p+1}.

l. dern. U_{p+1}, *lis.* U^{p+1}.

53, l. 5, à la place de y, *lis.* à la place de x.

56, l. 9, *au num.* $+(UT-US)y$, *lis.* $+(UT-VS)y$.

l. 10, *au num.* $-UTy^2$, *lis.* $-VTy^2$.

61, l. 9, *au num.* $2x^3y^3dy$, *lis.* $2x^3y^3dy$.

65, l. prem. de la note, $x^{2m+2}\pm1$, *lis.* $x^{2m+2}-1$; $x^2\pm1$, *lis.* x^2-1.

66, l. 6, *en remont. au dénom.* a^2, *lis.* $2a^2$.

Page

Page 67, l. 2, *aux dénom.* $4a^4$, *lis.* $2a^4$; $6a^6$, *lis.* $3a^6$, *tout le second membre doit être multiplié par* 2.

l. 12, *au num.* dx, *lis.* adx.

l. dern. *au num.* x^{m+1}, *lis.* x^{m+2}.

68, l. 13, $a^{i-n}\lfloor x$, *lis.* $a^{(i-1)n}\lfloor x$.

72, l. 3, *au dénom.* $2a$, *lis.* $5.2a$.

l. 4, $\frac{\pi}{6}$, *lis.* $\frac{\pi}{3}$.

81, l. 4 et 5, et dont l'intégration, *lis.* et en multipliant cette série par le premier, l'intégration du résultat....

l. 9, $\sqrt{1+i^2u^2}$, *lis.* $\frac{1}{\sqrt{1+i^2u^2}}$.

82, l. première, le radical, *lis.* $\frac{1}{\sqrt{(i^2+x^2)^2-\delta^2}}$.

95, l. 18, *ajoutez*, Cette formule conduira encore à un résultat exact, lorsque l'intégrale $\int Va^x dx$ sera la même que $\int Pa^x dx$, à un facteur constant près; il en sera de même de la seconde formule, si l'on a $\int Ga^x dx = A\int Pa^x dx$.

96, l. 7, *au num.* $a^x(la)^{n-1}$, *lis.* $a^x(la)^{n-2}$.

104, l. 3, *en remont.* $\int x^m dx(1-x)^{\frac{n-1}{2}}$, *lis.* $\int x^m dx(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}$.

105, l. dern. $\int d\zeta \sin\zeta^{m-n}\cos\zeta^n$, *lis.* $\int d\zeta \sin\zeta^{m-2}\cos\zeta^n$.

118, l. 14, $e_{az}d\zeta$, *lis.* $e^{az}d\zeta$.

136, l. 2, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3X^3}{dx^3}$, *lis.* $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3X}{dx^3}$; l. 15, $\frac{(a_1-a)^2}{1.2.3}$, *lis.* $\frac{(a_1-a)^3}{1.2..}$.

137, l. 5, $Y'_4=\ldots$, *lis.* $Y_4=\ldots$

138, l. 4, $Y'_2(a_3-a^2)$, *lis.* $Y'_2(a_3-a_2)$.

141, l. 1, $a^n>a$, *lis.* $a_n>a$.

145, l. 9, Y_1, Y_2, Y_3, etc. *lis.* Y'_1, Y'_2, Y'_3.

l. 5, *en remont.* du numérateur au dénominateur, *lis.* du dénominateur au numérateur.

148, l. 8, *en remont.* $(Y''+Y''_n)$, *lis.* $(Y''-Y''_n)$.

l. 6, *en remont.* $(Y''''+Y''''_n)$, *lis.* $(Y''''-Y''''_n)$.

149, l. 13, +, *lis.* —; l. 15, $+\frac{1}{12}\ldots$ *lis.* $-\frac{1}{9}\ldots$.

l. 18, $+\frac{1}{4n^2e}$, *lis.* $-\frac{1}{4n^2e}$.

l. 20, $+\frac{1}{48n^4e}$, *lis.* $-\frac{1}{48n^4e}$.

157, l. 21, $\int Xdx^3$, *lis.* $\int Xdx^2$.

163, l. prem. *de la note*, $h=\int ydx$; *lis.* $s=\int ydx$.

172, l. 15, AQ, *lis.* CQ.

177, l. dern. *au dénom.* $\sqrt{a^2-x^2}$, *lis.* $a\sqrt{a^2-x^2}$.

187, l. 17, *au dénom.* $D\cos\varphi^2$, *lis.* $D\sin\varphi^2$.

199, l. 16, QM, *lis.* PM'.

200, l. 12, $(Z_{,,}-Z_,)dx$, *lis.* $(Z_{,,}-Z_,)dX$.

219, l. 7, après le mot *fenêtres*, ajoutez *égales*.

223, l. 9, $ydx-xdy$, *lis.* $xdy-ydx$.

235, l. 2, *en remont.* Mdy, *lis.* Ndy.

237, l. 13, (n°. précéd.), *lis.* (n°. 555).

238, l. 2, $x^{\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}y^{\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}$,

lis. $x^{\frac{(\gamma n-\delta m)\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}y^{\frac{(\gamma n-\delta m)\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}$;

Page 239, l. 13; $y\frac{dN}{dx}$, *lis.* $y\frac{dN}{dy}$.

264, l. 7, $\frac{dU}{dx}=\ldots$, *lis.* $\frac{dU}{dy}dy=\ldots$

256, l. dern. *ajoutez*, C'est pour cela que dans les écrits des premiers analystes, qui se sont occupés du Calcul intégral, construire une équation différentielle est souvent la même chose que l'intégrer ou en séparer les variables.

317, l. dern. ont des..., *lis.* sont des.

318, l. 16, $e-\int P dx$, *lis.* $e-\int P dx dx$.

325, l. 3, *après* + etc.. *ajoutez*, $+B'\sin\beta x+C'\sin\gamma x+$ etc.
ibid. après etc., *ajoutez* A', B', C', etc.

344, l. 4, *en remont. après* $\frac{1}{2}K\frac{dy^2}{dx^2}$, *ajoutez*, $+Ly\frac{dy}{dx}$.

366, l. 2, *en remont.* $d^3y=\ldots$ *lis.* $d^2y=\ldots$

367, l. 11, $a^2\zeta+\ldots$, *lis.* $d^3\zeta+\ldots$

370, l. 6, et Q, *lis.* et V.

480, l. 4, *en remont.* $\frac{db}{da}=U$, *lis.* $\frac{db}{da}=-U$;
l. 3, $\psi'(a)=U$, *lis.* $\psi'(a)=-U$.

497, l. 13 $\ldots-q\frac{dp}{\ldots}\Big)$, *lis.* $\ldots-q\frac{dp}{dq}\Big)$.

544, l. dern. AD^2, *lis.* AF^2; CF^2, *lis.* CD^2.

658, l. 7, *en remont.* courbe MM', *lis.* corde MM'.

712, l. 3, 4 et 6, *ajoutez à la fin* $=0$.

Supplément à l'Errata du premier Volume.

Page 11, ligne 2, d'une quantité telle, *lisez*, dans tel rapport.

38, l. 3, *en remont. au dénom. du dernier terme*, 3., *lis.* 4.

42, l. 6, *en remont* $+\frac{u^4}{4}$, *lis.* $-\frac{u^4}{4}$.

46, l. 14 et 18, *avant l'accolade écrivez le facteur* 2.

68, l. 6, *en remont.* $\left(\cos\frac{v}{n}\right)^5$, *lis.* $\left(\cos\frac{v}{n}\right)^{n-5}$.

l. 5, *ib.* $\left(\cos\frac{v}{n}\right)^4$, *lis.* $\left(\cos\frac{v}{n}\right)^{n-4}$.

70, l. 6, $2^{n+1}\cos x^n\{\ldots$. *lis.* $2^{n+1}\cos x^n=\{\ldots$

109, l. 2, *au num.* $-(y^2+\zeta^2)$, *lis.* $-(y^2+\zeta^2)dx$

118, l. 6, *au num.* d^4u, *lis.* d^3u.

139, l. 7, *au num.* du, *lis.* du'.

150, l. 9, Rdy, *lis.* Rdy^2.

159, l. 6, *en remont. au num.* xy'', *lis.* $xy''dx^2$; *au dénom.* y', *lis.* $y'dx^2$.

167, l. 13, $x''dt$, *lis.* $x''dt^2$; $y''dt$, *lis.* $y''dt^2$.

172, l. 19, *après* soit de l'ordre n, *au lieu du reste de l'alinéa, mettez ce qui suit:* En différentiant n fois l'équation $U=0$ et m fois l'équation $V=0$, on se procurera $n+m$ équations différentielles; on en aura donc un nombre $m+n+2$, en comptant les deux proposées; mais comme les inconnues à éliminer, savoir: t, dt, $d^2t\ldots d^{m+n}t$ ne sont qu'au nombre de $m+n+1$, il résultera de leur élimination une équation finale de l'ordre $m+n$.

Page 189, l. 10, $x+k$, *lis.* $x+h$.

208, l. 19, $\frac{d^2u}{dx^2}y'^2$, *lis.* $\frac{d^2u}{dy^2}y'^2$; l. 21, $N\,d'y$, *lis.* $N\,d^2y$.

233, *Les exposans des dénominateurs de la série des lignes* 13 et 14, *sont*

$1-\frac{1}{m}$, $2-\frac{1}{m}$, $3-\frac{1}{m}$, etc.

234, l. 6, *au lieu de* $Y, Y', Y''\ldots$, *lis.* $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots$;

242, l. 19, bx, *lis.* $6x$.

243, l. 2, *en remont. au num.* $-ax$, *lis.* $-a^2x$.

248, l. dern. *de la note.* Cela n'arriveroit pas aussi-tôt que $x=1$, *lis.* Cela arrivera plutôt ou plus tard, selon que le module sera moindre ou plus grand que l'unité, mais toujours avant qu'on ait $x=1$.

271, l. 12, $\frac{d^2y}{a^2x}$, *lis.* $\frac{d^2y}{dx^2}$.

278, l. 11, x^2-px+y, *lis.* x^2-px+q.

279, l. 8; *en remont. au dénom. effacez* $=0$.

289, l. 1 et 2, *en remont.* $-2cx$, *lis.* $-2Cx$;

293, l. 5, $(c+z)$, *lis.* $\frac{(c+z)}{m}$.

294, l. 5 et 3, *en remont.* $+z$, *lis.* $\pm z$.

300, l. 23: premiers, *lis.* premiers entr'eux.

l. 6, *en remont.* $x\sqrt[m]{a}=t$, *lis.* $x=t\sqrt[m]{a}$.

305, l. 5, $-2a^mx\cos z$, *lis.* $2a^mx^m\cos z$.

306, l. dern. $r^{\frac{1}{m}}y$, *lis.* $\frac{1}{3}r^{-\frac{1}{m}}y$, $-r^{-\frac{2}{m}}y^2$, *lis.* $-4r^{-\frac{2}{m}}y^2$.

311, l. 23, au coefficient, *lis.* à celui du coefficient.

314, l. 20, q^2, *lis.* $\frac{1}{4}q^2$.

322, l. 3, (B), *lis.* (3).

323, l. 9, P', *lis.* R'.

324, l. prem. *après* r', *ajoutez* il faut observer de négliger le reste de cette division qui doit être nul, d'après l'équation finale.

326, l. dern. 4,45519, *lis.* 4,55519.

334, l. 7, *en remont.* P^2, *lis.* Q, *ibid.* Q, *lis.* P^2.

337. l. dern. $y^2-xy+ax$ et $y^2-xy-ax$, *lis.* y^2-x^2+ax et y^2-x^2-ax.

339, l. 20, *sous le radical*, $-(b-c)x$, *lis.* $-(b-c)x^2$.

341, l. 9, F, *lis.* E.

347, l. 2, qu'on chasse m^2, *lis.* qu'on chasse n^2.

l. 15, *premier radical*, $4F^2$, *lis.* $4E^2$.

350, l. y. *en remont.* $\frac{p}{b}$, *lis.* $\frac{p}{q}$; l. 5, $Ft+Iut^2$, *lis.* $C't+I'ut^2$.

355, l. 13, $b^2=2Aa$, *lis.* $b^2=Aa$.

360, l. 15, *au num.* h^4. *lis.* h^3.

368, l. 5, premier, *lis.* second.

372, l. 18, $y^2=Ax'$, *lis.* $y'^2=Ax'$.

374, l. prem. 248, *lis.* 247.

376, *lisez par-tout* x' et y', *au lieu de* x et de y.

380, l. 11, $\frac{d^3y'}{dx'}$, *lis.* $\frac{d^3y'}{dx'^3}$.

381, l. 2, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, *lis.* $\frac{d^3y'}{dx'^3}$.

386, l. 24, *au num.* $-x^4$, *lis.* $-x'^4$.

388, l. 4, *en remont.* $ph^2+qh^3\ldots$, *lis.* qh^2+rh^3.

Page 394, l. 2, *en remont.* quatrième, *lis.* troisième.
397, l. 11, quatrième, *lis.* troisième.
399, l. 18, *au dénom.* y'^9, *lis.* y'^3.
400, l. 11, les axes, *lis.* les demi-axes.
408, l. 16, *au dénom.* $\cos\frac{t}{-}$, *lis.* $\cos\frac{t}{r}$.
409, l. 9, *en remont.* à u, *lis.* à n.
421, l. 2, $ph+Qh^2\ldots$, *lis.* $Ph+Qh^2$.
426, l. 25, $+dx'^2+dy'^2$, *lis.* $-dx'^2-dy'^2$.
l. 27, 160 et 161, *lis.* 260 et 261.
427, l. 5, *en remont. mettez* (1) *après l'équation.*
432, l. dern. $(1-\ldots)$, *lis.* $(1-\ldots)$.
438, l. 25, A, *lis.* B; l. 26, B, *lis.* A; l. 27, C, *lis.* B.
441, l. 7, *en remont.* ζ, *lis.* $\zeta-\zeta'$.
443, l. 13, $B\zeta$, *lis.* $C\zeta$.
448, l. 6 et 7, $Ax'+By'+C\zeta'$, *lis.* $Ax'+By'+C\zeta'+D$.
452, *au lieu des équations* (3), *lisez celles-ci,*

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1$$
$$\beta+\beta'^2+\beta''^2=1$$
$$\gamma+\gamma'^2+\gamma''^2=1.$$

455. *Voici comment on peut parvenir aux valeurs rapportées au commencement de cette page :*

On a par les équations (3), page 452, et par les équations (7), page 453,

$$\gamma^2=1-\gamma'^2-\gamma''^2,\qquad \gamma^2=1-\alpha^2-\beta^2,\qquad \gamma''^2=1-\alpha'^2-\beta'^2;$$

les deux premières de celles-ci donnent

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma'^2+\gamma''^2,$$

et mettant pour γ'^2 sa valeur, il vient

$$\alpha'^2+\beta^2=1-\alpha^2-\beta'^2+\gamma''^2;$$

mais en faisant $\delta=1$ dans les formules de la page 454, on trouve $\alpha\beta'-\beta\alpha'=\gamma''$, d'où $2\alpha'\beta=2\alpha\beta'-2\gamma''$; ajoutant et retranchant successivement à l'équation ci-dessus, ce résultat, on obtient

$$\alpha'^2+\beta^2+2\alpha'\beta=1-\alpha^2-\beta'^2+2\alpha\beta'-2\gamma''+\gamma''^2$$
$$\alpha'^2+\beta^2-2\alpha'\beta=1-\alpha^2-\beta'^2-2\alpha\beta'+2\gamma''+\gamma''^2,$$

et

$$\alpha'+\beta=\sqrt{(1-\gamma'')^2-(\alpha-\beta')^2}=\sqrt{(1+\alpha-\beta'-\gamma'')(1-\alpha+\beta'-\gamma'')}$$

$$\alpha'-\beta=\sqrt{(1+\gamma'')^2-(\alpha+\beta')^2}=\sqrt{(1+\alpha+\beta'+\gamma'')(1-\alpha-\beta'+\gamma'')},$$

ce qui conduit aux deux premières expressions de la page citée, et suffit pour montrer comment on parviendroit aux autres.

461, l. 6, *en remont.* infini, *lis.* nul.
474, l. 8 et 9, *au dénom.* $4e$, *lis.* $2e$.
481, l. dern. $F=0$, *lis.* $E=0$.
487, l. 21, $m^2+b^2m^2-n^2$, *lis.* $a^2m^2+b^2m^2+m^2-n^2$.
l. 23, $a^2m^2+b^2m^2-n^2$, *lis.* $a^2m^2+b^2m^2+m^2-n^2$.
488, l. 23, $n=f(m)$, *lis.* $n=\varphi(m)$.
492, l. 4 et 3, *en remont.* par rapport à m et à n, *lis.* en y regardant m et n comme des fonctions de x et de y.
l. 2, *en remont.* $\frac{dV}{dn}$, *lis.* $\frac{dV}{dx}$.
496, l. 17, $\downarrow(m)=q$, *lis.* $\downarrow(m)=Q$.
502, l. 20, $1=\ldots$, *lis.* $-1=\ldots$.
509, l. 4, $-\varphi'(\zeta')^2-\downarrow'(\zeta')^2$, *lis.* $-\varphi'(x')^2-\downarrow'(x')^2$.
513, l. 14, a, *lis.* u.
517, l. prem. *au num.* ds^2, *lis.* ds'^2; *au dénom.* $-dy'^2$, *lis.* $-a^2s'^2$.
l. 17, *au dénom.* $d\zeta'^2$, *lis.* $a^2\zeta'^2$; dx'^2, *lis.* $a^2x'^2$.