BnF Gallica

Traité du calcul différentiel et du calcul intégral , par S.-F. Lacroix

Source gallica.bnf.fr / Université Paris Sud

BnF Gallica

Lacroix, Silvestre-François (1765-1843). Traité du calcul différentiel et du calcul intégral , par S.-F. Lacroix. 1797-1798.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
utilisationcommerciale@bnf.fr.

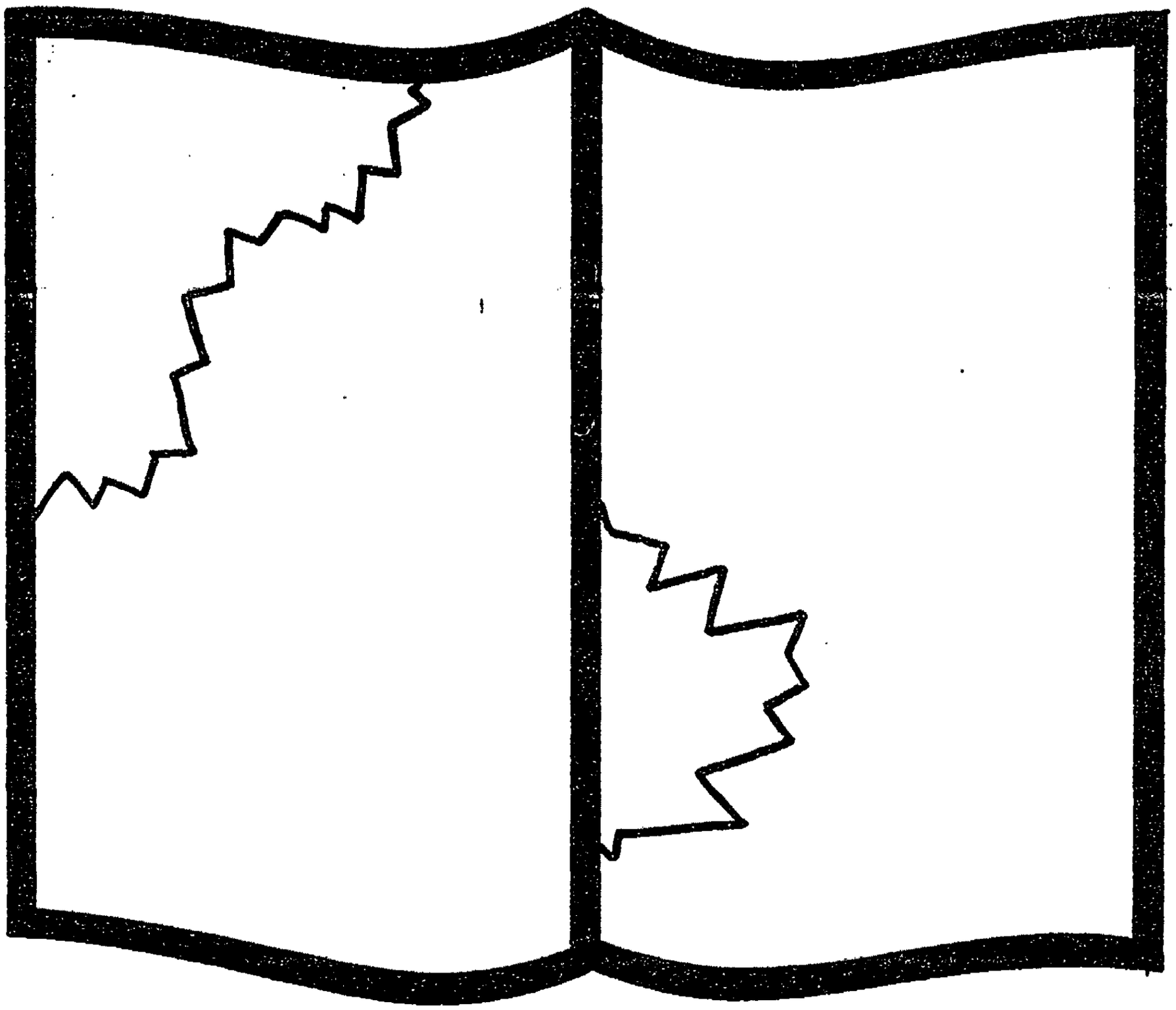
(Paris)
1797

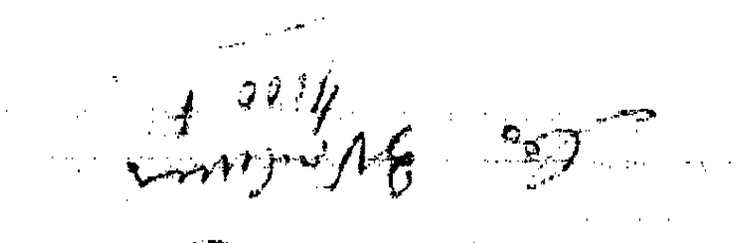
Lacroix, Sylvestre François

Traité du calcul différentiel et du calcul intégral

Tome 1

Source gallica.bnf.fr / Université Paris Sud





TRAITÉ

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DU CALCUL INTÉGRAL,

PAR S. F. LACROIX.

. Tantùm series juncturaque pollet.
HORAT.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins.

AN V. = 1797.

PRÉFACE.

Lorsque les Élémens d'une science sont incomplets, ceux qui l'étudient, découragés par la multitude des livres qu'il faudroit consulter pour acquérir les notions qui leur manquent, ne s'engagent qu'avec crainte dans une carrière dont ils n'apperçoivent point le terme. Les Mathématiques sont peut-être de toutes les sciences, celle dont les ouvrages élémentaires font connoître le moins l'étendue et les progrès.

En reculant les bornes de l'Analyse, les grands Géomètres de notre siècle ont donné au *style* de cette langue, une perfection qui doit influer nécessairement sur la manière de présenter les vérités connues avant eux. On remarque dans l'histoire des Mathématiques certaines époques où, sans que la vérité des propositions particulières ait souffert aucune atteinte, leur enchaînement systématique a changé par les rapprochemens auxquels les nouvelles découvertes ont donné lieu. Les principes sont devenus plus féconds, les détails moins nécessaires, et la généralité des Méthodes a permis encore d'embrasser la science en entier, malgré les pas immenses qu'elle avoit faits.

Nous sommes, à ce que je crois, dans une de ces époques; la réunion des nombreux matériaux, relatifs au Calcul différentiel et au Calcul intégral, épars dans les collections Académiques, peut seule faire connoître toutes les richesses de cette branche importante de l'Analyse, et réduire à un petit nombre de méthodes générales, une foule de procédés particuliers qui tiennent à l'enfance de ces calculs; mais ce n'est point par une simple compilation, qu'on atteindra ce but.

Les mêmes découvertes s'étant présentées à plusieurs Géomètres, sous des points de vue très-différens, il en est résulté plusieurs méthodes, entre lesquelles il faut faire un choix, ou qu'il faut exposer dans un ordre, qui mette en évidence les rapports par lesquels elles se lient les unes aux autres; enfin, il n'est pas moins nécessaire de donner, pour ainsi dire, à toutes, une teinte uniforme, qui ne laisse point appercevoir de différence, entre ce qu'on doit à un auteur, et ce qu'on a emprunté

d'un autre, et répande sur le tout un égal degré de précision et de clarté.

Telle est la tâche que je me suis imposée ; j'ai senti toutes les difficultés que j'aurois à vaincre pour la remplir avec succès, mais l'importance de la matière et le desir d'être utile, m'ont soutenu dans cette pénible carrière, et sur-tout la persuasion qu'un essai dans ce genre, quelqu'éloigné qu'il pût être de la perfection, contribueroit néanmoins à l'avancement de la science. Avant de rendre compte du plan que j'ai suivi, je crois devoir remettre sous les yeux du lecteur l'origine et les progrès du Calcul différentiel et du Calcul intégral, afin qu'il puisse mieux apprécier les raisons qui ont déterminé l'ordre que j'ai adopté.

La découverte du Calcul différentiel et du Calcul intégral ne remonte qu'au siècle dernier, mais les questions par lesquelles on y a été conduit s'étoient présentées dès les premiers tems de la Géométrie. Lorsque les anciens Géomètres ont voulu comparer les figures curvilignes, soit entr'elles, soit avec des figures rectilignes, ils ont été obligés de donner un tour nouveau à leurs démonstrations. La deuxième proposition du Livre XII des Élémens d'Euclide, offre le premier essai de ce genre, qui soit parvenu jusqu'à nous. Elle a pour objet, de prouver que les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés des diamètres. Il y a ici un passage du fini à l'infini ; car dans la proposition précédente, Euclide montre que ce rapport est celui des polygones semblables, inscrits dans deux cercles différens, et il me paroît évident que le Géomètre, quel qu'il soit, qui découvrit cette vérité, voyant qu'elle étoit indépendante du nombre de côtés du polygone, et qu'en même tems ces polygones différoient d'autant moins des cercles, qu'ils avoient plus de côtés, a dû nécessairement conclure de là, en vertu de la loi de continuité, que la propriété des premiers convenoit aux seconds. On regarderoit aujourd'hui comme suffisamment prouvée par ces raisonnemens, la proposition qui en est l'objet, et la plupart des livres élémentaires n'en donnent pas même d'aussi complets. Mais les Anciens ont été plus difficiles que nous à cet égard ; ils n'ont jamais voulu se permettre

de confondre entr'elles deux quantités qui avoient une différence, si petite qu'elle fût. Pour mettre donc hors d'atteinte la proposition dont ils avoient, pour ainsi dire, deviné l'existence, par les considérations que je viens d'indiquer, ils ont cherché à prouver que le rapport des cercles entr'eux ne pouvoit être ni plus grand ni plus petit que celui des quarrés de leurs diamètres; et pour y parvenir, ils ont commencé par montrer qu'on pouvoit toujours trouver un polygone inscrit, qui ne différât du polygone correspondant circonscrit, et à plus forte raison du cercle lui-même, que d'une quantité moindre qu'une grandeur donnée.

Archimède s'éleva, par des moyens à peu près semblables, à des propositions beaucoup plus difficiles, telles que les rapports des surfaces et des solidités du cylindre et de la sphère, la quadrature de la parabole et les propriétés des spirales; mais ne croyons pas qu'il les ait découvertes ainsi qu'il nous les a transmises.

Ces vérités d'une espèce avec laquelle les esprits n'étoient pas encore familiarisés, ont dû rencontrer beaucoup de contradicteurs, et l'homme de génie qui les avoit dérobées pour ainsi dire à l'obscurité qui les cachoit, sentit que l'exposition des idées qui l'avoient dirigé dans ses recherches, ne suffiroit pas pour convaincre ces hommes, que l'ignorance, souvent jointe à l'envie, soulève contre tout ce qui leur est supérieur. Ceci n'est point une conjecture: Archimède, en adressant à son ami Dosithée, son Traité de la quadrature de la Parabole, répond d'avance, en s'autorisant de l'exemple des Géomètres qui l'ont précédé, à ceux qui voudroient élever des doutes sur ses démonstrations (*).

Lorsqu'après quinze siècles de ténèbres, le flambeau des sciences vint à se rallumer, que les écrits d'Euclide et

(*) *Usi autem sunt eodem lemmate etiam Geometræ, qui antè nos floruerunt. . . . . contigit autem, ut unicuique horum, quæ diximus; theorematum non minor quam iis, quæ sine hoc lemmate demonstrata sunt, fides adhibita sit; pari fide nuper iis, quæ à nobis edita sunt conciliatâ.* (Archimed. oper. Oxoniæ, 1792, p. 18.)

d'Archimède furent traduits et commentés, on chercha à retrouver le fil qui avoit pu les diriger dans leurs découvertes; mais on ne tarda point à s'appercevoir qu'ils s'étoient beaucoup plus occupés de convaincre que d'éclairer leurs contemporains: on fut donc obligé de quitter leurs traces, et de penser à se frayer des routes nouvelles. Telles furent sans doute les raisons qui portèrent Cavalleri à se départir de cette extrême rigueur, et le conduisirent à la *méthode des indivisibles*, par laquelle il regarda les lignes comme composées de points, les surfaces comme composées de lignes, et les solides comme composés de surfaces. Le soin qu'il eut de vérifier sa méthode, recommandable par la brieveté qu'elle apportoit aux démonstrations, en comparant les résultats qu'elle donnoit avec ceux que les Anciens avoient prouvés à leur manière, lui inspira le courage de s'aventurer pour ainsi dire dans un pays nouveau. Il fut attaqué sur ses principes, mais il se défendit, en montrant qu'ils pouvoient être traduits dans ceux d'Archimède. « Ces surfaces et ces lignes dont Cavalleri examine les »rapports, » dit Montucla, « ne sont autre chose que les petits »solides ou les triangles inscrits et circonscrits d'Archimède, »poussés à un si grand nombre, que leur différence avec la fi»gure qu'ils environnent, soit moindre que toute grandeur »donnée; mais tandis qu'Archimède à chaque fois qu'il entre»prend de démontrer les rapports d'une figure curviligne avec »une autre connue, employe un long circuit de paroles, et un »tour indirect de démonstrations; le Géomètre moderne s'élan»çant en quelque sorte dans l'infini, va saisir par l'esprit le »dernier terme de ces divisions et de ces soudivisions conti»nuelles, qui doivent enfin anéantir (*) la différence entre les »figures rectilignes inscrites et circonscrites, et les figures »curvilignes. Le mot d'*indivisible* est impropre si l'on veut, mais »il n'en résulte aucun danger pour la Géometrie », j'ajouterai, lorsqu'il est rappellé à sa juste valeur, et qu'on a fait voir qu'il ne doit être regardé que comme une expression abrégée.

(*) Ou plus exactement, *qui tendent à anéantir*. . . . . .

Roberval courut en France la même carrière que Cavalleri s'étoit ouverte en Italie : en cherchant par la lecture des ouvrages d'Archimède, à se former une méthode, pour résoudre les problêmes concernant les figures curvilignes, il trouva celle qu'il a laissée dans son Traité des indivisibles, et qui ne diffère de la méthode de Cavalleri, que dans les termes. Le desir de se ménager des triomphes sur ses rivaux, le porta à cacher ses découvertes, dont la publication du livre de Cavalleri vint lui ravir les avantages, et le punit, ainsi qu'il l'avoit mérité, d'avoir écôuté le conseil d'un amour-propre mal-entendu.

Roberval trouva encore pour mener les tangentes aux courbes, une méthode fort ingénieuse à la vérité dans son principe; mais quoique plusieurs personnes ayent voulu la mettre en parallèle avec celle de Descartes, elle lui est cependant inférieure de beaucoup; car dans le plus grand nombre de cas, elle ne fait que reculer la difficulté du Problême. La méthode de Descartes au contraire offre pour toutes les courbes algébriques un procédé, dont l'esprit est facile à saisir, et dont l'application conduit toujours au but desiré. Il me semble qu'elle ne fut point estimée tout ce qu'elle valoit, dans le tems où elle parut : sans doute les écrits des Anciens offrent des exemples de recherches qui demandent une bien plus grande force de tête, et qui par cette raison ont été plus admirées; mais ne devroit-on pas préférer à la difficulté vaincue, les méthodes fécondes qui diminuent le travail et rendent accessible à tous ce qui n'étoit que le partage d'un petit nombre d'esprits transcendans?

Les obligations que la Philosophie et les Mathématiques ont à Descartes, sont trop connues pour qu'on puisse rien ajouter à ce qui a été dit à cet égard; mais on a trop négligé peut-être de faire observer un point par lequel ce grand homme a un avantage marqué sur les Géomètres de son tems. Quelque soigneux qu'il fût de sa gloire, il paroît encore plus fortement occupé de la propagation des sciences, et ce qui le prouve, c'est que ses ouvrages présentent toujours l'histoire de ses pensées, et mettent sur la voie ceux qui voudroient essayer de

pousser plus loin les recherches qu'il a entamées. On peut dire qu'il étoit le seul qui écrivît alors avec cette netteté et cette simplicité que doit toujours avoir le style des ouvrages scientifiques. Il auroit pu cependant profiter des méthodes générales qu'il possédoit, pour résoudre les problêmes les plus difficiles, et n'en publier que les résultats démontrés à la manière des Anciens; il ne s'en seroit pas moins assuré un rang distingué parmi ceux qui cultivoient alors les Mathématiques; mais il auroit sûrement beaucoup moins de droits à la reconnoissance de la postérité.

Fermat étoit en possession avant Descartes d'une méthode des tangentes; mais il ne la publia qu'après que Descartes eut fait connoître la sienne, et il y joignit une méthode *de Maximis et Minimis*. Ces méthodes sont plus simples que celles de Descartes, mais elles ne furent pour ainsi dire qu'indiquées par Fermat, qui loin d'imiter la noble franchise de Descartes, ne laissa point appercevoir, du moins pour celle *de Maximis et Minimis*, quelle route avoit pu l'y conduire, et de quelle manière on pouvoit la démontrer. Descartes crut d'abord que ces deux méthodes étoient fausses: dans l'emploi qu'il avoit voulu faire de celle des tangentes, il généralisoit mal-à-propos les considérations particulières à l'exemple dont Fermat s'étoit servi, et il ne fut pas possible de le faire revenir sur cette règle, qu'il rectifia à sa manière. Il persista même à croire que ce n'étoit que d'après lui que Fermat en avoit connu le défaut.

Par une foule de découvertes, dont plusieurs relatives aux nombres ont exercé les deux plus célèbres Analystes de ce siècle, Fermat a donné les preuves d'un grand génie. On a dit qu'il eût remplacé Descartes, si Descartes n'eut point existé: oui, si on en juge par l'importance de ses travaux et par les difficultés qu'il a vaincues; mais je pense qu'il est permis de douter qu'il eût autant contribué à la propagation de la science, que le fit son rival par son caractère communicatif et la manière simple dont il présente le résultat de ses recherches.

Fermat avoit sur Descartes, engagé continuellement dans une multitude

multitude de querelles que lui suscitoit l'envie, et occupé d'une foule d'objets différens, l'avantage de pouvoir se livrer à l'étude de la Géométrie sans autres distractions que celle que lui donnoient les devoirs de sa place. Cette continuité de méditations sur un seul objet, a dû nécessairement aider son génie à surmonter de plus grandes difficultés, et contribuer à la perfection des méthodes qu'il avoit inventées; car on doit faire entrer la considération du tems dans l'évaluation du produit des puissances morales, comme dans celle des effets des forces physiques : Leibnitz et Newton nous offriront bientôt l'occasion de répéter cette remarque.

Huygens démontra le premier les deux règles de Fermat; Sluze en proposa ensuite une très-simple, pour mener les tangentes, et qui n'est au fond que l'énoncé du calcul qu'exige celle de Fermat, dégagé de tout ce qu'il a d'inutile : enfin Barrow imagina son triangle caractéristique, qui est la même chose que le triangle différentiel, et atteignit ainsi le dernier degré de simplicité que pût recevoir la méthode des tangentes, par rapport aux courbes algébriques.

Pour ne point interrompre l'histoire du problême des tangentes, j'ai laissé de côté les pas qui avoient été faits depuis Cavalleri, vers la solution générale de celui des quadratures. Gregoire de S. Vincent, Roberval et Pascal obtinrent dans cette matière des succès importans, dont l'énumération n'est point de mon sujet, parce qu'ils ne sont dûs qu'à l'application de la méthode des Anciens ou de celle des indivisibles : il faut pourtant en excepter la considération des polygones *à échelles*, de Gregoire de S. Vincent, ou de la suite des rectangles inscrits ou circonscrits à une même courbe, qui a pu donner l'idée de l'application du Calcul intégral aux quadratures.

C'est dans l'*Arithmétique des infinis* de Wallis, qu'on voit les premières traces de l'application du calcul algébrique à la quadrature des espaces, application qui est fondée sur la méthode des indivisibles. Wallis considère les suites, et cherche à en exprimer la somme par leurs premiers et leurs derniers termes; il parvient ainsi à connoître cette somme, ou plutôt sa limite,

dans le cas où le nombre des termes à sommer est infini, et où le dernier de ces termes ne l'est pas. Envisageant alors les surfaces comme formées de lignes dont les longueurs varient suivant une certaine loi, il trouve l'expression de ces surfaces, en sommant la suite des lignes dont elles sont composées. Cette méthode fait dépendre, par exemple, l'évaluation de l'aire du triangle de la sommation de la progression arithmétique.

Wallis démontra par sa méthode la règle fondamentale de la quadrature des courbes dont l'ordonnée est proportionnelle à une puissance quelconque de l'abscisse, et il eut alors celle de toutes les courbes, dans lesquelles l'ordonnée est exprimée par une suite de monomes. La méthode d'interpolation qu'il imagina encore pour quarrer certaines courbes dont l'équation se trouvoit, en quelque sorte, comprise entre deux autres, que sa première méthode pouvoit atteindre, mérite sur-tout de fixer l'attention de ceux qui parcourront ses ouvrages, parce qu'elle contient le germe des plus belles découvertes de Newton, et qu'elle forme encore aujourd'hui la partie la plus importante de la théorie des suites. Cette méthode conduisit Wallis a des expressions très-remarquables de la surface du cercle.

Wallis doit être mis au rang des Géomètres qui ont le plus influé sur les progrès de l'Analyse; indépendamment des découvertes qui lui sont propres, il a encore des droits sur la plus grande partie de celles que la considération des suites, dont il est l'inventeur, fit faire presqu'en même tems à la plupart des Géomètres ses contemporains.

Neil et Van-Heuraet donnèrent dans l'une des paraboles cubiques, le premier exemple d'une courbe rectifiée, et le moyen dont Van-Heuraet fit usage, ramène le problême des rectifications à celui des quadratures. Brownker et Mercator, poussèrent plus loin les découvertes de Wallis, et parvinrent aux premières suites connues pour la quadrature du cercle et de l'hyperbole : le premier découvrit, dans les fractions continues, une nouvelle espèce de suites infinies. Il faut remarquer que le principe fondamental de la rectification des courbes dont s'est servi Neil, et celui de la réduction des fractions com-

posées en suites infinies, qui mit Mercator en possession de la quadrature de l'hyperbole, se trouvent dans les ouvrages de Wallis.

Tel étoit à-peu-près l'état connu de la science, lorsqu'en 1669 il s'établit entre Newton et Collins, par l'entremise de Barrow, un commerce de lettres. Ce dernier communiqua à Collins, au mois de juillet de cette année, l'écrit de Newton, qui a pour titre : *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas ;* et Barrow trace lui-même, dans une de ses lettres, le caractère de la Méthode de Newton, qu'il regarde comme une extension de celle de Mercator, extension qui est marquée au coin du génie, et ne laisse rien à desirer dans ce genre. Newton observe à la fin de l'écrit cité, mais sans en donner aucun exemple, qu'il est en état de mener des tangentes aux courbes mécaniques; et plus bas il ajoute : *Sed ista narrandi non est locus.*

Barrow, Collins et Oldembourg répandirent, par leur correspondance, les découvertes analytiques de Newton ; ils en firent connoître l'objet à plusieurs Géomètres du continent, tels que Sluze et Borelli.

C'est en 1672 que Leibnitz paroît pour la première fois sur la scène. Il se trouvoit alors à Londres, et communiqua à plusieurs Membres de la Société royale, quelques recherches sur la théorie des différences des nombres, dans lesquelles on lui montra qu'il s'étoit rencontré avec Mouton, Géomètre lyonnois : il quitta bientôt ce genre de travail pour s'instruire dans la doctrine des séries, qui fixoit l'attention de tous les Géomètres. En 1674, il annonça à Oldembourg, avec qui il s'étoit lié pendant son voyage en Angleterre, qu'il possédoit des théorèmes très-importans, relativement à la quadrature du cercle par les séries, et qu'il avoit sur-tout des Méthodes analytiques très-générales. Oldembourg répondit à ses lettres, qu'il croyoit devoir le prévenir que Gregory et Newton avoient aussi trouvé des Méthodes qui donnoient la quadrature des courbes, soit géométriques, soit mécaniques, et s'étendoient au cercle. Je passe sur toutes les lettres qui furent écrites relativement aux

séries, parce qu'il n'y a aucun doute que les Géomètres Anglais n'eussent à cet égard l'avantage sur Leibnitz; mais il paroîtra à tous ceux qui auront quelque impartialité, que Leibnitz, prévenu par eux, ne leur doit que l'émulation qu'éveillent toujours dans les hommes de génie les travaux remarquables de leurs contemporains, et qu'il trouva de son côté, par des moyens qu'il s'étoit créés, les séries qu'on a tant revendiquées sur lui.

La première communication directe que Newton ait eue avec Leibnitz, se trouve dans la lettre qu'il adressa à Oldembourg le 13 juin 1676. Les termes honorables dans lesquels il parle de Leibnitz au commencement de cette lettre, prouvent qu'il avoit su l'apprécier. Newton, dans cet écrit, qu'il avoit rédigé pour passer sous les yeux de Leibnitz, ne traite que des séries; et il en est de même de la réponse que Leibnitz fit à Newton par la voie d'Oldembourg.

J'arrive à la seconde lettre de Newton à Oldembourg; le commencement offre encore, de la part de Newton à Leibnitz, des témoignages de l'estime la plus vraie et la mieux méritée; on y trouve ensuite l'indication de la route qui conduisit Newton à son théorême pour l'élévation d'un binome à une puissance quelconque. C'est dans cette lettre qu'il décrit les propriétés de la méthode des fluxions, soit pour la recherche des tangentes, soit pour les quadratures; mais il la cache sous un anagramme de lettres transposées. Il faut bien observer, que tout le reste ne roule encore que sur les séries; que la description des avantages de la méthode de Newton, n'offroit que l'énumération de ce que devoient naturellement desirer ceux qui connoissant les méthodes des tangentes et des quadratures publiées jusqu'alors, avoient remarqué les cas où elles devenoient insuffisantes, et qu'on ne pouvoit tirer de là aucune notion positive.

Le 21 juin 1677, Leibnitz fit passer à Oldembourg, pour la communiquer à Newton, une lettre contenant les premiers essais d'une méthode qui s'étendoit à tout ce que comprenoit celle de Newton : c'étoit le Calcul différentiel. La mort

d'Oldembourg, arrivée peu de temps après, mit fin à ce commerce épistolaire, et Leibnitz attendit jusqu'en 1684 pour faire jouir le public de sa découverte, qu'il inséra alors dans les Actes de Leipsig.

L'exposé fidèle que je viens de faire de la naissance du Calcul différentiel, d'après le *Commercium Epistolicum*, imprimé par ordre de la Société royale de Londres, ne peut laisser aucun doute sur les droits incontestables de Leibnitz à la découverte de ce calcul; et comme il est le premier qui l'ait rendue publique, tandis que Newton, préférant son repos à sa gloire et à l'intérêt de ses contemporains, sembloit avoir oublié sa Méthode, n'est-il pas aussi celui qu'on doit nommer le premier dans cette découverte?

Leibnitz recueillit sans contradiction jusqu'en 1699, les honneurs que méritoit la beauté et la fécondité de son invention. Newton lui-même, en donnant, dans son livre des *Principes*, qui parut en 1688, un essai de la méthode des fluxions, rendit à Leibnitz toute la justice qui lui étoit due. Les choses seroient restées dans cet état, sans la brusque incartade de Fatio de Duillier, qui le premier voulut jetter des doutes sur la propriété que Leibnitz avoit au Calcul différentiel, et si les Journalistes de Leipsig eussent mis un peu plus de politesse dans l'extrait qu'ils firent d'un ouvrage de Newton; car il faut convenir qu'ils n'avoient dit que la vérité, et que si Keil, par un amour-propre national excessif, n'avoit pas détourné le sens de leurs expressions, Newton n'auroit pu s'en plaindre. Mais le vrai tort de ces Journalistes, fut de n'avoir pas répété ce concert d'éloges, bien mérités, que les Anglois donnoient à leur illustre compatriote; et de-là naquit une querelle qui fixa l'attention de l'Europe savante. Newton n'y prit d'abord par lui-même aucune part: Keil attaqua vivement Leibnitz, qui s'en plaignit à la Société royale de Londres avec beaucoup de modération; mais le premier porta hautement l'accusation de plagiat, et ses cris engagèrent la Société à nommer des commissaires pour examiner les papiers de Collins et

d'Oldembourg, et reconnoître les indices que Leibnitz avoit pu recevoir d'eux.

Les commissaires se contentèrent de prononcer sur la priorité que Newton avoit dans la découverte de la Méthode des fluxions, qui est au fond la même que le Calcul différentiel. Mais s'ils ne déclarèrent pas Leibnitz plagiaire, comme le desiroit Keil, celui-ci tâcha d'y suppléer lui-même en accompagnant de notes et d'observations aussi partiales qu'injurieuses pour Leibnitz, le recueil des pièces qui avoient servi au jugement du procès, et que la Société fit imprimer sous le titre de *Commercium Epistolicum* (*).

Les faits parlent assez pour que je me dispense d'entrer dans les détails de cette querelle, qui, comme toutes les querelles littéraires, eut beaucoup moins pour objet l'intérêt de la vérité, que les passions et l'amour-propre de quelques hommes médiocres, dont l'existence auroit été absolument nulle, sans les dissentions qu'ils ont excitées. J'observerai cependant qu'il n'est pas vrai, comme l'a dit Fontenelle, que Newton ait gardé sur

(*) Il doit paroître étonnant de voir dans la préface de la traduction françoise de la Méthode des fluxions, Buffon, qui n'étoit point encore connu, se rendre, on ne sait pourquoi, l'écho de toutes les calomnies de Keil et parler d'un homme tel que Leibnitz avec une légéreté vraiment impardonnable. Pour donner un exemple de la mauvaise foi qui règne dans cet écrit, rempli d'ailleurs d'inexactitudes, je rapprocherai du texte du Scholie, placé par Newton dans la première édition de son livre des Principes, la traduction qu'en a donnée Buffon.

In litteris quæ mihi cum Geometrâ peritissimo G. G. Leibnitio *annis ab hinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi maximas et minimas, ducendi tangentes, et similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, et litteris transpositis hanc sententiam involventibus* [Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, et vice versâ] *eamdem* CELAREM: *rescripsit Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicavit à meâ vix abludentem præterquam in verborum et notarum formulis, et idea generationis quantitatum. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.* Ph. nat. princ. mat. *Cantabrid.* 1713, vel *Amstel.* 1714, p. 226.

« J'ai autrefois COMMUNIQUÉ par lettres, au très-habile Géomètre M. Lélbnitz, » ma Méthode; il m'a répondu qu'il avoit une Méthode semblable, et qui ne diffère » presque point du tout de la mienne, etc. ». *La Méthode des Fluxions.* Préface, page xxiv.

ce sujet une entière impassibilité : il descendit enfin dans l'arène ; et les efforts que firent Chamberlayne et l'abbé de Conti pour réunir deux illustres rivaux, demeurèrent inutiles ; Newton persista à refuser à Leibnitz, même après sa mort, la justice qu'il lui avoit autrefois rendue ; il affecta de confondre la Méthode de Leibnitz avec celle des tangentes donnée par Barrow, et se mit ainsi dans le cas de se voir appliquer ce dilemme qu'on proposoit à Keil : ou la Méthode des fluxions, que vous dites être la même chose que le Calcul différentiel, ne diffère point de celle de Barrow, ou cette dernière n'est pas le Calcul différentiel. Enfin il fit supprimer, ou du moins laissa supprimer, dans la troisième édition de ses *Principes*, le Scholie qui contenoit l'aveu des droits de Leibnitz. (Voyez la note de la page précéd.).

Les circonstances donnèrent encore à Newton sur Leibnitz plus d'avantage que Fermat n'en eut sur Descartes. Rien ne vint interrompre le fil de ses méditations, qu'il avoit tournées vers la Géométrie dès sa plus grande jeunesse ; le pays où il reçut le jour, étoit alors le berceau des plus brillantes découvertes ; enfin il eut pour maître un homme qui s'étoit placé avec distinction parmi les inventeurs. (*) Si de telles circonstances ne peuvent rien sans le génie, il faut du moins convenir qu'elles l'aident puissamment à se développer.

(*) Barrow.

Le genre d'étude qu'avoit d'abord embrassé Leibnitz, le peu de secours que l'Allemagne, sa patrie, pouvoit lui offrir dans celle des Mathématiques, tout sembloit l'éloigner de la culture d'une science à laquelle il doit maintenant la partie la plus solide de sa gloire ; aussi n'est-ce qu'après son voyage en Angleterre qu'on le voit sur la route des découvertes : c'est là qu'il apprit, par ce que les autres avoient fait, ce qui restoit à faire. Lui-même raconte, dans plusieurs de ses lettres, avec autant d'ingénuité que de modestie, l'origine de ses progrès, et les secours qu'il reçut d'Huygens ; et cet illustre Géomètre, qui fut le véritable maître de Leibnitz, devint un de ses admirateurs.

Qu'on ne m'accuse point ici de vouloir régler les rangs parmi

les hommes qui ont fait la gloire de leur siècle : Newton a laissé dans son immortel ouvrage *des Principes*, un monument qui lui assure à jamais l'admiration de la postérité ; mais l'éclat de ses titres commande la plus sévère équité envers son rival, qui, sans cesse emporté par une succession rapide d'objets divers, accablé d'une correspondance très-étendue, et n'ayant jamais eu le loisir d'exécuter un grand ouvrage, partagea néanmoins l'honneur d'une découverte qui a changé la face des Mathématiques, et sema dans un petit nombre de lettres et d'écrits, une foule de vues ingénieuses qui renfermoient le germe des plus belles théories.

La découverte du Calcul différentiel demeura quelque temps stérile ; et Leibnitz, pour réveiller l'attention des Géomètres, leur proposa, en 1687, de déterminer la nature de la courbe que devroit parcourir un corps grave, pour descendre également en temps égaux. Huygens donna le premier la solution du problême, mais sans indiquer la méthode dont il avoit fait usage ; Jacques Bernoulli le résolut aussi par l'application du Calcul différentiel, et publia son analyse dans les Actes de Leipsig en 1690.

Jean Bernoulli, frère puîné du précédent, et qui avoit été son disciple, entra presqu'en même temps que lui dans la carrière, et lia avec Leibnitz une correspondance qui dura jusqu'à la mort de ce dernier. Il fit aussi connoître en France le Calcul différentiel, dont il donna des leçons au Marquis de l'Hopital. Leibnitz et les Bernoulli résolurent un grand nombre de problêmes aussi neufs que difficiles, qu'ils proposèrent ensuite à tous les Géomètres ; ils reprirent ceux de la chainette et de la courbe de la plus vîte descente, qui avoient résisté à Galilée.

Jacques Bernoulli, sans cesse harcelé par son frère, dont il avoit été jadis le maître, lui proposa, comme un défi, le problême des isopérimètres, problême d'un ordre supérieur à tous ceux dont on s'étoit occupé jusqu'alors. Il faut cependant convenir qu'avant lui, Newton en avoit résolu un de ce genre, puisqu'il donna, dans son livre *des Principes*, publié en 1687, la construction du solide qui éprouve la

la moindre résistance de la part d'un fluide dans lequel il se meut ; mais il a laissé ignorer la route qu'il avoit suivie, et n'a montré nulle part qu'il eût une méthode générale pour résoudre ces sortes de problêmes, tandis que celle qu'inventa Jacques Bernoulli, offre un morceau d'Analyse précieux par son élégance, et beaucoup au-dessus de tout ce qui a été fait à cette époque.

Le Calcul différentiel recevoit chaque jour de nouveaux accroissemens : on l'avoit appliqué à la théorie des développées, l'une des découvertes les plus remarquables qui soient dues à Huygens ; mais il n'existoit encore aucun ouvrage où l'on pût s'en instruire, lorsqu'en 1699, l'Hopital, qui étoit du petit nombre des Géomètres qui avoient suivi et même pris part au progrès de ce calcul, donna son *Analyse des Infiniment Petits*. Ce livre a été long-temps le meilleur qu'on eût sur cette matière ; mais il laissoit toujours à desirer un traité de Calcul intégral, dans lequel l'Hopital ne voulut point s'engager, parce qu'il savoit que Leibnitz préparoit un grand ouvrage, qu'il devoit publier sous le titre : *De Scientiâ infiniti*, et qu'il n'a point achevé. Le Calcul intégral présentoit beaucoup plus de difficultés que le Calcul différentiel : la première méthode générale qu'on trouva dans ce calcul, fut celle de l'intégration des fractions rationnelles, que Jean Bernoulli donna en 1702 ; mais dès 1694 il avoit indiqué le moyen d'intégrer les équations différentielles par la séparation des variables. En 1707, Gabriel Manfredi, Géomètre Italien, donna un traité entier sur les équations, dans lequel il se rencontra avec le Géomètre de Bâle.

Il faut observer que pendant que le Calcul différentiel et le Calcul intégral faisoient de grands progrès entre les mains des Géomètres du continent, Newton sembloit oublier ses découvertes : ce ne fut qu'en 1706 que parut son traité de la quadrature des courbes ; et son traité des fluxions ne vit le jour qu'en 1736, long-temps après sa mort.

Le génie mathématique se montra héréditaire dans la famille des Bernoulli ; Nicolas et Daniel, fils de Jean, devinrent

bientôt aussi habiles que leur père; ils eurent pour condisciples Herman et Euler : ce dernier ne tarda point à faire prendre au Calcul intégral des accroissemens rapides.

Les Géomètres du continent ne négligèrent point la théorie des Suites; mais ils n'allèrent pas jusqu'à en abuser, comme firent les Géomètres Anglois du second ordre, qui appliquèrent souvent les séries à des problêmes dont on pouvoit avoir la solution par des équations finies, ainsi que le leur fit voir Jean Bernoulli : il eut même à cet égard un reproche fondé à faire à Newton, qui parut méconnoître la vraie difficulté d'un problème proposé par Leibnitz aux Géomètres Anglois, après qu'ils lui eurent contesté ses droits à la découverte du Calcul différentiel. Ce n'étoit point dans la recherche de l'équation différentielle de laquelle dépendoit ce problême, mais dans son intégration générale, que consistoit le mérite de la solution : Newton possédant des Méthodes pour résoudre par les séries, soit les équations algébriques, soit les équations contenant des fluxions, c'est-à-dire les équations différentielles, crut en avoir fait assez en indiquant la manière de trouver celle qui résultoit du problême de Leibnitz; et c'est sur quoi Jean Bernoulli, profondément affecté de l'injustice des Anglois envers ce dernier, se récria beaucoup.

L'école de Leibnitz avoit sur celle de Newton, une supériorité décidée, due peut-être autant à la simplicité de la Méthode du premier, qu'au génie des Bernoulli ses disciples; cependant nous voyons à cette époque en Angleterre, Côtes, qui mourut fort jeune, reculer par la découverte de son théorême, les bornes de la méthode des quadratures; Moivre, que la France a droit de revendiquer, parvenir encore sur ce sujet à quelques résultats importans, et Taylor en développant la méthode des Increments, dont Newton avoit jeté les bases dans celui de ses ouvrages qui a pour titre *Methodus differentialis*, donner, pour ainsi dire, par le théorême qui porte son nom, le complément du Calcul différentiel.

Si les bornes de cette préface ne m'ont pas permis d'entrer dans le détail des découvertes des Géomètres qui ont illustré

les siècles passés, elles me permettroient encore moins d'exposer avec quelqu'étendue, les nombreux travaux de ceux qui ont fait ou qui font aujourd'hui la gloire du nôtre; mais l'Ouvrage même que je présente, fera suffisamment connoître tout ce qu'on leur doit.

Lorsque les écrits de Newton furent répandus dans le continent, on vit qu'il avoit été en possession de la Méthode des fluxions, long-tems avant que Leibnitz eût découvert le Calcul différentiel; mais quoiqu'il fût possible au génie de Newton de tirer de sa méthode tout ce que Leibnitz pouvoit déduire de la sienne, l'une étoit d'une application bien moins facile que l'autre, et elles reposoient sur des bases bien différentes. Leibnitz envisagea les grandeurs comme variant par des différences successives ou par sauts, ce qui le conduisit à substituer des polygones aux courbes, et dès lors toutes les questions qu'on pouvoit se proposer sur elles, furent ramenées au calcul des triangles rectilignes; mais pour faire coïncider ensemble le polygone et la courbe, il supposa les différences infiniment petites. En vain quelques Géomètres médiocres de ce tems-là, pour se consoler de l'impuissance où ils étoient d'entendre et d'appliquer les nouveaux calculs, déclamoient sans cesse contre leur exactitude; la conformité des résultats, avec ceux qui étoient connus antérieurement, et les démonstrations synthétiques qu'on pouvoit donner des nouveaux, faisoient retomber sur les adversaires du Calcul différentiel, les coups qu'ils vouloient lui porter.

Leibnitz crut apparemment que ceux qui seroient en état de faire usage du Calcul différentiel, en saisiroient facilement l'esprit, en le rapprochant de la méthode des Anciens; car il négligea d'entrer dans aucun détail à cet égard, et son silence fut imité par les Bernoulli et par l'Hopital; mais quand il fut attaqué sur ce sujet, il prouva par ses réponses, qu'il y avoit mûrement réfléchi. Dans toutes les occasions, il compare sa méthode avec celle d'Archimède, et fait voir qu'elle n'en est en quelque sorte qu'un abrégé, plus approprié aux recherches, mais qu'au fond elle revient au même; car au lieu de supposer

les différentielles infiniment petites dans le fait, il suffit seulement de concevoir qu'on puisse toujours les prendre assez petites, pour que l'erreur qui résultera des omissions faites dans le calcul, soit moindre qu'une grandeur donnée : et pour aider l'imagination de ses lecteurs, il apporte quelques exemples sensibles (*). Cette manière de raisonner, à laquelle il semble qu'on n'ait rien à reprocher, a été regardée de la part de Leibnitz, comme un aveu de l'insuffisance de ses principes, par Fontenelle qui voyoit s'écrouler ainsi tout l'édifice qu'il avoit bâti sur les infinis. Les plaintes qu'il en porte dans la préface de sa Géométrie, et qui ont été répétées dans plusieurs ouvrages, offrent un exemple de la facilité avec laquelle les erreurs passent de livre en livre, et montrent combien peu de gens prennent soin de se former une opinion indépendante de celle des autres.

Newton supposa les lignes engendrées par le mouvement d'un point, et les surfaces, par celui d'une ligne, et il appella fluxions les vîtesses qui règloient ces mouvemens. Ces notions, quoique très-rigoureuses, sont étrangères à la Géométrie, et leur application peut être difficile. Il est bien vrai qu'en imaginant un point qui se meuve sur une ligne, pendant qu'elle est emportée parallèlement à elle-même, avec une vîtesse uniforme, on peut représenter une courbe quelconque; mais la vîtesse du point décrivant étant variable à chaque instant, on ne peut la déterminer qu'en recourant soit à la méthode des Anciens ou d'exhaustion, soit à celle des premières et dernières raisons, et c'est presque toujours de celle-ci, que Newton s'est servi, ensorte que les fluxions n'étoient à proprement parler pour lui, qu'un moyen de donner un objet sensible aux quantités sur lesquelles il opéroit. Il entendoit par la méthode des premières et dernières raisons, la recherche du rapport qu'ont entr'elles, au premier ou au dernier instant de leur existence, des quantités qui naissent

(*) Voyez la note de la page 423 de ce volume et le tome III des Œuvres de Leibnitz, pages 369, 370, 500.

ou qui s'évanouissent ensemble; et il trouvoit dans la première raison des espaces parcourus par l'ordonnée sur la ligne des abscisses et par le point décrivant sur l'ordonnée, espaces qu'il nommoit momens, le rapport de la fluxion de l'abscisse à celle de l'ordonnée; d'où il tiroit la direction de la tangente. Le calcul n'étoit que celui dont Barrow faisoit usage pour sa méthode des tangentes, mais que Newton par le moyen de sa formule du Binome et de la réduction en séries, avoit étendu aux expressions irrationnelles. L'avantage de la Méthode des fluxions sur le Calcul différentiel, du côté de la Métaphysique, consiste en ce que les fluxions étant des quantités finies, leurs momens ne sont que des infiniment petits du premier ordre, et leurs fluxions sont encore finies: par ce moyen on évite les infiniment petits des ordres supérieurs.

D'Alembert et Euler ont cherché à donner au Calcul différentiel, une base qui leur parut plus solide que la subordination des infiniment petits; le premier se servit de la méthode des limites, et le second considéra les infiniment petits, comme des zéros absolus, mais qui conservoient un rapport dérivé de celui qu'avoient entr'elles les quantités évanouies qu'ils remplaçoient. On se demandera sans doute, ce qu'on peut entendre par le rapport de quantités qui ont cessé d'exister, et cette objection qu'on fait contre la Métaphysique d'Euler, s'applique également à celle de la Méthode des premières et dernières raisons; car il n'y a point de milieu entre être et ne pas être, et du moment où les accroissemens sont quelque chose, leur rapport n'est ni celui des fluxions ni celui des limites. Carnot dans un Mémoire où il discute avec beaucoup de soin les principes du Calcul différentiel, et qu'il a bien voulu me communiquer, observe que c'est en vertu de la loi de continuité, que les quantités évanouissantes gardent encore le rapport dont elles se sont approchées par degrés, avant de s'évanouir.

Ce Mémoire, qu'il seroit à désirer que l'Auteur rendît public, prouve que si on avoit créé des mots lorsqu'il en étoit besoin, on auroit eu des idées plus claires. En appellant

équations imparfaites, les équations différentielles, Carnot jette un grand jour sur leur théorie. En effet, lorsque l'on considère les différentielles qu'elles contiennent, comme représentant les accroissemens des variables, elles n'ont lieu que d'une manière approchée; mais leur degré d'exactitude est en quelque sorte indéfini, car il dépend de la petitesse qu'on suppose aux changemens des variables, et puisque rien ne limite cette petitesse, les équations différentielles peuvent donc être aussi près de la vérité qu'on le voudra: voilà les idées de Leibnitz traduites en Analyse. Carnot fait voir ensuite, comment les équations imparfaites deviennent rigoureuses à la fin du calcul, et à quel signe on reconnoît leur légitimité; ce signe est la disparition totale des quantités différentielles, dont pourroit provenir l'erreur, s'il y en avoit. On ne doit pas juger le travail de Carnot, par le peu que j'en ai dit; et ce n'est pas seulement dans la manière d'envisager le Calcul différentiel, qui lui est propre, que consiste le mérite de son mémoire, mais encore dans la comparaison qu'il fait des divers points de vue sous lesquels on a présenté ce calcul.

Je ne puis qu'indiquer une Méthode que donna Landen, *en 1758, pour se passer de la considération de l'infini et de* celle du mouvement ou des fluxions, parce qu'elle repose sur un théorème algébrique très-élégant, qu'on ne sauroit rendre dans un écrit de la nature de celui-ci. La franchise avec laquelle Landen se dépouille des préjugés nationaux, imprime un caractère remarquable à son ouvrage; il est peut-être le seul des Géomètres Anglois qui soit convenu des inconvéniens de la Méthode des fluxions.

C'est l'application du Calcul différentiel à la Géométrie, qui lui a donné un caractère différent de celui de l'Algèbre ordinaire; car Lagrange a fait voir, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1772, qu'il pouvoit être traité analytiquement, d'une manière indépendante des considérations de l'infini. L'expression des changemens qui arrivent dans une fonction, lorsqu'on augmente ou qu'on diminue une ou plusieurs des quantités qui la composent, peut toujours être réduite en série

ordonnée suivant les puissances des différences de ces quantités; les coefficiens qui sont indépendans de ces différences, présentent de nouvelles fonctions, dérivées de la proposée, d'après une loi régulière.

C'est dans la recherche de ces coefficiens et dans celle de leurs propriétés que consiste le Calcul différentiel; les fonctions d'une seule variable n'en donnent qu'un pour chaque puissance de l'accroissement; les fonctions de deux ou plusieurs variables, ayant une différence qu'on peut ordonner comme un polynome, suivant les produits homogènes des accroissemens, en ont plusieurs pour chaque rang. On peut chercher, ou chaque coefficient en particulier, ou les relations qu'ils ont entre eux, et avec la fonction dont ils dérivent: voilà le Calcul différentiel. Il sera aux différences ordinaires, s'il ne s'agit que d'une fonction d'une seule variable; et aux différences partielles, s'il est question d'une fonction à deux ou à un plus grand nombre de variables.

Le Calcul intégral a pour objet de remonter des coefficiens aux fonctions, c'est-à-dire de résoudre les questions inverses.

Il est étonnant que cette manière si simple de donner une origine analytique au Calcul différentiel, ait été si long temps à trouver; il semble qu'elle auroit dû se présenter à Euler, qui le premier sépara ce Calcul de son application aux courbes, et qui, en exprimant par des lettres les rapports des différentielles, avoit délivré des quantités infiniment petites, les équations qui en contenoient.

Newton même étoit déjà sur la voie de cette manière d'envisager le Calcul différentiel; car il a aussi considéré les ordonnées successives d'une même courbe, développées en séries, suivant les puissances de la différence de l'abscisse, et il a indiqué les principales propriétés de ces coefficiens relativement à l'application géométrique: il lui manquoit seulement une manière de les dériver les uns des autres; et il paroît que c'est Taylor qui montra le premier leur formation successive par les fluxions, formation qui n'est autre que son Théorême.

La lecture du Mémoire de Lagrange m'inspira le desir de

travailler à un Traité de Calcul différentiel et intégral, qui eût pour base les idées lumineuses qu'il avoit substituées à celles des Infiniment petits; et pour rendre cet ouvrage accessible à tout lecteur qui posséderoit les Élémens d'Algèbre, tels qu'ils sont traités dans le Cours de Bezout ou dans celui de Bossut, je le fais précéder d'une Introduction dont l'objet est le développement en série, des fonctions algébriques, exponentielles, logarithmiques et circulaires. La Méthode que j'emploie paroîtra peut-être nouvelle; et j'espère du moins que les commençans me sauront gré du soin que j'ai pris de la rendre indépendante des notions de l'infini (*).

A l'exemple d'Euler, dont j'ai traduit beaucoup d'endroits, je donne d'un seul jet l'exposition purement analytique et complète des principes du Calcul différentiel, dans toute la généralité qu'ils doivent avoir pour correspondre aux diverses branches du Calcul intégral.

(*) En rapportant l'origine du Traité que je publie, les circonstances dans lesquelles il paroît m'obligent d'indiquer le tems où j'ai commencé à m'en occuper. Dès 1787, je rassemblai des matériaux, et je communiquai à quelques personnes les premières ébauches de mon travail; j'en écrivis à plusieurs Géomètres célèbres, pour qu'ils voulussent bien m'indiquer les sources où je pourrois puiser, et m'aider de leurs conseils; voici ce que Laplace me répondit en janvier 1792. « Je vois » avec beaucoup de plaisir que vous travaillez à un grand ouvrage sur le Calcul » intégral..... Le rapprochement des Méthodes que vous comptez faire, sert à » les éclairer mutuellement, et ce qu'elles ont de commun renferme le plus souvent » leur vraie métaphysique: voilà pourquoi cette métaphysique est presque toujours » la dernière chose que l'on découvre. Le génie arrive comme par instinct aux ré» sultats; ce n'est qu'en réfléchissant sur la route que lui et d'autres ont suivie qu'il » parvient à généraliser les Méthodes et à en découvrir la métaphysique ».

J'ai rapporté ce passage, plus encore pour les réflexions qu'il contient, que pour prouver qu'il y a cinq ans, j'avois déjà conçu le plan que j'ai suivi. L'impression de mon Livre fut commencée en frimaire an 4 (novembre 1795) et suspendue par des raisons particulières pendant quelques mois; depuis cette époque Lagrange est revenu sur ses premières idées, à l'occasion d'un Cours qu'il a fait à l'École Polytechnique. J'ai suivi ses leçons avec tout l'intérêt qu'elles devoient inspirer; mais l'état où étoit mon ouvrage et la marche de l'impression ne m'ont permis de profiter que d'un petit nombre de ses remarques que j'ai eu soin de rapporter à leur Auteur.

Je

Je passe ensuite aux applications analytiques. La principale est le développement des fonctions en séries: je fais connoître à cette occasion le procédé que Lagrange a substitué au Triangle analytique, pour découvrir les plus grands ou les plus petits termes d'une équation, et qui sert à trouver, par des substitutions successives, les séries convergentes qui résolvent une équation; ce que le Calcul différentiel ne donneroit pas toujours, à moins d'employer des transformations.

Ces recherches ont une application immédiate, dans le cas particulier où les coefficiens du développement de la fonction proposée ordonné suivant la puissance de l'accroissement de la variable, deviennent infinis, et lorsqu'il s'agit de trouver la vraie valeur des fractions dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent en même temps. Je m'occupe encore dans ce chapitre de la recherche des *Maxima* et des *Minima*.

L'imperfection des Élémens d'Algèbre m'a forcé de faire une digression sur la théorie des équations algébriques, pour en démontrer quelques propriétés dont on a besoin dans le Calcul intégral; et j'ai rapproché et mis à la portée des Lecteurs ordinaires, une partie des leçons données à l'Ecole normale par Laplace. J'ai indiqué aussi quelques applications du Calcul différentiel à la théorie des équations.

Les deux chapitres suivans qui terminent le premier volume, renferment l'application du Calcul différentiel aux courbes et aux surfaces courbes; mais cette application, au lieu d'être isolée, comme elle l'a presque toujours été jusqu'à présent, fait partie d'une théorie complète des courbes et des surfaces courbes; et par-là le Lecteur se trouve à portée d'embrasser l'ensemble de chacun de ces objets.

En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au Lecteur qu'il existoit une manière d'envisager la Géométrie, qu'on pourroit appeler *Géométrie analytique*, et qui consisteroit à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre possible de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa Méchanique à l'égard des propriétés de l'équilibre et du mouvement.

On trouve dans les notes de la Géométrie de Legendre, un moyen de tirer immédiatement la théorie des triangles semblables, des conséquences de la superposition : par-là on est en état de former l'équation d'une droite quelconque ; et en combinant cette équation avec celle du cercle et des autres courbes, on pourroit arriver à toutes les propositions connues sur les lignes, d'une manière plus ou moins élégante, suivant le choix des moyens analytiques.

Lagrange a donné, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin (année 1773), une Théorie des Pyramides, qui est un chef-d'œuvre dans ce genre ; mais Monge est, je crois, le premier qui ait pensé à présenter sous cette forme l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

Qu'on ne croie pas qu'en insistant ainsi sur les avantages de l'Analyse algébrique, je veuille faire le procès à la Synthèse et à l'Analyse géométrique. Je pense, au contraire, qu'on néglige trop aujourd'hui l'étude des Anciens ; mais je ne voudrois pas qu'on mêlât, comme on le fait dans presque tous les ouvrages, les considérations géométriques avec les calculs algébriques ; il seroit mieux, ce me semble, que chacun de ces moyens fût porté dans des traités séparés, aussi loin qu'il peut aller ; et que les résultats de l'un et de l'autre s'éclairassent mutuellement, en se correspondant, pour ainsi dire, comme le texte d'un livre et sa traduction.

J'ai présenté sous plusieurs points de vue l'application du Calcul différentiel à la théorie des courbes et des surfaces : l'un, qui n'emprunte *explicitement* aucune notion de l'infini, est du à Lagrange. Arbogast y étoit aussi parvenu de son côté ; Newton y touchoit presque dans son livre des Principes, et Maclaurin s'en rapprocha encore plus dans la seconde partie de son Traité des Fluxions, en traitant des *Maxima* et des *Minima* et des points d'inflexion (*). J'ai donné ensuite la Méthode des limites, mais appliquée d'une manière que je crois

(*) *Voyez* Maclaurin, T. II. art. 858 et 866.

nouvelle, par le moyen du théorême de Taylor : enfin j'ai fait usage de la considération des infiniment-petits. Le rapprochement de ces trois méthodes prouvera sûrement aux lecteurs attentifs qu'elles ne diffèrent que dans les expressions ; et peut-être penseront-ils, comme moi, que la dernière, lorsqu'elle a été bien expliquée, est précieuse par la facilité qu'elle donne à résoudre de nouvelles questions ; facilité dont la théorie des courbes à double courbure de Monge, que j'ai exposée, offre un exemple remarquable.

Lorsque les principes du Calcul différentiel sont bien établis, le Calcul intégral, qui en est l'inverse, n'offre plus qu'une collection de procédés analytiques, qu'il suffit d'ordonner de manière à en faire appercevoir les rapports. Le plan du Traité qu'Euler a donné de ce Calcul, m'a paru le meilleur qu'on pût suivre ; je m'y suis conformé ; mais j'y ai ajouté toutes les choses neuves qu'il ne contenoit pas, et j'ai remplacé quelques-unes des Méthodes d'Euler par d'autres plus générales, dues à Lagrange, à Laplace et à Legendre.

Le développement des fonctions en séries conduit au Calcul différentiel ; le Calcul intégral fait connoître de nouvelles fonctions qu'on ne peut exprimer que par des suites, et la considération de ces dernières fait naître le Calcul aux différences finies, que j'appelle simplement *Calcul aux différences*. Telles sont les raisons qui m'ont porté à séparer ce calcul du Calcul différentiel, qu'il comprend cependant implicitement comme cas particulier.

Cet ordre présente, selon moi, un avantage assez important ; c'est celui de réunir, dans un seul corps de doctrine, toute la théorie des suites qui se trouve morcelée dans presque tous les livres qui en traitent ; ce qui n'a point été fait depuis Jacques Bernoulli et Stirling, quoique la matière se soit prodigieusement accrue depuis ce temps par les travaux d'Euler, de Lagrange et de Laplace, auxquels Prony vient d'ajouter plusieurs formules élégantes dans son Traité de la Méthode des Différences.

Je rapproche, par ce moyen, la théorie des suites récur-

rentes, déduite du développement des fractions, de celle qui résulte de l'intégration des équations linéaires aux différences.

L'Appendice dans lequel je traite tout ce qui concerne les suites, renferme encore ces méthodes, qui, quoique fort étendues et fort utiles, ne peuvent que difficilement entrer dans le corps du Calcul intégral, parce qu'elles dépendent de principes trop différens de ceux de l'intégration proprement dite : telle est la méthode d'interpolation, telles sont les séries qui donnent les aires des courbes par le moyen d'un certain nombre de leurs ordonnées; telles sont enfin les méthodes ingénieuses par lesquelles Euler intègre l'équation de Riccati, et Laplace un cas fort singulier de l'équation linéaire aux différences partielles.

Tous ceux qui étudient les Mathématiques ont besoin de revenir sur leurs pas, pour classer les connoissances qu'ils ont acquises; mais on leur épargne beaucoup de peine, et leurs idées s'ordonnent plus facilement, lorsqu'on leur présente de grandes divisions auxquelles les diverses méthodes viennent ensuite se rattacher.

J'ai eu principalement cet objet en vue, dans la division de mon ouvrage, et j'ai toujours fait ensorte que chaque chapitre, formant un Traité complet, ne dépendît de ceux qui le précèdent, que par la nature du sujet, et non pas par les détails; et pour tâcher d'atteindre à la clarté si désirable dans tous les livres élémentaires, je me suis imposé la loi de ne mettre sous les yeux du Lecteur aucun calcul, sans en avoir exposé le but, et fait connoître l'esprit; enfin j'ai apporté le plus grand soin à donner aux formules cette symétrie qui les fait presque deviner, et dont les écrits de Lagrange offrent tant d'exemples.

Uniquement animé du desir de faire un livre utile aux jeunes gens, j'ai écarté toutes les prétentions de l'amour-propre. Parmi beaucoup de choses extraites des ouvrages des grands Géomètres de nos jours, il se trouvera peut-être quelques détails qui m'appartiendront; mais je ne disputerai pas là-dessus, et je me contenterai de ce qu'on voudra bien me laisser. Le soin que j'ai pris de refondre, en quelque sorte, les

divers matériaux que j'ai empruntés, auroit rendu les mêmes citations trop répétées et trop ennuyeuses pour le Lecteur ; cependant afin de faire connoître la bibliographie des bons ouvrages de mathématiques, j'ai conçu le dessein de joindre à l'énoncé de chaque article, dans la table, le titre des Mémoires qui ont été consultés pour la rédaction, ou qui y ont quelque rapport. Je remplirai ainsi ce que l'équité exige, et les citations classées méthodiquement, seront plus utiles aux Élèves.

TABLE.

INTRODUCTION. Notions générales sur les fonctions et les séries, pag. 1

Introductio in analysin infinitorum, (Euler) (*).
Opuscules mathématiques, T. V, p. 171. (d'Alembert).

Développement des fonctions en séries.
1°. Des fonctions algébriques, pag. 19
2°. Des fonctions transcendantes.
Fonctions exponentielles et logarithmiques. pag. 33

Un Mémoire de Halley, Transactions philosophiques, n°. 216.

Fonctions circulaires. pag. 52

Nouveaux Mémoires de Petersbourg, T. V. page 164. (Euler).
Opuscula Analytica, T. I. pag. 345. (Euler).

TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE. DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAP. I. *Exposition analytique des principes du Calcul différentiel*, page 81

Analyse des infiniment-petits, (L'hopital).
Méthode des fluxions, (Newton).
Methodus Incrementorum, (Taylor).
Traité des fluxions, (Maclaurin).
Institutiones Calculi differentialis, (Euler).
The Residual Analysis, 1758 et 1764. (Landen).
Théorie des fonctions, (Lagrange) (**).
Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1772, page 185. (Lagrange).
Traité de Calcul différent. et de Calcul intégral. (Cousin).
Principiorum Calc. differ. et integr. expositio (L'Huillier).

Des changemens qu'éprouve une fonction de x lorsque x devient $x+k$ pag. 82
De la différentiation des fonctions d'une seule variable, pag. 94
De la différentiation des fonctions de deux variables, pag. 114
Différentiation des fonctions renfermant un nombre quelconque de variables, pag. 131
De la différentiation des équations, pag. 134
Des équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une formule soit la différentielle exacte d'une autre formule, pag. 178

Inst. Calc. diff. pag. 191 et 265.
Du Calcul intégral, page 4. (Condorcet).
Nouv. Mém. de Petersbourg, T. XV et XVI. (Lexell).

Méthode des limites, pag. 189

Encyclopédie articles, différentiel, limite (d'Alembert).

(*) Labey, Professeur d'un mérite distingué, vient de donner une traduction française de cet Ouvrage, à laquelle il a joint des notes intéressantes.
(**) Cet Ouvrage, si justement désiré, paroîtra incessamment.

CHAP. II. *Des principaux usages analytiques du Calcul différentiel*, page 195

Du développement des fonctions en séries, ibid.

Lineæ tertii ordinis Newtonianæ, (Stirling) (*)
Mém. Acad. de Berlin, ann. 1768, page 275. (Lagrange).
Mém. Acad. de Berlin, année 1770. p. 225. (Lambert).
Mém. Acad. des sciences de Paris, années 1777, page 99. (Laplace).

Considérations sur ce que devient le développement de f. $(x+k)$ dans certains cas particuliers pag. 232

Inst. Calc. diff. pag. 712.
Mém. Acad. de Berlin, ann. 1776, pag. 238. (Lagrange).

Des expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$ dans certains cas particuliers, pag. 241

Œuvres de Jean Bernoulli, Tom. I. page 401.
Mém. Acad. des Sciences, ann. 1716, p. 59 et 276, 1723, p. 222. (Saurin).
Ins. Calc. diff. pag, 738.

Du développement des fonctions de deux variables, pag. 255

Recherche des *maxima* et des *minima* des fonctions d'une ou de plusieurs variables, pag. 264

Traité des fluxions, T. II. art. 858. (Maclaurin)
Inst. Calc. diff. p. 578.
Mém. Acad. de Turin, T. I. page 18. (Lagrange).
Méchanique Analytique, page 39.

CHAP. III. *Digression sur les équations algébriques*, page 277

Meditationes algebraïcæ, (Waring)
Mémoires Acad. des sciences, de Paris, an. 1771, p. 365. (Vandermonde).

Recherche des fonctions semblables des racines des équations, ibid.

Sur les expressions imaginaires, pag. 286

Mémoire de l'Académie, de Berlin, année 1746, page 182, (d'Alembert), année 1749, page 222, page 139, (Euler).
Mémoires Acad. de Turin, T. I. page 113. T. II, p. 337. (Foncenex).
Opuscules mathématiques. T. V. p. 183. (d'Alembert).

N. B. Pour le Théorême de *Côtes*, démontré p. 302, voy. *Harmonia Mensurarum. Miscellanea analytica*. (Moivre).
Œuvres de Jean Bernoulli. T. IV. p. 67.

Pour la règle de *Descartes*, démontrée page 311, voyez *Mémoires de l'Acad. des Sciences*, de Paris, année 1741, page 72. (de Gua).
Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1756, (Segner).
Id. année 1758, (Æpinus).

Pour la controverse sur les logarithmes des nombres négatifs, page 316, il faus consulter le *Commercium epistolicum de Leibnitz et de Jean Bernoulli*, le T. I *des opuscules de D'Alembert et les Mémoires de Foncenex, cité plus haut.*

Pour l'élimination, traitée page 320, voyez *Mémoires de Berlin*, année 1748 et 1764. (Euler).
L'Appendice de l'introd. à l'Anal. des lignes courbes, (Cramer).

(*) Il seroit à désirer qu'on réimprimât cet Ouvrage, devenu très-rare, et qu'on le joignit à celui de Newton dont il est le commentaire.

Mémoires de l'Académie de Berlin, ann. 1769. (Lagrange).
Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris, 1772, II. Part. (Vandermonde).
Théorie des équations, (Bezout).
Pour la résolution par approximation, p. 324. Voyez *Inst. Cal. diff.* p. 546.
Essays on Several subjects, p. 81. (Simpson).
Mémoires de Berlin, ann. 1767 et 1768, page 463. (Lagrange).
Journal de l'École normale, T. III. (Lagrange).
J'indiquerai aussi par occasion *les réflexions données dans les Mém. de Berl.* 1770 *et* 1771, *sur les Méthodes pour la résolution algébrique des équations.* (Lagrange.)

CHAP. IV. *Théorie des Lignes courbes*, page 327

Comment les diverses circonstances du cours d'une ligne sont exprimées par son équation, ibid.
Géométrie de Descartes.
Enumeratio linearum tertii ordinis, (Newton) *id.* (Stirling).
Geometria organica, (Maclaurin).
Usages de l'analyse de Descartes, (de Gua).
Int. in anal. Inf. T. II. (Euler).
Introd. à l'Anal. des lignes courbes, (Cramer).
Traité des courbes algéb. (Duséjour et Goudin).

De la transformation des coordonnées, et de ses principaux usages, pag. 341
Application du dévelopt. des fonctions en séries à la théorie des courbes, p. 362
Usage du Calcul différentiel pour trouver les tangentes des courbes, leurs inflexions et leurs rebroussemens, pag. 369
Analyse des infiniment-petits, (l'Hôpital).

Théorie des osculations des courbes, pag. 388
Horolog. oscillatorium. P. III. (Huygens).
Int. in anal. Inf. T. II. Cap. XIII et XIV.
Mémoires de Berlin, année 1779, page 138. (Lagrange).

Des courbes transcendantes, pag. 401
Voyez pour leur histoire et les principaux points de leur théorie, le Traité des Spirales d'Archimède, ceux de la Cycloïde de Pascal, Roberval et Wallis, les œuvres de Leibnitz, de Jacques et de Jean Bernoulli, le Traité des Epicycloïdes de La Hire, Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1706.
Application de la méthode des limites à la recherche des lignes osculatrices, pag. 419

CHAP. V. *Théorie des Surfaces courbes et des Courbes à double courbure*, page 435

Equations du plan et de la ligne droite, ibid.
Int. in anal. Inf. T. II. Append. Cap. I.
Leçons de Stéréotomie données à l'École polytechnique, (Monge).
Acad. de Berlin, année 1773, (Lagrange).
Des surfaces courbes du second ordre, pag. 448
Int. in anal. Inf. T. II. Append. Cap. V.
Application du Calcul différentiel à la théorie des surfaces courbes, pag. 465
Mémoires de Berlin, année 1760, (Euler).
Savans Étrangers, T. X. (Meunier).
Mémoires de l'Académie des Soiences, années 1781, 1784, *Mémoires de Turin*, même année, *Savans Etrangers*, T. IX. (Monge).
Application du Calcul différentiel aux courbes à double courbure, pag. 504
Recherches sur les courbes à double courbure, (Clairaut).
Savans Étrangers, T. X. (Monge).

INTRODUCTION.

AVANT d'entrer en matière, nous placerons ici quelques propositions qu'on ne rencontre pas dans les élémens d'algèbre, et nous éclaircirons quelques points de métaphysique qui peuvent paroître épineux lorsqu'ils sont mal présentés. Il résultera delà plusieurs avantages pour la suite de ce traité; les démonstrations seront plus lumineuses et plus simples, et nous éviterons à nos lecteurs l'embarras de chercher dans d'autres ouvrages des secours pour entendre celui-ci.

Notions générales sur les fonctions, et les séries.

1. Les anciens Analystes comprenoient en général sous la dénomination de *fonctions* d'une quantité, toutes les puissances de cette quantité. Dans la suite on a étendu le sens de ce mot, en l'appliquant aux résultats des diverses opérations algébriques : ainsi on a encore appellé *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression algébrique renfermant d'une manière quelconque des sommes, des produits, des quotiens, des puissances et des racines de ces quantités. Enfin de nouvelles idées, amenées par les progrès de l'analyse, ont donné lieu à la définition suivante des fonctions.

Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou plusieurs autres quantités, est dite fonction *de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.*

La racine d'une équation du cinquième degré, par exemple, dont on ne sauroit assigner l'expression dans l'état actuel de l'algèbre, est néanmoins une fonction des coefficiens de l'équation, parce que sa valeur dépend de celles de ces coefficiens.

On distingue les fonctions suivant le nombre de quantités dont elles dépendent; ainsi la puissance quelconque mais déterminée d'une quantité, n'est fonction que de cette seule quantité. Si on prend la chose sous un point de vue plus général, qu'on envisage à la fois toutes les puissances possibles d'une quantité susceptible de valeurs quelconques, alors l'expression générale de ces puissances sera fonction de la quantité primitive et de l'exposant, puisque la valeur particulière de chacune d'elles dépend de ces deux choses.

2. C'est la considération des équations indéterminées qui a conduit à généraliser l'idée des fonctions. Lorsqu'on a voulu exprimer qu'une quantité ne pouvoit être assignée sans que préalablement on n'eut donné des valeurs particulières à d'autres quantités, qui pouvoient en être susceptibles d'un nombre indéfini dans une même question, on s'est servi du mot *fonction* pour désigner cette dépendance. Il suit delà que si on avoit, par exemple, l'une ou l'autre de ces équations,

$$\begin{cases} y = a x^2 + b x + c \\ y = a x z + b x^2 + c z^2 \end{cases}$$

on diroit que y est, dans la première, une fonction de x, ou qu'il est dans la seconde une fonction de x et de z. Il faut remarquer qu'on fait abstraction des quantités a, b, c, parce qu'elles sont déterminées, c'est-à-dire parce qu'on les regarde comme devant conserver la même valeur dans toutes les solutions dont chacune des équations précédentes est susceptible.

On pourroit, au lieu de ces équations, en rencontrer d'autres dans lesquelles les quantités inconnues se trouvassent engagées de façon qu'il ne fût pas possible de déterminer, sans quelques opérations préliminaires, la valeur de l'une d'elles : telles seroient les équations,

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = a x y \\ x^3 + y^3 + z^3 = a x z + b y z + c x y \end{cases}$$

dans ce cas l'inconnue y sera toujours une fonction de x, en vertu de la première, ou une fonction de x et de z en vertu de la seconde, parce que cette inconnue ne sauroit être déterminée à moins qu'on n'ait donné des valeurs particulières à x dans l'une, ou à x et à z dans l'autre.

Si dans les équations de cet exemple on se proposoit de déterminer x en conséquence des valeurs particulières données à y, ou à y et à z, on diroit que x seroit dans la première une fonction de y, ou dans la seconde une fonction de y et de z. On voit par-là que dans une équation qui renferme plusieurs inconnues, l'une quelconque d'entr'elles est toujours une fonction de toutes les autres; et c'est l'énoncé de la question qui fait connoître celle qu'on doit envisager ainsi. Lorsqu'on a une équation entre deux quantités, elles sont réciproquement fonction l'une de l'autre.

Nous venons de mettre sous les yeux du lecteur deux sortes d'exemples

qui donnent lieu à une distinction remarquable. Dans les premiers on voit tout de suite comment avec la valeur de x, ou celles de x et de z, on parviendroit à former la valeur de y; dans les seconds au contraire il faudroit encore résoudre une équation algébrique par rapport à y pour trouver cette quantité, en supposant qu'on connût les valeurs de x ou de x et de z. Nous dirons donc que dans le premier cas y est une fonction *explicite* de x ou de x et de z, et dans le second une fonction *implicite* des mêmes quantités.

Il n'est pas nécessaire qu'on ait une équation entre plusieurs quantités, pour qu'on dise que l'une d'elles est une fonction implicite des autres. Il suffit qu'on sache que sa valeur dépend de leurs valeurs particulières; ainsi dans un cercle, le sinus est une fonction implicite de l'arc, quoique l'analyse algébrique n'offre aucun moyen d'exprimer la relation de ces deux quantités, parce qu'en effet l'une d'elles est déterminée lorsque l'autre l'est, et réciproquement. Il est bon d'observer qu'ici nous avons fait abstraction du rayon, quoique la grandeur du sinus dépende aussi de cet élément, parce que nous n'avions en vue qu'un seul cercle.

3. On comprend sous la dénomination de fonctions algébriques, toutes celles qui résultent des opérations algébriques, ou dont la relation avec les quantités indéterminées dont elles dépendent peut être exprimée par une équation algébrique.

Les fonctions algébriques ne renferment jamais qu'un nombre limité de termes, lorsqu'on les exprime sous la forme qui leur est propre : cette restriction est nécessaire; car si on veut évaluer une fraction proprement dite, ayant un dénominateur binome ou polynome, par un assemblage de monomes, on tombe alors dans une suite indéfinie.

La fraction $\frac{a}{a-x}$ par exemple étant développée par la division ou autrement, donne la suite :

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

sans qu'on trouve jamais un quotient qui s'arrête. Il en est de même des racines des polynomes qui ne sont pas des puissances parfaites, lorsqu'on veut les exprimer d'une manière rationnelle, ou par une suite de monomes.

On sait que la formule de Newton, pour les puissances du binome, ne se termine pas lorsque l'exposant est un nombre négatif ou fractionnaire.

Mais il existe des fonctions qu'on ne sauroit exprimer par un nombre limité de termes, de l'espèce de ceux qui constituent les quantités algébriques : tels sont, par exemple, les logarithmes qu'on ne peut obtenir que par approximation, et qui dépendent de l'extraction d'un nombre indéfini de racines; les sinus et co-sinus qu'on ne sauroit évaluer au moyen de leurs arcs, sans y employer un nombre indéfini d'opérations algébriques. On a donné à ces fonctions le nom de transcendantes : celles que nous venons d'indiquer ne sont pas les seules de ce genre; les progrès que l'analyse a faits en ont introduit beaucoup d'autres, et peuvent en fournir indéfiniment.

Telle est l'origine des series, quoiqu'elles ne puissent donner la valeur exacte des fonctions auxquelles elles appartiennent, que lorsqu'elles se terminent, ou qu'on peut obtenir la somme de tous leurs termes, comme cela arrive dans les progressions géométriques décroissantes; cependant elles peuvent toutes, à l'instar de celles qu'on déduit des fonctions algébriques, être regardées comme le développement des fonctions inconnues dont elles dérivent.

4. Il est à propos de faire attention au mot *developpement* que l'on employe ici au lieu de celui de *valeur*, car une série ne donne pas toujours la valeur de la fonction à laquelle elle appartient; quelquefois même au lieu d'en approcher de plus en plus, à mesure qu'on prend plus de termes, elle s'en éloigne indéfiniment.

Le développement de la fraction $\frac{a}{a-x}$ va nous servir d'exemple, et les conséquences que nous en tirerons seront applicables aux séries dérivées de tous les genres de fonctions possibles.

Si on fait la division de a par $a-x$, à la manière ordinaire, on obtient pour quotient 1 et pour reste x; divisant ensuite le reste, on trouve le second quotient $\frac{x}{a}$ et un reste $\frac{x^2}{a}$: en continuant l'opération on aura les quotiens $\left\{\begin{matrix}\frac{x^2}{a^2}\\ \frac{x^3}{a^3}\\ \text{etc.}\end{matrix}\right.$ et les restes $\left\{\begin{matrix}\frac{x^3}{a^2}\\ \frac{x^4}{a^3}\\ \text{etc.}\end{matrix}\right.$

On tire de-là les expressions suivantes de la quantité $\frac{a}{a-x}$:

$$1 + \frac{x}{a-x},$$

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a(a-x)},$$

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^2(a-x)},$$

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^3(a-x)},$$

etc.

Il peut se présenter deux cas $\begin{cases} x < a. \\ x > a. \end{cases}$

Dans le premier, les restes x, $\frac{x^2}{a}$, $\frac{x^3}{a^2}$, etc.

vont toujours en diminuant, et les fractions $\frac{x}{a-x}$; $\frac{x^2}{a(a-x)}$, etc. suivent encore un décroissement plus rapide, ensorte que plus on prend de termes, tels que $1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} +$ etc., plus on approche du véritable quotient : il est possible de pousser cela si loin, que l'on vienne à différer de la vraie valeur, d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

Pour rendre cela sensible, supposons qu'on ait $x = \frac{a}{2}$; la suite précédente deviendra

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} +, \text{ etc.}$$

la somme $\begin{cases} \text{du premier terme sera} \ldots 1 = 1 \\ \text{des 2 premiers} \ldots 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \text{des 3 premiers} \ldots 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \\ \text{des 4 premiers} \ldots 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \\ \text{des 5 premiers} \ldots 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}. \end{cases}$

On voit que ces quantités vont toujours en s'approchant de 2 qui est la vraie valeur de la fonction $\frac{a}{a-\frac{1}{2}a}$. Les differences entre cette valeur et les sommes trouvées ci-dessus, forment la progression

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \text{ etc.},$$

dont les termes vont en décroissant de telle manière, qu'on en peut toujours assigner un qui soit plus petit qu'aucune grandeur donnée.

On peut tirer ce résultat de la nature même de l'opération; car il est aisé de voir qu'après un nombre n de divisions, le reste sera $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ et parconséquent la fraction qu'il faudra ajouter à la suite

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{a^{n-1}},$$

pour avoir la valeur exacte de $\frac{a}{a-x}$, sera $\frac{x^n}{a^{n-1}(a-x)}$: faisant $x = \frac{1}{2}a$, il vient $\frac{a^n}{2^n a^{n-1}}\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Cette dernière fraction ne peut jamais s'anéantir, mais elle est susceptible de devenir aussi petite qu'on voudra, en prenant convenablement le nombre n, qui désigne celui des termes employés dans la série; elle peut donc conduire à une valeur de $\frac{a}{a-\frac{1}{2}a}$ aussi approchée qu'on le voudra: mais cependant quelque loin qu'on pousse cette série, on ne pourra jamais tomber exactement sur le nombre 2 qui représente cette valeur.

Dorénavant nous appellerons *limite, toute quantité qu'une grandeur ne sauroit passer dans son accroissement ou son décroissement, ou même qu'elle ne sauroit atteindre, mais dont elle peut approcher aussi près qu'on le voudra.*

Dans l'exemple précédent, 2 est la limite de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ etc. et nous poserons l'équation $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ etc. en sous-entendant que le second membre doit être prolongé indéfiniment, ou ce qui revient au même, que le premier n'en est que la limite.

5. Dans le second cas pour lequel on a $x > a$, la suite

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

s'éloigne de plus en plus de la vraie valeur de $\frac{a}{a-x}$, car les restes

$$x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \text{etc.}$$

vont toujours en augmentant, ainsi que les quantités

$$\frac{x^2}{a(a-x)}, \quad \frac{x^3}{a^2(a-x)}, \text{etc.}$$

qu'il faut joindre aux quotiens

$$1 + \frac{x}{a}$$

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}$$

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

etc.,

pour avoir cette vraie valeur. La suite proposée n'a plus alors pour limite la fraction $\frac{a}{a-x}$, elle est seulement le résultat de la division de a par $a-x$ continuée indéfiniment, ou en d'autres termes, le développement de $\frac{a}{a-x}$.

Si une question nous conduisoit à une série telle que

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

nous serions en droit d'en conclure que la fonction cherchée, n'est autre que $\frac{a}{a-x}$; ou si nous découvrions quelques propriétés relatives à une suite de termes tels que $1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \text{etc.}$, nous pourrions affirmer qu'elle appartient à la fonction $\frac{a}{a-x}$. Mais toutes les fois qu'il s'agira de la valeur absolue de cette quantité, nous ne saurions employer la suite trouvée par son développement, qu'en ayant égard au reste.

Soit pour exemple $x = 2a$, on a alors cette suite,

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{etc.}$$

qui ne sauroit être égale à -1, valeur de la fraction $\frac{a}{a-x}$ dans ce cas, parce que les restes sont successivement $2a$, $4a$, $8a$, etc. et que les termes correctifs deviennent -2, -4, -8, etc. si on les employe à leur rang, on trouve pour résultat -1, quelque soit le terme auquel on s'arrete.

Si l'on avoit $x = a$, la fraction $\frac{a}{a-x}$ se changeroit en $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$. cette expression $\frac{1}{0}$ qu'on appelle infinie, n'est qu'une espèce de limite exclusive. En effet, si on conçoit l'unité divisée par une fraction, plus cette fraction sera petite plus le quotient sera grand, et comme on peut toujours concevoir une fraction qui soit plus petite qu'aucune quantité donnée, il en résultera, pour le quotient, un nombre tel qu'il pourra surpasser tout nombre donné, sans que néanmoins il soit

possible d'arriver jamais à $\frac{1}{0}$. Telle est l'idée qu'il faut se former de l'infini des Géomètres, et sur laquelle nous reviendrons bientôt.

Cela posé, la suite, $1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} +$ etc.,

en y faisant $x = a$, donne $1 + 1 + 1 + 1 +$ etc.,
résultat qui, comme le demande l'expression $\frac{1}{0}$, peut devenir plus grand qu'aucune quantité donnée. Cependant à cause que le diviseur multiplié par le quotient doit reproduire le dividende, il paroîtroit suivre delà que $1 = 0\,(1 + 1 + 1 + 1 +$ etc.);
or le second membre s'anéantit rigoureusement, on auroit donc $1 = 0$; mais on verra aisément que la difficulté n'est qu'apparente, car les restes continuels étant toujours égaux à l'unité, l'equation qu'on doit avoir aulieu de la précédente est,

$$1 = 0\,(1 + 1 + 1 +\text{ etc.}) + 1$$

ce qui est exact.

6. L'examen du développement de la fraction $\frac{a}{a+x}$, qui est

$$1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} +\text{ etc.},$$

nous conduiroit à des conséquences analogues aux précédentes, avec cela de particulier, que les résultats d'un nombre quelconque de termes ajoutés ensemble passent alternativement d'un côté et de l'autre de la vraie valeur. Si la série est convergente, ce qui a lieu lorsque $x < a$, on trouve des sommes alternativement plus petites et plus grandes que la valeur exacte, mais qui s'approchent de plus en plus de cette valeur, et qui peuvent en approcher d'aussi près qu'on voudra. En faisant comme ci-dessus $x = \frac{a}{1}$, on aura

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} -\text{ etc.},$$

suite dont les sommes $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}$, ect.,
sont alternativement plus grandes et plus petites que $\frac{2}{3}$, qui est la vraie valeur de $\frac{a}{a + \frac{1}{2}a}$.

Lorsque la série est divergente, les résultats de l'addition d'un nombre donné des termes qui la composent, sont alternativement positifs ou négatifs, et par conséquent s'éloignent de plus en plus dans l'un et l'autre sens de la vraie valeur qui est positive.

Enfin

Enfin le cas de $x = a$, a cela de remarquable, que son développement

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$

devient tantôt 1, tantôt 0, résultats qui s'écartent également de la vraie valeur $\frac{1}{2}$; mais la considération des restes ou des termes correctifs redresse tout cela.

Les séries qu'on trouve en développant les puissances fractionnaires des quantités par l'extraction des racines, sont accompagnées de restes successifs auxquels on peut appliquer ce qui précède.

En général *pour qu'une série qui est le développement d'une fonction finie, approche continuellement de la vraie valeur, il faut que les termes qui la composent aillent en décroissant.* En effet, puisqu'en poussant la série aussi loin qu'il est nécessaire, on doit trouver un résultat dont la différence avec la vraie valeur, soit moindre qu'aucune quantité donnée, il faut que les différences entre les résultats successifs deviennent de plus en plus petites, ce qui ne sauroit arriver à moins que les termes de cette série ne finissent par être décroîssans.

Il est bon d'observer qu'il y a des séries dont la somme est susceptible de croître indéfiniment, quoique leurs termes aillent toujours en diminuant, mais alors elles sont le développement des fonctions infinies ou plus grandes qu'aucune quantité donnée : la suite

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}, \text{ etc.}$$

est de ce nombre, comme nous le ferons voir en parlant des logarithmes.

Les deux sortes de séries que nous avons considérées nous fournissent deux genres de quantités, les unes susceptibles d'une limite finie ou déterminée, les autres pouvant croître indéfiniment. Nous prendrons delà occasion d'exposer la vraie métaphysique qu'il faut substituer à celle de l'infini employée assez fréquemment dans les mathématiques.

7. L'infini, regardé comme le dernier terme de la grandeur, n'est lui-même qu'une limite que les quantités ne peuvent jamais atteindre; l'idée qu'on doit y attacher n'est qu'une idée négative; car toute quantité que je concevrai, que je ferai entrer dans un calcul, par cela seul ne sera pas infinie. La définition de la quantité s'oppose même à ce qu'on puisse donner une notion quelconque de l'infini.

Puisque toute quantité, par son essence, doit être susceptible d'augmentation ainsi que de diminution, il sembleroit delà qu'on soit en droit d'en conclure que la quantité cesse d'exister ou d'être quantité lorsqu'on la suppose parvenue à l'infini; et si on vouloit pousser cette discussion un peu loin, on tomberoit dans des difficultés dont heureusement les vérités mathématiques ne peuvent recevoir aucune atteinte, lorsqu'on établit clairement les notions sur lesquelles elles reposent.

Tout ce qu'on démontre à l'aide de la considération de l'infini, peut se déduire de la notion que nous avons donnée plus haut du mot *limite* et des deux propositions suivantes qui sont aussi claires qu'incontestables:

1°. *Quelque grande que soit une quantité, on peut en concevoir une autre qui la surpasse autant qu'on voudra.*

2°. *Quelque petite que soit une quantité, on peut en concevoir une qui soit encore au-dessous de celle-là.*

La première se trouve au nombre des demandes qu'Euclide a faites au commencement du septième Livre de ses Elémens, et la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. en offre un cas bien simple, ainsi que le prolongement indéfini d'une ligne droite: la seconde dérive naturellement de la première; car pour les nombres, par exemple, si on conçoit la suite des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc., rien ne s'oppose à ce qu'on trouve dans cette suite des quantités aussi petites qu'on voudra, en donnant au dénominateur une valeur convenable; et comme en prenant pour unité une partie quelconque de l'étendue linéaire, on peut en concevoir aussi telle fraction qu'on voudra, il s'en suit que la proposition n'est pas particulière aux nombres. Nous nous servirons néanmoins toujours du mot *infini* pour désigner la limite de l'accroissement des grandeurs, parce que la signification de ce mot étant bien convenue par ce qui vient d'être dit, il n'y a plus à craindre d'équivoque ni d'obscurité à cet égard.

8. La première conséquence que nous tirons de ce qui précède, c'est que si on a une suite de termes telle que $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} +$ etc., ordonnée par rapport aux puissances de x, en commençant par la plus haute, il existe toujours un nombre m qui, mis à la place de x,

rend le premier terme de cette formule plus grand que tout le reste, d'une quantité telle qu'on voudra.

En effet en écrivant ainsi la formule proposée,

$$x^{\alpha}\left(A+\frac{B}{x^{\alpha-\beta}}+\frac{C}{x^{\alpha-\gamma}}+\text{etc.}\right)$$

il est clair qu'on pourra prendre x, de manière que les fractions $\frac{B}{x^{\alpha-\beta}}$, $\frac{C}{x^{\alpha-\gamma}}$ etc. soient d'une petitesse donnée et telle que leur somme soit avec A dans le rapport qu'on voudra. Si m représente la valeur de x dans ce cas, puisqu'on aura

$$\frac{B}{m^{\alpha-\beta}}+\frac{C}{m^{\alpha-\gamma}}+\text{etc.}<A,$$

on en tirera $$m^{\alpha}\left(\frac{B}{m^{\alpha-\beta}}+\frac{C}{m^{\alpha-\gamma}}+\text{etc.}\right)<A\,m^{\alpha},$$

ou $$B\,m^{\beta}+C\,m^{\gamma}+\text{etc.}<A\,m^{\alpha}.$$

La différence entre le premier terme $A\,m^{\alpha}$ et les suivans étant mise sous cette forme,

$$m^{\alpha}\left\{A-\left(\frac{B}{m^{\alpha-\beta}}+\frac{C}{m^{\alpha-\gamma}}+\text{etc.}\right)\right\},$$

on voit que plus m sera grand, plus elle augmentera; ainsi rien n'empêche qu'elle ne vienne à surpasser une grandeur donnée.

Ce raisonnement n'étant point limité par le nombre des termes, on peut l'étendre à toute expression de la forme $A\,x^{\alpha}+B\,x^{\beta}+\text{etc.}$ composée d'autant de termes qu'on le voudra, et affirmer qu'on peut toujours prendre x assez grand pour que le premier terme compose à lui seul la plus forte partie de la valeur de cette expression, pourvû toutefois que chacun des coefficiens A, B, C, D, etc. soit une quantité finie.

Les mêmes considérations vont nous conduire a démontrer qu'il existe toujours une quantité assez petite pour qu'en la substituant au lieu de x dans la formule précédente, le terme où cette quantité a le plus petit exposant, soit plus grand que le reste de l'expression. Pour cela nous la supposerons ordonnée par rapport à x, en commençant par le plus petit exposant de cette quantité, et nous

l'écrirons ainsi, $x^{\alpha}\left(A + B\,x^{\beta-\alpha} + C\,x^{\gamma-\alpha} + \ldots\right)$.

Si nous remplaçons x par une fraction dont le numérateur soit l'unité, et le dénominateur $= m$, il viendra

$$\frac{1}{m^{\alpha}}\left(A + \frac{B}{m^{\beta-\alpha}} + \frac{C}{m^{\gamma-\alpha}} \ldots\ldots\right):$$

or le nombre m pourra toujours être conçu tel que les fractions

$$\frac{B}{m^{\beta-\alpha}},\ \frac{C}{m^{\gamma-\alpha}} \ldots,\ldots,$$

tombent au-dessous de A, ainsi que leur somme. En raisonnant comme tout à l'heure, nous dirons que dans toute expression de la forme

$$A\,x^{\alpha} + B\,x^{\beta} + C\,x^{\gamma} + \ldots., \text{ etc.},$$

on peut toujours substituer au lieu de x, une quantité assez petite pour que le premier terme soit la partie la plus considérable de la valeur de cette fonction.

9. On pourroit croire que le nombre m n'est ici que l'infini, représenté par un autre caractère que celui qui sert à le désigner ordinairement en algèbre; mais pour prouver le contraire, nous allons montrer comment on peut, en général, déterminer ce nombre.

Pour cela nous remarquerons d'abord, que dans la progression géométrique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$, etc. qui a pour limite le nombre 2 (n° 4.), un terme quelconque est égal à la somme de tous ceux qui le suivent : par conséquent, dans une série dont le décroissement des termes sera plus rapide, chacun d'eux surpassera la somme de ceux qui viennent après lui, quel que soit leur nombre. Il suit delà que toutes les fois qu'on pourra trouver pour m une valeur qui rende chaque terme de l'expression $A + \frac{B}{m^{\beta-\alpha}} + \frac{C}{m^{\gamma-\alpha}} \ldots.$ plus petit que la moitié de celui qui le précéde, alors le premier terme surpassera tous les autres; or c'est ce qui arrive en général. Nous nous bornerons néanmoins à un cas particulier, le seul dont nous ayons besoin dans la suite.

Soit $A + \frac{B}{m} + \frac{C}{m^{2}} + \frac{D}{m^{3}} \ldots.$; le cas le plus défavorable de la recherche que nous nous proposons, est celui où les coefficiens A,

B, C, D, etc. vont en croissant; supposons qu'il ait lieu, et que le rapport géométrique de chacun de ces coefficiens à celui qui le précède, change continuellement; représentons par $\frac{P}{m^p}$ et $\frac{Q}{m^{p+1}}$ les deux termes consécutifs entre lesquels ce rapport se trouve le plus grand : il faudra prendre m tel qu'on ait $\frac{Q}{m^{p+1}} < \frac{P}{2\,m^p}$. En multipliant les deux membres par m^{p+1}, on trouvera $Q < \frac{P\,m}{2}$, et en divisant par $\frac{P}{2}$, il viendra $\frac{2Q}{P} < m$: il faudra donc prendre m plus grand que $\frac{2Q}{P}$. On voit par-là que dans les suites de la forme proposée, on peut obtenir la valeur du nombre m, toutes les fois que le rapport de deux coefficiens consécutifs de ces suites, pris quelque part que ce soit, ne sera pas inassignable, c'est-à-dire plus grand qu'aucune quantité donnée.

Pour éclaircir ceci, prenons quelques exemples numériques, et considérons, en premier lieu, la suite

$$2\frac{(10)^2}{m} + 4\frac{(10)^4}{m^2} + 6\frac{(10)^6}{m^3} + 8\frac{(10)^8}{m^4} \text{ etc.}$$

dont la loi est telle, que deux termes consécutifs sont exprimés en général par $\frac{2p.(10)^{2p}}{m^p}$, $\frac{2(p+1)(10)^{2p+2}}{m^{p+1}}$. On a donc alors

$$\left.\begin{aligned} P &= 2p\,(10)^{2p} \\ Q &= (2p+1).\,(10)^{2p+2} \end{aligned}\right\}$$; le rapport de ces deux coefficiens est $(\frac{p+1}{p}).(10)^2$, or il est aisé de voir qu'en prenant pour p des nombres entiers positifs, et en faisant successivement $p = 1$, $= 2$, $= 3$, etc. la quantité $\frac{p+1}{p}$ devient $= 2$, $= \frac{3}{2}$, $= \frac{4}{3}$, etc. et que, par conséquent, sa plus grande valeur est 2. Il résulte de-là que 200 est le plus grand rapport qui puisse exister entre deux termes consécutifs de la suite proposée, et qu'en faisant $m > 400$, le premier terme sera plus grand que tous les autres pris ensemble.

Si on a la suite $1 + \frac{1.2.}{m} + \frac{1.2.3.}{m^2} + \frac{1.2.3.4.}{m^3}$ etc., les termes $\frac{P}{m^p}$ et $\frac{Q}{m^{p+1}}$, y seront exprimés par $\frac{1.2.3...(p+1)}{m^p}$ et $\frac{1.2.3...(p+1)(p+2)}{m^{p+1}}$; on aura donc $\frac{2Q}{P} = 2(p+2)$, et il faudra prendre $m > 2(p+2)$,

c'est-à-dire toujours plus grand, à mesure qu'on considérera des termes plus éloignés du premier ; on voit donc qu'il n'est pas possible d'assigner à m, une valeur finie qui satisfasse à la question.

Si on fait $m = \frac{1}{x}$, la suite $A + \frac{B}{m} + \frac{C}{m^2} + \frac{D}{m^3}$. . . . . deviendra $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc.... dans laquelle *on peut toujours rendre le premier terme supérieur à la somme de tous ceux qui le suivent, en prenant* $\frac{1}{x} > \frac{2Q}{P}$ *ou* $x < \frac{P}{2Q}$; P *et* Q *étant les deux termes consécutifs dont le rapport géométrique est le plus grand, mais cependant assignable* : restriction qui ne nuira point à l'usage que nous ferons de la proposition actuelle dans la suite. La série que nous considérons a tous ses termes positifs, mais il est aisé de voir que la valeur de m, qui rend son premier terme plus grand que tous les autres, produiroit à plus forte raison le même effet, si elle en avoit de négatifs.

10. Il est aisé de démontrer de cette manière *qu'une équation d'un dégré impair a toujours au moins une racine réelle*. En effet, par ce qui vient d'être dit, on voit qu'il est toujours possible de substituer, pour l'inconnue, un nombre tel que le premier terme soit la partie la plus considérable de l'équation; le signe du résultat dépendra donc uniquement de celui de ce premier terme. Or, si l'équation est de dégré impair, il deviendra négatif en mettant $-m$, au lieu de l'inconnue, et il restera positif en y mettant $+m$; d'où il suit que l'équation aura une racine réelle comprise entre $+m$ et $-m$, puisque les résultats qu'elle donne, par ces deux substitutions, sont de signe contraire. Mais parce que toute équation se réduit à son dernier terme lorsqu'on met 0 au lieu de l'inconnue, cette substitution donnera un résultat qui aura le signe de ce dernier terme; par conséquent, s'il a le signe +, la racine sera comprise entre $-m$ et 0, et s'il a le signe —, elle se trouvera entre $+m$ et 0.

Lorsque l'équation est de dégré pair, son premier terme ne change pas de signe par les substitutions de $+m$ et de $-m$, au lieu de x; mais si son dernier terme est négatif, comme il est lui-même le résultat de la substitution de 0 au lieu de x, on a alors trois résultats,

savoir,

le 1er de signe + répondant à m,
le 2e de signe — répondant à 0,
le 3e de signe + répondant à $-m$:

d'où il suit que *toute équation de dégré pair dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.*

11. Quoique la quantité considérée en elle-même puisse croître ou décroître indéfiniment, cependant toute fonction n'est pas susceptible de parvenir à un dégré quelconque de grandeur, eû égard aux quantités dont elle est composée. La fonction très-simple $\frac{a\,x}{x+a}$ est telle, que quelque valeur positive qu'on donne à x, elle ne sauroit devenir égale à a, mais elle peut approcher de cette quantité aussi près qu'on le voudra. Pour le prouver nous ferons la division par rapport à x, et nous aurons pour quotient,

$$a - \frac{a^2}{x+a};$$

la fraction $\frac{a^2}{x+a}$ deviendra d'autant plus petite que x sera plus grand, sans néanmoins pouvoir jamais devenir nulle; a est donc la limite de la fraction $\frac{a\,x}{x+a}$. (n° 4.)

La fonction que nous avons prise pour exemple n'est susceptible de limite que relativement aux accroissemens de x; car si on supposoit que cette quantité décrût jusqu'à s'évanouir, $\frac{a\,x}{x+a}$ deviendroit nulle en même temps, et parce que le zéro est la limite générale du décroissement, on en fait abstraction. La fraction $\frac{x+b}{a}$ au contraire, n'a point de limite relative à l'accroissement de x, puisqu'elle augmente indéfiniment lorsque cette quantité augmente; mais tant que x sera positif, quelque petite que soit sa valeur, la fraction proposée ne sauroit devenir égale à $\frac{b}{a}$, elle en approche cependant d'aussi près qu'on voudra: voilà donc, par rapport au décroissement, une limite autre que zero.

La fonction $\frac{a\,x+b}{a\,x+b'}$, réunit les deux espèces de limite que nous venons de considérer. En effet, si on divise le numérateur et le dé-

nominateur de cette fraction par x, on aura

$$\frac{a + \frac{b}{x}}{a' + \frac{b'}{x}},$$

expression qui approche d'autant plus de $\frac{a}{a'}$ que x sera plus grand par rapport à b et à b', ainsi la limite de la fonction proposée, est donc $\frac{a}{a'}$ relativement aux accroissemens que x peut prendre. Si on suppose ensuite que x aille toujours en décroissant, et qu'on lui substitue $\frac{1}{m}$, on aura

$$\frac{\frac{a}{m} + b}{\frac{a'}{m} + b'},$$

fonction dont la limite est évidemment $\frac{b}{b'}$.

Toutes les fonctions n'ont pas, comme la précédente, des limites déterminées; il peut être utile quelquefois de connoître celles qui en sont susceptibles ou non, et c'est ce que nous allons faire voir par un petit nombre de cas.

12. Il est d'abord évident que toute fonction composée d'une suite de termes tels que $A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} +$ etc., peut augmenter indéfiniment lorsque la quantité x augmente de cette manière; elle peut aussi devenir o et passer ensuite au négatif. Considérons donc l'expression

$$\frac{A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} + \ldots\ldots}{A' x^{\alpha'} + B' x^{\beta'} + C' x^{\gamma'} + \ldots\ldots}$$

qui peut, dans certains cas, avoir des limites déterminées. On les découvrira en donnant à cette fraction la forme que voici :

$$\frac{x^{\alpha}\left(A + \frac{B}{x^{\alpha-\beta}} + \frac{C}{x^{\alpha-\gamma}} + \ldots\right)}{x^{\alpha'}\left(A' + \frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}} + \frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}} + \ldots\right)}$$

Pour

Pour trouver les limites relatives à l'accroissement de x, nous supposerons que la suite du numérateur et celle du dénominateur commencent par le plus haut exposant de x, et nous distinguerons trois cas:

$$\alpha > \alpha'$$
$$\alpha < \alpha'$$
$$\alpha = \alpha'$$

les formules correspondantes seront,

$$\frac{x^{\alpha-\alpha'}\left(A + \frac{B}{x^{\alpha-\beta}} + \frac{C}{x^{\alpha-\gamma}} + \ldots\right)}{A' + \frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}} + \frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}} + \ldots} \text{ pour le } 1^{\text{er}} \text{ cas,}$$

$$\frac{A + \frac{B}{x^{\alpha-\beta}} + \frac{C}{x^{\alpha-\gamma}} + \ldots}{x^{\alpha'-\alpha}\left(A' + \frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}} + \frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}} + \ldots\right)} \text{ pour le } 2^{\text{e}} \text{ cas,}$$

$$\frac{A + \frac{B}{x^{\alpha-\beta}} + \frac{C}{x^{\alpha-\gamma}} + \ldots}{A' + \frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}} + \frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}} + \ldots} \text{ pour le } 3^{\text{e}} \text{ cas.}$$

Il n'y a que la dernière qui soit susceptible d'une limite déterminée et égale à $\frac{A}{A'}$; la première peut augmenter indéfiniment, et la deuxième devenir aussi petite qu'on le voudra: cela est évident par l'inspection des formules et par ce qui a été dit ci-dessus.

13. Dans la recherche des limites relatives au décroissement de x, nous supposerons que le numérateur et le dénominateur soient ordonnés de manière que les exposans aillent en croissant, alors α et α' étant les plus petits, la fonction proposée deviendra,

$$\frac{x^{\alpha}\left(A + Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \ldots\right)}{x^{\alpha'}\left(A' + B'x^{\beta'-\alpha'} + C'x^{\gamma'-\alpha'} + \ldots\right)}$$

En distinguant encore comme ci-dessus les cas dans lesquels on a

$$\alpha > \alpha'$$
$$\alpha < \alpha'$$
$$\alpha = \alpha'$$

on verra que le dernier est le seul qui soit susceptible d'une limite déterminée, parce que les puissances positives $x^{\beta-\alpha}$, $x^{\gamma-\alpha}$, etc. et leurs correspondantes dans le dénominateur, devenant toujours moindres à mesure que x diminue, les quantités renfermées dans la parenthèse tendent à se réduire à leur premier terme, auquel cas en supposant $\alpha = \alpha'$, on a pour limite $\frac{A}{a'}$.

Dans les deux autres cas il reste une puissance positive de x au numérateur ou au dénominateur, comme facteur commun, ce qui fait que l'un ou l'autre de ces termes diminue toujours en même-tems que x et peut finir par s'anéantir, d'où il résulteroit pour la fraction proposée une valeur nulle ou plus grande qu'aucune quantité donnée (n° 5).

Au reste nous ferons remarquer qu'on trouve la limite soit pour l'accroissement de x, soit pour son décroissement, en réduisant tout de suite le numérateur et le dénominateur de la fraction chacun à leur premier terme, qui, d'après ce qu'on a vu (n° 8), forme, dans l'un et l'autre cas, la partie la plus considérable de la valeur de ces fonctions, et c'est ainsi que nous en userons à l'avenir.

14. Les principes que nous venons d'employer sont suffisans pour trouver les limites des quantités qui en sont susceptibles, et nous terminerons cette digression par les deux propositions suivantes qui nous seront très-utiles.

1°. *Deux grandeurs qui sont la limite d'une même fonction sont égales entr'elles.*

Car si cela n'étoit pas, ces deux grandeurs auroient une différence et par conséquent la fonction proposée ne sauroit approcher en même-tems de l'une et de l'autre de ces grandeurs de plus près qu'une quantité donnée, ce qui est contre la définition des limites.

2°. *Lorsque deux grandeurs conservent entr'elles un rapport invariable, ce rapport est celui de leurs limites*; cela est evident par soi-même.

Développement des fonctions en séries.

1° Des fonctions algébriques.

15. Passons maintenant au développement des fonctions en séries, et commençons par celui de $(p+x)^n$. Quoiqu'il se trouve dans presque tous les livres élémentaires, la manière dont on y parvient ne pouvant s'appliquer rigoureusement qu'au cas où n est un nombre entier positif, nous croyons devoir le démontrer de nouveau par un procédé qui ne soit pas sujet à cette restriction. D'ailleurs pour peu qu'on soit versé dans l'analyse, on sait que l'expression de $(p+x)^n$, due à Newton, sert au développement de toutes les fonctions : il est donc convenable, en traitant ce sujet, de commencer par elle.

L'inspection des premières puissances de $(1+x)$, savoir :

$$\left.\begin{array}{l}(1+x)=1+x\\(1+x)^2=1+2x+x^2\\(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3\\(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4\end{array}\right\}$$

etc.....,

conduit à supposer en général

$$(1+x)^n=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc.};$$

les coefficiens A, B, C, D, etc. étant des nombres indépendans de x, ensorte qu'ils demeurent les mêmes quelque valeur qu'on donne à cette quantité. Mais on a $(p+x)^n=p^n\left(1+\frac{x}{p}\right)^n$; mettant donc dans la série proposée $\frac{x}{p}$ au lieu de x, on aura

$$(p+x)^n=p^n\left(1+A\frac{x}{p}+B\frac{x^2}{p^2}+C\frac{x^3}{p^3}+D\frac{x^4}{p^4}+\text{etc.}\right);$$

et en effectuant la multiplication par p^n, il viendra (1).....

$$(p+x)^n=p^n+Ap^{n-1}x+Bp^{n-2}x^2+Cp^{n-3}x^3+Dp^{n-4}x^4+\text{etc.}:$$

équation qui doit se vérifier indépendamment d'aucune valeur particulière de p et de x, lorsque les coefficiens A, B, C, D, etc. seront déterminés convenablement (*).

(*) Lorsqu'on dit que cette équation doit avoir lieu indépendamment d'aucune valeur particulière de p et de x, on entend par-là que tous ses termes doivent se détruire entr'eux, de manière qu'il n'en résulte aucune détermination pour ces quantités. Si par exemple on avoit $(p+x)^2=p^2+2px+x^2$; il est clair qu'en développant le premier membre, il se trouveroit composé des mêmes termes que le second, et par conséquent l'équation seroit satisfaite, quelque soient p et x. Il n'en seroit pas ainsi de l'équation $p^2+x^2=2px$, qui ne sauroit exister pour toutes sortes de valeurs de p et de x; il faut nécessairement que l'une de ces quantités

Supposons maintenant que x se change en $x+u$, il faudra qu'on ait alors (2). . . . .

$$(p+x+u)^n = p^n + Ap^{n-1}(x+u) + Bp^{n-2}(x+u)^2 + Cp^{n-3}(x+u)^3 + Dp^{n-4}(x+u)^4 + \text{etc...}$$

Mais on peut encore présenter cette équation sous une autre forme; en posant $p+x=q$; alors $(p+x+u)^n$ deviendra $(q+u)^n$, et en substituant q à p et u à x dans l'équation (1), il en résultera (3)....

$$(q+u)^n = q^n + Aq^{n-1}u + Bq^{n-2}u^2 + Cq^{n-3}u^3 + Dq^{n-4}u^4 + \text{etc.}$$

Les seconds membres des équations (2) et (3), n'étant que les expressions d'une même quantité mise sous deux formes différentes, on peut les égaler, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} p^n + Ap^{n-1}(x+u) + Bp^{n-2}(x+u)^2 \\ \quad + Cp^{n-3}(x+u)^3 + Dp^{n-4}(x+u)^4 \\ \qquad + \text{etc.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} q^n + Aq^{n-1}u + Bq^{n-2}u^2 \\ \quad + Cq^{n-3}u^3 + Dq^{n-4}u^4 \\ \quad + \text{etc.} \end{array}\right.$$

mais pour comparer entr'eux les deux membres de cette dernière équation, il faut développer dans le premier les puissances de $(x+u)$ qui s'y trouvent : or en imitant l'équation (1), on verra qu'on peut supposer,

$$\begin{aligned} x+u &= x + a'u \\ (x+u)^2 &= x^2 + a''xu + b''u^2 \\ (x+u)^3 &= x^3 + a'''x^2u + b'''xu^2 + c'''u^3 \\ (x+u)^4 &= x^4 + a^{IV}x^3u + b^{IV}x^2u^2 + c^{IV}xu^3 + d^{IV}u^4 \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

les lettres a, b, c, d etc. désignant des nombres indépendans de x et de u, et l'accent qui les affecte, marquant à quelle puissance elles appartiennent. En substituant ces valeurs et en ordonnant de manière que tous les termes affectés d'une même puissance de u se trouvent dans

---

soit déterminée par l'autre. La première équation est du genre de celles qu'on appelle *identiques*. On voit donc que toute équation identique n'établit aucune relation entre les quantités qu'elle renferme; elle prouve seulement qu'une certaine condition est remplie, ou qu'une vérité a lieu. Quand on se propose de résoudre un problème et qu'on a trouvé l'équation qui doit en donner la solution, cette équation n'est pas identique; mais si par un pressentiment particulier, ou par des considérations étrangères, on avoit deviné l'expression des quantités inconnues et qu'on la substituât dans l'équation proposée, alors elle deviendroit identique : d'où il suit que lorsqu'on énonce un théorême et qu'on le prouve ensuite par le calcul, on n'employe implicitement que des équations identiques; on peut donc faire de la synthèse en algèbre.

une même colonne verticale, nous aurons (+) :

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
p^n & +Ap^{n-1}a' & +Bp^{n-2}b'' & +Cp^{n-3}c''' & +Dp^{n-4}d^{IV} & \\
+Ap^{n-1}x & +Bp^{n-2}a''x & +Cp^{n-3}b'''x & +Dp^{n-4}c^{IV}x & \text{etc.} & \\
+Bp^{n-2}x^2 & +Cp^{n-3}a'''x^2 & +Dp^{n-4}b^{IV}x^2 & \text{etc.} & & \\
+Cp^{n-3}x^3 & +Dp^{n-4}a^{IV}x^3 & \text{etc.} & & & \\
+Dp^{n-4}x^4 & \text{etc.} & & & & \\
+\text{etc.} & & & & & \\
\hline
=q^n & +Aq^{n-1}u+ & Bq^{n-2}u^2+ & Cq^{n-3}u^3+ & Dq^{n-4}u^4 & \text{etc.}
\end{array}$$

Puisque la valeur de x doit rester indéterminée dans l'équation (1), il est aisé de voir qu'il faut en dire autant de x et de u dans l'équation (4) qui n'est qu'une suite de la première; or une telle condition ne peut être remplie à moins que l'équation (4) ne devienne identique indépendamment de u; c'est-à-dire, à moins que les quantités, qui multiplient la même puissance de u dans l'un et l'autre membre, ne se détruisent mutuellement.

En comparant d'abord la première colonne de chaque membre, on trouve $p^n + Ap^{n-1}x + Bp^{n-2}x^2 + Cp^{n-3}x^3 + Dp^{n-4}x^4 + \text{etc.} = q^n$, résultat identique par l'hypothèse même, puisque $q^n = (p+x)^n$.

Passant à la seconde colonne on trouve :

$Ap^{n-1}a' + Bp^{n-2}a''x + Cp^{n-3}a'''x^2 + Dp^{n-4}a^{IV}x^3 + \text{etc.} = Aq^{n-1}$,

équation qui nous suffira pour déterminer les coefficiens A, B, C, D, etc. En effet, $q^{n-1} = \frac{q^n}{q} = \frac{(p+x)^n}{p+x}$, mettant au lieu de $(p+x)^n$, son expression, on aura, en chassant le dénominateur,

$(Ap^{n-1}a' + Bp^{n-2}a''x + Cp^{n-3}a'''x^2 + Dp^{n-4}a^{IV}x^3 + \text{etc.})(p+x)$

$= Ap^n + A^2p^{n-1}x + ABp^{n-2}x^2 + ACp^{n-3}x^3 + ADp^{n-4}x^4$, etc.

et en effectuant la multiplication indiquée,

$$\begin{array}{l}
Ap^n a' + Bp^{n-1}a'' \\
\quad + Ap^{n-1}a'
\end{array}\Big\}x + \begin{array}{l}
Cp^{n-2}a''' \\
\quad + Bp^{n-2}a''
\end{array}\Big\}x^2 + \begin{array}{l}
Dp^{n-3}a^{IV} \\
\quad + Cp^{n-3}a'''
\end{array}\Big\}x^3 \text{ etc.....}$$

$$= Ap^n + A^2p^{n-1}x + ABp^{n-2}x^2 + AC p^{n-3}x^3 \text{ etc.}$$

Dans tous ces calculs il ne faut pas perdre de vue que A, B, C, D, etc. sont des nombres, dans lesquels ni p, ni x, ni u ne sauroient entrer; on doit donc traiter cette équation comme la précédente, et en comparant les coefficiens de chaque puissance de x, dans l'un

et l'autre membre, on trouvera :

$$\left.\begin{aligned} A &= Aa' \\ A' &= Ba'' + Aa' \\ AB &= Ca''' + Ba'' \\ AC &= Da^{IV} + Ca''' \end{aligned}\right\} \text{ d'où on tire } \left\{\begin{aligned} A &= Aa' \\ B &= \frac{A(A-a')}{a''} \\ C &= \frac{B(A-a'')}{a'''} \\ D &= \frac{C(A-a''')}{a^{IV}} \end{aligned}\right.$$

etc. etc.

La manière dont se forment ces équations est assez évidente pour qu'on puisse les pousser aussi loin qu'on voudra; et on voit aisément que si $P p^{n-m} x^m$ et $Q p^{n-m-1} x^{m+1}$ représentent deux termes consécutifs du développement de $(p+x)^n$, on aura

$A.P = Q a'''\ldots^{(m)+1} + P a'''\ldots^{(m)}$, ce qui donne $Q = P \left\{\frac{A - a'''\ldots^{(m)}}{a'''\ldots^{(m)+1}}\right\}$;

expression dans laquelle m ne désigne pas une puissance de a, mais le nombre des accens que doit porter cette lettre.

Nous remarquerons que les coefficiens B, C, D, etc. seroient tous déterminés si on connoissoit a', a'', a''', etc. A; mais ces derniers ne sont autre chose que les coefficiens du second terme dans les puissances du binome, qui ont pour exposant les nombres 1, 2, 3 etc., n.

Il suit delà que du second terme du développement de $(p+x)^n$ on peut déduire tous les autres; car A étant le coefficient de ce second terme, on en doit tirer comme des cas particuliers, ceux des seconds termes de $(p+x)$, $(p+x)^2$, $(p+x)^3$, etc.

16. On sait déjà que les seconds termes de ces premières puissances sont x, $2px$, $3p^2x^2$, etc.; il paroit naturel d'en conclure par analogie, que celui de $(p+x)^n$ sera $np\,x^{n-1}$. Il ne nous reste donc qu'à vérifier cette assertion, pour être en état d'assigner tous les coefficiens du développement cherché.

Pour cela nous observerons que $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$, et que par conséquent $(1+x)^{n+1} = (1 + Ax + Bx^2 + \text{etc.})(1+x)$: on en tirera $(1+x)^{n+1} = 1 \left\{\begin{matrix} +A \\ +1 \end{matrix}\right\} x \left\{\begin{matrix} +B \\ +A \end{matrix}\right\} x^2 + \text{etc.}$,

résultat qui nous apprend que le coefficient du second terme de

$(1+x)^n$ étant A, celui de $(1+x)^{n+1}$ est $A+1$, et que par conséquent, lorsque l'exposant augmente d'une unité, ce coefficient s'accroit aussi d'une unité; mais sa valeur est 1 pour la première puissance, $(1+x)$; elle sera donc 2 pour le quarré, 3 pour le cube, et en général n, pour la puissance $n^{ième}$.

Le raisonnement précédent ne s'applique qu'au cas où n est un nombre entier positif; mais supposons qu'on ait

$$(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + Ax + Bx^2 + \text{etc.},$$

si on élève les deux membres de cette équation à la puissance m, après avoir fait pour abréger $Ax + Bx^2 + \text{etc.} = Mx$, on aura..... $(1+x)^n = (1+Mx)^n$. Or comme il n'est question que de trouver le second terme, il faudra s'arrêter à ce terme dans le développement, et à cause que m et n sont supposés des nombres entiers, on aura $1 + nx = 1 + mMx$; remettant au lieu de Mx sa valeur, en se bornant au terme affecté de la première puissance de x, il viendra $nx = mAx$; par conséquent $A = \frac{n}{m}$.

Soit enfin $(1+x)^{\frac{-n}{m}} = 1 + A'x + B'x^2 + \text{etc.}.....$

on sait que $(1+x)^{\frac{-n}{m}} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{n}{m}}}$ et que par conséquent....

$(1+x)^{\frac{-n}{m}} (1+x)^{\frac{n}{m}} = 1$; faisant comme ci-dessus $(1+x)^{\frac{n}{m}}$; $= 1 + Ax + Bx^2 + \text{etc.}$ on aura, en multipliant ce développement par le précédent, et en réduisant,

$$\left.\begin{matrix} A \\ + A' \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} + B \\ + AA' \\ + B' \end{matrix}\right\} x^2 + \text{etc.} = 0 :$$

or cette équation doit avoir lieu quelque soit x, il faut donc que

$$\left.\begin{matrix} A + A' = 0 \\ B + AA' + B' = 0 \\ \text{etc.} \end{matrix}\right\}$$

Mais comme nous n'avons besoin que du coefficient A', nous ne nous occuperons que de la première de ces équations, et nous en tirerons $A' = -A$, ou bien, en mettant pour A sa valeur $\frac{n}{m}$, $A' = -\frac{n}{m}$.

En rapprochant ces résultats on verra que les deux premiers

termes de $\begin{cases} (1+x)^1 \\ (1+x)^{\frac{n}{m}} \\ (1+x)^{\frac{-n}{m}} \end{cases}$ sont $\begin{cases} 1+nx \\ 1+\frac{n}{m}x \\ 1-\frac{n}{m}x \end{cases}$

On peut donc affirmer que *quel que soit le nombre représenté par* n, *pourvu qu'il soit rationnel*, *les deux premiers termes de* $(1+x)^n$ *seront* $1+nx$. Nous ferons voir dans la suite que quand même l'exposant n seroit irrationnel et même imaginaire, la proposition précédente seroit toujours vraie.

17. Reprenons les équations $\left.\begin{array}{l} A = Aa' \\ B = \frac{A(A-a')}{a''} \\ C = \frac{B(A-a'')}{a'''} \\ D = \frac{C(A-a''')}{a^{IV}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q = P\left(\frac{A-a^{(m+1)}}{a^{m+2}}\right) \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$;

en y faisant $a' = 1$, $a'' = 2$, $a''' = 3$, $a^{IV} = 4 \ldots\ldots A = n$, elles donneront $A = n$

$$B = A\frac{(n-1)}{2} = n\frac{(n-1)}{2}$$

$$C = B\frac{(n-2)}{3} = n\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{3}$$

$$D = C\frac{(n-3)}{4} = n\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\ 3\ 4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q = P\frac{(n-m)}{m+1}$$

etc.

L'expression de Q contient la loi générale des coefficiens, et fait voir comment chacun d'eux se déduit de celui qui le précède.

En

En substituant les valeurs qu'on vient de trouver, on aura

$$(1+x)^n = \begin{cases} 1 + nx + n\dfrac{(n-1)}{2}x^2 + n\dfrac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^3 \\ + n\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \text{etc.} \end{cases}$$

et si cette formule étoit continuée jusqu'au terme où l'exposant de x est m, on trouveroit pour ce terme

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{2\cdot 3\ldots\ldots m}x^m.$$

Comme cette expression n'a, par elle-même, aucune valeur particulière, à moins qu'on ne substitue à m un certain nombre, elle est propre à représenter chacun des termes de la formule en donnant à m des valeurs convenables; c'est pour cette raison qu'on la désigne sous le nom de *terme général* de la puissance n du binome.

La série que nous venons de trouver pour le développement de cette puissance, ne peut se terminer à moins que n ne soit un nombre entier positif; car il faut, pour que cela arrive, que dans la suite des facteurs $n, n-1, n-2, n-3\ldots\ldots$ etc., il s'en trouve un qui soit égal à zéro, ce qui ne sauroit avoir lieu si n étoit négatif ou fractionnaire.

18. Nous n'avons employé pour trouver les coefficiens A, B, C, D, etc. que les termes affectés de la première puissance de u dans l'équation (4); mais cependant nous serions en droit d'en conclure que les autres sont identiques dans chaque membre; car si cela n'étoit pas, il en résulteroit de nouvelles équations auxquelles il seroit impossible de satisfaire, puisque les quantités A, B, C, D etc. sont déjà déterminées, et par conséquent il ne seroit pas vrai de dire qu'on peut représenter le développement de $(1+x)^n$, par une série $1 + Ax^1 + Bx^2 + Cx^3$ etc., qui convienne à toutes les valeurs de x.

Quoique ces raisonnemens paroissent prouver d'une manière suffisante la légitimité du développement que nous avons obtenu, cependant pour ne rien laisser à désirer, je vais montrer que les autres termes de l'équation (4) se détruisent mutuellement.

Pour cela, je reprendrai l'expression,

$$p^n + Ap^{n-1}(x+u) + Bp^{n-2}(x+u)^2 + Cp^{n-3}(x+u)^3 + Dp^{n-4}(x+u)^4 \text{etc.}$$

dont le développement compose le premier membre de cette équation, et j'observerai qu'on peut effectuer ce développement à l'aide de ce qui précède, puisque les coefficiens A, B, C, D etc. sont déterminés. Je vais donc chercher par quelle quantité une puissance quelconque de u, u^m par exemple, seroit multipliée. Il est aisé de voir qu'on ne sauroit rencontrer u^m avant le terme affecté de $(x+u)^m$, mais qu'à partir de celui-là on le trouve dans tous, en sorte que si on développe les puissances $(x+u)^m$, $(x+u)^{m+1}$ etc. en commençant par u au lieu de commencer par x, ce qui est indifférent, u^m sera au premier terme dans la première, au second terme dans la seconde et ainsi de suite.

Supposons donc qu'on ait dans la série proposée les termes suivans;

$$P p^{n-m} (x+u)^m + Q p^{n-m-1} (x+u)^{m+1} + R p^{n-m-2} (x+u)^{m+2} + S p^{n-m-3} (x+u)^{m+3} + \text{etc.}$$

Il en résultera pour le coefficient de u^m,

$$P p^{n-m} + (m+1) Q p^{n-m-1} x + \frac{(m+2)(m+1)}{1 \cdot 2} R p^{n-m-2} x^2 + \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} S p^{n-m-3} x^3 + \text{etc.}$$

mais d'après la loi que nous avons trouvée relativement aux coefficiens du développement de $(p+x)^n$, on doit avoir

$$Q = \frac{(n-m)}{m+1} P$$

$$R = \frac{(n-m-1)}{m+2} Q = \frac{(n-m)(n-m-1)}{(m+1)(m+2)} P$$

$$S = \frac{(n-m-2)}{m+3} R = \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)} P$$

etc.

en substituant ces valeurs et faisant les réductions qui s'offrent d'elles-mêmes, on trouvera

$$P \left\{ p^{n-m} + (n-m) p^{n-m-1} x + \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} p^{n-m-2} x^2 + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)}{2 \cdot 3} p^{n-m-3} x^3 + \text{etc.} \right\}.$$

Il est aisé de reconnoître que la quantité renfermée dans la parenthèse n'est autre chose que le développement de $(p+x)^{n-m}$. Le coefficient de u^m sera donc dans le premier membre de l'équation (4), $P (p+x)^{n-m}$; mais dans le second, il sera évidemment $P q^{n-m} = P (p+x)^{n-m}$; l'identité est donc prouvée.

Quelque longs que paroissent les calculs précédens, ils méritent néanmoins une attention particulière, parce qu'ils ne sont fondés que

sur des principes de la plus grande rigueur, et qu'ils conduisent, comme on le verra bientôt, à un grand nombre de résultats aussi utiles qu'élégans.

19. Il est facile de déduire du développement de la puissance n du binome, celui de la même puissance du *polynome* quelconque ($a+b+c+d+e$ etc.). Pour y parvenir d'une manière commode, nous représenterons, pour abréger, le développement de $(a+b)^n$ par $a^n + A a^{n-1} b + B a^{n-2} b^2 + C a^{n-3} b^3 +$ etc.

Si maintenant on suppose que b se change en $b+c$, le binome $(a+b)$ deviendra le *trinome* $(a+b+c)$; et il faudra écrire dans le développement précédent $(b+c)$, $(b+c)^2$, $(b+c)^3$ etc. au lieu de b, b^2, b^3 etc. : on trouvera par ces substitutions,

$$a^n + A a^{n-1}\left\{\begin{matrix} b \\ + c \end{matrix}\right\} + B a^{n-2}\left\{\begin{matrix} b^2 \\ + 2bc \\ + c^2 \end{matrix}\right\} + C a^{n-3}\left\{\begin{matrix} b^3 \\ + 3bc^2 \\ + 3b^2c \\ + c^3 \end{matrix}\right\} + \text{etc.}$$

résultat qu'il est facile de continuer aussi loin qu'on voudra. Soit donc $N a^{n-n'} b^{n'}$, le terme général de $(a+b)^n$; il se changera en $N a^{n-n'} (b+c)^{n'}$, et faisant

$$(b+c)^{n'} = b^{n'} + A' b^{n'-1} c + B' b^{n'-2} c^2 + C' b^{n'-3} c^3 + \ldots + N' b^{n'-n''} c^{n''} + \text{etc.},$$

il deviendra

$$N a^{n-n'}\left\{\begin{matrix} b^{n'} \\ + A' b^{n'-1} c \\ + B' b^{n'-2} c^2 \\ + C' b^{n'-3} c^3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ + N' b^{n'-n''} c^{n''} \\ \text{etc.} \end{matrix}\right\}.$$

En considérant avec attention ce développement, on remarque bientôt que dans chacun des termes qui le composent, la somme des exposans des lettres a, b, c etc. est constamment égale à n, mais qu'ils ont d'ailleurs, chacun en particulier, toutes les valeurs qui peuvent satisfaire à cette condition: de plus on voit que le *terme général*, c'est-à-dire celui qui ne renferme que des exposans indéterminés, a pour expression $N N' a^{n-n'} b^{n'-n''} c^{n''}$.

Supposons encore que c se change en $(c+d)$ et qu'on ait $(c+d)^{n''} = c^{n''} + A'' c^{n''-1} d + B'' c^{n''-2} d^2 + C'' c^{n''-3} d^3 + \ldots + N'' c^{n''-n'''} d^{n'''}$ etc. en substituant ce développement au lieu de $c^{n''}$ dans le résultat précédent, on trouvera que le terme général du *quadrinome* $(a+b+c+d)^n$ sera $N N' N'' a^{n-n'} b^{n'-n''} c^{n''-n'''} d^{n'''}$.

Il est facile de continuer ce procédé, et on voit déjà que $N''' d^{n'''-n''''} e^{n''''}$ étant le terme général du binome $(d+e)^{n'''}$, celui du *quintinome* $(a+b+c+d+e)^n$ sera

$$N N' N'' N''' a^{n-n'} b^{n'-n''} c^{n''-n'''} d^{n'''-n''''} e^{n''''}.$$

Il ne reste plus, pour avoir chacun de ces termes généraux, qu'à substituer au lieu des coefficiens N, N', N'', N''' etc. leurs valeurs.

Puisque N est le coefficient du terme $a^{n-n'} b^{n'}$ dans le développement de $(a+b)^n$, on a $N = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-n'+1)}{1.2.\ldots\ldots n'}$. Si on ajoute dans le numérateur et dans le dénominateur, tous les facteurs compris entre 1 et $n-n'$ inclusivement, la valeur de cette expression ne changera pas, et on aura alors $N = \frac{1.2.\ldots\ldots n}{1.2.\ldots n' \times 1.2.\ldots n-n'}$.

On déduira N' de N en changeant n en n' et n' en n''; il viendra donc $N' = \frac{1.2.\ldots\ldots n'}{1.2.\ldots n'' \times 1.2.\ldots n'-n''}$;

on aura de même : $N'' = \frac{1.2.\ldots\ldots n''}{1.2.\ldots n''' \times 1.2.\ldots n''-n'''}$;

$$N''' = \frac{1.2.\ldots\ldots n'''}{1.2.\ldots n^{iv} \times 1.2.\ldots n'''-n^{iv}}.$$

En faisant le produit $N N' N'' N'''$, avec l'attention d'effacer tous les facteurs communs à la fois au numérateur et au dénominateur, on trouvera :

$$N N' N'' N''' = \frac{1.2.3.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2.\ldots(n-n') \times 1.2.\ldots(n'-n'') \times 1.2.\ldots(n''-n''') \times 1.2.\ldots(n'''-n^{iv}) \times 1.2.\ldots n^{iv}}$$

soit fait pour abréger $\begin{cases} n - n' = p \\ n' - n'' = q \\ n'' - n''' = r \\ n''' - n^{iv} = s \\ n^{iv} = t \end{cases}$;

en ajoutant ces équations, il viendra $p+q+r+s+t=n$, et l'on aura, pour le terme général du *quintinome*

$$(a+b+c+d+e)^n,$$

$$\frac{1.2.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r \times 1.2\ldots s \times 1.2\ldots t}\, a^p b^q c^r d^s e^t;$$

delà il est facile de déduire celui du polynome quelconque.

Avec le terme général on formera le développement cherché, en observant qu'il doit contenir toutes les puissances, depuis o jusqu'à n inclusivement, de chacune des lettres a, b, c, d, e, etc. et que la somme des exposans, dans quelque terme que ce soit, doit toujours être égale à n. Quant au coefficient numérique, la formule précédente fait voir comment on le déduit des exposans du terme qu'il affecte.

Pour donner un exemple, nous prendrons $(a+b+c+d)^3$: en ordonnant le développement de cette puissance par rapport à une même lettre, supposons que ce soit a, on n'aura plus qu'à chercher tous les termes qui doivent contenir chaque puissance de a, et la manière dont nous formerons ceux qui sont affectés de a^2, fera voir comment il faudroit s'y prendre pour toute autre puissance.

Nous écrirons

$a^2\ b^3$	$a^2\ c^3$	$a^2\ d^3$
$a^2\ b^2\ c$	$a^2\ c^2\ d$	
$a^2\ b^2\ d$	$a^2\ c\ d^2$	
$a^2\ b\ c^2$		
$a^2\ b\ c\ d$		

Nous ne nous arrêterons point à former les coefficiens, parce qu'il n'y a aucune difficulté à cet égard, en se rapellant que toute lettre qui ne porte pas d'exposant, est censée avoir l'unité.

Si n étoit un nombre fractionnaire ou négatif, la condition exprimée par l'équation $p+q+r+s+t+\ldots\ldots=n$, pourroit paroître difficile à remplir; mais on évitera cet inconvénient, en donnant au polynome $a+b+c+d+e$, etc. la forme d'un binome $(a+x)^n$, dans le développement duquel on substituera, au lieu des puissances de x qui seront nécessairement positives et entières, celles du polynome $b+c+d+e+$ etc.

20. On pourroit faire usage des formules précédentes pour développer $(a+b\,x+c\,x^2+d\,x^3+\ldots)^n$ suivant les puissances de x, mais on peut y parvenir d'une manière plus simple, ainsi qu'on va le

voir. Il est évident qu'on peut supposer

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots)^n =$$
$$= A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}$$

car si on met le premier membre de cette équation sous la forme d'un binome $(a+k)^n$ et qu'on le développe, le résultat, quelque soit n, ne contiendra que des puissances entières et positives de k, depuis la première inclusivement; et par conséquent si on remettoit au lieu de cette dernière lettre sa valeur, cette substitution n'introduiroit que des puissances entières et positives de x. Cela posé, si x se changeoit en $x+u$, on auroit : ..... (1)

$$\{a+b(x+u)+c(x+u)^2+d(x+u)^3+\ldots\ldots\}^n =$$
$$= A+B(x+u)+C(x+u)^2+D(x+u)^3+E(x+u)^4+$$
etc.

cette équation devant avoir lieu indépendamment d'aucune valeur particulière de x et de u, il faut que dans le développement de l'un et de l'autre membre, les termes qui multiplient chaque puissance de x et de u soient identiques. Commençons donc par développer par rapport à u, en nous bornant aux termes qui multiplient la première puissance de cette quantité, et occupons nous d'abord du premier membre. La fonction

$$a+b(x+u)+c(x+u)^2+d(x+u)^3+\text{etc.},$$

devient

$$\left.\begin{array}{rrrrr} +a & +bx & +cx^2 & +dx^3 & + \\ & +bu & +2cxu & +3dx^2u & \\ & & +cu^2 & +3dxu^2 & \\ & & & +\text{etc.} & \end{array}\right\}$$

faisons pour abréger $a+bx+cx^2+dx^3+\ldots = p$,

$$\left.\begin{array}{l} (b+2cx+3dx^2+\ldots)u \\ +(cu+3dxu+\ldots)u \\ \text{etc.}\ldots\ldots \end{array}\right\} = qu;$$

on aura $(p+qu)^n = p^n+np^{n-1}qu+\frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2u^2$ etc.,

mais comme nous ne devons pas aller au-delà de la première puissance de u, nous ne considérerons que les deux termes $p^n+np^{n-1}qu$. En remettant pour qu sa valeur, on verra qu'il faut en exclure la seconde ligne et les suivantes, parce qu'elles donneroient des termes

affectés de u^2 et des puissances supérieures : il viendra donc pour résultat final $p^n + n p^{n-1} (b + 2cx + 3dx^2 + \ldots) u$.

Passons maintenant au second membre de l'équation (1) : il donne tout de suite $\begin{cases} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} \\ \quad + (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.})u. \end{cases}$

La première ligne n'est autre chose que la valeur supposée pour $(a + bx + cx^2 + \ldots)^n$ ou p^n ; on aura donc, en comparant les coefficiens de u,

$$np^{n-1}(b + 2cx + 3dx^2 + \ldots) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.}$$

mais $p^{n-1} = \frac{p^n}{p}$, mettant au lieu de p^n et de p leurs valeurs. On trouvera, en chassant les dénominateurs,

$$n(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.})(b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \ldots) =$$
$$= (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \text{ etc.})(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \text{ etc.}) :$$

faisant les multiplications indiquées, on aura

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l} nbA + nbBx & + nbC & x^2 + nbD & x^3 + nbE & x^4 \text{ etc.} \\ \quad + 2ncA & + 2ncB & + 2ncC & + 2ncD & \\ & + 3ndA & + 3ndB & + 3ndC & \\ & & + 4neA & + 4neB & \\ & & & + 5nfA & \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l|l|l|l|l} aB + 2aCx & + 3aD & x^2 + 4aE & x^3 + 5aF & x^4 \text{ etc.} \\ \quad + bB & + 2bC & + 3bD & + 4bE & \\ & + cB & + 2cC & + 3cD & \\ & & + dB & + 2dC & \\ & & & + eB & \end{array}\right.$$

En comparant les coefficiens des puissances homologues de x, on trouvera,

$$aB = nbA$$
$$2aC = (n-1)bB + 2ncA$$
$$3aD = (n-2)bC + (2n-1)cB + 3ndA$$
$$4aE = (n-3)bD + (2n-2)cC + (3n-1)dB + 4neA$$
$$5aF = (n-4)bE + (2n-3)cD + (3n-2)dC + (4n-1)eB + 5nfA$$
etc.

La loi de ces valeurs est facile à saisir : tous les coefficiens B, C,

D, etc. seront déterminés lorsque A sera connu; mais on voit qu'il exprime la valeur du développement, lorsque $x = 0$, et dans ce cas la fonction proposée $(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n$ se réduit à a^n, on a donc $A = a^n$.

En calculant d'après cette valeur, celle des lettres B, C, D, etc. on trouvera facilement que la puissance n du polynome $a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$ a pour expression

$$\begin{aligned}
&a^n + n a^{n-1} b x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-1} b^2 \Big\} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 \Big\} x^3 \\
&\qquad + n a^{n-1} c \qquad\quad + \frac{n.(n-1)}{1 \cdot 1} a^{n-2} b c \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + n a^{n-1} d \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 \Big\} x^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5 \Big\} x^5 \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{n-3} b^2 c \qquad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{n-4} b^3 c \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} a^{n-2} b d \qquad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{n-3} b^2 d \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} c^2 \qquad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 1 \cdot 2} a^{n-3} b c^2 \Big\} \text{etc.} \\
&\quad + n a^{n-1} e \qquad\quad + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} a^{n-2} b e \\
&\qquad\qquad\quad + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} a^{n-2} c d \\
&\qquad\qquad\quad + n a^{n-1} f.
\end{aligned}$$

Moivre, qui donna le premier la formule précédente, fit aussi remarquer la loi suivant laquelle on peut former chacun des termes qu'elle contient; mais comme nous n'aurons pas occasion de l'employer fréquemment, nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet. Nous observerons seulement qu'il n'existe point de fonctions algébriques qu'on ne puisse développer par ce qui précède; car les plus générales ne sauroient être que des combinaisons de monomes ou de polynomes élevés à des puissances positives ou négatives, entières ou fractionnaires.

2°. Des fonctions transcendantes.

Fonctions exponentielles et logarithmiques.

21. Occupons-nous maintenant des fonctions transcendantes.

La plus simple de toutes ces fonctions est celle qu'on connoît sous le nom d'*exponentielle*, et à laquelle on peut être conduit de la manière suivante.

Si on considère la relation qui existe entre un terme quelconque d'une progression géométrique donnée et le rang qu'il occupe, en nommant α le premier terme, a la raison, y le terme cherché et x le nombre de ceux qui le précèdent, on aura comme on sait $y = \alpha a^x$. Dans cette équation où α et a sont regardés comme des quantités invariables, puisqu'on n'a en vue qu'une progression particulière, y est une fonction de x, et réciproquement x est une fonction de y; mais ces fonctions sont l'une et l'autre d'un ordre supérieur aux fonctions algébriques; car on voit que pour obtenir y, il faut effectuer un nombre indéterminé de multiplications qui peuvent même se changer en extractions de racines, si on donne à x des valeurs fractionnaires. L'équation $y = a^x$ change de dégré à chaque valeur que prend x, c'est pour cela que Jean Bernoulli, qui s'en est occupé le premier, l'avoit nommée *équation parcourante*. Quant à la détermination de x en y, elle ne peut avoir lieu qu'en employant les logarithmes.

Nous allons donner les moyens de développer la fonction y, et nous ferons, pour plus de simplicité $\alpha = 1$, d'où il résultera $y = a^x$. Nous supposerons que a^x soit représenté par la série

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{etc.}$$

A_0, A_1, A_2 etc. sont des coefficiens indépendans de x, et les chiffres inférieurs 0, 1, 2 etc. marquent l'exposant de la puissance de x qui multiplie la lettre à laquelle ils sont attachés, ainsi A_m sera le coefficient de x^m. Ce qui m'a déterminé à employer cette notation, quoiqu'elle paraisse un peu compliquée, c'est que par son moyen il sera facile de découvrir la loi qui régne entre les valeurs des coefficiens.

On demandera peut être quelle considération a déterminé le choix de la série, et pourquoi elle procède suivant les puissances ascendantes de x. Il sera facile de répondre à ces questions: en effet la fonction a^x devient égale à l'unité lorsqu'on y fait $x = 0$, et si on eut supposé à la série la forme suivante $A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \text{etc.}$, on voit que dans la même circonstance tous les termes de cette série seroient devenus

infinis; elle n'auroit donc pu représenter la fonction proposée. En général, si la forme de la série ne convenoit pas au développement cherché, le calcul conduiroit à des relations contradictoires entre les coefficiens. Il suit delà que pour pouvoir compter sur les résultats de la méthode des *coefficiens indéterminés* que nous employons ici, il faut s'être assuré qu'on ne rencontrera pas de semblables relations quelque loin qu'on pousse le calcul; or c'est ce dont on ne sauroit répondre dans le cas où la série est infinie, que lorsqu'on peut assigner la loi que suivent ses termes.

Cela posé, si x devient $x+u$, la fonction a^x se changera en a^{x+u}, mais puisque les coefficiens A_0, A_1, A_2, etc. sont indépendans d'aucune valeur particulière de x, il faut qu'on ait également

$$a^x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{etc.},$$
$$a^u = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + \text{etc.},$$

enfin

$$a^{x+u} = A_0 + A_1 (x+u) + A_2 (x+u)^2 + A_3 (x+u)^3 + \text{etc.}$$

et à cause de $a^x \times a^u = a^{x+u}$, il faut que le produit des deux premières séries soit égal à la dernière. Pour ordonner les différens produits partiels, il suffira de reculer d'un rang à mesure qu'on change de multiplicateur dans la seconde série, et de placer dans une colonne verticale tous les termes résultans d'une même puissance de $(x+u)$ dans la troisième série; on aura ainsi

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrrrrr} A_0^2 & + & A_0 A_1 x & + & A_0 A_2 x^2 & + & A_0 A_3 x^3 & + & A_0 A_4 x^4 & + & \text{etc.} \\ & + & A_1 A_0 u & + & A_1 A_1 u x & + & A_1 A_2 u x^2 & + & A_1 A_3 u x^3 & + & \text{etc.} \\ & & & + & A_2 A_0 u^2 & + & A_2 A_1 u^2 x & + & A_2 A_2 u^2 x^2 & + & \text{etc.} \\ & & & & & + & A_3 A_0 u^3 & + & A_3 A_1 u^3 x & + & \text{etc.} \\ & & & & & & & + & A_4 A_0 u^4 & + & \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrr} A_0 & + & A_1 x & + & A_2 x^2 & + & A_3 x^3 & + & A_4 x^4 & + & \text{etc.} \\ & + & A_1 u & + & 2 A_2 u x & + & 3 A_3 u x^2 & + & 4 A_4 u x^3 & + & \text{etc.} \\ & & & + & A_2 u^2 & + & 3 A_3 u^2 x & + & 6 A_4 u^2 x^2 & + & \text{etc.} \\ & & & & & + & A_3 u^3 & + & 4 A_4 u^3 x & + & \text{etc.} \\ & & & & & & & + & A_4 u^4 & + & \text{etc.} \end{array}\right.$$

Cette équation devant avoir lieu quelque soient u et x, il s'ensuit nécessairement que ces quantités ne doivent pas entrer dans la détermination des coefficiens, et par conséquent que les termes d'un

membre doivent être détruits par ceux qui leur correspondent dans l'autre membre; on aura donc $A_0^2 = A_0$, ce qui donne $A_0 = 1$, valeur qu'on mettra par tout au lieu de A_0 et qui dispensera d'écrire cette lettre dans les termes où elle se rencontre. Il résultera de cette omission que la première ligne du premier membre sera identique avec la première du second membre; ce sera par conséquent dans la deuxième que nous chercherons les équations pour les coefficiens, et nous aurons

$$\left.\begin{array}{r} A_1 = A_1 \\ A_1 A_1 = 2 A_2 \\ A_1 A_2 = 3 A_3 \\ A_1 A_3 = 4 A_4 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{d'où on tire} \left\{\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{A_1}{1} \\ A_2 = \dfrac{A_1^2}{1.2} \\ A_3 = \dfrac{A_1^3}{1.2.3} \\ A_4 = \dfrac{A_1^4}{1.2.3.4} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

et en général

$$A_1 A_{m-1} = m A_m \qquad A_m = \frac{A_1^m}{1.2.3.... m}$$

Les coefficiens étant tous déterminés par ces équations à l'exception du deuxième, A_1, il s'ensuit que si la forme que nous avons supposée au développement de a^x est légitime, la troisième ligne du premier membre et les suivantes doivent devenir identiques d'elles-mêmes avec celles qui leur correspondent dans le deuxième membre (*).

(*) J'aurois pu me dispenser de faire la vérification indiquée; car ayant effacé de part et d'autre, dans la première équation, les termes identiques et divisé ensuite les deux membres par u, j'aurais trouvé

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + A_1^2 x + A_1 A_2 x^2 + A_1 A_3 x^3 \text{ etc} \\ \quad + A_2 u + A_1 A_2 u x + A_2 A_2 u x^2 \text{ etc.} \\ \quad + \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 \text{ etc.} \\ \quad + A_2 u + 3 A_3 u x^2 + 6 A_4 u x^4 \text{etc.} \\ \quad \text{etc.} \end{array}\right.$$

mais comme cette équation doit avoir lieu quelque soit u, on peut y faire $u = 0$,

Pour vérifier cette condition nous prendrons dans le premier membre un terme quelconque $u^n x^n$, son coefficient sera évidemment $A_m A_n$ ou $\frac{A_1^m}{1.2.3...m} \times \frac{A_1^n}{1.2.3...n} = \frac{A_1^{m+n}}{1.2....m \times 1.2....n}$. Le même terme $u^n x^n$ faisant partie de la puissance $m + n$ de $x + u$ dans le second membre, a pour coefficient

$$\frac{(m+n)\ (m+n-1)\ .....\ (m+1)\ A_{m+n}}{1.2.3.....n},$$

mais $A_{m+n} = \frac{A_1^{m+n}}{1.2.3....(m+n)}$

substituant cette valeur et effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, savoir tous les nombres depuis $m+n$ jusqu'à $m+1$ inclusivement, on a pour résultat

$$\frac{A_1^{m+n}}{1.2.3....n, 1.2.3....m}$$

c'est-à-dire le même que précédemment. L'identité est donc démontrée, et nous pouvons en conclure que

$$a^x = 1 + \frac{A_1 x}{1} + \frac{A_1^2 x^2}{1.2} + \frac{A_1^3 x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

22. Il reste A_1 à déterminer: pour cela nous ferons $x = 1$, et nous aurons

$$a = 1 + \frac{A_1}{1} + \frac{A_1^2}{1.2} + \frac{A_1^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

équation, qui contient un nombre indéfini de termes, et de laquelle on ne voit pas tout de suite comment on pourroit tirer la valeur de A_1; mais si l'on y fait $A_1 = 1$, elle deviendra

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2.} + \frac{1}{1.2.3.} + \frac{1}{1.2.3.4.} + \text{etc.}$$

---

alors chacun de ses membres se réduit à la première ligne, et l'on n'a que les équations trouvées plus haut. Cependant quoique cette marche soit plus courte que celle que j'ai suivie, j'ai cru devoir préférer la dernière, parce qu'elle ne laisse rien à désirer sur l'exactitude du développement, et que par cette raison elle satisfera davantage ceux qui n'ont pas encore une grande habitude de l'analyse.

Ce que je viens de dire s'applique également aux numéros 33 et 34, et je me dispenserai de le répéter.

alors a cessera d'être une quantité quelconque : représentons par e la valeur particulière qu'il a dans cette hypothèse, et dont l'expression approchée est 2,7182818, nous aurons

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} \text{ etc.}$$

Cette équation devant subsister quelque soit x, si on pose $x = A_1$, il viendra $e^{A_1} = 1 + \frac{A_1}{1} + \frac{A_1^2}{1.2.} + \frac{A_1^3}{1.2.3.} + \frac{A_1^4}{1.2.3.4.}$; d'où on voit que $a = e^{A_1}$: en prenant les logarithmes, on a $A_1 \, l\, e = l\, a$, et par-conséquent $A_1 = \frac{l\, a}{l\, e}$.

Mais d'après la définition des logarithmes, si on regarde le nombre e comme la base du système, on aura $l'\, e = 1$ et $A_1 = l'\, a$: j'ai accentué la caractérique l pour marquer qu'il s'agit ici d'une espèce particulière de logarithmes, celle dont e est la base. Appliquons cette détermination au développement de a^x, il en résultera

$$a^x = 1 + \frac{l'\, a}{1} x + \frac{(l'\, a)^2}{1.2.} x^2 + \frac{(l'\, a)^3}{1.2.3.} x^3 + \text{etc.}$$

Une remarque importante qu'il ne faut pas omettre, c'est que la série à laquelle nous sommes parvenus, est toujours convergente, quelque grande que soit la valeur de x.

En effet, il est aisé de voir qu'on peut représenter le terme général de cette suite par $\frac{K^n}{1.2...n}$; celui qui vient immédiatement après sera donc $\frac{K^{n+1}}{1.2.....n(n+1)}$, et en prenant le rapport géométrique de l'un à l'autre, on trouvera $\frac{K}{n+1}$. Or en prolongeant la série, on doit nécessairement rencontrer un terme dans lequel $n+1$ surpassera K, et qui, par conséquent, sera moindre que celui qui le précède, et il est clair que le décroissement continuera toujours dans les termes ultérieurs.

On appliquera facilement ces considérations aux séries dont les numérateurs des termes successifs ont un rapport constant, ou marchent vers un semblable rapport, tandis que celui des dénominateurs va toujours en augmentant.

23. Puisqu'on a $A_1 = \frac{la}{le}$, si on pouvoit trouver une expression de A_1 ordonnée suivant les puissances de a, on auroit par-là le développement de la fonction logarithmique. Mais en faisant $a = 1 + b$, la fonction a^x devient $(1+b)^x$, et peut se développer par le moyen de la formule du binome; on a alors :

$$(1+b)^x = 1 + \frac{x\,b}{1} + \frac{x\,(x-1)}{1.2}b^2 + \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{1.\ 2.\ 3.}b^3 + \frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}b^4 \text{ etc.}$$

Pour comparer ce développement à celui que nous avons trouvé, n° 21, il faut l'ordonner par rapport aux puissances de x, ce qui donnera la forme suivante :

$$1 + \left\{ b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \text{ etc.} \right\} x$$
$$+ \left\{ b^2 - \frac{3\,b^3}{3} + \frac{11\,b^4}{3.4} \text{ etc.} \right\} \frac{x^2}{2}$$
etc.

La loi du coefficient de x est facile à saisir, et comme c'est le seul dont nous ayons besoin pour déterminer A_1, nous aurons sur le champ $A_1 = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.}$,

ou en mettant au lieu de b sa valeur $a - 1$,

$$A_1 = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.}$$

et de-là on tirera

$$la = le\left\{ (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.} \right\}$$

Cette serie n'est convergente que dans le cas où la quantité $a-1$ est très-petite, mais on peut toujours la rendre telle par un artifice très simple. En substituant $\sqrt[m]{a}$ au lieu de a, on aura :

$$l\sqrt[m]{a} = le\left\{ (\sqrt[m]{a} - 1) - \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^3}{3} - \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^4}{4} \text{ etc.} \right\}$$

mais on sait que $la = m\ l\sqrt[m]{a}$ donne

$$la = m\,le\left\{ (\sqrt[m]{a}-1) - \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^3}{3} - \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^4}{4} \text{ etc.} \right\};$$

or en prenant pour m un très-grand nombre, on peut faire ensorte que $\sqrt[m]{a}$ diffère aussi peu qu'on voudra de l'unité.

Pour rendre les opérations plus faciles, il faudra choisir le nombre m parmi ceux de la progression géométrique 2, 4, 8, 16, 32, etc., par ce moyen on n'aura que des racines quarrées à extraire; car

$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}, \quad \sqrt{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[8]{a}, \quad \sqrt{\sqrt[8]{a}} = \sqrt[16]{a} \text{ etc.}$$

Soit donc $m = 2^n$; on obtiendra $\sqrt[2^n]{a}$ par un nombre n d'extractions de racines quarrées. Il est à remarquer qu'on peut toujours faire ensorte qu'il suffise de calculer le premier terme de la série proposée, pour obtenir la valeur suffisamment approchée du logarithme de a. En effet, si on se sert de décimales, et qu'on prenne l'exposant n assez considérable pour qu'il y ait entre l'unité et le premier chiffre significatif de la racine extraite, au moins autant de zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux dans le résultat final, il est aisé de voir que le quarré, contenant un nombre de décimales double de celui de sa racine, tombera hors des limites qu'on s'est prescrites.

Soit pour exemple $a = 10$: Briggs en extrayant 54 fois de suite la racine quarrée de ce nombre, a trouvé pour résultat

1,00000 00000 00000 12781 91493 20032 35:

si on retranche l'unité, il viendra une fraction telle que le premier chiffre significatif de son quarré aura 31 zéros avant lui, et par conséquent n'influera pas sur les décimales du trentième ordre; on pourra donc négliger ce quarré, et à plus forte raison les puissances supérieures.

24. Pour que l a soit déterminé, il faut faire une hypothèse sur l e; la plus simple sans doute est de prendre l $e = 1$, auquel cas on tombe sur une espèce particulière de logarithmes, qui sont précisément ceux que Neper a considérés. On les a nommés depuis *logarithmes hyperboliques*, parce qu'on peut les déduire de la quadrature des espaces compris entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes; mais cette dénomination est vicieuse, car on peut également tirer de la quadrature de l'hyperbole en général, tous les systèmes de logarithmes. Il seroit donc plus convenable d'appliquer aux premiers le nom de l'inventeur, et de consacrer ainsi la mémoire de celui qui a rendu

un aussi grand service aux Mathématiques : on pourroit les appeller logarithmes de Néper, ou logarithmes *Néperiens*.

Briggs changea le système de logarithmes adopté par Neper, et pour se conformer à celui de la numération, il établit pour base le nombre 10 ; il eut donc alors $l\,10 = 1$. Mais en se bornant au premier terme de la série, on trouvera $l\,e = \frac{l\,a}{m(\sqrt[m]{a}-1)}$; mettant au lieu de a le nombre 10, il vient $l\,e = \frac{1}{m(\sqrt[m]{10}-1)}$.

On a vu précédemment que Briggs avait extrait cinquante-quatre fois de suite la racine quarrée du nombre 10, par conséquent, il eut $m = 2^n = 2^{54}$, et pour trouver le quotient $\frac{1}{2^{54}}$, il divisa l'unité cinquante-quatre fois de suite par 2, ce qui lui donna

0,00000 00000 00000 05551 11512 31257 827.

Substituant cette valeur au lieu de $\frac{1}{m}$ ainsi que celle de $\sqrt[m]{a}$, que nous avons rapportée plus haut, on aura, en supprimant dans le numérateur et dans le dénominateur, quinze zéros :

$$l\,e = \frac{0,5551\ 11512\ 31257\ 827}{1,2781\ 91493\ 20032\ 55} = 0,4342\ 94481\ 90325\ 18.$$

Ce nombre est celui par lequel il faut multiplier les logarithmes calculés dans l'hypothèse de $l\,e = 1$ pour avoir ceux de Briggs, ou des tables ordinaires.

Si au contraire on vouloit passer des logarithmes tabulaires à ceux de Neper, il faudroit diviser les premiers par le nombre que nous venons de trouver, ou ce qui revient au même, les multiplier par $\frac{1}{l\,e} = 2,30258\ 50929\ 94045$. Il est bon d'observer que ce dernier résultat n'est autre chose que le logarithme de 10 dans le système de Neper ; car en faisant $l\,e = 1$ on trouve $l'\,10 = m(\sqrt[m]{10}-1)$. Ce qui est précisément l'inverse de la valeur trouvée précédemment pour $l\,e$.

Dans quelque système que ce soit, $l\,e$ est désigné par le nom de *module* ; nous le représenterons en général par M, et puisque dans le

le système de Neper on a $M = 1$, nous en conclurons $la = Ml'a$ ou $M = \frac{la}{l'a}$. Il suit delà que pour trouver le module d'un système quelconque de logarithmes, il faut évaluer le rapport qu'ont entr'eux les logarithmes du même nombre, calculés l'un dans ce système, et l'autre dans celui de Neper.

Pour calculer le logarithme de 2, Briggs chercha celui de 1,024, nombre qui est égal à la dixième puissance de 2 divisée par 1000, parce que l'extraction des racines de l'un lui parut plus facile que celle de l'autre. Ayant pris 47 fois de suite la racine quarrée de 1,024, il opéra sur le résultat comme sur celui qu'il avoit déduit du nombre 10, et parvint ainsi au logarithme népérien de 1,024, qu'il multiplia ensuite par le module, et dont il tira facilement le logarithme de 2, en observant que $1{,}024 = \frac{2^{10}}{1000}$. Nous ne pousserons pas plus loin l'exposition des calculs de Briggs, dont nous n'avons voulu donner qu'une légère idée.

25. Si dans la série qui exprime la valeur de a^x (n° 22) on met au lieu de $l'a$ sa valeur $\frac{la}{M}$, elle deviendra

$$a^x = 1 + \left(\frac{la}{M}\right)\frac{x}{1} + \left(\frac{la}{M}\right)^2\frac{x^2}{1.2.} + \left(\frac{la}{M}\right)^3\frac{x^3}{1.2.3.} + \left(\frac{la}{M}\right)^4\frac{x^4}{1.2.3.4.} \text{ etc.}$$

résultat qui s'étend à un système quelconque de logarithmes.

En faisant $x = 1$ on trouve

$$a = 1 + \left(\frac{la}{M}\right) + \frac{1}{1.2.}\left(\frac{la}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.}\left(\frac{la}{M}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4.}\left(\frac{la}{M}\right)^4 \text{ etc.}$$

Cette suite donne le nombre a, lorsqu'on connoît son logarithme et le module du système auquel il appartient.

Elle offre encore une propriété remarquable que nous allons faire connoître, parce qu'elle pourra nous servir dans le cours de cet ouvrage. Puisqu'on a $a^{nx} = (a^x)^n$ on doit avoir aussi, en faisant pour abréger $\frac{la}{M} = A$,

$$1 + \frac{Anx}{1} + \frac{A^2n^2x^2}{1.2.} + \frac{A^3n^3x^3}{1.2.3.} \text{ etc.} = \left\{1 + \frac{Ax}{1.} + \frac{A^2x^2}{1.2.} + \frac{A^3x^3}{1.2.3.} \text{etc.}\right\}^n$$

et comme cette équation doit être indépendante d'aucune valeur particulière de x, il est évident que si on prend dans le premier membre un terme quelconque $\frac{A^m n^m x^m}{1.2.3....m}$, il doit être identique avec celui qui seroit affecté de la même puissance de x dans le développement du second.

Il suit donc delà que $\frac{A^m n^m}{1.2.3....m}$ sera la valeur du coefficient de x^m dans le développement de

$$\left\{1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2 x^2}{1.2.} + \frac{A^3 x^3}{1.2.3.} + \text{etc.}\right\}^n.$$

26. Soit $a = 1 + u$, nous aurons en général

$l(1+u) = M\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \text{etc.}\right\}$: tel est le développement de la fonction logarithmique. Cette suite, comme nous l'avons déjà remarqué, ne sauroit être convergente lorsque $u > 1$, et d'après ce qui a été dit (n° 6), elle ne peut donner dans ce cas la vraie valeur de la fonction. Quand $u = 1$, sa marche est si lente, qu'il faudroit calculer un grand nombre de termes pour arriver à un résultat un peu exact; car alors

$$l(1+1) = l\,2 = M(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \text{etc.})$$

et si on fait $M = 1$, il vient $l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$

Voici quelques artifices analytiques par lesquels on peut donner plus de convergence à la série proposée, et qui offrent pour calculer les logarithmes des moyens beaucoup plus expéditifs que celui que nous avons exposé dans l'article précédent.

Puisqu'on a $l(1+u) = M\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \text{etc.}\right)$ on trouvera, en mettant $-u$ à la place de u,

$$l(1-u) = M\left(-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \text{etc.}\right) \text{ d'où on tire}$$

$$l(1+u) - l(1-u) = l\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2M\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \text{etc.}\right)$$

série dont la marche est plus rapide que celle de la première.

Soit fait $\frac{1+u}{1-u} = z$, on aura

$$u = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \text{ et } l\,\zeta = 2M\left\{\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^5 + \text{etc.}\right\},$$

si, pour donner un exemple, on pose $\zeta = 2$, il viendra

$$l\,2 = 2M\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} \text{ etc.}\right),$$ série beaucoup plus convergente que celle que nous avons obtenue d'abord.

Si on évalue en décimales, chacune des fractions qui la composent, on trouvera, en se bornant à sept chiffres décimaux, $l\,2 = 0{,}6931472.M$; et pour le cas où $M = 1$, il viendra $l'\,2 = 0{,}6931472$. Mais nous avons vu ci-dessus qu'on pouvoit déterminer le module pour un système quelconque en cherchant le rapport qu'ont entr'eux les logarithmes d'un même nombre pris, l'un dans ce système et l'autre dans celui de Neper. Or le logarithme de 10 est 1 dans le système tabulaire; donc si on parvenoit à connoître le logarithme de ce nombre dans le système de Neper on auroit le module. Pour cela, faisons $\zeta = 10$ et $M = 1$, il viendra

$$l'\,10 = 2\left\{\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 \text{ etc.}\right\}$$

série convergente, mais cependant bien moins que la précédente.

Nous indiquerons encore une marche plus rapide pour arriver au logarithme de 10, lorsque nous aurons fait quelques remarques sur la série

$$l\,\zeta = 2M\left\{\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^5 \text{ etc.}\right\}.$$

Sa convergence diminue à mesure que ζ augmente, et on voit en général que la limite du décroissement des termes de cette série se trouve dans la suivante $2M\{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \text{ etc.}\}$, dont la valeur totale est infinie. Tout ceci est aisé à appercevoir en observant que plus ζ sera grand, plus la fraction $\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$ approchera de l'unité, et que par-conséquent la limite de cette fraction est l'unité même. Cette limite répond à l'accroissement indéfini de ζ, auquel cas, le logarithme qui augmente en même-tems que le nombre auquel il appartient, sera lui-même infini.

27. La série $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} +$ etc. n'est pas la seule série décroissante dont la somme n'ait aucune limite : la suivante $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. est encore dans le même cas. Voici son origine :

Soit fait $u = 1$ dans l'expression de

$$l(1-u) = -M\left(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} \text{ etc.}\right)$$

on aura $l(1-1) = l\,o = -M\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}\}$, et si on prend $M = 1$, ou qu'on passe au système de logarithmes désigné par l', on trouvera $l'\,o = -\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}\}$. Il faut savoir maintenant ce que c'est que $l'\,o$.

Pour le trouver, nous observerons que si on pose $1-u = \frac{1}{\zeta}$ on en déduira $u = 1 - \frac{1}{\zeta} = \frac{\zeta-1}{\zeta}$

$$l\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -M\left\{\frac{\zeta-1}{\zeta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)^4 + \text{etc.}\right\}.$$

Mais d'un autre côté $l\left(\frac{1}{\zeta}\right) = l\,1 - l\,\zeta = o - l\,\zeta$, or cette expression est susceptible d'augmenter indéfiniment dans le sens négatif; car plus on prendra ζ considérable, plus $l\,\zeta$ le deviendra; mais aussi plus la fraction $\frac{1}{\zeta}$ deviendra petite et sera près de s'anéantir, plus $\frac{\zeta-1}{\zeta}$ approchera de se confondre avec l'unité. En prenant donc les limites correspondantes, on voit que celle de $\frac{1}{\zeta}$ est o, celle de $\frac{\zeta-1}{\zeta}$ est l'unité et que par conséquent la suite devient

$$-M\{1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{etc.}\};$$

mais $l\,\frac{1}{\zeta}$ n'a aucune limite, donc la suite qui l'exprime n'en a pas non plus. C'est dans ce sens qu'il faut entendre l'expression reçue que le logarithme de zéro est l'infini négatif. On peut encore arriver au même résultat par la considération de l'équation $a^x = y$; car en prenant les logarithmes, on en tire $x\,l\,a = l\,y$, par conséquent $x = \frac{l\,y}{l\,a}$ et $a^{\frac{l\,y}{l\,a}} = y$. Mais tant que $l\,y$ sera positif, quelque petit qu'il soit, y sera plus grand que l'unité. Pour que y devienne une fraction, il faut qu'on ait $a^{\frac{-l\,y}{l\,a}} = y$ ou $\frac{1}{a^{\frac{l\,y}{l\,a}}} = y$. Or en cherchant les limites des deux membres de cette équation, on voit aisément que plus le second deviendra petit, plus le dénominateur du premier doit devenir

grand pour que l'égalité subsiste ; d'où il suit que *y tendant vers zéro, l y doit tendre vers l'infini.* J'employe ici le mot *tendre*, parce qu'à la rigueur les tables de logarithmes ne devroient point contenir zéro dans la colonne des nombres ; car cette colonne ne renferme que des termes tirés d'une progression géométrique, parmi lesquels on ne sauroit en trouver de nuls, à quelque point qu'on pousse la progression du côté du décroissement.

Une conséquence immédiate qui se présente, c'est que toute série dont les termes décroîtront plus rapidement que ceux de

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \text{ etc.},$$

aura nécessairement une limite finie ; car $l\left(\frac{1}{i}\right)$ étant une quantité finie tant que i n'est pas infini, il en faut conclure que la suite des fractions

$$\frac{i-1}{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{i}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{i-1}{i}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{i-1}{i}\right)^4 \text{ etc.}$$

est susceptible d'une limite, quelqu'approchante de l'unité que soit d'ailleurs la fraction $\frac{i-1}{i}$.

28. Pour retourner à notre objet, qui étoit d'obtenir les logarithmes des nombres, par des suites d'autant plus convergentes que ces nombres sont grands, nous ferons $\frac{1+u}{1-u} = 1 + \frac{i}{n}$, ce qui donnera

$$u = \frac{i}{2n+i} \text{ et parconséquent}$$

$$l\left(1+\frac{i}{n}\right) = 2M\left\{\frac{i}{2n+i} + \frac{1}{3}\left(\frac{i}{2n+i}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{i}{2n+i}\right)^5 + \text{etc.}\right\}$$

mais en réduisant $1 + \frac{i}{n}$ au même dénominateur, on verra aisément que $l\left(\frac{n+i}{n}\right) = l(n+i) - ln$.... donc

$$l(n+i) = ln + 2M\left\{\frac{i}{2n+i} + \frac{1}{3}\left(\frac{i}{2n+i}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{i}{2n+i}\right)^5 \text{ etc.}\right\}$$

Soit $i = 1$, il viendra

$$l(n+1) = ln + 2M\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5} \text{ etc.}\right\}$$

série d'autant plus convergente que n sera plus grand, et qui donne

avec beaucoup de facilité les logarithmes des nombres consécutifs. On peut l'employer avantageusement pour trouver le logarithme d'un nombre qui sort des limites des tables. En effet, supposons que ces tables ne comprennent pas les nombres au-dessus de 10000, et qu'on demande le logarithme de 125283, il faudra décomposer le nombre en deux parties, dont la première se trouve dans les tables. Or c'est ce qui aura lieu de la manière suivante : $125200 + 83$; car ayant le logarithme 1252, on en déduira celui de 125200, en ajoutant deux unités à la caractéristique ; on fera donc $n = 125200$ et $z = 83$, valeurs qui rendront la série très-convergente.

On peut appliquer cette série à la recherche du module en calculant, dans le système de Néper, le logarithme de 5, celui de 4 étant supposé connu. On aura alors

$$l'(4+1) = l'4 + \left\{ \frac{1}{9} + \frac{1}{3(9)^3} + \frac{1}{5(9)^5} + \text{etc.} \right\}$$

quant au logarithme de 4, il est double de celui de 2, déterminé dans le n° précédent ; et il est bon de remarquer que la série actuelle retombe pour ce cas dans celle du n° cité ; car à cause de $l'1 = 0$, elle donne $l'(1+1) = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3)^3} + \frac{1}{5(3)^5} + \text{etc.} \right\}$.

Ayant trouvé $l'5$, on l'ajoutera avec $l'2$, et, par ce moyen, on aura $l'10$, d'où on tirera $M = \frac{1}{l'10}$.

Il seroit aisé de transformer encore la suite proposée de bien des manières, plus ou moins avantageuses, relativement à certaines circonstances, mais nous ne nous y arrêterons pas.

29. Dans les divers résultats que nous avons exposés, il ne s'en est trouvé aucun qui procède suivant les puissances du nombre, ainsi nous n'avons point d'expression de ce genre, $lu = A + Bu + Cu^2 + Du^3$ etc. En effet, cela ne sauroit avoir lieu ; car lorsque $u = 0$, lu devient infini et négatif, ce à quoi la suite que nous venons d'écrire ne sauroit se prêter. Nous ne pourrions pas non plus avoir

$$lu = A + \frac{B}{u} + \frac{C}{u^2} + \frac{D}{u^3} + \text{etc.},$$

parce que u étant infini, cette suite sera finie. Il est cependant possible de trouver un développement qui satisfasse à ces deux conditions ; à la vérité il ne peut exprimer

dans aucuns cas, d'une manière commode, la valeur de l u; mais comme il est remarquable par sa forme, et qu'il nous conduira à des analogies intéressantes entre les fonctions logarithmiques et circulaires, nous ne le passerons pas sous silence.

$$\text{On a } l(1+u) = M\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} \text{ etc.}\right\},$$

$$l\left(1+\frac{1}{u}\right) = M\left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{3u^3} - \frac{1}{4u^4} + \frac{1}{5u^5} \text{ etc.}\right\}$$

en retranchant la seconde série de la première, on trouvera; à cause de $l\left(1+\frac{1}{u}\right) = l(1+u) - l\,u$,

$$l(1+u) - l\left(1+\frac{1}{u}\right) = l\,u = M\left\{u - \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right) + \frac{1}{3}\left(u^3 - \frac{1}{u^3}\right) \text{etc.}\right\}$$

$$\text{ou } l\,u = M\left\{u - u^{-1} - \frac{1}{2}(u^2 - u^{-2}) + \frac{1}{3}(u^3 - u^{-3}) \text{ etc.}\right\}$$

30. Quoique la manière dont nous sommes parvenus au développement de l' a (n° 23.) soit très-rigoureuse, et semble ne rien laisser à desirer, on verra peut-être encore avec plaisir comment la transformation qui nous a conduit jusqu'à présent au développement des fonctions, s'applique à la fonction logarithmique.

D'après ce qui a été dit dans l'article précédent, nous devons supposer au développement du logarithme, une forme qui se réduise à zéro, lorsque le nombre auquel il appartient devient égal à l'unité. Or toute fonction rationnelle et entière de $z - 1$ satisfait à cette condition; on pourra donc poser

$$l\,z = A_1(z-1) + A_2(z-1)^2 + A_3(z-1)^3 + \text{etc.}$$

Pour simplifier la série, nous ferons $z - 1 = x$, d'où $z = 1 + x$; et parconséquent $l(1+x) = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{etc.}$

Si nous supposons comme à l'ordinaire que x se change en $x+u$, il viendra $l(1+x+u) = A_1(x+u) + A_2(x+u)^2 + A_3(x+u)^3 + \text{etc.}$; mais en faisant $1 + x = p$, $l(1+x+u)$ devient $l(p+u)$, et à cause de $p + u = p\left(1+\frac{u}{p}\right)$. On a $l(1+x+u) = l\left(1+\frac{u}{p}\right) + l\,p$.

mais par l'hypothèse

$$l\left(1+\frac{u}{p}\right)=A_1\frac{u}{p}+A_2\frac{u^2}{p^2}+A_3\frac{u^3}{p^3}+\text{etc. donc}$$

$$l\,(1+x+u)=l\,p+A_1\frac{u}{p}+A_2\frac{u^2}{p^2}+A_3\frac{u^3}{p^3}+\text{etc.}$$

Comparant ensemble les deux valeurs de $l\,(1+x+u)$ qui doivent être identiques quelque soit u, on trouvera, en se bornant de part et d'autre aux termes qui multiplient la première puissance de cette quantité,

$$A_1+2A_2x+3A_3x^2+\text{etc.}=\frac{A_1}{p};$$

remettant au lieu de p sa valeur $(1+x)$, il viendra

$$(A_1+2A_2x+3A_3x^2+\text{etc.})\,(1+x)=A_1$$

Si on effectue la multiplication indiquée et qu'on détermine séparément les coefficiens de chaque puissance de x, on aura

$$\left.\begin{aligned} A_1&=A_1\\ 2A_2+A_1&=0\\ 3A_3+2A_2&=0\\ 4A_4+3A_3&=0\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\}\text{d'où on tire}\left\{\begin{aligned} A_2&=A_1\\ A_3&=-\frac{A_1}{2}\\ A_3&=-\frac{A_1}{3}\\ A_4&=-\frac{A_1}{4}\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

résultats bien conformes à ceux qu'on a déjà trouvés; et dans lesquels il faut remarquer que le premier coefficient A_1 reste indéterminé, parce qu'il tient la place du module.

Il reste à prouver que toutes les équations qu'on tireroit de la comparaison des termes affectés de u^2 et des puissances supérieures, sont identiques. Pour cela je reprends l'équation

$$l\,(1+x+u)=A_1(x+u)+A_2(x+u)^2\ldots+A_n(x+u)^n+A_{n+1}(x+u)^{n+1}+\text{etc.}$$

Il est aisé de voir que le coefficient de u^n dans le développement du second membre de cette équation sera

$$A_n+(n+1)A_{n+1}x+\frac{(n+2)(n+1)}{2}A_{n+2}x^2+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{2\cdot 3}A_{n+3}x^3+\text{etc.}$$

mais

mais d'après la loi trouvée précédemment, on a

$$\left.\begin{aligned} n A_n + (n+1) A_{n+1} &= 0 \\ (n+1) A_{n+1} + (n+2) A_{n+2} &= 0 \end{aligned}\right\},$$

etc.

$$\text{d'où il suit} \begin{cases} A_{n+1} = -\dfrac{n A_n}{n+1} \\ A_{n+2} = \dfrac{n A_n}{n+2} \\ A_{n+3} = -\dfrac{n A_n}{n+3} \end{cases}$$

etc.

substituant ces valeurs, il vient,

$$A_n \left\{ 1 - n x + \frac{n(n+1)}{2} x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} x^3 + \text{etc.} \right\}$$

série qui n'est autre chose que le développement de $A_n (1+x)^{-n}$. Mais le coefficient de x^n dans l'équation

$$l\left(1 + \frac{u}{p}\right) = A + A_1 \frac{u}{p} + A_2 \frac{u^2}{p^2} + \ldots + A_n \frac{u^n}{p^n} \text{ etc.}$$

est $\dfrac{A_n}{p^n} = \dfrac{A_n}{(1+x)^n} = A_n (1+x)^{-n}$, résultat identique avec le précédent.

31. Nous pouvons maintenant prouver, comme nous l'avons annoncé (n° 16.) *que quand même l'exposant* n *seroit irrationnel ou imaginaire, les deux premiers termes de* $(1+x)^n$ *n'en seroient pas moins* $1 + n x$.

En effet supposons $(1+x)^n$ développé dans la série $1 + A x + B x^2$ etc., et faisant pour abréger $A x + B x^2 + \text{etc.} = p x$, nous aurons $l(1+x)^n = l(1+p x)$; mais $l(1+x)^n = n\, l(1+x)$: on aura donc $l(1+p x) = n\, l(1+x)$, ou en développant

$$p x - \frac{p^2 x^2}{2} + \frac{p^3 x^3}{3} - \text{etc.} = n x - \frac{n x^2}{2} + \frac{n x^3}{3} - \text{etc.}$$

et comme cette équation doit avoir lieu indépendamment de x, on aura, en mettant pour p sa valeur, et en se bornant aux termes affectés de la première puissance de x, $A = n$.

Il est facile de voir que cette démonstration est tout-à-fait indépendante de la nature du nombre n, et qu'elle ne renferme point

de cercle vicieux, en se rappellant que nous n'avons rencontré dans la recherche de $l(1+x)$ que des puissances entières du binome.

52. Il ne sera pas inutile de montrer avec quelle facilité la considération des limites conduit à l'expression en série des logarithmes, et c'est ce que nous allons faire.

La manière la plus simple de concevoir les logarithmes, est d'imaginer deux progressions correspondantes, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro. Mais pour approcher le plus qu'il est possible de comprendre tous les nombres dans la première, il faut faire ensorte que chacun de ses termes puisse ne différer de celui qui le précède et de celui qui le suit, que d'une quantité aussi petite qu'on voudra; or c'est à quoi on parviendra dans quelque progression géométrique que ce soit, en insérant un très-grand nombre de moyens entre les termes dont elle est composée. Ayant inséré un pareil nombre de moyens entre ceux de la progression arithmétique, chacun de ces moyens sera le logarithme de son correspondant dans la progression géométrique. Mais il est aisé de voir que dans une progression géométrique croissante, dont les termes approchent beaucoup de l'égalité, la raison peut être exprimée par $1+k$, k étant une quantité fort petite. Le choix des deux progressions étant arbitraire, la raison de l'une et celle de l'autre sont deux grandeurs indépendantes, mais demeurant les mêmes tant qu'on considère les mêmes progressions, et ayant par-conséquent entr'elles un rapport constant.

Soit donc d, la raison de la progression arithmétique; comme cette quantité a une valeur d'autant moindre qu'on a inséré un plus grand nombre de moyens, il sera plus commode de la comparer avec une autre qui puisse, comme elle, devenir aussi petite qu'on voudra. On employera donc, au lieu de la raison de la progression géométrique, son excès sur l'unité, et on supposera $\frac{d}{k} = M$, M étant un nombre constant.

Cela posé, soit a un terme quelconque de la progression géométrique, A son correspondant dans la progression arithmétique, et n le nombre de termes qui les précèdent l'un et l'autre; on aura par

la nature de la première progression $a = (1+k)^n$, et par celle de la seconde $A = 1^n = Mkn$.

A l'aide de ces équations on trouvera l'une quelconque des quantités A et a, lorsque l'autre sera connue. La première donne $k = a^{\frac{1}{n}} - 1$, et la seconde $k = \frac{A}{Mn}$, on aura donc $A = Mn\,(a^{\frac{1}{n}} - 1)$; mais si on fait $a = 1+u$, on pourra développer $(1+u)^{\frac{1}{n}}$ au moyen du binome, et il en résultera : $(1+u)^{\frac{1}{n}} - 1 =$

$$= \frac{1}{n}\left\{u + \frac{(\frac{1}{n}-1)}{2}u^2 + \frac{(\frac{1}{n}-1)(\frac{1}{n}-2)}{2\cdot 3}u^3 + \frac{(\frac{1}{n}-1)(\frac{1}{n}-2)(\frac{1}{n}-3)}{2\cdot 3\cdot 4}u^4 + \text{etc.}\right\}$$

d'où

$$A = M\left\{u - \frac{(1-\frac{1}{n})}{2}u^2 + \frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{2\cdot 3}u^3 - \frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})(3-\frac{1}{n})}{2\cdot 3\cdot 4}u^4 + \text{etc.}\right\}$$

or le second membre de cette équation a pour limite la série

$$M\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \text{etc.}\right)$$

dont il approche d'autant plus que la fraction $\frac{1}{n}$ est plus petite, ou que le nombre n est plus grand.

Mais dans cette hypothèse les progressions proposées en acquérant plus de termes dans un intervalle donné, approchent d'autant plus de comprendre tous les nombres et leurs logarithmes; on voit donc qu'à la limite, on peut les regarder comme formant un système de logarithmes, et que parconséquent on peut écrire $l(1+u)$ au lieu de A, ce qui donne

$$l(1+u) = M\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \text{etc.}\right):$$

résultat conforme à celui que nous avons trouvé par une voie bien différente.

On résoudra ainsi qu'il suit le problème inverse, celui dans lequel le logarithme est donné, et le nombre auquel il appartient est inconnu. L'équation $A = Mkn$ donne $k = \frac{A}{Mn}$, et en substituant dans $a = (1+k)^n$, il viendra $a = \left(1 + \frac{A}{Mn}\right)^n$. En dévelop-

pant la puissance indiquée, on trouve,

$$a = 1 + \frac{n\,A}{M\,n} + \frac{n.(n-1)\,A^2}{2\quad M^2\,n^2} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\quad A^3}{2\quad .\quad 3\quad M^3\,n^3} \text{ etc.};$$

prenant la limite relative à l'accroissement de n, c'est-à-dire supposant que les produits $n\,(n-1)\,(n-2)$, etc. se réduisent chacun à leur premier terme n^2, n^3 etc. on aura

$$a = 1 + \frac{A}{M} + \frac{A^2}{1.2.M^2} + \frac{A^3}{1.2.3.M^3} + \frac{A^4}{1.2.3.4.M^4} + \text{etc.}$$

Mais on a, par ce qui précède, $A = l\,(1+u) = l\,a$; si on substitue cette valeur on trouvera pour résultat la série du n° 25. Soit $M = 1, l\,a$ se changera en $l'\,a$, et en désignant par e le nombre dont le logarithme néperien est 1, à cause de $A = l'\,a$, il viendra $A\,l'\,e = l'\,a$, ou $l'\,e^A = l'\,a$, et en passant aux nombres, $e^A = a$, d'où il suit

$$e^A = 1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

comme dans le n° 22.

Il sera bon de remarquer comment nous sommes parvenus de l'équation $A = l'\,a$, à l'équation $e^A = a$, parce que cette transformation est d'un usage fréquent.

Développement des fonctions transcendantes.

Fonctions circulaires.

33. La trigonométrie a fait connoître un genre de fonctions non moins utiles que celles dont nous venons de nous occuper; ce sont les sinus et les cosinus des arcs de cercle. Je vais montrer qu'on peut non seulement les développer en série, mais encore trouver leurs propriétés les plus remarquables, en partant des formules données dans presque tous les livres élémentaires, pour calculer les sinus et cosinus de la somme et de la différence de deux arcs.

Je commence par la recherche de $\cos x$, et je suppose que x se change en $x+u$ et en $x-u$; les formules citées donnent dans ces deux cas,

$$\cos\,(x+u) = \cos x \cos u - \sin x \sin u \;(*)$$
$$\cos\,(x-u) = \cos x \cos u + \sin x \sin u.$$

(*) Dans tout ce qui va suivre je suppose le rayon égal à l'unité; si on vouloit lui donner une autre valeur, il suffiroit d'introduire la lettre qui le représente, de manière à rendre homogènes les formules trouvées dans la première hypothèse.

si on ajoute ces deux équations on aura :

$$\cos(x+u)+\cos(x-u)=2\cos x\cos u.$$

Soit maintenant $\cos x = A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\text{etc.}$

on aura
$$\begin{cases}\cos u = A_0+A_1u+A_2u^2+A_3u^3+A_4u^4+\text{etc.}\\ \cos(x+u)=A_0+A_1(x+u)+A_2(x+u)^2+A_3(x+u)^3+A_4(x+u)^4+\text{etc.}\\ \cos(x-u)=A_0+A_1(x-u)+A_2(x-u)^2+A_3(x-u)^3+A_4(x-u)^4+\text{etc.}\end{cases}$$

En substituant ces séries dans l'équation

$$\cos(x+u)+\cos(x-u)=2\cos x\cos u,$$

tous les termes affectés des puissances impaires de u disparoîtront dans le développement du premier membre ; il est donc inutile de les faire entrer dans le second, et par conséquent on peut, sans diminuer la généralité des suppositions, faire A_1, A_3, A_5, etc. égaux à zéro, ce qui réduira l'expression de $\cos x$ à ne contenir que des puissances paires de x. Il suit delà que $\cos x$ ne change point lorsqu'on écrit $-x$ au lieu de x ; or c'est ce qu'il est facile de voir *à priori*, 1° par les équations d'où nous sommes partis, dans lesquelles $\cos u$ reste le même, quoique l'arc u soit positif dans la première et négatif dans la seconde ; 2° en observant que le cosinus d'un arc ne change point, soit qu'on prenne cet arc au-dessus ou au-dessous du diamètre.

Nous aurons donc
$$\begin{cases}\cos x = A_0+A_2x^2+A_4x^4+A_6x^6\ \text{etc.}\\ \cos u = A_0+A_2u^2+A_4u^4+A_6u^6\ \text{etc.}\\ \cos(x+u)=A_0+A_2(x+u)^2+A_4(x+u)^4+A_6(x+u)^6\ \text{etc.}\\ \cos(x-u)=A_0+A_2(x-u)^2+A_4(x-u)^4+A_6(x-u)^6\ \text{etc.}\end{cases}$$

et l'équation $\cos(x+u)+\cos(x-u)=2\cos x\cos u$ donnera, en divisant ses deux membres par 2,

$$\left.\begin{array}{llllll} A_0+A_2x^2+A_4x^4+A_6x^6+\ldots+A_nx^n & \text{etc.}\\ +A_2u^2+6A_4u^2x^2+15A_6u^2x^4+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}A_nu^2x^{n-2} & \text{etc.}\\ +A_4u^4+15A_6u^4x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{etc.}\\ +A_6u^6+\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{etc.}\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{llllll} A_0^2+A_0A_2x^2+A_0A_4x^4+A_0A_6x^6+\ldots\ldots+A_0A_nx^n & \text{etc.}\\ +A_2A_0u^2+A_2A_2u^2x^2+A_2A_4u^2x^4+\ldots\ldots+A_2A_{n-2}u^2x^{n-2} & \text{etc.}\\ +A_4A_0u^4+A_4A_2u^4x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{etc.}\\ +A_6A_0u^6+\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{etc.}\end{array}\right.$$

En comparant les termes affectés des mêmes puissances de x et de u, on aura d'abord $A_0 = A_0^2$ ou $A_0 = 1$, valeur qui rend la première ligne du premier membre identique avec celle du second; passant ensuite aux secondes lignes, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = A_1 \\ A_2 A_2 = 6\,A_4 \\ A_3 A_4 = 15\,A_6 \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_2 A_{n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2} A_n \end{array}\right\} \text{d'où il suit} \left\{\begin{array}{l} A_1 = A_1 \\ A_4 = \dfrac{2\,A_2^2}{3\cdot 4} \\ A_6 = \dfrac{4\,A_2^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_n = \dfrac{2^{\frac{n}{2}-1} A_2^{\frac{n}{2}}}{3\cdot 4\cdot 5 \cdots n} \end{array}\right.$$

Tous les coefficiens sont déterminés à l'exception de A_1 et les équations qui résulteroient de la comparaison des autres lignes sont satisfaites par les valeurs précédentes. En effet, on peut donner à l'expression du coefficient A_n, la forme suivante

$A_n = \dfrac{2^{\frac{n}{2}} A_2^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 3 \cdots n}$, en multipliant son numérateur et son dénominateur par 2, et il sera facile d'en déduire

$$\left\{\begin{array}{l} A_{m+n} = \dfrac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{2\cdot 3 \cdots m+n} \\ A_m A_n = \dfrac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{2\cdot 3 \cdots m \times 2\cdot 3 \cdots n} \end{array}\right.$$

Mais le produit $u^m x^n$ faisant partie, dans le premier membre, du développement de $(x+u)^{m+n}$, a pour coefficient

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots\ldots(m+1)}{1 \quad . \quad 2 \quad . \quad n} A_{m+n}$$

ou bien en mettant pour A_{m+n} sa valeur et en effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur,

$$\frac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{1.2.3.\ldots.m \times 1.2.3\ldots n};$$

or ce résultat est précisément la valeur que nous avons trouvée plus haut pour $A_m A_n$ coefficient de $u^m x^n$ dans le second membre:

Il est donc rigoureusement prouvé que

$$\cos x = 1 + \frac{2 A_2 x^2}{1.2.} + \frac{2^2 A_2^2 x^4}{1.2.3.4.} + \frac{2^3 A_3^3 x^6}{1.2.3.4.5.6.} + \text{etc.}$$

34. Nous trouverons d'une manière semblable l'expression du sinus; car en retranchant l'une de l'autre, les équations

$$\begin{cases} \cos(x+u) = \cos x \cos u - \sin x \sin u \\ \cos(x-u) = \cos x \cos u + \sin x \sin u \end{cases}$$

nous aurons $\cos(x+u) - \cos(x-u) = -2 \sin x \sin u$.

Si on met au lieu de $\cos(x+u)$ et de $\cos(x-u)$ les valeurs déduites de l'article précédent, on verra que tous les termes affectés des puissances paires de u se détruisent mutuellement. Il suit delà qu'elles ne doivent pas entrer dans l'expression du sinus, et on le voit bien d'ailleurs puisqu'il change de signe sans changer de valeur lorsqu'on prend le même arc négativement, c'est-à-dire d'un autre côté du diamètre, propriété qui ne sauroit convenir qu'aux puissances impaires.

On supposera donc $\sin x = B_1 x + B_3 x^3 + B_5 x^5 + B_7 x^7 + \text{etc.}$

$$\sin u = B_1 u + B_3 u^3 + B_5 u^5 + B_7 u^7 + \text{etc.}$$

à l'aide de ces valeurs et des réductions qui s'offriront naturellement, l'équation $\cos(x+u) - \cos(x-u) = -2 \sin x \sin u$ deviendra

$$\left.\begin{array}{rl} 2 A_2 u x + & 4 A_4 u x^3 + 6 A_6 u x^5 + \ldots\ldots + n A_n u x^{n-1} \text{ etc.} \\ + & 4 A_4 u^3 x + 20 A_6 u^3 x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ etc.} \\ & + 6 A_6 u^5 x + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ etc.} \end{array}\right\} =$$

$$= -\left\{\begin{array}{rl} B_1 B_1 u x + & B_1 B_3 u x^3 + B_1 B_5 u x^5 + \ldots\ldots + B_1 B_{n-1} u x^{n-1} \text{ etc.} \\ + & B_3 B_1 u^3 x + B_3 B_3 u^3 x^3 + \ldots\ldots + B_3 B_{n-1} u^3 x^{n-1} \text{ etc.} \\ & + B_5 B_1 u^5 x + \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots \text{ etc.} \end{array}\right.$$

La première ligne du premier membre comparée terme à terme avec celle du second, donne

$$\left.\begin{array}{l} B_1 B_1 = -2 A_2 \\ B_1 B_3 = -4 A_4 \\ B_1 B_5 = -6 A_6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_1 B_{n-1} = -n A_n \end{array}\right\} \text{ et par conséquent } \left\{\begin{array}{l} B_1 = -\frac{2 A_2}{B_1} \\ B_3 = -\frac{4 A_4}{B_1} \\ B_5 = -\frac{6 A_6}{B_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{n-1} = -\frac{n A_n}{B_1} \end{array}\right.$$

Les autres lignes ne fournissent plus que des équations identiques; car le produit $u^m x^n$ aura pour coefficient dans le premier membre, d'après l'article précédent, $\frac{2^{\frac{m+n}{2}} A_1^{\frac{m+n}{2}}}{1.2.3...m \times 1.2.3...n}$, et il sera multiplié dans le second membre par $-B_m B_n = -\frac{(m+1)(n+1) A_{m+1} A_{n+1}}{B_1 B_1}$; en mettant pour A_{m+1}, A_{n+1} et B_1 leur valeur, et en effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on trouve encore comme plus haut $\frac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{1.2.3...m \times 1.2.3...n}$.

Nous aurons donc $\sin x = -\frac{2 A_2 x}{B_1} - \frac{4 A_4 x^3}{B_1} - \frac{6 A_6 x^5}{B_1}$ —etc.

le coefficient B_1 étant déterminé par l'équation $B_1 B_1 + 2 A_2 = 0$

Si on met au lieu de A_4, A_6, A_8 etc. leurs valeurs en A_2, tirées de l'article précédent, on trouvera

$$\sin x = -\frac{2 A_2 x}{B_1} - \frac{2^2 A_2^2 x^3}{1.2.3. B_1} - \frac{2^3 A_2^3 x^5}{1.2.3.4.5. B_1} - \frac{2^4 A_2^4 x^7}{1.2.3.4.5.6.7. B_1} \text{ etc.}$$

et en substituant pour A_2 sa valeur $-\frac{B_1^2}{2}$ il viendra après les réductions,

$$\sin x = B_1 x - \frac{B_1^3 x^3}{1.2.3.} + \frac{B_1^5 x^5}{1.2.3.4.5.} - \frac{B_1^7 x^7}{1.2.3.4.5.6.7.} \text{ etc.}$$

35. Nous voici donc arrêtés, comme dans le cas des fonctions exponentielles, par la détermination du premier coefficient; car B_1 étant connu, il donnera la valeur de A_1 et réciproquement. De plus, si on examine la série trouvée pour cos x, on verra qu'elle surpasse le rayon, ce qui ne sauroit avoir lieu dans le cercle; on est donc porté à croire que A_2 doit être une quantité négative, et cela avec d'autant plus de raison que la valeur de B_1 tirée de l'équation $B_1^2 + 2 A_2 = 0$, sera imaginaire tant que A_2 sera positif. Ces difficultés vont être éclaircies par la détermination de B_1, et nous aurons occasion de montrer dans la suite qu'elles tiennent à ce que les équations dont nous avons fait usage pour déduire les développemens de cos x et sin x, expriment des propriétés communes au cercle et à l'hyperbole.

Archimède

Archimède à démontré le premier que la circonférence d'un cercle est plus petite que le contour du polygone circonscrit et plus grande que celui du polygone inscrit d'un pareil nombre de côtés; il suit delà qu'un arc de cercle est toujours plus petit que sa *tangente trigonométrique*, et plus grand que son *sinus*; mais on sait que

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin x^2}}$$

$$\text{on aura donc } \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin x^2}} > x \\ \sin x < x \end{cases}$$

Les formules du genre des précédentes, par lesquelles on établit une comparaison d'*inégalité* entre deux grandeurs, peuvent être traitées de même que les équations; car toutes les opérations qu'on peut faire sans troubler l'égalité des deux membres de celles-ci, ne détruisent pas non plus l'inégalité des deux membres des autres: il est vrai que cette inégalité change de valeur, mais elle reste toujours dans le même sens, ce qui est la seule chose qu'on considère.

Pour dégager $\sin x$ dans la première des *inégalités* posées ci-dessus, on multipliera les deux membres par $\sqrt{1-\sin x^2}$, il viendra $\sin x > x\sqrt{1-\sin x^2}$ et en élevant au quarré, $\sin x^2 > x^2(1-\sin x^2)$; ajoutant de part et d'autre $x^2 \sin x^2$, on aura $(1+x^2)\sin x^2 > x^2$; divisant par $1+x^2$ et extrayant la racine quarrée de chaque membre, il en résultera $\sin x > \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Si on développe $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ par le moyen de la formule du binome, on aura $x\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3.}{2.4.}x^4 - \frac{1.3.5.}{2.4.6.}x^6 + \text{etc.}\right)$; il faudra donc, d'après ce qui précède, qu'en retranchant cette série de la valeur de $\sin x$, le résultat

$$x\left\{\left(B_1 - \frac{B_1^3 x^2}{1.2.3.} + \frac{B_1^5 x^4}{1.2.3.4.5.} - \text{etc.}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3.}{2.4.}x^4 - \text{etc.}\right)\right\}$$

soit une quantité positive. Mais il suit aussi de ce qu'on a $\sin x < x$, que la différence $x\left\{1 - \left(B_1 - \frac{B_1^3 x^2}{1.2.3.} + \frac{B_1^5 x^4}{1.2.3.4.} - \text{etc.}\right)\right\}$ doit

être positive; or ces deux conditions ne sauroient être remplies dans tous les cas, à moins qu'on n'ait $B_1 = 1$. En effet, on peut toujours donner à x une valeur assez petite pour que le premier terme de chacune des séries $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3.}{2.4.}x^4 - \text{etc.}$

$$B_1 - \frac{B_1{}^3 x^3}{1.2.3.} + \frac{B_1{}^5 x^4}{1.2.3.4.5.} - \text{etc.}$$

surpasse la somme de tous les autres, et que cette somme devienne moindre qu'aucune quantité donnée (n°s 8, 9). On pourra donc représenter la première série par $1 - \delta$ et la seconde par $B_1 - \delta'$, δ et δ' étant des quantités aussi petites qu'on voudra, et en vertu des conditions énoncées ci-dessus, il faudra que les valeurs de $\left.\begin{matrix} B_1 - 1 + \delta - \delta' \\ 1 - B_1 + \delta' \end{matrix}\right\}$ soient toutes deux positives. Maintenant supposons qu'on ait $B_1 = 1 + d$, les expressions précédentes deviendront $\left.\begin{matrix} d + \delta - \delta' \\ -d + \delta' \end{matrix}\right\}$; mais δ et δ' peuvent toujours être moindres que d, c'est donc alors du signe de cette quantité que dépend celui des différences que nous considérons, et par conséquent la première étant positive, la seconde sera négative, ce qui ne s'accorde pas avec l'état de la question.

B_1 ne sauroit non plus être au-dessous de l'unité; car si on avoit $B_1 = 1 - d$, d deviendroit négatif dans la première formule, positif dans la seconde, et en raisonnant sur l'hypothèse actuelle comme sur la précédente, on trouveroit encore deux résultats de signes différens; or comme cette circonstance ne peut pas avoir lieu, il faut en conclure que B_1 ne peut être ni plus grand ni moindre que 1, et que nécessairement on a $B_1 = 1$.

Afin d'écarter tous les doutes qui pourroient affoiblir les raisonnemens précédens, je ferai remarquer que les séries

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3.}{2.4.}x^4 - \frac{1.3.5.}{2.4.6.}x^6 \text{ etc.}$$

$$B_1 - \frac{B_1{}^3 x^3}{1.2.3.} + \frac{B_1{}^5 x^4}{1.2.3.4.5.} - \frac{B_1{}^7 x^6}{1.2.3.4.5.6.7.} \text{ etc.}$$

ne sont pas dans le cas de l'exception indiquée n° 9, et que le

rapport géométrique de deux termes consécutifs pris dans l'une ou dans l'autre, n'est pas susceptible de croître indéfiniment.

En effet, dans la première, deux termes consécutifs sont représentés en général par $\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6.....2n}\,x^{2n}$, $\frac{1.3.5.....(2n+1)}{2.4.6.....(2n+2)}\,x^{2n+2}$ et leur rapport est exprimé par $\frac{2n+1}{2n+2}\,x^2$; or quelque soit n, la fraction $\frac{2n+1}{2n+2}$ est toujours au-dessous de l'unité, le rapport précédent sera donc toujours moindre que x^2. Il suit delà qu'on peut rendre ce rapport aussi petit qu'on voudra, en donnant à x une valeur convenable.

Dans la seconde série les expressions de deux termes consécutifs sont $\frac{B_1^{2n+1}\,x^{2n}}{1.2.3.....(2n+1)}$; $\frac{B_1^{2n+3}\,x^{2n+2}}{1.2.3.....(2n+3)}$, et celle de leur rapport est $\frac{B_1^2\,x^2}{(2n+2)(2n+3)}$: quantité qui décroît à mesure qu'on s'éloigne davantage du premier terme. On voit donc qu'il est toujours possible de donner à x une valeur telle que les termes de l'une et de l'autre série décroîssent aussi rapidement qu'on le voudra.

Puisqu'on a $B_1 = 1$ on trouvera, en vertu de l'équation

$B_1 B_1 + 2A_2 = 0$, $A_2 = -\frac{1}{2}$, et par conséquent on aura

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.} + \text{etc.}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7.} + \text{etc.}$$

telles sont les expressions du sinus et du cosinus développées suivant les puissances de l'arc; je montrerai plus loin comment on en peut tirer la valeur de l'arc lui même.

36. Les considérations qui nous ont servi à déterminer B_1 ne sont pas particulières aux expressions dont nous nous sommes occupés dans l'article précédent; on en peut tirer un principe général,

d'autant plus remarquable, que nous en ferons la base des applications du calcul différentiel à la théorie des courbes.

Voici l'énoncé de ce principe :

Soient trois expressions $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$
$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{etc.}$
$A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \text{etc.}$

telles que les valeurs de la seconde se trouvent toujours comprises entre celles de la première et de la troisième : si ces deux dernières expressions ont le même premier terme, il sera nécessairement égal à celui de la seconde ; c'est-à-dire qu'ayant $A = A''$, *on en pourra conclure* $A = A'$.

Pour le prouver, supposons qu'on ait donné à x une valeur assez petite pour rendre moindre qu'aucune quantité donnée la somme de tous les termes qui suivent le premier de chacune des séries proposées, et que dans cet état on les représente par $\left.\begin{matrix} A + \mathcal{A} \\ A' + \mathcal{A}' \\ A'' + \mathcal{A}'' \end{matrix}\right\}$; si on retranche la première de la seconde, et celle-ci de la troisième, on aura $\left.\begin{matrix} A' - A + \mathcal{A}' - \mathcal{A} \\ A'' - A' + \mathcal{A}'' - \mathcal{A}' \end{matrix}\right\}$, résultats qui, en vertu de l'énoncé de la proposition, doivent être positifs l'un et l'autre. Mais si on pose $A'' = A$ et qu'on fasse successivement $\left.\begin{matrix} A' = A + d \\ A' = A - d \end{matrix}\right\}$, on prouvera, comme précédemment, que tant que d ne sera pas nul, les valeurs des formules ci-dessus seront de signe différent, il faudra donc qu'on ait $A' = A$.

Les notions que nous avons données des limites (n°s 12 et 13) rendent encore cette proposition bien évidente et abrégent un peu la démonstration ; car si on prend le rapport entre la première série et la troisième, on trouvera $\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}}{A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \text{etc.}}$, fraction dont la limite est $\frac{A}{A''}$ et devient 1, si $A = A''$. Mais puisque la seconde série est toujours comprise entre celles-ci qui tendent

sans cesse vers l'égalité, lorsque $A = A''$, et que x va en décroissant, elle doit pouvoir s'approcher indéfiniment de l'une et de l'autre, ainsi que de leur limite commune. Il suit delà que les rapports de ces trois séries, comparées deux à deux, doivent tendre sans cesse vers l'unité. En divisant la seconde par la première, on a

$$\frac{A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{etc.}}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}},$$ dont la limite est $\frac{A'}{A}$; donc $\frac{A'}{A} = 1$ ou $A' = A$.

Si on formoit quelques doutes sur la possibilité de rendre dans la série $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ la somme des termes $Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ aussi petite qu'on voudra par rapport au premier A, il suffiroit, pour les dissiper, d'observer que le procédé indiqué n° 9, pour faire en sorte que chaque terme de cette série soit plus petit que la moitié de celui qui le précède, peut conduire à un décroissement aussi rapide qu'on voudra. Il n'y a qu'a faire $x < \frac{P}{nQ}$, alors chaque terme sera moindre que la $n^{\text{ème}}$ partie de celui qui le le précède. Mais si on conçoit au lieu de $Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ la progression $\frac{k}{n} + \frac{k}{n^2} + \frac{k}{n^3} + \text{etc.}$ dont chaque terme est contenu, un nombre n de fois dans celui qui le précède, et à laquelle on peut donner la forme suivante $\frac{k}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \text{etc.}\right)$; la somme ou plutôt la limite de cette progression sera $\frac{k}{n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)$, résultat qu'on obtient en faisant $a = 1$ et $x = \frac{1}{n}$ dans la formule du n° 3; or la quantité $\frac{k}{n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) = \frac{k}{n-1}$ peut être rendue aussi petite qu'on voudra, en prenant pour n un nombre convenable, tant que k ne sera pas infini; il en sera donc de même à plus forte raison de la série $Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$

37. Il existe entre les logarithmes et les arcs de cercle une analogie remarquable. En effet, si on rapproche les séries qui expriment

e^x, sin x et cos x, on aura

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.} \text{ etc.} \\ \cos x &= 1 \quad - \frac{x^2}{1.2.} \quad + \frac{x^4}{1.2.3.4} \quad - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.} \text{ etc.} \\ \sin x &= \quad \frac{x}{1} \quad - \frac{x^3}{1.2.3.} \quad + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.} \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

et on verra que tous les termes compris dans les deux dernières réunies, sont les mêmes, aux signes près, que ceux qui leur correspondent dans la première; mais si on substitue dans celle-ci $x\sqrt{-1}$ au-

lieu de x on aura, à cause de

$$\begin{cases} (x\sqrt{-1})^2 = -x^2 \\ (x\sqrt{-1})^3 = -x^3\sqrt{-1} \\ (x\sqrt{-1})^4 = +x^4 \\ (x\sqrt{-1})^5 = +x^5\sqrt{-1} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2.} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3.} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.} \text{ ect.}$$

mettant aussi dans la même série $-x\sqrt{-1}$ pour x, il viendra

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3.} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} - \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.} \text{ etc.}$$

en ajoutant ces deux résultats, on trouvera

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\left\{1 - \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} \text{ etc.}\right\} =$$

$$= 2\cos x, \text{ d'où } \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2};$$

si au contraire on retranche le second du premier, il viendra

$$e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = 2\left\{\frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3.} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.} \text{etc.}\right\};$$

$$\text{ou } \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \left\{x - \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.} \text{ etc.}\right\}$$

$$\text{et par conséquent } \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Il seroit facile de trouver les expressions analogues des autres lignes trigonométriques. On auroit celle de tang$x$, par exemple, en substi-

tuant au lieu de sin x et cos x leur valeur dans l'équation $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; il viendroit alors $\tan x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}\right\}$, ou bien en multipliant le numérateur et le dénominateur du second membre par $e^{x\sqrt{-1}}$, $\tan x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}\right)$.

38. Ces deux équations $\left.\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\\ \sin x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\end{aligned}\right\}$ vont nous conduire à des résultats d'un grand usage dans l'analyse. Nous en tirerons d'abord, en les ajoutant, après avoir multiplié la seconde par $\sqrt{-1}$, $\cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}}$; et en les retranchant, $\cos x - \sqrt{-1}\sin x = e^{-x\sqrt{-1}}$. En prenant les logarithmes de chaque membre des dernières équations, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}x\sqrt{-1} &= l\,(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)\\ -x\sqrt{-1} &= l\,(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)\end{aligned}\right\};$$

si on retranche la seconde équation de la première, on aura

$$2x\sqrt{-1} = l\,(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) - l\,(\cos x - \sqrt{-1}\sin x) =$$

$$= l\left\{\frac{\cos x + \sqrt{-1}\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\sin x}\right\}:$$

divisant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $\cos x$, et mettant pour $\frac{\sin x}{\cos x}$, sa valeur $\tan x$, il viendra

$$2x\sqrt{-1} = l\left\{\frac{1 + \sqrt{-1}\tan x}{1 - \sqrt{-1}\tan x}\right\}.$$

Faisons maintenant $\sqrt{-1}\tan x = u$, nous aurons, en vertu de la série trouvée pour $l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$ (n° 18.)

$$2x\sqrt{-1} = 2\left\{u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \text{etc.}\right\},$$

ou en remettant pour u sa valeur,

$$2x\sqrt{-1} = 2\left\{\sqrt{-1}\tan x + \frac{\sqrt{-1}\tan x^3}{3} + \frac{\sqrt{-1}\tan x^5}{5}\text{ etc.}\right\}$$

En supprimant le facteur commun $2.\sqrt{-1}$, on obtient;

$$x = \tan x - \frac{\tan x^3}{3} + \frac{\tan x^5}{5} \text{ etc.}$$

série très remarquable, tant par la simplicité de sa loi, que par la nature de la relation qu'elle renferme, puisqu'elle est le développement d'un arc de cercle, au moyen de sa tangente. Représentons tan x par t, et nous aurons $x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$ etc. Si on prend pour x l'arc de 45°, sa tangente étant égale au rayon ou à l'unité, on trouvera arc de $45° = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc.

Cette série n'est pas très convergente, mais on peut en déduire d'autres qui le soient davantage, par des artifices analytiques que nous allons exposer.

Il est facile de voir que dans un cercle dont le rayon est égal à l'unité, le sinus de l'arc de $30° = \frac{1}{2}$, le cosinus $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$, et parconséquent la tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$. Substituant cette valeur au lieu de t on trouvera

$$\text{arc de } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \text{etc.}\right\}$$

résultat plus convergent que le précédent. Connoissant la longueur de l'arc de 30°, on aura celle de la circonférence en multipliant la première par 12. C'est par la série précédente que Lagny a calculé le rapport de la circonférence au diamètre, avec 127 décimales, et il a trouvé que le diamètre étant $= 1$, la circonférence étoit exprimée par 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32723 06647 09384 46.

Voici un moyen qui conduit à une approximation encore plus rapide: puisqu'on a $\frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$ et $\frac{\sin (a+b)}{\cos (a+b)} = \tan (a+b)$ en développant $\sin (a+b)$ et $\cos (a+b)$, on trouvera $\frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \tan (a+b)$. Mais si on divise le numérateur et le dénominateur du premier membre de cette équation

tion

tion par cos a cos b, on trouvera $\frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}}$, ce qui se réduit facilement à $\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b} = \tan (a + b)$.

Prenons l'arc $a + b = 45°$, on aura alors $\tan (a + b) = 1$; et par conséquent $1 - \tan a \tan b = \tan a + \tan b$, d'où $\tan b = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}$. Si maintenant on fait $\tan a = \frac{1}{2}$, il en résultera $\tan b = \frac{1}{3}$. Les arcs a et b seront donnés par deux séries plus convergentes que celles que nous avons trouvées plus haut, et on aura

$$a + b = 45° = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.3^9} \text{ etc.} \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9\,3^9} \text{ etc.} \end{cases}$$

39. Reprenons les deux équations $\left.\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}\right\}$ si l'on y met nx au lieu de x on aura

$$\left.\begin{aligned} \cos nx &= \frac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} \\ \sin nx &= \frac{e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}\right\}$$, ce qui conduit aux valeurs des sinus et cosinus d'arcs multiples.

En général, ces formules donnent le moyen d'appliquer le calcul algébrique aux fonctions de sinus et de cosinus, et avec leur secours on parvient aux mêmes résultats que ceux qu'on obtiendroit par les voies trigonométriques.

Comme cette matière n'est pas entièrement de notre sujet, on n'en trouvera ici que quelques exemples, mais ils suffiront pour montrer l'usage qu'on peut faire de ces formules.

Supposons qu'on demande ce que signifie le produit $\sin x \cos x$,

on trouvera, en l'effectuant, $\sin x \cos x = \frac{e^{2xV-1} - e^{-2xV-1}}{4V-1}$,

ou $2 \sin x \cos x = \frac{e^{2xV-1} - e^{-2xV-1}}{2V-1}$; mais il est aisé de voir que le second membre n'est autre chose que la valeur de $\sin 2x$, puisqu'on y parviendroit en mettant $2x$ au lieu de x, dans l'expression de $\sin x$; on aura donc $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. Si on s'étoit proposé $\sin x \cos z$, on auroit eu

$$\sin x \cos z = \left(\frac{e^{xV-1} - e^{-xV-1}}{2V-1}\right)\left(\frac{e^{zV-1} + e^{-zV-1}}{2}\right),$$

d'où $\sin x \cos z = \frac{e^{(x+z)V-1} - e^{-(x+z)V-1} + e^{(x-z)V-1} - e^{-(x-z)V-1}}{2.\ 2V-1}$,

mais il est évident que $\left.\begin{aligned} \frac{e^{(x+z)V-1} - e^{-(x+z)V-1}}{2V-1} &= \sin(x+z) \\ \frac{e^{(x-z)V-1} - e^{-(x-z)V-1}}{2V-1} &= \sin(x-z) \end{aligned}\right\}$.

par conséquent $\sin x \cos z = \frac{1}{2}\{\sin(x+z) + \sin(x-z)\}$.

Cette formule se tire très simplement, à la vérité, des valeurs connues de $\left.\begin{aligned} \sin(x+z) &= \sin x \cos z + \sin z \cos x \\ \sin(x-z) &= \sin x \cos z - \sin z \cos x \end{aligned}\right\}$, en les ajoutant ensemble, mais le moyen que nous venons d'employer conduit plus aisément aux formules générales, ainsi qu'on le verra bientôt.

40. Puisqu'on a $\left.\begin{aligned} e^{xV-1} &= \cos x + V-1 \sin x \\ e^{-xV-1} &= \cos x - V-1 \sin x \end{aligned}\right\}$,

on en tirera $e^{nxV-1} = (\cos x + V-1 \sin x)^n$

$$e^{-nxV-1} = (\cos x - V-1 \sin x)^n$$

d'où $\sin nx = \frac{e^{nxV-1} - e^{-nxV-1}}{2V-1} = \left(\frac{\cos x + V-1 \sin x)^n - (\cos x - V-1 \sin x)^n}{2V-1}\right)$

Nous voilà donc parvenus à l'expression du sinus d'un arc multiple d'une manière fort simple, et il faut bien faire attention que quoiqu'elle soit affectée de signes imaginaires, elle n'en est pas moins réelle; car ces signes disparoissent tous dans le développement des puissances indiquées. En effet on a

$(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^n = \cos x^n + n\sqrt{-1}\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)}{2}\cos x^{n-2}\sin x^2 - \text{etc.}$

$(\cos x-\sqrt{-1}\sin x)^n = \cos x^n - n\sqrt{-1}\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)}{2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \text{etc.}$

en retranchant la seconde équation de la première, et divisant par $2\sqrt{-1}$, on trouvera :

$\sin nx = n\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\cos x^{n-3}\sin x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cos x^{n-5}\sin x^5 \text{ etc.}$

Il n'est pas besoin d'avertir que cette série sera terminée toutes les fois que n exprimera un nombre entier positif; elle suit à cet égard les mêmes loix que la formule du binôme dont elle est tirée.

En mettant pour $e^{nx\sqrt{-1}}$ et $e^{-nx\sqrt{-1}}$ leur valeur dans l'équation $\cos nx = \frac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}}{2}$ on trouvera,

$\cos nx = \frac{1}{2}\{\cos x + \sqrt{-1}\sin x\}^n + \frac{1}{2}\{\cos x - \sqrt{-1}\sin x\}^n;$

et en développant il viendra, après avoir effacé les termes qui se détruisent et qui sont alors ceux affectés d'imaginaires,

$\cos nx = \cos x^n - \frac{n(n-1)}{2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\cos x^{n-4}\sin x^4 \text{ etc.}$

41. On peut, sans le secours des séries, arriver aux résultats précédens en faisant usage des équations

$$\left.\begin{aligned}\sin(x\pm z) &= \sin x\cos z \pm \cos x\sin z\\ \cos(x\pm z) &= \cos x\cos z \mp \sin x\sin z\\ 1 &= \sin x^2 + \cos x^2\end{aligned}\right\}$$

qui renferment toute la théorie des sinus, et voici comment : à cause de la dernière on a $1 = (\cos x+\sqrt{-1}\sin x)(\cos x-\sqrt{-1}\sin x)$; mais en développant le produit $(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)$, on trouve $\cos x\cos z - \sin x\sin z + \{\cos x\sin z + \sin x\cos z\}\sqrt{-1}$, résultat qui donne, en vertu des deux premières équations,

$(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)(\cos z+\sqrt{-1}\sin z) = \cos(x+z)+\sqrt{-1}\sin(x+z).$

On obtiendra de même,

$(\cos x-\sqrt{-1}\sin x)(\cos z-\sqrt{-1}\sin z) = \cos(x+z)-\sqrt{-1}\sin(x+z)$

$(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)(\cos z-\sqrt{-1}\sin z) = \cos(x-z)+\sqrt{-1}\sin(x-z)$

$(\cos x-\sqrt{-1}\sin x)(\cos z+\sqrt{-1}\sin z) = \cos(x-z)-\sqrt{-1}\sin(x-z)$

on peut comprendre ces quatre formules dans les deux suivantes,

$(\cos x\pm\sqrt{-1}\sin x)(\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z) = \cos(x+z)\pm\sqrt{-1}\sin(x+z)$

$(\cos x\pm\sqrt{-1}\sin x)(\cos z\mp\sqrt{-1}\sin z) = \cos(x-z)\pm\sqrt{-1}\sin(x-z)$

Si dans la première de celles-ci, on fait successivement $z = x$, $2x$, $3x$, $(n-1)x$, il en résultera :

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^2 = \cos 2x \pm \sqrt{-1}\sin 2x$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos 2x \pm \sqrt{-1}\sin 2x) = \cos 3x \pm \sqrt{-1}\sin 3x$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos 3x \pm \sqrt{-1}\sin 3x) = \cos 4x \pm \sqrt{-1}\sin 4x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos(n-1)x \pm \sqrt{-1}\sin(n-1)x) = \cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx.$$

mais on voit que le second membre de chacune de ces équations, est précisément le second facteur du premier membre de l'équation suivante, et en mettant au lieu de ce facteur, la quantité qui lui est égale, on trouvera

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^2 = \cos 2x \pm \sqrt{-1}\sin 2x$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^3 = \cos 3x \pm \sqrt{-1}\sin 3x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx;$$

on aura donc

$$\begin{cases}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx \\ (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx - \sqrt{-1}\sin nx.\end{cases}$$

En ajoutant ces deux dernières équations, et en les retranchant l'une de l'autre, on trouvera comme ci-dessus

$$\cos nx = \tfrac{1}{2}\{\cos x + \sqrt{-1}\sin x\}^n + \tfrac{1}{2}\{\cos x - \sqrt{-1}\sin x\}^n$$
$$\sin nx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\{\cos x + \sqrt{-1}\sin x\}^n - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\{\cos x - \sqrt{-1}\sin x\}^n$$

Si dans ces équations on fait $x = \frac{\nu}{n}$ et qu'on les développe, elles deviendront

$$\sin\nu = n\left(\cos\tfrac{\nu}{n}\right)^{n-1}\left(\sin\tfrac{\nu}{n}\right) - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\left(\cos\tfrac{\nu}{n}\right)^{n-3}\left(\sin\tfrac{\nu}{n}\right)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\cos\tfrac{\nu}{n}\right)^{n-5}\left(\sin\tfrac{\nu}{n}\right)^5 \text{ etc.}$$

$$\cos\nu = \left(\cos\tfrac{\nu}{n}\right)^n - \frac{n(n-1)}{2}\left(\cos\tfrac{\nu}{n}\right)^{n-2}\left(\sin\tfrac{\nu}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\cos\tfrac{\nu}{n}\right)^{n-4}\left(\sin\tfrac{\nu}{n}\right)^4 \text{ etc.}$$

Les séries qui forment leurs seconds membres sont susceptibles de limites relativement à l'accroissement de n, car lorsque ce nombre augmente, l'arc $\frac{\nu}{n}$ diminue et se rapproche de plus en plus de son sinus, tandis que son cosinus converge vers le rayon ou l'unité ; en

écrivant donc $\frac{v}{n}$ au lieu de $\sin\frac{v}{n}$, 1 au lieu de $\cos\frac{v}{n}$, et en réduisant les produits n, $n(n-1)$, $n(n-1(n-2)$, etc. à leur premier terme, on aura pour la limite

$$\sin v = n\frac{v}{n} - \frac{n^3}{2\cdot3}\frac{v^3}{n^3} + \frac{n^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\frac{v^5}{n^5} - \text{etc.} = v - \frac{v^3}{2\cdot3} + \frac{v^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\text{ etc.}$$

$$\cos v = 1 - \frac{n^2}{2}\frac{v^2}{n^2} + \frac{n^4}{2\cdot3\cdot4}\frac{v^4}{n^4} - \text{etc.} = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2\cdot3\cdot4}\text{ etc.}$$

Nous voilà donc retombés sur les séries du n° 35, et on voit par-là comment se vérifient l'une par l'autre, les différentes marches que nous avons suivies pour y arriver.

42. Dans les articles précédens on a développé les sinus et cosinus d'arcs multiples, suivant les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple; voici comment on peut résoudre la question inverse, c'est-à-dire celle où il s'agit d'exprimer les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple, par les sinus et cosinus de ses multiples.

Soit $\begin{cases} \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x = u \\ \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x = v \end{cases}$

on aura $\cos x = \frac{1}{2}(u+v)$, $\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u-v)$, et delà on tirera d'abord $\cos x^n = \frac{1}{2^n}(u+v)^n$. En développant la puissance indiquée dans le second membre de cette équation, il viendra

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{u^n + n\,u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}u^{n-3}v^3 + \text{etc.}\right\};$$

mais dans l'expression $(u+v)^n$ on peut changer v et u, et réciproquement, ce qui donnera

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{v^n + n\,v^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{2}v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}v^{n-3}u^3 + \text{etc.}\right\};$$

en ajoutant ces deux résultats, on aura

$$2\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{u^n + v^n + n(u^{n-1}v + v^{n-1}u) + \frac{n(n-1)}{2}(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3)\text{etc.}\right\}$$

On peut donner à cette équation la forme suivante,

$$2^{n+1}\cos x^n = \left\{u^n + v^n + n\,uv(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{2}u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4}) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}u^3v^3(u^{n-6} + v^{n-6})\text{ etc.}\right\}$$

mais en vertu du n° 40, on a

$\cos nx = \frac{1}{2}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n + \frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \frac{1}{2}u^n + \frac{1}{2}v^n$,

et cela quelque soit n. On en pourra conclure que $u^n + v^n = 2\cos nx$, et en général $u^{n-m} + v^{n-m} = 2\cos(n-m)x$; de plus il est aisé de voir que $uv = 1$, par conséquent on aura,

$$2^{n-1}\cos x^n = \{2\cos nx + 2n\cos(n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x + \frac{2n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\cos(n-6)x \text{ etc.}\}$$

ou bien en divisant tout par 2

$$2^{n-1}\cos x^n = \{\cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos(n-6)x \text{ etc.}\}$$

En continuant cette formule comme celle du binome de Newton, on arrivera à des cosinus d'arcs négatifs; mais ils sont précisément les mêmes que ceux des arcs positifs qui leur correspondent, ainsi qu'on peut s'en assûrer en faisant x négatif dans l'équation

$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$, dont le second membre ne change pas par cette substitution : on écrira donc $\cos(m-n)x$ au lieu de $\cos(n-m)x$.

La valeur que nous venons de trouver pour $\cos x^n$ n'est pas restrainte au seul cas où n est un nombre entier, elle conviendroit également à ceux où n seroit fractionnaire ou négatif. Cependant dans le premier elle est susceptible d'une simplification que nous allons faire connoître.

Dans le développement de $(u+v)^n$, lorsque n est un nombre entier les termes placés à égale distance des extrêmes ont le même coefficient; pareille chose aura lieu dans l'expression

$$\cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos(n-6)x \text{ .... etc.}$$

et nous allons montrer de plus que les cosinus placés à égale distance des extrêmes de cette formule appartiennent à des arcs égaux. En effet, le terme placé à une distance m du premier est affecté de $\cos(n-2m)x$, et le dernier l'est lui-même de $\cos(n-2n)x$, ou $\cos -nx$; en remontant vers le premier d'un nombre de rangs marqué par m, on trouvera nécessairement $\cos(-n+2m)x$, ou
au. $\cos-(n-2m)x$. Mais d'après ce qui a été dit ci-dessus, $\cos(n-2m)x$ et $\cos-(n-2m)x$ reviennent au même; il suit donc delà qu'il est inutile de chercher les termes multipliés par des cosinus d'arcs néga-

tifs, et qu'il suffit pour en tenir compte de prendre le double de chacun de ceux qui en contiennent de positifs.

On pourra donc, en s'arrêtant au terme où les arcs deviennent négatifs, écrire $2^n \cos x^n =$

$$\left\{2\cos nx + \frac{2n}{1}\cos(n-1)x + \frac{2n(n-2)}{1.2}\cos(n-4)x + \text{....etc.}\right\}$$

Il faut néanmoins observer que dans le cas où n est un nombre pair, la formule a un terme moyen également éloigné de l'un et de l'autre extrême, et représenté par $\frac{n(n-1)\ldots(n-\frac{n}{2}+1)}{1.2.\ldots\ldots\frac{n}{2}}\cos(n-n)x$;

à cause de $\cos 0\, x = 1$, il se réduit à $\frac{n(n-1)\ldots(\frac{n}{2}+1)}{1.2.\ldots\ldots\frac{n}{2}}$; et parce qu'il est unique, il ne doit pas être multiplié par 2 comme les autres.

On aura donc pour dernier résultat $2^{n-1}\cos x^n =$

$$\left\{\cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2.}\cos(n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\cos(n-6)x \text{ etc.}\right\}$$

en observant de s'arrêter dans cette formule lorsqu'on rencontrera un arc négatif, et de ne prendre que la moitié du coefficient du cosinus de l'arc nul qu'on trouvera, si n est pair. Avec cette attention il sera facile de former les valeurs de la table ci-jointe:

$\cos x = \cos x$

$2\cos x^2 = \cos 2x + 1$

$4\cos x^3 = \cos 3x + 3\cos x$

$8\cos x^4 = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$

$16\cos x^5 = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x$

$32\cos x^6 = \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10$

$64\cos x^7 = \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x$

etc.

43. Pour développer $\sin x^n$ on fera usage de l'équation

$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u-v)$, et on trouvera $\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(u-v)^n$

ou $\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{u^n - \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2.}u^{n-2}v^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}u^{n-3}v^3 \text{ etc.}\right\}$

1°. soit n un nombre pair; dans ce cas $(u-v)^n = (v-u)^n$ et par

conséquent on aura encore $\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(v-u)^n$. En développant le second membre de cette équation qu'on ajoutera à la première, il viendra

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{u^n + v^n - \frac{n}{1}(u^{n-1}v + v^{n-1}u) + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3)\ \text{etc.}\right\}$$

ou bien

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{u^n + v^n - \frac{n}{1}uv(u^{n-2}+v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}u^2v^2(u^{n-4}+v^{n-4}) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}u^3v^3(u^{n-6}+v^{n-6})\ \text{etc.}\right\}$$

résultat qui est le même, aux signes près, que celui du n° précédent; nous pouvons donc écrire tout de suite $(2\sqrt{-1})^n \sin x^n =$

$$\left\{\cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\cos(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}\cos(n-6)x\ \text{etc.}\right\}$$

l'imaginaire disparoît parce que n est un nombre pair; et on a $(2\sqrt{-1})^n = \pm 2^n$, le signe supérieur ayant lieu, si n est doublement pair, c'est-à-dire multiple de 4, et le signe inférieur, s'il est simplement divisible par 2.

On fera sur le second membre de cette équation les mêmes raisonnemens que dans l'article précédent, et parce que n est un nombre entier, on en conclura qu'on peut se borner aux termes qui ne renferment que des arcs positifs, pourvû qu'on prenne le double de chacun d'eux. De plus, comme n est pair, il y aura un terme dégagé de cosinus qu'il ne faudra pas doubler, et en divisant tout par 2, on aura $\pm 2^{n-1}\sin x^n =$

$$\left\{\cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\cos(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}\cos(n-6)x\ \text{etc.}\right\}$$

en observant de s'arrêter lorsqu'on trouvera un arc nul, et de ne prendre que la moitié du coefficient de ce terme.

2°. Si n est un nombre impair, il vient alors $(v-u)^n = -(u-v)^n$, par conséquent $\sin x^n = -\frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(v-u)^n$, ou en développant,

sin

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{-v^n + \frac{n}{1}v^{n-1}u - \frac{n(n-1)}{1.2.}v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}v^{n-3}u^3 \text{ etc.}\right\}.$$

En ajoutant cette valeur de $\sin x^n$ à celle de la page 71, et faisant les réductions nécessaires, on trouvera

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{u^n - v^n - \frac{n}{1}(u^{n-2} - v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2.}u^2v^2(u^{n-4} - v^{n-4}) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}u^3v^3(u^{n-6} - v^{n-6}) \text{ etc.}\right\}$$

mais par le n° 40;

$$\sin nx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n - (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n\right\} =$$

$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u^n - v^n)$, quel que soit n; quant au produit $u\,v$, il est toujours égal à l'unité, ainsi on aura en général $u^{n-m} - v^{n-m} = 2\sqrt{-1}\sin(n-m)x$; par conséquent

$$\sin x^n = \frac{\sqrt{-1}}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{\sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2.}\sin(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\sin(n-6)x \text{ etc.}\right\}.$$

L'imaginaire n'affecte pas plus cette formule que les précédentes; car n étant un nombre impair, $(2\sqrt{-1})^n = \pm 2^n\sqrt{-1}$, le signe supérieur ayant lieu si n est de la forme $4k+1$, c'est-à-dire, un multiple de 4 augmenté de l'unité, et le signe inférieur si on a simplement $n = 2k+1$.

On peut encore ici se borner aux termes affectés de sinus d'arcs positifs en prenant le double de chacun d'eux. Car il est d'abord évident par les mêmes raisons que précédemment, que les termes placés à égale distance des extrêmes, ont le même coefficient, et que l'un est affecté d'un arc positif, et l'autre d'un arc négatif : à la vérité comme le nombre des termes de la formule est pair, et qu'ils sont alternativement positifs et négatifs, les termes correspondans seront de signe contraire; mais aussi le sinus de l'arc négatif est lui-même négatif, comme on peut s'en assurer en substituant $-x$ à $+x$ dans $\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; par conséquent cette différence de

signe se trouve corrigée, et les termes dont il s'agit se réunissent dans un seul.

D'après ces considérations, et en divisant par 2, il viendra

$$2^{n-1}\sin x^n = \left\{\sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2.}\sin(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\sin(n-6)x \text{ etc.}\right\}$$

on déduira aisément des deux formules que nous venons de trouver, les valeurs contenues dans la table suivante :

$$\sin x = \sin x$$
$$2\sin x^2 = -\cos 2x + 1$$
$$4\sin x^3 = -\sin 3x + 3\sin x$$
$$8\sin x^4 = \cos 4x - 4\cos 2x + 3$$
$$16\sin x^5 = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x$$
$$32\sin x^6 = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10$$
$$64\sin x^7 = -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x$$

etc.

Voilà pour les cas où n seroit un nombre entier; s'il étoit fractionnaire, il faudroit avoir recours à la première formule du n° précédent. On y feroit $x = 90^\circ - z$, ce qui donneroit $\cos x = \sin z$, et par conséquent l'expression de $\cos x^n$ par les cosinus des multiples de x, seroit celle de $\sin z^n$ par les cosinus des multiples de $90^\circ - z$, ou du complément de l'arc z.

44. Le développement de $l\,u$, trouvé n° 29, nous conduira à celui d'un arc de cercle, ordonné par rapport aux sinus de ses multiples. En effet, si dans

$$l\,u = u - u^{-1} - \left(\frac{u^2 - u^{-2}}{2}\right) + \left(\frac{u^3 - u^{-3}}{3}\right) - \left(\frac{u^4 - u^{-4}}{4}\right) \text{ etc.} ::$$

on fait $u = e^{z\sqrt{-1}}$, on aura

$$l\,e^{z\sqrt{-1}} = e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}} - \left(\frac{e^{2z\sqrt{-1}} - e^{-2z\sqrt{-1}}}{2}\right) + \left(\frac{e^{3z\sqrt{-1}} - e^{-3z\sqrt{-1}}}{3}\right) - \left(\frac{e^{4z\sqrt{-1}} - e^{-4z\sqrt{-1}}}{4}\right) \text{ etc.}$$

mais $l\,e^{z\sqrt{-1}} = z\sqrt{-1}$; par conséquent

$$z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2z\sqrt{-1}} - e^{-2z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3z\sqrt{-1}} - e^{-3z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{4z\sqrt{-1}} - e^{-4z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right) \text{etc.}$$

divisant les deux membres de cette équation par 2, on trouvera

$$\frac{1}{2}\zeta = \frac{e^{\zeta\sqrt{-1}} - e^{-\zeta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\zeta\sqrt{-1}} - e^{-2\zeta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3\zeta\sqrt{-1}} - e^{-3\zeta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{4\zeta\sqrt{-1}} - e^{-4\zeta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) \text{ etc.}$$

et à cause que $\begin{cases} \frac{e^{\zeta\sqrt{-1}} - e^{-\zeta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin\zeta \\ \frac{e^{2\zeta\sqrt{-1}} - e^{-2\zeta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin 2\zeta \\ \text{etc.} \end{cases}$

Il en résultera :

$\frac{1}{2}\zeta = \sin\zeta - \frac{1}{2}\sin 2\zeta + \frac{1}{3}\sin 3\zeta - \frac{1}{4}\sin 4\zeta \ldots$ etc.

cette expression remarquable du développement d'un arc par les sinus de ses multiples est due à Euler, ainsi que tout ce qui précède.

Si l'on fait $\zeta = 90°$, alors $\sin 2\zeta$, $\sin 4\zeta$, et en général tous les sinus des multiples pairs, sont égaux à zéro, il ne reste que ceux qui sont impairs; mais il faut observer à leur égard qu'ils sont alternativement positifs et négatifs : ainsi $\sin 90°$ étant positif, $\sin 3.90°$ est négatif, $\sin 5.90°$ est positif, $\sin 7.90°$ est négatif et ainsi de suite. En vertu de ces considérations on trouvera que l'arc de

$45° = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc., résultat conforme à celui du n° 38.

45. Lorsqu'on a obtenu l'expression d'une quantité par une suite ordonnée suivant les puissances d'une autre quantité, on peut renverser la question en regardant la seconde comme une fonction de la première, et chercher son développement. C'est ainsi qu'après avoir trouvé la valeur du cosinus et du sinus au moyen des puissances de l'arc, on peut demander celle de l'arc lui-même. Les problèmes de ce genre sont l'objet du *retour des suites*. Je vais exposer le procédé que Newton, qui les résolut le premier, nous a transmis dans une de ses lettres à Oldembourg, parce qu'il me paroît le plus élégant et le plus naturel.

Soit x un arc de cercle, et y son sinus, on aura (n° 35)

$$y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \text{etc.}$$

Si on pouvoit éliminer toutes les puissances de x, excepté la première,

on auroit la valeur de x en y; or c'est à quoi on parviendra facilement de la manière suivante :

On calculera d'abord la 3me puissance de y, soit directement, soit à l'aide des formules du n° 20, et on trouvera après les réductions $y^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13}{120} x^7 -$ etc.; éliminant entre cette équation et la proposée x^3 comme une inconnue particulière, il viendra

$y + \frac{y^3}{6} = x - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{120}\right) x^5 + \left(\frac{13}{720} - \frac{1}{5040}\right) x^7 -$ etc, ce qui donne en réduisant, $y + \frac{y^3}{6} = x - \frac{3x^5}{40} + \frac{x^7}{56}$. Formant ensuite la cinquième puissance de y, on aura $y^5 = x^5 - \frac{5x^7}{6} +$ etc.; et chassant x^5 du dernier résultat, on trouvera

$$y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} = x - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{56}\right) x^7 + \text{etc.}$$

ou $y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} = x - \frac{5x^7}{112} +$ etc. Mais on a $y^7 = x^7 -$ etc.; par conséquent $y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{5y^7}{112} = x +$ etc.

Nous voilà donc parvenus au développement de x en y, poussé jusqu'à la 7me puissance de y, et la marche que nous avons suivie pour y arriver est assez claire pour qu'on puisse la continuer aussi loin qu'on voudra. En calculant encore deux termes de plus, on aura

$$y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{3}{40} y^5 + \frac{5}{112} y^7 + \frac{35}{1152} y^9 + \frac{63}{2816} y^{11} + \text{etc.} = x.$$

Quoiqu'on ne voye pas tout de suite la loi des différens termes de la série précédente, on la découvrira en décomposant les coefficiens et les diviseurs numériques dans leurs facteurs, et on aura

$$y + \frac{y^3}{2.3} + \frac{3.y^5}{2.4.5} + \frac{3.5.y^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.y^9}{2.4.6.8.9} + \frac{3.5.7.9.y^{11}}{2.4.6.8.10.11} + \text{etc.} = x$$

telle est l'expression de l'arc x développé suivant les puissances de son sinus y.

Cet exemple suffiroit, en quelque sorte, pour faire connoître l'esprit de la méthode. Nous remarquerons cependant que si on avoit $y = a + bx + cx^2 + dx^3 +$ etc., il faudroit, pour plus

de commodité, passer la quantité déterminée a dans l'autre membre, et faire $a - y = z$, ce qui donneroit $z = b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + \text{etc.}$, et le résultat procéderoit alors suivant les puissances de z : sans cette précaution, chaque puissance de y produiroit de nouveaux termes indépendans de x, et il naîtroit delà une suite indéfinie pour le premier terme du développement cherché.

Si la série proposée ne renfermoit pas la première puissance de x, on n'auroit que la valeur de la puissance la moins élevée, et par conséquent il faudroit tirer du résultat une racine du dégré marqué par l'exposant de cette puissance; ce qui seroit facile au moyen des formules du n° 20.

Un des avantages les plus remarquables du procédé qui nous occupe, c'est de conduire directement à la forme de la série cherchée. Soit pour exemple $z = a\,x^2 + b\,x^3 + c\,x^4 + \text{etc.}$: il faut éliminer d'abord x^3; or pour cela on doit élever z à une puissance telle que le premier terme soit affecté de x^3. Supposons que cette condition soit remplie par le développement de z^m; on aura nécessairement $z^m = a^m\,x^{2m} + \text{etc.}$, il faudra par conséquent que $2m = 3$ ou que $m = \frac{3}{2}$. On élevera donc la série qui exprime z à la puissance $\frac{3}{2}$, ce qu'on pourra faire commodément en lui donnant la forme suivante : $z = x^2\{a + b\,x + c\,x^2 \text{ etc.}\}$, et on trouvera $z^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}\,x^3 + \frac{3}{2}\,a^{\frac{3}{2}-1}\,x^4 + \text{etc.}$ On chassera x^3 par cette équation, il ne restera plus que x^4, et des puissances supérieures. En élevant z au quarré, on aura un résultat qui servira à l'élimination de x^4. Cette opération peut être continuée actuellement sans difficulté, quand même il seroit encore nécessaire d'élever la valeur de z à des puissances fractionnaires.

La quantité représentée par z pourroit être elle-même une série ordonnée suivant les puissances de y, sans que pour cela le procédé changeât; il seroit seulement nécessaire d'ordonner les développemens des différentes puissances de z par rapport à y, en repassant de la première de ces quantités à la seconde.

Enfin si on avoit deux séries telles que

$$\begin{cases} z = a\,x + b\,x^2 + c\,x^3 + \text{etc.} \\ t = a'\,x + b'\,x^2 + c'\,x^3 + \text{etc.} \end{cases}$$

on pourroit, par la même méthode, trouver le développement de z en t et réciproquement.

Pour avoir z par exemple, on prendra la valeur de x en t dans la seconde série, et on la substituera dans la première. Le résultat de cette opération ne contiendra plus que le quarré et les puissances supérieures de x. On élevera ensuite la seconde série au quarré, et on en tirera une valeur de x^2 en t^2, x^3, x^4, etc., qui donnera le moyen de chasser x^2 du résultat précédent: en continuant de la même manière on se débarrassera successivement des diverses puissances de x. Le procédé que je viens d'indiquer revient à celui qu'on suit ordinairement pour l'élimination, mais avec cette différence qu'au lieu de commencer par chasser les termes dont l'exposant est le plus haut, on opère d'abord sur ceux où il est le plus petit.

Voici maintenant une formule générale qui renferme tous les cas où les puissances de x croissent en progression arithmétique. Soit $y = k + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$ etc. En transposant k, et faisant, pour abréger $y - k = z$, on aura

$$z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}\ldots\ldots \quad (1)$$

Calculant les valeurs de z^2, z^3, z^4, etc. on pourra éliminer successivement x^2, x^3, x^4, etc. comme nous l'avons pratiqué dans les exemples précédens, et on trouvera

$$x = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a^3}z^2 + \left(\frac{2b^2 - ac}{a^5}\right)z^3 - \left(\frac{5b^3 - 5abc + a^2d}{a^7}\right)z^4$$
$$+ \left(\frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}\right)z^5 + \text{etc.}$$

On peut encore arriver au même résultat par la méthode des coefficiens indéterminés, en supposant

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.},$$

et en formant les valeurs de x^2, x^3, x^4, x^5, etc. pour les substituer dans l'équation (1). Ces opérations étant exécutées on transposera le premier membre dans le second, et on égalera à zéro tous les termes affectés d'une même puissance de z, ce qui fournira les équations nécessaires pour déterminer les coefficiens A, B, C, etc. Nous n'entrerons pas dans les détails de ces calculs, dont on a déjà vu un assez grand nombre d'exemples.

46. Nous terminerons cette Introduction par une expression de

l'arc de cercle d'une forme différente de celles que nous avons fait connoître jusqu'à présent, et dont Euler a encore enrichi l'Analyse.

Puisqu'on a $\sin(x+z) = \sin x \cos z + \cos x \sin z$, on trouvera en faisant $z = x$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Substituant $\frac{1}{2}x$ à x, il viendra $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$. Faisant de nouveau la même substitution, on obtiendra $\sin \frac{1}{2}x = 2 \sin \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{4}x$; mettant cette valeur de $\sin \frac{1}{2}x$ dans celle de $\sin x$, il en résultera $\sin x = 4 \sin \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x$; mais on aura, en opérant comme tout à l'heure, $\sin \frac{1}{4}x = 2 \sin \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{8}x$, par conséquent $\sin x = 8 \sin \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x$. On pourra chasser $\sin \frac{1}{8}x$ au moyen de l'équation $\sin \frac{1}{8}x = 2 \sin \frac{1}{16}x \cos \frac{1}{16}x$, par conséquent il viendra $\sin x = 16 \sin \frac{1}{16}x \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{16}x$.

On voit qu'en continuant de la même manière, on introduira chaque fois un nouveau cosinus, et qu'on aura en général

$$\sin x = 2^n \sin \frac{1}{2^n}x \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{16}x \ldots \cos \frac{1}{2^n}x.$$

Mais plus n sera grand, plus l'arc $\frac{1}{2^n}x$ sera petit, et par conséquent moins son sinus différera de lui, et son cosinus du rayon ou de l'unité. La limite de l'expression précédente sera donc

$$\sin x = x \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \text{ etc.}$$

et on tirera delà, $x = \dfrac{\sin x}{\cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8} \text{ etc.}}$

mais on sçait que $\dfrac{1}{\cos z} = \sec z$; donc $x = \sin x \sec \frac{1}{2}x \sec \frac{1}{4}x \sec \frac{1}{8}x$ etc.

Ce produit converge toujours vers une valeur finie; car à mesure que l'arc devient moindre, la secante approche du rayon ou de l'unité, ainsi les facteurs vont toujours en diminuant.

En prenant les logarithmes on ramèneroit ce résultat à la forme d'une suite ordinaire, car on trouveroit

$$\text{l } x = \text{l sin } x + \text{l sec } \tfrac{1}{2}x + \text{l sec } \tfrac{1}{4}x + \text{l sec } \tfrac{1}{8}x \text{ etc.}$$

Dans le chapitre de cet Ouvrage où nous traiterons du développement des fonctions en séries, nous completerons les recherches précédentes par des méthodes plus simples et plus fécondes. Notre but dans cette Introduction, étoit seulement de familiariser le lecteur

avec la considération des séries, et de le préparer, par-là, au chapitre suivant, où la théorie du calcul différentiel sera déduite du développement des fonctions en séries, marche qui est en même-temps la plus lumineuse et la plus directe, et que le C.n Lagrange a fait connoître, pour la première fois, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, *année* 1772.

TRAITÉ

TRAITÉ
DU CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DU CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.
DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.
Exposition analytique des principes du Calcul différentiel.

IL seroit fort difficile d'expliquer clairement la nature du *Calcul différentiel* à ceux qui n'en ont pas les premières notions. Ce n'est pas qu'on ne puisse définir rigoureusement ce calcul ; mais on ne sauroit le faire sans emprunter des idées qui ne se rencontrent point dans les circonstances ordinaires de la vie, ni dans les parties des

Mathématiques qui sont l'objet des études précédentes. Heureusement rien n'oblige à commencer un traité par des définitions qui, comme le disoit Pascal, ne consistent que dans l'imposition d'un nom aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus. Nous exposerons donc d'abord les idées préliminaires qui donnent naissance au Calcul différentiel, et par-là nous ferons voir sa liaison avec le développement des fonctions dont nous nous sommes occupés dans l'Introduction.

Des changemens qu'éprouve une fonction de x lorsque x donne $x+k$.

1. L'Algèbre proprement dite, a pour sujet la quantité considérée en elle-même, et rapportée à un état de grandeur fixe et déterminé; les relations que des quantités assujetties à des conditions données doivent avoir entr'elles, sont l'objet des questions qu'on y traite.

Dans la partie de l'Analyse qui va nous occuper, on suppose, au contraire, que la quantité passe par différens états de grandeur, et on considère les changemens qui en résultent dans ses fonctions.

Les quantités envisagées comme changeant de grandeur, ou pouvant en changer, sont appellées *variables*, et on donne le nom de *constantes* à celles qui conservent toujours la même valeur dans le cours du calcul. On voit d'après cela que c'est la nature de la question proposée qui détermine quelles sont les quantités qu'on doit regarder comme variables ou comme constantes.

Si une quantité variable x reçoit un accroissement représenté par k, pour trouver ce que deviennent alors les fonctions de cette quantité, il faut écrire $x+k$ au lieu de x dans leur expression: prenant pour exemple x^2, x^3 et $\frac{a\,x}{a^2+x^2}$, il viendra

$$(x+k)^2 = x^2 + 2\,x\,k + k^2$$

$$(x+k)^3 = x^3 + 3\,x^2k + 3\,x\,k^2 + k^3$$

$$\frac{a\,(x+k)}{a^2+(x+k)^3} = \frac{a\,x+a\,k}{a^2+x^2+2\,x\,k+k^2}$$

Dans le cas où x auroit éprouvé une diminution au lieu d'un accroissement, il faudroit substituer $x-k$ au lieu de x, ou donner à k le signe $-$.

2. La recherche précédente n'aura, comme on voit, aucune difficulté, toutes les fois qu'il s'agira d'une fonction dont la composition

sera connue, c'est-à-dire d'une fonction explicite ; elle ne paroit pas même au premier coup-d'œil devoir conduire à des résultats bien intéressans : mais cependant si on développe dans une série, ordonnée suivant les puissances de k, l'expression de la nouvelle valeur de la fonction proposée, elle se présente alors sous une forme qui mérite une attention particulière. On pourroit établir cette forme sur des considérations générales, mais dans un Ouvrage de la nature de celui-ci, il paroit plus convenable de la déduire de l'examen des cas particuliers; c'est pourquoi nous traiterons successivement, comme il vient d'être dit, les différens genres de fonctions dont nous nous sommes occupés dans l'Introduction.

1°. Si dans la fonction x^n on met $(x+k)$ au lieu de x, il viendra

$$(x+k)^n = x^n + n\,x^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{2}\,x^{n-2}k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^{n-3}k^3 + \text{etc.}$$

Il faut remarquer que ce développement a pour premier terme la fonction proposée x^n et qu'il donne naissance à une suite de fonctions $n\,x^{n-1}$, $\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^{n-3}$, etc. qui multiplient les différentes puissances de k. Ces fonctions doivent être regardées comme dérivées de la fonction proposée par la transformation qu'on lui a fait subir, et leur considération est absolument indépendante de la valeur de k.

Toute fonction rationnelle et entière de x, qui ne peut être que de cette forme, $A\,x^\alpha + B\,x^\beta + C\,x^\gamma + \ldots$ conduit à un résultat semblable; car en substituant $x+k$ à x on trouve

$$A(x+k)^\alpha + B(x+k)^\beta + C(x+k)^\gamma + \ldots$$ et en développant,

$$\left.\begin{array}{r} A\,x^\alpha \\ +B\,x^\beta \\ +C\,x^\gamma \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} +\alpha A\,x^{\alpha-1} \\ +\beta B\,x^{\beta-1} \\ +\gamma C\,x^{\gamma-1} \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} k + \left.\begin{array}{l} +\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}A\,x^{\alpha-2} \\ +\frac{\beta(\beta-1)}{2}B\,x^{\beta-2} \\ +\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}C\,x^{\gamma-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} k^2 + \text{etc.}$$

La partie indépendante de k dans cette expression est encore la fonction proposée; si on la représente par u et qu'on désigne par p, q, r, etc.

les coefficiens des puissances successives de k, il viendra

$$u + p\,k + q\,k^2 + r\,k^3 + \text{etc.}$$

On ramenera facilement à cette forme le résultat que donne la puissance n du polynome $A\,x^\alpha + B\,x^\beta + C\,x^\gamma + \ldots\ldots$, lorsque x se change en $x+k$. En effet, ce polynome étant représenté par u, il devient lui-même, d'après ce qui précède,

$$u + p\,k + q\,k^2 + r\,k^3 + \text{etc.};$$

on a par conséquent à développer $(u + p\,k + q\,k^2 + r\,k^3 + \text{etc.})^n$, suivant les puissances de k; mais quelque soit n, les formules du n° 20, conduiront à une expression de la forme

$$u^n + P\,k + Q\,k^2 + R\,k^3 + \text{etc.}$$

P, Q, R, etc. étant des fonctions de x indépendantes de k.

La fonction fractionnaire $\dfrac{A'\,x^{\alpha'} + B'\,x^{\beta'} + C'\,x^{\gamma'} + \ldots\ldots}{A\,x^\alpha + B\,x^\beta + C\,x^\gamma + \ldots\ldots}$ peut être écrite comme il suit :

$$(A'x^{\alpha'} + B'x^{\beta'} + C'x^{\gamma'} + \ldots\ldots)\,(A\,x^\alpha + B\,x^\beta + C\,x^\gamma + \ldots)^{-1}.$$

Mais en substituant $x+k$ à x, le second facteur devient

$$(u + p\,k + q\,k^2 + r\,k^3 + \text{etc.})^{-1}$$

et son développement prend la forme

$$u^{-1} + P\,k + Q\,k^2 + R\,k^3 + \text{etc.};$$

quant au premier, on le représentera dans son nouvel état, par

$$u' + p'\,k + q'\,k^2 + r'\,k^3 + \text{etc.},$$

u', p', q', r', etc. étant des fonctions analogues à celles que désignent les lettres p, q, r, etc.: la fonction proposée deviendra donc

$$(u' + p'\,k + q'\,k^2 + r'\,k^3 + \text{etc.})\,(u^{-1} + P\,k + Q\,k^2 + R\,k^3 + \text{etc.}).$$

Si on fait la multiplication indiquée, on trouvera :

$$u'\,u^{-1} + \left\{\begin{matrix} u'\ P \\ + u^{-1}\ p' \end{matrix}\right\} k + \left\{\begin{matrix} u'\ Q \\ + p'\ P \\ + u^{-1}\ q' \end{matrix}\right\} k^2 + \text{etc.}$$

mais $u'\,u^{-1}$ est la même chose que $\dfrac{u'}{u}$ ou la fonction proposée, par conséquent le résultat qu'on vient d'obtenir rentre dans la forme du précédent.

2°. Les fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires

conduisent aussi à des développemens semblables, lorsqu'on y change x en $x+k$.

a^x devient dans ce cas $a^{x+k} = a^x \times a^k$; or d'après la formule du n° 22 (*Int.*) $a^k = 1 + \frac{l'a}{1} k + \frac{(l'a)^2}{1.2.} k^2 + \frac{(l'a)^3}{1.2.3} k^3 + \text{etc.}$

on a donc $a^{x+k} = a^x + a^x (l'a)\, k + \frac{a^x (l'a)^2}{2} k^2 + \frac{a^x (l'a)^3}{2.3} k^3 + \text{etc.}$

$l'(x)$ se change en $l'(x+k) = l'x + l'(1+\frac{k}{x})$, et en vertu du n° 26 (*Int.*) $l'(1+\frac{k}{x}) = \frac{k}{x} - \frac{k^2}{2x^2} + \frac{k^3}{3x^3} - \text{etc.}$, par conséquent

$$l'(x+k) = l'x + \frac{1}{x} k - \frac{1}{2x^2} k^2 + \frac{1}{3x^3} k^3 + \text{etc.}$$

En mettant $x+k$ pour x dans $\sin x$, on trouve par les formules connues, $\sin(x+k) = \sin x \cos k + \cos x \sin k$;

$$\text{mais} \ldots \begin{cases} \cos k = 1 - \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} \\ \sin k = k - \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.} \end{cases}$$

il suit delà que

$$\sin(x+k) = \sin x + \frac{\cos x}{1} k - \frac{\sin x}{1.2} k^2 - \frac{\cos x}{1.2.3} k^3 + \text{etc.}$$

Enfin $\cos(x+k)$ devient $\cos x \cos k - \sin x \sin k$, et en mettant pour $\cos k$ et $\sin k$ leur valeur en série, on aura

$$\cos(x+k) = \cos x - \frac{\sin x}{1} k - \frac{\cos x}{1.2} k^2 + \frac{\sin x}{1.2.3} k^3 + \text{etc.}$$

L'analogie doit nous porter à conclure de ce qui précède, que si u représente une fonction quelconque de x, et qu'on écrive dans cette fonction $x+k$ au lieu de x, son développement doit prendre la forme $u + Pk + Qk^2 + Rk^3 + \text{etc.}$ On verra dans la suite que cette proposition est effectivement générale. Nous laisserons donc de côté tout ce qui regarde la valeur absolue du changement qu'éprouve la fonction primitive u, en vertu de l'accroissement de la variable x dont elle dépend, pour ne nous occuper que des fonctions P, Q, R, etc., qu'elle engendre lorsqu'on la développe dans son nouvel état.

5. Nous allons d'abord chercher à déterminer les relations que

les fonctions P, Q, R, etc. ont avec la proposée, et pour y parvenir plus facilement, nous commencerons par considérer un cas particulier, celui de la fonction x^n qui, lorsque x devient $x+k$, donne

$$(x+k)^n = x^n + \frac{n\,x^{n-1}}{1}k + \frac{n(n-1)\,x^{n-2}}{1\,.\,2}k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{2\,.\,3}k^3 \text{ etc.}$$

Si on examine avec attention les coefficiens des différentes puissances de k, en faisant abstraction de leur dénominateur, on verra bientôt qu'il est facile de les déduire tous de x^n par une suite d'opérations semblables. En effet, le coefficient de k dans le développement de $(x+k)^n$, étant $n\,x^{n-1}$ le même coefficient dans celui de

$$\left.\begin{array}{r} n\,(x+k)^{n-1} \\ n\,(n-1)\,(x+k)^{n-2} \\ n\,(n-1)\,(n-2)\,(x+k)^{n-3} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ sera } \left\{\begin{array}{l} n\,(n-1)x^{n-2} \\ n\,(n-1)\,(n-2)x^{n-3} \\ n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,x^{n-4} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Il suit donc delà qu'on trouvera chacune des fonctions

$$x^n,\ n\,x^{n-1},\ n\,(n-1)\,x^{n-2},\ n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3},\ \text{etc.}$$

(excepté la première qui est la fonction proposée) en substituant $x+k$ à x dans celle qui la précède, et en prenant le coefficient qui multiplie la première puissance de k dans le développement qui naîtra de cette substitution.

La fonction $A\,x^\alpha + B\,x^\beta + C\,x^\gamma + \ldots\ldots$ devenant

$$A\,(x+k)^\alpha + B\,(x+k)^\beta + C\,(x+k)^\gamma + \ldots\ldots$$

on pourra appliquer au développement des différens termes qui la composent, la remarque qui vient d'être faite sur celui de $(x+k)^n$, et par conséquent chacune des fonctions

$$\left.\begin{array}{r} A\,x^\alpha \\ +B\,x^\beta \\ +C\,x^\gamma \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{r} \alpha A\,x^{\alpha-1} \\ +\beta B\,x^{\beta-1} \\ +\gamma C\,x^{\gamma-1} \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{r} \alpha(\alpha-1)A\,x^{\alpha-2} \\ +\beta(\beta-1)B\,x^{\beta-2} \\ +\gamma(\gamma-1)C\,x^{\gamma-2} \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{r} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)A\,x^{\alpha-3} \\ +\beta(\beta-1)(\beta-2)B\,x^{\beta-3} \\ +\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)C\,x^{\gamma-3} \end{array}\right\},\ \text{etc.}$$

se tirera de celle qui la précède, en y changeant x en $x+k$, et en prenant le coefficient de la première puissance de k dans le développement du résultat; mais en les divisant respectivement par 1, 1.2, 1.2.3, etc. à partir de la seconde, on a les coefficiens des puissances de k dans $A\,(x+k)^\alpha + B\,(x+k)^\beta + C\,(x+k)^\gamma + \ldots$; ces coefficiens dériveront donc encore les uns des autres, de la même manière dans le cas actuel que dans le cas précédent.

Il est aisé de voir que la même chose doit avoir lieu pour toutes les fonctions que nous avons considérées dans l'Introduction, puisque chacune d'elles peut être mise sous la forme $A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} +$ etc., en la développant en série. Mais comme il en résulte de nouvelles séries pour les coefficiens des puissances de k, lors même qu'ils peuvent être exprimés par un nombre limité de termes, nous ne nous arrêterons point à cette démonstration; et persuadés qu'il sera facile maintenant de suivre les considérations précédentes dans leur plus grande généralité, nous ne pousserons pas plus loin l'examen des cas particuliers.

4. Pour représenter une fonction sans indiquer, en aucune manière comment elle peut être composée, je me servirai de la caractéristique f; et il faudra entendre, par l'expression $f(x)$, une fonction quelconque de x, en comprenant sous cette dénomination tout ce que comporte la définition du mot *fonction* (*Intr.* n° 1) : on doit donc bien se garder de prendre la lettre f pour un coefficient de x. J'indiquerai la substitution de $x + k$ au lieu de x dans $f(x)$, en écrivant $f(x + k)$, et cela voudra dire que le résultat est composé en $x + k$, comme la fonction primitive l'est en x. Supposons maintenant que $f(x + k)$ étant développée par rapport aux puissances de k, donne $f(x+k) = X_0 + X_1 k + X_2 k^2 + X_3 k^3 + X_4 k^4$ etc., X_0, X_1, X_2 etc., désignant des fonctions de x indépendantes de k; si on fait $k = 0$, cette équation se réduit à $f(x) = X_0$; ce qui montre, ainsi qu'on devoit s'y attendre, que le premier terme du développement est toujours la fonction proposée, et qu'on aura en général $f(x+k) = f(x) + X_1 k + X_2 k^2 + X_3 k^3 + X_4 k^4 +$ etc.

Il est aisé de voir qu'on ne pourroit pas supposer que le développement de $f(x+k)$ renfermât des puissances négatives de k; car s'il contenoit des termes de la forme $\frac{X_n}{k^n}$, il deviendroit infini en supposant $k = 0$, et par conséquent il ne sauroit coïncider dans ce cas avec la fonction primitive, comme l'exige la nature même de la substitution qui le produit.

5. Cela posé, je vais démontrer que *les fonctions* X_1, X_2, X_3 *etc. se déduisent les unes des autres, et de la fonction primitive, par un procédé uniforme, en sorte que lorsqu'on saura déterminer* X_1 *en partant de*

$f(x)$, *on pourra trouver, par une suite d'opérations semblables*, X_1, X_2, X_3, *etc.*

Pour cela je supposerai que dans $f(x+k)$ la variable x prenne un nouvel accroissement représenté par k', et par conséquent j'écrirai $x+k'$ au lieu de x dans $f(x+k)$ et dans son développement. Mais pour faire cette substitution dans les fonctions $f(x)$, X_1, X_2, X_3, etc. j'observe d'abord que $f(x)$ devient

$$f(x+k') = f(x) + X_1 k' + X_2 k'^2 + X_3 k'^3 + \text{etc.},$$

puisque c'est la même fonction que $f(x+k)$ et qu'on n'a fait que changer k en k' : quant aux coefficiens X_1, X_2, X_3 etc., comme fonctions de x, ils doivent, lorsqu'on y substitue $x+k'$ au lieu de x, prendre une forme analogue à celle qu'on a supposée pour $f(x+k')$, on écrira donc

au lieu de X_1, X_2, X_3, X_4, etc. les séries
$X_1 + X_1' k' + X_1'' k'^2 + \text{etc.}$
$X_2 + X_2' k' + X_2'' k'^2 + \text{etc.}$
$X_3 + X_3' k' + X_3'' k'^2 + \text{etc.}$
$X_4 + X_4' k' + X_4'' k'^2 + \text{etc.}$
etc.
dans lesquelles X_1', X_1'' etc., X_2', X_2'' etc., X_3', X_3'' etc. représentent de nouvelles fonctions de x dérivées de X_1, X_2, X_3 comme ces dernières le sont de la fonction proposée $f(x)$.

En mettant à la place de $f(x)$, X_1, X_2, X_3 etc. les expressions qu'on vient de former, et en ordonnant le résultat de manière que tous les termes affectés d'une même puissance de k' soient rangés dans une même colonne verticale, on aura

$$\begin{array}{l} f(x) \\ + X_1 k \\ + X_2 k^2 \\ + X_3 k^3 \\ + X_4 k^4 \\ \text{etc.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} + X_1 \\ + X_1' k \\ + X_1' k^2 \\ + X_3' k^3 \\ + X_4' k^4 \\ \text{etc.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} + X_2 \\ + X_1'' k \\ + X_2'' k^2 \\ + X_3'' k^3 \\ + X_4'' k^4 \\ \text{etc.} \end{array} \right\} k'^2 + \text{etc.}$$

Mais en écrivant $x+k'$ au lieu de x dans $f(x+k)$, il en résulte $f(x+(+k')$: or on peut trouver un développement de cette fonction autre que le précédent, en remarquant que si dans $f(x+k)$ on suppose que ce soit l'accroissement k lui-même qui ait augmenté de la quantité

quantité k', on retombera encore sur $f(x+k+k')$. Pour tenir compte de ce changement, il suffira de mettre $k+k'$ à la place de k dans la série $f(x)+X_1 k+X_2 k^2+X_3 k^3+$ etc.
qui deviendra alors

$$f(x)+X_1(k+k')+X_2(k+k')^2+X_3(k+k')^3+X_4(k+k')^4+\text{etc.}$$

En développant les puissances indiquées du binome $(k+k')$, et en ordonnant comme ci-dessus, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \\ +X_1 k \\ +X_2 k^2 \\ +X_3 k^3 \\ +X_4 k^4 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} +X_1 \\ +2X_2 k \\ +3X_3 k^2 \\ +4X_4 k^3 \\ +5X_5 k^4 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} +X_2 \\ +3X_3 k \\ +6X_4 k^2 \\ +10X_5 k^3 \\ +15X_6 k^4 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} k'^2+\text{etc.}$$

Comparant ce résultat avec le précédent, on verra que la première colonne de l'un est identique avec celle de l'autre; passant ensuite à la seconde colonne, on en déduira

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = X_1 \\ X_1' = 2X_2 \\ X_2' = 3X_3 \\ X_3' = 4X_4 \\ \cdots\cdots\cdots \\ X'_{n-1} = nX_n \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{d'où il suit} \left\{\begin{array}{l} X_1 = X_1 \\ X_2 = \dfrac{X_1'}{2} \\ X_3 = \dfrac{X_2'}{3} \\ X_4 = \dfrac{X_3'}{4} \\ \cdots\cdots; \\ X_n = \dfrac{X'_{n-1}}{n} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Nous n'irons pas au delà, parce que ces équations suffisent pour déterminer X_1, X_2, X_3 etc. ainsi qu'on va le voir.

En effet, d'après les conventions :

X_1 est le coefficient de k dans le développement de $f(x+k)$;

X_1' est dérivé de X_1, comme X_1 l'est de $f(x)$:

Donc en représentant X_1 par $f'(x)$, X_1' sera le coefficient de k dans $f'(x+k)$. Nommant $f''(x)$ ce dernier coefficient, on aura

$X_1' = f''(x)$; et en substituant dans l'équation $X_2 = \frac{X_1'}{2}$, on trouvera $X_2 = \frac{f''(x)}{2}$.

X_2' est dérivé de X_2 comme X_1 l'est de $f(x)$:
donc X_2' sera le coefficient de k dans $\frac{f''(x+k)}{2}$.

Nommant $f'''(x)$ le coefficient de k dans $f''(x+k)$, on aura $X_1' = \frac{f'''(x)}{2}$ (*); substituant cette valeur dans $X_3 = \frac{X_2'}{3}$, on trouvera $X_3 = \frac{f'''(x)}{2.3.}$

X_3' est dérivé de X_3, comme X_1 l'est de $f(x)$:
donc X_3' sera le coefficient de k dans $\frac{f'''(x+k)}{2.3.}$

Nommant $f^{IV}(x)$ le coefficient de k dans $f'''(x+k)$, on aura $X_3' = \frac{f^{IV}(x)}{2.3.}$; substituant cette valeur dans $X_4 = \frac{X_1'}{4}$, on trouvera $X_4 = \frac{f^{IV}(x)}{2.3.4.}$

On pourroit continuer cette marche indéfiniment; mais en rapprochant les résultats déjà trouvés, afin d'en saisir la loi, nous verrons qu'ayant désigné le coefficient de k dans le développement de

$f(x+k)$	par	$f'(x)$
$f'(x+k)$		$f'(x)$
$f''(x+k)$		$f'''(x)$
$f'''(x+k)$		$f^{IV}(x)$
.....		.....
$f^{[n-1]}(x+k)$		$f^{[n]}(x)$
etc.		etc.

(*) Je n'ai pas cru devoir allonger la démonstration en prouvant que le coefficient de k dans le développement $\frac{f''(x+k)}{2}$ seroit $\frac{f''(x)}{2}$. Cependant si on avoit quelques doutes à cet égard, on verroit aisément que $f(x)$ devenant $f(x+k) = f(x) + f'(x)k +$ etc., $\frac{f(x)}{m}$ se changeroit en $\frac{f(x+k)}{m} = \frac{f(x)}{m} + \frac{f'(x)}{m}k$ etc. Il en seroit de même de $f'(x)$, $f''(x)$ etc.

on a par l'hypotèse $X_1 = \frac{f'(x)}{1}$, d'où on tire $X_1' = \frac{f'(x)}{1}$ et $X_2 = \frac{f''(x)}{1.2.}$;

en suite de $X_2 = \frac{f''(x)}{1.2.}$ on tire $X_2' = \frac{f'''(x)}{1.2.}$ et $X_3 = \frac{f'''(x)}{1.2.3}$

$X_3 = \frac{f'''(x)}{1.2.3.}$ $X_3' = \frac{f^{iv}(x)}{1.2.3.}$ $X_4 = \frac{f^{iv}(x)}{1.2.3.4}$

$X_{n-1} = \frac{f^{[n-1]}(x)}{1....n-1}$ $X'_{n-1} = \frac{f^{[n]}(x)}{1...n-1}$ $X_n = \frac{f^{[n]}(x)}{1.2...n}$

etc. etc. etc.

Substituons maintenant au lieu de X_1, X_2, X_3 etc. leur valeur dans le développement de $f(x+k)$ (n° *précéd.*) et nous aurons

$$f(x+k) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}k + \frac{f''(x)}{1.2.}k^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3.}k^3 + \frac{f^{iv}(x)}{1.2.3.4.}k^4 \ldots\ldots \text{etc.}$$

Telle est l'expression générale du développement de la valeur que prend une fonction quelconque de x lorsque cette quantité a reçu un accroissement k; et on voit que pour l'appliquer aux différens cas particuliers qui peuvent se présenter, il ne s'agit plus que d'être en état de déduire les fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. de la fonction proposée.

6. Supposons, pour donner un exemple, qu'on ait $f(x) = x^n$

Il viendra, d'après le n° 3.
$$\begin{cases} f'(x) = n\,x^{n-1} \\ f''(x) = n\,(n-1)\,x^{n-2} \\ f'''(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3} \\ f^{iv}(x) = n\,(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

si on substitue ces valeurs dans l'expression de $f(x+k)$ on aura

$$(x+k)^n = x^n + \frac{n\,x^{n-1}}{1}k + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{1.\ 2.}k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{1.\ 2.\ 3.}k^3 + \text{etc.}$$

La formule de Newton se trouve donc encore démontrée d'une manière indépendante de la nature de l'exposant n; car nous n'avons fait usage, dans les recherches précédentes, que des deux premiers termes de cette formule qu'on peut toujours trouver *a priori*, comme on l'a vu dans l'Introduction, (n° 16.)

7. Nous sommes maintenant en état de prouver que l'identité des deux développemens de $f(x+k+k')$ formés n° 5, est complete,

quoiqu'elle n'ait été vérifiée que sur les termes affectés de la première puissance de k'. En effet, si on met $x+k'$ au lieu de x dans $f(x+k)$ et dans son développement, il viendra

$$f(x+k+k') = f(x+k') + \frac{f'(x+k')}{1}k + \frac{f''(x+k')}{1.2.}k^2 + \ldots + \frac{f^{[n]}(x+k')}{1.2.\ldots.n}k^n \text{ etc.}$$

et on aura d'abord

$$f(x+k') = f(x) + \frac{f'(x)}{1}k' + \frac{f''(x)}{1.2.}k'^2 + \ldots + \frac{f^{[m]}(x)}{1.2.\ldots.m}k'^m + \text{etc. (*)}.$$

Mais le développement de $f^{[n]}(x+k')$ se déduira de celui de $f(x+k')$ en remplaçant $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. par les fonctions $f^{[n+1]}(x)$, $f^{[n+2]}(x)$, $f^{[n+3]}(x)$ etc. qui dérivent de $f^{[n]}(x)$ comme les premières de $f(x)$, on aura donc

$$f^{[n]}(x+k') = f^{[n]}(x) + \frac{f^{[n+1]}(x)}{1}k' + \frac{f^{[n+2]}(x)}{1.2.}k'^2 + \ldots + \frac{f^{[n+m]}(x)}{1.2.\ldots.m}k'^m + \text{etc.}$$

Or k^n étant multiplié par $\frac{f^{[n]}(x+k')}{1.2.\ldots.n}$, il en résulte que le produit $k^n k'^m$ aura pour coefficient dans le développement final, $\frac{f^{[n+m]}(x)}{1.2.\ldots.n \times 1.2.\ldots.m}$.

Mais la substitution de $k+k'$ à la place de k donnera

$$f(x+k+k') = f(x) + \frac{f'(x)}{1.}(k+k') + \frac{f''(x)}{1.2}(k+k')^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}(k+k')^3 + \text{etc.}$$

et le produit $k^n k'^m$ faisant partie du développement de $(k+k')^{n+m}$, aura pour coefficient dans ce développement $\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)}{1.2.\ldots.m}$; de plus il sera multiplié par $\frac{f^{[n+m]}(x)}{1.2.\ldots.(n+m)}$, coefficient propre de $(k+k')^{n+m}$: on trouvera donc $\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots.(n+1)}{1.2.\ldots.m} \times \frac{f^{[n+m]}(x)}{1.2.\ldots.(n+m)}$, ou en réduisant, $\frac{f^{[n+m]}(x)}{1.2.\ldots.n \times 1.2.\ldots.m}$, c'est-à-dire la même chose que ci-dessus.

Nous conclurons donc de ce qui précède qu'on pourra toujours réduire $f(x+k)$ en série de la forme $X_0 + X_1 k + X_2 k^2 + \text{etc.}$, si on

(*) Il ne faut pas perdre de vue que les exposans de la lettre f marquent le nombre des accens que doit porter cette lettre, et, pour les distinguer des exposans de puissance, on les a renfermés dans une parenthèse.

sait trouver le coefficient de la première puissance de k, quelque soit la fonction f.

8. Cette manière de trouver les coefficiens des puissances de k, en les dérivant successivement les uns des autres, est plus simple en elle même qu'elle ne le paroît d'abord; car si d'un côté elle exige qu'on sache développer une suite de fonctions diverses, de l'autre elle restraint cette opération à la recherche du second terme de chacune: elle conduit d'ailleurs à un calcul qui sert à résoudre des questions auxquelles l'algèbre ordinaire ne sauroit atteindre. Quoique nous ne puissions indiquer pour le moment la nature de ces questions, il est cependant facile de voir que le calcul dont nous parlons doit être propre à exprimer des relations d'un genre nouveau entre les fonctions et les quantités dont elles dépendent; car pour peu qu'on ait réfléchi sur les procédés analytiques, on a du remarquer que chaque opération introduite dans le calcul, fait naître des relations qui lui sont propres : ainsi l'addition donne lieu aux sommes et aux différences; la multiplication, aux produits et aux quotiens, aux puissances et aux racines; enfin la considération de la dépendance qui régne entre les puissances d'une même quantité et leurs exposans, mène aux logarithmes (*).

(*) Ces rapprochemens sont développés dans un chapitre de l'algèbre d'Euler, dont voici l'extrait pour ceux qui ne le connoîtroient pas.

En exprimant, par une équation, la relation qui existe entre les différens termes d'une opération, on voit naître successivement les unes des autres toutes celles de l'algèbre ordinaire.

Soient a et b deux quantités qu'on se propose d'ajouter ensemble, et c leur somme, on a $a + b = c$; si on veut tirer de cette équation la valeur de a ou celle de b, on trouve $\left.\begin{matrix} a = b - c \\ b = c - a \end{matrix}\right\}$. Si l'une des quantités a ou b surpasse c, le résultat devient alors une quantité négative. L'addition répétée d'une quantité à elle-même engendre la multiplication : a désignant le multiplicateur, b le multiplicande et c le produit, on a $a\,b = c$, d'où on tire $\left.\begin{matrix} a = \frac{c}{b} \\ b = \frac{c}{b} \end{matrix}\right\}$; delà naissent les fractions.

La multiplication, répétée d'une quantité par elle-même, produit les puissances de cette quantité; en exprimant par b le nombre de fois que a est facteur dans la

La *dérivation* successive des fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. qui se déduisent de la fonction proposée $f(x)$ par une suite d'opérations absolument différentes de celles dont on vient de parler, doit donc être regardée comme une nouvelle branche de l'Analyse, et elle offre ces deux questions générales :

1°. *Descendre de la fonction génératrice aux fonctions dérivées ;*

2°. *Remonter de l'une quelconque des fonctions dérivées, à la fonction génératrice* ; la première est l'objet du *Calcul différentiel*, et la seconde appartient au *Calcul intégral.*

On peut, dès-à-présent, se former de l'un et de l'autre de ces calculs une idée claire et indépendante des notions vagues et paradoxales de l'infini. Tout se réduit à concevoir une fonction développée en série suivant les puissances de l'accroissement de la variable dont elle dépend, et à considérer les coefficiens de ces puissances qui sont eux-mêmes de nouvelles fonctions portant, pour ainsi dire, l'empreinte de la première. Telle est l'origine analytique que le C^en^ Lagrange donne au Calcul différentiel : quoique nous n'ayons considéré jusqu'à présent que les fonctions d'une seule variable, on sent qu'il doit exister un ordre de choses analogue pour les fonctions qui dépendent d'un nombre quelconque de variables, et nous l'exposerons lorsque nous aurons fait connoître les signes qu'on employe dans le calcul différentiel ; signes qui tiennent au point de vue sous lequel il a été envisagé par son inventeur, et dont il tire sa dénomination.

De la différentiation des fonctions d'une seule variable.

9. Si de $f(x+k)$ on retranche $f(x)$, on aura

$$f(x+k) - f(x) = f'(x)\,k + \frac{f''(x)}{2}\,k^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}\,k^3 + \text{etc.}$$

Or $f(x+k) - f(x)$ est évidemment la différence entre l'état primitif de la fonction $f(x)$ et celui qui résulte du changement arrivé à

---

puissance qu'on considère, on a $a^b = c$. Cette équation diffère essentiellement des précédentes en ce que les quantités a et b n'y entrent pas toutes les deux de la même manière ; d'où il suit qu'on ne peut pas renverser la question par rapport à l'une comme par rapport à l'autre. En effet, si c'est a qu'on cherche, une simple extraction de racine suffit pour le trouver, et cette opération donne lieu à une nouvelle espèce de fonctions, savoir les irrationnelles ; mais la détermination de b dépend des logarithmes.

x : le second membre de l'équation précédente est donc le développement de cette différence ordonné suivant les puissances de k, et on remarquera qu'il suffit d'en connoître le premier terme pour trouver $f'(x)$. Ce premier terme n'étant qu'une portion de la différence, nous l'appellerons *différentielle*, et nous le représenterons par $d\,f(x)$; nous aurons donc $d\,f(x) = f'(x)\,k$, et par conséquent $f'(x) = \frac{d\,f(x)}{k}$: résultat qui offre une nouvelle manière d'exprimer $f'(x)$, en divisant la différentielle de la fonction proposée, ou ce qui revient au même le premier terme de la différence entre les deux valeurs consécutives de cette fonction, par l'accroissement.

Il est aisé de voir que par cette division k disparoît de la valeur de $f'(x)$ dans laquelle il ne doit point entrer, en sorte qu'on peut représenter cet accroissement comme on voudra. Pour mettre de l'uniformité dans les signes et faire de l'expression $\frac{d\,f(x)}{k}$ un type général qui puisse s'employer quelle que soit la lettre par laquelle on représente la variable d'où dépend la fonction proposée, on écrira $d\,x$ au lieu de k; c'est-à-dire qu'on supposera que x se change en $x+d\,x$, et il résultera delà $f'(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x}$. En appliquant la caractéristique d à la variable x on indique son accroissement par un signe qui en fait appercevoir l'origine, et qui par conséquent est moins arbitraire que k. Si on avoit $\frac{d\,F(y)}{d\,y}$, on reconnoîtroit tout de suite que cette expression est par rapport à la fonction $F(y)$, la même chose que $\frac{d\,f(x)}{d\,x}$ par rapport à $f(x)$, et que $d\,y$ est l'accroissement hypothétique de y.

Il suit de ces conventions que *pour trouver la différentielle* $d\,f(x)$, *il faut écrire* $x+d\,x$ *au lieu de* x *dans* $f(x)$, *développer* $f(x+d\,x)$, *en se bornant aux termes affectés de la première puissance de* $d\,x$ *et retrancher* $f(x)$ *du résultat.*

On remarquera que $d\,x$ n'est, à proprement parler, qu'un signe destiné à retracer la marche qu'on a suivie pour arriver à l'expression de $f'(x)$, et à rappeller qu'on n'a considéré que le premier terme

du développement de la différence indiquée ; car d'ailleurs on fait toujours abstraction de la valeur de l'accroissement qu'il représente.

Cela posé, *différentier* une quantité, c'est chercher sa différentielle et l'opération par laquelle on la trouve, s'appelle *différentiation*.

10. La notation dont nous venons de faire usage pour représenter $f'(x)$, peut être appliquée d'une manière analogue aux fonctions $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{iv}(x)$ etc. En effet, il suit de la génération de ces fonctions (n° 5) que

$$\left.\begin{array}{l} f'(x+k) = f'(x) + f''(x)\,k + \text{etc.} \\ f''(x+k) = f''(x) + f'''(x)\,k + \text{etc.} \\ f'''(x+k) = f'''(x) + f^{iv}(x)\,k + \text{etc.} \end{array}\right\} \text{d'où on tire} \left\{\begin{array}{l} f'(x+k) - f'(x) = f''(x)\,k + \text{etc.} \\ f''(x+k) - f''(x) = f'''(x)\,k + \text{etc.} \\ f'''(x+k) - f'''(x) = f^{iv}(x)\,k + \text{etc.} \end{array}\right.$$

en substituant dx à k, il vient

$$\left.\begin{array}{l} f'(x+dx) - f'(x) = f''(x)\,dx + \text{etc.} \\ f''(x+dx) - f''(x) = f'''(x)\,dx + \text{etc.} \\ f'''(x+dx) - f'''(x) = f^{iv}(x)\,dx + \text{etc.} \end{array}\right\}$$; or d'après la

définition que nous avons donnée ci-dessus de la différentielle d'une fonction, on verra aisément que

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)\,dx = d\,f'(x) \\ f'''(x)\,dx = d\,f''(x) \\ f^{iv}(x)\,dx = d\,f'''(x) \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ on aura donc } \left\{\begin{array}{l} f''(x) = \dfrac{df'(x)}{dx} \\ f'''(x) = \dfrac{df''(x)}{dx} \\ f^{iv}(x) = \dfrac{df'''(x)}{dx} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

d'où il suit qu'on peut déduire chacune des fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. de la différentielle de celle qui la précède.

Si on substitue au lieu de $f'(x)$ sa valeur $\dfrac{df(x)}{dx}$, dans celle de $f''(x)$ on trouvera $f''(x) = \dfrac{d\left[\frac{df(x)}{dx}\right]}{dx}$. En continuant ainsi de proche en proche on rapporteroit immédiatement à la fonction primitive, toutes les fonctions dérivées ; mais on voit combien la notation devient compliquée quoique nous ne soyons encore qu'à la seconde de ces fonctions,

Pour la simplifier nous observerons que l'accroissement dx étant regardé

regardé comme invariable, $f'(x)\,dx$ se change en $f'(x+dx)\,dx$, lorsque x devient $x+dx$, et qu'on a

$f'(x+dx)dx-f'(x)dx=\{f'(x+dx)-f'(x)\}\,dx=f''(x)dx^2+$etc.(*)

on trouvera aussi que dans les mêmes circonstances

$f''(x)\,dx^2$, $f'''(x)\,dx^3$, etc. donne $\{f''(x+dx)-f''(x)\}\,dx^2=f'''(x)\,dx^3+$etc., $\{f'''(x+dx)-f'''(x)\}\,dx^3=f^{IV}(x)\,dx^4+$etc., etc.

Il résulte de là que

$$f''(x)\,dx^2=d\,f'(x)\,dx$$
$$f'''(x)\,dx^3=d\,f''(x)\,dx^2$$
$$f^{IV}(x)\,dx^4=d\,f'''(x)\,dx^3$$
$$\text{etc.}\ldots\ldots\text{etc.}$$

mais si on met dans la première de ces équations pour $f'(x)\,dx$ sa valeur $df(x)$, on trouvera $f''(x)\,dx^2=d\,d\,f(x)$, ou pour abréger, $=d^2f(x)$, et par là les suivantes deviendront

$$f'''(x)\,dx^3=d\,d\,d\,f(x)=d^3f(x)$$
$$f^{IV}(x)\,dx^4=d\,d\,d\,d\,f(x)=d^4f(x)$$
$$\text{etc.}\qquad\text{etc.}\qquad\text{etc.}$$

Ces dernières donnent des expressions fort simples pour les fonctions dérivées; car on en tire

$$f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$$
$$f'''(x)=\frac{d^3f(x)}{dx^3}$$
$$f^{IV}(x)=\frac{d^4f(x)}{dx^4}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{[n]}(x)=\frac{d^nf(x)}{dx^n}$$
$$\text{etc.}\qquad\text{etc.}$$

En rapprochant l'expression actuelle de $f'''(x)$ de celle qu'on a trouvée précédemment, on voit que les formules $\frac{d\left[\frac{df(x)}{dx}\right]}{dx}$ et $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ doivent

(*) Lorsqu'on rencontrera les expressions dx^2, dx^3, dx^4 etc. il faudra se rappeller qu'elles indiquent le quarré, le cube, et en général les puissances de l'accroissement dx.

être regardées comme équivalentes; il en seroit de même de

$d\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]$ et de $\frac{d^1 f(x)}{dx^1}$, et en général de

$d^m\left[\frac{d^n (x)}{dx^n}\right]$ et de $\frac{d^{m+n} f(x)}{dx^{m+n}}$.

11. Voici maintenant les dénominations qui résultent de ce qui précède :

$d f(x)$ est la différentielle première, ou simplement la différentielle de $f(x)$;

$d^2 f(x)$ qui est la différentielle de cette différentielle, s'appelle la différentielle seconde;

$d^3 f(x)$ la différentielle troisième;

$d^4 f(x)$ la différentielle quatrième;

etc.

Les fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. ou les expressions équivalentes $\frac{d f(x)}{dx}$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, etc.

seront désignées sous le nom de coefficiens différentiels, et on les distinguera entr'eux par le nombre de différentiations qu'ils supposent : $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, par exemple, provenant de la différentielle troisième, sera le coefficient différentiel du troisième ordre.

12. En substituant dans le développement de $f(x+k)$ au lieu de $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. leurs expressions par la notation que nous venons d'exposer, on trouvera

$$f(x+k)=f(x)+\frac{df(x)}{1.dx}k+\frac{d^2 f(x)}{1.2dx^2}k^2+\frac{d^3 f(x)}{1.2.3dx^3}k^3+\frac{d^4 f(x)}{1.2.3.4dx^4}k^4+\text{etc.}$$

Si pour abréger, on représente la fonction $f(x)$ par la seule lettre u, ses différentielles successives seront alors exprimées par du, d^2u, d^3u, d^4u etc., les coefficiens différentiels correspondans par $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, $\frac{d^4u}{dx^4}$ etc;

et x devenant $x+k$, u se changera en

$$u+\frac{du}{1.dx}k+\frac{d^2u}{1.2.dx^2}k^2+\frac{d^3u}{1.2.3.dx^3}k^3+\frac{d^4u}{1.2.3.4.dx^4}k^4 \text{ etc.}$$

Cette formule, qui sert en quelque sorte de base au Calcul différentiel et sur laquelle repose presqu'entièrement la théorie des suites, est connue en Analyse sous le nom de *Théorême de Taylor*, parce que c'est à ce géomètre anglais qu'on en doit la découverte.

Il faut bien se garder de confondre l'accroissement k avec dx; le premier exprime l'augmentation qu'on attribue à x et à laquelle on suppose une valeur déterminée; le second, nous le répétons encore, n'entre dans les expressions précédentes, que comme un des signes indicatifs de l'opération par laquelle on dérive les fonctions $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ etc. de la fonction ptimitive, et lorsque cette opération est effectuée il disparoît entièrement du résultat.

Les règles et les exemples de différentiation que nous allons donner acheveront d'éclaircir ce qui vient d'être dit, et on verra, de la manière la plus évidente, que dans le Calcul différentiel on ne s'occupe jamais des accroissemens en eux-mêmes, mais seulement des fonctions engendrées par le développement de la différence entre deux états successifs de la fonction proposée.

13. En écrivant $x+dx$ au lieu de x dans la fonction x^n, il viendra $x^n+nx^{n-1}dx+$etc., d'où retranchant x^n, on trouvera $nx^{n-1}dx$ pour la différentielle de cette fonction; on aura donc $d.x^n=nx^{n-1}dx$: le point qui sépare la caractéristique d de la fonction proposée x^n, empêchera qu'on ne confonde l'expression $d.x^n$ avec dx^n, cette dernière marquant la $n^{ième}$ puissance de dx, conformément à la note de la page 97.

Le coefficient différentiel du 1er ordre représenté par $\frac{d.x^n}{dx}$, deviendra nx^{n-1}.

Comme on a fréquemment besoin de se rappeller le résultat précédent, on l'a traduit dans la régle que voici:

Pour différentier une puissance quelconque d'une quantité variable, il faut la multiplier par son exposant; diminuer ensuite cet exposant d'une unité, et multiplier le résultat par la différentielle de la variable.

On voit qu'en omettant la dernière multiplication, on formera immédiatement le coefficient différentiel.

Si la fonction proposée étoit $a\,x^n$, on trouveroit, en opérant comme ci-dessus,

$$\left.\begin{aligned} d.\ a\,x^n &= na\,x^{n-1}\,dx \\ \frac{d.\ a\,x^n}{dx} &= na\,x^{n-1} \end{aligned}\right\}.$$

Il suit de là que les facteurs n et dx étant regardés comme constans dans la différentielle première $n\,x^{n-1}\,dx$, il suffit pour obtenir la différentielle seconde, de différentier x^{n-1} et de multiplier le résultat par $n\,d.\,x$; mais $d.\,x^{n-1} = (n-1)\,x^{n-2}\,dx$; on aura donc $d.^2 x^n = n(n-1)\,x^{n-2}\,dx^2$.

On trouvera d'une manière semblable

$$d.^3 x^n = n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}\,dx^3$$
$$d.^4 x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4}\,dx^4$$
etc.

et les coefficiens différentiels auront les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d.\ x^n}{dx} &= n\,x^{n-1} \\ \frac{d.^2 x^n}{dx^2} &= n(n-1)\,x^{n-2} \\ \frac{d.^3 x^n}{dx^3} &= n(n-1)(n-2)\,x^{n-3} \\ \frac{d.^4 x^n}{dx^4} &= n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4} \end{aligned}\right\}$$
etc.

on auroit pu les déduire successivement les uns des autres par la substitution répétée de $x+dx$ à la place de x, ainsi qu'on l'a fait par celle de $x+k$ (n° 3).

On remarquera sans peine que dans le cas où l'exposant n est un nombre entier positif, la fonction x^n n'a qu'un nombre limité de différentielles dont la plus élevée est $d.^n x^n = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 2.1.\,dx^n$; expression qui n'est plus susceptible de différentiation puisqu'elle ne contient plus de variables : on aura donc alors pour le dernier coefficient différentiel, $\frac{d.^n x^n}{d.x^n} = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots 1$, c'est-à-dire une quantité constante.

La différentielle de $A x^{\alpha} + B x^{\beta} + C x^{\gamma} + \ldots\ldots$ se trouvera en prenant séparément celle de chacun des termes qui composent cette fonction, et on aura pour résultat

$$\alpha A x^{\alpha-1} dx + \beta B x^{\beta-1} dx + \gamma C x^{\gamma-1} dx + \text{etc.}$$

14. En général, si on a plusieurs fonctions de x jointes ensemble par addition ou par soustraction, comme les suivantes $u + v - w$, la différentielle de l'expression totale sera $du + dv - dw$; c'est-à-dire qu'on l'obtiendra en prenant la différentielle de chaque terme, avec le signe dont ce terme est affecté. En effet, d'après ce qu'on a vu jusqu'à présent, la substitution de $x + dx$ au lieu de x doit changer $\left.\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}\right\}$ en $\left\{\begin{matrix} u + p\,dx + \text{etc.} \\ v + q\,dx + \text{etc.} \\ w + r\,dx + \text{etc.} \end{matrix}\right.$ et par conséquent

$u + v - w$ deviendra $u + v - w + p\,dx + q\,dx - r\,dx + \text{etc.}$ d'où en retranchant la fonction proposée, on tirera $p\,dx + q\,dx - r\,dx$ etc. Mais $p\,dx$, $q\,dx$, $r\,dx$ sont les différentielles propres de chacune des fonctions u, v et w; la règle ci-dessus est donc démontrée.

15. Quoiqu'il soit presqu'évident que deux fonctions égales doivent avoir des différentielles égales, je crois cependant à propos d'entrer dans quelques détails à cet égard, afin qu'il ne reste aucun doute sur un principe qui reviendra souvent dans la suite.

Lorsque deux fonctions sont égales entr'elles, quelle que soit la valeur de la variable dont elles dépendent, il faut que leurs développemens, ordonnés par rapport aux puissances de cette variable ou de son accroissement, soient identiques, afin qu'en les égalant il n'en résulte aucune équation qui puisse déterminer l'une ou l'autre des quantités dont on vient de parler; par conséquent si on a $u = v$, il faut qu'en substituant $x + dx$ à x et en développant, on ait $u + p\,dx + \text{etc.} = v + q\,dx$ etc. quelque soit dx: donc $p\,dx = q\,dx$, c'est-à dire $du = dv$.

L'inverse de cette proposition n'est pas généralement vraie, et on auroit tort d'affirmer que deux différentielles égales appartiennent à des fonctions égales. En effet, si on avoit $a + bx$, en substituant $x + dx$, on obtiendroit $a + bx + b\,dx$ et en retranchant $a + bx$, on trouveroit $b\,dx$; résultat dans lequel il ne reste aucune trace de la constante a. La différentielle $b\,dx$ appartient donc également à

$a+bx$ ou à bx, et elle convient en général aux différens cas que présente la fonction $a+bx$, lorsqu'on donne à a toutes les valeurs possibles. On voit aisément par là que dans la différentiation d'une fonction quelconque, toutes les constantes combinées seulement par voie d'addition ou de soustraction disparoissent : à l'égard de celles qui le sont par la multiplication ou par la division, elles restent toujours comme coefficiens ou comme diviseurs.

16. Passons maintenant au produit des deux fonctions u et v : puisque u se change en $u+p\,dx+$ etc. et v en $v+q\,dx+$ etc., le produit uv deviendra $uv+u\,q\,dx+$etc. $+v\,p\,dx+$etc. } soustrayant la fonction primitive

uv, il reste pour la différentielle $u\,q\,dx+v\,p\,dx$; mais $q\,dx$ et $p\,dx$ sont équivalens à dv et à du, donc $d.uv=u\,dv+v\,du$.

Je n'ai pris que les deux premiers termes des développemens de u et de v, parce que les suivans ne contenant que des puissances de dx supérieures à la première, en auroient donné de semblables dans le produit, et qu'on ne sauroit admettre dans la différentielle d'après sa définition. Il est à propos de bien saisir cette remarque; car dans tout ce qui va suivre nous n'aurons égard, par la même raison, qu'aux deux termes $u+p\,dx$.

La formule $d.uv=u\,dv+v\,du$, nous apprend que *pour avoir la différentielle du produit de deux fonctions, il faut multiplier chacune d'elles par la différentielle de l'autre, et ajouter ensemble les deux résultats.*

Si on divise les deux membres de l'équation $d.uv=u\,dv+v\,du$ par la fonction primitive uv, on trouvera $\frac{d.uv}{uv}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}$; ce qui nous conduira facilement à l'expression de la différentielle d'un produit composé d'autant de facteurs qu'on voudra. Pour cela supposons que $v=ts$, il viendra $\frac{dv}{v}=\frac{d.ts}{ts}=\frac{dt}{t}+\frac{ds}{s}$ et par conséquent $\frac{d.uts}{uts}=\frac{du}{u}+\frac{dt}{t}+\frac{ds}{s}$, on trouvera de la même manière que $\frac{d.uts\,r....\text{ etc.}}{uts\,r....\text{ etc.}}=\frac{du}{u}+\frac{dt}{t}+\frac{ds}{s}+\frac{dr}{r}+$ etc.

Cette règle donne immédiatement la différentielle de x^n; car on a

$$\frac{d.\,x^n}{x^n} = \frac{d.\,x\,x\,x\,x\ldots.}{x\,x\,x\,x\ldots.} = \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \ldots\ldots$$

le nombre des facteurs du premier membre étant n, le second sera composé d'un pareil nombre de termes tous égaux, et il se réduira par conséquent à $\frac{n\,dx}{x}$; on aura donc $\frac{d.\,x^n}{x^n} = \frac{n\,dx}{x}$, et l'on en tirera facilement $d.\,x^n = n\,x^{n-1}\,dx$.

Si on fait évanouir les dénominateurs dans l'équation

$$\frac{d.\,u\,t\,s}{u\,t\,s} = \frac{du}{u} + \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s},$$

on trouvera $d.\,u\,t\,s = t\,s\,du + u\,s\,dt + u\,t\,ds$, et on verra aisément que *quel que soit le nombre des facteurs, la différentielle de leur produit sera égale à la somme des produits de la différentielle de chacun d'eux, multipliée par tous les autres.*

17. Soit la fraction $\frac{u}{v}$; en l'écrivant ainsi $u\,v^{-1}$, elle prend la forme d'un produit, et on a sur le champ $d.\,u\,v^{-1} = u\,d.\,v^{-1} + v^{-1}\,du$. On déduit ensuite la valeur de $d.\,v^{-1}$ du cas général $d.\,v^n = n\,v^{n-1}\,dv$, qui donne alors $d.\,v^{-1} = -v^{-2}\,dv$, et en la substituant dans l'expression de $d.\,u\,v^{-1}$, on trouve $d.\,u\,v^{-1} = -u\,v^{-2}\,dv + v^{-1}\,du$; résultat qu'on peut écrire comme il suit,

$$d.\,\frac{u}{v} = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Sa traduction nous apprend que *pour trouver la différentielle d'une fraction, il faut multiplier le dénominateur par la différentielle du numérateur, retrancher de ce produit celui du numérateur par la différentielle du dénominateur, et diviser le tout par le quarré du dénominateur.*

On peut encore obtenir directement la différentielle de $\frac{u}{v}$ en faisant $\frac{u}{v} = t$, car il vient alors $u = v\,t$, et d'après ce qui précède, $du = v\,dt + t\,dv$; prenant la valeur de dt et substituant au lieu de t, la fraction $\frac{u}{v}$, on aura comme ci-dessus $dt = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2}$.

calcul différentiel

MM philoux de toulouse
Lapeyrie de toulouse
fauvel de toulouse
Lagrantaine de toulouse

Soit en général une fraction $\frac{r\ s\ t\ u....}{r'\ s'\ t'\ u'....}$ dont le numérateur et le dénominateur renferment chacun autant de facteurs qu'on voudra; si on la représente par V, on aura $\frac{r\ s\ t\ u....}{r'\ s'\ t'\ u'....} = V$, et en faisant disparoître le dénominateur, on trouvera $r\,s\,t\,u.... = V\,r'\,s'\,t'\,u'....$; mais en vertu du n° précédent, on a

$$\frac{d.\,r\,s\,t\,u....}{r\,s\,t\,u....} = \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + ...$$

$$\frac{d.\,V\,r'\,s'\,t'\,u'....}{V\,r'\,s'\,t'\,u'....} = \frac{dV}{V} + \frac{dr'}{r'} + \frac{ds'}{s'} + \frac{dt'}{t'} + \frac{du'}{u'} + ...$$

donc

$$\frac{dr}{r} + \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + ... = \frac{dV}{V} + \frac{dr'}{r'} + \frac{ds'}{s'} + \frac{dt'}{t'} + \frac{du'}{u'} + ...$$

et par conséquent

$$dV = V\left\{\frac{dr}{r} + \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + ... - \frac{dr'}{r'} - \frac{ds'}{s'} - \frac{dt'}{t'} - \frac{du'}{u'} .....\right\}$$

Il sera facile maintenant de tirer de ce résultat la différentielle de la fraction proposée.

18. Les règles que nous venons de donner suffisent pour trouver la différentielle d'une fonction algébrique quelconque. Pour les retenir plus facilement, il est bon d'observer qu'elles se réduisent à trois comprises dans les formules ci-jointes

$$d.\,x^n = n\,x^{n-1}\,dx \quad \text{(n.° 13)}$$

$$d.\,(u+v-w) = du + dv - dw \quad \text{(n.° 14)}$$

$$d.\,u\,v = u\,dv + v\,du \quad \text{(n.° 16)}$$

Comme il est nécessaire de se familiariser avec l'application de ces règles, je vais placer ici quelques exemples sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

19. Soit 1.° $u = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$; en prenant séparément la différentielle de chaque terme de cette fonction, le premier disparoit parce qu'il est constant; le second étant mis sous la forme $b\,x^{\frac{1}{2}}$ donne par l'application de la 1re règle du n° précédent, $\frac{1}{2}\,b\,x^{\frac{1}{2}-1}\,dx$ ou $\frac{b\,dx}{2\sqrt{x}}$;

$\frac{b\,dx}{2\sqrt{x}}$; le 3.me $-\frac{c}{x}$ est la même chose que $-c\,x^{-1}$ et par conséquent on entire $-c \times -x^{-1-1}\,dx$, ou $c\,x^{-2}\,dx$, ou enfin $\frac{c\,dx}{x^2}$. Réunissant les résultats partiels, on trouvera $du = \left(\frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}\right)dx$ et le coefficient différentiel $\frac{du}{dx} = \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}$.

2.° $u = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x}\,x} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2}$: écrivant cette fonction comme il suit : $u = a + b\,x^{-\frac{2}{3}} - c\,x^{-1-\frac{1}{3}} + e\,x^{-2}$, l'application de la première règle donnera

$du = -\frac{2}{3}b\,x^{-\frac{2}{3}-1}\,dx + (1+\frac{1}{3})\,c\,x^{-1-\frac{1}{3}}\,dx - 2\,e\,x^{-3}\,dx$.

En réduisant les coefficiens numériques et en faisant passer au dénominateur les termes affectés d'exposans négatifs, il viendra

$du = -\frac{2}{3}\frac{b\,dx}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3}\frac{c\,dx}{x^{\frac{7}{3}}} - \frac{2\,e\,dx}{x^3}$, et en remplaçant les exposans fractionnaires par des radicaux,

$du = -\frac{2\,b\,dx}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4\,c\,dx}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{2\,e\,dx}{x^3}$.

Ces exemples ne comprenant que des monomes, chacun de leurs termes pouvoit recevoir immédiatement l'application des règles établies ci-dessus ; lorsque cette circonstance n'a pas lieu, on transforme la fonction proposée de manière qu'elle ne présente que des monomes à différentier.

3.° $u = (a + b\,x^m)^n$: on fera $a + b\,x^m = z$; la fonction proposée se changera en z^n, dont la différentielle est $n\,z^{n-1}\,dz$; mais en différentiant aussi $a + b\,x^m = z$, on aura $m\,b\,x^{m-1}\,dx = dz$; mettant pour z et dz leur valeur en x et dx, il viendra

$du = n\,m\,b\,x^{m-1}\,(a + b\,x^m)^{n-1}\,dx$.

4.° $u = \sqrt{a + b\,x + c\,x^2}$: on fera $a + b\,x + c\,x^2 = z$, il en résultera $b\,dx + 2\,c\,x\,dx = dz$ et $\sqrt{a + b\,x + c\,x^2} = \sqrt{z}$; mais $d.\sqrt{z} = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$; donc $du = \frac{b\,dx + 2\,c\,x\,dx}{2\sqrt{a + b\,x + c\,x^2}}$.

5.° $u = \sqrt[4]{\left[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}\right]^3}$: on fera $\left.\begin{array}{r} \frac{b}{\sqrt{x}} = y \\ \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2} = z \end{array}\right\}$

ce qui donnera pour la fonction proposée, $\sqrt[4]{(a-y+z)^3} = (a-y+z)^{\frac{3}{4}}$;

mais $d.(a-y+z)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}(a-y+z)^{\frac{3}{4}-1}(-dy+dz) = \frac{-3dy+3dz}{4\sqrt[4]{a-y+z}}$

de plus $dy = d\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{b\,dx}{2x\sqrt{x}}$

$dz = d.(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}-1} \times -2x\,dx = \frac{-4x\,dx}{3\sqrt[3]{c^2-x^2}}$;

en substituant ces valeurs ainsi que celles de y et de z, on trouve

$$du = \frac{\frac{3b\,dx}{2x\sqrt{x}} - \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{c^2-x^2}}}{4\sqrt[4]{a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}}$$

6.° $u = x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$: en appliquant à cet exemple la règle du n° 16, on trouve

$du = [(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}]dx + [x\sqrt{a^2-x^2}]d.(a^2+x^2) + [x(a^2+x^2)]d.\sqrt{a^2-x^2}$;

en effectuant les différentiations indiquées,

$$du = dx(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2} + 2x^2dx\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2dx(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

et en réduisant $du = \frac{(a^4+a^2x^2-4x^4)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

7.° $u = \frac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4}$: la règle donnée (n.° 17) pour différentier les fractions, conduit sur-le-champ à

$$du = \frac{(a^4+a^2x^2+x^4)\,d.(a^2-x^2) - (a^2-x^2)\,d.(a^4+a^2x^2+x^4)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}$$

d'où on tire $du = \frac{-2xdx(2a^4+2a^2x^2-x^4)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}$.

Dans les exemples rapportés ci-dessus, nous n'avons cherché que la différentielle première; mais on voir qu'en appliquant aux divers

résultats les règles de différentiation qui conviennent à leur forme, on trouveroit la différentielle seconde et successivement toutes celles des ordres supérieurs. On peut aussi conclure de ce qui précède que toutes les différentielles d'une fonction algébrique sont elles-mêmes des fonctions algébriques ; car pour y parvenir il ne faut exécuter qu'un nombre limité d'opérations algébriques.

20. Après les fonctions algébriques viennent les fonctions transcendantes ; nous ne nous occuperons ici que de celles qui ont été traitées dans l'Introduction, et nous commencerons par les fonctions logarithmiques parce qu'elles donnent des facilités pour différentier les fonctions exponentielles.

Soit 1.° $u = \mathrm{l}\,x$, en substituant $x+dx$ à x on trouve

$$\mathrm{l}\,(x+dx) = \mathrm{l}\,x + \mathrm{l}\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \mathrm{l}\,x + M\left\{\frac{dx}{x} - \text{etc.}\right\} \text{ (Int. n°26)}$$

on aura donc $\mathrm{l}\,(x+dx) - \mathrm{l}\,x = M\left\{\frac{dx}{x} - \text{etc.}\right\}$, et par conséquent

$d.\mathrm{l}\,x = \frac{M\,dx}{x}$: c'est à-dire que *la différentielle du logarithme est égale au produit du module par la différentielle de la quantité, divisé par la quantité même.*

Dans le cas des logarithmes néperiens dont le module est 1, on a $d.\,\mathrm{l}'\,x = \frac{dx}{x}$.

Désormais lorsque nous employerons les logarithmes, ce sera toujours ceux du système de Néper, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire; c'est pourquoi nous omettrons l'accent affecté à la caractéristique l; et lorsque nous prendrons la différentielle du logarithme, nous diviserons simplement la différentielle de la quantité à laquelle il appartient par cette quantité même. Il est bon d'être prévenu que la différentielle du logarithme d'une quantité s'appelle aussi *la différentielle logarithmique de cette quantité.*

2.° $u = \mathrm{l}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$: on fera $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = z$ et on aura $du = \frac{dz}{z}$

$$dx\sqrt{a^2+x^2} - \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

mais $dz = \dfrac{}{a^2+x^2} = \dfrac{a^2\,dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

donc $du = \dfrac{a^2\,dx}{x(a^2+x^2)}$.

3.° $u = l\{(a+x)^n(a'+x)^{n'}(a''+x)^{n''}\}$; on aura par la nature des logarithmes, $u = n\,l(a+x) + n'\,l(a'+x) + n''\,l(a''+x)$ et on tirera de là $du = \dfrac{n\,dx}{a+x} + \dfrac{n'\,dx}{a'+x} + \dfrac{n''\,dx}{a''+x}$. Si on réduit ces fractions au même dénominateur, on trouvera

$$du = \left\{\frac{(n+n'+n'')x^2+[n(a'+a'')+n'(a+a'')+n''(a+a')]x+na'a''+n'aa''+n''aa'}{x^3+(a+a'+a'')x^2+(aa'+aa''+a'a'')x+aa'a''}\right\}dx$$

expression qui est de la forme $\left\{\dfrac{Ax^2+Bx+C}{x^3+A'x^2+B'x+C'}\right\}dx$,

a, a' et a'' étant les racines de l'équation $x^3+A'x^2+B'x+C'=0$.

On voit aisément que si on avoit pris un plus grand nombre de facteurs, on seroit encore tombé sur une expression analogue à la précédente, mais d'un dégré plus élevé; ensorte que toute fonction du genre de la proposée a pour coefficient différentiel une fraction rationnelle.

Si les quantités a, a' et a'' étoient égales entr'elles on auroit alors $u = l(a+x)^{n+n'+n''}$ et il en résulteroit $du = \dfrac{(n+n'+n'')\,dx}{a+x}$.

Ces remarques serviront, dans la suite, à éclaircir un point important du Calcul intégral.

4.° $u = l\left\{\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right\}$: on fera $\left.\begin{matrix}\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=y\\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=z\end{matrix}\right\}$

ce qui donnera $u = l\left(\dfrac{y}{z}\right) = l\,y - l\,z$ et $du = \dfrac{dy}{y} - \dfrac{dz}{z}$; mais on a

$$\left.\begin{aligned} dy &= \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}}\{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\} = \frac{-z\,dx}{2\sqrt{1-x^2}}\\ dz &= \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} + \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}\{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\} = \frac{y\,dx}{2\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}\right\},$$

d'où on tire

$$\frac{dy}{y} - \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{-\zeta dx}{2y\sqrt{1-x^2}} - \frac{y dx}{2\zeta\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(y^2+\zeta^2)}{2y\zeta\sqrt{1-x^2}};$$

et en observant que $\left.\begin{matrix} y^2+\zeta^2 = 4 \\ y\zeta = 2x \end{matrix}\right\}$, on trouvera

$$du = -\frac{dx}{x\sqrt{1-xx}}.$$

Cet exemple est remarquable par les réductions qu'éprouve la différentielle et sa simplicité eu égard à la fonction dont elle dérive: il sera facile maintenant d'effectuer les calculs des suivans dont nous ne donnerons ici que les résultats.

5.° $u = l\{x + \sqrt{1+xx}\}$; $du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

6.° $u = \frac{1}{\sqrt{-1}} l\{x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}\}$; $du = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$.

7.° $u = l.\left\{\frac{\sqrt{1+xx}+x}{\sqrt{1+xx}-x}\right\}^{\frac{1}{2}}$; $du = \frac{dx}{\sqrt{1+xx}}$.

8.° Si on avoit $u = (lx)^n$, en faisant $lx = \zeta$, on trouveroit $(lx)^n = \zeta^n$, et à cause de $d.\zeta^n = n\zeta^{n-1}d\zeta$, il viendroit

$$d.(lx)^n = n(lx)^{n-1}\frac{dx}{x}.$$

9.° Soit enfin $u = l.lx$, c'est-à-dire le logarithme du logarithme de x : posant comme ci-dessus $lx = \zeta$, on aura d'abord $u = l\zeta$, et par conséquent $du = \frac{d\zeta}{\zeta}$; puis mettant au lieu de ζ et de $d\zeta$, leur valeur en x et dx, on trouvera $du = \frac{dx}{x\,lx}$.

Nous ne pousserons pas plus loin ces calculs, et nous passerons maintenant aux fonctions exponentielles.

21. Soit 1.° $u = a^x$: en prenant le logarithme de chaque membre on aura $lu = x\,la$, et par conséquent $\frac{du}{u} = dx\,la$, d'où on tirera $du = u\,dx\,l'a$, ou en mettant au lieu de u sa valeur,

$d.\ a^x = a^x\, dx\, 1a$; et le coefficient différentiel $\frac{d.\ a^x}{dx}$ sera $a^x 1a$.

On peut arriver immédiatement à ce résultat sans avoir recours aux logarithmes, en faisant usage du développement de la fonction a^x donnée dans l'Introduction (n° 22). En effet, on a $a^{x+dx} = a^x . a^{dx}$; mais par l'article cité, $a^{dx} = 1 + (1a)\, dx +$ etc., donc $a^{x+dx} = a^x + a^x (1a)\, dx$, ce qui donne $a^{x+dx} - a^x = a^x\, dx\, 1a +$ etc. et $d.\ a^x = a^x\, dx\, 1a$.

En cherchant les différentielles successives, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} d.\ a^x = a^x\ dx\ 1a \\ d.^2 a^x = a^x\ dx^2\ (1a)^2 \\ d.^3 a^x = a^x\ dx^3\ (1a)^3 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Et si on substitue au lieu de a le nombre e, dont le logarithme $= 1$, on aura

$$\left.\begin{array}{rl} u &= e^x \\ \frac{d\,u}{d\,x} &= e^x \\ \frac{d^2 u}{d\,x^2} &= e^x \\ \frac{d^3 u}{d\,x^3} &= e^x \\ \text{etc.} & \end{array}\right\}$$

d'où il suit que la fonction e^x a la propriété remarquable de se reproduire elle-même dans chacun de ses coefficiens différentiels.

2.° $u = \zeta^y$, ζ et y étant deux fonctions quelconques de x; si on prend le logarithme de chaque membre, on aura $1u = y\, 1\zeta$; en différentiant, il viendra $\frac{du}{u} = y\frac{d\zeta}{\zeta} + dy\, 1\zeta$, ou bien

$du = u\left(\frac{y\, d\zeta}{\zeta} + dy\, 1\zeta\right)$, et en mettant pour u sa valeur,

$d.\ \zeta^y = \zeta^y \left(\frac{y\, d\zeta}{\zeta} + dy\, 1\zeta\right)$.

On pourroit parvenir à cette différentielle sans employer les logarithmes, en écrivant $\left.\begin{array}{l} u + p\, dx \\ y + q\, dx \\ \zeta + r\, dx \end{array}\right\}$ au lieu de $\left\{\begin{array}{l} u \\ y \\ \zeta \end{array}\right.$

Il viendroit alors $u + p\,dx = (z + r\,dx)^{y+q\,dx}$, en observant de s'arrêter dans le développement du second membre aux termes affectés de la première puissance de dx; mais on trouvera d'abord par la formule du binome,

$$z^{y+q\,dx} + (y + q\,dx)\, z^{y+q\,dx-1} r\,dx + \text{etc.};$$

résultat auquel on peut donner la forme suivante :

$$z^y \{z^{q\,dx} + (y + q\,dx).z^{q\,dx-1} r\,dx + \text{etc.}\}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{or} \qquad z^{q\,dx} &= 1 + (\mathrm{l}\,z)\, q\,dx + \text{etc.} \\ z^{q\,dx-1} &= \frac{z^{q\,dx}}{z} = \frac{1}{z}[1 + (\mathrm{l}\,z)\, q\,dx + \text{etc.}] \end{aligned}\right\} (\textit{Intr.}\ \text{n}^{\circ}\ 22.)$$

Substituant ces valeurs et rejettant tous les termes affectés des puissances de dx supérieures à la première, comme ne devant pas entrer dans la différentielle, on trouvera

$$u + p\,dx = z^y \left(1 + q\,dx\,\mathrm{l}\,z + \frac{y\,r\,dx}{z}\right);$$

Si on retranche de part et d'autre z^y ou u, il viendra

$$p\,dx = z^y \left(q\,dx\,\mathrm{l}\,z + \frac{y}{z}\, r\,dx\right);\ \text{c'est-à-dire,}$$

$du = z^y \left(dy\,\mathrm{l}\,z + \frac{y}{z}\, dz\right)$, comme ci-dessus.

3.° $u = a^{b^x}$: on fera $b^x = y$ et on aura $u = a^y$, $du = a^y\,dy\,\mathrm{l}\,a$; mais $dy = b^x\,dx\,\mathrm{l}\,b$, par conséquent $du = a^{b^x} b^x\,dx\,\mathrm{l}\,a\,\mathrm{l}\,b$, on poursuivra aisément ce calcul pour les cas plus compliqués.

4.° $u = z^t$: on fera $t = y$, il viendra $u = z^y$,

$du = z^y \left(\frac{y\,dz}{z} + dy\,\mathrm{l}\,z\right)$; mettant au lieu de y et dy leur valeur en t et s, il viendra

$$du = z^t t \left(\frac{dz}{z} + \frac{s\,dt\,\mathrm{l}\,z}{t} + ds\,\mathrm{l}\,t\,\mathrm{l}\,z\right)$$

à l'aide de ces formules on trouvera facilement la différentielle d'une fonction exponentielle quelconque. Occupons-nous maintenant des *fonctions circulaires.*

22. Soit 1.° $u = \sin x$: en substituant $x + dx$ à x, la fonction proposée se changera en $\sin(x + dx) = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx$,

mais on a $\left.\begin{array}{l}\cos dx = 1 - \text{etc.}\\ \sin dx = dx - \text{etc.}\end{array}\right\}$ (*Int.* n.° 35)

donc $\sin(x+dx) = \sin x + dx\cos x + \text{etc.}$, et par conséquent $d.\sin x = dx\cos x$.

Il suit de là *que la différentielle du sinus est égale à celle de l'arc multipliée par le cosinus.*

2.° $u = \cos x$: on a $\cos(x+dx) = \cos x\cos dx - \sin x\sin dx$, et en mettant pour $\cos dx$ et $\sin dx$ leur valeur, $\cos(x+dx) = \cos x - dx\sin x$ etc.; donc $d.\cos x = -dx\sin x$: c'est-à-dire que *la différentielle du cosinus est égale à celle de l'arc prise avec un signe négatif et multipliée par le sinus.*

Quant au sinus verse, sa différentielle est la même, au signe près, que celle du cosinus; car on a

$$\text{s. v. } x = 1 - \cos x, \text{ donc } d.\text{ s. v. } x = dx\sin x.$$

3.° $u = \tan x$: à cause de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on aura

$$d.\tan x = \frac{\cos x\, d.\sin x - \sin x\, d.\cos x}{\cos x^2} = \frac{(\cos x^2 + \sin x^2)\, dx}{\cos x^2};$$

mais $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$; donc $d.\tan x = \frac{dx}{\cos x^2}$.

4.° $u = \cot x$: à cause de $\cot x = \frac{1}{\tan x}$,

$$\text{on a } d.\cot x = -\frac{d.\tan x}{\tan x^2} = -\frac{dx}{\tan x^2\cos x^2} = -\frac{dx}{\sin x^2}.$$

5.° $u = \sec x$: à cause de $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, on a

$$d.\sec x = -\frac{d.\cos x}{\cos x^2} = \frac{dx\sin x}{\cos x^2} = dx\tan x\sec x,$$

6.° $u = \text{cosec } x$: à cause de $\cos x = \frac{1}{\sin x}$, on a

$$d.\text{cosec } x = -\frac{d.\sin x}{\sin x} = -\frac{dx\cos x}{\sin x^2} = -dx\cot x\,\text{cosec } x.$$

Avec ces formules on peut trouver la différentielle d'une expression renfermant d'une manière quelconque des sinus, cosinus, tangentes, etc.; il faudra pour cela différentier, en regardant ces dernières comme des fonctions particulières, et mettre au lieu de leurs différentielles les

les résultats ci-dessus ; nous n'en donnerons qu'un seul exemple, savoir $u = \cos x^{\sin x}$. On fera $\left.\begin{matrix}\cos x = t\\ \sin x = y\end{matrix}\right\}$, on aura $u = t^y$ et

$$du = d.t^y = t^y\left(dy\,l\,t + \frac{y\,dt}{t}\right) = dx\cos x^{\sin x}\left(\cos x\,l.\cos x - \frac{\sin x^2}{\cos x}\right).$$

23. Nous avons traité les sinus, cosinus etc. comme des fonctions de l'arc ; regardons à présent l'arc successivement comme une fonction de son sinus, de son cosinus, etc. et cherchons-en la différentielle sous ces divers points de vue. Pour cela supposons que x soit la fonction proposée, et u la variable dont cette fonction dépend ; 1.° l'équation $d.\sin x = dx\cos x$ donne, à cause de $\left.\begin{matrix}\sin x = u\\ \cos x = \sqrt{1-u^2}\end{matrix}\right\}$,

$du = dx\sqrt{1-u^2}$ et par conséquent $dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$; telle est la valeur de la différentielle de l'arc exprimée par la différentielle du sinus et par le sinus lui-même.

On peut parvenir à ce résultat en employant l'expression de l'arc donnée dans le n° 38 de l'Introduction, qui, lorsqu'on y fait $\sin x = u$ et $\cos x = \sqrt{1-u^2}$, devient $x\sqrt{-1} = l(u\sqrt{-1} + \sqrt{1-u^2})$; et d'où on tire $x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\,(u\sqrt{-1} + \sqrt{1-u^2})$. En effet si on change x en u et réciproquement, dans le 6.me exemple du n.° 20, on trouvera $d.\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\,(u\sqrt{-1} + \sqrt{1-u^2}) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

Si on vouloit exprimer la différentielle de l'arc par son cosinus, il faudroit partir de l'équation $d.\cos x = -dx\sin x$ qui donne, en faisant $\cos x = u$, $du = -dx\sqrt{1-u^2}$ ou $dx = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

Pour passer de là au *sinus verse* on feroit $u = 1 - y$, puisque $\sin ver.\, x = 1 - \cos x$, on auroit par conséquent $du = -dy$ et $dx = \frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}}$.

2.° Soit $\tan x = u$; l'équation $d.\tan x = \frac{dx}{\cos x^2}$ donne $du = \frac{dx}{\cos x^2}$ et $dx = du\cos x^2$. A cause de $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$, on trouve

$\sin x = \cos x \tan x$, $\sin x^2 = \tan x^2 \cos x^2$ et substituant $1 - \cos x^2$ à $\sin x^2$, il vient $1 = \cos x^2 + \tan x^2 \cos x^2 = \cos x^2 (1 + \tan x^2)$; on a donc $\cos x^2 = \frac{1}{1 + \tan x^2} = \frac{1}{1 + u^2}$. Mettant cette valeur dans celle de dx il en résultera $dx = \frac{du}{1 + u^2}$: d'où on peut conclure que *la différentielle de l'arc est égale à celle de la tangente divisée par le quarré de la sécante*; car $\sqrt{1 + u^2}$ exprime la sécante lorsque la tangente est représentée par u.

Nous terminerons cet article par l'exemple suivant :

Soit x un arc ayant pour sinus la fonction $2u\sqrt{1-u^2}$,

on fera $2u\sqrt{1-u^2} = z$ et on aura $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$;

$$\text{mais } dz = \frac{2\,du\,(1-2u^2)}{\sqrt{1-u^2}} \left.\right\}, \text{ donc } dx = \frac{2\,du}{\sqrt{1-u^2}}.$$
$$\sqrt{1-z^2} = 1 - 2u^2 \left.\right\}$$

De la différentiation des fonctions de deux variables.

241 Occupons-nous maintenant des fonctions qui dépendent de deux variables, et prenons d'abord un exemple. Soit $u = x^m y^n$; les quantités x et y n'étant assujetties à aucune relation entr'elles, la seconde peut rester la même quoique la première ait changé, et réciproquement. Il résulte de là que la valeur de la fonction proposée peut varier de plusieurs manières; 1.° en conséquence d'un changement arrivé à x seul ou à y seul; 2.° par le concours de ces deux circonstances.

En n'ayant d'abord égard qu'au changement de x, si on substitue $x + h$ au lieu de cette variable, dans la fonction proposée, on trouvera

$$(x+h)^m y^n = x^m y^n + \frac{m}{1} x^{m-1} y^n h + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.} x^{m-2} y^n h^2 + \frac{m(n-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.} x^{m-3} y^n h^3 + \text{etc.}$$

si l'on eut fait varier y seul, en écrivant $y+k$ au lieu de y on auroit eu

$$x^m (y+k)^n = x^m y^n + \frac{n}{1} x^m y^{n-1} k + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.} x^m y^{n-2} k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.} x^m y^{n-3} k^3 + \text{etc.}$$

Enfin si on suppose que les deux changemens précédens ayent lieu à la fois, la fonction proposée deviendra $(x+h)^m (y+k)^n$; et on en

obtiendroit le développement en multipliant celui de $(x+h)^m$ par celui de $(y+k)^n$. Mais on peut arriver au même but d'une manière plus simple, en substituant $y+k$ pour y dans le développement de $(x+h)^m y^n$ trouvé ci-dessus, ou bien $x+h$ pour x dans celui de $x^m (y+k)^n$. En effectuant la première opération il viendra $(x+h)^m (y+k)^n =$

$$= \begin{cases} x^m y^n & + \frac{m}{1} x^{m-1} y^n h & + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} y^n h^2 \\ + n x^m y^{n-1} k & + \frac{m}{1}\frac{n}{1} x^{m-1} y^{n-1} h k & + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{n}{1} x^{m-2} y^{n-1} h^2 k \\ + \frac{n(n-1)}{2} x^m y^{n-2} k^2 & + \frac{m}{1}\frac{n(n-1)}{1.2} x^{m-1} y^{n-2} h k^2 & + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{n(n-1}{1.2} x^{m-2} y^{n-2} h^2 k^2 \\ + \text{etc.} & + \text{etc.} & + \text{etc.} \end{cases}$$

Ce développement nous présente la fonction primitive $x^m y^n$, plus une suite de fonctions de x et de y qui multiplient les différentes puissances des accroissemens h et k, ainsi que les produits de ces puissances. On trouverait des développemens analogues pour toute autre fonction et quelque soit le nombre de variables qui entrent dans sa composition. Nous allons faire voir en général que ces développemens donnent lieu à de nouvelles fonctions qu'on peut dériver de la proposée par des différentiations successives comme celles qu'on obtient dans le cas d'une seule variable.

25. Représentons par $f(x, y)$ une fonction quelconque de x et de y; supposons d'abord que la variable x change seule et devienne $x+h$: il faudra regarder y comme une constante et traiter la fonction proposée de même qu'une fonction de x; on aura donc par le théorême du n.° 12, en faisant pour abréger $f(x, y) = u$,

$$f(x+h, y) = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Si on vouloit trouver ce que devient la fonction proposée lorsque y seul prend un accroissement, on regarderoit x comme une constante et $f(x, y)$ ou u comme une fonction de y; par-là on auroit

$$f(x, y+k) = u + \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Supposons maintenant que les quantités x et y varient en même tems et deviennent $x+h$ et $y+k$; comme on n'a assigné aucune

forme particulière à la fonction $f(x, y)$, il n'est pas possible d'y faire à la fois les deux substitutions indiquées; mais il est aisé de sentir qu'on parviendra au même résultat en changeant d'abord x en $x+h$, et en mettant ensuite $y+k$ pour y, dans le développement qu'on aura obtenu par la première opération.

On a déjà $f(x+h, y) = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}$ etc.,

u représentant $f(x, y)$. Pour développer les coefficiens des différens termes de cette série, en ayant égard au changement arrivé à y, j'observerai d'abord que dans chacun d'eux x doit être regardé comme une quantité constante, et qu'on doit les traiter par conséquent comme des fonctions de la seule variable y. D'après cela, $f(x, y)$ ou u deviendra

$$u + \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Si dans ce développement on écrit $\frac{du}{dx}$ au lieu de u, on aura pour résultat ce que devient la fonction $\frac{du}{dx}$, lorsque y se change en $y+k$; c'est-à-dire,

$$\frac{du}{dx} + \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Mais il est aisé de voir que l'expression $\frac{d.\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$ indique deux différentiations faites successivement sur la fonction proposée, la première en ayant égard à la variabilité de x seul et la seconde en ne considérant que celle de y; nous la mettrons sous une forme plus simple en l'écrivant comme il suit: $\frac{d^2u}{dy\,dx}$. Nous représenterons de même $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}$ par $\frac{d^3u}{dy^2\,dx}$: en général, il faudra entendre par $\frac{d^{n+m}u}{dy^n\,dx^m}$, le coefficient différentiel de l'ordre n relatif à la fonction $\frac{d^mu}{dx^m}$, en n'y supposant que y variable; tandis que cette fonction est elle-même

le coefficient différentiel de l'ordre m de la fonction proposée, en n'y supposant que x variable.

Cela posé la substitution de $y+k$ au lieu de y changera

$$\frac{du}{dx} \text{ en } \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dy\,dx}\frac{k}{1} + \frac{d^3u}{dy^2\,dx}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^4u}{dy^3\,dx}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \text{ en } \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3u}{dy\,dx^2}\frac{k}{1} + \frac{d^4u}{dy^2\,dx^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^5u}{dy^3\,dx^2}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} \text{ en } \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d^4u}{dy\,dx^3}\frac{k}{1} + \frac{d^5u}{dy^2\,dx^3}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^6u}{dy^3\,dx^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

etc.

En substituant ces valeurs dans le développement de $f(x+h, y)$ et en ordonnant de manière que tous les termes dans lesquels les exposans de h et de k font une même somme, soient placés dans une même colonne verticale, il viendra

$$\left.\begin{aligned} f(x+h, y+k) = u &+ \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.} \\ &+ \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dy\,dx}\frac{k}{1}\frac{h}{1} + \frac{d^3u}{dy^2\,dx}\frac{k^2}{1}\frac{h}{1.2} + \text{etc.} \\ &+ \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy\,dx^2}\frac{k}{1}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} \\ &+ \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

26. Nous avons obtenu le développement précédent en mettant d'abord $x+h$ au lieu de x, et ensuite $y+k$ au lieu de y, mais on auroit pu procéder dans un ordre inverse et commencer par la substitution relative à y : alors $f(x, y)$ seroit devenue

$$f(x, y+k) \text{ ou } u + \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

La substitution de $x+h$ au lieu de x, dans cette série, auroit changé

$$u \text{ en } u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et ensuite

$$\frac{du}{dy}\text{en}\frac{du}{dy}+\frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1}+\frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^4u}{dx^3dy}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}\text{en}\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1}+\frac{d^4u}{dx^2dy^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^5u}{dx^3dy^2}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$\frac{d^3u}{dy^3}\text{en}\frac{d^3u}{dy^3}+\frac{d^4u}{dxdy^3}\frac{h}{1}+\frac{d^5u}{dx^2dy^3}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^6u}{dx^3dy^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

etc.

on auroit eu par conséquent

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k)=u&+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\ &+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1}\frac{k}{1}+\frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2}\frac{k}{1}+\text{etc.}\\ &+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1}\frac{k^2}{1.2}+\text{etc.}\\ &+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\ &+\text{etc.}\end{aligned}\right\}.$$

Il est évident que ce second développement doit être identique avec le premier ; car il est indifférent de changer d'abord x en $x+h$ et ensuite y en $y+k$, ou de faire les mêmes substitutions dans un ordre inverse, puisque d'une manière ou de l'autre on obtient également $f(x+h,y+k)$.

Si on compare dans ces deux développemens les termes qui sont affectés des mêmes puissances de h et de k, on trouvera cette suite d'équations,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u}{dydx}&=\frac{d^2u}{dxdy}\\ \frac{d^3u}{dydx^2}&=\frac{d^3u}{dx^2dy}\\ \frac{d^3u}{dy^2dx}&=\frac{d^3u}{dxdy^2}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d^{n+m}u}{dy^ndx^m}&=\frac{d^{m+n}u}{dx^mdy^n}\\ \text{etc.}&\quad\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

La première nous apprend que le coefficient différentiel du second

ordre d'une fonction de deux variables, pris en différentiant par rapport à l'une d'elles et ensuite par rapport à l'autre, reste le même quel que soit l'ordre qu'on ait suivi dans les différentiations. Soit, par exemple, $u = x^m y^n$; si on différentie d'abord en regardant x comme seule variable, on a $\frac{du}{dx} = m x^{m-1} y^n$; différentiant ensuite ce résultat, en ne faisant varier que y, on obtient $\frac{d^2 u}{dy\,dx} = m n x^{m-1} y^{n-1}$: en opérant dans un ordre inverse, on trouve $\frac{du}{dy} = n x^m y^{n-1}$ et $\frac{d^2 u}{dx\,dy} = m n x^{m-1} y^{n-1}$, et on voit que le dernier résultat est le même dans les deux cas.

27. Les autres équations rapportées ci-dessus, ne sont que des conséquences de la première : en effet, d'après la notation adoptée, $\frac{d^3 u}{dy\,dx^2}$ est la même chose que $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy\,dx}$, et à cause qu'on peut intervertir l'ordre de ces différentiations consécutives, la même chose encore que $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx\,dy} = \frac{d^3 u}{dx\,dy\,dx}$. On a aussi $\frac{d^3 u}{dx^2\,dy} = \frac{d\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)}{dx}$, et en changeant l'ordre des deux premières différentiations indiquées, il vient $\frac{d\left(\frac{d^2 u}{dy\,dx}\right)}{dx} = \frac{d^3 u}{dx\,dy\,dx}$; résultat conforme au précédent.

On trouvera semblablement

$$\frac{d^3 u}{dy^2\,dx} = \frac{d\left(\frac{d^2 u}{dy\,dx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)}{dy} = \frac{d^3 u}{dy\,dx\,dy},$$

$$\frac{d^3 u}{dx\,dy^2} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx\,dy} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dy}\right)}{dy\,dx} = \frac{d^3 u}{dy\,dx\,dy}.$$

En traitant ainsi les équations ultérieures, on tomberoit sur toutes les expressions équivalentes des coefficiens différentiels des ordres plus élevés; la table ci-jointe offre les diverses expressions des coefficiens différentiels des deuxième, troisième et quatrième ordres : celles qui sont dans une même colonne verticale sont identiques.

$\frac{d^2u}{dydx}$	$\frac{d^3u}{dy^2dx}$	$\frac{d^3u}{dydx^2}$	$\frac{d^4u}{dy^3dx}$	$\frac{d^4u}{dy^2dx^2}$	$\frac{d^4u}{dydx^3}$	etc.
$\frac{d^2u}{dxdy}$	$\frac{d^3u}{dydxdy}$	$\frac{d^3u}{dxdydx}$	$\frac{d^4u}{dy^2dxdy}$	$\frac{d^4u}{dydxdydx}$	$\frac{d^4u}{dxdydx^2}$	
	$\frac{d^3u}{dxdy^2}$	$\frac{d^3u}{dx^2dy}$	$\frac{d^4u}{dydxdy^2}$	$\frac{d^4u}{dydx^2dy}$	$\frac{d^4u}{dx^2dydx}$	
			$\frac{d^4u}{dxdy^2}$	$\frac{d^4u}{dxdy^2dx}$	$\frac{d^4u}{dx^2dy}$	
				$\frac{d^4u}{dx^2dy^2}$		

En général *on peut déranger comme on voudra l'ordre des différentiations indiquées ; pourvu qu'elles restent les mêmes et en même nombre, le résultat ne changera pas.*

Pour le prouver, soit $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$; il est facile de voir d'après les conventions faites dans les n°s 10 et 25, qu'on peut décomposer cette expression comme il suit : $\frac{d^{n-1}\left(\frac{d^2\left(\frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right)}{dxdy}\right)}{dx^{n-1}}$; mais en intervertissant l'ordre des deux différentiations isolées, ce qui est permis, on a $\frac{d^{n-1}\left(\frac{d^2\left(\frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right)}{dydx}\right)}{dx^{n-1}}$, et en réunissant sous un même signe toutes les opérations indiquées, il vient au lieu de la formule proposée, l'expression équivalente $\frac{d^{m+n}u}{dx^{n-1}dydxdy^{n-1}}$. Si on décomposoit encore cette

cette dernière, on y pourroit faire de nouvelles permutations dans l'arrangement des dy et dx; nous devons donc regarder la proposition ci-dessus, comme démontrée.

28. En retranchant $f(x,y)$ ou u de $f(x+h, y+k)$ on trouve

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = \left.\begin{array}{rl} & \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} \text{ etc.} \\ + & \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dy\,dx}\frac{k}{1}\frac{h}{1} \text{ etc.} \\ + & \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} \text{ etc.} \\ & \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Si on étend aux fonctions de deux variables la définition que nous avons donnée (n° 9) de la différentielle d'une fonction, on verra que celle de $f(x,y)$ ou u est comprise dans les deux termes qui forment la première colonne du développement précédent, et en changeant h en dx et k en dy, nous aurons $df(x,y) = du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$.

Il suit de là que la différentielle d'une fonction de deux variables renferme deux parties, savoir: $\frac{du}{dx}dx$ ou la différentielle prise en regardant x comme seule variable, et $\frac{du}{dy}dy$ ou la différentielle prise en regardant y comme seule variable.

On peut donc appliquer aux fonctions de deux variables, les règles données (n° 13 et suiv.) pour la différentiation de celles qui dépendent d'une seule, et pour cela *on différentiera la fonction proposée d'abord par rapport à l'une des variables, et ensuite par rapport à l'autre : la somme des deux résultats sera la différentielle cherchée.*

On voit sur-le-champ d'après cette règle que

$$\left.\begin{array}{rl} d.(x+y) = & dx + dy \\ d.xy = & y\,dx + x\,dy \\ d.\frac{x}{y} = & \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \end{array}\right\}$$

29. Nous ne croyons pas qu'il soit nécessaire de donner beaucoup d'exemples relatifs à la différentiation des fonctions de deux variables, puisqu'elle rentre dans celle des fonctions qui n'en contiennent

qu'une. Nous nous bornerons donc aux suivans :

$$1.^{o}\ u = x^{m}y^{n};\ \text{on a}\ \left.\begin{aligned}\frac{du}{dx}\,dx &= mx^{m-1}y^{n}dx\\ \frac{du}{dy}\,dy &= nx^{m}y^{n-1}dy\end{aligned}\right\}$$

donc $du = mx^{m-1}y^{n}dx + nx^{m-1}dy = x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx + nx\,dy)$.

$$2.^{o}\ u = \frac{ay}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}};\ \text{on a}\ \frac{du}{dx}\,dx = -\frac{ayx\,dx}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{du}{dy}\,dy = \frac{a\,dy}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}} - \frac{ay^{2}\,dy}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{3}{2}}}$$

donc $du = \frac{-ayx\,dx}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{3}{2}}} + \frac{a\,dy}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}} - \frac{ay^{2}\,dy}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{3}{2}}}$, ou en réduisant $= \frac{-ayx\,dx + ax^{2}\,dy}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{3}{2}}}$.

$3.^{o}\ u = A\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right)$: cette expression est celle d'un arc de cercle dont le rayon est 1, et la tangente $\frac{x}{y}$; pour la différentier on fera $\frac{x}{y} = \zeta$ et on cherchera d'après le n° 23 la différentielle de l'arc dont la tangente est exprimée par ζ; il viendra pour résultat $\frac{d\zeta}{1+\zeta^{2}}$, on aura donc $du = \frac{d\zeta}{1+\zeta^{2}}$. Mettant au lieu de ζ et de $d\zeta$ leur valeur, on trouvera

$$du = \frac{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^{2}}}{1+\frac{x^{2}}{y^{2}}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^{2}+x^{2}}.$$

30. La manière dont on écrit les différentielles des fonctions qui dépendent de plusieurs variables donne lieu à des remarques importantes. Il ne faut pas confondre alors $\frac{du}{dx}\,dx$ avec du, comme on pour-

roit le faire si u ne renfermoit que la seule variable x. En effet, dans ce dernier cas, du n'étant que le premier terme du développement de la différence entre les deux états consécutifs de la fonction proposée, si on divise cette quantité par l'accroissement dx on a le coefficient différentiel; mais lorsque u renferme deux variables, la différentielle est composée de deux termes et l'expression $\frac{du}{dx}$ a dans ce cas un sens particulier; elle désigne le coefficient différentiel pris dans l'hypothèse de x seul variable, ou le quotient du premier terme du développement de la différence prise dans cette hypothèse, divisé par l'accroissement dx: il en est de même de $\frac{du}{dy}$.

Les quantités $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ sont appellées ordinairement *différences partielles* du premier ordre de la fonction u; et en général $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$ représente une de celles de l'ordre $m+n$, prise en différentiant m fois par rapport à x et n fois par rapport à y.

Je crois devoir observer que la dénomination de *différence partielle* n'est pas exacte; car les formules qu'on désigne ainsi n'expriment point la différence entre deux quantités. Les vraies *différences partielles* de u sont $\left.\begin{matrix} f(x+h,y)-f(x,y) \\ f(x,y+k)-f(x,y) \end{matrix}\right\}$, la première étant prise, en n'ayant égard qu'au changement de x et la seconde en ne supposant que celui de y. Les expressions $\left.\begin{matrix} \frac{du}{dx}h \\ \frac{du}{dx}k \end{matrix}\right\}$ ou $\left.\begin{matrix} \frac{du}{dx}dx \\ \frac{du}{dy}dy \end{matrix}\right\}$ qui sont les premiers termes des développemens de ces différences doivent être nommées *différentielles partielles*, et $\left.\begin{matrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dy} \end{matrix}\right\}$ resteront toujours les *coefficiens différentiels* du premier ordre de la fonction proposée; mais il faut

remarquer qu'une fonction d'une seule variable n'a dans chaque ordre qu'un coefficient différentiel, tandis qu'une fonction de deux variables a deux coefficiens différentiels pour le premier ordre; trois pour le second, quatre pour le troisième, etc.

31. Voici comment on peut trouver ces divers coefficiens en passant des deux premiers.

On a d'abord $du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$

prenant ensuite la différentielle des fonctions $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$, qui doivent être traitées comme des fonctions de deux variables, il vient

$$d\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dy\,dx}dy$$

$$d.\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{d^2u}{dx\,dy}dx + \frac{d^2u}{dy^2}dy$$

et parce que la différentielle seconde n'est autre chose que la différentielle de la différentielle première, on aura

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2,$$

en regardant dx et dy comme des constantes, et en observant que les coefficiens différentiels dont les dénominateurs ne présentent que les différens arrangemens d'un même produit en dx et dy sont identiques.

Si on différentie les coefficiens qui se trouvent dans le résultat précédent, il viendra $d.\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^3u}{dx^3}dx + \frac{d^3u}{dy\,dx^2}dy$

$$d.\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^3u}{dx^2\,dy}dx + \frac{d^3u}{dy\,dx\,dy}dy$$

$$d.\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^3u}{dx\,dy^2}dx + \frac{d^3u}{dy^3}dy$$

et par conséquent

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + \frac{3\,d^3u}{dx^2\,dy}dx^2\,dy + \frac{3\,d^3u}{dx\,dy^2}dx\,dy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3.$$

On continuera facilement cette formation, et on remarquera sans doute

l'analogie qui règne entre les résultats auxquels nous sommes parvenus et les développemens des puissances du binome. Pour s'assurer qu'elle a lieu à quelqu'ordre qu'on pousse la différentiation, il suffit de chercher la loi qui règne entre deux différentielles consécutives.

Supposons donc qu'on ait

$$d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + A\frac{d^n u}{dx^{n-1}dy} dx^{n-1}dy + B\frac{d^n u}{dx^{n-2}dy^2} dx^{n-2}dy^2 + C\frac{d^n u}{dx^{n-3}dy^3} dx^{n-3}dy^3 \text{ etc.}$$

A, B, C, etc. étant des coefficiens numériques indépendans de x et de y; si on différentie chacun des termes du second membre de cette équation par rapport à x et par rapport à y successivement, qu'on réunisse ensuite les résultats semblables, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} d^{n+1}u = \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} dx^{n+1} + (A+1)\frac{d^{n+1}u}{dx^n dy} dx^n dy + (B+A)\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}dy^2} dx^{n-1}dy^2 \\ + (C+B)\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-2}dy^3} dx^{n-2}dy^3 \\ + \text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

Soit maintenant

$(x+y)^n = x^n + A' x^{n-1}y + B' x^{n-2}y^2 + C' x^{n-3}y^3 + \text{etc.}$; on aura

$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) = x^{n+1} + (A'+1)x^n y + (B'+A')x^{n-1}y^2 + (C'+B')x^{n-2}y^3 + \text{etc.}$;

d'où on voit que dans le passage n à $n+1$, les coefficiens du développement $(x+y)^n$ éprouvent les mêmes changemens que ceux de $d^n u$, et comme les premiers sont respectivement égaux aux seconds lorsque $n = 1$, cette égalité doit encore avoir lieu pour toute autre valeur entière de n : on peut donc écrire en général

$$d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + \frac{n}{1}\frac{d^n u}{dx^{n-1}dy} dx^{n-1}dy + \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2}\frac{d^n u}{dx^{n-2}dy^2} dx^{n-2}dy^2 + \text{etc.}$$

Il suit de là qu'on formera la différentielle $d^n u$ en développant le binome $(dx+dy)^n$ et en multipliant les différens termes du résultat par les coefficiens différentiels analogues, en sorte que celui qui est affecté de $dx^{n-m}dy^m$ ait pour multiplicateur $\frac{d^n u}{dx^{n-m}dy^m}$.

32. Le développement de $f(x+h, y+k)$ peut aussi se déduire de celui des différentes puissances du binome; car en réduisant au même dénominateur les termes dans lesquels les exposans de h et de k font une même somme, il prendra la forme suivante :

$$+\frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}h^2+2\frac{d^2u}{dx\,dy}hk+\frac{d^2u}{dy^2}k^2\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{d^3u}{dx^3}h^3+3\frac{d^3u}{dx^2dy}h^2k+3\frac{d^3u}{dx\,dy^2}hk^2+\frac{d^3u}{dy^3}k^3\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4}\left\{\frac{d^4u}{dx^4}h^4+4\frac{d^4u}{dx^3dy}h^3k+6\frac{d^4u}{dx^2dy^2}h^2k^2+4\frac{d^4u}{dx\,dy^3}hk^3+\frac{d^4u}{dy^4}k^4\right\}$$

etc.

et alors on voit évidemment qu'il se déduit de la suite

$$u+\frac{1}{1}(h+k)+\frac{1}{1.2}(h+k)^2+\frac{1}{1.2.3.}(h+k)^3+\frac{1}{1.2.3.4}(h+k)^4 \text{ etc.}$$

comme les différentielles du, d^2u, d^3u etc. se déduisent des puissances $(dx+dy)$, $(dx+dy)^2$, $(dx+dy)^3$ etc.

Nous ne nous bornerons pas à l'induction qu'on peut tirer de la comparaison des premiers termes des formules précédentes, et il ne nous sera pas difficile de prouver que l'analogie que nous avons fait remarquer a lieu dans toute l'étendue de ces formules.

Considérons le terme général de $f(x+h,\ y+k)$; il est évident qu'il doit dériver de celui de $f(x+h, y)$ en y substituant $y+k$ au lieu de y, mais à cause de

$$f(x+h,y)=u+\frac{du}{dx}h+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}\text{ etc.},$$

ce dernier sera $\frac{d^mu}{dx^m}\frac{h^m}{1.2.....m}$; faisant dans la fonction $\frac{d^mu}{dx^m}$ le changement indiqué par rapport à y, on aura pour résultat une suite de termes

$$\frac{d^mu}{dx^m}+\frac{d^{m+1}u}{dx^m\,dy}\frac{k}{1}+\frac{d^{m+2}u}{dx^m\,dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{d^{m+n}u}{dx^m\,dy^n}\frac{k^n}{1.2.....n};$$

et par conséquent le terme général demandé sera exprimé par

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m\,dy^n}\times\frac{h^m\ k^n}{1.2....m\ .\ 1.2....n}.$$ Mais le produit $h^m\,k^n$ est homogène à h^{m+n} et à k^{m+n} qui auront l'un et l'autre pour coefficient numérique $\frac{1}{1.2...(m+n)}$; réduisant donc au même dénominateur les frac-

tions $\frac{1}{1.2..(m+n)}$ et $\frac{1}{1.2....m \cdot 1.2....n}$, on trouvera pour la seconde $\frac{1}{1.2..(m+n)} \times \frac{1.2...(m+n)}{1.2....m \cdot 1.2....n}$, et en prenant $\frac{1}{1.2..(m+n)}$ pour facteur commun de tous les termes homogènes à $h^m k^n$, il restera pour le coefficient propre de ce terme $\frac{1.2...(m+n)}{1.2....m \cdot 1.2....n}$; c'est-à-dire le même que celui dont il seroit affecté dans le développement de $(h+k)^{m+n}$.

33. Si on change h en dx et k en dy dans le développement de $f(x+h, y+k)$ que nous venons de considérer, on y retrouvera alors, en faisant abstraction du dénominateur, les différentielles de tous les ordres de la fonction u; savoir : la différentielle première dans les termes où les accroissemens ne montent qu'au premier dégré; la différentielle seconde, dans ceux où ils ne montent qu'au second; la différentielle troisième dans ceux où ils ne montent qu'au troisième, etc.; on aura donc ainsi

$$f(x+dx, y+dy) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \frac{d^4u}{1.2.3.4} + \text{etc.};$$

on obtiendra le même résultat pour les fonctions d'une seule variable en substituant dx à k dans la formule du n° 12. La série précédente convient donc également aux fonctions d'une et deux variables, pourvu qu'on prenne les différentielles d'une manière convenable dans chacun de ces cas : nous montrerons bientôt qu'elle a lieu quel que soit le nombre des variables qui entrent dans la fonction proposée; et elle réunit à cette généralité, l'avantage d'être facile à retenir.

34. Les différentielles successives nous ont fourni les moyens d'exprimer le développement d'une fonction par rapport aux accroissemens des variables dont elle dépend. On peut aussi déduire de ce développement, s'il est connu d'ailleurs, les différentielles elles-mêmes. Il suffit pour cela de rassembler tous les termes homogènes par rapport aux accroissemens : ceux du premier dégré donneront la différentielle première divisée par 1; ceux du second, la différentielle seconde divisée par 1.2; ceux du troisième, la différentielle troisième divisée

par 1.2.3 et ainsi de suite : en sorte que si on avoit

$$\left.\begin{array}{l} u + P\,dx + Q\,dy \\ \quad + R\,dx^2 + S\,dx\,dy + T\,dy^2 \\ \quad + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

on en tireroit

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{du}{1} = P\,dx + Q\,dy \\ \dfrac{d^2u}{1.2} = R\,dx^2 + S\,dx\,dy + T\,dy^2 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

On voit que cela revient à comparer le développement donné avec la série $u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \text{etc.}$, en regardant les termes du premier dans lesquels la somme des exposans des accroissemens dx et dy est la même, comme homogènes au terme de la seconde dans lequel l'exposant de la caractéristique d est égal à cette somme.

35. Pour ne pas tomber dans des calculs trop compliqués, nous n'appliquerons ce procédé qu'à la fonction $u = (a + bx + cx^2)^r$. En y substituant $x + dx$ au lieu de x, elle deviendra

$$\{a + bx + cx^2 + b\,dx + 2cx\,dx + c\,dx^2\}^r;$$

faisant pour abréger $\left.\begin{array}{l} a + bx + cx^2 = p \\ b + 2cx = q \end{array}\right\}$ on aura $(p + q\,dx + c\,dx^2)^r$;

développant cette expression comme un binome dont $p + q\,dx$ formeroit le premier terme, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} (p+q\,dx)^r + \frac{r}{1}(p+q\,dx)^{r-1}c\,dx^2 + \frac{r(r-1)}{1.2}(p+q\,dx)^{r-2}c^2\,dx^4 \\ \quad + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}(p+q\,dx)^{r-3}c^3\,dx^6 + \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de développer les diverses puissances de $p + q\,dx$. Mais pour obtenir la différentielle de l'ordre n de la fonction proposée, il suffit de rassembler les termes qui seroient affectés de dx^n dans le résultat final, savoir :

1.° Celui qui est multiplié par dx^n dans le développement de $(p+q\,dx)^r$
2.° Celui qui l'est par dx^{n-2} dans $(p+q\,dx)^{r-1}$
3.° Celui qui l'est par dx^{n-4} dans $(p+q\,dx)^{r-2}$
4.° Celui qui l'est par dx^{n-6} dans $(p+q\,dx)^{r-3}$
etc.

En

En nommant A, B, C, D etc. les coefficiens respectifs de ces puissances de dx, il viendra

$$\left\{A+\frac{r}{1}Bc+\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}Cc^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}Dc^3+\text{etc.}\right\}dx^n=\frac{d^nu}{1.2....n}.$$

On verra aisément que

$$A=\frac{r(r-1).....(r-n+1)}{1.2.....n}p^{r-n}q^n$$

$$B=\frac{(r-1)(r-2)...(r-n+2)}{1.2.....(n-2)}p^{r-n+1}q^{n-2}=A\,\frac{n(n-1)}{r(r-n+1)}\frac{p}{q^2}$$

$$C=\frac{(r-2)(r-3)....(r-n+3)}{1.2.....(n-4)}p^{r-n+2}q^{n-4}=A\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{r(r-1)(r-n+1)(r-n+2)}\frac{p^2}{q^4}$$

$$D=\frac{(r-3)(r-4)....(r-n+4)}{1.2.....(n-6)}p^{r-n+3}q^{n-6}=A\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{r(r-1)(r-2)(r-n+1)(r-n+2)(r-n+3)}\frac{p^3}{q^6}$$

etc.

substituant donc au lieu de A, B, C, D etc. leur valeur, on trouvera, après les réductions,

$$d^nu=r(r-1)....(r-n+1)p^{r-n}q^n dx^n\left\{1+\frac{n(n-1)}{1.(r-n+1)}\frac{cp}{q^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2(r-n+1)(r-n+2)}\frac{c^2p^2}{q^4}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3(r-n+1)(r-n+2)(r-n+3)}\frac{c^3p^3}{q^6}\text{ etc}\right\}.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à remettre à la place de p et de q les quantités qu'ils expriment.

36. La forme du résultat précédent n'est pas la plus simple sous laquelle puisse se présenter d^nu; car on peut obtenir pour cette différentielle, une expression qui ne contiendroit p que comme un facteur commun à tous ses termes.

On transformera $(p+qx+cdx^2)^r$ en $p^r\left(1+\frac{2q}{2p}dx+\frac{4pc}{4p^2}dx^2\right)^r$,

et en évaluant le produit $4pc$, on trouvera $4ac+4bcx+4c^2x^2$: si on retranche de cette quantité q^2 ou $(b+2cx)^2$, il viendra $4pc-q^2=4ac-b^2$; résultat indépendant de p. Faisant donc pour abréger, $4ac-b^2=e$, on aura $4pc=e+q^2$; ce qui changera la fonction proposée en

$$p^r\left(1+\frac{2q}{2p}dx+\frac{q^2+e}{4p^2}dx^2\right)^r=p^r\left\{\left(1+\frac{q}{2p}dx\right)^2+\frac{e}{4p^2}dx^2\right\}^r,$$

et en mettant q' pour $\frac{q}{2p}$, e' pour $\frac{e}{4p^2}$, elle deviendra $p'\{(1+q'dx)^r+e'dx^2\}^r$,

expression qui donne d'abord par un premier développement,

$$p'\left\{(1+q'dx)^{rr}+\frac{r}{1}(1+q'dx)^{rr-1}e'dx^2+\frac{r(r-1)}{1.2}(1+q'dx)^{rr-4}e'^2dx^4 \right.$$
$$\left. +\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}(1+q'dx)^{rr-6}e'^3dx^6\text{etc.}\right\};$$

prenant ensuite dans chacune des puissances de $1+q'dx$ le terme qui seroit multiplié par dx^n dans le développement final, on trouvera

$$p'\left\{\frac{2r(2r-1).....(2r-n+1)}{1.2.....n}q'^n+\frac{r}{1}\frac{(2r-2)(2r-3).....(2r-n+1)}{1.2.....(n-2)}q'^{n-2}e'\right.$$
$$\left.+\frac{r(r-1)}{1.2}\frac{(2r-4)(2r-5).....(2r-n+1)}{1.2.....(n-4)}q'^{n-4}e'^2\text{etc.}\right\}.$$

Mais
$$q'^n=\frac{q^n}{2^n p^n}$$
$$q'^{n-1}e'=\frac{q^{n-1}}{2^{n-1}p^{n-1}}\times\frac{e}{2^2p^2}=\frac{q^{n-1}e}{2^np^n}=\frac{q^n}{2^np^n}\times\frac{e}{q^2}$$
$$q'^{n-4}e'^2=\frac{q^{n-4}}{2^{n-4}p^{n-4}}\times\frac{e^2}{2^4p^4}=\frac{q^{n-4}e^2}{2^np^n}=\frac{q^n}{2^np^n}\times\frac{e^2}{q^4}$$

etc.

substituant ces valeurs dans l'expression précédente et faisant dans la forme des coefficiens, des changemens analogues à ceux qu'on a développés ci-dessus (page *précéd.*), on trouvera

$$d^nu=2r(2r-1).....(2r-n+1)\left(\frac{q}{2}\right)^n p'^{r-n}dx^n\left\{1+\frac{r}{1}\frac{n(n-1)}{2r(2r-1)}\frac{e}{q^2}\right.$$
$$\left.+\frac{r(r-1)}{1.2}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)}\frac{e^2}{p^4}+\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\frac{n(n-1).....(n-5)}{2r(2r-1).....(2r-5)}\frac{e^3}{q^6}+\text{etc.}\right\}$$

Prenons pour cas particulier $u=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

nous aurons alors $r=-\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=0$, $e=-1$; d'où $p=1-x^2$, $q=-2x$, $e=-4$

et il viendra

$$d^n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.2.....\,n\,x^n\,d\,x^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left\{1+\frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)}{1.2\,x^2}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,x^4}+\text{etc.}\right\}$$

Tel est le résultat auquel Euler est parvenu par la voie de l'induction, dans son traité du Calcul différentiel, et que le Cte la Grange a trouvé directement par le procédé que nous venons d'exposer.

Il suit du n° 23 que si x désigne le sinus d'un arc représenté par y, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et par conséquent

$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{dx^n} = \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$. La série précédente, étant divisée par dx^n, donnera donc la valeur de $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$.

Différentiation des fonctions renfermant un nombre quelconque de variables.

37. Les fonctions qui dépendent de trois ou d'un plus grand nombre de variables ne nous occuperont pas long-temps, parce qu'il est facile de généraliser ce qui a été dit dans les n^os^ précédens, relativement aux fonctions de deux variables. On voit, en effet, que dans le cas où u représenteroit une fonction des trois variables x, y et z, on tomberoit d'abord sur le développement donné n° 25, en n'ayant égard qu'aux changemens de x et de y; pour trouver ensuite ce qu'il devient lorsque z reçoit un accroissement représenté par l, il ne s'agit plus que de traiter les quantités u, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ etc. comme des fonctions de z seul, et de les remplacer par les séries qu'on obtiendra en faisant usage du théorème de Taylor (n° 12). Celle qu'il faudroit substituer au coefficient différentiel $\frac{d^{n+m}u}{dy^n\,dx^m}$, aura pour terme général $\frac{d^{p+n+m}u}{dz^p\,dy^n\,dx^m}\,\frac{l^p}{1.2....p}$, et à cause que $\frac{d^{n+m}u}{dy^n\,dx^m}$ est affecté du produit $\frac{k^n\,h^m}{1.2...n\times 1.2...m}$, on trouvera que le terme général du développement de la fonction u, (dans le cas où les trois variables

dont elle dépend, changent à la fois) est exprimé par $\frac{d^{p+n+m}u}{d\xi^p dy^n dx^m} \frac{l^p k^n h^m}{1.2...p \times 1.2...n \times 1.2...m}$. En multipliant et en divisant ce résultat par le produit $1.2...(p+n+m)$ on pourra lui donner la forme suivante :

$$\frac{1}{1.2...(p+n+m)} \frac{d^{p+n+m}u}{d\xi^p dy^n dx^m} \frac{1.2....(p+n+m)\, l^p k^n h^m}{1.2...p \times 1.2...n \times 1.2...m};$$

or la dernière partie de cette expression est le terme général du développement de $(l+k+h)^{p+n+m}$ (*Intr.* n° 19) : on formera donc le développement du nouvel état de u en multipliant chaque terme de celui de $u + \frac{(l+k+h)}{1} + \frac{(l+k+h)^2}{1.2} + \frac{(l+k+h)^3}{1.2.3}$ etc., par le coefficient différentiel analogue aux puissances des accroissemens dont ce terme est affecté.

38. On doit voir maintenant que si u représente une fonction d'un nombre quelconque de variables x, y, ζ, t etc. et qu'on y substitue $x+h$, $y+k$, $\zeta+l$, $t+g$, etc. à la place de ces variables, elle pourra être développée dans une suite de termes représentés en général par

$$\frac{d^{m+n+p+q+\text{etc.}}u}{dx^m dy^n d\zeta^p dt^q \text{ etc.}} \frac{h^m k^n l^p g^q \text{ etc.}}{1.2...m \times 1.2...n \times 1.2...p \times 1.2...q \times \text{etc.}},$$

ou ce qui revient au même, par

$$\frac{d^{m+n+p+q+\text{etc.}}u}{dx^m dy^n d\zeta^p dt^q} \frac{M h^m k^n l^p g^q \text{ etc.}}{1.2....(m+n+p+q+\text{etc.})};$$

M désignant le coefficient de $h^m k^n l^p g^q$ dans le polynome $h+k+l+g+$ etc. elevé à la puissance $m+n+p+q+$ etc. (*Intr.* n° 19).

On passera encore du développement de la série

$$u + \frac{(h+k+l+g+\text{etc.})}{1} + \frac{(h+k+l+g+\text{etc.})^2}{1.2} \text{ etc.}$$

à celui du nouvel état de la fonction proposée, en multipliant les termes du premier par les coefficiens différentiels qui leur sont respectivement analogues.

Il est à propos de remarquer que la valeur du coefficient $\frac{d^{m+n+p+q+\text{etc.}}u}{dx^m dy^n d\zeta^p dt^q \text{ etc.}}$ ne change point dans quelqu'ordre que se suc-

cédent les différentiations indiquées; l'expression $\frac{d^{n+m+r+s+\text{etc.}}u}{dy^n dx^m dz^r dt^s \text{ etc.}}$, par exemple, revient au même que la précédente. Pour s'en convaincre il suffit d'observer qu'on peut passer de $f(x, y, z, t \text{ etc.})$ à $f(x+h, y+k, z+l, t+g \text{ etc.})$ en faisant varier successivement les quantités x, y, z, dans tel ordre qu'on voudra, pourvû qu'on ait égard au changement que chacune d'elles à éprouvé en particulier : ceci est assez évident d'après l'exemple donné sur les fonctions de deux variables, n° 26.

La même chose peut encore se démontrer en partant de l'équation $\frac{d^2u}{dy\,dx} = \frac{d^2u}{dx\,dy}$; car en développant la formule $\frac{d^{n+m+r+s+\text{etc.}}u}{dx^m dy^n dz^r dt^s \text{ etc.}}$, comme dans le n° 27, de manière a isoler deux différentiations consécutives, parmi celles qui sont indiquées, on pourra les permuter entr'elles, et en répétant cette opération on fera changer comme on voudra l'ordre des différentiations dans le coefficient proposé (*).

39. En donnant à m, n, p, q, etc. toutes les valeurs possibles, en nombres entiers, on formera les différens termes du développement de la fonction proposée, et en se bornant à ceux où les accroissemens ne passent pas le premier dégré, on aura

$$u + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \frac{du}{dt}g + \text{etc.};$$

changeant h, k, l, g, etc. en dx, dy, dz, dt, etc., et retranchant la fonction primitive u, le résultat sera la différentielle première de

(*) On a prouvé dans plusieurs livres élémentaires que les produits $a\,b$ et $b\,a$ étoient identiques, et on a supposé ensuite qu'on pouvoit multiplier entr'elles, dans tel ordre qu'on vouloit, un nombre quelconque de quantités, sans que leur produit changeât. D'Alembert a remarqué que cette proposition, qu'on regardoit à tort comme évidente par elle-même, se démontroit par un raisonnement analogue à celui dont nous avons fait usage ci-dessus. En effet, si on écrit le produit $a\,b\,c\,d\,e\,f$, etc., comme il suit, $a\,b\,c \times d\,e \times f$ etc., et qu'on permute entr'eux les deux facteurs consécutifs d et e, il viendra $a\,b\,c\,e\,d\,f$ etc. Il est aisé de voir qu'on pourra, par de nouvelles décompositions, amener tel changement qu'on voudra dans l'ordre des facteurs.

cette fonction : on aura donc

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \frac{du}{dt}dt + \text{etc.};$$

d'où il suit que *la différentielle d'une fonction d'un nombre quelconque de variables, est égale à la somme des différentielles particlles prises par rapport à chacune de ces variables.*

Quant aux différentielles des ordres supérieurs, on les déduira successivement les unes des autres et de la première, et on trouvera entr'elles et les puissances du polynome $dx + dy + dz + dt + \text{etc.}$, la même analogie qu'on a remarquée (n° 31.) entre les différentielles des fonctions de deux variables et les puissances du binome $dx + dy$. Il suit de cette analogie que tous les termes seront homogènes en dx, dy, dz, dt, etc., et du dégré marqué par l'exposant de leur ordre; et enfin que si on substitue dx, dy, dz, dt, etc. à h, k, l, g, etc. on aura encore pour le développement de u, dans cette hypothèse,

$$u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \text{etc.};$$

ce qui fait voir que les remarques du n° 34 doivent être étendues aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Nous terminerons ici ce qui regarde les fonctions explicites, pour passer à la recherche des différentielles des fonctions *implicites*, ou données seulement par des équations.

De la différentiation des équations.

40. Si on a entre les deux inconnues x et y, l'équation $f(x,y) = 0$, il est évident que la valeur de l'une d'elles étant donnée ou prise arbitrairement, celle de l'autre sera déterminée. La seconde est donc une fonction de la première et réciproquement. Il suit de là que si x, par exemple, reçoit un accroissement représenté par h, y doit aussi éprouver un changement subordonné à celui de x. En désignant par k ce changement, qui ne peut être qu'une augmentation ou une diminution, il viendra $y \pm k$ au lieu de y: mais comme le calcul redresse toujours les fausses suppositions faites dans les signes, nous écrirons seulement $y + k$, parce que dans le cas où la valeur de y diminueroit lorsque celle de x augmente, on trouveroit alors k négatif.

Cela posé, les quantités $x+h$ et $y+k$ étant de nouvelles valeurs correspondantes de x et de y, elles doivent satisfaire aussi à l'équation proposée, c'est-à-dire qu'on doit avoir encore $f(x+h, y+k)=0$. Mais par l'hypothèse, x et y satisfont à l'équation primitive $f(x,y)=0$; la précédente ne renferme donc réellement que deux inconnues h et k, dont l'une sera déterminée lorsqu'on aura assigné une valeur à l'autre.

Maintenant si nous considérons y comme une fonction de x, nous aurons, par le théorême du n° 12,

$$y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc. au lieu de } y,$$

lorsque x devient $x+h$; et en représentant les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc., par y', y'', y''' etc., le changement arrivé dans la valeur de y sera $\frac{y'h}{1}+\frac{y''h^2}{1.2}+\frac{y'''h^3}{1.2.3}+$etc. Cette série étant substituée au lieu de k dans l'équation $f(x+h, y+k)=0$, la rendroit identique indépendamment d'aucune valeur particulière de h, si les coefficiens y', y'', y''' etc., étoient exprimés conformément à la nature de la fonction y; mais en faisant usage de la formule du n° 25, on peut, quelle que soit la composition de la fonction désignée par la caractéristique f, développer $f(x+h, y+k)$ suivant les puissances entières et positives de h et de k; mettant ensuite au lieu des puissances de k, celles de la série $\frac{y'h}{1}+\frac{y''h^2}{1.2}+\frac{y'''h^3}{1.2.3}+$etc., on aura nécessairement pour résultat une expression de la forme $f(x,y)+P_1h+P_2h^2+P_3h^3+$etc. $=0$; P_1, P_2, P_3, etc., étant des fonctions connues de x, y, y', y'' etc. Or d'après ce qui a été dit ci-dessus, l'accroissement h doit rester indéterminé puisqu'il peut être pris arbitrairement, il faudra donc qu'on ait en même-temps

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y)=0 \\ P_1=0 \\ P_2=0 \\ P_3=0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

La première de ces équations étant la proposée elle-même, ne nous

apprend rien de nouveau; ce sont les suivantes qui déterminent les coefficiens y', y'', y''', etc., et nous allons montrer comment on peut les déduire les unes des autres, sans qu'il soit besoin de développer immédiatement $f(x+h, y+k)$.

41. La manière dont on a démontré dans le n°. 5, que chacun des coefficiens X_1, X_2, X_3 etc. des diverses puissances de k, dans le développement de $f(x+k)$ se dérive de celui qui le précède, par un procédé uniforme, s'applique au cas présent.

En effet on doit encore ici, comme dans l'article cité, trouver le même résultat, soit qu'on écrive $h+h'$ au lieu de h dans la série $f(x,y)+P_1 h+P_2 h^2+P_3 h^3+$ etc., soit qu'on suppose que x devienne $x+h'$ dans les fonctions $f(x,y)$, P_1, P_2, P_3 etc.; car l'une et l'autre substitution revient également à changer x en $x+h+h'$, dans y et dans $f(x,y)$.

Mais lorsque x devient $x+h'$

y, considéré comme fonction de x, devient $y+\frac{y'h'}{1}+\frac{y''h'^2}{1.2}+$ etc.

y' . . . . . $y'+\frac{y''h'}{1}+\frac{y'''h'^2}{1.2}+$ etc.

y'' . . . . . $y''+\frac{y'''h'}{1}+\frac{y^{IV}h'^2}{1.2}+$ etc.

etc.

or il est facile de voir qu'en mettant ces nouvelles valeurs dans une fonction quelconque des quantités x, y, y', y'' etc., elle prendra la forme d'une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de h'. Si on en doutoit, il suffiroit pour s'en convaincre d'observer qu'en supposant que x, y, y', y'' etc., deviennent respectivement $x+h'$, $y+k$, $y'+k'$, $y''+k''$ etc., on pourra toujours (n° 38) développer cette fonction suivant les puissances entières et positives des quantités h', k, k', k'' etc.; mais dans les hypothèses précédentes k, k', k'' etc., représentent des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de h'; on aura donc d'après ces considérations,

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)+P_1 h'+P_2 h'^2+\text{ etc.} \\ P_1+P_1' h'+P_1'' h'^2+\text{ etc.} \\ P_2+P_2' h'+P_2'' h'^2+\text{ etc.} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ au lieu de } \left\{\begin{array}{l} f(x,y) \\ P_1 \\ P_2 \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

faisant

faisant sur ces développemens les mêmes opérations et les mêmes raisonnemens qu'on a faits sur leurs analogues dans l'article rappellé ci-dessus, on trouvera que la *dérivation* successive des coefficiens P_1, P_2, P_3 etc. est la même que celle des coefficiens X_1, X_2, X_3 etc.; c'est-à-dire que si on désigne la fonction $f(x, y)$ par u et qu'on nomme u' le coefficient de la première puissance de h dans le développement de u qui nait de la substitution de $x+h$ pour x, u'' le même coefficient à l'égard de u'; u''' le même coefficient à l'égard de u'' et ainsi de suite, on aura

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \frac{u'}{1} \\ P_2 = \frac{u''}{1.2} \\ P_3 = \frac{u'''}{1.2.3} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{d'où on tire} \left\{\begin{array}{l} u' = 0 \\ u'' = 0 \\ u''' = 0 \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

42. Rien n'est plus facile que de former les quantités u', u'', u''' etc.; car si on désigne par les lettres h et k, les changemens arrivés à x et y dans la fonction $f(x, y)$ ou u, on aura (n° 32)

$$f(x+h, y+k) = u + \left.\begin{array}{l} \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + \text{etc.}\right) \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} \text{mais puisque } k \text{ représente}$$

la série $\frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1.2}$ etc. et qu'on ne cherche que le coefficient du terme qui seroit multiplié par la première puissance de h, il faudra se borner, dans le développement rapporté ci-dessus, aux termes où les accroissemens h et k ne montent qu'au premier dégré et ne se multiplient point entr'eux, et en même-temps ne tenir compte que du premier terme de la valeur de k: avec ces attentions on trouvera $\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}y'\right)h$ et par conséquent $u' = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}y' = 0$.

Le coefficient y' n'étant qu'au premier dégré dans cette équation, il sera toujours possible d'en trouver la valeur en x et en y, lorsqu'on aura formé les quantités $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ en différentiant la fonction u par

rapport à chacune des variables x et y, regardées comme indépendantes l'une de l'autre. Mais la différentielle de u prise sous ce point de vue est $\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$ (n° 28); si on la divise par dx et qu'on égale le résultat à zéro, il viendra $\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=0$. En comparant cette équation avec $\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}y'=0$, on voit que $\frac{dy}{dx}$ est la même chose que y'.

Il suit de là que *pour trouver le coefficient différentiel du premier ordre d'une fonction implicite* y, *donnée par une équation entre deux variables* x *et* y, *il faut différentier cette équation comme si les variables étoient indépendantes l'une de l'autre, égaler ensuite à zéro le résultat qu'on obtiendra et prendre la valeur de* $\frac{dy}{dx}$.

On remarquera aussi que y étant considéré comme une fonction de x, on doit avoir $dy=y'dx$ et que par conséquent dy ne représente plus alors l'accroissement hypothétique de la variable y, mais la différentielle de la fonction implicite désignée par cette variable. Au reste ces deux acceptions rentrent l'une dans l'autre, lorsque y est indépendant de x; car dans ce cas la différence entre deux de ses valeurs consécutives n'est pas susceptible de développement, et elle ne renferme qu'un seul terme qui exprime à la fois la différence et la différentielle.

43. Pour former u'', il faut observer que u' renferme outre les deux variables x et y, le coefficient différentiel du premier ordre y' qui, lorsque x devient $x+h$, se change en $y'+\frac{y''h}{1}+$ etc.; mais si on considère u' comme contenant trois variables x, y et y', et qu'on substitue $x+h, y+k, y'+k'$ au lieu de ces variables, on aura

$$u'+\frac{du'}{dx}h+\frac{du'}{dy}k+\frac{du'}{dy'}k'+\text{etc.}$$

si on met ensuite pour k et k' leur valeur dans l'hypothèse où y et y' sont considérés comme des fonctions de x, en se bornant ainsi que dans le n° précédent, aux premiers

termes $y'h$ et $y''h$, on trouvera pour le coefficient de la première puissance de h, $u'' = \frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy}y' + \frac{du'}{dy'}y'' = 0$.

Si on avoit pris la différentielle de u' en regardant les trois variables x, y et y' comme indépendantes, on auroit eu

$$du' = \frac{du'}{dx}dx + \frac{du'}{dy}dy + \frac{du'}{dy'}dy';$$

divisant par dx et égalant à zéro, il seroit venu

$$\frac{du}{dx} + \frac{du'}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du'}{dy'}\frac{dy'}{dx} = 0;$$

équation qui rentre dans la précédente, en supposant que

$\left.\begin{matrix} dy = y'dx \\ dy' = y''dx \end{matrix}\right\}$, ou en regardant y comme une fonction de x.

On obtiendra donc l'équation qui exprime la relation entre le coefficient différentiel du premier ordre et celui du second, en différentiant celle qui détermine le premier coefficient, et en regardant ce coefficient lui-même comme une nouvelle variable.

44. Soit en général U renfermant x, y, y', y'', y''' etc.; pour trouver le coefficient de la première puissance de h, lorsqu'on développe cette fonction après avoir substitué

$$\left.\begin{matrix} x+h \\ y+\frac{y'h}{1}+\text{etc.} \\ y'+\frac{y''h}{1}+\text{etc.} \\ \text{etc.} \end{matrix}\right\} \text{au lieu de } \left\{\begin{matrix} x \\ y \\ y' \\ \text{etc.} \end{matrix}\right.,$$

on supposera d'abord que les variables x, y, y', y'', y''' etc. sont indépendantes les unes des autres. En désignant par h, k, k', k'', k''' etc. les changemens respectifs qu'elles ont subi et en se bornant, comme on le doit, aux termes dans lesquels les quantités h, k, k' etc. ne passent pas le premier dégré, U deviendra

$$U + \frac{dU}{dx}h + \frac{dU}{dy}k + \frac{dU}{dy'}k' + \frac{dU}{dy''}k'' + \frac{dU}{dy'''}k''' + \text{etc.}$$

Mais en n'ayant égard qu'à la première puissance de h, il faudra mettre $y'h$ pour k, $y''h$ pour k', $y'''h$ pour k'', $y''''h$ pour k''' et

ainsi de suite; le coefficient de h après ces substitutions sera donc

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}y' + \frac{dU}{dy'}y'' + \frac{dU}{dy''}y''' + \frac{dU}{dy'''}y^{\text{IV}} + \text{etc.}$$

Il suit de là que si $U=0$, est l'équation qui exprime la relation entre x, y et les coefficiens y', y'', y''' etc.,

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}y' + \frac{dU}{dy'}y'' + \frac{dU}{dy''}y''' + \frac{dU}{dy'''}y^{\text{IV}} + \text{etc.} = 0.$$

sera celle qui en résultera pour l'ordre immédiatement supérieur, et contiendra un coefficient différentiel de plus. En effet, on voit que si y''' *étoit le coefficient de l'ordre le plus élevé qui se trouvât dans* $U=0$, l'équation que nous venons d'obtenir renfermeroit y^{IV}. Il est à propos d'observer que le dernier coefficient différentiel introduit ne paroît jamais qu'à la première puissance, et que par conséquent on peut toujours le déterminer en x, y, y', y'', y''' etc., sans rencontrer des imaginaires dans l'expression de sa valeur.

La différentiation de la fonction U effectuée en regardant x, y, y', y'' etc. comme autant de variables indépendantes donneroit, après avoir divisé par dx et égalé le résultat à zéro,

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dU}{dy'}\frac{dy'}{dx} + \frac{dU}{dy''}\frac{dy''}{dx} + \frac{dU}{dy'''}\frac{dy'''}{dx} = 0;$$

ou, d'après les relations qui existent entre les quantités y, y', y'', y''' etc. (n° 11), la même équation que tout à l'heure.

On peut donc conclure de ce qui précéde que *les équations qui expriment les relations des coefficiens différentiels d'une fonction implicite donnée par une équation entre deux variables, se déduisent les unes des autres par des différentiations successives, en traitant chacun de ces coefficiens comme une nouvelle variable.*

45. Le coefficient différentiel du premier ordre étant représenté à l'ordinaire par $\frac{dy}{dx}$, sa différentielle sera $\frac{d^2y}{dx}$, puisque dx tenant ici la place de l'accroissement arbitraire h, peut être regardé comme invariable. Par la même raison, la différentielle du coefficient du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera $\frac{d^3y}{dx^3}$; et ainsi des autres. Il faudra donc considérer les quantités x, y, dy, d^2y, d^3y etc. comme autant de variables par-

ticulières, différentier l'équation qui les contient par rapport à chacune d'elles, et prendre la somme des résultats partiels (n° 39). Les exemples suivans acheveront d'éclaircir ces règles, et feront connoître la nature des *équations différentielles* : on appelle ainsi toute équation qui renferme des différentielles ou des coefficiens différentiels, et je nommerai *Equations primitives* celles qui n'en contiennent point.

46. Soit l'équation $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0$; en différentiant le premier membre par rapport à y et par rapport à x, on trouve

$$2y\,dy - 2mx\,dy - 2my\,dx + 2x\,dx = 0,$$

ou $$(y - mx)\,dy - (my - x)\,dx = 0,$$

en supprimant le facteur commun 2. Si on regarde y comme une fonction de x, on aura, pour l'expression de sa différentielle,

$$dy = \frac{(my - x)\,dx}{y - mx}$$ et le coefficient différentiel sera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx}.$$

On peut chasser y de l'un et de l'autre de ces résultats, à l'aide de l'équation proposée; car en la résolvant, on a $y = mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}$; substituant ces valeurs dans l'expression de dy, il viendra

$$dy = \left\{\frac{-x + m^2x \pm m\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}{\pm\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}\right\}dx = m\,dx \pm \left\{\frac{-x + m^2x}{\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}\right\}dx.$$

On voit aisément que les deux valeurs de dy qu'on tireroit de là sont les différentielles respectives des valeurs de y contenues dans $y = mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}$.

Si au lieu de résoudre l'équation proposée pour en tirer la valeur de y, on avoit éliminé cette variable, entre les deux équations

$$\left.\begin{aligned} y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 &= 0 \\ (y - mx)\,dy - (my - x)\,dx &= 0 \end{aligned}\right\}$$

on auroit eu d'abord, en vertu de la seconde,

$$y = \frac{x(m\,dy - dx)}{dy - m\,dx};$$

substituant dans la première, il seroit venu, après les réductions,

$$(x^2 - a^2 - m^2x^2)dy^2 - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^2)dx\,dy + (x^2 - m^2x^2 - a^2m^2)dx^2 = 0.$$

Cette dernière équation étant résolue par rapport à dy, donneroit les valeurs trouvées ci-dessus. On en pourroit tirer aussi immédia-

rement le coefficient différentiel, il suffiroit pour cela de la diviser par dx^2; on auroit alors

$$(x^3 - a^3 - m^3 x^3)\frac{dy^2}{dx^2} - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^3)\frac{dy}{dx} + x^2 - m^2x^4 - a^2m^2 = 0 :$$

en dégageant la seconde puissance du coefficient différentiel, exprimée par $\frac{dy^2}{dx^2}$, il viendra

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - m^2x^4 - a^2m^2}{x^3 - a^3 - m^3x^3} = 0.$$

47. Il est facile d'appliquer ce qui précède, à des exemples plus compliqués ou dans lesquels les variables monteroient à un dégré plus élevé. Supposons qu'on ait $y^3 - 3axy + x^3 = 0$; la différentiation donnera

$$3y^2dy - 3axdy - 3aydx + 3x^2dx = 0,$$

et par conséquent $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

La fonction y, dans cet exemple, étant donnée par une équation du troisième dégré, doit avoir trois valeurs, et en les substituant successivement dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$ on obtiendra un pareil nombre de valeurs pour le coefficient différentiel. On voit en général que ce coefficient aura toujours un nombre de valeurs égal à celui dont la fonction y est susceptible dans l'équation proposée: il en sera de même à l'égard de la différentielle.

Si on éliminoit y entre les deux équations

$$\left.\begin{aligned} y^3 - 3axy + x^3 &= 0 \\ y^2dy - axdy - aydx + x^2dx &= 0 \end{aligned}\right\}$$

on auroit, pour résultat, une équation du troisième dégré par rapport à dy, qui renfermeroit les trois valeurs dont cette différentielle est susceptible.

48. Ayant trouvé l'expression de dy ou celle de $\frac{dy}{dx}$, on parviendra, en différentiant de nouveau, à celles de d^2y et de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Nous nous servirons encore de l'équation $y^3 - 3axy + x^3 = 0 \ldots (u)$ pour faire entendre ce que nous avons à dire sur ce sujet.

La différentielle première de cette équation étant, comme on l'a vu plus haut, $y^2dy - axdy - aydx + x^2dx = 0 \ldots (du)$, pour passer à la différentielle seconde, il faut, d'après la régle établie n° 43, différentier par rapport à dy, à y et à x. En opérant ainsi, on aura

$$y^2d^2y - axd^2y + 2ydydy - adydx - adxdy + 2xdx^2 = 0,$$

et en réduisant il viendra

$$(y^2 - ax)d^2y + 2ydy^2 - 2adxdy + 2xdx^2 = 0 \ldots (d^2u).$$

Telle est la différentielle seconde de l'équation proposée; si on la combine avec la différentielle première, on pourra éliminer dy et le résultat donnera l'expression de d^2y en x, dx et y. On chassera si on veut la fonction y, au moyen de l'équation proposée.

En divisant l'équation (d^2u) par dx^2, elle prend la forme

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + 2x = 0,$$

et ne renferme plus que les coefficiens différentiels $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{dy}{dx}$.

Mettant au lieu de $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, tirée de (du), il viendra

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\right)^2 - 2a\left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\right) + 2x = 0,$$

et en réduisant au même dénominateur,

$$(y^2 - ax)^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y + 2a^3xy = 0;$$

mais la quantité $2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y$, n'est autre chose que $(y^3 - 3axy + x^3).2xy$, elle est donc nulle en vertu de l'équation proposée, et par conséquent on a $(y^2 - ax)^3\frac{d^2y}{dx^2} + 2a^3xy = 0$,

ou $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}$.

En différentiant (d^2u) par rapport à d^2y, dy, y et x, on formera la différentielle troisième (d^3u), et on en tirera la valeur de d^3y, lorsqu'on aura éliminé d^2y et dy à l'aide des équations (du) et (d^2u); divisant le résultat par dx^3, on aura l'expression du coefficient

$\frac{d^3y}{dx^3}$. En continuant ainsi on parviendra aux différentielles ultérieures.

49. Quelle que soit l'équation $u = 0$, sa différentielle première sera $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0$, et par conséquent de la forme $M dx + N dy = 0$; sa différentielle seconde prise par rapport à x, y et dy, et en observant que $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ ne contiennent point dy, sera $\frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{2\,d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{du}{dy}d^2y = 0$, ou de la forme $P dx^2 + Q dx dy + R dy^2 + N d^2y = 0$; la différentielle troisième prise en différentiant par rapport à x, y, dy et d^2y sera

$$\frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + \frac{3\,d^3u}{dx^2\,dy}dx^2\,dy + \frac{3\,d^3u}{dx\,dy^2}dx\,dy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3 \left| \begin{matrix} + \frac{3\,d^2u}{dx\,dy}dx \\ + \frac{3\,d^2u}{dy^2}dy \end{matrix} \right| d^2y + \frac{du}{dy}d^2y = 0;$$

ou de la forme

$$S dx^3 + T dx^2 dy + V dx dy^2 + W dy^3 \left| \begin{matrix} + X dx \\ + Y dy \end{matrix} \right| d^2y + N d^2y = 0;$$

et ainsi de suite.

Toutes ces équations sont homogènes à l'égard des différentielles de y et des puissances de dx, en comparant dy à dx, d^2y à dx^2, d^3y à dx^3 etc.; par conséquent si on les divise respectivement par dx, dx^2, dx^3 etc. on aura les relations qui existent entre les coefficiens différentiels, et il viendra alors $M + N\frac{dy}{dx} = 0$

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} + N\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$S + T\frac{dy}{dx} + V\frac{dy^2}{dx^2} + W\frac{dy^3}{dx^3} + \left(X + Y\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + N\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

etc.

50. La remarque que nous avons faite (n° 15) sur les constantes qui disparoissent par la différentiation des fonctions, s'applique également aux équations. Si on avoit par exemple $y^2 = ax + b$, la différentielle $2y\,dy = a\,dx$ étant indépendante de b, appartiendroit à chacune

chacune des équations particulières qui résultent de la proposée, en donnant à b toutes les valeurs possibles.

Mais on peut aussi parvenir dans le cas actuel à une équation indépendante de a, quoique la différentiation n'ait point fait disparoître cette constante; il suffit pour cela d'éliminer a entre les deux équations $\left.\begin{array}{l} y^2 = ax + b \\ 2ydy = adx \end{array}\right\}$ et on trouvera $y^2 dx = 2xy\,dy + b\,dx$.

Quoique cette dernière équation ne soit pas la différentielle immédiate de la proposée, elle en dérive cependant de manière qu'étant divisée par dx, elle exprime la relation qui doit exister entre la variable x, la fonction y et le coefficient $\frac{dy}{dx}$, quel que soit a.

Si la constante qu'on élimine n'est pas au premier dégré dans l'équation proposée, le résultat qu'on obtiendra renfermera des puissances de dy et de dx supérieures à la première. Prenons pour exemple $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$; en différentiant on trouvera $ydy - a\,dy + x\,dx = 0$, d'où $a = \frac{y\,dy + x\,dx}{dy}$, et substituant dans la proposée, il viendra, après avoir ordonné par rapport à dy et divisé par dx^2, $(x^2 - 2y^2)\frac{dy^2}{dx^2} - 4xy\frac{dy}{dx} - x^2 = 0$: telle est la relation qui doit exister entre la variable x, la fonction y et son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, indépendamment d'aucune valeur particulière de la constante a.

En résolvant l'équation $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$, par rapport à a, on en auroit tiré $a = -y \pm \sqrt{2y^2 + x^2}$, et a se trouvant dégagé des variables x et y, la différentiation seule l'auroit fait disparoître; on auroit trouvé $-dy \pm \frac{2y\,dy + x\,dx}{\sqrt{2y^2 + x^2}} = 0$. En faisant évanouir le radical on s'assurera que cette équation est la même que celle que nous avons obtenue par l'élimination.

51. On peut faire disparoître autant de constantes qu'on voudra, en différentiant un nombre de fois égal à celui de ces constantes. Soit $y^2 = m(a^2 - x^2)$; on aura d'abord $y\,dy = -mx\,dx$; différentiant

de nouveau on trouvera $y\,d^2y + dy^2 + m\,dx^2 = 0$; substituant pour m sa valeur $\frac{-y\,dy}{x\,dx}$, tirée de l'équation précédente, et divisant par dx^2, il viendra $y\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\,\frac{dy^2}{dx^2} - x\,y\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; résultat indépendant des constantes m et a.

Dans les différentiations successives, il arrive quelquefois que la variable qu'on regarde comme indépendante, disparoît entièrement de l'équation proposée. En effet, si cette équation étoit de la forme $Y = ax + b$, Y désignant une fonction de y seul, on auroit $dY = a\,dx$ et à cause que dx est invariable, la différentielle seconde se réduiroit à $d^2Y = 0$. L'équation $Y = ax^2 + bx + c$ étant différentiée trois fois de suite, donnera $\left\{\begin{array}{l} dY = 2ax\,dx + b\,dx \\ d^2Y = 2a\,dx^2 \\ d^3Y = 0 \end{array}\right.$.

On pousseroit ces considérations aussi loin qu'on voudroit sur des équations de la forme précédente.

52. On peut aussi, par des différentiations répétées, faire disparoître les fonctions irrationnelles et les fonctions transcendantes qui seroient contenues dans une équation.

Soit d'abord l'équation $y = (a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}}$; si on en prend la différentielle, on trouvera

$$dy = \frac{m}{n}(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}-1}\,2x\,dx = \frac{m\,(a^2+x^2)^{\frac{m}{n}}}{n\,a^2+x^2}.2x\,dx,$$ et en mettant pour $(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}}$ sa valeur y, il viendra $dy = \frac{2myx\,dx}{n(a^2+x^2)}$; résultat dans lequel l'irrationnelle $(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}}$ ne se trouve plus.

Si l'équation proposée renfermoit un plus grand nombre de fonctions irrationnelles, on les feroit disparoître également en différentiant plusieurs fois de suite. Ce procédé est fondé sur ce que les irrationnelles contenues dans une équation se retrouvent dans ses différentielles, mais à des puissances moindres d'une, de deux ou trois unités etc., et que par conséquent on peut les traiter comme des inconnues particulières et les éliminer lorsqu'on a obtenu un nombre

d'équations suffisant : si on avoit par exemple $P^m + a\,Q^n = b$, P et Q étant des fonctions rationnelles de x et de y, on trouveroit en différentiant deux fois

$$m\,P^{m-1}\,dP + n\,a\,Q^{n-1}\,dQ = 0$$

$$m(m-1)\,P^{m-2}\,dP^2 + m\,P^{m-1}\,d^2P + n(n-1)\,a\,Q^{n-2}\,dQ^2 + n\,Q^{n-1}\,d^2Q = 0 \quad (*)$$

en mettant ces équations sous la forme suivante

$$m\,P^m\,\frac{dP}{P} + n\,a\,Q^n\,\frac{dQ}{Q} = 0$$

$$m(m-1)\,P^m\,\frac{dP^2}{P^2} + m\,P^m\,\frac{d^2P}{P} + n(n-1)\,a\,Q^n\,\frac{dQ^2}{Q^2} + n\,a\,Q^n\,\frac{d^2Q}{Q} = 0$$

et en les combinant avec la proposée, il sera facile d'éliminer P^m et Q^n.

53. A l'égard des fonctions transcendantes, il y en a que la différentiation fait disparoître immédiatement ; l'équation $a\,l\,P - A(\tan = Q) = 0$, par exemple, étant différentiée, donne sur le champ $\frac{a\,dP}{P} - \frac{b\,dP}{1+P^2} = 0$ (n°s 20 et 29) et se trouve par-conséquent délivrée de transcendantes.

En général chaque différentiation fera disparoître une transcendante, soit immédiatement, soit en ayant recours à l'élimination.

Supposons qu'on ait $R \sin P + e^Q \cos P = a^2$: en différentiant il viendra $R\,dP \cos P + dR \sin P + e^Q\,dQ \cos P - e^Q\,dP \sin P = 0$; mais on pourra chasser $\cos P$ au moyen de sa valeur $\sqrt{1-\sin P^2}$ et on éliminera ensuite $\sin P$. Le résultat qu'on obriendra ne renfermera plus que la transcendante e^Q ; et en différentiant de nouveau, on fera disparoître celle-ci comme l'autre.

54. On a vu par ce qui précéde comment une équation différentielle pouvoit répondre à une infinité d'équations primitives ; l'inverse a lieu également, et il existe aussi une infinité d'équations différentielles à chacune desquelles la même équation primitive pout satisfaire. En effet, si on conçoit que l'équation quelconque $u = 0$ soit résolue par rapport à y, et que la valeur de y et la différentielle de cette valeur

(*) Il est évident qu'en général dP et dQ doivent contenir x, y, dx et dy ; il faut donc les traiter comme de nouvelles fonctions de ces quantités, et par conséquent les différentier à leur tour.

soient substituées dans $du = o$, cette dernière équation deviendra identique ; le produit $M\,du$ sera donc égal à zéro quel que soit le facteur M, et on aura la nouvelle équation $M\,du = o$. On voit encore par là que l'équation $M\,du + M'u = o$ ne seroit qu'une conséquence de la proposée ; qu'on auroit de même
$M\,d^2u + M'\,du + M''u = o$ et ainsi de suite, quels que fussent les facteurs M, M', M'' etc. J'observerai cependant que dans le Calcul différentiel on ne rencontre jamais que des expressions homogènes par rapport à dx, dy, d^2x, d^2y etc. (n° 49), d'où il suit que si le facteur M ne contient point de différentielles, le facteur M' sera nécessairement du premier ordre, le facteur M'' du second, etc.

55. Dans une équation à deux variables x et y, on peut prendre celle qu'on voudra pour fonction de l'autre. Jusqu'ici nous avons considéré y comme une fonction de x ; renversons maintenant la question et regardons x comme une fonction de y. La différentielle de l'équation $u = o$ étant représentée de même que dans le n° 49, par $M\,dx + N\,dy = o$, on en tirera, en divisant par dy,

$M\frac{dx}{dy} + N = o : \frac{dx}{dy}$ exprimera le coefficient différentiel de la fonction x, et sa valeur sera précisément l'inverse de celle du coefficient $\frac{dy}{dx}$, relatif à l'hypothèse de y fonction de x.

56. L'équation $M\,dx + N\,dy = o$ est également la différentielle de la proposée soit qu'on regarde y comme fonction de x, ou x comme une fonction de y, parce que pour y arriver on a opéré de la même manière par rapport à chacune de ces quantités ; mais il n'en est pas de même à l'égard de la différentielle seconde. Lorsqu'on regarde x comme dépendant de y, alors il faut différentier $M\,dx + N\,dy = o$ par rapport à y, x et dx, et on peut traiter dy comme un accroissement arbitraire et constant puisqu'il appartient à une variable indépendante. En opérant ainsi on trouve un résultat de la forme
$M\,d^2x + P\,dx^2 + Q\,dx\,dy + R\,dy^2 = o$, ou en divisant par dy^2

$M\frac{d^2x}{dy^2} + P\frac{dx^2}{dy^2} + Q\frac{dx}{dy} + R = o$; équation qui exprime

la relation des coefficiens différentiels $\frac{d^2x}{dy^2}$ et $\frac{dx}{dy}$ de la fonction x.

Si on la compare avec sa correspondante dans le n° 49; on verra que les trois derniers termes de l'une sont les mêmes que les trois premiers de l'autre et que la différence ne consiste que dans les termes $M\frac{d^2x}{dy^2}$ et $N\frac{d^2y}{dx^2}$, dont le premier est particulier à l'hypothèse de x fonction de y, et le second à celle de y fonction de x. Les quantités M et N ne se trouvent à la fois que dans la différentielle première; et par conséquent si on ne connoissoit pas cette différentielle et qu'on n'eut sous les yeux qu'une des différentielles secondes, celle qui est relative à y, par exemple, il semble qu'on ne pourroit pas en déduire l'autre, puisque rien n'indiqueroit le terme qui devroit remplacer $N\frac{d^2y}{dx^2}$. Mais on levera cette difficulté en faisant usage de la relation qui existe entre les coefficiens différentiels pris dans l'une des hypothèses et leurs correspondans dans l'autre.

Nommant y', y'', y''' etc. les coefficiens différentiels de la fonction y, et x', x'', x''' ceux de la fonction x, nous aurons (n°s 9 et 10)

$$\left.\begin{array}{l} dy = y'\,dx \\ dy' = y''\,dx \\ dy'' = y'''\,dx \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{et} \left\{\begin{array}{l} dx = x'\,dy \\ dx' = x''\,dy \\ dx'' = x'''\,dy \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Déjà pour le premier ordre nous avons trouvé

$$\left.\begin{array}{l} M + N\frac{dy}{dx} = 0 \\ M\frac{dx}{dy} + N = 0 \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l} M + Ny' = 0 \\ Mx' + N = 0 \end{array}\right.$$

Il suit de là que $x' = \frac{1}{y'}$, ou $x'\,y' = 1$.

Mais puisque y' est implicitement une fonction de x, x' sera aussi une fonction de x, on aura donc $d\,x' = d.\frac{1}{y'} = -\frac{dy'}{y'^2}$ mettant pour dx' et dy' leur valeur prise dans les équations précé-

dentes, il viendra $x'' dy = -\frac{y'' dx}{y'^2}$, d'où on tirera

$x'' = -\frac{y''}{y'^3}\frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{y'^3}$, à cause de $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$. Cette équation donnera l'expression de x'', lorsque celles de y' et de y'' seront connues, et il en résultera aussi $y'' = -x'' y'^3$; substituant cette valeur dans $P + Qy' + Ry'^2 + Ny'' = 0$, il viendra

$P + Qy' + Ry'^2 - Nx'' y'^3 = 0$, remettant $\frac{dy}{dx}$ au lieu de y', $\frac{d^2x}{dy^2}$ au lieu de x'', on trouvera $P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} - N\frac{dy^3}{dx^3}\frac{d^2x}{dy^2} = 0$; et en multipliant par dx^3 on obtiendra

$$P dx^3 + Q dx dy + R dy - N\frac{dy}{dx} d^2x = 0;$$

cette équation est équivalente à

$$M d^2x + P dx^2 + Q dx dy + R dy^2 = 0,$$

comme on peut s'en assurer en chassant $N dy$ à l'aide de $M dx + N dy = 0$.

57. L'équation $x'' = -\frac{y''}{y'^3}$, nous donnera $dx'' = -d.\frac{y''}{y'^3}$, puisque y', y'' et par conséquent x'' sont des fonctions implicites de x. En effectuant la différentiation indiquée dans le second membre et mettant au lieu de dx'', dy', dy'', leurs valeurs $x''' dy$, $y'' dx$, $y''' dx$, on trouvera $x''' = \frac{-y' y''' + 3y''^2}{y'^4}$.

Cette marche est facile à continuer pour les ordres supérieurs, et on verra peut-être avec plaisir comment on peut arriver aux mêmes résultats en partant des développemens dont les coefficiens y', y'', etc., x', x'' etc. tirent leur origine.

Il suit de la liaison qui existe entre les valeurs de x et de y que lorsque x prend un accroissement h, y éprouve un changement k représenté par la série $\frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1.2} + \frac{y'''h^3}{1.2.3} +$ etc.; par la même raison y devenant $y+k$, x éprouvera un changement représenté par $\frac{x'k}{1} + \frac{x''k^2}{1.2} + \frac{x'''k^3}{1.2.3} +$ etc.

on aura donc $k = \frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1.2} + \frac{y'''h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$

ou $h = \frac{x'k}{1} + \frac{x''k^2}{1.2} + \frac{x'''k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$

selon qu'on voudra développer par rapport à k ou par rapport à h. Mais en faisant usage de la méthode, du retour des suites (*Intr.* n° 45) on déduira de la première série une valeur de h ordonnée suivant les puissances de k, et il viendra

$$h = \frac{1}{y'}k - \frac{y''}{y'^3}\frac{k^2}{1.2} + \left(\frac{3y''^2 - y'y'''}{y'^5}\right)\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.};$$

comparant ce résultat avec la seconde série, on aura

$$x' = \frac{1}{y'}$$
$$x'' = -\frac{y''}{y'^3}$$
$$x''' = \frac{3y''^2 - y'y'''}{y'^5}$$
etc.

Au moyen de ces valeurs on trouvera tous les coefficiens différentiels relatifs à x, lorsqu'on connoîtra ceux de y, et on pourra transformer une équation différentielle prise en regardant y comme une fonction de x dans une autre où x seroit regardé comme une fonction de y et réciproquement.

58. Pour passer du premier ordre au second dans l'hypothèse de y fonction de x, on a différentié en regardant dx comme une constante; si on eut fait varier à la fois dx et dy, on auroit rétabli la symétrie entre ces quantités, mais alors le coefficient différentiel du second ordre, y'', n'auroit plus été représenté par $\frac{d^2y}{dx^2}$. D'après sa formation on a $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, et en différentiant $\frac{dy}{dx}$ comme une fraction, dont le numérateur et le dénominateur varient simultanément, il viendra $y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$; substituant cette valeur dans

l'équation $P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} + N\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, on trouvera

$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} + N\frac{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^3} = 0$, ou en multipliant par dx^3,

$$P\,dx^3 + Q\,dy\,dx^2 + R\,dy^2dx + N\,dx\,d^2y - N\,dy\,d^2x = 0.$$

Si on met dans le terme $N\,dy\,d^2x$ au lieu de $N\,dy$ sa valeur $-M\,dx$, on trouvera, en divisant par dx,

$$P\,dx^2 + Q\,dx\,dy + R\,dy^2 + M\,d^2x + N\,d^2y = 0;$$

résultat qu'on peut déduire immédiatement de l'équation $M\,dx + N\,dy = 0$, en la différentiant par rapport à x et dx, y et dy, et qui se change dans l'une ou l'autre des différentielles secondes, $\left.\begin{matrix} P\,dx^2 + Q\,dx\,dy + R\,dy^2 + N\,d^2y = 0 \\ P\,dx^2 + Q\,dx\,dy + R\,dy^2 + M\,d^2x = 0 \end{matrix}\right\}$, selon qu'on fait d^2x ou $d^2y = 0$.

59. Il suit de ce qui précède, 1° qu'on peut différentier une équation du premier ordre d'une manière symétrique par rapport aux deux variables, et à leurs différentielles, et que le résultat qu'on obtiendra étant égalé à zéro, donnera l'expression des coefficiens différentiels du second ordre; il aura de plus cet avantage qu'on y pourra regarder à volonté y comme une fonction de x, ou x comme une fonction de y. Il faudra seulement observer que dans le premier cas, le coefficient du second ordre est représenté par $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$, et dans le second par $\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} = \frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dy^3}$.

2.° Que si on substitue la première des valeurs précédentes au lieu de $\frac{d^2y}{dx^2}$, dans une équation différentielle du second ordre, où dx est supposé constant, le résultat sera équivalent à celui qu'on auroit obtenu en faisant varier à la fois x, y, dx et dy. Si on vouloit que dy fut constant dans la nouvelle équation, il suffiroit de remplacer dans la proposée $\frac{d^2y}{dx^2}$ par $-\frac{dy\,d^2x}{dx^3}$.

On

On changera de même une équation différentielle du second ordre où dy est constant dans une autre où il cessera de l'être, en mettant $\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dy^3}$ à la place de $\frac{d^2x}{dy^2}$, ou seulement $-\frac{dx\,d^2y}{dy^3}$, si on veut que dx soit constant.

60. Il est aisé de vérifier que les quantités

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} \text{ et } \frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dy^3},$$

qui sont les valeurs respectives de y'' et de x'', satisfont à l'équation $y'' + x''y'^3 = 0$ (n° 56); car à cause de $y' = \frac{dy}{dx}$, il vient $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} + \frac{dy^3}{dx^3}\left(\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dy^3}\right) = 0$, équation identique.

Il faut remarquer aussi qu'en faisant varier dx on n'a plus $d^2y = y''dx^2$ comme dans le n° 10. En effet, on regarde alors dy comme une fonction de deux variables indépendantes y' et dx et on a $d^2y = dy'\,dx + y'\,d^2x$; mais $dy' = y''dx$, donc $d^2y = y''dx^2 + y'd^2x$: on aura pareillement $d^2x = x''dy^2 + x'd^2y$. Ces deux équations donnent

$$\left.\begin{aligned} d^2y &= \frac{y''dx^2 + y'x''dy^2}{1 - x'y'} \\ d^2x &= \frac{x''dy^2 + x'y''dx^2}{1 - x'y'} \end{aligned}\right\} \text{d'où on tire} \left\{\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{y'' + y'^3x''}{1 - x'y'} \\ \frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{x'' + x'^3y''}{1 - x'y'} \end{aligned}\right.$$

mais en vertu des relations trouvées entre x', y', et y'', (n° 56) on a $1 - x'y' = 0$, $y'' + y'^3x'' = 0$, $x'' + x'^3y'' = 0$, donc $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}$, $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{0}{0}$; c'est-à-dire que ces deux quantités sont indéterminées.

Ces résultats étoient faciles à prévoir; car différentier $y'\,dx$ par rapport à y' et dx, c'est supposer que y' et dx deviennent respectivement $y' + dy'$, $dx + d^2x$, et prendre les deux premiers termes du changement qu'éprouve cette fonction; mais lorsqu'on envisage y comme une fonction de x, dx est arbitraire, d^2x le sera donc aussi.

et par conséquent $\frac{d^2y}{dx^2} = y'' + y'\frac{d^2x}{dx^2}$ n'aura aucune valeur déterminée tant que le rapport $\frac{d^2x}{dx^2}$ restera quelconque.

En raisonnant de même dans l'hypothèse où x seroit fonction de y, ce qui rendroit dy et d^2y arbitraires, on trouveroit que $\frac{d^2x}{dy^2} = x'' + x'\frac{d^2y}{dy^2}$ est pareillement indéterminé.

L'exemple suivant montrera comment on peut trouver l'expression du coefficient différentiel y'', dans une équation où on a fait varier simultanément dy et dx.

61. Soit l'équation $x^2 + y^2 = a^2$;

sa différentielle 1re est $x\,dx + y\,dy = 0$;

sa différentielle 2de, en faisant tout varier, $dx^2 + dy^2 + x\,d^2x + y\,d^2y = 0$;

on tirera de cette dernière équation $d^2y = \frac{-dx^2 - dy^2 - x\,d^2x}{y}$:

substituant cette valeur dans $y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$

on trouvera $y'' = \frac{-dx^3 - dx\,dy^2 - x\,dx\,d^2x - y\,dy\,d^2x}{y\,dx^3}$.

Il faudra chasser dy au moyen de la différentielle première; cette opération fera disparoître d^2x, qui étant une quantité arbitraire, ne doit point entrer dans la valeur de y''; en effet on voit que le coefficient de d^2x étant $-x\,dx - y\,dy$, s'évanouit en vertu de l'équation $x\,dx + y\,dy = 0$.

62. En général toute équation différentielle du second ordre entre deux variables x et y, dans laquelle on a fait varier à la fois dx et dy doit pouvoir se réduire à ne renfermer que x, y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$, puisqu'elle ne sauroit représenter autre chose que la relation qui existe entre les variables x, y et leurs coefficiens différentiels du premier et du second ordre. Supposons donc qu'on soit parvenu d'une manière quelconque à l'équation

$$M\,d^2x + N\,d^2y + P\,dx^2 + Q\,dx\,dy + R\,dy^2 = 0;$$

on y mettra $y'dx$ au lieu de dy, $y''dx^2 + y'd^2x$, au lieu de d^2y;

il viendra alors

$M d^2x + Ny'' dx^2 + N y' d^2x + P dx^2 + Q y' dx^2 + R y'^2 dx^2 = 0$

ou bien

$(M + Ny') d^2x + (Ny'' + P + Q y' + R y'^2) dx^2 = 0$:

pour que dx et d^2x disparoissent à la fois de cette équation, il faut qu'on ait $M + Ny' = 0$, c'est-à-dire $M dx + N dy = 0$. Cette condition peut être remplie de plusieurs manières:

1°. Lorsque l'équation $M dx + N dy = 0$ sera identique par elle-même; ce cas auroit lieu pour l'équation

$$xy dy d^2x - xy dx d^2y + y dy dx^2 - x dx dy^2 = 0;$$

car elle donne $M = xy dy$, $N = -xy dx$, et par conséquent $M dx + N dy = xy dy dx - xy dy dx = 0$.

2°. Lorsque la proposée sera la différentielle de $M dx + N dy = 0$; telle seroit l'équation particulière $x d^2x + y d^2y + dx^2 + dy^2 = 0$ qui donne $M dx + N dy = x dx + y dy$ et qui résulte de la différentiation de $x dx + y dy = 0$.

3°. Lorsque la proposée, quoique différente en apparence de l'équation qui résulte de la différentiation de $M dx + N dy = 0$, s'accorde cependant avec cette dernière. Pour donner un exemple de ce cas, prenons l'équation

$$x^3 d^2x + x^2 y d^2y + (a^2 - y^2) dx^2 + x^2 dy^2 = 0,$$

nous aurons alors

$M dx + N dy = x^3 dx + x^2 y dy = 0$ ou $x dx + y dy = 0$.

Si on différentie cette dernière équation en faisant tout varier, il viendra $x d^2x + y d^2x + dx^2 + dy^2 = 0$; multipliant ensuite par x^2 afin que les deux premiers termes soient les mêmes que dans la proposée, et retranchant l'une de l'autre on aura

$$(a^2 - y^2) dx^2 + x^2 dy^2 - x^2 dx^2 - x^2 dy^2 = 0,$$

ou en réduisant et en divisant par dx^2, $a^2 - y^2 - x^2 = 0$; équation dont la différentielle $x dx + y dy = 0$, est précisément celle que nous avons trouvée. Si on fait pour abréger $a^2 - y^2 - x^2 = u$, on transformera facilement l'équation proposée en $\frac{1}{2} x^2 u^2 u - u dx^2 = 0$ et on verra qu'elle doit être satisfaite par la supposition de $u = 0$, qui donne aussi $du = 0$, $d^2u = 0$.

Nous ferons remarquer que pour exprimer la manière dont les équations $\frac{1}{2} x^2 d^2u - u dx^2 = 0$ et $u = 0$, sont liées entr'elles, le

Analystes disent que *la première a lieu en même temps que la seconde :* on voit par là que des équations qui ont lieu en même temps sont des conséquences les unes des autres ; mais la phrase n'est pas toujours réciproque, ainsi on ne pourroit pas dire dans l'exemple ci-dessus que l'équation $u = 0$ a lieu en même temps que $\frac{1}{2} x^2 d^2 u - u d x^2 = 0$. car on verra dans la suite que cette dernière, en ne considérant que les variables u et x, est plus générale et peut être satisfaite par une relation entre u et x : on peut déjà s'assurer d'une exception de ce genre sur l'équation $d^2 u - u d x^2 = 0$, que la supposition de $u = 0$ rend identique, mais qui le devient aussi lorsqu'on a $u = a e^x + b e^{-x}$, quelles que soient d'ailleurs les constantes a et b.

Il ne faut pas confondre dans ce qui vient d'être dit, l'équation $\frac{1}{2} x^2 d^2 u - u d x^2 = 0$, avec

$$x^2 d^2 x + x^2 y d^2 y + (a^2 - y^2) d x^2 + x^2 d y^2 = 0,$$

quoique l'une ne soit qu'une transformation de l'autre. L'équation primitive d'où dérive la première étant prise dans toute la généralité qu'elle comporte ne satisferoit pas à la seconde. Les trois cas dans lesquels la condition $M d x + N d y = 0$ peut être remplie, et pour chacun desquels il existe une équation ptimitive en x et y qui satisfait à la proposée, différent entr'eux par rapport à la généralité de cette équation ; mais comme cet objet tient essentiellement au Calcul intégral, nous ne nous y arrêterons pas ici : nous terminerons cet article par un exemple dans lequel la condition $M d x + N d y = 0$ n'est pas remplie.

Soit l'équation $x^3 d^2 x + y^3 d^2 y + 6 x y d x d y = 0$; elle donnera $M = x^3$, $N = y^3$ et par conséquent on en tirera $x^3 d x + y^3 d y = 0$; différentiant et retranchant de la proposée, on aura

$$6 x y d x d y - 3 x^2 d x^2 - 3 y^2 d y^2 = 0,$$

ou $x^2 d x^2 - 2 x y d x d y + y^2 d y^2 = 0$, ou enfin $x d x - y d y = 0$.

Il faut donc voir maintenant si les équations $\left.\begin{array}{r} x^3 d x + y^3 d y = 0 \\ x d x - y d y = 0 \end{array}\right\}$ peuvent s'accorder entr'elles. La seconde donne $d y = \frac{x d x}{y}$ substituant dans la première il vient $x^3 y d x + y^3 x d x = 0$; en divisant par $x y d x$, on obtient $x^2 + y^2 = 0$; différentiant encore cette nouvelle équation on trouve $x d x + y d y = 0$ et mettant pour $d y$ sa

valeur, il vient $xy = 0$; équation qui ne peut avoir lieu conjointement avec $x^2 + y^2 = 0$, à moins qu'on n'ait $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$: il est donc impossible que la proposée résulte de la différentiation d'une équation entre deux variables x et y.

63. En passant du second au troisième ordre on introduit $d^2 y$ ou $d^2 x$, selon qu'on regarde y comme une fonction de x, ou x comme une fonction de y; le coefficient différentiel du troisième ordre est exprimé dans la première hypothèse par $\frac{d^3 y}{dx^3}$, et par $\frac{d^3 x}{dy^3}$, dans la seconde. Mais si on fait varier à la fois toutes les différentielles dx, dy, $d^2 x$, $d^2 y$, on aura un résultat qui conviendra également à l'une et à l'autre hypothèse. On observera seulement que l'expression des coefficiens différentiels doit être formée en faisant varier toutes ces quantités. Il faudra donc prendre pour y'' la valeur trouvée n° 58 et comme $y''' = \frac{dy''}{dx}$, on obtiendra ce dernier coefficient en différentiant y'' par rapport à dx, dy, $d^2 x$, $d^2 y$ et en divisant le résultat par dx; on aura ainsi

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = \frac{dx\, d^2 y - dy\, d^2 x}{dx^3}$$

$$y''' = \frac{dx^2\, d^3 y - 3\, dx\, d^2 x\, d^2 y + 3\, dy\, d^2 x^2 - dx\, dy\, d^3 x}{dx^5}$$

on trouveroit de la même manière les coefficiens analogues dans la supposition de y fonction de x.

Si on substitue les valeurs précédentes à la place de y', y'', y''' dans une équation différentielle du troisième ordre, formée en regardant dx comme constant, il viendra une équation équivalente à celle qu'on auroit trouvée en faisant tout varier, et si on fait $d^2 y$ et $d^3 y = 0$ dans cette dernière, le résultat qu'on obtiendra sera relatif à l'hypothèse de x considéré comme fonction de y.

64. Toute équation différentielle n'étant autre chose qu'une relation entre les variables x, y et les coefficiens différentiels, il faut qu'en mettant pour dy, $d^2 y$, $d^3 y$, leurs valeurs dans une équation diffé-

rentielle du troisième ordre, dx, d^2x et d^3x disparoissent des résultats; si cette condition n'a pas lieu, on en pourra conclure que la proposée ne dérive point d'une équation entre x et y seuls et qu'on n'y pourra pas supposer que y soit fonction de x ou réciproquement. En prenant une forme générale et faisant les substitutions indiquées on trouveroit des conditions analogues à celles du n° 62. Il est évident que ces remarques doivent être généralisées et que *toute équation contenant des différentielles de deux variables de quelqu'ordre qu'elles soient doit toujours pouvoir se transformer en une autre qui ne renferme que* x, y, y′, y″, y‴ *etc., en exprimant ces coefficiens conformément à l'hypothèse faite sur la variabilité des quantités* dx, dy, d²y, d²x *etc.*

65. La même condition a lieu aussi pour les formules différentielles qui ne sont pas égalées à zéro, mais dans lesquelles on suppose tacitement que y est une fonction de x, ou x une fonction de y.

Si on avoit l'expression $\frac{y(dx^2+dy^2)}{x\,d^2y}$, en y substituant $y'\,dx$ pour dy et $y''\,dx^2$ pour d^2y, il viendroit $\frac{y(1+y'^2)}{x\,y''}$: résultat qui ne contient plus que les variables x, y et les coefficiens différentiels y' et y''.

En général, toute formule dans laquelle une des quantités dx ou dy est traitée comme une constante, et dont le numérateur et le dénominateur sont homogènes et du même dégré par rapport aux différentielles, se réduira toujours par la transformation précédente, à une fonction des variables x et y et des coefficiens différentiels. Pour s'en convaincre il suffit de remarquer qu'un terme de la forme $P\,dx^m\,dy^n\,d^2y^p\,d^3y^q$ (*) deviendra $Py'^n y''^p y'''^q \ldots\ldots dx^{m+n+2p+3q+\ldots}$ lorsqu'on y mettra $y'\,dx$ pour dy, $y''\,dx^2$ pour d^2y, $y'''\,dx^3$ pour d^3y etc.

(*) d^3y^p, d^3y^q etc. signifient la même chose que $(d^2y)^p$, $(d^3y)^q$ etc; et à cause que d^2y est homogène à dx^2, d^2y^p le sera à dx^{2p}; de même d^3y^q sera homogène avec dx^{3q} et ainsi des autres. Il suit de là que pour connoître le dégré d'un terme par rapport aux différentielles dont il est affecté, il faut regarder la différentielle seconde comme étant du deuxième dégré, la différentielle troisième comme étant du troisième dégré, et en général combiner l'exposant de l'ordre de différentiation avec celui de la puissance.

or dans une suite de termes homogènes par rapport aux différentielles la somme $m+n+2p+3q+\ldots\ldots$ est la même pour tous (n° 49), par conséquent le numérateur de l'expression proposée aura pour facteur commun $dx^{m+n+2p+3q+\text{etc.}}$: le dénominateur étant du même ordre aura le même facteur, il ne restera donc que x, y, y', y'', y''' etc. dans le résultat final.

66. Nous ferons connoître à cette occasion une propriété remarquable des fonctions homogènes; c'est que *si on a une fonction algébrique des quantités* x, y, z *etc., dans laquelle la somme des exposans de chacune de ces lettres soit la même pour tous les termes, et égale à* m, *et qu'on substitue* Px *à* y, Qx *à* z *etc., le résultat sera divisible par* x^m. En effet un terme quelconque de cette fonction étant de la forme $A x^n y^p z^q$ etc., deviendra par la substitution indiquée $A P^p Q^q \ldots\ldots x^{n+p+q+\text{etc.}}$; mais par l'hypothèse on a dans tous les termes $n+p+q+\text{etc.}\ldots\ldots = m$, donc x^m sera facteur commun. Il suit de là que si la fonction proposée étoit égalée à zéro, ou bien qu'elle fût une fraction ayant pour numérateur et pour dénominateur deux polynomes homogènes du même dégré, la quantité x disparoîtroit entièrement du résultat.

67. Pour transformer l'expression $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$, dans laquelle d^2x et d^2y paroissent à la fois, il faut mettre $y'dx$ pour dy et $y''dx^2+y'd^2x$ pour d^2y, il viendra alors $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$.

Les mêmes substitutions étant faites dans la formule $\frac{x\,d^2y+y\,d^2x}{dx\,dy}$ donneroient $\frac{xy''+(xy'+y)d^2x}{xy'+y}$; résultat dans lequel d^2x ne sauroit disparoître à moins qu'on n'ait $xy'+y=0$ ou $y'=-\frac{y}{x}$; ce qui est un cas particulier. On ne peut donc pas regarder en général y comme une fonction de x, ni x comme une fonction de y dans cette formule.

Il y a cette différence entre les formules qui subissent les trans-

formations et celles qui s'y refusent, que les premières conservent la même valeur soit qu'on y suppose dx ou dy constant, tandis que les autres changent. La première des expressions ci-dessus donne en faisant $d^2x = 0$, $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx\,d^2y} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''}$; et en faisant $d^2y = 0$, $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dy\,d^2x} = \frac{(x'^2+1)^{\frac{3}{2}}}{-x''}$: mettant dans ce dernier résultat $\frac{1}{y'}$, au lieu de x' et $\frac{-y''}{y'^3}$ au lieu de x'' (n° 56), on trouve encore $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$.

La seconde expression $\frac{x\,d^2y+y\,d^2x}{dx\,dy}$, devient $\frac{x\,d^2y}{dx\,dy} = \frac{xy''}{y'}$ lorsque $d^2x = 0$ et $\frac{y\,d^2x}{dx\,dy} = \frac{yx''}{x'}$, lorsque $d^2y = 0$; chassant x' et x'' du dernier résultat on obtient $-\frac{yy''}{y'^2}$. Cette valeur ne sauroit s'accorder avec $\frac{xy''}{y'}$ que dans le cas particulier où on auroit $-\frac{y}{y'} = x$ ou $y' = -\frac{y}{x}$.

Soit, par exemple, $y = x^2$; il vient $dy = 2x\,dx$, et si on fait dx constant, on trouve $d^2y = 2\,dx^2$: les valeurs de y et de d^2y tirées de ces équations donneront $\frac{x\,d^2y}{dx\,dy} = 1$. Mais si on différentie $dy = 2x\,dx$ en faisant dy constant, on aura $0 = 2\,dx^2 + 2x\,d^2x$, et les valeurs de dx et d^2x qu'on trouvera dans cette hypothèse, donneront $\frac{y\,d^2x}{dx\,dy} = \frac{-y}{2x^2} = -\frac{1}{2}$; résultat très différent du premier.

Il est aisé de voir que les moyens indiqués n°s 59 et 63 pour passer des équations dans lesquelles une des différentielles a été regardée comme constante à celles qu'on auroit obtenues en faisant tout varier, ou en prenant une autre différentielle que la première pour constante, s'appliquent aussi aux formules différentielles qui ne sont pas égalées à zéro.

68. Lorsqu'on a un nombre d'équations moindre d'une unité que celui des variables qu'elles contiennent, il y a toujours une de ces variables qu'on peut regarder comme indépendante, et dont toutes les autres sont des fonctions implicites. Soient $u = 0$, $v = 0$ deux équations entre trois variables t, x et y; on pourra, par leur moyen, déterminer la valeur de deux quelconques de ces variables, en prenant arbitrairement celle de la troisième. Si on suppose donc que la variable indépendante soit représentée par t et devienne $t+g$, les deux autres x et y éprouveront des changemens tels qu'en les désignant par h et par k, il y ait entre les trois quantités $t+g$, $x+h$ et $y+k$, les mêmes relations qu'entre t, x et y. Substituant $t+g$, $x+h$ et $y+k$, dans les équations proposées, à la place de t, x et y, il en résultera deux nouvelles équations qui serviront à déterminer h et k, lorsqu'on aura assigné une valeur particulière à g.

Mais puisque x et y sont des fonctions de t, les valeurs $x+h$ et $y+k$ correspondantes à $t+g$, pourront être développées dans les séries suivantes :

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{dx}{dt}\frac{g}{1} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{g^2}{1.2} + \frac{d^3x}{dt^3}\frac{g^3}{1.2.3} + \text{etc.} \\ y + \frac{dy}{dt}\frac{g}{1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{g^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dt^3}\frac{g^3}{1.2.3} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \text{(n° 12.)}$$

En appliquant ici le raisonnement du n° 40, on verra facilement que les équations $u = 0$ et $v = 0$, après les substitutions indiquées, prendront par le développement la forme que voici :

$$u + P_1 g + P_2 g^2 + P_3 g^3 + \text{etc.} = 0$$
$$v + Q_1 g + Q_2 g^2 + Q_3 g^3 + \text{etc.} = 0$$

l'accroissement g devant rester indéterminé, on aura nécessairement

$$\left.\begin{aligned} u = 0,\ v = 0 \\ P_1 = 0,\ Q_1 = 0 \\ P_2 = 0,\ Q_2 = 0 \\ P_3 = 0,\ Q_3 = 0 \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

ces équations donneront les relations des coefficiens $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ etc., que nous représente-

rons par x', y', x'', y'' etc. et qui seront eux-mêmes de nouvelles fonctions implicites de t.

La formation des fonctions P_1, P_2, P_3 etc., Q_1, Q_2, Q_3 etc., sera la même que celle de leurs analogues du n° 41; de plus u et v ne renfermant que t et des fonctions implicites de cette variable, ils pourront être traités de même que U l'a été dans le n° 44: on trouvera alors pour le coefficient de la première puissance de g relatif à u

$$P_1 = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}x' + \frac{du}{dy}y'$$

et pour celui qui dérive de v, $Q_1 = \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}x' + \frac{dv}{dy}y'$

Par conséquent les coefficiens différentiels x' et y' seront donnés par les équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}x' + \frac{du}{dy}y' = 0\\ \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}x' + \frac{dv}{dy}y' = 0\end{aligned}\right\} \text{ou} \left\{\begin{aligned}\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = 0\\ \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = 0\end{aligned}\right.$$

les dernières ne sont autre chose que les différentielles des fonctions u et v, égalées à zéro et divisées par dt.

Pour parvenir aux équations d'où dépendent les coefficiens ultérieurs, on différentiera les précédentes en regardant x' et y' ou $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ comme de nouvelles fonctions implicites de t : les résultats qu'on aura obtenus étant différentiés à leur tour, en faisant varier simultanément les coefficiens du premier et du second ordre, donneront les équations du troisième ordre, et ainsi de suite.

69. En généralisant ce qui a été dit dans le n° 41, on prouvera que si u représente une fonction d'un nombre quelconque de variables t, x, y, z etc., dans laquelle x, y, z etc. soient des fonctions implicites de la variable t et qu'on y change t en $t+g$, elle pourra se développer dans une série

$$u + \frac{u'g}{1} + \frac{u''g^2}{1.2} + \frac{u'''g^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$ les coefficiens u', u'', u''' etc., étant des fonctions dérivées successivement les unes des autres de la même manière que u' l'est de u. Mais pour avoir u' il faut trouver

le coefficient de la première puissance de g : or d'après le n° 44, en faisant pour abréger $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$, $\frac{d\zeta}{dt} = \zeta'$ etc., on aura

$$u' = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}x' + \frac{du}{dy}y' + \frac{du}{d\zeta}\zeta' + \text{etc.};$$

on voit par là que u' renfermera, outre les variables primitives t, x, y, ζ etc., les coefficiens x', y', ζ' etc. qui sont aussi des fonctions implicites de t. On aura donc de la même manière

$$u'' = \frac{du'}{dt} + \frac{du'}{dx}x' + \frac{du'}{dx'}x'' + \frac{du'}{dy}y' + \frac{du'}{dy'}y'' + \text{etc.};$$

x'', y'' etc., représentant $\frac{d^2x}{dt^2}$ ou $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ ou $\frac{dy'}{dt}$ etc. On arriveroit ainsi à u''' et aux coefficiens suivans.

70. Les considérations précédentes nous obligent d'introduire une nouvelle notation. Lorsqu'on considère x, y, ζ etc. comme des fonctions implicites de la variable t, u doit être regardé lui-même comme une fonction implicite de cette variable ; par conséquent u' exprime alors le coefficient différentiel de u, et en effet, il est égal à la différentielle de u prise en faisant varier t, ainsi que les quantités x, y, ζ etc. qui en dépendent, et divisée par dt. Nous ne pourrions cependant pas représenter ce coefficient par $\frac{du}{dt}$; car cette expression désigne spécialement le coefficient différentiel de u pris en ne faisant varier que les t qui s'y trouvent explicitement contenus (n° 30). Pour distinguer donc le premier du second, nous l'écrirons comme il suit $\frac{d(u)}{dt}$; la parenthèse marquant qu'on a fait varier dans u tout ce qui se rapporte à t.

On aura par cette convention $u' = \frac{d(u)}{dt}$

$$u'' = \frac{d(u')}{dt} = \frac{d^2(u)}{dt^2}$$

etc.

et on en conclura que si on substitue $t+g$ à la place de t dans la fonction u, en regardant les variables x, y, ζ etc. comme dépen-

dantes de t, il viendra

$$u + \frac{d(u)}{dt}\frac{t}{1} + \frac{d^2(u)}{dt^2}\frac{t^2}{1.2} + \frac{d^3(u)}{dt^3}\frac{t^3}{1.2.3} + \text{etc. et par conséquent}$$

lorsque $u=0$, on en tirera $\left.\begin{array}{l}\frac{d(u)}{dt}=0\\ \frac{d^2(u)}{dt^2}=0\\ \text{etc.}\end{array}\right\}$

71. Donnons maintenant un exemple :

Soient les équations $\left.\begin{array}{l}y^3+3atx=bc^2\\ x^3+3ctx=a^2b\end{array}\right\}$;

en les différentiant on obtiendra

$$\left.\begin{array}{l}y^2dy+atdx+axdt=0\\ x^2dx+ctdy+cydt=0\end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l}y^2\frac{dy}{dt}+at\frac{dx}{dt}+ax=0\\ x^2\frac{dx}{dt}+ct\frac{dy}{dt}+cy=0\end{array}\right.$$

ces dernières donneront les valeurs de $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dx}{dt}$, en t, x et y; on pourra ensuite chasser x et y au moyen des proposées.

Différentiant de nouveau pour obtenir les relations entre les coefficiens du second ordre, il viendra, en regardant dt comme constant, ce qui est permis puisque t est la variable indépendante,

$$\left.\begin{array}{l}y^2d^2y+2ydy^2+atd^2x+2adtdx=0\\ x^2d^2x+2xdx^2+ctd^2y+2cdtdy=0\end{array}\right\} \text{ et en divisant par } dt$$

on aura $\left.\begin{array}{l}y^2\frac{d^2y}{dt^2}+2y\frac{dy^2}{dt^2}+at\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}=0\\ x^2\frac{d^2x}{dt^2}+2x\frac{dx^2}{dt^2}+ct\frac{d^2y}{dt^2}+2c\frac{dy}{dt}=0\end{array}\right\}$; équations

qui serviront à déterminer $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$.

72. Le genre d'équations différentielles qui nous occupe maintenant est susceptible de remarques analogues à celles des n°s 46—54. On voit d'abord qu'en combinant les équations $\left.\begin{array}{l}u=0\\ v=0\end{array}\right\}$, avec leurs différentielles $\left.\begin{array}{l}du=0\\ dv=0\end{array}\right\}$ on pourra en général éliminer trois des

quantités qu'elles renferment, soit constantes, soit variables. Ainsi dans l'exemple ci-dessus, on auroit pu chasser les constantes a, b, c et obtenir une relation unique entre t, x, y et les coefficiens $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ etc. indépendamment des quantités éliminées.

En joignant les deux différentielles secondes $\left.\begin{matrix} d^2u = 0 \\ d^2v = 0 \end{matrix}\right\}$ aux équations précédentes, on aura six équations entre lesquelles on pourra par conséquent éliminer cinq des quantités qu'elles renferment, et ainsi de suite.

73. Nous avons choisi t pour variable indépendante, mais si on avoit regardé comme telle ou x ou y, on auroit pu faire dx constant, ou dy constant. On passera immédiatement des résultats obtenus dans la première hypothèse à leurs correspondans dans la seconde ou dans la troisième, en écrivant $\frac{1}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ au lieu de $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{1}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ au lieu de $\frac{d^2x}{dt^2}$ } et en prenant pour constante, la différentielle de la variable qu'on veut considérer comme indépendante; si c'étoit x, par exemple, on auroit

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dt\,d^2y - dy\,d^2t}{dt^3} \\ \frac{1}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{dx\,d^2t}{dt^3} \end{matrix}\right\}$$

En faisant ces substitutions, on parviendroit aux équations qui déterminent les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ et de $\frac{d^2t}{dx^2}$, ou des coefficiens différentiels du second ordre des variables y et t envisagées comme des fonctions de x.

Si on avoit fait varier à la fois dt, dx et dy, les résultats auroient été symétriques par rapport à chacune des variables et les coefficiens différentiels du second ordre des variables x et y regardées comme fonctions de t, auroient eu pour expression

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dt\,d^2y - dy\,d^2t}{dt^3} \\ \frac{1}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dt\,d^2x - dx\,d^2t}{dt^3} \end{matrix}\right\}.$$

En prenant x pour variable indépendante, on auroit

$$\frac{1}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}$$

$$\frac{1}{dx}d\left(\frac{dt}{dx}\right)=\frac{dx\,d^2t-dt\,d^2x}{dx^3}$$

On trouveroit de même les coefficiens différentiels relatifs à l'hypothèse de x et t fonctions de y, et ceux des ordres plus élevés dans quelque supposition que ce soit. On doit remarquer ici comme dans le n° 64, que toute équation du second ordre renfermant trois variables, dont deux quelconques sont des fonctions de la troisième, doit en y faisant $\left.\begin{matrix} dx=x'dt,\ d^2x=x''dt^2+x'd^2t \\ dy=y'dt,\ d^2y=y''dt^2+y'd^2t \end{matrix}\right\}$, donner un résultat qui ne contienne que les quantités x, y, x', y', x'', y''.

Il est facile de généraliser ces considérations et de les étendre à tel ordre et à tel nombre de variables dépendantes qu'on voudra.

74. Les formules différentielles doivent aussi subir une transformation analogue, sans quoi on ne pourroit pas y regarder deux des variables comme fonctions de la troisième

Soit pour exemple la formule

$$\frac{(dt^2+dx^2+dy^2)^3}{(dt\,d^2x-dx\,d^2t)^2+(dt\,d^2y-dy\,d^2t)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2};$$

elle devient, en y faisant les substitutions indiquées,

$\frac{(1+x'^2+y'^2)^3}{x''^2+y''^2+x'y''-y'x''}$; les différentielles ont entièrement disparu parce que le numérateur et le dénominateur étoient deux expressions différentielles du même dégré (n^te pag. 158); mais en général une expression du dégré m par rapport aux différentielles, auroit dû prendre la forme $P\,dt^m$, P étant une fonction donnée de $t, x, y, x', y', x'', y''$.

75. Si on différentie deux fois en regardant dt comme constant des équations de la forme $\left.\begin{matrix} a+bt+U=0 \\ a'+b't+V=0 \end{matrix}\right\}$ dans lesquelles U et V désignent des fonctions de x et de y sans t, t et dt disparoîtront et on aura $\left.\begin{matrix} d^2U=0 \\ d^2V=0 \end{matrix}\right\}$, d^2U et d^2V ne contenant que x, y et leurs différentielles. Il suit de là que les équations dans lesquelles

il ne paroît que deux variables dont aucune différentielle n'est constante, peuvent dériver d'équations primitives à trois variables. Si on eût éliminé une constante ou une autre quantité entre $\left.\begin{matrix} d^n U = 0 \\ d^n V = 0 \end{matrix}\right\}$ il en seroit résulté une équation unique en x, y, dx, dy, d^2x, d^2y qui auroit tiré son origine des deux équations proposées.

L'équation $M d^2x + N d^2y + P dx^2 + Q dx dy + R dy^2 = 0$, qui ne sauroit dériver d'une seule équation entre x et y, lorsqu'elle ne satisfait pas à la condition exprimée par $M dx + N dy = 0$, peut toujours être rapportée au cas où x et y seroient des fonctions implicites de la même variable t, en regardant dx, d^2x, dy, d^2y comme les différentielles de x et de y prises par rapport à t; car si on y fait $\left.\begin{matrix} dx = x'dt, \; dy = y'dt \\ d^2x = x''dt, \; d^2y = y''dt \end{matrix}\right\}$ dt n'y reste point et il vient alors $M x'' + N y'' + P x'^2 + Q x'y' + R y'^2 = 0$; résultat indépendant des différentielles. Il en seroit de même de toute autre équation du second ordre à deux variables, et de celles des ordres plus élevés: leur homogénéité par rapport aux différentielles permettra toujours de les transformer en d'autres qui ne contiendront que des coefficiens différentiels, au moyen d'une nouvelle variable.

Il résulte de ceci une conséquence remarquable; c'est qu'il n'y a point d'équation différentielle qu'on puisse regarder comme réellement absurde ou insignifiante; il faut seulement entendre qu'une équation différentielle ne se rapporte pas toujours à une seule équation primitive, et que pour y satisfaire il faut en supposer plusieurs, qui quelquefois renfermeront de nouvelles variables.

76. Nous avons supposé dans la formation des équations différentielles à deux variables (n° 40) que l'une des variables ayant pris un accroissement arbitraire, l'autre avoit été développée dans une série ordonnée suivant les puissances de cet accroissement; mais on peut imaginer aussi que ce soit une fonction donnée des deux variables qui ait reçu l'accroissement arbitraire, alors les changemens éprouvés par chacune d'elles en particulier deviennent subordonnés à cet accroissement. Si par exemple le produit xy de deux variables liées entr'elles par l'équation $V = 0$, avoit reçu un accroissement quelconque z, les changemens h et k, éprouvés respectivement par

x et par y, seroient déterminés l'un et l'autre. Pour s'en convaincre il suffit de faire $xy = t$, on doit alors en vertu des deux équations $\left.\begin{matrix} xy = t \\ V = 0 \end{matrix}\right\}$ regarder x et y comme des fonctions de t, et d'après ce qui a été dit n° 68, $x + h$ et $y + k$ pourront se développer suivant les puissances de g.

En différentiant les équations précédentes, on aura $\left.\begin{matrix} x\,dy + y\,dx = dt \\ dV = 0 \end{matrix}\right\}$ et on tirera de là les coefficiens différentiels des variables x et y regardées comme des fonctions de t. Différentiant de nouveau et supposant dt constant, il viendra $\left.\begin{matrix} x\,d^2y + 2\,dx\,dy + y\,d^2x = 0 \\ d^2V = 0 \end{matrix}\right\}$ la première équation donnera le moyen de chasser de la deuxième l'une des différentielles secondes, d^2x par exemple; le résultat ne contiendra plus que dx, dy, d^2y, et en le divisant par dt^2, il exprimera une relation entre x et y, et les coefficiens $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$. Si on le différentie à son tour on pourra encore en éliminer le d^2x qui y seroit introduit de nouveau et ainsi de suite. On voit que de cette manière on parviendra toujours à des équations dans lesquelles il ne paroîtra aucune différentielle de dx supérieure à la première.

Ce que nous venons de dire est général, et *si dans une équation* $V = 0$ *entre* x *et* y *on veut prendre pour variable indépendante une fonction quelconque* U *de* x *et de* y, *on différentiera comme à l'ordinaire l'équation proposée* $V = 0$, *on chassera* d x *ou* d y, *à l'aide de l'équation* d U = d t, *et ensuite* d² x *ou* d² y *au moyen de* d² U = 0, *ou ce qui revient au même, en faisant* d U *constant.*

Il arrive le plus souvent qu'on ne connoit point l'expression primitive U, mais seulement sa différentielle, ensorte qu'on n'a que l'équation $dU = dt$; cette circonstance ne change rien à la régle précédente qui s'applique également aux formules différentielles et aux équations. Eclaircissons ceci par quelques exemples.

77. Supposons d'abord qu'on ait $dt = y\,dx$; en différentiant, il viendra $y\,d^2x + dx\,dy = 0$; par conséquent $d^2x = -\frac{dx\,dy}{y}$. Avec cette valeur on chassera d^2x des équations ou des formules qui le

le contiendront, et les résultats seront relatifs à l'hypothèse dans laquelle $y\,dx$ exprimeroit la différentielle première de la variable indépendante. Quoique $y\,dx$ ne soit la différentielle immédiate d'aucune fonction de x et de y, cependant à cause que ces variables sont supposées dépendre l'une de l'autre, on doit regarder $y\,dx$ comme la différentielle d'une fonction implicite de x.

Cela posé, si on avoit $dx\,d^2y - dy\,d^2x + a\,dx^3 + b\,dy^3 = 0$, en y substituant pour d^2x l'expression trouvée ci-dessus, on en tireroit $y\,dx\,d^2y + dx\,dy^2 + a\,y\,dx^3 + b\,y\,dy^3 = 0$.

Le coefficient différentiel du second ordre $\frac{1}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ qui, lorsqu'on ne prend aucune différentielle pour constante, est exprimé par $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$, devient dans l'hypothèse précédente $\frac{y\,d^2y + dy^2}{y\,dx^2}$.

Si dans l'équation ou la formule proposée il entroit des différentielles de x d'un ordre supérieur au second, on les éliminеroit de même, parce qu'en différentiant plusieurs fois de suite l'équation $y\,d^2x + dx\,dy = 0$, il en résulteroit de nouvelles équations dont on pourroit tirer successivement les valeurs de d^3x, d^4x, etc.

Prenons pour second exemple $dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; on aura dans ce cas $dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$, d'où $d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx}$. Dans cette nouvelle hypothèse, l'équation $dx\,d^2y - dy\,d^2x + a\,dx^3 + b\,dy^3 = 0$, devient $(dx^2 + dy^2)\,d^2y + a\,dx^4 + b\,dx\,dy^3 = 0$, et la formule $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$ se change en $\frac{(dx^2 + dy^2)\,d^2y}{dx^4}$. Les différentielles successives de l'équation $dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$, donneront les moyens d'éliminer d^3x, d^4x, etc.

Ces transformations tiennent, en quelque sorte, au méchanisme du calcul; ce ne sont que des manières de présenter le même résultat sous différentes formes, parmi lesquelles on peut choisir celle qui paroît la plus concise.

Elle se réduisent toutes à ce problême général : *étant donnée une équation ou une formule différentielle dans laquelle on a regardé une*

certaine différentielle première comme constante, passer à un résultat dans lequel une autre différentielle soit prise pour constante.

Pour le résoudre, il faut mettre en évidence les coefficiens différentiels de l'une des variables, y ou x, considérée comme fonction de l'autre, et y substituer leur expression dans la nouvelle hypothèse.

Ainsi pour passer de l'équation

$$y\,dx\,d^2y + dx\,dy^2 + a\,y\,dx^3 + b\,y\,dy^3 = 0,$$

dans laquelle la différentielle $y\,dx$ a été supposée constante, à une autre où $\sqrt{dx^2+dy^2}$ le soit, j'observe que le coefficient différentiel du second ordre $\frac{1}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ est exprimé dans la première hypothèse par $\frac{y\,d^2y+dy^2}{y\,dx^2}$; j'ai donc $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{y\,d^2y+dy^2}{y\,dx}$, et par conséquent $d^2y = \frac{y\,dx\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) - dy^2}{y}$; substituant cette valeur dans l'équation proposée, il en résultera $dx^2\,d.\left(\frac{dy}{dx}\right) + a\,dx^3 + b\,dy^3 = 0$, équation dans laquelle on peut prendre telle différentielle qu'on voudra pour constante, en mettant au lieu de $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ son expression dans la nouvelle hypothèse. Lorsqu'on fait $dt = \sqrt{dx^2+dy^2}$, on a $\frac{1}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(dx^2+dy^2)\,d^2y}{dx^4}$: chassant $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ à l'aide de cette valeur, la transformation qu'on se propose sera effectuée.

En général pour transformer une expression différentielle quelconque, tout se réduit à la préparer de manière qu'elle ne contienne que des coefficiens différentiels et des différentielles du premier ordre: y', y'', y''' etc. désignant à l'ordinaire ces coefficiens, on aura d'après leur formation,

$$y' = \frac{dy}{dx}$$
$$y'' = \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$
$$y''' = \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$
$$y^{iv} = \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{1}{dx}\,d\left(\frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$
etc.

On fera varier simultanément dy et dx dans les formules ci-jointes, et on substituera à d^2x ou à d^2y la valeur qui résulte de de l'hypothèse qu'on se propose d'établir.

On voit par-là que quand on rencontre une équation différentielle il faut, pour en connoître la signification, savoir dans quelle hypothèse elle a été formée, ou ce qui revient au même, quelle est la variable qu'on a regardée comme indépendante : or c'est une des conventions qu'on exprime toujours au commencement d'une recherche. Il seroit facile d'étendre les considérations précédentes au cas où on auroit trois équations entre quatre variables, ou en général un nombre $m-1$ d'équations entre m variables.

78. Lorsqu'on a plusieurs équations entre un certain nombre de variables et leurs différentielles, on peut toujours en tirer un résultat unique dans lequel le nombre des variables soit diminué d'autant d'unités qu'on avoit d'équations moins une, par un procédé d'élimination que nous allons exposer sur deux équations entre trois variables, et qu'il sera facile d'étendre ensuite autant qu'on le voudra.

Soient $\left.\begin{matrix} U = 0 \\ V = 0 \end{matrix}\right\}$ deux équations entre les variables t, x, y, et leurs différentielles depuis le premier ordre, jusqu'à l'ordre m inclusivement. Pour en déduire une équation qui ne contienne plus la variable t ni aucune de ses différentielles, il faut se procurer un nombre d'équations tel qu'on puisse éliminer t, dt, d^2t.... d^mt comme des inconnues particulières; en effet, n'ayant point les équations primitives ni toutes les différentielles intermédiaires entr'elles et les proposées, on ne peut tirer de celles-ci que la valeur de d^mt exprimée par t, dt, d^2t.... $d^{m-1}t$ et par les variables x, y et leurs différentielles. Si dt étoit constant, il sembleroit qu'en différentiant une seule fois l'une des équations proposées, on pourroit éliminer t et dt puisqu'on auroit alors trois équations, mais on doit observer que les différentielles

$d^n y$ et $d^n x$ contiennent implicitement dt, puisqu'elles ont été prises en développant par rapport aux puissances de l'accroissement de la variable t (n° 68); il faut donc prendre pour constante la différentielle de l'une des variables qu'on veut conserver. Supposons en conséquence que dx soit constant; en éliminant d'abord $d^m t$ entre les deux proposées, on obtiendra une équation qui ne renfermera plus que t, dt.... $d^{m-1} t$, on la différentiera et on aura un résultat dans lequel $d^m t$ sera rentré. Si on combine ce résultat avec l'une ou l'autre des proposées, il donnera par l'élimination de $d^m t$, une seconde équation qui ne contiendra plus que $d^{m-1} t$ et les différentielles des ordres inférieurs. Faisant sur les deux équations qu'on vient de trouver les mêmes opérations que sur les proposées, on en éliminera $d^{m-1} t$, et on parviendra à deux nouvelles équations dans lesquelles $d^{m-2} t$ sera la différentielle de t de l'ordre le plus élevé. Il est facile de continuer ce procédé; et on verra qu'en général il faudra différentier m fois pour chasser les différentielles de t; le résultat final sera donc de l'ordre $2m$ par rapport à celles des variables restantes x et y.

Supposons maintenant que l'équation $U = 0$ soit de l'ordre m, et que l'équation $V = 0$ soit de l'ordre n, n étant plus grand que m; on différentiera la première un nombre de fois marqué par $n-m$, et on éliminera les différentielles $d^n t$, $d^{n-1} t$, ... $d^{n-m+1} t$ entre les résultats qu'on aura obtenus, et l'équation $V = 0$; on aura après ces opérations une seconde équation qui ne contiendra plus de différentielles d'un ordre supérieur à $d^n t$, et on la traitera conjointement avec $U = 0$, ainsi qu'il a été dit ci-dessus.

Il y auroit plusieurs remarques importantes à faire sur cette méthode d'élimination, mais comme on l'employe rarement parce qu'elle entraîne des calculs fort longs, et qu'en donnant un résultat d'un ordre plus élevé que les proposées, elle augmente les difficultés qu'on rencontre presque toujours pour remonter des équations différentielles aux équations primitives, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter davantage; on trouvera d'ailleurs dans le Calcul intégral un procédé en quelque sorte inverse du précédent, et dont les Analystes se sont servis dans les questions de ce genre qu'ils ont eues à traiter.

79. Lorsqu'on n'a qu'une seule équation entre trois variables, on peut toujours, en prenant arbitrairement deux quelconques d'entr'elles,

déterminer la troisième. Soit $u = 0$ une équation renfermant x, y et z; si on regarde x et y comme les deux variables indépendantes, z sera une fonction de l'une et de l'autre, et lorsque x recevra un accroissement quelconque, y étant supposé constant, z éprouvera un changement subordonné à celui de x. Dans cette hypothèse, l'équation $u = 0$ devra être envisagée comme une équation entre deux variables x et z; on aura donc $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$, et de là on tirera le coefficient différentiel de z relatif à la *variabilité* de x. Il faut se rappeller ici, d'après la distinction qui a été faite n° 30, que dans $\frac{dz}{dx}$, dz n'est que la différentielle partielle de z, prise par rapport au changement de x seul.

Il est évident que si on eût fait varier y on auroit eu, en différentiant l'équation proposée comme ne contenant que les variables y et z, $\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = 0$.

Si on multiplie par dx la première des équations trouvées ci-dessus et la seconde par dy, et qu'on les ajoute ensuite, il viendra

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right) = 0.$$

Mais $\frac{dx}{dz}dx + \frac{dz}{dy}dy$, n'est autre chose que la différentielle complète de z (n° 28), donc on aura $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0$;

c'est-à-dire qu'on pourra égaler à zéro la différentielle première de l'équation $u = 0$, prise par rapport aux trois variables x, y et z. Il ne faut pas perdre de vue que cette différentielle doit être regardée comme équivalente à deux équations, car en y substituant pour dz sa valeur $\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$, il faudra, à cause de l'indépendance des accroissemens dx et dy, que les quantités qui multiplient chacun d'eux, soient séparément égales à zéro.

80. On parviendra aux équations qui donnent les coefficiens des

ordres supérieurs en différentiant les équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dx}+\frac{du}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dx}=0\\ \frac{du}{dy}+\frac{du}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dy}=0\end{aligned}\right\}$$

Nous représenterons la première par $\frac{d(u)}{dx}$ et la seconde par $\frac{d(u)}{dy}$; conformément à la notation adoptée n° 70; ces équations renfermeront encore les trois variables x, y et ζ, et pourront être traitées comme la proposée. En n'ayant d'abord égard qu'au changement de x, non seulement ζ variera, mais en même-temps le coefficient du premier ordre $\frac{d\zeta}{dx}$, donnera naissance au coefficient du second ordre $\frac{d^2\zeta}{dx^2}$. En différentiant donc $\frac{d(u)}{dx}$ par rapport à x, on aura comme pour les équations à deux variables,

$\frac{d^2(u)}{dx^2}$ ou $\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dxd\zeta}\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d^2u}{d\zeta^2}\frac{d\zeta^2}{dx^2}+\frac{du}{d\zeta}\frac{d^2\zeta}{dx^2}=0$ (n° 49).

Si on différentie $\frac{d(u)}{dx}$ par rapport à y et à ζ, ou $\frac{d(u)}{dy}$ par rapport à x et à ζ, en observant que dans le premier cas $\frac{d\zeta}{dx}$ donne $\frac{d^2\zeta}{dydx}$, et dans le second, $\frac{d\zeta}{dy}$ donne $\frac{d^2\zeta}{dxdy}=\frac{d^2\zeta}{dydx}$, on aura un résultat unique, qui sera

$\frac{d^2(u)}{dxdy}$ ou $\frac{d^2u}{dxdy}+\frac{d^2u}{d\zeta dy}\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d^2u}{d\zeta dx}\frac{d\zeta}{dy}+\frac{du}{d\zeta}\cdot\frac{d^2\zeta}{dxdy}=0$.

Enfin l'équation $\frac{d(u)}{dy}$ différentiée, en regardant y et ζ comme seules variables, produira

$\frac{d^2(u)}{dy}$ ou $\frac{d^2u}{dy^2}+2\frac{d^2u}{dyd\zeta}\frac{d\zeta}{dy}+\frac{d^2u}{d\zeta^2}\frac{d\zeta^2}{dy^2}+\frac{du}{d\zeta}\frac{d^2\zeta}{dy^2}=0$.

Mais puisque ζ est une fonction de x et de y, on doit regarder u comme une fonction implicite de ces variables, par conséquent on aura .

$$d^2(u) = \frac{d^2(u)}{dx^2}dx^2 + \frac{2\,d^2(u)}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2(u)}{dy^2}dy^2 = 0;$$

et en effet, si on substitue à $\frac{d^2(u)}{dx^2}$, $\frac{d^2(u)}{dx\,dy}$, $\frac{d^2(u)}{dy^2}$, les résultats trouvés ci-dessus, et qu'on remplace $\frac{d\zeta}{dx}dx + \frac{d\zeta}{dy}dy$ par la différentielle première complète $d\zeta$, et $\frac{d^2\zeta}{dx^2}dx^2 + \frac{2\,d^2\zeta}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2\zeta}{dy^2}dy^2$ par la différentielle seconde complète $d^2\zeta$, on aura la même équation finale que celle qu'on auroit obtenue, si on avoit différentié $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{d\zeta}d\zeta = 0$, en regardant dx et dy comme constans, et ζ comme une fonction de x et de y.

81. On étendra sans peine ces considérations à tel ordre de différentiation, ou à tel nombre de variables qu'on voudra; car tout se réduit à déterminer celles qui sont indépendantes, ce qu'on ne peut faire que par la nature de la question qui a conduit à l'équation ou aux équations proposées; et ensuite on différentiera, par rapport à chacune de ces variables en particulier, en traitant les variables subordonnées comme des fonctions implicites des variables indépendantes.

Si par exemple on avoit les deux équations $\left.\begin{matrix} u = 0 \\ v = 0 \end{matrix}\right\}$ entre les cinq variables s, t, x, y et ζ, on verroit que trois de ces variables sont indépendantes. Supposons donc que y et ζ soient les deux variables subordonnées, ou les fonctions implicites de s, t, x données par les équations proposées; on différentiera successivement u et v par rapport à s, par rapport à t, par rapport à x, et on aura:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{ds} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{du}{d\zeta}\frac{d\zeta}{ds} &= 0 \\ \frac{du}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{du}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt} &= 0 \\ \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dx} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Si on multiplie respectivement ces équations par ds, dt, dx;

qu'on les ajoute et qu'on mette dy au lieu de

$$\frac{dy}{ds}ds + \frac{dy}{dt}dt + \frac{dy}{dx}dx,$$

$d\zeta$ au lieu de $\frac{d\zeta}{ds}ds + \frac{d\zeta}{dt}dt + \frac{d\zeta}{dx}dx$,

il viendra

$$\frac{du}{ds}ds + \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{d\zeta}d\zeta = du = 0:$$

on tirera un résultat semblable de l'équation $v = 0$; d'où il suit, qu'en différentiant les équations $u = 0$ et $v = 0$, par rapport à toutes les variables s, t, x, y et ζ, et en y substituant au lieu de dy et de $d\zeta$, les expressions de ces différentielles, considérées comme appartenant à des fonctions de trois variables (n° 39), il faudra égaler séparément à zéro le coefficient de la différentielle de chaque variable indépendante.

En regardant les coefficiens différentiels eux-mêmes comme de nouvelles fonctions implicites des variables indépendantes, on ne sauroit être arrêté dans la recherche des différentielles ultérieures; ainsi après quelques remarques sur l'élimination des constantes et des fonctions, nous terminerons ce qui regarde la formation des équations différentielles.

82. L'équation $u = 0$, entre x, y et ζ, ayant deux différentielles premières $\frac{d(u)}{dx} = 0$ et $\frac{d(u)}{dy} = 0$, il est évident qu'on peut éliminer deux constantes entre ces trois équations, et le résultat exprimera la relation des variables x, y, ζ et des coefficiens $\frac{d\zeta}{dx}$ et $\frac{d\zeta}{dy}$, indépendamment des quantités éliminées.

Si on joint aux équations précédentes les trois du second ordre

$$\frac{d^2(u)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2(u)}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2(u)}{dy^2} = 0,$$

on aura six équations, entre lesquelles on pourra éliminer cinq quantités; et ainsi de suite.

83. Ceci nous conduit à une remarque importante, c'est qu'on peut éliminer d'une équation à trois ou à un plus grand nombre de variables

variables, des fonctions dont la forme est absolument inconnue. Soit pour exemple l'équation $\zeta = f(ax+by)$, dans laquelle la caractéristique f désigne une fonction dont la forme n'est déterminée en aucune manière ; nous allons en déduire une équation entre $\frac{d\zeta}{dx}$ et $\frac{d\zeta}{dy}$, indépendante de cette fonction et qui conviendra également à $\zeta = ax+by$, à $\zeta = \sqrt{ax+by}$, à $\zeta = \sin(ax+by)$, et en général à toutes les fonctions de la quantité $ax+by$, de quelque forme qu'elles soient. Faisons pour cela $ax+by = t$, l'équation proposée deviendra $\zeta = f(t)$ et par conséquent on aura

$$d\zeta = f'(t)\,dt ; \text{ mais } d\zeta = \frac{d\zeta}{dx}dx + \frac{d\zeta}{dy}dy$$

$$dt = \frac{dt}{dx}dx + \frac{dt}{dy}dy$$

donc $\left.\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dx} &= f'(t)\frac{dt}{dx}\\ \frac{d\zeta}{dy} &= f'(t)\frac{dt}{dy}\end{aligned}\right\}$ Mettant pour $\frac{dt}{dx}$ et $\frac{dt}{dy}$ leurs valeurs a et b, éliminant $f'(t)$, il viendra $b\frac{d\zeta}{dx} - a\frac{d\zeta}{dy} = 0$.

Cette équation exprime un caractère au moyen duquel on pourra reconnoître si une quantité proposée est une fonction de $ax+by$ ou non ; car d'après sa formation elle doit être satisfaite ou devenir identique, toutes les fois qu'on y substituera au lieu de $\frac{d\zeta}{dx}$ et $\frac{d\zeta}{dy}$ les valeurs qui résulteroient de la différentiation d'une fonction de $ax+by$.

Supposons qu'on ignorât l'origine du polynome $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$; en l'égalant à ζ, et en différentiant on trouvera $\left.\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dx} &= 2a^2x+2aby\\ \frac{d\zeta}{dy} &= 2abx+2b^2y\end{aligned}\right\}$ ces valeurs mises dans l'équation $b\frac{d\zeta}{dx} - a\frac{d\zeta}{dy} = 0$, la rendent identique : on en concluera donc que le polynome représenté par ζ, est

une fonction de $ax+by$; ce qui est d'ailleurs évident puisque $a^2x^2+2abxy+b^2y^2=(ax+by)^2$.

On voit en général que $u=0$ étant une équation entre x, y, z, et une fonction quelconque indéterminée représentée par $f(t)$ et dans laquelle on ne connoit que la composition de t en x, y et z, on pourra toujours éliminer $f(t)$ et $f'(t)$ à l'aide des équations

$$\frac{d(u)}{dx}=0, \quad \frac{d(u)}{dy}=0.$$

En passant au second ordre le nombre d'équations devenant plus grand, il est possible, dans beaucoup de cas, d'éliminer deux fonctions indéterminées; mais je n'entrerai point dans ces détails, non plus que dans ce qui regarde les équations qui renferment plus de trois variables : je réserve ces objets pour le Calcul intégral avec lequel ils ont un rapport plus immédiat.

Des Equations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une formule soit la différentielle exacte d'une autre formule.

84. On a vu dans le n° 26 que u étant une fonction de deux variables, l'équation $\frac{d^2u}{dy\,dx}=\frac{d^2u}{dx\,dy}$ étoit identique; on en déduit entre les coefficiens différentiels des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables indépendantes, une suite de relations qui donnent les moyens de connoître si une expression différentielle proposée peut résulter ou non de la différentiation d'une fonction primitive, ou en général d'une fonction différentielle d'un ordre moins élevé qu'elle.

Soit d'abord une expression du 1er ordre $M\,dx+N\,dy$; si u représente la fonction primitive dont elle est la différentielle, on aura

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{du}{dx}\\ N&=\frac{du}{dy}\end{aligned}\right\} \text{ et par conséquent } \left\{\begin{aligned} \frac{dM}{dy}&=\frac{d^2u}{dy\,dx}\\ \frac{dN}{dx}&=\frac{d^2u}{dx\,dy}\end{aligned}\right\} : \text{ il suit donc de là}$$

que l'équation $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$ doit être identique. Si cette condition n'étoit pas remplie, l'expression $M\,dx+N\,dy$ ne sauroit être la différentielle d'aucune fonction primitive de deux variables *indépendantes*.

Les conditions qui doivent avoir lieu pour que l'expression $M\,dx+N\,dy+P\,dz$ soit la différentielle d'une fonction primitive u

de trois variables indépendantes, sont une suite immédiate de celle qui a été trouvée ci-dessus à l'égard des fonctions de deux variables. En effet, si on regardoit z comme constant, on auroit $dz = 0$; l'expression $M\,dx + N\,dy$ seroit la différentielle partielle de u prise en ne faisant varier que x et y et devroit satisfaire à l'équation $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$. Faisant ensuite $dy = 0$, il viendra $M\,dx + P\,dz$, différentielle partielle prise en ne faisant varier que x et z et de laquelle on tirera $\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}$. Enfin la supposition de x constant donnant $dx = 0$, et $N\,dy + P\,dz$ étant la différentielle partielle prise par rapport à y et à z, il en résultera une troisième équation de condition $\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$.

En général, si le nombre des variables de la fonction différentielle $M\,dx + N\,dy + P\,dz +$ etc. étoit n, en les combinant deux à deux, on en tireroit $\frac{n(n-1)}{2}$ différentielles partielles à deux variables, chacune desquelles donneroit une équation de condition; il y auroit donc en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ de ces équations qui devroient être identiques pour que la proposée fût la différentielle d'une fonction primitive renfermant n variables indépendantes.

85. Si la formule proposée étoit du second ordre, qu'on eût par exemple $Q\,dx^2 + R\,dx\,dy + S\,dy^2$, dx et dy étant regardés comme constans, il faudroit la mettre sous la forme $M\,dx + N\,dy$, et pour cela on feroit $R = R' + R''$, il viendroit alors

$$(Q\,dx + R'\,dy)\,dx + (R''\,dx + S\,dy)\,dy.$$

D'après la condition $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, on auroit

$$\frac{d\{Q\,dx + R'\,dy\}}{dy} = \frac{d\{R''\,dx + S\,dy\}}{dx},$$

ou en développant, $\frac{dQ}{dy}\,dx + \frac{dR'}{dy}\,dy = \frac{dR''}{dx}\,dx + \frac{dS}{dx}\,dy$;

mais dx et dy étant arbitraires et indépendans l'un de l'autre, il

faudra qu'on ait séparément $\left.\begin{matrix}\frac{dQ}{dy}=\frac{dR''}{dx}\\ \frac{dR'}{dy}=\frac{dS}{dx}\end{matrix}\right\}$; d'où il ne s'agit plus que d'éliminer R' et R''. On a d'abord $R''=R-R'$, ce qui donne $\frac{dR''}{dx}=\frac{dR}{dx}-\frac{dR'}{dx}$; substituant dans les équations précédentes, il vient $\left.\begin{matrix}\frac{dQ}{dy}=\frac{dR}{dx}-\frac{dR'}{dx}\\ \frac{dR'}{dy}=\frac{dS}{dx}\end{matrix}\right\}$; en différentiant la première de ces équations par rapport à y, la seconde par rapport à x et éliminant $\frac{d^2R'}{dx\,dy}$ qui se trouve dans l'une et dans l'autre, on obtient $\frac{d^2Q}{dy^2}+\frac{d^2S}{dx^2}=\frac{d^2R}{dx\,dy}$. Telle est l'équation de condition qui doit avoir lieu pour que $Q\,dx^2+R\,dx\,dy+S\,dy^2$ soit la différentielle d'une fonction du premier ordre; on parviendroit d'une manière semblable aux équations de condition relatives aux fonctions des ordres supérieurs, dans lesquelles dx et dy ont été regardés comme constants.

Les considérations précédentes s'appliquent également aux fonctions dans lesquelles on a fait varier dx et dy, mais alors il faut envisager la fonction primitive d'où dérive la proposée comme contenant quatre variables, savoir x, y, dx et dy: nous ne suivrons pas néanmoins ce procédé parce qu'il en existe un plus général dont les résultats s'étendent à tel nombre de variables et à tel ordre qu'on voudra.

Nous observerons qu'il faut distinguer ici les fonctions différentielles des équations différentielles. Ces dernières, comme on l'a vu dans les n^os^ précédens, ne sont pas toujours le résultat immédiat de la différentiation; leur forme dépend des éliminations qui ont été faites pour y parvenir. Nous ne nous occuperons pour le moment que des fonctions dans lesquelles toutes les variables sont supposées indépendantes les unes des autres, et nous renverrons au Calcul intégral ce qui regarde les équations.

86. Soit U une fonction quelconque des variables x, y et de leurs différentielles $dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots\ldots d^{n-1}x, d^{n-1}y$; si on fait

$$\left.\begin{array}{l} dx = x_1,\ d^2x = x_2,\ d^3x = x_3, \ldots \\ dy = y_1,\ d^2y = y_2,\ d^3y = y_3, \ldots \end{array}\right\}$$

etc.

, U deviendra une fonction des variables $x, y, x_1, y_1, \ldots\ldots x_{n-1}, y_{n-1}$, et sa différentielle complète sera

$$dU = \left\{\begin{array}{l} \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dx_1}dx_1 + \frac{dU}{dx_2}dx_2 + \ldots\ldots + \frac{dU}{dx_{n-1}}dx_{n-1} \\ + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dy_1}dy_1 + \frac{dU}{dy_2}dy_2 + \ldots\ldots + \frac{dU}{dy_{n-1}}dy_{n-1} \end{array}\right.$$

Mais $dx, dx_1, \ldots\ldots dx_{n-1}, dy, dy_1, \ldots\ldots dy_{n-1}$, sont respectivement $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$; faisant de plus $dU = U_1$, il viendra

$$U_1 = \left\{\begin{array}{l} \frac{dU}{dx}x_1 + \frac{dU}{dx_1}x_2 + \frac{dU}{dx_2}x_3 + \ldots\ldots + \frac{dU}{dx_{n-1}}x_n \\ + \frac{dU}{dy}y_1 + \frac{dU}{dy_1}y_2 + \frac{dU}{dy_2}y_3 + \ldots\ldots + \frac{dU}{dy_{n-1}}y_n \end{array}\right.$$

Si on différentie successivement U_1 par rapport à chacune des variables $x, y, \ldots\ldots x_n, y_n$, on aura d'abord, en n'ayant égard qu'à la variabilité de x,

$$\frac{dU_1}{dx} = \left\{\begin{array}{l} \frac{d^2U}{dx^2}x_1 + \frac{d^2U}{dx\,dx_1}x_2 + \frac{d^2U}{dx\,dx_2}x_3 + \ldots\ldots + \frac{d^2U}{dx\,dx_{n-1}}x_n \\ \frac{d^2U}{dx\,dy}y_1 + \frac{d^2U}{dx\,dy_1}y_2 + \frac{d^2U}{dx\,dy_2}y_3 + \ldots\ldots + \frac{d^2U}{dx\,dy_{n-1}}y_n \end{array}\right.$$

En intervertissant l'ordre des deux différentiations indiquées dans chaque terme du second membre de l'équation précédente, on verra aisément que ce second membre n'est autre chose que la différentielle complète de $\frac{dU}{dx}$; on aura donc $\frac{dU_1}{dx} = d.\frac{dU}{dx}$.

Différentions maintenant par rapport à x_1, il viendra

$$\frac{dU_1}{dx_1} = \left\{\begin{array}{l} \frac{dU}{dx} + \frac{d^2U}{dx_1\,dx}x_1 + \frac{d^2U}{dx_1\,dx_1}x_2 + \frac{d^2U}{dx_1\,dx_2}x_3 + \ldots\ldots + \frac{d^2U}{dx_1\,dx_{n-1}}x_n \\ + \frac{d^2U}{dx_1\,dy}y_1 + \frac{d^2U}{dx_1\,dy_1}y_2 + \frac{d^2U}{dx_1\,dy_2}y_3 + \ldots\ldots + \frac{d^2U}{dx_1\,dy_{n-1}}y_n \end{array}\right.$$

En intervertissant l'ordre des différentiations dans tous les termes où U se trouve différentié deux fois, on aura $\frac{dU_1}{dx_1} = \frac{dU}{dx} + d.\frac{dU}{dx_1}$

on parviendra de la même manière à $\frac{dU_1}{dx_2} = \frac{dU}{dx_1} + d.\frac{dU}{dx_2}$

$$\frac{dU}{dx_3} = \frac{dU}{dx_2} + d.\frac{dU}{dx^1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dU_1}{dx_{n-1}} = \frac{dU}{dx_{n-2}} + d.\frac{dU}{dx_{n-1}}$$

mais lorsqu'on sera arrivé à x_n, comme cette lettre représente la différentielle $d^n x$ qui ne doit pas se trouver dans U, puisque cette fonction n'est que de l'ordre $n-1$, on aura seulement $\frac{dU_1}{dx_n} = \frac{dU}{dx_{n-1}}$.

En rapprochant les résultats qu'on vient d'obtenir, et en observant qu'on en trouveroit de semblables par rapport à l'autre variable y et à ses différentielles $y_1, y_2, \ldots y_n$, on formera la table suivante:

$\frac{dU_1}{dx} = d.\frac{dU}{dx}$	$\frac{dU_1}{dy} = d.\frac{dU}{dy}$
$\frac{dU_1}{dx_1} = \frac{dU}{dx} + d.\frac{dU}{dx_1}$	$\frac{dU_1}{dy_1} = \frac{dU}{dy} + d.\frac{dU}{dy_1}$
$\frac{dU_1}{dx_2} = \frac{dU}{dx_1} + d.\frac{dU}{dx_2}$	$\frac{dU_1}{dy_2} = \frac{dU}{dy_1} + d.\frac{dU}{dy_2}$
$\frac{dU_1}{dx_3} = \frac{dU}{dx_2} + d.\frac{dU}{dx_3}$	$\frac{dU_1}{dy_3} = \frac{dU}{dy_2} + d.\frac{dU}{dy_3}$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\frac{dU_1}{dx_{n-1}} = \frac{dU}{dx_{n-2}} + d.\frac{dU}{dx_{n-1}}$	$\frac{dU_1}{dy_{n-1}} = \frac{dU}{dy_{n-2}} + d.\frac{dU}{dy_{n-1}}$
$\frac{dU_1}{dx_n} = \frac{dU}{dx_{n-1}}$	$\frac{dU_1}{dy_n} = \frac{dU}{dy_{n-1}}$

On peut éliminer U de ces équations. Considérons d'abord celles qui sont contenues dans la première colonne; en différentiant la seconde équation de cette colonne, et en la retranchant de la première, il viendra $\frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} = -d^2\frac{dU}{dx_1}$; ajoutant à cette nou-

velle équation la différentielle seconde de la troisième, on trouvera $\frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} + d^2.\frac{dU_1}{dx_2} = d^3.\frac{dU}{dx_3}$. Si la fonction U_1 n'étoit que du second ordre, U ne seroit que du premier, et par conséquent ne renfermeroit point x_2 ou d^2x; on auroit donc alors

$$\frac{dU_1}{dx} - d\frac{dU_1}{dx_1} + d^2\frac{dU_1}{dx_2} = 0.$$

Si U étoit du troisième ordre, on trouveroit

$\frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} + d^2\frac{dU_1}{dx_2} - d^3\frac{dU_1}{dx_3} = 0$, et en général,

$\frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} + d^2.\frac{dU_1}{dx_2} - d^3.\frac{dU_1}{dx_3} + d^4.\frac{dU_1}{dx_4} - \text{etc.} = 0$,

en s'arrêtant à la différentielle de l'ordre le plus élevé qui soit dans U_1 : on auroit de la même manière

$$\frac{dU_1}{dy} - d.\frac{dU_1}{dy_1} + d^2.\frac{dU_1}{dy_2} - d^3.\frac{dU_1}{dy_3} + d^4.\frac{dU_1}{dy_4} - \text{etc.} = 0.$$

87. Quoique nous n'ayons supposé que deux variables dans U, il est facile de voir qu'on aura, en général, autant d'équations pareilles que de variables. Ces équations seront identiques toutes les fois que U_1 exprimera la différentielle d'une fonction quelconque U de l'ordre immédiatement inférieur. Si donc on se propose d'examiner une fonction différentielle de l'ordre n, on y fera $dx = x_1$, $d^2x = x_2$,.... $dy = y_1$, $d^2y = y_2$,..... $d\zeta = \zeta_1$, $d^2\zeta = \zeta_2$, etc., et en la représentant par U_1, on formera les quantités

$$\frac{dU_1}{dx}, \frac{dU_1}{dx_1} \ldots \frac{dU_1}{dy}, \frac{dU_1}{dy_1} \ldots \frac{dU_1}{d\zeta}, \frac{dU_1}{d\zeta_1} \ldots \text{etc.}$$

pour les substituer dans les équations ci-dessus. Si on ne parvient point à des résultats qui s'anéantissent d'eux mêmes, on en pourra conclure que la fonction U_1 n'est la différentielle d'aucune fonction de l'ordre immédiatement inférieur.

Prenons pour exemple la fonction $x\,d^2y - y\,d^2x$, elle se change en $x\,y_2 - y\,x_2 = U_1$ et on a $\left.\begin{array}{l} \frac{dU_1}{dx} = y_2,\ \frac{dU_1}{dx_1} = 0,\ \frac{dU_1}{dx_2} = -y \\ \frac{dU_1}{dy} = -x_2,\ \frac{dU_1}{dy_1} = 0,\ \frac{dU_1}{dy_2} = x \end{array}\right\}$

ce qui donne $\left.\begin{matrix} y_1 - d^2 y = 0 \\ -x_1 + d^2 x = 0 \end{matrix}\right\}$, équations identiques. La fonction proposée est en effet la différentielle de $x\,dy - y\,dx$.

Les équations trouvées précédemment renferment implicitement celles que nous avons données n° 84, pour les fonctions du premier ordre. En effet, si on a $M\,dx + N\,dy + P\,dz$, on en tirera $Mx_1 + Ny_1 + Pz_1 = U_1$, et comme U_1 n'est que du premier ordre, on aura seulement les équations

$$\left.\begin{matrix} \frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} = 0 \\ \frac{dU_1}{dy} - d.\frac{dU_1}{dy_1} = 0 \\ \frac{dU_1}{dz} - d.\frac{dU_1}{dz_1} = 0 \end{matrix}\right\}$$

qui, en y mettant x_1 pour dx, y_1 pour dy et z_1 pour dz, donneront

$$\left.\begin{matrix} \frac{dN}{dx}y_1 + \frac{dP}{dx}z_1 - \frac{dM}{dy}y_1 - \frac{dM}{dz}z_1 = 0 \\ \frac{dM}{dy}x_1 + \frac{dP}{dy}z_1 - \frac{dN}{dx}x_1 - \frac{dN}{dz}z_1 = 0 \\ \frac{dM}{dz}x_1 + \frac{dN}{dz}y_1 - \frac{dP}{dx}x_1 - \frac{dP}{dy}y_1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Mais dans ces équations les différentielles x_1, y_1, z_1 doivent rester indéterminées, puisque les variables x, y et z sont indépendantes. En égalant séparément à zéro, ce qui multiplie chacune de ces différentielles, il en résultera les trois équations du n° cité.

Proposons-nous pour dernier exemple la fonction

$$P\,dx^2 + Q\,dx\,dy + R\,dy^2 + S\,d^2x + T\,d^2y,$$

elle prendra la forme

$$Px_1^2 + Qx_1y_1 + Ry_1^2 + Sx_2 + Ty_2 = U_1;$$

si on différentie U_1, en observant qu'il ne contient point x_2 ni y_2, on aura

$$\left.\begin{matrix} \frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} + d^2.\frac{dU_1}{dx_2} = 0 \\ \frac{dU_1}{dy} - d.\frac{dU_1}{dy_1} + d^2.\frac{dU_1}{dy_2} = 0 \end{matrix}\right\}$$

équations qui deviennent

$$\frac{dP}{dx}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dP}{dx}x_1^2+\frac{dQ}{dx}x_1y_1+\frac{dR}{dx}y_1^2+\frac{dS}{dx}x_2+\frac{dT}{dx}y_2-d(2Px_1+Qy_1)+d^2S=0\\&\frac{dP}{dy}x_1^2+\frac{dQ}{dy}x_1y_1+\frac{dR}{dy}y_1^2+\frac{dS}{dy}x_2+\frac{dT}{dy}y_2-d(Qx_1+2Ry_1)+d^2T=0\end{aligned}\right\}$$

Lorsque les différentiations indiquées seront effectuées, on égalera séparément à zéro les quantités qui multiplient $x_1^2, x_1y_1, y_1^2, x_2, y_2$, et il en résultera dix équations qui se réduiront à trois essentiellement différentes, savoir :

$$P-\frac{dS}{dx}=0,\quad R-\frac{dT}{dy}=0,\quad Q-\frac{dT}{dx}-\frac{dS}{dy}=0.$$

88. Soit U_2 la différentielle première de la fonction U_1, on aura l'équation

$$\frac{dU_2}{dx}-d.\frac{dU_2}{dx_1}+d.^2\frac{dU_2}{dx_2}-d.^3\frac{dU_2}{dx_3}+d.^4\frac{dU_2}{dx_4}-\text{etc.}=0\ (1),$$

mais on a aussi

$$\frac{dU_1}{dx}-d.\frac{dU_1}{dx_1}+d.^2\frac{dU_1}{dx_2}-d.^3\frac{dU_1}{dx_3}+\text{etc.}=0,$$

à cause que U_1 étant d'un ordre inférieur à U_2, doit contenir une différentielle de moins relativement à chaque variable.

La relation de U_2 à U_1 étant la même que celle de U_1 à U, on aura, d'après le tableau de la page 182,

$$\frac{dU_2}{dx}=d.\frac{dU_1}{dx}$$
$$\frac{dU_2}{dx_1}=\frac{dU_1}{dx}+d.\frac{dU_1}{dx_1}$$
$$\frac{dU_2}{dx_2}=\frac{dU_1}{dx_1}+d.\frac{dU_1}{dx_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dU_2}{dx_n}=\frac{dU_1}{dx_{n-1}}$$

La seconde équation de cette suite donne

$$\frac{dU_1}{dx}=\frac{dU_2}{dx_1}-d.\frac{dU_1}{dx_1}$$

la troisième $\quad d.\frac{dU_1}{dx_1}=d.\frac{dU_1}{dx_1}-d.^2\frac{dU_1}{dx_2}$

etc. . . . . etc. . . . . .

on tirera facilement de là

$$\frac{dU_1}{dx} = \frac{dU_2}{dx_1} - d.\frac{dU_3}{dx_2} + d.^2\frac{dU_4}{dx_3} - d.^3\frac{dU_5}{dx_4} + \text{etc.}$$

En partant successivement de la troisième équation, de la quatrième etc. on trouvera de la même manière,

$$\frac{dU_2}{dx_1} = \frac{dU_3}{dx_2} - d.\frac{dU_4}{dx_3} + d.^2\frac{dU_5}{dx_4} + \text{etc.}$$

$$\frac{dU_3}{dx_2} = \frac{dU_4}{dx_3} - d.\frac{dU_5}{dx_4} + \text{etc.}$$

$$\frac{dU_4}{dx_3} = \frac{dU_5}{dx_4} - \text{etc.}$$

etc.

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_2}{dx_1} + d.^2\frac{dU_3}{dx_2} - d.^3\frac{dU_4}{dx_3} + \text{etc.} = 0,$$

il viendra

$$\frac{dU_2}{dx_1} - 2\,d.\frac{dU_3}{dx_2} + 3\,d.^2\frac{dU_4}{dx_3} - 4\,d.^3\frac{dU_5}{dx_4} + \text{etc.} = 0 \quad (2).$$

Les équations (1) et (2) doivent être identiques en même-temps, lorsque la fonction U_1 sera la différentielle de U, et que U_2 sera celle de U_1; c'est-à-dire lorsque U_2 sera la différentielle seconde d'une fonction d'un ordre inférieur de deux unités.

89. Soit U_3 la différentielle de U_2, on aura d'abord

$$\frac{dU_3}{dx} - d.\frac{dU_4}{dx_1} + d.^2\frac{dU_5}{dx_2} - d.^3\frac{dU_6}{dx_3} + d.^4\frac{dU_7}{dx_4} - \text{etc.} \ldots (1),$$

et en vertu du n° précédent,

$$\frac{dU_2}{dx} - d.\frac{dU_3}{dx_1} + d.^2\frac{dU_4}{dx_2} - d.^3\frac{dU_5}{dx_3} + \text{etc.} = 0,$$

$$\frac{dU_3}{dx_1} - 2\,d.\frac{dU_4}{dx_2} + 3\,d.^2\frac{dU_5}{dx_3} + \text{etc.} = 0$$

mais on déduira les valeurs de $\frac{dU_2}{dx}$, $\frac{dU_3}{dx_1}$ etc. de celles de $\frac{dU_1}{dx}$, $\frac{dU_2}{dx_1}$ etc. données ci-dessus, en augmentant d'une unité les indices inférieurs de la lettre U; et en substituant les résultats dans les deux équations précédentes, on aura

$$\frac{dU_1}{dx_1} - 2\,d.\frac{dU_2}{dx_1} + 3\,d.^2\frac{dU_3}{dx_1} - 4\,d.^3\frac{dU_4}{dx_4} + \text{etc.} = 0\ (2)$$

$$\frac{dU_1}{dx_2} - 3\,d.\frac{dU_3}{dx_2} + 6\,d.^2\frac{dU_4}{dx_4} - \text{etc.} = 0\ (3)$$

équations qui seront identiques en même-temps que l'équation (1), si la fonction U_1 est la différentielle troisième d'une fonction quelconque U.

Nous n'avons eu égard qu'à la variable x, mais il est aisé de voir qu'on obtiendroit des résultats semblables par rapport à chacune des autres variables, et que de plus on arriveroit par le même procéde aux équations qui doivent être identiques lorsque la fonction proposée est une différentielle quatrième, cinquième, etc.

90. Pour donner une forme plus simple aux équations de condition trouvées précédemment, nous supposerons qu'ayant mis dans la fonction proposée x_1, x_2, etc. y_1, y_2, etc. au lieu de $dx, d^2x \ldots, dy, d^2y \ldots$, sa différentielle complète soit

$$\left.\begin{array}{l} X\,dx + X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 + X_4\,dx_4 + \text{etc.} \\ + Y\,dy + Y_1\,dy_1 + Y_2\,dy_2 + Y_3\,dy_3 + Y_4\,dy_4 + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} = dU_1,$$

on en tirera $\frac{dU_1}{dx} = X$, $\frac{dU_2}{dx_1} = X_1$, $\frac{dU_3}{dx_2} = X_2$, etc.

$$\frac{dU_1}{dy} = Y,\ \frac{dU_2}{dy_1} = Y_1,\ \frac{dU_3}{dy_2} = Y_2,\ \text{etc.}$$

et les équations de condition seront

$$\left.\begin{array}{l} X - dX_1 + d^2X_2 - d^3X_3 + d^4X_4 - \text{etc.} = 0 \\ X_1 - 2\,dX_2 + 3\,d^2X_3 - 4\,d^3X_4 - \text{etc.} = 0 \\ X_2 - 3\,dX_3 + 6\,d^2X_4 - \text{etc.} = 0 \end{array}\right\}$$

par rapport à la variable x; on obtiendroit celles qui sont relatives à y en changeant la lettre X en Y.

Il faut observer que la fonction proposée étant de l'ordre n, sa différentielle sera de l'ordre $n+1$, et que par conséquent X et Y seront du dégré n, par rapport aux différentielles qu'elles renferment; X_1 et Y_1 seront seulement du dégré $n-1$; X_2 et Y_2 du dégré $n-2$, etc. (*n° de la page 158*).

Nous avons supposé, pour plus de généralité, qu'aucune diffé-

rentielle ne fût constante ; si le contraire avoit lieu, il faudroit supprimer les équations relatives aux variables dont les différentielles premières auroient été regardées comme constantes. Cela est aisé à voir ; car si on suppose, par exemple, que dx soit constant, il ne restera des équations contenues dans la première colonne du tableau de la page 182, que la suivante : $\frac{dU}{dx} = d.\frac{dU}{dx}$; de laquelle on ne peut rien conclure, puisque U est absolument inconnu.

91. Il existe entre une fonction homogène et ses coefficiens différentiels des relations particulières qu'il est important de connoître.

Si V désigne une fonction homogène de x, y, etc. et qu'on y substitue tx, ty, etc. au lieu de x, y, etc. elle prendra nécessairement la forme $t^m V$, m étant la somme des exposans dans chaque terme (n° 66). Supposant ensuite que t devienne $t+g$, on aura $(t+g)^m V$ au lieu de V, ou $(1+g)^m V$, en faisant $t = 1$. Dans la même hypothèse x, y etc. se changeront respectivement en $x+gx, y+gy$, etc. ; mais on a en général lorsque x, y etc deviennent $x+h$ et $y+k$,

$$\left.\begin{array}{l} V + \frac{dV}{dx}h + \frac{dV}{dy}k + \text{etc.} \\ + \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2V}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2V}{dx\,dy}hk + \frac{d^2V}{dy^2}k^2 + \text{etc.}\right\} \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

substituant pour h, k etc. leur valeur, on parviendra à cette équation

$$\left.\begin{array}{l} V + \frac{dV}{dy}gx + \frac{dV}{dy}gy + \text{etc.} \\ + \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2V}{dx^2}g^2x^2 + 2\frac{d^2V}{dx\,dy}g^2xy + \frac{d^2V}{dy^2}g^2y^2 + \text{etc.}\right\} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} = (1+g)^m V.$$

En développant le second membre, et comparant ensemble les termes affectés de la même puissance de l'indéterminée g, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dV}{dx}x + \frac{dV}{dy}y + \text{etc.} = mV \\ \frac{d^2V}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2V}{dx\,dy}xy + \frac{d^2V}{dy^2}y^2 = m(m-1)V \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

La première de ces équations renferme le théorème des fonctions homogènes dont on fait un grand usage dans le Calcul intégral et les autres équations en sont des conséquences.

Méthode des limites.

92. Pour compléter les notions du calcul différentiel, exposées dans ce qui précède, il nous reste à montrer l'identité des coefficiens différentiels avec les limites des rapports que les accroissemens des variables ont entr'eux; c'étoit ainsi que d'Alembert envisageoit ce calcul et son application à la théorie des courbes.

La fonction u devenant $u+ph+qh^2+rh^3+$ etc. (n° 2), lorsque x se change en $x+k$, si on désigne par k la différence qui existe entre ses deux états consécutifs, on aura $k=ph+qh^2+rh^3+$ etc. et par conséquent $\frac{k}{h}=p+qh+rh^2+$ etc. Lorsque k et h s'évanouissent, le second membre de cette équation ne s'évanouit pas, mais il se réduit seulement à p, quantité qui est la limite du rapport des deux accroissemens k et h, (*Introd.* n° 4.), et qui exprime aussi le premier coefficient différentiel de la fonction u (n° 11.)

En considérant p lui-même comme une nouvelle fonction de x, il deviendra $p+p'h+q'h^2+r'h^3+$ etc., lorsque x deviendra $x+h$, et nommant k' la différence de ses deux états, on trouvera $\frac{k'}{h}=p'+q'h+r'h^2+$ etc.; la limite du rapport $\frac{k'}{h}$ sera donc p', ou le coefficient différentiel du second ordre.

Prenant ainsi successivement la limite du rapport de l'accroissement de chaque coefficient différentiel à celui de la variable x, on déduira tous ces coefficiens les uns des autres, et leur formation de cette manière sera absolument la même que dans les n°s 9 et 10. Il suit de là que les procédés par lesquels on peut obtenir les limites du rapport des accroissemens, donneront les expressions des coefficiens différentiels $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$ etc.

93. Rien n'est plus facile à l'égard des fonctions algébriques, et les règles que nous avons données n° 18, s'appliquent également au cas où on chercheroit ces coefficiens, en les considérant comme les limites des rapports des accroissemens, puisqu'il faut encore, sous ce

point de vue, négliger les puissances de h ou de dx supérieures à la première.

On peut aussi se dispenser de réduire en série les fonctions logarithmiques et circulaires. En effet, soit $u = \mathrm{l}\, x$, et supposons que x devenant $x + h$, u se change en $u + k$; d'après la nature des logarithmes, les deux nombres u et $u + h$ doivent faire partie d'une progression arithmétique, tandis que x et $x + h$ seront leurs correspondans dans une progression géométrique. Soit r la raison de cette dernière, on aura $\frac{x+h}{x} = r$, d'où $h = (r-1)x$; et par conséquent $\frac{k}{h} = \frac{k}{(r-1)x}$. Mais plus les intervalles entre les termes de l'une et de l'autre progression se resserreront, moins les progressions différeront d'un système de logarithmes, et plus en même-temps la raison de la progression géométrique approchera de l'unité; faisons donc $r = 1 + mk$, il viendra $\frac{k}{h} = \frac{1}{mx} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{x}$: donc la limite $\frac{du}{dx}$ sera $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{x}$ ou $\frac{M}{x}$ en faisant $\frac{1}{m} = M$; résultat conforme à celui du n° 20.

Si on avoit $u = a^x$, on en tireroit $\mathrm{l}\, u = x \,\mathrm{l}\, a$, et $\frac{du}{u} = dx \,\mathrm{l}\, a$, d'où $du = u\, dx \,\mathrm{l}\, a = a^x\, dx \,\mathrm{l}\, a$.

Soit $u = \sin x$; on aura $u + k = \sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$, donc

$k = \sin x \cos h + \cos x \sin h - u = \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x =$
$= \sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h.$

Mais à cause de $\sin h^2 + \cos h^2 = 1$, on a $\sin h^2 = 1 - \cos h^2 =$ $(1 + \cos h)(1 - \cos h)$; par conséquent $1 - \cos h = \frac{\sin h^2}{1 + \cos h}$, et en substituant dans l'expression de k, il vient

$k = -\sin x . \frac{\sin h^2}{1 + \cos h} + \cos x \sin h$: divisant ensuite par $\sin h$, on trouve $\frac{k}{\sin h} = -\sin x . \frac{\sin h}{1 + \cos h} + \cos x$. Or plus l'arc k devient

petit, moins il diffère de son sinus; le rapport $\frac{k}{\sin h}$ tend donc vers $\frac{k}{h}$, en même-temps que le second membre de l'équation précédente tend vers $\cos x$; on aura donc $\frac{du}{dx} = \cos x$. (*)

Soit $u = \cos x$; on aura $u + k = \cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$ et $k = \cos x (\cos h - 1) - \sin x \sin h = -\cos x \cdot \frac{\sin h^2}{1 + \cos h} - \sin x \sin h$; d'où $\frac{k}{\sin h} = -\cos x \frac{\sin h}{1 + \cos h} - \sin x$: la limite sera $\frac{du}{dx} = -\sin x$.

94. La considération des limites s'applique également aux fonctions de plusieurs variables; car alors on a autant de limites différentes pour une même fonction qu'il y a de variables indépendantes; ainsi u étant une fonction de x et de y, $\frac{du}{dx}$ est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction u à celui de la variable x,

---

(*) On trouvera peut-être singulier que je n'aie pas, comme plusieurs auteurs, conclu tout de suite que lorsque h s'évanouit, $\cos h$ devenant l'unité, $\cos h - 1$ s'évanouit aussi, et qu'alors $\frac{k}{\sin h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{\sin h} + \cos x$ se réduit à $\frac{k}{h} = \cos x$. Mais ce raisonnement n'est point exact; car $\sin h$ et h deviennent 0 en même tems que $\cos h - 1$ et on auroit $\frac{k}{h} = \frac{0}{0} \sin x + \cos x$. Or l'expression $\frac{0}{0}$ qui affecte $\sin x$ est indéterminée, ainsi à la rigueur on ne peut rien tirer de cette équation. Il n'en est pas de même du procédé que j'ai suivi, parce que dans le second membre de l'équation $\frac{k}{\sin h} = -\frac{\sin h}{1 + \cos h} \sin x + \cos x$, aucun terme ne devient $\frac{0}{0}$.

Lorsqu'on employe la considération des infiniment petits dont nous parlerons plus loin, la remarque que je viens de faire a encore son application; en effet, si on se contentoit de dire que l'arc h étant infiniment petit, diffère infiniment peu du rayon, et que par conséquent $\cos h - 1 = 0$, cela ne suffiroit pas, puisque $\sin h$ étant lui-même infiniment petit, le terme $\cos x \sin h$ pourroit être comparable avec $\cos x$ multiplié par la différence infiniment petite $\cos h - 1$. Ce n'est donc qu'après avoir montré que $\cos h - 1$ dépend de $\sin h^2$, c'est-à-dire d'un infiniment petit du second ordre qu'on peut supprimer $\sin x (\cos h - 1)$ devant $\cos x \sin h$.

lorsque cette dernière change seule ; et $\frac{du}{dy}$ est la limite analogue à l'égard de y.

95. La théorie des équations différentielles s'accorde aussi avec la recherche des limites ; car si dans l'équation $f(x,y)=0$, on met $x+h$ au lieu de x et $y+k$ au lieu de y, elle devient $f(x+h, y+k)=0$, et en retranchant la proposée, on a $f(x+h,y+k)-f(x,y)=0$; résultat qui est toujours de la forme

$$Mh+Nk+Ph^2+Qhk+Rk^2+\text{etc.}=0.$$

Divisant par h, on trouve

$$M+N\frac{k}{h}+Ph+Qk+Rk\frac{k}{h}+\text{etc.}=0,$$

ce qui donne $\frac{k}{h}=\frac{-M-Ph-Qk}{N+Rk+\text{etc.}}$; mais lorsque k et h s'évanouissent, la limite du rapport $\frac{k}{h}$ devient alors $\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}$, d'où il suit $N\,dy+M\,dx=0$. On étendroit aisément ces considérations aux ordres supérieurs au premier.

96. On ne manquera pas d'observer que puisque l'expression $\frac{0}{0}$ est indéterminée, le rapport $\frac{k}{h}$ doit être indéterminé, lorsqu'on suppose $k=0$ et $h=0$. Telle est l'objection qu'on fait contre la méthode des limites ; mais elle me semble facile à détruire, car je ne vois pas qu'on ait besoin de considérer le rapport des accroissemens k et h lorsqu'ils s'évanouissent, ni de chercher à concevoir comment les quantités peuvent garder un rapport lorsqu'elles cessent d'exister. La limite d'un rapport n'est point le rapport lui-même ; mais une quantité dont il peut approcher d'aussi près qu'on voudra. Or cela est exactement vrai à l'égard du rapport $\frac{k}{h}$, sans que k ni h soient nuls, ainsi l'objection n'attaque donc point le calcul des limites en lui-même. On verra dans la suite qu'elle n'a pas plus de prise sur ses applications puisqu'elles n'ont pour objet que de comparer des rapports de lignes, qui peuvent différer aussi peu qu'on voudra de ceux qu'on cherche, et que les Géomètres anciens, sur l'exactitude desquels

on

on n'élève aucun doute, ont toujours regardé comme égales deux grandeurs dont la différence étoit moindre qu'aucune grandeur donnée.

On pourroit donc envisager le Calcul différentiel comme ayant pour objet *la recherche des limites des rapports qu'ont entr'eux les accroissemens des quantités variables, lorsqu'on connoît les relations de ces quantités*, et sous ce point de vue ses résultats seroient encore indépendans de la valeur particulière des accroissemens.

97. Leibnitz, l'un des inventeurs du Calcul différentiel, l'a présenté d'une manière moins rigoureuse que les précédentes, mais cependant plus commode dans les applications, et que par cette raison il est bon de connoître. Il suppose que les quantités variables prennent des accroissemens infiniment petits et tels qu'on doit les négliger vis-à-vis des grandeurs finies, en sorte que ces accroissemens ne peuvent jamais être comparés qu'entr'eux ; il forme ensuite cette demande, *qu'on puisse prendre à volonté l'une pour l'autre deux grandeurs qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite ;* d'où il résulte qu'il faut supprimer dans le développement des accroissemens des fonctions, toutes les puissances de dx, dy, etc. supérieures à la première. Ainsi pour obtenir la différentielle de xy, ayant développé le produit $(x+dx)(y+dy)=xy+xdy+ydx+dxdy$, et retranché ensuite la fonction primitive xy, il rejette le terme $dxdy$, comme étant infiniment petit à l'égard des deux autres, ce qui donne $d.xy=xdy+ydx$.

En effet, $dxdy$ peut être considéré comme le quatrième terme de cette proportion $1:dx::dy:dxdy$; donc si dx est infiniment petit par rapport aux grandeurs finies de la même espèce que l'unité, c'est-à-dire, s'il est contenu un nombre infini de fois dans l'unité, $dxdy$ sera contenu de même un nombre infini de fois dans dx, ou dans dy.

La règle de la différentiation de xy conduit, ainsi qu'on l'a vu n°. 16 et 17, aux différentielles de toutes les fonctions algébriques, et pour les fonctions transcendantes, la supposition des accroissemens infiniment petits lève beaucoup de difficultés : dans le cas des fonctions circulaires, par exemple, elle permet de considérer l'arc

comme ne différant point de son sinus, et le cosinus comme égal au rayon.

L'homogénéité des expressions différentielles est une suite nécessaire de la méthode de Leibnitz; car d'après la remarque faite ci-dessus, à l'égard de $dxdy$, il ne peut rester que des termes du degré le moins élevé; *tous les autres doivent être négligés vis-à-vis de ceux-ci.*

En passant au second ordre, Leibnitz regarde les différentielles secondes comme infiniment petites par rapport aux différentielles du premier, et par conséquent comme homogènes ou comparables aux quarrés de celles-ci. Il est aisé de voir que cette supposition est une conséquence nécessaire de celle qui a été faite à l'égard des différentielles du premier ordre; car si dans $Mdx+Ndy$, par exemple, on fait varier en même tems que dx et dy, les x et les y contenus dans M et dans N, on aura un résultat de la forme $Md^2x+Nd^2y+Pdx^2+Qdxdy+Rdy^2$; mais dx^2, $dxdy$ et dy^2 sont infiniment petits à l'égard de dx et dy, il faut donc pour l'homogénéité que d^2x et d^2y soient infiniment petits par rapport à dx et dy.

Il suit de là que *pour trouver les différentielles secondes, troisièmes*, etc. *il faut regarder les différentielles comme de nouvelles variables qui ont elles-mêmes leurs différentielles placées dans l'ordre supérieur, et rejetter du résultat tous les termes qui seroient d'un ordre plus élevé que celui-là.*

C'est de ce petit nombre de règles que se déduisent les divers procédés de la différentiation, et on voit qu'elles renferment toutes celles que nous avons déjà données. Les considérations qui viennent de nous y conduire méritent d'être remarquées, parce qu'elles peuvent être très-commodes dans les applications; elles ne doivent d'ailleurs avoir aucune obscurité, d'après les principes développés dans le cours de ce chapitre.

Je ne parlerai point ici de la théorie que Newton, qui partage avec Leibnitz la gloire d'avoir découvert le Calcul différentiel et le Calcul intégral, a donnée de ces calculs, parce qu'elle tient à la considération du mouvement qui est étrangère à l'analyse et à la géométrie.

CHAPITRE II.

Des principaux usages analytiques du Calcul différentiel.

Du développement des fonctions en séries.

98. LE procédé dont nous avons fait usage dans l'Introduction (n°. 20), pour développer la puissance n d'un polynome, peut se déduire aisément des règles du Calcul différentiel; car si on représente ce polynome par $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4$ etc. et qu'on fasse

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4+\text{etc.})^n = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.},$$

en prenant la différentielle logarithmique des deux membres de cette équation (n°. 20), on trouvera, après avoir divisé par dx,

$$\frac{n(\beta+2\gamma x+3\delta x^2+4\epsilon x^3+\text{etc.})}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4+\text{etc.}} = \frac{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.}}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}}$$

En faisant disparoître les dénominateurs, et en égalant ensemble les termes qui multiplient la même puissance de x dans chaque membre, on trouvera les mêmes équations qu'à la page 31, en changeant toutefois α en a, β en b, γ en c, δ en d, ϵ en e, etc. Le premier coefficient reste indéterminé dans ces calculs; mais il est aisé de voir qu'en faisant $x=0$, on aura $\alpha^n=A$.

Soit la fonction plus générale

$$\frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4+\text{etc.})^m}{(\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+\delta' x^3+\epsilon' x^4+\text{etc.})^n} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.};$$

en prenant les logarithmes de chaque membre de cette équation, il viendra

$$m\,l(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4\,\text{etc.})-n\,l(\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+\delta' x^3+\epsilon' x^4+\text{etc.})$$
$$= l(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.})$$

On trouvera ensuite par la différentiation,

$$\frac{m(\beta+2\gamma x+3\delta x^2+4\epsilon x^3+\text{etc.})}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4+\text{etc.}} - \frac{n(\beta'+2\gamma' x+3\delta' x^2+4\epsilon' x^3+\text{etc.})}{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+\delta' x^3+\epsilon' x^4+\text{etc.}} =$$
$$\frac{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.}}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}};$$

En réduisant les fractions au même dénominateur, transposant tous les termes dans un seul membre, et égalant séparément à zéro le coefficient de chaque puissance de x, on obtiendra les équations suivantes dont la loi est facile à saisir.

$$\left.\begin{matrix} \alpha\alpha' B + n\alpha\beta' \\ -m\beta\alpha' \end{matrix}\right\} A = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 2\alpha\alpha' C + (n+1)\alpha\beta' \\ -(m-1)\beta\alpha' \end{matrix}\right\} B + \left.\begin{matrix} 2n\alpha\gamma' \\ +(n-m)\beta\beta' \\ -2m\gamma\alpha' \end{matrix}\right\} A = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 3\alpha\alpha' D + (n+2)\alpha\beta' \\ -(m-2)\beta\alpha' \end{matrix}\right\} C + \left.\begin{matrix} (2n+1)\alpha\gamma' \\ +(n-m+1)\beta\beta' \\ -(2m-1)\gamma\alpha' \end{matrix}\right\} B + \left.\begin{matrix} 3n\alpha\delta' \\ +(2n-m)\beta\gamma' \\ +(n-2m)\gamma\beta' \\ -3m\delta\alpha' \end{matrix}\right\} A = 0$$

Ces équations ne déterminent point le premier coefficient A; mais en faisant $x=0$, on a $\frac{a^m}{a^m} = A$.

99. La méthode que nous avons employée dans les deux exemples précédens, consiste à faire disparoître les puissances indiquées par le moyen des logarithmes dont on se débarrasse ensuite par la différentiation; mais puisqu'on peut faire disparoître aussi les transcendantes d'une équation en la combinant avec ses différentielles (n°. 53), rien n'empêche qu'on ne leur applique cette même méthode.

L'une des plus simples de ces fonctions est $l(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.})$; si on représente son développement par $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ etc. et qu'on prenne la différentielle de l'équation

$$l(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}) = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

on trouvera

$$\frac{\beta+2\gamma x+3\delta x^2+\text{etc.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}} = B+2Cx+3Dx^2+\text{etc.}$$

et on déterminera les coefficiens A, B, C, D, etc. comme à l'ordinaire.

Prenons encore pour exemple

$$\sin(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}) = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}$$

et faisons pour abréger $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}=u$
$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}=y$

il en réfultera $y=\sin u$; et en différentiant il viendra $dy=du\cos u$. On pourroit éliminer $\cos u$ au moyen de l'équation $\cos u=\sqrt{1-\sin u^2}$, qui donne $\cos u=\sqrt{1-y^2}$, et on auroit alors $dy=du\sqrt{1-y^2}$; mais il faudroit encore faire disparoître le radical dans cette équation. Pour éviter ces inconvéniens on différentiera une seconde fois l'équation $dy=du\cos u$, et il viendra $d^2y=d^2u\cos u-du^2\sin u$; mettant pour $\sin u$ et $\cos u$ leurs valeurs y et $\frac{dy}{du}$, on aura

$$d^2y=\frac{dy}{du}d^2u-y\,du^2, \text{ ou } du\,d^2y-dy\,d^2u+y\,du^3=0$$

Il ne s'agit plus maintenant que de substituer à y, dy, du, d^2u, du^3, leur valeur; or $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ etc. donne

$$dy=(B+2Cx+3Dx^2+\text{etc.})dx$$
$$d^2y=\quad(2C+2.3Dx+\text{etc.})dx^2$$

et pour ne pas m'engager dans de trop longs calculs, je réduirai la fonction proposée à $\sin(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$, en faisant δ,ϵ, etc.$=0$. Dans ce cas particulier $du=(\beta+2\gamma x)dx$

$d^2u=2\gamma\,dx^2$, $\qquad du^3=(\beta^3+6\beta^2\gamma x+12\beta\gamma^2x^2+8\gamma^3x^3)dx^3$;

au moyen de ces valeurs l'équation $du\,d^2y-dy\,d^2u+y\,du^3=0$ devient divisible par dx, et en l'ordonnant par rapport à x, elle prend la forme suivante:

$$\left.\begin{array}{r}2\beta C+6\beta Dx+12\ \beta\ Ex^2+\text{etc.}\\ +4\gamma\ Cx+12\ \gamma\ Dx^2+\text{etc.}\\ +\beta^3A+6\beta^2\gamma Ax+12\beta\gamma^2Ax^2+\text{etc.}\\ +\beta^3Bx+\ 6\beta^2\gamma Bx^2+\text{etc.}\\ +\beta^3Cx^2+\text{etc.}\\ -2\gamma B-4\gamma\ Cx-\ 6\ \gamma\ Dx^2-\text{etc.}\end{array}\right\}=0$$

En égalant à zéro les coefficiens de chaque puissance de x, on obtiendra les équations qui déterminent C, D, E, etc.; à l'égard de A et B, il faut recourir aux équations $y=\sin u$ et $\frac{dy}{du}=\cos u$.

Quand on suppose $x=0$, la première donne $A=\sin\alpha$, et la seconde $B=\cos\alpha$, parce qu'alors y se réduit à A, u à α, dy à $B\,dx$, et du à $\beta\,dx$.

100. Le théorême de Taylor offre un moyen aussi simple qu'élégant de réduire les fonctions en séries, et voici comment:
Si on représente une fonction quelconque $f(x)$ par y; on a (n°. 12.)

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

En faisant $x=0$, $f(x+h)$ se change en $f(h)$, et en désignant par Y, Y', Y'', Y''', etc. ce que deviennent $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc. dans cette hypothèse, on aura $f(h)=Y+Y'\frac{h}{1}+Y''\frac{h^2}{1.2}+Y'''\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$

Cette équation ayant lieu quelle que soit la valeur de h, on pourra écrire x au lieu de h, ce qui ne changera rien aux quantités Y, Y', etc. qui ne contiennent point cette lettre, et on aura alors

$$f(x)=Y+Y'\frac{x}{1}+Y''\frac{x^2}{1.2}+Y'''\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Les opérations que nous avons faites sur la série

$y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+$ etc. pour parvenir à la précédente, se réduisent à supposer $x=0$ dans les quantités y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. et à mettre ensuite x au lieu de h; nous pouvons donc écrire dorénavant $f(x)=y+\frac{dy}{dx}\frac{x}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^3}{1.2.3}+$, etc. en nous rappellant qu'*il faudra faire* $x=0$ *dans la fonction* y *et dans chacun de ses coefficiens différentiels.* Quelques exemples vont éclaircir ceci.

101. Soit, 1°. $y=a^x$ la fonction à développer; lorsqu'on fait $x=0$, on a $a^x=a^0=1$, d'où $Y^0=1$;

de plus $\left.\begin{matrix}\frac{dy}{dx}=a.la\\ \frac{d^2y}{dx^2}=a^x(la)^2\\ \frac{d^3y}{dx^3}=a^x(la)^3\\ \text{etc.}\end{matrix}\right\}$ donnent $\left\{\begin{matrix}Y'=la\\ Y''=(la)^2\\ Y'''=(la)^3\\ \text{etc.}\end{matrix}\right.$

par conséquent $a^x=1+la\frac{x}{1}+(la)^2\frac{x^2}{1.2}+(la)^3\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$

102. Il est aisé de s'appercevoir par ce procédé, qu'on ne sauroit développer, suivant les puissances entières et positives de x, une fonction qui seroit telle que les quantités Y, Y', Y'', Y''', etc. deviendroient infinies. Si on avoit, par exemple, $y=lx$, dans ce cas, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2}{x^3}$, etc., et la supposition de $x=0$, rend ces quantités infinies aussi bien que y. Nous remarquerons en passant qu'il n'est pas nécessaire que toutes les quantités Y, Y', Y'', etc. deviennent infinies à la fois pour que la réduction en série ne puisse avoir lieu dans la forme supposée; nous reviendrons sur ce sujet et nous ferons connoître à quoi tient la difficulté.

Si on s'étoit proposé $y=l(a+x)$ on auroit eu

$$Y=a,\ Y'=\frac{1}{a},\ Y''=-\frac{1}{a^2},\ Y'''=\frac{2}{a^3}\ \text{etc.}$$

et $l(a+x)=la+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\text{etc.}$

103. On appliquera sans peine aux fonctions $\sin x$ et $\cos x$, le procédé que nous venons d'exposer; on trouvera pour la première $Y=0$, $Y'=1$, $Y''=0$, $Y'''=-1$, etc.

d'où $\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\text{etc.}$,

et pour la seconde $Y=1$, $Y'=0$, $Y''=-1$, $Y'''=0$ etc.,

d'où $\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}$,

résultats conformes à ceux du n°. 35 de l'Introduction.

Soit encore à développer $\sin(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$; on aura

$$\left.\begin{array}{l} y=\sin(\alpha+\beta x+\gamma x^2) \\ \frac{dy}{dx}=(\beta+2\gamma x)\cos(\alpha+\beta x+\gamma x^2) \\ \frac{d^2y}{dx}=2\gamma\cos(\alpha+\beta x+\gamma x^2)-(\beta+2\gamma x)^2\sin(\alpha+\beta x+\gamma x^2) \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ et en faisant } x=0 \left\{\begin{array}{l} Y=\sin\alpha \\ Y'=\beta\cos\alpha \\ Y''=2\gamma\cos\alpha-\beta^2\sin\alpha \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

104. Si on représente par y un arc de cercle dont le sinus soit x, on aura l'équation différentielle $dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, qui nous conduira au développement de l'arc suivant les puissances du sinus. En effet, on en tirera

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}, \qquad \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{9x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3\cdot5x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{dy^5}{d^5x}=\frac{3\cdot3}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{2\cdot5\cdot9x^2}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}+\frac{3\cdot5\cdot7x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}, \text{ etc.}$$

En faisant $x=0$, on trouvera

$Y=0$, $Y'=1$, $Y''=0$, $Y'''=1$, $Y^{IV}=0$, $Y^{V}=3\cdot3$, etc.

et par conséquent $y=x+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{3\cdot3x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+$ etc.; mais nous pouvons obtenir immédiatement le terme général de cette suite, en observant que $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\frac{1}{dx^n}d^n.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; car l'expression générale de $d^n.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donnée page 131, s'anéantit lorsqu'on suppose $x=0$, toutes les fois que le nombre n est impair, et lorsqu'il est pair, elle se réduit à son dernier terme, qui devient $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots\ n}n(n-1)\ldots\ldots1$, en effaçant les facteurs communs

communs au numérateur et au dénominateur. Le terme général $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{1.2.3...(n+1)}$, de la série cherchée, deviendra donc, en mettant pour $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ la valeur de $\frac{1}{dx^n}d^n.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qu'on vient de trouver, $\frac{1.3.5.7....(n-1)x^{n+1}}{2.4.6.8....n(n+1)}$: on voit d'ailleurs que $n+1$ sera nécessairement un nombre impair.

En écrivant $\sin y$ au lieu de x, et en donnant à n les valeurs successives 0, 2, 4, 6, etc. on formera la série suivante :

$$y=\sin y+\frac{\sin y^3}{2.3}+\frac{3\sin y^5}{2.4.5}+\frac{3.5\sin y^7}{2.4.6.7}+\frac{3.5.7\sin y^9}{2.4.6.8.9}+\text{etc.}$$

La manière dont nous y sommes parvenus a l'avantage de faire connoître la loi que suivent ses termes, et qu'on n'appercevoit pas d'abord par le procédé du n°. 35 de l'Introduction.

C'est par cette série que Newton a calculé la longueur de la circonférence. En faisant $\sin y=1$, elle donne l'arc de $90^\circ=$

$$1+\frac{1}{2.3}+\frac{3}{2.4.5}+\frac{3.5}{2.4.6.7}+\frac{3.5.7}{2.4.6.8.9}+\text{etc.}$$

Si on supposoit $\sin y=\frac{1}{2}$, on auroit alors l'arc de 30° par une série encore plus convergente que la précédente, car on trouveroit

$$\text{arc de } 30^\circ=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4.3}+\frac{3}{2^6.4.5}+\frac{3.5}{2^8.4.6.7}+\frac{3.5.7}{2^{10}.4.6.8.9}+\text{etc.}$$

On parviendroit à connoître la longueur de la circonférence entière, en multipliant le premier résultat par 4, ou le second par 12.

105. Passons à la recherche de l'arc par sa tangente; en nommant y l'arc et x sa tangente, on a $dy=\frac{dx}{1+x^2}$, d'où il suit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2},\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{2}{(1+x^2)^2}+\frac{8x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{24x}{(1+x^2)^3}-\frac{48x^3}{(1+x^2)^4},\ \frac{d^5y}{dx^5}=\frac{24}{(1+x^2)^3}-\frac{288x^2}{(1+x^2)^4}+\frac{384x^4}{(1+x^2)^5}\text{ etc.}$$

et en faisant $x=0$, on trouve

$Y=0$, $Y'=1$, $Y''=0$, $Y'''=-2$, $Y^{IV}=0$, $Y^{V}=2.3.4$, etc. ;

on a donc $y=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$ etc.

La loi se manifeste dès les premiers termes ; mais pour s'assurer qu'elle est également observée dans les suivans, on aura recours, si l'on veut, à la formule du n°. 35, qui exprime la différentielle $n^{ième}$ de la fonction $(a+bx+cx^2)^r$. En y supposant $r=-1, a=1, b=0, c=1$, elle donnera la valeur de $d^n.\frac{1}{1+x^2}$ (*).

(*) Je crois devoir faire remarquer que si dans l'équation $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on réduisoit $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en série, on auroit

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{2}x^2}{1}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}x^4}{1.2}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}x^6}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ldots\frac{(n-1)}{2}}{1.2\ldots\frac{n}{2}}x^n+\text{etc.}$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots+\frac{1.3.5\ldots.(n-1)}{2.4.6\ldots.n}x^n+\text{etc.}$$

En représentant par $A, B, C, \ldots N, O$ les coefficiens des termes de cette série, on aura $\frac{dy}{dx}=1+Ax^2+Bx^4+Cx^6+\ldots+Nx^n+$ etc. et en différentiant il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2Ax+4Bx^3+6Cx^5+\ldots+Nx^{n-1}+\text{etc.}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2A+3.4Bx^2+5.6.Cx^4+\ldots+(n-1)nNx^{n-2}+\text{etc.}$$

. . . . . .

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\ldots\ldots\ldots 1.2\ldots.nN+2.3\ldots.(n+1)Ox+\text{etc.}$$

Lorsque $x=0$, tous les coefficiens d'un ordre pair disparoissent, et $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ se réduit à $1.2\ldots n.N$: donc $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ deviendra $\frac{Nx^{n+1}}{n+1}$, ou $\frac{1.3.5\ldots(n-1)x^{n+1}}{2.4.6\ldots.n(n+1)}$, en mettant pour N sa valeur.

En réduisant en série le binome $(1+x^2)^{-1}$ dans l'équation $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$, on aura $N=\pm 1$, selon que $\frac{n}{2}$ sera un nombre pair ou impair, et le terme général $\frac{Nx^{n+1}}{n+1}$ deviendra $\pm\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

106. Il n'est pas aussi facile de trouver le terme général de la série qui représente le développement de l'arc suivant les puissances de sa tangente; car en renversant les dénominations, c'est-à-dire, en appellant x l'arc et y sa tangente, on a $dx=\frac{dy}{1+y^2}$ et par conséquent $\frac{dy}{dx}=1+y^2$: l'expression de $\frac{dy}{dx}$ dépend donc alors de la fonction y elle-même.

Lorsqu'on fait $x=0$, on a $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=1$:

à l'aide de ces valeurs et en différentiant plusieurs fois de suite l'équation $\frac{dy}{dx}=1+y^2$, on trouvera

$$\frac{d^0y}{dx^0}=0, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=2; \qquad \frac{d^3y}{dx^3}=0$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=16, \qquad \frac{d^5y}{dx^5}=0, \qquad \frac{d^6y}{dx^6}=272, \text{ etc.}$$

$$\text{donc } y=\frac{x}{1}+\frac{2x^3}{1.2.3}+\frac{16x^5}{1.2.3.4.5}+\frac{272.x^7}{1.2.3.4.5.6.7} \text{ etc.}$$

Pour trouver le terme général de cette série, il faudroit connoître l'expression de $d^n.(1+y^2)$, au moins dans le cas de $x=0$; mais on voit qu'aucune différentielle de y ne pouvant être prise pour constante, l'expression cherchée doit les contenir toutes jusqu'à celle de l'ordre n inclusivement; on ne peut donc de cette manière exprimer le coefficient $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ qu'au moyen de tous ceux qui le précèdent.

Je ne m'arrêterai un moment à cette recherche que parce qu'elle me fournira l'occasion de faire connoître deux résultats différentiels remarquables par leur forme.

107. J'observe d'abord qu'on a $d^n(1+y^2)=d^n.y^2=d^n(y.y)$, et que c'est la réduction des termes semblables qui empêche de reconnoître la loi de formation des différentielles successives de y^2. Pour éviter cette réduction, je suppose qu'on ait yz au lieu de y^2; alors en différentiant plusieurs fois de suite, je trouve

$d.y\zeta = yd\zeta + \zeta dy$

$d^2.y\zeta = yd^2\zeta + 2dyd\zeta + \zeta d^2y$

$d^3.y\zeta = yd^3\zeta + 3dyd^2\zeta + 3d\zeta d^2y + \zeta d^3y$

$d^4.y\zeta = yd^4\zeta + 4dyd^3\zeta + 6d^2yd^2\zeta + 4d\zeta d^3y + \zeta d^4y$

+ etc.

L'analogie de ces formules avec les puissances du binome est sensible, et on la rend tout à fait évidente par un procédé semblable à celui du n°. 31. En effet, soit

$d^n.y\zeta = y\,d^n\zeta + A\,dy\,d^{n-1}\zeta + B\,d^2y\,d^{n-2}\zeta + C\,d^3y\,d^{n-3}\zeta +$ etc., A, B, C, etc. étant des coefficiens constans; si on différentie cette équation il viendra

$$d^{n+1}.y\zeta = y\,d^{n+1}\zeta + \left.\begin{matrix}A\\+1\end{matrix}\right\}dy\,d^n\zeta + \left.\begin{matrix}B\\+A\end{matrix}\right\}d^2yd^{n-1}\zeta + \left.\begin{matrix}C\\+B\end{matrix}\right\}d^3yd^{n-2}\zeta + \text{etc.}$$

et on voit par-là, comme dans le n°. cité, que les coefficiens A, B, C, etc. se forment ainsi que ceux des termes correspondans des puissances des binomes; on aura donc

$$d^n.y\zeta = yd^{n-1}\zeta + \frac{n}{1}dyd^{n-2}\zeta + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2yd^{n-2}\zeta + \text{etc.}$$

Le développement de $(d\zeta+dy)^n$ donnera donc celui de $d^n.y\zeta$, en appliquant à la caractéristique d les exposans que portent les $d\zeta$ et les dy, et en observant que $d^0y=y$ et $d^0\zeta=\zeta$.

On tireroit l'expression de $d^n.yzu$ de celle de $d^n.y\zeta$, en substituant zu à ζ et $d.zu$, $d^2.zu$, $d^3.zu$ etc. à $d\zeta$, $d^2\zeta$, $d^3\zeta$ etc.; on trouveroit ainsi un résultat parfaitement analogue au développement du trinome $(y+z+u)^n$.

Cela posé, si dans $d^n.y\zeta$ on fait $\zeta=y$, on aura l'expression de $d^n.y^2$; et il est aisé de voir que tous les termes également éloignés des extrêmes de la formule deviendront égaux entr'eux: or le nombre total de ces termes étant $n+1$, il est évident qu'il suffira de prendre deux fois la somme des $\frac{n+1}{2}$ premiers termes pour avoir la valeur de toute la formule, si n est impair. Mais lorsque n est pair, elle contient un terme moyen qui occupe le rang marqué par $\frac{n}{2}+1$ et qui n'est point répété, on doit donc alors prendre

le double des $\frac{n}{2}$ premiers termes et y ajouter ce terme moyen.

108. A l'aide de ces considérations, et en vertu de l'équation $\frac{dy}{dx}=1+y^2$ qui donne $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\frac{d^n(1+y^2)}{dx^n}=\frac{d^n.y^2}{dx^n}$, on formera successivement $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, $\frac{d^5y}{dx^5}$ etc. Mais en faisant $x=0$ tous les coefficiens différentiels d'un ordre pair s'anéantissent, et il ne reste que ceux qui sont d'un ordre impair; en substituant donc les lettres Y', Y'', Y''' à chacun de ces derniers on trouvera

$$Y'=1$$

$$Y'''=2Y'Y'$$

$$Y^{v}=2.4Y'Y'''$$

$$Y^{vii}=2.6Y'Y^{v}+\frac{6.5.4}{1.2.3}Y'''Y'''$$

$$Y^{ix}=2.8Y'Y^{vii}+2.\frac{8.7.6}{1.2.3}Y'''Y^{v}$$

$$Y^{xi}=2.10Y'Y^{ix}+2.\frac{10.9.8}{1.2.3}Y'''Y^{vii}+\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}Y^{v}Y^{v}$$

On aura en général

$$Y^{(n+1)}=2\left\{nY'Y^{(n-1)}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}Y'''Y^{(n-3)}+\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}Y^{v}Y^{(n-5)}+\text{etc.}\right\}$$

Il faudra avoir l'attention de ne pousser cette série que jusqu'au terme dont l'indice est $\frac{n}{2}-1$, si $\frac{n}{2}$ est un nombre pair; et dans le cas où $\frac{n}{2}$ seroit un nombre impair, comme on tomberoit sur le terme moyen dont on a parlé plus haut, il ne faudroit prendre que la moitié de son coefficient. Tout ceci est analogue à ce qui a été dit relativement aux séries des sinus des arcs multiples dans le n°. 42 de l'Introduction, et sera facilement entendu par ceux qui prendront la peine de développer les formules qu'on a supprimées à cause de leur longueur.

109. On a vu dans le n°. 92, que la considération des limites pouvoit

conduire à la théorie du Calcul différentiel. Cette théorie une fois établie, on en déduit bien aisément les procédés qui servent à développer les fonctions en séries et le théorême de Taylor.

Soit $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$;

en différentiant cette expression, on trouvera

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \text{etc.}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 1.2.3D + 2.3.4Ex + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Si la forme de la fonction y est connue d'ailleurs, on aura en x l'expression des quantités $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc.; désignant par Y, Y', Y'', Y''', etc. ce que deviennent ces quantités lorsqu'on fait $x = 0$, on tirera des équations ci-dessus, en y supposant aussi $x = 0$,

$$\left.\begin{array}{l} A = Y \\ B = \frac{1}{1}Y' \\ C = \frac{1}{1.2}Y'' \\ D = \frac{1}{1.2.3}Y''' \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{d'où } y = Y + Y'\frac{x}{1} + Y''\frac{x^2}{1.2} + Y'''\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

comme dans le n°. 100.

Si on vouloit développer la fonction quelconque $f(x+h)$ suivant les puissances de h, on feroit

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + \text{etc.}$$

et en différentiant par rapport à h, on trouveroit

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} = B + 2Ch + 3Dh^2 + 4Eh^3 + \text{etc.}$$
$$\frac{d^2f(x+h)}{dh^2} = 2C + 2.3Dh + 3.4Eh^2 + \text{etc.}$$
$$\frac{d^3f(x+h)}{dh^3} = 1.2.3D + 2.3.4Eh + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Mais si on fait $x+h=x'$, il en résultera $f(x+h)=f(x')$, et on aura $d.f(x')=f'(x')\,dx'$, de quelque manière que varie x'; d'où il suit qu'en faisant varier à la fois x et h, il viendra $dx'=dx+dh$, et que par conséquent la différentielle complète de $f(x+h)$ sera $f(x')(dx+dh)$ ou $f'(x+h)\,dx+f'(x+h)\,dh$, expression dans laquelle le coefficient différentiel relatif à x est le même que celui qui est relatif à h. On aura donc

$$\frac{df(x+h)}{dh}=\frac{df(x+h)}{dx}=f'(x+h);$$ on trouvera de même

$$\frac{d^2f(x+h)}{dh^2}=\frac{df'(x+h)}{dh}=\frac{df'(x+h)}{dx}=\frac{d^2f(x+h)}{dx^2}$$

et en général $\frac{d^nf(x+h)}{dh^n}=\frac{d^nf(x+h)}{dx^n}$

On pourra donc substituer $\frac{df(x+h)}{dx}$, $\frac{d^2f(x+h)}{dx^2}$, etc. à la place de $\frac{df(x+h)}{dh}$, $\frac{d^2f(x+h)}{dh^2}$ etc.; faisant ensuite $h=0$ on trouvera

$$\left.\begin{aligned} A&= f(x)\\ B&= \frac{1}{1}\,\frac{df(x)}{dx}\\ C&= \frac{1}{1.2}\,\frac{d^2f(x)}{dx^2}\\ D&= \frac{1}{1.2.3}\,\frac{d^3f(x)}{dx^3}\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$ et en représentant $f(x)$ par y, le développement de la valeur que prend y lorsque x se change en $x+h$, sera

$$y+\frac{dy}{dx}\,\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{h^3}{1.2.3}\text{ etc.}$$

comme il résulte du théorême de Taylor.

110. Proposons-nous maintenant ce problême général: *étant donnée une équation à deux variables*, $f(x,y)=0$, *développer en série ordonnée suivant les puissances de* x, *la fonction quelconque* $F(x,y)$.

Soit $F(x,y)=u$; u sera évidemment une fonction implicite de x; car si on tiroit de l'équation $f(x,y)=0$, la valeur de y pour

la substituer dans $F(x,y)$, le résultat ne contiendroit plus que la seule variable x. On aura donc (n°. 100)

$u = U + U'\frac{x}{1} + U''\frac{x^2}{1.2} + U'''\frac{x^3}{1.2.3} +$ etc., en désignant par U, U', U'', U''', etc. ce que deviennent les quantités

u, $\frac{d(u)}{dx}$, $\frac{d^2(u)}{dx^2}$, $\frac{d^3(u)}{dx^3}$ etc., lorsque $x = 0$.

Pour trouver U, j'observe qu'en faisant $x=0$, la fonction $F(x,y)$ ou u, ne contiendra plus que la seule inconnue y, et que par conséquent sa valeur sera déterminée si on chasse cette inconnue, ce qu'on pourra faire au moyen de l'équation $f(x,y)=0$, qui dans la même hypothèse devient une équation entre y et des constantes seulement.

On a $\frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$; on se débarassera du coefficient $\frac{dy}{dx}$ en différentiant l'équation $f(x,y)=0$, qui donnera nécessairement un résultat de la forme $M\,dx + N\,dy = 0$, dont on tirera $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$; il viendra par conséquent $\frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{du}{dy}\frac{M}{N}$.

Maintenant si dans cette équation on fait $x=0$, et qu'on y substitue la valeur de y relative à cette hypothèse, on aura U'.

Pour obtenir U'', on cherchera d'abord $\frac{d^2(u)}{dx^2}$. En différentiant l'équation $\frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$, et après avoir fait pour abréger $\frac{dy}{dx} = y'$, on trouvera $\frac{d^2(u)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}y' + \frac{d^2u}{dx^2}y'^2 + \frac{du}{dy}\frac{dy'}{dx}$; différentiant aussi l'équation $M\,dx + N\,dy = 0$, on arrivera à un résultat de la forme $P\,dx^2 + 2Q\,dx\,dy + R\,dy^2 + N\,d'y = 0$, ou ce qui revient au même, $P + 2Qy' + Ry'^2 + \frac{N\,dy'}{dx} = 0$, et duquel on tirera la valeur de $\frac{dy'}{dx}$ pour la substituer ainsi que celle de y', dans l'expression de $\frac{d^2(u)}{dx^2}$: il ne faudra pas oublier de faire

$x=0$

$x=0$ après les différentiations et de substituer la valeur correspondante de y. En continuant ainsi pour le troisième ordre et les suivans, on trouveroit U''' et les coefficiens ultérieurs.

Si au lieu d'une équation primitive entre x et y, on n'avoit qu'une équation différentielle du premier ordre, on pourroit toujours trouver les expressions de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. en x et y; mais rien ne faisant connoître la valeur de y lorsque $x=0$, il faudroit regarder cette valeur comme une constante indéterminée, d'où dépendroient ensuite celles des quantités U, U', U'', etc.

En partant d'une équation différentielle du second ordre, on ne connoîtroit ni y, ni $\frac{dy}{dx}$, et on ne pourroit trouver que l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$ et des coefficiens différentiels ultérieurs en x et y; les valeurs de U, U', U'' etc. dépendroient donc alors de deux constantes indéterminées.

On voit aisément ce qui doit arriver pour les équations des ordres plus élevés.

Si on ne demandoit que le développement de y, il suffiroit de trouver les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. dans le cas de $x=0$, ou; ce qui revient au même, de former les quantités Y, Y', Y'', etc. (n°. 100).

Je n'examinerai point ici le cas où la fonction qu'on se propose de développer ne seroit donnée elle-même que par une équation différentielle; il peut se traiter comme le précédent, et ils ont, l'un et l'autre, un rapport plus immédiat avec le Calcul intégral qu'avec le Calcul différentiel; je me bornerai à faire remarquer que les quantités indéterminées qui entrent dans les coefficiens du développement, tiennent la place des constantes que pouvoit renfermer l'équation primitive qu'on ne connoît pas, et qui auroient disparu par la différentiation (n°. 15, 50 et suiv.)

111. Parmi les diverses formes qu'on pourroit supposer à l'équation $f(x,y)=0$, nous choisirons la suivante :

$\alpha - y + x\varphi(y) = 0$, $\varphi(y)$ désignant une fonction de y et de constantes; parce qu'en y faisant $x = 0$, elle donne la valeur de y sans qu'il soit besoin d'employer la résolution des équations de degré supérieur, et que de plus, la série qu'on en tire est remarquable par sa forme et par les applications dont elle est susceptible.

Supposons aussi que la fonction u, qu'on veut développer, ne renferme que la seule variable y; on pourra la représenter par $\downarrow(y)$; et comme dans le cas de $x = 0$, l'équation proposée donne $y = a$, $\downarrow(y)$ se changera alors en $\downarrow(a)$: on aura donc $U = \downarrow(a)$.

Puisque u ou $\downarrow(y)$ ne contient point x, on aura seulement

$$\frac{d(u)}{dx} = \downarrow'(y)\frac{dy}{dx};$$

mais en différentiant l'équation $a - y + x(y) = 0$, il viendra

$$-dy + x\varphi'(y)dy + \varphi(y)dx = 0 \ldots (1),$$

d'où on tirera $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(y)}{1 - x\varphi'(y)}$;

faisant $x = 0$, et changeant y en a, cette valeur se réduira à $\varphi(a)$ en même tems que $\downarrow'(y)$ deviendra $\downarrow'(a)$, donc $U' = \downarrow'(a)\varphi(a)$.

En différentiant $\frac{d(u)}{dx}$, on trouvera

$$\frac{d^2(u)}{dx^2} = \downarrow''(y)\frac{dy^2}{dx^2} + \downarrow'(y)\frac{d^2y}{dx^2};$$

en différentiant aussi l'équation (1), il en résultera

$$-d^2y + x\varphi'(y)d^2y + x\varphi''(y)dy^2 + 2\varphi'(y)dxdy = 0 \ldots . (2)$$

faisant $x = 0$, et changeant y en a, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans cette hypothèse sera $2\varphi'(a)\frac{dy}{dx}$ ou $2\varphi'(a)\varphi(a)$; or $2\varphi'(a)\varphi(a) = \frac{d.\varphi(a)^2}{da}$ (*):

donc $U'' = \downarrow''(a)\varphi(a)^2 + \downarrow'(a)\frac{d.\varphi(a)^2}{da} = \frac{d.\downarrow'(a)\varphi(a)^2}{da}$

On aura ensuite

$$\frac{d^3(u)}{dx^3} = \downarrow'''(y)\frac{dy^3}{dx^3} + 3\downarrow''(y)\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \downarrow'(y)\frac{d^3y}{dx^3};$$

(*) Par $\varphi(a)^2$ j'entends le quarré de $\varphi(a)$, et en général $\varphi(a)^n = (\varphi(a))^n$.

on obtiendra la valeur de $\frac{d^3y}{dx}$ en différentiant l'équation (2), et le résultat donnera après avoir fait $x=0$ et changé y en a,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=3\varphi'(a)\frac{d^2y}{dx^2}+3\varphi''(a)\frac{dy^2}{dx^2}=6\varphi(a)\varphi'(a)^2+3\varphi''(a)\varphi(a)^2$$

$$=\frac{d^2\varphi(a)^2}{da^2}$$; substituant cette valeur, ainsi que celles de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, dans l'expression de $\frac{d^3y}{dx^3}$, on trouvera

$$U'''=\psi'''(a)\varphi(a)^3+3\psi''(a)\varphi(a)\frac{d.\varphi(a)^2}{da}+\psi'(a)\frac{d^2.\varphi(a)^2}{da^2}$$

$$=\frac{d^2\psi'(a)\varphi(a)^2}{da^2}.$$

On arriveroit de même aux coefficiens suivans, et le résultat final seroit

$$\psi(y)=\psi(a)+\psi'(a)\varphi(a)\frac{x}{1}+\frac{d.\psi'(a)\varphi(a)^2}{da}\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^2.\psi'(a)\varphi(a)^2}{da^2}\frac{x^3}{1.2.3}$$

$$+\frac{d^3.\psi'(a)\varphi(a)^4}{da^3}\frac{x^4}{1.2.3.4}\text{ etc.}$$

112. On pourroit craindre que la loi qui se manifeste dans les premiers termes de la série que nous venons de trouver, ne s'étendît pas à tous ceux qui les suivent; voici un moyen fort simple de s'assurer de la vérité de l'induction, et qui montre en même tems le parti qu'on peut tirer des équations données entre les coefficiens différentiels d'une fonction, pour réduire cette fonction en série.

On a dû remarquer que les différentiations indiquées dans la série qui nous occupe sont relatives à a; mais en vertu de l'équation $a-y+x\varphi(y)=0$, la quantité y peut être considérée comme une fonction de x et de a, d'où il suit (n°. 83) qu'il existe entre $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dy}{da}$ une relation dépendante de la nature de cette fonction, et qu'on trouveroit en différentiant l'équation $a-y+x\varphi(y)=0$, ou ce qui revient au même, $y=a+x\varphi(y)$, par rapport à x et par rapport à a. Au lieu de nous arrêter à celle-ci, nous prendrons cette

autre plus générale $y = F(a + x\varphi(y))$, F désignant une fonction quelconque donnée, et en la différentiant par rapport à x et par rapport à a, il viendra

$$\frac{dy}{dx} = F'(a+x\varphi(y)).\left\{\varphi(y)+x\varphi'(y)\frac{dy}{dx}\right\}$$

$$\frac{dy}{da} = F'(a+x\varphi(y)).\left\{1+x\varphi'(y)\frac{dy}{da}\right\}$$

éliminant ensuite $F'(a+x\varphi(y))$, on trouvera après les réductions; $\frac{dy}{dx} - \varphi(y)\frac{dy}{da} = 0$. Mais puisque u, ou $\psi(y)$, ne dépend que de y, on aura seulement $\left.\begin{matrix}\frac{du}{dx} = \psi'(y)\frac{dy}{dx} \\ \frac{du}{da} = \psi'(y)\frac{dy}{da}\end{matrix}\right\}$ d'où on tirera $\frac{du}{dx}\frac{dy}{da} - \frac{du}{da}\frac{dy}{dx} = 0$; mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $\varphi(y)\frac{dy}{da}$ et faisant pour abréger $\varphi(y) = \zeta$, il viendra $\frac{du}{dx} - \zeta\frac{du}{da} = 0$, ou $\frac{du}{dx} = \zeta\frac{du}{da}$; on pourra donc substituer à $\frac{du}{dx}$ la quantité $\zeta\frac{du}{da}$.

Si on différentie l'équation précédente par rapport à x, il viendra $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d.\zeta\frac{du}{da}}{dx}$. Mais la quantité $\zeta\frac{du}{da}$ n'étant autre chose que $\varphi(y)\psi'(y)\frac{dy}{da}$, c'est-à-dire, une fonction de y multipliée par $\frac{dy}{da}$, on pourra la regarder comme le coefficient différentiel d'une nouvelle fonction de y que nous représenterons par u', et nous aurons alors $\frac{du'}{da} = \zeta\frac{du}{da}$ et $\frac{d.\zeta\frac{du}{da}}{dx} = \frac{d^2u'}{dxda}$. En intervertissant l'ordre des différentiations, il en résultera $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u'}{dadx} = \frac{d\frac{du'}{dx}}{da}$; or il faut observer que la relation qui existe entre $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{da}$, a également

lieu entre $\frac{du'}{dx}$ et $\frac{du'}{da}$, et que par conséquent $\frac{du'}{dx} = \zeta \frac{du'}{da}$; cela est facile à vérifier, puisque u' représente une fonction de y, et par cette raison on doit avoir, comme ci-dessus, $\frac{du'}{dx}\frac{dy}{da} - \frac{du'}{da}\frac{dy}{dx} = 0$. Mettant donc dans l'expression de $\frac{d^2u}{dx^2}$ pour $\frac{du'}{dx}$ sa valeur $\zeta \frac{du'}{da}$ et ensuite pour $\frac{du'}{da}$ la quantité $\zeta \frac{du}{da}$ qu'il représente, on trouvera

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d.\zeta \frac{du'}{da}}{da} = \frac{d.\zeta^2 \frac{du}{da}}{da}.$$

En différentiant cette dernière équation par rapport à x, on obtiendra $\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2.\zeta^2 \frac{du}{da}}{dx\,da}$; faisant $\zeta^2 \frac{du}{da} = \frac{du''}{da}$ et intervertissant l'ordre des différentiations, on aura $\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2u''}{da^2 dx} = \frac{d^2 \frac{du''}{dx}}{da^2}$. Mais on a aussi $\frac{du''}{dx} = \zeta \frac{du''}{da}$ et par conséquent $\frac{du''}{dx} = \zeta^2 \frac{du}{da}$; donc $\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2.\zeta^2 \frac{du}{da}}{da^2}$.

En général, si $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-2}.\zeta^{n-1} \frac{du}{da}}{da^{n-2}}$, en faisant $\zeta^{n-1} \frac{du}{da} = \frac{du'''\ldots^{n-1}}{da}$, on trouvera $\frac{d^nu}{dx^n} = \frac{d^nu'''\ldots^{n-1}}{dx\,da^{n-1}} = \frac{d^nu'''\ldots^{n-1}}{da^{n-1}dx}$, et à cause de $\frac{du'''\ldots^{n-1}}{dx} = \zeta \frac{du'''\ldots^{n-1}}{da} = \zeta^n \frac{du}{da}$, il viendra $\frac{d^nu}{dx^n} = \frac{d^{n-1}.\zeta^n \frac{du}{da}}{da^{n-1}}$.

Mais les valeurs des coefficiens différentiels $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx}\ldots\frac{d^nu}{dx^n}$ prises dans l'hypothèse de $x=0$, sont aussi celles des coefficiens $U'\ U''\ U'''\ldots$ du développement de la fonction u (n°. 110) ; on aura donc

$$u=U+\zeta\frac{du}{da}\frac{x}{1}+\frac{d.\zeta^2\frac{du}{da}}{da}\frac{x^2}{1.2}\ldots+\frac{d^{n-1}.\zeta^n\frac{du}{da}}{da}\frac{x^n}{1.2.3..n}+\text{etc.},$$

en observant toutefois de substituer dans ζ ou $\varphi(y)$ et dans $\frac{du}{da}$, les valeurs de y et de $\frac{dy}{da}$ relatives à la supposition de $x=0$, et qui en vertu de l'équation $y=F(a+x\varphi(y))$, sont $F(a)$ et $F'(a)$.

Dans le cas particulier représenté par l'équation $y=a+x\varphi(y)$, on aura simplement $y=a$ et $\frac{dy}{da}=1$; U, ζ et $\frac{du}{da}$ deviendront respectivement $\psi(a)$, $\varphi(a)$ et $\psi'(a)$, et par conséquent le développement de u ordonné suivant les puissances de x, sera

$$\left.\begin{aligned}u=\psi(a)+\psi'(a)\varphi(a)\frac{x}{1}+\frac{d.\psi'(a)\varphi(a)^2}{da}\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^2\psi'(a)\varphi(a)^3}{da^2}\frac{x^3}{1.2.3}\\+\ldots\ldots\ldots+\frac{d^{n-1}.\psi'(a)\varphi(a)^n}{da^{n-1}}\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

comme on l'auroit conclu à l'inspection des premiers termes trouvés dans le numéro précédent.

113. Cette série, à laquelle le C. Lagrange est parvenu par induction, en développant les racines des équations algébriques littérales, a été démontrée ensuite par le C. Laplace, d'une manière dont la précédente ne diffère que par quelques légers changemens que l'ordre de cet ouvrage rendoit nécessaires. Le détail des applications dont elle est susceptible nous meneroit trop loin ; nous nous bornerons à un petit nombre d'exemples, et pour le premier, nous prendrons l'équation $\alpha-\beta y+\gamma y^n=0$. En la mettant sous la forme $y=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}y^n$, on pourra la comparer avec $y=a+x\varphi(y)$, et on verra que $a=\frac{\alpha}{\beta}$, $x=\frac{\gamma}{\beta}$, $\varphi(y)=y^n$.

Si on demande le développement de y^m, on aura $\psi(y)=y^m$, et laissant pour abréger a à la place de $\frac{\alpha}{\beta}$, on trouvera

$$\psi'(a)=a^m, \qquad \psi'(a)\varphi(a)=ma^{m+n-1}$$
$$\psi'(a)\varphi(a)^2=ma^{m+2n-1}, \quad \psi'(a)\varphi(a)^3=ma^{m+3n-1}, \text{ etc.}$$

et par conséquent

$$y^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m+n-1}\frac{\gamma}{\beta}+\frac{m(m+2n-1)}{1.2}a^{m+2n-2}\frac{\gamma^2}{\beta^2}$$
$$+\frac{m(m+3n-1)(m+3n-2)}{1.2.3}a^{m+3n-3}\frac{\gamma^3}{\beta^3}+\text{etc.}\Bigg\}$$

ou en mettant $\frac{\alpha}{\beta}$ au lieu de a

$$y^m=\frac{\alpha^m}{\beta^m}\Bigg\{1+\frac{m}{1}\frac{\alpha^{n-1}\gamma}{\beta^n}+\frac{m(m+2n-1)}{1.2}\frac{\alpha^{2n-2}\gamma^2}{\beta^{2n}}$$
$$+\frac{m(m+3n-1)(m+3n-2)}{1.2.3}\frac{\alpha^{3n-3}\gamma^3}{\beta^{3n}}+\text{etc.}\Bigg\}$$

Il doit y avoir en général autant de valeurs différentes de y^m que l'équation proposée a de racines, et on pourroit trouver le développement de chacune d'elles en particulier comme nous venons de trouver le précédent, en changeant seulement la forme de cette équation; mais nous renverrons ces détails au chapitre suivant, qui sera consacré spécialement à la théorie des équations.

114. Soit pour second exemple, l'équation

$\alpha-\beta y+\gamma y^2-\delta y^3+\epsilon y^4-\text{etc.}=0$; on en tirera

$$y=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{y^2}{\beta}(\gamma-\delta y+\epsilon y^2-\text{etc.})$$ et en comparant à $y=a+x\varphi(y)$,

on trouvera $a=\frac{\alpha}{\beta}$, $x=\frac{1}{\beta}$, $\varphi(y)=y^2(\gamma-\delta y+\epsilon y^2-\text{etc.})$.

Supposons encore qu'on cherche le développement de y^m, et écrivons toujours a au lieu de $\frac{\alpha}{\beta}$, nous aurons

$$\psi(a)=a^m, \quad \psi'(a)=ma^{m-1}, \quad \varphi(a)=a^2(\gamma-\delta a+\epsilon a^2-\text{etc.});$$

d'où
$$y^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m+1}(\gamma - \delta a + \varepsilon a^2 - \text{etc.})\frac{1}{\beta} + \frac{m}{1.2}\frac{d.a^{m+2}(\gamma - \delta a + \varepsilon a^2 - \text{etc.})^2}{da}\frac{1}{\beta^2} + \frac{m}{1.2.3}\frac{d^2.a^{m+3}(\gamma - \delta a + \varepsilon a^2 - \text{etc.})^3}{da^2}\frac{1}{\beta^3} + \text{etc.}$$

Si le nombre des termes de l'équation proposée est limité, la série que nous venons de trouver donnera le développement de la puissance m de l'une de ses racines; dans le cas contraire, nous aurons l'expression de y^m déduite du retour de la série $\alpha = \beta y - \gamma y^2 + \delta y^3 - \varepsilon y^4 + \text{etc.}$ on voit que cette méthode est plus générale que celle qui est indiquée pour la série $\zeta = a x + b x^2 + d x^3 + \text{etc.}$ dans le n°. 45 de l'Introduction; car elle réunit à l'avantage de donner une puissance quelconque de la quantité qu'on cherche, celui de faire connoître la loi suivant laquelle se forment les différens termes. Au reste si on fait $m = 1$, qu'on effectue les différentiations et qu'on change y en x, a ou $\frac{\alpha}{\beta}$ en ξ, β en a, $-\gamma$ en b, δ en c, etc., on retombera sur le résultat de l'article cité. Je ne m'arrêterai point à développer ces calculs qui peuvent fournir au lecteur une occasion de s'exercer.

115. Prenons pour dernier exemple l'équation transcendante $y = a + x \sin y$, elle donnera par sa comparaison avec $y = a + x\varphi(y)$, $\varphi(y) = \sin y$, et si on veut avoir le développement du logarithme de y, on aura $\psi(a) = 1a$, $\varphi(a) = \sin a$ et
$$1y = 1a + \frac{\sin a}{a}\frac{x}{1} + \frac{d\frac{\sin a}{a}}{da}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2\frac{\sin a^2}{a^2}}{da^2}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

116. Si dans l'équation $a - y + x\varphi(y) = 0$, on fait $x = 1$, elle se réduira à $a - y + \varphi(y) = 0$; c'est sous cette forme que le C. Lagrange l'a présentée, et on a alors
$$\psi(y) = \psi(a) + \frac{1}{1}\psi'(a)\varphi(a) + \frac{1}{1.2}\frac{d.\psi'(a)\varphi(a)^2}{da} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2.\psi'(a)\varphi(a)^3}{da^2} + \text{etc.}$$

En

En supposant $\downarrow(y)=\varphi(y)$, il viendra

$$\varphi(y)=\varphi(a)+\frac{1}{1}\varphi'(a)\varphi(a)+\frac{1}{1.2}\frac{d.\varphi'(a)\varphi(a)^2}{da}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^2.\varphi'(a)\varphi(a)^3}{da^2}$$

etc.

On pourroit donner à cette série la forme suivante, qui mérite d'être remarquée,

$$\varphi(y)=\varphi(a)+\frac{1}{1.2}\frac{d.\varphi(a)^2}{da}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^2.\varphi(a)^3}{da^2}+\frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^3\varphi(a)^4}{da^3}$$

Enfin en prenant $\downarrow(y)=y$, on aura

$$y=a+\frac{1}{1}\varphi(a)+\frac{1}{1.2}\frac{d.\varphi(a)^2}{da}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^2\varphi(a)^3}{da^2}+\text{etc.}$$

Si on substitue dans l'équation $a-y+\varphi(y)=0$, à la place de y et de $\varphi(y)$, les développemens trouvés ci-dessus, elle devient identique, comme on devoit s'y attendre.

117. Nous avons déjà fait voir dans le n°. 102, que la fonction lx ne pouvoit se développer dans une série de la forme $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ etc.; il en est de même d'un grand nombre de fonctions soit algébriques, soit transcendantes; et le Calcul différentiel, comme nous l'avons dit, montre que cette forme ne sauroit leur convenir, en donnant pour $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. des expressions qui deviennent infinies dans le cas de $x=0$.

Soit la fonction y donnée par l'équation $(y-a)^2+bxy=0$; en différentiant on trouveroit $\frac{dy}{dx}=\frac{-by}{2(y-a)+bx}$; mais de la supposition de $x=0$, il résulte $y=a$, et par conséquent $\frac{dy}{dx}$ devient alors $\frac{-ba}{0}$ ou infini. En cherchant les coefficiens différentiels des ordres supérieurs, on trouveroit également pour chacun d'eux, dans le cas de $x=0$, des valeurs infinies, et on en concluroit que la fonction y ne sauroit avoir un développement ordonné suivant les puissances entières et positives de x.

Pour examiner plus particulièrement la nature de la fonction y,

résolvons l'équation proposée, nous trouverons

$y = a - \frac{bx}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2x^2 - 4abx}$, ou bien

$y = a - \frac{bx}{2} \pm \frac{bx}{2}\left(1 - \frac{4a}{bx}\right)^{\frac{1}{2}}$; développant par la formule du binome la quantité $\left(1 - \frac{4a}{bx}\right)^{\frac{1}{2}}$, il viendra

$$y = a - \frac{bx}{2} \pm \frac{bx}{2}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{4a}{bx} - \frac{1.1}{2.4}\frac{4^2.a^2}{b^2x^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{4^3.a^3}{b^3x^3}\text{etc.}\right\}$$

Si on prend le signe supérieur, on aura

$$y = -\frac{1.1}{4.4}\frac{4^2.a^2}{bx} - \frac{1.1.3}{4.4.6}\frac{4^3.a^3}{b^3x^3} - \text{etc.}$$

et le signe inférieur donnera

$$y = a - bx + a + \frac{1.1}{4.4}\frac{4^2.a^2}{bx} + \frac{1.1.3}{4.4.6}\frac{4^3.a^3}{b^3x^3} + \text{etc.}$$

séries qui procèdent toutes deux suivant les puissances négatives de x.

On auroit pu donner à la quantité radicale $\frac{1}{2}\sqrt{b^2x^2 - 4abx}$ cette autre forme $(-abx)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{bx}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$, et en développant $\left(1 - \frac{bx}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$, on auroit eu

$$y = a - \frac{bx}{2} \pm (-abx)^{\frac{1}{2}}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{bx}{4a} - \frac{1.1}{2.4}\frac{b^2x^2}{4^2.a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{b^3x^3}{4^3.a^3}\text{ etc.}\right\}$$

Cette série sera imaginaire tant que x aura une valeur positive; mais pour $x = 0$, elle donne $y = a$, et en faisant x négative, on trouve

$$y = a + \frac{bx}{2} \pm (ab)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{bx}{4a} - \frac{1.1}{2.4}\frac{b^2x^2}{4^2.a^2} + \text{etc.}\right\}$$

Ce résultat renferme des puissances fractionnaires de x, et par conséquent ne rentre pas plus que les précédens dans la forme

$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$

Lors donc qu'on trouvera des valeurs infinies pour les coefficiens Y, Y', Y'', Y''' etc. (n°. 100) ou U, U', U'', U''' etc. (n°. 110), il

faudra chercher *à priori* la forme du développement de la fonction proposée. Nous y sommes parvenus dans l'exemple précédent par la résolution de l'équation donnée ; mais ce moyen ne seroit plus praticable si elle passoit le quatrième degré, et il deviendroit déjà très-peu commode pour le troisième, à cause de la complication des formules qui expriment les racines dans ce cas. Voyons donc comment on pourroit éluder la difficulté.

118. Quelle que soit la forme du développement cherché, d'abord qu'on le suppose composé d'une suite de monomes, un quelconque de ses termes pourra être représenté par Ax^{α}, ensorte qu'on aura en général $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.}$, les exposans α, β, γ etc. pouvant être des nombres quelconques. Cependant, lorsqu'on développe une fonction on a presque toujours pour but d'en trouver une valeur approchée, ce qui exige que la série à laquelle on parvient soit convergente : or, on ne peut remplir en général cette dernière condition que lorsque la quantité x est très-petite ou très-grande. Dans le premier cas, il est évident que les exposans α, β, γ etc. doivent être positifs et rangés suivant l'ordre de leurs grandeurs respectives, en commençant par le plus petit ; dans le second, au contraire, ils doivent être négatifs, ou du moins finir par devenir tels, et par conséquent s'il y en a de positifs il faudra les écrire les premiers, en commençant par le plus grand. Tout ceci est fondé sur ce qui a été dit dans l'Introduction (n°. 8 et suiv.).

Une série qui procède suivant les puissances positives de la variable s'appelle *série ascendante*, et quand elle est ordonnée par rapport aux puissances négatives, elle se nomme *série descendante*.

Les méthodes analytiques d'approximation ont toutes la plus grande analogie avec celles que l'usage des fractions décimales a introduites en Arithmétique, et qui consistent à chercher successivement les chiffres de l'espèce la plus haute, et à négliger ceux des espèces inférieures. Les nombres, par l'arrangement même des chiffres qui les expriment, sont ordonnés suivant les puissances de 10 (*) ; on juge de la valeur des

(*) Le nombre 349, 537, par exemple, n'est autre chose que
$3(10)^{2} + 4(10)^{1} + 9(10)^{0} + 5(10)^{-1} + 3(10)^{-2} + 7(10)^{-3}$.

chiffres qu'on trouve et de celle des chiffres qui restent à trouver, ou qu'on néglige, par le rang qu'ils occupent, et les plus considérables se présentent les premiers : on ordonnera donc aussi les expressions algébriques afin de trouver d'abord les plus grands termes et ensuite ceux qui sont inférieurs ; mais cela ne peut se faire à moins qu'on n'assigne un degré de grandeur à l'une des quantités qui entrent dans l'expression qu'on considère.

Il ne paroît pas facile de discerner les plus grands termes dans une expression qui renfermeroit deux variables données implicitement l'une par l'autre ; telle seroit, par exemple, l'équation

$$A x^{\alpha} y^{\alpha'} + B x^{\beta} y^{\beta'} + C x^{\gamma} y^{\gamma'} + \text{etc.} = 0.$$

Les quantités x et y sont liées entre elles d'une manière qui, quoique déterminée, ne permet pas de juger à la simple inspection, comment les changemens de l'une influent sur l'autre, et il arrivera souvent qu'elles marcheront en sens inverse, ensorte que la première étant très-petite, la seconde sera très-grande et réciproquement ; ou bien que l'une décroissant très-rapidement, l'autre n'éprouvera pendant ce temps que fort peu de diminution.

Les Géomètres ont imaginé différens moyens pour distinguer parmi les termes d'une équation, ceux qui sont les plus grands. Newton inventa le parallélogramme analytique que de Gua réduisit ensuite à un triangle : Taylor a employé une construction géométrique ; mais le C. Lagrange a donné un procédé analytique très-simple et très-commode, que nous allons faire connoître.

119. Soit une équation quelconque

$$a x^{m} y^{n} + a' x^{m'} y^{n'} + a'' x^{m''} y^{n''} + a''' x^{m'''} y^{n'''} + \text{etc.} = 0 ;$$

on représentera par $A x^{\alpha}$ le premier terme du développement de y, et en supposant x très-petite, il suffira d'avoir égard à ce terme qui composera la plus grande partie de la valeur de y. En le substituant à la place de cette variable, dans l'équation proposée, on trouvera

$$a A^{m} x^{n+m\alpha} + a' A^{n'} x^{m'+n'\alpha} + a'' A^{n''} x^{m''+n''\alpha} + a''' A^{n'''} x^{m'''+n'''\alpha} \text{etc.} = 0.$$

Cette équation ne devant avoir lieu que d'une manière approchée, il faut en classer les termes suivant l'ordre de leur grandeur, marqué par l'exposant dont ils sont affectés, et ne conserver que ceux qui sont du degré le moins élevé : or, cela ne se peut tant que l'expo-

sant α est inconnu. Pour le déterminer on remarquera que l'équation que nous considérons ne sauroit être satisfaite, en n'ayant égard qu'aux puissances inférieures de x, quelle que soit d'ailleurs cette variable, s'il ne s'y trouve deux termes comparables entre eux, c'est-à-dire du même degré, et dont l'exposant soit plus petit que ceux des autres.

Il s'agit donc maintenant de trouver pour α une valeur qui rende deux des nombres

$$m+n\alpha, m'+n'\alpha, m''+n''\alpha, m'''+n'''\alpha, m^{IV}+n^{IV}\alpha, \text{ etc.}$$

égaux entre eux et plus petits que tous les autres.

Chaque équation qu'on formeroit en égalant deux à deux les nombres proposés, donneroit une valeur de α qui satisferoit à la première condition, et qu'il faudroit substituer dans $m+n\alpha, m'+n'\alpha$, etc., pour s'assurer si elle remplit la seconde; mais en opérant ainsi, on feroit souvent beaucoup de combinaisons inutiles qu'on peut éviter, comme on va le voir.

En égalant seulement le premier terme à chacun de ceux qui le suivent, pour en tirer diverses valeurs de α, qu'on désignera par $\alpha', \alpha'', \alpha'''$, etc., il en résultera

$$\alpha' = \frac{m'-m}{n-n'}, \qquad \alpha'' = \frac{m''-m}{n-n''}, \qquad \alpha''' = \frac{m'''-m}{n-n'''}, \text{ etc.}$$

Au lieu d'essayer ces valeurs chacune en particulier, cherchons dans la série

$$m+n\alpha, m'+n'\alpha, m''+n''\alpha, m'''+n'''\alpha, \text{ etc.} \ldots\ldots (1)$$

l'expression des différences entre le premier terme et chacun des autres, il viendra

$$m'-m+(n'-n)\alpha, m''-m+(n''-n)\alpha, m'''-m+(n'''-n)\alpha, \text{ etc.}$$

Mais au moyen des valeurs de α trouvées précédemment, on aura

$$m'-m=-\alpha'(n'-n), m''-m=-\alpha''(n''-n), m'''-m=-\alpha'''(n'''-n)$$

et par conséquent les différences ci-dessus pourront être exprimées comme il suit :

$$(n'-n)(\alpha-\alpha'), (n''-n)(\alpha-\alpha''), (n'''-n)(\alpha-\alpha'''), \text{ etc.}$$

Si on fait pour abréger $m+n\alpha=\pi$, la série (1) prendra la forme

$$\pi, \pi+(n'-n)(\alpha-\alpha'), \pi+(n''-n)(\alpha-\alpha''), \pi+(n'''-n)(\alpha-\alpha'''), \text{ etc.} \quad (2)$$

et comme on peut toujours ranger de telle manière qu'on voudra les termes de l'équation proposée, on les écrira de manière que les nombres

n, n', n'', n''' etc. forment une progression croissante, ce qui rendra positives toutes les quantités $n'-n$, $n''-n$, $n'''-n$ etc. Dans cet état de choses, on voit évidemment que si on donne à α la plus grande des valeurs représentées par $\alpha', \alpha'', \alpha'''$, etc. le terme qui répond à cette valeur deviendra égal au premier π et plus petit que tous les autres. En effet, si pour fixer les idées on suppose qu'elle soit α''', le quatrième terme de la série (2) se réduira à π, et on verra en même tems que les quantités $(n'-n)(\alpha-\alpha')$, $(n''-n)(\alpha-\alpha'')$ etc. seront toutes positives.

La plus grande des quantités $\alpha', \alpha'', \alpha'''$, etc. satisfera donc aux deux conditions demandées.

Si la question proposée a encore d'autres solutions, ce ne peut être que des nombres plus petits que celui qu'on vient de trouver, car si dans la série (2) on substituoit au lieu de α un nombre plus grand que α''', qui par hypothèse surpasse les autres valeurs $\alpha', \alpha'', \alpha^{IV}$ etc., le premier terme deviendroit moindre que tous ceux qui le suivent, et par conséquent la seconde condition ne sauroit être remplie.

Supposons donc qu'on prenne pour α un nombre plus petit que α''', alors les termes π, $\pi+(n'-n)(\alpha-\alpha')$, $\pi+(n''-n)(\alpha-\alpha'')$ seront plus grands que $\pi+(n'''-n)(\alpha-\alpha''')$, car la différence $\alpha-\alpha'''$ sera négative et surpassera toutes les différences négatives qui pourroient se trouver parmi les précédentes; de plus elle est multipliée par la quantité $n'''-n$ qui surpasse aussi les quantités $n'-n$ et $n''-n$, puisque les nombres n, n', n'' forment une progression croissante. Il suit de là qu'on doit faire abstraction de tous les termes qui précèdent celui dans lequel se trouve la plus grande des valeurs $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ etc. En considérant ceux qui le suivent, on verra que les plus petits d'entre eux peuvent devenir moindres que les premiers, parce que si dans les différences $\alpha-\alpha^{IV}, \alpha-\alpha^{V}$ etc. il s'en trouve qui soient négatives, comme elles seront multipliées par des nombres $n^{IV}-n$, $n^{V}-n$, etc. plus grands que leurs correspondans dans l'autre partie de la série, elles donneront des résultats négatifs qui surpasseront ceux qu'on auroit trouvés dans les termes qui précèdent le quatrième.

On conclura donc de là que pour obtenir une seconde solution, il ne

faut avoir égard qu'au terme qui contient la plus grande valeur de α et à ceux qui viennent après lui. Dans l'hypothèse que nous avons établie, α''' étant la plus grande valeur, le terme qui la donne est représenté par $m''' + n''' \alpha$ dans la série (1); on considérera donc la nouvelle série $m''' + n''' \alpha$, $m^{IV} + n^{IV} \alpha$, $m^{V} + n^{V} \alpha$ etc. et on opérera sur celle-ci comme nous avons fait sur la proposée.

Il pourroit arriver qu'une même valeur de α rendît plusieurs termes égaux au premier, dans la série (2); alors il ne faudroit partir pour la recherche d'une nouvelle solution, que de celui de ces termes qui se trouve le plus éloigné du premier, car il est aisé de voir que tous ceux qui sont avant lui le surpasseront, lorsqu'on prendra pour α un nombre moindre que la plus grande valeur trouvée dans l'opération précédente.

Les détails de la méthode que nous venons d'exposer, sont renfermés dans la règle suivante:

On égalera le premier terme de la série à chacun des suivans; on prendra la plus grande des valeurs de α, qui résulteront des équations qu'on aura formées ainsi, et ce sera la première solution de la question proposée. On partira ensuite du dernier des termes, qui par sa comparaison avec le premier a donné cette plus grande valeur, pour l'égaler à chacun des suivans, ce qui fera connoître de nouvelles valeurs de α, parmi lesquelles on choisira la plus grande qui résoudra encore la question. On partira de nouveau du terme le plus avancé de ceux qui ont donné la solution précédente, et on le comparera avec les termes ultérieurs, comme on l'a indiqué ci-dessus.

En continuant ainsi on parviendra à trouver toutes les valeurs de α qui rendent deux ou un plus grand nombre de termes de la série (1) égaux entre eux et moindres que tous les autres.

120. Prenons pour exemple l'équation

$$a + a' x^3 y + a'' \frac{y^2}{x} + a'' \frac{y^4}{x^3} + a^{IV} x^2 y^5 + a^{V} \frac{y^6}{x^3} = 0$$

En y substituant $A x^\alpha$ au lieu de y, elle deviendra

$$a + a' A x^{3+\alpha} + a'' A^2 x^{-1+2\alpha} + a''' A^4 x^{-5+4\alpha} + a^{IV} A^5 x^{2+5\alpha} a^{V} A^6 \alpha x^{-3+6\alpha} = 0$$

et pour en connoître les plus grands termes, dans la supposition de x très-petite, il faudra déterminer α de manière à rendre deux des

nombres 0, $3+\alpha$, $-1+2\alpha$, $-5+4\alpha$, $2+5\alpha$, $-3+6\alpha$, égaux entre eux et plus petits que les autres.

On égalera, d'après la règle, le premier terme à tous les autres, ce qui donnera successivement pour α les nombres -3, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $-\frac{2}{5}$, $\frac{3}{6}$, dont le plus grand, $\frac{5}{4}$, satisfait à la question. En effet, en substituant $\frac{5}{4}$ à α, les nombres proposés deviennent 0, $\frac{17}{4}$, $\frac{6}{4}$, 0, $\frac{33}{4}$, $\frac{18}{4}$, et les deux termes égaux sont plus petits que les autres.

On prendra ensuite le terme $-5+4\alpha$, d'où on a tiré la solution précédente, pour le comparer aux deux suivans $2+5\alpha$ et $-3+6\alpha$; il résultera de là $\alpha=-3$ et $\alpha=-1$. En regardant comme la plus grande des valeurs celle qui s'éloigne le moins du positif, on prendra $\alpha=-1$ et on aura les six nombres 0, 2, -3, -9, -3, -9; parmi lesquels -9 est le plus petit. Ici l'opération est achevée, puisque la solution qu'on vient d'obtenir est déduite de la comparaison du quatrième terme avec le dernier.

En substituant les deux valeurs de α dans l'équation proposée, elle deviendra, en vertu de la première,

$$a+a'Ax^{\frac{17}{4}}+a''A^2x^{\frac{6}{4}}+a'''A^4+a^{IV}A^5x^{\frac{33}{4}}+a^{V}A^6x^{\frac{18}{4}}=0;$$

et en vertu de la seconde

$$a+a'Ax^{2}+a''A^2x^{-3}+a'''A^4x^{-9}+a^{IV}A^5x^{-3}+a^{V}A^6x^{-9}=0;$$

Dans l'un et l'autre cas, si on représente x par la fraction $\frac{1}{q}$, q désignant un nombre quelconque, mais très-grand, les deux termes dans lesquels x se trouve avec le plus petit exposant, seront les plus considérables.

121. Pour connoître les termes les plus considérables d'une équation dans la supposition de x très-grande, on substituera $\frac{1}{t}$ à x, et on cherchera parmi les termes de l'équation transformée ceux qui deviennent les plus grands lorsqu'on suppose la valeur de t fort petite, hypothèse qui rend celle de x très-grande.

On parviendroit directement au même but en observant qu'après la substitution

substitution de Ax^{α} pour x, dans l'équation proposée, les plus grands termes seront ceux qui renfermeront la plus haute puissance de x, et que par conséquent on les trouvera en déterminant α, de manière que deux des nombres de la suite $m+n\alpha$, $m'+n'\alpha$, $m''+n''\alpha$, etc. deviennent égaux entre eux et surpassent tous les autres. Cette dernière question se résoudra en prenant parmi les quantités α', α'', α''' etc. du n°. 119, celle qui est la plus petite et en continuant à choisir dans chaque nouvelle série la plus petite des valeurs de α.

Dans l'exemple du numéro précédent, la plus petite des valeurs de α que nous avons trouvées d'abord, est -3, et elle donne les six nombres $0, 0, -7, -17, -13, -15$, dont les deux premiers, égaux entre eux, doivent être regardés comme les plus grands, puisque les autres sont négatifs. La solution -3 ayant été déduite de la comparaison du second terme de la suite proposée avec le premier, on égalera, conformément à la règle, ce second terme à chacun de ceux qui le suivent pour obtenir une autre solution. La plus petite valeur de α tirée de cette opération sera $\frac{1}{4}$, et il en résultera cette série $0, \frac{13}{4}, -\frac{2}{4}, -4, \frac{13}{4}, -\frac{6}{4}$, dans laquelle $\frac{13}{4}$ remplira les conditions imposées. Enfin comparant le cinquième terme de la suite proposée avec le sixième, on trouvera $\alpha = 5$, d'où il viendra $0, 8, 9, 15, 27, 27$; et 27 satisfera encore à la question.

La substitution des trois valeurs de α dans l'équation

$$a + a' x^3 y + \frac{a'' y^2}{x} + \text{etc.} = 0,$$

donnera autant de résultats, qui renfermeront chacun deux termes affectés du même exposant et susceptibles de devenir plus grands que tous les autres lorsqu'on donnera à x nne valeur très-grande.

Le procédé dont nous venons de faire usage pour trouver α, dérive trop simplement de ce qui a été dit dans le n°. 119 pour qu'il soit besoin de le démontrer en particulier; nous observerons que si dans la série des exposans $m+n\alpha$, $m'+n'\alpha$, etc., il s'en trouvoit qui renfermassent le même multiple de α, leur grandeur respective ne dépendroit que du nombre m, et que par conséquent il ne faudroit

considérer que celui de ces termes dans lequel m est le plus petit; si on cherche les moindres exposans, et au contraire celui où il est le plus grand, si on cherche les plus hauts exposans.

122. L'exposant α du terme Ax^{α} étant connu, il est facile de trouver le coefficient A; il suffit pour cela d'égaler à zéro tous les termes affectés du plus petit exposant, si on suppose x très-petite, ou du plus élevé, si on suppose x très-grande. Dans le premier cas l'équation

$$a - a'Ax^{\frac{17}{4}} + a''^{3}x^{\frac{6}{4}} - a'''A^{4} + a^{IV}A^{5}x^{\frac{68}{4}} - a^{V}A^{6}x^{\frac{18}{4}} = 0 \text{ (n°. 120)}$$

donne $a - a'''A^{4} = 0$, d'où $A = \sqrt[6]{\frac{a}{a'''}}$. Ceux qui auront bien saisi l'esprit de ce qui précède, verront aisément que la supposition de x très-petite rend les termes affectés de cette variable, dans l'équation ci-dessus, si petits, qu'aucun d'eux ne peut entrer en comparaison avec les deux autres a et $a'''A^{4}$ qui doivent par conséquent se détruire entr'eux. Si on conservoit quelque doute à cet égard, on le dissiperoit en substituant $\frac{1}{q}$ au lieu de x, car alors on s'appercevroit qu'on peut toujours prendre le nombre q assez grand pour que la somme des termes où il entre comme diviseur, devienne d'une petitesse telle qu'on voudra.

En employant l'équation

$$a - a'Ax^{2} + a''A^{2}x^{-3}a'''A^{4}x^{-9} + a^{IV}A^{5}x^{-3} - a^{V}A^{6}x^{-9} = 0,$$

donnée par la seconde valeur de α, on aura de la même manière

$-a'''A^{4} - a^{V}A^{6} = 0$, d'où $A = \sqrt{\frac{-a'''}{a^{V}}}$: cette valeur sera imaginaire tant que les deux quantités a''' et a^{V} seront de même signe. On voit par cet exemple qu'on obtiendra, en général, autant de développemens particuliers de y que α aura de valeurs différentes.

Ayant le premier terme Ax^{α}, pour trouver le second on substituera $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta}$ au lieu de y; ou, ce qui revient au même, on changera d'abord y en $Ax^{\alpha} + y'$ dans l'équation proposée, puis après les réductions on écrira Bx^{β} pour y'; et on déterminera β et B comme on a déterminé α et A. On obtiendra le troisième en mettant $Bx^{\beta} + y''$ à la place de y' dans l'équation qui contient cette nouvelle

variable; les réductions étant faites, on remplacera y'' par Cx^γ et on trouvera γ et C comme on a trouvé α et A, β et B: l'opération continuée de la même manière fera connoître les termes suivans.

123. Soit pour exemple l'équation $(y-a)^2+bxy=0$ (n°. 117); en la développant elle devient $a^2-2ay+bxy+y^2=0$, et on trouve $a^2-2aAx^\alpha+bAx^{1+\alpha}+A^2x^{2\alpha}=0$; en y substituant Ax^α au lieu de y. Pour déterminer α, dans la supposition de x très-petite, il ne faudra avoir égard qu'aux exposans 0, α et 2α, d'après la remarque qui termine le n°. 121. On n'obtiendra qu'une seule valeur pour α, savoir $\alpha=0$, qui donnera l'équation $a^2-2aA+A^2=0$, de laquelle on tirera $A=a$; et par conséquent le terme Ax^α se réduira à a. On substituera donc dans la proposée $a+y'$ à y, et il viendra $bax+bxy'+y'^2=0$....(1); changeant ensuite y' en Bx^β, on aura $bax+bBx^{1+\beta}+B^2x^{2\beta}=0$ la valeur de β sera $\frac{1}{2}$ et l'équation $ab+B^2=0$ donnera $B=(-ab)^{\frac{1}{2}}$.

Faisant ensuite $y'=(-ab)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+y''$ dans l'équation (1), et laissant pour abréger B à la place de $(-ab)^{\frac{1}{2}}$, il en résultera

$$bBx^{\frac{3}{2}}+2Bx^{\frac{1}{2}}y''+bxy''+y''^2=0\ldots(2),$$

puisque $ab+B^2=0$.

Mettant Cx^γ pour y'', on trouvera $\gamma=1$, $bB+2BC=0$ ou $C=-\frac{b}{2}$ et par conséquent $Cx^\gamma=-\frac{bx}{2}$.

Nous substituerons encore $-\frac{bx}{2}+y'''$, ou bien $Cx+y'''$, au lieu de y'', et nous aurons

$$(bC+C^2)x^2+2Bx^{\frac{1}{2}}y'''+(b+2C)xy'''+y'''^2=0\ldots.(3),$$

en observant que $bB+2BC=0$. Nous mettrons ensuite Dx^δ pour y''', et en opérant comme précédemment, nous trouverons

$$\delta=\frac{3}{2},\qquad 2BD-\frac{b^2}{4}=0$$

ou $D = \frac{b^3}{8B} = \frac{b^3}{8(-ab)^{\frac{1}{3}}} = (-ab)^{\frac{1}{3}} \times -\frac{1}{2}\frac{b}{4a}$.

On voit assez comment il faudroit continuer l'opération; et en réunissant les quatre termes déjà trouvés on aura

$$y = a + (-ab)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} - \frac{bx}{2} - \frac{1}{1}(-ab)^{\frac{1}{3}} \frac{b}{4a} x^{\frac{5}{3}} + \text{etc.}$$

ou bien en rassemblant les termes multipliés par $(-ab)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}$, expression susceptible du double signe $\pm$,

$$y = a - \frac{bx}{2} \pm (-ab)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2}\frac{bx}{4a} + \text{etc.}) :$$

ce résultat est le même que le dernier développement du n°. 117.

Si on suppose x très-grande, il faudra chercher alors dans l'équation $a^2 - 2aAx^{\alpha} + bAx^{1+\alpha} + A^2 x^{2\alpha} = 0$, les termes qui doivent contenir la plus haute puissance de x; et d'après ce qui a été dit n°. 121, on trouvera pour α deux valeurs différentes, savoir: $\alpha = -1$ et $\alpha = 1$. La première nous donnera $a^2 + bA = 0$, et par conséquent $A = \frac{-a^2}{b}$; posant ensuite $y = -\frac{a^2}{b} x^{-1} + y$, et laissant subsister A pour $\frac{a^2}{b}$, il viendra

$$A^2 x^{-2} - 2aAx^{-1} + 2Ax^{-1}y' - 2ay' + bxy' + y'^2 = 0:$$

en écrivant Bx^{β} pour y' et cherchant les termes dans lesquels l'exposant de x doit être le plus grand, on trouvera,

$$B = -2, \quad -2aA + bB = 0, \text{ et } B = \frac{2aA}{b} = -\frac{2a^3}{b^2}.$$

En continuant ainsi, on obtiendroit le premier développement de y donné dans le n°. 117. Le second n'échappera pas non plus à la méthode précédente; car la deuxième valeur de α nous fournira l'équation $bA + A^2 = 0$, et de là on déduira $A = -b$, $Ax^{\alpha} = -bx$. La substitution de $-bx + y'$ à la place de y, dans l'équation proposée, donnera $a^2 + 2abx - 2ay' - bxy' + y'^2 = 0$; puis changeant y' en Bx^{β}, on trouvera $\beta = 0$, $2ab - bB = 0$ et $B = 2a$. En pous-

sant plus loin ces calculs, on parviendra sans peine aux termes ultérieurs du second développement de y dans le numéro cité.

124. Je donnerai encore un exemple, afin d'éclaircir quelques difficultés qu'on pourroit rencontrer dans l'application de la méthode qui nous occupe, et l'équation $ax^3+x^3y-ay^3=0$ en sera le sujet.

En y mettant Ax^α au lieu de y, elle deviendra $ax^3+Ax^{3+\alpha}-aA^3x^{3\alpha}=0$; et en déterminant α dans la supposition de x très-petite, on trouvera $\alpha=1$, $a-aA^3=1$; d'où $A=1$: le premier terme du développement de y sera donc x.

On fera ensuite $y=x+y'$, ce qui donnera la transformée

$$x^4-3ax^3y'+x^3y'-3axy'^2-y'^3=0,$$

dans laquelle on changera y' en Bx^β. En cherchant toutes les valeurs dont β est susceptible, on trouvera $\beta=2$ et $\beta=1$, mais on voit aisément qu'il faut rejetter la seconde; car dans l'hypothèse de x très-petite la série cherchée doit être ascendante, et cette condition exige que β surpasse α. La première valeur de β donne $1-3aB=0$, d'où on tire $B=\frac{1}{3a}$ et $Bx^\beta=\frac{x^2}{3a}$.

Posant $y'=\frac{x^2}{3a}+y''$, on obtiendra une seconde transformée dans laquelle on changera y'' en Cx^γ, et on trouvera $\gamma=4$, $\gamma=1$. Il faudra, par la même raison que ci-dessus, s'en tenir à la pre.nière de ces valeurs, d'où il résultera $C=-\frac{1}{81a^3}$, $Cx^\gamma=-\frac{x^4}{81a^3}$.

Ces calculs peuvent être poussés maintenant aussi loin qu'on voudra, sans qu'il s'élève de nouvelles difficultés, et on aura pour dernier résultat $y=x+\frac{x^2}{3a}-\frac{x^4}{81a^3}+\frac{x^5}{243a^4}$ etc.

L'équation proposée fournit encore trois autres séries qui naissent de la supposition de x très-grande, et qui par conséquent sont descendantes. Pour y parvenir on déterminera α dans l'équation $ax^3+Ax^{3+\alpha}-aA^3x^{3\alpha}=0$, de manière que les exposans qui deviennent égaux surpassent tous les autres; les valeurs de cette quantité

seront alors o et $\frac{3}{2}$. La première donnera $A = -a$, et en cherchant les termes suivans elle conduit à la série

$$y = -a - a^4 x^{-3} - 3 a^7 x^{-6} - 12 a^{10} x^{-9} - 55 a^{13} x^{-12} \text{ etc.}$$

La seconde donne $A - a A^3 = 0$, d'où on tire $A = \pm a^{-\frac{1}{2}}$. En employant séparément chacune des deux valeurs de A dans les opérations subséquentes, on trouvera les deux séries suivantes, qui ne diffèrent que par les signes de leurs termes :

$$y = a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} a - \tfrac{3}{8} a^2 x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} a^4 x^{-3} \text{ etc.}$$

$$y = -a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} a + \tfrac{3}{8} a^2 x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} a^4 x^{-3} \text{ etc.}$$

Il faut, dans la recherche de ces séries, qui sont descendantes, avoir l'attention de ne prendre parmi les valeurs qu'on trouve pour chacun des exposans β, γ, δ etc. que celles qui sont moindres que l'exposant précédent.

125. Ces deux exemples doivent suffire pour montrer comment on peut trouver les divers développemens d'une fonction implicite donnée par une équation algébrique. Il arrivera souvent que la détermination d'un ou de plusieurs coefficiens A, B, C, etc. demandera qu'on résolve une équation d'un degré supérieur au premier ; mais cet obstacle n'arrêtera point la méthode, parce que l'équation à résoudre ne renfermera que des quantités constantes ; on pourra donc dans les applications particulières obtenir la valeur numérique du coefficient cherché, au moins par approximation, et dans le cas général on continuera d'opérer sur la lettre qui le représente comme sur une quantité connue. Si on avoit l'équation $2a^3 + x^3 - a y^2 - a x y - y^3 = 0$, en y supposant x très-petite, le coefficient A seroit donné par l'équation

$$2 a^3 - a^2 A - A^3 = 0.$$

Dans cet exemple l'équation à résoudre étant d'un degré impair, a au moins une racine réelle ; le premier terme du développement cherché se présentera donc aussi sous une forme réelle ; mais si on étoit conduit à une équation de degré pair, soit au commencement soit dans

le cours d'un développement, il faudroit d'abord s'assurer si cette équation a des racines réelles ou non, pour connoître si ce développement est réel ou imaginaire.

Cette précaution est importante, et pour l'avoir négligée, de Gua est tombé dans une grande erreur. Elle montre avec quelle circonspection il faut traiter les séries, et combien peu on doit compter sur les conclusions qu'on en tire, lorsque la loi que suivent leurs termes n'est pas évidente; puisqu'on doit toujours craindre qu'ils ne changent de forme dans la partie de la série qu'on n'a pas calculée, et que même ils n'y deviennent imaginaires.

127. La méthode précédente feroit aussi connoître le développement de y sous la forme d'une fraction continue; car après avoir trouvé le premier terme Ax^α, on pourroit supposer $y = \frac{Ax^\alpha}{1+y'}$, y' étant une quantité fort petite, puisque par l'hypothèse le terme Ax^α forme la plus grande partie de la valeur de y. Ayant substitué cette expression au lieu de y, dans l'équation proposée, et fait disparoître les dénominateurs, on obtiendra une première transformée en x et y', dans laquelle on remplacera y' par Bx^β, et on déterminera ensuite β et B conformément à l'hypothèse établie sur le degré de grandeur de x.

On fera $y' = \frac{Bx^\beta}{1+y''}$ dans la première transformée, et il en résultera une seconde en x et y'', dans laquelle on mettra Cx^γ au lieu de y''. Ayant déterminé γ et C, comme à l'ordinaire, on posera $y'' = \frac{Cx^\gamma}{1+y'''}$, ce qui donnera une troisième transformée, sur laquelle on opérera comme sur les précédentes.

En remontant des valeurs de y', y'', y''', etc. à celle de y, on trouvera

$$y = \cfrac{Ax^\alpha}{1+\cfrac{Bx^\beta}{1+\cfrac{Cx^\gamma}{1+\cfrac{Dx^\delta}{1+\text{etc.}}}}}$$

On voit qu'il doit y avoir deux espèces de développemens de cette forme : les uns ascendans, c'est-à-dire, dans lesquels les exposans des puissances de x vont en augmentant, convergent vers la valeur de la fonction y, lorsque x est très-petite ; les autres, au contraire, qui sont descendans, parce que les exposans de x diminuent suivant le progrès de la fraction, ne sont convergens que dans le cas où x a une très-grande valeur.

Je laisse aux lecteurs familiarisés avec la théorie des fractions continues, le soin de s'exercer sur quelques exemples; mon but dans ce moment n'est que d'indiquer une application intéressante sur laquelle je reviendrai avec plus de détail dans le Calcul intégral, parce qu'elle offre un moyen très-élégant pour trouver les valeurs approchées et quelquefois exactes, des fonctions données par des équations différentielles, moyen qu'on doit au C. Lagrange; ainsi que tout ce qui précède.

Il est à propos de remarquer qu'on pourroit tirer aussi des équations des différentielles, des développemens de la forme $Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+$ etc., par le procédé qui nous a servi pour les équations algébriques. En effet, ayant changé y en Ax^{α}, il faudra mettre $\alpha Ax^{\alpha-1}$ à la place de $\frac{dy}{dx}$, $\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}$ à celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc.; ces substitutions feront disparoître les différentielles de l'équation proposée, et alors on déterminera α et A comme dans une équation algébrique: la recherche des termes suivans n'aura pas plus de difficulté.

Considérations sur ce que devient le développement de $f(x+k)$ dans certains cas particuliers.

128. J'ai promis (n°. 10) d'expliquer comment il arrive que les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. deviennent infinis; et pourquoi la réduction de la fonction proposée en série ne peut plus s'effectuer par la formule déduite du théorême de Taylor: pour remplir cet engagement, je ferai voir que la forme qu'on a supposée, n°. 2, au développement d'une fonction quelconque de $x+k$, quoique vraie en général, ne sauroit convenir à certains cas particuliers.

Voici un des plus simples de ce genre:

Soit

Soit $f(x)=(x-a)^n$; on aura

$$\frac{df(x)}{dx}=n(x-a)^{n-1},\quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}=n(n-1)(x-a)^{n-2},\text{ etc.,}$$

et il viendra

$$f(x+k)=(x-a+k)^n=(x-a)^n+\frac{n}{1}(x-a)^{n-1}k+\frac{n.(n-1)}{1.2}(x-a)^{n-2}k^2\text{ etc.}$$

Cette série a lieu en général quelle que soit la valeur de x; mais cependant lorsque $x=a$, et que n représente un nombre entier, tous les termes qui la composent disparoissent, à l'exception de celui dans lequel l'exposant de la quantité $x-a$ est nul; il ne reste donc du développement ci-dessus que le terme k^n, auquel se réduit la fonction $(x-a+k)^n$, lorsqu'on y met a au lieu de x.

Si n était un nombre fractionnaire positif, la série précédente donnerait

$$(x-a+k)^{\frac{1}{m}}=(x-a)^{\frac{1}{m}}+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{k}{m(x-a)^{\frac{1}{m}-1}}-\dfrac{1.(m-1)k^2}{1.2m^2(x-a)^{\frac{1}{m}-2}}\\ +\dfrac{1.(m-1)(m-2)k^3}{1.2.3m^3(x-a)^{\frac{1}{m}-3}}+\text{etc.}\end{array}\right.$$

la supposition de $x=a$ rendroit le premier terme du second membre nul et tous les autres infinis: mais cette même supposition réduit la fonction proposée $(x-a+k)^{\frac{1}{m}}$ à $k^{\frac{1}{m}}$, résultat dans lequel k se trouve élevé à une puissance fractionnaire, et qui par conséquent ne saurait s'accorder avec la forme générale du développement de $f(x+k)$.

129. Quoique l'exemple que j'ai choisi ne présente que ce qui arrive dans un seul cas particulier, on doit cependant s'appercevoir que toutes les fois que la fonction qu'on voudra développer sera irrationnelle en général, et que par la substitution d'une valeur particulière de x elle cessera de l'être, alors l'irrationalité tombera nécessairement sur l'accroissement k, et le développement ordonné suivant les puissances entières de cette quantité ne pourra plus représenter la fonction proposée: l'exemple suivant achevera d'éclaircir ceci.

La fonction $y=b+\sqrt{x-a}$, se réduit à $y=b$, lorsqu'on suppose

$x = a$; elle perd donc dans ce cas particulier son irrationalité, et les deux valeurs dont elle est susceptible se réduisent à une seule; mais du moment où x a changé, elle reprend sa première forme; par conséquent quelque petit que soit k, y doit avoir encore deux valeurs lorsque $x = a + k$, et il devient en effet $b \pm \sqrt{k}$. Cependant la série $Y + Y' \frac{k}{1} + Y'' \frac{k^2}{1.2} +$ etc. ne sauroit donner dans la circonstance présente deux valeurs à la fois, puisque la quantité y calculée dans l'hypothèse de $x = a$, n'en a qu'une, et que les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx}$, etc. déduits d'équations où ils ne montent qu'au premier degré, ne peuvent avoir non plus qu'une valeur pour chaque valeur particulière de y. On doit voir maintenant d'une manière claire pourquoi la série ci-dessus ne sauroit représenter y dans la supposition de $x = a$; on sent d'ailleurs que dans tout autre cas la difficulté cesse d'avoir lieu, puisque y reprenant ses deux valeurs, chacun des coefficiens différentiels en prend aussi deux, l'une relative à la première valeur de y et l'autre à la seconde, et que par ce moyen la série que nous considérons devient double.

130. L'espèce de paradoxe que nous examinons, loin d'infirmer la généralité de la proposition que nous avons énoncée n°. 2, nous offre au contraire le moyen de l'établir sur des fondemens plus solides que l'induction dont nous l'avons déduite. Puisque la nature d'une fonction, ou l'équation dont elle dépend, déterminent toujours le nombre de valeurs soit réelles, soit imaginaires, qu'elle doit prendre pour chaque valeur particulière de la variable qu'elle renferme, il est évident que la série qui exprime son développement ne doit pas en donner davantage : c'est néanmoins ce qui arriveroit, si la série $u + P k + Q k^2 + R k^3 +$ etc. du numéro cité, renfermoit des puissances fractionnaires de k; car les coefficiens P, Q, R, etc., recevant de chacune des valeurs de u, une valeur particulière, cette circonstance seule fournit autant de séries diverses que le comporte la nature de la fonction proposée; d'un autre côté des puissances fractionnaires, telles que $k^{\frac{1}{2}}$, $k^{\frac{1}{3}}$ etc., auroient elles-mêmes autant

de valeurs qu'en pourroient donner des équations de la forme $k^a - A = 0$, $k^b - B = 0$, etc. et qui étant employées tour-à-tour, porteroient le nombre des séries résultantes beaucoup au-delà de celui des valeurs que doit avoir la fonction proposée (*).

C'est le C. Lagrange qui le premier a montré avec autant d'élégance que de simplicité le nœud de la difficulté précédente, qui n'avoit pas encore été bien nettement développée.

131. Si on remonte à la formation des coefficiens différentiels (n°s 9 et 10), on se rappellera que chacun d'eux n'est autre chose que le coefficient de la première puissance de k dans le développement de la différence de celui qui le précède, ou, ce qui revient au même, est égal au premier terme de ce développement divisé par l'accroissement k.

En appliquant cette dernière notion au cas particulier que présente la fonction $b + \sqrt{x-a}$, lorsqu'on substitue $a+k$ au lieu de x, on verra que le coefficient $\frac{dy}{dx}$ doit alors devenir infini; on en conclura par conséquent que le résultat donné par le Calcul différentiel dans la même circonstance, est une suite nécessaire de la forme attribuée au développement de $f(x+k)$, et qu'il rectifie en quelque sorte l'application de cette forme à un cas particulier qu'elle ne sauroit comprendre.

En effet, la supposition de $x = a+k$ dans la fonction $b + \sqrt{x-a}$ donne $b + k^{\frac{1}{2}}$; la différence entre cette valeur et celle qui répond à $x = a$, étant $k^{\frac{1}{2}}$, si on la divise par k, il viendra $\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$, quantité équivalente à $\frac{dy}{dx}$, et qui devient infinie lorsqu'on fait $k = 0$.

(*) On doit se rappeller ici ce qu'on trouve dans tous les livres d'algèbre sur la multiplicité des racines quarrées, cubiques, etc. d'une quantité quelconque, et la nécessité de les employer toutes, lorsqu'on n'a aucune raison pour faire usage de l'une d'elles plutôt que des autres. Il faut aussi prendre garde qu'il ne s'agit dans cet article que de séries ascendantes qui, convergeant lorsque k est très-petit, doivent représenter la fonction proposée d'autant plus exactement que k aura une valeur moindre, et sont les seules qui puissent le faire dans ce cas.

Quand un des coefficiens $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, etc. devient infini par la substitution d'une valeur particulière de x, la fonction proposée restant toujours finie, cela n'arrive que par l'évanouissement d'un dénominateur que la différentiation a introduit dans le coefficient dont il s'agit; et comme les diverses puissances de ce dénominateur forment elles-mêmes les dénominateurs des coefficiens suivans, il est évident que chacun de ceux-ci deviendra infini en même tems que le premier.

132. Pour donner à ces remarques toute l'étendue et la clarté que mérite leur importance, examinons encore les développemens de quelques fonctions plus compliquées que les précédentes.

Soit $y = b x^n + c(x-a)^{\frac{5}{2}}$;
la fonction y développée par le théorême de Taylor, lorsque x se change en $x+k$, prendra la forme

$$b x^n + c(x-a)^{\frac{5}{2}} + \left\{ 2b x + \tfrac{5}{2} c (x-a)^{\frac{1}{2}} \right\}^{k}_{1} + \left\{ 2b + \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{1}{2} c (x-a^n)^{-\frac{1}{2}} \right\} \frac{k^2}{1.2} + \text{etc.}$$

La supposition de $x = a$ réduit les deux premiers termes de cette série à $b a^n + 2 b a k$, et rend infinis les suivans, à cause des puissances négatives de $x-a$ qu'ils contiennent. Si dans le coefficient différentiel du premier ordre $2 b x + \frac{3}{2} c (x-a)^{\frac{1}{2}}$, on met $a+k$ à la place de x, il deviendra $2 b (a+k) + \frac{3}{2} c k^{\frac{1}{2}}$; et retranchant ensuite la valeur qu'il prend lorsque $x = a$, on trouvera $2 b k + \frac{3}{2} c k^{\frac{1}{2}}$; divisant ce résultat par k, on doit, d'après ce qui a été dit dans le numéro précédent, en tirer une quantité équivalente à $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ou au coefficient de $\frac{k^2}{1.2}$: mais le quotient $2b + \frac{3}{2} \frac{c}{k^{\frac{1}{2}}}$ auquel on parvient, devient infini lorsqu'on fait $k = 0$, ce qui est conforme au résultat du Calcul différentiel.

Le théorême de Taylor appliqué à la fonction

$$y = b x^m + c(x-a)^{\frac{p}{q}},$$

en supposant que x devienne $x+k$, donnera

$$b x^m + c(x-a)^{\frac{p}{q}} + \left\{ m b x^{m-1} + \frac{cp}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1} \right\} \frac{k}{1}$$

$$+ \left\{ m(m-1) b x^{m-2} + \frac{cp(p-q)}{q^2}(x-a)^{\frac{p}{q}-2} \right\} \frac{k^2}{1.2} + \text{etc.}$$

et on aura en général

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1) b x^{m-n} + \frac{cp(p-q)\ldots(p-(n-1)q)}{q^n} x(-a)^{\frac{p}{q}-n}$$

Tant que n sera moindre que $\frac{p}{q}$, les puissances de $(x-a)$ étant positives, s'évanouiront lorsqu'on fera $x=a$, et la valeur de $\frac{d^n y}{dx^n}$ particulière à ce cas, sera $m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1) b a^{m-n}$.

En supposant que m désigne un nombre entier positif, cette expression elle-même deviendra nulle si n surpasse m; mais jusques-là les termes du développement ci-dessus seront

$$b a^m + m b a^{m-1} \frac{k}{1} + m(m-1) b a^{m-2} \frac{k^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Passé le terme $m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1) b a^{m-n} \frac{k^n}{1.2\ldots n}$; on rencontrera, si m est moindre que $\frac{p}{q}$, une suite de coefficiens nuls jusqu'à ce qu'on ait atteint un ordre de différentiation ayant un exposant supérieur à $\frac{p}{q}$.

On voit par-là que, dans la suite des coefficiens différentiels, il peut s'en trouver qui aient une valeur finie, d'autres qui soient nuls, et enfin d'autres qui soient infinis. On aura un exemple de ces différens cas, en prenant $m=2$ et $\frac{p}{q}=\frac{7}{2}$; car on trouvera

$$y=bx^2+\quad c(x-a)^{\frac{7}{2}},\quad \frac{dy}{dx}=2bx+\frac{7}{2}c(x-a)^{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2b+\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}c(x-a)^{\frac{3}{2}},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}c(x-a)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}c(x-a)^{-\frac{1}{2}},\text{ etc.}$$

et la supposition de $x=a$ donnera

$$y=ba^2,\ \frac{dy}{dx}=2ba,\ \frac{d^2y}{dx^2}=2b,\ \frac{d^3y}{dx^3}=0,\ \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{c}{0},\text{ etc.}$$

En faisant $x=a+k$ dans $bx^m+c(x-a)^{\frac{p}{q}}$, il viendra $b(a+k)^m+ck^{\frac{p}{q}}$, et sous cette forme on voit aisément que si m est moindre que $\frac{p}{q}$, il y aura une lacune entre le dernier terme bk^m de l'expression $b(a+k)^m$ développée et le terme $ck^{\frac{p}{q}}$. Si on représente par r le nombre entier contenu dans $\frac{p}{q}$, cette lettre désignera aussi l'ordre du terme qui précède le premier de ceux que la supposition de $x=a$ rend infinis, et qui sera de la forme $N(x-a)^{\frac{p}{q}-r}$, N désignant un facteur constant. Prenant, ainsi qu'on l'a fait dans les nos. précédens, la différence de cette expression, dans le cas de $x=a$, on trouvera $Nk^{\frac{p}{q}-r}$, et en divisant par k, il viendra $Nk^{\frac{p}{q}-r-1}$. Pour passer de ce résultat à la valeur du coefficient différentiel de l'ordre $r+1$, il faut faire $k=0$; mais $\frac{p}{q}-r$ étant, par l'hypothèse, un nombre moindre que l'unité, l'exposant $\frac{p}{q}-r-1$ sera négatif, et par conséquent la supposition de $x=a$ rendra la quantité $Nk^{\frac{p}{q}-r-1}$ infinie.

133. Nous rapprocherons ici les conséquences qu'on doit tirer des exemples précédens. Il résulte d'abord de ce qui arrive aux coefficiens différentiels de la fonction $y=(x-a)^n$, lorsqu'on y fait $x=a$ (n° 128), qu'en général tous ceux d'une fonction de la forme $y=X(x-a)^n$, depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, s'évanouiront dans le cas de $x=a$, si n est un nombre entier positif, et que

la fonction de x, représentée par X, ne devienne pas infinie dans la même circonstance. Pour s'en convaincre, il suffit de faire $X=t$, $(x-a)^n=u$; il vient $d^m y=d^m.tu=$

$$td^m u+\frac{m}{1}dtd^{m-1}u+\frac{m(m-1)}{1.2}d^2td^{m-2}u.....+ud^m t \text{ (n°. 107)}$$

et puisque u, ainsi que ses différentielles, jusqu'à celles de l'ordre $n-1$, sont nulles dans la supposition de $x=a$, il s'ensuit que $d^m y$ sera nulle tant que m ne surpassera pas $n-1$, et qu'on aura, si $m=n$,

$$d^m y=td^m u=1.2.....mXdx^m.$$

Le développement de la fonction proposée ne renfermera donc aucune puissance de k inférieure à la puissance n.

Dans le cas où l'exposant n est un nombre fractionnaire, les coefficiens différentiels de $X(x-a)^n$ deviendront infinis en faisant $x=a$, dès que l'exposant de leur ordre surpassera ce nombre.

Enfin si n étoit un nombre négatif, la fonction proposée deviendroit infinie en même temps que ses coefficiens différentiels.

134. Dans les cas particuliers où le Calcul différentiel se refuse à l'expression du développement de $f(x+k)$, on peut y parvenir soit comme on l'a fait pour les exemples ci-dessus, soit par l'application de la méthode exposée dans les n°s 119 et suivans : le premier de ces moyens ne peut s'employer qu'à l'égard des fonctions explicites. Si on avoit $y=(a-x)^n\sqrt[3]{a^3-x^3}$, par exemple, et qu'on fît $x=a$, les coefficiens différentiels deviendroient infinis; mais en écrivant $a+k$ au lieu de x, on trouveroit

$$y=k^n\sqrt[3]{-3a^2k-3ak^2-k^3}=-k^{n+\frac{1}{3}}\{3a^2+(3a+k)k\}^{\frac{1}{3}}$$

et en développant il viendra

$$y=-(3a^2)^{\frac{1}{3}}k^{\frac{7}{3}}\left\{1+\frac{k}{3a^2}(3a+k)+\text{ etc.}\right\}=$$

$$-(3a^2)^{\frac{1}{3}}k^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{a}(3a^2)^{\frac{1}{3}}k^{\frac{10}{3}}+\text{etc.}$$

Je n'ai calculé que les deux premiers termes, parce que dans l'usage que nous ferons des développemens de ce genre par la suite, leur premier terme suffira, le plus souvent.

S'il s'agissoit d'une fonction implicite, on substitueroit $a+k$ à x dans l'équation dont elle dépend; regardant ensuite y et k comme les

seules variables de l'équation résultante, on trouveroit d'après les numéros cités plus haut, l'expression de la première par une série ascendante, ordonnée suivant les puissances de la seconde.

L'équation $y^4 - 2x^3y^3 + 2x^4 - a^4 = 0$ nous servira d'exemple. En la différentiant, on en tire $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^3 - 2x^3}{y^3 - x^3y}$, et en supposant $x = a$, elle se réduit à $y^4 - 2a^3y^3 + a^4 = 0$; d'où il suit $y = \pm a$ et $dy = -\frac{a^3}{0}$. Pour obtenir les premiers termes du développement de y, dans ce cas particulier, on changera x en $a+k$, et à cause que $x=a$ donne $y = \pm a$, on écrira $a + Ak^\alpha$ au lieu de y, en faisant abstraction du double signe $\pm$, qu'on restitueroit facilement s'il en étoit besoin: on aura ainsi,

$$a^4 - 2(a+k)^4 + 2(a+k)^3(a+Ak^\alpha)^3 - (a+Ak^\alpha)^4 = 0.$$

Comme on ne doit considérer dans cette équation que les termes affectés de la plus petite puissance de k, il suffira (n°. 121) d'avoir égard à $-4a^3k + 8a^3Ak^{\alpha+1} - 4a^3A^3k^{3\alpha} - 4aA^3k^{3\alpha} - A^4k^{4\alpha} = 0$, d'où on tirera $\alpha = \frac{1}{2}$ et $a + A^2 = 0$; on aura donc pour résultat

$$y = \pm a \pm k^{\frac{1}{2}}\sqrt{-a} + \text{etc.} = \pm a \pm \sqrt{-ak} + \text{etc.}$$

On voit par-là, qu'en prenant $x > a$, la valeur de y sera imaginaire, et qu'elle deviendra réelle si on suppose k négatif, ou $x < a$.

L'équation proposée étant résolue par rapport à y, à la manière des équations du second degré, donnera $y = \pm\sqrt{x^3 + \sqrt{a^4 - x^4}}$; substituant $a+k$ à x et développant le résultat, seulement dans le premier terme, on retombera sur ceux que nous avons trouvés ci-dessus.

Nous observerons qu'on peut envisager la quantité $\pm k^{\frac{1}{2}}\sqrt{-a}$ comme l'expression de la différentielle de y, dans le cas où $x = a$, puisqu'elle forme alors le premier terme du développement de la différence entre les valeurs de y, correspondantes à $x = a$ et à $x = a+k$.

Nous n'avons point cherché à faire à la fonction lx l'application des procédés indiqués précédemment, parce qu'elle ne sauroit admettre, dans aucun cas, un développement de la forme
$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{etc.}$ (*Intr.* n°. 29)

Des expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$ dans certains cas particuliers.

135. Non-seulement il peut arriver que les coefficiens différentiels soient nuls ou infinis dans quelques cas particuliers, mais ils peuvent encore se présenter dans d'autres sous une forme indéterminée, en devenant $\frac{0}{0}$. Si on avoit, par exemple, $ay = \sqrt{a^2x^2 - x^4}$, on en déduiroit $a\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}$, et en faisant $x = 0$, il viendroit $a\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Cependant avec un peu d'attention on verra que le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}$ ne s'évanouissent en même temps que parce qu'ils sont affectés du facteur commun x; si on les en délivre, on trouvera $a\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, et par conséquent $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{a}$, lorsque $x = 0$.

En général si on fait $x = a$ dans une expression de la forme $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, elle deviendra $\frac{0}{0}$: néanmoins sa vraie valeur doit être ou nulle, ou finie, ou infinie, selon qu'on aura $m > n$, $m = n$, $m < n$; car en effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on trouvera $\frac{P(x-a)^{m-n}}{Q}$ dans le premier cas, $\frac{P}{Q}$ dans le second, et $\frac{P}{Q(x-a)^{n-m}}$ dans le troisième, bien entendu que les quantités P et Q ne deviendront ni nulles ni infinies par la supposition de $x = a$.

Lors donc qu'une expression quelconque se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, il faut, pour connoître sa vraie signification, la dégager des facteurs qui sont communs à son numérateur et à son dénominateur. La fraction $\frac{a^3 - x^3}{a^2 - x^2}$, par exemple, qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x = a$, étant

réduite à ses moindres termes se change en $\frac{a^3+ax+x^2}{a+x}$, et donne $\frac{3a}{2}$ quand on y fait $x=a$.

136. Les remarques du n°. 133 nous fourniront, pour parvenir à la vraie valeur d'une fonction qui devient $\frac{0}{0}$, un moyen plus simple et plus général que la recherche du diviseur commun. On a vu que toutes les différentielles d'une expression de la forme $P(x-a)^m$ jusqu'à celle de l'ordre $m-1$ inclusivement, s'évanouissent dans la supposition de $x=a$, lorsque m est un nombre entier, et qu'alors la différentielle de l'ordre m se réduit à $1.2...mPdx^m$: le facteur $(x-a)^m$ disparoît donc dans cette hypothèse après m différentiations.

Il n'est pas nécessaire qu'on connoisse l'exposant m, ni même que le facteur $(x-a)^m$ soit en évidence, pour savoir quand l'expression $P(x-a)^m$ en est délivrée; il suffit de s'assurer après chaque différentiation si le résultat obtenu s'évanouit ou non, lorsqu'on met a à la place de x; dans le dernier cas l'opération est finie, et ce qu'on a trouvé représente la quantité $1.2...mP$. Soit pour exemple la fonction $x^3-ax^2-a^2x+a^3$, qui s'évanouit par la supposition de $x=a$; sa différentielle première s'évanouit aussi dans cette hypothèse, mais non pas sa différentielle seconde, qui est $(6x-2a)dx^2$; la voilà donc délivrée du facteur $(x-a)$, et puisqu'il a fallu pour cela deux différentiations, on en doit conclure qu'elle est de la forme $P(x-a)^2$; ce qui est d'ailleurs aisé à vérifier, car on trouvera

$$x^3-ax^2-a^2x+a^3=(x+a)(x-a)^2.$$

En appliquant ce qui précède à la fraction $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, on verra qu'en différentiant plusieurs fois de suite son numérateur et son dénominateur, ils seront délivrés à la fois du facteur $(x-a)$, si $m=n$. Si c'est le numérateur qui donne le premier un résultat qui ne s'évanouisse pas, ce sera une preuve que le facteur $(x-a)$ s'y trouve élevé à une puissance moindre que dans le dénominateur, et par conséquent la fraction proposée sera infinie; si c'est au contraire le dénominateur, la fraction proposée sera nulle. On peut donc énoncer la règle sui-

vante : *Pour obtenir la vraie valeur d'une fonction qui devient* $\frac{0}{0}$ *lorsqu'on donne à* x *une valeur particulière, il faut différencier son numérateur et son dénominateur, jusqu'à ce qu'on trouve pour l'un ou pour l'autre un résultat qui ne s'évanouisse pas ; la fonction proposée sera infinie dans le premier cas, nulle dans le second, et si elle a une valeur finie, on rencontrera en même temps deux résultats qui ne s'anéantiront point.* Quelques exemples éclairciront suffisamment ceci.

137. Soit, 1°. la fonction $\frac{a^3 - x^3}{a^2 - x^2}$ dont on demande la valeur lorsque $x = a$; en différentiant son numérateur et son dénominateur, on trouvera $\frac{-3x^2 dx}{-2x dx}$, d'où il résulte $\frac{3a}{2}$, lorsqu'on change x en a, de même que dans le n°. 135.

2°. La formule $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ qui exprime la somme des n premiers termes de la progression géométrique $\div\div 1 : x : x^2 : x^3 :$ etc. devient $\frac{0}{0}$ quand $x = 1$; cependant cette somme dans la progression $\div\div 1 : 1 : 1 : 1$, etc. à laquelle on est conduit alors, a une valeur déterminée et égale à n, que la règle précédente va nous donner aussi. En effet, après avoir différentié le numérateur et le dénominateur de l'expression $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ on trouve, $\frac{nx^{n-1} dx}{dx}$, et en écrivant 1 au lieu de x, il vient n.

3°. La vraie valeur de $\frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$, dans le cas où $x = c$ ne peut s'obtenir qu'après deux différentiations, car la première donne $\frac{ax - ac}{bx - bc}$, résultat qui devient encore $\frac{0}{0}$; mais en différentiant on trouve $\frac{a}{b}$.

4°. Cherchons encore la valeur de la fraction $\frac{x^3 - ax^2 - ax + a^2}{x^3 - a^3}$, lorsque $x = a$; nous trouverons, après avoir différentié une fois le

numérateur et le dénominateur, que le premier seul devient encore nul quand on met a au lieu de x; ce qui nous apprend que la vraie valeur de la fonction proposée est nulle. Le contraire auroit eu lieu pour la fonction $\frac{ax-x^3}{a^4-2a^3x+2ax^3-x^4}$.

5°. Quoiqu'on ne voie pas tout de suite comment il est possible de donner la forme $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$ à la fonction transcendante $\frac{ax-b^x}{x}$, qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x=0$, on peut néanmoins y appliquer la règle, et après avoir différentié son numérateur et son dénominateur, on trouve $a^x la-b^x lb$: en mettant 0 pour x, on a $la-lb$ pour la vraie valeur cherchée.

Ce résultat s'obtient tout de suite en substituant aux fonctions a^x et b^x leurs développemens (*Introduction*, n°. 22), car il vient

$$\frac{a^x-b^x}{x}=(la-lb)+\left\{(la)^2-(lb)^2\right\}\frac{x}{1.2}+\text{etc.}$$

et la supposition de $x=0$ réduit le second membre de cette équation à son premier terme: en suivant l'opération, on remarquera qu'il y a un facteur x qui disparoît par la division.

6°. La fonction $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque l'arc $x=90°$; mais en lui appliquant la règle, on trouve que sa vraie valeur est alors -1.

7°. Le lecteur pourra s'exercer sur les fonctions $\frac{a-x-a\,la+a\,lx}{a-\sqrt{2ax-x^2}}$ et $\frac{x^x-x}{1-x+lx}$; la première devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=a$, et la seconde lorsque $x=1$; leurs vraies valeurs sont respectivement -1 et -2.

138. Il est aisé de voir que la règle du n°. 136 ne seroit pas applicable au cas où les facteurs qui s'évanouissent seroient élevés à des puissances fractionnaires, car les différentielles de la fonction $P(x-a)^m$ sont ou nulles ou infinies lorsque m n'est pas un nombre

entier (n°. 133). Si on avoit par exemple $\frac{(x^3-a^2)^{\frac{5}{2}}}{(x-a)^{\frac{5}{2}}}$, quoique la vraie valeur de cette fraction, lorsque $x=a$, soit $2a^{\frac{5}{2}}$, on n'y parviendroit jamais par la différentiation : on trouveroit successivement $\frac{3x(x^3-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{3(x^3-a^2)^{\frac{1}{2}}+3x^3(x^3-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}$ etc. ; le premier de ces résultats devient encore $\frac{0}{0}$, quand on fait $x=a$, et la même supposition rend infinis les numérateurs et les dénominateurs de chacun des suivans. Si on fait disparoître les exposans négatifs en passant au dénominateur ceux qui se trouvent dans le numérateur, *et vice versâ*, les expressions nouvelles qui naîtront de ce changement se réduiront toutes à $\frac{0}{0}$.

139. Voici un procédé général exempt de toute difficulté, qui comprend la règle du n°. 136, et que je n'ai présenté le dernier que parce qu'il m'a semblé que les considérations du n°. cité pouvoient jetter un grand jour sur l'objet qui nous occupe.

Soit $\frac{X}{X'}$ une fraction dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent tous deux quand $x=a$; en substituant $a+k$ au lieu de x, les fonctions X et X' se développeront suivant des séries ascendantes de la forme $Ak^{\alpha}+Bk^{\beta}+$ etc., $A'k^{\alpha'}+Bk^{\beta'}+$ etc., puisqu'elles doivent devenir nulles dans l'hypothèse de $k=0$, qui répond à celle de $x=a$; on aura donc $\frac{Ak^{\alpha}+Bk^{\beta}+\text{etc.}}{A'k^{\alpha'}+B'k^{\beta'}+\text{etc.}}$, au lieu de la fraction proposée. Si dans ce résultat on suppose en effet $k=0$, on doit retomber sur la valeur que reçoit la fonction $\frac{X}{X'}$, lorsqu'on change x en a, et quoiqu'il semble d'abord se réduire à $\frac{0}{0}$, on va voir cependant qu'il a toujours une valeur déterminée. En distinguant les

trois cas $\alpha > \alpha'$, $\alpha = \alpha'$ et $\alpha < \alpha'$, nous pourrons dans les deux premiers écrire ainsi qu'il suit l'expression précédente :

$$\frac{A k^{\alpha-\alpha'} + B k^{\beta-\alpha'} + \text{etc.}}{A' + B k^{\beta'-\alpha} + \text{etc.}}$$

Sous cette forme il est aisé d'appercevoir que tant que α surpassera α', la supposition de $k = 0$ rendra la fraction nulle, et qu'elle se réduira à $\frac{A}{A'}$ lorsqu'on aura $\alpha = \alpha'$. Dans le troisième cas, au contraire, où α est $< \alpha'$, on aura $\frac{A + B k^{\beta-\alpha} + \text{etc.}}{A' k^{\alpha'-\alpha} + B' k^{\beta'-\alpha} + \text{etc.}}$, et ce résultat deviendra infini par la supposition de $k = 0$. Dans tous ces cas, la vraie valeur qu'on cherche ne dépend que du premier terme de chaque série.

La règle suivante s'étend à toutes les fonctions qui peuvent se représenter sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: *cherchez le premier terme de chacune des séries ascendantes qui expriment le développement du numérateur et du dénominateur, lorsque* $x = a + k$, *réduisez à sa plus simple expression la nouvelle fraction formée de ces premiers termes, et faites ensuite* $k = 0$; *les résultats que vous obtiendrez seront les différentes valeurs que prend la fraction proposée lorsqu'on fait* $x = a$.

Cette règle paroîtra quelquefois plus commode que le procédé de la différentiation, dans le cas où il peut s'employer. Ce n'est, par exemple, qu'après avoir différentié quatre fois de suite le numérateur et le dénominateur de la fraction

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - a^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}},$$

qu'on parvient à en trouver la vraie valeur dans le cas où $x = a$.

En écrivant $a + k$ au lieu de x, comme le prescrit la règle, il vient

$$\frac{2a^3 + 2a^2k - ak^2 + k^3 - 2a^2\sqrt{a^2 + 2ak}}{-2a^2 + k^2 + 2a\sqrt{a^2 - k^2}};$$

réduisant en série les deux quantités radicales on aura

$$\sqrt{a^2+2ak}=a+k-\frac{k^2}{2a}+\frac{k^3}{2a^2}-\frac{5k^4}{8a^3}+\text{etc.}$$

$$\sqrt{a^2-k^2}=a-\frac{k^2}{2a}-\frac{k^4}{8a^3}-\text{etc.}$$

La substitution de ces deux suites dans la fraction précédente donnera $-5a$ pour la vraie valeur cherchée.

Dans les cas où la valeur particulière de x fait disparoître quelques radicaux, et qui par-là échappent à la règle du n°. 136, il faut nécessairement avoir recours à celle dont nous venons de faire usage.

La fraction $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{5}{2}}}{(x-a)^{\frac{5}{2}}}$ dont on ne peut obtenir la valeur par la différentiation lorsque $x=a$ (n°. 138), donne

$$\frac{(2ak+k^2)^{\frac{5}{2}}}{k^{\frac{5}{2}}}=(2a+k)^{\frac{5}{2}}$$

en changeant x en $a+k$, et faisant $k=0$ on obtient la vraie valeur $(2a)^{\frac{5}{2}}$.

140. Une fonction peut encore se présenter sous plusieurs formes indéterminées, différentes en apparence de $\frac{0}{0}$, mais qui dans le fond reviennent au même, et qu'il est bon de connoître.

1°. Le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{X}{X'}$ peuvent devenir infinis en même temps; nous en avons donné un exemple dans le n°. 138 sur l'expression $\frac{3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+3x^2(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\frac{5}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}$, et nous avons indiqué comment on pouvoit en tirer un résultat qui devint $\frac{0}{0}$ quand $x=a$. En général, la fraction $\frac{X}{X'}$ étant écrite ainsi $\frac{\frac{1}{X'}}{\frac{1}{X}}$, se réduira à $\frac{0}{0}$ lorsque X et X' seront infinis;

la substitution de $a+k$ au lieu de x conduira aussi à sa vraie valeur sans qu'il soit besoin de la changer de forme. L'exemple rapporté ci-dessus devient par cette substitution

$$\frac{(2ak+k^2)^{\frac{1}{2}}+(a+k)^2(2ak+k^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}k^{\frac{1}{2}}}=4k(2a+k)^{\frac{1}{2}}+4(a+k)^2(2a+k)^{-\frac{1}{2}}$$

et en faisant $k=0$, il en résulte $4a^2(2a)^{-\frac{1}{2}}$

Si on demandoit la valeur que reçoit la fonction $\frac{x^n}{lx}$ quand x est infini, ou, ce qui est la même chose, la limite de cette fonction, on ne pourroit y parvenir par aucun des procédés dont nous avons fait usage jusqu'à présent, à cause de l'impossibilité de réduire lx en série, et il faudroit recourir aux considérations particulières à la nature de la fonction proposée. On a par le n°. 25 de l'Introduction $x=1+\frac{lx}{1}+\frac{(lx)^2}{1.2}+\frac{(lx)^3}{1.2.3}+$ etc.; ce qui fait voir que plus la quantité x sera grande, plus elle surpassera son logarithme, et plus aussi la valeur de l'expression $\frac{x}{lx}$ sera considérable; mais $\frac{x^n}{lx}=x^{n-1}\times\frac{x}{lx}$: la fonction $\frac{x^n}{lx}$ augmentera donc sans cesse et deviendra infinie en même temps que x. Il faut pourtant excepter de cette conclusion le cas où l'exposant n seroit infiniment petit, car il suit de ce que $x^0=1$, que quel que soit x, on peut toujours rendre x^n aussi peu différent de l'unité qu'on voudra, en prenant n d'une petitesse convenable (*).

2°. Il peut arriver qu'on rencontre un produit composé de deux facteurs, l'un infini et l'autre nul: soit PQ ce produit; si la supposition de $x=a$ donne $P=0$, $Q=\frac{b}{0}$, on fera $Q=\frac{1}{R}$, et R

(*) J'ai supposé qu'il s'agissoit de logarithmes Népériens, mais si le module n'étoit pas égal à l'unité, le nombre x ne finiroit pas moins par surpasser son logarithme, seulement cela n'arriveroit pas aussi-tôt que $x=1$.

sera

sera une quantité nulle dans la même hypothèse; il viendra donc $PQ = \frac{P}{R} = \frac{0}{0}$.

Prenons pour exemple l'expression $(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$, π désignant la demi-circonférence; lorsqu'on fait $x = 1$, d'un côté la quantité $1-x$ s'évanouit, et de l'autre l'angle $\frac{\pi x}{2}$ étant de 90° a sa tangente infinie. Pour parvenir donc à connoître la vraie valeur de ce produit, il faut faire $\tan\frac{\pi x}{2} = \frac{1}{R}$, et en se rappellant que $\tan A = \frac{1}{\cot A}$, on aura $R = \cot\frac{\pi x}{2}$; la fonction proposée deviendra par conséquent $\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}$, fraction qui se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque $x = 1$. On trouvera par la règle du n°. 136 que sa vraie valeur est $\frac{2}{\pi}$, en observant que $d.\cot\frac{\pi x}{2} = -\frac{\frac{1}{2}\pi dx}{\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2}$ (n°. 22.), et que $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$.

3°. Supposons enfin qu'on demande la valeur de la différence $P-Q$, lorsque les fonctions de x représentées par les lettres P et Q sont infinies. Si ces fonctions sont algébriques, rationnelles et entières, elles ne peuvent devenir infinies que dans le cas où x le devient aussi, et l'expression $P-Q$ ne peut avoir une valeur finie à moins qu'on n'ait $P = Q+b$, b étant une quantité constante. Quand P et Q sont des fractions dont les dénominateurs s'évanouissent, il est facile de changer la fonction proposée dans une autre qui devienne $\frac{0}{0}$; il suffit pour cela de réduire P et Q au même dénominateur.

Soit, par exemple, $P = \frac{1}{1-x}$ et $Q = \frac{2}{1-x^2}$; il en résultera

l'expression $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$, dont chaque terme devient infini lorsque $x = 1$: en réduisant au même dénominateur on trouvera $\frac{-1+2x-x^2}{(1-x)(1-x^2)}$. Cette fraction donne $\frac{0}{0}$ en y faisant $x = 1$, et sa vraie valeur dans ce cas est $\frac{1}{2}$.

Considérons encore les fonctions transcendantes $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{1x}$, et $\frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x \tan \pi x}$. La première, quand $x = 1$ devient la différence de deux quantités infinies, mais en substituant $1+k$ au lieu de x, elle prend la forme $\frac{1+k}{k} - \frac{1}{1(1+k)}$;

or, $1(1+k) = k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} -$ etc. : donc

$$\frac{1+k}{k} - \frac{1}{1(1+k)} = \frac{(1+k)1(1+k)-k}{k1(1+k)} = \frac{\frac{k^2}{2} - \frac{k^3}{3} + \text{etc.}}{k^2 - \frac{k^3}{2} + \text{etc.}}.$$

Divisant les deux termes de la dernière fraction par k^2, et faisant ensuite $k = 0$, elle donne $\frac{1}{2}$ pour la vraie valeur de $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{1x}$, dans le cas où $x = 1$.

La fonction $\frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x \tan \pi x}$ devient $\frac{1}{0} - \frac{\pi}{0}$, lorsqu'on y fait $x = 0$; mais si on met k à la place de x, et qu'on substitue, au lieu de tan πk, le développement $\frac{\pi k}{1} + \frac{2\pi^3 k^3}{1.2.3} +$ etc., qui résulte de la formule du n°. 106, on aura

$$\frac{1}{2k^2} - \frac{\pi}{\frac{2\pi k^2}{1} + \frac{4\pi^3 k^4}{1.2.3} + \text{etc.}}$$

On réduira ces deux fractions au même dénominateur; on divisera

les deux termes du résultat par k^4, et en supposant $k=0$, on obtiendra $\frac{\pi^4}{6}$. Je ferai remarquer qu'en réduisant les deux termes de la fonction proposée au même dénominateur, on trouveroit $\frac{\tan \pi x - \pi x}{2x^4 \tan \pi x}$, et si on écrivoit 0 au lieu de x, il viendroit $\frac{0}{0}$.

141. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des fonctions explicites de x; il nous reste à montrer comment la règle du n°. 139 s'applique aux fonctions implicites; c'est ce que nous allons faire sur l'expression de $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation $ax^3+x^3y-ay^3=0$.

On a $\frac{dy}{dx}=\frac{3ax^2+3x^2y}{3ay^2-x^3}$, et lorsque $x=0$, on trouve $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$. Mais si, au lieu de supposer x nul, on le regarde comme une quantité très-petite, on pourra substituer à la place de y la première série du n°. 124, et il viendra

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3ax^2+3x^3+\text{etc.}}{3ax^2+x^3+\text{etc.}};$$

divisant les deux termes de cette fraction par x^2, et faisant ensuite $x=0$, on obtiendra $\frac{dy}{dx}=\frac{3a}{3a}=1$.

La quantité $\frac{dy}{dx}$ a encore deux valeurs imaginaires; car en se reportant au numéro cité, on verra que dans la recherche du premier terme de la série ascendante dont on a fait usage, le coefficient A, qui multiplie le premier terme, étant donné par l'équation $a-aA^3=0$, ou $A^3-1=0$, a trois valeurs, la première égale à l'unité, et les deux autres imaginaires; on auroit donc à proprement parler trois séries ascendantes à substituer à la place de y dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$.

En général, lorsque la supposition de $x=a$ rendra $\frac{0}{0}$ une fonction

quelconque de x et de y, y étant lui-même une fonction implicite de x donnée par une équation, il faudra substituer $a+k$ à x, et mettre successivement au lieu de y les diverses séries ascendantes qui expriment son développement suivant les puissances de k: on cherchera ensuite ce que devient le résultat, en y faisant $k=0$, et on obtiendra par-là la vraie valeur de la fonction proposée.

142. Avant de quitter ce sujet, sur lequel on me pardonnera de m'être un peu étendu, à cause de son importance, je ferai connoître un procédé que fournit le Calcul différentiel, pour trouver la vraie valeur des coefficiens différentiels d'une fonction implicite, lorsqu'ils se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.

En remontant à la génération des équations différentielles à deux variables, on se rappellera qu'elles naissent de la substitution de $x+h$ et de $y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+$ etc., au lieu de x et de y, dans une équation primitive $u=0$ (n°. 40), et qu'on les formé en égalant successivement à zéro le coefficient de chaque puissance de h. Mais si quelque valeur particulière de x fait évanouir M et N, la différentielle première $M+N\frac{dy}{dx}=0$ (n°. 49) devenant identique d'elle-même, ne peut plus servir à déterminer $\frac{dy}{dx}$; il faut recourir dans ce cas à la différentielle seconde qui, parce que $N=0$, se réduit à $P+Q\frac{dy}{dx}+R\frac{dy^2}{dx^2}=0$: voilà donc $\frac{dy}{dx}$ donné par une équation du second degré. Si les coefficiens P, Q et R s'évanouissoient aussi, on feroit usage de la différentielle troisième qui, dans cette hypothèse, deviendroit $S+T\frac{dy}{dx}+V\frac{dy^2}{dx^2}+W\frac{dy^3}{dx^3}=0$ et détermineroit $\frac{dy}{dx}$: si les coefficiens de cette dernière s'anéantissoient encore, on chercheroit la différentielle quatrième et ainsi de suite. Comme les termes affectés de $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc. disparoissent, on voit

qu'il suffira de différentier plusieurs fois de suite l'équation primitive $u = 0$, en regardant dx et dy comme constans, jusqu'à ce qu'on parvienne à un résultat que la substitution de la valeur particulière de x ne fasse point évanouir.

En appliquant ce procédé à l'équation $ax^3 + x^3y - ay^3 = 0$, on verra que les différentielles première et seconde s'évanouissent par la supposition de $x = 0$, et que la différentielle troisième se réduit à $6a\,dx^3 - 6a\,dy^3 = 0$; d'où il résulte $\frac{dy^3}{dx^3} - 1 = 0$: on a donc $\frac{dy}{dx} = 1$, de même que dans le numéro précédent.

Si on égale à $\frac{dy}{dx}$ une fonction quelconque de x, l'équation qui en résultera pouvant être prise pour la différentielle d'une équation primitive, des différentiations répétées feroient connoître, comme dans l'exemple précédent, la vraie valeur de cette fonction, si elle étoit susceptible de devenir $\frac{0}{0}$. Telle est la règle que le C. Cousin, (*Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, *Paris*, 1796, *in*-4°. Tome 1er, page 117.) donne pour trouver dans tous les cas ce que signifient les fonctions qui paroissent indéterminées; mais il faut observer que présentée sous cette forme, elle n'est pas aussi générale que l'auteur l'annonce, et qu'elle se refuse aux cas qui échappent à celle que nous avons donnée n°. 136, à moins qu'on n'ait préalablement fait disparoître les radicaux, condition qu'il étoit indispensable d'exprimer.

Si on se proposoit la fonction $\frac{(x^3 - a^3)^{\frac{5}{3}}}{(x-a)^{\frac{5}{3}}}$, on en tireroit $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3 - a^3)}{(x-a)^{\frac{5}{3}}}$, d'où $(x-a)^3\,dy^3 - (x^3 - a^3)^3\,dx^3 = 0$.

Après trois différentiations, on auroit, en faisant $x = a$,

$$6\,dx^3\,dy^3 - 48\,a^3\,dx^5 = 0,$$

ce qui donneroit $\frac{dy}{dx} = (2a)^{\frac{2}{3}}$, résultat qui est conforme à celui du n°. 139. Dans un exemple plus compliqué l'évanouissement des radicaux auroit pu entraîner beaucoup de calculs, et par cette raison le procédé actuel ne sauroit être commode en général.

143. Pour mieux fixer l'attention du lecteur sur les propositions et les règles énoncées dans les articles précédens, nous allons en faire la récapitulation.

1°. Toute fonction qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, lorsqu'on donne une certaine valeur particulière à la variable dont elle dépend, a toujours une valeur déterminée, soit nulle, soit finie, soit infinie.

Cependant, il y a des quantités exprimées par $\frac{0}{0}$, qui sont réellement indéterminées. Si on avoit, par exemple, les deux équations

$$\left.\begin{matrix} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{matrix}\right\} \text{ on en tireroit, comme on sait, } \left\{\begin{matrix} x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b} \\ y=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b} \end{matrix}\right.$$

ces valeurs deviendroient $\frac{0}{0}$, en y faisant $a'=am$, $b'=bm$, $c'=cm$, et dans ce cas la question seroit réellement indéterminée, puisque la seconde équation se changeant en $max+bmy+cm=0$, ne dit rien de plus que la première. Nous avons pareillement rencontré dans le n°. 60 deux résultats vraiment indéterminés; mais dans l'une et l'autre circonstance les fonctions ne deviennent $\frac{0}{0}$, que parce que plusieurs quantités prennent à la fois des valeurs particulières. (Voyez n°. 147).

2°. Dans tous les cas où la fonction dont on cherche la vraie valeur ne renferme point de radicaux, ou bien lorsque les quantités placées sous ces signes ne s'évanouissent pas, ensorte qu'aucune irrationalité ne disparoît, on peut se servir de la règle du n°. 136. Dans le cas contraire, il faut employer celle du n°. 139.

Au reste nous croyons devoir prévenir ceux de nos lecteurs qui étudient le Calcul différentiel pour la première fois, que les faits analytiques exposés dans les n°s 128 et 135, peuvent se peindre, en quelque sorte, par les lignes courbes, et qu'ils se rapportent à certaines circonstances de leurs formes. Ces rapprochemens, qui jetteront un grand jour sur tout ce qui a été dit jusqu'à présent, seront développés avec soin dans le Chapitre IV.

Du développement des fonctions de deux variables.

144. Nous dirons très-peu de chose sur la manière de réduire en séries les fonctions de deux variables, parce qu'il arrive le plus souvent qu'on ne les développe que par rapport à l'une des variables qu'elles contiennent, en supposant à l'autre une valeur constante, et qu'alors elles doivent être traitées de même que les fonctions d'une seule variable. Il sera peut-être utile néanmoins de faire voir que la formule du n°. 32, s'emploie à développer les fonctions de deux variables, comme celle du n°. 12 s'applique aux fonctions qui n'en renferment qu'une.

Si on fait $x=0$ et $y=0$ dans la formule du n°. 32, c'est-à-dire dans u et dans chacun de ses coefficiens différentiels, elle donnera le développement de $f(h,k)$ ordonné suivant les puissances des quantités h et k; mais on pourra écrire x au lieu de h, et y au lieu de k, et il en résultera

$$f(x,y)=u+\frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}x+\frac{du}{dy}y\right\}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}x^2+2\frac{d^2u}{dxdy}xy+\frac{d^2u}{dy^2}y^2\right\}$$
$$+\text{ etc.}$$

en observant de faire x et y nuls tant dans u que dans les expressions qu'on obtiendra pour chacun des coefficiens différentiels: ceci est absolument semblable à ce qui a été dit n°. 100, et offre les mêmes remarques.

On pourroit encore obtenir le développement de $f(x,y)$ par la différentiation, ainsi qu'on est parvenu à celui de $f(x)$ dans le n°. 109; car si on suppose

$$u=A+Bx+Cy\left.\begin{array}{l}\\+Dx^2+Exy+Fy^2\\+\text{ etc.}\end{array}\right\},$$

les lettres A, B, C, etc. désignant des quantités indépendantes de x et de y, et qu'on différentie cette équation par rapport à x et par rapport à y, plusieurs fois de suite, de manière à obtenir les expressions des coefficiens différentiels $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dx\,dy}$, etc, on aura, en égalant à zéro x et y après les différentiations,

$$\frac{du}{dx} = B, \qquad \frac{du}{dy} = C,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1.2D, \quad \frac{d^2u}{dx\,dy} = 1.1.E, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 1.2\,F, \text{ etc.:}$$

à l'égard de A, on trouvera sa valeur en cherchant celle de la fonction u, lorsque x et y sont nuls.

145. Lorsque la fonction à développer sera donnée implicitement par une ou plusieurs équations, on suivra un procédé analogue à celui du n°. 110. Proposons-nous, par exemple, de réduire en série une fonction quelconque u, renfermant quatre variables t, x, y et z, entre lesquelles on ait les deux équations $P=0$, $Q=0$.

Dans toutes les questions de ce genre, il faut d'abord reconnoître quelles sont les variables qu'on doit regarder comme indépendantes; ici, puisqu'il existe deux équations, on pourra toujours déterminer deux des variables en fonction des deux autres. Supposons donc que ce soient t et x qu'on regarde comme indépendantes; on verra facilement que dans cette hypothèse u est une fonction implicite de ces dernières, puisqu'on peut en chasser y et z, au moyen des équations données: cela fait, si on y suppose t et x nuls, on aura le premier terme de son développement.

Pour obtenir les termes qui sont multipliés par x et par y, il faut trouver, en t et en x, les expressions des coefficiens différentiels $\frac{(du)}{dt}, \frac{(du)}{dx}$; on a

$$\frac{d(u)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dy}\,\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dx};$$

d'après

d'après le n°. 81, on tirera aussi des équations $P=0$ et $Q=0$,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dP}{dt}+\frac{dP}{dy}\,\frac{dy}{dt}+\frac{dP}{dz}\,\frac{dz}{dt}=0\\&\frac{dQ}{dt}+\frac{dQ}{dy}\,\frac{dy}{dt}+\frac{dQ}{dz}\,\frac{dz}{dt}=0\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dP}{dx}+\frac{dP}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{dP}{dz}\,\frac{dz}{dx}=0\\&\frac{dQ}{dx}+\frac{dQ}{dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{dQ}{dz}\,\frac{dz}{dx}=0\end{aligned}\right\}.$$

De ces quatre équations, les deux premières donneront $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$, et les deux dernières, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, en t, x, y et z; substituant dans $\frac{d(u)}{dt}$ et $\frac{d(u)}{dx}$ les valeurs qu'on aura trouvées; faisant ensuite $t=0$, $x=0$, et remplaçant y et z par les valeurs particulières qu'ils reçoivent dans cette circonstance, les résultats qu'on obtiendra seront les quantités qui doivent multiplier la première puissance de x et celle de y.

En cherchant l'expression de $\frac{d^2(u)}{dt^2}$, $\frac{d^2(u)}{dt\,dx}$ ..... $\frac{d^{m+n}(u)}{dt^m dx^n}$, etc. on obtiendroit les coefficiens de $t^2, tx \ldots t^m x^n$, etc. dans le développement de la fonction proposée; mais les calculs deviennent trop compliqués pour nous y arrêter, et ils n'offrent d'ailleurs aucune difficulté lorsqu'on possède la théorie de la différentiation des fonctions de plusieurs variables.

146. Le C. Laplace s'étant occupé des fonctions d'un nombre quelconque de variables, analogues à celles que nous avons considérées dans le n°. 111, d'après le C. Lagrange, est parvenu dans ce cas général à un développement d'une forme très-simple. Un ouvrage de la nature de celui-ci ne comportant pas tous les détails qu'il a insérés dans son intéressant Mémoire, nous nous bornerons à ce qui regarde les fonctions de deux variables, et en exposant les artifices

ingénieux que le C. Laplace a employés dans cette recherche, nous remplirons le but que nous nous sommes proposé, celui de faire connoître les procédés analytiques les plus remarquables.

Soit u une fonction quelconque des deux quantités y et ζ, déterminée par les deux équations

$$y = F(a + \iota\varphi(y,\zeta)) \qquad \zeta = F1(b + x\varphi1(y,\zeta))$$

F et $F1$, φ et $\varphi1$ désignant aussi des fonctions quelconques; si on avoit particularisé ces dernières, et que la forme des équations ci-dessus permît l'élimination, on parviendroit à connoître séparément les valeurs de y et de ζ, en a et ι, b et x. On doit donc regarder les deux premières quantités, comme des fonctions des quatre dernières, et en les différentiant sous ce point de vue, on formeroit les coefficiens différentiels suivans.

$$\frac{dy}{da} = F'(a+\iota\varphi)\cdot\left(1+\iota\frac{d\varphi}{da}\right)$$

$$\frac{dy}{d\iota} = F'(a+\iota\varphi)\cdot\left(\varphi+\iota\frac{d\varphi}{d\iota}\right)$$

$$\frac{dy}{db} = F'(a+\iota\varphi).\iota\,\frac{d\varphi}{db}$$

$$\frac{dy}{dx} = F'(a+\iota\varphi).\iota\,\frac{d\varphi}{dx}$$

Pour abréger, on a écrit seulement φ au lieu de $\varphi(y,\zeta)$ et on en usera de même à l'égard de $\varphi1(y,\zeta)$; on a de plus supprimé les parenthèses aux différentielles des fonctions u, φ et $\varphi1$, parce que ne contenant qu'implicitement les variables ι et x, il n'y a aucune confusion à craindre (n°. 70).

En supposant ι et x nuls, il en résultera

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{da} &= F'(a)\\ \frac{dy}{d\iota} &= F'(a).\varphi\\ \frac{dy}{db} &= 0\\ \frac{dy}{dx} &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{on trouvera dans les mêmes circonstances}\ \left\{\begin{aligned}\frac{d\zeta}{da} &= 0\\ \frac{d\zeta}{d\iota} &= 0\\ \frac{d\zeta}{db} &= F'1(b)\\ \frac{d\zeta}{dx} &= F'1(b).\varphi1\end{aligned}\right.$$

u deviendra fonction de a et de b seulement, puisqu'alors

$$y = F(u) \text{ et } z = F_1(b);$$

les expressions de $\frac{d(u)}{dt}$ et $\frac{d(u)}{dx}$ données dans le n°. précédent, se réduiront à

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(u)}{dt} &= \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dy}F'(a).\varphi \\ \frac{d(u)}{dx} &= \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dz}F'_1(b).\varphi_1 \end{aligned}\right\}$$

et parce que $\left.\begin{aligned} F'(a) &= \frac{dy}{da} \\ F'(b) &= \frac{dz}{db} \end{aligned}\right\}$ on aura $\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{du}{da}.\varphi \\ \frac{du}{dx} &= \frac{du}{db}.\varphi_1 \end{aligned}\right.$

lorsque $x = 0$ et $t = 0$.

Concevons pour un moment que l'on ait tiré de l'équation $z = F_1(b + x\varphi_1)$ la valeur de z, et qu'on l'ait substituée dans la fonction u; cette fonction ne dépendra plus alors que des variables y et x, et dans les différentiations relatives à t il suffira d'avoir égard à la première, puisque la seconde est une des variables indépendantes. Mais si on chasse en même temps z de l'équation $y = F(a + t\varphi)$, la fonction φ, lorsqu'on différentiera par rapport à t, pourra être considérée comme ne renfermant que y; on aura donc en vertu du n°. 112,

$$\frac{d^m u}{dt^m} = \frac{d^{m-1}.\varphi^m \frac{du}{da}}{da^{m-1}}$$

et par conséquent

$$\frac{d^{m+n}u}{dt^m dx^n} = \frac{d^n\left(\frac{d^{m-1}.\varphi^m\frac{du}{da}}{da^{m-1}}\right)}{dx^n} = \frac{d^{m-1}\left(\frac{d^n.\varphi^m\frac{du}{da}}{dx^n}\right)}{da^{m-1}}.$$

Il est clair que le développement de $d^n.\varphi^m\frac{du}{du}$ se déduira de

celui de $d^n.\varphi\frac{du}{da}$, en y mettant φ^m pour φ, $d.\varphi^m$ pour $d\varphi$, $d^2.\varphi^m$ pour $d^2\varphi$, et ainsi de suite : on pourra donc au lieu de $\varphi^m\frac{du}{da}$, écrire seulement $\varphi\frac{du}{da}$; mais cette dernière quantité étant égale à $\frac{du}{dt}$, lorsque t est nul, il en résultera

$$\frac{d^{m+n}u}{dt^m dx^n}=\frac{d^{m-1}\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^n dt}\right)}{da^{m-1}}$$

Tout étant semblable entre les variables y et z, t et x, a et b, on aura aussi

$$\frac{d^nu}{dx^n}=\frac{d^{n-1}.\varphi 1^n\frac{du}{db}}{db^{n-1}},$$

équation qu'on pourra changer en $\frac{d^nu}{dx^n}=\frac{d^{n-1}.\frac{du}{dx}}{db^{n-1}}$, en écrivant $\varphi 1$, au lieu de $\varphi 1^m$, et en substituant au lieu de $\varphi 1\frac{du}{db}$, sa valeur $\frac{du}{dx}$, dans le cas où $x=0$; mais il faudra avoir l'attention de remplacer $\varphi 1$ par $\varphi 1^m$ dans le résultat.

Mettons cette expression de $\frac{d^nu}{dx^n}$ dans celle de $\frac{dt^{m+n}u}{dt^m dx^n}$, trouvée ci-dessus, il viendra

$$\frac{d^{m+n}u}{dt^m dx^n}=\frac{d^{m+n-2}\left(\frac{d^2u}{dtdx}\right)}{da^{m-1}db^{n-1}},$$

en se rappellant toujours qu'il faut substituer φ^m à φ, $\varphi 1^n$ à $\varphi 1$, et après les différentiations, faire $t=0$, et $x=0$.

Les opérations précédentes nous ont procuré l'avantage de ne faire dépendre le coefficient $\frac{d^{m+n}u}{dt^m dx^n}$ que de celui du second ordre $\frac{d^2u}{dtdx}$, et les différentiations relatives à a et à b ne causeront aucun

embarras, puisqu'elles se présentent sous une forme très-simple lorsque t et x sont nuls, ainsi qu'on a dû le remarquer au commencement de ces articles. Il ne reste donc plus qu'à déterminer l'expression de $\frac{d^2u}{dtdx}$, ce qui sera facile.

En différentiant par rapport à x, l'équation $\frac{du}{dt}=\frac{du}{da}\varphi$, il viendra $\frac{d^2u}{dxdt}=\frac{d^2u}{dxda}\varphi+\frac{du}{da}\frac{d\varphi}{dx}$; or on a $\frac{du}{dx}=\frac{du}{db}\varphi_1$:

donc $\frac{d^2u}{dxdt}=\varphi\frac{d.\varphi_1\frac{du}{db}}{da}+\frac{du}{da}\frac{d\varphi}{dx}$. Mais φ exprimant, ainsi que u, une fonction quelconque de y et de z, il existe entre $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{db}$ la même relation qu'entre $\frac{d\cdot}{dx}$ et $\frac{du}{db}$; on aura donc encore $\frac{d\varphi}{dx}=\varphi_1\frac{d\varphi}{db}$, d'où

$$\frac{d^2u}{dxdt}=\varphi\varphi_1\frac{d^2u}{dadb}+\varphi\frac{d\varphi_1}{da}\frac{du}{db}+\varphi_1\frac{d\varphi}{db}\frac{du}{da};$$

et comme il faut changer φ en φ^m, φ_1 en φ_1^n, il viendra

$$\frac{d^2u}{dxdt}=\varphi^m\varphi_1^n\frac{d^2u}{dadb}+n\varphi^m\varphi_1^{n-1}\frac{d\varphi_1}{da}\frac{du}{db}+m\varphi^{m-1}\varphi_1^n\frac{d\varphi}{db}\frac{du}{da},$$

bien entendu que φ et φ_1 ainsi que u, seront réduits à des fonctions de a et de b, en mettant au lieu de y et z leurs valeurs, lorsque t et x sont nuls. Ayant formé ainsi $\frac{d^2u}{dxdt}$, que nous représenterons par $U^{(m+n)}$ on aura pour le terme général du développement de la fonction proposée,

$$\frac{d^{m+n-2}U^{(m+n)}}{da^{m-1}db^{n-1}}\cdot\frac{t^mx^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n};$$

on obtiendra chacun des termes individuellement, en prenant pour m et pour n tous les nombres entiers 0, 1, 2, 3, etc.

Il est d'ailleurs aisé de voir que le développement que nous venons

de trouver, pourra s'appliquer à des questions analogues à celles des n°s. 113, 114 et 115.

147. Les développemens des fonctions de plusieurs variables, qu'on obtiendroit par ce qui précède, dépendent des valeurs particulières de leurs coefficiens différentiels qui, dans certains cas, peuvent, comme ceux des fonctions d'une seule variable, devenir ou nuls ou infinis, ou enfin paroître indéterminés. L'examen de ces diverses circonstances offriroit des détails analogues à ceux qu'on trouve dans les n°s. 135 et suiv. : nous ne nous y arrêterons pas, parce qu'ils nous meneroient trop loin, et que d'ailleurs il est facile d'étendre aux fonctions de plusieurs variables, ce qui a été dit à l'égard des fonctions d'une seule; cependant les cas où les premières deviennent $\frac{0}{0}$, présentent des différences importantes que nous ne pouvons passer sous silence.

Une fonction de deux variables, par exemple, peut devenir $\frac{0}{0}$ de plusieurs manières : 1°. lorsqu'une des variables restant indéterminée, l'autre prend une valeur particulière; 2°. lorsque chacune d'elles reçoit une détermination qui lui est propre.

Soit $z=\frac{c(x^2-a^2)}{y(x-a)+(x-a)^2}$; en faisant $x-a$ on aura $z=\frac{0}{0}$, quel que soit y : mais en supprimant les facteurs communs, la fonction z se réduit à $z=\frac{c(x+a)}{y+x-a}$, qui devient $z=\frac{ac}{y}$. Ce cas est très-simple; toutes les fois qu'il a lieu, l'application des règles des n°s. 136, 139, conduit à un résultat déterminé par rapport à x, et qui ne dépend plus que de la valeur de y.

Il n'en serait pas de même si on avait $z=\frac{c(x-a)}{y-b}$. Cette fonction qui devient $\frac{0}{0}$ lorsqu'on a $x=a$ et $y=b$, est réellement indéterminée; pour s'en convaincre, on fera $y-b=m(x-a)$

ce qui est permis, puisque y et x sont indéterminés ; il résultera de cette supposition $z = \frac{c}{m}$, quantité susceptible de toutes les valeurs possibles, à raison de celles qu'on peut donner à m: on auroit pu prévoir ce résultat, puisque la fonction z ne dépend uniquement que du rapport des quantités $(x-a)$ et $(y-b)$. Si on se contentoit de faire $x=a$ ou $y=b$, elle deviendroit nulle dans le premier cas, et infinie dans le second.

Il arrive aussi quelquefois que toutes les valeurs que la fonction proposée peut avoir dans un cas particulier, quoiqu'infinies en nombre, sont comprises entre certaines limites : telles seroient celles que reçoit la fonction $z = \frac{c(x-a)(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}$, lorsque $x=a$ et $y=b$.

En faisant $y-b=m(x-a)$, on aura $z = \frac{cm}{1+m^2} = \frac{c}{\frac{1}{m}+m}$; il est aisé de remarquer que la supposition de $m=1$ donnera la plus grande valeur que puisse avoir z, et que par conséquent cette fonction sera toujours comprise entre les limites $\frac{c}{2}$ et $-\frac{c}{2}$, qu'on obtient lorsqu'on met $+1$ et -1 à la place de m. Ces résultats faciles à saisir en eux-mêmes, seront encore vérifiés dans la suite par des applications géométriques.

Prenons l'exemple plus général $z = \frac{(x-a)^m + c(y-b)^n}{(x-a)^{m'} + c'(y-b)^{n'}}$: lorsque $x=a$ et $y=b$, z devient $\frac{0}{0}$, et en écrivant $a+h$ et $b+k$ au lieu de x et de y, il en résulte $z = \frac{h^m + ck^n}{h^{m'} + c'k^{n'}}$, expression de laquelle on ne peut rien conclure à l'égard de z, tant que les quantités h et k demeureront indépendantes l'une de l'autre. Si on fait $k=Ah^\alpha$, α étant un nombre positif, afin que k et h puissent s'évanouir en même temps, on trouvera $z = \frac{h^m + cA^n h^{\alpha n}}{h^{m'} + c'A^{n'} h^{\alpha n'}}$, et suivant les diverses hypothèses qu'on fera sur α, on obtiendra

pour ζ, dans le cas de $h=0$, des valeurs soit nulles, soit finies, soit infinies.

Considérons en dernier lieu la fonction,

$$\zeta = \frac{(x-y)\,a^n-(a-y)\,x^n+(a-x)\,y^n}{(x-y)(a-y)(a-x)}$$

que la supposition de $x=y=a$ rend $\frac{0}{0}$; substituons $a+h$ et $a+k$ au lieu de x et de y respectivement, nous aurons

$$\zeta = \frac{(h-k)\,a^n+k(a+h)^n-h(a+k)^n}{(h-k)\,hk};$$

en développant les puissances indiquées, faisant les réductions et effectuant la division par $(h-k)\,hk$,

$$\zeta = \frac{n(n-1)}{1.2}\,a^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,a^{n-3}(h+k)+\text{etc.}$$

Cette expression ne renfermant plus que des termes dégagés des quantités h et k, ou susceptibles de devenir nuls, en même temps qu'elles, donnera une valeur déterminée de la fonction proposée, et en faisant h et k égaux à zéro, on obtiendra $\zeta = \frac{n(n-1)}{1.2}\,a^{n-2}$.

J'observerai qu'on parviendroit aussi à cette valeur, en traitant d'abord la fonction proposée comme ne renfermant que la seule variable x, et cherchant par la règle du n°. 136, ce qu'elle devient lorsqu'on suppose $x=y$; puis en différentiant deux fois de suite le numérateur et le dénominateur du résultat, pour obtenir sa vraie valeur, lorsque $y=a$. Ces divers exemples suffisent pour préparer le lecteur aux difficultés du même genre, qu'il pourrait rencontrer par la suite, et pour le mettre sur la voie de leur solution.

Recherche des *Maxima* et des *Minima* des fonctions d'une ou de plusieurs variables.

148. Avant de terminer ce chapitre, il nous reste à traiter une question importante; celle qui a pour objet la recherche des plus grandes ou des moindres valeurs dont est susceptible une fonction donnée.

Considérons en premier lieu une fonction d'une seule variable, et supposons que cette variable passe successivement par tous les degrés de grandeur; il pourra arriver que la série des valeurs que reçoit

reçoit la fonction proposée, d'abord croissante, devienne ensuite décroissante ; et alors il y aura une de ces valeurs qui surpassera toutes les autres. Si au contraire la série des valeurs de la fonction proposée est d'abord décroissante, et devient ensuite croissante, on en rencontrera nécessairement une qui sera moindre que toutes les autres: le terme où l'accroissement d'une fonction s'arrête, s'appelle *Maximum*, et celui où elle cesse de décroître, *Minimum*.

Prenons pour exemple la fonction $y = b - (x - a)^2$: en faisant $x = 0$, on a $y = b - a^2$, et la quantité $(x - a)$ venant à décroître lorsque x augmente, y augmente aussi, jusqu'à ce qu'on ait $x = a$, d'où il résulte $y = b$ pour le *maximum* ; mais passé ce terme, quoique x prenne de nouveaux accroissemens, y décroît, et devient nul, quand $(x - a)^2 = b$. La marche de la fonction proposée est facile à suivre, et on peut d'ailleurs vérifier que la plus grande valeur de y répond à $x = a$, en substituant successivement $a + \delta$ et $a - \delta$ au lieu de x; on trouvera dans l'un et l'autre cas un résultat $y = b - \delta^2$ toujours moindre que b.

Soit encore $y = b + (x - a)^2$. Dans cet exemple, x étant nul ; on a $y = b + a^2$; puis à mesure que x augmente, la quantité $(x - a)^2$ va en diminuant ainsi que y, jusqu'à ce que $x = a$: passé ce terme, $(x - a)^2$ augmente, et il en est de même de y dont le *minimum* répond par conséquent à la supposition de $x = a$.

Toute fonction qui croît ou décroît sans cesse, lorsque la variable dont elle dépend croît, n'est susceptible ni de *maximum* ni de *minimum*, puisqu'à une valeur quelconque il en succède toujours une plus grande ou une moindre.

Le caractère essentiel du maximum *consiste en ce que les valeurs qui le précèdent ou qui le suivent immédiatement sont plus petites que lui ; le* minimum, *au contraire, est surpassé par les valeurs qui le précèdent ou qui le suivent immédiatement.*

J'ai dit *immédiatement*, parce qu'il arrive souvent qu'une fonction a des valeurs qui surpassent son *maximum* ou qui sont moindres que son *minimum*, ou enfin qu'elle a plusieurs *maxima* et plusieurs *minima* inégaux entr'eux ; tout cela est aisé à concevoir ; car si après avoir crû et decrû, par exemple, cette fonction

vient à croître de nouveau et indéfiniment, elle finira par surpasser le *maximum* qu'elle a eu d'abord.

Au lieu de supposer qu'elle croisse indéfiniment, nous pouvons imaginer qu'elle décroisse après un certain terme, et de là naîtra un nouveau *maximum* qui pourra être différent du premier: on verra sans peine ce qui doit arriver, lorsque ces changemens se répètent et varient dans leurs quantités respectives. Passons maintenant à la méthode dont on fait usage pour découvrir les *maxima* et *minima* des fonctions d'une seule variable.

149. Soit donc y une fonction quelconque de x, et supposons que x ait atteint la valeur qui donne le *maximum* ou le *minimum* de cette fonction; il suit de ce qui précède que si on cherche les valeurs de y, correspondantes à $x-h$ et à $x+h$, on doit obtenir dans l'un et l'autre cas des résultats moindres que le *maximum* ou plus grands que le *minimum*. En désignant par $,y$ la valeur de y qui répond à $x-h$ et par $y,$ celle qui répond à $x+h$, on aura, d'après le théorême de Taylor,

$$,y = y - \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$y, = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Or, puisqu'en général on peut prendre h assez petite pour que le terme $\frac{dy}{dx}$ surpasse la somme de tous ceux qui le suivent, on voit que y sera plus grand que la première valeur $,y$, et moindre que la seconde $y,$; la fonction proposée ne sera par conséquent ni un *maximum* ni un *minimum* tant que $\frac{dy}{dx}$ ne sera pas nul. Mais si on avoit $\frac{dy}{dx} = 0$, comme il viendroit alors

$$,y = y + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} +, \text{ etc.}$$

$$y, = y + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} +, \text{ etc.}$$

on auroit en même temps $y<y$, et $y<y$,, lorsque le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ seroit une quantité positive ; ou bien $y>y$, et $y>y$, lorsqu'il seroit une quantité négative : le premier cas donneroit y *minimum*, et le second y *maximum*. Nous conclurons de là, que *pour trouver, quand une fonction y doit atteindre son* maximum *ou son* minimum, *car l'un et l'autre sont donnés par la même équation, il faut chercher l'expression du premier coefficient différentiel* $\frac{dy}{dx}$ *et l'égaler à zéro.*

Dans l'exemple $y=b-(x-a)^2$, rapporté ci-dessus, on a $\frac{dy}{dx}=-2(x-a)$, et en l'égalant à zéro, on trouve $x=a$. Pour savoir maintenant si cette valeur répond à un *maximum* ou à un *minimum*, on cherchera ce que devient $\frac{d^2y}{dx^2}$, et comme il se réduit à -2, quantité négative, il s'ensuit que la supposition de $x=a$ donne le *maximum*. En traitant de même la fonction $y=b+(x-a)^2$, on auroit encore trouvé $x=a$, mais $\frac{d^2y}{dx^2}$ seroit devenu positif, et par conséquent c'est le *minimum* qui a lieu dans ce cas.

150. De ce qu'on doit avoir $\frac{dy}{dx}=0$, dans le cas du *maximum* ou du *minimum*, il n'en faut pas conclure que l'un ou l'autre ont nécessairement lieu toutes les fois que cette condition est remplie. En effet, si la valeur de x, qui rend $\frac{dy}{dx}$ nul, faisoit évanouir en même temps $\frac{d^2y}{dx^2}$, sans que $\frac{d^3y}{dx^3}$ disparût, comme on trouveroit dans cette circonstance

$$y=y-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4}-\text{etc.};$$

$$y_1=y+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4}+\text{etc.};$$

et que le terme $\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}$ pourroit, au moyen d'une valeur convenable de h, surpasser la somme de tous ceux qui le suivent, il n'y auroit plus entre les trois quantités $,y$, y, $y_,$, la subordination qui convient au *maximum* ou au *minimum* : la moyenne seroit plus grande que l'une des extrêmes et moindre que l'autre.

Mais si on avoit aussi $\frac{d^3y}{dx^3}=0$, il viendroit

$$,y=y+\frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4}-\text{etc.};$$

$$y_,=y+\frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4}+\text{etc.};$$

les conditions du *maximum* ou du *minimum* seroient encore remplies, et on reconnoîtroit au signe de $\frac{d^4y}{dx^4}$, lequel des deux doit avoir lieu.

Sans qu'il soit besoin de pousser plus loin ces considérations, on verra qu'en général il ne peut y avoir de *maximum* ou de *minimum* que quand le premier des coefficiens différentiels qui ne s'évanouissent pas est d'un ordre pair, et que ce coefficient doit être négatif, lors du *maximum*, et positif, lors du *minimum*.

151. Examinons d'après ces remarques, quels peuvent être les *maxima* et les *minima* de la fonction $y=b+(x-a)^n$. En la différentiant, on en tire $\frac{dy}{dx}=n(x-a)^{n-1}=0$, d'où il suit $x=a$; maintenant si n est un nombre entier; tous les coefficiens différentiels jusqu'à celui de l'ordre n exclusivement, s'évanouissent par cette valeur de x, et on voit par-là que dans le cas où n sera impair, la fonction proposée n'aura ni *maximum* ni *minimum*. Mais si l'exposant n est pair, elle aura un *maximum*, parce que le coefficient $\frac{d^ny}{dx^n}$, le premier de ceux qui ne s'évanouissent pas, sera positif:

il auroit été négatif si on avoit eu $y = b - (x-a)^n$, et la valeur de $x = a$ auroit donné un *minimum*.

Si n étoit un nombre fractionnaire, il y auroit alors des coefficiens différentiels qui deviendroient infinis (n°. 128), et les développemens de y, correspondans à $x-h$ et à $x+h$, cessant d'avoir la forme générale sur laquelle on a établi la règle du n°. 149, il faudroit chercher *a priori* ce que devient la fonction proposée lorsqu'on y substitue successivement $a-h$ et $a+h$ au lieu de x. Si on parvenoit à deux résultats moindres ou plus grands que celui que donne la supposition de $x = a$, il y auroit *maximum* dans le premier cas, et *minimum* dans le second ; mais si les résultats trouvés étoient, l'un plus grand, l'autre plus petit, que la valeur qui répond à $x = a$, il n'y auroit ni *maximum* ni *minimum*. Soit $n = \frac{p}{q}$, p et q étant des nombres premiers entr'eux

$$\text{on aura lorsque } \left.\begin{matrix} x = a-h, \\ x = a+h, \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y = b + (-h)^{\frac{p}{q}} \\ y_1 = b + (+h)^{\frac{p}{q}} \end{matrix}\right\};$$

p étant pair et q impair, il y aura *minimum* ; car alors $(-h)^p = h^p$ et il vient $y = b + h^{\frac{p}{q}}$, $y_1 = b + h^{\frac{p}{q}}$, quantités toutes deux plus grandes que b qui résulte de la supposition de $x = a$: dans le cas contraire où p seroit impair et q pair, y seroit imaginaire, on auroit $y_1 = b \pm h^{\frac{p}{q}}$ et la valeur $= a$ ne donneroit ni un *maximum* ni un *minimum*, mais elle répondroit à une limite passé laquelle la fonction y devient imaginaire. Si p et q étoient impairs, la fonction proposée, quoique toujours réelle, n'auroit encore ni *maximum* ni *minimum*. Comme nous devons revenir sur ce sujet à l'occasion de la théorie des courbes, nous ne donnerons pour le moment que quelques applications.

152. Supposons d'abord qu'il s'agisse de *partager une quantité* a *en deux parties, de manière que le produit de la puissance* m *de la première par la puissance* n *de la seconde, soit le plus grand de tous les produits semblables qu'on pourroit former.*

Soit x une des parties de a, l'autre sera $a-x$, et le produit dont on cherche le *maximum* étant représenté par y, on aura $y=x^m(a-x)^n$, d'où on tirera

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1}=[ma-mx-nx]x^{m-1}(a-x)^{n-1};$$

et en égalant à zéro chacun des facteurs de ce résultat, on trouvera $x=\frac{na}{m+n}$, $x=0$, $x=a$. La première de ces valeurs répond à un *maximum*, car lorsqu'on la substitue dans l'expression générale de $\frac{d^2y}{dx^2}$, elle donne la quantité négative $-\frac{m^{m-1}n^{n-1}a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}}$: les deux autres répondront à des *minima*, lorsque m et n seront pairs, comme on peut s'en assurer par l'examen des coefficiens différentiels, ou plus simplement encore, en faisant $x=\pm h$ et $x=a\pm h$. On trouvera toujours un résultat positif dans l'un et l'autre cas, quel que soit le signe qu'on donne à h, ce qui prouve que la fonction proposée après avoir décrû jusqu'à devenir nulle, ne passe point au négatif, mais qu'elle recommence à croître.

153. Proposons-nous encore de *trouver le* maximum *et le* minimum *de la fonction* y *donnée par l'équation* $x^3-3axy+y^3=0$.

Dans cet exemple y ayant trois valeurs en x, doit être regardé comme représentant trois fonctions distinctes, mais cependant liées entr'elles par le caractère commun aux racines des équations du troisième degré; chacune de ces fonctions a sa marche particulière, et peut être susceptible de *maxima* et de *minima* qui lui soient propres: c'est ce que le calcul va nous faire connoître. (*)

On a $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$; faisant $\frac{dy}{dx}=0$, on obtiendra une nouvelle équation $ay-x^2=0$, qu'il faudra combiner avec la proposée pour déterminer x et y, et il en résultera $x^6-2a^3x^3=0$, d'où $x^3=0$, $x^3-2a^3=0$. Lorsqu'on fait $x=0$, il vient $y=0$ et

(*) Euler a donné avec raison le nom de *fonctions multiformes* aux fonctions qui sont susceptibles de plusieurs valeurs pour chacune de celles de la variable dont elles dépendent.

$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$; pour savoir donc ce que signifient les trois valeurs de l'équation $x^3=0$, on supposera x égal à une quantité très-petite h, et cherchant le premier terme de la série ascendante qui exprime y, dans l'équation $h^3-3ahy+y^3=0$, on trouvera les trois quantités $\frac{h^2}{3a}$, $+\sqrt{3ah}$ et $-\sqrt{3ah}$, qui répondent aux trois valeurs que doit avoir y. On voit maintenant que soit qu'on fasse $x=+h$ ou $x=-h$, la première reste positive, et que par conséquent elle a tous les caractères d'un *minimum* lorsque $h=0$; il n'en est pas de même des deux autres qui deviennent imaginaires quand on prend h négativement. L'équation $x^3-2a^3=0$ donne $x=a\sqrt[3]{2}$ et si on substitue cette valeur dans l'expression générale de $\frac{d^2y}{dx^2}$, en observant qu'elle rend $\frac{dy}{dx}$ nul, on aura $\frac{d^2y}{d^2x}=-\frac{2}{a}$ ce qui nous apprend que la fonction y a un *maximum* correspondant à $x=a\sqrt[3]{2}$.

Si on cherche le *maximum* de la fonction $y=x^{\frac{1}{x}}$, on trouvera qu'il a lieu lorsque x est égal au nombre qui a l'unité pour logarithme népérien, ce qui offre une propriété remarquable de ce nombre.

Ces exemples suffisent pour montrer comment on doit se conduire dans tous les autres cas; c'est pourquoi nous allons nous occuper des fonctions de plusieurs variables.

154. Lorsque la fonction qu'on considère dépend de deux variables, on peut en regarder une comme constante et donner à l'autre une infinité de valeurs à chacune desquelles correspondra une ou plusieurs valeurs de la fonction proposée; parmi ces dernières, il pourra s'en trouver qui soient des *maxima* ou des *minima*, et rien n'est plus facile que de les déterminer. Puisqu'on ne doit avoir égard qu'à une seule variable, il suffira d'égaler à zéro le coefficient différentiel relatif à cette variable; ainsi u étant une fonction de x et de y, si on suppose y constant, et qu'on fasse $\frac{du}{dx}=0$, on obtiendra les valeurs de x qui donnent les plus grandes ou les plus

petites valeurs de u, parmi toutes celles qui répondent à une même valeur de y. En chassant x de la fonction u, au moyen de l'équation $\frac{du}{dx}=0$, on obtiendra un résultat que je représenterai par (u), et qui, contenant encore la variable y, pourra être susceptible de *maxima* ou de *minima*, que l'équation $\frac{d(u)}{dy}=0$ fera connoître. On peut parvenir à une équation équivalente à $\frac{d(u)}{dy}=0$, sans qu'il soit besoin d'éliminer x; pour cela il faut observer que l'équation $\frac{du}{dx}=0$, fournie par la condition du *maximum* ou du *minimum* relatif à x, établit une relation entre les variables x et y, en sorte qu'on doit regarder la première comme une fonction de la seconde. En différentiant u dans cette hypothèse, on aura $\frac{d(u)}{dy}=\frac{du}{dx}\,\frac{dx}{dy}+\frac{du}{dy}$; résultat qui se réduit à $\frac{du}{dy}=0$, puisqu'on a déjà $\frac{du}{dx}=0$: les plus grandes ou les plus petites de toutes les valeurs de u, c'est-à-dire, ses *maxima* ou ses *minima* absolus répondront donc à quelques-unes des valeurs de x et de y, données par les équations $\frac{du}{dx}=0$, $\frac{du}{dy}=0$. En étendant ces considérations aux fonctions de tant de variables qu'on voudra, on trouvera que *pour obtenir les* maxima *et les* minima *absolus de ces fonctions, il faut égaler séparément à zéro le coefficient différentiel de chacune des variables dont elles dépendent.*

155. La distinction des *maxima* d'avec le *minima* renferme plus de difficulté à l'égard des fonctions de plusieurs variables que par rapport aux fonctions d'une seule, quoique fondée sur les mêmes principes dans l'un et l'autre cas.

Soit u une fonction contenant un nombre quelconque de variables x, y, z, etc.; si on nomme a, b, c, etc. les valeurs qui répondent à son *maximum* ou à son *minimum*, et qu'on représente par A, B, C, D, etc., F, G, H, I, K, L, etc., ce que deviennent

viennent u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, etc. $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdz}$, $\frac{d^2u}{dydz}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, etc. lorsqu'on y met a au lieu de x, b au lieu de y, c au lieu de z, etc. le résultat de la substitution de $a+h$, $b+k$, $c+l$, etc. dans u sera (n°. 38) $A+Bh+Ck+Dl+$ etc.

$$+\frac{1}{1.2}\left\{Fh^2+2Ghk+Hk^2+2Ihl+2Kkl+Ll^2+\text{etc.}\right\}$$

$+$ etc.

expression dont la valeur doit être moindre que A, lors du *maximum*, et plus grande lors du *minimum*, quels que soient les signes des lettres h, k, l, etc. pourvu qu'elles n'expriment que de petits changemens. Mais comme les termes du premier ordre, Bh, Ck, Dl, etc. qu'on peut rendre plus considérables que tous les autres, en prenant h, k, l, etc. d'une petitesse convenable, changent de signe en même temps que ces quantités, un raisonnement semblable à celui du n°. 149, fera voir qu'ils doivent être nuls dans le cas du *maximum* ou du *minimum*; on aura donc $B=\frac{du}{dx}=0$, $C=\frac{du}{dy}=0$, $D=\frac{du}{dz}=0$, etc. comme il résulte de la règle énoncée dans le n°. précédent. Ces conditions étant remplies par les valeurs de a, b, c, etc, déterminées en conséquence, il faudra de plus que les coefficiens F, $G\ldots L$, etc. ne s'évanouissent pas en même temps, et que le signe de la quantité du second ordre, qui forme la deuxième ligne du développement ci-dessus, soit indépendant des rapports qu'on pourroit établir entre h, k, l, etc. et de leurs signes,

On sait, par la théorie des équations algébriques, que toute expression de leur forme ne peut passer du positif au négatif, sans devenir nulle dans l'intervalle, et que lorsqu'elles n'ont que des racines imaginaires, elles ne changent point de signe, quelque valeur qu'on donne à l'inconnue. Il suit de là que si la quantité

$$Fh^2+2Ghk+Hk^2+2Ihl+2Kkl+Ll^2+\text{etc.}$$

égalée à zéro et résolue, comme une équation, par rapport à l'une

des indéterminées h, k, l, etc. ne donne que des racines imaginaires, on en pourra conclure qu'elle conservera le même signe quelles que soient ces indéterminées. Prenant la valeur de h, par exemple, on trouve

$$h=\frac{-(Gk+Il+\text{etc.})\pm\sqrt{-(Hk^2+2Kkl+Ll^2+\text{etc.})F+(Gk+Il+\text{etc.})^2}}{F},$$

résultat qui sera imaginaire, si la quantité comprise sous le radical est négative; mais on peut donner à cette quantité la forme $-(Pk^2+2Qkl+Rl^2+\text{etc.})$ en faisant $FH-G^2=P$, $KF-GI=Q$, $LF-I^2=R$, etc. et pour qu'elle ne change pas de signe, il faudra encore qu'étant égalée à zéro et résolue par rapport à l'une des lettres k, l, etc. elle ait ses racines imaginaires. On en tirera, par ces opérations,

$$k=\frac{-(Ql+\text{etc.})\pm\sqrt{-(Rl^2+\text{etc.})P+(Ql+\text{etc.})^2}}{P};$$

k ne pouvant être imaginaire à moins que la quantité comprise sous le radical ne soit négative, on mettra cette nouvelle quantité sous la forme $-(Tl^2+\text{etc.})$, en faisant $T=PR-Q^2$, etc. pour la traiter de la même manière que les deux précédentes, et on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'avant-dernière des quantités h, k, l, etc. Supposons pour fixer les idées, qu'il n'y ait que trois variables dans la fonction u, l'opération sera terminée à la valeur de k; et puisque T doit être positif, il faudra qu'on ait $PR-Q^2$, ou $T>0$. Avec cette condition, la quantité $Pk^2+2Qkl+Rl^2$ ne pourra changer de signe, et comme elle se réduit à Pk^2, lorsque $l=0$, il faudra pour qu'elle soit positive, ainsi que l'exige la nature de la question, qu'on ait aussi $P>0$, ou $FH-G^2>0$. On voit par-là que les coefficiens F et H doivent être positifs en même temps, ou négatifs en même temps; dans le premier cas, la quantité Fh^2+etc. conservant toujours le signe positif qu'elle a, lorsque k, l, etc. sont égaux à zéro, indique un *minimum*; le *maximum* auroit lieu dans le second cas où elle seroit négative.

Pour se convaincre *à posteriori*, que lorsque les conditions qu'on vient de trouver seront remplies, l'ensemble des termes du second ordre de la série $A+Bh+Ck+$etc. restera toujours de même signe,

quels que soient h, k, l, etc. il suffira de remarquer que l'équation du second degré dont les racines seroient $t = -\alpha \pm \sqrt{-\beta^2}$, auroit la forme $(t+\alpha)^2+\beta^2=0$; car en représentant par $-Y^2$, $-Z^2$ etc. les quantités qui sont sous les radicaux des valeurs de h, k, etc. on transformera les expressions

$$\left.\begin{matrix} Fh^2+2Gkh.....+Ll^2+\text{etc.} \\ Pk^2+2Qkl+Rl^2+\text{etc. ou } Y^2 \end{matrix}\right\} \text{en} \left\{\begin{matrix} F\left\{\left(h+\dfrac{Gk+Il+\text{etc.}}{F}\right)^2+\dfrac{Y^2}{F^2}\right\} \\ P\left\{\left(k+\dfrac{Ql+\text{etc.}}{P}\right)^2+\dfrac{Z^2}{P^2}\right\} \end{matrix}\right.$$

etc. etc.

mettant dans Y^2, pour Z^2 sa valeur $Tl^2+\text{etc.}$ et substituant le résultat dans $F\left[\left(h+\dfrac{Gk+Il+\text{etc.}}{F}\right)^2+\dfrac{Y^2}{F^2}\right]$, il viendra

$$F\left(h+\frac{Gk+Il+\text{etc.}}{F}\right)^2+FP\left(k+\frac{Ql+\text{etc.}}{P}\right)^2+FPT\left(l+\frac{\text{etc.}}{T}\right)^2 + \text{etc.}$$

On voit bien maintenant que cette expression ne sauroit changer de signe, en même temps que h, k, l, etc. et que P et Q étant positifs, son signe dépendra de celui de F.

Si u ne contenoit que deux variables, les coefficiens D, etc. I, K, L, etc. seroient nuls, et les conditions du *maximum* et du *minimum* se réduiroient à $FH-G^2>0$. Euler, dans son Calcul différentiel, n'indiqua que la nécessité d'avoir F et H positifs ou négatifs en même temps; Lagrange montra le premier que cette condition n'étoit pas suffisante, et on lui doit la théorie que nous venons d'exposer.

Si les coefficiens du second ordre s'anéantissoient en même temps que ceux du premier, il n'y auroit *maximum* ou *minimum* qu'autant que les coefficiens du troisième disparoîtroient aussi, et que les termes du quatrième ordre formeroient une quantité dont le signe ne dépendroit aucunement de h, k, l, etc. La considération des facteurs imaginaires que devroit avoir cette quantité pour satisfaire à la condition demandée, meneroit à des résultats analogues aux précédens. Au reste, j'observerai que, quoi qu'il arrive après la substitution de a, b, c, etc. dans u et dans ses coefficiens différentiels, il faut

toujours que les résultats obtenus par la supposition de $x=a\pm h$, $y=b\pm k$, $z=c\pm l$, etc. soient tous moindres ou tous plus grands que celui qui répond à $x=a$, $y=b$, $z=c$, etc. et que les diverses méthodes propres à faire reconnoître si cela a lieu, le seront aussi pour s'assurer de l'existence du *maximum* ou du *minimum*.

156. Pour donner un exemple, j'ai choisi la question suivante, analogue à celle du n°. 152 : *partager la quantité* a *en trois parties* x, y, a—x—y, *telles que le produit* $x^m y^n (a-x-y)^p$ *soit un* maximum.

On a alors $u=x^m\ y^n\ (x-x-y)^p$

$$\frac{du}{dx}=x^{m-1}y^n\ (a-x-y)^{p-1}\{ma-mx-my-px\}=0$$

$$\frac{du}{dy}=x^m\ y^{n-1}(a-x-y)^{p-1}\{na-nx-ny-py\}=0$$

les facteurs $ma-mx-my-px$, et $na-nx-ny-py$, étant égalés à zéro, donnent

$$x=\frac{ma}{m+n+p},\quad y=\frac{na}{m+n+p},\quad a-x-y=\frac{pa}{m+n+p}.$$

Pour savoir si ces valeurs appartiennent en effet à un *maximum*, on les substituera dans les expressions générales de $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$; en faisant pour abréger $m+n+p=q$, on trouvera

$$F=-(m+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^n\ \left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$G=-\frac{mna}{q}\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$H=-(n+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^m\ \left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}.$$

Les quantités F et H sont négatives, et on s'assurera sans peine qu'elles remplissent la condition $FH-G^2>0$, lorsque les exposans m, n, p, sont positifs, ainsi on aura obtenu le *maximum* demandé,

CHAPITRE III.

Digression sur les Équations algébriques.

JE me propose de suppléer dans ce chapitre à ce qui manque sur la théorie des équations dans les élémens d'algèbre : quoique les objets que j'y traite paroissent étrangers au Calcul différentiel, ils donnent lieu néanmoins à plusieurs applications élégantes de ce calcul, et concourent à montrer les ressources qu'il peut offrir. C'est par cette raison et par la crainte de retarder l'exposition des principes du Calcul différentiel, en donnant trop d'étendue à l'Introduction, que je me suis déterminé à faire ici une digression que beaucoup de lecteurs, sans doute, trouveront utile, et que les autres pourront passer s'ils le jugent à propos.

Recherche des fonctions semblables des racines des équations.

157. On sait qu'une équation algébrique d'un degré quelconque et renfermant une seule inconnue, est le produit d'autant de binomes, de la forme $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, etc. qu'il y a d'unités dans son plus haut exposant ; on a l'expression des racines α, β, γ, etc. en fonction des coefficiens de l'équation, pour les quatre premiers degrés, et pour quelques classes d'équations de tous les degrés ; mais la solution complète du problême général est encore à trouver. Cependant certaines fonctions des racines d'une équation quelconque peuvent s'exprimer d'une manière rationnelle au moyen de ses coefficiens, et s'obtiennent par conséquent par des équations du premier degré ; les fonctions dont je parle, sont celles qui renferment toutes les racines combinées d'une manière semblable, soit entr'elles, soit avec d'autres quantités, et que pour cela je nommerai *fonctions symétriques* : la somme des racines, celle de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc. respectivement égales aux coefficiens du second, du troisième, du quatrième, etc. termes, sont de ce genre.

La raison du fait que nous venons de rappeller, se trouve dans une propriété bien remarquable de l'analyse, et qui est une suite néces-

saire de sa généralité ; c'est que l'équation d'où dépend la détermination d'une fonction quelconque, renferme toujours toutes les valeurs dont cette fonction est susceptible, en y échangeant les unes dans les autres, les quantités sur l'ordre, et la valeur desquelles les conventions n'ont rien établi de particulier.

Les questions suivantes, quoique très-simples, répandront le plus grand jour sur tout ceci.

Proposons-nous d'abord de *trouver deux quantités, dont la somme soit* p *et le produit* q.

En représentant par x et par y ces deux quantités, on aura

$$\left.\begin{matrix} x+y=p \\ xy=q \end{matrix}\right\} \text{ d'où on tirera } \left\{\begin{matrix} x^2-px+y=0 \\ y^2-py+q=0 \end{matrix}\right.$$

les deux inconnues x et y, seront les racines d'une même équation, parce qu'elles entrent toutes deux de la même manière, dans les conditions du problême.

Supposons maintenant qu'au lieu de chercher immédiatement les quantités x et y, on se borne à demander la valeur de leur différence $x-y$; on l'obtiendra sans peine, car en vertu des équations proposées, on aura $x^2+2xy+y^2=p^2$, $4xy=4q$; retranchant le second résultat du premier, il viendra

$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=p^2-4q$ d'où $x-y=\pm\sqrt{p^2-4q}$.

On pouvoit prévoir d'avance que la fonction $x-y$ auroit deux valeurs, et que par conséquent elle dépendroit d'une équation du second degré ; car rien dans l'énoncé de la question et dans la manière de la résoudre, n'indiquoit qu'on cherchât $x-y$ ou $y-x$. La fonction x^2+y^2, au contraire, dans laquelle il est indifférent de changer x en y, et réciproquement, n'étant susceptible que d'une seule valeur, ne dépendra que d'une équation du premier degré. En effet, si de l'équation $x^2+2xy+y^2=p^2$, on retranche celle-ci, $2xy=2q$, il en résultera $x^2+y^2=p^2-2q$. Ces remarques seront d'autant mieux senties, qu'on sera plus habitué à la marche de l'analyse.

158. Nous allons chercher l'expression de la somme des puissances semblables de toutes les racines d'une équation quelconque, et c'est du Calcul différentiel que nous tirerons d'abord la solution de ce problême.

Soient α, β, γ, δ, etc. les racines de l'équation
$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + U = 0$; on aura
$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\text{etc.} = x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + U$
prenant le logarithme de chacun des membres de cette dernière équation, on trouvera

$$l(x-\alpha) + l(x-\beta) + l(x-\gamma) + l(x-\delta) + \text{etc.} = l(x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \text{etc.} + U).$$

En différentiant et en divisant par dx, il viendra

$$\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \frac{1}{x-\delta} + \text{etc.} = \frac{mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-2)Qx^{m-3} + (m-3)Rx^{m-4} \ldots}{x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots\ldots + U};$$

mais on sait que $\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \frac{\alpha^3}{x^4} + \text{etc.}$

$$\frac{1}{x-\beta} = \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\beta^2}{x^3} + \frac{\beta^3}{x^4} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{x-\gamma} = \frac{1}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\gamma^2}{x^3} + \frac{\gamma^3}{x^4} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{x-\delta} = \frac{1}{x} + \frac{\delta}{x^2} + \frac{\delta^2}{x^3} + \frac{\delta^3}{x^4} + \text{etc.}$$

etc. :

substituant ces valeurs dans le premier membre de l'équation précédente, et supposant

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.} = S_1 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.} = S_2 \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.} = S_3 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

on aura alors

$$\frac{m}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \frac{S_3}{x^4} + \text{etc.} = \frac{mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-2)Qx^{m-3} + (m-3)Rx^{m-4} \ldots}{x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + U = 0}$$

si on fait disparoître le dénominateur du second membre, et qu'on compare ensuite les termes de chaque membre qui sont affectés de la même puissance de x, on parviendra aux équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} m & = m \\ (m-1)P & = mP + S_1 \\ (m-2)Q & = mQ + PS_1 + S_2 \\ (m-3)R & = mR + QS_1 + PS_2 + S_3 \\ \text{etc.} & \end{array}\right\} \text{ qui donnent } \left\{\begin{array}{l} S_1 + P = 0 \\ S_2 + PS_1 + 2Q = 0 \\ S_3 + PS_2 + QS_1 + 3R = 0 \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Ces dernières, dont la loi est facile à saisir, renferment le théorême que Newton a énoncé dans son Arithmétique universelle, et qu'il a appliqué à l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$: dans ce cas particulier, où $P = -1$, $Q = -19$, $R = +49$, $S = -30$, il a trouvé $S_1 = 1$, $S_2 = 39$, $S_3 = -89$, $S_4 = 723$.

159. Avec le secours des résultats du n°. précédent, toute fonction algébrique, rationnelle et symétrique des racines d'une équation quelconque, pourra s'exprimer par les coefficiens de cette équation; l'exemple qui va suivre, quoique particulier, montrera suffisamment de quelle manière la chose doit s'exécuter en général.

Soient α, β et γ les racines d'une équation du troisième degré; si on multiplie l'une par l'autre les quantités $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n = S_n$ et $\alpha^p + \beta^p + \gamma^p = S_p$, il en résultera

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^{n+p} + \beta^{n+p} + \gamma^{n+p} \\ + \alpha^n\beta^p + \alpha^p\beta^n + \alpha^n\gamma^p + \alpha^p\gamma^n + \beta^n\gamma^p + \beta^p\gamma^n \end{array}\right\} = S_n S_p;$$

mais la première ligne du premier membre est égale à S_{n+p}, et la seconde est une fonction symétrique des racines α, β et γ, formée en les combinant deux à deux et en les affectant chacune à leur tour de l'exposant n et de l'exposant p; on aura donc,

$$\alpha^n\beta^p + \alpha^p\beta^n + \alpha^n\gamma^p + \alpha^p\gamma^n + \beta^n\gamma^p + \beta^p\gamma^n = S_n\ S_p - S_{n+p}.$$

Il est facile de voir qu'en quelque nombre que soient les lettres α, β, γ, etc. la valeur d'une fonction symétrique de la forme $\alpha^n\beta^p +$, etc. sera toujours $S_n S_p - S_{n+p}$, les sommes $S_n S_p$ et S_{n+p} étant calculées pour le nombre de racines qu'on considère.

Multiplions par $\alpha^q + \beta^q + \delta^q = S_q$, l'équation à laquelle nous venons de parvenir, et nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^{n+q}\beta^p + \alpha^p\beta^{n+q} + \alpha^{n+q}\gamma^p + \alpha^p\gamma^{n+q} + \beta^{n+q}\gamma^p + \beta^p\gamma^{n+q} \\ + \alpha^{p+q}\beta^n + \alpha^n\beta^{p+q} + \alpha^{p+q}\gamma^n + \alpha^n\gamma^{p+q} + \beta^{p+q}\gamma^n + \beta^n\gamma^{p+q} \\ + \alpha^n\beta^p\gamma^q + \alpha^n\beta^q\gamma^p + \alpha^p\beta^n\gamma^q + \alpha^p\beta^q\gamma^n + \alpha^q\beta^n\gamma^p + \alpha^q\beta^p\gamma^n \end{array}\right\} = S_n S_p S_q - S_{n+p} S_q;$$

les deux premières lignes du premier membre de cette équation étant des fonctions symétriques formées de produits de deux lettres, seront, d'après ce qui précède, exprimées respectivement par $S_{n+q} S_p - S_{n+p+q}$ et $S_{p+q} S_n - S_{n+p+q}$, et on en conclura que la troisième

sième ligne, qui est une fonction symétrique formée de produits de trois lettres, sera égale à

$$S_n S_p S_q - S_{n+p} S_q - S_{n+q} S_p - S_{p+q} S_n + 2S_{n+p+q}.$$

On auroit encore ici, comme dans le cas précédent, un résultat de la même forme, quel que fût le nombre des lettres, ensorte que l'expression ci-dessus est celle de toute fonction symétrique composée de produits de trois lettres.

Le procédé dont nous avons fait usage pour découvrir les deux formules précédentes est général, et en continuant les multiplications, on parviendra à exprimer une fonction symétrique quelconque, qui ne peut jamais offrir qu'une suite de termes tels que $\alpha^n \beta^p \gamma^q \delta^r$, etc. et dans lesquels chacune des lettres α, β, γ, etc. se trouve affectée successivement de tous les exposans. Il est bon d'avertir qu'on reconnoîtra toujours une fonction symétrique à ce qu'elle ne changera point de valeur, quelque permutation qu'on y fasse entre les diverses racines de l'équation proposée. Les fonctions fractionnaires ne doivent pas faire un article à part, car lorsqu'elles sont symétriques il en résulte, après qu'on leur a donné le même dénominateur, une fraction dont les deux termes sont des fonctions symétriques et entières: la fonction $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}$, par exemple, conduit à $\frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$; résultat dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions symétriques. Plusieurs géomètres se sont occupés spécialement de ces recherches, et le C. Vandermonde, en particulier, a imaginé un algorithme au moyen duquel il a construit des formules générales qui donnent immédiatement l'expression d'une fonction symétrique quelconque; ceux qui seront curieux de connoître ces formules, pourront consulter son Mémoire.

160. Si on avoit une fonction dans laquelle il n'entrât que quelques-unes des racines de l'équation proposée, on pourroit encore, à l'aide de ce qui précède, parvenir à former la nouvelle équation dont elle doit dépendre. Supposons qu'il s'agisse de déterminer la

somme de deux quelconques des racines de l'équation générale du troisième degré ; comme il n'y auroit pas de raison pour représenter cette somme par $\alpha+\beta$ plutôt que par $\alpha+\gamma$, ou par $\beta+\gamma$, ces trois expressions doivent être regardées comme autant de valeurs dont elle est susceptible : elle dépendra par conséquent d'une équation du troisième degré, ayant pour racines $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ et $\beta+\gamma$, et qu'on formera en égalant à zéro le produit des facteurs $z-(\alpha+\beta)$, $z-(\alpha+\gamma)$, $z-(\beta+\gamma)$.

En effectuant le calcul, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} z^3-2(\alpha+\beta+\gamma)z+[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\alpha\beta+3\alpha\gamma+3\beta\gamma]z \\ \quad -(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)-2\alpha\beta\gamma \end{array}\right\}=0;$$

les coefficiens des différentes puissances de z dans ce résultat sont des fonctions symétriques dont on trouvera facilement l'expression, et les valeurs de l'inconnue z seront aussi celles de la fonction cherchée.

L'équation générale du troisième degré étant représentée par $x^3+Px^2+Qx+R=0$, on aura

$\alpha+\beta+\gamma=-P$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\alpha\beta+3\alpha\gamma+3\beta\gamma=P^2+Q$,
et $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2=S_2S_1-S_3$
mais on a par les équations du n°. 158, $S_1=-P$, $S_2=P^2-2Q$, $S_3=-P^3+3PQ-3R$, et de plus $-\alpha\beta\gamma=R$; il viendra donc $-(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)-2\alpha\beta\gamma=+PQ-R$, et en dernier résultat $z^3+2Pz^2+(P^2+Q)z+PQ-R=0$.

Cet exemple fait voir que pour trouver l'équation d'où dépend une fonction quelconque des racines de la proposée, il faut faire dans cette fonction toutes les permutations possibles entre les lettres α, β, γ, δ, etc., et désignant par α', β', γ', δ', etc. les différens résultats obtenus ainsi, on égalera à zéro le produit des facteurs $z-\alpha'$, $z-\beta'$, $z-\gamma'$, $z-\delta'$, etc. Les coefficiens des puissances de z dans l'équation à laquelle on parviendra, étant des fonctions symétriques des quantités α', β', γ', δ', etc. qui renferment entr'elles toutes les combinaisons qu'on peut faire des quantités α, β, γ, δ, etc. dans la fonction cherchée, seront aussi des fonctions symétriques de ces dernières, et pourront par conséquent s'exprimer sous une forme rationnelle par les coefficiens de l'équation donnée. En effet, il est

facile de voir qu'aucune des fonctions symétriques de α', β', γ', δ', etc. ne peut changer de valeur, de quelque manière qu'on permute entr'elles les lettres α, β, γ, δ, etc., et cette invariabilité est, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, le caractère essentiel des fonctions symétriques.

La théorie dont j'ai donné une esquisse dans les numéros précédens, devroit entrer désormais dans tous les élémens d'algèbre. Par son moyen la résolution des équations se présente d'une manière très-lumineuse; l'esprit des artifices qu'on emploie à cette résolution devient facile à saisir, et on voit pourquoi leur succès ne s'étend pas au-delà du quatrième degré. Je regrette beaucoup que la nature de mon sujet ne me permette pas de faire connoître le beau travail du C. Lagrange, sur cette matière.

161. L'utilité du théorême de Newton, auquel je suis parvenu dans le n°. 158, par le Calcul différentiel, m'a fait penser qu'on en verroit avec plaisir une démonstration purement algébrique, que je crois neuve, et qui par sa simplicité m'a paru mériter d'être connue.

L'équation $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + Tx + U = 0$ est divisible par chacun des binomes $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$, etc. et on peut obtenir l'expression générale du quotient; le C. Lagrange, dans un de ses Mémoires, la détermine comme il suit: il observe qu'en mettant α au lieu de x dans la proposée, on aura par l'hypothèse un résultat identiquement nul, et que par conséquent on doit supposer

$$\alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} + R\alpha^{m-3} \ldots + T\alpha + U = 0.$$

Si on retranche cette équation de la proposée, il viendra

$$(x^m - \alpha^m) + P(x^{m-1} - \alpha^{m-1}) + Q(x^{m-2} - \alpha^{m-2}) + R(x^{m-3} - \alpha^{m-3}) \ldots + T(x-\alpha) = 0;$$

équation qui est évidemment divisible par $x-\alpha$, car on sait, et il est d'ailleurs facile de le vérifier, que

$\frac{x^m - \alpha^m}{x-\alpha} = x^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \alpha^2 x^{m-3} \ldots + \alpha^{m-1}$. On trouvera des quotiens semblables pour $\frac{x^{m-1} - \alpha^{m-1}}{x-\alpha}$, $\frac{x^{m-2} - \alpha^{m-2}}{x-\alpha}$, etc. et on aura

pour le résultat de la division de l'équation précédente par $x-\alpha$, ordonné par rapport à x,

$$\begin{array}{l|l|l|l}
x^{m-1}+\alpha & x^{m-2}+\alpha^2 & x^{m-3}+\alpha^3 & x^{m-4}\ldots+\alpha^{m-1} \\
\quad +P & \quad +\alpha P & \quad +\alpha^2 P & \quad +\alpha^{m-2}P \\
 & \quad +Q & \quad +\alpha Q & \quad +\alpha^{m-3}Q \\
 & & \quad +R & \quad +\alpha^{m-4}R \\
 & & & \quad \ldots\ldots\ldots \\
 & & & \quad +T
\end{array}$$

C'est ici que commence la démonstration que j'ai annoncée. Il est évident que si on divise aussi l'équation proposée par $x-\beta$, on aura

$$\begin{array}{l|l|l|l}
x^{m-1}+\beta & x^{m-2}+\beta^2 & x^{m-3}+\beta^3 & x^{m-4}\ldots+\beta^{m-1} \\
\quad +P & \quad +\beta P & \quad +\beta^2 P & \quad +\beta^{m-2}P \\
 & \quad +Q & \quad +\beta Q & \quad +\beta^{m-3}Q \\
 & & \quad +R & \quad +\beta^{m-4}R \\
 & & & \quad \ldots\ldots\ldots \\
 & & & \quad +T
\end{array}$$

de même, en la divisant par $x-\gamma$, on trouvera

$$\begin{array}{l|l|l|l}
x^{m-1}+\gamma & x^{m-2}+\gamma^2 & x^{m-3}+\gamma^3 & x^{m-4}\ldots+\gamma^{m-1} \\
\quad +P & \quad +\gamma P & \quad +\gamma^2 P & \quad +\gamma^{m-2}P \\
 & \quad +Q & \quad +\gamma Q & \quad +\gamma^{m-3}Q \\
 & & \quad +R & \quad +\gamma^{m-4}R \\
 & & & \quad \ldots\ldots\ldots \\
 & & & \quad +T
\end{array}$$

En continuant ainsi, on obtiendra autant de quotiens qu'il y a de racines, et leur somme sera,

$$\begin{array}{l|l|l|l}
mx^{m-1}+S_1 & x^{m-2}+S_2 & x^{m-3}+S_3 & x^{m-4}\ldots+S_{m-2} \\
\quad +mP & \quad +PS_1 & \quad +PS_2 & \quad +PS_{m-3} \\
 & \quad +mQ & \quad +QS_1 & \quad +QS_{m-3} \\
 & & \quad +mR & \quad +RS_{m-4} \\
 & & & \quad \ldots\ldots\ldots \\
 & & & \quad +mT
\end{array} \qquad (A)$$

Nous observerons maintenant que chaque quotient particulier est le produit de tous les facteurs de la proposée, excepté celui par lequel

on a divisé. Le premier de ces quotiens, par exemple, renferme tous les facteurs, excepté $x-\alpha$: le coefficient de son second terme sera donc la somme de toutes les racines, excepté α, prises avec des signes contraires ; celui de son troisième terme, la somme de tous leurs produits deux à deux, excepté ceux qui seroient formés de la lettre α combinée avec chacune des autres : le coefficient du quatrième terme contiendroit de même tous les produits trois à trois, à l'exception de ceux qui résulteroient de la lettre α combinée avec deux autres quelconques, et ainsi des coefficiens suivans. Ce qui vient d'être dit sur le premier quotient et pour la lettre α, aura lieu également par rapport au second et à la lettre β, au troisième et à la lettre γ, etc.

Il résulte de là que le coefficient du second terme dans la somme des quotiens, ou la fonction (A), est égal à $(m-1)$ fois la somme des racines prises avec un signe contraire ; car si toutes les lettres se trouvoient dans chaque quotient, on auroit m fois cette somme ; mais comme chaque lettre manquera une fois, d'après ce qui a été dit ci-dessus, elles ne se trouveront toutes répétées que $(m-1)$ fois. On aura donc $(m-1)P$ pour le coefficient du second terme de (A), et par conséquent $S_1 + mP_1 = (m-1)P$.

Le coefficient du troisième terme de la fonction (A) contiendra plusieurs fois les divers produits des racines α, β, γ, δ, etc., combinées deux à deux ; mais chacun de ces produits manquera dans deux quotiens : $\alpha\beta$, par exemple, ne se trouvera ni dans le premier ni dans le second ; tous ne seront donc répétés que $m-2$ fois, et comme leur somme est exprimée par Q dans la proposée, on aura $(m-2)Q$ pour le coefficient du troisième terme de la fonction (A), d'où il résultera $S_2 + PS_1 + mQ = (m-2)Q$.

Le coefficient du quatrième terme de la fonction (A) sera formé des produits des racines prises avec des signes contraires et combinés trois à trois ; mais chacun de ces produits manquera dans trois quotiens : $-\alpha\beta\gamma$, par exemple, ne se trouvera ni dans le premier, ni dans le second, ni dans le troisième ; tous ne seront donc répétés que $(m-3)$ fois : leur somme étant R, dans la proposée, $(m-3)R$ sera le coefficient cherché, et on aura par conséquent

$$S_3 + PS_2 + QS_1 + mR = (m-3)R.$$

On peut pousser ces raisonnemens aussi loin qu'on voudra, et on en tirera

$$\left.\begin{aligned} S_1 + mP &= (m-1)P \\ S_2 + PS_1 + mQ &= (m-2)Q \\ S_3 + PS_2 + QS_1 + mR &= (m-3)R \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} &S_1 + P = 0 \\ &S_2 + PS_1 + 2Q = 0 \\ &S_3 + PS_2 + QS_1 + 3R = 0 \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right.$$

On obtiendra par ces formules la somme des puissances des racines, tant que l'exposant de ces puissances sera moindre que m; mais rien n'est plus facile que de les trouver passé ce terme. En effet, il suffit pour cela, comme Euler l'a remarqué, de multiplier l'équation proposée par x^n, il viendra alors

$$x^{m+n} + Px^{m+n-1} + Qx^{m+n-2} + Rx^{m+n-3} \ldots\ldots + Tx^{n+1} + Ux^n = 0;$$

mettant successivement α, β, γ, δ, etc., au lieu de x, il viendra

$$\alpha^{m+n} + P\alpha^{m+n-1} + Q\alpha^{m+n-2} + R\alpha^{m+n-3} \ldots\ldots + T\alpha^{n+1} + U\alpha^n = 0$$
$$\beta^{m+n} + P\beta^{m+n-1} + Q\beta^{m+n-2} + R\beta^{m+n-3} \ldots\ldots + T\beta^{n+1} + U\beta^n = 0$$
etc.

En ajoutant ces résultats entr'eux, on aura, en vertu de la notation adoptée,

$$S_{m+n} + PS_{m+n-1} + QS_{m+n-2} + RS_{m+n-3} \ldots\ldots + TS_{n+1} + US_n = 0$$

Cette équation se lie parfaitement avec les précédentes, car en faisant $n=0$, on a $S_n = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 + \delta^0 + \text{etc.} = 1 + 1 + 1 + 1 \text{ etc.} = m$, et par conséquent $S_m + PS_{m-1} + QS_{m-2} + RS_{m-3} \ldots\ldots + TS_1 + mU = 0$, résultat dont la forme répond à celle de la dernière des équations trouvées ci-dessus, qui seroit

$$S_{m-1} + PS_{m-2} + QS_{m-3} + RS_{m-4} \ldots\ldots + (m-1)T = 0.$$

Sur les expressions imaginaires.

162. C'est dans les équations du second degré que les racines imaginaires commencent à se montrer; et là elles ont bien évidemment la forme $A \pm B\sqrt{-1}$. Maclaurin fit voir qu'il en étoit de même pour les équations du troisième degré: d'Alembert alla plus loin, et prouva le premier qu'une expression imaginaire quelconque pouvoit toujours se ramener à la forme $A \pm B\sqrt{-1}$, A et B étant des quantités réelles; mais il le fit d'une manière indirecte à l'égard des racines des équations. Cette partie du théorême, la seule dont nous nous occuperons pour le moment, ne

tient qu'à montrer la possibilité de décomposer en facteurs réels du second degré, une équation quelconque de degré pair. Euler essaya de le faire par des considérations purement algébriques, et n'y réussit pas complètement, ce qui engagea le C. Lagrange à traiter de nouveau du même sujet; enfin le C. Laplace a inséré dans le Journal de l'école normale, une démonstration qui ne laisse rien à desirer ni pour l'exactitude, ni pour la simplicité, et que je vais rapporter ici. Je prouverai d'abord que *toute équation d'un degré quelconque* p *aura un facteur réel du second degré, si toute équation du degré* $\frac{p(p-1)}{2}$ *a un facteur réel soit du premier, soit du second degré.*

Je représente par (P) l'équation du degré p, et ses racines par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc.; cela posé, j'observe que tout facteur de l'équation (P) n'étant autre chose que le produit de deux quelconques des racines de cette équation, aura nécessairement la forme $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$, et dépendra par conséquent des fonctions $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$. Ces fonctions seroient déterminées si on en connoissoit deux de la forme $\alpha+\beta+M\alpha\beta$, $\alpha+\beta+M'\alpha\beta$, M et M' désignant des nombres donnés; car en faisant

$$\alpha+\beta+M\alpha\beta=N, \quad \alpha+\beta+M'\alpha\beta=N',$$

on trouveroit $\alpha+\beta=\frac{M'N-N'M}{M'-M}$, $\alpha\beta=\frac{N'-N}{M'-M}$.

La fonction $\alpha+\beta+M\alpha\beta$ étant susceptible d'autant d'expressions différentes qu'il y a de manières de combiner deux à deux les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. s'obtiendra par une équation du degré $\frac{p(p-1)}{2}$ (n°. 160), et que je désignerai par (Q).

Supposons, 1°. que cette équation ait toujours une racine réelle; en donnant à M une infinité de valeurs, on formera une infinité d'équations semblables, dont chacune aura une racine réelle renfermant une des combinaisons qu'on peut faire des racines de la proposée, dans la formule $\alpha+\beta+M\alpha\beta$; or le nombre de ces combinaisons étant limité, il faudra nécessairement que la même soit répétée plusieurs fois, avec diverses valeurs de M: on peut donc affirmer qu'il existe au moins deux fonctions de la forme

$\alpha+\beta+M\alpha\beta$, $\alpha+\beta+M'\alpha\beta$, dont les valeurs N et N' sont réelles; d'où il suit que les valeurs correspondantes de $\alpha+\beta$, et $\alpha\beta$ le sont aussi, et qu'enfin le facteur $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ est lui-même réel.

2°. Si l'équation (Q) n'a point de racines réelles, mais seulement un facteur réel du second degré, dont les racines soient imaginaires, en donnant à M une infinité de valeurs, on obtiendra une infinité de fonctions $\alpha+\beta+M\alpha\beta$, dont l'expression sera de la forme $A+B\sqrt{-1}$, et on prouvera comme ci-dessus qu'il doit s'en trouver plusieurs qui ne diffèrent que par les valeurs de M. On aura donc

$$\alpha+\beta+M\alpha\beta = A+B\sqrt{-1}$$
$$\alpha+\beta+M'\alpha\beta = A'+B'\sqrt{-1}$$

d'où on tirera

$$\alpha+\beta = \frac{M'(A+B\sqrt{-1})-M(A'+B'\sqrt{-1})}{M'-M},$$
$$\alpha\beta = \frac{A'+B'\sqrt{-1}-A-B\sqrt{-1}}{M'-M},$$

expressions que je représenterai par $2(C+D\sqrt{-1})$ et $E+F\sqrt{-1}$, et par-là le facteur $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ deviendra

$$x^2-2(C+D\sqrt{-1})x+E+F\sqrt{-1}.$$

L'existence de ce facteur entraîne celle d'un autre qui seroit $x^2-2(C-D\sqrt{-1})x+E-F\sqrt{-1}$; car il est facile de voir que si on désigne par $X-Y\sqrt{-1}$, le quotient que donne l'équation (P) lorsqu'on la divise par le premier, $X+Y\sqrt{-1}$ exprimera celui qu'on obtiendroit en la divisant par le second (*).

Maintenant si les polynomes $x^2-2(C+D\sqrt{-1})x+E+F\sqrt{-1}$

(*) On s'en assurera en multipliant $x^2-2(C+D\sqrt{-1})x+E+F\sqrt{-1}$ par $X-Y\sqrt{-1}$ et $x^2-2(C-D\sqrt{-1})x+E-F\sqrt{-1}$ par $X+Y\sqrt{-1}$: on trouvera dans l'un et l'autre cas le même résultat, en observant que le dividende (P) ne renfermant point d'imaginaires, Y et X seront tels que les expressions de ce genre disparoîtront des produits ci-dessus.

et

et $x^2-2(C-D\sqrt{-1})+E-F\sqrt{-1}$, n'ont point de diviseur commun, ils renfermeront à eux deux quatre facteurs simples de l'équation (P), qui, multipliés deux à deux, produiront six facteurs du second degré, parmi lesquels il y en aura toujours au moins deux de réels. En effet, si on résoud ces polynomes comme des équations du second degré, on en déduira les facteurs du premier degré

$$x-C-D\sqrt{-1}+\sqrt{C^2+2CD\sqrt{-1}-D^2-E-F\sqrt{-1}}$$

$$x-C-D\sqrt{-1}-\sqrt{C^2+2CD\sqrt{-1}-D^2-E-F\sqrt{-1}}$$

$$x-C+D\sqrt{-1}+\sqrt{C^2-2CD\sqrt{-1}-D^2-E+F\sqrt{-1}}$$

$$x-C+D\sqrt{-1}-\sqrt{C^2-2CD\sqrt{-1}-D^2-E+F\sqrt{-1}}$$

Multipliant le premier par le troisième, et le second par le quatrième, après avoir fait pour abréger $C^2-D^2-E=G$, $2CD-F=H$, et en observant que $\sqrt{G+H\sqrt{-1}}+\sqrt{G-H\sqrt{-1}}=\sqrt{2G+2\sqrt{G^2+H^2}}$ et que $\sqrt{-1}.\sqrt{G+H\sqrt{-1}}-\sqrt{-1}.\sqrt{G-H\sqrt{-1}}=\sqrt{-2G+2\sqrt{G^2+H^2}}$ on trouve

$$x^2-\left(2C-\sqrt{2G+2\sqrt{G^2+H^2}}\right)+C^2+D^2-C\sqrt{2G+2\sqrt{G^2+H^2}}+\sqrt{G^2+H^2}+D\sqrt{-2G+2\sqrt{G^2+H^2}}\Big\},$$

$$x^2-\left(2C+\sqrt{2G+2\sqrt{G^2+H^2}}\right)+C^2+D^2+C\sqrt{2G+2\sqrt{G^2+H^2}}+\sqrt{G^2+H^2}-D\sqrt{-2G+2\sqrt{G^2+H^2}}\Big\},$$

résultats qui sont réels.

Si les deux polynomes $x^2-2(C+D\sqrt{-1})x+E+F\sqrt{-1}$ et $x^2-2(C-D\sqrt{-1})x+E-F\sqrt{-1}$ avoient un diviseur commun, en les mettant sous la forme

$$x^2-2cx+E-(2Dx-F)\sqrt{-1}$$

$$x^2-2cx+E+(2Dx-F)\sqrt{-1}$$

on verra que ce diviseur doit être commun aussi aux deux quantités $x^2 - 2Cx + E$ et $2Dx - F$, et on en conclura qu'il ne peut être que de la forme $x - I$; on aura donc

$$x^2 - 2Cx + E - (2Dx - F)\sqrt{-1} = (x - K - L\sqrt{-1})(x - I)$$

$$x^2 - 2Cx + E + (2Dx - F)\sqrt{-1} = (x - K + L\sqrt{-1})(x - I)$$

d'où il suit que $x - K - L\sqrt{-1}$, $x - K + L\sqrt{-1}$ et $x - I$ seront trois facteurs de l'équation (P). Les deux premiers donnent un facteur réel du second degré; et en divisant l'équation (P) par le troisième, si elle est d'un degré pair, on obtiendra un quotient de degré impair, qui aura lui-même un facteur réel du premier degré, formant avec celui par lequel on a divisé, un second facteur réel du deuxième degré. Il est donc bien prouvé que l'équation (P) aura au moins un facteur réel du second degré, si l'équation (Q) a toujours un facteur réel, soit du premier degré, soit du second.

163. Il nous sera facile maintenant de démontrer que *toute équation d'un degré pair est décomposable en facteurs réels du second degré.*

Le nombre p étant pair, sera nécessairement de la forme $2^m.n$; m représentant un nombre entier quelconque, et n un nombre impair; on tirera de là

$$\frac{p(p-1)}{2} = \frac{2^m n(2^m n - 1)}{2} = 2^{m-1} n(2^m n - 1) :$$

faisant $2^m n - 1 = n'$, n' sera encore un nombre impair, et d'après ce qui précède l'équation du degré $2^m n$ aura un facteur réel du second degré, si l'équation du degré $2^{m-1} n'$ a un facteur réel, soit du premier, soit du second. Par la même raison, l'équation du degré $2^{m-1} n'$ aura un facteur réel du second degré, si l'équation du degré $2^{m-2} n'(2^{m-1} n' - 1)$ ou $2^{m-2} n''$ a un facteur réel, soit du premier, soit du second degré. En continuant ainsi, on passera par une suite d'équations, dont les plus hauts exposans seront de la forme $2^m n$, $2^{m-1} n'$, $2^{m-2} n'' \ldots\ldots 2n'''\ldots^{m-1}$, $n'''\ldots^m$, les nombres n, n', n'', etc. étant tous impairs. La dernière de ces équations qui sera du degré impair marqué par $n'''\ldots^m$, aura nécessairement

un facteur réel du premier degré (*Introduction*, n°. 10); par conséquent l'avant-dernière en aura un du second, ainsi que chacune des autres, jusqu'à la proposée du degré $2^m n$ inclusivement. Supposons ensuite que celle-ci soit divisée par le facteur du second degré dont on vient de prouver l'existence, le quotient étant encore de degré pair, contiendra au moins un facteur réel du second degré, par lequel on pourra le diviser de nouveau. Sans qu'il soit besoin d'aller au-delà, on voit qu'*une équation quelconque de degré pair est toujours décomposable en facteurs réels du second degré*; d'où il suit qu'*elle ne peut avoir des racines imaginaires qu'en nombre pair, et de la forme* $A \pm B\sqrt{-1}$.

164. Pour embrasser la proposition de d'Alembert dans toute son étendue, il nous reste à prouver que les diverses espèces connues de fonctions peuvent, lorsqu'elles renferment des quantités telles que $a + b\sqrt{-1}$, se ramener à la forme $A \pm B\sqrt{-1}$: nous le ferons d'abord pour les fonctions algébriques. A leur égard la chose suit naturellement de ce qui précède, car en les égalant à de nouvelles inconnues, et faisant disparoître les radicaux qu'elles contiennent, on parviendra à des équations algébriques, dont les racines imaginaires seront de la forme $A \pm B\sqrt{-1}$.

On peut encore s'assurer directement de cette vérité, en observant

1°. que $a+b\sqrt{-1}+a'-b'\sqrt{-1}-a''+b''\sqrt{-1}+\text{etc}=(a+a'-a''+\text{etc.})+(b-b'+b''+\text{etc.})\sqrt{-1}$

2°. que $(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})=aa'-bb'+(a'b+ab')\sqrt{-1}$;

3°. que $\dfrac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}=\dfrac{(a+b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}{(a'+b'\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}=\dfrac{aa'+bb'+(a'b-ab')\sqrt{-1}}{a'^2+b'^2}$,

4°. enfin que $(a+b\sqrt{-1})^m=a^m+\dfrac{m}{1}a^{m-1}\sqrt{-1}-\dfrac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\text{etc.}$

$$=\begin{cases} a^m-\dfrac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4+\text{etc.} \\ +\left(\dfrac{m}{a}a^{m-1}b-\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3+\text{etc.}\right)\sqrt{-1}, \end{cases}$$

d'où il suit que toute expression résultante de la combinaison de

plusieurs quantités de la forme $a+b\sqrt{-1}$, par addition, soustraction, multiplication, division et élévation aux puissances, sera de la forme $A \pm B\sqrt{-1}$.

165. Les résultats obtenus dans l'article précédent s'expriment avec élégance par les sinus et les cosinus, et on en tire des formules qui sont d'une grande utilité dans l'analyse. Si on compare l'expression $a+b\sqrt{-1}$ avec $r(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)$ on trouvera $a = r\cos z$, $b = r\sin z$, et à cause que $\cos z^2 + \sin z^2 = 1$, il viendra $a^2 + b^2 = r^2$. La valeur de r étant connue par cette équation, on aura $\cos z = \frac{a}{r}$ et $\sin z = \frac{b}{r}$; faisant de même $a' + b'\sqrt{-1} = r'(\cos z' + \sqrt{-1}\sin z')$ il en résultera

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1}) = rr'(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)(\cos z'+\sqrt{-1}\sin z')$$
$$= rr'[\cos(z+z')+\sqrt{-1}\sin(z+z')]$$ (*Introduction* n°. 41.)

La fraction $\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}$ devient $\frac{r(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)}{r'(\cos z'+\sqrt{-1}\sin z')}$; multipliant ces deux termes par $(\cos z'-\sqrt{-1}\sin z')$, on obtiendra, en vertu du n°. cité de l'Int. $\frac{r}{r'^2}[\cos(z-z')+\sqrt{-1}\sin(z-z')]$.

La fonction $(a+b\sqrt{-1})^m$ donne sur le champ

$r^m(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^m = r^m(\cos mz + \sqrt{-1}\sin mz)$; résultat dont nous allons tirer des conséquences bien remarquables.

166. Si on avoit $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$ il viendroit

$r^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{z}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{z}{m})$. Cette expression renferme un nombre m de valeurs différentes, qu'on trouvera en observant que les données de la question sont

$$r = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos z = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin z = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

et que par conséquent on doit prendre pour z, tous les arcs dont le cosinus et le sinus sont les mêmes que ci-dessus.

Les arcs ζ, $360° + \zeta$, $2.360° + \zeta$, $3.360° + \zeta$, ... $n.360° + \zeta$, qui ont tous le même sinus et le même cosinus, étant employés chacun à leur tour, donneront en faisant $360° = c$.

$$r^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\frac{\zeta}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{m}\right\},$$

$$r^{\frac{1}{m}}\left\{\cos(c+\zeta) + \sqrt{-1}\sin(c+\zeta)\right\},$$

$$r^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\frac{(2c+\zeta)}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2c+\zeta)}{m}\right\},$$

$$r^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\frac{(3c+\zeta)}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{(3c+\zeta)}{m}\right\},$$

etc.

Le nombre de ces expressions ne sauroit aller au-delà de m; car les arcs $\frac{(m+1)c+\zeta}{m} = c + \frac{c+\zeta}{m}$, $\frac{(m+2)c+\zeta}{m} = \frac{c+2c+\zeta}{m}$, et ayant le même sinus et le même cosinus que les arcs $\frac{c+\zeta}{m}$, $\frac{2c+\zeta}{m}$, etc. ne donneroient point de nouvelles valeurs (*).

(*) Voici quelques éclaircissemens pour ceux qui ne connoîtroient pas les variations de signe qu'éprouvent les fonctions circulaires.

On sait que les grandeurs représentées par des lignes deviennent négatives quand elles passent dans un sens opposé à celui où elles se trouvoient lorsqu'on les regardoit comme positives, et que les sinus se mesurent à partir du diamètre et les cosinus à partir du centre. Il suit de là que si on regarde comme positifs, les sinus situés au-dessus du diamètre AC (*fig.* 1.) et les cosinus compris entre le point A et le point O, ceux des premiers qui se trouveront au-dessous de AC et ceux des seconds qui tomberont de O en C seront négatifs. FIG. 1.

Cela posé, l'inspection de la figure fait voir:

1°. Que l'arc AM, moindre que 90°, a son sinus PM et son cosinus OP positifs;

2°. Que l'arc ABM', plus grand que 90° et moindre que 180°, a son sinus $P'M'$ positif et son cosinus OM' négatif;

3°. Que l'arc $ABCM''$, plus grand que 180° et moindre que 270°, a son sinus $P''M''$ négatif ainsi que son cosinus OM'';

4°. Que l'arc $ABCDM'''$, plus grand que 270° et moindre que 360°, a son sinus $P'''M'''$ négatif et son cosinus OP''' positif.

167. L'expression $r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\zeta}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{m},\right)$ est propre à représenter non seulement toutes les racines du degré m d'une formule imaginaire, comme on vient de le voir, mais encore celles d'une quantité réelle quelconque, positive ou négative; ou, ce qui revient au même, elle peut satisfaire à l'équation $x^m \mp a^m = 0$, en déterminant r et ζ d'une manière convenable.

Si on suppose $x = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\zeta}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{m}\right)$, on aura

---

Si on conçoit qu'un point mobile parti du point A décrive la circonférence du cercle $ABCDA$, il déterminera successivement, par les espaces qu'il aura parcourus, tous les arcs possibles, et lorsqu'il sera revenu en A, rien ne s'oppose à ce qu'il continue son mouvement dans le même sens. Arrivé de nouveau en M, le chemin total qu'il aura fait sera l'arc $ABCDAM$, composé de la circonférence plus l'arc AM, et ayant le même sinus et le même cosinus que ce dernier.

D'après ce qu'on vient de dire, il est évident qu'un arc augmenté d'un nombre quelconque de circonférences, ou, ce qui revient au même, d'un nombre pair de demi-circonférences, aura encore le même sinus et le même cosinus que dans son état primitif; mais s'il étoit augmenté d'un nombre impair de demi-circonférences, son cosinus et son sinus changeroient de signe, en conservant d'ailleurs la même valeur.

Si on désigne par π la demi-circonférence, et qu'on mette successivement $\frac{1}{2}\pi$; π, $\frac{3}{2}\pi$, etc., au lieu de x dans les équations $\sin(x\pm\zeta)=\sin x\cos\zeta\pm\cos x\sin\zeta$ et $\cos(x\pm\zeta)=\cos x\cos\zeta\mp\sin x\sin\zeta$, en observant que $\sin\frac{1}{2}\pi=1$, $\cos\frac{1}{2}\pi=0$, $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$, $\sin\frac{3}{2}\pi=-1$, $\cos\frac{3}{2}\pi=0$, etc. on obtiendra une suite de résultats compris dans les formules suivantes, dans lesquelles n désigne un nombre entier.

$$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi\pm\zeta\right)=+\cos\zeta \qquad \cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi\pm\zeta\right)=-\sin\zeta$$

$$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi\pm\zeta\right)=\mp\sin\zeta \qquad \cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi+\zeta\right)=-\cos\zeta$$

$$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi\pm\zeta\right)=-\cos\zeta \qquad \cos\left(\frac{4n+3}{3}\pi\pm\zeta\right)=\pm\sin\zeta$$

$$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi\pm\zeta\right)=\pm\sin\zeta \qquad \cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi+\zeta\right)=+\cos\zeta$$

On voit par tout ce qui précède, que le même sinus et le même cosinus répondent à une infinité d'arcs différens.

$x^m = r(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)$ et substituant dans l'équation proposée, il viendra $r\cos z + r\sqrt{-1}\sin z \mp a^m = 0$. Cette dernière ne sauroit avoir lieu à moins que la quantité imaginaire qu'elle contient, ne s'anéantisse d'elle-même ; on aura donc d'une part $\sin z = 0$, et de l'autre, $r\cos z \mp a^m = 0$. On satisfera à la première condition, en prenant pour z l'un quelconque des arcs compris dans la suite 0π, 2π, $3\pi\ldots$, π désignant la demi-circonférence. La seconde donne $r = \pm\frac{a^m}{\cos z}$; mais comme r doit toujours être une quantité positive, il faudra prendre pour z, un multiple pair de la demi-circonférence, si c'est le signe supérieur qui a lieu, et un multiple impair, si c'est le signe inférieur, parce qu'à cause de $\cos 2n\pi = +1$ et de $\cos(2n+1)\pi = -1$, on aura toujours $r = a^m$ et $r^{\frac{1}{m}} = a$.

La formule générale des racines de l'équation $x^m - a^m = 0$ sera donc

$$x = a\left\{\cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right\} :$$

en faisant d'abord $n = 0$, on aura $\cos\frac{0}{m} = 1$ et $\sin\frac{0}{m} = 0$, ce qui donnera $x = a$; de plus, lorsque m sera un nombre pair, on rencontrera le multiple $n = \frac{m}{2}$, d'où il résultera $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ et $x = -a$. On voit ainsi que la formule précédente comprend les racines réelles en même tems que celles qui sont imaginaires ; car on sait que l'équation $x^m - a^m = 0$, n'a que la seule racine réelle $x = a$, si m est impair, et que lorsque m est pair, elle en a deux ; savoir $x = +a$, $x = -a$.

Il est facile de s'assurer que l'équation

$$x = a\left\{\cos\frac{2n\pi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right\}$$

satisfait encore à $x^m - a^m = 0$; et par conséquent si on multiplie

l'un par l'autre, les deux facteurs simples

$$x-a\left\{\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right\},\ x-a\left\{\cos\frac{2n\pi}{m}-\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right\}$$

le produit $x^2-2ax\cos\frac{2n\pi}{m}+a^2$ sera un facteur du second degré de l'équation $x^m-a^m=0$.

L'équation $x^m+a^m=0$ conduira à des résultats semblables aux précédens, avec cette différence, que les multiples seront impairs, au lieu d'être pairs: dans ce cas les racines auront l'une ou l'autre des formes suivantes:

$$x=a\left\{\cos\frac{(2n+1)\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m}\right\}$$

$$x=a\left\{\cos\frac{(2n+1)\pi}{m}-\sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m}\right\}$$

et l'expression d'un facteur quelconque du second degré sera

$$x^2-2ax\cos\frac{(2n+1)\pi}{m}+a^2$$

168. Appliquons maintenant à quelques exemples les formules auxquelles nous venons de parvenir. Soient, 1°. les deux équations $x^5-1=0$ et $x^5+1=0$. On aura dans ces exemples $a=1$: pour le premier il ne faudra faire usage que des multiples pairs $\frac{0}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$, en s'arrêtant au nombre pair qui précède le double de l'exposant; car si on alloit au-delà, on retomberoit sur des arcs qui ne seroient autres que les précédens, augmentés d'une circonférence, et qui ayant respectivement les mêmes sinus et les mêmes cosinus; ne donneroient point de nouvelles valeurs. Cela posé, les racines de $x^5-1=0$, seront

$$x=\cos\frac{0^\circ}{5}+\sqrt{-1}\sin\frac{0^\circ}{5}=1$$

$$x=\cos\frac{2\pi}{5}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5},\ x=\cos\frac{4\pi}{5}+\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5}$$

$$x=\cos\frac{6\pi}{5}+\sqrt{-1}\sin\frac{6\pi}{5},\ x=\cos\frac{8\pi}{5}+\sqrt{-1}\sin\frac{8\pi}{5}.$$

en

En examinant de près ces valeurs, on voit que la quatrième ne diffère de la troisième, et la cinquième de la seconde, que par le signe de $\sqrt{-1}$; car, puisque $\cos(\pi+z)=\cos(\pi-z)$ et $\sin(\pi+z)=-\sin(\pi-z)$, on a $\cos\frac{6\pi}{5}=\cos\frac{4\pi}{5}$ et $\sin\frac{6\pi}{5}=-\sin\frac{4\pi}{5}$,

$\cos\frac{8\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{8\pi}{5}=-\sin\frac{2\pi}{5}$:

les diverses racines de l'équation $x^5-1=0$ seront donc comprises dans les trois formules suivantes:

$$x=1$$

$$x=\cos\frac{2\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ\pm\sqrt{-1}\sin 72^\circ$$

$$x=\cos\frac{4\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5}=\cos 144^\circ\pm\sqrt{-1}\sin 144^\circ.$$

La remarque que je viens de faire est générale; on pourra toujours se borner aux multiples de π qui ne surpassent pas l'exposant de l'équation dont on cherche les racines, pourvû qu'on donne à $\sqrt{-1}$ le signe $\pm$; mais néanmoins j'ai cru devoir montrer comment on pouvoit tirer toutes ces racines de la seule expression

$$x=a\left\{\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right\}.$$

L'expression générale des facteurs du second degré, donnera les trois résultats

$$x^2-2x\cos\frac{0^\circ}{5}+1=\quad x^2-2x+1$$

$$x^2-2x\cos\frac{2\pi}{5}+1=\quad x^2-2x\cos 72^\circ+1$$

$$x^2-2x\cos\frac{4\pi}{5}+1=\quad x^2-2x\cos 144^\circ+1$$

et le premier n'étant autre chose que le quarré de $x-1$, on aura finalement

$$x^5-1=(x-1)(x^2-2x\cos 72^\circ+1)(x^2-2x\cos 144^\circ+1)$$

Je passe à $x^5+1=0$: ici ce sont les multiples impairs dont il faut faire usage, et en rejettant tous ceux qui surpassent 5, on trouvera

que les racines de $x^5+1=0$ seront comprises dans les trois formules

$$x=\cos\frac{\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5}=\cos 36^\circ\pm\sqrt{-1}\sin 36^\circ$$

$$x=\cos\frac{3\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{5}=\cos 108^\circ\pm\sqrt{-1}\sin 108^\circ$$

$$x=\cos\frac{5\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{5\pi}{5}=-1.$$

On tirera de l'expression des facteurs du second degré,

$$x^2-2x\cos\frac{\pi}{5}+1=x^2-2x\cos 36^\circ+1$$

$$x^2-2x\cos\frac{3\pi}{5}+1=x^2-2x\cos 108+1$$

$$x^2-2x\cos\frac{5\pi}{5}+1=x^2+2x+1=(x+1)^2$$

et on aura

$$x^5+1=(x^2-2x\cos 36^\circ+1)(x^2-2x\cos 108^\circ+1)(x+1)$$

J'indiquerai encore les facteurs des deux équations $x^6-1=0$, et $x^6+1=0$; ceux du premier degré seront,

pour la première	pour la deuxième
$x-1$	$x-\left(\cos\frac{\pi}{6}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{6}\right)$
$x-\left(\cos\frac{2\pi}{6}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{6}\right)$	$x-\left(\cos\frac{3\pi}{6}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{6}\right)$
$x-\left(\cos\frac{4\pi}{6}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{6}\right)$	$x-\left(\cos\frac{5\pi}{6}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$
$x+1$	

et les facteurs du second degré seront,

pour la première	pour la deuxième
x^2-1	x^2+1
$x^2-2x\cos\frac{2\pi}{6}+1$	$x^2-2x\cos\frac{\pi}{6}+1$
$x^2-2x\cos\frac{4\pi}{6}+1$	$x^2-2x\cos\frac{5\pi}{6}+1$

en observant que $\cos\frac{3\pi}{6}=\cos 90°=0$, et $\sin\frac{3\pi}{6}=0$.

169. Les racines imaginaires des équations de la forme $x^m-1=0$ sont d'un grand usage en Algèbre, où elles sont désignées sous le nom de *racines imaginaires de l'unité* : ce sont en effet divers assemblages de symboles algébriques qui, lorsqu'on les soumet aux opérations par lesquelles on développe une puissance quelconque, donnent l'unité pour résultat. Ces racines ont entr'elles dans chaque degré, des relations bien remarquables, et qu'il est facile de déduire de leur expression générale.

On a, par le numéro précédent, $x=\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}$;

mais on voit aisément que

$$\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}=\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\right)^n \text{ (\textit{Int.} n° 41)}$$

si donc on designe par x', la racine que donne la formule $\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}$ et qui se présente la première, on obtiendra toutes les autres en formant les diverses puissances x'^2, x'^3, x'^4.

Cette propriété n'est pas particulière à la racine que nous avons désignée par x', car si on prend un multiple quelconque p de l'arc $\frac{2n\pi}{m}$, on aura également

$$\cos\frac{2np\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2np\pi}{m}\sqrt{-1}=\left(\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right)^p$$

et en même tems l'expression $\cos\frac{2np\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2np\pi}{m}$ rentrera dans quelqu'une des racines de la proposée, puisque l'arc $\frac{2np\pi}{m}$ ne pourra jamais être que la somme d'un certain nombre de demi-circonférences et de l'un des arcs compris entre $\frac{2\pi}{m}$ et π.

La même chose peut se démontrer d'une manière fort simple, sans le secours des sinus et des cosinus, en observant que si x' désigne une racine quelconque de l'équation $x^m-1=0$, on doit avoir

$x'^m = 1$, $x'^{4m} = 1$, $x'^{3m} = 1$; et que $x'^{4m} = (x'^4)^m$, $x'^{3m} = (x'^3)^m$, etc.: d'où il suit que les diverses puissances x'^4, x'^3 etc. satisfont aussi à l'équation proposée. Le nombre de racines diverses qu'on obtiendroit de cette manière, ne peut surpasser m; car lorsqu'on est parvenu à x'^m, on retrouve l'unité, et il vient ensuite $x'^{m+1} = x'$, $x'^{m+2} = x'^2$ etc. L'équation $x^m + 1 = 0$ conduiroit à des résultats analogues aux précédens, avec cette différence qu'il ne faudroit employer que des puissances impaires de l'une quelconque des racines, comme on le verra facilement par l'expression générale donnée pour ce cas, dans l'article précédent, ou en remarquant que lorsque $x^m = -1$, on ne peut avoir $(x'^m)^n = (x'^n)^m = -1$, qu'en prenant pour n un nombre impair.

170. La recherche des racines imaginaires des équations $x^m \mp 1 = 0$ dépend, comme on voit, de la division de la circonférence du cercle dans un nombre m de parties égales, ou de l'inscription d'un polygone régulier d'un nombre m de côtés. Toutes les fois que l'exposant m sera compris dans l'une des progressions $\div 2 : 4 : 8 : 16$ etc., $:: 3 : 6 : 12 : 24$ etc., $\div 5 : 10 : 20 : 40$ etc.; on pourra exécuter cette opération avec la règle et le compas, ou bien calculer directement les expressions des sinus ou des cosinus des arcs, $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{4\pi}{m}$, etc.; $\frac{\pi}{m}$, $\frac{3\pi}{m}$ etc., dans lesquelles, il n'entrera alors que des radicaux quarrés.

171. En général si m et m' sont deux nombres premiers, et qu'on sache résoudre les équations $x^m \mp 1 = 0$, $x^{m'} \mp 1 = 0$, on résoudra aussi l'équation $x^{mm'} \mp 1 = 0$; car en supposant $x^m = y$, il vient alors $y^{m'} \mp 1 = 0$, et désignant par α, l'une quelconque des racines de cette dernière équation, on a ensuite $x^m = \alpha$ ou $x^m - \alpha = 0$, résultat qu'on ramenera à la forme $t^m - 1 = 0$, en faisant $x\sqrt[m]{\alpha} = t$.

On peut parvenir à l'expression des racines de l'équation $x^{mm'} \mp 1 = 0$, en n'employant que les sinus et les cosinus des arcs, qui résultent des divisions de la demi-circonférence et de ses multiples, en m et en m' parties égales. Pour le prouver, considérons d'abord l'équation $x^{mm'} - 1 = 0$, et multiplions entr'elles deux racines

quelconques des équations $x^m-1=0$, et $x^{m'}-1=0$; nous aurons

$$\left(\cos\frac{2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right)\left(\cos\frac{2n'\pi}{m'}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2n'\pi}{m'}\right)$$

$$=\cos 2\left(\frac{nm'+n'm}{mm'}\right)\pi\pm\sqrt{-1}\sin 2\left(\frac{nm'+n'm}{mm'}\right)\pi.$$

En comparant ce résultat avec l'expression $\cos\frac{2n''\pi}{mm'}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2n''\pi}{mm'}$ qui représente les racines de $x^{mm'}-1=0$, on verra que l'un et l'autre reviendront au même, si $nm'+n'm=n''$; mais m et m' étant des nombres premiers entr'eux, il suit de la théorie des équations indéterminées du premier degré, qu'on trouvera toujours pour n et n' des nombres qui satisferont à l'équation ci-dessus.

On remarquera qu'en faisant $n''=1$, il vient

$$\cos 2\left(\frac{n'm'+n'm'}{mm'}\right)\pi=\cos\frac{2\pi}{mm'},\ \sin 2\left(\frac{n'm'+n'm}{mm'}\right)\pi=\sin\frac{2\pi}{mm'}$$

et que par conséquent on connoîtra le sinus et le cosinus de l'arc résultant de la division de la circonférence dans un nombre mm' de parties égales, lorsque ceux des arcs $\frac{2\pi}{m}$ et $\frac{2\pi}{m'}$ seront donnés, et qu'on aura déterminé n et n' d'après l'équation $nm'+n'm=1$.

L'équation $x^{mm'}+1=0$ conduiroit à des résultats analogues; on auroit dans ce cas

$$\left\{\cos\left(\frac{2n+1}{m}\right)\pi\pm\sqrt{-1}\sin\left(\frac{2n+1}{m}\right)\pi\right\}\left\{\cos\left(\frac{2n'+1}{m'}\right)\pi\pm\sqrt{-1}\sin\left(\frac{2n'+1}{m'}\right)\pi\right\}$$

$$=\cos\left(\frac{(2n+1)m'+(2n'+1)m}{mm'}\right)\pi\pm\sqrt{-1}\sin\left(\frac{(2n+1)m'+(2n'+1)m}{mm'}\right)\pi=$$

$$\cos\left(\frac{2n''+1}{mm'}\right)\pi\pm\sqrt{-1}\sin\left(\frac{2n''+1}{mm'}\right)\pi;$$

d'où on tireroit $(2n+1)m'+(2n'+1)m=2n''+1$.

172. Les équations de la forme $x^{2m}-2px^m+q=0$ peuvent être traitées comme celles qui ne renferment que deux termes; en les résolvant à la manière du second degré, on en tirera $x^m=p\pm\sqrt{p^2-q}$; tant que p^2 surpasse q, les valeurs de x^m sont réelles, et en les

représentant par α et par β, on a les deux équations $x^m - \alpha = 0$, $x^m - \beta = 0$, dont on trouvera les racines imaginaires par les formules du n°. 167.

Lorsqu'on aura $p^2 < q$, on donnera à la valeur de x^m la forme $p \pm \sqrt{q - p^2} \cdot \sqrt{-1}$, et faisant $p = a$ et $\sqrt{q - p^2} = b$, il viendra $x^m = a + b\sqrt{-1}$; il ne s'agira plus que d'extraire de l'expression $a \pm b\sqrt{-1}$ une racine du degré m. En reprenant les formules du n°. 166 on trouvera

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{q}, \cos \zeta = \frac{a}{r} = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

et l'expression générale de la racine cherchée sera

$$r^{\frac{1}{m}}\left(\cos \frac{2n\pi + \zeta}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2n\pi + \zeta}{m}\right).$$

Si on multiplie l'un par l'autre les facteurs simples

$$x - r^{\frac{1}{m}}\left(\cos \frac{2n\pi + \zeta}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{2n\pi + \zeta}{m}\right),$$

$$x - r^{\frac{1}{m}}\left(\cos \frac{2n\pi + \zeta}{m} - \sqrt{-1} \sin \frac{2n\pi + \zeta}{m}\right),$$

le produit $x^2 - 2r^{\frac{1}{m}} x \cos \frac{2n\pi + \zeta}{m} + r^{\frac{2}{m}}$ représentera tous les facteurs du second degré que peut avoir l'équation proposée; et on remarquera qu'en substituant dans cette équation r^2 au lieu de q, $r \cos \zeta$ au lieu de p, elle devient $x^{2m} - 2rx^m \cos \zeta + r^2 = 0$. En supposant $r = 1$, on auroit $x^{2m} - 2x^m \cos \zeta + 1 = 0$, et la formule des facteurs du second degré seroit $x^2 - 2x \cos \frac{2n\pi + \zeta}{m} + 1$.

Cette hypothèse ne diminue en rien la généralité des résultats, car si on fait $x = \frac{y}{\alpha}$, il viendra l'équation $y^{2m} - 2\alpha^m y^m \cos \zeta + \alpha^{2m} = 0$, qu'on peut toujours comparer à $y^{2m} - 2Py^m + Q = 0$, pourvû qu'on ait $P^2 < Q$. Rien ne changeroit dans tout ce qui précède,

si le coefficient p étoit négatif, seulement l'arc z surpasseroit alors 90°.

173. La résolution de l'équation $x^m \mp a^m = 0$, donnée dans le n°. 167, nous ayant fait connoître les facteurs de la quantité $x^m \mp a^m$, nous fournira le moyen de démontrer la belle propriété du cercle, que renferme le théorême de Côtes dont voici l'énoncé.

Si on divise la circonférence d'un cercle décrit d'un rayon égal à a *en un nombre* 2 m *de parties égales*, MM_1, M_1M_2, M_2M_3 *etc.* (Fig. 2.) FIG. 2. *et que d'un point* O *placé sur le diamètre* MCM_5 *et éloigné du centre* C *de la quantité* $OC = x$, *on mène aux différens points de division les droites* OM, OM_1, OM_2, OM_3, *etc. le produit de toutes celles qui correspondront à des points de division marqués d'un nombre pair, sera égal à* $a^m - x^m$, *si le point* O *est situé dans l'intérieur du cercle, et à* $x^m - a^m$, *s'il est situé au-dehors : les droites menées à des points de division impairs étant multipliées entr'elles, donneront la quantité* $a^m + x^m$.

Je ne démontrerai que le cas où le point O se trouve en-dedans du cercle, parce qu'il sera aisé de prouver l'autre de la même manière. J'abaisserai du point M_1 la perpendiculaire M_1P sur le diamètre MM_5, et j'aurai par cette construction $\overline{OM_1}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM_1}^2$; mais PM_1 représente le sinus de l'arc MM_1, dans le cercle proposé dont le rayon est a, et CP en est le cosinus; on aura donc en prenant les sinus et cosinus tabulaires, calculés pour un rayon égal à l'unité, $PM_1 = a \sin MM_1$, $CP = a \cos MM_1$, $OP = CP - CO = a \cos MM_1 - x$, et enfin $\overline{OM_1}^2 = a^2 - 2ax \cos MM_1 + x^2$: les valeurs de OM_2, OM_3, etc. s'obtiendront en substituant dans celles qu'on a trouvées pour OM_1, les arcs MM_2, MM_3, etc. à l'arc MM_1. En ne prenant que ceux qui répondent aux points de division pairs, et désignant toujours la demi-circonférence par π, il viendra $MM_2 = \frac{2\pi}{m}$, $MM_4 = \frac{4\pi}{m}$; d'où

$$\overline{OM_2}^2 = a^2 - 2ax \cos\frac{2\pi}{m} + x^2,\ \overline{OM_4}^2 = a^2 - ax \cos\frac{4\pi}{m} + x^2, \text{ etc.}$$

Mais les lignes OM_2, OM_4 etc. placées d'un côté du diamètre, ont leurs correspondantes OM_8, OM_6, de l'autre côté, qui leur sont respectivement égales, ensorte qu'on pourra écrire $OM_2 \times OM_8$, au lieu de $\overline{OM_2}^2$; $OM_4 \times OM_6$, au lieu de $\overline{OM_4}^2$, et ainsi de suite, si les divisions étoient en plus grand nombre : on remarquera en même tems que la ligne OM représente la quantité $a-x$. Cela posé, il résulte du n°. 168, que m étant impair,

$$a^m-x^m=(a-x)\left(a^2-2ax\cos\frac{2\pi}{m}+x^2\right)\left(a^2-2ax\cos\frac{4\pi}{m}+x^2\right)\text{etc.};$$

mettant au lieu des facteurs du second membre leurs expressions en lignes, on aura

$$a^m-x^m=OM\times OM_2\times OM_4\times OM_6\times OM_8.$$

Les arcs MM^1, MM^3, MM^5 etc. qui correspondent aux points de division impairs, étant égaux à

$$\frac{2\pi}{2m}=\frac{\pi}{m},\ \frac{6\pi}{2m}=\frac{3\pi}{m},\ \frac{10\pi}{2m}=\frac{5\pi}{m}\text{ etc.}$$

on trouvera

$$\overline{OM_1}^2=a^2-2ax\cos\frac{\pi}{m}+x^2,\ \overline{OM_3}^2=a^2-2ax\cos\frac{3\pi}{m}+x^2,\text{ etc.}$$

et $OM_5=a+x$; mais comme on a

$$a^m+x^m=(a+x)\left(a^2-2ax\cos\frac{\pi}{m}+x^2\right)\left(a^2-2ax\cos\frac{3\pi}{m}+x^2\right)\text{etc.}$$

il viendra $a^m+x^m=OM_1\times OM_3\times OM_5\times OM_7\times OM_9$.

FIG. 3. Lorsque m est un nombre pair, comme dans la *fig.* 3, les deux parties OM et OM^6 du diamètre, répondent l'une et l'autre à des points de division marqués d'un chiffre pair, et donnent les deux facteurs $a-x$ et $a+x$, que la quantité a^m-x^m a dans ce cas.

174. Côtes qui mourut fort jeune, laissa sans démonstration, parmi ses papiers, le théorême précédent. Moivre et Bernoulli, y suppléerent; mais le premier donna à l'énoncé du théorême une extension au moyen de laquelle il comprend la décomposition de l'expression $a^{2m}-2a^mx^m\cos z+x^{2m}$ en facteurs réels du second degré. Voici cette extension:

Au lieu de placer le point M, origine de la division du cercle;

à

à l'extrémité du rayon OC, on prend d'abord un arc AM (*fig.* 4.) qui soit la $m^{ème}$ partie de l'arc ζ, représenté par AB; ensuite on partage la circonférence du cercle en un nombre m de parties égales, à commencer du point M, et on a alors FIG. 4.

$$a^{2m}-2a^{m}x\cos\zeta+x^{2m}=\overline{AC}^{2m}-2\overline{AC}^{m}\times\overline{OC}^{m}\cos\zeta+\overline{OC}^{2m}$$
$$=\overline{OM}^{2}\times\overline{OM_1}^{2}\times\overline{OM_2}^{2}\times\overline{OM_3}^{2}\times\overline{OM_4}^{2}\text{ etc.}$$

Pour s'assurer de la vérité de cette équation, il faut observer que, $AM=\frac{\zeta}{m}$, $AM_1=\frac{2\pi+\zeta}{m}$, $AM_2=\frac{4\pi+\zeta}{m}$, etc. et chercher, comme dans le n°. précédent, les valeurs de $\overline{OM}^{2}$, $\overline{OM_1}^{2}$, etc.; on trouvera par ce moyen les mêmes facteurs que ceux que les formules du n°. 172 donneroient pour l'expression

$$a^{2m}-2a^{m}x^{m}\cos\zeta+x^{2m}.$$

175. L'application des formules du n°. 166 va nous conduire à une expression très-simple des racines de l'équation du troisième degré, dans le cas irréductible. On sait que la première des racines de l'équation $x^3-px+q=0$ est

$$x=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

et qu'elle se présente sous une forme imaginaire, en apparence; lorsque $\frac{1}{27}p^3$ surpasse $\frac{1}{4}q^2$. Si on fait $\frac{q}{2}=a$ et $\sqrt{\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2}=b$, on aura $x=-(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}-(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ et on trouvera

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3},\ \cos\zeta=\frac{a}{r}=\frac{q}{2\sqrt{\frac{1}{27}p^3}},$$

$$(a\pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\zeta}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{3}\right)=\left(\cos\frac{\zeta}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{3}\right)\sqrt{\tfrac{1}{3}p};$$

d'où il résultera

$$x=-2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\frac{\zeta}{3},\ x=-2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\frac{2\pi+\zeta}{3},\ x=-2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\frac{4\pi+\zeta}{3}$$

et à cause que $\cos\frac{4\pi+\zeta}{3}=\cos\frac{2\pi-\zeta}{3}$, la dernière de ces valeurs

peut être écrite ainsi : $x = -2\sqrt{\frac{1}{3}p}\cos\frac{2\pi-\zeta}{3}$.

Nous sommes parvenus en même tems aux trois racines de l'équation $x^3-px+q=0$, et cela n'étonnera point ceux qui savent que l'expression de la première racine, dont nous sommes partis, les contient toutes implicitement, au moyen des racines cubiques imaginaires de l'unité, qui s'y trouvent comme sous-entendues. Les autres pourront se convaincre de l'exactitude de nos résultats, en substituant dans les expressions connues des deux dernières racines, les valeurs trouvées ci-dessus pour les radicaux cubiques qui entrent dans la première ; ils auront

$$2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\zeta}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\frac{\zeta}{3}\right)$$

$$2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\zeta}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\frac{\zeta}{3}\right)$$

et en se rappellant que

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad\sin\frac{2\pi}{3}=\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

ils changeront les expressions précédentes en

$$-2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\frac{2\pi+\zeta}{3}\quad\text{et}\quad-2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\frac{2\pi-\zeta}{3}.$$

176. On trouvera de même que l'expression générale

$$\sqrt[m]{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt[m]{a-b\sqrt{-1}}$$

est toujours réelle, et que sa valeur est $r^{\frac{1}{m}}\cos\frac{\zeta}{m}$. On formeroit l'équation dont elle dépend, en cherchant le cosinus de la $m^{\text{ème}}$ partie d'un arc donné. En effet, soit $mx=\zeta$, on aura $x=\frac{\zeta}{m}$, et en vertu du n°. 40 de l'Introduction, on trouvera

$$\cos\zeta=\left(\cos\frac{\zeta}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{m}\right)^m+\left(\cos\frac{\zeta}{m}-\sqrt{-1}\sin\frac{\zeta}{m}\right)^m;$$

si on développe cette équation, en mettant $\frac{a}{r}$ à la place de $\cos\zeta$, et en faisant $\cos\frac{\zeta}{m}=r^{-\frac{1}{m}}y$, $\sin\frac{\zeta}{m}=\sqrt{1-r^{-\frac{2}{m}}y^2}$; il en résultera

l'équation qui doit donner y en a : mais on a aussi, par le n°. cité,

$$\cos\frac{\zeta}{m} = \frac{1}{2}\left(\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta\right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{2}\left(\cos\zeta - \sqrt{-1}\sin\zeta\right)^{\frac{1}{m}}$$

donc $$y = \sqrt[m]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[m]{a - b\sqrt{-1}}$$

Il n'entre point dans mon sujet de traiter les équations qui naissent de la division d'un arc de cercle en un nombre quelconque de parties égales ; mais comme elles sont très-remarquables par leur forme et leurs propriétés, j'ai voulu du moins les indiquer au lecteur.

177. La connoissance des racines imaginaires des équations, étant nécessaire pour une branche importante du Calcul intégral, je crois devoir entrer encore dans quelques détails sur cette matière.

Il suit du théorême démontré n°. 163, que pour obtenir les racines imaginaires d'une équation algébrique quelconque, il faut la décomposer en facteurs du second degré ; mais ce moyen entraîne un grand inconvénient, en ce qu'il exige la résolution d'une équation du degré $\frac{m(m-1)}{2}$, avant même qu'on puisse savoir si la proposée du degré m, a ou non des racines imaginaires. Les Géomètres ont cherché des méthodes qui pussent leur indiquer le nombre de ces racines, indépendamment de la résolution d'aucune équation, et je vais exposer ce que Lagrange a trouvé de plus général à cet égard.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. les racines d'une équation du degré m, parmi lesquelles il y en ait plusieurs d'imaginaires, ces dernières seront nécessairement par couples, et de la forme

$$a \pm b\sqrt{-1}, \quad a' \pm b'\sqrt{-1}.$$

Si on prend les différences des racines de cette équation, elles ne pourront être que de l'une des formes suivantes :

$$\alpha - \beta, \quad \alpha - a \mp b\sqrt{-1}, \quad a - a' \pm (b - b')\sqrt{-1}, \quad 2b\sqrt{-1}.$$

En faisant les quarrés de ces expressions, on trouvera pour la première un résultat réel et positif, et pour la quatrième un résultat réel et négatif ; les deux autres donneront des résultats imaginaires, à

moins qu'on n'ait dans quelques cas $b=b'$, a et a' restant inégaux; mais quoiqu'il arrive, il n'y aura que le quarré de la différence entre les deux racines imaginaires d'un même couple, qui soit négatif. Il suit de là, que l'équation dont les racines seroient les quarrés des différences qui se trouvent entre celles de la proposée, auroit autant de racines négatives, que cette dernière a de couples de racines imaginaires.

On peut former l'équation qui donne les quarrés des différences entre les racines de la proposée, et que je nommerai l'équation (D), en développant d'après le procédé du n°. 160, le produit des facteurs $z-(\alpha-\beta)^2$, $z-(\alpha-\gamma)^2$, $z-(\beta-\gamma)^2$, etc., et en l'égalant ensuite à zéro.

178. Si on avoit une règle sûre pour juger combien l'équation (D) a de racines négatives, on sauroit par-là quel est le nombre de couples des racines imaginaires que renferme la proposée: malheureusement l'analyse n'offre point de moyens infaillibles pour remplir cet objet. Descartes cependant a reconnu qu'une équation quelconque pouvoit avoir autant de racines positives qu'il y a de changemens de signe de $+$ en $-$ ou de $-$ en $+$, dans la suite des termes qui la composent, et autant de racines négatives qu'il y a de successions de même signe. Cette proposition, dont la vérité fut d'abord contestée, a été démontrée complètement par de Gua, et peut s'énoncer d'une manière plus claire et plus générale, comme il suit:

Toute équation ne sauroit avoir un nombre de racines positives plus grand que celui des variations de signes qui se trouvent entre ses termes, ni un nombre de racines négatives plus grand que celui des successions de même signe, et si elle ne contenoit que des racines réelles, elle en auroit précisément autant de positives que de variations de signe, et autant de négatives que de successions du même.

Ce théorême, que nous démontrerons plus bas, nous fait voir que si les termes de l'équation (D) sont alternativement positifs et négatifs, c'est-à-dire, si elle n'a point de succession du même signe, elle n'aura que des racines réelles et positives, puisque par sa nature, elle n'en sauroit avoir d'imaginaires, sans en avoir en même

tems qui soient négatives; et on conclura de là que toutes les racines de la proposée seront réelles dans ce cas.

De plus, si dans l'équation (D) le dernier terme, qui, comme on sait, est le produit de toutes les racines, est négatif, elle aura un nombre pair ou impair de racines négatives, selon qu'elle sera de degré impair ou pair, car le produit A^2+B^2 d'un couple de racines imaginaires $A \pm B\sqrt{-1}$, est toujours positif. Dans le premier cas, la proposée aura un nombre pair de couples de racines imaginaires, et un nombre impair dans le second. En général, la proposée ne sauroit avoir plus de couples de racines imaginaires, qu'il ne se trouve de successions du même signe, entre les termes de l'équation (D).

Les considérations précédentes ne mènent encore qu'à s'assurer si une équation donnée a des racines imaginaires, et à trouver une limite que leur nombre ne peut excéder; mais en suivant l'esprit de la méthode, on formeroit de nouvelles équations auxiliaires qui ne pourroient avoir des racines négatives, qu'autant que la proposée auroit au moins quatre racines imaginaires, d'autres qui n'en auroient que de positives, tant que le nombre des racines imaginaires de la proposée seroit au-dessous de 6, et ainsi de suite.

Il faudroit chercher dans le premier cas, l'équation qui donne le quarré de la différence entre la somme de deux quelconques des racines de la proposée, et celles de deux autres prises indistinctement; dans le second, l'équation qui donne le quarré de la différence entre la somme de trois quelconques des racines, et celle de trois autres prises indistinctement, etc.

179. Si on parvenoit à trouver d'une manière quelconque les racines négatives de l'équation (D), on en déduiroit l'expression des racines imaginaires de la proposée. En effet, en substituant dans cette dernière $a+b\sqrt{-1}$ au lieu de x, et en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, on auroit deux équations pour déterminer les inconnues a et b. Mais si l'on connoissoit *à priori* la valeur de b, et qu'on la mît dans l'une et l'autre de ces équations, les deux résultats devant être satisfaits par la même valeur de a, auroient nécessairement un facteur commun qui contiendroit a

élevé au premier, au second, ou au troisième, etc. degré, selon que la valeur de b répondroit à une, ou deux, ou trois, etc. valeurs de a; or le quarré de la différence entre les deux racines imaginaires, comprises dans la formule de $a \pm b\sqrt{-1}$ étant $-4b^2$, la quantité b seroit la moitié de la racine quarrée du résultat donné par l'équation (D) et pris positivement : cherchant donc le plus grand commun diviseur entre les deux équations dont on vient de parler, on auroit, en l'égalant à zéro, l'équation qui doit déterminer a.

180. L'équation (D) a encore d'autres propriétés utiles. On voit, par exemple, que son dernier terme s'évanouira toutes les fois que la proposée aura deux racines égales, puisque dans ce cas, une des quantités $(\alpha-\beta)^2$ deviendra nulle. Si la proposée avoit deux racines égales, comme il y auroit alors trois des quantités $(\alpha-\beta)^2$, $(\alpha-\gamma)^2$, $(\beta-\gamma)^2$ etc., qui s'anéantiroient, l'équation (D) perdroit ses trois derniers termes. En général, un nombre n de racines égales dans la proposée, fera disparoître $\frac{n(n-1)}{2}$ termes de l'équation (D), qui par là offre un moyen de reconnoître l'existence de ces racines. Nous saisirons cette occasion pour montrer comment le Calcul différentiel remplit le même but avec autant d'élégance que de facilité.

Une équation $P=0$ qui a des racines égales, est nécessairement de la forme $P=X(x-\alpha)^n=0$, et il suit de ce qui a été dit n°. 133, que toutes les différentielles $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, jusqu'à $\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}}$ s'évanouiront par la supposition de $x=\alpha$, parce qu'elles renfermeront le facteur $(x-\alpha)$ qui sera élevé à la puissance $n-1$ dans la première, à la puissance $n-2$ dans la seconde, et ainsi de suite. Les équations $P=0$, $\frac{dP}{dx}=0$, $\frac{d^2P}{dx^2}=0\ldots$ $\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}}=0$ auront donc lieu en même tems ; et si on cherche le diviseur commun entre la première et la seconde, on aura le facteur $(x-\alpha)^{n-1}$.

Ces considérations s'appliqueroient aisément au cas où la proposée renfermeroit plusieurs espèces de racines égales, c'est-à-dire, seroit

de la forme $X(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\rho}$ etc. $=0$: sa différentielle première auroit alors $(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\rho-1}$ etc. pour facteur commun.

181. Parmi les diverses démonstrations qu'on a données de la règle de Descartes, dont j'ai fait usage n°. 178, je choisirai celle qui est due à Ségner, parce qu'elle m'a paru la plus simple de toutes (*). Pour abréger, je désignerai sous le nom général de *variations* les changemens de signe, soit de + en —, soit de — en +, et j'appellerai *permanence*, toute succession du même signe.

Soit l'équation $x^m \pm Px^{m-1} \pm Qx^{m-2} \ldots \pm Tx \pm U = 0$, dans laquelle les signes + et — se succèdent d'une manière quelconque ; en la multipliant par le facteur $x-\alpha$, qui donne la racine positive $x=\alpha$, on aura

$$\begin{array}{l} x^{m+1} \pm P \\ -\alpha \end{array}\Big\}x^m \begin{array}{l} +Q \\ \mp P\alpha \end{array}\Big\}x^{m-1} \ldots\ldots \begin{array}{l} \pm U \\ \mp T\alpha \end{array}\Big\}x \quad \Big\} \mp U\alpha \Big\} = 0.$$

Les coefficiens placés dans la première ligne de ce résultat, sont ceux de la proposée pris avec le même signe dont ils étoient d'abord affectés, et les coefficiens de la seconde ligne sont formés de ceux de la première, multipliés par α, mais pris avec un signe contraire et reculés d'un rang vers la droite. Cela posé, tant que les coefficiens supérieurs seront plus grands que les inférieurs, ils détermineront le signe du terme dans lequel ils se trouvent, et comme ils n'ont pas changé de signe, il y aura entr'eux les mêmes variations et les mêmes permanences que dans la proposée ; mais le dernier terme $\mp U\alpha$ ayant toujours un signe contraire au coefficient supérieur $\pm U$ de l'avant-dernier, il en résultera une nouvelle variation que la proposée n'avoit point.

Lorsqu'on rencontrera un coefficient inférieur de signe contraire à son correspondant supérieur et plus grand que lui, il y aura une permanence de la proposée qui se changera en une variation ; car le signe du terme où cela arrivera, étant déterminé par celui du coefficient inférieur, sera contraire au signe du terme précédent qu'on suppose le même que celui de son coefficient supérieur.

On sentira la vérité de cette assertion, en observant qu'on ne peut

(*) Elle se trouve dans les Mémoires de l'Acad. de Berlin, année 1756. p. 292.

être obligé de recourir au coefficient inférieur, pour reconnoître le signe d'un terme, que dans des cas semblables à l'un des deux suivants

$$\left.\begin{matrix} +Rx^{m-3} \\ -R\alpha \end{matrix}\right\} + S \Big\} x^{m-4}, \qquad \left.\begin{matrix} -Rx^{m-3} \\ +R\alpha \end{matrix}\right\} - S \Big\} x^{m-4};$$

et en supposant qu'on ait $\alpha R > S$, l'ordre de la succession des signes sera dans le premier $+ -$ et dans le second $- +$. Je n'ai point écrit le coefficient inférieur dans le premier terme, puisque par l'hypothèse il n'influe point sur le signe de ce terme.

Il est donc évident que chaque fois qu'on descend de la ligne supérieure dans la ligne inférieure, pour déterminer le signe, il y a alors une variation qui ne se trouvoit point dans l'équation proposée; et si, après ce passage, on reste toujours dans la ligne inférieure, on retrouve les mêmes variations et les mêmes permanences que dans la proposée, puisque les coefficiens de cette ligne ont tous un signe contraire à leur signe primitif. Quand on remontera de la ligne inférieure à la ligne supérieure, il en pourra résulter ou une variation, ou une permanence; car il n'existe aucune connexion entre le signe d'un coefficient inférieur et celui du coefficient supérieur du terme suivant. Mais en supposant même que ce passage produisît dans tous les cas une permanence, comme le dernier terme de la nouvelle équation fait partie de la seconde ligne, il faudra toujours revenir au moins une fois de plus dans cette ligne que dans la première, et par conséquent la nouvelle équation aura au moins une variation de signe de plus que la proposée : il en seroit de même à chaque racine positive qu'on introduiroit.

Multiplions maintenant l'équation proposée par le facteur $x+\alpha$, qui donne la racine négative $x=-\alpha$, nous aurons

$$\left.\begin{matrix} x^{m+1} \\ +\alpha \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \pm P \\ \pm P\alpha \end{matrix} \Big\} x^m \begin{matrix} \pm Q \\ \pm Q\alpha \end{matrix} \Big\} x^{m-1} \ldots\ldots \begin{matrix} \pm U \\ \pm U\alpha \end{matrix} \Big\} x \left.\begin{matrix} \\ \pm U\alpha \end{matrix}\right\} = 0.$$

Les coefficiens placés dans la première ligne sont encore ici les mêmes et de même signe que dans l'équation proposée; ceux de la seconde ligne sont aussi formés de ceux de la première, multipliés par

par α, et reculés d'un rang vers la droite ; mais dans le cas actuel, ils ont conservé leur signe primitif.

En raisonnant comme ci-dessus, on verra que chaque fois qu'on sera obligé de prendre le signe du coefficient inférieur, on obtiendra une nouvelle permanence qui n'existoit point dans la proposée. Les exemples ci-joints

$$\left.\begin{matrix} +Rx^{m-3} & -S \\ & +\alpha R \end{matrix}\right\} x^{m-4}, \qquad \left.\begin{matrix} -Rx^{m-3} & +S \\ & -\alpha R \end{matrix}\right\} x^{m-4}$$

analogues à ceux qu'on a donnés plus haut, rendront cette conséquence bien évidente, puisque αR étant plus grand que S, on aura dans l'un $+\ +$, et dans l'autre $-\ -$. Lorsqu'on remontera de la ligne inférieure dans la ligne supérieure, il en pourra résulter indifféremment ou une variation ou une permanence ; mais en accordant que ce soit toujours une variation qui ait lieu, on pourra malgré cela conclure que le nombre des permanences sera au moins augmenté d'une unité, puisque le dernier terme se trouvant dans la seconde ligne, forcera toujours à revenir dans cette ligne au moins une fois de plus que dans l'autre. Il suit de là que chaque racine négative donnée à la proposée, apportera avec elle au moins une permanence.

En rapprochant cette conclusion de la précédente, on verra, comme nous l'avons affirmé dans le n°. 178, que *le nombre des racines positives d'une équation quelconque, ne sauroit surpasser celui des variations de signe qu'elle renferme, et le nombre des racines négatives, celui des permanences.* Si l'équation proposée n'avoit que des racines réelles, on prouveroit aussi par-là qu'elle doit avoir précisément autant de racines positives que de variations, et autant de racines négatives que de permanences ; car quel que soit le nombre de variations et le nombre de permanences qu'ait apporté chaque racine positive et chaque racine négative, la somme des unes et des autres dans le résultat final, doit être égale au nombre des termes diminué de l'unité, ou à l'exposant du degré de l'équation, ou enfin au nombre des racines ; et comme les variations ne sont produites que par les racines positives, et les permanences que par les racines négatives, il s'ensuit qu'il y aura autant de variations que de racines posi-

tives, autant de permanences que de racines négatives, *et vice versâ*.

Les racines imaginaires modifient cette proposition, parce qu'elles ont lieu soit avec des variations, soit avec des permanences : en effet, les racines de l'équation $x^2 \pm 2px + q = 0$, sont imaginaires, quelque signe qu'ait p, tant que p^2 est moindre que q.

On peut assez souvent reconnoître la présence des racines imaginaires par la règle ci-dessus, lorsqu'une équation manque de quelques termes. Prenons pour exemple $x^3 + px + q = 0$. Nous pouvons remplacer par $\pm 0x^2$ le second terme qui manque, et il viendra $x^3 \pm 0x^2 + px + q = 0$; si on n'a égard qu'au signe supérieur, on ne trouvera que des permanences, et le signe inférieur donnera deux variations. Ces résultats, dont l'un semble indiquer trois racines négatives, et l'autre deux négatives et une positive, ne s'accordant point entr'eux, font voir que la proposée a des racines imaginaires. Si on avoit $x^3 - px + q = 0$, en l'écrivant ainsi : $x^3 \pm 0x^2 - px + q = 0$, quelque signe qu'on emploie, on obtiendroit toujours une variation et deux permanences; cet accord dans les résultats prouve qu'elle peut avoir les trois racines réelles, mais non pas qu'elle les ait en effet, car on sait d'ailleurs que cela ne peut arriver, à moins qu'on n'ait $\frac{1}{27}p^3 > q^2$.

182. Nous allons examiner maintenant la forme que prennent les fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires, lorsqu'elles renferment des quantités imaginaires.

Soit d'abord $l(a \pm b\sqrt{-1})$: en faisant $\sqrt{a^2+b^2} = r$, $\frac{a}{r} = \cos z$, $\frac{b}{r} = \sin z$, il viendra $a \pm b\sqrt{-1} = r(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)$ et par conséquent

$$l(a \pm b\sqrt{-1}) = lr + l(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z);$$

mais $l(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \pm z\sqrt{-1}$ (*Int.* n°. 38.) : donc $l(a \pm b\sqrt{-1}) = lr \pm z\sqrt{-1}$. Les données étant seulement r, $\cos z$ et $\sin z$, on pourra, comme dans le n°. 166, prendre au lieu de l'arc z, les arcs $2\pi + z$, $4\pi + z \ldots 2i\pi \pm z$, i étant un

nombre entier ; ensorte qu'on aura pour $l(a \pm b\sqrt{-1})$ une infinité de valeurs, comprises dans la formule $l\, r \pm (2i\pi + \zeta)\sqrt{-1}$.

Si on fait $b = 0$, on aura $r = a$, sin $\zeta = 0$, $\zeta = 0$ et $l\, a = l\, a \pm 2i\pi\sqrt{-1}$. Ce résultat, qui paroîtra d'abord paradoxal, indique qu'une quantité réelle a, pour le même module, une infinité de logarithmes, dont un seul est réel, savoir celui qu'on obtient en faisant $i = 0$ et que nous distinguerons par la caractéristique L ; nous écrirons donc $l\, a = L\, a \pm 2i\pi\sqrt{-1}$.

L'équation $\pm x\sqrt{-1} = l(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)$ conduit immédiatement à la même conclusion ; car en y faisant successivement $x = 0$, $x = 2\pi$, ... $x = 2i\pi$, elle donne $0 = L\, 1$, $\pm 2\pi\sqrt{-1} = l\, 1$, .. $\pm 2i\pi\sqrt{-1} = l\, 1$, d'où on voit que l'unité a un nombre infini de logarithmes imaginaires. Mais puisque $a = 1 \times a$, on doit avoir aussi $l\, a = l\, 1 + l\, a$; substituant à $l\, a$ le logarithme réel $L\, a$, et mettant au lieu de $l\, 1$, sa valeur générale $\pm 2i\pi\sqrt{-1}$, on trouvera de même que tout-à-l'heure,

$$l\, a = L\, a \pm 2i\pi\sqrt{-1}.$$

Pour bien entendre ceci, il faut se rappeller que la nature des logarithmes dépend uniquement de l'équation $l(a\,b) = l\, a + l\, b$. Si on met dans cette équation pour $l\, a$ et $l\, b$ leurs valeurs générales $L\, a \pm 2i\pi\sqrt{-1}$ et $L\, b \pm 2i'\pi\sqrt{-1}$, son second membre devenant $L\, a + L\, b \pm 2(i + i')\pi\sqrt{-1}$, sera nécessairement un des logarithmes de $a\,b$ compris dans la formule

$$l(a\,b) = L(a\,b) \pm 2i''\pi\sqrt{-1} = L\, a + L\, b \pm 2i''\pi\sqrt{-1}.$$

Quels que soient donc les logarithmes de a et de b qu'on ajoute entr'eux, leur somme sera toujours égale à l'un des logarithmes du produit $a\,b$.

En faisant $x = 180° = \pi$, on a $\cos x = -1$, et mettant $(2i+1)\pi$ à la place de $2i\pi$, on trouvera $l(-1) = \pm(2i+1)\pi\sqrt{-1}$; ce qui nous fait voir que tous les logarithmes de -1 sont imaginaires : il en sera de même de ceux de $-a$; car $-a = a \times -1$

et $l(-a)=La+l(-1)$; donc $l(-a)=La\pm(2i+1)\pi\sqrt{-1}$.

183. C'est à l'aide des considérations précédentes qu'Euler a résolu la difficulté sur les logarithmes des nombres négatifs, qui avoit été l'objet d'une très-longue discussion entre Leibnitz et Jean Bernoulli. Le premier soutenoit que ces logarithmes étoient imaginaires, le second qu'ils étoient réels, et les mêmes que ceux des nombres positifs. Nous ne pouvons entrer dans le détail des raisons qui furent données de part et d'autre; mais une des preuves les plus fortes qu'on apportoit en faveur de la réalité des logarithmes des nombres négatifs, consistoit à dire que puisque $(-a)^2=a^2$, on devoit avoir $l(-a)^2=la^2$, $2l-a=2la$, et enfin $l-a=l+a$. La théorie d'Euler confirme la première conséquence, et prouve que les deux autres sont fausses.

En effet, on a $l(-a)^2=2l-a=2La\pm2(2i+1)\pi\sqrt{-1}$, et à cause que le nombre $2(2i+1)$ est pair, cette expression se trouve comprise dans la formule $2La\pm2i''\pi\sqrt{-1}$, qui représente tous les logarithmes de a^2; on a donc dans un certain sens $l(-a)^2=la^2$.

Si on compare les expressions $2l-a=2La\pm2(2i+1)\pi\sqrt{-1}$ et $2la=2La\pm4i\pi\sqrt{-1}$, on verra qu'elles ne peuvent jamais rentrer l'une dans l'autre, puisque tous les nombres de la forme $4i+2$, sont essentiellement différens de ceux de la forme $4i$; mais l'expression générale des logarithmes de a^2, doit comprendre tous les logarithmes qu'on trouveroit, en ajoutant indistinctement ceux des facteurs de cette quantité (n°. précédent): elle renferme donc outre les doubles de chacun des logarithmes de $+a$ et de $-a$, les sommes qu'on obtiendroit en ajoutant ensemble deux des premiers ou deux des seconds, qui seroient inégaux.

Ainsi $l(-a)^2=2La\pm2(i+i'+2)\sqrt{-1}$ et $la^2=2La\pm2(i+i')\sqrt{-1}$. C'est dans ces dernières expressions que se trouvent les logarithmes qui satisfont à l'équation $l(-a)^2=la^2$, parce que $2(i+i')$ peut toujours désigner un nombre pair quelconque.

Bernoulli tiroit encore de la quadrature de l'hyperbole une autre objection d'un grand poids, qu'Euler laissa subsister; mais on y a répondu depuis, ainsi que nous le ferons voir dans le Calcul intégral, en parlant des quadratures; et quoique d'Alembert, qui avoit embrassé l'opinion de Bernoulli, n'ait point voulu admettre l'explication d'Euler, elle a reçu aujourd'hui l'assentiment des Analystes les plus distingués.

184. Nous avons cherché précédemment l'expression du logarithme de la quantité imaginaire $a+b\sqrt{-1}=r(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)$, et nous avons obtenu pour résultat $lr+(2i\pi+z)\sqrt{-1}$; en renversant la question, on voit que si le logarithme est représenté par $m+n\sqrt{-1}$, on aura $m=lr$, $n=2i\pi+z$, et en désignant par e le nombre dont le logarithme népérien est l'unité, on trouvera $r=e^m$ (*Int.* n°. 32, *à la fin*) $\sin z=\sin n$, $\cos z=\cos n$; et enfin $e^m(\cos n+\sqrt{-1}\sin n)$ sera l'expression de la quantité cherchée: cette quantité sera réelle si n est ou nul, ou un multiple quelconque de la demi-circonférence.

185. L'expression $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ peut se mettre sous la forme $e^{(m+n\sqrt{-1})l(a+b\sqrt{-1})}$, puisqu'en général $p^q=e^{ql p}$, comme on peut s'en assurer en prenant les logarithmes. Si on substitue au lieu de $l(a+b\sqrt{-1})$ sa valeur $lr+z\sqrt{-1}$, il en résultera

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=e^{mlr-nz+(mz+nlr)\sqrt{-1}}=$$

$$e^{mlr-nz}e^{(mz+nlr)\sqrt{-1}}=e^{mlr-n}[\cos(mz+nlr)+\sqrt{-1}\sin(mz+nlr)]$$

et à cause que $e^{mlr}=r^m$, on aura enfin

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=r^m e^{-nz}[\cos(mz+nlr)+\sqrt{-1}\sin(mz+nlr)]$$

résultat qui est de la forme $A+B\sqrt{-1}$. On se rappellera que pour donner à ce résultat toute la généralité qu'il comporte, il faut mettre $2i\pi+z$ à la place de z.

186. Supposons qu'on ait $b=0$, il viendra $r=a$, $z=0$, $\cos z=1$

et $a^{m+n\sqrt{-1}} = a^m e^{m-2i\pi} [\cos(2im\pi + nla) + \sqrt{-1}\sin(2im\pi + nla)]$.

Si a étoit une quantité négative, comme r doit toujours être positive, on prendroit $\zeta = 180°$, d'où $\cos\zeta = -1$, et on écriroit $(2i+1)\pi$ au lieu de $2i\pi$, ce qui donneroit

$(-a)^{m+n\sqrt{-1}} = r^{m-(2i+1)n\pi} e [\cos((2i+1)m\pi + nla) + \sqrt{-1}\sin((2i+1)m\pi + nla)]$.

Lorsque a et m seront nuls on aura

$$r = b, \quad \cos\zeta = 0, \quad \zeta = 90° = \frac{\pi}{2}, \quad 2i\pi + \zeta = \frac{(4i+1)\pi}{2}$$

et $(b\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}} = e^{-\frac{(4i+1)}{2}n\pi} (\cos nlb + \sqrt{-1}\sin nlb)$;

si b étoit négatif on prendroit $\zeta = 270° = \frac{3\pi}{2}$ et $2i\pi + \zeta = \frac{(4i+3)}{2}\pi$.

Cette expression deviendroit réelle, dans le cas où on supposeroit $b = 1$; et si l'on faisoit $n = 1$ et $i = 0$, elle donneroit

$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,207879$, résultat qui par sa singularité mérite d'être confirmé. Pour cela j'observe qu'en substituant $\sqrt{-1}$ à la place de u dans la série $lu = u - u^{-1} - \frac{1}{2}(u^2 - u^{-2}) + \frac{1}{3}(u^3 - u^{-3})$ — etc. (*Introd.* n° 29.) il vient

$$l\sqrt{-1} = \sqrt{-1} - \frac{1}{\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}(-1+1) + \frac{1}{3}\left(-\sqrt{-1} + \frac{1}{\sqrt{-1}}\right) - \text{etc.} =$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{-1}}\left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}\right\}.$$

La série comprise entre les accolades exprime la valeur de l'arc de 45° dans un cercle dont le rayon $= 1$ (*Int.* n°. 38); ainsi

$$l\sqrt{-1} = \frac{-2}{\sqrt{-1}}\,\frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{2\sqrt{-1}} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2};$$

mais puisque $u^u = e^{ulu}$, on aura

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{1.2.4} - \frac{\pi^3}{1.2.3.8} + \text{etc.}$$

On remarquera que l'équation $l\sqrt{-1}=\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}$ à laquelle nous venons de parvenir, donne $\pi=\frac{2l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ et $2\pi=\frac{4l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$. Cette expression de la circonférence du cercle, qui se déduit aussi de l'équation $x\sqrt{-1}=l(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)$, en y faisant $x=\frac{\pi}{4}$ et qui a été trouvée par Jean Bernoulli, n'est qu'un symbole abrégé représentant une suite infinie.

187. *Soit la fonction circulaire* $\sin(a\pm b\sqrt{-1})$; *on aura*

$$\sin(a\pm b\sqrt{-1})=\sin a\cos(b\sqrt{-1})\pm\cos a\sin(b\sqrt{-1}).$$

Pour obtenir $\sin b\sqrt{-1}$ et $\cos b\sqrt{-1}$, on mettra $b\sqrt{-1}$ au lieu de x, dans les formules du n°. 37 de l'Introduction, et il en résultera

$$\sin(b\sqrt{-1})=\frac{e^{-b}-e^{b}}{2\sqrt{-1}}=\left(\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\right)\sqrt{-1},\cos(b\sqrt{-1})=\frac{e^{-b}+e^{b}}{2}.$$

Substituant ces valeurs, on aura

$$\sin(a\pm b\sqrt{-1})=\left(\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\right)\sin a\pm\sqrt{-1}\left(\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\right)\cos a.$$

On trouveroit aussi

$$\cos(a\pm b\sqrt{-1})=\left(\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\right)\cos a\mp\sqrt{-1}\left(\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\right)\sin a;$$

on parviendroit de même aux expressions des autres fonctions circulaires, telles que la tangente, la sécante, etc.

Lorsque $a=2i\pi\pm\frac{\pi}{2}=\frac{(4i\pm1)\pi}{2}$, il en résulte $\sin a=\pm1$, $\cos a=0$ et $\sin(a\pm b\sqrt{-1})=\pm\frac{1}{2}(e^{b}+e^{-b})$; la supposition de $a=i\pi$ donne aussi $\cos(a\pm b\sqrt{-1})=\pm\frac{1}{2}(e^{b}+e^{-b})$, parce que dans ce cas $\sin a=0$ et $\cos a=\pm1$, selon que i est pair ou impair : il y a donc des arcs imaginaires dont le sinus ou le cosinus

a une valeur réelle. Il faut observer cependant que cette valeur est en contradiction avec la nature du cercle ; car tant que b n'est pas nul, auquel cas l'arc seroit réel, la quantité $\frac{1}{2}(e^b+e^{-b}) = \frac{1}{2}\frac{e^{2b}+1}{e^b}$ surpasse toujours l'unité ou le rayon, ce qui ne sauroit arriver à aucun sinus, ni à aucun cosinus, pris dans le cercle (*).

On tireroit encore d'autres conséquences remarquables des résultats que nous avons obtenus dans cet article, et en renversant la question qui nous y a conduit, on parviendroit à l'expression des arcs imaginaires, qui répondent à des sinus ou à des cosinus imaginaires, ou bien à des sinus ou à des cosinus réels plus grands que le rayon : mais nous renverrons pour ces détails, au Mémoire d'Euler, cité dans la table.

188. Les résultats des n°s. 163, 164, 182, 184, 185, 187, prouvent que *toutes les fonctions algébriques, logarithmiques, exponentielles ou circulaires, peuvent, lorsqu'elles sont imaginaires, se ramener à la forme* $A \pm B\sqrt{-1}$.

189. L'élimination des inconnues dans les équations algébriques, n'étant présentée dans aucun livre élémentaire sous un point de vue général, j'ai cru devoir y suppléer ici, et cela avec d'autant plus de raison, que la théorie la plus lumineuse de cette opération repose sur les propriétés des fonctions symétriques que j'ai fait connoître au commencement de ce chapitre. Soient les deux équations

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots\ldots + Tx + U = 0 \ldots\ldots (1),$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + R'x^{n-3} \ldots\ldots + Y'x + Z' = 0 \ldots\ldots (2);$$

le moyen qui s'offre le premier pour chasser x de ces équations, consiste à prendre dans l'une d'elles la valeur de x, pour la substituer ensuite dans l'autre. Supposons donc que l'équation (1) soit résolue et qu'on en ait tiré les diverses valeurs $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$, $x=\delta$, etc.; comme elles appartiennent toutes à la question proposée, elles doivent être mises indistinctement dans l'équation (2), et produiront

(*) On verra dans la suite que l'existence de ces sinus et de ces cosinus, appartenant à des arcs imaginaires, tient à la nature de l'hyperbole équilatère, courbe, dont les propriétés ont la plus grande analogie avec celles du cercle.

ainsi

ainsi autant de résultats délivrés de x, que l'équation (1) a de racines: on aura donc séparément

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^n + P'\alpha^{n-1} + Q'\alpha^{n-2} + R'\alpha^{n-3} \ldots + Y'\alpha + Z' = 0 \\ \beta^n + P'\beta^{n-1} + Q'\beta^{n-2} + R'\beta^{n-3} \ldots + Y'\beta + Z' = 0 \\ \gamma^n + P'\gamma^{n-1} + Q'\gamma^{n-2} + R'\gamma^{n-3} \ldots + Y'\gamma + Z' = 0 \\ \delta^n + P'\delta^{n-1} + Q'\delta^{n-2} + R'\delta^{n-3} \ldots + Y'\delta + Z' = 0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots (3)$$

Aucune de ces équations, considérée en particulier, ne peut être la résultante cherchée; mais cette dernière doit les comprendre toutes et avoir lieu en même tems que chacune d'elles, condition qu'on remplira en les multipliant entr'elles et en égalant le produit à zéro; puisque ce produit deviendra identiquement nul, lorsqu'un quelconque de ses facteurs s'évanouira: on voit de plus qu'il ne changera point, quelque permutation qu'on fasse dans l'ordre des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. qui concourent toutes de la même manière à sa formation; il ne renfermera donc que des fonctions symétriques de ces quantités, et pourra par conséquent s'exprimer rationnellement par les coefficiens de l'équation (1), au moyen des formules indiquées n°. 159.

Si les équations (1) et (2) ne renferment que deux inconnues x et y, et sont du même degré par rapport à l'une que par rapport à l'autre, l'équation finale en y ne s'élevera point au-delà du degré mn. En effet, la somme des exposans de x et de y, ne pouvant surpasser m dans chaque terme de l'équation (1), y ne se trouvera qu'au premier degré dans P, au deuxième dans Q, au troisième dans R.... au $(m-1)^{\text{ème}}$ dans T, et enfin au $m^{\text{ème}}$ dans U. En examinant la composition des équations qui donnent S_1, S_2, S_3, etc. (n°. 158), on verra que S_1, ne pourra être que du premier degré en y, S_2, du $2^{\text{ème}}$, S_3, du $3^{\text{ème}}$, et en général S_m du $m^{\text{ème}}$. A l'aide de ces remarques on concevra facilement que l'exposant de y dans une fonction symétrique quelconque $\alpha^n \beta^p \gamma^q \delta^r$, etc. (n°. 159) ne surpassera point le nombre $n + p + q + r +$ etc. qui marque le degré de cette fonction: on pourra donc regarder les diverses puissances de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. comme des fonctions de y du degré marqué par l'exposant dont elles sont affectées. Mais dans l'équation (2) la somme des exposans de x

et de y n'étant jamais plus grande que n, P' sera du premier degré en y, Q' du second, R' du troisième, ... Y' du $(n-1)^{ème}$ et enfin Z' du $n^{ème}$; tous les termes des équations (B) pourront donc aussi être regardés comme des fonctions de y du degré n au plus. Maintenant si on fait attention que chaque terme du produit des équations (3) aura pour facteurs un nombre m des termes de ces équations, on sera convaincu que y ne pourra s'y trouver affecté d'un exposant supérieur à mn.

Ceux qui auront quelque peine à saisir les raisonnemens précédens, à cause de leur grande généralité, feront bien de développer le produit des équations (3), dans quelques cas particuliers.

Nous avons donc prouvé cette proposition, qu'on a souvent occasion de rappeller, que *l'exposant du degré de l'équation finale résultante de l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux inconnues, ne sauroit surpasser le produit des exposans qui marquent le degré de chacune des proposées.*

190. Quand on aura obtenu une des valeurs de y, données par l'équation finale, il faudra la substituer dans les équations (1) et (2), et on obtiendra ainsi deux nouvelles équations qui, ne contenant plus que la seule inconnue x, devront avoir au moins un facteur commun de la forme $(x-\alpha)$, α étant la valeur de x, qui satisfait à l'une et à l'autre. On cherchera donc leur plus grand commun diviseur, et en l'égalant à zéro, on aura l'équation qui doit donner x: cette dernière sera d'un degré marqué par le nombre de valeurs de x, qui correspondent à une même valeur de y.

191. Le moyen que nous venons d'indiquer pour trouver la valeur de x, quand celle de y est connue, peut s'appliquer immédiatement à l'élimination.

Puisque les équations (1) et (2) acquièrent, lorsque y est déterminé conformément à la nature de la question, un diviseur commun qu'elles n'avoient pas auparavant, il n'y a qu'à chercher la condition d'où dépend l'existence de ce diviseur. Pour cela il faudra opérer sur les équations proposées, comme on feroit pour trouver le di-

viseur commun, s'il existoit, et lorsqu'on sera parvenu à un reste indépendant de x, en l'égalant à zéro, on exprimera la condition demandée, et on aura en même tems l'équation finale.

192. Euler au lieu de chercher le diviseur commun par la méthode ordinaire, emploie un procédé plus commode, et que l'exemple suivant fera suffisamment connoître.

Soient les deux équations,

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$
$$x^4 + P'x + Q'x^2 + P'x + S' = 0;$$

en représentant par $x - \alpha$ le facteur qui doit être commun à l'une et à l'autre, on pourra considérer la première comme le produit de $x - \alpha$, par le facteur du deuxième degré, $x^2 + px + q$, et la seconde, comme le produit de $x - \alpha$, par le facteur du troisième degré, $x^3 + p'x^2 + q'x + r'$, p et q, p', q' et r' étant des coefficiens indéterminés: on aura donc

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = (x - \alpha)(x^2 + px + q),$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = (x - \alpha)(x^3 + p'x^2 + q'x + r').$$

Eliminant le binome $(x - \alpha)$ comme une inconnue au premier degré, on trouvera

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R)(x^3 + p'x^2 + q'x + r') =$$
$$(x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S')(x^2 + px + q),$$

résultat qui doit être identique indépendamment de x, et duquel on tire, après avoir effectué les multiplications indiquées, les équations suivantes:

$$P + p' = P' + p \qquad Rp' + Qq' + Pr' = S' + R'p + Q'q$$
$$Q + Pp' + q' = Q' + P'p + q \qquad Rq' + Qr' = S'p + R'q$$
$$R + Qp' + Pq' + r' = R' + Q'p + P'q \qquad Rr' = S'q.$$

Comme ces équations sont au nombre de six et qu'elles ne renferment que cinq coefficiens indéterminés, il y aura nécessairement une équation de condition relative à l'existence du facteur commun supposé, et on y parviendra en éliminant toutes les indéterminées p, q, p', q' et r', qui ne sont qu'au premier degré; le résultat qu'on obtiendra sera l'équation finale en y.

On trouvera le facteur $x - \alpha$, en divisant l'une des équations proposées par son autre facteur, qui sera connu quand on aura déter-

miné les coefficiens p et q, ou p', q' et r', et faisant $x-\alpha=0$, on en tirera sur le champ une expression de x en y, qui donnera les diverses valeurs dont x est susceptible, en y mettant toutes celles de y, qui résultent de l'équation finale.

Je ne m'arrêterai point à montrer que cette méthode d'élimination s'étend aux équations de tous les degrés. En considérant des équations du degré m et du degré n, on verra sans peine que les facteurs du degré $m-1$ et du degré $n-1$ qu'on introduira, contiendront un nombre suffisant de coefficiens indéterminés, pour satisfaire à la question.

Si on avoit entre les trois inconnues x, y et z, un pareil nombre d'équations désignées par (1), (2) et (3), et qu'on voulût déterminer ces inconnues, on pourroit combiner par exemple, l'équation (1) avec (2) et avec (3), pour éliminer x, et chasser ensuite y des deux résultats qu'on auroit obtenus; mais il faut observer que par cette élimination *successive*, les trois équations proposées ne concourent pas de la même manière à former l'équation finale : l'équation (1) est employée deux fois, tandis que (2) et (3) ne le sont qu'une, et il arrive de là que le résultat auquel on parvient, est compliqué d'un facteur étranger à la question. Bezout a donné, dans sa Théorie des équations, une méthode qui n'est point sujette à cet inconvénient et par laquelle il prouve que *le degré de l'équation finale, résultante de l'élimination d'un nombre quelconque d'équations complètes, renfermant un pareil nombre d'inconnues et de degré quelconque, est égal au produit des exposans de ces équations;* les notions préliminaires qu'elle exige ne nous permettent pas de l'exposer ici (*).

193. Le Calcul différentiel facilite l'application de la méthode dont on se sert pour trouver des valeurs de plus en plus approchées des racines d'une équation. Supposons qu'on ait entre x et des quantités données, une équation quelconque, et qu'on sache que cette inconnue diffère peu du nombre a; en faisant $x=a+h$ et en représentant par

(*) On la trouvera au nombre des applications de la théorie des différences finies que j'expose à la fin de cet Ouvrage.

u le résultat que donne l'équation proposée, lorsqu'on y change x en a, la série

$$u + \frac{du}{da}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{da^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3u}{da^3}\frac{h^3}{1.2.3} \text{ etc. } (\text{n}^\circ.\ 12.)$$

exprimera ce que devient u lorsqu'on met $a+h$ au lieu de a, ou ce qui revient au même, sera le développement de l'équation proposée, résultant de la substitution de $a+h$ au lieu de x, et par conséquent devra être égale à zéro, puisque $a+h$ satisfait à cette équation.

Mais par l'hypothèse h étant une quantité très-petite, on pourra négliger les termes où elle s'élève au-delà de la première puissance, et on aura seulement $u + \frac{du}{da}h = 0$. Lorsque h sera déterminé au moyen de cette équation, on fera $a+h=a'$ et $x=a'+h'$: c'est-à-dire, qu'on mettra dans u et dans $\frac{du}{da}$, a' à la place de a, et h' à la place de h; il en résultera l'équation $u' + \frac{du'}{da'}h' = 0$, qui donnera une nouvelle correction à faire à la valeur de x obtenue précédemment. En continuant d'opérer de la même manière, on trouvera des valeurs de x de plus en plus approchées.

Pour appliquer cette méthode, cherchons la valeur de x dans l'équation $x_{,} - 100 = 0$. On verra d'abord que x doit tomber entre 3 et 4, et prenant 3,5 pour la première valeur approchée, on fera $3,5 = a$. On pourra changer l'équation proposée en $x\,\mathrm{l}\,x - \mathrm{l}\,100 = 0$, et par ce moyen il viendra $u = a\,\mathrm{l}\,a - \mathrm{l}\,100 = -0,09576$; mais en observant que la différentielle du logarithme tabulaire de a dont le module est 0,43429 (*Int.* n°. 24), a pour expression $0,43429\,\frac{da}{a}$ (n°. 20), on trouvera

$$\frac{du}{da} = \mathrm{l}\,a + 0,43429 = 0,97836;$$

d'où $-0,09576 + 0,97836\,h = 0$, et par conséquent

$h = \frac{9576}{97836} = 0,09788$: on auroit donc $x = 3,598$. Une seconde

opération, dans laquelle on feroit $a=3,598$, donneroit une valeur encore plus exacte.

194. Si on avoit deux équations $u=0$ et $v=0$, entre x et y, et que a et b fussent des valeurs approchées de ces inconnues, on mettroit $a+h$ au lieu de x, $b+k$ au lieu de y, et on trouveroit, en négligeant les produits et les puissances de h et de k,

$$u+\frac{du}{da}\frac{h}{1}+\frac{du}{db}\frac{k}{1}=0,$$

$$v+\frac{dv}{da}\frac{h}{1}+\frac{dv}{db}\frac{k}{1}=0.$$

Ces équations serviroient à déterminer les corrections h et k; faisant ensuite $a+h=a'$, $b+k=b'$ et $x=a'+h'$, $y=b'+k'$, on trouveroit encore comme ci-dessus, les valeurs des nouvelles corrections h' et k', et on continueroit d'opérer ainsi jusqu'à ce qu'on fût arrivé à des résultats suffisamment exacts.

Prenons pour exemple les deux équations,

$$x^a+y^y-1000=0, \qquad x^y+y^a-100=0,$$

et supposons qu'après divers essais on soit parvenu à connoître que le plus grand des deux nombres doit être compris entre 4 et 5, et le plus petit entre 2 et 3 : prenant x pour le premier, y pour le second, et faisant $4,5=a$, $2,5=b$, on aura

$$u=a^a+b^b-1000 \qquad v=a^b+b^a-100$$

$$\frac{du}{da}=a.a\,la+a^a \qquad \frac{dv}{da}=b^a\,lb+b\,a^{b-1}$$

$$\frac{du}{db}=b^b\,lb+b^b \qquad \frac{dv}{db}=a^b\,la+a\,b^{a-1}$$

On calculera les quantités u, v, $\frac{du}{da}$, $\frac{dv}{da}$, $\frac{du}{db}$, $\frac{dv}{db}$, en observant que les logarithmes indiqués sont népériens, et on formera les deux équations du premier degré,

$$-320,244+2178,232\,h+18,937\,k=0,$$

$$+4,720+80,458\,h+150,535\,k=0,$$

d'où on tirera $h=0,056$, $k=-0,061$, et par conséquent $a+h=a'=4,56$, $b+k=b'=2,44$: une seconde opération donneroit $a'+h'=4,45519$, $b'+k'=2,4495$, etc.

CHAPITRE IV.

Théorie des Lignes courbes.

QUOIQUE le principal objet de ce Chapitre soit l'application du Calcul différentiel à la théorie des lignes courbes, j'ai cru devoir y comprendre, d'une manière succincte, la partie purement algébrique de cette théorie, afin d'offrir un ensemble complet, et de lier entr'elles des notions qui sont éparses et présentées sous des points de vue très-différens. Il ne sera question ici que des courbes qu'on peut tracer sur un plan; on trouvera dans le chapitre suivant ce qui regarde les courbes tracées sur des surfaces courbes.

Comment les diverses circonstances du cours d'une ligne sont exprimées par son équation.

FIG. 5.

195. On sait que toute équation renfermant deux indéterminées x et y, peut se construire en prenant sur une ligne AB, *fig.* 5, à partir d'un point donné A, des portions AP, AP' AP'' etc. pour représenter les valeurs de l'une quelconque des indéterminées, celles de x par exemple, et en menant par les points P, P', P'' etc. des droites égales aux valeurs correspondantes de y, et parallèles à une même droite AC, donnée de position, à l'égard de AB; la ligne $MM'M''$ qui passe par tous les points ainsi trouvés, est le lieu de l'équation proposée.

Réciproquement, dans toute courbe assujettie à une loi régulière par sa description, ou douée de quelque propriété commune à tous ses points, il existe toujours entre l'*abscisse* AP, et l'*ordonnée* PM, une relation constante qui exprime sa nature, et de laquelle on peut déduire toutes ses propriétés. Cette relation ne sauroit dans tous les cas s'obtenir sous une forme algébrique, et de là nait la distinction des courbes, en *courbes algébriques*, et en *courbes transcendantes* (*).

(*) On appelle aussi ces dernières, courbes *méchaniques*; mais cette dénomination me paroît fort impropre, car la description d'une courbe quelconque, à commencer par celle du cercle, ne s'exécute que par des moyens méchaniques, et telle courbe algébrique en exige de plus compliqués que certaines courbes transcendantes.

La situation respective des lignes AB et AC, qu'on nomme *axes des coordonnées*, ainsi que celle du point A, qui en est *l'origine*, sont arbitraires et font partie des conventions; on n'est pas même astreint à prendre les abscisses sur une même ligne droite, et les ordonnées parallèles entr'elles; mais ce système de coordonnées est en général le plus commode, et nous verrons dans la suite que tous les autres peuvent s'y ramener: pour plus de simplicité, nous prendrons toujours l'angle BAC droit, à moins que nous n'avertissions du contraire.

196. De toutes les équations à deux indéterminées, la plus simple est celle du premier degré, et elle appartient à la ligne droite, la plus simple de toutes les lignes. Cette équation peut être représentée par $Cy = Ax + B$; mais en la divisant par C, elle ne perdra rien de sa généralité, et on aura $y = \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}$; faisant $\frac{A}{C} = a$, $\frac{B}{C} = b$, il viendra $y = ax + b$: c'est ainsi que nous la représenterons désormais.

Supposons d'abord que b soit nul, on aura simplement $y = ax$ ou $\frac{y}{x} = a$, c'est-à-dire, que dans toute l'étendue de la droite, le rapport de PM à AP, *fig.* 6. sera constant, propriété qui n'est que l'expression de la similitude des triangles APM, $AP'M'$ etc. et ne peut appartenir qu'à la ligne droite AX, menée par le point A, origine des coordonnées. FIG. 6.

Le rapport $\frac{y}{x}$ ou le coefficient a, dépend de l'angle que fait la droite AX avec la ligne des abscisses AB; mais dans le triangle APM, que nous supposons rectangle, le rapport de PM à AP est égal à la tangente de l'angle PAM; a représente donc la tangente de cet angle.

En considérant l'équation $y = ax + b$, on voit que la nouvelle ordonnée y ne diffère de la première, $y = ax$, qu'en ce qu'elle la surpasse de la quantité b; d'où il suit que si on prend $AD = b$, et qu'on mène la ligne DY parallèle à AX, elle sera le lieu de l'équation $y = ax + b$, puisqu'on aura $PN = PM + MN = PM + AD$, $P'N' =$

$PN' = PM' + MN' = PM' + AD$, etc.; et il faut bien remarquer que le coefficient a restera le même pour toutes les droites parallèles à AX.

Il est aisé de voir que rien, dans l'équation $y = ax + b$, ne limite les valeurs qu'on peut donner à x, et que par conséquent celles de y deviendront aussi grandes qu'on voudra; mais en même tems rien ne bornant le cours de la ligne DY dans l'espace indéfini BAC, on trouvera toujours des abscisses et des ordonnées assez grandes, pour représenter les valeurs de y et de x qui satisferont à l'équation proposée. Faisons $x = 0$, nous aurons $y = b$; cette valeur appartiendra au point D, où la droite DY rencontre l'axe AC des ordonnées. Lorsque x sera négatif, on trouvera $y = -ax + b$, et ax étant moindre que b, y sera encore positif, mais moindre que b ou AD. Le cours de la ligne DY nous montre que cette circonstance ne peut avoir lieu que dans la partie DE correspondante à des abscisses Ap, situées, par rapport au point A, du côté opposé aux abscisses AP, qui représentent les valeurs positives de x; c'est donc de ce côté qu'il faut prendre les valeurs négatives.

Pour trouver la valeur de x qui répond au point où la ligne DY, rencontre l'axe AB des abscisses, il faut faire $y = 0$, ce qui donne $ax + b = 0$, et $x = -\frac{b}{a} = AE$. Lorsque x, restant toujours négatif, sera devenu plus grand que la quantité $\frac{b}{a}$, y lui-même deviendra négatif. Mais au-delà du point E, la ligne DY se trouve au-dessous de la ligne AB; l'ordonnée $p'm'$ tombera donc d'un côté opposé à celui où elle étoit située d'abord, et par conséquent les valeurs négatives de y doivent se porter d'un côté de la ligne AB, opposé à celui qu'on a adopté pour les valeurs positives.

J'observerai que rien ne détermine quel côté des abscisses ou des ordonnées on doit regarder comme positif; mais que ce choix étant une fois arrêté, les côtés opposés deviennent par cela seul négatifs. Je n'insiste sur ces remarques, que parce qu'il me semble que dans la plupart des livres élémentaires on n'a pas prouvé avec assez de soin, la nécessité de prendre les quantités négatives d'un côté op-

posé aux quantités positives, et c'est cependant de là que dépendent, en grande partie, les diverses formes qu'affectent les lignes courbes, comme on le verra plus bas.

L'équation $y = ax + b$ ne renfermant que deux constantes a et b, dont la valeur particularise la droite qu'on considère, en la distinguant de toute autre, il s'ensuit que deux conditions suffisent pour déterminer cette droite. Celles qui s'offrent les premières, sont de l'assujettir à passer par deux points donnés, à être parallèle ou perpendiculaire à une autre droite donnée et à passer en outre par un point donné. Nous aurons besoin dans la suite de connoître la forme que prend l'équation $y = ax + b$, pour satisfaire à ces conditions, c'est pourquoi nous allons les examiner chacune en particulier.

197. Si on cherche l'équation de la ligne droite qui passe par deux points dont les abscisses soient α et α', et les ordonnées β et β'; on mettra successivement α et α' à la place de x, β et β' à celle de y, et on aura pour déterminer a et b les deux équations

$$\left.\begin{aligned}\beta &= a\alpha + b\\ \beta' &= a\alpha' + b\end{aligned}\right\} \text{ qui donneront } \left\{\begin{aligned}a &= \frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\\ b &= \frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha}\end{aligned}\right.$$

et d'où il résultera $y = \frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x + \frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha}$ pour l'équation de la droite cherchée.

On peut donner à ce résultat une forme plus simple; car si on retranche de l'équation $y = ax + b$, l'une des deux équations ci-dessus, la première par exemple, b disparoîtra, et il viendra $y - \beta = a(x - \alpha)$. Cette dernière équation sera celle d'une droite assujettie à passer par le point dont les coordonnées sont α et β, et faisant d'ailleurs avec l'axe AB un angle quelconque; on achevera de la déterminer en y mettant au lieu de a la valeur trouvée précédemment, et on aura $y - \beta = \frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x - \alpha)$.

La distance des points proposés, ou la partie de la droite cherchée, interceptée entr'eux, aura pour expression $\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2 + (\beta'-\beta)^2}$: cela se voit évidemment, en supposant que N et N' représentent ces

points ; car leur distance NN' étant l'hypothenuse du triangle rectangle NRN', il s'ensuit que

$$\overline{NN'}^2 = \overline{NR}^2 + \overline{N'R}^2 = (AP' - AP)^2 + (P'N - PN)^2.$$

198. Pour obtenir l'équation de la ligne droite qui passeroit par le point dont les coordonnées sont α et β, et qui seroit parallèle à la ligne représentée par l'équation $y = a'x + b'$, il suffira de substituer a' au lieu de a dans l'équation $y - \beta = a(x - \alpha)$, qui satisfait déjà à la première condition, puisque d'après le n°. 196, le coefficient de x est le même dans les équations des lignes droites parallèles entr'elles ; on aura donc pour celle qu'on cherche $y - \beta = a'(x - \alpha)$.

199. Enfin si AX et AZ, *fig.* 7, sont deux droites perpendiculaires entr'elles, on verra par la similitude des triangles Apm et Apn, que le rapport de pm à Ap est inverse de celui de pn à Ap, et comme pn est négatif lorsque pm est positif *et vice versâ*, il s'ensuit que si on représente le premier rapport par a, le second sera $-\frac{1}{a}$. Les équations des droites AX et AZ seront donc $y = ax$ et $y = -\frac{1}{a}x$. FIG. 7.

Considérant ensuite les droites DY et EU, respectivement parallèles à AX et à AZ, et par conséquent perpendiculaires entr'elles, on trouvera pour leurs équations

$$y = ax + b \qquad \text{et } y = -\frac{1}{a}x + b'.$$

Si la seconde doit passer par un point N dont les coordonnées soient α et β, son équation deviendra $y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$.

200. Deux lignes qui se coupent ont dans leur point d'intersection les mêmes coordonnées, ensorte que pour trouver celles du point de rencontre des deux droites données par les équations $y = ax + b$, et $y = a'x + b'$, il n'y a qu'à supposer que les inconnues x et y ont la même valeur dans l'une et l'autre équation ; on aura ainsi $ax + b = a'x + b'$, ce qui donnera

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}, \text{ et } y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

On voit par ces valeurs que le point de concours est d'autant plus éloigné des axes AB et AC, que la quantité $a'-a$ est plus petite, et que x et y deviennent infinis, lorsque $a'=a$, c'est-à-dire, lorsque les droites proposées cessent de se rencontrer, ou sont parallèles.

201. Il peut être utile de connoître la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point donné, sur une ligne donnée, et on y parviendra en cherchant les différences entre les coordonnées de ce point et celles de l'intersection de la droite donnée, avec la ligne qui lui est perpendiculaire. Or l'équation de la première étant $y=ax+b$, celle de la seconde sera $y-\beta=-\frac{1}{a}(x-\alpha)$; mais on peut mettre $y=ax+b$ sous la forme $y-\beta=a(x-\alpha)+b-\beta+a\alpha$; et cette dernière équation, jointe à $y-\beta=-\frac{1}{a}(x-\alpha)$, donnera

$$x-\alpha=\frac{a(\beta-a\alpha-b)}{1+a^2}, \quad y-\beta=-\frac{\beta-a\alpha-b}{1+a^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$, on aura pour la longueur de la perpendiculaire cherchée $\frac{\beta-a\alpha-b}{\sqrt{1+a^2}}$.

202. On divise les lignes en différens ordres d'après le degré de leur équation. La ligne droite forme le premier ordre, parce qu'elle représente l'équation générale du premier degré à deux indéterminées. Les lignes du second ou du troisième ordre sont celles dont les équations montent au second ou au troisième degré, et ainsi des autres. Newton considérant que le premier ordre ne renfermoit que la ligne droite et que les courbes ne commençoient à se montrer que dans le second, divisa ces dernières en genres, et nomma courbes du premier genre, les lignes du second ordre, courbes du deuxième genre celles du troisième ordre, et ainsi de suite.

Les lignes d'un même ordre se subdivisent en espèces par la considération des principales circonstances de leur cours.

S'il étoit possible de résoudre les équations de tous les degrés, rien ne seroit plus facile que de suivre le cours de la courbe

représentée par une équation algébrique quelconque. En effet, supposons que cette équation étant résolue par rapport à l'une des indéterminées qu'elle renferme, y, par exemple, ait donné les différentes racines X', X'', $-X'''$, etc. qui seront nécessairement des fonctions de x et de constantes; la question se réduira à examiner en particulier le cours de chacune des lignes produites par les équations $y = X'$, $y = X''$, $y = -X'''$, etc. lorsqu'on donne à x toutes les valeurs tant positives que négatives, que peuvent admettre les fonctions X', X'', X''', etc. sans cesser d'être réelles. Ces lignes seront autant de branches de la courbe que représente l'équation proposée.

Pour les construire, il faut porter les ordonnées négatives du côté de AB, *fig.* 8, opposé à celui qu'on aura affecté aux ordonnées positives, et prendre les valeurs négatives de x sur la partie de AB située du côté de AC, opposé à celui où on a porté les valeurs positives. Voici la démonstration que d'Alembert a donnée de cette règle. FIG. 8.

Si on substitue dans l'équation proposée $z - a$, au lieu de y, ce qui revient à supposer $a + y = z$, on pourra toujours faire ensorte que les valeurs de la nouvelle inconnue z, relatives à une abscisse donnée, soient toutes positives; il suffira pour cela de prendre a plus grand que la plus grande valeur négative de y. Mais il est évident qu'en reculant l'axe AB, parallèlement à lui-même, d'une quantité $AA' = a$, les ordonnées prises par rapport à $A'B'$, représenteront les valeurs de z, puisqu'on aura

$$QM' = AA' + PM' = a + y = z.$$

Il n'y a maintenant aucun doute qu'on ne doive porter du même côté de l'axe $A'B'$ toutes les valeurs de z relatives à l'abscisse $A'Q$; car les distances $M'M''$, $M'M'''$, etc. des points qui répondent à cette abscisse sont égales aux différences qui se trouvent entre la première valeur de z et chacune des autres, et si on plaçoit une quelconque des nouvelles ordonnées de l'autre côté, qu'on fît, par exemple, $QN = QM'''$, la distance $M'N$ deviendroit égale à la somme des ordonnées QM' et QN, ce qui changeroit la figure de la courbe, qui cependant doit rester la même quelque part qu'on transporte les axes des coordonnées.

Cela posé, on voit évidemment que le point M''' résultant de la troisième valeur de z, représentée par $a - X'''$, doit être situé au-dessous de AB, puisqu'on le trouveroit en retranchant PM''' de QP; et que les points M' et M'' pour lesquels on a $z = a + X'$, $z = a + X''$, tomberont de l'autre côté de AB, à des distances $PM' = X'$ et $PM'' = X''$.

En prenant les x pour représenter les ordonnées, et en considérant les y comme les abscisses, on prouveroit de même que les valeurs négatives de x doivent tomber du côté de AC, opposé à celui où on a porté les valeurs positives.

203. L'étendue de chaque branche sera déterminée par celle que comprennent les diverses solutions dont est susceptible l'équation qui la représente. Si parmi les quantités X', X'', X''', etc. il s'en trouve qui deviennent infinies, ou dans lesquelles on puisse supposer x infini, il en naîtra des branches dont le cours sera infini, puisqu'elles pourront s'éloigner indéfiniment de l'un des axes ou de tous les deux à la fois.

Une branche ne s'arrête que parce que l'expression de son ordonnée devient imaginaire, mais le cours de la courbe proposée n'est pas interrompu pour cela; il arrive seulement alors que deux branches se réunissent et se continuent réciproquement. On s'en convaincra en observant que les valeurs imaginaires de y sont nécessairement en nombre pair, et que celles d'un même couple, ont été réelles et égales avant de devenir imaginaires. En effet, l'équation proposée pouvant toujours se décomposer en facteurs réels du premier et du second degré, si on représente par $y^2 - 2Py + Q = 0$ un de ces derniers, on verra que ses racines, $P \pm \sqrt{P^2 - Q}$, ne deviennent imaginaires qu'à cause que P^2 devient plus grand que Q, de moindre qu'il étoit d'abord, et qu'il y a par conséquent un point où les fonctions de x que désignent les lettres P et Q, sont telles qu'on a $P^2 = Q$; ce qui anéantit la quantité radicale, et donne pour y deux valeurs égales. L'exemple suivant fera disparoître les difficultés qui pourroient résulter de cette manière générale de considérer les courbes.

204. Soit l'équation $y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$; en la

résolvant par rapport à y, à la manière des équations du second degré, on en tirera les quatre suivantes

$$y = \sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots\ldots (1),$$

$$y = \sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots\ldots (2),$$

$$y = -\sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots\ldots (3),$$

$$y = -\sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots\ldots (4).$$

Il faut, d'après ce qui précède, examiner le cours de la ligne que chacune d'elles exprime en particulier, lorsqu'on suppose x positif et lorsqu'on le suppose négatif.

On voit d'abord que les branches que représentent l'équation (1) et l'équation (3) sont semblables, et que l'une est placée au-dessus de AB, *fig.* 9, tandis que l'autre se trouve au-dessous; il en est de même à l'égard des branches que produisent les équations (2) et (4): il suffira donc de considérer les équations (1) et (2). La valeur de y tirée de l'équation (1) sera réelle, tant que la quantité $x^4 - 100\,a^2\,x^2 + 2304\,a^4$ sera positive; et comme elle ne peut devenir négative qu'après avoir été nulle, les racines de l'équation $x^4 - 100\,a^2\,x^2 + 2304\,a^4 = 0$ seront les limites des valeurs qu'on peut donner à x. On trouvera que cette équation a pour facteurs

$$x - 6a, \quad x + 6a, \quad x - 8a, \quad x + 8a;$$

la quantité $x^4 - 100\,a^2\,x^2 + 2304\,a^4$ sera donc positive tant que x sera au-dessous de $6a$, parce qu'alors elle aura deux facteurs positifs et deux facteurs négatifs; mais elle deviendra négative, si on prend $x > 6a$ et $< 8a$, parce que le seul facteur $x - 8a$ sera négatif; enfin elle redeviendra positive pour toujours lorsqu'on y supposera $x > 8a$: on observera qu'en faisant $x = 0$, $x = 6a$ et $x = 8a$, l'équation (1) donne $y = \sqrt{96a^2}$, $y = \sqrt{48a^2}$, $y = \sqrt{48a^2}$. On tirera donc de l'équation (1). 1°. une branche qui s'étendra du point D pris dans l'axe AC, à une distance du point A égale à $\sqrt{96a^2}$, au point F, pour lequel l'abscisse $AE = 6a$. 2°. une autre branche HX qui,

FIG. 9.

partant du point H, dont l'abscisse $AG = 8a$ et l'ordonnée $GH = a\sqrt{48a^2}$, s'étendra à l'infini dans l'angle BAC, où les x et les y sont positifs.

Passons maintenant à l'équation (2); on voit premièrement qu'elle donnera des valeurs imaginaires pour y dans les mêmes circonstances que l'équation (1), c'est-à-dire, tant que x sera compris entre $6a$ et $8a$; et que de plus elle sera encore imaginaire, lorsque $\sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}$ surpassera $48a^2$. Pour avoir la limite, on fera $48a^2 = \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}$, ou $x^4 - 100a^2x^2 = 0$, ce qui donnera $x^2 = 0$ et $x^2 - 100a^2 = 0$, d'où $x = 10a$. Puisque dans cette équation y est nul lorsque x est nul, et qu'il devient imaginaire lorsque x surpasse $6a$, elle produira une branche qui se terminera à l'abscisse $AE = 6a$: et il faut bien remarquer que pour cette abscisse elle donnera encore $y = \sqrt{48a^2}$, et que par conséquent cette branche se réunira en F à celle qu'on a déduite ci-dessus de l'équation (1). Lorsque dans l'équation (2) on supposera $x = 8a$, la quantité $x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4$ s'évanouissant de nouveau, il en résultera $y = \sqrt{48a^2}$, ce qui fait voir que le point G, appartenant à la branche HX fournie par l'équation (1), est en même temps le premier point de la deuxième branche tirée de l'équation (2). Cette branche ne peut s'étendre au delà de l'abscisse $AI = 10a$, puisque passé ce terme y devient imaginaire; mais au point I il est nul, ainsi l'équation (2), lorsqu'on y fait x positif, donne, depuis $x = 8a$ jusqu'à $x = 10a$, la branche HI.

La supposition de x négatif produiroit les mêmes résultats que celle de x positif, puisque l'équation proposée ne contient que les puissances paires de x; on trouveroit donc dans l'angle bAC, où x est négatif et y positif, des branches absolument semblables à celles dont on vient de montrer l'existence dans l'angle CAB, où les x et les y sont positifs.

205. Pour mieux connoître la figure de la courbe proposée, on peut la construire par points, c'est-à-dire, assigner un certain nombre de points qui, étant joints entr'eux, approcheront d'autant

d'autant plus d'exprimer ses contours, qu'ils seront plus serrés.

Pour exécuter commodément cette opération, on prendra a pour l'unité, on fera successivement $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, etc. et on calculera ensuite les valeurs de y, au moins par approximation.

Lorsque $x=$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	etc.

l'équation (1) donne $y=$

9,798	9,744	9,582	9,302	8,887	8,289	6,928	*imagin.*	6,928	8,698	9,798	10,845	11,872	etc.

et l'équation (2) donne $y=$

0	1,021	2,045	3,076	4,125	5,224	6,928	*imagin.*	6,928	4,510	0	*imagin.*	*imagin.*	etc.

On construira ces résultats en prenant arbitrairement une ligne pour représenter l'unité et en la portant sur l'axe AB, de chaque côté du point A, autant de fois qu'il sera nécessaire pour exprimer les valeurs de x; par les points où elles se terminent, on menera parallèlement à l'axe AC des droites sur lesquelles on portera tant au-dessus qu'au-dessous de AB, les valeurs de y.

206. La courbe que nous venons de *discuter* n'a que quatre branches infinies; mais il s'en trouve du même ordre qu'elle, qui en ont jusqu'à huit: telle seroit celle qui résulteroit de l'équation

$$y^4-2x^2y^2+x^4-a^2x^2+b^4=0,$$

dont les racines sont comprises dans la formule

$$y=\pm\sqrt{x^2\pm\sqrt{a^2x^2-b^4}}.$$

En effet, cette formule donne pour y quatre valeurs réelles et infinies, lorsqu'on y fait x positif et infini, et elle en donne encore un pareil nombre dans la supposition de x négatif et infini.

On verra dans le cours de ce chapitre que le nombre des branches infinies d'une courbe ne peut surpasser le double de celui qui marque le degré de son équation.

207. Nous ferons encore sur l'équation $y^4-2x^2y^2+x^4-a^2x^2+b^4=0$, une remarque importante; c'est que dans le cas où b seroit nul, elle ne représenteroit plus comme auparavant une courbe unique, mais elle appartiendroit au système de deux courbes du second ordre; car elle se réduiroit à $y^4-2x^2y^2+x^4-a^2x^2=0$ et se décomposeroit en deux facteurs $y^2-xy+ax$ et $y^2-xy-ax$, qui, étant égalés à

zéro, seroient les équations de deux courbes distinctes; et parce que ces équations satisfont toutes deux à la proposée, il s'ensuit que l'ensemble des points de chacune des courbes qu'elles expriment y satisfait aussi.

En général, une équation ne peut représenter une courbe unique qu'autant que tous ses facteurs sont irrationnels par rapport à l'une des indéterminées x ou y; si cette condition n'a pas lieu, elle donne autant de courbes distinctes qu'elle a de facteurs rationnels en x et en y. Il y a même dans tous les degrés, des équations qui n'expriment qu'un assemblage de lignes droites, et ce sont celles qui peuvent se décomposer en facteurs de la forme $y-ax+b$, a et b étant des quantités rationnelles, ou irrationnelles, mais constantes.

Le plus simple de ces cas, et qu'on reconnoît sur le champ d'après la remarque que nous avons faite dans le n°. 66, sur les fonctions homogènes, a lieu quand l'équation proposée est homogène par rapport à x et y et qu'elle manque de terme constant. Si on avoit, par exemple, l'équation $y^3-pxy^2+qx^2y-rx^3=0$, la supposition de $y=ax$ la rendroit divisible par x^3 et la réduiroit à $a^3-pa^2+qa^2-r=0$. Désignant donc par a', a'', a''', les valeurs de a que donnera cette dernière, si elles sont réelles, la proposée appartiendra à trois droites, ayant pour équation $y=a'x$, $y=a''x$, $y=a'''x$, ou à une seule, si a n'a qu'une valeur réelle.

Dans le cas général, si on substitue $ax+b$, au lieu de y, on doit pouvoir déterminer a et b, au moyen des constantes de l'équation proposée, de manière à ce qu'elle soit satisfaite, quelle que soit la valeur de x; en égalant donc à zéro, après la substitution, le coefficient de chaque puissance de x, on aura les équations qui expriment les conditions relatives à cette circonstance et qui donnent les valeurs de a et de b.

208. Après la considération du nombre et de l'étendue des branches d'une courbe, se présente celle de ses *points singuliers*. On appelle ainsi les points de son cours qui offrent quelques particularités remarquables. La courbe qui nous a servi d'exemple n°. 204, en a de plusieurs espèces.

FIG. 9. Le point A (*fig.* 9.) dans lequel se coupent plusieurs branches

est un point *multiple*, et il est facile à reconnoître, parce qu'en faisant $x=0$, les équations (2) et (4) donnent en même tems $y=0$.

Les points F et H, ne sont pas des points multiples, quoiqu'il s'y réunisse deux branches (n°. 204); ce sont seulement deux *limites* de la courbe proposée dans le sens de l'axe AB, et ils perdroient cette propriété si on changeoit la direction des ordonnées.

La branche IH offre une espèce particulière de point singulier. Après avoir tourné sa concavité vers l'axe AC, elle lui présente ensuite sa convexité; ce changement s'appelle *inflexion*, et le point K où il arrive se nomme *point d'inflexion*.

209. En donnant diverses valeurs aux constantes d'une équation à deux indéterminées, on en tire des courbes qui, quoique de formes très-différentes, ont cependant un caractère commun; et la manière dont les circonstances que présente le cas le plus général, se trouvent modifiées dans chaque cas particulier, mérite d'être remarquée. L'équation

$$ay^4-x^3+(b-c)x^2+bcx=0$$

nous fournira un exemple bien simple de ces divers changemens.

Elle donne $y=\pm\sqrt{\frac{x^3-(b-c)x-bcx}{a}}=\pm\sqrt{\frac{x(x-b)(x+c)}{a}}$.

On voit d'abord que la courbe qu'elle représente doit avoir de chaque côté de l'axe AB des parties semblables, et que les valeurs de l'ordonnée y seront imaginaires du côté des x positifs, tant qu'on fera $x<b$; mais que du côté des x négatifs, elles seront réelles depuis $x=0$ jusqu'à $x=-c$, terme passé lequel elles redeviendront imaginaires pour toujours. L'expression de y est facile à construire; en le faisant pour un nombre suffisant d'abscisses, on trouvera que la courbe que donne l'équation proposée est celle que représente la figure 10, et qu'elle a du côté des x négatifs, un ovale dont le diamètre $AF=c$, et du côté des x positifs, deux branches infinies. FIG. 10.

Si on fait $c=0$, l'équation proposée se réduit à $ay^4-x^3+bx^2=0$;

d'où on tire $y=\pm\sqrt{\frac{x^2(x-b)}{a}}$; cette formule, toujours imaginaire quand x est négatif, donne $y=0$, lorsqu'on y fait $x=0$, et redevient ensuite imaginaire jusqu'à ce qu'on fasse $x>b$. Le point A FIG. 11. *fig.* 11, où x et y sont nuls en même tems, satisfaisant à l'équation $ay^2-x^3+bx^2=0$, doit, quoiqu'isolé, faire partie de la ligne résultante de cette équation. Cette circonstance, qui paroît singulière au premier coup d'œil, se conçoit facilement quand on fait attention que plus la constante c est petite, plus l'ovale AF de la figure 10 est petit; et on sent qu'il doit se réduire à un point, lorsque son diamètre c devient nul. On voit ainsi que la courbe donnée par l'équation $ay^2-x^3+bx^2=0$, conserve encore des traces de la forme qu'affecte celle que représente l'équation plus générale $ay^2-x^3+(b-c)x^2+bcx=0$, dont elle dérive. (*)

Si, en supposant $b=0$, on conservoit c, on auroit l'équation $ay^2-x^3-cx^2=0$: dans ce cas les branches EX, et EX', de la courbe de la figure 10, passant par le point A, se réuniroient aux FIG. 12. deux moitiés de l'ovale AF, et formeroient la figure 12.

Enfin, si on donne à c, dans l'équation $ay^2-x^3-cx^2=0$, des valeurs de plus en plus petites, la *feuille* AF se resserrera de plus en plus, et finira par disparoître lorsqu'on fera $c=0$; comme il est aisé de s'en assurer en examinant la courbe donnée par l'équa- FIG. 13. tion très-simple $ay^2-x^3=0$, et représentée dans la figure 13.

(*) Les points isolés, tels que le point A dans l'exemple ci-dessus, se nomment *points conjugués*. Il y a des équations qui n'expriment qu'un nombre déterminé de ces points. Si on avoit, par exemple, l'équation $(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2=0$; on ne pourroit y satisfaire qu'en faisant $x^2-a^2=0$, $y^2-b^2=0$, car un quarré ne pouvant jamais devenir négatif, la somme de tant de quarrés qu'on voudra, ne peut être nulle à moins que chacun d'eux ne le soit en particulier: cette équation donnera donc $x=\pm a$, $y=\pm b$. Il est facile de voir qu'en faisant dans ces résultats toutes les combinaisons de signe possibles, on n'en tirera jamais que quatre points situés respectivement dans les quatre angles des coordonnées. J'observerai que l'équation proposée peut être regardée comme un cas particulier de cette autre plus générale $(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2=c^4$, qui donneroit une courbe composée de quatre parties fermées.

Si on considère y comme l'abscisse, et x comme l'ordonnée, l'équation $ay^3 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0$, étant du troisième degré par rapport à cette dernière inconnue, en donnera trois valeurs pour chacune de celles de la première, et si on fait $y = 0$, il en résultera l'équation $-x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0$, dont les racines $x = 0$, $x = b$, $x = -c$, expriment les distances des points A, E et F à l'axe AC, *fig.* 10. FIG. 10.

Lorsqu'on fait $b = 0$, les deux racines $x = 0$ et $x = b$ devenant égales, indiquent que le point F et le point A se sont réunis, et quand on suppose ensuite $c = 0$, l'égalité des trois racines $x = 0$, $x = b$, $x = c$, montre que les points A, E et F, n'en font plus qu'un seul.

Dans les divers changemens que subit la courbe donnée par l'équation $ay^3 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0$, lorsqu'on fait successivement c et b nuls, le point A devient d'abord un point *conjugué* et ensuite un *nœud*; il est multiple dans l'un et l'autre cas, parce qu'il réunit deux points de la courbe proposée: enfin, si on décrit par points la courbe représentée par l'équation $ay^3 - x^3 = 0$, ce qui est facile, puisqu'on a $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a}}$, on verra que les deux branches AX et AX', *fig.* 13, qui ne s'étendent point du côté des x négatifs, ont leurs convexités opposées l'une à l'autre, et le point A où elles se réunissent est alors un *point de rebroussement de la première espèce.* FIG. 13.

On voit en A, *fig.* 14, un *point de rebroussement de la seconde espèce*, qui diffère de la première, en ce que l'une des branches, AX par exemple, tourne sa convexité vers la concavité de l'autre. FIG. 14.

La courbe représentée dans la figure, est déduite de l'équation $(ay - x^2)^2 = \frac{x^5}{a}$, d'où on tire

$$y = \frac{x^2}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{1}{a}x^5} = \frac{x^2}{a} \pm \frac{x}{a}\sqrt{\tfrac{1}{a}x^3}.$$

210. La position des axes des coordonnées étant arbitraire, il s'ensuit qu'on peut la changer sans altérer la nature de la courbe qu'on considère, et que par conséquent la même courbe

De la transformation des coordonnées et de ses principaux usages.

doit avoir différentes équations, parmi lesquelles il s'en trouvera nécessairement de plus simples que les autres. La courbe du n°. 204, par exemple, auroit une équation plus compliquée si elle étoit rapportée à d'autres axes que ceux de la figure 9, qui la partagent en quatre parties semblables entr'elles; en transportant seulement l'axe des abscisses AB parallèlement à lui-même, dans la situation $A'B'$, les valeurs des ordonnées relatives à la même abscisse, se trouveroient augmentées de la quantité AA', et les positives ne seroient plus égales aux négatives.

Le plus grand changement qu'on puisse apporter dans le système des coordonnées sans cesser de les prendre droites et respectivement parallèles à deux lignes fixes, consiste à leur donner une nouvelle origine et d'autres directions. Nous embrasserons tout de suite ce cas général, et nous supposerons qu'on se propose d'exprimer les valeurs des coordonnées $AP=x$, $PM=y$. fig. 15, FIG. 15. relatives aux axes AB et AC, par deux autres coordonnées $A''P''=u$, $P''M=t$, rapportées aux axes $A''B''$, $A''C''$, dont on connoît la position à l'égard des premiers.

Ayant mené par la nouvelle origine A'', les droites $A''B'$ et $A''B''$ respectivement parallèles à AB et à AC, les distances AA' et AA'' seront données par l'hypothèse, et en les représentant par a et par b, on aura

$$AP=A'P+AA'=A''P'+a,\quad PM=P'M+AA''=P'M+b.$$

Tirant ensuite par le pied de la nouvelle ordonnée $P''M$, les lignes $P''Q$ et $P''R$, l'une parallèle à AB et l'autre à AC, on observera que puisque les axes $A''B''$ et $A''C''$ sont donnés de position à l'égard de AB et AC, on doit connoître tous les angles des triangles $A''P''R$, $MP''Q$, ou ce qui revient au même, les rapports de leurs côtés respectifs: faisant donc

$$\frac{AR}{A''P''}=m,\quad \frac{P''R}{A''P''}=n,\quad \frac{P''Q}{P''M}=p,\quad \frac{QM}{P''M}=q,$$ on aura

$$A''R=m.A''P''=mu,\qquad P''R=n.A''P''=nu,$$
$$P''Q=p.P''M=pt,\qquad QM=q.P''M=qt,$$

d'où on tirera

$$A'P'=A''R+P''Q=mu+pt,\quad P'M=P''R+QM=nu+qt,$$

et enfin

$$x = AP = A'''P' + a = mu + pt + a$$
$$y = PM = P'M + b = nu + qt + b.$$

Telles sont les valeurs les plus générales que puissent prendre les coordonnées x et y, faisant entr'elles un angle quelconque, lorsqu'on les exprime par d'autres coordonnées du même genre, mais situées comme on voudra. Voyons maintenant comment on en déduit celles qui conviennent aux différens cas particuliers qui peuvent se présenter.

1°. Si on supposoit les nouvelles coordonnées parallèles aux premières, et qu'on ne fît que changer la position de l'origine, les lignes $A'''C''$ et $A'''C'$ se confondroient, ainsi que $A'''B''$ et $A'''B'$; on auroit par conséquent $m=1$, $n=0$, $p=0$ et $q=1$, et il en résulteroit $x=u+a$, $y=t+b$, ce qu'il est facile de voir *à priori*, puisqu'alors $A'''P''$ et $A'''P'$ se confondroient ainsi que $P'M$ et $P'M$.

En égalant à zéro ou a ou b, on conservera dans sa place ou l'axe AC ou l'axe AB.

2°. Si on ne vouloit changer que la direction des axes AB et AC, et qu'on laissât toujours l'origine au point A, les lignes $A'''B'$ et $A'''C'$ tombant dans ce cas sur AB et sur AC, on auroit en même tems $a=0$ et $b=0$, ce qui donneroit

$$x = mu + pt, \qquad y = nu + qt.$$

On voit qu'en supposant $m=1$ et $n=0$, d'où il résulteroit $x=u+pt$, $y=qt$, on feroit coïncider la ligne $A'''B''$ avec $A'''B'$ et que par conséquent on n'auroit changé que la direction de l'ordonnée; on prouveroit de même que $x=mu$ et $y=nu+t$ sont les valeurs de x et de y relatives au changement de la direction des abscisses.

211. Il faut observer qu'il y a entre les quantités m, n, p, et q, qui dépendent de la direction des nouvelles coordonnées, une relation nécessaire, ensorte qu'on ne peut les prendre toutes les quatre arbitrairement; car si, connoissant l'angle des axes primitifs $A'''B'$ et $A'''C'$, on se donnoit encore les angles $B''A'''B'$ et $C''A'''B''$, la position des nouveaux axes $A'''B''$ et $A'''C'$ seroit

entièrement déterminée par ces trois choses. Lorsqu'on passera d'un système connu de coordonnées à un autre système également connu, les quantités m, n, p et q, calculées suivant leurs définitions, auront entr'elles la relation dont on vient de parler; mais il suit de ce qui précède que la position de l'origine étant donnée, on ne peut déterminer la direction des nouveaux axes, de manière à satisfaire à plus de deux conditions différentes, et que dans les expressions $x=mu+pt+a$, $y=nu+qt+b$, les quantités x et y, u et t, ne sauroient être les coordonnées d'un même point relativement à deux systêmes de coordonnées droites et parallèles, tant que m, n, p et q seront quelconques. Voici un moyen très-simple, de trouver la relation qui doit exister entre ces quantités.

Si on mène par le point M les droites MG et MH, respectivement perpendiculaires à $A'''B'$ et $A'''B''$, et qu'on suppose connus les angles $MP'B'=C'A'''B'$ et $MP''B''=C'A'''B''$, on aura le rapport de $P'M$ à $P'G$, et celui de $P''M$ à $P''H$; nommant g le premier et h le second, il en résultera $P'G=gP'M$ et $P''H=hP''M$; tirant ensuite $A'''M$ et représentant $A'''P'$ et $P'M$ par x' et y', les triangles obliquangles $A'''P'M$ et $A'''P''M$ donneront

$$\overline{A'''M}^2=\overline{A'''P'}^2+\overline{P'M}^2+2A'''P'\times P'G=x'^2+y'^2+2gx'y'$$

$$\overline{A'''M}^2=\overline{A'''P''}^2+\overline{P''M}^2+2A'''P''\times P''H=u^2+t^2+2hut.$$

En égalant ces deux expressions de $A'''M$, il viendra

$$x'^2+y'^2+2gx'y'=u^2+t^2+2htu;$$

mettant pour x' et y' leurs valeurs $mu+pt$ et $nu+qt$, on aura

$$(m^2+n^2+2mng)u^2+(p^2+q^2+2pqg)t^2+2[mp+nq+g(np+mq)]ut$$
$$=u^2+t^2+2hut.$$

Cette équation devant avoir lieu quelle que soit la position du point M, il faut qu'elle se vérifie toujours indépendamment de u et de t, condition qui donne les trois équations

$$m^2+n^2+2mng=1, \qquad p^2+q^2+2pqg=1,$$
$$mp+nq+(np+mq)g=h.$$

En chassant g des deux premières, le résultat

$$(m^2+n^2)pq-(p^2+q^2)mn=pq-mn;$$

exprimera

exprimera les conditions à laquelle doivent satisfaire les quantités m, n, p et q.

On suppose le plus souvent que les nouvelles coordonnées u et t se rencontrent à angles droits, ainsi que les premières; dans ce cas les équations ci-dessus se simplifient beaucoup. Les angles $MP'B'$ et $MP''B''$ devenant droits, $P'G$ ou g, et $P''H$ ou h, s'évanouissent, ensorte qu'on a seulement

$$m^2 + n^2 = 1, \quad p^2 + q^2 = 1, \quad mp + nq = 0,$$

d'où on tire $m^2 = 1 - n^2$, $p^2 = 1 - q^2$, $m^2 p^2 = 1 - n^2 - q^2 + n^2 q^2$, et à cause de $mp = -nq$, il vient $n^2 + q^2 = 1$; comparant ce résultat avec l'équation $m^2 + n^2 = 1$, on trouve $q = m$, ce qui donne $p = -n$: on aura donc enfin $x' = mu - nt$, $y' = nu + mt$, en observant que les quantités m et n dépendent l'une de l'autre, en vertu de l'équation $m^2 + n^2 = 1$. La figure 16, construite pour ce cas particulier, fait voir que m est le cosinus de l'angle $B'A'''B''$, que n en est le sinus, et qu'on a $A'''P' = A'''R - P'R = A'''R - P''Q = mu - nt$ et $P'M = P''R + QM = nu + mt$, comme nous venons de le trouver. FIG. 16.

212. Le premier usage que nous ferons de la transformation des coordonnées sera de réduire à ses formes les plus simples, l'équation générale des lignes du second ordre,

$$A + 2Bx + 2Cy + Dx^2 + 2Exy + Fy^2 = 0 \ldots (1)$$

Nous changerons d'abord la position de l'origine des coordonnées, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, et pour cela nous mettrons dans l'équation ci-dessus $x' + a$ au lieu de x et $y' + b$ au lieu de y; elle deviendra alors

$$\left.\begin{aligned} A + 2Ba + 2Cb + Da^2 + 2Eab + Fb^2 + (B + Da + Eb)2x' + Dx'^2 \\ + (C + Ea + Fb)2y' + 2Ex'y' \\ + Fy'^2 \end{aligned}\right\} = 0 \ldots (2).$$

Les quantités a et b étant arbitraires, nous pouvons les déterminer de manière à faire disparoître deux termes de ce résultat. Supposons qu'on veuille chasser ceux qui contiennent x et y séparément à la première puissance; en égalant leur coefficient à zéro, on aura

$$B + Da + Eb = 0 \ldots . (3), \quad C + Ea + Fb = 0 \ldots . (4),$$

et il ne restera plus dans l'équation (2) que les termes du second

degré, x'^2, $x'y'$, y'^2 et le terme tout connu : ce dernier se simplifie beaucoup à l'aide des équations (3) et (4). En effet, multipliant la première par a, la seconde par b, et retranchant leur somme de l'équation (2), après y avoir supprimé les termes qui doivent s'évanouir, il viendra

$$A + Ba + Cb + Dx'^2 + 2Ex'y' + Fy'^2 = 0 \ldots\ldots (5).$$

213. En donnant aux axes d'autres directions, toujours perpendiculaires entr'elles, c'est-à-dire, en faisant $x' = mu - nt$, $y' = nu + mt$ (n°. *précéd.*) nous pourrons faire disparoître encore un terme, parce que n'ayant entre les quantités m et n que l'équation $m^2 + n^2 = 1$, il en restera une à déterminer.

La substitution étant effectuée, on aura

$$\left.\begin{array}{l} A + Ba + Cb + [Dm^2 + 2Emn + Fn^2]u^2 \\ \qquad + [(F - D)mn + E(m^2 - n^2)]2ut \\ \qquad + [Dn^2 - 2Emn + Fm^2]t^2 \end{array}\right\} = 0 \ldots\ldots (6).$$

Je pose l'équation $(F - D)mn + E(m^2 - n^2) = 0 \ldots\ldots (7)$ au moyen de laquelle le terme affecté de ut s'évanouit, et faisant pour abréger

$$A + Ba + Cb = \alpha, \quad Dm^2 + 2Emn + Fn^2 = \beta, \quad Dn^2 - 2Emn + Fm^2 = \gamma,$$

j'ai $$\alpha + \beta n^2 + \gamma t^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Cette équation ne contenant plus que les quarrés des indéterminées u et t, donnera pour l'une ou pour l'autre deux valeurs égales et de signe contraire. Pour que ces valeurs puissent être réelles, il faut qu'il y ait au moins une des trois quantités α, β et γ, qui soit négative ; on aura, suivant les signes dont elles seront affectées,

$$t = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}u^2}, \quad \text{ou } t = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}u^2 - \frac{\alpha}{\gamma}}, \quad \text{ou } t = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}u^2}.$$

Je ne m'arrêterai point à discuter chacun de ces cas en particulier ; on voit bien que le premier se rapporte à l'ellipse ou au cercle, et que les deux derniers appartiennent à l'hyperbole : dans l'un la coordonnée u est prise sur le premier axe, et dans l'autre elle est prise sur le second.

Pour savoir dans quels cas les quantités β et γ peuvent être positives ou négatives, il faut déterminer m et n et substituer leurs va-

leurs dans ces quantités. L'équation (7) donne

$mn=\frac{E}{D-F}(m^2-n^2)$; si on fait $\frac{E}{D-F}=\delta$ et qu'on chasse m^2 au moyen de l'équation $m^2+n^2=1$, il viendra $m^4-m^2=-\frac{\delta^2}{1+4\delta^2}$; d'où on tirera $m^2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\delta^2}{1+4\delta^2}}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{1+4\delta^2}}$; puis

$$n^2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2\sqrt{1+4\delta^2}}$$

$$m^2n^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(1+4\delta^2)}=\frac{\delta^2}{1+4\delta^2}$$

remettant au lieu de δ la quantité qu'il représente, et n'ayant égard qu'au signe supérieur des radicaux, il en résultera

$$m^2=\frac{1}{2}+\frac{D-F}{2\sqrt{(D-F)^2+4E^2}}\qquad n^2=\frac{1}{2}-\frac{D-F}{2\sqrt{(D-F)^2+4E^2}}$$

$$mn=\frac{E}{\sqrt{(D-F)^2+4E^2}}.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de β et de γ, et en les réduisant ensuite au même dénominateur, on verra avec un peu d'attention que leurs numérateurs sont divisibles par $\sqrt{(D-F)^2+4E^2}$, et que

$\beta=\frac{1}{2}(D+F)+\frac{1}{2}\sqrt{(D-F)^2+4E^2}$, $\gamma=\frac{1}{2}(D+F)-\frac{1}{2}\sqrt{(D-F)^2+4E^2}$

tant que D et F seront positifs, β le sera aussi, et γ ne deviendra négatif que lorsqu'on aura

$$(D+F)^2<(D-F)^2+4E^2 \text{ ou } DF<E^2.$$

214. Si on avoit $DF=E^2$ la quantité γ s'anéantiroit, et par-là l'équation (8) sembleroit ne plus renfermer que la seule inconnue u; mais les équations (3) et (4) (n°. précédent) donnent

$$a=\frac{BF-EC}{E^2-DF},\quad b=\frac{CD-EB}{E^2-DF},$$

valeurs qui deviennent infinies, quand $DF=E^2$: on ne peut

donc dans ce cas faire disparoître à la fois les termes $2Bx$ et $2Cy$ dans l'équation (1).

On trouvera la forme que doit prendre l'équation (1) dans cette circonstance, en y faisant d'abord $x=mu-nt$, $y=nu+mt$, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} A+(Bm+Cn)2u+[Dm^2+2Emn+Fn^2]u^2 \\ \quad -(Bn-Cm)2t+[(F-D)mn+E(m^2-n^2)]2ut \\ \qquad\qquad +[Dn^2-2Emn+Fm^2]t^2 \end{array}\right\}=0.$$

le terme affecté de ut, disparoîtra en vertu des valeurs de m et de n, trouvées précédemment, et les coefficiens de u^2 et de t^2 seront encore exprimés par β et γ, ensorte qu'on aura

$$A+(Bm+Cu)2u-(Bn-Cm)2t+\beta u^2+\gamma t^2=0.$$

On changera ensuite l'origine en substituant $u'+a'$ à u et $t'+b'$ à p, pour faire disparoître au moyen des indéterminées a' et b' le terme affecté de u, ainsi que le terme constant, et on obtiendra un résultat, qui sera de la forme $-2t+\beta u^2+\gamma t^2=0$....(9).

Cette dernière équation est plus générale que l'équation (8), car elle représente toutes les courbes du second ordre, et lorsque γ deviendra nul, elle se réduira à $-2t+\beta u^2=0$, équation à la parabole.

215. Si on vouloit changer d'une manière quelconque l'origine et la direction des axes des coordonnées dans l'équation (1), il faudroit y substituer au lieu de x et de y leurs valeurs générales $mu+pt+a$, $nu+qt+b$ (n°. 210) et elle prendroit la forme

$$A'+2B'u+2C't+D'u^2+2E'ut+F't^2=0$$

dans laquelle les lettres A', B', C' etc. représentent des fonctions des coefficiens primitifs et des quantités m, n, p, q, a et b.

Les coordonnées primitives étant perpendiculaires entr'elles, on auroit $g=0$, ce qui donneroit $m^2+n^2=1$, $p^2+q^2=1$, $mp+nq=h$, et on verroit que l'équation de condition

$$(m^2+n^2)pq-(p^2+q^2)mn=pq-mn \text{ (n°. 211)}$$

devient identique en vertu des deux premières : de plus l'angle des nouvelles coordonnées restant quelconque, h seroit indéterminée, et il n'y auroit entre les quatre quantités m, n, p et q, que les équations $m^2+n^2=1$, $p^2+q^2=1$. On pourroit donc disposer comme

on voudra de deux quelconques d'entr'elles, ainsi que des quantités a et b, qui, marquant la position de l'origine, sont absolument indéterminées. On ne doit pas croire cependant qu'on puisse toujours, au moyen de ces quatre arbitraires, faire disparoître dans tous les cas un pareil nombre des termes de la transformée ci-dessus; il faut pour cela que les équations qui résultent des coefficiens égalés à zéro s'accordent entr'elles, et donnent des valeurs réelles pour les quantités qu'elles déterminent. La plus grande réduction qu'on puisse opérer, consiste à faire disparoître à la fois les termes $2B'u$, $2Ct$, $D'u^2$ et $F't^2$, en posant les équations $B'=0$, $C'=0$, $D'=0$, $F'=0$, et alors l'équation proposée devient $A'+2E'ut=0$, qui, comme on sait, appartient à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

En faisant le calcul, on trouvera que les développemens des équations $D'=0$, et $F'=0$, sont

$$Dm^2+2Emn+Fn^2=0, \quad Dp^2+2Epq+Fq^2=0,$$

et qu'elles ne peuvent donner pour $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$ des valeurs réelles, que quand E^2 surpasse FD.

Quoique les rapports $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$ soient donnés par la même équation, ils doivent néanmoins être toujours inégaux, sans quoi en vertu des équations $m^2+n^2=1$ et $p^2+q^2=1$, on auroit $p=\pm m$ et $q=\pm n$, d'où $x=m(u\pm t)+a$ et $y=n(u\pm t)+b$. En éliminant $u\pm t$, il viendroit $nx-my=na-mb$, résultat qui ne sauroit s'accorder en général avec l'équation (1); il faut donc que l'équation $D\frac{m^2}{n^2}+2E\frac{m}{n}+F=0$, ait ses deux racines inégales, et en prenant l'une d'elles pour $\frac{m}{n}$ l'autre exprimera $\frac{p}{q}$.

216. Les détails précédens suffisent pour montrer comment la transformation des coordonnées fait distinguer parmi les termes d'une équation proposée ceux qui ne dépendent que de la position particulière des axes; je me bornerai donc à indiquer la marche qu'il faudroit suivre pour traiter l'équation générale des lignes du troisième ordre,

$$A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2+Gx^3+Hx^2y+Ixy^2+Ky^3=0 \quad (1).$$

En y substituant $mu+pt+a$ et $nu+qt+b$, au lieu de x et de y, elle prendra la forme

$$A'+B'u+C't+D'u^2+E'ut+F't^2+G'u^3+H'u^2t+I'ut^2+K't^3=0 \quad (2).$$

J'observerai qu'on peut toujours supposer $K'=0$, et chasser ainsi le terme t^3. En effet, si on effectue le calcul, on trouvera que $K'=Gp^3+Hp^2q+Ipq^2+Kq^3$, et que par conséquent le rapport de $\frac{p}{q}$, déterminé par l'équation $G\frac{p^3}{q^3}+H\frac{p^2}{q^2}+I\frac{p}{b}+K=0$, aura au moins une valeur réelle.

En ne faisant que passer des coordonnées primitives à d'autres coordonnées encore perpendiculaires, et en laissant l'origine au point où elle étoit d'abord, on pourroit toujours se débarrasser du terme $K't^3$, car en supposant $a=0$, $b=0$, $p=-n$ et $q=m$ (n°. 211), dans la transformée ci-dessus, on auroit l'équation $-G\frac{m^3}{n^3}+H\frac{m^2}{n^2}-I\frac{m}{n}+K=0$, pour déterminer $\frac{m}{n}$.

Il suit de là, que la présence du terme Ky^5 ne rend pas l'équation (1) plus générale; il en seroit de même du terme affecté de y^5, dans l'équation du cinquième ordre et des termes analogues dans tous les ordres impairs. Cette circonstance n'a pas lieu pour les ordres pairs, car on a vu déjà (n°. *précéd.*), que l'un des quarrés u^2 ou t^2 ne pouvoit disparoître de l'équation du second degré, que dans un cas particulier.

La transformation générale introduisant quatre quantités arbitraires, nous pouvons encore en déterminer trois, de manière à faire évanouir un pareil nombre de termes dans l'équation (2), outre le terme $K't^3$, déjà chassé par l'équation $K'=0$. Il se présente plusieurs combinaisons dans le choix de ces termes; Newton qui le premier fit l'énumération des lignes du troisième ordre, les rapporta toutes aux quatre équations suivantes,

$$A'+B'u+D'u^2+G'u^3+F't+Iut^2=0$$
$$A'+B'u+D'u^2+G'u^3+E'ut=0$$
$$A'+B'u+D'u^2+G'u^3+F't^2=0$$
$$A'+B'u+D'u^2+G'u^3+C't=0.$$

La première résulte de la supposition de $K'=0$, $H'=0$, $F'=0$,

$E'=0$, dans l'équation (2). Les trois autres répondent aux différens cas dans lesquels les relations particulières qui se trouvent entre les coefficiens de l'équation (1), concourent avec les équations que peut fournir la transformation des coordonnées, à rendre nuls un plus grand nombre de coefficiens de l'équation (2).

217. On a cherché à retrouver dans les courbes des ordres supérieurs, des propriétés analogues à celles du second, c'est ce qui a donné lieu à la considération des *centres* et des *diamètres*.

Le *centre* d'une courbe est un point de son plan, tel que toutes les droites qui y passent, ont de part et d'autre de ce point, des positions égales terminées à la courbe proposée. L'origine des coordonnées dans l'exemple du n°. 204, est le centre de la courbe représentée par la figure 9 ; car si on tire par ce point une droite quelconque Mm, les deux parties AM et Am seront égales entr'elles ; et cela, parce qu'en prenant $Ap=AP$, on trouvera au-dessous de AB, des ordonnées pm et pm' respectivement égales à PM et PM'.

La courbe citée pour exemple ne doit cette propriété qu'à ce que son équation demeure la même lorsqu'on y change x et y en $-x$ et $-y$, ce qui fait que chaque valeur négative de x, donne une ordonnée de même grandeur que celle qui répond à la valeur positive correspondante, mais de signe contraire ; et on voit que cela arrivera dans toute équation de degré pair, qui ne contiendra que des termes où la somme des exposans de x et de y fera un nombre pair, ou bien dans toute équation de degré impair, pour laquelle cette somme sera toujours un nombre impair, telles seroient par exemple :

$$x^4-x^2y^2+A^2y^2-B^4=0, \quad \text{et} \quad x^3-xy^2+A^2y-y^3=0.$$

Il suit de là que pour savoir si une courbe a un centre, il faut chercher si en transportant l'origine des coordonnées dans un point quelconque, on ne pourroit pas faire évanouir tous les termes de degré impair, dans le cas où l'équation proposée seroit d'un degré pair, ou tous les termes de degré pair, si elle étoit d'un degré impair.

Dans le second ordre les termes de degré impair, $2Bx$ et $2Cy$,

disparoissent toujours, excepté lorsque $E^2=DF$ (n°. 214); aussi la parabole, qui répond à ce cas particulier, est-elle la seule des courbes du second ordre qui n'ait pas de centre.

Pour obtenir les courbes du troisième ordre, qui ont un centre, il faudra dans l'équation générale du n°. précéd. substituer $x'+a$, au lieu de x, et $y'+b$, au lieu de y; égaler ensuite à zéro les coefficiens de chacun des quatre termes de degré pair, A, $B'x^2$, $Ex'y'$, Fy'^2, et comme on n'a introduit que deux arbitraires, il y restera deux équations de condition. Je ne m'arrêterai point à ces calculs, qui n'ont d'autre difficulté que leur longueur.

218. Les diamètres des courbes du second ordre sont, comme on sait, des droites telles que pour chacun de leurs points, l'ordonnée positive est égale à l'ordonnée négative; un diamètre perpendiculaire à ses ordonnées s'appelle *axe*. Dans les courbes des ordres supérieurs on a étendu l'acception du mot *diamètre* en l'appliquant à tout axe des abscisses, tel que, dans chacun de ses points, la somme des ordonnées positives soit égale à celle des ordonnées négatives.

L'équation générale des lignes de l'ordre r, étant ordonnée par rapport à y, peut être représentée par

$$\left.\begin{array}{r} y^r+(A+Bx)y^{r-1}+(C+Dx+Fx^2)y^{r-2}\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots+P+Qx+Rx^2\ldots\ldots+Ux^n \end{array}\right\}=0$$

et il est évident qu'en considérant une valeur particulière de x, $A+Bx$ exprimera la somme des valeurs correspondantes de y prises avec un signe contraire, $C+Dx+Ex^2$ celle de leurs produits deux à deux..... et enfin U le produit de toutes ces valeurs.

On pourroit tirer beaucoup de conséquences importantes de cette manière de présenter l'équation d'une ligne courbe; mais pour me renfermer dans mon sujet, je me bornerai à faire observer que lorsque le terme affecté de y^{r-1} manquera, la courbe proposée sera rapportée à un de ses diamètres, puisqu'alors la somme des ordonnées positives et négatives sera nulle pour une abscisse quelconque. Si le terme de y^{r-1} se trouve dans l'équation, on pourra toujours le faire disparoître en changeant la position de l'axe des

abscisses

abscisses et celle de l'origine des ordonnées. Les formules générales du n°. 210 donnent dans ce cas $x = mu$ et $y = nu + t + b$. Cette substitution étant faite, il viendra pour les deux premiers termes de la transformée, ordonnée par rapport à t,

$$t^r + [r(nu+b) + A + Bmu]\, t^{r-1};$$

il faudra égaler séparément à zéro la partie constante du coefficient de t^{r-1} et celle qui est affectée de u, ce qui donnera

$$rn + Bm = 0, \quad rb + A = 0, \text{ d'où } \frac{n}{m} = -\frac{B}{r}, \qquad b = -\frac{A}{r}.$$

On voit par ces résultats qu'il sera toujours possible de chasser le terme affecté de t^{r-1}; mais en changeant la direction des ordonnées, à laquelle nous n'avons pas touché, on changeroit aussi la position du diamètre: il s'ensuit donc qu'une même courbe a une infinité de diamètres.

219. Si en changeant à la fois, d'une manière quelconque, la position de l'axe des abscisses et l'angle des coordonnées, c'est-à-dire, en substituant $mu + pt$ à x et $nu + qt + b$ à y, on parvenoit à chasser tous les termes dans lesquels y se trouve élevé à une puissance impaire, le nouvel axe des abscisses seroit un diamètre du même genre que ceux du second ordre, un diamètre *absolu*, à tous les points duquel répondroient autant d'ordonnées positives que de négatives, et chacune des premières auroit son égale parmi les secondes. En effet, on pourroit alors regarder t^2 comme l'inconnue dans l'équation proposée, et faisant $t^2 = \zeta$, il en résulteroit $t = \pm\sqrt{\zeta}$, ou autant de couples de valeurs de t, égales et de signe contraire, que l'équation en ζ auroit de racines. Il n'en est pas des diamètres absolus comme des diamètres simples, car le nombre des termes qu'il faut faire disparoître pour obtenir les courbes susceptibles des premiers, devient de plus en plus grand, à mesure qu'on passe à des ordres plus élevés; et parmi les cinq quantités m, p, n, q et b, il n'y en a, comme on sait, que quatre dont on puisse disposer.

220. La transformation des coordonnées fournit un moyen très-élégant pour déterminer la position d'une droite qui touche une courbe proposée, dans un point quelconque, et par là fait con-

noître si ce point est simple ou multiple, et si la courbe y subit une inflexion.

En effet, si on conçoit que l'origine des coordonnées, située d'abord en A, *fig.* 17 et 18, ait été transportée sur un point quelconque de la courbe MX; qu'on ait pris pour axe des abscisses la droite MB', parallèle à AB, et pour axe des ordonnées une droite quelconque Mm passant par le point M; il est visible que ce dernier rencontrera la courbe deux fois au moins, savoir en M et en m. Nommant u et t les nouvelles abscisses et les nouvelles ordonnées, et faisant $AP=a$, $PM=b$, on obtiendra l'équation entre u et t, par la substitution de $u+pt+a$ au lieu de x, et de $qt+b$ au lieu de y. Mais pour trouver les points dans lesquels le nouvel axe des ordonnées Mm rencontre la courbe, il faudra faire $u=0$ dans cette équation, et les valeurs de t qui en résulteront seront celles des différentes ordonnées qui répondent à l'origine M. Supposons maintenant que la ligne Mm en tournant autour du point M, se rapproche de la ligne MT, qui ne fait que toucher la courbe, le point m se rapprochera aussi de plus en plus du point M; et ces deux points se confondront, lorsque Mm et MT coïncideront. Il y aura donc dans ce cas deux valeurs de t qui deviendront nulles en même tems, et par conséquent l'équation en u et t devra être divisible par t^2, dans l'hypothèse de $u=0$, ce qui exige que le terme multiplié par t disparoisse ainsi que le terme constant. L'exemple suivant montrera l'usage qu'on peut faire de cette condition.

FIG. 17 et 18.

Soit l'équation $y^2=Ax$; on y mettra seulement $pt+a$ pour x, et $qt+b$ pour y, parce que devant faire $u=0$, après les substitutions, il est inutile d'avoir égard à cette variable. En ordonnant par rapport à t, on trouvera

$$q^2t^2+(2bq-Ap)\,t+b^2-Aa=0.$$

Pour que cette équation soit divisible par t^2, il faudra qu'on ait

$$b^2-Aa=0, \qquad 2bq-Ap=0.$$

La première de ces deux équations, qui n'est autre chose que la proposée, dans laquelle on auroit remplacé x par a et y par b, sera toujours identique, puisque le point M étant sur la courbe donnée, il doit y avoir entre a et b la même relation qu'entre x et y.

La seconde équation donnera $\frac{q}{p}=\frac{A}{2b}$. En se reportant aux conventions établies dans le n°. 210, on verra que $\frac{q}{p}$ exprime la tangente de l'angle que l'ordonnée t fait avec l'abscisse x, et que par conséquent l'axe parallèle à cette ordonnée doit avoir pour équation par rapport aux axes primitifs $y-b=\frac{q}{p}(x-a)$ (n°. 198); en y mettant la valeur de $\frac{q}{p}$ que l'on vient de trouver, il en résultera $y-b=\frac{A}{2b}(x-a)$ qui sera l'équation de la droite TM.

Si dans cette dernière on fait $y=0$, il viendra $x=-\frac{2b^2}{A}+a$; en observant que par la nature de la courbe proposée $b^2=Aa$, on trouvera $x=-a$. Cette valeur répondant au point T, donnera, *fig.* 17,

$$AT=a \qquad \text{et} \qquad PT=AP+AT=2a:$$

on reconnoîtra sans peine dans ce résultat, la soutangente de la parabole dont l'équation est $b^2=2Aa$.

221. Si le point M, *fig.* 19, étoit l'intersection de plusieurs branches de la courbe, il y auroit, quelle que fût la position de l'axe Mm, autant de valeurs de t qui deviendroient nulles dans la supposition de $u=0$, qu'il passe de branches par ce point; l'équation en u et t seroit donc divisible par une puissance de t du degré marqué par le nombre de ces branches, et cela, quelque valeur qu'on puisse donner au rapport $\frac{q}{p}$. FIG. 19.

Il suit de là que pour connoître si le point dont les coordonnées sont a et b appartient ou non à plusieurs branches de la courbe proposée, il faut substituer $pt+a$ et $qt+b$, au lieu de x et de y, et chercher ensuite combien de termes de la transformée disparoissent. Si elle devenoit divisible par t^2, le point qu'on considère seroit *double*, c'est-à-dire, qu'il appartiendroit à deux branches; il seroit *triple*, ou appartiendroit à trois branches, si cette transformée étoit divisible par t^3, et ainsi de suite.

On peut aussi trouver si la courbe proposée a des points dou-

bles, triples, etc. en cherchant à rendre la transformée dont on vient de parler divisible par t^2, par t^3, etc. Proposons-nous pour exemple de trouver les points doubles de la courbe représentée par l'équation $x^3 - 3axy + y^3 + A^3 = 0$.

En y changeant x et y en $pt + a^2$ et $qt + b$, on a

$$a^3 - 3Aab + b^3 + A^3 + [(a^2 - Ab)p + (b^2 - Aa)q]3t \\ + (ap^2 - Apq + bq^2)3t^2 + (p^3 + q^3)t^3 \Big\} = 0,$$

résultat qui doit être divisible par t^2, quels que soient p et q, lorsque a et b ont les valeurs qui conviennent à un point double. Pour exprimer cette condition on égalera séparément à zéro, le terme constant, la partie du coefficient de t qui est multipliée par p, et celle qui l'est par q, ce qui produira les trois équations suivantes,

$$a^3 - 3Aab + b^3 + A^3 = 0, \quad a^2 - Ab = 0. \quad b^2 - Aa = 0.$$

Les deux dernières donnent, 1°. $a = 0$, $b = 0$, 2°. $a = b = A$: les valeurs $a = 0$ et $b = 0$, ne satisfaisant point à la première n'appartiennent point à la courbe proposée; mais la supposition de $a = b = A$ rendant cette équation identique, il en faut conclure que le point dans lequel on a $x = y = A$ est un point double.

222. Si on demandoit l'équation de la droite qui touche la courbe à ce point, on détermineroit le rapport $\frac{q}{p}$, en égalant à zéro le coefficient de t^2. En général, pour un point multiple qui feroit disparoître un nombre quelconque des derniers termes de la transformée en t, on égaleroit à zéro le coefficient du premier des termes qui ne s'évanouissent pas. Voici la raison de cette règle :

On peut mener par le point M une infinité d'axes tels que Mm, qui rencontreront une même branche MX dans deux points au moins; d'abord en M et ensuite quelqu'autre part en m : le second de ces points se rapprochera de plus en plus du premier, à mesure que l'axe Mm deviendra plus voisin de la tangente TM. Quand ces deux droites coïncideront, les points M et m seront réunis ; il y aura donc, relativement à l'axe TM une nouvelle valeur de t qui deviendra nulle ; et par conséquent la transformée, prise par rapport à cet axe, se trouvera divisible par une puissance de t supérieure d'une unité à celle qu'on rencontreroit pour tout autre.

Le point qu'on a considéré dans l'exemple du n°. précédent étant double, la tangente doit être regardée comme rendant nulles trois valeurs de t, puisqu'il y en a toujours deux qui s'évanouissent par rapport à un axe quelconque : il faut donc faire disparoître le terme affecté de t^2 dans la transformée, afin qu'elle devienne divisible par t^3.

En égalant à zéro le coefficient de t^2 dans cette équation, il vient $ap^2 - Apq + bq^2 = 0$; mettant A au lieu de a et de b, et divisant par p, on trouve $1 - \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} = 0$. On ne doit pas être surpris de voir $\frac{q}{p}$ déterminé par une équation d'un degré supérieur au premier, car l'inspection seule de la figure, prouve qu'en général, il y a pour un point multiple autant de tangentes qu'il y passe de branches différentes, et que par conséquent un point double doit en avoir deux. Cependant si parmi les branches il s'en trouvoit plusieurs qui ne fissent que se toucher, elles n'auroient qu'une seule tangente; delà naissent plusieurs espèces de points multiples.

Les points de rebroussement sont des points multiples, dans lesquels deux branches se touchent, et ne passent point au-delà. Dans celui de la première espèce, la tangente TM *fig.* 20, se trouve entre les deux branches, et elle les laisse toutes deux du même côté, dans celui de la seconde, *fig.* 21. Si les branches au lieu de s'arrêter en A, se continuoient de l'autre côté, suivant les cours ponctués, le premier cas seroit une *osculation*, et le second un *embrassement.* FIG. 20 et 21.

223. L'équation $1 - \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} = 0$ ne donne pour $\frac{q}{p}$ que deux valeurs imaginaires, ce qui nous fait voir qu'au point que nous examinons, la courbe proposée est dépourvue de tangente; et comme quelque petite que soit une portion de courbe, on conçoit qu'il est toujours possible de mener une droite qui la touche, il s'ensuit que le point dont il s'agit n'est qu'un point isolé ou conjugué (n°. 209).

La comparaison de $x^3 - 3Axy + y^3 + A^3 = 0$, avec la formule générale des équations du troisième degré $y^3 + Py + Q = 0$,

donnera $P=-3Ax$, $Q=A^3+x^3$; substituant pour P et Q leurs valeurs dans les expressions des racines de $y^3+Py+Q=0$, on trouvera que celles de $x^3-3Axy+y^3+A^3=0$, sont

$$y=-x-A,$$

$$y=\frac{x+A}{2}+\left(\frac{x-A}{2}\right)\sqrt{-3},\qquad y=-\frac{x+A}{2}-\left(\frac{x-A}{2}\right)\sqrt{-3}.$$

FIG. 22. La première représente une droite DY, *fig.* 22, pour laquelle $AE=AD=-A$; la seconde et la troisième ne devenant réelles que quand $x=A$ appartiennent toutes deux au point M, qui, comme on voit, est bien un point double, mais ne sauroit avoir de tangente.

224. Si on vouloit chercher les points doubles de la courbe représentée par l'équation $x^3-3Axy+y^3=0$, la règle du n°. 221 donneroit $a=0$; ce qui montre que l'origine des coordonnées primitives est en effet un point double.

En égalant à zéro le coefficient de t^2, pour déterminer les tangentes de ce point, on trouvera $Apq=0$, équation à laquelle on satisfait en faisant $p=0$ ou $q=0$.

Dans le premier cas, le rapport $\frac{q}{p}$ devient infini, et il est nul dans le second : il suit de là (n°. 196), qu'une des tangentes fait un angle droit avec l'axe des abscisses, et que l'autre lui est parallèle; mais comme elles passent par l'origine, on voit que la première n'est autre que l'axe des ordonnées, et la seconde celui des abscisses. La figure 8 représente la courbe, qui résulte de l'équation proposée; le point A est l'intersection de deux branches, dont l'une est touchée par AC et l'autre par AB.

225. Si la courbe proposée subit une inflexion, il y aura alors
FIG. 23. trois intersections de l'axe Mm, *fig.* 23, qui se réduiront à une seule, quand il coïncidera avec la tangente. Il suit de là que dans le cas d'une inflexion, la transformée en t doit être divisible par t^3, comme pour un point triple, mais avec cette différence, que s'il passoit réellement trois branches de la courbe par le point M, les termes affectés de t et de t^2 s'évanouiroient pour toutes les valeurs possibles

de $\frac{q}{p}$, tandis que ce n'est qu'en donnant à ce rapport la valeur qui convient à la tangente, que les termes dont on vient de parler disparoissent.

Nous prendrons pour exemple la courbe représentée par l'équation $x^3+Ax^2+B^2y=0$. En faisant $x=pt+a$, $y=qt+b$, il vient $a^3+Aa^2+B^2b+[(3a^2+2Aa)p+B^2q]t+(3ap^2+Ap^2)t^2+p^3t^3=0$. Si la courbe proposée a un point d'inflexion, d'après ce qui précède, la transformée ci-dessus deviendra divisible par t^2, lorsqu'on donnera à $\frac{q}{p}$ la valeur qui convient à ce point; les trois équations $a^3+Aa^2+B^2b=0$, $(3a^2+2Aa)p+B^2q=0$, $3ap^2+Ap^2=0$, auront donc lieu en même tems. La dernière donne $a=-\frac{A}{3}$ substituant dans la première et dans la seconde, on trouvera

$$b=-\frac{2A^3}{27B^2} \quad \text{et} \quad \frac{q}{p}=\frac{A^2}{3B^2}.$$

Ces valeurs n'appartiennent pas à un point multiple, puisqu'elles ne font pas évanouir séparément chacun des coefficiens de p et de q, mais bien à un point d'inflexion.

Il y auroit beaucoup de conséquences intéressantes à déduire des applications que nous venons de faire de la transformation des coordonnées, mais comme je dois traiter les mêmes objets par le Calcul différentiel, je me bornerai aux remarques suivantes:

226. Si une valeur de $\frac{q}{p}$ rend la transformée divisible par t^n, et que le point où cela arrive ne soit pas multiple, il n'y aura inflexion que dans le cas où n seroit un nombre impair. Pour se peindre cette circonstance, il faut concevoir une courbe XY, *fig*, 24, qui ait un FIG. 24.
nombre quelconque d'inflexions, trois par exemple; on voit qu'une semblable courbe pourra être coupée en cinq points par une ligne droite, et que les distances des intersections dépendront non seulement de la position de cette droite, mais encore des intervalles qui séparent chaque inflexion, intervalles qui eux-mêmes tiennent aux valeurs des constantes de l'équation de la courbe proposée. Il est

évident que si, pour quelques valeurs particulières de ces constantes, les deux inflexions M et M' se réunissoient, elles s'effaceroient mutuellement, ensorte que si la courbe dans son état primitif n'avoit que ces deux-là, elle n'en montreroit plus aucune trace. Mais si elle en a une troisième en M'', par exemple, elle la conserveroit encore, quand même le point M'' viendroit à se confondre avec les deux autres M et M', supposés réunis. Les points qui résultent ainsi de la réunion de plusieurs inflexions, sont nommés *points de serpentement;* ils sont visibles ou invisibles, selon que le nombre des inflexions est impair ou pair.

227. Un coube d'un ordre quelconque ne peut avoir de point singulier qui soit la réunion d'un nombre de points simples plus grand que l'exposant de son ordre. En effet, puisque la transformation des coordonnées d'une courbe ne change point le degré de son équation, il s'ensuit que les nouvelles ordonnées, quelque position qu'on leur donne, ne peuvent avoir pour la même abscisse plus de valeurs qu'il n'y a d'unités dans le nombre qui marque le degré de cette équation. C'est pour cette raison qu'une courbe du second ordre, qui n'a que deux ordonnées au plus, pour une même abscisse, ne présente aucun point double; car en portant l'origine sur un point de cette nature, et prenant pour axe des ordonnées la tangente, il devroit résulter de la réunion de trois points distincts. Les courbes du troisième ordre admettent des points doubles et des points d'inflexion, parce qu'elles peuvent avoir trois ordonnées sur une même abscisse.

228. Il est facile d'étendre ces considérations aussi loin qu'on voudra; elles reposent sur ce principe, que le nombre des intersections d'une ligne droite et d'une courbe quelconque, ne peut surpasser celui qui marque le degré de l'équation de cette courbe. En effet, les ordonnées du point de rencontre de deux lignes quelconques doivent satisfaire en même tems à l'équation, de l'une et à celle de l'autre, et par conséquent si on élimine une des indéterminées de ces deux équations, le résultat donnera toutes les valeurs que peut prendre la seconde indéterminée, dans les divers points d'intersection des lignes qu'on considère; or l'équation

tion d'une droite étant $y = ax + b$ (n°. 196), le résultat de sa combinaison avec une équation du degré m, ne pourra jamais s'élever au-delà de ce degré.

Il suit de ce qu'on vient de lire, et de la proposition démontrée dans le n°. 189, que deux courbes, l'une de l'ordre m et l'autre de l'ordre n, ne peuvent se couper en plus de mn points; mais il arrivera souvent que le nombre des intersections n'atteindra pas cette limite, et dans ce cas x et y auront des valeurs imaginaires.

Ce qui précède est le fondement de la théorie de la construction des équations, dans laquelle on regarde une équation à une seule indéterminée, comme le résultat de l'élimination d'une autre indéterminée entre deux équations, qui contenoient en même tems la première, ou, ce qui revient au même, on considère l'inconnue commme l'abscisse d'un point situé à la fois sur deux lignes courbes données.

229. L'équation du premier ordre n'ayant que trois termes et deux coefficiens constans, deux points donnés ont suffi pour la particulariser (n°. 197); il n'en faudra que cinq pour faire la même chose à l'égard de celle du second ordre, quoiqu'elle soit composée de six termes (n°. 212), attendu qu'on peut toujours par la division, réduire à l'unité le coefficient de l'un quelconque de ses termes.

Si on désigne par α, α', α'', α''', α'''' les abscisses des cinq points connus, et par β, β', β'', β''', β'''' leurs ordonnées, qu'on divise l'équation générale du n°. 212 par A, ou que pour plus de simplicité on fasse ce coefficient égal à l'unité, en substituant au lieu de x et de y, chacune de leurs valeurs données, on aura les cinq équations suivantes:

$$1 + 2B\alpha + 2C\beta + D\alpha^2 + 2E\alpha\beta + F\beta^2 = 0$$
$$1 + 2B\alpha' + 2C\beta' + D\alpha'^2 + 2E\alpha'\beta' + F\beta'^2 = 0$$
$$1 + 2B\alpha'' + 2C\beta'' + D\alpha''^2 + 2E\alpha''\beta'' + F\beta''^2 = 0$$
$$1 + 2B\alpha''' + 2C\beta''' + D\alpha'''^2 + 2E\alpha'''\beta''' + F\beta'''^2 = 0$$
$$1 + 2B\alpha'''' + 2C\beta'''' + D\alpha''''^2 + 2E\alpha''''\beta'''' + F\beta''''^2 = 0$$

qui serviront à déterminer les coefficiens B, C, D, E et F. Chacun

de ces coefficiens n'ayant qu'une valeur, il est évident que par cinq points donnés il ne peut passer qu'une ligne du second ordre.

L'équation générale du troisième ordre (n°. 216), ne renfermant que neuf coefficiens nécessaires, quoique composée de dix termes, on verra de même qu'il suffit de neuf points pour particulariser la courbe qu'elle représente; et en généralisant ces remarques, on en conclura sans peine que l'équation générale des lignes de l'ordre m aura $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ termes, $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1$ coefficiens nécessaires, et qu'il faudra par conséquent $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1$ points donnés pour particulariser la courbe à laquelle elle appartient (*).

Application du développement des fonctions en séries à la théorie des Courbes.

230. Le développement des fonctions en séries est le moyen analytique le plus fécond, pour déduire de l'équation d'une courbe toutes les circonstances de son cours. En appliquant à l'équation d'une courbe quelconque la méthode exposée dans les n°s 119 et suiv. on parvient, lorsque l'abscisse est très-petite ou très-grande, à exprimer l'ordonnée par des séries convergentes, qui, dans l'un et l'autre cas, font connoître la direction des branches qu'elles représentent, en offrant le moyen de comparer ces branches à des courbes très-simples, et dont le cours est facile à déterminer.

(*) Il est nécessaire d'observer que la détermination de la ligne qui doit passer par les points donnés ne pourra être complète, ou même avoir lieu, qu'autant que la position de ces points ne sera pas telle que plusieurs des équations par lesquelles on doit trouver les coefficiens, rentrent l'une dans l'autre ou deviennent contradictoires. Telle est la restriction par laquelle Euler a levé une difficulté que présentoit cette théorie, et dont voici un exemple.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, il ne peut passer qu'une ligne du quatrième ordre par 14 points donnés, et cependant il suit de la proposition qui termine le n°. 228, que deux courbes de cet ordre peuvent se couper en 16 points; il sembleroit donc que 16 points ne seroient pas même suffisans pour particulariser la courbe du quatrième ordre, puisqu'ils peuvent être communs à deux courbes de ces ordres; mais le paradoxe s'explique en observant que quoique pour déterminer les 14 coefficiens de l'équation générale du quatrième ordre relativement à ces points, on eut 16 équations du premier degré, il arriveroit que plusieurs de ces équations rentreroient l'une dans l'autre, et qu'il resteroit des coefficiens arbitraires.

L'usage que nous ferons de cette méthode à l'égard de l'équation $ax^3+x^3y-ay^3=0$, la fera mieux connoître qu'une exposition générale. Nous avons tiré de l'équation ci-dessus (n°. 124) les quatre séries

$$y=x+\frac{x^3}{3a}-\frac{x^4}{81a^3}+\frac{x^5}{243a^4}\text{ etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y=-a-a^4x^{-3}-3a^7x^{-6}-12a^{10}x^{-9}-55a^{13}x^{-12}\text{ etc.}(2)$$

$$y=a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}a-\frac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}a^4x^{-3}\text{ etc.}\ldots\ldots(3)$$

$$y=-a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}a+\frac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}a^4x^{-3}\text{ etc.}\ldots\ldots(4)$$

la série (1) est d'autant plus convergente que x est plus petit, et on peut prendre cette variable telle que le premier terme x surpasse la somme de tous ceux qui le suivent (*Int.* n°. 9 et 36); ensorte que la valeur de y différera aussi peu qu'on voudra de celle que donneroit l'équation $y=x$, qui appartient à une droite menée par l'origine des coordonnées, et faisant un angle de 45° avec l'axe des abscisses. Il suit de là qu'une très-petite portion de la courbe proposée, prise vers le point A, *fig.* 25, se confondra sensiblement avec la droite AY, dont on vient de parler, et cela d'autant mieux qu'elle aura moins d'étendue. On va voir de plus qu'il est impossible de mener par le point A une droite qui passe entre la droite AY et la branche de courbe AX. FIG. 25.

231. Pour distinguer l'ordonnée de la droite AY de celle de la courbe, relativement à la même abscisse, marquons la première d'un accent; nous aurons $PM'=y'=x$, et par conséquent $MM'=y-y'=\frac{x^3}{3a}-\frac{x^4}{81a^3}$ etc. Comparons maintenant la droite AY avec une autre droite quelconque AZ, représentée par l'équation $y''=Ax$; la différence des ordonnées PM'' et PM', correspondantes à une même abscisse dans l'une et dans l'autre, sera $M''M'=y''-y'=(A-1)x$; mais on peut prendre x assez petit pour que la somme des termes $\frac{x^3}{3a}-\frac{x^4}{81a^3}$, etc. soit moindre que $(A-1)\,x$; en supposant donc que AP représente la valeur

qui remplit cette condition, on aura alors $MM' < M'M''$. On pourra pareillement donner à x une valeur négative Ap, telle qu'on ait encore $mm' < m'm''$; par conséquent quelqu'hypothèse qu'on fasse sur le signe de la quantité $A-1$, jamais dans l'espace $M''m''$, la droite AZ ne pourra se trouver entre la courbe AX et la droite AY.

Il est facile de voir qu'on peut prendre pour le caractère de la tangente; l'impossibilité de faire passer une autre droite entr'elle et la courbe; la ligne AY touche donc la courbe proposée au point A.

232. Le signe de la différence $y-y' = \frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{81a^3}$ etc. fait connoître de quel côté de la droite AY se trouve la courbe proposée avant et après le point de contact; or ce signe ne dépend que de celui du premier terme, qui, étant constamment positif, nous fait voir que l'ordonnée, plus grande que celle de la droite, lorsque x est positif, devient plus petite lorsqu'il est négatif, et que par conséquent la courbe est au-dessus de la tangente, soit en deçà soit en delà du point A.

Mais l'inspection seule d'une courbe et de sa tangente prouve, qu'auprès du point de contact, la première doit toujours présenter sa convexité à la seconde; ainsi le point A n'est pas un point d'inflexion, car pour que cela fût, il faudroit qu'avant ou après, la courbe passât de l'autre côté de la tangente.

Considérons maintenant la série (2) qui n'est convergente que lorsque x est très-grand par rapport à a. Plus x augmente, plus la valeur de y donnée par cette série approche de la quantité a, soit qu'on prenne x positif, soit qu'on le prenne négatif, mais sans y atteindre jamais. Si on prend sur l'axe AC, au-dessous de AB, la distance $AD=-a$, et qu'on tire la droite DU parallèle à AB, y étant égal à $-a$ dans toute l'étendue de cette droite, les branches représentées par la série (2), ne pourront jamais la couper, quelque prolongée qu'on la suppose; mais elles s'en approcheront de plus en plus et l'auront par conséquent pour *asymptote*.

Le second terme de la série (2) étant positif, lorsque x est né-

gatif, et négatif lorque x est positif, on en conclura comme dans le n°. précédent, que l'asymptote est au-dessus de la courbe du côté des x négatifs, et au-dessous du côté des x positifs; on verra d'ailleurs que l'ordonnée y est négative dans l'un et l'autre cas: les branches FS et Ax seront donc situées par rapport à leur asymptote, comme le représente la figure.

On n'a tracé en plein que leurs extrémités, parce que ce sont les seules parties que puisse représenter la série (2), qu'on ne doit employer qu'autant qu'elle est convergente.

233. Passons enfin aux séries (3) et (4). Elles donnent pour y des valeurs qui diffèrent d'autant moins de celles qui résultent des équations $y=a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ et $y=-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ que x est plus grand; les courbes que ces dernières représentent, s'approchent donc de plus en plus des branches auxquelles appartiennent les séries (3) et (4).

Les deux équations $y=a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}a$ et $y=-a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}a$ sont les racines de $\left(y-\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{x^3}{a}$ et produisent une courbe composée de deux branches semblables ER et ET, dont la première sert d'asymptote à la branche positive AX, résultante de la série (3), et la seconde remplit le même objet à l'égard de la branche négative FV, donnée par la série (4): on remarquera que les séries (3) et (4) deviennent imaginaires, lorsqu'on suppose x négatif (*).

234. La considération des diverses séries descendantes, qu'on peut tirer d'une équation à deux variables, fait connoître combien

(*) On peut construire facilement par points, la courbe que représente l'équation $ax^3+x^3y-ay^3=0$; car en faisant $y=tx$, cette équation devient divisible par x^3 et se réduit à $a+xt-at^3=0$, d'où on tire $x=\frac{at^3-a}{t}$; donnant ensuite à t des valeurs arbitraires, on aura x et y, sans qu'il soit besoin d'extraire aucune racine. De semblables artifices conduisent souvent à exprimer les indéterminées d'une équation d'une manière simple, et qui permet d'en trouver autant de valeurs rationnelles qu'on veut. On voit par là que la résolution des questions de l'*analyse indéterminée* peut être très-utile pour la construction des courbes.

la courbe qu'elle représente a de branches infinies, et quelle est la nature de la ligne vers laquelle ces branches concourent. Il est évident qu'une courbe ne peut avoir des branches infinies, que dans les deux cas suivans :

1°. Lorsque x étant infini, y a une valeur réelle, soit finie, soit infinie ; 2°. lorsque y devient infini, quoique x reste fini.

Pour le premier, on cherchera toutes les séries qui expriment la valeur de y dans l'hypothèse de x très-grand (n°. 121). Ces séries ne pourront être que de la forme suivante :

$$y=\ldots.Cx^{\gamma}+Bx^{\beta}+Ax^{\alpha}+B'x^{-\beta'}+C'x^{-\gamma'}+\text{etc}\ldots.(1)$$

dans laquelle le nombre des termes affectés des puissances positives de x sera toujours limité. En faisant... $Cx^{\gamma}+Bx^{\beta}+Ax^{\alpha}=y'$, on aura

$$y-y'=B'x^{-\beta'}+Cx^{-\gamma'}+\text{etc.}$$

d'où on voit que plus x sera grand, moins y' différera de y ; et comme on pourra toujours prendre x de manière que $y-y'$ soit moindre qu'une grandeur donnée, la branche représentée par la série (1) s'approchera donc sans cesse de l'une des branches de la ligne donnée par l'équation $y'=\ldots.Cx^{\gamma}+Bx^{\beta}+Ax^{\alpha}$.

C'est sur la nature de cette ligne que repose la distinction des branches infinies en branches *hyperboliques* et en branches *paraboliques*.

Les premières sont celles, qui, comme les branches de l'hyperbole ordinaire, ont une ligne droite pour asymptote ; elles répondent au cas où $y'=Bx+A$. Lorsque $B=0$, l'asymptote est parallèle à l'axe des abscisses, ainsi qu'on l'a vu dans l'exemple du n°. précédent, et elle se confond avec cet axe, quand B et A sont nuls.

L'équation $y'=Cx^2+Bx+A$, la plus simple après $y=Bx+A$, appartient à la parabole, et comme elle est comprise dans l'équation générale $y'=\ldots Cx^{\gamma}+Bx^{\beta}+Ax^{\alpha}$, on nomme *paraboliques* les courbes que cette dernière représente, et les branches dont elles sont les asymptotes, dans une courbe quelconque, s'appellent *branches paraboliques*.

Les deux branches AX et FV données par les séries (3) et (4) du n°. précédent, sont paraboliques, puisque leur asymptote, qui a

pour équation $y' = \frac{1}{2}a \pm a^{-\frac{1}{9}} x^{\frac{5}{9}}$, est une courbe parabolique.

On trouvera les branches infinies dans lesquelles y seul devient infini en cherchant les séries qui expriment la valeur de x, lorsque y est très-grand.

235. Si dans la série (I) on fait successivement
$y' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha}$, $y'' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha} + B'x^{-\beta'}$
$y''' = \ldots Cx^{\gamma} + Bx^{\beta} + Ax^{\alpha} + B'x^{-\beta'} + C'x^{-\gamma'}$, etc.
les quantités y', y'', y''', approcheront de plus en plus de la valeur de y; et par conséquent les courbes dont elles expriment les ordonnées s'approcheront aussi sans cesse de la branche infinie à laquelle appartient la série (I). Ces courbes seront en nombre infini, si la série (I) est infinie; et dans ce cas la branche qu'elle représente aura une infinité d'*asymptotes courbes*. Cependant cette dénominatlon est plus particulièrement affectée à la courbe dont l'ordonnée est y', parce qu'elle est unique et qu'elle est elle-même l'asymptote de toutes les autres.

Lorsque la branche qu'on considère est hyperbolique, ou qu'on a $y' = Bx + A$, la première asymptote courbe est donnée par l'équation $y'' = Bx + A + B'x^{-\beta'}$, qu'on peut ramener à une forme très-simple, en changeant la position des abscisses. Si on y substitue mu pour x, $nu + t + b$ pour y, (n°. 210) et qu'on fasse $n = Bm$, $b = A$, elle deviendra $t = B'm^{-\beta}u^{-\beta'}$, et à cause que les coordonnées x et y sont perpendiculaires entr'elles, on aura $m^2 + n^2 = 1$, d'où
$m = \frac{1}{\sqrt{1 + B'^2}}$ et $n = \frac{B'}{\sqrt{1 + B'^2}}$.

Il faut remarquer que l'équation $t = B'm^{-\beta'}u^{-\beta'}$, comprend comme cas particulier l'équation $t = Pu^{-1}$, qui appartient à l'hyperbole ordinaire rapportée à ses asymptotes, et que les courbes qu'elle représente ont aussi pour asymptotes l'axe des t et celui des u, puisque t devient nul lorsque u est infini et réciproquement. Ces courbes sont connues sous le nom d'*hyperboles des degrés supérieurs.*

En exécutant sur la série (I), la transformation précédente, on trouvera $t = B'm^{-\beta}u^{-\beta} + C'm^{-\gamma}u^{-\gamma} + \ldots$ etc. la branche qu'elle re-

présente aura pour asymptote droite l'axe des t, et pour asymptote courbe, l'hyperbole donnée par l'équation $t = B' m^{-\beta} u^{-\beta}$.

236. Il suffit de connoître le premier terme de la série (I), pour juger si la branche à laquelle elle appartient est *hyperbolique* ou *parabolique*. Le premier cas aura lieu toutes les fois que ce terme sera de la forme Cx^γ, γ étant un nombre quelconque mais positif et différent de l'unité. Cependant l'existence de la branche ne sera certaine que lorsqu'on n'aura point à craindre qu'aucun des termes de la série devienne imaginaire (n°. 125), ce dont on ne peut répondre qu'après être parvenu à des termes dont la loi de succession soit évidente.

Le nombre et la nature des branches infinies forment les caractères les plus propres à distinguer entr'elles les courbes d'un même ordre; Euler et Cramer s'en sont servi pour partager les courbes du troisième et du quatrième ordre en grandes familles, auxquelles ils ont donné le nom de *genres*, et qu'ils ont subdivisées en espèces par la considération des points singuliers; mais ces détails, plus curieux qu'utiles, sortent entièrement du plan que je me suis proposé.

237. Il est évident qu'on peut toujours prendre les coordonnées dans une direction telle que l'une et l'autre soit infinie en même tems pour chacune des branches infinies, puisqu'il suffira pour cela de placer les axes obliquement par rapport aux asymptotes droites des branches hyperboliques, branches qui sont les seules pour lesquelles une des coordonnées puisse quelquefois avoir une valeur finie. Cela posé, si r marque l'ordre de la courbe qu'on considère, l'une quelconque des nouvelles coordonnées ne pourra avoir plus de r valeurs, dont chacune ne pourra donner plus de deux branches, l'une correspondant aux valeurs positives de la seconde coordonnée et l'autre à ses valeurs négatives; en supposant donc les expressions de la première coordonnée toutes réelles, il n'en résultera au plus que $2r$ branches infinies, c'est-à-dire, comme nous l'avons annoncé n°. 206, un nombre double de l'exposant de l'ordre de la courbe proposée.

Il est facile de voir par ce qui précède, que toute équation dans laquelle la plus haute puissance de l'une quelconque des indéterminées

minées est impaire, doit donner au moins deux branches infinies, puisque cette indéterminée aura dans tous les cas une valeur réelle au moins; et on conclura de là, que toutes les courbes d'un ordre impair ont nécessairement des branches infinies.

Usage du Calcul différentiel pour trouver les tangentes des Courbes, leurs inflexions et leurs rebroussemens.

238. Les considérations par lesquelles nous avons déterminé la tangente du point situé à l'origine des coordonnées, sur la courbe que représente l'équation $ax^3+x^2y-ay^2=0$ (n°. 230), peuvent s'appliquer à tel point qu'on voudra d'une courbe quelconque, en y transportant l'origine des coordonnées.

Soient x' et y' les coordonnées du point qu'on veut considérer; si on substitue $x'+h$ pour x et $y'+k$ pour y, dans l'équation proposée, on pourra obtenir l'expression de k en série ascendante, suivant les puissances de h, soit par la méthode des n°. 119 et suiv. soit par le théorême de Taylor: ce dernier donnera

$$k=\frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1}+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc...}\ (\text{n}^\circ.\ 12);$$

série d'autant plus convergente, que la quantité h sera plus petite. Si pour abréger on la représente par $k=ph+qh^2+rh^3+$ etc. et qu'on regarde k et h comme de nouvelles coordonnées MQ et QN, *fig.* 18, dont l'origine est au point M, on prouvera, comme dans le n°. 231, que la droite MT, ayant pour équation $k'=ph$, touche la courbe proposée au point M, c'est-à-dire, qu'aucune droite menée par ce point ne peut, immédiatement avant et après le contact, passer entr'elle et la courbe. En effet, on aura FIG. 18.

$$NN'=QN-QN'=k-k'=qh^2+rh^3+\text{etc.}$$

et en désignant par $k''=\mathcal{A}h$ l'équation, d'une autre droite MZ, on trouvera $N'N''=QN'-QN''=k'-k''=(p-\mathcal{A})h$. Or, tant qu'aucun des coefficiens p, q, r, etc. ne devient infini, on peut toujours prendre h, soit positivement, soit négativement, d'une petitesse telle que la somme de tous les termes qh^2+rh^3+ etc. soit moindre que la quantité $(p-\mathcal{A})h$; dans cette hypothèse NN' sera moindre que $N'N''$, et nn' moindre que $n'n''$: la droite MZ ne pourra donc, quel que soit $\mathcal{A}$, passer entre la courbe MX et la droite MT dans l'espace $N''n''$.

Pour rapporter l'équation de la droite MT aux axes primitifs AB

et AC, il faut mettre $x-x'$, au lieu de h et $y-y'$ au lieu de k'; on aura ainsi $y-y'=p(x-x')$, ou $y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$, en remplaçant p par le coefficient différentiel qu'il représente (*).

239. Nous avons supposé que le coefficient q du second terme de la série $k=ph+qh^2+$etc. étoit positif; il résulte de cette hypothèse, que la quantité $k-k'=qh^2+rh^3+$ etc. restera positive, quelque signe qu'on donne à h, tant qu'on prendra cette quantité assez petite pour que le terme qh^2 surpasse la somme de tous ceux qui le suivent; la courbe proposée se trouvera donc au dessus de sa tangente, immédiatement avant et après le point M, et présentera par conséquent sa convexité à l'axe AC. Le contraire auroit lieu si q étoit négatif; car la différence $k-k'$ étant négative, la courbe se trouveroit dans ce cas au dessous de sa tangente (*fig.* 17.) et présenteroit sa concavité à l'axe AB. On peut donc juger par le signe de q ou par celui du coefficient différentiel $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ comment est tournée, dans un point quelconque, par rapport à la ligne des abscisses, la concavité d'une courbe dont on a l'équation.

Il est à propos de remarquer que le Calcul différentiel n'entre dans toutes ces recherches que comme un procédé purement analytique, que pourroit remplacer, d'une manière moins commode à la vérité, toute autre méthode propre à donner le développement de k. Arbogast présenta le premier sous ce point de vue l'application du Calcul différentiel à la théorie des courbes, et Lagrange y fut conduit aussi par sa manière d'envisager ce calcul (n°. 8).

(*) Il faut, dans tout ce qui va suivre, distinguer soigneusement les coordonnées x' et y', des coordonnées x et y, quoiqu'elles soient relatives aux mêmes axes. Les premières appartiennent exclusivement aux différens points de la courbe proposée, et les secondes peuvent être affectées à un point quelconque du plan de la figure: liées entr'elles par l'équation $y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$, ces dernières appartiennent à tous les points de la droite MT, tangente à la courbe MX au point dont les coordonnées sont $AP=x'$ et $PM=y'$.

240. La manière la plus simple de construire la tangente pour un point donné sur la courbe, est d'en chercher un second point; on choisit ordinairement le point T, où elle rencontre l'axe des abscisses. Il est évident que pour trouver AT, il faut faire $y=0$ dans l'équation $y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$, et on en tirera

$$AT=x=x'-y'\frac{dx'}{dy'},$$

en observant que lorsque y' est fonction de x' et réciproquement, $\frac{dx'}{dy'}$ est l'inverse de $\frac{dy'}{dx'}$ (n°. 55). Si on retranche AT de AP, il en résultera l'expression de la *soutangente* PT; on aura donc $PT=y'\frac{dx'}{dy'}$.

241. Voici maintenant quelques applications des formules trouvées ci-dessus.

1°. Soit l'équation de la parabole $y'^2=Ax'$; on en tirera $\frac{dy'}{dx'}=\frac{A}{2y'}$, et l'équation de la tangente deviendra

$y-y'=\frac{A}{2y'}(x-x')$; en réduisant au même dénominateur, et en mettant pour y'^2 sa valeur Ax', on trouvera $2yy'=A(x+x')$. Si on fait $y=0$, on aura $x=AT=-x'$, et par conséquent $PT=2x'$, résultat conforme à ceux du (n°. 220); on peut aussi calculer immédiatement AT et PT, en substituant dans leur expression la valeur de $\frac{dy'}{dx'}$ et celle de y'.

2°. Pour le cercle dont l'équation seroit $x'^2+y'^2=a^2$, on auroit $\frac{dy'}{dx'}=-\frac{x'}{y'}$, $y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x')$, ou $yy'+xx'=x'^2+y'^2$, ou enfin $yy'+xx'=a^2$; on trouvera ensuite $AT=\frac{a^2}{x'}$, $PT=\frac{a^2-x'^2}{x'^2}$.

3°. L'équation $y'^2=Ax'^2+2Bx'$, qui représente toutes les courbes du second ordre, donne $\frac{dy'}{dx'}=\frac{Ax'+B}{y'}$ et par conséquent

la soutangeante PT devient $\frac{y'^2}{Ax'+B}$; substituant au lieu de y'^2 sa valeur, on aura $PT=\frac{Ax'^2+2Bx'}{Ax'+B}$.

4°. Enfin on tire de l'équation

$$x'^3-3ax'y'+y'^3=0, \qquad \frac{dy'}{dx'}=\frac{ay'-x'^2}{y'^2-ax'};$$

l'équation de la tangente deviendra

$$yy'^2-ax'y-y'^3+ax'y'=axy'-xx'^2-ax'y'+x'^3,$$

et mettant pour y'^3 sa valeur, on aura en réduisant

$$y(y'^2-ax')+x(x'^2-ay')=ax'y',$$

on trouvera aussi $PT=\frac{y'^3-ax'y'}{ay'-x'^2}=\frac{2ax'y'-x'^3}{ay'-x'^2}$.

242. Si on se proposoit de mener, par un point donné pris hors d'une courbe, et dont α seroit l'abscisse et β l'ordonnée, une tangente à cette courbe, il est évident qu'il faudroit substituer α au lieu de x, et β au lieu de y, dans l'équation de la tangente, qui deviendroit alors $\beta-y'=\frac{dy'}{dx'}(\alpha-x')$ et serviroit, conjointement avec l'équation de la courbe proposée, à déterminer les coordonnées x' et y' du point de contact.

Prenons pour premier exemple la parabole, dont l'équation est $y^2=Ax'$; celle de sa tangente étant $2yy'=A(x+x')$ deviendra $2\beta y'=A\alpha+Ax'$, et donnera $y'=A\frac{(\alpha+x')}{2\beta}$; le point dans lequel la droite représentée par cette équation, coupera la parabole, sera le point de contact cherché.

L'équation à la tangente du cercle étant $yy'+xx'=a^2$ (n°. *précéd.*), on aura pour cette courbe $\beta y'+\alpha x'=a^2$.

Enfin dans la courbe représentée par $x'^3-3ax'y'+y'^3=0$, le point de contact se trouveroit en cherchant l'intersection de cette courbe avec celle du second ordre résultante de l'équation

$$\beta(y'^2-ax')+\alpha(x'^2-ay')=ax'y'.$$

243. Pour mener une droite qui touche une courbe donnée, et qui soit en même tems parallèle à une droite donnée de position, ou qui

fasse, avec l'axe des abscisses, un angle dont la tangente soit représentée par a, il suffira de poser $\frac{dy'}{dx'}=a$ (n°. 238 et 198); combinant cette équation avec celle de la courbe proposée, on déterminera les valeurs de x' et de y' qui conviennent au point de contact demandé.

Dans le cas où cette courbe seroit la parabole ordinaire, on auroit $\frac{A}{2y'}=a$, ce qui donneroit $y'=\frac{A}{2a}$ et $x'=\frac{A}{4a^2}$.

244. La partie MT de la tangente, comprise entre le point de contact et l'axe des abscisses, est facile à déterminer lorsqu'on connoît la soutangente PT et l'ordonnée PM, car on a $\overline{TM}^2=\overline{PT}^2+\overline{PM}^2$; mais on peut la calculer immédiatement, au moyen de son expression générale, qu'on trouvera en mettant pour PT et PM leurs valeurs $y'\frac{dx'}{dy'}$ et y', ce qui donne

$$TM=\sqrt{y'^2+y'^2\frac{dx'^2}{dy'^2}}=y'\sqrt{1+\frac{dx'^2}{dy'^2}}.$$

En appliquant cette formule à la parabole, on trouve

$TM=y'\sqrt{1+\frac{4y'^2}{A^2}}=\frac{y'}{A}\sqrt{A^2+4y'^2}$. Si on remplace y par sa valeur $\sqrt{Ax'}$, il en résultera $TM=\sqrt{Ax'+4x'^2}$.

245. L'équation de ligne MR, menée par le point de contact, perpendiculairement à la tangente, sera

$y-y'=-\frac{dx'}{dy'}(x-x')$ (n°s. 238 et 199); si pour la construire on veut avoir le point R où elle rencontre l'axe des abscisses, on fera $y=0$, et il viendra $AR=x=y'\frac{dy'}{dx}+x'$: retranchant AP ou x' de AR, on aura $PR=y'\frac{dy'}{dx'}$.

Le triangle rectangle PRM donnant $\overline{MR}^2=\overline{PR}^2+\overline{PM}^2$, on en déduira $MR=y'\sqrt{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}}$.

La ligne MR est connue sous le nom de *normale*, ou de *perpendiculaire* à la courbe, et la partie PR de l'axe des abscisses s'appelle la *sounormale*. Dans la parabole on a

$$MR=y'\sqrt{1+\frac{A^2}{4y'^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{4y'^2+A^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4Ax'+A^2},$$

et $PR=\frac{A}{2}$.

Dans le cercle $MR=y'\sqrt{1+\frac{x'^2}{y'^2}}=a$, et $PR=-x'$. Par conséquent $AR=0$, et en effet, la normale d'un cercle n'est autre chose que le rayon dont la valeur est constante et qui passe toujours par le centre.

S'il falloit mener la normale par un point pris hors de la courbe, ou parallèlement à une ligne donnée, on opéreroit comme on a fait pour la tangente (n°. 242).

246. En rapprochant les résultats trouvés dans les n°s précédens, nous aurons

$$AT=x'-y'\frac{dx'}{dy'},\ PT=y'\frac{dx'}{dy'},\ MT=y'\sqrt{1+\frac{dx'^2}{dy'^2}}$$

$$AR=x'+y'\frac{dy'}{dx'},\ PR=y'\frac{dy'}{dx'},\ MR=y'\sqrt{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}};$$

et pour appliquer ces formules à une courbe quelconque, il suffira d'y substituer la valeur de $\frac{dy'}{dx'}$ ou celle de $\frac{dx'}{dy'}$, tirée de l'équation différentielle; on chassera ensuite, à l'aide de l'équation primitive, celle des coordonnées x' ou y', qu'on voudra.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les coordonnées x' et y' fussent perpendiculaires entr'elles : mais il est aisé de voir que quand même elles feroient un angle quelconque, l'équation de la tangente ne changeroit pas de forme, non plus que les valeurs de AP et de PT, qui en sont immédiatement déduites; à l'égard de MT, de MR, et de PR, on trouveroit leur expression par le moyen des triangles MTP, MTR et MPR, dans lesquels on connoît ou un angle et deux côtés, ou deux angles et un côté.

248. En cherchant les positions que prend la tangente d'une courbe proposée, lorsque le point de contact s'éloigne de plus en plus de l'origine des coordonnées, on peut reconnoître si cette courbe a des asymptotes, et déterminer leur position.

On voit en effet que dans une courbe MX, *fig.* 26, qui a une asymptote droite RS, à mesure que le point M s'éloigne de l'origine, la tangente MT s'approche de l'asymptote, et les points T et D marchent respectivement vers les points R et E, en sorte que AR et AE sont des limites que les valeurs de AT et AD ne sauroient franchir, ni même atteindre, mais dont elles peuvent différer aussi peu qu'on voudra. Il suit delà que pour trouver si une courbe a des asymptotes, il faut chercher si les expressions de AT et de AD relatives à cette courbe, sont susceptibles de limites finies, et lorsque cela arrivera, ces limites étant construites, donneront les deux points R et E, par lesquels on menera la droite RS, qui sera l'asymptote demandée. FIG. 26.

Nous avons déjà calculé (n°. 240) l'expression de AT; quant à celle de AD, on la trouvera en faisant $x=0$, dans l'équation de la tangente, et il en résultera $AD=y=y'-x'\frac{dy'}{dx'}$.

Appliquons ce qui précède à l'équation $y'^2=Ax'^2+2Bx'$, nous en tirerons

$$AT=x'-y'\frac{dx'}{dy'}=x'-\frac{Ay'^2}{Ax'+B}=-\frac{Bx'}{Ax'+B},$$

$$AD=y'-x'\frac{dy'}{dx'}=y'-\frac{A'x'^2+B'x'}{y'}=\frac{Bx'}{\sqrt{Ax'^2+Bx'}};$$

les derniers membres de ces équations peuvent être mis sous les formes $-\frac{B}{A+\frac{B}{x'}}$ et $\frac{B}{\sqrt{A+\frac{B}{x'}}}$: par conséquent leurs limites respectives, dans le cas où on suppose x infini, sont $-\frac{B}{A}=AR$ et $\frac{B}{\sqrt{A}}=AE$.

Si A étoit nul, les expressions de AT et de AD deviendroient

infinies en même tems que x', et la courbe proposée n'auroit point d'asymptotes ; elle n'en aura pas non plus, lorsque A sera négatif, parce qu'alors son équation n'admettra point pour x une valeur infinie.

Considérons encore la courbe représentée par l'équation $x'^3-3ax'y'+y'^3=0$; on a dans cette courbe

$$AT=\frac{ax'y'}{x'^2-ay'}, \quad AD=\frac{ax'y'}{y'^2-ax'}.$$

Pour trouver la limite vers laquelle tendent ces expressions, à mesure que x' augmente, il faudroit substituer au lieu de y' sa valeur en x', ou du moins le premier terme de chacune des séries descendantes qu'on pourroit tirer de l'équation proposée ; mais on peut supléer à ces résultats dans l'exemple présent, par un artifice analytique fort simple. Si on fait $x=ty$, l'équation proposée deviendra divisible par y^2, et on en tirera $y=\frac{3at}{1+t^3}$. Il est facile de voir maintenant que la supposition de $t=-1$, rendra y infini, et donnera $x=-y$; en changeant x en y dans les expressions de AT et de AD, et prenant les limites, (*Int.* n°. 12 et 13), on aura $AR=-a=AE$. Menant donc par les points R et E, *fig.* 8, construits avec les valeurs précédentes, la droite RE, elle sera l'asymptote des branches AY et AZ.

Si l'une des quantités AT ou AD restant finie, l'autre devenoit infinie, il est évident que l'asymptote seroit parallèle à l'axe sur lequel se trouve cette dernière. Pour ne manquer aucun des asymptotes que doit avoir la courbe proposée, il faut faire successivement x infini et y infini, et substituer dans les expressions de AT et de AD, chacun des résultats différens que donne l'une et l'autre hypothèse. Lorsque AT et AD seront toujours infinis en même tems, on en conclura que la courbe proposée n'a pas d'asymptote. Il pourroit arriver que ces quantités fussent toutes deux nulles : dans ce cas la courbe auroit pour asymptote une droite menée par l'origine des coordonnées ; mais comme on n'en connoîtroit alors qu'un point, il faudroit en chercher la direction, et pour cela on prendroit

la

la limite de l'expression $\frac{dy'}{dx'}$, qui représente la tangente de l'angle MTB pour un point quelconque de la courbe, et on auroit la tangente de l'angle SRB.

248. Nous allons examiner maintenant ce qui arrive à la courbe proposée, lorsque quelques termes de la série

$$k = ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \text{etc.}$$

s'évanouissent, ou bien deviennent infinis.

Supposons d'abord que p, ou $\frac{dy'}{dx'}$, soit égal à zéro ; dans cette hypothèse l'angle MTB sera nul et la tangente TM sera par conséquent parallèle à la ligne des abscisses ; si on conçoit au contraire que p augmente sans cesse, l'angle MTB augmentera en même tems, et finira par être droit lorsque ce coefficient sera devenu infini : la tangente sera donc perpendiculaire à l'axe des abscisses, ou parallèle à celui des ordonnées, lorsque $\frac{dy'}{dx'}$ sera infini.

S'il arrivoit que l'expression de p ou de $\frac{dy'}{dx'}$ devînt $\frac{0}{0}$, alors ce coefficient dépendant d'une équation d'un degré plus élevé que le premier (n°. 142), auroit plusieurs valeurs, chacune desquelles donneroit une tangente pour le point qu'on considère, qui par conséquent seroit multiple.

249. Lorsque, p étant quelconque, on aura $q = \frac{1}{2}\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0$, la différence entre l'ordonnée de la courbe et celle de la tangente, se trouvera réduite à $k - k' = rh^3 + sh^4 + \text{etc.}$ (n°. 238), et comme le terme rh^3, qui, par une valeur convenable de h, peut surpasser la somme de tous ceux qui le suivent, change de signe en même tems que h, il s'ensuit que la quantité $k - k'$ aura après le contact un signe différent de celui qu'elle avoit avant : NN', *fig.* 23, sera donc d'un côté de la droite MT opposé à celui où se trouve nn', et par conséquent la courbe subira une inflexion en M. FIG. 23.

Mais si la valeur de x qui fait évanouir q, fait évanouir en

même tems t, la quantité $k—k'$, réduite alors à sh^4 + etc. conservera le même signe, quel que soit celui de h, et la courbe ne subira pas d'inflexion. En généralisant ces raisonnemens, on verra sans peine que toutes les fois que le premier des termes qui ne s'évanouissent pas dans $k—k'$, sera affecté d'une puissance impaire de h, la courbe subira une inflexion.

Il suit de là que lorsqu'on a $\frac{d^2y'}{dx'^2}=0$, ou $\frac{d^4y'}{dx'^4}=0$, $\frac{d^3y'}{dx'^3}=0$ et $\frac{d^4y'}{dx'^4}=0$, et ainsi de suite, en s'arrêtant à un coefficient d'un ordre pair, la courbe proposée subira une inflexion.

En général, après un point d'inflexion, le coefficient $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ prend par rapport à l'ordonnée un signe contraire à celui qu'il avoit avant, et lorsqu'il est exprimé par une fraction, ce changement peut arriver de deux manières, savoir par le passage de son numérateur du positif au négatif, ou par celui de son dénominateur; dans le second cas, le dénominateur devenant nul, rend la fraction infinie.

Eclaircissons ceci par un exemple:

Soit l'équation $y'^3=x'^5$, on en tirera

$$y'=x'^{\frac{5}{3}}, \qquad \frac{dy'}{dx'}=\frac{5}{3}x'^{\frac{2}{3}}, \qquad \frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{5}{3}.\frac{2}{3}x'^{-\frac{1}{3}} \text{ etc.}$$

et on aura par conséquent $k-k'=\frac{5}{3}.\frac{2}{3}x'^{-\frac{1}{3}}h^2$, etc.

Ce résultat nous apprend que x' étant positif ainsi que y', la courbe se trouve au-dessus de sa tangente, et que quand x' devient négatif, ce qui rend aussi y' négatif, elle se trouve au-dessous; d'où il suit qu'elle subit une inflexion dans le passage de x' positif à x' négatif. On remarquera aussi que $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ ne change de signe qu'en passant par l'infini.

On peut donc conclure de ce qui précède, que *dans un point d'inflexion* $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ *est ou nul ou infini.*

250. Voyons à présent ce qui doit avoir lieu pour un point de rebroussement de la première espèce.

l'ordonnée a dans ce point deux valeurs égales, la tangente MT y est commune à deux branches, enfin si on y transporte l'origine des coordonnées, la quantité k devra avoir au moins deux valeurs, QN et Qn, *fig.* 27; la série qui l'exprime ne peut donc plus être de la forme $ph+qh^2+rh^3$ etc. (n°. 129), aussi les coefficiens p, q, r etc. deviennent-ils ou nuls ou infinis. FIG. 27.

Soit pour exemple l'équation $y'^3=x'^5$, qui donne

$$y'=\pm x'^{\frac{5}{3}}, \qquad \frac{dy'}{dx'}=\pm\frac{5}{3}x'^{\frac{2}{3}}, \qquad \frac{d^2y'}{dx'^2}=+\frac{2}{3}.\frac{5}{3}x'^{-\frac{1}{3}}, \text{ etc.}$$

d'où $k-k'=\pm\frac{2}{3}.\frac{5}{3}x'^{-\frac{1}{3}}h^2+$ etc. La différence $k-k'$ étant positive dans la branche à laquelle appartient l'ordonnée $y'=+x'^{\frac{5}{3}}$, et négative dans celle qu'on déduit de $y'=-x'^{\frac{5}{3}}$, il s'ensuit que la première branche se trouvera au-dessus de la tangente et la seconde au-dessous; elles présenteront donc toutes deux leur convexité à l'axe des abscisses, ainsi qu'on le voit dans la figure 13, et comme la courbe ne s'étend point sur les abscisses négatives, il est bien évident qu'elle aura au point A un rebroussement de la première espèce. A ce point, où $x'=0$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}=\pm\frac{2}{3}.\frac{5}{3}x'^{-\frac{1}{3}}$ devient infini.

Si on prenoit les ordonnées pour les abscisses et réciproquement, on auroit alors $x'=y'^{\frac{3}{5}}$, $\frac{dx'}{dy'}=\frac{3}{5}y'^{-\frac{2}{5}}$, $\frac{d^2x'}{dy'^2}=-\frac{2}{5}.\frac{3}{5}y'^{-\frac{7}{5}}$, etc. et à cause de $h=\frac{dx'}{dy'}\frac{k}{1}+\frac{d^2x'}{dy'^2}\frac{k^2}{1.2}+$ etc. on trouveroit

$$h-h'=-\frac{2}{5}.\frac{3}{5}y'^{-\frac{7}{5}}\frac{k'^2}{1.2}+\text{ etc.}$$

On reconnoîtra encore le rebroussement, en remarquant que $y'^{-\frac{7}{5}}$ ne changeant point de signe lorsque y' passe du positif au négatif, la différence $h-h'$ est négative, soit dans la branche AX, soit dans la branche AX', ce qui prouve qu'elles tournent leur concavité vers l'axe AC; on voit de plus qu'elles s'arrêtent au point A, parce que x' ne devient jamais négatif.

Si on avoit $y'^3 = x'^5$, on trouveroit au point de rebroussement $x', y', \frac{dy'}{dx'}, \frac{dy'}{dx'^2}$ nuls et $\frac{d^3y'}{dx'^3}$ etc. infinis.

Nous conclurons donc de ce qui précède, qu'au point de rebroussement de la première espèce, comme au point d'inflexion, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ devient ou nul ou infini; mais le rebroussement se distingue en ce que la courbe s'arrête à ce point, ce qu'elle ne fait pas au point d'inflexion.

251. Examinons encore l'équation $(ay' - x'^2)^3 = \frac{x'^5}{a}$ (page 341); en faisant $a = 1$, nous en tirerons

$$y' = x'^2 \pm x'^{\frac{5}{2}}, \qquad \frac{dy'}{dx'} = 2x' \pm \frac{5}{2}x'^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = 2 \pm \frac{3}{2}.\frac{5}{2}x'^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{d^3y'}{dx'} = 0 \pm \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}x'^{-\frac{1}{2}}, \text{ etc.}$$

et par conséquent $k - k' = \left(2 \pm \frac{3}{2}.\frac{5}{2}x'^{\frac{1}{2}}\right)h^2 +$ etc.

La branche AX, *fig.* 14, pour laquelle on a

$$y' = x'^2 + x'^{\frac{5}{2}} \text{ et } k - k' = \left(2 + \frac{3}{2}.\frac{5}{2}x'^{\frac{1}{2}}\right)h^2 \text{ etc.}$$

tourne toujours sa convexité vers l'axe des abscisses; la branche AX', donnée par $y' = x'^2 - x'^{\frac{5}{2}}$ tournera aussi sa convexité vers le même axe, tant que $k - k' = \left(2 - \frac{3}{2}.\frac{5}{2}x'^{\frac{1}{2}}\right)h^2 +$ etc. sera une quantité positive, et comme ces deux branches ne s'étendent pas du côté des x négatifs, le point A sera un point de rebroussement de la seconde espèce. Lorsque la quantité $2 - \frac{3}{2}.\frac{5}{2}x'^{\frac{1}{2}}$, sera devenue négative, la courbe présentera sa concavité à l'axe AB, comme on le voit dans la figure, et on trouvera l'abscisse qui répond au point d'inflexion, en faisant $2 - \frac{3}{2}.\frac{5}{2}x'^{\frac{1}{2}} = 0$, ce qui donnera $x' = \frac{64}{225}$.

Au point A où arrive le rebroussement de la seconde espèce on a $\frac{dy'}{dx'}=0$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}=2$, et $\frac{d^3y'}{dx'^3}$ devient infini, ainsi que les coefficiens ultérieurs; et en effet k doit avoir à ce point deux valeurs distinctes, ce que ne comporte point la série qui l'exprime.

252. L'inspection seule de la figure 28 fait voir aussi que lorsque le point M est la limite de la courbe, dans le sens de son ordonnée, la quantité k doit avoir au moins deux valeurs QN et Qn; la série qui l'exprime ne peut plus être de la forme $ph+qh^2+rh^3$ etc. et les coefficiens p, q, r etc. deviennent infinis: on remarquera de plus que dans ce cas, la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées, circonstance qui rend $\frac{dy'}{dx'}$ infini (n°. 248). FIG. 28.

On voit donc maintenant que les exceptions que nous avons montrées (n°. 128 et 135), dans la forme du développement de $f(x+k)$ sont, comme nous l'avons annoncé (n°. 143), une suite nécessaire des *affections* des lignes courbes, et servent à les faire connoître. C'est ainsi que les considérations géométriques confirment et éclaircissent les résultats de l'Analyse. La théorie des *osculations* dont nous parlerons bientôt, jettera un nouveau jour sur tout ce qui précède.

Il est bon d'observer que les fonctions $y'=x'^{\frac{1}{3}}$ et $y'=x'^{\frac{2}{3}}$ (n°. 249 et 250), sont comprises dans la fonction $y=(x-a)^n$ que nous avons considérée n°. 28 et qui devient $y'=x'^n$ en transportant l'origine des abscisses au point où $x=a$, ce qui ne change rien au cours de la ligne, dont elle exprime l'ordonnée. L'équation $y'=x'^a\pm x'^{\frac{5}{2}}$, se déduit aussi de $y=bx^m+c(x-a)^{\frac{p}{q}}$ (n°. 132); en faisant $b=1$, $m=2$, $c=1$, $a=0$ et $\frac{p}{q}=\frac{5}{2}$.

253. Il suit du n°. 248 que pour trouver les points où la tangente est parallèle à la ligne des abscisses, il faut faire $\frac{dy'}{dx'}=0$; la figure 28 montre que les points L et l où cette circonstance a lieu, sont les limites

de la courbe $ML\,m\,l$ dans le sens de son ordonnée et que l'un répond au *maximum* et l'autre au *minimum* des valeurs de cette variable on distingue le premier cas du second, en observant que dans l'un la courbe tourne sa concavité vers l'axe des abscisses et dans l'autre sa convexité : $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est donc négatif lors du *maximum*, et positif lors du *minimum*.

Si $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ s'évanouit, il faut que $\frac{d^3y'}{dx'^3}$ s'évanouisse aussi, sans que $\frac{d^4y'}{dx'^4}$ disparoisse, et ainsi de suite, ou bien que ni $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, ni aucun des coefficiens suivans ne deviennent infinis ; car dans ces circonstances la courbe proposée auroit la figure MLX ou Mlx ; c'est-à-dire, ou un point d'inflexion ou un point de rebroussement ; mais l'ordonnée ne seroit ni un *maximum*, ni un *minimum*. Enfin, pour obtenir un *maximum* ou un *minimum*, il ne faut pas non plus que $\frac{dy'}{dx'}$ devienne $\frac{0}{0}$, parce que le point M seroit alors un point multiple (n°. 248), nous voilà donc retombés par les considérations géométriques, sur les règles données dans les n°s. 148 et suiv.

Les limites de la courbe, dans le sens des abscisses, s'obtiendront en cherchant les points où la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées, c'est-à-dire, en faisant $\frac{dy'}{dx'}$ infini, ou en égalant à zéro le dénominateur de la fraction qui l'exprime. On peut encore considérer ces points comme répondant aux *maxima* et aux *minima* de la variable x' ; il faudroit dans ce cas, envisager x' comme une fonction de y', et égaler à zéro la valeur de $\frac{dx'}{dy'}$, procédé qui revient au même que le précédent, puisque $\frac{dx'}{dy'}$ est l'inverse de $\frac{dy'}{dx'}$.

254. Les *maxima* et les *minima* d'une courbe étant trouvés, soit

par rapport à l'abscisse, soit par rapport à l'ordonnée, on cherchera ses points multiples, en égalant à zéro le numérateur et le dénominateur de $\frac{dy'}{dx'}$, puisque dans ces points on doit avoir $\frac{dy'}{dx'}=\frac{0}{0}$ (n°. 248); les deux équations que fournira cette règle, étant suffisantes pour déterminer x' et y', devront nécessairement s'accorder avec la proposée, sans quoi la courbe que cette dernière représente, n'aura aucun point multiple.

255. Pour trouver enfin les points d'inflexion et ceux de rebroussement, il faudra faire $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ nul ou infini, c'est-à-dire, égaler successivement à zéro le numérateur et le dénominateur de son expression. Lorsqu'on aura déterminé les valeurs de y' et de x' qui résultent de l'équation qu'on obtiendra ainsi, combinée avec la proposée, le signe que doit avoir $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ immédiatement avant et après ces points, et ce que devient dans l'un et l'autre cas la valeur de y', feront distinguer les points d'inflexion de ceux de rebroussement. On peut aussi trouver ces derniers, en cherchant d'abord les points multiples, et en examinant ensuite ce que deviennent x' et y', avant et après chacun de ces points. On jugera par les signes des diverses expressions de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ relativement aux points qui précèdent ou qui suivent, si le rebroussement est de la première ou de la seconde espèce.

256. Je vais maintenant donner quelques applications, et je prendrai d'abord pour exemple de la recherche des *maxima* et des *minima* l'équation $x'^3-3ax'y'+y'^3=0$, déjà traitée (n°. 153). On en tire $\frac{dy'}{dx'}=\frac{ay'-x'^2}{y'^2-ax'}$, et en égalant d'abord à zéro le numérateur, il vient $ay'-x'^2=0$; substituant la valeur de y' que donne cette équation dans la proposée, on trouve $x'^6-2a^3x'^3=0$.

L'examen que nous avons fait, dans le n°. cité, de chacune des

valeurs que donne cette dernière équation, nous a fait reconnoître que $x'=a\sqrt[5]{2}$ est la seule qui réponde à un *maximum*; on en tire $y'=a\sqrt[5]{4}$: en prenant, *fig.* 8, $AS=a\sqrt[5]{2}$ et $SL=a\sqrt[5]{4}$, le point L sera celui où le *maximum* a lieu.

Si on égale ensuite à zéro le dénominateur de $\frac{dy'}{dx'}$, on trouvera $y'^3-ax'=0$: sans faire le calcul on voit par la symétrie des résultats, que dans ce second cas, la valeur de x' sera la même que celle de y' dans le précédent, celle de y' la même que celle de x', et que par conséquent, on trouvera le point X, en prenant $AV=a\sqrt[5]{4}$ et $VX=a\sqrt[5]{2}$.

En faisant nuls le numérateur et le dénominateur, en même tems, il vient $x'=0$ et $y'=0$, valeurs qu'on retrouve aussi dans les équations qui donnent les *maxima* et les *minima*, et qui nous apprennent que l'origine A est un point multiple. Pour connoître la tangente à ce point, on différentiera une seconde fois l'équation proposée, en regardant dx' et dy' comme constantes, (n°. 142), et en supposant x' et y' nuls, on trouvera $3adx'dy'=0$, équation à laquelle on satisfera, soit en faisant $\frac{dy'}{dx'}=0$, soit en faisant $\frac{dx'}{dy'}=0$; il s'ensuit de là que l'une des tangentes est l'axe même des abscisses, et l'autre celui des ordonnées, ainsi qu'on l'a déjà trouvé, n°. 224. Pour montrer comment l'analyse retrace fidellement toutes les circonstances géométriques, je ferai remarquer que parmi les deux valeurs nulles qu'on a trouvées pour x dans le n°. 153, il y en a une qui satisfait aux conditions du *minimum*; et en effet, dans la branche YAX de la courbe proposée, qui touche l'axe des abscisses AB, l'ordonnée est bien un *minimum* au point A. On voit pareillement que l'abscisse du même point est un *minimum* dans la branche AZ touchée par l'axe des ordonnées (*).

(*) La courbe de la figure 8 joint aux particularités remarquables que nous avons déjà fait connoître, celle d'être partagée en deux parties égales par une droite menée par le point A, perpendiculairement à son asymptote; on peut s'assurer de cette dernière propriété en cherchant le diamètre absolu par le procédé indiqué n°. 219, 257.

257. Considérons encore la courbe représentée dans la figure 9; son équation $y'^4 - 96a^2y'^2 + 100a^2x'^2 - x'^4 = 0$, donne

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{x'^3 - 50a^2x'}{y'^3 - 48a^2y'}.$$

En égalant à zéro le numérateur de cette fraction, on trouvera $x' = 0$ et $x'^2 - 50a^2 = 0$. La première valeur de x', substituée dans l'équation proposée, donne $y' = 0$ et $y' = \pm\sqrt{96a^2}$; mais comme en faisant $x' = 0$ et $y' = 0$, il vient $\frac{dy'}{dx'} = \frac{0}{0}$, il s'ensuit que ces valeurs n'appartiennent ni à un *maximum* ni à un *minimum*, et qu'elles désignent un point multiple. On s'assurera que la deuxième valeur de y', savoir $y' = +\sqrt{96a^2}$, qui répond au point D, est un *maximum*, soit en cherchant ce que devient alors $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, soit en vérifiant si l'ordonnée qui la précède et celle qui la suit immédiatement sont toutes deux plus petites qu'elle: $y' = -\sqrt{96a^2}$ est le *maximum* correspondant des ordonnées négatives. Il nous reste à examiner les racines de l'équation $x'^2 - 50a^2 = 0$, qui sont $x' = \pm\sqrt{50a^2}$; en les substituant dans l'équation proposée, elles rendent y' imaginaire, et ne donnent par conséquent ni *maximum* ni *minimum*.

Si on vouloit connoître les positions des tangentes de la courbe, au point A, pour lequel on vient de voir que $\frac{dy'}{dx'}$ se réduit à $\frac{0}{0}$, on différentieroit une seconde fois l'équation proposée en regardant dx' et dy' comme constantes; et faisant ensuite x' et y' nuls dans le résultat, on obtiendroit $48a^2dy'^2 - 50a^2dx'^2 = 0$, ce qui donneroit

$$\frac{dy'}{dx'} = \pm\sqrt{\frac{50}{48}} = \pm\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

On construiroit facilement, au moyen de ces deux valeurs, les droites qui touchent chacune des branches de la courbe proposée au point A, puisqu'on connoîtroit l'angle qu'elles font avec l'axe des abscisses, ou le rapport des ordonnées aux abscisses qui constitue cet angle (n°. 196).

Pour obtenir les limites de la courbe dans le sens des abscisses,

ou, ce qui revient au même, les *maxima* et les *minima* de x', on égalera à zéro le dénominateur de la fraction qui exprime $\frac{dy'}{dx'}$, ce qui fournira l'équation $y'^3-48a^2y'=0$, d'où $y'=0$ et $y'=\pm\sqrt{48a^2}$. La première valeur donne $x'=0$, et ne répond qu'au point multiple situé à l'origine; mais on tire des deux dernières $x'=\pm 6a$, et $x'=\pm 8a$: l'un de ces résultats fait connoître le point F et ses analogues, l'autre donne H et ses analogues, et tous deux s'accordent avec ce qu'on a trouvé n°. 204. On observera qu'au point F l'abscisse est un *maximum*, et qu'elle est un *minimum* au point H, puisque dans le premier la courbe tourne sa concavité vers l'axe AC des ordonnées, auquel elle présente sa convexité dans le second.

Pour achever de déterminer les principales circonstances de la courbe proposée, il nous reste à trouver la nature de ses branches infinies et ses points d'inflexion, car nous savons déjà qu'elle n'a aucun rebroussement. Commençons par nous occuper des branches infinies; on voit facilement que x' et y' deviennent infinis en même tems, et si on donne à l'équation $y'^4-96a^2y'^2+100a^2x'^2-x'^4=0$, la forme suivante $\frac{y'^4}{x'^4}-96a^2\frac{y'^2}{x'^4}+100\frac{a^2}{x'^2}-1=0$, on trouvera que le rapport $\frac{y'}{x'}$ a pour limite l'unité. Faisant $y'=x'$ dans l'expression de $\frac{dy'}{dx'}$ et prenant la limite, on trouvera encore l'unité, d'où il suit que la branche X et ses analogues tendent sans cesse à faire un angle de 45° avec l'axe des abscisses.

On aura ensuite

$$x'-y'\frac{dx'}{dy'}=\frac{x'^4-50a^2x'^2-y'^4+48a^2y'^2}{x'^3-50a^2x'^2}$$

$$y'-x'\frac{dy'}{dx'}=\frac{y'^4-48a^2y'^2-x^4+50a^2x'^2}{y'^3-48a^2y'^2}.$$

Ces expressions qui, lorsqu'on y met pour x'^4 sa valeur, se réduisent à

$$\frac{50a^2x'^2-48a^2y'^2}{x'^3-50a^2x'^2},\qquad \frac{48a^2y'^2-50a^2x'^2}{y'^3-48a^2y'^2},$$

diminuent sans cesse à mesure que x' et y' augmentent, et n'ont que zéro pour limite. On voit par là, (n°. 246) que la courbe

proposée a pour asymptote deux droites menées par l'origine A, et faisant un angle de 45° avec l'axe des abscisses. On n'a point mené ces droites pour ne pas trop compliquer la figure.

Passons maintenant à la recherche des inflexions. On a

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{(3x'^2-50a^2)-(3y'^2-48a^2)\frac{dy'^2}{dx'^2}}{y'^3-48a^2y'}$$

cette expression devient $\frac{0}{0}$, lorsque y' et x' sont nuls, cas dans lequel $\frac{dy'^2}{dx'^2} = \frac{50}{48}$; pour trouver sa vraie valeur il faudra chercher la différentielle troisième de l'équation proposée, en regardant d^2y' comme constant; faisant dans le résultat x' et y' égaux à zéro, on aura $-144a^2dy'd^2y'=0$, ce qui donne $\frac{d^2y'}{dx'^2}=0$, et prouve que le point A est en effet un point d'inflexion.

Nous savons que la courbe proposée en a encore d'autres; pour les trouver, il faut égaler le numérateur de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ à zéro, et il viendra l'équation $3x'^2-50a^2-(3y'^2-48a^2)\frac{dy'^2}{dx'^2}=0$; mettant pour $\frac{dy'^2}{dx'^2}$ sa valeur, et faisant disparoître le dénominateur, on aura

$(3x'^2-50a^2)(y'^3-48a^2y')^2-(3y'^2-48a^2)(x'^3-50a^2x')^2=0$:

on peut donner à cette équation la forme suivante,

$y'^2(y'^2-48a^2)^2(3x'^2-50a^2)-x'^2(x'^2-50a^2)^2(3y'^2-48a^2)=0$.

Si maintenant on observe que l'équation proposée, revient elle-même à celle-ci, $(y'^2-48a^2)^2-(x'^2-50a^2)^2+196a^4=0$, et qu'on prenne la valeur de $(y'^2-48a^2)^2$, pour la substituer dans la précédente, on trouvera après les réductions

$(x'^2-50a^2)^2(25y'^2-24x'^2)+98a^2y'^2(3x'^2-50a^2)=0$:

cette dernière combinée avec la proposée, servira à déterminer les abscisses et les ordonnées du point d'inflexion K et de ses analogues dans les autres branches; on en tirera facilement la valeur de y'^2, et en la substituant dans l'équation de la proposée, on aura un résultat qui ne contiendra plus que x'.

En faisant $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ infini, ou en égalant à zéro son dénominateur y'^2-48a^2, on trouveroit $y'=0$ et $y'=\pm\sqrt{48a^2}$: ces valeurs ne nous apprennent rien de nouveau ; la première appartient au point A que nous avons déjà remarqué, et la seconde aux points D et H, que nous savons n'être pas des points d'inflexion, mais seulement des limites de la courbe dans le sens de ses abscisses.

Théorie des osculations des courbes.

258. Quoiqu'on ne puisse mener aucune droite entre une courbe et sa tangente, on peut néanmoins y faire passer une infinité d'autres lignes courbes différentes, qui toucheront toutes la courbe proposée, et seront touchées par sa tangente. Le cercle offre un exemple très-simple de cette circonstance ; on voit dans les élémens de géométrie, que lorsqu'un cercle est touché par une droite quelconque, tous ceux qui passent par le point de contact, et qui ont leur centre sur la ligne droite menée par ce point et par le centre du premier, se trouvent entre lui et sa tangente, s'ils sont d'un rayon plus grand que le sien.

Si dans la série $k=ph+qh^2+rh^3+sh^4+$ etc. ... (k) on fait successivement $k'=ph$, $k''=ph+qh^2$, $k'''=ph+qh^2+rh^3$, etc. k' sera, comme on sait, l'ordonnée de la tangente, prise par rapport à l'axe MB' et à l'origine M, *fig.* 29 ; k'' sera celle d'une courbe parabolique menée aussi par ce point, et déterminée par les valeurs particulières que prennent les coefficiens p et q au point M : k''' sera encore l'ordonnée d'une courbe parabolique, d'un ordre supérieur à la précédente, et ainsi de suite. Maintenant il est aisé de se convaincre que la première parabole passe entre la courbe et sa tangente, que la seconde parabole passe entre la première et la courbe ; une troisième formée de la même manière passeroit entre la seconde et la courbe, et ainsi de suite. En effet, si on prend les différences entre l'ordonnée de la courbe, celle de la tangente, et celle de chacune des paraboles qui viennent après, on trouvera

FIG. 29.

$$NN' = k-k' = ph^2+qh^3+sh^4+\text{etc.}$$
$$NN'' = k-k'' = rh^3+sh^4+\text{etc.}$$
$$NN''' = k-k''' = sh^4+\text{etc.}$$
etc.

et quand l'abscisse h sera assez petite pour qu'un terme quelconque de la série, qui exprime la valeur de k, soit plus grand que la somme de tous les suivans, il est évident qu'alors NN'' sera moindre que NN', NN''' moindre que NN'' etc. Lorsqu'on fera h négative, on trouvera de même $nn''<nn'$, $nn'''<nn''$ etc. la courbe MY'' passe donc entre la tangente MY', et la courbe proposée MX; de même la courbe MY''' passe entre MY'' et MX, etc. Chacune des lignes MY', MY'', MY''', etc. s'approchant plus de la courbe proposée que celle qui la précède, peut être regardée comme ayant un contact plus parfait ou d'un *ordre supérieur* à celui qui se trouve entre ces deux dernières : l'ordre du contact est marqué par le nombre de termes qui sont communs à la série (*k*), et à l'équation de la courbe touchante.

Les courbes MY'', MY''' etc. jouissent toutes d'une propriété analogue à celle qui forme le caractère de la tangente (n°. 231); de même qu'entre cette ligne et la courbe, on ne peut faire passer aucune autre droite, de même entre la parabole MY'' et la courbe MX, on ne peut faire passer aucune parabole du second ordre. Pour s'en convaincre il suffit de considérer une parabole de cet ordre rapportée à l'abscisse h, et représentée par l'équation $k_{,}=Ah+Bh^{2}$, on verra que tant que A et B différeront de p et de q, la quantité $k-k_{,}$ surpassera, soit positivement soit négativement, la quantité $k-k''$. Si on avoit $A=p$, quelque valeur qu'ait d'ailleurs le coefficient B, la parabole donnée par l'équation $k_{,}=ph+Bh^{2}$, auroit la même tangente que la proposée MX, et la toucheroit par conséquent. Il suit de là qu'il existe une infinité de paraboles, qui peuvent avoir un contact du premier ordre, avec une courbe donnée, mais qu'il n'y en a qu'une seule qui puisse en avoir un du second; pour distinguer cette dernière de toute autre, nous la nommerons *parabole osculatrice*. On verra de même que parmi les courbes paraboliques représentées par l'équation

$$k_{,,}=Ah+Bh^{2}+Ch^{3},$$

il y en aura une infinité qui auront avec la courbe MX, des contacts du premier et du second ordre; mais qu'une seule, savoir celle où $A=p$, $B=q$, $C=r$, peut en avoir un du troisième : elle

sera donc la deuxième parabole osculatrice, et ainsi des autres.

Lorsque la courbe proposée ne subit pas d'inflexion au point qu'on considère, elle se trouve du même côté de la tangente, immédiatement avant et après le contact, mais il n'en est pas de même à l'égard de la première parabole osculatrice: car la différence NN'', dont le signe peut toujours dépendre de son premier terme rh^3, en prenant h convenablement, change de signe en même tems que cette quantité, ce qui prouve que la courbe $y''MY''$, passe d'un côté à l'autre de la courbe MX; il y a donc en quelque sorte contact et intersection entre ces deux courbes. Si on avoit de la peine à concevoir cette circonstance, il faudroit se rappeller que la tangente au point d'inflexion, coupe la courbe proposée, et ne la touche pas moins pour cela. Pareille chose arrivera à toutes les osculatrices d'un ordre pair; il n'y aura que les osculatrices d'un ordre impair qui soient toutes du même côté à l'égard de la courbe proposée (*).

Lorsque parmi les coefficiens de la série (k) il s'en trouve de nuls, la ligne osculatrice de l'ordre inférieur au premier de ces termes, acquiert par là un contact d'un ordre supérieur au sien; ainsi quand le coefficient q est nul, la tangente a alors un contact du second ordre, puisque $k—k'$ se réduit à rh^3+sh^4+ etc., ou, ce qui revient au même, la première parabole osculatrice devient une ligne droite, et se confond avec la tangente; la seconde parabole osculatrice se confondroit avec la première si on avoit $r=0$: toutes deux se réuniroient à la tangente, si q et r étoient nuls en même tems. Il est facile d'étendre et de modifier ces considérations suivant les circonstances qui peuvent se présenter. Lorsque les termes de la série (k) deviennent $\frac{0}{0}$ ou infinis; il faut alors recourir à la série plus générale $k=Ah^\alpha+Bh^\beta+Ch^\gamma+$etc. déduite de l'équation

(*) Si on prend les différences entre l'ordonnée de chacune des lignes osculatrices et celle de la précédente, on aura
$k'=ph=QN'$, $k''—k'=qh^2=QN''—QN'$, $k'''—k''=rh^3=QN'''—QN''$, résultats remarquables en ce qu'ils représentent l'expression linéaire des termes de la série (k).

proposée par les procédés indiqués n°. 134, et qui donnera les courbes paraboliques osculatrices relatives au point particulier qu'on considère. Nous allons montrer que les courbes du genre parabolique ne sont pas les seules qui puissent être les osculatrices d'une courbe donnée.

259. Si on conçoit une courbe quelconque passant par le point M, et ayant par conséquent à ce point les mêmes coordonnées AP et PM que la proposée, et qu'on représente par K l'ordonnée de cette courbe relative à l'axe MB' et à l'abscisse $QM=h$, en substituant dans son équation que je désignerai par (V) ainsi qu'elle, $x'+h$ et $y'+K$ à la place de x et de y, on trouvera pour K une série de la forme $K=Ph+Qh^2+Rh^3+Sh^4+$ etc. et il viendra par conséquent

$$k-K=(p-P)h+(q-Q)h^2+(r-R)h^3+(s-S)h^4+\text{etc.}$$

Lorsque p sera égal à P, cette courbe aura la même tangente que la proposée, et dans ce cas, elles se toucheront l'une et l'autre. On voit aussi que tant que q et Q ne seront pas de signe contraire, la seconde courbe passera entre la courbe proposée et sa tangente, car $k-K$ étant réduit alors à $(q-Q)h^2+(r-R)h^3+$ etc. sera moindre que $k-k'=qh^2+rh^3+$ etc. quand l'abscisse h sera prise de manière que le premier terme de chacune de ces séries surpasse tous ceux qui le suivent; la différence $q-Q$ comparée à q, fera connoître la situation respective de la courbe touchante (V), à l'égard de la courbe proposée et de sa tangente. Le contact de la courbe proposée avec la courbe (V) seroit du second ordre, si on avoit en même tems $p-P=0$, $q-Q=0$, du troisième si on avoit $p-P=0$, $q-Q=0$, $r-R=0$; et en général de l'ordre marqué par le nombre de coefficiens qui s'évanouissent dans l'expression de $k-K$.

Pour un point quelconque de la courbe (V) les coefficiens

$$P=\frac{dy}{dx},\qquad Q=\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2},\qquad R=\frac{1}{2.3}\frac{d^3x}{dx^3},\text{ etc.}$$

sont des fonctions données de x, de y, et des constantes qui entrent dans son équation; mais au point M, x et y se changent en x' et y', et comme les coefficiens

$$p=\frac{dy'}{dx'},\qquad q=\frac{1}{2}\frac{d^2y'}{dx'^2},\qquad r=\frac{1}{2.3}\frac{d^3y'}{dx'^3},\text{ etc.}$$

sont des fonctions de x' et de y', les équations $p-P=0$, $q-Q=0$ etc. ne renferment que les constantes dont on vient de parler, et les coordonnées du point M, et ne peuvent par conséquent devenir identiques, que lorsque ces constantes ont avec les coordonnées x' et y', les relations qu'elles expriment.

Si la courbe (V) n'est pas entièrement déterminée, soit dans sa position, soit dans son espèce, son équation contiendra alors des constantes arbitraires dont on pourra disposer, pour satisfaire à quelques-unes des équations $p-P=0$, $q-Q=0$ etc. et déterminer par là un contact d'un ordre plus ou moins élevé, suivant le nombre de ces constantes.

260. Pour éclaircir ceci par un exemple, supposons que la courbe (V) soit un cercle dont la position du centre et la grandeur du rayon soient quelconques ; cherchons les divers contacts que ce cercle peut avoir avec une courbe donnée, et comment les constantes qui entrent dans son équation sont déterminées par la nature du contact, et par la position du point où ce contact a lieu.

Représentons par α et β les coordonnées du centre du cercle que nous considérons, par a son rayon, et par x et y les coordonnées d'un point quelconque de sa circonférence ; la distance de ce dernier au centre, aura pour expression (n°. 197) $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$ et, par la nature du cercle, devra être égale au rayon a ; prenant les quarrés, on aura $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$: telle est l'équation d'un cercle placé d'une manière quelconque, par rapport aux axes, et décrit d'un rayon quelconque.

La première condition que ce cercle doit remplir, avant de toucher la courbe proposée, est de passer par le point M, et pour cela il faut que son équation soit satisfaite, lorsqu'on remplacera x et y par x' et par y', ce qui donnera

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=a^2 \ldots\ (1)$$

Puisqu'on doit regarder les variables x' et y', comme déterminées pour le point M qu'on considère, il s'ensuit que des trois constantes arbitraires α, β et a, il n'en reste plus que deux dont on puisse disposer

disposer pour remplir les conditions du contact, et que par conséquent ce cercle ne pourra avoir, en général, avec la courbe proposée, un contact d'un ordre plus élevé que le second.

L'équation $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$ donne $P=\frac{dy}{dx}=\frac{-(x-\alpha)}{y-\beta}$;

en changeant x en x' et y en y' dans cette valeur, et en la substituant dans $p-P=0$, il viendra

$$\frac{dy'}{dx'}+\frac{x'-\alpha}{y'-\beta}=0, \text{ ou } (y'-\beta)\frac{dy'}{dx'}+(x'-\alpha)=0.....(2)$$

Cette équation ne suffit pas pour déterminer α et β, mais elle établit la relation qui doit exister entre ces quantités, pour chacune des valeurs particulières de x' et de y': en lui donnant la forme

$$\beta-y'=-\frac{dx'}{dy'}(\alpha-x'),$$

on verra qu'elle est la même que celle de la normale dans laquelle on auroit changé x en α et y en β (n°. 245), et on en conclura que tous les cercles qui ont leur centre sur la normale au point M, et qui passent par ce point, ont un contact du premier ordre avec la courbe proposée.

261. Formons encore l'équation $q-Q=0$, pour achever de déterminer le cercle *touchant*. Nous tirerons d'abord de l'équation de ce cercle

$$Q=\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}{2(y-\beta)^3};$$

mettant ensuite x' pour x et y' pour y, nous aurons

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y'}{dx'^2}=-\frac{(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2}{2(y'-\beta)^3},$$

$$\text{ou } (y'-\beta)^3\frac{d^2y'}{dx'^2}+(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2=0.....(3)$$

Les équations (1), (2) et (3) réunies sont en nombre suffisant pour déterminer α, β et a: la seconde donne $(x'-\alpha)=-(y'-\beta)\frac{dy'}{dx'}$; substituant cette valeur dans la troisième, on trouve

$$y'-\beta=-\frac{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}, \text{ d'où } x'-\alpha=\frac{\frac{dy'}{dx'}\left(1+\frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}; \text{ et}$$

au moyen de ces expressions, l'équation (1) donnera

$$a=\frac{\left(1+\frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Les deux premiers résultats font connoître, par rapport au point M, la position du centre du cercle qui a dans ce point un contact du second ordre, avec la courbe proposée.

262. Il ne peut passer entre ce cercle et cette courbe, aucun autre cercle; car, à cause de $p=P$ et $q=Q$, on a

$$k-K=(r-R)h^3+(s-S)h^4+\text{etc.}$$

et pour un cercle qui n'auroit qu'un contact du premier ordre, il viendroit $k-K_{,}=(q-Q_{,})h^2+(r-R_{,})h^3+(s-S_{,})h^4+\text{etc.}$ En raisonnant ici comme dans le n°. 258, on verra que la différence $k-K_{,}$ sera toujours plus grande que $k-K$, tant qu'on prendra h convenablement, et que par conséquent le second cercle ne pourra se trouver, immédiatement avant et après le contact, entre le premier et la courbe proposée: ce premier cercle sera donc le cercle *osculateur*.

On voit par la forme de l'expression de $k-K$, que le cercle osculateur, de même que la parabole osculatrice (n°. 258), passe après le contact du côté de la courbe opposé à celui où il se trouvoit avant, à moins que les valeurs de x' et de y' particulières au point M, ne fassent évanouir $r-R$. Dans ce cas, le contact du cercle osculateur et de la courbe proposée seroit du troisième ordre; il deviendroit du quatrième, si $s-S$ disparoissoit en même tems, et ainsi de suite.

En regardant le point M comme indéterminé, on pourra en général lui assigner une position telle qu'on ait $r-R=0$; il faudra pour cela déterminer x' et y', en combinant cette équation avec celle de la courbe, et lorsqu'on en tirera pour ces inconnues des valeurs réelles, le cercle osculateur aura dans le point qu'elles désignent un contact du quatrième ordre.

263. La position du centre du cercle osculateur étant différente

pour chacun des points de la courbe proposée, l'ensemble de tous ces centres formera une courbe dont les coordonnées seront α et β. On trouvera son équation en éliminant x' et y' entre les équations (1) et (2) et celles de la courbe proposée; car la relation qu'on obtiendra en α et β par cette opération, étant indépendante des valeurs particulières de x' et de y', doit convenir nécessairement à toutes celles que peuvent prendre α et β. (*)

264. Il est important de remarquer que le rayon du cercle osculateur mené par le point de contact, touche toujours la courbe dont nous venons de parler. Pour le prouver, prenons dans l'équation (2) la valeur de $x'-\alpha$ et substituons-la dans l'équation (3), cette dernière deviendra

$$1+\frac{dy'^2}{dx'^2}+(y'-\beta)\frac{d^2y'}{dx'^2}=0;$$

nous pourrons donc employer au lieu des équations (2) et (3), les deux suivantes

$$(x'-\alpha)\,dx'+(y'-\beta)\,dy'=0$$
$$dx'^2+dy'^2+(y'-\beta)\,d^2y'=0.$$

Maintenant si on différentie la première par rapport à x', non-seulement y' variera, mais α et β varieront aussi, puisque ce sont des fonctions implicites de x', et on trouvera par conséquent

$$dx'^2+dy'^2+(y'-\beta)\,d^2y'-d\alpha\,dx'-d\beta\,dy'=0,$$

résultat qui, en vertu de la seconde équation ci-dessus, se réduit à

$$d\alpha\,dx'+d\beta\,dy'=0, \text{ d'où } \frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{dx'}{dy'}.$$

Mais en observant que $\frac{d\beta}{d\alpha}$ exprime aussi le coefficient différentiel de la variable β considérée comme fonction de α (n°. 68), on verra que la tangente de la courbe sur laquelle se trouve le centre

(*) Je saisirai cette occasion pour faire remarquer qu'en général l'élimination, faisant disparoître certaines quantités et rendant par là les autres indépendantes des valeurs particulières que peuvent prendre les premières, conduit à un résultat qui renferme collectivement tous ceux qu'on auroit eus pour chacune de ces valeurs: c'est par cette propriété que l'élimination joue un grand rôle dans les questions d'Analyse et de Géométrie, ainsi qu'on le verra dans la suite.

du cercle osculateur, fait avec l'axe des abscisses le même angle que la normale de la courbe proposée, et puisque ces droites passent l'une et l'autre par le centre du cercle osculateur, elles se confondent nécessairement.

265. Ceci nous conduit à parler de la manière dont la courbe proposée *MX*, *fig.* 30, peut être engendrée par la courbe *FZ*, qu'on suppose le lieu des centres de tous les cercles osculateurs de la première. La ligne *MF* étant tangente à la courbe *FZ*, a nécessairement la même direction que celle que prendroit un fil enveloppé autour de la convexité de cette courbe, lorsqu'en le développant on seroit parvenu à l'en détacher au point *F*; et il est aisé de voir qu'en supposant à ce fil une longueur convenable, l'extrémité par laquelle il se développe décrit la courbe *MX*. Ce procédé a une grande analogie avec la description du cercle; c'est la courbe *FZ*, qui fait l'office du centre, et le rayon *MF* au lieu d'être constant; varie pour chaque point. La courbe *FZ* s'appelle *la développée*, la courbe *MX* *la développante*, et le rayon du cercle osculateur se nomme *rayon de la développée.* FIG. 30.

266. De tous les cercles qui touchent la courbe proposée au point *M*, le cercle osculateur étant celui qui s'en approche le plus, soit avant soit après le contact, est par conséquent celui dont la courbure diffère le moins de celle que cette courbe a dans le point que nous considérons. La courbure du cercle est uniforme pour tous ses points, mais celle d'un petit cercle est plus considérable que celle d'un grand, ensorte que les courbures des cercles sont en raison inverse de leur rayon. On peut donc, par le rayon du cercle osculateur, juger de la courbure d'une courbe donnée, dans l'un quelconque de ses points; car dans cette circonstance on compare la courbe à son cercle osculateur, de même qu'on la compare à sa tangente, pour connoître la direction vers laquelle tendroit à chaque instant le point qui la décriroit. Ces considérations ont fait donner aussi au rayon du cercle osculateur le nom de *rayon de courbure*, et on voit d'après ce qui précède, que la courbure d'une courbe est en raison inverse de son rayon de courbure.

Les variations du rayon des courbures et les circonstances du

cours de la développée, sont aussi très-propres à faire reconnoître les points singuliers de la courbe proposée.

L'expression du rayon de courbure devient infinie lorsque $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ s'évanouit, et devient nulle quand il est infini.

On trouvera le point de la courbe proposée dans lequel le rayon de courbure est un *maximum* ou un *minimum*, en considérant ce rayon, ainsi qu'on le doit, comme une fonction de x', et en égalant son coefficient différentiel à zéro, suivant la règle ordinaire. Ce calcul effectué sur l'expression générale, mène à une conséquence remarquable; car il en résulte que le cercle osculateur a dans ce cas un contact du quatrième ordre avec la courbe proposée. En effet, le numérateur de la différentielle de la valeur de a (n°. 261) étant égalé à zéro, fournit l'équation

$$3\frac{dy'}{dx'}\frac{d^2y'^2}{dx'^4}-\left(1+\frac{dy'^2}{dx'^2}\right)\frac{d^3y'}{dx'^3}=0,$$

qui déterminera x'; mais d'un autre côté en prenant la différentielle troisième de l'équation du cercle osculateur (n°. 260), on aura

$$3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^3}+(y-\beta)\frac{d^3y}{dx^3}=0.$$

Mettant pour $y-\beta$ sa valeur tirée de la différentielle seconde, et changeant x en x' et y en y', pour obtenir le résultat qui convient au point de contact, il viendra la même équation que ci-dessus. Il suit de là que le coefficient $\frac{d^3y'}{dx'^3}$ est le même pour la courbe proposée et pour le cercle osculateur, lorsque le rayon de ce dernier est un *maximum* ou un *minimum*; et à cause que

$$r=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y'}{dx'^3}\text{ et }R=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3},$$

on aura alors $r-R=0$, résultat qui exprime la condition relative à un contact du troisième ordre (n°. 259).

Le centre de courbure se trouvant toujours dans l'espace vers lequel la courbe proposée tourne sa concavité, il s'ensuit qu'après un point d'inflexion ou de rebroussement, ce centre passe d'un côté à l'autre de la tangente, ainsi que la développée. Je ne

m'arrêterai point à exposer en détail les diverses formes que peut prendre la développée, je ferai remarquer seulement que, lorsqu'elle subit une inflexion, il en résulte un point de rebroussement de la seconde espèce dans la courbe proposée; cela est aisé à voir sur la figure; car le rayon de courbure MF, parvenu en NG, revient sur ses pas en HO, et décrit la branche ponctuée NO. C'est ainsi que l'Hôpital reconnut l'existence de cette espèce de rebroussement, contestée ensuite par de Gua, mais mise hors de doute par d'Alembert et Euler.

267. Je ne m'étendrai pas beaucoup sur l'application des résultats obtenus dans les articles précédens, parce que cette application n'a aucune difficulté lorsqu'on possède bien le méchanisme du Calcul différentiel.

Soit d'abord la parabole donnée par l'équation $y'^2 = Ax'$.

On aura $$\frac{dy'}{dx'} = \frac{A}{2y'}, \quad 1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} = \frac{4y'^2 + A^2}{4y'^2},$$
$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = -\frac{A}{2y'^2}\frac{dy'}{dx'} = -\frac{A^2}{4y'^3}.$$

Substituant ces valeurs dans les formules du n°. 261, on trouvera

$$a = -\frac{4y'^3}{A^2}\cdot\left(\frac{4y'^2+A^2}{4y'^2}\right)^{\frac{5}{2}} = -\frac{(4y'^2+A^2)^{\frac{5}{2}}}{2A^2} = \frac{(4Ax'+A^2)^{\frac{5}{2}}}{2A^2}$$
$$y'-\beta = \frac{4y'^3}{A^2}\cdot\left(\frac{4y'^2+A^2}{4y'^2}\right) = \frac{4y'^3}{A^2} + y'$$
$$x'-\alpha = -\frac{A}{2y'}\cdot\frac{4y'^3}{A^2}\cdot\left(\frac{4y'^2+A^2}{4y'^2}\right) = -\frac{4y'^2+A^2}{2A} = -2x' - \frac{1}{2}A$$

Le premier résultat, qui exprime la valeur du rayon de courbure, devient égal à $\frac{1}{2}A$, lorsque $x' = 0$; ce qui nous apprend que la courbure de la parabole à son sommet est la même que celle d'un cercle, décrit d'un rayon égal au demi-paramètre, et que ce cercle a un contact du quatrième ordre avec la parabole, puisque son rayon est un *minimum*. Le rayon du cercle osculateur devenant plus grand à mesure que x' augmente, la courbure de la parabole diminue en même tems et tend sans cesse à s'anéantir. En rapprochant la valeur

de a, de celle qu'on a trouvée dans le n°. 245 pour la normale, on verra que $a = \frac{\overline{MR}^3}{\frac{1}{4}A^2}$, ou que le rayon de courbure est égal au cube de la normale divisé par le quarré du demi-paramètre.

Les expressions de $y' - \beta$ et $x' - \alpha$ donnent

$$-\beta = \frac{4y'^3}{A^2}, \qquad \alpha = 3x' + \frac{1}{2}A,$$

d'où on tire $y' = -\left(\frac{1}{4}A^2\beta\right)^{\frac{1}{3}}$ et $x' = \frac{\alpha - \frac{1}{2}A}{3}$: mettant ces valeurs dans l'équation $y'^2 = Ax'$, on aura $\left(\frac{1}{4}A^2\beta\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{A(\alpha - \frac{1}{2}A)}{3}$, équation qui appartient à la développée de la parabole. Si on y fait $\alpha - \frac{1}{2}A = \gamma$, ou qu'on porte l'origine des abscisses en D, *fig.* 31, FIG. 31. on pourra lui donner cette forme très-simple, $\beta^2 = \frac{16\gamma^3}{27A}$, qui nous montre que la courbe qu'elle représente est une des paraboles du troisième ordre, composée de deux branches DF et Df, dont la première engendre par son développement la branche AX de la parabole ordinaire XAx et la seconde produit la branche Ax.

Cherchons encore l'expression du rayon de courbure des courbes du second ordre, comprises dans l'équation $y'^2 = Ax'^2 + 2Bx'$, nous aurons $\frac{dy'}{dx'} = \frac{Ax' + B}{y'}$, $1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} = \frac{y'^2 + (Ax' + B)^2}{y'^2}$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{Ay' - (Ax' + B)\frac{dy'}{dx'}}{y'^2} = \frac{Ay'^2 - (Ax' + B)^2}{y'^3}.$$

Substituant ces valeurs dans celle de a (n°. 261), nous trouverons $a = \frac{(y'^2 + (Ax' + B)^2)^{\frac{3}{2}}}{Ay'^2 - (Ax' + B)^2}$, ou, en mettant pour y' sa valeur,

$$a = -\frac{[(A+1)Ax'^2 + (A+1)2Bx' + B^2]^{\frac{3}{2}}}{B^3}.$$

268. Il faut observer que pour la description de la parabole XAx, par le développement de la courbe FDf, le fil enveloppé autour de

l'une ou de l'autre des branches DF et Df, doit avoir au point D, dans le prolongement de la tangente BD, une longueur AD égale au rayon de courbure au point A, c'est-à-dire à la moitié du paramètre de la parabole proposée ; tout autre point, tel que I, pris sur ce fil, produiroit une courbe différente. Si le point I tomboit sur le point D, le rayon de courbure de la courbe décrite alors, seroit nul à son origine, et par conséquent elle auroit à ce point une courbure infinie. On voit aussi que la longueur de l'arc DF est égale à la différence qui se trouve entre le rayon de courbure correspondant MF, et le rayon de courbure AD, qui appartient à l'origine.

Cette remarque est générale, et quelle que soit la développante ; un arc quelconque de la développée, sera égal à la différence des deux rayons de courbure menés par ses extrémités. Il suit de là que, puisqu'on peut toujours parvenir à l'expression du rayon de courbure des courbes algébriques, les développées de ces courbes sont toutes rectifiables, ou, ce qui revient au même, que la longueur de leurs arcs est assignable par une formule algébrique.

269. Si nous supposons que la courbe (V) qui doit toucher la proposée au point M au lieu d'être un cercle comme dans le n°. 260, soit une ellipse dont les axes a et b soient indéterminés, mais parallèles à ceux des coordonnées, et que α et β désignent les coordonnées de son centre, son équation sera

$$a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2=a^2b^2.$$

En changeant x en x' et y en y' pour exprimer qu'elle doit passer par le point M, on aura

$$a^2(x'-\alpha)^2+b^2(y'-\beta)^2=a^2b^2;$$

cette équation laissera encore indéterminées trois des constantes arbitraires dont on pourra disposer pour faire évanouir un pareil nombre de termes dans la série

$$k-K=(p-P)h+(q-Q)h^2+(r-R)h^3+(s-S)h^4+\text{etc.}$$

en posant les équations $p-P=0$, $q-Q=0$ et $r-R=0$. L'ellipse osculatrice déterminée par ces conditions aura un contact du troisième ordre avec la courbe proposée, et il est évident qu'elle passera entre cette courbe et son cercle osculateur.

En

En général, quelle que soit l'équation (V), en y changeant x en x' et y en y', on obtiendra la relation qui doit avoir lieu entre ses constantes, pour que les courbes qu'elle représente passent par le point pris sur la courbe proposée; et si elle renferme un nombre n de constantes arbitraires, il en restera $n-1$, avec lesquelles on pourra satisfaire à un pareil nombre de conditions de contact. Mais puisqu'on a

$$p=\frac{dy'}{dx'},\quad q=\frac{1}{2}\frac{d^2y'}{dx'^2},\quad r=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y'}{dx'^3}\text{ etc.}$$

$$P=\frac{dy}{dx},\quad Q=\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2},\quad R=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}\text{ etc.}$$

on pourra représenter ces conditions comme il suit

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y'}{dx'^3}=\frac{d^3y}{dx^3}\text{ etc.}$$

en observant de changer x en x' et y en y', dans le développement des seconds membres de ces équations, déduit des différentielles de l'équation (V): la courbe osculatrice qui résultera de la détermination de toutes les constantes, aura avec la proposée un contact de l'ordre $n-1$ et toutes les autres comprises dans l'équation générale dont elle est tirée, n'en pourront avoir que des ordres inférieurs; c'est pourquoi je distingue le premier sous le nom d'*osculation*. D'après ces définitions, la tangente est une osculatrice, et son contact est une osculation du premier ordre; le contact du cercle osculateur est une osculation du second ordre; enfin la courbe osculatrice dont l'équation générale renferme n constantes arbitraires, a une osculation de l'ordre $n-1$.

Des Courbes transcendantes.

270. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que des courbes algébriques, nous allons maintenant faire connoître quelques-unes des courbes transcendantes les plus remarquables. Nous nous occuperons d'abord de la *logarithmique* ou de la courbe dans laquelle les ordonnées sont les logarithmes des abscisses.

On a dans cette courbe $y'=1x'$, et quand on fait $x'=1$, il vient $y'=0$, ce qui fait voir qu'elle rencontre l'axe AB au point E, *fig.* 32, où l'abscisse AE est égale à l'unité. La branche EX, qui répond aux abscisses positives plus grandes que l'unité, est infinie, puisque les FIG. 32.

logarithmes de ces abscisses croissent toujours. Dans la partie AE, où les abscisses sont des fractions, les ordonnées sont négatives et augmentent à mesure que ces fractions diminuent, ensorte que la branche Ex a pour asymptote la partie négative Ac de l'axe des ordonnées : enfin la logarithmique ne s'étend point du côté des abscisses négatives, puisque leurs logarithmes sont imaginaires (n°. 183).

En différentiant l'équation $y'=lx'$, il vient $\frac{dy'}{dx'}=\frac{M}{x'}$ (n°. 20); on voit par là que la tangente de cette courbe est perpendiculaire à la ligne des abscisses lorsque $x'=0$, et qu'elle ne lui est parallèle qu'en supposant x' infini (n°. 248). L'expression générale de la soutangente (n°. 240) donne $PT=\frac{x'y'}{M}$; mais en chassant y' on introduit le logarithme de x', ainsi cette expression est transcendante ; cependant en prenant la soutangente OD sur l'axe AC, on aura $OD=x'\frac{dy'}{dx'}=M$, résultat bien remarquable, puisqu'il nous apprend que la soutangente OD est constante et égale au module, pour tous les points de la courbe. On trouveroit de même que la tangente, la sounormale et la normale, prises par rapport à l'axe AB, sont transcendantes à cause que l'ordonnée y' entre dans leur expression, mais qu'elles deviennent algébriques, lorsqu'on les considère à l'égard de l'axe AC.

Je passe à la recherche du rayon de courbure ;

on a $1+\frac{dy'^2}{dx'^2}=\frac{x'^2+M^2}{x'^2}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}=-\frac{M}{x'^2}$, d'où (n°. 261)

$$\alpha=\frac{(x'^2+M^2)^{\frac{3}{2}}}{Mx'},\quad y'-\beta=\frac{(x'^2+M^2)}{M},\quad x'-\alpha=-\frac{(x'^2+M)}{x'}.$$

Je ne m'arrêterai point à considérer la développée, qui seroit nécessairement transcendante ; j'observerai seulement qu'on pourroit obtenir l'équation différentielle de cette courbe, en éliminant par le moyen des valeurs de $y'-\beta$, de $x'-\alpha$ et de leurs différentielles, x', dx' et dy' de l'équation $dy'=M\frac{dx'}{x'}$.

Les logarithmiques diffèrent entr'elles à raison du module relatif au système de logarithmes qu'elles représentent. L'équation $x' = A^{y'}$ donne, en prenant les logarithmes népériens, $l'x' = y' l'A$, d'où $y' = \frac{l'x'}{l'A}$, résultat dont le second membre n'est autre chose que le logarithme de x' calculé pour un module égal à $\frac{1}{l'A}$: cette équation appartient donc à une logarithmique.

271. La cycloïde qui, comme on sait, est la courbe décrite par un point pris sur la circonférence d'un cercle, pendant que ce cercle roule sur une ligne doite donnée de position, est encore une courbe transcendante ; la relation entre ses ordonnées et ses abscisses, dépend des arcs du cercle générateur : voici comment on peut l'exprimer.

L'origine du mouvement du cercle étant arbitraire, je la prends au point A, *fig.* 33, où le point *décrivant* M, se trouvoit sur la FIG. 33.
droite AB parcourue par le cercle générateur QMG. Puisque ce cercle en roulant, applique successivement tous les points de sa circonférence sur la droite AB, il est évident que lorsqu'il est parvenu dans une situation quelconque QMG, la distance AQ est égale à l'arc MQ, compris entre le point M qui touchoit la droite AB en A, et le point Q qui la touche dans la position actuelle. Représentons cet arc par t ; élevons sur AB, par le point Q, la perpendiculaire QO, qui passera par le centre du cercle générateur, et menons MN parallèle à AB : MN sera le sinus de MQ et NQ en sera le sinus verse. Si nous désignons par r le rayon QO, nous aurons, en prenant les sinus et les cosinus tabulaires, $MN = r \sin \frac{t}{r}$, $QN = r - r \cos \frac{t}{r}$; mais $AP = x' = AQ - MN$ et $PM = y' = QN$,

donc $x' = t - r \sin \frac{t}{r}$....(1) $\quad y' = r - r \cos \frac{t}{r}$....(2)

Il faudroit, pour obtenir la relation entre x' et y', éliminer t de ces deux équations, ce qui ne conduiroit encore qu'à une relation entre un arc et son sinus, résultat transcendant ; mais on peut

parvenir à une équation différentielle entre les coordonnées x' et y', ainsi qu'on va le voir. Les équations (1) et (2) étant différentiées, donnent $dx'=dt-dt\cos\frac{t}{r}$, $dy'=dt\sin\frac{t}{r}$; on tire de là $\frac{dx'}{dy'}=\frac{1-\cos\frac{t}{r}}{\sin\frac{t}{r}}$ et mettant au lieu de $1-\cos\frac{t}{r}$ sa valeur $\frac{y'}{r}$, prise dans l'équation (2), il viendra $\frac{dx'}{dy'}=\frac{y'}{r\sin\frac{t}{r}}$, résultat qui donnera $\sin\frac{t}{r}=\frac{y'}{r}\frac{dy'}{dx'}$; mais on déduit en même tems de l'équation (2) $\cos\frac{t}{r}=\frac{r-y'}{r}$: si l'on substitue ces expressions dans l'équation $\sin t^2+\cos t^2=1$, on trouvera

$$\frac{y'^2}{r^2}\frac{dy'^2}{dx'^2}+\frac{(r-y')^2}{r^2}=1.$$

Telle est l'équation différentielle de la cycloïde; en prenant la valeur du coefficient différentiel $\frac{dx'}{dy'}$, il vient $\frac{dx'}{dy'}=\frac{y'}{\sqrt{2ry'-y'^2}}$.

272. Rien n'est plus facile maintenant que d'obtenir les expressions de la soutangente et de la tangente, de la sounormale et de la normale, dans la cycloïde. On trouve, par les formules générales des n°s 240, 244 et 245,

$$PT=\frac{y'^2}{\sqrt{2ry'-y'^2}},\qquad MT=\frac{y'\sqrt{2ry'}}{\sqrt{2ry'-y'^2}}$$

$$PR=\sqrt{2ry'-y'^2},\qquad MR=\sqrt{2ry'}.$$

On peut construire ces valeurs d'une manière très-simple; car il est aisé de remarquer que MP ou y' étant considéré comme l'abscisse QN dans le cercle générateur QMG, la valeur donnée ci-dessus pour PR sera précisément celle de l'ordonnée MN de ce cercle, et que par conséquent la normale se confond avec la corde de l'arc MQ, comme on peut le voir aussi par l'expression de MR: il suit

de là que la tangente MT sera le prolongement de la corde MG. Si on imagine que le cercle QMG, glisse sur le point Q jusques dans une position quelconque $q\,m\,g$, les lignes mq et mg, resteront, malgré ce changement, parallèles aux lignes MQ et MG; il suffira donc, pour construire la tangente et la normale dans un point donné M, de rapporter ce point sur le cercle fixe $q\,m\,g$, ce qui se fera en tirant la droite Mm parallèle à AB, et de même ensuite MT parallèlement à mg et MQ parallèlement à mq.

Pour déterminer le rayon de courbure et l'équation de la développée, il faudra joindre à l'équation $\frac{dx'}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{2ry'-y'^2}}$, sa différentielle, et j'observerai qu'on parviendroit plus simplement au résultat, en regardant x' comme une fonction de y', c'est-à-dire, en faisant dy' constant. Il est aisé de voir que dans cette hypothèse, on doit changer x' en y' et réciproquement, dans les formules du n°. 261. Je ne suivrai cependant pas cette voie, parce que j'ai dessein de montrer comment on peut déterminer toutes les affections de la courbe, en se servant immédiatement des relations données entre x' et t, y' et t.

273. Si l'on vouloit continuer à regarder dans les formules du n°. 261, dx' comme constant, il faudroit alors supposer y' et t, variables en même tems, puisque ces deux dernières quantités sont des fonctions implicites de la première : mais il sera plus commode d'envisager x' et y' comme des fonctions implicites de t, ou ce qui revient au même, de supposer dt constant, et faire varier à la fois dx' et dy' (n°. 68), en observant de mettre au lieu du coefficient différentiel $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, son expression dans cette hypothèse, (n°. 59), et on aura $a = \frac{(dx'^2+dy'^2)^{\frac{3}{2}}}{dx'd^2y'-dy'd^2x'}$;

$$y'-\beta = -\frac{dx'(dx'^2+dy'^2)}{dx'd^2y'-dy'd^2x'},$$

$$x'-\alpha = \frac{dy'(dx'^2+dy'^2)}{dx'd^2y'-dy'd^2x'},$$

Cela posé, les équations (1) et (2) donnent

$$dx'=dt-dt\cos\frac{t}{r},\qquad d^2x'=\frac{dt^2}{r}\sin\frac{t}{r},$$

$$dy'=dt\sin\frac{t}{r},\qquad d^2y'=\frac{dt^2}{r}\cos\frac{t}{r},$$

d'où l'on tire

$$dx'^2+dy'^2=2dt^2\left(1-\cos\frac{t}{r}\right),\ dx'd^2y'-dy'd^2x'=-\frac{dt^3}{r}\left(1-\cos\frac{t}{r}\right);$$

en mettant ces valeurs dans celles de a, de $y'-\beta$ et de $x'-\alpha$, et en observant que $1-\cos\frac{t}{r}=\frac{y'}{r}$, on trouvera

$$a=2^{\frac{5}{3}}r\left(1-\cos\frac{t}{r}\right)^{\frac{1}{3}}=2\sqrt{2ry'},$$

$$\left.\begin{aligned}y'-\beta&=2r\left(1-\cos\frac{t}{r}\right)=2y'\\ x'-\alpha&=-2r\sin\frac{t}{r};\end{aligned}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{aligned}\beta&=-y'\\ \alpha&=t+r\sin\frac{t}{r}\end{aligned}\right.$$

le premier de ces résultats nous fait voir que le rayon de courbure MF est double de la normale MQ, et qu'il ne peut par conséquent devenir plus grand que le double du diamètre du cercle générateur, diamètre qui est à la fois l'ordonnée et la normale de la cycloïde au point I, où le contact Q a parcouru la moitié de la circonférence; il seroit facile de conclure de là, comme le donnent les deux derniers résultats, que $QE=\beta=-y'$ et que

$$EM'=x'-\alpha=2PQ=-2r\sin\frac{t}{r}.$$

Nous tirerons de ce qui précède cette conséquence remarquable, que la développée de la cycloïde est une autre cycloïde égale à la première, mais posée en sens inverse. En effet, si on mène $A'B'$ parallèle à AB, à une distance $A'I$ égale au diamètre du cercle générateur, et qu'on prenne le point A' pour l'origine des coordonnées; en faisant $AI=\pi$, $EI=X$ et $P'M'=Y$, on aura

$$EI=AI-AE=\pi-\alpha=\pi-t-r\sin\frac{t}{r}$$

$$P'M'=EP'-EM'=2r-\beta=r+r\cos\frac{t}{r}.$$

Mais en observant que $\sin\frac{t}{r} = \sin\left(\frac{\pi - t}{r}\right)$, et que $\cos\frac{t}{r} = -\cos\left(\frac{\pi - t}{r}\right)$, on en conclura que

$$X = (\pi - t) - r\sin\left(\frac{\pi - t}{r}\right) \text{ et } Y = r - r\cos\left(\frac{\pi - t}{r}\right)$$

Ces valeurs étant composées avec l'arc $\pi - t$, comme celles de x' et de y', le sont avec l'arc t, X et Y ne sont donc autre chose que les coordonnées d'une cycloïde décrite par le même cercle générateur que la première.

La même conséquence pourroit se tirer également par des considérations géométriques, lorsqu'on est parvenu à connoître le rayon de courbure. En prolongeant la droite GQ jusqu'à ce qu'elle rencontre $A'B'$ en Q' et menant $Q'M'$, on formera les triangles GMQ et $QM'Q'$ égaux entr'eux; l'angle $QM'Q'$ sera donc droit, et si on décrit sur QQ' comme diamètre, un cercle, il passera par le point M' et sera égal au cercle générateur. Cela posé, puisque l'arc $M'Q'$ est le complément de $M'Q$, qui lui-même est égal à MQ, on aura $M'Q' = QMG - MQ = AI - AQ = QI = A'Q'$, ce qui montre bien clairement que la développée $A'M'A$, est une cycloïde décrite par le cercle $Q'M'Q$, roulant sur $A'B'$ de A' vers B'.

On remarquera sans doute que, d'après ce qui précède, la cycloïde est rectifiable, puisqu'elle est elle-même sa développée et que l'expression de son rayon de courbure est algébrique, et on en déduira ce résultat curieux, que la longueur de l'arc $A'A$, ou de son égal AK qui compose la moitié de la branche décrite par une révolution entière du cercle générateur, est précisément la même que celle de $A'K$, ou du double du diamètre de ce cercle.

274. La cycloïde n'est pas terminée au point L où le cercle a parcouru sur la droite AL sa circonférence entière, car rien ne limite la durée de ce mouvement. Il faut bien remarquer dans la description des courbes, que les diverses parties résultantes d'une même construction ou d'un même mouvement, appartiennent toutes à la même courbe. Ainsi le cercle QMG en continuant de rouler sur la droite AB, au-delà du point L, décrit une suite infinie de

portions semblables à AKL, et il faut en concevoir autant sur la gauche du point A, puisque le cercle a pu n'arriver à ce point, qu'à la suite d'un mouvement commencé depuis un tems indéfini. Les équations (1) et (2) conduisent elles-mêmes à ces remarques, car rien n'empêche d'y supposer t aussi grand qu'on voudra, soit positivement, soit négativement. On voit d'ailleurs que y ne pourra jamais surpasser $2r$, parce que son expression ne renferme que le cosinus de $\frac{t}{r}$, compris nécessairement entre les limites 0° et 1. Il suit de là que la cycloïde conçue dans toute l'étendue qu'elle doit avoir, peut être coupée, par une même ligne droite, dans une infinité de points. Il n'est donc pas étonnant qu'on ne puisse lui asssigner une équation algébrique finie, qui, de quelque degré qu'elle fût, ne sauroit exprimer cette circonstance.

Le coefficient différentiel du second ordre relatif à la fonction y', a pour expression, en regardant dx' et $d'y$ comme variables, $\frac{dx'd^{2}y'-dy'd^{2}x'}{dx'^{3}}$, (n°. 59); sa valeur $-\frac{1}{r(1-\cos t)}$ dans la cycloïde, est toujours négative, puisque $\cos\frac{t}{r}$ ne peut jamais surpasser l'unité; mais il devient infini quand l'arc $\frac{t}{r}$ est égal à zéro ou à un multiple quelconque de la circonférence : dans les mêmes cas $\frac{dy'}{dx'}=\frac{\sin\frac{t}{r}}{1-\cos\frac{t}{r}}$ est aussi infini : les points A, L, etc. où se touchent les différentes branches de la cycloïde sont donc des points de rebroussement de la première espèce, dans lesquels la tangente est perpendiculaire à l'axe des abscisses.

275. Les spirales composent encore un ordre de courbes transcendantes, remarquables par leur forme et leurs propriétés. Voici comment s'engendre celle qu'imagina Conon de Syracuse et dont Archimede découvrit les principales propriétés.

FIG. 34. Pendant que le rayon AO, *fig.* 34, se meut autour du centre A du cercle

cercle OQG, un point mobile, parti de ce centre, parcourt uniformément la ligne AO, et avec une vîtesse telle qu'il arrive au point O, en même tems que cette droite a achevé sa révolution. Il suit de là que pour un point quelconque M de la spirale $AMOX$, le rapport de AM à AN ou AO, est le même que celui de l'arc ON à la circonférence OGO; mais comme rien ne s'oppose à ce que le point *décrivant* continue son mouvement au-delà du point O, sur le rayon prolongé, et que ce rayon peut lui même faire un nombre indéfini de révolutions, la courbe AMO se prolongera en tournant toujours autour du point A, de manière que le rapport entre la distance de chacun de ses points au point A et le rayon du cercle, soit égal à celui qui se trouve entre l'arc parcouru par le point O, depuis le commencement du mouvement et la circonférence entière: en M', par exemple, où le rayon AN a fait une révolution plus l'arc ON, on aura $\frac{AM'}{AN} = \frac{OGO+ON}{OGO}$. Si donc on fait $ON=t$, $AM=u$, et que prenant pour unité le rayon AN, on représente par 2π la circonférence OGO, on aura $u=2\pi t$.

Les variables de cette équation sont ce que les Géomètres appellent des coordonnées polaires. Le centre de A du cercle OGO, se nomme le *pôle*; la ligne AM, assujettie à passer toujours par ce point, est le *rayon vecteur* et tient lieu de l'ordonnée de la courbe, tandis que l'arc ON remplace l'abscisse.

La spirale que nous venons de considérer et qui porte le nom de *spirale d'Archimede*, n'est qu'un cas particulier des courbes que représenteroit l'équation $u=At^n$, en donnant à u toutes les valeurs possibles. Lorsqu'on fait $n=-1$, on a $u=At^{-1}$ ou $ut=A$, équation qui appartient à la spirale hyperbolique. Si au lieu de la distance AM, on prenoit pour u la partie MN du rayon vecteur, comprise entre le point M et la circonférence du cercle OGO, l'équation $u^2=At$ seroit celle de la spirale parabolique, ou de la courbe qu'on formeroit en roulant l'axe d'une parabole autour d'un cercle; les ordonnées se trouveroient alors perpendiculaires à la circonférence de ce cercle et tomberoient sur ses rayons.

Tant que n est un nombre positif, les spirales données par l'équation $u = At^n$, prennent leur origine au point A; mais quand n est négatif, u, d'abord infini lorsque $t = 0$, diminue à mesure que cet arc augmente, et à chaque nouvelle révolution le point décrivant s'approche du point A, sans pouvoir jamais y atteindre.

Pour appliquer aux spirales qui sont rapportées à des coordonnées polaires, les expressions des soutangentes des tangentes etc. que nous avons trouvées relativement à des coordonnées rectangles, nous allons d'abord transformer les coordonnées du premier systême dans celles du second, et nous montrerons comment on peut passer de l'un à l'autre. Cela sera d'autant plus utile, qu'on rapporte quelquefois les courbes algébriques à des coordonnées polaires; on le fait sur tout à l'égard des sections coniques, en prenant leur foyer pour pôle.

276. Plaçons au point A, pour plus de simplicité, l'origine des coordonnées rectangles; soit $QO = m$, l'arc intercepté entre le point Q, situé sur l'axe des abscisses AB et le point O, origine de l'arc t. En menant PM perpendiculaire sur AB, et en observant que l'angle MAP est mesuré par l'arc NQ égal à $t - m$, nous aurons $\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2$, $AP = AM \cos NQ$, $PM = AM \sin NQ$, ou $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = u \cos (t - m)$, $y = u \sin (t - m)$.

Au moyen des deux dernières valeurs, on changera toute équation algébrique entre x et y, dans une autre qui ne contiendra plus que le sinus, le cosinus de l'arc t et le rayon vecteur u; elles donnent aussi $\cos (t - m) = \frac{x}{u}$, $\sin(t - m) = \frac{y}{u}$: on tirera de ces équations, des valeurs de cos t et de sin t en x, y, u, sin m et cos m, qui, étant substituées dans une équation quelconque entre u, sin t et cos t, conduiront à un résultat qui ne renfermera plus que x et y, puisqu'on pourra remplacer u, par $\sqrt{x^2 + y^2}$. Si, pour abréger, on suppose que la ligne AB se confonde avec la ligne AO, on aura seulement

$$\cos t = \frac{x}{u}, \qquad \sin t = \frac{y}{u}.$$

Lorsque l'équation en u et t, qu'on se propose de transformer, contient l'arc t lui-même, il n'est plus possible d'obtenir une elation algébrique entre x et y, puisqu'on n'en a point de semblable entre l'arc t, son sinus et son cosinus; mais on parvient ainsi qu'on va le voir, à une équation différentielle, qui ne contient plus que x, y, dx et dy.

On tire des valeurs trouvées ci-dessus, pour u, x et y,

$$du = d.\sqrt{x^2+y^2},$$

$dx = du\cos(t-m) - udt\sin(t-m)$, $dy = du\sin(t-m) + udt\cos(t-m)$

et si on élimine du des deux dernières équations, il viendra

$$dt = \frac{dy\cos(t-m) - dx\sin(t-m)}{u};$$

mettant pour $\cos(t-m)$, $\sin(t-m)$ et u, leurs valeurs, on aura

$$dt = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

On pourra donc chasser de l'équation en u et t, et de sa différentielle les quantités u, $\cos t$, $\sin t$, du et dt; les deux résultats qu'on obtiendra ne contenant plus que t, on le fera disparoître par l'élimination.

Prenons pour exemple l'équation $u = At^n$, qui donne $u^{\frac{1}{n}} = A^{\frac{1}{n}}t$; $\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du = A^{\frac{1}{n}}dt$; les expressions de u, de du et de dt, étant indépendantes de m, il viendra en les substituant et en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{1}{n}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}(xdx+ydy) = A^{\frac{1}{n}}(xdy-ydx).$$

Avec cette équation on détermineroit les soutangentes, les tangentes etc. des spirales, en faisant usage des formules du n°. 246; mais il sera plus simple et en même tems plus général de transformer ces formules relativement aux variables u et t, et c'est ce que nous allons faire.

277. L'expression de la soutangente devient en mettant pour y et $\frac{dx}{dy}$ leurs valeurs,

$$PT = u\sin(t-m)\frac{du\cos(t-m) - udt\sin(t-m)}{du\sin(t-m) + udt\cos(t-m)}.$$

On simplifiera beaucoup ce résultat, en observant que la situation de la ligne des abscisses, sur laquelle tombe la distance PT, est arbitraire, et qu'on peut par conséquent prendre toujours m tel que l'arc $Q'N$ soit de 90°, auquel cas, l'ordonnée PM se confond avec le rayon vecteur AM, $\cos(t-m)=0$, $\sin(t-m)=1$, et PT se change en $AT'=-\frac{u^2dt}{du}$;

On construira la tangente en menant par le point A une perpendiculaire au rayon vecteur AM, et en portant sur cette droite, la valeur de AT', donnée par la formule ci-dessus.

Si on applique cette formule à l'équation $u=At^n$, on trouvera

$$AT=-\frac{u^2}{nAt^{n-1}}=-\frac{A}{n}t^{n+1};$$

Dans la spirale de Conon on a $n=1$ et $A=\frac{1}{2\pi}$; il en résulte $AT'=-\frac{t^2}{2\pi}$. On voit par cette expression que lorsque $t=2\pi$, ou qu'après une révolution du rayon décrivant, la soutangente est égale à la circonférence rectifiée; on trouvera une soutangente quadruple au bout de deux révolutions et ainsi de suite, comme l'a remarqué Archimède.

Lorsque $n=-1$, ce qui est le cas de la spirale hyperbolique, on aura $AT'=A$, c'est-à-dire, que la soutangente de cette courbe est constante.

Je ne m'arrête point à la recherche de la sounormale et de la normale, parce qu'on les obtient facilement lorsque la soutangente est connue.

J'observerai seulement que $\frac{AT'}{AM}=\frac{udt}{du}$, exprime la tangente de l'angle que fait avec le rayon vecteur AM la droite $T'M$, qui touche la courbe au point M, et qu'on a

$$TM=\sqrt{\overline{AM}^2+\overline{AT'}^2}=u\sqrt{1+\frac{u^2dt^2}{du^2}}$$

278. Transformons maintenant l'expression du rayon de courbure: pour supposer dt constant, nous ferons varier à la fois dx et dy

et nous ferons usage, comme dans le n°. 273, de la formule

$$a = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Cela posé, les valeurs de dx et dy (n°. 276), en ayant égard à l'équation $\sin(t-m)^2+\cos(t-m)^2=1$, donneront

$$dx^2+dy^2 = du^2+u^2dt^2,$$
$$d^2x = d^2u\cos(t-m) - 2\,du\,dt\sin(t-m) - u\,dt^2\cos(t-m),$$
$$d^2y = d^2u\sin(t-m) + 2\,du\,dt\cos(t-m) - u\,dt^2\sin(t-m),$$
$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = 2du^2dt - u\,dt\,d^2u + u^2dt^3,$$

et par conséquent $a = -\dfrac{(du^2+u^2dt^2)^{\frac{3}{2}}}{u\,dt\,d^2u - 2du^2dt - u^2dt^3}$.

Ce résultat, comme on devoit s'y attendre, est indépendant de la quantité m, qui ne tient qu'à la position arbitraire de la ligne AB, et on auroit pu simplifier les calculs en supposant que cette droite se confondît avec le rayon vecteur AM, c'est-à-dire, en faisant $\sin(t-m)=0$ et $\cos(t-m)=1$, dans les valeurs des différentielles dx, dy, d^2x et d^2y, qui par-là se seroient trouvées réduites à

$$dx = du, \quad dy = u\,dt, \quad d^2x = d^2u - u\,dt^2, \quad d^2y = 2\,du\,dt.$$

Lorsqu'on fait usage des coordonnées polaires, on calcule aussi la distance ME comprise entre le point M et le pied de la perpendiculaire EF, abaissée du centre du cercle osculateur sur la droite AM, parce qu'elle rend quelquefois plus élégante la construction du rayon de courbure. On voit aisément que les triangles $MA'T'$ et MEF sont semblables et donnent $MT' : AT' :: MF : ME$; mettant pour MT' et pour AT' leurs valeurs, on aura $ME = -\dfrac{u\,du^2+u^3dt^2}{u\,d^2u - 2du^2 - u^2dt^2}$.

Pour faire une application de cette formule, je prends la spirale logarithmique dont l'équation est $t = \mathrm{l}\,u$. En différentiant on trouve $dt = M\dfrac{du}{u}$ ou $\dfrac{u\,dt}{du} = M$, ce qui fait voir que dans tous les points de cette courbe la tangente fait le même angle avec le rayon vecteur.

Une seconde différentiation donne $u\,d^2u - du^2 = 0$, d'où $d^2u = \dfrac{du^2}{u}$; substituant cette valeur ainsi que celle de dt, dans l'expression

FIG. 35. de ME, il viendra $ME = -\frac{udu^2+uM^2du^2}{-du^2-M^2du^2} = u = AM$, *fig.* 35.

Il suit de là que la droite AF, menée perpendiculairement au rayon vecteur AM, rencontrera la normale MF au centre du cercle osculateur, ou sur le point correspondant de la développée FZ. Cette développée sera une spirale semblable à la proposée; car l'angle AMF étant égal à $T'MA$, sera le même pour tous les points de la courbe FZ, comme pour ceux de la courbe MX.

279. Il est évident que la longueur de l'arc d'une courbe est une fonction de son abscisse ou de son ordonnée, et que par conséquent la différentielle de cette quantité doit pouvoir s'exprimer au moyen de ces variables et de leurs différentielles.

FIG. 36. Si on nomme ζ l'arc DM, *fig.* 36, l'abscisse AP étant x, ζ sera une fonction de x et deviendra

$$DM+MM' = \zeta + \frac{\zeta' h}{1} + \frac{\zeta'' h^2}{1.2} + \frac{\zeta''' h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

quand x se changera en $AP'+PP' = x+h$, ζ', ζ'', ζ''', etc. représentant les coefficiens différentiels $\frac{d\zeta}{dx}$, $\frac{d^2\zeta}{dx^2}$ etc. dont la dérivation successive est telle, comme on sait, que lorsqu'on connoît le premier, on peut trouver les suivans. Cela posé, si on prend les ordonnées PM et $P'M'$ assez proches l'une de l'autre, pour que la courbe ne subisse pas d'inflexion entr'elles; qu'on mene la tangente MT', et qu'on tire la corde MM', on se convaincra sans peine que l'arc MOM' surpasse MM', et qu'il est moindre que la somme des droites MN et $M'N$. Il suit de là que le développement du petit arc MM', représenté par la série $\frac{\zeta' h}{1} + \frac{\zeta'' h^2}{1.2} + \frac{\zeta''' h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ doit se trouver entre ceux des quantités MM' et $MN+M'N$; calculons donc chacun de ces derniers.

Le triangle rectangle $MM'Q$ donnera

$$MM' = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2};$$

mais $MQ = h$, $M'Q = P'M' - PM$, et $P'M'$ étant ce que devient y lorsque x se change en $x+h$, on aura pour le développement

de $M'Q$, la série $\frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1.2} + \frac{y'''h^3}{1.2.3} +$ etc. que pour abréger, l'on pourra mettre sous la forme $(y'+ph)h$, en faisant $p = \frac{y''}{1.2} + \frac{y'''h}{1.2.3} +$ etc. substituant cette valeur ainsi que celle de MQ, il viendra

$$MM' = \sqrt{h^2 + (y'+ph)^2 h^2} = h(1+y'^2+2py'h+p^2h^2)^{\frac{1}{2}};$$

faisons encore pour plus de simplicité $2py'+p^2h = q$, et nous aurons $MM' = h[(1+y'^2)+qh]^{\frac{1}{2}}$. En développant la racine quarrée, par le moyen de la formule du binome, il en résultera

$$MM' = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}h + \frac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}qh^2 + \text{etc.}$$

On trouvera MN et NQ, par la comparaison des triangles semblables TPM et MQN, dont on tirera

$$MN = \frac{TM \times MQ}{PT} = h\sqrt{1+y'^2}, \qquad NQ = \frac{MP \times MQ}{PT} = y'h$$

(n°. 246) et comme $M'N = M'Q - NQ$, on aura

$$M'N = \frac{y''h^2}{1.2} + \frac{y'''h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

En ajoutant à cette série la valeur de MN, le résultat

$$h\sqrt{1+y'^2} + \frac{y''h^2}{1.2} + \frac{y'''h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

sera le développement de $MN + M'N$.

Il est aisé de voir que si la courbe tournoit sa concavité vers l'axe des abscisses, on auroit alors $M'N = NQ - M'Q$; mais l'expression de $M'N$ auroit encore le même premier terme que ci-dessus, parce que le coefficient y'' seroit négatif.

En rapprochant les divers développemens qu'on vient de trouver, on aura les trois séries

$$MM' = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}h + \frac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}qh^2 + \text{etc.}$$

$$MOM' = \frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$MN + M'N = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}h + \frac{y''h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

dont l'intermédiaire exprime une quantité comprise entre les valeurs des deux autres ; mais ces dernières ayant le même premier terme, $(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}h$, on en conclura, d'après ce qui a été démontré dans l'Introduction (n°. 36) que $\zeta'=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$. Remettant au lieu de ζ' et de y' l'expression différentielle des coefficiens qu'ils représentent, on aura $\frac{d\zeta}{dx}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$, ou $d\zeta=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

On pourroit parvenir par cette formule à la différentielle de l'arc de cercle, que nous avons obtenue *à priori*, n°. 23 ; car l'équation $x^2+y^2=a^2$ donnant $dy=-\frac{x\,dx}{y}$, on trouve

$d\zeta=\frac{a\,dx}{y}=\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$: si on change x en u, et qu'on suppose le rayon $=1$, on retombera sur le résultat du n°. cité.

En mettant pour dx^2+dy^2 sa valeur $du^2+u^2dt^2$ trouvée n°. précéd. on aura $d\zeta=\sqrt{du^2+u^2dt^2}$ pour l'expression de la différentielle de l'arc, rapportée aux coordonnées polaires u et t.

280. L'aire d'une courbe ou la grandeur de l'espace $ADMP$, compris entre les axes AB et AC, l'arc AM et l'ordonnée PM, est encore une fonction de l'abscisse AP, et on en trouvera la différentielle d'une manière analogue à celle dont nous sommes parvenus à la différentielle de l'arc dans le numéro précédent. Si on représente par s cette fonction, s deviendra

$$s+\frac{s'h}{1}+\frac{s''h^2}{1.2}+\frac{s'''h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

lorsque x se changera en $x+h$; l'expression de l'espace $PMM'P'$ aura donc pour développement $\frac{s'h}{1}+\frac{s''h^2}{1.2}+\frac{s'''h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$ mais il est aisé de voir que cet espace est plus grand que le rectangle inscrit $PMQP'$ qui a pour expression $PP'\times PM=yh$, et plus petit que le rectangle circonscrit $PRM'P'$ qui est égal à

$$PP'\times PM'=h\left(y+\frac{y'h}{1}+\frac{y''h^2}{1.2}+\text{etc.}\right);$$

la série $\frac{s'h}{1}+\frac{s''h^2}{1.2}+\frac{s'''h^3}{1.2.3}$ etc. sera donc comprise entre les quantités

quantités yh et $yh+\frac{y'h}{1}+\frac{y''h}{1.2}+$ etc. et on en conclura que $s'=y$ (*Int.* n°. 36) ou $\frac{ds}{dx}=y$, ou enfin $ds=ydx$, résultat remarquable, puisqu'il nous apprend que *le coefficient différentiel de la fonction de l'abscisse qui exprime l'aire d'une courbe quelconque, est égal à l'ordonnée de cette courbe.*

On voit par là que quoiqu'on ne puisse obtenir l'expression algébrique finie de la surface de certaines courbes, on parvient néanmoins à connoître la différentielle de cette expression; ainsi pour le cercle, on aura $ydx=dx\sqrt{a^2-x^2}$.

281. Lorsque la courbe proposée est rapportée à des coordonnées polaires, sa surface se mesure par le secteur ADM, *fig.* 37, compris entre l'arc DM et les deux rayons vecteurs AD et AM. Pour en trouver la différentielle, il faut chercher, comme précédemment, le premier terme du développement de la quantité dont ce secteur change, lorsque l'arc $NO=t$ devient $NO+NN'=t+m$, et qui est représentée par le secteur MAM'. Or si par les points M et M', on mène les droites MR et $M'R'$, respectivement perpendiculaires sur AM et AM', on formera deux triangles rectangles MAR et $M'AR'$ entre lesquels sera compris, pour sa grandeur comme pour sa position, le secteur $M'AM'$: la surface du premier sera exprimée par $\frac{AM\times MR}{2}$ et celle du second par $\frac{AM'\times M'R'}{2}$. En considérant AM ou u comme une fonction de t, le développement de AM' sera $u+\frac{u'm}{1}+\frac{u''m^2}{1.2}+$ etc.; on a de plus FIG. 37.

$$MR=AM\tan MAR=u\tan m=u\left(m+\frac{m^3}{3}+\text{etc.}\right)\text{ (n°. 106)};$$

$$M'R'=AM'\tan M'AR'=\left(u+\frac{u'm}{1}+\text{etc.}\right)\left(m+\frac{m^3}{3}+\text{etc.}\right);$$

substituant ces valeurs dans celles des triangles MAR et $M'AR'$, on trouvera pour toutes deux le même premier terme $\frac{u^2m}{2}$ et on en conclura par conséquent que le développement de l'expression du

secteur MAM' doit aussi commencer par ce terme : donc si on désigne par S le secteur DAM, le développement de MAM' étant de la forme $S'\frac{m}{1}+S''\frac{m^2}{1.2}+$ etc., on aura $S'=\frac{dS}{dt}=\frac{u^2}{2}$ et enfin $dS=\frac{u^2dt}{2}$.

282. Non-seulement une courbe est donnée lorsqu'on a son équation, soit en coordonnées respectivement parallèles à deux droites fixes, soit en coordonnées polaires ; mais elle l'est encore lorsqu'on a une relation quelconque entre deux quantités déterminées par sa nature. La propriété qu'a la spirale logarithmique (n°. 278), de faire un angle constant avec le rayon vecteur AM, pourroit donner lieu à une équation entre les droites AM et AT', *fig.* 35, et qui seroit, en nommant u la première et v la seconde, $u=av$: on passera de cette équation à celle qui doit avoir lieu en coordonnées polaires, en mettant au lieu de AT', son expression $\frac{u^2dt}{du}$.

De même une relation entre le rayon de courbure et l'arc d'une courbe doit être envisagée comme une équation de cette courbe, et elle auroit ce caractère remarquable, que l'une des variables seroit entièrement inhérente à la courbe ; car la grandeur du rayon de courbure étant absolument indépendante de la nature et de la position des coordonnées, reste toujours la même pour le même point quelque situation qu'ait la courbe. A l'égard de l'arc, son origine seroit arbitraire, puisqu'on pourroit commencer à le compter de tel point qu'on voudroit de la courbe.

Pour passer des coordonnées rectangles ou polaires, à une relation entre l'arc et le rayon de courbure, il faudroit éliminer dans le premier cas x et y, de l'équation proposée, au moyen des équations $dz^2=dx^2+dy^2$ et $a=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}=\frac{dz^3}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$ (n°. 261), et chasser u et t dans le second, en faisant usage de l'équation $dz^2=du^2+u^2dt^2$ et de l'expression de a trouvée n°. 278.

Les mêmes équations donneront le moyen d'éliminer z et a, et de revenir d'une équation entre ces variables à une autre, entre des

coordonnées rectangles ou des coordonnées polaires ; les moyens de faire cette élimination ont été indiqués n°. 78.

Il faut observer que parmi les relations qui peuvent caractériser une courbe, il y en a qui sont exprimées par des équations algébriques, et d'autres qui ne le sont que par des équations différentielles ; ces dernières sont en quelque sorte indéterminées, c'est-à-dire, qu'elles peuvent appartenir à une infinité de courbes douées toutes d'une propriété commune, car d'après la remarque faite dans le n°. 50, l'équation primitive de laquelle elles tirent leur origine, doit renfermer un nombre de constantes arbitraires égal à l'exposant de leur ordre. Les considérations géométriques confirment elles-mêmes cette remarque.

Si par exemple on différentioit l'équation de la parabole $y^2 = Ax$, et qu'on éliminât ensuite A, on auroit pour résultat l'équation $2x\,dy - y\,dx = 0$, laquelle donnant $y\,\frac{dx}{dy} = 2x$, exprime que la soutangente est double de l'abscisse, propriété commune à toutes les paraboles, quel que soit leur paramètre.

L'équation $y^2 = m\,(a^2 - x^2)$ appartenant à une ellipse dont le centre est à l'origine des x et des y, et dont les axes, situés dans la direction de ceux des coordonnées, sont a et $a\sqrt{m}$, donne par l'élimination des deux constantes a et m, l'équation différentielle du second ordre $y\,\frac{dy}{dx} - x\,\frac{dy^2}{dx^2} - xy\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (n°. 51) ; chacune des ellipses que peut représenter la première, en donnant aux quantités a et m toutes les valeurs possibles satisfait à la seconde, et le cercle de l'équation $x^2 + y^2 = A^2$ s'y trouve compris.

On voit par ce qui précède que la considération des équations différentielles donne le moyen d'exprimer les propriétés les plus générales des courbes, en conduisant à des résultats indépendans des constantes qui particularisent ces courbes.

Application de la méthode des limites à la recherche des lignes osculatrices.

283. Les équations des lignes osculatrices d'une nature donnée, peuvent se déterminer avec autant de facilité que d'élégance, en faisant usage de la méthode des limites dont nous avons montré l'identité avec le Calcul différentiel (n°. 92). Soit (V) une équation

entre x, y, et un nombre n de constantes arbitraires; on pourra particulariser les courbes qu'elle représente, en les assujettisant à passer par un pareil nombre de points donnés (n°. 229). Imaginons que ces points soient situés sur la courbe DX dont on a l'équation en x' et y'; pour fixer les idées, n'en considérons que trois, savoir, M, M' et M'', *fig.* 38, et supposons que les ordonnées PM, $P'M'$, $P''M''$ soient éloignées entr'elles de la même quantité h. Il est évident que pour chacun de ces points, les valeurs des ordonnées, déduites de l'équation (V) appartenante à la courbe EY, doivent être les mêmes que celles qui résultent de l'équation de la courbe DX, et que par conséquent si on met successivement chacune de ces dernières à la place de y, dans l'équation (V), et qu'on substitue à x les valeurs x', $x'+h$, $x'+2h$, des abscisses correspondantes AP, AP', AP'', on obtiendra trois équations qui pourront servir à déterminer autant de constantes arbitraires. Pour l'objet que nous nous proposons, il sera plus commode de comparer immédiatement entr'elles les valeurs de PM, $P'M'$, $P''M''$, tirées de l'une et de l'autre courbe; or la première étant y', dans la courbe DX, la seconde, qui répond à $x'+h$ aura pour développement, dans la même courbe, $y'+\frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1}+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+$ etc. ou $y'+ph+qh^2+$ etc.; celui de la troisième, relatif à l'abscisse $x'+2h$, s'obtiendra en substituant dans le précédent $2h$ au lieu de h, et il viendra $y'+2ph+4qh^2+$ etc. De même dans la courbe EY, la première ordonnée PM étant y, les deux suivantes seront exprimées par les séries

FIG. 38.

$$y+Ph+Qh^2+\text{ etc.} \quad \text{et } y+2Ph+4Qh^2+\text{ etc.}$$

en observant de changer x en x' dans les fonctions y, P, Q etc. Cela posé, on aura les trois équations suivantes

$$y=y' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y+Ph+Qh^2+Rh^3+\text{etc.}=y'+ph+qh^2+rh^3+\text{etc.}. (2)$$

$$y+2Ph+4Qh^2+8Rh^3+\text{etc.}=y'+2ph+4qh^2+8rh^3+\text{etc.}. (3)$$

On peut effacer y et y' dans les deux dernières, puisque la première exprime l'égalité de ces deux fonctions; on éliminera ensuite de la troisième les termes Ph et ph, qui étant affectés du même coefficient disparoîtront ensemble: on trouvera ainsi, au lieu des

équations (1) et (2),

$$ph+Qh^2+Rh^3+\text{etc.}=ph+qh^2+rh^3+\text{etc.}$$
$$2Qh^2+6Rh^3+\text{etc.}=2qh^2+6rh^3+\text{etc.}$$

divisant le premier de ces résultats par h et le second par $2h^2$, il viendra

$$P+Qh+Rh^2+\text{etc.}=p+qh+rh^2+\text{etc.}$$
$$Q+3Rh^2+\text{etc.}=q+3rh^2+\text{etc.}$$

tels sont les développemens des équations auxquelles doivent satisfaire les constantes de l'équation (V) pour qu'elle puisse appartenir à une courbe EY qui rencontre la courbe DX dans les trois points M, M' et M''. En concevant que ces points se rapprochent de plus en plus, on verra que la courbe EY tendra sans cesse à ne faire que toucher la courbe DX, et que la réunion des trois intersections se changeroit en contact. Pour faire coïncider les points M, M' et M'', il faut supposer $h=0$; cette hypothèse n'anéantit aucune des équations que nous venons d'obtenir, mais donne leurs limites qui répondent au contact des deux courbes et sont $P=p$, $Q=q$ ou $\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y'}{dx'^2}$, comme nous l'avons trouvé n°. 259.

En considérant un quatrième point correspondant à l'abscisse $x'+3h$, on auroit pour ce point l'équation

$$y+3Ph+9Qh^2+27Rh^3+81Sh^4+\text{etc.}=y'+3ph+9qh^2+27rh^3+81sh^4+\text{etc.}$$

de laquelle effaçant y et y', et éliminant ensuite les termes Ph et ph, Qh et qh^2, au moyen des équations relatives aux deux points précédens, on auroit $6Rh^3+36Sh^4+\text{etc.}=6rh^3+36sh^4+\text{etc.}$; divisant par $6h^3$ il viendroit $R+6Sh+\text{etc.}=r+6sh+\text{etc.}$, et prenant les limites de chaque membre, on trouveroit pour le cas où les intersections réunies se changeroient en contact, $R=r$.

Il est facile d'étendre ce procédé à tel nombre de points qu'on voudra, et de trouver par conséquent les conditions relatives à un contact d'un ordre quelconque, en l'envisageant comme la réunion d'un certain nombre de points d'intersections. Le contact du premier ordre résultera de celle de deux points, celui du deuxième ordre de celle de trois points, et en général celui du $n^{\text{ième}}$ ordre de celle de $n+1$ points. L'équation de la tangente se déduit

bien simplement de ces considérations, car en prenant l'équation d'une droite $y=ax+b$ à la place de l'équation (V), on a $\frac{dy}{dx}=a$; et les deux constantes a et b sont déterminées par les équations $y=y'$ ou $y'=ax'+b$, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'}$ ou $a=\frac{dy'}{dx'}$, ce qui donne comme dans le n°. 238, $y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$.

284. Nous avons vu dans le n°. 240, comment de l'équation de la tangente, on tiroit l'expression de la soutangente; mais on peut y parvenir immédiatement, en cherchant la limite de l'expression de la partie PS, *fig.* 36, de l'axe AB, comprise entre le pied de l'ordonnée PM et le point où la sécante quelconque $M'S$ rencontre cet axe; car il est évident qu'à mesure que les points M et M' se rapprocheront, la ligne $M'S$ se rapprochera aussi de la tangente MT, et quand ces deux points seront réunis, le point S tombera sur le point T. Les triangles semblables $MM'Q$ et MPS donneront $PS=\frac{MP\times MQ}{M'Q}$; mais en représentant MQ par h, on aura $M'Q=ph+qh^2$, etc. d'où

FIG. 36.

$$PS=\frac{y'h}{ph+qh^2+\text{etc.}}=\frac{y'}{p+qh+\text{etc.}};$$

prenant la limite il en résultera $PT=\frac{y'}{p}=\frac{y'dx'}{dy'}$. Ce qu'on vient de lire est suffisant pour appliquer la méthode des limites à tout ce qui concerne la théorie des courbes; il suffit de considérer d'abord des points éloignés entr'eux, et ayant introduit une quantité qui dépende de leur distance mutuelle, on cherche dans l'équation résultante les termes dont on peut la faire disparoître, et dont l'ensemble compose l'équation de la *limite*, ou celle qui doit avoir lieu lorsque les points proposés viennent à coïncider.

285. Leibnitz, pour appliquer le Calcul différentiel aux courbes, les envisagea comme des Polygones d'un nombre infini de côtés infiniment petits, et dans cette hypothèse, la tangente n'est autre chose que le prolongement du côté même du Polygone, comme on le

voit dans la figure 39. Les triangles semblables $M'MQ$ et PMT, FIG. 39. donnent tout de suite $PT = \frac{MP \times MQ}{M'Q} = \frac{y\,dx}{dy}$. Il semble d'abord que cette manière de trouver la soutangente ne soit pour ainsi dire, qu'une approximation, car quelque petits qu'on suppose les côtés du Polygone, ils ne se confondront jamais avec la courbe, et par conséquent la droite MT ne sera jamais tangente; mais on introduit dans le calcul une circonstance qui justifie la substitution du Polygone à la courbe, c'est l'abstraction qu'on fait des puissances de dx supérieures à la première et de toutes les quantités qu'on regarde comme infiniment petites à l'égard des autres. En effet, si d'un côté les résultats analytiques obtenus ainsi, sont d'autant plus exacts que dx est plus petit, de l'autre le Polygone diffère d'autant moins de la courbe, que ses côtés sont plus multipliés, ou que l'espace PP' qui représente dx est moindre; et comme rien ne s'oppose à ce qu'on imagine ces côtés multipliés au-delà de tel terme qu'on voudra, il s'ensuit que le résultat calculé dans le Polygone peut différer de celui qui lui correspond dans la courbe d'une quantité moindre qu'une grandeur donnée. Présenté sous ce point de vue, le Calcul différentiel ne me paroît offrir aucune notion qu'un bon esprit ne puisse admettre, et il s'applique alors avec la plus grande facilité à toutes les questions qui se rencontrent dans la théorie des courbes (*).

(*) C'est à tort que quelques personnes ont reproché à Leibnitz de n'avoir pas eu des idées exactes sur la métaphysique du Calcul différentiel; voici comment il s'exprime à l'occasion du travail d'un Géomètre nommé Stutmius, sur la quadrature des courbes et la cubature des solides par le moyen des séries :

« Sentio autem et hanc et alias (methodos) hactenus adhibitas omnes deduci » posse ex generali quodam meo dimetiendorum curvilineorum principio, *quod* » *figura curvilinea censenda sit æquipollere polygono infinitorum laterum*; unde sequitur, » quicquid de tali polygono demonstrari potest, sive ita, ut nullus habeatur ad numerum laterum respectus, sive ita, ut tanto magis verificetur, quanto major sumitur laterum numerus, ita ut error tandem fiat quovis dato minor; id de curva » posse pronuntiari ». (*Acta eruditorum ann.* 1684, *pag.* 585).

Ce petit nombre de lignes présente, avec autant de vérité que de concision, l'idée qu'on doit se faire de la méthode des infiniment-petits; et celle des limites, renouvellée

L'arc MOM', *fig.* 36, peut être pris pour sa corde dont il ne diffère point relativement aux quantités du premier ordre, puisque d'après ce qu'on a vu dans le n°. 279, les deux quantités MM' et $MN+NM'$ entre lesquelles il se trouve compris, ne diffèrent elles-mêmes que par des quantités du second ordre. On a donc alors $MOM'=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Le triangle rectiligne MQM', *fig.* 39, comparé au triangle MPR, fait connoître la normale et la sounormale. FIG. 39.

286. L'ordonnée PM ou y, étant représentée par $f(x)$, la suivante $P'M'$ sera $f(x+dx)$; d'où il suit que la différentielle $df(x)=f(x+dx)-f(x)=f'(x)\,dx$ (n°. 10), représentera $M'Q$. Si on met $x+dx$ dans $f'(x)\,dx$, il viendra $f'(x+dx)\,dx$ pour l'expression de la différentielle $M''Q'$ relative à l'ordonnée $P'M'$; mais en prolongeant la droite $M'M$ jusqu'à ce qu'elle rencontre l'ordonnée $P''M''$ en O, on aura $M'Q=Q'O$, et $OM''=M''Q'-M'Q$ $=f'(x+dx)\,dx-f'(x)\,dx$ sera donc la différentielle seconde de l'ordonnée PM, ou d^2y; considérant encore un quatrième point M''', on verra que $O'M'''$ est à l'égard du point M', ce que OM'' est par rapport au point M, et qu'il représente par conséquent ce que devient $f''(x)\,dx^2$ ou d^2y, lorsque x se change en $x+dx$; on aura donc $O'M'''=f''(x+dx)\,dx^2$, et

$$O'M'''-OM''=f''(x+dx^2)-f''(x)\,dx^2=d^2f(x):$$

on formeroit de même les différentielles ultérieures, en prenant un plus grand nombre de points consécutifs.

Il est bien évident par ce qui précède que la courbe seroit concave vers l'axe AB, si $Q'M''$ étoit moindre que $Q'O$ ou QM', et qu'alors OM'' ou d^2y seroit négatif.

Si au lieu de supposer les ordonnées équidistantes, on vouloit que les cotés consécutifs du polygone $MM'M''M'''\ldots$. fussent tous égaux, ce ne seroit plus la différentielle dx qu'il faudroit regarder comme constante, mais l'expression $\sqrt{dx^2+dy^2}$.

---

par d'Alembert, y est assez clairement indiquée. Leibnitz a encore répété dans plusieurs de ses lettres, qu'en se servant de la considération des infiniment-petits pour abréger les raisonnemens *on ne différoit du style d'Archimede, que dans les expressions.*

Lorsqu'on

287. Lorsqu'on rapporte les courbes à des coordonnées polaires, la différentielle première du rayon vecteur AM, *fig.* 40, est la partie QM' retranchée du rayon vecteur suivant, par l'arc de cercle MQ décrit du point A comme centre, avec le rayon AM. On regarde ce petit arc comme une ligne droite, et le triangle MQM' comme rectiligne, ce qui donne $MM'=\sqrt{\overline{QM}^2+\overline{QM'}^2}$. Lorsqu'on mesure l'angle MAM' par un arc de cercle NN' décrit, d'un rayon AN égal à l'unité (n°. 275), on a $QM=udt$, et QM' étant du, il vient $MM'=\sqrt{du^2+u^2dt^2}$. On parvient à l'expression de la soutangente AT que nous avons trouvée dans le n°. 277, en comparant entr'eux les triangles $M'MQ$ et MAT, qu'on regarde comme semblables, parce que l'angle MAM' étant infiniment petit à l'égard de MAT, $M'Q$ peut être supposée parallèle à AM et MQ perpendiculaire sur $M'Q$; il résulte de là $AT=\frac{AM\times MQ}{M'Q}=\frac{u^2dt}{du}$. FIG. 40.

La différentielle seconde d^2u, étant la différence entre deux différentielles premières consécutives, sera représentée par $M''Q'-MQ$, et il faudra observer que lorsqu'on suppose l'arc NN' constant ou qu'on fait varier l'angle t de la même quantité, les arcs QM, $Q'M'$, ne sont pas pour cela égaux entr'eux; car ils sont tous de rayons différens.

288. En regardant les courbes osculatrices comme des Polygones qui ont un certain nombre de côtés communs avec le Polygone qui représente la courbe proposée, on remarquera sans peine que pour chacun de ces côtés, les différentielles doivent être les mêmes dans le Polygone *touchant* et dans le Polygone *touché*. Nommant donc y l'ordonnée de la courbe osculatrice, et y' celle de la courbe proposée, on aura pour la tangente, qui ne coïncide qu'avec un seul côté, $y=y'$ et $dy=dy'$. Dans les courbes osculatrices du second ordre, qui ont deux côtés communs avec la proposée, on aura en même tems $y=y'$, $dy=dy'$, $d^2y=d^2y'$, et ainsi de suite pour les ordres plus élevés. Ces résultats s'accordent bien évidemment avec ceux du n°. 269, puisque dx est le même pour les deux courbes.

289. On peut encore déduire la théorie des cercles osculateurs

d'une considération trop élégante et trop féconde pour la passer sous silence. Si on élève sur le milieu des côtés MM', $M'M''$, fig. 39, les perpendiculaires GF, $G'F'$, leur intersection F', sera le centre du cercle qui passe par les trois points M, M', M''; on verra de même que le point F'' sera celui du cercle qui passeroit par les trois points M', M'' et M''', et ainsi des autres; mais plus les côtés du Polygone seront multipliés, plus les lignes GF, $G'F'$... approcheront d'être normales à la courbe, et moins le cercle $MM'M''$ différera du cercle osculateur: on pourra donc regarder le centre de courbure comme l'intersection de deux normales infiniment voisines, et la développée $F'F''$.... comme la courbe résultante de toutes ces intersections. Il est bien évident alors qu'elle doit être touchée par toutes les normales, et que les cercles osculateurs touchent et coupent en même tems la courbe proposée, ainsi qu'on l'a fait voir dans le n°. 262.

FIG. 39.

Pour exprimer analytiquement ces circonstances, on reprendra l'équation de la normale qui, en désignant par x' et y' les coordonnées du point pris sur la courbe proposée, pourra être mise sous la forme $(y-y')\,dy'+(x-x')\,dx'=0$... (1) (n°. 245), et on observera que pour passer à la normale du point suivant, il faudroit substituer $x'+dx'$ à x' et faire varier y' en conséquence, mais qu'en appliquant les coordonnées x et y au point d'intersection des deux normales, elles ne doivent point changer dans ce cas; on égalera donc à zéro la différentielle de l'équation (1), prise seulement par rapport à x' et à y', et en faisant dx' constant: il viendra

$$(y-y')\,d^2y'+dx'^2+dy'^2=0.... (2).$$

En déterminant x et y par ces équations on aura les mêmes valeurs que celles que les équations (2) et (3) des n°s. 160 et 161, ont donné pour α et pour β; on calculera l'expression de MF par la formule $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$.

Il est bon de remarquer que les équations (1) et (2) s'obtiendroient aussi en égalant à zéro la différentielle première, et la différentielle seconde de l'expression $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$. En effet, le cercle osculateur passant par trois points infiniment proches, sur la courbe proposée, aura son centre à égale distance de

chacun de ces points; or les coordonnées du premier étant x' et y', il faudra différentier ces variables une fois pour passer au second, et deux fois pour arriver au troisième, sans que pour cela la distance ci-dessus éprouve de variation; il est donc évident que sa différentielle première et sa différentielle seconde doivent être nulles.

290. Le procédé par lequel nous sommes parvenus à l'équation de la développée, en la regardant comme formée par les intersections consécutives des normales, pourroit s'appliquer à la recherche de la courbe touchée par toutes les droites menées par les différens points de la courbe proposée, et faisant avec la tangente des angles donnés, puisqu'il seroit facile de trouver les équations de l'une quelconque de ces droites. Nous allons résoudre le problême général, dont celui-ci n'est qu'un cas particulier, et qu'on peut énoncer comme il suit: *trouver l'équation de la courbe qui en touche une infinité d'autres d'une nature donnée et assujetties à se succéder suivant une certaine loi.*

Pour rendre la solution plus facile à saisir, je prendrai d'abord un exemple, et je me proposerai de déterminer l'équation de la courbe EX, *fig.* 41, qui touche tous les cercles décrits sur les différens points de la courbe DZ, pris pour centre, et d'un rayon égal à a. Soient MGQ et $M'GQ'$ deux de ces cercles, ayant leur centres aux points N et N'; il est évident que leur point d'intersection G sera d'autant moins éloigné de la courbe EX que les points N et N' seront plus voisins l'un de l'autre, et qu'en faisant coïncider ces points, ceux d'attouchement M et M' se confondront avec le point G: on peut donc regarder la courbe *touchante* EX comme formée par les intersections successives des cercles *touchés*. FIG. 41.

Cela posé, l'équation du cercle MGQ sera $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$, en désignant par α et β les coordonnées AQ et QN de la courbe DZ; mais au moyen de l'équation de cette courbe que je représenterai par $\beta=f(\alpha)$, on pourra chasser β de la précédente, qui deviendra alors

$$[x-\alpha]^2+[y-f(\alpha)]^2=a^2.$$

Tant qu'on ne considère qu'un cercle en particulier, la quantité α doit être regardée comme constante, et pour passer de ce cercle à celui qui le suit immédiatement; il faut donner à α une valeur infiniment peu différente de celle qu'il avoit d'abord; mais pendant

que α varie ainsi, les coordonnées x et y du point G, commun à la fois aux deux cercles, ne varieront pas, et c'est ce qu'on exprimera en égalant à zéro la différentielle de l'équation (1), prise par rapport à α seulement, d'où il résultera

$$[x-\alpha]+[y-f(\alpha)]f'(\alpha)=0\ldots.(2),$$

en représentant $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}$ par $f'(\alpha)$, et en supprimant le facteur commun $d\alpha$. Maintenant si on élimine α entre les équations (1) et (2), on obtiendra la relation que doivent avoir entr'elles les variables x et y, quelle que soit la position du point N sur la courbe DZ, ou, ce qui revient au même, l'équation de la courbe EX, qui touche tous les cercles décrits suivant les conditions de la question.

Soit en général $V=0$ une équation entre x, y et une constante arbitraire α, en donnant à cette constante toutes les valeurs possibles, il en résultera une infinité de courbes qu'on pourra considérer comme se coupant deux à deux consécutivement, et dans l'ensemble de ces courbes l'ordonnée y variera de deux manières, savoir, en passant d'un point à un autre dans la même courbe, ou en passant d'une courbe à l'autre, relativement à la même abscisse; dans le premier cas x varie seul, et la différentielle de y est $\frac{dy}{dx}dx$, dans le second c'est α qui varie, et on a $\frac{dy}{d\alpha}d\alpha$ pour la différentielle de y. Mais lorsque l'on considère un point commun à deux courbes consécutives, y reste le même pour l'une et pour l'autre, ce qui donne $\frac{dy}{d\alpha}=0$. D'après ce qui précède, on doit donc regarder y comme une fonction de x et de α dépendante de l'équation $V=0$, et on trouvera, pour déterminer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dy}{d\alpha}$, les deux équations suivantes :

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dx}\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{dV}{d\alpha}+\frac{dV}{dy}\frac{dy}{d\alpha}=0,\ (\text{n}^{\circ}.\ 79).$$

On voit par la dernière, que la supposition de $\frac{dy}{d\alpha}=0$ donne $\frac{dV}{d\alpha}=0$. Combinant cette équation avec $V=0$, il en résultera par l'élimi-

nation de α, l'équation de la courbe qui touche toutes celles qui peuvent être représentées par $V=0$.

On auroit pu parvenir au même résultat sans employer la considération des intersections successives des courbes touchées. En effet, la courbe touchante a, dans l'un quelconque de ses points, les mêmes coordonnées x et y et le même coefficient différentiel que celle des courbes de l'équation $V=0$, qu'elle touche à ce point; elle doit donc alors satisfaire aux équations $V=0$ et $\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy=0$, en donnant à α la valeur convenable; car il faut observer que la position du point de contact particularise nécessairement la courbe touchée. Il suit de cette dernière remarque que lorsque α varie, x et y doivent varier aussi, et que par conséquent on peut différentier l'équation $V=0$, en supposant que x et y soient des fonctions de α, ce qui donnera $\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{d\alpha}d\alpha=0$, résultat qui, en vertu de l'équation $\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy=0$, se réduit à $\frac{dV}{d\alpha}=0$. Les deux équations $V=0$ et $\frac{dV}{d\alpha}=0$, ayant donc lieu pour chaque point de contact, on en tirera celle qui convient à l'ensemble de tous ces points, ou à la courbe touchante, en éliminant α dont les valeurs sont relatives aux différentes courbes touchées.

Si l'équation proposée, $V=0$, étoit différentielle du premier ordre et renfermoit une constante arbitraire, les courbes consécutives qu'on obtiendroit en faisant varier cette constante, ne se couperoient pas, mais se toucheroient; car en passant de l'une quelconque d'entr'elles à celle qui la suit, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ ne changeroit pas, non plus que les coordonnées x et y. Dans ce cas la courbe touchante, dont on obtiendra l'équation en éliminant α entre $V=0$ et $\frac{dV}{d\alpha}=0$, auroit, avec chacune des courbes touchées, un contact du second ordre.

On étendroit facilement ces considérations aux équations différentielles des ordres plus élevés.

291. Le procédé par lequel on fait varier les constantes d'une

équation, est un des grands moyens de l'Analyse, et il s'applique avec élégance aux questions géométriques, puisqu'il n'y a pas de courbe qu'on ne puisse regarder comme produite par les intersections successives d'une suite de lignes d'une même nature. Nous allons encore en donner un exemple, en déterminant les équations des *Roulettes*, c'est-à-dire, des courbes engendrées par le mouvement d'un point pris sur une courbe assujettie à rouler sur la circonférence d'une autre courbe.

Pour faciliter cette recherche, substituons aux courbes propo-
FIG. 42. sées deux Polygones QMG et DZ, *fig.* 42. Il est d'abord évident qu'en supposant que le point décrivant M, pris sur le Polygone mobile, se soit trouvé appliqué au point D du Polygone immobile, l'arc QM sera égal à l'arc DQ. On apperçoit ensuite facilement, que tandis que le côté Qq du Polygone mobile, tournera autour du point Q pour venir s'appliquer sur le côté QQ' du Polygone immobile, le point M décrira un arc de cercle MM', dont le centre sera au point Q, et qui aura pour rayon, la corde MQ. Quand le point q sera parvenu en Q', le Polygone mobile tournera alors autour de ce dernier, jusqu'à ce que le côté $Q'q'$ consécutif à Qq, se soit appliqué sur le Polygone immobile, et le point M, parvenu en M', décrira un nouvel arc de cercle $M'M''$, ayant pour rayon la corde $M'Q'$ égale à Mq, et pour centre le point Q'. Il suit de ces remarques, que la roulette sera formée par les intersections consécutives des cercles décrits sur chaque point de la courbe DZ, avec des rayons égaux aux cordes des arcs de la courbe mobile interceptés entre ces points et le point décrivant, et que par conséquent elle sera touchée par tous ces cercles.

En nommant α et β les coordonnées de la courbe immobile et γ la corde MQ, l'équation du cercle MM', sera

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2 \ldots . (1)$$

Il faut observer maintenant que d'après l'énoncé de la question, β et γ sont des fonctions connues de α. Cela est d'abord évident à l'égard de β, puisqu'il est donné en α, par l'équation de la courbe immobile DZ. Ensuite si on représente par ε l'arc DQ, ε sera une fonction de α; mais ε exprime aussi l'arc MQ qui est égal à DQ;

et la nature de la courbe mobile QMG fournira toujours une équation entre cet arc et la corde représentée par γ : on pourra donc concevoir que β et γ soient déterminés en α, au moyen des relations qu'on vient d'indiquer.

En différentiant donc l'équation (1) par rapport à α seulement pour passer au cercle $M'M''$ consécutif à MM', il viendra

$$-(x-\alpha)-(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}=\gamma\frac{d\gamma}{d\alpha}\ldots.(2);$$

et éliminant α entre cette équation et la précédente, on aura l'équation de la roulette. Cependant comme il arrivera le plus souvent que la relation entre l'arc QM et sa corde sera transcendente, ainsi que celle qui doit exister entre l'arc DQ et les coordonnées de la courbe DZ, l'élimination de α sera impossible, et il sera plus commode de tirer des équations (1) et (2) les valeurs de x et de y en α, β et γ. En effectuant les calculs nécessaires, et mettant dt^2 à la place de $d\alpha^2+d\beta^2$, on trouvera aisément

$$x=\alpha-\frac{\gamma d\gamma d\alpha+\gamma d\beta\sqrt{dt^2-d\gamma^2}}{dt^2}$$

$$y=\beta-\frac{\gamma d\gamma d\beta-\gamma d\alpha\sqrt{dt^2-d\gamma^2}}{dt^2}.$$

On facilitera l'application de ces formules, en exprimant, autant qu'il sera possible, les quantités α, β et γ par l'arc t, qui est commun à la courbe mobile et à la courbe immobile.

292. Si nous supposons que la courbe mobile soit un cercle, et que la courbe immobile soit l'axe même des abscisses, la roulette décrite alors, sera la cycloïde ordinaire (n°. 271). Dans ce cas l'ordonnée β de la courbe immobile étant toujours nulle, on a $d\beta=0$, AQ, *fig.* 33, devient égale à α, ce qui donne $\alpha=t=MQ$; conservant les dénominations du n°. cité, la corde MQ ou γ sera exprimée par

$$\sqrt{2r.QN}=\sqrt{2r^2\left(1-\cos\frac{t}{r}\right)},$$

d'où on tirera $d\gamma=\dfrac{rdt\sin\frac{t}{r}}{\sqrt{2r\left(1-\cos\frac{t}{r}\right)}}$. Si on substitue ces va-

leurs dans celles de x et de y, que la supposition de $\beta=0$, $d\beta=0$; $\alpha=t$, $d\alpha=dt$, réduit à $x=\alpha-\frac{\gamma d\gamma}{dt}$, $y=\beta-\frac{\gamma\sqrt{dt^2-d\gamma^2}}{dt}$, on trouvera $x=t-r\sin\frac{t}{r}$, $y=r\left(1-\cos\frac{t}{r}\right)$.

Nous avons supposé que le point décrivant étoit sur la circonférence du cercle générateur, mais quand il seroit placé soit en dedans soit en dehors de ce cercle, les formules ne deviendroient guères plus compliquées. Il est bien visible d'ailleurs qu'on auroit égard à cette circonstance en substituant à la corde MQ la distance mQ,
FIG. 43. *fig.* 43, qui seroit alors le rayon du petit arc de cercle décrit par le point m autour du point Q.

Si on nomme p la distance mO, à laquelle le point décrivant se trouve du centre du cercle générateur, et qu'on mène sur MO la perpendiculaire NQ, en continuant d'appeller t, l'arc MQ, on aura

$$NQ=r\sin\frac{t}{r},\ NO=r\cos\frac{t}{r},\ MQ=\gamma=\sqrt{\left(p-r\cos\frac{t}{r}\right)^2+\left(r\sin\frac{t}{r}\right)^2}$$

$$\gamma d\gamma=pdt\sin\frac{t}{r},\quad \gamma\sqrt{dt^2-d\gamma^2}=dt\sqrt{r-p\cos\frac{t}{r}}$$

d'où il résultera $x=t-p\sin\frac{t}{r}$ $y=r-p\cos\frac{t}{r}$.

Lorsque le point M est hors du cercle générateur, la courbe décrite passe au-dessous de la ligne AB, et on l'appelle *cycloïde accourcie*, parce que sa hauteur est plus considérable que celle de la cycloïde ordinaire; on la nommeroit *cycloïde alongée*, si le point M étoit placé dans l'intérieur de ce cercle, et alors elle n'atteindroit pas la ligne AB.

Les roulettes offrent encore un genre de courbes, dont les Géomètres se sont occupés spécialement; je veux parler des épicycloïdes, pour lesquelles les courbes mobiles et les courbes immobiles sont toutes deux des cercles. En désignant par q le rayon du dernier, dont on suppose le centre sur la ligne des abscisses AB ses coordonnées α et β seront exprimées par

$$q\left(t-\cos\frac{t}{q}\right)\text{ et }q\sin\frac{t}{q},$$

Substituant

Substituant ces valeurs, ainsi que leurs différentielles, dans celles de x et de y; conservant pour plus de généralité, les expressions de γ et $d\gamma$ données ci-dessus, relativement au cas où le point décrivant est placé hors la circonférence du cercle mobile, et chassant les produits des sinus et cosinus, au moyen des formules connues, qui donnent les valeurs de ces produits par le sinus et le cosinus de la somme et de la différence des arcs, on trouvera après les réductions, $x = q - (q+r)\cos\frac{t}{q} + p\cos\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)t$,

$$y = (q+r)\sin\frac{t}{q} - p\sin\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)t,$$

Toutes les fois que les rayons q et r seront entr'eux comme nombre à nombre, on pourra exprimer par des équations algébriques les relations de $\sin\frac{t}{r}$ et $\sin\frac{t}{q}$, $\cos\frac{t}{r}$ et $\cos\frac{t}{q}$, et par leur moyen éliminer ces quantités des équations précédentes; le résultat en x et y étant algébrique, la roulette ne sera point transcendante.

Supposons encore que la courbe immobile restant quelconque, la courbe mobile soit une ligne droite, et qu'on prenne le point décrivant sur cette ligne même; la roulette deviendra alors la développante de la courbe immobile et on aura $\gamma = t$, d'où il résultera

$$x = \alpha - \frac{t\,d\alpha}{dt}, \quad y = \beta - \frac{t\,d\beta}{dt}.$$

Eliminant α, β et t, à l'aide de ces équations et des relations entre α, β et t, déduites de l'équation de la courbe proposée, on parviendra à l'équation de la développante.

293. Ce qui précède donne la solution du problême inverse des développées; je vais montrer comment on obtiendroit les mêmes résultats, en se servant des équations

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = a^2 \text{ (n°. 260)}$$

$$(x'-\alpha)dx' + (y'-\beta)dy' = 0, \quad dx'^2 + dy'^2 + (y'-\beta)d^2y' = 0 \text{ (n°. 264)}.$$

Si les coordonnées de la développée sont des fonctions de celles de la développante, les secondes peuvent à leur tour être regardées comme des fonctions des premières. En différentiant sous ce point

vue les deux premières équations ci-dessus, on fera varier en même tems les quantités x', y', α, β et a; mais les termes affectés de dx' et de dy' disparoîtront dans le premier résultat, en vertu de la seconde équation, et dans le second, en vertu de la troisième; on aura donc

$$-(x'-\alpha)\,d\alpha-(y'-\beta)\,d\beta=a\,da,\quad d\alpha\,dx'+d\beta\,dy'=0$$

prenant la valeur de dy' dans le dernier résultat, pour la substituer dans la seconde des équations précédentes, il viendra

$$(x'-\alpha)\,d\beta-(y'-\beta)\,d\alpha=0.$$

Cette équation combinée avec $-(x'-\alpha)\,d\alpha-(y'-\beta)=a\,da$, donnera des valeurs de x' et de y', qui, lorsqu'on aura mis t à la place de a, seront les mêmes que celles de x et de y, trouvées en dernier lieu dans le n°. précédent, parce qu'en les substituant dans l'équation $(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=t^2$, il viendra $dt^2=d\alpha^2+d\beta^2$: on n'aura donc point t, mais seulement sa différentielle. Cette circonstance s'explique, en observant qu'une même développée peut engendrer une infinité de développantes, puisqu'on peut prendre le point décrivant où l'on voudra sur la droite mobile, et faire en conséquence $\gamma=t+p$, ce qui donnera $d\gamma=dt$, et ne changera rien à la forme des valeurs de x et de y, dans lesquelles il faudra seulement remplacer γ par $t+p$.

On pourroit renverser aussi la question des roulettes, en se proposant de déterminer l'équation de la courbe immobile, lorsque celle de la roulette et de la courbe mobile sont données, ou bien de trouver celle de cette dernière, lorsqu'on connoît les deux autres. Je n'entrerai point dans ces détails, je me contenterai d'observer que la révolution d'une courbe sur une autre est, de même que le développement, un moyen de produire une courbe quelconque; car La Hire a prouvé synthétiquement dans les Mémoires de l'Académie (année 1706), et on le verroit aussi par l'Analyse précédente, qu'*une courbe quelconque étant donnée, on peut toujours en trouver une qui, roulant sur une autre courbe aussi donnée, engendre la première, par un de ses points.*

PLANCHE Ire

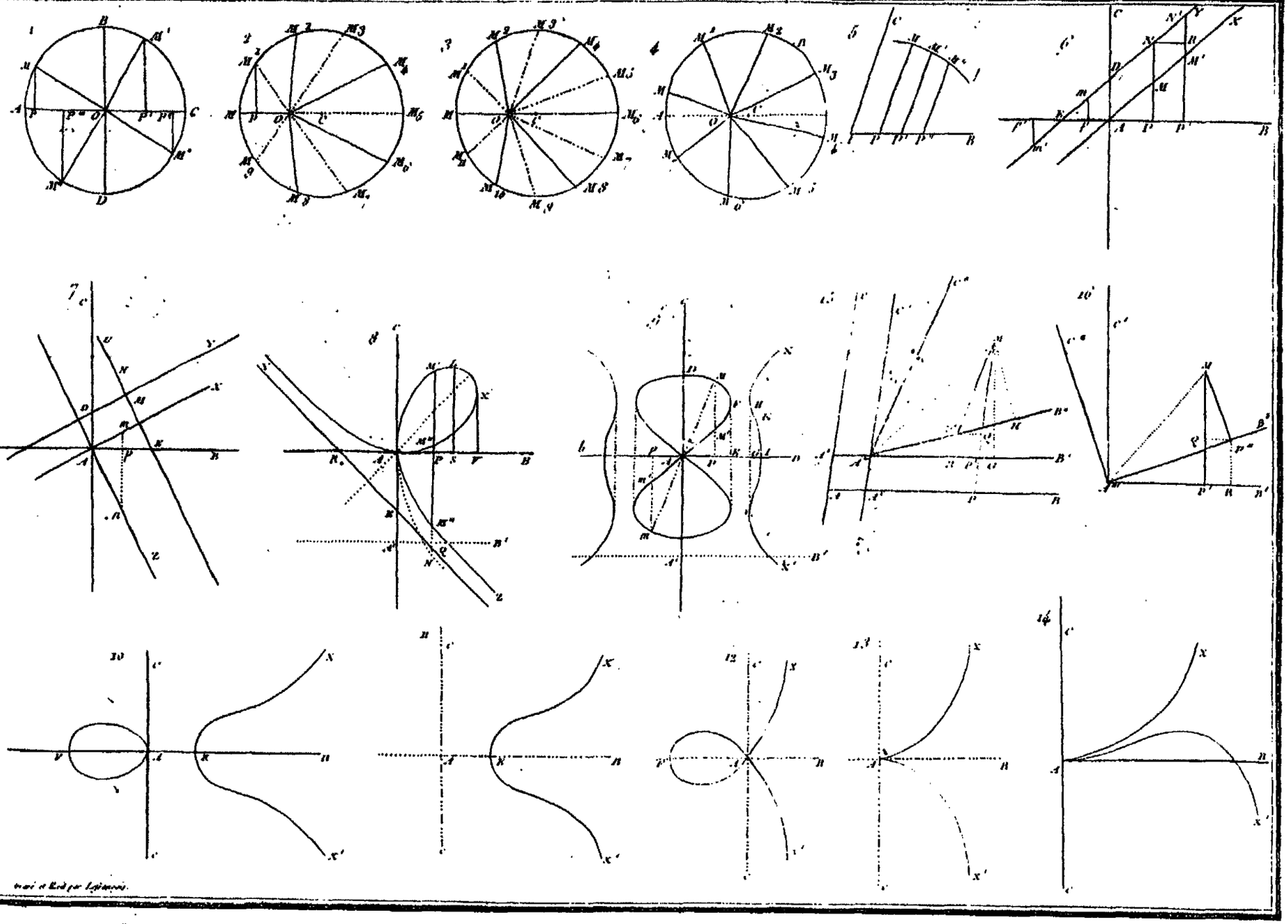
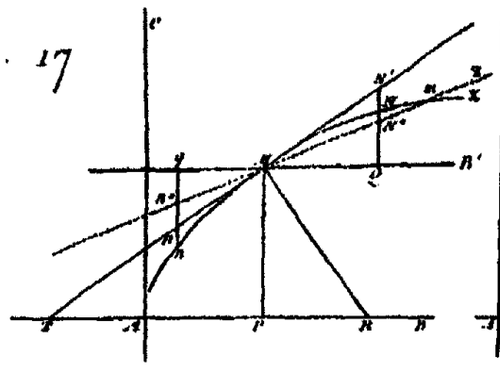
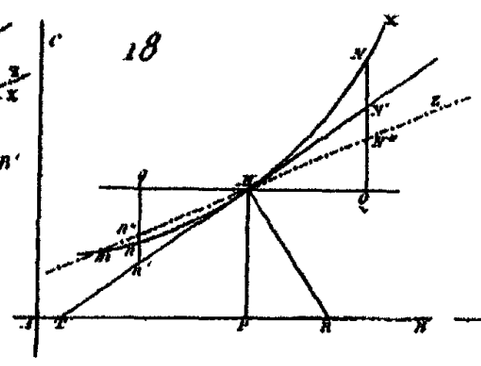


PLANCHE II.me

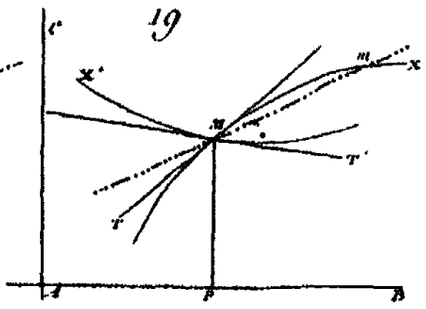
17



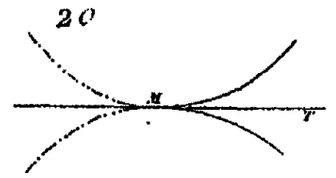
18



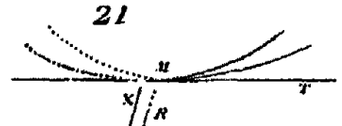
19



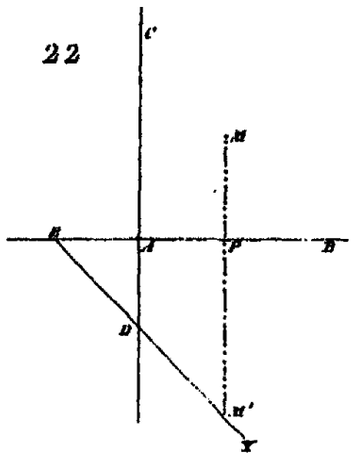
20



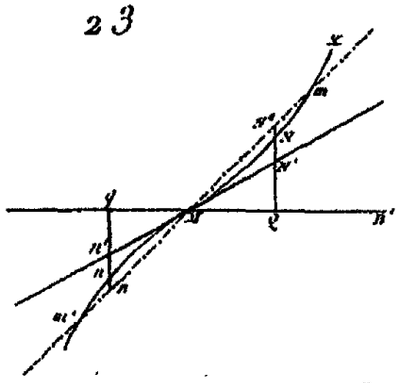
21



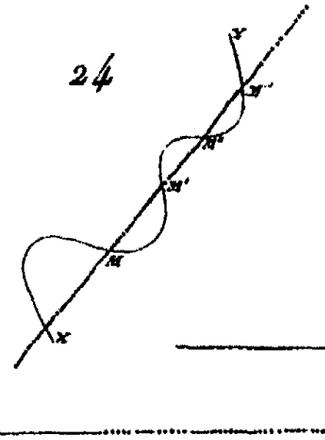
22



23

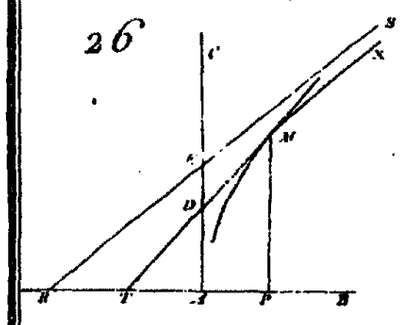


24

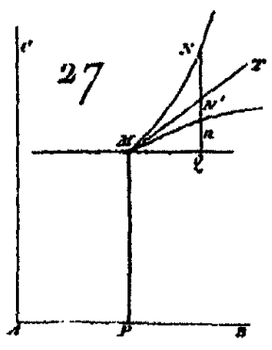


25

26



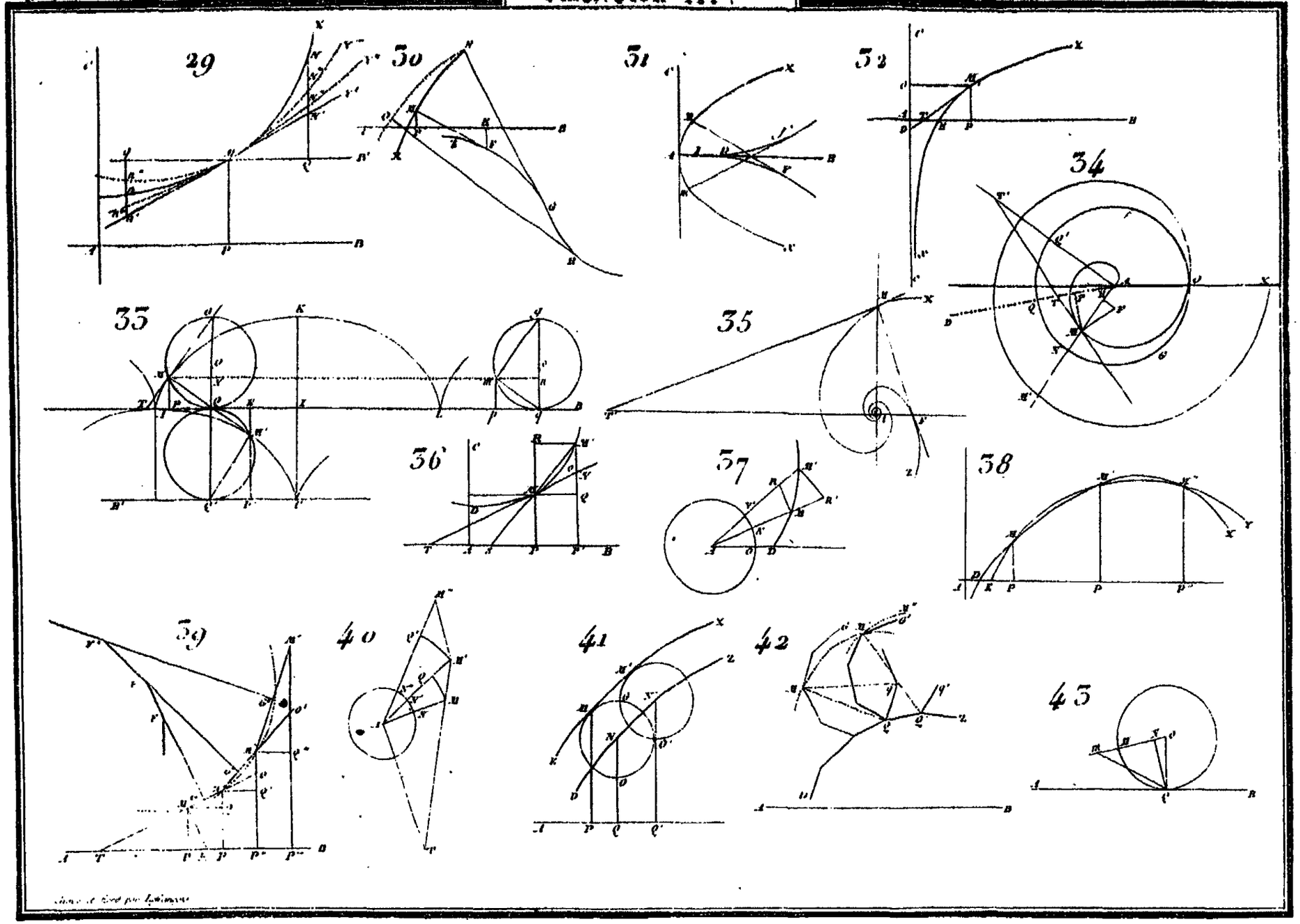
27



28

Gravé à Paris par Lefrançois.

PLANCHE IIIme



CHAPITRE V.

Théorie des Surfaces courbes et des Courbes à double courbure.

LA Théorie des Surfaces courbes et des Courbes à double courbure que je présenterai dans ce chapitre, est presqu'entièrement due à Monge. Clairaut et sur-tout Euler, étoient arrivés à des résultats importans sur cette matière; mais Monge en les retrouvant, pour ainsi dire, de son côté, leur a donné une forme nouvelle par l'élégance de l'Analyse dont il a fait usage pour y parvenir, et il a considérablement ajouté à ce qui étoit connu avant lui.

Je crois devoir prévenir les lecteurs peu habitués à ce genre de considérations, qu'ils trouveront dans un petit ouvrage que j'ai publié il y a quelques années, sous le titre d'*Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes*, les notions préliminaires indispensables pour l'intelligence de ce qui va suivre, et que je renverrai aux articles de ce livre, en citant les numéros précédés de la lettre *E*, pour les distinguer de ceux du traité actuel.

Equations du Plan et de la Ligne droite.

294. La manière la plus commode de fixer la position d'un point quelconque *M* de l'espace, *fig.* 44, est de le projetter d'abord sur un plan *BAC* donné de position, en abaissant sur ce plan la perpendiculaire *MM'*, et de rapporter ensuite la projection *M'* à deux axes *AB* et *AC* perpendiculaires entr'eux, par les coordonnées *AP* et *PM'*. Cela revient à rapporter le point lui-même aux trois plans *BAC*, *BAD* et *DAC* perpendiculaires entr'eux; car les coordonnées *AP* et *PM'*, quoique situées dans le plan *BAC*, représentent les distances *MM'''* et *MM''* du point proposé *M*, aux deux autres plans *BAC* et *BAD*. Les droites *AB*, *AC* et *AD*, suivant lesquelles les plans *coordonnés* *BAC*, *DAC* et *BAD* se coupent deux à deux, s'appellent *axes* des coordonnées, et on les distingue entr'elles par la lettre qui marque la coordonnée qui leur est parallèle; ainsi en faisant $AP=x$, $PM'=y$, $MM'=z$, la ligne *AB* sera l'axe des x, la ligne *AC*, celui des y, et la ligne *AD* celui des z.

FIG. 44.

Les plans coordonnés reçoivent eux-mêmes des dénominations semblables ; le plan BAC s'appellera le plan des x et y, parce qu'il contient les coordonnées x et y. La projection M'' du point M, sur le plan BAD, étant rapportée aux deux axes AB et AD, par les coordonnées $AP=x$ et $PM''=MM'=z$, ce plan sera désigné sous le nom de plan des x et z. Enfin la projection M''' du point M, sur le plan DAC, étant rapportée aux axes AC et AD, par les coordonnées $AR=PM'=y$ et $RM'''=M'M=z$, ce plan sera désigné sous le nom de plan des y et z.

Il faut observer, 1°. que les coordonnées y et z sont nulles en même tems pour tous les points de l'axe des x, AB ; qu'il en est de même de x et de z relativement à l'axe des y, AC, et de x et de y relativement à l'axe de z, BD.

2°. Que pour tous les points du plan BAC, la coordonnée z est nulle, et qu'elle a une valeur constante dans tous ceux d'un plan quelconque, parallèle à ce premier ; ensorte que cette équation, $z=c$, lorsqu'elle est seule et qu'on n'a aucune autre détermination relativement aux deux coordonnées restantes x et y, doit être regardée comme désignant tous les points du plan mené parallèlement à BAC, à une distance égale à c. On verra de même que y est nul pour tous les points du plan BAD, et que l'équation du plan qu'on meneroit parallèlement à ce premier, à une distance b, seroit $y=b$.

Si on réunit ensemble les deux équations $z=c$, et $y=b$, c'est-à-dire, si on suppose qu'elles ayent lieu en même tems, elles désigneront une droite parallèle à l'axe des x, et menée par le point du plan de y et z, dont les coordonnées sont a et b. Il est facile de voir que cette droite peut être regardée comme l'intersection de deux plans respectivement parallèles aux plans BAC, BAD.

Enfin, dans le plan DAC la coordonnée x sera toujours nulle ; et $x=a$ sera l'équation du plan parallèle à ce premier, mené à une distance égale à a. Les trois équations $z=c$, $y=b$, $x=a$, étant réunies, ne peuvent plus appartenir qu'au point qui se trouve dans l'intersection des trois plans respectivement parallèles à chacun des plans coordonnés.

295. Examinons maintenant ce que signifieroit une seule équation, entre deux des trois indéterminées x, y et z, et prenons pour exemple $z=Ax$. Nous verrons d'abord que cette équation appartient à une droite AN'', *fig.* 45., menée dans le plan des x et z, BAD. FIG. 45. Mais elle a encore un sens plus étendu ; car si on conçoit que la droite AN'' se meuve parallèlement à elle-même le long de l'axe des y, AC dans quelque position qu'elle s'arrête, l'ordonnée z, ou $M'm$, prise au point quelconque M' situé dans la droite PM', parallèle à AC, et sur laquelle x est constante, sera égale à l'ordonnée correspondante Pm'', dans le plan BAD ; or la droite AN'' par le mouvement que nous lui supposons, décrit le plan $N''AC$, passant par les droites AN'' et AC ; on aura donc $z=Ax$ pour tous les points de ce plan. On trouveroit des conséquence analogues pour les autres plans coordonnés, en prenant des équations entre les indéterminées qu'ils contiennent ; mais il vaut mieux passer tout de suite à un cas plus général, et considérer l'équation $z=Ax+By$.

En y faisant $y=0$, il viendra $z=Ax$, et nous en conclurons que la droite AN'', qui se trouve comprise dans cette dernière, renferme tous les points que la surface représentée par l'équation $z=Ax+By$ a de communs avec le plan coordonné BAD, sur lequel y est toujours nul, ou, ce qui revient au même, est l'intersection de ce plan, avec la surface proposée.

Lorsqu'on fait $x=0$, on obtient $z=By$, équation qui appartient à une droite AN''' menée par l'origine A, dans le plan DAC, et qui est l'intersection de ce plan, avec la surface représentée par l'équation $z=Ax+By$.

Si maintenant on conçoit que l'angle $N'''AR$ se meuve parallèlement au plan DAC, de manière que son sommet soit toujours sur la droite AN'', et que le côté AR reste parallèle à AC, ce côté décrira le plan $N''AC$, et quand AN''' sera parvenu dans une position quelconque $m''M$, la portion Mm de l'ordonnée $M'M$ sera égale et parallèle à Rm''', et on aura par conséquent

$$M'M=Pm''+Rm'''=Ax+By=z:$$

mais la surface engendrée par la droite AN''' n'est autre chose que

le plan passant par les droites AN' et AN''; l'équation $z=Ax+By$ sera donc celle de ce plan.

Si le plan proposé, au lieu de passer par l'origine A, se trouvoit dans une position $G''EG'''$, déterminée par les lignes EG'', EG''', respectivement parallèles à AN'' et à AN''', il seroit parallèle à $N'AN''$, et en prolongeant l'ordonnée de celui-ci jusqu'à la rencontre du premier, on auroit $M'N=M''M+MN=M'N+AE$, en nommant donc D la distance AE, et z l'ordonnée $M'N$, il viendroit, d'après ce qui précède, $z=Ax+By+D$. Telle est l'équation d'un plan mené dans une position quelconque: il est aisé de se convaincre qu'elle représente l'équation générale du premier degré à trois indéterminées; car cette dernière ne peut être que de la forme $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$, et en la divisant par γ, elle rentrera dans la première, lorsqu'on aura posé

$$-\frac{\alpha}{\gamma}=A, \qquad -\frac{\beta}{\gamma}=B, \qquad -\frac{\delta}{\gamma}=D.$$

On voit donc que le coefficient γ n'ajoute rien à la généralité de l'équation; je le conserverai néanmoins pour rendre les formules plus symétriques, et je représenterai l'équation d'un plan quelconque par $Ax+By+Cz+D=0$; mais il faudra se rappeller que dans tous les résultats, il y aura une des constantes qu'on pourra supposer égale à l'unité, ou déterminer par des conditions particulières.

296. En faisant successivement x, y et z nuls dans l'équation de ce plan, on verra qu'il rencontre celui des y et z dans une ligne dont l'équation est $Ay+Cz+D=0$; celui des x et z dans une ligne dont l'équation est $Bx+Cz+D=0$, et enfin celui des x et y dans une ligne ayant pour équation $Ax+Cy+D=0$.

L'étendue des plans étant indéfinie, il faut concevoir que le plan $G''EG'''$ soit prolongé derrière les plans coordonnés BAD, DAC; il rencontrera alors le plan BAC et passera au-dessous. Toutes ces circonstances peuvent se lire dans son équation, en observant que chacune des indéterminées x, y et z doit être prise positivement et négativement, et que si les parties AB, AC et AD des axes des coordonées répondent aux valeurs positives de ces quantités,

les parties opposées Ab, Ac et Ad répondront aux valeurs négatives. Cela peut se prouver immédiatement par le cours des lignes situées dans les plans BAC, BAD et CAD; on y parviendroit encore en transportant chacun de ces plans parallèlement à lui-même, de manière à rendre positives les ordonnées négatives qui lui sont perpendiculaires, et on raisonneroit alors comme on a fait à l'égard des lignes, n°. 202.

Il suit de là qu'on peut distinguer dans lequel des huit angles solides que les plans coordonnés forment autour du point A, tombe un point proposé, par le moyen des signes dont ses coordonnées sont affectées; il suffit pour cela de remarquer que si on prend $+x$, $+y$, $+z$, dans l'angle formé par les plans BAC, BAD et DAC, *fig.* 44, on aura

$+x$, $+y$, $-z$ dans l'angle BAC, CAd, BAd
$+x$, $-y$, $+z$ dans l'angle BAc, cAD, DAB
$-x$, $+y$, $+z$ dans l'angle bAC, CAD, bAD
$+x$, $-y$, $-z$ dans l'angle BAc, cAd, BAd
$-x$, $-y$, $+z$ dans l'angle bAc, cAD, bAD
$-x$, $+y$, $-z$ dans l'angle bAC, CAd, bAd
$-x$, $-y$, $-z$ dans l'angle bAc, cAd, bAd.

297. Une ligne droite est donnée toutes les fois qu'on connoît deux plans qui la contiennent et dont elle est alors l'intersection, parce que les coordonnées de ses points sont communes aux deux équations de ces plans. Soient donc

$Ax+By+Cz+D=0 \ldots (1)$, $A'x+B'y+C'z+D'=0 \ldots (2)$

les équations des plans donnés; en regardant les indéterminées x, y et z comme ayant la même valeur dans ces deux équations, il n'en restera qu'une qu'on puisse prendre arbitrairement, et les deux autres calculées en conséquence de la première, feront connoître la position des différens points de la droite proposée.

Les équations (1) et (2) ne sont pas les seules qui puissent représenter la droite proposée, car elle se trouve dans une infinité de plans différens; mais on choisit ordinairement parmi toutes les équations qu'elle pourroit avoir, celles qui ne renferment que deux des coordonnées x, y et z.

En éliminant successivement x, y et z, entre les équations (1) et (2) on obtiendra les trois suivantes

$$(AB'-A'B)y-(CA'-C'A)z+AD'-A'D=0$$
$$(BC'-B'C)z-(AB'-A'B)x+BD'-B'D=0$$
$$(CA'-C'A)x-(BC'-B'C)y+CD'-C'D=0$$

qui deviendront
$$\gamma y-\beta z+\delta=0\ldots.(3)$$
$$\alpha z-\gamma x+\epsilon=0\ldots.(4)$$
$$\beta x-\alpha y+\zeta=0\ldots.(5)$$

en faisant pour abréger

$$AB'-A'B=\gamma,\quad CA'-C'A=\beta,\quad BC'-B'C=\alpha$$
$$AD'-A'D=\delta,\quad BD'-B'D=\epsilon,\quad CD'-C'D=\zeta.$$

Deux quelconques de ces équations suffisent pour remplacer les équations (1) et (2) et comprennent implicitement la troisième. En effet, si on multiplie l'équation (3) par α, l'équation (4) par β, l'équation (5) par γ, et qu'on ajoute les produits, on trouvera

$$\alpha\delta+\beta\epsilon+\gamma\zeta=0,$$

résultat que la substitution des valeurs de α, β, γ, δ, ϵ et ζ, rendra identique, ou qui exprimera la condition que doivent remplir ces quantités, pour que les équations (3), (4) et (5), étant données *à priori*, puissent appartenir à la même ligne droite.

L'équation (3) qui renferme la relation que doivent avoir entr'elles les coordonnées y et z, pour tous les points de la droite proposée, appartient à l'ensemble des projections de ces points sur le plan des y et z, et est par conséquent l'équation de la projection de la droite proposée, sur ce plan (*E* n°. 4). On verra de même que l'équation (4) appartient à la projection de cette droite, sur le plan des x et z, et enfin que l'équation (5) est celle de sa projection sur le plan des x et y. Deux quelconques de ces projections étant données, la droite est entièrement déterminée ; cela est évident par l'analyse précédente, et parce que la droite proposée n'est autre que l'intersection de deux quelconques des plans projettans (*E* n°. 5), plans dont l'équation est la même que celle de la projection sur laquelle ils sont élevés.

298. L'équation générale du plan ne renfermant que trois constantes nécessaires, il suffit d'un pareil nombre de conditions pour

la particulariser. Nous allons examiner successivement celles de ces conditions qui se rencontrent le plus fréquemment, et nous traiterons en même tems les questions analogues, relativement aux lignes droites.

Proposons-nous d'abord de faire passer un plan par trois points, dont les coordonnées soient $x', y', \zeta', x'', y'', \zeta'', x''', y''', \zeta'''$; nous mettrons successivement x', x'', x''', au lieu de x, y', y'', y''', au lieu de y, $\zeta', \zeta'', \zeta'''$, au lieu de ζ, dans l'équation générale du plan, $Ax+By+C\zeta+D=0$, et il viendra les trois équations suivantes :

$$Ax'+By'+C\zeta'+D=0$$
$$Ax''+By''+C\zeta''+D=0$$
$$Ax'''+By'''+C\zeta'''+D=0,$$

au moyen desquelles on déterminera les quantités $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$, et on trouvera

$$\frac{A}{D}=\frac{\zeta'(y''-y''')-\zeta''(y'-y''')+\zeta'''(y'-y'')}{x'(y''\zeta'''-y'''\zeta'')-x''(y'\zeta'''-y'''\zeta')+x'''(y'\zeta''-y''\zeta')}$$
$$\frac{B}{D}=\frac{x'(\zeta''-\zeta''')-x''(\zeta'-\zeta''')+x'''(\zeta'-\zeta'')}{x'(y''\zeta'''-y'''\zeta'')-x''(y'\zeta'''-y'''\zeta')+x'''(y'\zeta''-y''\zeta')}$$
$$\frac{C}{D}=\frac{y'(x''-x''')-y''(x'-x''')+y'''(x'-x'')}{x'(y''\zeta'''-y'''\zeta'')-x''(y'\zeta'''-y'''\zeta')+x'''(y'\zeta''-y''\zeta')}.$$

Il est aisé de voir que si on vouloit déterminer les équations des projections d'une droite qui passe par deux points donnés, on y parviendroit d'une manière analogue, en substituant les coordonnées de ces points dans les équations générales $x=a\zeta+\alpha$, $y=b\zeta+\beta$, et on trouveroit ainsi

$$x-x'=\frac{x'-x''}{\zeta'-\zeta''}\zeta, \qquad y-y'=\frac{y'-y''}{\zeta'-\zeta''}\zeta \text{ (n°. 197)}.$$

299. Pour reconnoître quand deux lignes données sont dans un même plan, ou, ce qui revient au même, se coupent, il faut s'assurer si les indéterminées x, y et ζ, peuvent être communes aux quatre équations des projections de ces droites (*E* n°. 18). Or il est évident qu'en éliminant x, y et ζ, il restera une équation qui exprimera la condition sans laquelle les équations des droites pro-

posées ne sauroient avoir lieu pour le même point. Représentons par

$$\left.\begin{matrix} x=a\zeta+\alpha \\ y=b\zeta+\beta \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x=a'\zeta+\alpha' \\ y=b'\zeta+\beta' \end{matrix}\right\}$$

les équations de ces droites, nous en tirerons sur le champ $a\zeta+\alpha=a'\zeta+\alpha'$, $b\zeta+\beta=b'\zeta+\beta'$, et éliminant ζ, il viendra

$$(\alpha'-\alpha)(b'-b)-(\beta'-\beta)(a'-a)=0.$$

300. Deux plans qui sont parallèles ont leurs communes sections, avec chaque plan coordonné, respectivement parallèles entr'elles (*E* n°. 15); mais si $Ax+By+C\zeta+D=0$, $A'x+B'y+C'\zeta+D'=0$, représentent les équations de ces deux plans, leurs communes sections respectives avec les plans des x et ζ, et des y et ζ, auront pour équations $Ax+C\zeta+D=0$, $A'x+C'\zeta+D'=0$,

$$By+C\zeta+D=0, \qquad B'y+C'\zeta+D'=0,$$

et ne seront parallèles deux à deux que lorsqu'on aura

$$\frac{A}{C}=\frac{A'}{C'}, \frac{B}{C}=\frac{B'}{C'} \text{ (n°. 196).}$$

Tirant de ces dernières, les valeurs de A' et de B', on aura pour l'équation du plan parallèle au premier,

$$\frac{C'}{C}(Ax+By+C\zeta)+D'=0.$$

Il reste D' à déterminer dans ce résultat, et en supposant que le plan cherché doive passer par un point dont les coordonnées soient x', y' et ζ', on aura $\frac{C'}{C}(Ax'+By'+C\zeta')+D'=0$; retranchant cette équation de la précédente, D' disparoîtra, et divisant alors par $\frac{C'}{C}$, il viendra $A(x-x')+B(y-y')+C(\zeta-\zeta')=0$.

Il est à propos de remarquer qu'en regardant A, B, C, comme des quantités quelconques, l'équation ci-dessus sera commune à tous les plans qui passent par le point proposé.

Puisque deux droites sont parallèles lorsque leurs projections sur chacun des plans coordonnés sont respectivement parallèles (*E* n°. 20), leurs équations seront, dans ce cas, de la forme

$$\left.\begin{matrix} x=a\zeta+\alpha \\ y=b\zeta+\beta \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x=a\zeta+\alpha' \\ y=b\zeta+\beta' \end{matrix}\right\}.$$

Si la seconde doit passer par le point dont les coordonnées sont x', y' et z', on aura pour déterminer α et β, les équations $x'=az'+\alpha'$, et $y'=bz'+\beta'$, dont on tirera, en opérant comme tout-à-l'heure, $x-x'=a(z-z')$, $y-y'=b(z-z')$.

301. Pour trouver l'équation d'un plan perpendiculaire à une droite donnée, il faut se rappeller que les communes sections de ce plan, avec chacun des plans coordonnés, sont perpendiculaires aux projections de la droite donnée (*E* n°. 32). Soient $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, les équations de cette droite, et $Ax+By+Cz+D=0$, celle du plan cherché; les communes sections de ce dernier, sur le plan des x et z, et des y et z, seront représentées par

$$Ax+Bz+D=0 \text{ ou } x=-\frac{Cz}{A}-\frac{D}{A}$$

$$By+Cz+D=0 \text{ ou } y=-\frac{Cz}{B}-\frac{D}{B}$$

et pour que ces droites soient perpendiculaires aux projections de la droite donnée, il faudra qu'on ait $a=\frac{A}{C}$, $b=\frac{B}{C}$ (n°. 199). Substituant les valeurs de A et de B, tirées de ces équations, dans celle du plan cherché, on aura $C(ax+by+z)+D=0$; et si ce plan doit passer par le point dont les coordonnées sont x', y' et z', son équation deviendra $a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0$.

Si l'équation du plan étoit donnée, et qu'on demandât celle de la droite qui lui est perpendiculaire, il faudroit alors remplacer a et b, par les valeurs données ci-dessus; il viendroit

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z'), \qquad y-y'=\frac{B}{C}(z-z').$$

pour les équations de la droite perpendiculaire au plan représenté par $Ax+By+Cz+D$, et assujettie à passer par le point, dont les coordonnées sont x', y' et z'.

302. La distance du point M, *fig.* 44, dont les coordonnées sont x, y et z, à l'origine A, a pour expression $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (*E* n°. 24). Ceci nous conduit naturellement à l'équation de la surface de la sphère; car tous les points qui la composent devant FIG. 44.

être également éloignés de son centre, si on suppose que le centre soit à l'origine même des coordonnées et que le rayon soit représenté par r, l'équation $x^2+y^2+z^2=r^2$, aura lieu pour un point quelconque de la surface proposée.

Lorsque les coordonnées du centre seront x', y' et z', on aura $(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=r^2$, si m désigne ce point et qu'on prenne $PO=pm'$, $M'N=m'm$, les triangles rectangles $m'OM'$ et mNM donneront $\overline{m'M'}^2=\overline{m'O}^2+\overline{M'O}^2$, $\overline{mM}^2=\overline{mN}^2+\overline{MN}^2$; mais $m'O=x-x'$, $M'O=y-y'$, $MN=z-z'$, $mN=m'M'$, et par conséquent la distance des deux points m et M aura pour expression $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.

303. Ce qui précède va nous conduire d'une manière très-simple à l'expression du cosinus de l'angle que font entr'elles deux droites données. Soient

$$\left.\begin{aligned} x-x'&=a(z-z')\\ y-y'&=b(z-z')\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x-x'&=a'(z-z')\\ y-y'&=b'(z-z')\end{aligned}\right\}$$

les équations des projections de ces droites qui se coupent au point dont les coordonnées sont x', y' et z'; si on imagine qu'elles se meuvent parallèlement à elles-mêmes, jusqu'à ce que leur point d'intersection soit à l'origine, leur angle ne changera pas, et les équations ci-dessus se réduiront à

$$\left.\begin{aligned} x&=az\\ y&=bz\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x&=a'z\\ y&=b'z\end{aligned}\right\}$$

Concevons maintenant une sphère qui ait son centre à l'origine, et dont le rayon soit représenté par r; la distance des points où sa surface coupera chacun des côtés de l'angle cherché, sera évidemment la corde de cet angle. On trouvera les coordonnées du point de rencontre de la première droite avec la surface de la sphère, en déterminant x, y et z, par les équations de cette droite et par celle de la sphère, et on aura ainsi

$$x=\frac{ar}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \quad y=\frac{br}{\sqrt{1+a^2+b^2}}; \quad z=\frac{r}{\sqrt{1+a^2+b^2}};$$

nommant x', y' et z', les coordonnées du point de rencontre de

la seconde droite avec la surface de la sphère, on aura de même

$$x'=\frac{a'r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\quad y'=\frac{b'r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\quad z'=\frac{r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}.$$

L'expression du quarré de la distance de ce point au précédent, sera $(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$; en y mettant pour $x-x'$, $y-y'$ et $z-z'$ leur valeur, on trouvera pour résultat, après les réductions, $r^2\left[2-\frac{2(1+aa'+bb')}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}\right]$:

mais on sait que le quarré de la corde d'un angle quelconque V, est égal au produit du sinus-verse multiplié par le diamètre; on aura donc $2(1-\cos V)=2-2\cos V$ pour la valeur de ce quarré: comparant avec l'expression trouvée ci-dessus, dans laquelle on fera $r=1$, il viendra $\cos V=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}$.

Il sera facile de déduire de là

$$\sin V=\frac{\sqrt{(a'b-ab')^2+(a'-a)^2+(b-b')^2}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}.$$

Pour que les deux droites proposées soient perpendiculaires, il faudra qu'on ait $\cos V=0$, et par conséquent $1+aa'+bb'=0$.

304. Le cosinus de l'angle que deux plans donnés font entr'eux, se déduit immédiatement de l'expression qu'on vient de trouver; car cet angle est égal à celui que font deux droites, menées perpendiculairement à chacun des plans proposés, par un point quelconque de leur commune section (*E* n°. 46.) Représentons les équations de ces plans par $Ax+By+Cz+D=0$, $Ax'+By'+Cz'+D'=0$; si on conçoit qu'ils se meuvent parallèlement à eux-mêmes, jusqu'à ce qu'ils soient parvenus à l'origine des coordonnées, leur angle ne changera pas, et leurs équations se réduiront à

$$Ax+By+Cz=0,\qquad Ax'+By'+Cz'=0;$$

celles des droites qu'on menera perpendiculairement à chacun d'eux, par ce point seront, (n°. 301) $x=\frac{A}{C}z$ $x=\frac{A'}{C'}z$

$y=\frac{B}{C}z$ $y=\frac{B'}{C'}z$.

substituant dans l'expression de cos V, au lieu de a et b, a' et b', les valeurs que donnent ces équations, il viendra

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}}.$$

Si l'un des plans proposés, le second par exemple, étoit celui des x et y, pour lequel on a toujours $z = 0$, il est évident que A' et B' deviendroient nuls dans cette supposition, et que cos V se réduiroit à $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

On trouvera de même que le cosinus de l'angle, formé par le premier plan proposé avec celui des x et z, pour lequel on a $y = 0$, $A' = 0$ et $C' = 0$, sera $\frac{B}{\sqrt{A'^2+B^2+C^2}}$;

et que le cosinus de l'angle du même plan avec celui des y et z, pour lequel $x = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$, sera

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Dans le cas où les deux plans proposés seroient perpendiculaires entr'eux, on auroit cos $V = 0$ et par conséquent $AA' + BB' + CC' = 0$.

305. Avec ces préliminaires, il seroit facile de résoudre toutes les questions que renferme la première partie des *Essais de Géométrie* etc.; mais l'étendue de la carrière que j'ai à parcourir ne me permettant pas d'entrer dans ces détails, je me bornerai à indiquer une solution, par le Calcul différentiel, du Problême où il s'agit de trouver la plus courte distance de deux droites (*E* n°. 57.)

Soient x, y et z les coordonnées d'un point quelconque de la première droite donnée et x', y' et z' celles d'un point pris comme on voudra sur la seconde; si dans l'expression de distance de ces points, $u = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ on met pour x et y, x' et y' leurs valeurs tirées des équations des droites proposées, que nous représenterons par

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x' &= a'z' + \alpha' \\ y' &= b'z' + \beta' \end{aligned}\right\},$$

on aura $u=\sqrt{(a\zeta-a'\zeta'+\alpha-\alpha')^2+(b\zeta-b'\zeta'+\beta-\beta')^2+(\zeta-\zeta')^2}$: la question sera donc réduite à trouver les valeurs de ζ et de ζ', qui rendent la quantité u un *minimum*. En y appliquant la règle indiquée n°. 154, on aura $\frac{du}{d\zeta}=0$, $\frac{du}{d\zeta'}=0$, d'où on tirera les équations

$$(a\zeta-a'\zeta'+\alpha-\alpha')a+(b\zeta-b'\zeta'+\beta-\beta')b+\zeta-\zeta'=0$$
$$(a\zeta-a'\zeta'+\alpha-\alpha')a'+(b\zeta-b'\zeta'+\beta-\beta')b'+\zeta-\zeta'=0$$

à l'aide desquelles on déterminera les inconnues ζ et ζ'. Substituant les résultats dans u, on trouvera l'expression de la plus courte distance demandée, et calculant ensuite les valeurs correspondantes de x et de y, de x' et de y', on aura les coordonnées des points où les deux droites proposées s'approchent le plus.

306. Je ferai remarquer que la considération des *maxima* et des *minima* peut conduire très-simplement à l'équation d'une droite perpendiculaire à un plan donné. Il est évident que si x, y et ζ sont les coordonnées du point où la perpendiculaire rencontre le plan proposé, et x', y' et ζ', celles du point fixe par lequel on la mène, la distance de ces deux points, $u=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(\zeta-\zeta')^2}$ doit être un *minimum*. Dans le cas actuel, les quantités x', y' et ζ' sont constantes, mais les trois variables x, y et ζ sont liées entr'elles par l'équation du plan donné, $Ax+By+C\zeta+D=0$; on pourroit donc en éliminer une au moyen de cette équation: cependant il sera plus simple de différentier l'expression de u, en regardant une de ces variables, ζ par exemple, comme fonction des deux autres; on trouvera ainsi

$$x-x'+(\zeta-\zeta')\frac{d\zeta}{dx}=0,\quad y-y'+(\zeta-\zeta')\frac{d\zeta}{dy}=0.$$

On aura pour déterminer $\frac{d\zeta}{dx}$ et $\frac{d\zeta}{dy}$, les équations différentielles du plan proposé, savoir, $A+C\frac{d\zeta}{dx}=0$, $B+C\frac{d\zeta}{dy}=0$, qui donneront $\frac{d\zeta}{dx}=-\frac{A}{C}$, $\frac{d\zeta}{dx}=-\frac{B}{C}$, et par conséquent $(x-x')=\frac{A}{C}(\zeta-\zeta')$, $y-y'=\frac{B}{C}(\zeta-\zeta')$, comme dans le n°. 301.

La longueur de la perpendiculaire devlendra, en vertu de ces valeurs, $u = \frac{(\zeta-\zeta')}{C}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$; mais l'équation du plan pouvant être mise sous la forme

$$A(x-x')+B(y-y')+C(\zeta-\zeta')+Ax'+By'+C\zeta'+D=0,$$

on en chassera $x-x'$ et $y-y'$ par le moyen de leurs valeurs trouvées ci-dessus, et il viendra $\frac{\zeta-\zeta'}{C} = -\frac{Ax'+By'+C\zeta'}{A^2+B^2+C^2}$,

substituant dans u on aura $u = -\frac{Ax'+By'+C\zeta'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Des surfaces courbes du second ordre.

307. Les surfaces de même que les lignes, se divisent en ordres, suivant le degré de leurs équations; le plan est la surface du premier ordre, parce que son équation ne monte qu'au premier degré. Les surfaces du second ordre sont toutes comprises dans l'équation

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2+By^2+C\zeta^2+2Dxy+2Ex\zeta+2Fy\zeta \\ \quad +2Gx\ +2Hy\ +2K\zeta \\ \quad\quad -L^2 \end{array}\right\} = 0 \ldots (1)$$

qui est la plus générale qu'on puisse former dans le second degré, avec les trois indéterminées x, y et ζ,

En résolvant cette équation par rapport à l'une d'elles, ζ par exemple, on trouvera

$$\zeta = -\frac{Ex+Fy+K}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{[(E^2-AC)x^2+(F^2-BC)y^2+2(EF-CD)xy} \\ +2(EK-CG)x+2(FK-CH)y+K^2+CL^2].$$

Ce résultat nous apprend qu'au même point du plan des x et y, répondent deux points sur la surface proposée, et que par conséquent chacune des valeurs de ζ produit par la substitution de toutes les valeurs possibles de x et de y, une portion de surface qui est par rapport à la surface totale ce que sont les branches d'une courbe à l'égard de cette courbe: je donnerai à ces portions le nom de *Nappes*.

On se feroit difficilement l'idée de la forme que doit affecter une surface dont on a l'équation, si on n'en considéroit que des points isolés; mais au lieu de cela, on imagine une infinité de sections faites dans cette surface par des plans, que pour plus de simplicité on prend

prend parallèles à l'un des plans coordonnés : les cours de ces diverses courbes étant connus, leur continuité rend sensible à l'esprit l'image de la surface proposée.

La nature même des équations à trois indéterminées conduit à ce procédé ; car en regardant z, par exemple, comme une fonction de x et de y, pour en trouver avec ordre les différentes valeurs, il faut concevoir qu'à chaque valeur arbitraire donnée à la variable indépendante x, on fasse correspondre toutes celles qu'on peut donner en même tems à l'autre variable indépendante y, et de là résultera pour la même valeur de x, une suite infinie de valeurs de z : répétant la même chose pour chaque valeur de x, on aura un nombre infini de ces suites, et il est aisé de voir que chacune d'elles répond à une section faite par un plan parallèle à celui des y et z, puisqu'on y suppose x constant (n°. 294).

La table suivante fera concevoir parfaitement les relations qu'ont entr'elles les suites dont on vient de parler.

	y'	y''	y'''	y''''	.
x'	$z'_{,}$	$z''_{,}$	$z'''_{,}$	$z''''_{,}$	.
x''	$z'_{,,}$	$z''_{,,}$	$z'''_{,,}$	$z''''_{,,}$	.
x'''	$z'_{,,,}$	$z''_{,,,}$	$z'''_{,,,}$	$z''''_{,,,}$	.
x''''	$z'_{,,,,}$	$z''_{,,,,}$	$z'''_{,,,,}$	$z''''_{,,,,}$	.
.	.	.	.	.	.

x', x'', x''', x''''... désignant les différentes valeurs données à la variable x, et y', y'', y''', y''''... celles de y, qui sont absolument indépendantes des premières ; les z contenus dans chaque bande horisontale, forment la suite des valeurs que reçoit cette fonction, par la combinaison de toutes les valeurs possibles de y, avec la valeur de x, placée à la tête de cette bande. On pourroit considérer le tableau précédent par colonnes verticales ; on auroit alors

dans chacune, la suite des valeurs de z, qui résultent de la combinaison d'une même valeur de y avec toutes les valeurs possibles de x.

En faisant $x=0$ dans l'équation (1), elle se réduira à

$$By^2+Cz^2+2Fyz+2Hy+2Kz-L^2=0,$$

équation qui appartient à la ligne du second ordre, suivant laquelle la surface proposée rencontre le plan des y et z. Donnant ensuite à x dans l'équation (1) différentes valeurs déterminées, il en naîtra encore des lignes du second ordre, situées dans des plans parallèles au premier. La supposition de $y=0$, dans l'équation (1), produiroit celle de la ligne du second ordre qui seroit la section de la surface proposée par le plan des x et z; donnant ensuite à y différentes valeurs déterminées, on trouveroit successivement toutes les sections parallèles à celle-ci. C'est par les limites de ces diverses sections qu'on reconnoîtroit celles de la surface proposée; mais avant d'entrer dans ces détails, il faut simplifier l'équation (1) qui, en changeant convenablement la situation des plans coordonnés, peut se réduire beaucoup sans perdre de sa généralité : car une surface a, comme une ligne, une infinité d'équations différentes, suivant les diverses situations des axes auxquels on la rapporte. Occupons-nous donc de la transformation des coordonnées.

308. Si on ne vouloit que changer l'origine de place, et qu'on supposât les nouveaux plans coordonnés parallèles aux premiers, il suffiroit de faire $x=x'+a$, $y=y'+b$, $z=z'+c$.

Je n'embrasserai point ici le cas où la direction des axes change d'une manière quelconque; je me bornerai à donner des formules pour passer d'un système de coordonnées perpendiculaires entr'elles à un autre système de même nature, mais placé comme on voudra par rapport au premier; et pour exprimer la position respective des plans coordonnés primitifs et de ceux qu'on leur substitue, je supposerai qu'on ait les équations des uns à l'égard des autres.

Soient donc t, u et v, les nouvelles coordonnées, ayant leur origine au même point que x', y' et z',

$At+Bu+Cv=0$ l'équation du plan des y' et z',
$A't+B'u+C'v=0$ celle du plan des x' et z',
$A''t+B''u+C''v=0$ celle du plan des x' et y'.

Si on considère maintenant un point quelconque, on verra facilement que les perpendiculaires abaissées de ce point sur chacun des plans ci-dessus, seront respectivement égales aux coordonnées primitives x', y' et z' de ce point (n°. 294); en nommant donc t', u' et v' ses coordonnées dans le second système, on aura par le n°. 306,

$$x' = -\frac{A t' + B u' + C v'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
$$y' = -\frac{A' t' + B' u' + C' v'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$
$$z' = -\frac{A'' t' + B'' u' + C'' v'}{\sqrt{A''^2 + B''^2 + C''^2}}.$$

Ces valeurs, d'après la remarque qui termine le n°. 295, renfermeront trois constantes superflues, en sorte qu'on pourroit supposer égales à l'unité, un pareil nombre des neuf quantités $A, B, C, A', B', C', A'' B'' C''$; mais il sera plus symétrique de poser les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= 1 \\ A'^2 + B'^2 + C'^2 &= 1 \\ A''^2 + B''^2 + C''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} (1)$$

et à cause que les plans coordonnés primitifs sont perpendiculaires entr'eux, on aura encore (n°. 304),

$$\left.\begin{aligned} A A' + B B' + C C' &= 0 \\ A A'' + B B'' + C C'' &= 0 \\ A' A'' + B' B'' + C' C'' &= 0 \end{aligned}\right\} (2);$$

d'où on voit qu'il ne restera que trois constantes dont on puisse disposer pour déterminer la situation des nouvelles coordonnées par rapport aux anciennes. En faisant usage des équations (1) il vient

$$x' = -A t' - B u' - C v'$$
$$y' = -A' t' - B' u' - C' v'$$
$$z' = -A'' t' - B'' u' - C'' v'.$$

309. On peut encore employer à la recherche des valeurs de x', y' et z' une considération semblable à celle dont nous avons fait usage (n°. 211) pour la transformation des coordonnées sur un plan. Il est facile de voir que les coordonnées x', y', et z', ne peuvent être

exprimées en t', u' et v', d'une manière plus générale que la suivante;

$$x' = \alpha t' + \beta u' + \gamma v'$$
$$y' = \alpha' t' + \beta' u' + \gamma' v'$$
$$z' = \alpha'' t' + \beta'' u' + \gamma'' v'$$

car à une même valeur des quantités t', u' et v', il ne doit répondre qu'une seule valeur des quantités x', y' et z', et réciproquement. Cela posé, le quarré de la distance du point proposé à l'origine commune des deux systêmes de coordonnées, sera exprimé dans le premier, par $x'^2+y'^2+z'^2$, et dans le second par $t'^2+u'^2+v'^2$; mettant pour x', y' et z' les valeurs posées ci-dessus, on aura comme dans le n°. 211 deux expressions, qui devront être identiques, quelles que soient t', u' et v', savoir :

$$(\alpha t' + \beta u' + \gamma v')^2 + (\alpha' t' + \beta' u' + \gamma' v')^2 + (\alpha'' t' + \beta'' u' + \gamma'' v')^2,$$
et $$t'^2 + u'^2 + v'^2.$$

Développant la première, et comparant les termes homologues de l'une et de l'autre, on trouvera les six équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= 1 \\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 &= 1 \\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} (3) \qquad \left.\begin{aligned} \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'' &= 0 \\ \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma'' &= 0 \\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'' &= 0 \end{aligned}\right\} (4);$$

ce qui fait voir que des neuf constantes qui entrent dans les expressions générales de x', y' et z', il n'y en a que trois qui soient indépendantes.

La comparaison des valeurs de x', y' et z', posées dans cet article, avec les premières de l'article précédent, donne

$$\alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \beta = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \gamma = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$\alpha' = \frac{-A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \quad \beta' = \frac{-B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \quad \gamma' = \frac{-C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$
$$\alpha'' = \frac{-A''}{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}}, \quad \beta'' = \frac{-B''}{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}}, \quad \gamma'' = \frac{-C''}{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}}$$

d'où on voit que α, β, et γ, pris négativement, sont les cosinus des angles que le plan des y' et z' fait avec chacun des nouveaux plans coordonnés (n°. 304), qu'il en est de même de α', β', γ', pour le plan des x' et z', et de α'', β'', γ'', pour celui des x' et y'.

Si on substituoit les expressions précédentes de α, α', etc. dans les six équations de condition trouvées entre ces quantités, on parviendroit à de nouvelles relations entre A, B, etc. relations qu'on pourroit aussi déduire immédiatement de la combinaison des équations (2), mais d'une manière moins commode. En supposant, pour plus de simplicité, que les équations arbitraires (1) aient lieu, on aura sur le champ

$$\begin{aligned} \alpha &= -A, & \alpha' &= -A', & \alpha'' &= -A'', \\ \beta &= -B, & \beta' &= -B', & \beta'' &= -B'', \\ \gamma &= -C, & \gamma' &= -C', & \gamma'' &= -C'', \end{aligned}$$

d'où on tirera

$$\left.\begin{aligned} A^2+A'^2+A''^2&=1 \\ B^2+B'^2+B''^2&=1 \\ C^2+C'^2+C''^2&=1 \end{aligned}\right\}(5) \qquad \left.\begin{aligned} AB+A'B'+A''B''&=0 \\ AC+A'C'+A''C''&=0 \\ BC+B'C'+B''C''&=0 \end{aligned}\right\}(6)$$

310. Des expressions de x', y' et z', données au commencement de cet article, on peut tirer celles de t', u' et v' de deux manières différentes, et en rapprochant les résultats, on parvient encore à de nouvelles relations entre les quantités α, β, etc. En effet, si on multiplie respectivement les valeurs de x', y', z', 1°. par α, α', α'', 2°. par β, β', β'', 3°. par γ, γ', γ'', et qu'on ajoute les trois premiers résultats ensemble, qu'on en fasse autant des trois seconds, puis des trois derniers, il viendra, en vertu des équations (3) et (4),

$$\begin{aligned} t' &= \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \\ u' &= \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' \\ v' &= \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'. \end{aligned}$$

Si on substituoit ces valeurs dans l'expression $t'^2+u'^2+v'^2$, et qu'on la comparât ensuite à $x'^2+y'^2+z'^2$, on trouveroit les six équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=1 \\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2&=1 \\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2&=1 \end{aligned}\right\}(7) \qquad \left.\begin{aligned} \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'&=0 \\ \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''&=0 \\ \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''&=0 \end{aligned}\right\}(8)$$

dans lesquelles rentrent les équations (1) et (2) du n°. 309.

En calculant directement les valeurs de t', u' et v' par la résolution des équations du premier degré

$$x' = \alpha t' + \beta u' + \gamma v', \quad y' = \alpha' t' + \beta' u' + \gamma' v', \quad z' = \alpha'' t' + \beta'' u' + \gamma'' v',$$

et faisant pour abréger $\delta = \alpha\beta'\gamma'' - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha''\beta'\gamma$, il viendra

$$t' = \frac{x'(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + y'(\beta''\gamma - \gamma''\beta) + z'(\beta\gamma' - \gamma\beta')}{\delta},$$

$$u' = \frac{x'(\alpha''\gamma' - \gamma''\alpha') + y'(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha') + z'(\alpha'\gamma - \gamma'\alpha)}{\delta},$$

$$v' = \frac{x'(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') + y'(\alpha''\beta - \beta''\alpha) + z'(\alpha\beta' - \beta\alpha')}{\delta};$$

comparant les coefficiens des quantités x', y' et z' dans ces valeurs, avec ceux qui leur correspondent dans les précédentes, on formera les neuf équations que voici

$$\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' = \delta\alpha, \quad \beta''\gamma - \gamma''\beta = \delta\alpha', \quad \beta\gamma' - \gamma\beta' = \delta\alpha''$$
$$\alpha''\gamma' - \gamma''\alpha' = \delta\beta, \quad \alpha\gamma'' - \gamma\alpha'' = \delta\beta', \quad \alpha'\gamma - \gamma'\alpha = \delta\beta''$$
$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' = \delta\gamma, \quad \alpha''\beta - \beta''\alpha = \delta\gamma', \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' = \delta\gamma''.$$

Si on ajoute ensemble les quarrés des trois équations qui composent la première ligne, on trouvera

$$(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 + (\beta''\gamma - \gamma''\beta)^2 + (\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 = \delta^2(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2)^2;$$

le premier membre de ce résultat peut être mis sous la forme

$$(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2)(\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2) - (\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'')^2,$$

et se réduit à l'unité ainsi que le coefficient de δ^2, dans le second membre, en vertu des équations (3) et (4): on a donc $1 = \delta^2$. On pourroit conclure de là $\delta = \pm 1$; cependant, il est facile de s'assurer que cette quantité doit être positive, car en faisant coïncider les nouvelles coordonnées avec les coordonnées primitives, c'est-à-dire, en supposant que $t' = x'$, $u' = y'$, $v' = z'$, on a $\alpha = 1$, $\beta' = 1$, $\gamma'' = 1$, les autres coefficiens constans deviennent nuls, et la quantité que représente δ, se réduit à $+1$.

La détermination des six coefficiens surabondans, au moyen des trois autres, pourra toujours s'effectuer, en combinant ensemble les diverses relations que nous avons trouvées dans ce qui précède, et l'élégance du résultat dépendra du choix des données et de l'adresse qu'on aura mise dans les réductions. Je ne puis entrer dans ces détails, pour lesquels je renvoie le lecteur à la Méchanique analytique de Lagrange : j'observerai cependant que Monge, en

prenant pour données les coefficiens α, β' et γ'', et en faisant

$$1+\alpha+\beta'+\gamma''=M$$
$$1+\alpha-\beta'-\gamma''=N$$
$$1-\alpha+\beta'-\gamma''=P$$
$$1-\alpha-\beta'+\gamma''=Q,$$

a trouvé

$$2\beta=\sqrt{NP}+\sqrt{MQ},\quad 2\alpha''=\sqrt{NQ}+\sqrt{MP},\quad 2\gamma'=\sqrt{PQ}+\sqrt{MN}$$
$$2\alpha'=\sqrt{NP}-\sqrt{MQ},\quad 2\gamma=\sqrt{NQ}-\sqrt{MP},\quad 2\beta''=\sqrt{PQ}-\sqrt{MN}.$$

La symétrie de ces résultats est une suite de celle des quantités données, dans lesquelles il se trouve un coefficient de chacune des nouvelles coordonnées, pris dans chacune des valeurs des coordonnées primitives. Il est facile de voir que trois des quantités M, N, P et Q étant données, la quatrième l'est aussi, car on a l'équation

$$4=M+N+P+Q.$$

Dans le cas où on ne se proposeroit de changer que la position de deux axes seulement, il faudroit, pour qu'ils restassent perpendiculaires entr'eux, qu'ils ne sortissent pas du plan coordonné qui leur est commun, et alors la coordonnée perpendiculaire à ce plan, seroit la même dans les deux systêmes. Supposons qu'il s'agisse de transformer les deux seules coordonnées x' et y'; on aura dans ce cas $\nu'=\zeta'$, ce qui donnera $\alpha''=0$, $\beta''=0$ et $\gamma''=1$; et à cause que x' et y' doivent être indépendantes de ν', il viendra $\gamma=0$, $\gamma'=0$, ces hypothèses étant introduites dans les équations (7) et (8), les réduiront aux trois suivantes

$$\alpha^2+\alpha'^2=1,\quad \beta^2+\beta'^2=1,\quad \alpha\beta+\alpha'\beta'=0,$$

qui sont semblables à celles qu'on a trouvées, page 345, entre m et n, p et q: il en résultera donc

$$x'=\alpha t'-\beta u',\quad y'=\beta t'+\alpha u',\quad \alpha^2+\beta^2=1,$$

311. Reprenons l'équation générale des surfaces du second ordre,

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2+By^2+C\zeta^2+2Dxy+2Ex\zeta+2Fy\zeta \\ \qquad +2Gx\ +2Hy\ +2K\zeta \\ \qquad\qquad -L^2 \end{array}\right\}=0\ldots.(a)$$

et mettons-y $x'+a$ au lieu de x, $y'+b$ au lieu de y, et $\zeta'+c$ au lieu de ζ, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dx'y'+2Ex'z'+2Fy'z' \\ +2x'(Aa+Db+Ec+G)+2y'(Bb+Da+Fc+H)+2z'(Cc+Ea+Fb+K) \\ +Aa^2+Bb^2+Cc^2+2Dab+2Eac+2Fbc+2Ga+2Hb+2Kc-L^2 \end{array}\right\}=0\ldots(a)$$

On pourra déterminer les quantités a, b, c, de manière à faire disparoître les termes affectés de x', y' et z', qui forment la seconde ligne, en posant les équations

$$\left.\begin{array}{l} Aa+Db+Ec+G=0 \\ Bb+Da+Fc+H=0 \\ Cc+Ea+Fb+K=0 \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

Si on multiplie la première par a, la seconde par b, la troisième par c, et qu'on retranche leur somme de l'équation précédente, après en avoir effacé la seconde ligne, il restera

$$\left.\begin{array}{l} Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dx'y'+2Ex'z'+2Fy'z' \\ +Ga+Hb+Kc-L^2 \end{array}\right\}=0\ldots(c);$$

Nous n'avons encore changé que la position de l'origine; donnons maintenant aux axes une autre direction, en substituant $\alpha t+\beta u+\gamma v$, $\alpha' t+\beta' u+\gamma' v$ et $\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v$ pour x', y' et z'; nous aurons un résultat de la forme

$$\left.\begin{array}{l} A't^2+B'u^2+C'v^2+2D'tu+2E'tv+2F'uv \\ -L'^2 \end{array}\right\}=0.$$

Puisque la transformation que nous venons d'indiquer a introduit trois constantes arbitraires, on pourra, en les déterminant convenablement, faire disparoître un pareil nombre de termes de cette équation; si on fait $D'=0$, $E'=0$, $F'=0$, elle se réduira à

$$A't^2+B'u^2+C'v^2-L'^2=0\ldots\ldots\ldots\ldots(d)$$

Il seroit peut-être très-difficile de s'assurer *à priori*, sur les développemens des équations $D'=0$, $E'=0$, $F'=0$, qu'elles donneront toujours des valeurs réelles pour les constantes qu'on regarde comme déterminées par leur moyen; mais si on ne faisoit disparoître d'abord que deux termes, tv et uv, par exemple, on pourrait disposer de l'une des constantes pour rendre réelles les racines de l'équation finale d'où dépendra la détermination des deux autres: on conçoit donc ainsi qu'il est toujours possible de ramener l'équation (c) à la forme

$$A't^2+B'u^2+C'v^2+2D'tu-L'^2=0.$$

Cela

Cela fait, si on substitue $mt - ns$ et $nt + ms$ au lieu de t et de u, on chassera le produit des nouvelles coordonnées r et s, par une équation semblable à celle dont nous avons fait usage n°. 213 pour débarrasser l'équation des lignes du second ordre du produit ut.

En résolvant l'équation (d) par rapport à l'une quelconque des coordonnées t, u, v, elle donne deux valeurs égales et de signe contraire, ce qui nous apprend que la surface proposée a, de part et d'autre de chacun des plans coordonnés, des ordonnées égales entr'elles, et que par conséquent elle est divisée en deux parties égales par ces plans, comme une courbe l'est par ses diamètres. Les portions comprises dans chaque angle solide des plans coordonnés sont semblables entr'elles, puisque l'équation (d) ne change point, quelque signe que prennent les variables t, u et v. Les axes de ces coordonnées sont en même tems les axes de la surface que représente l'équation (d), et comme on donne le nom de *diamètre* aux plans qui ont de part et d'autre des ordonnées égales, et qu'on appelle *axes* les intersections de ces plans, on désigne sous le nom d'*axes principaux*, ceux qui sont perpendiculaires entr'eux.

312. Pour connoître les diverses surfaces qui peuvent être comprises dans l'équation (d), il faut chercher quelle est la nature des sections faites dans ces surfaces, par des plans parallèles à chacun des plans coordonnés. En regardant d'abord t comme constant, et supposant pour abréger, $L'^2 - A't^2 = \lambda^2$, on aura $B'u^2 + C'v^2 = \lambda^2$: selon que B' et C' seront de même signe ou de signe différent, cette équation sera celle d'une ellipse ou d'une hyperbole. Dans le premier cas, la surface proposée sera formée d'une suite d'ellipses, toutes situées dans des plans parallèles à celui des u et v, et qui ne différeront entr'elles que par les valeurs que λ prendra en conséquence de celles qu'on donnera à t. Lorsque $t = 0$, on a $\lambda = L'$ et il vient $B'u^2 + C'v^2 = L'^2$, équation qui appartient à l'ellipse $CD\,c\,d$, *fig.* 46, dans laquelle la surface proposée rencontre le plan des u et v. FIG. 46.
Faisant successivement u et v nuls, on trouve

$$v = \frac{L'}{\sqrt{B'}}, \qquad u = \frac{L'}{\sqrt{B'}};$$

pour les demi-axes AD et AC. Ceux des ellipses suivantes s'obtiendront de même, et on aura en général, lorsque $u=0$, $v=\frac{\lambda}{\sqrt{C'}}$ et lorsque $v=0$, $u=\frac{\lambda}{\sqrt{B'}}$, ou, ce qui est la même chose, $A't^2+C'v^2=L'^2$, et $A't^2+B'u^2=L'^2$.

Mais la supposition de $u=0$, donne la section de la surface proposée, par le plan des t et v, ou l'ellipse $DBdb$; celle de $v=0$ donne la section de cette même surface par le plan des u et t, ou l'ellipse $BCbc$: on voit donc que les sommets D', C', d', c', des coupes elliptiques $C'D'c'd'$ parallèles au plan coordonné DAC, seront déterminés par les rencontres des plans coupans, avec les deux sections dont on vient de parler. En supposant les plans coupans parallèles au plan DAB, les sections qu'on obtiendroit auroient leurs sommets sur les ellipses $CDcd$, et $BCbc$, et enfin si on prenoit ces plans parallèlement à BAC, les sommets des sections résultantes seroient sur $BDbd$, et $CDcd$.

On distingue les sections $CDcd$, $BDbd$, $BCbc$, faites dans le solide proposé par les plans coordonnés, de toutes celles qui leur sont parallèles, en les désignant par le nom de *sections principales*.

Si deux des coefficiens A', B' et C' sont égaux entr'eux, qu'on ait par exemple, $B'=C'$, l'équation (d) prendra la forme $u^2+v^2=\frac{\lambda^2}{B'}$; ce qui fait voir que toutes les sections parallèles au plan des u et v seront des cercles, ayant leur centre dans l'axe des t, et leurs rayons égaux aux ordonnées des deux sections principales $BDbd$, et $BCbc$ qui deviennent identiques: on doit donc en conclure que la surface proposée est engendrée par la révolution de l'ellipse $BDbd$ autour de l'axe AB.

Lorsqu'on aura en même tems $A'=B'=C'$, l'équation (d) deviendra $t^2+u^2+v^2=\frac{L'^2}{A'}$, les trois sections principales seront alors des cercles, et le solide proposé sera une sphère, ayant pour centre l'origine des coordonnées, et pour rayon $\frac{L'}{\sqrt{A'}}$.

313. Nous n'avons encore considéré que le cas où les coefficiens A', B' et C' étoient positifs; en variant les signes de ces

coefficiens, on obtiendra les diverses surfaces contenues dans l'équation (d), et on les distinguera facilement par la nature de leurs sections principales. Soit $A't^2+B'u^2-C'v^2=L'^2$; dans ce cas, les équations des sections principales seront

$$A't^2+B'u^2=L'^2,\quad A't^2-C'v^2=L'^2,\quad B'u^2-C'v^2=L'^2,$$

la première sera une ellipse et les deux autres appartiendront à des hyperboles. Toutes les coupes du solide proposé seront des ellipses parallèlement au plan des u et t, et des hyperboles parallèlement à chacun des deux autres plans coordonnés.

Si l'équation proposée étoit $A't^2-B'u^2-C'v^2=L'^2$, on auroit pour les trois sections principales,

$$-B'u^2-C'v^2=L'^2,\quad A't^2-C'v^2=L'^2,\quad A't^2-B'u^2=L'^2,$$

la première est évidemment imaginaire, la seconde et la troisième sont des hyperboles; et il est facile de voir que le solide sera composé parallèlement au plan des t et v, de sections hyperboliques, dont les sommets se trouveront sur la seconde hyperbole, qui est la section principale relative au plan des u et t. On peut aussi dans ce solide trouver des coupes elliptiques parallèlement au plan des u et v en prenant t, de manière qu'on ait $A't^2>L'^2$; car alors l'équation proposée peut être mise sous la forme $B'u^2+C'v^2=\lambda^2$, en faisant $A't^2-L'^2=\lambda^2$.

314. Examinons les cas dans lesquels l'équation (d) a perdu quelques-uns de ses termes, et supposons d'abord $L'=0$, on aura alors $A't^2+B'u^2+C'v^2=0$; si tous les coefficiens A', B', C' sont positifs, cette équation ne pourra être satisfaite que par les valeurs $t=0$, $u=0$ et $v=0$, (*Voyez la note, page* 340), la surface proposée se réduira donc à un point placé à l'origine des coordonnées.

Lorsque l'un des coefficiens A', B', C' devient négatif, qu'on a par exemple $A't^2+B'u^2-C'v^2=0$, les équations des trois sections principales sont

$$A't^2+B'u^2=0,\quad A't^2-C'v^2=0,\quad B'u^2-C'v^2=0.$$

La première n'indique que l'origine des coordonnées, puisqu'elle résulte de la supposition de $v=0$, et qu'elle donne en même tems $t=0$ et $u=0$; les deux autres appartiennent à des lignes droites

passant par l'origine, car on en tire $t=v\sqrt{\frac{C'}{A'}}$, $u=v\sqrt{\frac{C'}{B'}}$. Les coupes parallèles à la première section principale seront des ellipses, et celles qui seront parallèles à la seconde et à la troisième, seront des hyperboles.

Mais puisque l'équation proposée est homogène par rapport aux variables qu'elle renferme, on pourra en faire disparoître une en supposant $u=pt$ et $v=qt$, d'où il résultera $A'+B'p^2-C'q^2=0$, et si on prend arbitrairement une des quantités p et q, l'autre sera déterminée de manière à ce que les équations $u=pt$ et $v=qt$, satisfassent à la proposée; or, ces équations sont celles d'une ligne droite passant par l'origine: il est donc évident que la surface représentée par $A't^2+B'u^2-C'v^2=0$, sera formée d'une infinité de lignes de cette nature, et par conséquent elle sera une des surfaces coniques, ayant pour sommet l'origine des coordonnées (*E* n°. 79).

En faisant de même $u=pt$ et $v=qt$ dans une équation homogène d'un degré quelconque, entre les variables t, u et v, on prouvera qu'elle appartient à une surface conique, en prenant cette dénomination dans toute sa généralité. Il suit de là que si dans une équation proposée, on peut, par un simple changement d'origine, faire disparoître tous les termes qui ne sont pas du même degré, cette équation sera celle d'une surface conique.

Supposons qu'un des coefficiens A', B', C' soit nul dans l'équation (d), qu'on ait, par exemple, $A't^2+B'u^2=L'^2$: selon que les coefficiens A et B seront de même signe ou de signe différent, cette dernière équation désignera une ellipse ou une hyperbole tracée dans le plan des u et t; mais comme rien ne détermine v, on pourra donner à cette variable une valeur quelconque, et par conséquent si on elève sur tous les points de la courbe dont on vient de parler, des perpendiculaires au plan des u et t, l'équation $A't^2+B'u^2=L'^2$, aura lieu pour chacun des points de ces droites qui formeront une surface cylindrique (*E* n°. 80). L'équation $A't^2+B'u^2=L'^2$, prise dans toute sa généralité, doit donc être regardée comme appartenant à un cylindre, ayant pour base une ellipse ou une hyperbole. Les équations $A't^2=L'^2$, $B'u^2=L'^2$, qu'on obtiendra en faisant successi-

vement $u=0$, $t=0$, donneront $t=\frac{L'}{\sqrt{A'}}$ et $u=\frac{L'}{\sqrt{B'}}$; ces résultats représentent deux droites parallèles à l'axe des v, et qui sont les deux sections principales du cylindre proposé, par le plan des t et v et par celui de u et v. Il est aisé de voir que toutes les coupes parallèles à ces plans seront également des lignes droites parallèles entr'elles, et que toutes les coupes parallèles au plan des u et t, seront égales et semblables à la base même du cylindre.

En général, toute équation qui ne renfermera que deux des trois variables, de quelque degré qu'elle soit, appartiendra à une surface cylindrique formée par des lignes perpendiculaires au plan sur lequel se trouvent ces deux variables. Il suit de là que lorsqu'en changeant la direction des axes des coordonnées, on parviendra à faire disparoître une des variables d'une équation quelconque, il en faudra conclure que cette équation représente une surface cylindrique dont la base a pour équation la transformée elle-même.

On verra de même que si la transformation faisoit disparoître deux des trois variables, l'équation proposée n'exprimeroit qu'un ou plusieurs plans; car on tireroit de la transformée une ou plusieurs valeurs déterminées pour la coordonnée restante, et les deux autres demeureroient arbitraires: ainsi l'équation $A'v^2=L'^2$, qui donne $v=\pm\frac{L'}{\sqrt{A}}$, est celle de deux plans parallèles à celui des t et u, menés l'un au-dessus, l'autre au-dessous.

315. Nous n'avons pu trouver par ce qui précède que les surfaces du second ordre qui sont douées d'un centre; mais toutes ne jouissent pas de cette propriété, car lorsque le dénominateur commun des valeurs des quantités a, b et c, déterminées par les équations (b) (n°. 311) deviendra infini, il ne sera pas possible de faire disparoître en même tems tous les termes affectés de la première puissance de chaque variable.

Pour reconnoître les surfaces dépourvues de centre, reprenons l'équation générale (a); mais supposons qu'on en fasse d'abord disparoître les termes $2Dxy$, $2Exz$, $2Fyz$, en changeant la

direction des axes, et qu'il reste seulement

$$Ax^2+By^2+C\zeta^2+2Gx+2Hy+2K\zeta-L^2=0;$$

il est aisé de voir qu'en substituant $x'+a$, $y'+b$, et $\zeta'+c$, au lieu de x, de y et de ζ, l'on ne pourroit faire évanouir les premières puissances de celles des variables, dont le quarré manqueroit dans l'équation ci-dessus. Il faudra donc pour comprendre ce cas dans le résultat, n'égaler à zéro que le coefficient des premières puissances de deux des variables seulement, de x' et y' par exemple, et employer la troisième arbitraire c à rendre nul le terme constant : on obtiendra par ce moyen un résultat de la forme $Ax'^2+By'^2+C\zeta'^2+2K'\zeta'=0$. Telle est l'équation la plus simple qui puisse comprendre en même tems toutes les surfaces du second ordre ; elle est analogue à celle que nous avons donnée pour les lignes du même ordre (n°. 214). Examinons maintenant le cas où l'équation proposée seroit réduite à

$$Ax'^2+By'^2+2K'\zeta'=0.$$

Si les coefficiens A et B ont le même signe, les équations des sections principales seront

$$Ax'^2+By'^2=0,\quad Ax'^2+2K'\zeta'=0,\quad By'^2+2K'\zeta'=0,$$

en supposant toutefois qu'on prenne ζ' d'un signe contraire à celui des coefficiens A et B, sans quoi l'équation proposée ne pourroit être satisfaite que par les valeurs $x'=0$, $y'=0$ et $\zeta'=0$.

La première section principale n'est qu'un point ; la seconde et la troisième sont des paraboles, ainsi que toutes les coupes respectivement parallèles aux plans des x' et ζ', et des y' et ζ'.

Lorsque les coefficiens A et B seront de signe différent, la première section principale, ayant pour équation $Ax'^2-By'^2=0$, devient une ligne droite, les coupes qui lui seront parallèles seront des hyperboles, et les deux autres sections principales resteront paraboliques.

Enfin quand un des coefficiens A ou B sera nul, l'équation proposée ne renfermant plus que deux variables, appartiendra à un cylindre, ayant pour base une parabole située dans le plan des deux coordonnées restantes.

C'est à ce cas qu'il faut rapporter l'équation $Ax^2+2Hy+2K\zeta=0$;

qui ne paroît pas d'abord comprise dans l'équation générale $Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2K'z'=0$; car si on transforme les coordonnées y et z en substituant $\alpha y'-\beta z'$ à la première, et $\beta y'+\alpha z'$ à la seconde (*page* 455), on pourra faire disparoître y' ou z'.

316. Nous avons fait voir, n°. 312, que la surface composée de coupes elliptiques dans tous les sens, devenoit une surface de révolution autour de l'axe des t, lorsqu'on avoit $B'=C'$.

En faisant de même $A=B$ dans l'équation

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2K'z'=0,$$

qui comprend toutes les surfaces du second ordre, on trouvera celles de ces surfaces qui peuvent être engendrées par la révolution d'une courbe autour de l'axe des z', car il viendra

$$A(x'^2+y'^2)+Cz'^2+2K'z'=0;$$

toutes les sections parallèles au plan des x' et y', seront des cercles; les deux sections principales faites par les plans des x' et z' et des y' et z', seront les mêmes, et produiront la courbe qui, tournant autour de l'axe des z, engendre le solide proposé. On aura l'ellipsoïde de révolution, si le coefficient C est positif, l'hyperboloïde s'il est négatif, et enfin le paraboloïde, s'il est nul.

En général, lorsque la supposition de $x^2+y^2=u^2$ fera disparoître les variables x et y dans une équation quelconque, il en faudra conclure que cette équation appartient à une surface engendrée par la révolution d'une courbe autour de l'axe des z, car en faisant $z=$ *constante*, et résolvant l'équation par rapport à u, on en tireroit $u=$ *constante*, ou $\sqrt{x^2+y^2}=$ *constante*, ce qui prouveroit que toutes les coupes parallèles au plan des x et y, ou perpendiculaires à l'axe des z, seroient des cercles.

317. Les surfaces courbes ont pour asymptotes d'autres surfaces. Si on prend, par exemple, l'équation $Ax^2+By^2-Cz^2=L^2$ (n°. 314), et qu'on en tire la valeur de z, il viendra $z=\frac{1}{C}\sqrt{Ax^2+By^2-L^2}$, et réduisant en série, on trouvera

$$z=\frac{(Ax^2+By^2)^{\frac{1}{2}}}{C}\left\{1-\tfrac{1}{2}\frac{L^2}{Ax^2+By^2}+\text{etc.}\right\}$$

résultat dont le second terme sera d'autant plus petit que les varia-

bles x et y deviendront plus grandes ; d'où il suit que l'ordonnée z différera de moins en moins de celle de la surface conique dont l'équation seroit $z' = \frac{(Ax^3+By^3)^{\frac{1}{3}}}{C}$: cette surface est donc l'asymptote de la première.

La recherche des asymptotes des surfaces courbes, se réduit à celle des termes les plus considérables de leurs équations, dans l'hypothèse de x et de y, très-petits ou très-grands, et est fondée sur les principes developpés n°. 118 et suiv.

318. Il ne peut résulter de l'intersection d'un plan avec une surface courbe du second ordre, qu'une ligne du même ordre au plus ; car en changeant la direction des axes de manière que le plan coupant devienne un des plans coordonnés, et faisant nulle la coordonnée qui lui sera perpendiculaire, on aura l'équation de son intersection avec la surface proposée ; et il est visible que la substitution des valeurs générales de x, y et z, ne changera point le degré de l'équation proposée. On prouveroit de même qu'une surface quelconque ne peut être coupée par un plan, suivant une courbe d'un ordre plus élevé que le sien.

Deux surfaces se coupent toujours suivant une ligne ; lorsqu'elles sont courbes l'une et l'autre ; il arrive le plus souvent que tous les points de leurs intersections ne sauroient être dans un même plan : telle est l'origine des courbes à double courbure (*E* n°. 81). Ces courbes sont représentées par le système des équations des surfaces dont elles sont les intersections, puisque les coordonnées de leurs points doivent satisfaire en même tems à l'une et à l'autre de ces équations.

319. On transforme aussi les coordonnées rectangles d'un point quelconque, de l'espace en coordonnées polaires comme il suit. On
FIG. 44. imagine un rayon vecteur AM, *fig.* 44, et pour en fixer la position on a recours à l'angle MAM' qu'il fait avec sa projection sur le plan BAC, puis à l'angle $M'AB$ que cette projection fait avec l'axe AB, et on trouve par ce moyen

$$MM' = AM \sin MAM', \quad AM' = AM \cos MAM',$$
$$PM' = AM' \sin M'AB, \quad AP = AM' \cos M'AB,$$

posant

posant donc $AM=r$, $MAM'=p$, $M'AB=q$, il viendra

$r=\sqrt{x^2+y^2+\zeta^2}$, $\zeta=r\sin p$, $y=r\cos p\sin q$, $x=r\cos p\cos q$.

On auroit obtenu des expressions plus symétriques en employant les angles que le rayon vecteur AM fait avec chacune des coordonnées MM', MM'', MM'''; car en nommant ces angles φ, ψ et π, on auroit par les triangles MAM', MAM'', MAM''',

$$MM'=AM\cos AMM'=r\cos\varphi=\zeta$$
$$MM''=AM\cos AMM''=r\cos\psi=y$$
$$MM'''=AM\cos AMM'''=r\cos\pi=x$$

où l'on remarquera que $\cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\pi^2=1$ (*E* n°. 60).

Application du Calcul différentiel à la théorie des Surfaces courbes.

FIG. 47.

320. Soient x, y et ζ les coordonnées d'un point M, *fig.* 47, situé sur une surface courbe quelconque; on pourra regarder l'ordonnée $PM=\zeta$ comme une fonction des deux abscisses $AP=x$ et $PM'=y$. Lorsque x, variant seul, deviendra $x+h$, on aura pour le développement de l'ordonnée $m'm$, prise dans la section RMm faite par un plan parallèle à celui des x et ζ et passant par le point proposé, la série

$$\zeta+\frac{d\zeta}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2\zeta}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3\zeta}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si c'est y qui se change en $y+k$, et que x demeure constant, on obtiendra l'ordonnée $n'n$, prise dans la section PMn faite par un plan parallèle à celui des y et ζ et passant par le point proposé. Le développement de cette ordonnée sera

$$\zeta+\frac{d\zeta}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2\zeta}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3\zeta}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

En faisant varier x et y en même tems, on passera du point M à un point quelconque N, et cela de deux manières différentes, savoir, en substituant $y+k$ au lieu de y dans le premier développement ci-dessus, ou bien $x+h$ au lieu de x dans le second. Par l'une de ces opérations on passe de l'ordonnée $m'm$ à l'ordonnée $N'N$, dans la section pmN, et par l'autre on passe de $n'n$ à $N'N$, dans la section rnN; les résultats qu'on obtient sont identiques, et se trouvent rapportés dans les n°. 25 et 26. Donc en général, lorsque

x et y deviennent respectivement $x+h$, et $y+k$, on a

$$z+\frac{dz}{dx}h+\frac{dz}{dy}k$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}h^2+2\frac{d^2z}{dxdy}hk+\frac{d^2z}{dy^2}k^2\right)$$
$$+\text{etc.}$$

Pour abréger, je représenterai cette série par

$$z+ph+qk$$
$$+\frac{1}{2}(rh^2+2shk+tk^2)$$
$$+\text{etc.}$$

Il est aisé de voir que lorsqu'on cessera de regarder les quantités h et k comme indépendantes l'une de l'autre, et qu'on établira un rapport entr'elles, on fixera la direction du plan mené perpendiculairement à celui des x et y, par les deux points M et N,

$$\text{car } \frac{k}{h}=\frac{N'm'}{M'm'}=\tan N'M'm'.$$

Il suit des considérations précédentes et de ce qui a été dit n°. 79, que si $u=0$ représente l'équation d'une surface courbe, les équations différentielles

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}dz=0 \qquad \text{et}\ \frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}dz=0,$$

appartiendront respectivement aux deux sections RMm et PMn; la coordonnée y n'entrera dans la première que comme une constante arbitraire, qui détermine la position du plan coupant : il en sera de même de la coordonnée x dans la seconde. On ne doit pas confondre le dz de l'une de ces équations avec celui de l'autre : ces deux différentielles ne sont que partielles, ainsi qu'on l'a dû remarquer n°. 30; car la différentielle complète, ou l'ensemble des termes du premier ordre, a pour expression

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy=pdx+qdy.$$

Quoiqu'on n'emploie aucune caractéristique particulière pour distinguer les deux différentielles partielles, il est toujours aisé de les reconnoître par celui des deux accroissemens dx ou dy dont elles

sont affectées ; ainsi lorsqu'on a seulement $d\zeta = p\,dx$, le $d\zeta$ est la différentielle de l'ordonnée de la section parallèle au plan des x et ζ ; semblablement $d\zeta = q\,dy$ est celle de l'ordonnée de la section parallèle au plan des y et ζ. Si on fait $dy = m\,dx$, la différentielle complète $d\zeta = dx(p+mq)$ appartiendra à l'ordonnée de la section donnée par le plan $M'MNN'$, perpendiculaire à celui des x et y, en supposant $N'm' = m \times M'm'$. On trouvera des choses analogues, en prenant successivement pour ordonnées chacune des variables x et y, et en regardant les deux autres comme les abscisses.

Les deux différentielles $d\zeta = p\,dx$ et $d\zeta = q\,dy$, sont liées entr'elles par l'équation de condition $\frac{d^2\zeta}{dx\,dy} = \frac{d^2\zeta}{dy\,dx}$ ou $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, qui résulte de l'identité des deux développemens de $M'N$, et qui n'est que l'expression de la continuité de la surface, en vertu de laquelle, ainsi qu'on l'a fait voir plus haut, les deux sections pMN et rnN déterminées par les abscisses Ap et Ar, doivent se couper au point N.

321. Ces préliminaires étant bien entendus, on concevra sans peine que si deux surfaces passent par le point dont les coordonnées sont x', y' et ζ', et qu'en changeant x' en $x'+h$, y' en $y+k$, l'équation de la première donne

$$\left.\begin{array}{l}\zeta' + ph + qk \\ \quad + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) \\ \quad + \text{etc.}\end{array}\right\} \text{et celle de la seconde} \left\{\begin{array}{l}\zeta' + Ph + Qk \\ \quad + \frac{1}{2}(Rh^2 + 2Shk + Tk^2) \\ \quad + \text{etc.}\end{array}\right.$$

la distance des points correspondants à N', sur ces deux surfaces, sera

$$(P-p)h + (Q-q)k + \tfrac{1}{2}[(R-r)h^2 + 2(S-s)hk + (T-t)k^2] + \text{etc.}$$

Lorsqu'on aura $P-p=0$, $Q-q=0$, les surfaces proposées se toucheront et leur contact sera du premier ordre seulement ; il sera du second ordre quand on aura en même tems $R-r=0$, $S-s=0$, $T-t=0$, et ainsi de suite. En raisonnant dans le cas actuel comme on l'a fait à l'égard des courbes (n°. 259), on se

convaincra que toute surface qui ne rempliroit pas ces conditions, ne sauroit passer entre les deux proposées, du moins lorsqu'on prendra les quantités h et k assez petites pour que la somme des termes du premier ordre soit plus considérable que celle de tous ceux des ordres suivans.

322. Supposons d'abord que la surface proposée, que j'appellerai la *surface touchante*, soit un plan; son équation étant mise sous la forme $z = Ax + By + D$, donnera $z' = Ax' + By' + D$, lorsqu'on y changera x, y et z, en x', y' et z'; remplaçant ensuite x' et y' par $x'+h$ et $y'+k$, z' deviendra

$$Ax' + By' + D + Ah + Bk \text{ ou } z' + Ah + Bk,$$

on aura donc $P = A$ et $Q = B$, et substituant ces valeurs dans les équations du contact $P - p = 0$ et $Q - q = 0$, il en résultera $A = p$, $B = q$. On éliminera D, en retranchant l'équation $z' = Ax' + By' + D$, de l'équation $z = Ax + By + D$; et écrivant p pour A et q pour B, l'équation $z - z' = p(x - x') + q(y - y')$ sera celle du plan tangent à la première surface proposée.

Pour en faire une application, je prendrai l'équation $ax'^2 + by'^2 + cz'^2 = l^2$, qui, étant différentiée successivement par rapport à x' et par rapport à y', donnera

$$\left.\begin{aligned} ax' + cz'\frac{dz'}{dx'} &= 0 \\ by' + cz'\frac{dz'}{dy'} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} p &= -\frac{ax'}{cz'} \\ q &= -\frac{by'}{cz'}, \end{aligned}\right.$$

substituant ces valeurs, il viendra

$$z - z' = -\frac{ax'}{cz'}(x - x') - \frac{by'}{cz'}(y - y'),$$

réduisant au même dénominateur, on obtiendra un résultat qui, en vertu de la proposée, se changera en $axx' + byy' + czz' = l^2$.

Si le point de contact n'étoit pas donné sur la surface proposée, mais qu'on connût la position d'un point extérieur par lequel dût passer le plan tangent demandé, en nommant α, β et γ, les coordonnées de ce dernier point, comme elles devroient satisfaire à l'équation qu'on vient de trouver, on auroit $a\alpha x' + b\beta y' + c\gamma z' = l^2$; résultat dans lequel les quantités x', y' et z', sont les indéterminées,

et qui représente, conjointement avec l'équation proposée, la courbe sur laquelle se trouvent tous les points de contact cherchés dont il est aisé de voir que le nombre est infini. Cette courbe est plane, puisque l'une des équations qui la détermine, n'est que du premier dégré.

Les intersections du plan tangent, avec deux des plans coordonnés, peuvent servir pour sa construction, comme la soutangente sert à celle de la tangente des courbes, et il est trop facile de les déterminer pour qu'il soit besoin d'entrer dans aucun détail à cet égard.

323. La droite menée perpendiculairement au plan tangent par le point proposé s'appelle *normale*, et ses équations sont, d'après ce qui précède et en vertu du n°. 301,

$$x-x'+p(z-z')=0, \quad y-y'+q(z-z')=0.$$

La distance du point M, à un point quelconque pris sur cette droite, aura pour expression

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}=(z-z')\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Si on fait $z=0$, le résultat $-z'\sqrt{1+p^2+q^2}$ donnera la longueur de la partie MG de la normale, comprise entre la surface proposée et le plan des x et y.

Mettant pour p et q les valeurs tirées de l'équation

$$ax'^2+by'^2+cz'^2=l^2,$$

il viendra $MG=\frac{1}{c}\sqrt{a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2}$: lorsqu'on aura $a=b=c$, cette valeur se réduira à $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=l$, et dans ce cas, la surface proposée sera une sphère, ayant son centre à l'origine des coordonnées et son rayon égal à l.

324. On auroit pu parvenir à l'équation du plan tangent par plusieurs autres considérations ; en le regardant, par exemple, comme devant passer par les trois points infiniment proches M, m et n, et en déterminant les constantes par la méthode des limites ou par celle des infiniment petits. Ces applications n'ayant aucune difficulté pour ceux qui auront saisi la solution des questions analogues relativement aux courbes, je me bornerai à traduire en analyse la

construction du plan tangent, qu'on trouve dans le n°. 107 des *Essais de Géométrie*.

Suivant cette construction, le plan tangent se détermine par les deux droites MT et Mt qui touchent respectivement les sections RMm et PMn, au point M; mais $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ étant les coefficiens différentiels de l'ordonnée z', considérée successivement dans chacune de ces sections, et les droites MT et Mt étant de plus parallèles aux plans des x et z et des y et z, il est aisé de voir que les équations de MT seront

$$z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x'), \quad y-y'=0,$$

et que celles de Mt seront

$$z-z'=\frac{dz'}{dy'}(y-y'), \quad x-x'=0.$$

Maintenant si on représente l'équation du plan tangent par

$$z-z'=A(x-x')+B(y-y'),$$

il est évident que cette équation devra s'accorder avec les précédentes, et pour cela il faut qu'en y faisant successivement $y-y'=0$ et $x-x'=0$, on trouve

$$z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x') \qquad \text{et } z-z'=\frac{dz'}{dy'}(y-y');$$

mais elle donne par ces suppositions

$$z-z'=A(x-x') \qquad \text{et } z-z'=B(y-y');$$

on en conclura donc, comme dans le n°. 322,

$$A=\frac{dz'}{dx'}=p, \qquad B=\frac{dz'}{dy'}=q.$$

On pourroit craindre que le plan tangent déterminé comme on vient de le voir, ne touchât la surface proposée que sur les deux sections que l'on a considérées: mais en différentiant son équation par rapport à x et à y seuls, on aura $dz=pdx+qdy$, ce qui prouve que lorsqu'on prendra $dx=dx'$ et $dy=dy'$, on aura $dz=dz'$, et que par conséquent les points de la surface proposée qui environnent immédiatement le point M, coïncident tous avec ceux du plan tangent, tant qu'on n'a égard qu'aux quan-

tités du premier ordre. Il suit de là qu'un plan quelconque, mené par le point M, coupe la surface proposée dans une courbe qui a deux points communs avec le plan tangent, ou, ce qui est la même chose, a pour tangente l'intersection de ce plan avec le plan coupant. J'observerai au reste que ce qui vient d'être démontré *à posteriori*, se voit immédiatement par les considérations du n°. 322. Nous allons passer maintenant à la recherche des sphères osculatrices de la surface proposée.

325. Soient α, β, γ les coordonnées du centre de la sphère touchante et a son rayon, elle aura pour équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=a^2.$$

En différentiant successivement par rapport à x et par rapport à y, on trouvera

$$\frac{dz}{dx}=P=-\frac{x-\alpha}{z-\gamma},\quad \frac{dz}{dy}=Q=-\frac{y-\beta}{z-\gamma},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=R=-\frac{1}{z-\gamma}+\frac{(x-\alpha)P}{(z-\gamma)^2}=-\frac{1+P^2}{z-\gamma},$$

$$\frac{d^2z}{dxdy}=S=\frac{(x-\alpha)Q}{(z-\gamma)^2}=\frac{(y-\beta)P}{(z-\gamma)^2}=-\frac{PQ}{z-\gamma},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=T=-\frac{1}{z-\gamma}+\frac{(y-\beta)Q}{(z-\gamma)^2}=-\frac{1+Q^2}{z-\gamma}.$$

Puisque la sphère que nous considérons doit passer par le point M, dont les coordonnées sont x', y' et z', on aura d'abord

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2=a^2\ldots.(1);$$

puis changeant x en x', y en y' et z en z', dans les fonctions P et Q, les conditions relatives au contact du premier ordre donneront

$$p=-\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma},\qquad q=-\frac{y'-\beta}{z'-\gamma},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$x'-\alpha+p(z'-\gamma)=0\ldots.(2),\qquad y'-\beta+q(z'-\gamma)0\ldots.(3).$$

Ces équations qui, lorsqu'on met x au lieu de α, et y au lieu de β, deviennent les mêmes que celles de la normale (n°. 323), nous apprennent que toutes les sphères qui peuvent toucher la proposée ont leur centre sur la normale menée par le point de contact.

A l'aide des équations (1), (2) et (3), on déterminera trois

des constantes α, β, γ et a, et il ne restera plus qu'une condition à remplir pour achever de particulariser la sphère touchante : on ne pourra donc pas satisfaire en particulier à chacune des équations $R-r=0$, $S-s=0$, $T-t=0$, relatives au contact du second ordre ; mais si on compare l'ensemble des termes du second ordre, dans le développement de ζ' et dans celui de ζ (n°. 321), on aura l'équation unique $Rh^2+2Shk+Tk^2=rh^2+2shk+tk^2$, dont on pourra faire usage pour déterminer la quatrième constante arbitraire.

Cette équation peut être mise sous la forme

$$R-r+2(S-s)\frac{k}{h}+(T-t)\frac{k^2}{h^2}=0;$$

substituant au lieu des quantités R, S, T, leurs valeurs trouvées ci-dessus, et changeant x en x', y en y', ζ en ζ', P en p, et Q en q, il viendra

$$\frac{1+p^2}{\zeta'-\gamma}+r+2\left(\frac{pq}{\zeta'-\gamma}+s\right)\frac{k}{h}+\left(\frac{1+q^2}{\zeta'-\gamma}+t\right)\frac{k^2}{h^2}=0\ldots.(4).$$

Lorsque cette équation aura lieu conjointement avec les précédentes, l'ordonnée élevée sur le point dont les abscisses sont $x'+h$ et $y'+k$, et terminée à la surface proposée, ne différera de celle de la sphère touchante, que dans les termes du troisième ordre : aucune autre sphère ne pourra donc passer entre ces deux surfaces, du moins dans l'espace qui sépare le point M du point N ; car il faut bien remarquer qu'en général, le contact ne deviendra une osculation que dans le sens MN, qui répond à la ligne $M'N'$ sur laquelle on a $\frac{N'm'}{M'm'}=\frac{k}{h}$.

Si on fait $\frac{k}{h}=m$, on tirera de l'équation (4)

$$'-\gamma=-\frac{1+p^2+2pqm+(1+q^2)m^2}{r+2sm+tm^2},$$

valeur que, pour abréger, nous représenterons par M ; en la substituant dans les équations (3), (2) et (1), il en résultera

$$\zeta'-\gamma=M,\ (y'-\beta)=-qM,\ x'-\alpha=-pM$$

$$a=M\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

326. La considération de la sphère osculatrice fournit le moyen de connoître la courbure d'une surface proposée dans ses différens points. En effet, si on conçoit une section quelconque MN, faite dans la surface proposée par un plan mené suivant la normale MG; il est aisé de voir qu'elle aura pour cercle osculateur, le grand cercle dans lequel le plan coupant rencontre la sphère osculatrice; car s'il en étoit autrement, on pourroit faire passer un cercle entre celui dont on vient de parler et la courbe MN, et rien n'empêcherait de regarder le dernier comme faisant partie d'une sphère qui auroit aussi son centre sur la normale, mais qui passeroit entre la sphère osculatrice et la surface proposée, immédiatement avant et après le point N, ce qui ne sauroit arriver.

La valeur de a trouvée ci-dessus est donc l'expression du rayon de courbure d'une section MN, faite dans la surface proposée, par le plan MNG conduit suivant la normale, mais dont la position peut d'ailleurs être quelconque : nous donnerons dans la suite l'expression du rayon de courbure d'une section faite par un plan quelconque.

327. Parmi le nombre infini de valeurs que peut prendre l'expression de a, lorsqu'on donne à m toutes les valeurs possibles; cherchons celles qui sont des *maxima* ou des *minima* : pour les trouver, nous aurons l'équation $\frac{da}{dm}=0$, qui se réduira à $\frac{dM}{dm}=0$; puisque la quantité m n'entre dans a que par le facteur M; mais en faisant disparoître le dénominateur de l'équation (4), d'où dépend la valeur de $\zeta'-\gamma$, ou M, on aura

$$(r+2sm+tm^2)M+1+p^2+2pqm+(1+q^2)m^2=0\ldots(5);$$

différentiant cette équation par rapport à m, et faisant $\frac{dM}{dm}=0$; il viendra

$$(s+tm)M+pq+(1+q^2)m=0\ldots\ldots\ldots(6)$$

d'où on tirera $m=-\frac{pq+Ms}{(1+q^2)+Mt}$; substituant cette valeur dans l'équation (5), il en résultera

$$(1+p^2+tM)(1+q^2+tM)^2-(pq+sM)^2(1+q^2+tM)=0;$$

et en supprimant le facteur commun $1+q^2+tM$, on trouvera

seulement $(1+p^2+rM)(1+q^2+tM)-(pq+sM)^2=0$. Ce dernier résultat étant développé et ordonné par rapport à M, deviendra

$M^2(rt-s^2)+[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]M+1+p^2+q^2=0$(7);

faisant pour abréger

$rt-s^2=e$, $(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=f$, $1+p^2+q^2=g^2$,

et résolvant l'équation ci-dessus par rapport à M, on obtiendra

$$M=\frac{-f\pm\sqrt{f^2-4eg^2}}{4e},$$

ce qui donnera $$a=\frac{-fg\mp g\sqrt{f^2-4eg^2}}{4e}.$$

Des deux valeurs du rayon a, l'une répond au *maximum* et l'autre au *minimum*.

Pour connoître maintenant dans quel sens se fait l'osculation de chacune des sphères auxquelles appartiennent ces valeurs, il faut déterminer m, ce qui se fera en chassant M de l'équation (5), par le moyen de son expression $M=-\frac{pq+(1+q^2)m}{s+tm}$; il viendra alors, après les réductions et en ordonnant par rapport à m,

$m^2[(1+q^2)s-pqt]+m[(1+q^2)r-(1+p^2)t]-[(1+p^2)s-pqr]=0$(8).

328. Un simple changement de coordonnées suffira pour réduire cette équation, de manière à faire appercevoir le rapport qu'ont entr'elles, sur la surface proposée, les directions cherchées. En effet, si on imagine que le plan tangent devienne celui des x et y, ce qui est toujours possible, et que le point désigné par M, soit placé à l'origine des coordonnées, on ne changera rien à la situation respective de la surface proposée et des sphères osculatrices, mais on aura alors $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, $p=0$, $q=0$; par là les expressions du n°. 325, se réduiront à

$$\gamma=\frac{1+m^2}{r+2sm+tm^2}, \qquad a=-\gamma:$$

les quantités α et β s'évanouiront, ainsi que l'exige la position des sphères osculatrices dont le centre est dans la normale, qui est devenue l'axe des z; enfin, on aura au lieu de l'équation (8)

$$m^2s+m(r-t)-s=0, \text{ ou } m^2+m\left(\frac{r-t}{s}\right)-1=0.$$

Il est aisé de voir que maintenant m, ou $\frac{k}{h}$, représente la tangente de l'angle que la droite MN' qui joint la projection N' du point N, *fig.* 48, et l'origine M, fait avec l'axe MP des x, FIG. 48. et que le plan élevé sur cette droite, perpendiculairement au plan des x et y, passant alors par la normale MG, contiendra le grand cercle de la sphère touchante, sur lequel l'osculation a lieu (n°. précéd.). Mais en désignant par m' et m'' les deux valeurs dont m est susceptible, on aura en vertu de l'équation ci-dessus $m'm'' + 1 = 0$; d'où il suit que le plan du cercle osculateur MN décrit avec le plus grand rayon OM, est perpendiculaire sur le plan du second cercle osculateur Mn décrit avec le plus petit rayon oM.

329. Pour trouver la valeur du rayon de courbure d'une section faite dans la surface proposée, par un plan quelconque mené par la normale, ou le nouvel axe des z, il suffiroit de substituer au lieu de m, dans l'expression de γ, donnée ci-dessus, la tangente de l'angle que fait ce plan avec celui de x et z. On obtiendroit le rayon de courbure de la section faite par ce dernier, en supposant $k = 0$, ce qui donneroit $m = 0$, et $\gamma = \frac{1}{r}$. Si donc on connoissoit d'ailleurs le rayon de courbure de cette section, on auroit par là la valeur du coefficient différentiel r, relatif au nouveau système de coordonnées. On déterminera sans plus de difficulté les deux coefficiens s et t, lorsqu'on connoîtra *à priori* les rayons de courbure de deux autres sections, faisant avec la première des angles donnés, et sans rien emprunter de l'équation de la surface proposée, on sera alors en état d'assigner le rayon de courbure d'une section faite par un plan quelconque, mené par l'axe des z, pourvu qu'on ait l'angle que ce plan fait avec l'une des trois sections précédentes; circonstance qui mérite d'être remarquée.

Dans le changement de coordonnées que nous avons imaginé, en prenant la normale pour l'axe des z et le plan tangent pour le plan des x et y, nous n'avons rien statué sur la direction des axes de ces dernières coordonnées; mais puisque les plans des cercles

osculateurs du plus grand et du plus petit rayon sont perpendiculaires entr'eux, nous pouvons supposer que le plan des x et z passe par l'un de ces cercles, et que le plan des y et z coïncide avec l'autre: prenons donc le plan $N'MG$ pour celui des x et z, et le plan $n'MG$ pour celui des y et z. Dans ce changement le coefficient différentiel s s'évanouit; car l'une des valeurs de m, devient nulle et l'autre infinie, et si on fait d'abord $m=0$, dans l'équation $m^2s+m(r-t)-s=0$, il en résultera $s=0$: en la mettant ensuite sous la forme $s+\frac{(r-t)}{m}-\frac{s}{m^2}=0$, on s'assurera que la supposition de m infinie, donne encore $s=0$.

Dans cette hypothèse on aura pour une section faisant avec le plan des x et z un angle quelconque, $\gamma=\frac{1+m^2}{r+tm^2}$, et nommant V cet angle dont m exprime la tangente, on trouvera par les relations des lignes trigonométriques

$$\cos V=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}; \qquad \sin V=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \text{ et par conséquent}$$

$$a=-\frac{1}{r\cos V^2+t\sin V^2}.$$

On peut exprimer les quantités r et t au moyen du plus grand et du plus petit rayon de courbure, car on a pour le premier $V=0$, et pour le second $V=90°$; en désignant l'un par a' et l'autre par a'', on trouvera $a'=-\frac{1}{r}$, $a''=-\frac{1}{t}$ d'où $r=-\frac{1}{a'}$, $t=-\frac{1}{a''}$ et $a=-\frac{a'a''}{a'\cos V^2+a''\sin V^2}$.

Il suit de là que le rayon de courbure d'une section quelconque, perpendiculaire au plan tangent, ne dépend que du plus grand et du moindre rayon de courbure, et de l'angle que fait le plan coupant avec ceux des sections auxquelles ces rayons se rapportent.

330. Revenons maintenant au cas où la situation des plans coordonnés est quelconque, et voyons comment on peut trouver à l'égard de ces plans la position de ceux qui contiennent le plus

grand et le plus petit cercle osculateur. Le moyen qui se présente le premier consiste à effectuer la transformation des coordonnées que nous avons conçue n°. 326, et à déterminer ensuite sur le plan tangent, devenu celui des abscisses, la direction des axes de ces dernières, par la condition que le coefficient différentiel s disparoisse, (n°. précéd.); mais il nous a paru plus simple et plus général de chercher à exprimer la quantité m, ou le rapport $\frac{k}{h}$, au moyen des constantes qui particularisent la position du plan coupant MNG, *fig.* 47, et voici comment on y peut parvenir. On observera que FIG. 47. plus le point N sera voisin du point M, plus la section MN approchera de se confondre avec sa tangente, qui n'est autre chose que la droite suivant laquelle le plan coupant rencontre celui qui touche la surface proposée en M, et plus aussi la droite $M'N'$ approchera d'être la projection de cette tangente. Cela posé, en représentant par $\zeta-\zeta'=A(x-x')+B(y-y')$ l'équation du plan coupant, on trouvera que celle de la projection de son intersection avec le plan tangent sur le plan des x et y, sera

$$(p-A)(x-x')+(q-B)(y-y')=0;$$

et supposant que x et y soient les abscisses du point N, on aura $x-x'=h$ et $y-y'=k$, d'où on tirera $\frac{k}{h}=m=-\frac{p-A}{q-B}$, pour la limite du rapport que peuvent avoir entr'elles les quantités h et k qui, d'après les principes employés dans la recherche des sphères osculatrices (n°. 321), doivent pouvoir être supposées aussi petites qu'on voudra. Substituant cette valeur de m, dans celle de M, l'expression du rayon de courbure ne dépendra plus que des constantes A et B; mais il faut observer que parce que le plan coupant passe par la normale MG, il existe une relation nécessaire entre A et B; en effet l'équation de ce plan doit devenir identique lorsqu'on y mettra pour $x-x'$ et $y-y'$ leurs valeurs tirées des équations de la normale (n°. 323): effectuant la substitution et divisant par $\zeta-\zeta'$, on trouvera

$$1=-Ap-Bq.$$

Il seroit facile maintenant de chasser une des quantités A et B,

de l'expression de m, et mettant le résultat dans l'équation (8), on auroit celle qui doit donner la position des plans qui contiennent le plus grand et le plus petit cercle osculateur.

331. La considération des normales consécutives, qui nous a conduits à l'expression du rayon de courbure des courbes (n°. 289), s'applique également aux surfaces, et elle répand un nouveau jour sur les propriétés particulières au plus grand et au plus petit rayon de courbure. On a vu, (n°. 323), que les équations de la normale étoient $(x-x')+(\zeta-\zeta')p=0$.....(a),

$(y-y')+(\zeta-\zeta')q=0$.....(b);

les quantités x', y', ζ', p et q, relatives au point que l'on considère sur la surface proposée, sont constantes pour la même normale, mais elles changent de valeur lorsqu'on passe à une seconde normale consécutive à la première; or ce passage peut se faire dans une infinité de directions, savoir, du point M à chacun des points environnans: il faut donc, pour embrasser tous les cas possibles, faire varier en même tems x', y', et ζ', et comme on ne cherche que le point d'intersection de la première normale avec la seconde, on regardera les coordonnées x, y et ζ, affectées à ce point, comme constantes. En différentiant sous ce point de vue les équations (a) et (b) et en observant que $d\zeta'=p\,dx'+q\,dy'$,

$$dp=d.\frac{d\zeta'}{dx'}=\frac{d^2\zeta'}{dx'^2}dx'+\frac{d^2\zeta'}{dx'dy'}dy'=r\,dx'+s\,dy',$$

$$dq=d.\frac{d\zeta'}{dy'}=\frac{d^2\zeta'}{dx'dy'}dx'+\frac{d^2\zeta'}{dy'^2}dy'=s\,dx'+t\,dy',$$

on trouvera

$-d'-p^2dx'-pq\,dy'+(\zeta-\zeta')(r\,dx'+s\,dy')=0$.....(c)

$-dy'-q^2dy'-pq\,dx'+(\zeta-\zeta')(s\,dx'+t\,dy')=0$.....(d).

Les équations (a) et (b) donnant les valeurs de $x-x'$ et de $y-y'$, lorsque celle de $\zeta-\zeta'$ sera connue, il faut pour que la question proposée ait une solution, que les deux équations (c) et (d) s'accordent dans la détermination de cette dernière quantité. Le résultat qu'on obtiendra en éliminant $\zeta-\zeta'$, ne renfermera plus que la seule quantité $\frac{dy'}{dx'}$, qui ne soit pas donnée par la nature

de la question, et dont il particularisera la valeur : cette quantité fait connoître la direction de la droite $M'N'$ qui joint les projections des deux points consécutifs que l'on considère, ou, ce qui est la même chose, la limite de la quantité m, (n°. précédent) ; il suit donc de là, que pour trouver deux normales qui se coupent, ou qui soient dans un même plan, on ne peut passer indistinctement d'un point à un autre sur la surface proposée.

Si on chasse d'abord $\frac{dy'}{dx'}$ des équations (c) et (d), on aura pour déterminer $\zeta - \zeta'$ une équation qui en changeant ζ en γ, rentrera dans l'équation (7) (n°. 327); et lorsqu'on éliminera $\zeta - \zeta'$ des mêmes équations, le résultat qui fera connoître $\frac{dy'}{dx'}$ sera le même que l'équation (8) qui contient les valeurs de m : le plus grand, le plus petit cercle osculateur, auront donc leur centre à l'intersection de deux normales consécutives, caractère qui les distingue d'une manière bien remarquable de tous les autres cercles osculateurs, et qui fournit, comme on voit, un moyen facile pour les déterminer.

Je ferai remarquer qu'on peut obtenir sous une forme très-simple l'équation d'où dépend $\frac{dy'}{dx'}$, en mettant dans les équations (c) et (d) dz' pour $pdx'+qdy'$, dp pour $rdx'+sdy'$, dq pour $sdx'+tdy'$; car après avoir éliminé $\zeta - \zeta'$, on trouvera alors

$$dp\,(dy'+qdz') - dq\,(dx'+pdz') = 0 \ldots (e)$$

La valeur de $\frac{dy'}{dx'}$, étant donnée en fonction de x', y' et z', change pour chaque point de la surface proposée ; la position du point M détermine la direction dans laquelle on doit passer au second point N ; de la position de ce dernier résulte une nouvelle direction sur laquelle se trouve le troisième, et ainsi de proche en proche. Chaque point de la surface proposée tient donc ainsi à une suite de points liés ensemble par la condition que leurs normales se coupent deux à deux consécutivement. Ces points

forment une courbe sur la surface proposée, et leurs projections en produisent, sur le plan des x et y, une autre dont $M'N'$ représente un petit côté, et dont par conséquent la tangente a pour équation $y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$.

Ce que nous venons de dire pour une valeur de $\frac{dy'}{dx'}$ doit être appliqué en particulier à chacune des deux valeurs que cette quantité doit avoir; on voit par là que le point M se trouve sur deux courbes qui se coupent à angle droit, et dont l'une répond aux plus grands rayons de courbure et l'autre aux plus petits. Ces courbes sont appellées *lignes de courbure*.

Dans la sphère, dont toutes les normales passent par le centre, les lignes de courbures ne sont autre chose que les grands cercles, et il y en a par conséquent un nombre infini pour chaque point. Cette circonstance se reconnoîtroit par la théorie précédente; car en mettant au lieu de p, q, r, s et t, leur valeur dans l'équation (e), elle deviendroit identique indépendamment d'aucun rapport entre dx' et dy'.

Lorsqu'on aura déterminé les coordonnées α, β, γ, des centres du plus grand ou du plus petit cercle osculateur (n°. 325), ou, ce qui est la même chose, les coordonnées x, y et z qui répondent à l'intersection de deux normales consécutives, si on élimine x', y' et z', entre les résultats obtenus et l'équation de la surface proposée, on aura celle de la surface courbe qui est le lieu de tous les centres de plus grande et de moindre courbure. Cette dernière surface est en général une surface unique, dont une nappe contient les centres de la plus grande courbure, et l'autre ceux de la plus petite; cependant quand l'équation (7), qui donne la valeur de $z'-\gamma$, se décompose en deux facteurs rationels, il en résulte deux surfaces distinctes.

332. Les conditions du contact de deux surfaces peuvent se déduire de la coïncidence de leurs points consécutifs. En représentant par x', y', z', les coordonnées de la surface proposée, et par x, y, z celles de la surface touchante, il faut d'abord pour que la seconde

passe

passe par le même point que la première, qu'en faisant $x=x'$, $y=y'$, il vienne $z=z'$: ensuite, pour qu'il y ait un contact du premier ordre sur toutes les sections qu'on peut faire par le même point dans l'une et dans l'autre surface, il faut que l'équation $dz=dz'$, ou $Pdx'+Qdy'=pdx'+qdy'$, soit satisfaite indépendamment de dx' et dy', ce qui exige que $P-p=0$, $Q-q=0$, ainsi qu'on l'a déjà vu (n°. 321). En comparant les différentielles secondes, pour obtenir un contact du second ordre, on fera $d^2z=d^2z'$, ou

$$Rdx'^2+2Sdx'dy'+Tdy'^2=rdx'^2+2sdx'dy'+tdy'^2;$$

lorsque cette équation se vérifiera indépendamment de dx' et de dy', c'est-à-dire, lorsqu'on aura séparément $R-r=0$, $S-s=0$, $T-t=0$, le contact sera du second ordre sur toutes les lignes, suivant lesquelles des plans menés par le point que l'on considère couperont les deux surfaces proposées. Ces résultats sont parfaitement d'accord avec ceux du n°. 321 : pour peu qu'on réfléchisse sur l'esprit des méthodes qui nous y ont conduits dans l'un et l'autre cas, on verra qu'elles ne diffèrent point quant au fond, et que la seconde a sur la première l'avantage de pouvoir s'énoncer avec plus de briéveté. On pourroit pousser ces considérations aussi loin qu'on voudroit sans rencontrer aucune difficulté; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

333. Puisqu'un contact complet du second ordre emporte avec lui six conditions à remplir, il s'ensuit que l'équation de la surface touchante doit renfermer un pareil nombre de constantes arbitraires, et que par conséquent l'équation la plus simple qu'on puisse prendre pour cette surface, ne peut être que de la forme

$$z=A+2Bx+2Cy+Dx^2+2Exy+Fy^2.$$

Si les abscisses x et y étoient situées dans le plan tangent et que l'axe des z coïncidât avec la normale, comme on auroit alors

$$p=P=0, \qquad q=Q=0,$$

l'équation ci-dessus se réduiroit à $z=Dx^2+2Exy+Fy^2$; prenant pour plans des x et z et des y et z ceux qui contiennent le plus grand et le plus petit cercle osculateur, on auroit $s=S=0$; d'où $F=0$, et il viendroit pour la surface touchante, cette équation

très-simple $z = Dx^2 + Fy^2$, qui appartient aux surfaces du second ordre considérées dans le n°. 315.

Il est évident que deux surfaces qui ont un contact complet du second ordre ont à ce point la même courbure dans tous les sens. On peut prouver aussi que lorsque deux surfaces qui passent par un même point, ont leurs plus grands et leurs plus petits rayons de courbure respectivement égaux, elles ont entr'elles un contact complet du second ordre; en effet, en les rapportant l'une et l'autre au plan tangent qui leur est commun et aux plans de leur plus grand et de leur plus petit cercle osculateur, leurs équations différentielles premières s'anéantissent et leurs équations différentielles secondes deviendront $d^2z' = r dx'^2 + t dy'^2$, $d^2z = R dx^2 + T dy^2$.
Les rayons de courbure a' et a'' (n°. 329), étant les mêmes pour l'une et pour l'autre, on en tirera $r = R$, et $t = T$.

Il suit de là que la surface engendrée par la révolution du plus grand cercle osculateur MN autour de la droite oH menée par le centre o du plus petit cercle osculateur, perpendiculairement à son plan, a un contact complet du second ordre avec la surface proposée, et qu'il en seroit de même de celle que produiroit la révolution du plus petit cercle osculateur Mn autour d'une droite menée par le centre O du plus grand et perpendiculairement à son plan.

334. Pour suivre à l'égard des surfaces courbes la même marche que par rapport aux lignes courbes, occupons-nous maintenant de la recherche de l'équation d'une surface formée par les intersections successives d'une infinité d'autres d'une nature donnée, c'est-à-dire, déduites d'une même équation générale, renfermant une constante arbitraire m à laquelle on donne toutes les valeurs possibles. Il est évident que deux de ces surfaces résultantes de valeurs de m très-peu différentes, seront nécessairement très-voisines l'une de l'autre et pourront se couper suivant une ligne; en imaginant une suite de surfaces qui se succèdent ainsi de proche en proche d'après une certaine loi, leurs intersections successives en se resserrant de plus en plus détermineront un espace dont la surface que nous cherchons sera la *limite*: c'est sous ce nom que nous la désignerons désormais.

Prenons pour les surfaces génératrices une suite de plans, passant tous par le même point; leurs équations ne pourront être que de la forme $A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma)=0$, et la position particulière de chacun d'eux ne dépendra que des rapports $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ que, pour abréger, nous représenterons par m et n. Cela posé, concevons que ces deux quantités soïent liées entr'elles, en sorte qu'on ait $m=\mathrm{f}(n)$, la caractéristique f désignant une fonction donnée; l'équation précédente deviendra

$$\mathrm{f}(n)(x-\alpha)+n(y-\beta)+(z-\gamma)=0\ldots(1);$$

et pour passer d'un plan à celui qui le suit immédiatement, il faudra faire varier la quantité n seule, puisque les coordonnées x, y et z, étant affectées aux points de la droite suivant laquelle se couperont les deux plans proposés, sont communes à l'un et à l'autre: cette considération donnera

$$\mathrm{f}'(n)(x-\alpha)+(y-\beta)=0\ldots(2),$$

en faisant $d\,\mathrm{f}(n)=\mathrm{f}'(n)\,dn$, et divisant par dn. Il est d'abord évident que quand la forme de la fonction $\mathrm{f}(n)$ sera connue, on éliminera n entre cette équation et la précédente, et il en résultera celle de la surface cherchée: mais je ferai remarquer de plus que l'élimination peut encore avoir lieu en laissant la fonction f absolument indéterminée. En effet, puisqu'on peut tirer de l'équation (2) $\mathrm{f}'(n)=-\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, on en doit conclure que la quantité n est une fonction de la quantité $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, fonction qu'on désignera, dans son état indéterminé, par la caractéristique $\downarrow$, et on aura $n=\downarrow\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)$; Substituant cette expression dans l'équation (1), il viendra

$$(x-\alpha)\,\mathrm{f}\left[\downarrow\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)\right]+(y-\beta)\downarrow\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)+z-\gamma=0.$$

En donnant à ce résultat la forme

$$-\mathrm{f}\left[\downarrow\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)\right]-\frac{y-\beta}{x-\alpha}\downarrow\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)=\frac{z-\gamma}{x-\alpha};$$

il est facile de voir que le premier membre est une fonction

de $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$; on peut donc le représenter par $\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)$, et il viendra

$$\frac{\zeta-\gamma}{x-\alpha}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right).$$

Telle est la forme de l'équation générale des surfaces qui sont les limites d'une infinité de plans passant tous par le point dont les coordonnées sont α, β et γ, et se succédant d'ailleurs suivant une loi quelconque. Cette génération comprend toutes les surfaces coniques; car les intersections des plans consécutifs seront des droites menées par le point commun à ces plans.

Le procédé que j'ai indiqué dans le n°. 314, pour reconnoître une surface conique, conduit au même résultat; car pour transporter, comme l'exige ce procédé, l'origine au point dont les coordonnées sont α, β, γ, il faut substituer $x'+\alpha$, $y'+\beta$, $\zeta'+\gamma$, au lieu de x, y, ζ, et le résultat devenant homogène par rapport à x', y' et ζ', si on y fait $\zeta'=mx'$ et $y'=nx'$, il se réduira à une fonction de m et de n, et pourra être représenté par $f(m,n)=0$; mais à cause de $x'=x-\alpha$, $y'=y-\beta$, $\zeta'=\zeta-\gamma$, on aura

$$m=\frac{\zeta-\gamma}{x-\alpha}, n=\frac{y-\beta}{x-\alpha} \text{ et par conséquent } f\left(\frac{\zeta-\gamma}{x-\alpha}, \frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)=0.$$

Les deux quantités $\frac{\zeta-\gamma}{x-\alpha}$ et $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, étant donc liées par une même équation, on en peut conclure comme ci-dessus, que l'une est une fonction de l'autre.

Il ne paroît pas d'abord qu'on puisse tirer parti de l'équation

$$\frac{\zeta-\gamma}{x-\alpha}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)$$

pour reconnoître si une équation proposée appartient ou non à une surface conique; mais en éliminant la fonction indéterminée φ par le procédé indiqué n°. 83, et faisant toujours pour abréger $d\zeta=p\,dx+q\,dy$, on trouvera $\zeta-\gamma=p(x-\alpha)+q(y-\beta)$. Ce résultat exprime la relation qui doit exister entre l'ordonnée ζ, ses coefficiens différentiels et les abscisses x et y, pour toutes les surfaces coniques; et il servira à reconnoître l'équation d'une sur-

face de cette *famille*, comme l'équation obtenue dans le n°. cité, sert à reconnoître les fonctions de $ax+by$.

La fonction inconnue ou arbitraire φ se détermine par les conditions qui particularisent la surface proposée ; l'une des plus simples consiste à supposer que cette surface doit passer par une courbe donnée. Soient $F(x,y,z)=0$, et $f(x,y,z)=0$, les équations de deux surfaces qui contiennent la courbe dont il s'agit ; il faudra que dans chaque point de cette courbe, les trois équations suivantes :

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right),\ F(x,y,z)=0,\ f(x,y,z)=0,$$

ayent lieu à la fois.

Faisons $\frac{y-\beta}{x-\alpha}=t$, il viendra $\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\varphi(t)$; concevons ensuite qu'on ait éliminé x, y et z, entre ces deux dernières équations et les équations $F(x,y,z)=0$, $f(x,y,z)=0$, il restera nécessairement une équation entre t et $\varphi(t)$, que nous représenterons par $f[t,\varphi(t)]=0$; remettant pour t et $\varphi(t)$ les quantités qu'ils expriment, nous aurons l'équation de la surface conique cherchée.

On peut encore se proposer de déterminer le cône circonscrit à une surface donnée. Dans ce cas, il faut chercher d'abord les équations de la courbe suivant laquelle le cône doit toucher cette surface ; et il est facile de voir que cela revient à trouver le lieu des points où elle est touchée par une suite de plans menés par le sommet du cône, question que nous avons déjà résolue (n°. 322) pour les surfaces comprises dans l'équation

$$ax^2+by^2+cz^2=l^2,$$

par un procédé qui s'étend à une surface quelconque. Il ne s'agit en effet que de combiner avec l'équation de la surface donnée, celle du plan tangent mise sous la forme $z-\gamma=p(x-\alpha)+q(y-\ell)$; ayant alors les équations de deux surfaces qui contiennent la courbe par laquelle doit passer le cône cherché, on se débarrassera de la fonction arbitraire comme précédemment. Dans l'exemple cité, la courbe qui est le lieu de tous les contacts, est représentée par les équations

$$ax^2+by^2+cz^2=l^2,\qquad a\alpha x+b\beta y+c\gamma z=l^2.$$

Combinant cette dernière avec $\frac{\zeta-\gamma}{x-\alpha}=\iota$ et $\frac{y-\beta}{x-\alpha}=\varphi(\iota)$, on réduira la première à ne contenir que ι et $\varphi(\iota)$, et si on remet ensuite pour ces quantités, leur valeur, il en résultera l'équation du cône demandé.

Il est à propos de remarquer qu'on a dans ce qui précède, les moyens de résoudre analytiquement les Problêmes principaux de la perspective et de la théorie des ombres (*E. page* 109 et 114).

335. Les surfaces cylindriques peuvent être regardées comme produites par les intersections successives d'une suite de plans menés suivant une certaine loi, perpendiculairement à un plan donné. Soit $ax+by+c\zeta=0$, l'équation de ce dernier plan, et $Ax+By+C\zeta+D=0$, celle de l'un quelconque des premiers, on aura d'abord

$Aa+Bb+Cc=0$ (n°. 304) et faisant $\frac{A}{C}=m$, $\frac{B}{C}=n$, il viendra $n=-\frac{c+am}{b}$; mettant ensuite l'équation $Ax+By+C\zeta+D=0$, sous la forme $\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}+y+\zeta\frac{D}{C}=0$, il en résultera

$$m(bx-ay)+b\zeta-cy+\frac{bD}{C}=0:$$

la position du plan représenté par cette équation, ne dépend plus que des deux quantités m et $\frac{bD}{C}$.

En supposant que la seconde soit une fonction de la première, nous aurons $m(bx-ay)+b\zeta-cy+f(m)=0$.....(1)
Passant ensuite au plan consécutif, en différentiant par rapport à m seule, nous obtiendrons $bx-ay+f'(m)=0$.....(2).
quand la forme de la fonction f sera donnée, on éliminera m entre ces deux équations; mais en raisonnant comme dans le n°. précédent, on trouvera $m=\downarrow(bx-ay)$, d'où

$$(bx-ay)\downarrow(bx-ay)+f[\downarrow(bx-ay)]+b\zeta-cy=0;$$

et on conclura de là que l'équation générale des surfaces cylindriques, sera de la forme $b\zeta-cy=\varphi(bx-ay)$. Eliminant la

fonction arbitraire φ, il viendra $ap+bq-c=0$. On détermineroit la fonction arbitraire, comme pour les surfaces coniques.

336. Concevons une suite de sphères ayant leur centre sur une même ligne droite, chacune d'elles coupera celle qui lui est consécutive dans un cercle, dont le plan sera perpendiculaire à la ligne qui joint tous les centres; l'assemblage des intersections de ces sphères prises deux à deux consécutivement, formera donc une surface qui étant coupée par un plan perpendiculaire à la droite proposée, donnera toujours un cercle, et sera par conséquent produite par la révolution d'une certaine courbe autour de cette droite.

Pour exprimer analytiquement cette génération, nous représenterons par $x'=a\zeta'+\alpha$, $y'=b\zeta'+\beta$, les équations de l'axe de rotation; celle des sphères dont le centre se trouve sur cet axe, sera $(x-x')^2+(y-y')^2+(\zeta-\zeta')^2=n^2$, et pour la particulariser, il suffira de connoître une des coordonnées de son centre. Faisons $\zeta'=m$, il viendra en vertu des équations de l'axe de révolution $x'=am+\alpha$, $y'=bm+\beta$; substituant ces valeurs dans l'équation de la sphère, il sera facile de lui donner la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\zeta^2+2m[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+\zeta]\left.\begin{array}{l}\\+m^2+b^2m^2-n^2\end{array}\right\}=0.$$

Posant ensuite que la grandeur du rayon de chaque sphère dépende de la position de son centre, on pourra supposer $a^2m^2+b^2m^2-n^2=f(m)$, moyennant quoi, l'équation ci-dessus se changera en

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\zeta^2+2m[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+\zeta]+f(m)=0 \quad (1).$$

En passant à la sphère consécutive, on aura

$$2[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+\zeta]+f'(m)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Si la fonction $f(m)$ n'est pas déterminée, on tirera de cette dernière équation, $m=\downarrow[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+\zeta]$, et en substituant cette expression dans l'équation (1), il viendra

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\zeta^2=\varphi[(x-\alpha)a+(y-\beta)b+\zeta].$$

Si l'axe de rotation passoit par l'origine des coordonnées, on auroit $\alpha=0$, $\beta=0$, et l'équation ci-dessus se réduiroit à

$$x^2+y^2+\zeta^2=\varphi(ax+by+\zeta);$$

enfin, si cet axe coïncidoit avec celui des ζ, on auroit de plus

$a=0$, $b=0$, et il viendroit $x^2+y^2+z^2=\varphi(z)$, ou $z=\pi(x^2+y^2)$.

En éliminant la fonction arbitraire de l'équation générale, on obtiendra $(x-\alpha)(b+q)-(y-\beta)(a+p)+z(bp-aq)=0$, équation de condition, au moyen de laquelle on reconnoîtra qu'une surface proposée, est de révolution ou non, et quelle est, dans le premier cas, la position de son axe; menant ensuite un plan quelconque par cette droite, on aura la courbe génératrice.

Dans les trois *familles* de surfaces dont nous venons de déterminer les équations générales, l'élimination de la quantité m a pu se faire, il n'en sera pas de même dans la question suivante qui renferme les particularités les plus importantes de la Théorie que nous exposons maintenant, et dont les résultats jetteront le plus grand jour sur une des principales branches du Calcul intégral.

337. Soit proposé de trouver l'équation générale des surfaces courbes formées par les intersections successives d'une suite de sphères décrites du même rayon, et dont tous les centres sont situés dans le plan des x et y, sur une courbe donnée. Ces surfaces sont un cas particulier des surfaces annullaires (*E* n°. 98) que nous considérerons plus bas dans toute leur étendue. En nommant x' et y' les coordonnées de la courbe donnée et a le rayon de toutes les sphères, l'équation générale de ces surfaces sera $(x-x')^2+(y-y')^2+z^2=a^2$. Si on considère en particulier celle pour laquelle on a $x'=m$, $y'=n$, et qu'on représente par $n=f(m)$, la relation qui doit exister entre m et n, en vertu de l'équation de la courbe des centres, on aura pour une sphère et sa consécutive

$$[x-m]^2+[y-\varphi(m)]^2+z^2=a^2 \ldots\ldots(1)$$
$$x-m+[y-\varphi(m)]\varphi'(m)=0 \ldots\ldots(2)$$

L'équation (2) contenant la quantité m engagée dans diverses fonctions et combinée avec les variables x et y, ne peut plus donner immédiatement cette quantité comme dans les exemples précédens. Tout ce qu'on peut obtenir, tant que la forme de la fonction φ sera indéterminée, c'est une équation entre les variables x, y et z et les coefficiens différentiels p et q. Pour y parvenir, on différentiera la première équation par rapport à x et par rapport à y successivement, et en regardant m comme constante; car il est aisé de voir qu'en vertu

vertu de l'équation (2), tous les termes résultans de la variation de m, soit par rapport à x, soit par rapport à y, seront nuls. D'après cette observation, on trouvera

$$x - m + \zeta p = 0, \qquad y - \varphi(m) + \zeta q = 0.$$

Mettant dans l'équation (1) pour $x - m$ et $y - \varphi(m)$, les valeurs que donnent ces dernières équations, il viendra

$$(1 + p^2 + q^2)\zeta^2 = a^2;$$

ce qui montre que dans toutes les surfaces cherchées la longueur de la normale prise à l'égard du plan des x et y est constante (n°. 323); résultat qu'on pouvoit prévoir d'ailleurs d'après leur génération. En effet, on verra bientôt, avec un peu d'attention, que l'une quelconque de ces surfaces peut être envisagée comme composée d'une infinité de zônes infiniment étroites, prises sur chacune des sphères qui concourent à sa formation; zônes qui sont déterminées sur cette sphère par ses intersections avec celle qui la précède et celle qui la suit; chacune de ces zônes jouissant de la propriété de la sphère, leur limite, ou la surface cherchée, en jouira par conséquent aussi.

Le problême actuel est parfaitement analogue à celui où il s'agit de déterminer une courbe qui touche tous les cercles décrits d'un même rayon sur les différens points d'une courbe donnée (n°. 290). Les zônes que nous venons de faire remarquer ici sont remplacées dans l'article cité par les petits arcs compris sur chaque cercle entre ses intersections avec celui qui le précède et avec celui qui le suit; la courbe cherchée ne touche le cercle que dans un point; mais la surface a sur chaque sphère un contact dans toute la circonférence d'un cercle. En effet, tant que la quantité m sera regardée comme constante, les coefficiens différentiels p et q auront la même valeur pour la sphère représentée par l'équation (1) que pour la surface cherchée; mais l'équation (2), qui exprime cette condition, peut être considérée comme celle d'un plan élevé par le centre de la sphère perpendiculairement à celui des x et y; et sa combinaison avec l'équation (1) donnera le grand cercle dont la circonférence contient tous les points de contact (*).

(*) Le plan de ce cercle passe par la normale à la courbe donnée et il est représenté en $G'PH'$, dans la figure 53 des *Essais de Géométrie*.

Les exemples des articles précédens sont susceptibles des mêmes remarques, et la surface limite touchera chacune des surfaces génératrices suivant la ligne exprimée par l'ensemble des équations que nous avons désignées par (1) et (2). Le cône et le cylindre toucheront leurs plans générateurs dans toute l'étendue d'une ligne droite; la surface de révolution touchera ses sphères génératrices suivant un cercle.

338. Soit en général $V=0$, une équation entre x, y, z et une constante arbitraire m; en passant de l'une des surfaces que représente cette équation, à celle qui lui est consécutive, on aura pour les points communs à toutes deux, $\frac{dV}{dm}=0$. Le résultat de l'élimination de m entre cette équation et la précédente, appartiendra à la surface formée par les intersections successives des surfaces comprises dans l'équation $V=0$. Lorsqu'on donnera à m une valeur particulière, le système des deux équations $V=0$ et $\frac{dV}{dm}=0$, exprimera la ligne suivant laquelle la surface génératrice, qui répond à cette valeur, est touchée par la surface limite.

Cette dernière proposition peut se prouver analytiquement, sans recourir à la considération des intersections successives des surfaces génératrices; car si on différentie l'équation $V=0$, par rapport à x et à y, en n'y regardant plus m comme une constante, mais comme une fonction de ces variables, on trouvera

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dm}\,\frac{dm}{dx}+\frac{dV}{dz}p=0$$

$$\frac{dV}{dy}+\frac{dV}{dm}\,\frac{dm}{dy}+\frac{dV}{dz}q=0;$$

équations qui, lorsqu'on aura $\frac{dV}{dm}=0$, se réduiront à

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dz}p=0, \qquad \frac{dV}{dy}+\frac{dV}{dz}q=0;$$

il suit de là que ces dernières seront satisfaites par l'équation résultante de l'élimination de m entre $V=0$, et $\frac{dV}{dm}=0$; pour

toutes les valeurs de x et de y qui auront entr'elles la relation établie par l'équation $\frac{dV}{dm}=0$; la surface exprimée par la première, touchera donc celles que représente $V=0$, sur toute la ligne donnée par le systême $V=0$ et $\frac{dV}{dm}=0$ (n°. 332).

339. Les courbes suivant lesquelles se coupent deux génératrices consécutives, ont été nommées par Monge, *les caractéristiques* de la surface limite, parce qu'en effet, elles impriment à la surface un caractère indépendant des conditions particulières auxquelles elle peut être assujettie : quelle que soit la courbe des centres dans l'exemple du n°. 337, les caractéristiques n'en seront pas moins des cercles.

Chacune des surfaces génératrices contient deux caractéristiques qui pourront en général se couper : leur point de rencontre se trouvera en même tems sur trois surfaces génératrices consécutives, ensorte que ses coordonnées demeureront constantes, quoique la quantité m ait varié deux fois; on aura donc en même tems pour ce point $V=0$, $\frac{dV}{dm}=0$, $\frac{d^2V}{dm^2}=0$. Lorsqu'on donnera à m une valeur particulière, ces équations détermineront les trois coordonnées du point de rencontre des deux caractéristiques situées sur la surface génératrice qui répond à cette valeur; mais si on élimine m, il ne restera que deux équations, qui appartiendront à la courbe formée par l'ensemble des points de rencontre des caractéristiques prises deux à deux consécutivement. Cette courbe ayant un de ses petits côtés sur chacune des caractéristiques, les touchera toutes, et sera à leur égard, ce qu'est la surface limite par rapport aux surfaces génératrices.

Dans l'exemple du n°. 337, on aura pour la courbe dont on vient de parler, les trois équations suivantes

$$\begin{aligned} [x-m]^2+[y-\varphi(m)]^2+z^2&=a^2,\\ x-m\ \ +[y-\varphi(m)]\varphi'(m)&=0,\\ -1\ \ -\varphi'(m)^2+[y-\varphi(m)]\varphi''(m)&=0; \end{aligned}$$

en faisant $\frac{d\varphi'(m)}{dm}=\varphi''(m)$.

340. Chacun des cas particuliers des surfaces limites ne touche que la suite des surfaces génératrices qui correspondent à une même forme de la fonction φ dans l'équation $V=0$; les diverses formes que cette fonction peut prendre, donnent lieu à une suite de surfaces limites qui peuvent être touchées quelquefois par une surface unique, laquelle touche par conséquent toutes les surfaces particulières qu'on déduiroit de l'équation $V=0$, en en donnant à m et à la fonction φ toutes les valeurs et toutes les formes possibles. C'est la relation établie entre m et $\varphi(m)$ qui particularise la loi d'après laquelle les surfaces génératrices se succèdent les unes aux autres, et puisque pour passer de l'une d'elles à sa consécutive, on a fait varier m, il est évident que pour passer de l'une des surfaces limites à sa consécutive, il faudra faire varier $\varphi(m)$ indépendamment de m; car c'est là le seul moyen d'exprimer que la fonction φ a changé. On aura donc, en représentant par n la quantité $\varphi(m)$, $\frac{dV}{dn}=0$, pour tous les points de l'intersection de deux surfaces limites consécutives; il faudra joindre cette équation avec $V=0$ et $\frac{dV}{dm}=0$, et en observant que cette dernière dans laquelle on a fait varier $\varphi(m)$, en même tems que m, peut être mise sous la forme

$$\frac{dV}{dm}+\frac{dV}{dn}\,\frac{dn}{dm}=0,$$

on voit qu'il en résultera les trois équations

$$V=0,\quad \frac{dV}{dm}=0,\quad \frac{dV}{dn}=0,$$

qui serviront à éliminer m et n.

Les considérations purement analytiques auroient conduit au même résultat: car, en différentiant l'équation $V=0$ par rapport à m et à n, on trouve

$$\frac{dV}{dn}+\frac{dV}{dm}\,\frac{dm}{dx}+\frac{dV}{dn}\,\frac{dn}{dx}+\frac{dV}{d\zeta}p=0,$$
$$\frac{dV}{dy}+\frac{dV}{dm}\,\frac{dm}{dy}+\frac{dV}{dn}\,\frac{dn}{dy}+\frac{dV}{d\zeta}p=0;$$

faisant $\frac{dV}{dm}=0$, $\frac{dV}{dn}=0$, et raisonnant comme dans le n°. 338, on s'assurera que la surface représentée par l'équation résultante de l'élimination de m et de n, entre les équations $V=0$, $\frac{dV}{dm}=0$, $\frac{dV}{dn}=0$, doit toucher chacune de celles que donne l'équation $V=0$, quand m et n sont indépendantes.

En faisant $\varphi(m)=n$ dans l'exemple du n°. 337, on trouve $\frac{dV}{dm}=x-m$, $\frac{dV}{dn}=y-n$ et par conséquent $m=x$, $n=y$; substituant dans l'équation $V=0$, ou $(x-m)^2+(y-n)^2+z^2=a^2$, il vient $z=\pm a$.

Cette équation donne deux plans parallèles à celui des x et y, et qui en sont éloignés de la quantité a, l'un au-dessus, l'autre au-dessous. Cette solution pouvoit se prévoir facilement, car il est visible que toutes les sphères qui ont leur centre sur le plan des x et y, et qui sont du même rayon, seront touchées par deux plans parallèles à celui-là.

341. Il reste à déterminer la fonction φ, pour que la surface limite satisfasse à quelque condition particulière: nous supposerons d'abord que toutes les surfaces génératrices doivent toucher une même surface donnée, dont l'équation soit représentée par $F(x,y,z)=0$, et dans laquelle les coefficiens différentiels de l'ordonnée z soient désignés par P et Q. Au point de contact de cette dernière, avec l'une quelconque des surfaces génératrices, les équations $V=0$, $F(x,y,z)=0$, $P=p$, $Q=q$, auront lieu en même tems; on en pourra donc chasser les coordonnées x, y et z, et il restera une équation entre m et $\varphi(m)$, qui fera connoître la composition de la fonction φ.

Nous considérerons encore le cas où la surface engendrée seroit assujettie à passer par une courbe donnée. Soient $F(x,y,z)=0$, $F_{,}(x,y,z)=0$, les symboles des équations de cette courbe; il est évident qu'elle sera touchée à la fois par les plans tangens de chacune des surfaces que représentent les équations ci-dessus, et que par conséquent l'intersection de ces plans sera sa tangente (*E* n°.109):

mais si dans toute son étendue elle touche la surface limite, elle touchera nécessairement chacune des génératrices, et par conséquent ses tangentes seront aussi dans les plans tangens de ces dernières surfaces.

Pour exprimer analytiquement ces conditions, nommons P et Q; les coefficiens différentiels de la première surface, $P_{,}$ et $Q_{,}$, ceux de la seconde; les équations de leurs plans tangens seront

$$z-z'=P(x-x')+Q(y-y')$$
$$z-z'=P_{,}(x-x')+Q_{,}(y-y')$$

et les projections de la droite qui en est l'intersection, auront pour équations

$$x-x'=\frac{(Q_{,}-Q)(z-z')}{PQ_{,}-P_{,}Q}, \qquad y-y'=\frac{(P-P_{,})(z-z')}{PQ_{,}-P_{,}Q}.$$

Pour que cette droite se trouve dans le plan tangent de la surface génératrice, plan dont l'équation est $z-z'=p(x-x')+q(y-y')$, il faudra, qu'en mettant au lieu de $x-x'$ et de $y-y'$ les valeurs précédentes, le résultat soit identique; on aura donc

$$PQ_{,}-P_{,}Q=P-P_{,}+Q_{,}-Q:$$

cette équation réunie avec les suivantes

$$V=0, \qquad F(x',y',z')=0, \qquad F_{,}(x',y',z')=0$$

donnera par l'élimination des coordonnées x',y',z' la relation qui doit avoir lieu entre m et $\varphi(m)$.

342. Nous allons nous occuper maintenant des surfaces développables. Ces surfaces dont la nature et les propriétés ont été exposées par des considérations géométriques dans le n°. 96 des *Essais de Géométrie*, peuvent être regardées comme engendrées par les intersections consécutives d'une suite de plans, menés d'après une loi quelconque. Comme l'équation d'un plan renferme trois constantes arbitraires, il faut que cette loi soit telle que deux de ces constantes soient déterminées en fonction de la troisième, pour qu'après un plan quelconque on n'en puisse trouver qu'un nombre déterminé de consécutifs: prenant $z=Ax+By+m$, pour l'équation des plans proposés, et faisant $A=\varphi(m)$, $B=\downarrow(m)$, les caractéristiques φ et $\downarrow$ désignant deux fonctions quelconques, l'équation gé-

nérale des surfaces développables sera le résultat de l'élimination de m entre les deux suivantes :

$$z - m = x\varphi(m) + y\psi(m) \ldots . (1)$$
$$-1 = x\varphi'(m) + y\psi'(m) \ldots . (2).$$

On peut faire disparoître les fonctions arbitraires φ et ψ par la différentiation ; car en différentiant d'abord l'équation (1), par rapport à x et par rapport à y successivement, et en regardant m comme constante, en vertu de l'équation (2), on trouvera

$$p = \varphi(m), \qquad q = \psi(m) ;$$

et puisque ces résultats nous font voir que les coefficiens différentiels p et q sont des fonctions de la même quantité, nous devons en conclure que p est une fonction de q, *et vice versâ* : nous poserons donc $p = \pi(q)$; différentiant cette équation par rapport à x et par rapport à y, en faisant comme dans le n°. 331

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

on trouvera $r = s\pi'(q)$, $s = t\pi'(q)$ et éliminant $\pi'(q)$, il viendra

$$rt - s^2 = 0.$$

C'est cette équation qui exprime le caractère des surfaces développables indépendamment de la forme des fonctions φ et ψ. Si nous faisons $rt - s^2$ ou $e = 0$, dans les expressions du rayon de courbure données n°. 327, l'une d'elles devient infinie ; les surfaces développables ont donc une de leurs courbures nulle. Le rayon de l'autre courbure se détermine en prenant la valeur de $z - z'$ dans l'équation du premier degré à laquelle se réduit l'équation (7), lorsque $rt - s^2 = 0$.

Les surfaces développables sont touchées par leur plan tangent dans toute l'étendue de la ligne droite, qui est leur caractéristique et que représente l'ensemble des équations (1) et (2). Le système des trois équations

$$z - m = x\varphi(m) + y\psi(m)$$
$$-1 = x\varphi'(m) + y\psi'(m)$$
$$0 = x\varphi''(m) + y\psi''(m)$$

exprimera (n°. 339) la courbe produite par les intersections successives des caractéristiques, ou l'*arrête* de rebroussement (*E* n°. 97). Nous donnerons les équations de la surface développable considérée comme l'assemblage des tangentes de cette courbe, lorsque nous

parlerons des courbes à double courbure; nous allons, pour l moment, nous occuper de la détermination des fonctions arbitraires que contiennent les équations (1) et (2).

L'une des conditions les plus simples consiste à supposer que la surface développable cherchée doive toucher en même tems deux surfaces données. Pour traiter ce cas, posons que $F(x, y, z)=0$ et $F_{,}(x,y,z)=0$ soient les symboles des équations de ces surfaces; dans les points qui leur sont communs avec la surface développable cherchée, les surfaces données doivent avoir toutes deux pour plan tangent l'un des plans générateurs; désignons par x', y', z', les coordonnées du point où ce plan touche la première surface donnée et par x'', y'' et z'' celles du point où il touche la seconde; posons de plus que l'équation $F(x', y', z')=0$, donne $dz'=P\,dx'+Q\,dy'$, et que de l'équation $F_{,}(x'', y'', z'')$, on tire $dz''=P_{,}dx''+Q_{,}dy''$; puisque par celle du plan générateur on a $dz=dx\,\varphi(m)+dy\,\downarrow(m)$, il viendra pour son contact avec la première surface donnée

$$z'-m=x'\varphi(m)+y'\downarrow(m), \qquad \varphi(m)=P, \qquad \downarrow(m)=q$$

et pour son contact avec la seconde

$$z''-m=x''\varphi(m)+y''\downarrow(m), \quad \varphi(m)=P_{,}, \quad \downarrow(m)=Q_{,}.$$

Joignant les trois premières équations avec $F(x', y', z')=0$, on en chassera x', y' et z', et on aura une relation entre m, $\varphi(m)$ et $\downarrow(m)$; les trois dernières combinées avec $F(x'', y'', z'')=0$, en donneront pareillement une après l'élimination de x'', y'' et z'', et on pourra par conséquent connoître la forme des fonctions φ et $\downarrow$ (*).

Si on se proposoit de faire passer la surface développable cherchée par deux courbes données,

$$F(x', y', z')=0\ldots \text{ et } f(x', y', z')=0\ldots\ldots (1)$$

étant les équations de la première

$$F_{,}(x'', y'', z'')=0\ldots \qquad f_{,}(x'', y'', z'')=0\ldots\ldots (2)$$

celles de la seconde, on trouveroit comme dans le n°. précédent,

(*) La question que nous venons de traiter renferme la solution du problême général de la théorie des ombres et des pénombres; car en supposant que l'une des surfaces données soit lumineuse, l'ombre et la pénombre de l'autre surface seront comprises entre les nappes de la surface développable circonscrite en même tems à ces deux surfaces. (Voyez *Savans Etrangers*, T. IX.);

que

que les équations de leurs tangentes seroient de la forme

$$x-x'=M(\zeta-\zeta'), \qquad y-y'=N(\zeta-\zeta'),$$
$$x-x''=M_{,}(\zeta-\zeta''), \qquad y-y''=N_{,}(\zeta-\zeta'');$$

mais le plan générateur devant toucher ces deux courbes à la fois, contiendra nécessairement leurs tangentes, et comme il doit passer par les points dont les coordonnées sont x', y' et ζ', x'', y'' et ζ'', on aura

$$\zeta'-m=x'\varphi(m)+y'\psi(m)\ldots\ldots(1)$$
$$\zeta''-m=x''\varphi(m)+y''\psi(m)\ldots\ldots(2).$$

Retranchant successivement ces équations de $\zeta-m=x\varphi(m)+y\psi(m)$, il viendra

$$\zeta-\zeta'=(x-x')\varphi(m)+(y-y')\psi(m),$$

et

$$\zeta-\zeta''=(x-x')\varphi(m)+(y-y'')\psi(m);$$

substituant pour $x-x'$ et $y-y'$, $x-x''$ et $y-y''$, leurs valeurs tirées des équations des tangentes des courbes données, il en résultera les deux équations

$$1=M\varphi(m)+N\psi(m)\ldots\ldots(1),$$
$$1=M_{,}\varphi(m)+N_{,}\psi(m)\ldots\ldots(2);$$

combinant ensemble les quatre équations marquées (1); on trouvera, après l'élimination des coordonnées x', y' et ζ', une des relations qui doit avoir lieu entre m, $\varphi(m)$ et $\psi(m)$, et l'autre sera le résultat de l'élimination de x'', y'', ζ'', entre les quatre équations marquées (2).

343. L'équation générale de toutes les surfaces formées par les intersections successives d'une suite de sphères, dans lesquelles le rayon varieroit en même tems que la position du centre, contiendroit trois fonctions arbitraires, car l'équation d'une sphère quelconque, étant $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2=\delta^2$; en faisant dépendre les quantités α, β, γ, de la quantité δ, on aura pour l'intersection de deux sphères consécutives

$$[x-\varphi(\delta)]^2+[y-\psi(\delta)]^2+[\zeta-\pi(\delta)]^2=\delta^2$$
$$-[x-\varphi(\delta)]\varphi'(\delta)-[y-\psi(\delta)]\psi'(\delta)-[\zeta-\pi(\delta)]\pi'(\delta)=\delta.$$

L'élimination des fonctions arbitraires demande trop de calcul; pour trouver place ici; nous observerons seulement qu'il faudroit pousser les différentiations, par rapport à chaque variable successivement, jusques au troisième ordre, en faisant varier δ, en même tems que chacune des coordonnées x, y et ζ.

Pour particulariser la surface que nous considérons, il faudroit trois conditions; on peut se proposer en effet d'assujettir les sphères génératrices à toucher à la fois trois surfaces données, ou faire passer la surface limite par trois courbes données; il sera facile d'appliquer à l'une et à l'autre de ces questions, les méthodes des n°s. précédens.

344. On peut parvenir aux équations générales des diverses familles de surfaces, en employant immédiatement la considération des lignes dont elles sont composées. Soient $V=0$, $V_{,}=0$, les équations d'une ligne quelconque; cette ligne variera de forme ou de position, lorsqu'on changera les valeurs des constantes arbitraires qui entrent dans ses équations: si donc on établit une relation entre plusieurs de ces constantes, et qu'on en élimine une, on parviendra à un résultat qui exprimera l'ensemble d'une infinité de lignes de la même nature que celles que représentent les équations $V=0$ et $V_{,}=0$ (*Voyez la note page* 395). Quelques exemples éclairciront suffisamment cette théorie.

Si on considère d'abord toutes les droites assujetties à passer par le point dont les coordonnées sont α, β et γ, leurs équations seront de la forme $y-\beta=a(x-\alpha)$, $\quad z-\gamma=b(x-\alpha)$; faisons $b=\varphi(a)$ et mettons pour a et b leurs valeurs tirées des équations précédentes, il viendra $\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)$; équation qui appartient à toutes les surfaces coniques formées par les droites menées par le point donné.

Supposons que toutes les droites génératrices doivent être parallèles entr'elles; les quantités a et b, dans les équations $y=ax+\alpha$ et $z=bx+\beta$, resteront les mêmes, quelle que soit la droite que l'on considère en particulier, et il n'y aura que les quantités α et β qui varieront en passant d'une droite à une autre; on fera donc $\beta=\varphi(\alpha)$, et il viendra $y=ax+\alpha$, $z=bx+\varphi(\alpha)$. La première de ces équations donne $\alpha=y-ax$, et substituant dans la seconde, on trouve $z-bx=\varphi(y-ax)$, équation qu'il est aisé de faire rentrer dans celle du n°. 335.

Si les droites génératrices devoient être toutes parallèles au plan

des x et y, et passer par l'axe des z, leurs équations se réduiroient à $y=ax$ et $z=\beta$. Les quantités a et β variant d'une droite à une autre, on posera $\beta=\varphi(a)$, et comme $a=\frac{y}{x}$, on aura $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, équation de la surface décrite dans le n°. 93 des *Essais de Géométrie*.

Les équations $z=\frac{c(x-a)}{y-b}$ et $z=\frac{c(x-a)(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}$, dont on s'est occupé, n°. 147, expriment les ordonnées de deux surfaces de ce genre; car si pour simplifier on met x à la place de $x-a$ et y à la place de $y-b$, ce qui revient à transporter l'origine, on aura

$$z=\frac{cx}{y}=\frac{c}{\frac{y}{x}},\quad z=\frac{cxy}{x^2+y^2}=\frac{x}{1+\frac{y^2}{x^2}}.$$

Il est facile de voir maintenant pourquoi les fonctions z deviennent indéterminées, lorsqu'on fait $x=a$ et $y=b$ dans leur première forme, ou $x=0$ et $y=0$ dans leur seconde : les points qui répondent à ces dernières abscisses sont dans l'axe des z, sur lequel tombe une ordonnée de chacune des droites génératrices, dont le nombre est infini; lorsqu'on fait $\frac{y}{x}=m$, on considère une de ces droites en particulier, et on n'obtient plus que l'ordonnée qui lui appartient.

Nous n'avons encore supposé que deux coefficiens variables dans les équations des droites génératrices; il y en auroit trois, si on considéroit une droite assujettie seulement à passer par l'axe des z, et qu'on regardât comme inconnues les deux autres conditions qui doivent particulariser sa position.

Les équations d'une pareille droite étant de la forme $y=ax$, et $z=bx+\beta$, on feroit $b=\varphi(a)$, $\beta=\downarrow(a)$, d'où il résulteroit $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\downarrow\left(\frac{y}{x}\right)$. Les fonctions arbitraires que renferme cette équation peuvent être déterminées, en se donnant deux courbes par lesquelles doive passer la surface proposée (*E* n°. 194).

Venons maintenant au cas général, en regardant comme variables en même tems les quatre coefficiens a, α, b, β, qui entrent dans les équations de la droite génératrice. Lorsque trois de ces coefficiens seront *donnés* en fonctions du quatrième, la loi, suivant laquelle on passera d'une droite à sa consécutive, sera déterminée : posons donc $\alpha = \varphi(a)$, $b = \downarrow(a)$, $\beta = \pi(a)$; les deux équations

$$y = ax + \alpha, \qquad z = bx + \beta,$$

deviendront $y = ax + \varphi(a) \ldots (1)$ $\quad z = x\downarrow(a) + \pi(a) \ldots (2)$

Le système de ces deux équations représente toutes les surfaces composées de lignes droites, ou engendrées par une ligne droite qui se meut d'une manière quelconque ; pour particulariser ces surfaces il faut trois conditions : on peut supposer que la surface cherchée doive passer par trois lignes données (*E* n°. 94).

La droite génératrice devant couper chacune de ces lignes, il faudra que les équations (1) et (2) ayent lieu en même tems que les leurs. Eliminant les ordonnées x, y et z, entre les deux équations de la première et les équations (1) et (2), on aura un résultat qui exprimera la relation que doivent avoir les quantités a, $\varphi(a)$, $\downarrow(a)$ et $\pi(a)$, pour que la droite génératrice puisse couper cette première courbe ; on combinera de même successivement les équations (1) et (2) avec celles de la seconde courbe donnée et avec celles de la troisième, et on se procurera par là, entre les fonctions arbitraires et la quantité a, deux nouvelles équations qui, conjointement avec celle dont on vient de parler, détermineront la forme de ces fonctions.

Nous prendrons pour exemple le cas où les trois lignes données sont droites, et nous représenterons leurs équations par

$$\left.\begin{matrix} y = a'x + \alpha' \\ z = b'x + \beta' \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y = a''x + \alpha'' \\ z = b''x + \beta'' \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y = a'''x + \alpha''' \\ z = b'''x + \beta''' \end{matrix}\right\};$$

combinant successivement les équations (1) et (2) avec chacune des précédentes et remettant pour abréger α, b et β, au lieu des fonctions $\varphi(a)$, $\downarrow(a)$ et $\pi(a)$, on aura les trois équations

$$(a - a')(\beta - \beta') - (\alpha - \alpha')(b - b') = 0$$
$$(a - a'')(\beta - \beta'') - (\alpha - \alpha'')(b - b'') = 0$$
$$(a - a''')(\beta - \beta''') - (\alpha - \alpha''')(b - b''') = 0;$$

qui donneront les valeurs de α, b et β en a ; substituant ces valeurs

dans (1) et (2) et éliminant a, on parviendra à l'équation de la surface cherchée. Nous n'entrerons pas dans les détails de ces calculs, qu'on peut simplifier en faisant coïncider une des droites données avec l'axe des z; nous indiquerons seulement au lecteur qui voudra les effectuer, que le résultat appartient à une surface du second ordre.

Il est aisé d'étendre ces considérations à tel genre de lignes qu'on voudra, et pour obtenir l'équation de la surface formée par l'ensemble de ces lignes, il suffira de faire dépendre d'une seule toutes les constantes arbitraires que renferment leurs équations générales.

Un cercle peut être donné d'une manière commode dans l'espace par le moyen d'une sphère et d'un plan; l'équation de la première est en général $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\delta^2$.....(1), celle d'un plan qui passeroit par son centre seroit de la forme

$$(z-\gamma)=a(x-\alpha)+b(y-\beta).....(2).$$

La position et la grandeur du cercle, qui est l'intersection de ces deux surfaces, dépendra, comme on voit, de six constantes arbitraires; on supposera que cinq d'entr'elles sont des fonctions de celle qui reste, et le système des équations (1) et (2), entre lesquelles on éliminera cette dernière constante, appartient aux surfaces formées de cercles qui se succèdent suivant une loi quelconque et dans lesquelles sont comprises les surfaces *annulaires*. On pourra les particulariser de manière qu'elles passent par cinq lignes données, puisque leur équation générale contient un pareil nombre de fonctions arbitraires.

345. Lagrange a indiqué les moyens de trouver les surfaces composées de lignes d'une nature donnée; mais ce grand Géomètre n'a pas considéré la question dans toute la généralité dont elle est susceptible: il a supposé que les lignes génératrices étant sur la même surface, devoient toujours se couper deux à deux consécutivement, condition qui n'est pas nécessaire. Les surfaces connues dans les arts sous le nom de *surfaces gauches* (*E* n°. 94), sont composées de lignes droites qui n'y satisfont point, et il n'y a que les surfaces développables pour lesquelles elle ait lieu: voici comment on peut l'exprimer.

On fait varier dans les équations (1) et (2), page 500, la

quantité a, en regardant x, y, z, comme constantes, et il vient les quatre équations

$$\left.\begin{aligned} y &= ax+\varphi(a) \\ 0 &= x+\varphi'(a) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} z &= x\psi(a)+\pi(a) \\ 0 &= x\psi'(a)+\pi'(a) \end{aligned}\right\}$$

qui doivent avoir lieu en même tems pour le point de rencontre des deux droites génératrices consécutives. En chassant x des deux équations qui se trouvent sur la seconde ligne, il en résulte l'équation

$$\varphi'(a)\psi'(a)-\pi'(a)=0 \ldots\ldots\ldots (3),$$

qui établit une rélation nécessaire entre les fonctions φ, ψ et π; elles cessent donc d'être toutes arbitraires, et par conséquent les équations (1) et (2) perdent de leur généralité.

Les surfaces développables considérées comme formées de lignes droites qui se coupent deux à deux, sont donc représentées par les trois équations

$$y=ax+\varphi(a),\quad z=x\psi(a)+\pi(a);\quad \varphi'(a)\psi'(a)-\pi'(a)=0,$$

entre lesquelles il faut éliminer la quantité a et l'une des fonctions arbitraires.

Pour montrer l'identité de ce résultat avec celui du n°. 342, nous reprendrons les équations

$$z-m=x\varphi(m)+y\psi(m),\qquad 1=x\varphi'(m)+y\psi'(m)$$

et en chassant y de la première, nous aurons

$$z=x\left(\varphi-\frac{\varphi'}{\psi'}\psi\right)+m-\frac{\psi}{\psi'},\quad y=-x\frac{\varphi'}{\psi'}-\frac{1}{\psi'},$$

en écrivant pour abréger φ pour $\varphi(m)$ et ainsi des autres. Ces équations étant comparées terme à terme avec $z=bx+\beta$ et $y=ax+\alpha$, il viendra

$$b=\varphi-\frac{\varphi'}{\psi'}\psi,\quad \beta=m-\frac{\psi}{\psi'},\quad a=-\frac{\varphi'}{\psi'},\quad \alpha=-\frac{1}{\psi'},$$

d'où on conclura d'abord que a, α, b et β, doivent être des fonctions d'une même quantité m. Mettant dans les expressions de b et de β pour $\frac{\varphi'}{\psi'}$ et ψ' leurs valeurs, on trouvera $b=\varphi+a\psi$, $\beta=m+\alpha\psi$; on aura donc pour déterminer a, α, b et β, les quatre équations

$$b=\varphi+a\psi,\quad \beta=m+\alpha\psi,\quad a\psi'+\varphi'=0,\quad \alpha\psi'+1=0;$$

desquelles éliminant φ, $\downarrow$ et m, il résultera la relation qui doit avoir lieu entre les quantités a, α, b et β. Prenons les différentielles de b et de β, et nous trouverons

$$db = \varphi' dm + a\downarrow' dm + \downarrow da = (\varphi' + a\downarrow') dm + \downarrow da$$
$$d\beta = dm + \alpha\downarrow' dm + \downarrow d\alpha = (1 + \alpha\downarrow') dm + \downarrow da$$

expressions qui, en vertu des équations $a\downarrow' + \varphi' = 0$ et $\alpha\downarrow' + 1 = 0$, se réduisent à $db = \downarrow da$ et $d\beta = \downarrow d\alpha$; éliminant $\downarrow$, on obtiendra

$$db\,d\alpha - da\,d\beta = 0.$$

Cette dernière équation revient à l'équation (3); car il est facile de voir que les quantités a, b et β devant être fonctions d'une même quantité, il s'ensuit que trois d'entr'elles sont des fonctions de la quatrième.

Je ne quitterai point ce sujet sans faire remarquer que l'assemblage de toutes les normales menées à une surface courbe, suivant une de ses lignes de courbure, forme une surface développable dont l'arrête de rebroussement se trouve sur la surface qui est le lieu de tous les centres de plus grande et de moindre courbure.

En général si $V = 0$ et $V_{,} = 0$, sont les équations des lignes génératrices, et renferment les arbitraires α, β, γ, δ, il faudra, pour que ces lignes se coupent, que les équations

$$\frac{dV}{d\alpha} d\alpha + \frac{dV}{d\beta} d\beta + \frac{dV}{d\gamma} d\gamma + \frac{dV}{d\delta} d\delta + \text{etc.} = 0$$
$$\frac{dV_{,}}{d\alpha} d\alpha + \frac{dV_{,}}{d\beta} d\beta + \frac{dV_{,}}{d\gamma} d\gamma + \frac{dV_{,}}{d\delta} d\delta + \text{etc.} = 0$$

ayent lieu en même tems que les équations $V = 0$, et $V_{,} = 0$; éliminant x, y et z entre ces deux dernières et les deux premières, on aura une relation entre toutes les arbitraires, et par conséquent si l'on fait $\beta = \varphi(\alpha)$, $\gamma = \downarrow(\alpha)$, $\delta = \pi(\alpha)$, etc. il y aura une de ces fonctions qui sera déterminée par le moyen des autres.

L'élimination des fonctions arbitraires dans les équations générales auxquelles nous sommes parvenus dans les articles précédens seroit assez laborieuse à effectuer, et comme il sera nécessaire de revenir sur cette opération dans le Calcul intégral, nous renverrons à cette partie les détails qui ne sauroient trouver place ici; nous ferons voir alors comment on peut parvenir aux équations

différentielles qui ont lieu par rapport aux caractéristiques d'une surface et aux courbes que ces caractéristiques produisent par leurs intersections successives, et nous développerons les rapports intéressans qui lient ces équations à celle de la surface proposée.

Application du Calcul différentiel aux courbes à double courbure. FIG. 49.

346. Soient x, y et z les coordonnées d'une courbe quelconque XM, *fig.* 49, résultante de l'intersection de deux surfaces dont nous représenterons les équations par $F(x,y,z)=0$, $f(x,y,z)=0$. En éliminant alternativement de ces équations chacune des variables z, y et x, on obtiendra trois nouvelles équations, la première entre y et x, la seconde entre z et x, et la troisième entre z et y, qui appartiendront respectivement aux projections $X'M'$, $X''M''$, $X'''M'''$, de la courbe proposée sur chacun des plans coordonnés. Elles exprimeront aussi les surfaces cylindriques élevées sur ces projections perpendiculairement aux plans coordonnés qui les contiennent ; et la courbe proposée XM sera l'intersection de deux quelconques de ces trois surfaces (*E* n°. 81).

On aura facilement les équations de la tangente MT, en observant que ses projections sont elles-mêmes tangentes à celles de la courbe XM (*E* page 102); comme il suffit de connoître deux projections de cette droite, nous choisirons celle qui se trouve sur le plan des x et y et celle que contient le plan des y et z. En désignant donc par x', y' et z' les coordonnées du point M, l'équation de la droite $T'M'$, tangente à la projection $X'M'$, sera

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x'),$$ et celle de $T''M''$, tangente à $X''M''$, sera

$$z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x').$$ Supposons que des équations des courbes $X'M'$ et $X''M''$ on ait tiré $y'=\varphi(x')$, $z'=\psi(x')$, les équations de la tangente TM deviendront

$$y-\varphi(x')=(x-x')\varphi'(x')\ldots.(1)$$
$$z-\psi(x')=(x-x')\psi'(x')\ldots.(2).$$

Si on élimine x' entre ces équations, on aura la relation qui doit exister entre les coordonnées x, y et z de la tangente TM, quelle que soit la position du point M, (*voyez la note page* 395) et par conséquent l'équation de la surface formée par toutes les tangentes de la courbe XM. On reconnoîtra par là si cette courbe est plane

ou

ou à double courbure ; dans le premier cas, la surface dont on vient de parler sera un plan ; dans le second, elle sera seulement une surface développable (*E* n°. 96), dont la courbe proposée sera l'arrête de rebroussement. Le système des équations (1) et (2) présente donc encore l'équation générale des surfaces développables sous une autre forme.

347. Les résultats auxquels nous sommes parvenus dans le n°. précédent, auroient pu s'obtenir d'une manière analogue à celle dont nous sommes arrivés aux équations des lignes osculatrices, considérées sur un plan. Lorsqu'on a deux équations entre trois variables x', y', z', il y a toujours deux de ces variables, qui sont des fonctions de la troisième ; si donc on suppose que x' soit la variable indépendante, et qu'elle devienne $x'+h$, les deux autres se changeront en

$$y'+\frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1}+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.},\quad z'+\frac{dz'}{dx'}\frac{h}{1}+\frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

désignant par x, y et z, les coordonnées de la ligne osculatrice, on aura de même lorsque x se changera en $x+h$,

$$y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}\quad z+\frac{dz}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2z^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

comparant ces séries avec les précédentes, on en déduira les conditions d'osculation, comme pour les courbes données sur un plan. Il faudra pour un contact du premier ordre, qu'en faisant $x=x'$, on ait $y=y'$, $z=z'$, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{dz'}{dx'}$.

Une droite étant donnée par les équations $y=ax+\alpha$, $z=bx+\beta$, on trouvera sans peine que $a=\frac{dy'}{dx'}$, $b=\frac{dz'}{dx'}$; et comme elle doit passer par les points dont les coordonnées sont x', y' et z', on aura comme dans le n°. précédent

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x'),\quad z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x').$$

On étendra facilement ces considérations aux contacts des ordres plus élevés.

348. Une ligne considérée dans l'espace peut être touchée par

une surface, et avoir avec elle des contacts plus ou moins parfaits. Désignons par x, y et z, les coordonnées de la surface touchante, et supposons que x devienne $x+h$, et que y se change en $y+k$, le développement de z prendra la forme

$$z+\frac{dz}{dx}h+\frac{dz}{dy}k$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2z}{dx^2}h^2+2\frac{d^2z}{dx\,dy}hk+\frac{d^2z}{dy^2}k^2\right\}$$
$$+\text{ etc.}$$

Mais lorsque pour trouver les conditions du contact, on voudra comparer cette série avec la série analogue, déduite des équations de la courbe proposée, il faudra non seulement faire $x=x'$, $y=y'$ et $z=z'$, dans chacun des coefficiens différentiels de la surface, mais encore mettre au lieu de k, la série

$$\frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1}+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

parce que l'accroissement k est, par la nature de la courbe, subordonné à l'accroissement h; il résultera de ces substitutions une série, que je représenterai par $z'+Ph+Qh^2+Rh^3+\text{etc.}$ dans laquelle P, Q, R etc. seront des fonctions données des coefficiens différentiels, tirés de l'équation de la surface et de ceux que donne l'une des équations de la courbe proposée. On aura donc pour un contact du premier ordre, $\frac{dz'}{dx'}=P$, pour un contact du second $\frac{dz'}{dx'}=P$ et $\frac{d^2z'}{dx'^2}=Q$, et ainsi de suite.

Prenons pour exemple le plan dont l'équation est $z=Ax+By+D$; on aura d'abord $z'=Ax'+By'+D$, puis changeant x' en $x'+h$ et y' en $y'+k$, il viendra $z'+Ah+Bk$, au lieu de z; remplaçant k par $\frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1}+\frac{d^2y'}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$ il en résultera

$$z'+Ah+B\frac{dy'}{dx'}h+B\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

L'équation du plan renfermant trois constantes, on pourra par leur moyen satisfaire aux conditions du contact du second ordre;

qui donneront $\frac{d\zeta'}{dx'} = A + B\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2\zeta'}{dx'^2} = B\frac{d^2y'}{dx'^2}$; tirant de ces équations, les valeurs de A et de B, et mettant pour $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, $\frac{d\zeta'}{dx'}$, $\frac{d^2\zeta'}{dx'^2}$ les expressions $\varphi'(x')$, $\varphi''(x')$; $\psi'(x')$, $\psi''(x')$, il viendra

$$A = \frac{\psi'(x')\varphi''(x') - \varphi'(x')\psi''(x')}{\varphi''(x')}, \quad B = \frac{\psi''(x')}{\varphi''(x')}.$$

Déterminant ensuite D pour que le plan cherché passe par le point M, on aura $\zeta - \zeta' = A(x - x') + B(y - y')$; substituant pour ζ', y' A et B leurs expressions, il en résultera $\varphi''(x')[\zeta - \psi(x')] = [\psi'(x')\varphi''(x') - \varphi'(x')\psi''(x')](x - x') + \psi''(x')[y - \varphi(x')]$.

Telle est l'équation du plan *osculateur* d'une ligne quelconque; si cette ligne étoit plane, le plan osculateur seroit le même que celui qui la contient toute entière.

Nous ne poursuivrons pas plus loin cette théorie, qui n'offrira aucune difficulté à ceux qui auront suivi avec attention son application aux lignes données sur un plan et aux surfaces; et comme ce que nous avons à dire sur les courbes à double courbure, d'après Monge, tient à des considérations géométriques très-élégantes, nous allons nous rapprocher de sa manière.

349. Les courbes à double courbure peuvent être considérées comme des Polygones, dont trois côtés consécutifs ne sauroient être dans le même plan: le prolongement de l'un de ces côtés donne la tangente, de même que pour les courbes planes; deux tangentes consécutives *TM* et *tm*, déterminent le plan qui passe par deux côtés consécutifs, et qui n'est autre chose que le plan osculateur.

On peut trouver son équation en le regardant comme passant par trois points consécutifs de la courbe proposée: soit donc $Ax + By + C\zeta + D = 0$ son équation; il faudra qu'on ait d'abord $Ax' + By' + C\zeta' + D = 0$, puisqu'il doit contenir le point dont les coordonnées sont x', y' et ζ'; et pour que les deux points suivans s'y trouvent aussi, il faudra de plus que la différentielle première, et la différentielle seconde de son équation, ayent lieu

en même tems que celles des équations de la courbe proposée.

On pourroit prendre une des différentielles dx', dy' ou dz' pour constante ; mais il sera plus symétrique de les traiter toutes comme variables en même tems, et il viendra

$$Adx'+Bdy'+Cdz'=0, \qquad Ad^2x'+Bd^2y'+Cd^2z'=0,$$

d'où on tirera $\frac{A}{C}=\frac{dy'd^2z'-dz'd^2y'}{dx'd^2y'-dy'd^2x'}$, $\frac{B}{C}=\frac{dz'd^2x'-dx'd^2z'}{dx'd^2y'-dy'd^2x'}$;

retranchant l'équation $Ax'+By'+Cz'+D=0$ de $Ax+By+Cz+D=0$, mettant ensuite pour $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ leurs valeurs et faisant disparoître les dénominateurs, nous trouverons le résultat suivant, remarquable par sa forme

$$(z-z')(dy'd^2z'-dz'd^2y')+(y-y')(dz'd^2x'-dx'd^2z')+(z-z')(dx'd^2y'-dy'd^2x')=0.$$

Si on met dans cette équation pour y', z', et leurs différentielles, les valeurs que donnent, en faisant tout varier, les équations $y'=\varphi(x')$, $z'=\psi(x')$, les différentielles disparoîtront, et on trouvera le même résultat que dans le n°. précédent.

Je terminerai cet article par observer que la différentielle de l'arc d'une courbe considérée dans l'espace, a pour expression $\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}$. Cela se voit évidemment en prenant la distance des points M et m, dont les coordonnées respectives sont x', y', z', $x'+dx'$, $y'+dy'$ et $z'+dz'$.

350. Mener une normale à une courbe considérée dans l'espace est un Problême indéterminé ; car, il existe un nombre infini de droites qui passant par le point de contact, sont en même tems perpendiculaires à la tangente ; l'ensemble de ces droites forme un plan perpendiculaire à cette tangente, et que nous nommerons *plan normal*: son équation sera

$$(x-x')\frac{dx'}{dz'}+(y-y')\frac{dy'}{dz'}+(z-z')=0 \text{ (n°. 301), ou}$$

$$(x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'=0.$$

Si on met au lieu de y', z', dy' et dz', leurs valeurs représentées par $\varphi(x')$, $\psi(x')$, $\varphi'(x')$ et $\psi'(x')$, il viendra

$$[x-x']+[y-\varphi(x')]\varphi'(x')+[z-\psi(x')]\psi'(x')=0.$$

Considérons maintenant le plan normal pour le point consécutif;

il est évident qu'il coupera celui qu'on vient de déterminer, dans une droite dont les coordonnées n'auront pas varié, quoique x' soit devenu $x'+dx'$; on aura donc pour cette intersection l'équation $[y-\varphi(x')]\varphi''(x')+[z-\psi(x')]\psi''(x')-\varphi'(x')^2-\psi'(x')^2-1=0 \ldots (b)$. Eliminant x' entre cette équation et la précédente, on aura celle de la surface développable formée par les intersections successives des plans normaux de la courbe proposée. On prendra une idée de cette surface, en considérant avec attention la figure 51. On a substitué à la courbe un polygone $MM'M''M'''$; par les milieux $G, G', G'', G''' \ldots$ de chacun des côtés de ce polygone, on leur a mené des plans perpendiculaires $GLKH$, $G'L'K'H'$, $G''L''K''H''$, $G'''L'''K'''H'''$....: ces plans se coupent deux à deux suivant des droites KH, $K'H'$, $K''H''$, $K'''H'''$.... etc. qui ne seront parallèles entr'elles que lorsque les côtés du polygone $MM'M''M'''\ldots$ seront dans un même plan, et elles formeront alors un prisme. FIG. 51.

Si on conçoit les droites KH, $K'H'$, $K''H''$, $K'''H'''\ldots$ prolongées jusqu'à ce que chacune d'elles rencontre sa consécutive, elles détermineront un polygone qui représentera l'arrête de rebroussement de la surface développable formée par les plans normaux (*E* n°. 96). Ce polygone contient les centres des sphères qui passent par quatre angles consécutifs du polygone $MM'M''M'''\ldots$; car l'intersection de deux droites telles que KH et $K'H'$ est aussi celle des trois plans $GLKH$, $G'L'K'H'$, $G''L''K'H''$, menés perpendiculairement sur le milieu des droites MM', $M'M''$, $M''M'''$, qui joignent les quatre points M, M', M'', M''' (*E* n°. 68). Si tous les angles du polygone proposé se trouvoient sur la même sphère, toutes les droites KH, $K'H'$, $K''H''$, $K'''H'''$,... se couperoient au centre de cette sphère, et seroient par conséquent les arrêtes d'une pyramide.

Ces propriétés ne cesseront point d'avoir lieu quel que soit le nombre des côtés du polygone $MM'M''M'''\ldots$ et conviendront par conséquent à la courbe proposée elle-même; il suit donc de là que si elle est plane, tous ses plans normaux formeront par leurs intersections consécutives une surface cylindrique, et si étant à double courbure, elle se trouve néanmoins faire partie d'une sphère, alors la surface de ses plans normaux sera conique, et aura son

sommet au centre de la sphère. Dans le cas où la courbe proposée seroit plane et se trouveroit en même tems sur une sphère, elle seroit nécessairement un cercle, et tous les plans qui lui seroient perpendiculaires se couperoient dans une même droite élevée par son centre perpendiculairement au plan qui la contient.

Pour parvenir à l'équation de l'arrête de rebroussement de la surface formée par les intersections successives des plans normaux, il faut joindre aux équations (*a*) et (*b*) la différentielle de cette dernière, prise par rapport à x' seul (n°. 339), et on aura

$$[y-\varphi(x')]\varphi'''(x')+[z-\psi(x')]\psi'''(x')-3\varphi'(x')\varphi''(x')-3\psi'(x')\psi''(x')=0\ldots(c)$$

Si on prenoit dans ces trois équations la valeur de $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, pour la substituer dans $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$, on auroit le rayon de la sphère qui passe par les quatre points consécutifs M, M', M'', M''', et dont le centre se trouve à l'intersection des trois premiers plans normaux.

FIG. 50. 351. Soit XM, *fig.* 50, une courbe plane quelconque, dont FZ représente la développée; si par tous les points de cette développée, on élève perpendiculairement à son plan, des droites FG, $F'G'$, $F''G''$, $F'''G'''$.... elles seront sur la surface cylindrique résultante des intersections successives des plans normaux de la courbe proposée; car les plans MFG, $M'F'G'$, $M''F''G''$, $M'''F'''G'''$... menés par les normales MF, $M'F'$, $M''F''$, $M'''F'''$... et par les droites dont on vient de parler, sont perpendiculaires à la courbe XM. Cela posé, il est évident que chacun des points de la droite GF sera également éloigné de tous ceux du petit arc de cercle décrit du point F, comme centre, avec un rayon MF: de même chaque point de la droite $F'G'$, consécutive à la précédente, sera également éloigné de tous les points de l'arc, décrit du point F comme centre avec un rayon $M'F'$, et ainsi de suite. On pourra donc regarder le point quelconque G pris sur la droite F, comme un centre de l'arc MM', et en conclure par conséquent qu'au même point de la courbe XM, répondent une infinité de rayons de courbure, tels que GM, dont le plus court sera MF, qui se trouve dans le même plan que la courbe proposée (*)

(*) Pour sentir que les dénominations ci-dessus sont bien fondées, il suffit de re-

La surface cylindrique $FF'F''F'''....G'''G''G'G$ contiendra, outre la courbe $FF'F''F'''$ une infinité d'autres courbes, qui, par leur développement, produiront la proposée XM. En effet, si on substitue au cylindre un prisme d'un grand nombre de faces, qu'on prenne arbitrairement un point G sur l'une des arrêtes de ce prisme, qu'on prolonge le rayon correspondant GM, jusqu'à ce qu'il rencontre l'arrête suivante $F'G'$, on aura un nouveau rayon $G'M'$ consécutif au premier; en prolongeant ce rayon jusqu'à la rencontre de l'arrête $F''G''$, et ainsi de suite, on formera un polygone $GG'G''G'''...$ par le développement duquel seront décrits les arcs MM', $M'M''$, $M''M'''$, considérés comme des arcs de cercle; puisque le rayon $G'M$ se confondra avec son consécutif $G'M'$, lorsque le point M aura parcouru l'arc MM'. Il est facile de voir que la même chose auroit lieu en faisant tourner le plan $FF'G'G$ autour de $G'F'$, pour l'amener dans le prolongement de la face suivante $F'F''G''G'$: d'où il suit qu'en développant le prisme $FF'F''F'''....G'''G''G'G$, le polygone $GG'G''G'''....$ deviendroit une ligne droite. On sent d'après cela qu'un fil tendu d'abord dans la direction GM, et plié ensuite librement sur le prisme dont on vient de parler, suivroit le contour du polygone $GG'G''G'''....$ (*E page* 96).

On voit donc qu'une courbe plane a, outre la développée $FF'F''F'''....$ située dans le même plan qu'elle, une infinité d'autres développées qui sont à double courbure, et que toutes deviennent des lignes droites, lorsqu'on développe le cylindre qui les contient.

Il est à propos de remarquer que les tangentes de ces développées font toutes le même angle avec celles du cylindre qu'elles rencontrent, et sont par conséquent également inclinées à l'égard du plan qui contient la courbe proposée.

352. Appliquons maintenant aux courbes à double courbure la théorie que nous venons d'exposer à l'égard des courbes planes.

---

marquer que tous les points de la droite élevée par le centre d'un cercle, perpendiculairement à son plan, peuvent servir à la description de ce cercle, comme le centre lui-même, puisqu'ilssont également éloignés de tous les points de la circonférence.

FIG. 51. Il est évident que la droite KH, *fig.* 51, sera perpendiculaire au plan qui contient les deux côtés consécutifs MM' et $M'M''$, puisqu'elle est l'intersection de deux plans, qui leur sont respectivement perpendiculaires; et si on conçoit le premier prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre KH en O, le point O sera le centre du cercle qui passeroit par les trois points M, M' et M''. Il suit de là que chacun des points de la droite KH, sera également éloigné de ces points; il en sera de même des points de $K'H'$, par rapport aux points M', M'', M''', de ceux de $K''H''$, à l'égard des points $M''M'''M''''$, etc. Donc si on mène une droite GF dans le premier plan normal $GLKH$, et que par le point où elle rencontre KH, et par le point G' on mène la droite $G'F$ dans le second plan normal $GL'K'H'$, les deux droites GF et $G'F$, seront également inclinées à l'égard de KH; prolongeant ensuite $G'F$ jusqu'à la rencontre de $K'H'$, et menant $G''F'$ dans le troisième plan normal, les deux droites $G'F'$ et $G''F'$ seront également inclinées par rapport à $K'H'$. En poursuivant cette construction, on formera un polygone $FF'F''F'''$, sur la circonférence duquel s'appliqueroit un fil tendu, d'abord dans la direction GH, et plié ensuite librement sur la surface $HH'H''H'''....K'''K''K'K$, formée par les intersections successives des plans normaux. Son développement produiroit les arcs de cercles, passant par les points M, M', M'', M'''.... combinés trois à trois. La considération de ce Polygone fait voir bien clairement l'existence et la formation de toutes les développées d'une courbe à double courbure quelconque (*).

Le plus court de tous les rayons de courbure sera dans le cas actuel, comme pour les courbes planes, celui qui se trouve dans

---

(*) Si on conçoit une ligne quelconque tracée dans le plan $GLKH$, cette ligne décrira une portion de cône droit autour de KH, pendant que le plan qui la contient tournera pour venir s'appliquer sur son consécutif $G'L'K'H'$; lorsque ce dernier tournera lui-même autour de $K'H'$ pour venir s'appliquer sur son consécutif, la droite que nous considérons décrira une seconde portion de cône autour de $K'H'$ et ainsi de suite; l'assemblage de toutes ces portions de cône formera une surface développable qui aura avec la surface $HH'H''H'''....K'''K''K'K$, des rapports analogues à ceux qu'une développante a avec sa développée.

le

le plan même des deux côtés consécutifs que l'on considère ; mais tous les rayons de cette espèce, qu'on peut appeller *rayons de courbure absolus*, ne seront point tangens à une même courbe, car ils ne se rencontreront point. On s'en convaincra, en remarquant que la ligne GO, étant perpendiculaire à KH, ne rencontrera point $G'O'$ perpendiculaire à $K'H'$, puisque l'une est dans le plan $GLKH$ et l'autre dans le plan $G'L'K'H'$ et qu'elles ne passent pas par le même point de la commune section KH de ces plans. La suite des centres *absolus* de courbure $O, O', \ldots$ ne sera donc point une des développées de la courbe proposée. Nous allons confirmer par des procédés analytiques, les résultats que nous avons déduits des considérations géométriques précédentes.

353. Soient x, y, z, les coordonnées du centre d'une sphère, x', y', z', celles d'un point de sa surface et a son rayon ; on aura

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}=u.$$

Pour déterminer les quantités x, y, z et u, il faut quatre conditions : celles qui se présentent d'abord consistent à assujettir la sphère proposée à passer par quatre points consécutifs de la courbe donnée ; or cela suppose que le rayon u reste le même, quoique les coordonnées x', y', et z' varient trois fois de suite ; on aura donc en même tems

$$du=0, \qquad d^2u=0, \qquad d^3u=0.$$

Si on développe ces équations, on retombera sur celles que nous avons désignées dans le n°. 350 par (a), (b) et (c) ; déterminant $(x-x')$, $(y-y')$ et $(z-z')$ par ces équations et substituant les valeurs trouvées, dans l'expression de u, on aura le rayon de la sphère osculatrice.

En ne considérant que trois points consécutifs, on aura seulement les équations

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}=u,$$
$$du=0,$$
$$d^2u=0.$$

Déterminant alors $(x-x')$ et $(y-y')$ en $(z-z')$, par les deux dernières, et substituant ensuite dans l'expression de u, le résultat exprimera tous les rayons de courbure relatifs à un même point. Pour obtenir le rayon de courbure absolu, il faudroit faire varier z, et chercher parmi toutes les valeurs de $z-z'$, celle qui donne le

minimum de u. On peut aussi parvenir au même but par la considération que le centre absolu de courbure est dans le plan osculateur, et c'est cette voie que nous suivrons.

Les équations $du=0$ et $d^2u=0$ étant développées, donnent

$$(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'=0$$

$$(x-x')\,d^2x'+(y-y')\,d^2y'+(z-z')\,d^2z'-dx'^2-dy'^2-dz'^2=0;$$

en faisant pour abréger $dx'^2+dy'^2+dz'^2=ds'^2$, on en tire

$$(x-x')\,(dx'd^2y'-dy'd^2x')+(z-z')\,(dz'd^2y'-dy'd^2z')+ds'^2dy'=0$$

$$(y-y')\,(dx'd^2y'-dy'd^2x')+(z-z')(dx'd^2z'-dz'd^2x')-ds'^2dx'=0;$$

mais par l'équation du plan osculateur, donnée n°. 349, on a

$$dx'd^2y'-dy'd^2x'=C,\quad dz'd^2x'-dx'd^2z'=B,\quad dy'd^2z'-dz'd^2y'=A;$$

les équations précédentes pourront donc être écrites ainsi qu'il suit:

$$-A(z-z')+C(x-x')+ds'^2dy'=0\ldots.(d)$$

$$-B(z-z')+C(y-y')-ds'^2dx'=0\ldots.(e);$$

combinant ces équations avec celle du plan osculateur,

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

il viendra $(A^2+B^2+C^2)(z-z')-Ads'^2dy'+Bds'^2dx'=0;$

d'où $$z-z'=\frac{ds'^2(Ady'-Bdx')}{A^2+B^2+C^2}.$$

Mettant dans l'expression de u^2, pour $x-x'$ et $y-y'$ les valeurs

$$\frac{A(z-z')-ds'^2dy'}{C}\text{ et }\frac{B(z-z')+ds'^2dx'}{C}$$

que donnent les deux équations (d) et (e), et faisant $ds'^2dy'=E$; $ds'^2dx'=F$, il viendra

$$C^2u^2=(A^2+B^2+C^2)(z-z')^2-2(z-z')(AE-BF)+E^2+F^2;$$

remplaçant $z-z'$ par la valeur trouvée ci-dessus, on aura

$$C^2u^2=\frac{(AE-BF)^2}{A^2+B^2+C^2}-2\frac{(AE-BF)^2}{A^2+B^2+C^2}+E^2+F^2,$$

ou en réduisant au même dénominateur,

$$C^2u^2=\frac{-(AE-BF)^2+(E^2+F^2)(A^2+B^2+C^2)}{A^2+B^2+C^2}.$$

En développant ce résultat, on verra qu'il peut se mettre sous la forme

$$C^2u^2=\frac{(AF+BE)^2+C^2(E^2+F^2)}{A^2+B^2+C^2};$$

mais $$AF+BE=-dz'ds'^2(dx'd^2y'-dy'd^2x')=-Cdz'ds'^2;$$

donc $$u^2=\frac{E^2+F^2+dz'^2ds'^4}{A^2+B^2+C^2};$$

remettant enfin pour A, B, C, E et F leurs valeurs, on trouvera

$$u^2=\frac{ds'^6}{(dy'd^2z'-dz'd^2y')^2+(dz'd^2x'-dx'd^2z')^2+(dx'd^2y'-dyd^2x')^2}.$$

Cette expression du rayon de courbure absolu d'une courbe à double courbure est aussi celle que nous avons eue en vue, dans le n°. 326, pour le rayon de courbure d'une section faite par un plan quelconque dans une surface courbe. Le plan osculateur est le même dans ce cas que le plan coupant, et son équation, combinée avec celle de la surface proposée, donne les équations des projections de la section. Si on vouloit introduire les coefficiens différentiels de l'ordonnée de la surface proposée, il faudroit observer que les équations différentielles du plan et celles de la surface devant avoir lieu en même tems, on ne peut regarder comme constante qu'une différentielle au plus. En supposant qu'on les fasse varier toutes en même tems, pour plus de symétrie, on aura

$$dz'=pdx'+qdy', \quad d^2z'=rdx'^2+2sdx'dy'+tdy'^2+pd^2x'+qd^2y'$$
$$Adx'+Bdy'+Cdz'=0, \quad Ad^2x'+Bd^2y'+Cd^2z'=0;$$

à l'aide de ces équations on fera disparoître les différentielles, et la valeur de u ne dépendra plus que des quantités A, B, C, p, q, r, s et t. Je ne ferai point ici ces calculs, qui n'ont d'autre difficulté qu'un peu de longueur.

354. Reprenons l'équation $z-z'=\frac{AE-BF}{A^2+B^2+C^2}$ (n°. préc.) et mettons dans le numérateur du second membre, à la place des quantités A, B, E et F, leurs valeurs, nous aurons

$$z-z'=\frac{ds'^2dy'(dy'd^2z'-dz'd^2y')-ds'^2dx'(dz'd^2x'-dx'd^2z')}{A^2+B^2+C^2},$$

résultat auquel on peut donner la forme suivante,

$$z-z'=\frac{ds'^2[(dx'^2+dy'^2+dz'^2)d^2z'-dz'(dx'd^2x'+dy'd^2y'+dz'd^2z')]}{A^2+B^2+C^2};$$

mais $$dx'd^2x'+dy'd^2y'+dz'd^2z'=\tfrac{1}{2}d.ds'^2=ds'd^2s';$$

donc $$z-z'=\frac{ds'^2(ds'd^2z'-dz'd^2s')}{A^2+B^2+C^2}.$$

Les équations $du=0$, $d^2u=0$, ainsi que celle du plan osculateur, étant symétriques par rapport aux quantités x', y', z' et à leurs différentielles, on en tirera immédiatement des valeurs de $y-y'$ et de $x-x'$, semblables à celles qu'on vient de trouver pour $z-z'$, et on aura

$$y-y'=\frac{ds'^3(ds'd^2y'-dy'd^2s')}{A^2+B^2+C^2}$$

$$x-x'=\frac{ds'^3(ds'd^2x'-dx'd^2s')}{A^2+B^2+C^2}.$$

On peut donner à ces expressions et à celle de u une forme très-élégante, en observant que leur dénominateur $A^2+B^2+C^2$ étant développé devient

$$\begin{aligned}&dy'^2d^2z'^2-2dy'dz'd^2y'd^2z'+dz'^2d^2y'^2\\+&\,dz'^2d^2x'^2-2dx'dz'd^2x'd^2z'+dx'^2d^2z'^2\\+&\,dx'^2d^2y'^2-2dx'dy'd^2x'd^2y'+dy'^2d^2x'^2,\end{aligned}$$

et qu'on peut l'écrire ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned}&(dz'^2+dx'^2)\,d^2y'^2-2dy'dz'd^2y'd^2z'\\+&\,(dy'^2+dx'^2)\,d^2z'^2-2dx'dz'd^2x'd^2z'\\+&\,(dz'^2+dy'^2)\,d^2x'^2-2dx'\,dy'd^2x'd^2y';\end{aligned}$$

mais puisque

$$dz'^2+dx'^2=ds'^2-dy'^2,\ dy'^2+dx'^2=ds'^2-dz'^2,\ dz'^2+dy'^2=ds'^2-dx'^2,$$

on aura

$$ds'^2(d^2y'^2+d^2z'^2+d^2x'^2)-\left\{\begin{array}{l}dy'^2d^2y'^2+2dy'dz'd^2y'd^2z'\\dz'^2d^2z'^2+2dx'dz'd^2x'd^2z'\\dx'^2d^2x'^2+2dx'dy'd^2x'd^2y'\end{array}\right\},$$

résultat dont la seconde partie n'est autre chose que le quarré de $dy'd^2y'+dz'd^2z'+dx'd^2x'$, ou de $ds'd^2s'$, pris négativement. Ce résultat se réduira donc à $ds'^2(d^2y'^2+d^2x'^2+d^2z'^2-d^2s'^2)$; mis dans la valeur de u, il la changera en $u=\frac{ds'^4}{d^2y'+d^2x'^2+d^2z'^2-d^2s'^2}$; de plus si on fait attention que

$$ds'd^2z'-dz'd^2s'=ds'^3d.\frac{dz'}{ds'}$$

$$ds'd^2y'-dy'd^2s'=ds'^3d.\frac{dy'}{ds'}$$

$$ds'd^2x'-dx'd^2s'=ds'^3d.\frac{dx'}{ds'},$$

on trouvera
$$\zeta-\zeta'=\frac{ds^3d.\frac{d\zeta'}{ds'}}{d^2\zeta'^2+d^2y'^2+d^2x'^2-dy'^2}$$
$$y-y'=\frac{ds'^3d.\frac{dy'}{ds'}}{d^2\zeta'^2+d^2y'^2+d^2x'^2-d^2s'^2}$$
$$x-x'=\frac{ds'^3d.\frac{dx'}{ds'}}{d^2\zeta'^2+d^2y'^2+d^2x'^2-d^2s'^2}.$$

Lorsqu'on voudra faire usage de ces valeurs, il sera bon de prendre une différentielle pour constante, quoique cela ne soit pas indispensablement nécessaire (n°. 74). Quand on aura chassé de ces expressions les variables x', y' et leurs différentielles, celles de ζ' disparoîtront, et il ne restera plus que la variable ζ', dont l'élimination conduira à deux équations qui appartiendront à la courbe sur laquelle se trouvent tous les centres de courbure.

355. Le calcul suivant va confirmer la remarque que nous avons faite dans le n°. 352 à l'égard de cette courbe et nous prouvera qu'elle ne sauroit être une développée, que dans le cas où la courbe proposée est plane.

Faisons pour abréger
$ds'd^2x'-dx'd^2s'=\alpha$, $ds'd^2y'-dy'd^2s'=\beta$, $ds'd^2\zeta'-d\zeta'd^2s'=\gamma$, et éliminons des équations ci-dessus la quantité $\frac{ds'^3}{d\zeta'^2+dy'^2+dx'^2-d^2s'^2}$, qui leur est commune, il viendra
$$(y-y')\gamma=(\zeta-\zeta')\beta, \quad (x-x')\gamma=(\zeta-\zeta')\alpha,$$
équations qui sont celles du rayon de courbure absolu. En regardant les coordonnées x, y et ζ comme celles du point d'intersection de deux rayons de courbure consécutifs, il faudra que ces quantités restent constantes, lorsque x', y' et ζ' varieront une fois, et que par conséquent les équations
$$(y-y')d\gamma-\gamma dy'=(\zeta-\zeta')d\beta-\beta d\zeta'$$
$$(x-x')d\gamma-\gamma dx'=(\zeta-\zeta')d\alpha-\alpha d\zeta'$$
ayent lieu en même tems que les précédentes : chassant $x-x'$, $y-y'$ et $\zeta-\zeta'$, entre ces quatre équations, on obtiendra l'équation de con-

dition qui doit avoir lieu pour que deux rayons de courbure consécutifs se coupent : cette équation sera

$$(\gamma dy' - \beta dz')(\alpha d\gamma - \gamma d\alpha) - (\gamma dx' - \alpha dz')(\beta d\gamma - \gamma d\beta) = 0.$$

En effectuant les multiplications indiquées, et faisant les réductions qui s'offriront ensuite, on trouvera un résultat qui pourra s'écrire ainsi qu'il suit :

$$d\alpha(\beta dz' - \gamma dy') + d\beta(\gamma dx' - \alpha dz') + d\gamma(\alpha dy' - \beta dx') = 0;$$

mettant au lieu de α, β et γ les quantités qu'ils représentent, on aura d'abord

$$\begin{aligned} d\alpha &= ds'd^2x' - dx'd^2s', & \beta dz' - \gamma dy' &= ds'(dz'd^2y' - dy'd^2z') \\ d\beta &= ds'd^2y' - dy'd^2s', & \gamma dx' - \alpha dz' &= ds'(dx'd^2z' - dz'd^2x') \\ d\gamma &= ds'd^2z' - dz'd^2s', & \alpha dy' - \beta dx' &= ds'(dy'd^2x' - dx'd^2y'); \end{aligned}$$

substituant ces valeurs et négligeant les facteurs communs, on trouvera que l'équation ci-dessus a pour développement

$$\left.\begin{aligned} dz'd^2x'd^2y' - dz'd^2y'd^2x' + dy'd^2z'd^2x' \\ - dy'd^2x'd^2z' + dx'd^2y'd^2z' - dx'd^2z'd^2y' \end{aligned}\right\} = 0,$$

et qu'elle est par conséquent la même que celle qu'on obtiendroit en cherchant si le plan osculateur peut passer par quatre points consécutifs ; car cette dernière résulteroit de l'élimination des quantités $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, entre les trois équations

$$\begin{aligned} A\,dx' + B\,dy' + C\,dz' &= 0 \\ A\,d^2x' + B\,d^2y' + C\,d^2z' &= 0 \\ A\,d^3x' + B\,d^3y' + C\,d^3z' &= 0. \end{aligned}$$

356. Pour parvenir aux équations d'une *développée*, nous observerons que les équations $du = 0$, $d^2u = 0$, renferment la relation qui doit avoir lieu entre les quantités x, y et z, pour tous les centres, et que le caractère commun à tous ceux qui sont sur une même développée, consiste en ce que les rayons menés de chacun d'eux, au point correspondant de la courbe proposée, sont tangens à cette développée. En nommant X, Y et Z, les coordonnées des points quelconques de l'espace, et en affectant toujours x, y et z aux centres de courbure, les équations de la tangente à la courbe qui en réunit une suite, seront

$$X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z), \qquad Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z),$$

et comme cette droite doit passer par le point de la courbe proposée, dont les coordonnées sont x', y' et z', il en résultera les équations suivantes,

$$x-x'=\frac{dx}{dz}(z-z'), \qquad -y'=\frac{dy}{dz}(z-z').$$

Il suffit de combiner une seule de ces équations avec l'équation $du=0$, pour déterminer la tangente de la développée, parce que l'équation $du=0$ est elle-même celle du plan tangent de la surface développable formée par les intersections successives des plans normaux, et sur laquelle se trouvent les développées. Ce n'est qu'en faisant usage des méthodes du Calcul intégral, qu'on peut passer de l'équation de la tangente d'une courbe à celle de cette courbe elle-même, ainsi nous sommes obligés de nous arrêter ici.

357. Nous terminerons cette théorie des Courbes à double courbure, en faisant remarquer qu'elles sont susceptibles de deux espèces d'inflexions; la première est relative à la courbure de la surface développable que forme l'ensemble de leurs tangentes, et a lieu lorsque le rayon de courbure de cette surface passe du positif au négatif, et réciproquement (*).

La seconde espèce d'inflexion des Courbes à double courbure répond au cas où leur rayon de courbure absolu change de signe. Cette matière demanderoit pour être traitée avec exactitude et clarté, quelques détails, dans lesquels je ne puis entrer maintenant; il me suffit d'avoir mis le lecteur sur la voie de ces recherches, dont l'application d'ailleurs n'est pas fréquente.

(*) Les inflexions des surfaces se reconnoissent par le changement de signe de leurs rayons de plus grande et de moindre courbure; et la position des centres de ces courbures, fait voir de quel côté sont tournées les concavités de la surface proposée.

Fin de la première Partie.

EXTRAIT DU RAPPORT

Fait à la Classe des Sciences physiques et mathématiques de l'INSTITUT NATIONAL des Sciences et Arts.

LE C. *Lacroix* Professeur de Mathématiques aux Écoles centrales, ayant présenté à l'Institut le plan d'un nouveau Traité de Calcul différentiel et intégral, avec l'Introduction et les quatre premiers Chapitres déjà imprimés, Nous avons été chargés, le C. Laplace et moi, d'en rendre compte à la Classe des Sciences physiques et mathématiques.

Depuis long-temps les Traités d'*Euler* sur le Calcul différentiel et le Calcul intégral, servent de guides à tous ceux qui veulent approfondir l'étude de l'Analyse; mais ces ouvrages qui sont au-dessus de tout éloge commencent à être extrêmement rares. Les découvertes faites postérieurement ont perfectionné considérablement quelques théories et en ont créé de nouvelles. D'un autre côté, les ouvrages particuliers et les Collections Académiques qui contiennent ces découvertes, ne sont pas toujours à portée de ceux qui auroient le plus d'intérêt et d'envie de les consulter. Ces raisons ont engagé le C. *Lacroix* à rassembler dans un seul corps d'ouvrage, non seulement la substance des Traités d'*Euler* mentionnés, mais celle des meilleurs Mémoires qui ont été publiés jusqu'à présent sur cette matière.

Présenter avec clarté des théories difficiles, les lier avec d'autres théories connues, dépouiller quelques-unes de la partie systématique ou erronée dont elles ont pu être obscurcies à leur naissance, répandre sur le tout un égal degré de lumière et de précision, en un mot faire un ouvrage qui soit à la fois élémentaire, et à la hauteur actuelle de la science; tel est le but que s'est proposé le C. *Lacroix*, et qu'il n'a pu remplir sans s'engager dans de profondes recherches et marcher souvent de front avec les inventeurs.

Le plan général ayant été lu à la classe, nos Collègues ont pu s'en former une idée, et il nous suffit de dire qu'il présente un ensemble de méthodes et de théories dont plusieurs n'ont encore paru dans aucun traité de ce genre. . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Il résulte de notre examen, que l'ouvrage du C. *Lacroix* aussi important dans son objet que difficile dans son exécution, renferme tout ce qui, dans l'état actuel de la science, peut constituer un traité complet de Calcul différentiel et intégral. A en juger par l'Introduction et les Chapitres dont nous venons de rendre compte, il nous paroit que cet ouvrage se fera distinguer par le choix des méthodes, leur généralité et la rigueur des démonstrations.

Nous croyons en conséquence, que l'Institut national doit accueillir et encourager de son approbation le zele et les talens dont le C. *Lacroix* fournit une nouvelle preuve et qui étoient déjà connus avantageusement de la ci-devant Académie des sciences, par plusieurs Mémoires intéressans dont un sur les Tables du Soleil, et un autre qui a obtenu le prix sur la Théorie des Assurances maritimes.

Fait à l'Institut national le 11 Nivôse, an V.

Signé LAPLACE et LEGENDRE.

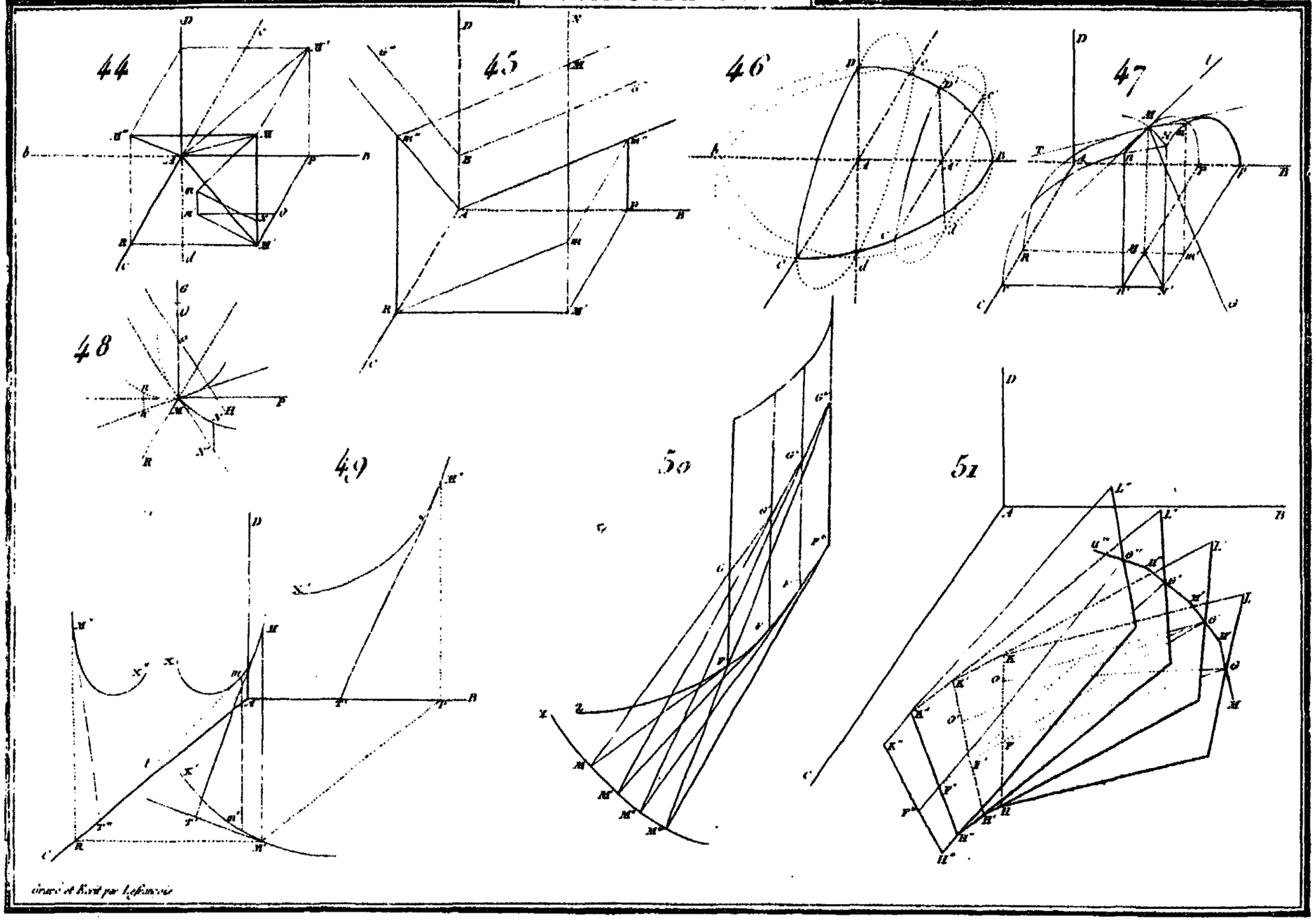
La Classe approuve le rapport et en adopte les conclusions.

Certifié conforme à l'original. A Paris, le 12 Nivôse an V. de la République.

Signé B. G. E. L. LACEPÈDE.

PLANCHE IVme

a la Fin



Gravé et Ecrit par Lefrançois

ERRATA.

PAGE 5, ligne 20, $\frac{1}{3}$, *lisez* $\frac{1}{4}$; l. 21, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, *lis.* $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$; l. 22, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, *lis.* $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$.
6, ligne 21, *effacez* où.
8, l. 27, $\frac{3}{2}$; *lisez* $\frac{2}{3}$.
11, l. 4, x_2, *lis.* x^a.
13, l. 19, $Q=(2p+1)$, *lis.* $Q=2(p+1)$; l. 25, $m>200$, *lisez* $m>400$;
l. dern. $2(p+1)$, *lis.* $2(p+2)$, *deux fois.*
21, l. 3, troisième colonne, $Cpn-4b'''x$, *lis,* $Cpn-3b'''x$.
22, l. 11, $a'''\ldots(m)$, *lisez* $a'''\ldots(m+1)$; $a'''\ldots(m-1)$, *lisez* $a'''\ldots(m)$.
24, l. 13, $P\frac{(A-a^{(m+1)})}{a^{(m)}}$, *lisez* $P\frac{(A-a^{(m)})}{a^{(m+1)}}$.
30, l. 15, n, *lis.* u.
40, l. 5, $l'10=1$, *lis.* $l10=1$.
47, l. dernière, et pag. 48, l. première, $\frac{p}{u}$, *lisez* $\frac{u}{p}$.
49, l. 13, *effacez* lp *dans le second membre*; l. 27, $a=n$, *lisez* $A=n$.
53, l. 25, $=\cos x\cos u$, *lis.* $=2\cos x\cos u$,
54, l. 9, *prem. colonne, dans le second membre*, A_{n-2}, *lis.* A_n.
l. 7, *deuxième colonne*, $4A_n^3$, *lis.* $4A_2^3$.
56, l. 3, A_1, *lisez* A_2; l. 7, $2^{\frac{m+1}{2}}A_2^{\frac{m+1}{2}}$, *lisez* $2^{\frac{m+n}{2}}A_2^{\frac{m+n}{2}}$.
58, l. 12, B, *lis.* B_1.
62, l. 3, $\frac{x^4}{1.2.3.}$, *lis.* $\frac{x^4}{1.2.3.4}$.
63, l. 2 et 4, $\tan x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\{\ldots$, *lis.* $\tan x=\frac{1}{\sqrt{-1}}\{\ldots$
66, l. 9, $-e^{(x+z)\sqrt{-1}}$, *lis.* $-e^{-(x+z)\sqrt{-1}}$.
l. 19, $+\sqrt{-1}\sin x$, *lis.* $-\sqrt{-1}\sin x$.
71, l. 27, *après la première équation, ajoutez* (n°. précéd.)
73, l. 4, $-\frac{n}{1}(u^{n-1}-v^{n-1})\ldots$, *lis.* $-\frac{n}{1}uv(u^{n-2}-v^{n-2})$.
75, l. 11, $1=90°$, *lisez* $\zeta=90°$.
79, l. 3, $\cos x\cos\zeta$, *lisez* $\cos x\sin\zeta$.
82, *note marginale*, donne, *lisez* devient.
84, l. 21, *supprimez le deuxième u' de cette ligne.*
86, l. 21, $A(x+h)^\alpha$, *lisez* $A(x+k)^\alpha$
90, l. 4, donc X_2, *lis.* donc X_2'.
note, l. 2, $\frac{f''(x+\ )}{2}$ *lis.* $\frac{f''(x+k)}{2}$.
93, *note* { l. 8, $a=b-c$, *lisez* $a=c-b$.
l. 13, $b=\frac{c}{b}$, *lisez* $b=\frac{c}{a}$.
117, l. 3, $x+k$ au lieu de x, *lis.* $y+k$ au lieu de y.
l. 13, $\frac{k^2}{1}\frac{h}{1.2}$, *lisez* $\frac{k^2}{1.2}\frac{h}{1.}$
118, l. 6, $f(x+h, y+h)$, *lisez* $f(x+h, y+k)$.
123, l. 5 *en remont.* $\frac{du}{dx}k$, *lis.* $\frac{du}{dy}k$.
125, l. 9 *en remont. au dénom.* $dx^{n-1}dy^2$, *lis.* $dx^{n-1}dy$.

Calcul différentiel.

ERRATA.

Page 126, l. 18, $\frac{du}{dx}h+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{k^2}{1.2}$ .... *lis.* $\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}$;

129, l. 19, $(p+qx+cdx^2)^r$, *lis.* $(p+q\,dx+c\,dx^2)^r$.

130, l. 19, $\frac{c^2}{p^4}$, *lis.* $\frac{c^2}{q^4}$.

139, l. dern. *lis.* $y'h$ pour k, $y''h$ pour k', $y'''h$ pour k'', y^{IV} pour k'''.

155, l. 12 *en remontant.* xd^2x+yd^2x.... *lis.* xd^2x+yd^2y....

147, l. 13, $\frac{a\,dP}{P}-\frac{b\,dP}{1+P^2}$, *lis.* $\frac{a\,dP}{P}-\frac{dQ}{1+Q^2}$.

160, l. 4, $d^2x=0$, *lis.* $a^2y=0$.

166, l. 18, *au dénominateur,* $(dx\,d^2y-dy\,d^2x)$, *lis.* $(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2$

l. 20, *au dénominateur,* $x'y''-y'x''$, *lis.* $(x'y''-y'x'')^2$.

172, l. 24, $d^{n}t$, *lis.* $d^{m}t$; l. 34, qu'ils ont eues, *lis.* qu'ils ont eu.

173, Mais $\frac{dx}{d\zeta}dx+$.... *lis.* $\frac{d\zeta}{dx}dx+$....

174, l. 4, *en remont. au dénominateur du premier terme,* dy, *lis.* dy^2.

182, l. 4, *dans le premier membre,* dU, *lis.* dU_1; *dans le second membre, au dénominateur,* dx^3, *lis.* dx_3.

187, l. 1, *lis. par-tout,* dU_3.

188, l. 19, $\frac{d^2V}{dx}h^2$, *lis.* $\frac{d^2V}{dx^2}h^2$; l. 22, $\frac{dV}{dy}gx$, *lis.* $\frac{dV}{dx}gx$.

189, l. 20, $r'h^3$, *lis.* $r'h^2$.

190, l. 6, $u+ll$, *lis.* $u+k$.

191, *note,* l. 11, diffère infiniment peu, *lis.* son cosinus diffère infiniment peu.

198, l. 2, $B=\cos\alpha$, *lis.* $B=\beta\cos\alpha$; l. dern. $Y^0=1$, *lis.* $Y=1$.

199, l. 18, $Y=a$, *lis.* $Y=1a$;

200, l. 12, $\frac{dy^5}{d^5x}$, *lis.* $\frac{d^5y}{dx^5}$.

202, *note,* l. 7, ... $+Nx^{n-1}$, *lis.* .... $+nNx^{n-1}$.

l. 8, $(n-1)nNx^{n-1}$, *lis.* $(n-1)nNx^{n-2}$.

203, l. 2, de l'arc, *lis.* de la tangente; l. 3, de la tangente, *lis.* de l'arc.

204, l. 4, $+4dya^3\zeta$, *lisez* $+4dyd^3\zeta$; l. 17, $ydx^{n-1}\zeta$, *lisez* $ydx^n\zeta$; $dydx^{n-2}\zeta$, *lis.* $dydx^{n-1}\zeta$; l. 18, $dx^n.y2$, *lis.* $dx^n.y\zeta$.

207, l. 5, sera $f(x')$..., *lis.* sera $f'(x')$...

210, l. 12, $a-y+x(y)=0$, *lis.* $a-y+x\varphi(y)=0$.

215, l. 15 et 16, au chapitre suivant... *lis.* au Mémoire de La Grange, (Tome XXIV de l'Académie de Berlin).

216, l. 5 *en remont.* $d\frac{\sin a}{a}$, *lis.* $d\frac{\sin a^2}{a}$; $a^2\frac{\sin a^2}{a^2}$, *lis.* $d^2\frac{\sin a^3}{a}$.

220, l. 5 *en remontant,* $aAmx^{n+n\alpha}$.... *lis.* $aAnx^{m+n\alpha}$.

223, l. 3 et 5 *en remont. les signes des termes de ces équations doivent être altern.* $+$ *et* $-$; *il faut, dans la lig.* 3, *mettre le signe* $-$ *avant* $a^vA^{6x}x^{-3+6\alpha}$.

224, l. 13 et 20, *signes alternatifs.*

225, l. 23, *même correction.*

226, l. 8, *troisième terme,* $a''x^{\frac{8}{3}}$, *lis.* $a''A^2x^{\frac{6}{3}}$.

ibid. l. 20, *mettez le signe* $-$ *avant* $a''A^4x^{-9}$.

228, l. 8 *en remontant,* $B=$.... *lis.* $\beta=$....

229, l. 8, $a-1A^3=1$, *lis.* $a-aA^3=0$; l. 11, $-y^3$, *lis.* $-ay^3$.

233, l. 13 et 14, *mettez le signe* $-$ *avant la fraction* $\frac{1}{m}$ *dans les exposans des dénominateurs.*

234, l. 9, $\frac{a^2y}{dx}$, *lis.* $\frac{d^2y}{dx^2}$;

ERRATA.

Page 235, l. 1; donner, *lisez* donner pour ξ; l. 2; $k^3 - A = 0$, $k^3 - B = 0$; *lis.* $\xi^3 - k = 0$, $\xi^3 - k = 0$; l. 20, $b + \sqrt{-a}$, *lis.* $b + \sqrt{x-a}$.

236, l. 15, $(x-a^3)^{-\frac{1}{2}}$, *lis.* $(x-a)^{-\frac{1}{2}}$.

237, l. 4, *au troisième terme*, $m\,b\,x^{m-2}$, *lis.* $m\,b\,x^{m-1}$;

l. 7, *à la fin de la formule*, $x\,(-a)^{\frac{p}{q}-n}$ *lis.* $(x-a)^{\frac{p}{q}-n}$

240, l. 7, dy, *lis.* $\frac{dy}{dx}$.

241, l. 10, $\pm\frac{1}{a}$, *lis.* ± 1.

253, l. 3 *en remont. l'exposant du numérateur doit être* $\frac{3}{2}$ *comme celui du dénomin.*

256, l. 24, par y, *lis.* par e.

259, l. 2, $y = F(u)$, *lis.* $y = F(a)$; l. 8, $F'(b)$, *lis.* $F_1'(b)$;

l. dern. $d^n.\xi^m\frac{du}{du}$ *lis.* $d^n.\xi^m\frac{du}{da}$.

260, l. 12, $\frac{d\,\xi^{m+nu}}{d\,\xi^m.dx^n}$, *lis.* $\frac{d^{m+n}u}{d\,\xi^m.dx^n}$.

261, l. 3, ces articles, *lis.* cet article.

262, l. 19, $x-a$, *lis.* $x=a$; l. 21, $\xi = \frac{ac}{y}$, *lis.* $\xi = \frac{2ac}{y}$.

268, l. pénult. *maximum*, *lis. minimum.*

269, l. 2, *minimum*, *lis. maximum.*

270, l. 6, *au numérateur de* x, *lis.* $m\,a$, *au lieu de* $n\,a$.

273, l. 1, $\frac{d^2u}{dx^n}$ *lis.* $\frac{d^2u}{dx^2}$.

l. 7, *minimum*, *lis. maximum*; l. 8, *maximum*, *lis. minimum.*

274, l. 28, négatif, *lis.* positif; l. 29, *maximum*, *lis. minimum.* *minimum*, *lis. maximum*; l. 30, positive, *lis.* négative.

275, l. 6, $Fh^2, +2Gkl+\ldots$, *lis.* $Fh^2+2Ghk+\ldots$.

l. 14, P et Q, *lis.* P et T.

277, *note marginale*, semblables, *lis.* symétriques.

282, l. 10, *au second terme*, ξ, *lis.* ξ^2.

287, l. 12, tout facteur, *ajoutez*, du second degré.

l. 14, des racines de cette équation, *lis.* des facteurs du premier.

l. 17, $\alpha^2+\beta+M'\alpha\beta$, *lis.* $\alpha+\beta+M'\alpha\beta$.

288, l. 12, M, *lis.* M'; l. 22, $X - Y\sqrt{-1}$, *lis.* $X + Y\sqrt{-1}$.

289, l. 16 et 18, *le second terme de chaque formule doit être multiplié par* x.

290, l. 22, $2^m n - 1 = n'$, *lis.* $n(2^m n - 1) = n'$.

291, l. pénult. $\left(\frac{m}{a}a^{m-1}b\ldots\right.$ *lis.* $\left(\frac{m}{1}a^{m-1}b\ldots\right.$.

293, l. 10, $\frac{c+2c+\xi}{m}$, *lis.* $c + \frac{2c+\xi}{m}$.

note l. 14, OM', *lis.* OP'; l. 16, OM'', *lis.* OP''.

303, l. dern. $a^2 - 2x\cos\ldots$. *lis.* $a^2 - 2ax\cos\ldots$.

311, l. 13, $+Q$, *lis.* $\pm Q$.

314, l. 13, deux négatives et une positive, *lis.* deux positives et une négative; l. 17, une variation et deux permanences, *lis.* deux variations et une permanence.

317, l. 7 *en remont.* $= \epsilon^{m\,l\,r-n}[\cos\ldots$, *lis.* $= \epsilon^{m\,l\,r-n\,s}[\cos\ldots$.

318, l. 1, $= a^m \epsilon^{m-2i\pi}[\ldots$ *lis.* $= a^m \epsilon^{-2in\pi}$.

ERRATA.

Page 319, l. 4, $x=\frac{\pi}{4}$, *lis.* $x=\frac{\pi}{2}$.

324, l. 5 *en remont.* entre et ...., *lis.* entre x et ....

325, l. 10 *en remont.* $x_x-100=0$, *lis.* $x^x-100=0$.

329, l. 1, *lis. partout*, P' et M', *au lieu de* P et M.

331, l. 3. $P'N$..., *lis.* $P'N'$.

332, l. 16, *au dénominateur*, $\sqrt{\ +a^2}$, *lis.* $\sqrt{1+a^2}$.

336, l. 2, $a\sqrt{48a^2}$, *lis.* $\sqrt{48a^2}$; l. 19, G, *lis.* H.

340, l. 3, $x>b$, *lis.* $x=$ ou $>b$.

342, l. 19, $A''B'$, *lis.* $A''C'$; l. 23, AA'', *lis.* $A'A''$; l. 30, AR, *lis.* $A''R$.

346, l. 20, $\alpha+\beta u^2+\gamma t^2=0$, *lis.* $\alpha+\beta u^2+\gamma t^2=0$.

347, l. 4 *en remont.* (n°. précéd.) *lis.* (n°. 212).

348, l. 13, à p, *lis.* à t.

352, l. 16, et enfin U, *lis.* et enfin $P+Qx+Rx^2.... +Ux^n$.
l. pénult. Si le terme de y^{r-1}, *lis.* Si le terme affecté de y^{r-1}.

353, l. 5 *en remont.* quatre, *lis.* trois.

356, l. 4, $-3axy$, *lis.* $-3Axy$.

357, l. 21, en A, *lis.* en M.

365, l. 2, au-dessus, *lis.* au-dessous; l. 3, au-dessous, *lis.* au-dessus.

367, l. 21, pour y, *lis.* pour y''; l. 24, *dans les valeurs de* m *et de* n *changez* B' *en* B; l. dern. $B'm^{-\beta}u^{-\beta}....$ *lis.* $B'm^{\beta'}u^{-\beta'}$.

369, l. 18, k et h, *lis.* h et k.

372, l. 20, coupera, *lis.* touchera.

380, l. 2, $\frac{dy'}{dx'^2}$, *lis.* $\frac{d^2y'}{dx'^2}$.

381, l. 6—7, de son ordonnée, *lis.* des abscisses.

386, l. 8 *en remont.* la branche X, *lis.* la branche HX.

388, l. 4, D et H, *lis.* F et H.

390, l. 8, $y''MY'$, *lis.* MY''.

394, l. 2, *l'exposant du numérateur est* $\frac{3}{2}$.

405, l. 7, de même ensuite, *lis.* de mener ensuite.

406, l. 12, MF, *lis.* MM'; l. 17, QE, *lis.* EM'; l. 18, EM', *lis.* EP.

408, l. 15, $d'y$, *lis.* dy'.

409, l. 18, $u=2\pi t$, *lis.* $u=\frac{t}{2\pi}$.

414, l. 6, AMF, *lis.* AFM.

416, l. 16, AM, *lis.* DM.

424, l. 21, $=f''(x+dx^2)....$ *lis.* $f''(x+dx)dx^2....$

425, l. 16, $M''Q'-MQ$, *lis.* $M''Q'-M'Q$.

427, l. 20 MGQ et MGQ', *lis.* MGO et MGO'; l. 27, MGQ, *lis.* MGO.

463, l. 4 *en remont.* $=\frac{1}{C}\sqrt{...}$, *lis.* $=\frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{...}$, l. pénult. *au dénom.* C, *lis.* $\sqrt{C}$.

464, l. 3 *au dénom.* C, *lis.* $\sqrt{C}$.

467, l. 15, pMN, *lis.* pmN.

472, l. 5 *en remont.* $'-\gamma$, *lis.* $\zeta'-\gamma$.

478, l. 8 *en remont.* $-d'$, *lis.* $-dx'$.

482, l. 16, *après* MN, *ajoutez* fig. 48.

508, l. 10, *au commencement de l'équation*, $(\zeta-\zeta')$, *lis.* $(x-x')$.
l. pénult. *mettez après l'équation, l'indication....* (a).

Table, page xxxij, l. 9, *ajoutez* les années 1772, 1777 (Lagrange); Meditationes analyticæ (Waring); Journal de l'École Normale, T. III, (Laplace).