Questo libro porta alcuna postilla del Pisani

[illegible]

NOVA STEREOMETRIA DOLIORVM VINARIORVM, IN PRIMIS Auſtriaci, figuræ omnium aptiſsimæ;

ET

USUS IN EO VIRGÆ CUBICÆ compendioſiſſimus & plane ſingularis.

Acceſſit

STEREOMETRIÆ ARCHIMEDEÆ Supplementum.

Authore

Ioanne Kepplero, Imp. Cæſ. Matthiæ I. ejuſq; fidd. Ordd. Auſtriæ ſupra Anaſum Mathematico.

Cum privilegio Cæſareo ad annos XV.

ANNO *M. DC. XV.*

LINCII

Excudebat JOANNES PLANCVS, ſumptibus Authoris.

Illustrissimo Domino

D. MAXIMILIANO,

DOMINO DE LIECHTENSTEIN ET Nickelspurg, Domino Rabenspurgi, Hohenaugæ, Butschavizij Poserizij & Neogradi,

SACRÆ CÆSAREÆ MAIESTATIS CONSILIARIO, Camerario & stabuli Præfecto, &c.

Nec non

Illustri & Generoso Domino

D. HELM HARDO IÖRGERO,

IN TOLLET, KEPPACH, GREBING & Hernals, Domino Steireccij & Erlachij, Lib: Baroni de Creüspach: Archiducatus AVSTRIÆ supra ANASUM aulæ Magistro provinciali hæreditario:

SACRÆ CÆSAREÆ MAIESTATIS AD CAMERAM aulicam Consiliario; & pro tempore Provinciæ dictæ ex Baronibus Ordinario;

Dominis meis gratiosissimis

CVM SVPERIORI Novembri mense, ILLVSTRISSIME DOMINE, ILLVSTRIS ET GENEROSE L. BARO, DOMINI GRATIOSISSIMI, novam nuptam domum dedu-

 xissem;

xiſſem; tempore tali, quando Auſtria, vindemiâ copioſâ, nec minus generoſâ collectâ, plurimis onerarijs adverſo Danubio miſſis, opes ſuas Norico noſtro dividebat, litusq; omne Lincianum vaſis vinarijs tolerabili precio venalibus obſtructum viſebatur: conveniens erat officio mariti, boniq; patris familias, ut domui meæ de neceſſario potu proſpicerem. Dolijs igitur aliquot domum illatis & conditis, poſt dies quatuor venit venditor cum virga menſoria, qua vnâ & eâdem cados promiſcuè omnes exploravit ſine diſcrimine, ſine reſpectu figuræ, ſine ratiocinatione vel calculo. Demiſſa enim acie virgæ aeneâ in orificium infuſorium pleni cadi tranſverſim ad calcem vtriusque orbis lignei, quos fundos vernaculo vſu dictitamus, poſtquàm vtrinq; æqualis apparuit hæc longitudo à ventris ſummo ad vtriusq; circularis Tabulæ imum: de nota numeri, quæ erat impreſſa virgæ eo loco, quo deſinebat hæc longitudo, pronunciavit

nume-

numerum amphorarum, quos caperet cadus: secundum quem numerum ratio fuit inita precij.

Mirari ego, si transversa linea per corpus dimidij cadi ducta argumentum esse posset capacitatis; dubitare etiam de fide huius dimensionis; cum cadus inter binos orbes brevissimus, tantummodò orbibus paulo latioribus, eoq; perexiguæ capacitatis, possit habere eandem longitudinem ab infusorio, ad orbis alterutrius imum. Subijt memoriam laboriosa dimensio ad Rhenum vsitata: vbi aut cados implent, & per singulas liquoris amphoras numerando transeunt, cum fastidiosa temporis occupatione, notasq; capacitatis inurunt vasis exploratis: aut etsi virgis mensorijs vtuntur, vt plurimum tamen diametros orbium & longitudinem tabularum curvatarum metiuntur: easq; inter se multiplicant, variasq; cautiones adhibent, de Orbium inter se inæqualitate, ventris amplitudine, curvatura tabularum: neq; sibi invicem satisfaciunt; quin alij alios erroris arguunt.

Cùm igitur didicissem, usum hunc virgæ transversalis publica hic authoritate stabilitum, & juratam illi mensorũ fidem: visum est non inconveniens novo marito, novum Mathematicorum laborum principium, certitudinem hujus compendiosæ, & ad rem familiarem pernecessariæ dimensionis ad leges Geometricas explorare, fundamentaq;, si quæ essent, in lucem proferre.

Cùm autem speculatio hæc superiori triduo jucunda quadam varietate successisset, adeò vt certi quid pronunciari posset: jamq; ad perscribendam & excolendam hanc demonstrationem, quippe quòd jam erat mente comprehensa, calamum stringerem: non diu mihi quærendi erant, quos dedicatione, quod principium erat libelli, alloquerer; qui ingenij rectitudine demonstrationum ἀκρίβειαν æquarent, pulchritudinemq; earum singulari cupiditate prosequerentur: talem enim Te, Illustrissime Domine de Liechtenstein, mihi hi prædicavit Medicus tuus D. Ioannes VVodderbornius Scotus, vir Mathematicis artibus exercitatissimus, eòq; mihi amicissimus, qui commodùm interveniens, TUI memoriam mihi præsentiâ suâ renovavit: Talem etiam TE Illustris & Generose L. B. JÖRGERE, longo usu cognitum habebam: quâ in laude ita pares estis; vt injuriam alterutri facere videri possim, quippe vtriusq; cliens, si alterum solum nominarem.

Et quid impediat, quo minus collegas hic vos designem? quippe in negocio, ubi non jam nobilitatis, non dignitatis, non virtutum politicarum, non ullius rei, quam Mathematicus cernere soleat; sed ingenij tantùm, & si licet addere, patrocinij mei æmulatio locum habet.

Nullâ igitur hæsitatione usus, strenam GG. VV. in subeuntes Ianuarij Calendas ex speculatione mea concinnare statui: quâ & de gratitudine in Deum, pro acceptis his alijsq; transacti anni beneficijs, vtrinq; admoneremur, juxtàq;

& vos

& vos Patroni ex dedicatione rei gratæ, & ego author ex lectoribus & æstimatoribus intelligentibus, mutuâ voluptate frueremur: utq; hoc Austriæ nostræ decus, Austriacæ potissimùm Nobilitatis Proceres, vinique mensurandi ratio, vinearum latissimarum possessores, quibus vinum ad munificentiam usq; suppeteret, patronos haberet.

Valete Gen: Proceres, & speculatione pulcherrimâ, delicijs vestris consuetis, animos vestros oblectate, Annumq; subeuntem hilares & macti bonis omnigenis transigite: meq; ut consuestis, vestrâ gratiâ porrò quoq; prosequimini. Lincij, XVI. Cal. Ian. Anno Christianorum Occidentalium M.DC.XIII.

Ill^æ & Ill^{is} GG. VV.

Devotissimus

Imp. Cæs. MATTHIÆ
Ejusq; fidd. Ordd. Austriæ s. A.

Mathematicus

Joannes Kepplerus.

STEREOMETRIA DOLIORVM.

Præambulum DE RATIONE FIGVRÆ DOLII VINARII.

OMNIS artificiosa & compendiosa dimensio spacij, figuram etiam ordinatam requirit; nam Vasa nullius certæ, nullius ordinatæ figuræ, ingenium respuunt, solamq; manum & numerationes successivas infusi liquoris expectant.

Vasa vinaria, materiæ, structuræ, ususq; necessitate figuram circularem sortita sunt, conicæ & cylindricæ affinem. Humor enim in vasis metallicis diutius contentus corrumpitur ærugine; Vitrea & testacea, nec suppetunt, nec tuta sunt; Lapidea sunt usu inepta ob pondus: superest igitur, vt vina ligneis excipiamus condamusq;. At rursum ex vnica trabe vasa nec facile, nec ampla, nec in necessaria copia parari possunt, & si possent, rimas agunt. Ex multis igitur lignis inter se coassatis dolia construi oportet. At commissuræ lignorum nulla materia, nulla arte muniri contra effluxum humoris possunt, nisi sola vinculorum constrictione. Vincula verò cum sint ex materia flexili, ex Beta, Quercu, aut similibus, vrgente mole solubili rerum, quas cum violentia quadam constringunt, sese diduntin ambitum omnium capacissimum. Summa igitur ratione Vietores rediguntur ad circulos: ne, si venter Cadi vt dictum, circularem affectat amplitudinem, ipsi figuram aliam in oris extimis instituentes, distortum & imbecille Vas efficiant. Videre est in Lagenis, quibus Italica vina trans Alpes important in Germaniam; quæ cum, vsu exigente, compressæ figuræ sint, vt ad Mulorum latera appendi, & per angustias viarum transportari inoffensè possint: & ne longiùs procurrentes à lateribus Mulorum, ex ratione stateræ plus gravent jumenta, & quassationem reddant violentiorem: qua parte sunt complanatiores, illa & imbecillius impetum sustinent, facileq; dehiscunt.

Accedit & commoditas figuræ circularis seu Cylindraceæ, vt quia vina plaustris transportanda sunt per terram; plurimum vini, minimum ligni habeant moles. Quo nomine si Globus ex tabulis ligneis coassari posset, globosa potissimũ vasa futura fuissent. At quia Globus vinculis constringi nequit, pro Globo Cylinder successit. Neq; tamen is purus putus Cylinder esse potuit: nam vincula laxata statim fierent inutilia, nec possent adigi violentiùs, nisi dolium figura conicâ à medio ventris vtrinq; nonnihil coarctaretur. Est & apta hæc figura ad volvendum in directum (vnde Cylindro nomen) adq; vehendum in plaustris; & geminata basi, in quandam sui ipsius similitudinem, librationi commodissimam, visu speciosam, composita.

Cum igitur dolia vinaria Circulo Cono & Cylindro, figuris regularibus participent, apta sunt hactenus ad Geometricas dimensiones: quarum principia operæ precium est in vestibulo huius speculationis collocare; vt illa ab Archimede sunt investigata; quantum quidem huius ad oblectationem animi Geometriam amantis sufficiet: absolutæ enim & omnibus numeris perfectæ demonstrationes petendæ sunt ex ipsis libellis Archimedeis; si quis à spinosa lectione eorum non abhorruerit.

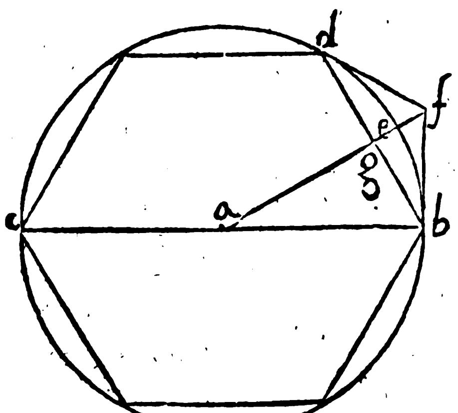
Liceat tamen in quibusdam locis, quæ non attigit Archimedes, nonnihil immorari; vt inveniant & doctiores, quibus juventur, seseq; oblectent.

Stereometria
I. Pars.
Curvorum regularium stereometria.
Theorema I.

Principiò requirebatur cognitio proportionis Circumferentiæ ad Diametrum. Et docuit Archimedes,

Rationem circumferentiæ ad diametrum, esse proxime eam, quæ est Numeri 22, ad 7.

Schema I.



Ad hoc demonstrandum vsus est figuris circulo inscriptis & circumscriptis; quæ cum sint infinitæ; nos facilitatis causa vtemur sexangula. Sit enim in circulo CBD, regulàre sexangulum, cui⁹ anguli C, D, B, latus DB, & tangant circulum duæ rectæ in D & B, coeantq; ad communem sectionem F: & centrum A cum F connectatur lineâ AF, quæ secet rectam DB in G, arcum DB in E. Cum igitur DGB sit recta, i. e. ductus à D in B brevissimus, DEB vero arcus, id est ductus à D in B non brevissimus, longior igitur est DEB, quam DGB.

E contra cum recta BF tangat circulum, omnes ~~igitur~~ partes arcus EB sunt intra FB versus GB: quòd si EB esset recta, omnino brevior esset, quàm FB. ~~Nam AEB, FEB anguli sunt æquipollentes Recto, cum EFB sit acutus.~~ Ergo EB subtensa minori angulo EFB, minor ~~est~~, quam FB, quippe quæ maiori est subtensa. Licet autem argumentari de EB ut de recta, quia vis demonstrationis secat circulum in arcus minimos, qui æquiparantur rectis.

Iam AFB ABE

Quanquàm interea quæ communi sensu sunt nota, recipi potest, arcum DEB, intra triangulum DBF, minorem esse lineis DF, FB, quippe qui cum flectatur versus angulum DFB, nullam tamen particulam habet extra lineas DF, FB: comprehendens autem, sensu communi majus est comprehenso. Secus haberet, si arcus DEB esset linea flexuosa & inordinata.

Cum igitur DB sit latus inscripti sexanguli, & DF, FB sint duæ medietates circumscripti sexanguli; arcus DEB erit circuli pars sexta: major verò erat quàm DB, minor quàm DF, FB. Sex igitur lineæ DB, minores sunt quàm circumferentia circuli, & duodecim lineæ DF, vel FB, sunt maiores quàm circumferentia.

Est autem DB latus sexanguli regularis, æquale ipsi AB semidiametro. Sex igitur diametri AB, hoc est tres diametri CB, vel (diametro in septem æqualia divisa) Viginti & vna septimæ, sunt breviores circumferentia.

Cum

Viciſſim cum DG, GB ſint æquales, erit GB dimidium ipſius AB. Quadratum verò AB æquale eſt junctis AG, GB quadratis, & eſt quadruplum quadrati GB, ergo AG eſt triplum quadrati GB. Proportio igitur quadratorum AB & AG eſt ſeſquitertia, linearum igitur AB & AG proportio eſt ſemi-ſeſquitertia, ſcilicet ea quæ numerorum 100000 & 86603. Vt vero eſt AG ad AB, ſic eſt GB ad BF. Ergo etiam inter GB & BF eſt proportio ſemi-ſeſquitertia; vt quia GB eſt dimidium ipſius AB, ſcilicet 50000; BF talium particularum habeat 57737 proximè. Duodecies igitur ſumptus numerus iſte, maior erit quam circumferentia circuli. Colligitur numerus 477974, qualium diameter habet 200000. Et qualium diameter habet 7, talium ſunt in BD duodecies ſumpta 24, minus vna decima. Maior igitur eſt hic numerus ipſa circumferentia; Minor autem eadem erat numerus 21. Et patet ad oculum, arcum BE propiorem eſſe ipſi BG, quam BF lineæ. Circumferentia igitur propior eſt numero 21, quam numero 24, minus vna decima. Ponitur igitur ab 21 receſſiſſe per 1, ab altero verò per 2, minus vna decima, vt ſit nimirum 22. Hæc autem longè accuratius demonſtrat Archimedes in figuris multilateris, vt ſunt figuræ 12, 24, 48 laterum: vbi etiam apparet, paulum quid deeſſe circumferentiæ, quo minus ſit 22. Adrianus Romanus eadem Methodo demonſtravit, ſi diameter circuli ſecetur in partes — — — 20000000000000000
tunc talium partium 62831853071795862 ferè eſſe in circumferentia.

Epiſagma.

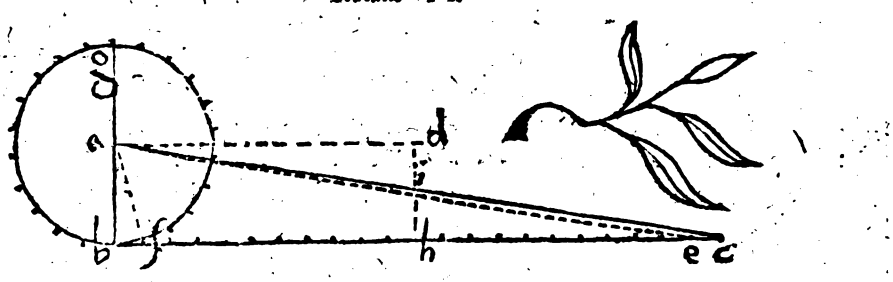
Ex tribus lineis ſectionum Conicarum, quæ Parabole, Hyperbole, Ellipſis dicuntur, Ellipſis eſt circuli æmula, & demonſtravi in Com. de Motibus Martis, longitudinem Ellipticæ lineæ ſeſe habere ad medium arithmeticum inter duas ejus diametros, quæ axis rectus & tranſverſus dicuntur, ſimiliter vt 22. ad 7. fere.

THEOREMA II.

Circuli area ad aream quadratam diametri comparata, rationem habet eam quam 11. ad 14. fere.

Archimedes vtitur demonſtratione indirecta, quæ ad impoſſibile ducit: de qua multi multa: Mihi ſenſus hic eſſe videtur.

Schema II.



Circuli BG circumferentia partes habet totidem, quod puncta, puta infinitas; quarum quælibet conſideratur vt baſis alicuius trianguli æquicruri, cruribus AB: vti ita Triangula in area circuli inſint infinita, omnia verticibus in centro A coeuntia. Extendatur igitur circumferentia circuli BG in rectum, & sit BC æqualis illi, & AB ad illam perpendicularis. Erunt igitur infinitorum illorum Triangulorum, seu Sectorum, bases imaginatæ omnes in vna recta BC, juxta invicem ordinatæ: sit vna talium basium BF quantulacunq; eiq; æqualis CE, conectantur autem puncta F, E, C, cum A. Quia igitur triangula ABF, AEC totidem sunt super recta BC, quot sectores in area circuli, & bases BF, EC æquales illis, & omnium communis altitudo BA, quæ etiam est sectorum; Triangula igitur EAC, BAF erunt æqualia, & quodlibet æquabit vnum sectorem circuli; & omnia simul in linea BC bases habentia, id est Triangulum BAC, ex omnibus illis constans, æquabit sectores circuli omnes, id est aream circuli ex omnibus constantem. Hoc sibi vult illa Archimedea ad impossibile deductio.

Divisa igitur BC bifariam in H, fiat ABHD parallelogrammum, vt DH secet AC in I. Erit hoc parallelogrammum Rectangulum æquale areæ circuli. Nam vt CB tota ad CH dimidiam, ita & AB, id est DH tota, ad IH dimidiam. Igitur HI æquat ID, & HC æquat DA, id est HB: & anguli ad I æquales, D vero & H recti. Triangulum igitur ICH, quod est extra parallelogrammum, æquale est triangulo IAD, quo parallelogrammum excedit trapezium AIHB.

Cum igitur diameter GB ponatur esse partium 7, quadratum diametri erit 49. Et cum harum partium 22 sint in circumferentia, sc: in BC, dimidia BH habebit earum 11, paulo minus, vt supra. Duc 11 in semidiametrum 3 semis, sc: in AB: fiet Rectangulum AH 38 semis.

Qualium ergò Quadratum diametri			Talium Area circuli inscripti
ht. 49.	—	ht.	38 semis.
bis 98.	—	—	77.
Divisi per 7. faciunt 14.	—	—	11. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. I.

Sectoris in circulo (constituitur rectis ex centro, & ex arcu intercepto) area est æqualis rectangulo sub semidiametro & dimidio arcu.

Corollarium. II.

Segmenti circuli minoris (portio est per vnam rectam recisa) area minor est sectoris areâ, triangulo sub sectoris & segmenti rectis comprehenso: Segmenti maioris area tanto maior est sectore suo.

Demonstratur autem in Geometricis, rectangulum sub perpendiculo trianguli & dimidia sectionis linea æquale esse areæ trianguli. Ablato igitur plano huius trianguli ab area sectoris, restat area segmenti minoris, sed addito, maioris segmenti area constituitur.

In Schemate I. DABE est sector minor, DABCD maior; DGBE segmentum minus, DGBC maius; DBA triangulum, quo sector à segmento differt.

differt. Id habet duas partes æquales & congruas, AGB, AGD. Apposito igitur angulo DAG ad GBA, sic ADG ad GAB, fit rectangulum altitudine AG, latitudine GB. Et dicitur in Triangulorum doctrina, GB sinus arcus EB dimidij, GA sinus eius complementi.

Episagma I.

Circulo commune hoc est cum Parabola; quod in vtraq; portiones quomodocunq; per vnam rectam abscissæ, si æquales habuerint diametros, & ipsæ inter se in qualibet figura sint æquales. Arch. de Conoid. IV.

Episagma II.

Paraboles area est sesquitertia areæ Trianguli, habentis eandem cum Parabola basin rectam, & eandem altitudinem. Arch. de Quadr. Parabolæ Prop. XVII. & XXIV.

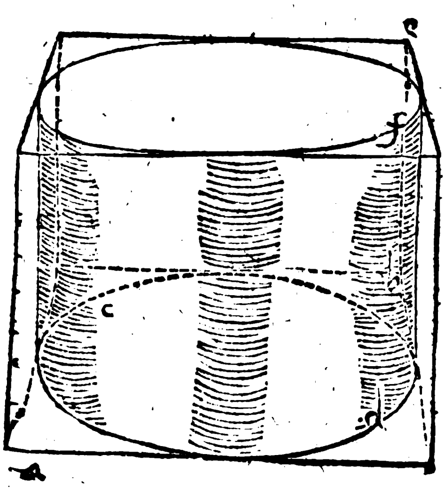
Episagma III.

Ellipsis area, ad aream circuli est, vt minor Ellipsis Diameter ad maiorem: Et vt circulus ad quadratum diametri, sic Ellipsis ad Rectangulum diametrorum, scilicet etiam vt 11. ad 14. feré. Arch: Sphæroid.

THEOREMA. III.

Cylindri vero ad Parallelepipedum columnare rectangulum æq;altum, quod Cylindri corpus stringit quadratis suis basibus & parallelis lateribus, ratio est eadem, quæ circuli ad quadratum circumscriptum, hoc est eadem quæ 11. ad 14.

Schema III.



* Vt enim CD Cylindrica basis circularis ad AB quadratum circumscriptum, ita CF corpus Cylindri, ad AE corpus parallelepipedi rectanguli, seu columnæ.

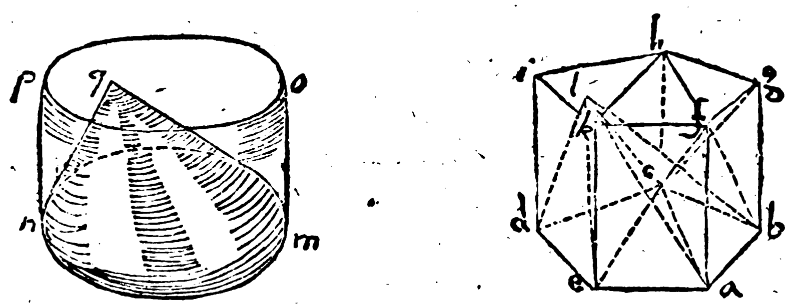
Arch: de Sphæra & Cylindro.

Cylinder enim & columna æquealta sunt hic veluti quædam plana corporata: accidunt igitur illis eadem quæ planis.

THEOREMA IV.

Si Columna recta parallelarum Basium cum Pyramide, si Cylinder cum Cono eandem basin habuerit eandemq; altitudinem, Triplum erit illius.

Schema IV.



Nam omnis Columna, vt hic quinquangularis BI, bases ABCDE & FGHIK parallelas habens, & BAF, AEK cæterosq; angulos rectos, solvitur in sua Pentaedra seu Prismata, vt hic quinquangularis in tria GHF, FHK, KHI, Trinis parallelogrammis & binis triangulis oppositis clausa.

	Primi	Secundi	Tertij.
Triangula	GHF	FHK	KHI
	BCA	ACE	ECD
Parallelo-gramma.	GHCB	HCAF	KECH
	HCAF	FAEK	HCDI
	FABG	KECH	IDEK

Pentaedron vero in tria Tetraedra solvitur, quorum bina semper, quæ vnum Planum Parallelogrammum ex æquo dividunt, æqualta sunt.

Sit verbi gratia Prisma primum sub GHF, BCA triangulis. Ducantur in Parallelogrammis BGFA & AFHC diagonij BF, CF, ex trianguli BCA, angulis B, C. Iis resecatur Tetraedron, cuius hæc quatuor triangula BCA, BFC, BFA, AFC. Restat Pyramis quadrangula, basi BGHC, vertice F. Ducta igitur diagonios GC secat eam in duo Tetraedra: vnius triangula quatuor sunt ista BGC, GFB, GFC, CFB: reliqui sunt ista, GHC, GFH, HFC, CFG

Cùm igitur Parallelogrammum GHCB lineà GC sit sectum bifariam, & triangula GCH, GCB æqualia, & GF altitudo eadem, (nam BGF rectus est) æqualia erunt Tetraedra GCBF, GCHF. Similiter Parallelogrammum GFAB lineà BF sectum est bifariam & in æqualia FBG, FBA. Et planum BCA rectum est ad planum GA, igitur perpendicularis ex C in BA est altitudo Tetraedorum GBFC, & ABFC: sunt igitur æqualia. Eidem verò GBFC fuit æquale GCFH. Omnia igitur tria sunt æqualia, & Prisma HGA habet tria æqualia Tetraedra.

Suma-

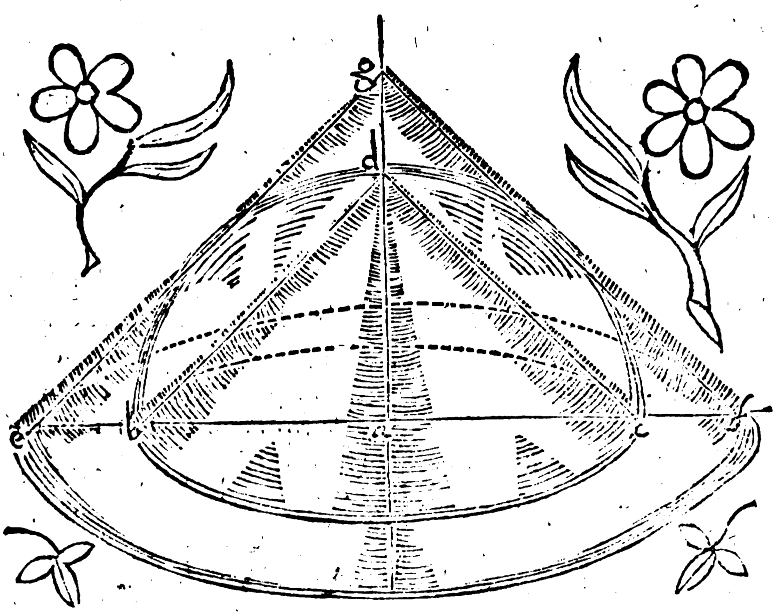
Sumatur jam in basi supera FGHIK, punctum L, quod connectatur cum angulis basis inferæ ABCDE, vt creetur Pyramis quinquangula: Dico illam esse tertiam partem columnæ GAD. Nam basis ABCDE, lineis AC, EC in triangula tria est divisa vt prius, super quæ stant & tria Pentaedra, & tres partes Pyramidis, sc. ABCL, ACEL, ECDL,& perpendicularis ex L demissa in planum BD, æquat recta latera KE, FA & cætera. Est igitur eadem altitudo Tetraedrorum ABCF, ABCL; sunt igitur æqualia. Sed ABCF est tertia pars Prismatis ABC FGH: Ergo & ABCL ejusdem tertia pars est. Similiter verò secunda Pyramidis pars ACEL, secundi Prismatis; & tertia ECDL, tertij prismatis tertiæ sunt Partes: Tota igitur Pyramis totius Columnæ tertia pars est; & hæc illius ergò Triplum.

Eodem verò modo & MNOP Cylinder, cuius bases MN & OP parallelæ, æquat tres conos MNQ, vertice Q ad superioris basis planum pertingentes, & eandem basin MN habentes. Demonstratio enim analogicè applicari eadem potest, si perpendas, circulum, qui basis est Cylindri & Coni, in infinita triangula ex centro dividi, quibus totidem Prismata, totidemq; partes Coni superstent, illa in axe Cylindri, hæ in axe Coni convenientes.

THEOREMA V.

Superficies curva Coni Rectanguli inscripti Hemisphærio, est semidupla Baseos, seu circuli maximi in sphæra, dimidia Baseos Coni rectanguli circa Hemisphærium.

Schema V.



Sphæra BDC secetur plano per centrum A, & sectio BC continuetur fiantq; duo Coni Rectanguli, alter totus intra Hemisphærium BDC, cujus axis recta AD, ex centro A, diametro perpendicularis: sitq; BDC, basin BC & ver-

& verticem D eundem habens cum Hemisphærio; alter totus extra Hemisphærium, stringens illud mediæ suæ superficiei lateribus, quæ sint EG, FG, parallela ipsis BD, CD, habens verticem G, in axe prioris AD continuato, basin vero EF in plano sphæram secante. Cum igitur BA & AD sint æquales; erunt etiam EA semidiameter basis maioris, & AD altitudo Coni exterioris æquales: Et quia EGF rectus, erit igitur EG quadrati circulo circumscripti latus, eoq; equalis diametro GE. Sed EF quadratum, æquale est duobus quadratis EG & GF, æqualibus diametro BC: Ergo quadratum EF duplum est quadrati BC: circulus igitur EF duplus est circuli BC. Dico etiam superficierum conicarum inter se proportionem esse duplam, & minoris conicæ curvæ superficiei proportionem ad aream basis BC esse semiduplam.

Nam per ea quæ dicta sunt Theor. II. rectangulum sub semidiametro AB, & circumferentia tota BC, duplum est areæ circuli BC. Eodem verò modo, eademq; demonstrationis vi, rectangulum sub tota BD & tota circumferentia BC, est duplum conicæ curvæ superficiei BDC. Quare vt AB ad BD, sic superficies plana circuli BC, ad curvam Coni BDC. Sed proportio AB ad BD est semidupla, quia quadratorum proportio est dupla; ergo & superficierum dictarum proportio est semidupla. Et quia sunt Coni similes; vt igitur basis BC plana ad Curvam BDC: sic plana EF ad curvam EGC; & permutatim, vt basis ad basin; ita conica ad conicam curvam: dupla verò est proportio inter bases; dupla igitur & inter conicas curvas.

THEOREMA VI.

Convexum Sphæricum est quadruplum, areæ circuli maximi, qui Sphæram per centrum secat.

Demonstrationes Archimedis & Pappi sunt ingeniosissimæ, nec admodum faciles captu: veritas verò propositionis, & prima demonstrationis elementa elucent ex præmissis.

Est enim superficies convexa Coni, maioris EGF, maior superficie Hemisphærij BDC, minoris BDC minor illa enim tegit Hemisphærium, hæc sub Hemisphærio tota latet. Verisimile est igitur, Hemisphærij superficiem esse medium proportionale inter vtriusq; Coni superficies. Sed minor conica est semidupla areæ planæ basis, maior sesquidupla ejusdem; & medium semiduplæ & sesquiduplæ, est dupla proportio. Ita verisimile fit, Hemisphærij superficiem esse duplam, & Sphæræ totius superficiem esse quadruplum areæ circuli maximi BC. Demonstrat verò id Archimedes necessariò ex consimilibus principijs.

THEOREMA VII.

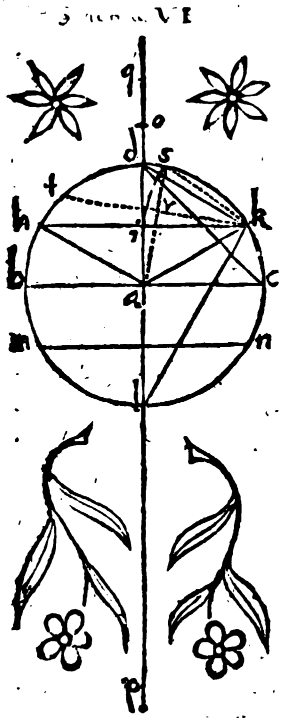
Convexum cuiuslibet segmenti sphæræ est æquale plano circuli, cujus semidiameter subtendit segmenti latitudinem à Polo ad basin.

Segmenta

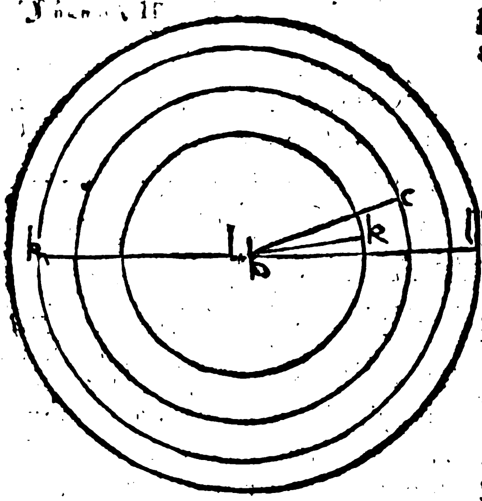
ARCHIMEDEA.

Segmenta sphæræ hic reputantur non quælibet portiones, sed illæ tantum, cùm Sphæra ab vno plano tota secatur in partes duas, sic vt quælibet pars habeat suum polum; Talis enim sectio efficit, vt basis segmentorum sit circulus planus.

Centro A sit superficies Sphæræ BDCL, & hic sit eius circulus maximus, & assumantur extrema diametri DAL pro polis segmentorum futurorum, sintq; D. L. & per punctum I, perq; AE centrum, transeant duæ perpendiculares HIK, & BAD, repræsentantes sectiones, seu circulos ad planum DBL rectos. Sicut igitur tota DL subtensa dimidio circuli LCDB à polo D ad L imum, (quod punctum jam in comparatione totius Sphæræ cum suis segmentis sustinet vicem basis) sit semidiameter circuli plani, æqualis toti curvæ superficiei sphæræ, per VI: Sic etiam DC subtensa ipsi DKC dimidio arcui segmenti BCD à polo D ad basin C, sit semidiameter circuli plani, æqualis curvæ superficiei segmenti seu hemisphærij BDC, per V: Sic etiam in genere quocunq; segmento sumpto, vt HKD, linea DK subtensa latitudini segmenti à D polo ad basin K, sit semidiameter circuli plani, æquantis superficiem curvam segmenti KDH: Et sumpto segmento HKL, cuius polus L, basis circularis HK, subtensa KL, sit semidiameter circuli plani, qui æqualis sit superficiei curvæ segmenti KLH.



Demonstrationem vide apud Archimedem. Primam verò fidem tibi faciet analogia. Nam cum sic sit comparatum cum tota superficie & cum dimidia: probabile est, candem rationem obtinere etiam in segmentis cæteris.



Corollarium.

Segmenta segmentorum, quæ quidem vtrinq; circularibus basibus terminantur, ijsdem principijs facile in planum explicantur. Nam sit BHKC segmentum segmenti BDC, cuius bases circuli HK, BC. primò sit circulus æqualis segmento sphæræ maiori BCD Deinde alius circulus sit æqualis complemento ejus quod proponitur segmentum segmenti, Nam complem hoc, est segmentum sphæræ minus HKD, sive polus ejus idem sit cum priori sive alius. Ergò circulorum planorum DK, DC differentia æquabit Zonam BHKC.

Alia vero segmenta segmentorum, quæ non integris circulis planis, sed eorum partibus terminantur; nisi polus D & axis DI totius segmenti HKI fuerit constitutus in concursu sectionum, nondum habent notum æquationis vel computationis suæ methodum.

THEOREMA VIII.

Sphæricum Convexum & ejus axis secantur à plano ad axem recto in eadem proportione.

Septimum Theorema servit Geometricæ delineationi, hoc octavum arithmeticis est vtilius & compendium jucundissimum. Illud planum prodit æquale curvæ superficiei; hoc lineas ostendit æquivalentes segmentis.

In Sch. præcedenti, si axis totus DL valet superficiem totam DKLH, pars axis DI valet partem superficiei HDK, siquidem DI fuerit axis sectionis, id est, si fuerit rectus ad planum BK secans, idq; secet in centro I, Sic pars axis IL valet partem superficiei HLK.

Nam quia HDK est ad KLH, vt circulus DK ad circulum KL rectæ, per VII. id est quadratum KD ad quadratum KL: At verò quadratum KD est ad quadratum KL, vt recta DI ad rectam IL: Ergò etiam vt recta DI ad rectam IL, sic HDK superficies ad KLH superficiem.

Analogia. Quemadmodum igitur in lineis BA, HI, inest proportio circularium circumferentiarum BC, HK, centris A. I. scriptarum; sic in lineis transversis DA, DI, inest proportio arearum BDC, HDK, terminatarum ad illos circulos: Et sicut DI valet aream HDK, & DA aream BDC, sic IA valet aream Zonæ BHKC.

THEOREMA IX.

Cylindri recti superficies est æqualis Sphæricæ, quam stringit.

Creatur enim Cylindrica ductu totius circumferentiæ KL (in sequ: schemate) in totam diametrum KN vel GB: at ductu dimidiæ circumferentiæ KL,
4. 6.—24 | in dimidiam diametrum AB creatur pars quarta prioris, cum fi-
2. 3.— 6. | guræ similes, sint in dupla proportione laterum: creatur verò eo-
———— | dem ductu area circuli maximi, per II. quæ est etiam sphæricæ
2. 2. 4. | superficiei pars quarta, per VI: Duo ergo ejusdem quadrupla sunt inter se æqualia, superficies sc. curva Cylindri KML, & superficies curva globi seu sphæræ suæ GB, vtraq; quadruplum areæ KL.

THEOREMA X.

Superficies, globi, & ejus cylindri, qui globũ stringit, resectæ ab eodem plano ad axem recto, sunt æquales.

In figura sequenti sit GB globus, LN ejus cylinder, stringens globum in medio, & in GB. Et sit planum PST secans vtramq; superficiem: dico Zonã KPSTL cylindricam, esse æqualem curvæ superficiei segmenti globi GR.

Videtur falsum esse, cum Cylindrica sit tam laxa, globi verò superficies sursum in angustum coeat. Sed memineris, quanto illa laxior, tanto hanc esse latiorem, cùm p obliquũ ad eandem tendat altitudinem. Sed facilis est demonstratio. Cùm enim KP, & GR sint æquales & creetur Zona KRSTL ductu KP vel GR in totam circumferentiam KOL, & sic etiam Zona PSTMN creetur ductu PN vel RB in eandem circumferentiam totam: ergo vt rectæ GR ad RB, & BG, sic superficies cylindrica KT, ad TN & NL. At vt rectæ GR

ad

ad RB & BG, sic superficies segmenti globi GR ad RB segmentum & BG totam globi superficiem, per VIII. Ergo & vt Cylindrica KT ad TN & NL, sic sphærica GR ad RB, & BC. Est autem tota Cylindrica NL æqualis toti Sphæricæ GB, per IX. Ergo & pars Cylindricæ KOL PST parti Sphæricæ in segmento GR erit æqualis.

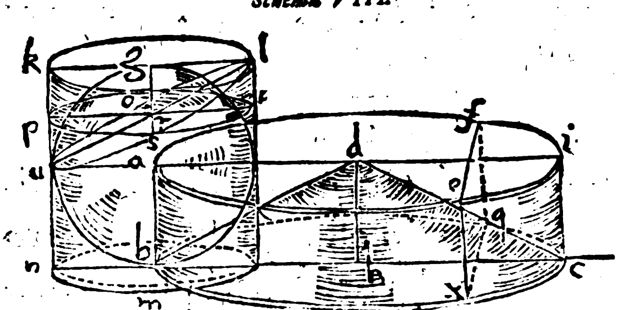
THEOREMA XI.

Corpus Cylindri est ad corpus Sphæræ, quam stringit, in proportione sesquialtera.

Corpus enim Sphæræ ad Analogiam eorum quæ dicta sunt Theor. II. potestate in se continet infinitos veluti conos, verticibus in centro sphæræ coeuntes, basibus, quarum vicem sustinent puncta, in superficie stantibus. Sit igitur in schemate II. BG Sphæra, A centrum, coni AB, AG & similes infiniti, iiq; minimi, id est, quorum Bases sint puncta B, G, vertex omnium communis A. Fiat novum Schema, in quo extendatur curva superficies sphæræ in planum circulare, cuius diameter sit BC, dupla ad diametrum Sphæræ BG, quia Circulorum proportio est quadrupla per VI. præmissum: & fiat circulus ex BC, ex cuius medio puncto H, surgat perpendicularis HD æqualis semidiametro AB. Sit autem Conus BDC, basi BC, vertice D: Conus iste æquale corpus habebit corpori Sphæræ BG. Omnium enim conorum AB, AG, infinitorum in sphæra, bases B. G. minimæ, cum sphærica superficie ipsa in qua insunt, in planum circulum BC extensæ & juxta invicem ordinatæ sunt, & pro eo quod erant in Sphæra Coni recti ABB, AGG, facti sunt hic coni scaleni DCC, DBB, excepto medio DHH, qui manet rectus, habentq; omnes eandem altitudinem DH, & bases æquales, quippe minimas, omnes igitur & inter se & conis rectis in Sphæra æquales sunt; & totus conus BDC ex omnibus compositus, æqualis erit toti sphæræ BG ex omnibus compositæ.

Ducta igitur area circuli BC in semidiametrum HD, creatur Cylinder AICB, cuius corpus est coni BCD triplum, per IV: Est verò cylindri sphæram stringentis duplum, quia basin BC habet, basis KL quadruplã, altitudinem verò HD, altitudinis BG dimidiam. Duo enim AICB cylindri invicem impositi, efficerent altitudinem æqualem ipsi BG altitudini cylindri KLB, essentq; illius quadruplum, propter basin BG quadruplam baseos KL: vnus igitur AICB est cylindri KLB duplum: erat verò triplum coni BDC, id est corporis Sphæræ BG, æqualis cono BDC. Ergo diviso cylindro AICB in 6: dimidium huius, scilicet 3, venit Cylindro KLB; tertia verò pars de 6, scilicet 2, venit sphæræ GB. Cylinder igitur KLB, ad sphæram suam GB, est vt 3 ad 2. quæ est proportio sesquialtera.

Schema VIII.



 Potest

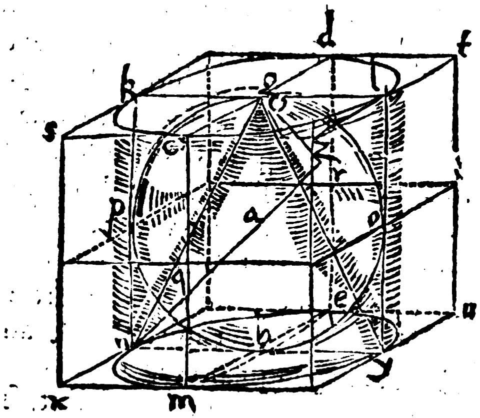
Poteſt idem etiam per IX. probari, ſi fingamus Cylindrum ſecari in infinita priſmata, in axe cylindri coeuntia; pro baſibus verò, quas habent priſmata, quadrangulis, habentia lineas rectas æquales axi; quæ baſes priſmatum omnes juxta invicem ordinentur in curva Cylindri ſuperficie, vt ſupra Theor. II. de circumferentia circuli ſimilia ſumus imaginati. In illo enim Schemate II. ſit circulus BG vtraq; baſis Cylindri: & circumferentia BG, repræſentet curvam Cylindri ſuperficiem, punctum verò A repræſentet axem Cylindri, æqualem ipſi BG diametro, & extendatur curva ſuperficies Cylindri in planum, ſitq; BC, quæ repræſentet rectangulum, cuius longitudo BC, latitudo BG; & connectatur axis Cylindri AA, cum recta CC. ipſi parallela, rectangulo AACC: vt ſit Priſma AABBCC, æquale corpori Cylindri. Erunt enim omnium Cylindri Priſmatum minimorum baſes rectangulæ minimæ (hoc eſt lineæ) juxta invicem ordinatæ in ſuperficie rectangula BC, & Priſmata in Cylindro recta, fient hic ſcalena, omnium tamen acies pertingent ad communis altitudinis BA terminum AA, erunt igitur æqualta & invicem & cum rectis Priſmatibus ipſius cylindri. Ducto igitur rectangulo BBCC in altitudinem BA, creabitur Parallelepipedum, cujus corpus eſt duplum corporis priſmatis AABBCC, duplum igitur corporis cylindri. At ſupra etiam ducebatur circulus æqualis rectangulo BBCC ſuperficiei curvę cylindri (ſc. quadruplus circuli maximi, per VI) in altitudinem æqualem ipſi BA ſemidiametro, & creabatur triplum coni, æqualis Sphæræ. Idem ergo eſt triplum ſphæræ & duplum cylindri: Ergo vt ſupra, Cylindri ad ſphæram proportio eſt ſeſquialtera.

THEOREMA XII.

Cubi corpus ad corpus Sphæræ quam ſtringit, eſt duplum paulo minus, nimirum vt 21. ad 11. proximè.

Nam Cubus STVX, in figura ſequenti, eſt ad Cylindrum ſuum KLN quem ſtringit, vt 14 ad 11 proximè, per III. præmiſſum, id eſt vt 42 ad 33. At Cylinder KLN eſt ad ſphæram PGOB, quam communiter cum cubo ſtringit, ut 3. ad 2, per XI. præmiſſum, id eſt vt 33, ad 22. Ergo cubus ad ſphæram eſt vt 42. ad 22, id eſt, vt 21. ad 11.

Schema IX.



TH. XIII.

Corpus Coni, cujus altitudo eſt æqualis diametro ſphæræ, baſis, Sphæræ maximus circulus, eſt dimidium corporis ſphæræ.

Cylinder enim KLN eadem baſi & altitudine, eſt triplum coni ſui NGI, vel vt 3. ad 1. Idem verò Cylin-

Cylinder est ad sphæram suam, vt 3 ad 2, per XI. præmissum: Ergo Conus ad Sphæram est vt 1. ad 2.

Summa præmissorum.

	Conus Cylindri NGY. KLYN	Sphæra Cylindri PGOB KLYN	Cylinder KLYN	Cubus STVX Cylindrum stringens in KN, CM, LY, & DE. Sphæram vero in G.O.B.P.Q.R.
Est vt	11	22	33	42
Vel vt	1	2	3	4 minus

Corollarium.

Porrò indidem etiam patet, Conum priorem in Hemisphærio (vt Theor. V. Conum BDC) esse ad Cylindrum qui sphæram stringit, vt Octaedron in sphæra ad Cubum circa sphæram, sextam scilicet partem Cylindri, quartam sphæræ, & sic dimidium Hemisphærij sui, dimidiumq; coni Theor. XIII. descripti, quippe cujus basin habet integram, altitudinis verò saltem dimidium.

Ille verò conus major EFG, in quo est Hemisphærium (Theor. V.) corpus habet irrationale seu ineffabile. Similes enim Coni, vt EFG, & BDC sunt in tripla proportione altitudinum AG, & AD. Est autem proportio AG ad AD semidupla: ergo proportio conorum est triplex semidupla, hoc est, sesquidupla. At sesquiduplæ termino vno pronunciato (quod scilicet conus BDC dimidium Hemisphærij BGD dicitur) terminus alter fit ineffabilis, nisi de propinquo.

Episagma I.

Eadem est etiam proportio corporis ab Ellipsi generati, quod Sphæroides dicitur, ad conum æqualtum. Arch. Sphæroid. prop. XXIX. XXX.

Episagma II.

Sicut sphæroides est coni sui duplum: sic Conoides Parabolicum est coni sui sesquialterum. Vide in eodem libro prop. XXIII. XXIV.

Conoides verò Hyperbolicum (qualis est ferè figura hulceris, montis, aut acervi frugum ordinati) sesquialteram proportionem magis ad æqualitatem adducit. Nam ad lineas sesquialteram proportionem continentes (quæ habent duplum & triplum eius quæ inter verticem & centrum figuræ) addit vtrinq; ~~diametrum.~~ axem.

THEOREMA XIV.

Segmento sphæræ æqualis est conus super eadem basi, habens altitudinem tanto majorem, vt sit ejus excessus ad semidiametrum Globi, sicut est altitudo ipsa segmenti ad residuum diametri.

Sit sphæra CLB, ejusq; segmenta duo HKD & HKL, eorumq; axes DI, IL, partes diametri per A centrum ductæ, quæ continuetur à D versus O.P. Quæritur conus æqualis segmento minori. HKD. cuius axis DI, residuumq; diametri IL. Fac ergò vt IL ad LA, sic ID ad DO: erit IO altitudo, & HK basis coni, cujus corpus est æquale corpori segmenti HKD minoris. Sit deinde segmentum HKL, ejus axis LI, residuumq; diametri ID. Fac iterum vt ID ad DA, sic IL ad LP: erit IP altitudo, & HK basis coni, qui æqualis est segmento HKL maiori.

Demonstratio non est popularis, ideò petat illam, qui vult, ex secunda secundi libri Archimedis de sphæra & cylindro: non est enim mihi consilium, totum Archimedem hic transcribere. Veritas autem ejus circa Hemisphærium sic patet; sit Hemisphærium BCD, cujus axis AD, residuum Diametri AL. Quod si facio vt residuum diametri AL ad semidiametrum LA, sic AD axem, ad DQ, facio igitur DQ æqualem ipsi DA, & altitudo AQ erit dupla ad altitudinem segmenti AD. Conum igitur qui habet basin BL, altitudinem diametri DL, pono esse æqualem Hemisphærio. Id autem verum esse, priori Theoremate vidisti, vbi conus iste erat dimidium sphæræ.

Archimedes etiam comparat proportionem segmentorum solidorum, cum proportione segmentorum superficiei, demonstrans solidorum proportionem esse minorem dupla proportione superficierum, maiorem sesquialterâ. Constituitur autem proportio dupla in numeris, ducto vtroq; proportionis termino in seipsum; sesquialtera verò, ducta eiusdem termini radice in terminum ipsum. Vt si superficies essent inter se segmentorum, vt 4. ad 9. quadrati numeri; corpora sub illis superficiebus tecta, essent inter se propiora quam 16. & 81. ducto vtroq; quadrato in seipsum; remotiora quàm 8. à 27. (ductis quadratorum radicibus 2. & 3. in ipsos quadratos) vel 16. à 54. Itaq; si minus segmentum ponderaret 16: Majus esset inter 54 & 81 pondo.

Corollarium.

Proportio binorum globi segmentorum inter se, causa corpulentiæ, in vna qualibet sectione; est expressa in altitudinibus conorum, scilicet in IO, IP; sicut prius proportio superficierum segmentorum erat expressa in ID, IL. Sed discrimen magnum est, quod globi totius corpus in vna qualibet sectione repræsentatur à peculari linea OP: at superficies tota globi, semper ab eadem diametro DL repræsentatur.

Episagma I.

Multa hic sunt communia globo & sphæroidi atq; conoidibus. Nam vt sectio globi facta plano semper est circulus; sic sectio sphæroidis non omnis, sed quæ fit plano axi parallelo, est Ellipsis, sphæroidi similis: Ellipses verò diversarum & dissimilium specierum, aut circuli fiunt, quoties vel sphæroides vt cumq;, vel conoides per vtrumq; oppositorum laterũ secatur. Arch. Sphær. XII. XIII. XIIII. XV.

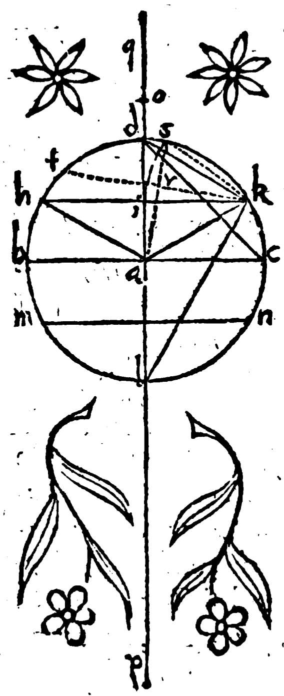
Epiſagma II.

Segmentorum ſphæroidis ratio eadem eſt, quæ ſegmentorum globi, ſi recta ſit ſectio ad axem: ſin obliqua, tunc vſurpatur non dimidium axis, ſed dimidium eius quæ vertices portionum factarum (id eſt puncta earum ſuper ſectionem altiſſima) conjungit. Nam in Ellipſi quæ gignit ſphæroides, axis quidem eſt inter diametros, diametrorum verò multæ ſunt, diverſæ longitudinis, quilibet binos oppoſitos vertices conjungens.

TH. XV. Problema.

Quemadmodum ſuperficiebus curvis ſegmentorum, theorema VII. fecit æquales circulos planos, Theorema vero VIII, æquevalentes lineas rectas oſtendit, comparabiles inter ſe diverſarum ſectionum: ſic etiam ſoliditati ſegmentorum aſſignare poſſumus non tantum Conos æquales vt Th. XIV, ſed etiam plana æquiualentia, ſeu proportionis ejuſdem, & comparabilia inter ſe diverſarum ſectionum: quam demonſtrationem, licet difficilioris captus, addo, quia à Geometris prioribus tentata non eſt.

Quæruntur tria plana quæ habeant inter ſe proportionem eam quam duo ſegmenta Globi inter ſe & ad totum.



Sint ſegmenta HKD, HLD. Ergo centro H vel K, termino ſegmenti in plano circuli HDK, diſtantia HI vel KI, ſcribatur arcus circuli IS, ſecans HDK in S, & ab S, per A, ducatur diameter, eumq; ad rectos ſecet recta ex K, quæ ſit KT, ſectio R. Hoc facto fiant rectangula tria, primum ſub AD ſemidiametro & DL altitudine ſeu diametro globi totius, quod repræſentet ſoliditatem totius globi: ſecundum ſub AD ſemidiametro & DI altitudine ſegmenti, quod repræſentabit ſoliditatem ſectoris ſphæræ HAKD: tertium ex AI (altitudine coni HKA) in RS, quod dico repræſentare in eadem proportione conum HIKA ſolidum: itaq; ſicut conus HIKA ablatus à ſectore HAKD, relinquit ſegmentum HIKD; ſic etiam tertium rectangulum ablatum à ſecundo, relinquet planum æquevalens in eadem proportione ſegmento ſphæræ HIKD.

Quod ſi ſegmentum ſit maius Hemiſphærio ſc. HKL; pro DI, ſumenda eſt IL, in ſecundi rectanguli formatione, & ad id eſt addendum rectangulum ſub AI, RS, conſtitueturq; planum æquevalens ſegmento HIKL maiori.

Demonſtratio. Primùm inter lineas DI, IL, & DL, eſt proportio ſegmentorum ſuperficiei & totius, per VIII. Ergo etiam inter rectangula, ductis

ductis his lineis in eandem semidiametrum AD, erit eadem proportio: sed sectorum HAKD, HAKL, & globi totius est eadem inter se mutuò proportio, quæ superficierum HDK, KLH, & totius. Ergo & inter facta rectangula est proportio sectorum HAKD, & HAKL. Deinde AD altitudo ducta in basin circularem, æqualem superficiei segmenti HDK, cuius semidiameter KD per VII,) creat Cylindrum, triplum coni æqualis sectori HDKC; & AI altitudo ducta in basin HK circularem, cuius semidiameter KI, creat itidem triplum coni HIKA. At vt circulus radio KD, ad circulum radio KI vel KS; sic etiam quadratum KD ad quadratum KS: vt verò quadratum KD ad quadratum KS, sic DI recta ad SR, per VII. Ergo proportio basium circularium, per KD & RS descriptarum, est etiam proportio linearum DI, SR. Sed proportio conorum est composita ex proportione altitudinum & proportione basium; vt habet Archimedes, XI. Sphæroideōn. Ergo proportio HDKA, sectoris & HIKA, coni in eo, est composita ex proportione AD ad AI, & DI ad SR. Est autem etiam rectangulorum proportio composita ex proportione laterum correspondentium. Quare proportio HDKA sectoris, & HIKA coni in eo, est eadem, quæ rectangulorum sub AD, DI, & sub AI, SR. Ac proinde ipsa sunt ad mutuam eorum differentiam, vt sector HDKA & conus in eo HIKA, ad mutuam eorum differentiam, scilicet ad HIKA segmentum. Hæc methodus concernit potissimùm conum HIKA, qui est communis differentia, qua segmenta differunt à suis sectoribus, quem conum interdum operæprecium est notum habere.

Episagma comparativum.

Sic segmenta Conoidis parabolici sunt inter se in proportione, quæ est inter quadrata axium. Arch. sphæroid. XXVI.

Corollarium I.

Segmenta segmentorum Sphæræ easdem habent leges quod corpora attinet, quæ supra fuerunt ejusdem generis segmentorum superficiei, in corollario ad VII.

Corollarium II.

Zona sphæræ & sphæroidis, seu corpus annulare, contentum parte superficiei sphæræ vel sphæroidis mediâ, quæ Zona dicitur, & superficie cylindrica intus, hæc inquam sic investigatur. A sphæra vel sphæroide auferuntur bina segmenta æqualia, & Cylinder Zonæ æquealtus, basibus iisdem cum segmentis ablatis; remanetq; corpus Zonæ. Quod si Zona non sit media globi vel sphæroidis, sed inclinata ad polum seu verticem, auferuntur segmenta inæqualia, & truncus coni, vt remaneat talis Zona.

Intelligitur autem Zona, cui circumcirca sit æquabilis latitudo, & sub qua sit tectus Truncus conicus parallelarum basium, cujus dimensiones jam in proximo theoremate sequentur.

Theo-

THEOREMA XVI.

Conus secatur variè: aut enim per verticem & basin, & id vel plano, vel superficie alia coni minoris, habentis eundem verticem.

In vtroq; casu segmenta Coni æquealta, sunt vt eorum Bases inter se.

Nam Conus est hîc veluti circulus corporatus; idem igitur à sectione patitur, quod circulus suæ baseos.

Aut secatur Conus plano parallelo lateris, cuius circumductu Conus est creatus; aut neq; parallelo, sed supra verticem extra figuram concursuro cum latere: vtroq; casu fiunt portiones indefinitæ, de quarum soliditate nulla dum disquisitio facta fuit à Geometris, vsu quippe non exigente.

Aut secatur Conus plano per latus vtrumq; fiuntq; partes duæ, Verticalis superior, & Truncus inferior. Verticalem, plano ad axem obliquo, Archimedes portionem Coni maluit appellare; agnoscens Conos non alios quam æquicruros: Apollonius vero Conos faciens alios æquicruros, alios scalenos (cujus exemplum in Schemate IV.) talem portionem, quantumvis axe per obliquum secto, dummodò sectio sit circulus, pro Cono & ipsam agnoscit.

Quod attinet segmentum verticale, ejus sectio fit Ellipsis, quæ habet centrum suum extra axem, versus latus Coni longius. In Schemate IX. Coni GYN axis est GAB, cujus segmentum verticale GNA, basin habet Ellipsin, quæ repræsentatur per lineam NZ, cujus centrum seu medium, vbi latissima, est infra A, sectionem ejus cum axe, versus N.

Atq; hoc est semper majus segmento recto illo, in quo planum ad basin NY parallelum per terminum axis, ab Ellipsi secti transit, sc. per A. Nam planum secans, in A fixum, & ad axem GA inclinatum, plus de corpore Coni acquirit parte AN, quàm amittit parte AZ.

An autem huic segmento GNA æqualis sit Conus ille, cujus basis, basi NY parallela, per centrum Ellipsis infra A transit; id consideratione dignum est: mihi nondum liquet, nec jam vacat. Vide de hoc infra Th. sequenti aliqua.

Interim in genere de omni segmento verticali verum est Th. XI. Sphæroid. Archimedis; secundum quod Coni, segmentive Verticalis, ad Conum proportio, componitur ex proportionibus Basium inter se, & Altitudinum inter se.

Ergo area Ellipsis NA, ad aream circuli NY est proportionis solidorum GNA ad GNY pars vna. Inest autem harum arearum proportio (per Epis. II. ad Th. II.) in rectangulo diametrorum Ellipsis & quadrato NY, tanquam notioribus. Pars altera proportionis corporum est inter GZ altitudinem segmenti GNA super plano NAZ, & GB altitudinem coni NGY super plano NY. Multiplicatis igitur in se mutuò terminis proportionum ZG in GB, & rectangulo diametrorum Ellipsis NA, in quadratum NY; vt posterior factus ad priorem, sic est corpus coni NGY ad corpus

 segmen-

segmenti GNA. Poteſt etiam quodq; ſeorſim computari; vt GNA, ducta altitudine GZ in planum Ellipſis NA, prodit triplum corporis GNA.

In ſpecie ſi planum ſecans parallelum fuerit baſi Ny: proportio corporum, ſegmenti & totius, erit triplicata altitudinum vel radiorum in baſibus circularibus, vel ſeſcuplicata planorum.

Nimirum quia hoc pacto ſegmentum verticale, & conus totus fiunt ſolida ſimilia. Multiplicatis igitur cubice ſingulis ſeorſim vel altitudinibus vel radijs baſium, erit vt numerus cubicus major ad minorem, ſic Conus totus ad ſegmentum. Aut ſi ſola plana baſeon nota eſſent, quæruntur illorum radices, multiplicanturq; in illa.

Quod Truncos attinet, facilis eſt ex dictis, illos inquirendi Methodus. Ex vno enim modorum præmiſſorum computatur & conus veluti totus, & ſegmentum verticale deficiens, ex data vel altitudine vel baſis radio. Quod ſi neſcitur ejus, vt deficientis, altitudo, ſi quidem eâ fuerit opus, quæritur ex comparatione baſium Trunci cum altitudine; vt enim differentia Radiorum in baſibus, ad altitudinem (ſi Truncus ſub planis perpendicularibus fuerit) ſic radius baſis minoris ad alitudinem ſegmenti deficientis; ablato igitur corpore ſegmenti deficientis à Cono toto, relinquitur corpus Trunci quæſitum.

In his verò Truncis, qui ſub parallelis baſibus continentur, rurſum eſt brevior methodus vt prius. Nam quia baſes talium Truncorum ignorari non poſſunt, earum diametri (quælibet in ſeipſam) multiplicantur cubicè, & ablato cubo minori à majori; erit vt maximus ad differentiam, ita Conus totus ad Truncum.

CLAVIUS alium docet modum, ingenioſiorem quidem, ſed & difficiliorem, vt mihi videtur. Non minus enim quàm ſuprà, computanda eſt area baſis vtriuſq; & jam hoc inſuper accedit, quod quærenda eſt area medio loco proportionalis inter planum vtriuſq; baſis. Id autem fit vel multiplicatione & diviſione numerorum prolixorum; vel duabus extractionibus radicum, earumq; multiplicatione: tunc addenda omnia tria plana, & ſumma in altitudinem Trunci multiplicanda. Atqui ex radijs circulorum qui requiruntur ad inveſtigationem arearum, multò faciliori negocio poteſt haberi quicquid quæritur.

Cùm autem Truncorum Conicorum, qui fiunt plano ad axem recto, multiplex ſit vſus, & præſenti materiæ cum primis neceſſarius, ob doliorum figuram; ſubjungam hic pulcherrimum Theorema & compendium exoptatiſſimum; etſi demonſtrationem cognationis cauſâ differo deorſum in Supplementum Archimedeæ Stereometriæ, & Th. XXII. Dividitur autem Truncus in medium Cylindrum & circumjectam ei conicam veluti Tunicam, qui ſegmentum eſt Coni diſſimile ſuperiorum, ſc. ſuperficie Cylindricâ factum: Ergo ſi tres Diametri, duæ baſis minoris, una majoris, extendantur in vnam rectam: erit ut rectangulũ ſub tota & ſub differentia baſium, ad triplum quadrati baſis majoris uel minoris, ita corpus Tunicæ ad corpus Cylindri vel majoris uel minoris.

Ergo

Ergo duplum minoris adde maiori, summam duc in differentiam maioris & minoris, pro Tunica: deinde minorem quadra, quadrati triplum sume pro Cylindro inscripto; summam & huius & illius pro toto Trunco.

Vt si sint basium diametri 3. 5. differentia 2. ad bis 3. adde 5 fiunt 11, quæ duc in 2, fiunt 22 pro tunica, Et quadratum de 3. est 9, cujus triplum 27, est pro Cylindro: Ergo 49 pro Trunco, in quacunq; proportione altitudinis. Sed hæc per sequens Theorema, ejusq; Corollarium fient adhuc compendiosiora.

THEOREMA XVII.

Segmenta Cylindri recta, parallelis axi superficiebus rescissa, sunt inter se, vt segmenta basis.

Nam Cylinder est hic veluti circulus aut Ellipsis corporata; quare hic idem illi accidit, quod figuris hisce in basi, in sectione eadem. In Schemate VIII. planum EFQX est parallelum axi DH. Ergo vt portio circuli EFI vel XQC, ad portionem EFA vel XQB: sic portio Cylindri IFIXV ad portionem EFABX. Vide Coroll. Th. II.

Segmenta vero, plano per axem transeunte, dummodo non secet alteram basium, sunt vt segmenta axis inter se.

Nam Cylinder rectus, sectus plano ad axem recto, est veluti linea corporata, & quidem cylindrico corpore prædita: quare accidit illi idem quod lineæ Alia verò segmenta per axem, æqualia sunt Cylindris eâdem axis longitudine. Nam quantum ex vno latere Cylindri deficit segmento, quo minus sit rectum; tantum ei accedit ab altera parte; quod in sectione coni non fit, ob inæqualem eius crassitiem. In Schemate VIII, plana PST rectum, LSV obliquum ad axem GB, secant illum communiter in R: vt igitur GR ad RB, sic non tantum portiones rectæ KT ad TN, sed etiam obliquæ LVK ad VNL. Quantum enim ipsi LVK deficit à partibus L, scilicet LRT, tantum ei superest ex partibus V, scilicet VRP, simile ipsi LRT.

Segmentum segmenti Cylindracei, quale cernitur in Schemate XIV. secuturo, literis GST, contentum scilicet tribus superficiebus, semicirculo GT, semiellipsi GS planis, & curva Cylindricâ VTS: sic, vt sectionis planorum linea perpendiculariter incidat in G punctum axis HF; hoc inquam segmentum habet se ad totum Cylindrum TY æquealtum; vt 7. ad 33. vel 14. ad 66. ferè, ad segmentum verò HGS residuum ad semicylindrum HGTS, (plano scilicet per axem HG ducto rescissum) vt 14. ad 19. Nam infra in supplemento Archimedæo demonstrabitur hoc de vna specie Cylindri, quando scil. eius altitudo æquat circumferentiam basis, Theor. XIX. XX. XXI. At cùm non tantum totus globus sit æqualis toti semi-cylindro, & totum strictum toti segmento Cylindri, vbi vertices ellipsis sectricis tangunt bases: sed etiam partes globi & stricti æquales, secundum aliquotam circumferentiæ partem quibus sunt proportionales, sint æquales partibus segmentorum semicylindri & Cylindri dictorum, secundum eandem quotam altitudinis, vi ejusdem explicationis corporum rotundorum in rectum; sequitur vt & segmenta ista segmentorum, quorum vnius basis est circulus, alterius semicirculus, sint altitudinibus suis proportionalia, & sic inter se in omni altitudine retineant proportionem eandem quæ est totorum, sc. 7. ad 33. Quibus vero bases non sunt circulus & semicirculus, sed alia circuli segmenta, illa miscent proportionem basium huic proportioni 7. ad 33. Itaq; etiam de his cylindraceorum segmentorum segmentis valet axioma, non minus quam de conis & pyramidibus, quod quæ insistant eidem basi, sint inter se vt altitudines.

Deniq; Cylindri per aliam superficiem cylindricam eodem axe secti limbus exterior, dividitur à superficie conica, cuius sunt bases, infera circulus amplior, supera angustior, in duo novæ speciei segmenta circularia, quorum interius Th. priore Tunicam appellavimus, puta cylindri angustioris.

Horum igitur Limbi segmentorum proportio inter se est, quæ duarum medietatum Arithmeticarum, quæ constituuntur inter diametrum minorem & diametrum maiorem.

Diviso enim numero, puta diametri majoris, in partes duas, in diametrum minorem & in excessum, factisq; quadratis, tam à minore, quam à majore, majus quidem quadratum continebit partes quatuor, I. quadratum minoris, II. quadratum differentiæ, & III, IV. rectangula duo sub minore & differentia. Triplicatis deinde quadratis, existent pro majoris triplo, tria minoris, tria differentiæ, & sex rectangula. Et hæc tria quadrata differentiæ cum sex rectangulis sunt differentia tota quadratorum triplicatorum. Quare vt quadrata ad suos circulos, adq; cylindros æque altos, sic hæc differentia ad limbum cylindricum totum. Atqui Th. antecedenti differentiam jussi sumus multiplicare in vnam majorem & duas minores, id est, in seipsam & in tres minores, pro parte limbi interiore, quæ Tunica fuit indigetata. Ablato igitur quadrato differentiæ vno & tribus rectangulis, à quadratis tribus & sex rectangulis, restant quadrata differentiæ duo & tria rectangula, pro reliquo limbi. Est autem trium rectangulorum & vnius quadrati, ad tria rectangula & duo quadrata proportio eadem, quæ trium minorum cum vna differentia ad tres minores cum duabus differentijs, eademq; quæ vnius minoris cum parte tertia differentiæ ad vnam minorem cum duabus tertijs differentiæ. At si ad minorem addis primo partem vnam, pòst partes duas differentiæ, constituis duo media arithmetica inter minorem & majorem. Atq; id est quod proposueramus.

Corolla.

Corollarium I & Praxis.

Hinc facile habetur proportio Trunci conici ad Cylindros, Trunco inscriptum & circumscriptum. Inter diametros constitue duo media arithmetica, & multiplica differentiam totam diametrorum in horum minus pro Tunica, quam indue Cylindro minori, hoc est adde quadrato ejus diametri, pro Trunco. Ecce exemplum.

Sint diametri 3. 5, Differentia 2. quæ non communicat cum ternario Ergo substitue triplos 9. 15 Differentia 6. Quia eadem manet proportio.

Ergo diameter minor	Duo media Arithmetica	Diameter maior	
9.	11. 13.	15	Cyl. minor 81
9	Dif. 6. 6	15	Tunica 66
81.	66. 78.	225	Truncus 147
Pro Cylindro inscripto	Pro tunica / Pro residuo Limbi	Pro Cylindro circumscripto.	Residuum limbi 78
			Cyl. maior 225.

Aliud Exemplum				Aliud exemplum			
Dia-			metri	Dia-			metri
5.	7.	9.	11	19.	20.	21.	22
5.	6.			19	3		
Cyl. 25. Tun. 42 — Truncus. 67				Cyl. 361. Tun. 60 — Truncus 421			

Vel quod eodem recidit,

Multiplica diametros inter se, multiplica etiam differentiam in sui partem tertiam, & adde factos; provenit Truncus in ea dimensione, ut cujuslibet diametri quadratum valet suum Cylindrum. En superiora tria Exempla

9	6	9	5	6	5	19	3	19
15	2	9	11	2	5	22	1	19
135	12	81 Cyl. minor	55	12	25 Cyl. minor	418	3	361 Cyl. minor.
12			12			3		
147 Truncus			67. Truncus			421. Truncus.		

Corollarium II.

Segmenta limbi cylindri maioris circa minorem, superficie conica facta, stantia super eâdem basi, non minus quam cylindri ipsi, adeóq; & Trunci toti sub iisdem basibus circularibus parallelis, sunt in proportione suarum altitudinum.

Etsi verò superior basis non fuerit inferiori parallela, nec circulus, sed Ellipsis ad axem obliqua: nihilominus bina limbi segmenta, exterius & interius, sunt in proportione illarum altitudinum, quas habet Ellipseos centrum & diameter minor, eademq; diameter cylindricæ baseos rectæ. Itaq; non de nihilo est, quod Th. præcedenti, portionibus conicis, obliquo ad axem plano resectis, quæsivi methodum dimensionis à diametro Ellipsis ~~longiore~~. Etsi superficies talem limbum inæquabilis altitudinis dispescens, non est Coni recti, cui sit idem axis cum Cylindris, sed coni scaleni.

 Apo-

Apostrophe ad Patronos.

CVM LIBELLVS iste manuscriptus per menses sedecim apud librarium AUgustanum delituisset, commendatus illi ab eximio illo Germaniæ nostræ decore, meiq; dum viveret, amantissimo Marco VVelsero; neq; tamen typis excuderetur, vt erat mihi facta promissio: vix tandem, VVelsero jā rebus humanis exempto, libellum meū extorsi detentori, postliminioq; recepi.

Ex eo tempore consilium cœpi, libellum, quamvis in magna operarum penuria, excudendi domi: qua occasione potestas mihi facta fuit, non correctiorem tantum, sed & auctiorem, quam erat initio conscriptus, extrudendi. Nec diffiteor, temporis aliquantū subtractum studijs cæteris, impensumq; huic speculationi; nec pœnitet jacturæ. Nam fieri nequaquam potest, vt immortalitatis fructum metat labor, qui sementem temporis fecit nullam.

Et censuisti Tu quidem, Ill^{ris} & G^{se} L. B. IÖRGERE; quæ de figuris ab Archimede non tactis, ad rationes tamen doliorum propriiſſimè pertinentibus, affecta tantum audiebas, vti nequaquã omitterentur, quin potius operi ſubjungerentur, appendicis loco.

Ego verò & perfeci potiſſimam eorum partem; vt quod demonſtrationes attinet, parum, quod vſum, nihil ad perfectionem ſuperſit: & tractatum in ipſum libellum hic inſerui ſuo loco, cumq; partibus cæteris ita connexui, vt non appendix cauda, ſed caput aut cor ſpeculationis totius, vt eſt quidem, videri poſſit: quod & Te, L. B. IÖRGERE, & multò maximè Te, ILLVSTRISSIME DOMINE DE LIECHTENSTEIN (cujus in hac Philoſophiæ parte exercitationes aſſiduas, facultatemq; comparatam egregiam judicandi, ex quo Te primùm in præfatione libri ſum allocutus, multò nunc rectiùs & copioſiùs habeo cognitam & perſpectam) vbi tempus ad iſthæc cognoſcenda vacaverit, ipſos cenſituros exiſtimo. Valete & fruimini. Id. Iulijs Anno 1615.

Supplementum ad Archimedem.

DE STEREOMETRIA FIGVRARVM CONOIDIBVS ET SPHÆroidibus proxime succedentium.

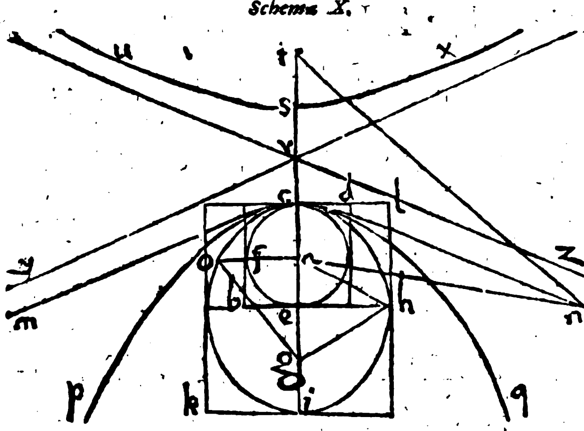
Huc usq; Archimedes & Geometræ veteres progressi sunt, inquirentes Naturam & Dimensiones figurarum ordinatarum rectilinearum & curvilinearum, quæq; ab ijs solida proximo gradu gignuntur.

Cæterùm quia figura Dolij longius à Regularibus excurrit, operæ precium me facturum putavi, si genesin illius & cognatarum, gradusq; cognationis earum cum Regularibus, eâdem quasi Tabella comprehensas ob oculos exhiberem, cùm vt demonstrationes secuturæ plus lucis haberent; tum verò etiam, vt industriam Geometrarum hujus ætatis excitarem, portisq; spaciosissimi agri Geometrici pansis, quæ ad huc in eo excolenda, quæ indaganda restent, præconio meo promulgarem.

DE SECTIONIBVS CONI, solidorum genitricibus.

Sectiones Conicæ curuæ superficiei, quæ uaria solida progignunt, hac vice considerandæ, quatuor sunt curvilineæ; quas hic in Schemate exhibeo inter se comparatas. Nam omnis hujusmodi sectio aut Circulus est CFE, aut Parabole PCQ, aut Hyperbole MCN, aut Ellipsis CHI.

Schema X.



Harum figurarum causâ simplicitatis hic est ordo, vt primus sit circulus, sequatur Ellipsis, inde Parabole, vltimo loco sit Hyperbole. Inter has duæ primæ in seipsas redeunt, Circulus & Ellipsis: duæ verò posteriores figuræ, Parabole & Hyperbole sic sunt comparatæ, vt in infinitum, si continues, excurrant, semper quidem ad rectitudinem magis atq; magis accedentes; nunquàm verò eam penitus assequentes; & id hoc discrimine, quòd brachia Paraboles CP, CQ, vni rectæ GI, adeòq; inter se ipsa etiam, magis atq; magis fiunt parallela, quamvis interim infinito intervallo ab invicem discedant: brachia verò Hyperboles CM, CN sequantur ductum duarum Rectarum RY, RZ, concurrentium in R, eoq; versus Y. Z. in infinitum ab invicem discedentium;

quæ

quæ brachijs Hyperboles semper approximant magis magisq;, nunquam tamen cum ijs concurrunt; à qua proprietate, Rectæ RY, RZ dicuntur Asymptoti.

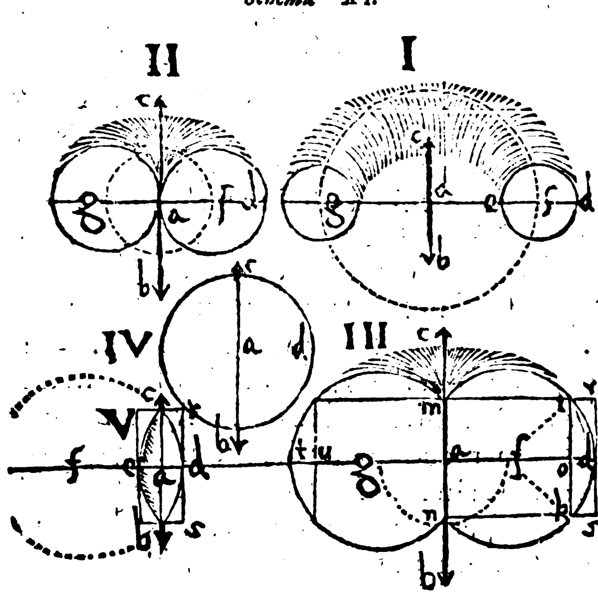
Rursum ex vtraq; biga est vna, quæ sola suam implet speciem, ex finitis quidem circulus, ex infinitis Parabole: Ellipsium verò illinc tot sunt formæ, quot possunt esse formæ rectangulorum parallelogrammorum LK: Hyperbolarum hinc formæ tot, quot angulorum YRZ, à binis rectis RY, RZ formatorum. Sanè quia, vt circulus CE se habet ad circumscriptum quadratum vniforme DB, & vt Parabole PCQ, ad Axem seu rectam CI vnicam, sic Ellipses CI, se habent ad Rectangulorum LK, Hyperbolæ MCN ad Concurrentium rectarum YR, ZR, species infinitas, quælibet ad suam.

Et nota propter descriptionem figurarum, quod sicut in circulo omnia intervalla AC, AF, AE, inter se sunt æqualia, sic in Ellipsi bina semper intervalla AC, OG, non à centro E, sed à duobus Focis A, G, æstimata; binis quibuscunq; AH, HG, vel AC, CG, vel AI, IG, sunt æqualia. In Parabola, cujus focus A, ducta quacunq; KI in eodem plano, rectâ ad axem CI, rursum binæ lineæ AC, CI. binis quibuscunq; alijs vt AO, OK æquales sunt. In Hyperbola, cuius focus vnus A intus, alter T. exterius, & circa eum figura similis VSX, intervalla bina cuiusq; puncti, ut N, & focorum A, T, semper vnam & eandem habent differentiam CS, lineam inter vertices C, & S, &c. Vide plura paulò infra de figurarum solidarum numero.

De modis Geneseos.

Porro ex circumductu circulari quatuor harum planarum figurarum (de alijs enim formis hac vice non loquimur) creantur infinitæ solidorum formæ, quarum superficies non, vt Coni & Cylindri, altrinsecus rectilineæ, sed quaquaversum curvilineæ sunt, secundum magis tamen & minus.

Schema XI.



Circumactûs autem species generaliter sunt quinq;, sed quæ minutius postea subdividuntur, cùm ad figuras magis compositas ventum fuerit. In adjecto Schemate expressæ sunt hæ species vtcunq;. Nam j. Axis CB, circa quem figura est circumagenda, vel longius stat à centro F. figuræ ED circumducendæ, quàm vt concurrat cum figura. Tunc figura DE directè circumacta in circulum FCG, cum latitudine sua erecta,

 creat

creat Annulum, in quo spacium est intermedium, cuius centrum A. II. Vel tangit axis iste geneseos, vt AB, figuram FD circumagendam; Tangat in A, & manente puncto circumferentiæ A, totus circulus circa CB circumagatur: tunc figuræ gignuntur, quas possis Angulos strictos apellare. III. Vel secat axis geneseos figuram circumagendam extra medium, vt si maius circuli segmentum MDN circa sectionem MN, sit circumagendum, ita ut centrum F per G transeat, gignitur autem figura in duobus locis oppositis cava, scilicet circa M & N, quæ Mali fructus arborei forma est. IV. Vel transit axis geneseos per ipsum centrum figuræ, vt si semicirculus CDB circa manentem diametrum CAB sit circumagendus; & tunc gignitur Sphæra seu globus perfectus. V. Vel deniq; secat axis geneseos figuram circumagendam intra medium, vt si residuum seu minus segmentum CDE de circulo MDN, sit circumagendum circa sectionem suam CAD: & tunc gignitur figura, in locis duobus oppositis acuta, quam à Citrij mali figura possis denominare.

DE FIGVRARVM NVMERO & differentijs.

Quod si tres figuræ reliquæ, sectione Coni ortæ, tam essent simplices, quàm circulus, de quo hactenus: figuræ solidæ his V. modis procreatæ essent in vniversum Viginti, à qualibet earum, vt hactenus à circulo, quinq; , pro quinq; modis Creationis circularis. Sed propter mixtam reliquarum figurarum Naturam, Vicenarius iste solidorum numerus ad Nonaginta extenditur.

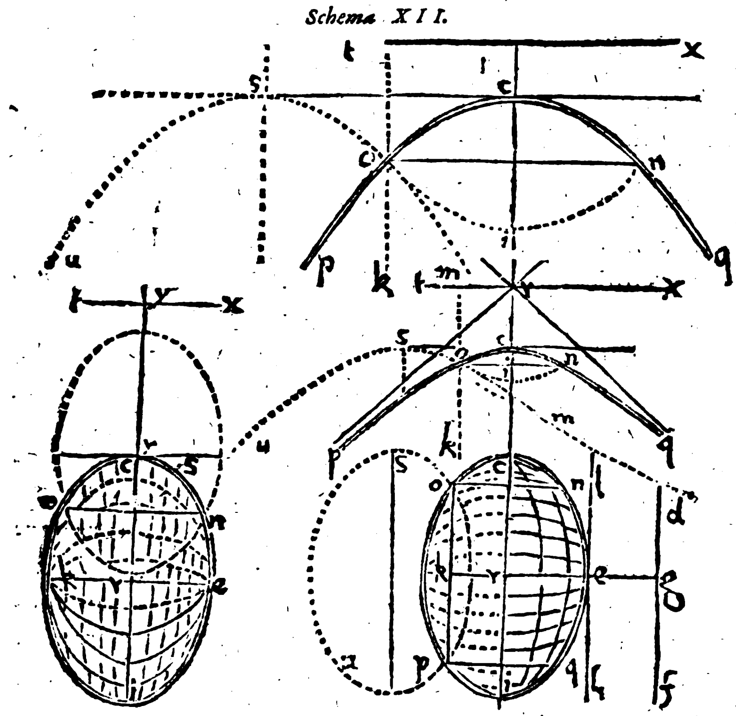
Cûm enim figuræ tres propriè dictæ Conicæ, non sint vndiq; similes: fit vt quæ respectu circuli vnica est linea, pro axe geneseos assumpta, respectu harum figurarum fiant diversæ, punctum in Circulo vnicum, diversa puncta sint in cæteris. In circulo Vertex vno & eodem modo dicitur, & omne circumferentiæ punctum pro vertice sumi potest: In cæteris Vertex primarius est, non nisi extremitas alicuius certæ lineæ, scilicet eius quæ axis dicitur, quæ est in figuris duabus sequentibus, CI, cuius vertices à G repræsentantur: contrà Vertices, latiore sensu, totidem sunt, quot lineæ in figura pro axe geneseos, vel ei parallelis, eliguntur; quos lubet Vertices positionis appellare, quia lineâ tali ad perpendiculum erecta, punctum totius figuræ altissimum, fit vertex ejus. Vt sequenti Schemate XIII. electa diametro OS pro axe geneseos, A fit vertex positionis: contrà electa contingente EF in axem geneseos, Vertex vel nullus est, in Hyperbolis scilicet obtusangulis, & certa earum positione, vel certè longe alius, quàm A, puta circa O. In circulo Centrum idem est cum Foco, scilicet A in Schemate X. præmisso: In Parabola Focus vnus A, centrum verò nullum est; nisi concipias, centrum eius infinito intervallo, focumq; alterum, intervallo duplo majori, in linea CI, à Vertice C, recessisse: In Ellipsi & Centrum est E, & foci duo A. G. omnia intra figuram: In Hyperbola itidem Centrum & duo foci; sed centrum extra figuram in R; focorum alter intra, in A, alter extra in T. qui est respectu VSX sectionis oppositæ, intra illam. In circulo diametri omnes pro axe sunt, in cæteris sæpe aliud axis, aliud diameter, vt aliud est species, aliud genus.

Et

Et in Parabola quidem (vt redeamus ad Schema XIII. sequens) diametri omnes æquidistant, vt CI, OS, HA. in Hyperbola verò atq; Ellipsi omnes per centrum figuræ R traducuntur, quod est in Hyperbola extra, in Ellipsi intus in medio. In circulo æquales sunt omnes diametri; in Ellipsi differunt longitudine, ut CI, OS; in Parabola & Hyperbola non est earum finita longitudo. In circulo & Ellipsi omnis lineam tangens habet æquidistantem sibi diametrum, in Parabola & Hyperbola, quæ tangenti cuicunq; æquidistat, vt PK ipsi FE, diameter figuræ esse non potest. Secundùm horum igitur punctorum linearumq; differentiam figuræ planæ circumactæ, varias etiam, & re quidem semper, plerunq; verò etiam ad oculum differentes species solidorum procreant: quas sigillatim recensere non pigebit, non tamen repititis quinq; speciebus ex circulari Coni sectione ortis, quæ singulæ familias singulas ducunt jam sequentium, quasdam interim communes habent clientelas.

Incipiamus ab iis in quibus desijt Archimedes, & sit in Schemate adjecto, axis figuræ CI; circa quem figura PCQ circumagatur, sic vt ma-

Schema XII.



nente CI, punctum
N, per punctum O
transeat, Q per P.
Creantur igitur solida duo Conoidea,
Parabolicum & Hyperbolicũ, & Sphæ- 1.
roides longum, seu 2.
figura Ovi: cuius 3.
vertices C, I; circulus amplissimus
ERK; de quib⁹ Archimedes libro de
Conoidib⁹ & Sphæroidibus. Modus
genesios est è Numero IV, idem
qui globi. Species
sunt 3. numero linearum.

Sit jam axis geneseos non ipse axis figuræ CI. sed ei parallelus. Erit igitur vel extra figuram, vt in DF, vel contingens eam, vt LH contingens in E: quæ duo in sola Ellipsi locum habent. Nam in cæteris, omnis linea parallela axi in eodem plano, secat figuram continuatam. In Ellipsi igitur, manente DF, & totâ figura NOPQ in distantia centri RG circumlata, gignitur annuli species, quem arduum dixeris: similis est serto puellarum ru- 4.
sticarum, quippe spacium habet in medio. Sic manente LH & puncto con- 5.
tactus E, tota itidem figura NOPQ circumlata, fit solidum ejusdem nominis, sed sine spacio in medio, hoc est annulus strictus. Vtranq; imaginare tibi in Schemate XI. ad Numeros I. II. sed pro circulis sectionum intellige Ellipses erectas.

 Vel

Vel erit intra figuram axis circumductionis; sit OK, & consistat vel citra CI axem figuræ, sic vt axis CI cum portione figuræ majore OCQ circa OK agatur, & manente O, vertex C per S transeat, & Q per V: tunc Pa-
6. rabole & Hyperbole, magis ista, figuras faciunt QCOSV, montis Ætnæ si-
7. miles, propter cavitatem ejus in vertice, quam Græci vocabulo Craterum
8. celebrant: Ellipsis verò figuram hoc pacto creat similem Mali Cotonei, quam imaginaberis in Sche. XI. præced. apud Numerum III: sed pro consertis circulis sectionis intellige consertas Ellipses erectas, vt in Schem. XII.

Consistat etiam dicta OK vltra axem figuræ CI sibi parallelum, sic vt PO minor pars figuræ, quæ axem non habet, circa manentem OK circumagenda
9. sit: tunc à Parabola atq; Hyperbola species quædam nascuntur Cornuum
10. rectorum MNP, quorum alia sunt acuta alia obtusa, vt in pecudibus quan-
11. do primùm conilcant cornibus. Ellipsis verò dat OQ figuram Olivæ vel Pruni, similem illi Numero V. Schematis præmissi XI.

Iam omisso axe CI, succedat ejus perpendicularis in eodem plano,
12. & sit primùm extra figuram vt TX. Ergo circum TX actæ figuræ, solida
13. creant annularia ordinata, Parabole quidem & Hyperbole extrorsum infinita, brachijs CP, CQ extrorsum versis & hiantibus, in circulum circum-
14. latis. Ellipsis verò circa talem axis GR perpendicularem TX exteriorem, intervallo centri RY, manente Y, circumducta, creat annulum supinum seu sessilem, similem fulmento presso bajulantium situlas, capitibus suppositis. Rursum hanc figuram imaginare in Schemate XI, preced. Numero I. sed pro circulis sectionum sint Ellipses jacentes, verticibus invicem obversæ. Contingat exinde figuram in C vertice, perpendicularis ista axis, sitq; CS; & figuris circa eam circumactis, tres gignentur species Annu-
15. 16. lorum strictorum ordinatorum, duo infiniti extrorsum, vt prius, vnus fi-
17. nitus ab Ellipsi GI, manente puncto C, estq; supinus vel sessilis vel pressus, vt prius; imaginandus in Schemate XI præced. apud numerum II, si pro circulis sectionum essent Ellipses verticibus sese contingentes. Secet denique figuram ista perpendicularis axi, sitq; ON: secabit figuræ planitiem in partes duas, in Parabola & Hyperbola semper inæquales, cum altera pars PONQ infinita sit, ONC finita, ita vt lineæ conicæ fiant tria segmenta, duo infinita, vnum finitum; in Ellipsi verò licet vtraq; finita sit, altera tamen plerunq; major est, NIO, altera minor, OCN. Igitur sex hisce figurarum segmentis circa ON circumactis, totidem existent novæ species, duæ circa
18. medium vtrinq; sc. in O. & N excavatæ, exterius circumcirca infinitæ,
19. quippe à partibus infinitis PONQ, circa ON circumactis, vna quæ est ab Ellipseos segmento maiori, lenticularis, supra & infra vmbilici forma. Pro-
20. venit tali forma genus quoddam Melonis sessilis minuti, qui totus editur: proveniunt tali forma superius etiam boleti aliqui. Hanc in Schemate XI. præcedenti, Numero III, apud figuram Mali imaginare, sed pro consertis circulis sectionis, intellige consertas Ellipses eodem axe, vt in Schemata præsenti XII. Deniq; minoribus figurarum partibus ONC, tres reliquæ figuræ
21. solidæ fiunt, aspectu similes inter se, reipsa diversæ; Ellipticam quidem
22. OCNL à Pruno crasso, Parabolicam verò & Hyperbolicam OCNI à Fusis
23. distinctionis causâ non ineptè denominaveris. Atq; hæ duæ, præsertim

illa,

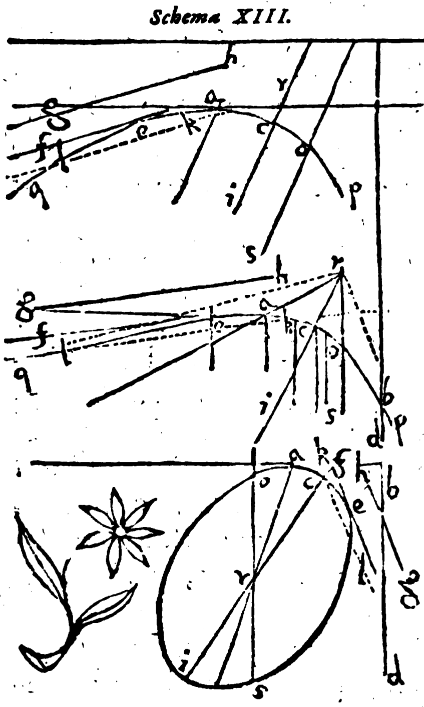
illa, quæ est ab Hyperbola multùm obtusangula, præcipuè sunt notabiles: Fiunt enim figuræ verticosæ, cum ventre circulari, rotunditatis conspicuæ, reliquo corpore versus vertices vtrinq; magis ad Conorum rectitudinem accedente. In his erit nobis quærenda genuina figura dolij, præsectis verticibus O, N.

Dictum est, in hac forma sectionis, segmenta Ellipseos non semper esse inæqualia. Cùm ergò hæc axi perpendicularis per centrum figuræ R transit, quam axem vel diametrum rectam & breviorem appellant, tunc figuræ dimidium, circa hanc ERK circum actum, sic vt manente E, vertex C per I traducatur, creat alteram speciem Sphæroidis lati, cuius vertices 24.
in E, K, circulus amplissimus CRI, de quo itidem Archimedes.

Huc vsq; recensere & distinguere figuras solidas suffecisset ad Dolia vinaria. At cum prædixerim, me in hac speculatione paulò longius vltra libelli hujus metas prospicere; adjungam cognationis causa etiam reliquas solidorum species.

Succedat igitur in præsenti Schemate XIII. pro axe CI alia quæcunq; diameter OS, & in ea statuatur axis geneseos. Hîc Ellipsis quidem secatur

Schema XIII.



per centrum R, in duas medietates similes, quarum vtralibet circumducta circa 25.
OR manentem, creat formam Pyri, quæ iure cognationis postulat adiungi Malis & Cotoneis & Prunis, vt constet his bellariis sua integritas. At reliquæ duæ figuræ secantur in partes dissimiles inter se, vtrasq; infinitas, sed in Hyperbola obtusangula casus duo sunt: Nam aut secatur angulus obtusus ab electa diametro in duas partes acutas, aut vna sola pars est acuta, altera obtusa vel recta. Partes igitur figurarum, excepto casu vltimo, circumductæ creant figuras, quæ ad oculum nihil differunt à Crateribus & Ceratoidibus, Numeris 6. 26. 27.
7. 9. 10. insignitis; etsi reipsa diversæ sunt, 28. 29.
ob axis CI circumvolutionem, hic conicam illic cylindricam, totiusq; hic partis generantis obliquitatem.

In obtusa verò sectione anguli obtusi Hyperboles, pars maior figuræ circa talem diametrum circumducta addit vnam speciem, veriùs non speciem. Nam & deorsum & extorsum infinita est (nisi, vt in omnibus talibus, superficie conica vel cylindrica, quæ 30.
oritur ductu rectæ, finem ei statuas (caretq; Vertice, sed eius loco, est in medio in vmbilicum depressa, circà ascendit sursum leniter, idq; sine termino.

Pro diametro OS sumatur ei parallela BD, quæ in Ellipsi non habet separatam considerationem à parallela lineæ contingentis, quippe omni diametro respondet sua parallela contingens figuram. Restat vt illam parallelam applicemus reliquis duabus figuris; sit igitur vel extra figuram vel

 intra,

intra. Extra esse in Parabola & Hyperbola non potest, cum omnes diametri parallelæ figuram continuatam intrent. Ducatur igitur aliqua diametro OS parallela, intra figuras has duas. Rursum autem in Parabola linea quæ est diametro parallela, ipsa quoq; est diameter, nihil hinc gignitur novi. In Hyperbola sola casus iste locum & considerationem separatam habet: quam cum diameter OS in duas dissimiles secuerit partes, jam hæc Parallela ipsi OS vel in minori eius parte ducitur, vel in maiori. Ducatur in minori & sit BD, secat igitur & ipsa figuram in partes magis adhuc dissimiles,
31. 32. quarum maior creat aliquid Craterum Numero 7. simile, aut infiniti Nu-
33. mero 30. minor simile Ceratoidum, Numero 10. Ducatur jam in maiori parte OQ, aliqua ipsi OS diametro parallela; quod in Hyperbolis acutangulis habet casus quinq;. Nam aut inter diametrum dividentem & verticem primarium ducitur, vt inter C, O. aut per ipsum verticem primarium C, aut inter vertices duos, primarium C, & positionis A, aut vltra verticem positionis A Sed in obtusangulis Hyperbolis vertex positionis non datur. In vno quolibet casu secatur figura in duas dissimiles partes. Species igi-
34. 35. tur nascuntur tredecim, quarum quatuor sunt similes Craterum, Nume-
36. 37. ro 7. tres similes figuræ cavæ Numero 30. quatuor similes Ceratoidum
38. 39. Numero 10. quippe acutæ: duæ residuæ sunt rotundatæ in vertice, similes
40. Conoidi Hyperbolico, numero 2. vna quidem, quæ est à parte maiore Hy-
41. 42. perboles vel acutangulæ, vel si obtusangula, convenienti diametro divisæ,
43. 44. vt dictum (debet enim illa secare angulum Hyperboles obtusum in duas
45. partes acutas) similis est obtusangulo, quæ verò à parte minore, similis a-
46. cutangulo Conoidi.

Vltima linea sit, Contingens sectionem, extra tamen verticem primarium C, vt EF, circa quam si circumagantur figuræ Parabole & Hyper-
47. 48. bole, duas gignunt species infinitas, similes ijs quæ sunt numero 15. 16. minus tamen ordinatas, infinitas enim se extendit in transversum. Ellipsis ve-
49. rò circa hanc EF circumducta gignit annulum strictum conniventem, cognatum illi Numero 17. quem imaginaberis in Schemate XI. quinq; modorum circumactus, apud numerum II. sed pro circulis sectionum concipe Ellipses ad mutuum contactum æqualiter inclinatas. Contingentibus accenseri posset Asymptotos, est enim quasi contingens sectionem in
50. puncto infinitùm distanti: & hic consideratur nova species, quasi media inter annulares laxas & strictas.

Sit pro contingenti, ejus parallela, & sit primum extra figuram, & circa hanc velut axem circumagantur figuræ; quatuor fiunt solidorum annulorum species, ex Parabola & Hyperbola infiniti in transversum, quo-
51. rum dorsum in Parabolico semper circulariter eminet, in Hyperbolico
52. quidam eminens dorsum habent, alii extrorsum fiunt altiores, quam quo
53. loco sunt angustissimi, non multum absimiles figuræ numero 13. Ex Ellipsi verò circa GH circumactâ fit annulus finitus connivens, ex altera
54. parte amplior, in forma ferè Tiaræ seu Globi Turcici, si dempseris ei apicem. Hanc etiam imaginare apud primam formam circumactus, vt tamen pro circulis sectionum concipias Ellipses ad se mutuò æqualiter inclinatas.

Parl-

Parallela Contingenti si fuerit intra figuram, vt LK, secans eam in partes duas, multæ fiunt species, quia etiam casus multi. Vel enim LK non secat axem intra figuram, vel eum secat. Et si secat, tum vel transit verticem primarium C, vel eum intercipit, excludens verticem positionis circa O, qui ad erectionem figuræ secundum EF sequitur; si tamen aliquis datur; nam in Hyperbola obtusangula, si LK vel FE cum Asymptoto contraria RB, fecerit obtusum angulum versus figuram, Vertex nullus est: Vel per hunc positionis verticem transit: vel etiam hunc in parte resecta includit. Casus recensui quinq; & omnes in omnibus tribus figuris locum habent; sectiones ergo quindecim, & bina in singulis figuræ segmenta. Sed in Hyperbola tria majora trium primorum casuum duplicia, respectu effectus; aut enim deorsum excurrit infinitas ibi, vt in Parabola, aut sursum. Solidorum ergo species hinc sunt tinginta tres, quarum tredecem infinitæ 55. 56.
in transversum, & ex his novem vtrinq; in vmbilicum excavatæ, (quarum 6. 57. 58.
cum eminenti labro circulari, vt Crateres Numero 7, sed in hoc diversi, 59. 60.
quod æquiparantur monti etiam subtus excavato; 3. verò sine eminenti la- 61, 62.
bro, quarum non est finita altitudo, similes figuræ Numero 19.) duæ acu- 63.
minatæ, Ceratoides, ut Numero 10. & duæ bene rotundato vertice, Conoi- 64. 65.
des, ut Numero 2; quando scilicet linea, circa quam est circumagenda fi- 66. 67.
gura, per verticem transit positionis, ubi is datur. Harum tredecim, quinq; sunt Parabolicæ, octo Hyperbolicæ, Reliquæ viginti sunt finitæ, & altera 68. 69.
parte crassiores, reliqua tenuiores. Ex ijs enim quindecim (quinæ ex figu- 80. 71.
ris singulis) species sunt in acumen desinentes, novem quidem vtrinq;, ter- 72. 73.
næ ex figuris singulis, quos Nucleos appellemus: tres verò, singulæ ex figuris 74. 75.
singulis, à parte crassiori benè rotundatæ, affines ideò Sphæroidi lato; quas 76.
Fragis aut Nuci Pineæ comparare possumus: tres deniq;, singulæ rursum ex 77. 88.
figuris singulis, à parte crassiori cavæ, à tenuiori acutæ, in modum folliculi 79.
Vesicariæ, quam Germani Cerasa Iudaica dictitant, occultè signantes 80. 81.
glandem penis cum præputio. Quinq; verò vltimæ sunt Pyrorum species, 82.
à parte majori Ellipseos, quinq; dictis casibus sectionis hujus, generatæ, 83. 84.
cavæ omnes, tres vtraq; parte, duæ alterâ solum, parte verò reliqua tenui 85.
una rotundata, & Sphæroidi similis; vna acuta, ferè concidens cum Vesi- 86.
caria, ex Ellipseos parte minori nata. Summa Octuaginta septem, quibus 87.
additæ figuræ quinq; ex circulo, veluti capita familiarum, efficiunt formas nonaginta & duas.

Tot igitur sunt genera figurarum Solidarum à sectionibus conicis in circulum actis resultantium; vt jam segmenta singularum, aut composita à segmentis, seorsim non numerentur. Verbi causa, patina stannea constat plerunq; tribus superficiebus, in fundo, segmento Sphæræ, circum, craterê Parabolico, limbus verò est ex superficie coni valde obtusi, aut etiam Zona Globi obliqua. Etsi verò complurium dimensiones artificiosæ in idem recidunt; non sunt tamen ignoranda Geometræ discrimina generationis tam multiplicia, ne incautus, circa nonnullarum specialium generalem considerationem, pertrahatur in insidias inexplicabiles. Circa has igitur singulas exerceant se Geometræ, exemplo Archimedis; qui ex hisce, quatuor solas, & quintam, Globum ipsum, consideravit:

vit:

vit: non quòd vtilissimæ aut communissimæ essent, quid enim hic habet Conoides parabolicum præ Annulo, Malo, Pyro, Pruno, Nucleo? sed quod simplicissimæ, & proximæ globo, & ingenio se præberent. Nos in præsens illas tantum contemplabimur, per quas accessus patet ad Fusa Hyperbolica, quorum Trunci sunt nostratia dolia: subijciam igitur de ijs theoremata sequentia.

THEOREMA XVIII.

Omnis Annulus sectionis circularis vel ellipticæ, est æqualis Cylindro, cuius altitudo æquat longitudinem circumferentiæ, quam centrum figuræ circumductæ descripsit, basis vero eadem est cum sectione Annulj.

Intelligo sectionem, quæ fit, plano traducto per centrum spacij annularis, ad superficiem annularem recto. Huius Theorematis demonstratio patet partim ex Th. XVI, & ijsdem elementis institui potest, quibus Archimedes Stereometriæ principia tradidit.

Annulo enim (in Schemate XI.) GCD sed integro, ex centro spacij A, secto in orbiculos infinitos ED, eoq; minimos, quilibet eorum tantò erit tenuior versus centrum A, quantò pars eius, ut E, fuerit propior centro A, quàm est F, & recta per F ipsi ED perpendicularis in plano secante: tantò etiam crassior versus exteriora D: extremis verò dictis, scilicet D, S, simul sumptis, duplum sumitur eius crassitiei, quæ est in orbiculorum medio.

Hæc ratio locum non haberet, si orbiculorum E, D, partes cis & vltra circumferentiam FG, lineasq; per F, G, perpendiculares, non æquales æqualiterq; sitæ essent.

Corollarium I.

Hæc ratio dimensionis valet tam in circulari forma annuli, quam in elliptica ardua, sessili, connivente, tam in laxis annulis, quàm in strictis: quin imò in omnibus annulis, quæcunq; eius, pro circulo ED, existat figura ex sectione eius rectà: dum modò in plano per AD ad annulum recto, sectionis partes cis & vltra F, fuerint æquales æqualiterq; sitæ hinc & inde: Quod explorabimus in figura sectionis quadrata. Sit annulus corpore quadrato, & intelligatur sub ED quadratum. Hic annulus habet rationem dimensionis etiam aliam. Nam est pars exterior Cylindri, cuius basis est circulus semidiametro AD, altitudo DE: huic Cylindro ex Th. XVI. adimenda est medulla, seu Cylinder, cuius basis est circulus semidiametro AE, altitudo ED. Quare quod fit ducta ED in circulum AD, minus circulo AE, æquat corpus annuli plano quadrato creati. Et si duceretur ED in quadratum AD, minus quadrato AE, proportio corporis facti, esset ad corpus quartæ partis annuli, vt est quadratum ad circulum, scilicet 14. ad 11. Sit AE 3. Ergo AD 4. cuius quadratum 16. sed quadratum AE. est 4. Ergo differentia quadratorum est 12. quod duc in altitudinem 2, existit corpus

24. cuius

24 cuius quadruplum 96. vt verò 14. ad 11. sic 96. ad 75. cum tribus septimis, Annuli quadrati corpus. Hæc secundum rationem Th. XVI. At secundum modum præsentem, cùm sit AF 3. FG 6. vt verò 7. ad 22. sic 6. ad 19. minus vna septima: erit ergo hæc longitudo circumferentiæ FG, pro altitudine Cylindri: Et cum ED sit 2, & quadratum eius 4, pro basi Cylindri, duc igitur 4. in 19 minus vna septima, prodeunt 76 minus quatuor septimis. Ecce verum etiam sic theorema.

THEOR. XIX. & Analogia.

Annulus strictus est æqualis Cylindro, qui habet basin, circulum sectionis Annuli, altitudinem æqualem eius circuli longitudini.

Valet enim modus iste in omni omninò proportione ipsius AE ad AF, valetq; adhuc in Annulo stricto, ubi circuli EC circumacti centrum F, describit circulum FG, æqualem ipsi DA circumacto. Nam secatur tale strictum ex A, in orbiculos, qui in A habent crassitiem nullam, in D duplam ipsius crassitiei in F, sicut circulus per D. duplus est ad circulum per F.

Corollarium.

Corpus Cylindraceum, quod fit (in Schemate XI) circumacto quadrilatero mixtilineo MIKN, vi ejusdem demonstrationis æquale est columnæ, quæ hoc quadrilaterum habet pro basi, & longitudinem circuli per FG pro altitudine. Limbus verò exterior IKD, cylindraceum exterius ambiens, ut circulus ligneus dolium, planè nihil attinet ad hoc theorema, sed alijs principijs est indagandus.

Analogia.

Rursus autem valet iste modus per omnia corpora seu segmenta Mali (vt & Cotonei) cylindracea, magis magisq; tenuia, donec tandem IK & MN coincidant, quod fit in genesi globi, numero IV. ubi pro duabus MN est IK, est vnica BC, quare in illo corpore primùm cessat in solidum, huius theorematis demonstratio & usus.

Corollarium.

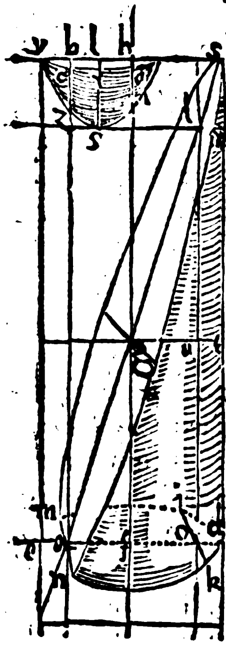
Globus est ad circulum strictum, eodem circulo creatum, ut 7. ad 33. Nam tertia pars semidiametri, ducta in quadruplum circuli maximi, vel duæ tertiæ diametri in aream circuli maximi, creant cylindrum æqualem cubo. At Cylinder æqualis stricto, habet basin quidem eandem; altitudinem verò, circumferentiam. Ergo ut circumferentia ad bessem diametri, 33. ad 7. ita strictum ad Globum.

THEOREMA XX.

Zona Mali componitur ex Zona globi, & segmento recto cylindri, cuius segmenti basis est segmentum, quod deficit in figura, quæ gignit Malum, altitudo vero, æqualis circulo, quem centrum segmenti maioris describit.

Demonstratio. Explicetur corpus Mali ijsdem legibus in Cylindricum segmentum, quibus Archimedes Theor. II. explicauit circuli aream in triangulum rectangulum; & sit AD semidiameter circuli maximi in corpore Mali, ex cuius puncto D, erigatur DS, ejus circuli maximi longitudo in rectum extensa, quæ concipiatur in superficie cylindrica. Nam linea MN est veluti communis acies, ad quam terminantur omnia segmenta solida circularia. Extensâ verò maximi circuli circumferentia in rectum DS, segmenta illa solida circularia simul extenduntur, & fiunt Elliptica MSN, præterquàm primum MDN. Sed clarius elucescet vis huius transformationis in sequentibus. Secetur area MDN lineis parallelis ipsi MN in aliquot segmenta æquelata minima, quasi linearia, & connectantur A. S puncta, & in lineam AS, ex AD diametri punctis, per sectiones areæ factis, ducantur perpendiculares FG, OL. sit autem F centrum, & quæ ex F perpendicularis, secet A S in G, & per G ducatur ipsi FD parallela GT. Sit deniq; O punctum medium sectionis IK, & ex illo perpendicularis OL, secans AS in L, & per L ducatur ipsi OD parallela LR. Cùm igitur figura circa MN circumagitur, nihil ferè creat areola MN, quia minimùm movetur; at eius parallela per F, jam movetur in circulum, longitudine FG, linea per O, in circulum longitudine OL, & sic omnes: & partes corporis cylindracei, per FG, OL signatæ, sunt æquales cylindraceis illis veluti tunicis in Globo, quas gignunt lineæ in circumactu figuræ MDN circa MN: per XVI. Theor. Tota igitur figura, scilicet Cylindri prisma MNDS, constans ex omnium tunicarum corporibus, in rectum extensis, æqualis est toti corpori Mali, ex tunicis constanti.

Schema XIV.



Amplius, cylindraceum corpus super basi IMNK usq; in L, cylindro secto per planitiem, in qua sunt OL & KI lineæ, erit æquale cylindraceo Mali, cui dempta est zona exterior. Et igitur Particula cylindri, resecta per hoc planum, scilicet LSDO, erit æqualis Zonæ Mali.

Cum

Cum autem GT sit æqualis ipsi FD, & sit semidiameter illius globi cuius maximus circulus est MIKN, & TS sit longitudo illius circuli maximi (quia ut AD ad DS, sic GT ad TS) Prisma cylindri supra GT vsq; in S, erit æquale Globo: Et pars GVL similiter erit æqualis cylindraceo corpori globi FD, per circum actum lineæ IK ad FO rectæ, descripti. Et igitur particula cylindri LSTV reliqua, erit æqualis zonæ globi hujus, cuius sectio est segmentum KDI.

Sed ODSL componitur ex VTSL, & ex ODTV, segmento cylindraceo, cuius basis IKD segmentum, & FG altitudo, æqualis circulo, quem F centrum segmenti maioris MIKN describit, si figura circa MN circumagatur. Ergo etiam horum æqualia sic sunt; scilicet, vt zona Mali componatur ex Zona Globi ab eodem segmento descripta, & ex dicto segmento cylindraceo.

Corollarium & Praxis stereometrica.

Malum mensuri, sic agemus. Datam esse oportet longitudinem MN deficientis segmenti apud A, in proportione ad diametrum circuli seu semidiametrum FD. ex qua datur sector MFN ad IFK, per Coroll. ad Th. II. Nam si dimidia MN, hoc est IO, explicetur numero, qualium FD est 100000, MN erit sin⁹ rectus arcus DI; quo dato, datur & OF sinus complementi, & OD altitudo segmenti deficientis, seu sagitta aut sinus versus in tabula sinuum. Multiplicato igitur FO in IO, prodit area trianguli IFK, qua ablata à sectore IFK, relinquitur segmentum IKD, quod duc in circumferentiam semidiametri AF, per Th. præsens, & creabis segmentum cylindri, super basi, segmento circuli, & altitudine FG; quæ est pars vna Mali, pars scilicet Zonæ Mali: aufer autem duplum segmenti circuli ab area circuli, restabit segmentum circuli inter IK & MN; quod duc in eandem circumferentiam circuli per AB descripti : & creabis cylindraceum Mali; quæ est pars altera.

Et quia scitur K, scitur igitur & IM. Quæro ergò segmentum globi KIM, cuius baseos diameter IM, per Th. XIV; eandem verò basin duc in altitudinem MN, Creabisq; cylindrum sub hoc globi segmento, per Th. III. cui adde duo segmenta globi inventa, conflabisq; cylindraceum globi, inter IK, MN; id aufer à corpore globi noto, per Th. XIII, restabitq; zona globi, cuius sectio KD; quæ est pars tertia Mali, pars scilicet altera zonæ Mali; tribus vero partibus compositis, totum repræsentatur corpus Mali.

Corollarium II.

Sic zona Cotonei, & zona Cucurbitæ sessilis, componuntur ex zonis, illa Sphæroidis longi, hæc sphæroidis lati, & ex cylindri pressi seu Elliptici segmentis, illa ex planiori, hæc ex dorsuali: quorum segmentorum bases, sunt Ellipseos segmenta, deficientia in figuris, quæ cotoneum & sessilem cucurbitam creaverant: altitudines verò æquales circumferentijs in longum extensis, quas centra figurarum in circumactu describunt.

THEOREMA XXI.

Corpus Citrij est differentia inter Zonam Globi & dictum segmentum Cylindri.

Demonstratio. Nam eodem modo, vt prius, cum figura (superius in Schemate X, Numero V. CDB circa CAB) hic verò in Schemate XIV. IDK circa IOK circumagitur: segmentum areolæ in ipsam IOK terminans, ferè nihil creat, quia penè nihil movetur: at partes remotiores, iam moventur per longitudinem circumferentiarum suarum, donec vltima D, vel ei respondens R moveatur in longitudinem RS, quanta est circumferentia circuli amplissimi per corpus Citrij: ex quibus elementis conficitur, vt corpus Citrij (CDBE, in Schemate XI.) sit hic in Schemate XIV. æquale segmento cylindri LRS. At cùm AO dupla sit ipsius FO, id est GV, erit & OL, dupla ipsius CZ. Corpus igitur ODRL rectum, duplum ipsius VTRL; pars igitur ~~ODTV~~, æqualis parti VTKL. Sed RLS est differentia inter LSTR, & LRTV, quorum illud æquale Zonæ Globi, hoc æquale segmento Cylindri VDTV. Patet igitur propositum.

VTRL

Corollarium & Praxis.

Oportet esse datam longitudinem axis Citrij, & diametri circuli maximi per corpus medium. Multiplicato igitur axe in seipsum, & facto diviso per diametrum huius circuli maximi in corpore Citrij, prodit aliquid adijciendum diametro Citrij: vt hoc aggregatum est ad diametrum circuli 200000, sic axis ad sinum segmenti quod creat citriū; Sic & diameter Citrij ad sinum versum. Ex eo similis, sed tamen brevior, est calculus vna operatione, quàm prius. Non indigemus enim cylindraceo Mali: sed invento primum segmento VTKO, deinde Zonâ Globi LSTV, aufertur illud ab hac, & restat LSR corpus Citrij.

Corollarium II.

Sic corpus Olivæ vel Pruni Elliptici, est differentia inter Zonam Sphæroidis illic longi, hic lati, & inter dictum segmentum Cylindri Elliptici.

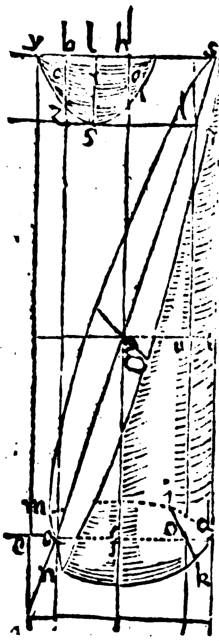
THEOREMA XXII.

Zona Citrij truncati vtrinq; æqualibus circulis, componitur ex corpore minoris Citrii, quod creatur ab eodem circuli segmento, quo & Zona proposita creata est, & ex segmento Cylindri, cuius basis est idem minus segmentum circuli, altitudo æqualis circumferentiæ circuli truncantis.

Repe-

Repetatur enim Schema XIV. Et sit in eo segmentum I SR Cylindraceum, æquale Citrio maiori. Explicetur autem hoc segmentum seorsim, vt basis eius in conspectum veniat, est autem basis ista, segmentum plani Circularis, quod creavit Citrium maius, seu truncandum. Intelligatur segmentum hoc circuli sub recta YBLH, & sub arcu YCRQ. Sit autem Citrium hoc utrinq; truncatum quale, schemate sequenti XVIII. cernitur literis EAH FSQCG; sic ut intelligamus creatum esse non integro segmento circuli, sed parte ejus interiori BCQH, arcu CRQ circa BH axem circumacto. Repræsentabunt igitur rectæ BC, HQ, semidiametros circulorum Truncantium: & Basis ista secabitur in partes quatuor

Schema XIV.



1. BCY ad latus vnum, triangularis mixtilinea.
2. Altera vltra HQ ad latus alterum, priori similis.
3. Parallelogrammum rectangulum BHQC, in medio.
4. Segmentum circuli minus, à tergo, rectâ CQ & arcu CRQ contentum.

Cum autem ponatur solidum æquale Citrio maiori toti, erit RS altitudo solidi, æqualis circumferentiæ circuli per medium huius Citrij corpus. Et quia planum YSH idem est, in quod in cidunt hypotenusæ rectorum angulorum BCZ & LRS: quare vt LR ad RS, sic BC ad CZ. Sed LR est ad RS, vt radius circuli ad circumferentiam suam: ergo & BC ad CZ sic est. Itaq; cum BC sit semidiameter truncantis; erit CZ circumferentia truncantis.

Quatuor ergo dictis baseos partibus, totidem solidæ superstant;

1. Super BCY, stat BYCZ Pyramidalis, mixtis & superficiebus & lineis contenta.

2. Similis ei ultra HQX. Et hæ duæ sunt æquales duobus Verticibus solidis, de Citrio resectis. (In Schemate XVIII, sequenti, vertices hi spectandi sunt literis GEI, & FNH.)

3. Super BHQC stat Prisma seu Pentahedron BCZXHQ, quippe quod continetur tribus quadrilateris BCQH, GQXZ, XZBH, & duobus triangulis CZB, QXH; eius altitudo est CZ, inter QC, XZ parallelos. Hoc solidum est æquale Cylindro medio, in corpore truncati Citrij, bases habenti, circulos truncantes, (Hic Cylinder in Schemate XVIII. sequenti adumbratur literis EHFG, totusq; latet intra zonam FCG, HAE.)

4. Deniq; super segmento parvulo CQR, stat solidum SRQCZSX, simile illi, in quod zona Mali explicabatur. Cum autem tota figura solida HYSR, æquet totum Citrij corpus, & tres recensitæ partes, totidem partes Citrij æquent: residua etiam ista Cylindracei segmenti, residuam Citrij partem æquent, necesse est; Est autem zona ambiens Cylindrum jam modo ductum, in corpore Citrij truncati.

Atqui vt similis est ista pars solida priori, quæ Zonam æquabat Mali; sic etiam duas, vt illa, partes habet, manifestis signis ab invicem discretas: vna est segmentum cylindri rectum, contentum superficiebus quatuor, plano parallelogrammo GQXZ, superficie cylindrica XZCRQ, & duobus segmentis parvis circuli; quorum vnum apparet, literis QCR, alterum ad XZ non apparet, Et huius segmenti altitudo CZ, vt jam est demonstratum, æquat circumferentiam circuli Truncantis. Altera huius zonæ pars est Prisma ZXS, super eodem segmento parvo stans ad ZX. Cùm autem LR dixerimus sic se habere ad RS, vt semidiamr est ad circulum; & sit etiam BC sic ad CZ; erit etiam sic differentia LR & BC, ad differentiam RS & CZ : quæ est altitudo huius secundæ partis de zona supra ZX. Sed differentia LR & BC est latitudo, vel sinus versus segmenti CQR (in Schemate XVIII. AP, quæ est semidiameter Citrij minoris, arcu HAE circa axem HE descripti) Ergo etiam differentia RS & CL, hoc est, altitudo huius Prismatis Cylindracei, est æqualis circumferentiæ circuli, per medium corpus Citrij minoris. Per ea igitur, quæ Th. antecedenti sunt dicta, Prisma hoc Cylindraceum ZXS, est æquale Citrio minori, segmento parvo CQR descripti (quod est in Schem. XVIII. seq. HAE.) Et ecce in zona Citrij truncati duas partes, quales in Theoremate descripsimus. Vt ita constet corpus Citrij truncati ex tribus omninò Elementis, ex corpore Citrij minoris, ex Cylindro, & ex segmento cylindri recto.

Corollarium & Praxis.

Mensuri corpus Citrii vtrinq; truncati, sic agemus. Datam oportet esse longitudinem diametrorum tam circuli maximi in corpore medio, quam circulorum truncantium: datum sit etiam intervallum inter circulos truncantes, omnia in eadem mensura. Tunc aufer diametrum truncantium à diametro maximi, quod remanet, dividat quadratum intervalli inter truncantes; quotienti adde divisorem. Vt ergo compositum hoc ad divisorem, sic 200000, mensura diametri usitata in Canone sinuum, ad sinum versum segmenti, quod creat, I Citrium minus, II Zonam Citrii maioris, III. Zonam Globi. IV. Zonam Mali, quod creatur eiusdem cum Citrio minori circuli segmento maiori : sic etiam idem numerus 200000 est ad diametros intervallumq; Truncantium in eadem mensura.

Iam igitur per Corollarium ad XXI, quære corpus Citrii parvi, per Zonam Mali & per Zonam Sphæræ; hoc corpus est pars vna Citrii Truncati. Deinde per numerum diametri truncantis, iam inventum, quære longitudinem eius circumferentiæ in eadem mensura, eamq; multiplica in segmentum circuli inventum; prodibit Citrii truncati pars altera, & iunctæ hæ duæ partes, constituent eius Zonam. Tertiò multiplica planum circuli truncantis in numerum intervalli truncantium, iam inventum, prodibit pars tertia Citrii truncati. Omnibus in unam summam confectis, componetur totum corpus Citrii truncati.

Corollarium II.

Zona Olivæ aut Pruni Elliptici truncati componitur similiter ex corpore Olivæ aut Pruni minoris, quod eodem Ellipseos segmento creatur; & ex

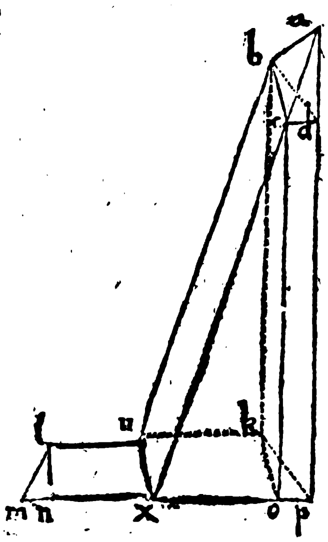
& ex ſegmento Cylindri preſſi, quod eidem Ellipſeos ſegmento ſuperſtat, altitudinem habens æqualem circumferentiæ circuli truncantis Olivam aut Prunum.

Epiſagma.

Huc diſtuli demonſtrationem Theorematis XVII. de Zona ſeu Tunica Trunci conici circa Cylindrum: propterea quod cognata eſt demonſtrationi Theorematis præſentis.

Sit KLMP Trunci Conici recti ſectio per axem VX, KO diameter circularis baſis PM, diameter circuli Truncantis KL, cui parallelæ ſint KO, LN, vt ſint æquales KL & ON, & KOP figura ſimilis figuræ LNM, & KVXO quadrilateræ, ſimilis LVXN. Explicetur autem trunci ſoliditas in rectum, iiſdem legibus, quibus hactenus omnis generis figuras, ſuperficiebus, in omnes plagas curvis, terminatas explicavimus. Cum igitur linea PK conicæ ſuperficiei ſit in has plagas PK, recta, explicata igitur ſuperficies erit plana, ſcilicet ABKP, & PA erit æqualis circumferentiæ baſeos PM: KB verò æqualis circumferentiæ circuli KL truncantis, cui æqualis erit OC: fiat tantem eidem æqualis & PD, & puncta DCB connectantur; quæ formabunt triangulum æquale & ſimile triangulo POK, & latera vnius, lateribus alterius parallela, vt & planum plano.

Schema XV.



Duo igitur Pentaedra ſeu Priſmata, BCVXOK & KOPDBC ſunt æquealta, quippe ſub parallelis planis: Sed diſcrimen eſt inter illa, quod parallelepipedum baſi KOXV, altitudine OC, eſt duplum priſmatis CBVXOK, at Priſma baſi PKO, altitudine eadem, eſt ipſum ſui totius menſura: eſt tamen & ipſum triplum Pyramidis æquealtæ POKD. Deniq; ſuper DCB baſi ſtat Pyramis DCBA, habens altitudinem DA, differentiam circumferentiarum KL, PM, cum baſis DCB ſit æqualis baſi Pyramidis POK D. Cùm autem Pyramides ſuper æqualibus baſibus, ſint inter ſe, vt earum altitudines; Pyramis ergo tertia, baſi POK, altitudine PA, compoſitâ ex PD, DA, (hæc autem æquat circumferentiam PM) erit æqualis Pyramidi vtriq;, POKD & DCBA. Et Priſma baſi & altitudine iiſdem, erit illius triplum; altitudine verò, tertia parte ipſius PA, erit his 2 Pyramidibus æquale: Quod vero de Priſmate humiliore KOPDBC reliquum eſt, puta DOKBC, duas tertias retinet Priſmatis. Ergo huius reliqui corpus creatur, ductis duabus tertijs altitudinis CO (ſeu circumferentiæ circuli KL vel ON) in baſin POK. Hæ ſunt igitur partes corporis de Trunco, quod Zonam ſeu Tunicam appellamus. Reliqua pars, Cylinder ſc. intermedius, æquat Priſma CBVXOK, quod eſt veluti triangulum COX corporatum, craſſitie OK, XV, CB, ubiq; æquali; fit igitur vt cum triangulis, vt baſis KOXV, ducta in dimidiam altitudinem CO (ſemicircumferentiam ipſius KL vel ON) creet corpus huius Cylindri. Hæc de geneſi: reliqua quibus compendium noſtrum initiur, brevitatis & lucis cauſa, per Synopſin tradam.

Per

Per demonstrata hactenus,

Pro Tunica	Pro Cylindro
Ducitur KOP	Ducitur KOXV
Per æquipollentiam dimidia PO vel ipsa PO	vel OX, vel ejus dupla ON
In trientem PA, & Bessem OC	In semissem OC
Per æquipollentiam, In trientem PM & Bessem ON	In semissem ON, hoc est, in OX
Per æquipollentiam, In totam PM, & duas ON	In ON, NX. tres scilicet OX.

Ducitur ergo permutatis terminis

PO, vel ejus duplum PO, NM hoc est differentia diametrorum KL, PM.	ON, NX, vel ejus duplum, quod est triplum ipsius ON diametri minoris.
In totam PM & duas ON	In ON diametrum minorem: quod erat demonstrandum.

Compendium quod ex hac demonstratione resultat opportunissimum, pete ex Th. XVI. XVII. & huic supplemento imputa, cuius est ornamentum singulare.

Exemplum præcedentium
aliquot Præceptorum.

Sit, in Schemate XVIII. sequenti, corpus Citrij Truncati HAEGCF, & diameter circuli maximi in eo AC, sit 22, Truncantium EG, HF, 19, longitudo interjecta HE vel MK vel FG, sit 27. Ergo etiam dimidia harum linearum LA, KE, KL sunt inter se in eadem proportione, sc. ut 22. 19. 27. Differentia igitur inter AL, LQ (æqualem ipsi EK) est 3. Quærendum est primo, arcus HAE quota pars sit sui circuli. Cum igitur AC sit portio de diametro hujus circuli, & EP in illam perpendicularis, vt igitur AP ad PE, sic PE ad residuum de diametro supra AP. Cùm ergo PE sit 27, qudm. ejus 729, divide hoc per AP 3, provenit residuum Diametri 243, cuj addita AP 3 constituit diametrum 246, semidiametrum 123. Vt verò canone sinuum uti possimus, lineæ omnes debent nancisci numeros, in illo Canone usitatos: quod si 123 sit 1 00000, ergo AP pro 3 fiet 2439, & hic est sinus versus arcûs AE quæsiti. Quare secundum doctrinam de usu Canonis sinuum, ablatus à radio 100000, relinquit 97561, sinum complementi huius arc°. sc. G. 77. M. 19. S. 9. Ergo arcus AE est, G. 12. M. 40. S. 51, ejusq; sin° PE ex Canone est 21951. Idem ex regula, si fiat vt 123 ad 1 00000, sic 27, quanta fuit PE in prima dimensione, ad numerum huius dimensionis, prodit enim 21951. Itaq; totus arcus EAH est G. 25, M. 21. S. 42.

Et quia, per Th. XXII, opus nobis est cognitione areæ in segmento EHA, inquiremus illam per Corollarium II. ad Th. II. in hunc modum. Totius Circuli area valet talium particularem 3 14159 26536, qualium sunt in Quadrato diametri 4 00000 00000: intellige particulas quadratas, longas & latas vnam talem vnitatem, qualium sunt in diametro 2 00000 longæ. Pars igitur areæ circuli, contenta sub EH arcu & lineis, quæ E, H, terminos cum centro connectunt, sector scilicet arcus EH (qui semper est proportionalis suo arcui) valet 22132 22936. Ab hac area sectoris auferendum est triangulum, cujus vertex in centro, basis, recta EH. Cum autem ab A in centrum, sint 1 00000, sed ab A in P, 2439: Ergo à P in centrum, hoc est, perpendiculum Trianguli, erit, vt prius, 97561. Duc hoc perpendiculum in PE, dimidiam basin, quæ inventa est 21951: fiet 21415 61511, area Trianguli, qua deducta de sectore, restabit 716 61425, area segmenti EHA.

Ex hac area segmenti nobis innotescit segmentum rectum Cylindri, cujus basis, est hæc area segmenti circuli, nimirum pars minor de Zona illius Mali, quod describitur à segmento circuli, post ablatum EAH, residuo, & majore, circa axem HE circumacto. Nam per Th. XX. ducenda est hæc area in circulum, quem centrum huius

huius segmenti majoris describit. Hujus igitur circumferentiæ longitudo inquiritur sic. Perpendiculum Trianguli, est distantia centri, ab axis EH, puncto P medio, sc. 97561: & hic est quæsiti circuli radius: cùm autem circulorum ad suos radios una sit eademq; proportio, per Th. I. Vt igitur 1 00000 radius, ad 6 28318 semis, circumferentiam circuli EAH, sic 97561 radius, ad sui circuli circumferentiam 6 12994, quæ ducta in aream segmenti, efficit 4392 80235 56450.

Igitur qualium cubus, in quem globus, ex circulo EAH factus inscribitur, habet 8 00000 00000 00000 partes cubicas, vnam centies millesimam semidiametri longas latas & altas, quarum 4 18879 02047 86301 sunt in corpore Globi; talium cubiscorum summa expressa est in prodeunte summa, & tot omnino existunt in parte illa Zonæ Mali, quam æquat segmentum Cylindri rectum, Th. XX. descriptum.

Pars altera huius Zonæ Mali, est Zona globi EAH, per idem segmentum EPHA, circa reliquum corpus globi, descriptum, per Th. XX. Ergo quærenda est Zona globi, cujus maximus circulus sit EAH. Respiciatur igitur Schema VIII. in quo sit KCN arcus idem, de quo hactenus egimus. Ergo globi CDBL Zona, quę per KDN & HBM transit, est inquirenda. Ergo per Th. XV. Coroll. II. quęratur corpus segmenti globi KHD. Cùm ergo sit NK. G. 25. M. 21. S. 42. & CK. G. 12. M. 40. S. 51. erit igitur KD. G. 77. M. 19. S. 9. cuius sinus KI est 97561. At circulus per KIH, est Basis segmenti HKD, sic ut KI sit eius semidiameter. Non potest igitur ignorari area. Nam ut quadratum CA radij, 1 00000 00000, ad aream circuli sui, sic etiam quadratum KI, quod est 95181 48721, ad aream circuli KIH, 2 99021 46098. Hæc si ducatur in tertiam partem ipsius IO, ut altitudinis Coni, creat corpus segmenti HKD. Invenienda est igitur IO, ex præscripto Theor. XIV. Cùm enim KC sit nota, & IA, ejus sinus, supra fuerit 21951: quare ID est 78049, & IL 1 21951. Vt autem IL ad LA, sic ID ad DO. Divisa ID 78049 (aucta quinque cyphris) per IL, 1 21951, prodit DO 64000. Tota igitur IO 1 42049, & pars ejus tertia 47350: quę ducta in basin KIH, creat 1 41586 66177 40300, corpus segmenti HKD, cui est æquale segmentum inferius MNL: cùm totius Globi corpus per Th. XII. sit 4 18879 02047 86391. Ablato vtroq; segmento, restat in Trunco HKNM 1 35705 69693 05791. Posses hucusque pervenire etiam sine cognitione areæ in basi, per XIV. Corollarium. Nam IL est altitudo majoris segmenti de sphæra, & ID ejus residuum ad Diametrum. Vt ergo ID ad DA semidiametrum, sic IL altitudo majoris segmenti, ad LP: vnde habetur tota IP, pro segmento majori, & erat IO pro segmento minori, sic ut composita OP æquipararetur Sphærę toti: Prodit enim eadem segmenti HKD quantitas, quę antea.

Porò de Trunco HKNM adhuc reiciendus est cylinder medius, cujus basis eadem quę segmenti, sc. HIK, altitudo verò, KM, vel duplum ipsius IA. Erat autem IA 21951. tota igitur altitudo est 43902, quę ducta in aream circuli HIK, creat 1 31276 40179 94396 Cylindrum, Zonâ quęsitâ amictum, quo ablato de Trunco HKNM, restat Zona KCN, HBM 4429 29513 11395.

Vt autem redeamus ad Schema XVIII. hujus ultimi cylindri altitudo in illo repræsentatur per EH, & Zona globi habet idem segmentum EHA, quod erat in priori segmento cylindri recto. Ex his ergo duabus partibus, ex illo segmento cylindri recto, & ex hac Zona globi, composita est Zona Mali.

Hinc verò, per Th. XXI. facile habetur corpus Citrij, quod eodem segmento EHA describitur, subducto illo segmento cylindri 4392 etc. ab hac Zona globi 4429 etc: Nam restat 36 49277 54945, corpus parvi Citrij, per segmentum EAH, circa axem EH circumactum, descripti: cujus usus jam fiet necessarius.

Iam tandem ad Citrium majus IANC, ejusq; Truncum medium HAEGCF. Constat enim & hic Truncus, cylindro FGEH, & Zonâ cylindrum vestiente, quę describitur segmento HAEPH, circa axem MLK circumacto, sic ut H per F transeat, A per C, P per O, & E per G.

Cylinder igitur FGEH sic investigabitur: qualium AL est 22, talium PL vel HM dabatur 19, & AP 3. Sed pro usu canonis sinuum, ex AP 3, facta est 2439, qualium scilicet totius circuli EAH radius, est 1 00000. Vt igitur 3 ad 2439, velut 123 ad 1 00000 (ut prius) sic 19 ad 15447. Tanta est jam semidiameter HM, circuli HF, cujus

Sch. 8. | Sch. 18.

cujus area est inquirenda. Vt autem quadratum radij 1 00000, quod est 1 00000 00000, ad aream circuli 3 14159 26536: sic etiam est radij 15447 quadratum 23 86 09809, ad aream sui circuli 7496 14823. Hæc est area HF vel EG, basis cylindri. Sed & altitudo eius ex antecedentibus constat: est enim (ut prius in Cylindro Globi) 43902. Ducta igitur hęc altitudo in aream Basis modò inventam, creat corpus cylindri FHEG 3290 95899 59346. Restat Zona Citrij majoris. Per Th. XXII. verò, Zona hæc Citrij majoris NAIC, vel Trunci NAEGCF, componitur ex corpore invento Citrij minoris, per HAE descripti, & ex segmento cylindri, stante super EHA, & habente altitudinem æqualem circumferentiæ circuli HF truncantis: Rursum igitur ut radius 1 00000 ad circũferentiam 6 28318 f. sic radius HM, ad circumferentiam HF 97056, quam duc in segmentum circuli EPHA initio investigati 716 etc: & creatur segmentum cylindri rectum 695 51712 64800, Pars Zonæ in Citrio Truncato. Cui adde corpus Citrij minoris supra inventum 36 etc: prodit Zona tota circa truncatum Citrium 732 00990 19745. Adde ultimò & Cylindri corpus, intra Zonam abditi 3290 etc: conflabisque totum corpus Citrij truncati 4022 96889 79091. cujus pars major quintâ, minor sextâ, infarcta est in Zonam.

Lubet comparationis causa computare etiam corpus, non Citrij, sed compositum ex duobus truncis Conicis ACFH & ACGE, sic ut AH, AE. CF, CG sint rectę: computandum igitur est corpus Coni GBE, & Coni CBA, ex Th. XVII. Sit ergò Conus GBE, hujus basis, area circuli GE, jam in superioribus fuit inventa 7496 etc. Altitudo verò KB sic habetur. Nam ut AP 3, ad PE 27, hoc est ut 1. ad 9, sic EK 15447. ad KB. Cùm autem pro Coni corpore tertia solum pars altitudinis sit multiplicanda in basim, per Th. IV. Ergò triplum EK, 46341 ductum in basin, creat 3473 79005 12643. corpus Coni GBE. Iam ad Conum alterum, cujus basis AC, area nondum est nota, sed facile investigatur ex area circuli EG. Nam EK vel PL est ad LA, ut 19. ad 22, Ergo quadrata sunt ad invicem ut 361 ad 484. Vt verò quadrata ad invicem, sic sunt etiam areæ circulorum. Est igitur area circuli AC, qui basis est Coni ABC, 10050 23661. Rursumque ut AP 3 ad PE 27, hoc est 1. ad 9, sic AL, 17886 (composita ex AP, & PL vel HM supra inventis) ad LB altitudinem Coni. Quare etiam hujus noncupli partem tertiam, hoc est, triplum ipsius AL 53658 duc in aream inventam, creabisque corpus Coni ABC 5392 75596 01938. Hinc aufer conum GBE, restat truncus unus ACGE, 1918 96590 89295, cui æqualis est alter ACFH. Totum igitur corpus ex truncis conicis compositum, erit 3837 93181 78590. Ecce ut minus habeamus quam antea, per 145 03708 00501 scilicet tantum est infarctum in duas Zonas obliquas, arcubus HA, AE, & rectis HA, AE, adumbratas: puta partem paulo minus Vicesimam octavam trunci duplicis. Quod si altera breviori methodo usus, ut in Conis similibus, feceris, ut 10648: cubum de 22, vel 6859, cubum de 19, ad eorum differentiam 3789, sic Conum majorem 5392 etc: (vel etiam minorem, si prior daretur) ad quartum: prodibit truncus idem, ut prius.

At secundum Th. XVII. ejusque demonstrationem in proximo Episagmate præmissam; Cùm sit inventus Cylinder FHCG 3290 etc, quare dimidium ejus 1645 47949 79673: sciatur verò AC 22 (in sua ꝓpria mensura) & PO, vel HF 19, cujus duplum 38, & additâ AC 22. summa fiat 60, & differentia diametrorum sit 3, ductis ergo 3 in 60, creatur rectangulum 180, repræsentans Tunicam: quadratum verò 19 minoris diametri HF, id est quadratum de 19, est 361, cujus triplum 1083 repræsentat Cylindrum Trunco inscriptum. Vt ergo 1083 ad 180 sic Cylinder 1545 etc: ad Tunicam. Vel brevius, secundum compendium corollarij ad XVII. sic agemus.

Dia- 19. 20. 21. 22. metri.	Vel sic		
19. 3.	19	3	
361. 60.	22	3	
421.	418	9	
	3		421

Vt igitur 361 ad 421, sic Cylinder inventus 1645 etc: ad 273 4868971691: supra verò, Cylindro ablato à trunco, erat hoc corpus 273 48641 09622: differentiam minutulam faciunt sinus quibus non penitus exactis usi sumus.

De

De Fusis.

Hactenus Cylinder & Globus, aut ejus loco Sphæroides, in segmentum cylindri sui transformata, nobis subsidio venerunt ad prodendas mensuras Malorum, Citriorum, Cotoneorum, Melonum sessilium, Olivarum, & Prunorum Ellipticorum. Cùm enim corporum totorum leges in ipsis figuris non inveniremus, partium corporis mensuras in Cylindrorum partibus invenimus. At cum partes quædam Cylindri definitionem quidem habeant certam, scientiam verò seu leges corpulentiæ in seipsis vel nullas, vel nondum in lucem prolatas; Globus & Sphæroides successerunt, quæ cum dimensionem corpulentiæ habeant antea, transformata in talem Cylindri partem, easdem leges corpulentiæ in illum intulerunt. Restat nunc difficilior de Fusis Parabolicis & Hyperbolicis contemplatio, in qua nos demonstrationis methodus hactenus adhibita rursum deficit. Nam etsi Fusum eodem modo quo Citrium & Olivam & Prunum, transformes in columnæ prisma, quod curvaturam lineæ conicæ (in Schemate X.) sectionum OCH, PCQ vel MCN, toto dorso erecto retineat; Huius tamen figuræ corpus nihilo magis demonstrari potest, quam Fusi ipsius. Primùm enim hic totum nullum est, ad quod prisma possit comparari; quippe columna, ut sectio ipsa, ad latus MN vel PQ infinita erit: deinde non congruit globus suo circulo maximo, non Sphæroides, in talem columnam conicam: aut enim tangit circulus conicam intus in puncto unico, si fuerit ex foco figuræ A, per ejus verticem C descriptus: aut si paulò amplior circulus per C fuerit descriptus, tangit quidem figuras exteriùs in C, secat verò easdem statim binis punctis ipsi C proximis, de reliquo penitus dissidet à sectione.

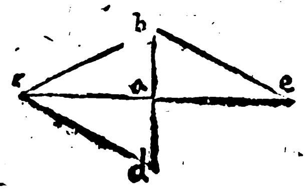
Restat igitur, vt sicut in corporibus, à Circuli segmento creatis, ad globum confugimus, in Ellipticis ad Sphæroides; sic in ijs quæ à Parabola & Hyperbola, confugiamus ad Conoidea congenera: quod nisi succedat ex asse conatus, de reliquo Geometras in subsidium vocabimus.

THEOREMA XXIII.

Coni duo, creati à rectangulo scaleno, alter minori, alter majori latere eorum, quæ circa rectum, pro axe constitutis, sunt in proportione laterum, quæ bases ipsis Conis describunt.

Sit Rectangulum ABC, cujus laterum circa rectum angulum, minus BA, fiat axis, & figurâ circumactâ, subtensa BC creet superficiem Conicam CBE, cujus vertex B, basis CE. Rursum fiat maius latus AC, axis; & figura circa AC manentem circumacta creet Conum BCD, vertice C, basi BD circulo. Dico ut est BA ad AC, sic esse corpus, quod circulo CE, & superficie conica CEB, continetur, ad corpus Coni BDC.

Schema XVI.



Demonstratio. Nam per allegata Theor. XVII. Proportio Coni EBC, ad Conum BCD, est composita ex proportione Circuli EC ad circulum BD, & ex proportione altitudinis AB, ad altitudinē AC, sed circuli EC ad circulum BD proportio, dupla est proportionis AC semidiametri ad AB semidiametrum. Ergò Conorum, EBC ad BCD, proportio est composita ex proportione AC ad AB, & iterum ex eadem AC ad AB, & tertiò ex AB ad AC. Sed proportio AC ad AB, composita cum proportione AB ad AC, conflat proportionem æqualitatis, quæ est proportionum minima, hoc est terminus, & æqualitas, quæ addita vel ablata à proportionibus reliquis, nihil mutat. Igitur ex tribus elementis proportionis Conorum, quorum duo ultima se mutuò tollunt, solum primum restat, & Conus EBC, ad Conum BCD, est ut AC, semidiamr circuli EC, ad AB, semidiametrum circuli BD.

THEOR. XXIV.

Sphæroides longum inscriptum sphæroidi lato, sic ut easdem habeant diametros, sed axes in iis permutatos, est ad Sphæroides latum, ut diameter brevior ad longiorem.

Sit in Schemate XII. Sphæroides longum CEI, ad dextram, cuius vertices C, I, latum KCE ad sinistram, verticibus K, E, & sit illius axis CI, æqualis huius diametro CI, illius verò diameter KE, æqualis axi huius KE, dico Ellipsin longam, seu Ovum ad dextram esse ad latam seu Lentem ad sinistram, ut KE brevior diameter ad CI longiorem. Describantur enim Coni, in dimidio Ovo KCE; cuius vertex C, basis KE circulus; in dimidia verò Lente CKI, cuius vertex K, basis CI circulus, per præmissam igitur, vt KR semidiameter circuli EK, ad RC semidiametrum circuli CI, sic Conus KCE ad Conum IKC. Sed dimidium Sphæroides semper est duplum Coni sibi inscripti ad eundem axem, & super eadem basi circulari: Ergo etiam Sphæroidum dimidia, & sic Sphæroidea tota, sunt in proportione, vt KR ad RC, hoc est, vt eorum dupla KD ad CI.

THEOR. XXV.

Segmentum Globi ad Citrium, eodem segmento circuli descriptum, videtur eam habere proportionem, quam habet semidiameter basis segmenti, ad axem seu altitudinem segmenti.

Demonstrationem legitimam quærant alij: Ego quod non possum apodicticè, comprobabo dicticè; quatuor usus documentis. Primum est ab Analogia. Quod enim in dimidio globo, velut in maximo segmento, quod est principium segmentorum, verum est, vt & in dimidio Sphæroide; quod item in minimo segmento, & veluti in vltimo omniū segmentorum

ter-

termino, id videtur etiam in ſegmentis intermedijs locum habere. At in dimidio globo res ita habet: quemadmodum enim latera circa rectum angulum quadrantis, habent inter ſe proportionem æqualitatis, ſic etiam quod creatur, quadrante circa perpendiculum voluto, æquale eſt ei, quod creatur, eodem quadrante circa baſin voluto. In minimis verò ſimiliter locum habet iſta proportio: quia quo minus globi ſegmentum, & Citrium in eo, hoc minus ab hiſce differunt Coni, figuris ipſis inſcripti: Conorum verò iſtorum, vt habet Theor. XXIII. eſt dicta proportio: quare & circumſcriptorum ſolidorum. Etſi fateor, ab eo quod eſt abſolutè minimum, ad id quod minimo proximum, non ubiq; tutam eſſe collectionem.

Secundò, Proportio dicta locum habet in Sphæroide dimidio, etiamſi ibi non regnet æqualitatis proportio inter diametros, ut in globo, & quidem in infinitis Sphæroidibus, & infinitis diametrorum per illa proportionibus: vt eſt in Th. antecedenti. At ſicut Sphæroides longum inſcribitur Sphæroidi lato, ſic etiam Citrium totum, ſegmento duplicato Hemiſphærii inſcriptum eſt, & generatio utrinq; ſimilis intelligitur; Ergo cum dicta proportio obtineat inter Sphæroides longum & latum, obtinebit etiam, ut videtur, inter Citrium totum & ſegmentum duplicatum ſemiglobi. Tertiò, vicem demonſtrationis plenariç ſuſtinet hoc, quod, in Sch. XVIII. ſeq. ſegmentum Circuli obliquum, contentum ſub AE recta & AE arcu, quod creat exceſſum tam ſegmenti, quam dimidij Citrij, ſupra ſuos Conos, ſupra apud A, & infra apud E æqualis eſt latitudinis: itaq; quæ eſt proportio PE ad PA, ejuſdem proportionis motum faciunt partes E circa PA circumactæ, ad motum partium A circa PE circumactarum. Corpus igitur obliquarum Zonarum in eâdem proportione accumulatur ad Conos inſcriptos, in qua ſunt ipſi Coni inter ſe. Quartò his accedit calculus & teſtimonium numerorum: qui licet operoſiſſimè tractentur & ſubtiliſſimè, per diviſionem diametri in particulas 100000, tandem tamen inepti fiunt ad refutandam hanc proportionem.

In ſuperiori exemplo erat PE noncuplum ipſius PB, ſit ergo etiam ſegmentum Globi HEA noncuplum dimidij Citrij, ab AEP circa PE immobilem deſcripti. Quæratur ſegmentum HEA. Erat AL 22, LK vel PE 27. Quadrata ergo ſunt 484. & 729. Cum autem areæ circulorum ſint vt radiorum quadrata ad ſe invicem, & AC circulus ſupra habuerit 10050 23661 : venient in aream HPE, quç baſis eſt ſegmenti propoſiti, partes 15137 64977.

Et cum PA fuerit 3, & reſiduum ad diametrum 243, ſemidiamr 123. Vt ergò 243, ad 123, vel huius loco ad 100000, ſic 3 ad 1234 ſemis, augmentum altitudinis ſegmenti, pro altitudine Coni æqualis, idque in dimenſione uſitata Canonis: cum ſit altitudo ſegmenti PA, in hac dimenſione, 2439, Ergo altitudo Coni æqualis, 3673 ſemis, cuius pars tertia 1224 ſemis, ducta in aream baſis ſupra inventam, creat corpus ſegmenti 185 28483 31848. cujus pars nona eſt 20 58720 36872. Atqui ſupra corpus Citrij totius erat 36 &c, dimidium ergò 18 24638 77472, quod eſt quidem minus nona parte de ſegmento, minus etiam decimâ ejus, ſed in hac inſida, circa minima, numerorum tractatione. Nam agitur de quantitate corporis, quod minus eſt quàm vicies milleſima Globi. Et oritur quidem differentia hujus corpuſculi (multò major eo de quo controvertimus) ex vnica centies milleſima particula ſemidiametri: quia ſinus arcus AE, hoc eſt PE fuit aſſumptus 21951, qui paulo erat major, minor tamen quam 21952. Quod ſi aſſumſeris 21952, & cum hoc repetieris proceſſum, corpus Citrij prodibit 42 47320 62579, cujus dimidium 21 &c, jam eſt majus nonâ parte ſegmenti hic inventi, nimirum quia etiam 21952 eſt major juſto. Per hos igitur numeros nihil depromi potest contra expressam in Theoremate proportionem dimidij Citrij ad suum globi segmentum.

THEOREMA XXVI.

Si recta quædam sectionem conicam, & genitum ab illa segmentũ Sphæroidis, aut Conoides, contigerit in circumferentia baseos, concurrens cum axe; & circumductæ lineę circa diametrum baseos immobilem, creauerint solida, contingens quidem Conum, sectiones vero Conicæ, Prunum Olivam vel Fusum, quælibet suum congenere; eadem vero contingens, circumducta circa axem immobilem, creaverit Conum alium: proportio dimidij Pruni vel Olivæ ad Segmentum Sphæroidis, Fusi vero ad suum Conoides, proximę erit æqualis proportioni prioris Coni, ad Conum posteriorem.

In Schemate XII. sit sectio Conica OCN, superius Parabole, in medio Hyperbole, infra Ellipsis, cuius axis CI, & sectionis OCN dimidio CN circa ON immobilẽ circumacto, sic ut punctum sectionis N maneat, C verò per I transeat, creatum intelligatur, Pruni, Olivæ vel Fusi OCNI; corpus dimidium CIN, Eodem sectionis dimidio CN, circa CI immobilem circumacto, sic, ut C manente, N per O transeat, creatum intelligatur segmentum Sphæroidis, aut Conoides OCN, vertice C, basi circulo ON. Dico, si qua linea tangat sectionem vel solidum in N vel O terminis, illa lineâ, Conos duos proxime tales creari, circumactibus ijsdem, qui jam sunt dicti, ut in ijs conis insit proportio dimidij corporis Pruni, Olivæ, vel Fusi CIN, ad segmentum Sphæroidis, aut Conoides OCN. Hactenus ad declarationem Theorematis opus nobis fuit Schemate XII. Nunc reliqua ex Schemate XVIII. petentur.

Est enim Theorema, de segmento Sphæroidis, deq; binis Conoidibus, Parabolico & Hyperbolico; habetq; potestate in se partes tres, prima & secunda sunt certæ, quod ista proportio sit minor illâ Theorematis præmissi; & secunda, quod aliqua proportio demonstratur major; tertia nondum est certissima, quod præcisè sit ista proportio, quæ in Theoremate hoc exprimitur. Cum autem evidentiora sint omnia in Hyperbolico, sit ergo in Schemate XVIII. sectio Conica quæ Hyperbola dicitur, FCG, linea punctis signata; est autem & arcus circuli per FCG descriptus; illum igitur Hyperbola secat in F; vnde circulus quidem versus S, Hyperbola verò versus R pergit, semper interior circulo, donec in C vertice tangat circulum interius; vt demonstratum est in IV. Conicorum Apoll. Pr. XXV. XXVI. Fiat autem ex FCG Conoides, cujus vertex C, axis VCO, basis FG circulus, ejusq; semidiameter FO: & sit V centrum figuræ, & VX, VZ asymptoti, quarum sectiones cum FG continuata, sint X. Z. contingat autem figuram in F, circumferentiâ basis, recta EY, quæ cum axe concurret inter V cen-

trm

trum & C verticem, concurrat in Y. Inscribatur autem figuræ super eadem basi FG, triangulum FCG. Itaq; cùm antea dimidij Citrij corpus, descriptum arcu circuli FSC, circa FO immobilem, ad segmenti sphærici FCG corpus, descriptum eodem arcu FSC, sed circa CO immobilem circumacto, proportionem eam habuerit, quæ est ipsius CO ad OF: jam hoc theorema de Fuso dimidio, quod describitur Hyperboles dimidio FRC, circa FO immobilem, deq; Conoide, quod eâdem FRC, sed circa CO immobilem, describitur, affirmat proportionem aliam, scilicet eam, quę est YO ad OF; hæc enim est proportio Coni, ab FY contingente, circa FO descripti, ad Conum ab eadem FY, sed circa YO, descriptum. Manifestum autem est YO proportionem minorem esse ad OF, hoc est, æqualitati viciniorem, quam CO ad OF, cumq; concurrant VX & YF versus partes X, rursum igitur & ipsius VO ad OX minor est proportio, quàm ipsius YO ad OF.

Quemadmodum igitur YO ad OF est quantitate media inter CO, ad OF, & inter VO ad OX, ita demonstrari potest, & Fusi dimidij corpus ad Conoidis corpus, esse quantitate mediam proportionem inter CO ad OF & inter VO ad OX,

Probetur primùm de CO ad OF, valebit autem demonstratio etiam de Parabolico Conoide. Igitur manifestum est, Fusum lineæ FRC, minus esse Citrio arcus FSC: sic etiam Conoides FRCG, minus esse Segmento Sphærico FSCG. Cùm autem figura plana, contenta inter arcũ circuli FSC & Hyperbolam FRC, ad partes F & C, sit inæqualis latitudinis, circa F enim latior est, ubi lineæ se mutuò secant, circa C angustior, ubi se mutuò tangunt: tunica igitur, quam segmentum globi circumiecit Conoidi, crassior est versus basin FG, tenuior versus verticem C. Contra, tunica quam Citrium circumiecit Fuso, tenuius est versus basin ad C, quam versus verticem F. Non amittunt igitur proportionalia, Conoides & Fusum, sed plus Conoides, minus Fusum. Etsi enim circa verticem vicissim minus amittit Conoides, quam Fusum circa verticem F: non fit tamen omnimoda compensatio, quia partium ad verticem motus brevi spacio finitur, partium circa basin motus, in ampliorem diffunditur ambitum. Fusum igitur propius est Conoidi, quam Citrium Segmento Sphæræ, vel CO (per Th. præcedens) ipsi OF: quemadmodum etiam YO propior est ipsi OF, quàm CO ipsi OF.

Hic sumus usi Theoremate antecedenti, quod nondum habet demonstrationem legitimam. Sed valet eadem methodus etiam tunc, si pro segmento FSCG, & citrio, Conos FCG substituamus. Conus enim à linea CF circa FO factus, ad Conum à linea eadem FC, circa CO factum, proportionem habet eam, quam CO ad OF. Iam verò figura plana, quæ continetur Hyperbola FRC & rectà FC, creans excessum Conoidis & Fusi, supra illorum Conos, latior est versus C, quia ibi Hyperbola est curvior; angustior versus F, ubi Hyperbola paulatim degenerat in rectum. Rursum igitur Conis hisce non adjiciuntur proportionalia; plus enim accedit Cono Fusi, ut fiat Fusum in sua proportione, quam Cono Conoidis, ut fiat Conoides: majus igitur est corpus Fusi, respectu Coniodis, quam CO respectu OF, id est, minor & æqualitati propior est minoris (Fusi) ad majus (Conoides) proportio.

Iam

Iam etiam de VO ad OX demonstrandum, quod hæc proportio minor sit proportione Fusi dimidij ad Conoides. Est autem demonstratio propria Hyperboles, cùm Parabola careat Asymptotis. Rursum igitur ut prius, figura contenta tribus rectis FX, XV, VC, & Hyperbolâ CRF, latior est versus V, quàm versus X: corpus igitur seu matrix, in qua latet Conoides, crassior est in vertice V, quàm ad basin XZ; vicissim matrix, in qua latet Fusum, est tenuior ad verticem FX, quam ad basin circa VC: plus igitur accedit Cono, cujus axis XV, in sua proportione, quàm Cono, cujus axis VO, in sua. Maior igitur ille Conus est, respectu huius, quàm Fusum respectu OX, minor igitur proportio VO ad OX, & æqualitati propior, quàm dimidij Fusi ad Conoides.

Cùm autem inter proportiones, CO ad OF, & VO ad CX, infinitæ aliæ sint proportiones intermediæ, non vna sola quæ est YO ad OF: non igitur necessaria, sed verisimilis saltem est collectio in tertia figura argumentationis, affirmatoria ex puris particularibus.

Analogia.

Cogita num in Globi quidem segmentis semper valeat proportio Conorum inscriptorum: in Sphæroidis verò, jam Coni illi, qui genuinam habent proportionem solidorum (puta hîc Pruni ad Sphæroidis lati, aut Olivæ, ad longi segmentum) alter verticem alter baseos extremum supra verticem Ellipsis proferant, intra contingentem tamen; in Parabolico Conoide, hæc ipsa contingens creet Conos proportionis quæsitæ, sic ut altitudo Coni unius, sit præcisè dupla altitudinis segmenti Conoidis; in Conoide deniq; Hyperbolico, Vertex & Basis Conorum horum, excurrant supra contingentem, versus figuræ centrum. Magna quidem & prope demonstrativa vis est huius Analogiæ.

Neq; tamen sufficit hoc habere demonstratum, oportet etiam ipsissima puncta indicare, inter contingentes & Verticem Ellipsis, aut Centrum Hyperboles.

THEOREMA XXVII.

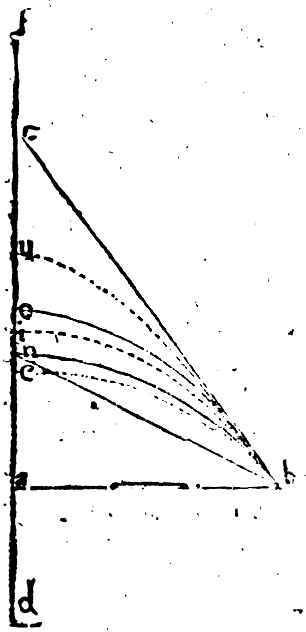
Si cuiuslibet Trianguli latus alterum circa rectum angulum, secetur & in duo æqualia, & in proportione laterum reliquorum: in angulo vero opposito concurrant sectiones Conicæ variæ, communiter seipsas, & latus recto angulo oppositum, tangentes, Vertices primarios in latere secto habentes: quæ sunt à summo ad medietatem, omnes erunt Hyperbolæ: quæ in ipsam bisectionem incidit, Parabole; quæ hinc usq; ad sectionem proportionalem, omnis generis Ellipses rectæ: quæ in ipsam proportiona-

tiona-

tionalem incidit, circulus; quæ deniq; hinc usq; ad rectum angulum, omnis generis Ellipses transversæ erunt, in quibus vertex improprie dicitur, pro extremo axis brevioris.

Sit Rectangulum BAC, cuius latus AC sectum sit in æqualia in O, bisecetur etiam angulus CBA, lineâ BN, ut sicut est AB ad BC, sic sit AN ad NC. Erit propterea AN brevior ipsa AO. Tunc inter CO sit punctum V; inter ON punctum I; inter NA punctum E: tangant autem se in vicem, & rectam BC, in puncto B, variæ sectiones Conicæ, quarũ vertices sint hoc ordine, V. O. I. N. E: dico BV esse Hyperbolas, BO Parabolen, BI Ellipses rectas, BN circulum, BE Ellipses transversas.

Schema XVII.



Primò de BO. Cùm igitur sectionem Conicam BO, cuius axis seu diameter CA, vertex O, tangat recta BC in B, conveniens cum diametro extra sectionem in C, sitq; à tactu B, ad diametrum ordinatim amplicata BA, quippe perpendicularis axi CA; & cùm sit CO, æqualis ipsi OA: quare BO erit Parabole, per 37. Imi Apoll. conversam.

Secundò de BV. Manentibus cæteris, cùm sit V vertex, & CV minor dimidio ipsius CA, dupla igitur ipsius CV auferatur à CA; & fiat ut residuum hoc ad CV, sic CV ad CF in partes exteriores. Cùm igitur, quod ex CF & residuo dicto, æquet quadratum ipsius CV: addantur utriq; communia, quadratum à CF, & bina rectangula VCF: ut ex una parte conficetur rectangulum CFA, ex altera parte quadratum ab FV: quæ cùm sint æqualia; quare per 37. I. Apollon. conversam, sectio BV erit Hyperbole, cuius centrum F.

Tertiò de BI, BN, & BE. Manentibus superioribus, cum sint I. N. E. vertices, & IA, NA, EA minores quàm dimidium ipsius CA: duplæ igitur ipsarum IA, &c. auferantur à CA; fiantq; ut residua hæc ad IA &c. sic hæc ad AD, in partes interiores: de reliquo demonstrabitur eadem methodo, ut priùs, quadrata ab FI &c. æqualia esse rectangulis CDA, ac proinde per eandem Apollonij conversam, sectiones Conicæ BI, BN, BE erunt finitæ, quarum centra D, intra figuras, eoq; Ellipses, aut circulus.

Quartò de BN, præsuppositis quæ iam tertio loco de ea sunt demonstrata; cùm insuper AN sit ad NC, ut AB ad BC, quæ est proportio unica in uno quolibet triangulo, cùm Hyperbolæ & Ellipses varias habeant proportiones, Parabole unicam quidem, sed proportionem æqualitatis: non poterit igitur BN esse ulla alia sectionum conicarum, præterquam circulus. Et sanè ita fit in circulo. Sit enim BN circulus, eiusq; centrum F, quod con-

H necta-

nectatur cum puncto B contactus; erit ergo CBD rectus, sed & CAB rectus erat; ergo ut CA ad DB, sic CB, hoc est DN ad DA. Atqui DN est ad DA, ut CB, ad BA, & ut CN ad NA. Circuli igitur arcus secat latus, in quo continuato centrum habet, in proportione laterum AB, BC.

Corollarium & Analogia.

Hyperbolæ igitur in hoc triangulo possunt esse infinitæ, quarum obtusissima, ut loquar analogicè, est BC, cuius vertex V, & centrum F, in ipsum C, angulum Asymptôton coincidunt; ipsaq; sectio planè in duas rectas degenerat (conò sc. per verticem secto) acutissima verò Hyperbolarum in hoc triangulo, est analogicè ipsa Parabola, cuius vertex in O bisectione, centrum F, in infinita distantia. Quod si CV sit pars tertia de CA, æquales fient CF, CV; si CV minor, superat CV, sin major, superat CF.

Sic Ellipses rectæ BI, inter ON transeunt infinitæ, quarum acutissima in vertice, est analogicè ipsa Parabole BO, cuius O vertex, D centrum in infinito intervallo, obtusissima verò harum Ellipseon in vertice, est BN circulus. A quo incipiunt Ellipses tranversæ rursum infinitæ, quarum acutissima circa verticem (impropriè dictum, cum sit venter) est circulus ipse ON, ex eo obtusiores BE, semper, donec tandem evanescant in meram rectam BA, verticem inproprium E, & centrum D, in ipso A puncto, verticem verò propriè dictum in B habentem, & obtusissimam circa A, quippe merè rectam. Quod si AE sit pars tertia de CA, æquales fient EA, AD; si verò EA minor, superat ipsam AD, sin major, superatur ab illa.

Corollarium II.

Hinc, nimirum ex contingentibus, facile fit judicium de specie Truncati. Nam si duæ truncatum contingentes in punctis circumferentiarum truncantium, in Schemate XVIII. in G. F. rectæ FY, GY; mutuam sectionem Y fecerint talem, ut YC sit æqua ipsi CO dimidiæ differentiæ circulorum, medij & truncantis: erit Fusi Parabolici truncus, sin CY minor, Truncus erit Hyperbolico Fuso, sin major, ex Prunorum primò, dein ex Citriorum (si fuerit YF ad FO, sic ut YG ad CO) deniq; ex Olivarum Ellipticarum genere: ut si sit CY dupla ipsius CO.

Schema 18.

THEOR. XXVIII.

Si quatuor species sectionum Conicarum, Circulus, Ellipses, Parabola, Hyperbolæ, sese in communi vertice contingunt, prætereaq; in duobus alijs punctis, æqualiter à vertice remotis, concurrunt, omnes in iis duobus

punctis

punctis secantur ab omnibus, & circumferentia circuli intra sectiones est exterius, continetq; Ellipticas, hæ Parabolicam: intimæ sunt Hyperbolicæ, & ex iis interiores, quæ obtusiores, eædemq; suis Asymptotis propiores.

Cùm enim ponantur sectiones diversæ speciei, & dissimiles etiam unius speciei, non poterunt igitur habere partes easdem; sed aut contingent se mutuò in vnico puncto, aut secabunt sese mutuò, arcus verò inter puncta interjecti distabunt ab invicem toti à totis, per XXIV. quarti Apollonij. Et cùm ponatur, omnes sese mutuò contingere in Coni vertice, concurrere verò etiam ad alia duo puncta: nulla igitur earum cum ulla reliquarum in aliis pluribus punctis concurret, etiamsi Parabola & Hyperbolæ in infinitum continuentur, per XXVI. quarti Ap. Cùmq; ponantur concurrere in tribus punctis: non igitur sese contingent in eorum punctorum duobus; Nam si in duobus sese contingerent, in tertio non concurrerent, per XXVII. quarti Ap. Sequitur ergò, ut concursus duo reliqui sint sectiones; omnis enim concursus aut contactus est, aut sectio. In sectionibus autem permutatur ordo.

Et cùm ponantur puncta tria in circumferentia circuli, circulus igitur per illa transibit unicus, per demonstrata lib. III. Euclidis. Similiter & Parabola erit vnica. Pone enim diversas esse; & cùm positum sit, contingere sese in Coni vertice, si diversæ sunt, & sese secant, diversas etiam contingentes habebunt in communi sectione: quare eadem demonstrationis methodo, qua utitur XXVIII. quarti Ap. probans, duas parabolas sese non contingere in pluribus uno punctis, res ad impossibile recidet, & totum fiet æquale parti. Non sunt ergò diversæ Parabolæ, sed vnica, quæ per tria puncta transit.

Cùmq; Hyperbolæ, quo obtusiores, hoc magis exteriùs procurrant ultra sectiones, ut est per se manifestum; ergo intra sectiones necesse est esse tanto interiores: Et quia ex similibus Hyperbolis, sc. eodem angulo Asymptoton factis, illa maior censetur, quæ maioribus lateribus formatur: Obtusæ igitur hic sunt minores in sua specie, quam acutiores in sua: duobus igitur nominibus, interior habet Asymptotos viciniores, & quia minor in sua specie, & quia respectu sociæ obtusior: obtusiores enim, ut præcedenti Theo: dictum, magis magisq; appropinquant suis Asymptotis, tandemq; cum iis coincidunt. Quin etiam hoc demonstratum est Theoremate præcedenti, centrum in obtusiorum aliquà serie, propius esse contingenti, quam hæc est vertici, in reliqua acutiorum, remotius. Et verò contingens, interiori est ipsa etiam interior. Potest hoc etiam absolutè demonstrari per 37. I. Apoll. Sic cum Hyperbolæ exterius complectantur Parabolam: intra sectiones igitur, Parabola vicissim complectetur illas; eâdem de causa, cùm Parabola extra sectiones complectatur Ellipses, intra igitur sectiones, Ellipses vicissim includent Parabolam. Deniq; cùm circulus Ellipses tangens in vertice, ponatur eas secare duobus locis: Lunulæ igitur Ellipticæ resecabuntur à circulo, & consistent extra circulum: ante sectiones igitur, arcus Ellipseon erunt intra arcum circuli.

THEOREMA XXIX.

Si Citrium, Pruna, Fusum Parabolicum, Fusa Hyperbolica, & Conus duplicatus, omnia truncata, habuerint eosdem circulos, tam truncantes, quam medium corporum: Citrium erit maximum, reliqua eodem ordine magnitudinis corporum, quo hic sunt recensita.

Demonstratur facile ex antecedenti. Nam Citrium creatur segmento circuli, Pruna ex segmentis verticalibus Ellipseon, Fusa ex segmentis verticalibus Paraboles, & Hyperbolarum, Conus duplicatus ex Triangulo Isoscele. Cùm autem corpora statuantur habere eosdem circulos truncantes: arcus igitur omnium linearum creatricum sese mutuò secabunt in punctis duobus, per quæ circuli truncantes transeunt. Et cùm idem omnibus corporibus tribuatur circulus maximus corporis medius: ergò lineæ creatrices omnes sese mutuò tangunt in communi vertice, qui ex circumductu figuræ cujusq; creat illum circulum totius corporis medium. Cùm autem sectiones Conicæ sese mutuò amplectantur ordine hic attributo: segmenta etiam sese mutuò excedent eodem ordine. Conus igitur duplicatus & truncatus (in Schemate XVIII. rectis lineis HAE GCF contentus) erit minim9: Ei primùm Hyperbolæ singulæ singulas tunicas circumducent, ut fiant Fusa Hyperbolica truncata; superinducet & Parabole unam, ut fiat Fusum Parabolicum: tum Ellipses singulæ rursus addent singulas, ut fiant Pruna Elliptica truncata. Tandem Circulus, arcu FSQG ultimam induet ei tunicam, facietq; Citrium truncatum.

TH. XXX. Problema Geometris propositum.

Proportionem indagare segmentorum Citrij, Olivæ, Pruni aut fusi, factorum plano axi parallelo.

Vsus ejus non potest esse obscurus, scientia deest. In extensione verò soliditatis Citrii in rectum, sc. in Prismatis cylindrici portionem, respondet tali segmento Citrij, segmentum portionis illius cylindricæ, factum superficie, quæ similis est cylindraceæ, seu potius parti involutæ chartæ quodammodo: nam in unam plagam est recta, & rectæ in basi portionis Cylindraceæ parallela; sursum verò est curva, non tamen curvitate neq; circuli, quod certum est, neq; sectionis conicæ, quantum mihi constat: etsi inter conicas, Ellipticæ sit similior, quia superius magis flectitur. Et si de huius curvitatis lineâ constaret; nondum tamen ex ea, per hactenus quidem constituta, daretur soliditas talis portionis.

Conclusio huius Supplementi.

Age nunc, SNELLI, Geometrarum nostri sæculi decus, legitimam hujus Problematis, cæterorumq; quæ hic desiderantur demonstrationem nobis expedi: reservatur, ni fallor, hæc inventio Tibi, ut existat Mecænatum aliquis, qui tuæ fortunæ splendorem reputans, & verecundiâ instigatus, dignum aliquid hac sollertia, quo scilicet notabilis aliqua tuæ rei fiat accessio, remuneretur, proq; Citrio numerico, Malum aureum rependat.

II. Pars.

II. Pars.

STEREOMETRIA DOLII AVSTRIACI IN SPECIE.

AD QVOD GENVS FIGVRARVM PRÆMISSARVM pertineat figura Dolij Austriaci.

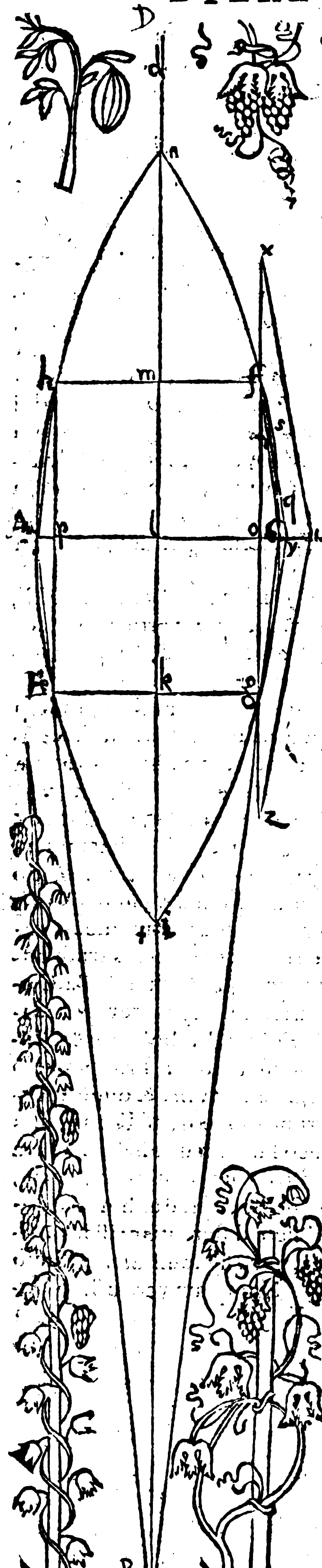
Præmissis igitur generalibus, quæ de stereometria regularium tam ex Archimede quam ex proprijs inventionibus, ad demonstrationes intelligendas vtilia videbantur: jam propius ad ppositum venio, multaq; ab Archimede itidem non tacta, de corporibus in eadem Sphæra Parallelepipedis, eorumq; Cylindris & Conis, sed quæ dolij Austriaci naturam vnicè attinere videbantur, sub titulo Stereometriæ Dolij Austriaci infero, & præmisso Archimedis supplemento adjungo. Dolij namq; figura est Cylinder ventricosus; seu accuratiùs loquendo, dolium intelligitur diremptum in duos veluti Truncos duorum Conorum, quibus vertices in contraria vergentes, intelliguntur præsecti lignei dolij Orbibus, Basis verò communis, divisionem Conorum faciens, est circulus per dolij ventrem amplissimus.

In Schemate XVIII. hic subjuncto, Cylinder intelligitur HEGF, Conus ABC, & alter huic æqualis ab AC versus ND: vertices præsecti EBG, & æqualis illi alter ab HF, versus ND. Trunci AEGC, AHFC, communis basis AC.

Quæ igitur de Cylindris & de Conorum truncis vera sunt, eadem etiam ad figuram dolii possunt applicari, quippe quæ parum à Cylindro, minusq; à trunco conico abit, dùm asserum conniventia, hic per rectam CRF intellecta, extrorsum versus, in buccositatem nonnullam flectitur.

Accuratissimè, omnis dolij figura, est medius truncus, vel Citrii ex circuli segmento, vel Pruni ex verticali parte Ellipsis, vel Fusi Parabolici, plerumq; verò Hyperbolici, præsectis utrinq; verticibus æqualibus. Ratio cur Fusum Hyperbolicum dicam, est hæc, quia dolia buccositatem plerúq; recipiunt in ventrem medium: versus extrema & orbes utrinq; ligneos, magis ad rectitudinem conicam accedunt, ut circuli lignei facilius trudi adstringiq; adigendo possint. Hoc verò facit & Hyperbola, & nata ab illa, Conoides & Fusum, ut brachia eius à medio flexu sensim degenerent in rectitudinem Asymptôton. Facit idem ex parte & Fusum Parabolicum & Prunum Ellipticum, sed evidentissimè Hyperbolicum Fusum: Prunum verò Ellipticum minus minusq; nec omne, sed gracile tantum, & quod à segmento verticali Ellipsis est, cuius axis post truncationem, ad Focum usq; non pertingat: quæ cautio etiam in Parabolico Fuso locum habet. Oliva verò, ex Ellipsis segmento inter vertices medio creata, contrarium facit, nam versus extrema magis flectitur, quàm in medio, quod abhorret à dolij figura. Etsi non negaverim propter insensibilem differentiam istarum figurarum, esse dolio quandoq; etiam ex Olivæ trunco figuram; at non studio artificis, sed aberratione manus constitutam. Nunquam vero ullum dolium

Schema XVIII.



STEREOMETRIA Dolium constitutum puto ex ventre Sphæroidis Archimedei; quam, ut veræ proximam (nondum notis aliis, quarum genesin supra docui) CLAVIUS subiecit: paratus tamen interim (verba Clavij) si quis accuratiorem invenerit, eam libenti animo & grato acceptare. Nam Sphæroidis longi, quod in medio justam & dolijs aptam habeat buccositatẽ, flexura versus truncatos vertices nimia est, nec ulla vincula in ea possent diu hærere. Sin autem sumseris medium ventrem sphæroidis valde gracilis; minues quidem hoc incommodum flexuræ nimiæ in extremitatibus dolij, at vicissim ventrem dolio nullum permittis, ac si ex puro puto Cylindro illud construeres.

In hac igitur figura, duo arcus HAE, FCG, circuli cuius diameter æqualis ipsi BT, describunt truncatum Citrium, cuius vertices truncati sunt HNF, EIG. Linea verò punctis notata, inter rectam FRG & arcum FSC, Fusum denotat Hyperbolicum, cuius Hyperboles vertex C, centrum V, Asymptoti VX, VZ. quarum rectitudinem Hyperbola CF, versus F magis magisq; affectat, & hîc à contingente sua FQY, secanteq; arcum FSC in Q, difficulter distinguitur.

Quâ ratione quis Virgam mensoriam falsitatis arguere possit; & quomodo fides ejus asseratur.

Igitur ut ad exordium disquisitionis huius revertar, Elenchus meus Virgæ Mensoriæ primum erat hic, quod eadem eius longitudo AF dissimilibus figuris doliorum competeret, quarum tamen non essent æqua spacia.

Vt hanc rem in plano demonstrarem: visum est, pro Cylindri corpore, assumere Parallelogrammum, quo Cylinder per

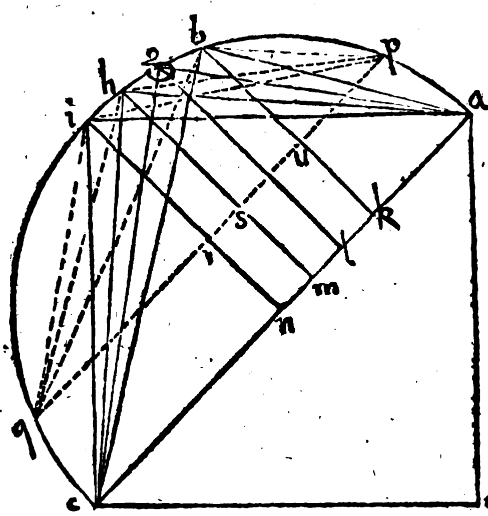
per axem secatur. Nam quæ de Cylindro vera sunt, ea etiam Trunco conico AHFC, eiusq; Trapezio, quod illum per axem secat, sc. de plano AHFC, in quod etiam AF virga mensoria incidit, applicari possunt. Nam planum hoc cum cylindri corpore & crescere & minui videbatur. Sit igitur hac de re

THEOREMA I.

Cylindrorum rectorum sectiones per Axem, quæ diagonios habent æquales, nisi proportio Diametri basis ad altitudinem fuerit eadem aut permutata, inæquales habent areas: estq; inter has illius area maxima, quæ secat Cylindrum æquealtum diametro suę basis.

Esto Baseos Cylindraceæ diameter CI, altitudo cylindri IA. æqualis Diametro Basis, repræsentans jam dimidium Dolij Vinarij; sectio Cylindri

Schema XIX.



sit AICO Rectangulum, quod hic est quadratum, linea diagonios AC, repræsentans Virgam mensoriam ab infusorio Orificio A, ad orbis lignei IC, calcem C, transversim descendens. Et quia cylinder præsupponitur Rectus, erit CIA angulus rectus. Bisecetur AC in N, & centro N, spacio NA scribatur semicirculus AIG, qui per I transibit, quia AIC rectus. Et quia AI, IC æquales, erunt igitur arcus AI, IG, quadrantes circuli; & connexis punctis N, I, anguli INA, ING erunt recti, & IN perpendicularis in AC.

Eligantur jam puncta quæcunq; unius quadrantis: & sint verbi gratia H, B, connectanturq; cum terminis diametri A. C. lineis HA, HC, BA, BC: sic, ut manente eadem diagonio AC, quadratum AIGO, vel eius pars dimidia, sc. triangulum AIC, mutetur in alias figuras AHC, ABC, angulo I manente recto, etiam apud H & B, quippe omnibus in semicirculo eodem constitutis; ut ita AHC, ABC, sint iterum rectorum Cylindrorum sectiones dimidiatæ, sintq; jam diametri Basium CH, CB, altitudines Cylindrorum HA, BA.

Dico aream AIC esse maximam, AHC minorem, ABC (puncto B remotiori ab I quadrantis termino) iterum minorem.

Demittantur enim à punctis H. B. perpendiculares in diametrum AC, quæ sint HM, BK. Igitur per demonstrata Euclidis, area cuiusq; trianguli æquat Rectangulum sub dimidia basi AC, & altitudine triangulorum, sc. NI, MH, KB. Quare ut IN ad HM & BK, sic AIC area ad

AHC,

AHC, & ABC areas. At in quadrante AI, omnes Rectæ, parallelæ semidiametro IN, vt sunt HM BK, sunt minores ipsa semidiametro IN & minor BK, remotior ab illa, quam HM propinquior illi. Minor igitur est area AHC, quam AIC, iterumq; minor ABC, quam AHC. Rectangula igitur horum triangulorum dupla, sunt eodem ordine maiora.

Dico etiam Cylindros, qui proportionem altitudinum ad diametros Basium habent permutatam, esse sectiones æquales.

Esto enim AB diameter Basis, & BC altitudo Cylindri: patet, triangulum ABC, quod est dimidia sectio Cylindri per axem, manere idem quod antea, cum BC esset diameter Basis, & AB altitudo, eoq; proportio harum linearum permutata.

Porrò non celandus est error in quem me conjecit primo die supina Theorematis huius consideratio. Nam hæc commemoratio admonebit lectorem, ut à similibus sibi caveat etiam alibi. Sic enim sum ratiocinatus perperam: Cùm arearum similium proportio sit dupla proportionis laterum, Corporum verò similium tripla: fore etiam in dissimilibus, eâdem tamen diagonio AC utentibus, corporum proportionem, proportionis arearum linearumq; semper analogam. Hoc verò falsum est: et ego si vietoribus id consilij dedissem, ut semper diametrum orbis lignei constituerent subduplam longitudinis Tabularum; quod securitas areæ metiendæ requirit, ac si etiam securitati corporis metiendi sic prospectum esset: plurimum ipsorum arti nocuissem, longiusq; illos à scopo abduxissem. Non enim ubi maxima est area plani, secantis cylindrum, ibi est & maximum cylindri corpus. Sed id postea apparebit; Nunc quæ de cylindro recto sunt dicta, accommodabo etiam ad Truncum Conicum.

THEOREMA II.

In Truncis Conicis reliqua omnia manent, nisi quod inter truncos proximos ab illo, qui latus diametro basis habuerit æquale, plus variatur arearum suarum proportio, quàm si Cylindri pro Truncis Conicis essent, inter truncos remotiores minus.

Cùm enim angulus comprehensus à latere Trunci, & à diametro basis minoris, sit maior Recto, competet non in semicirculum, sed in arcum semicirculo minorem. Ducatur igitur ipsi AC parallela PQ, secans semicirculum in punctis P, Q, & perpendiculares IN, HM, BK, in punctis R. S. V. & connectantur puncta I. H. B. cùm punctis P. Q. Repræsentat igitur jam PQ Virgam mensoriam, QI, QH, QB diametrum basis detruncati Coni; IP, HP, BP, latus trunci, dimidia longitudo Tabularum in dolijs: & anguli QIP, QHP, QBP obtusi & æquales inter se, quippe in eodem segmento PQI stantes, causam præbent æqualem per has omnes figuras, variationis eius, quam hic explicandam sumpsi.

Rursum igitur area PIQ, est ad aream PHQ & PBQ, ut IR, ad HS, & BV: cùm igitur ab inæqualibus IN, HM, ablata sint æqualia RN & SM: resi-

residua IR & HS erunt in proportione maiori: magis igitur est sensibilis differentia arearum PIQ, PHQ, quam arearũ AIC, AGC. Contra decrementa perpendiculariũ sunt maxima apud A: minora igitur erunt apud P. Et apud P evanescunt perpendiculares Truncorum, apud A verò evanescunt perpendiculares Cylindrorũ: minori igitur proportione decrescunt areæ PBQ, propiores fini P: quàm areæ ABC, propiores fini A. At prius propiores initio I, maiori proportione decrescebant PHQ, quam AHC. Hoc theorema præcipuè notabile est propter hallucinationem aliam diuturniorem, circa comparationem Truncorum conicorum inter se, cuius infra fiet mentio.

Porrò elenchum hallucinationis dictæ continet sequens

THEOREMA III.

Cylindrorum Rectorum, quorum sectiones habent eandem Diagonium, Corpora non habent inter se proportiones analogas proportionibus Arearum, quibus secantur per Axem: nec cujus est maxima sectrix area, eiusdem & corpus maximum est.

In Schemate priori, cum AIC sit dimidium areæ IO, secantis Cylindrum IO per axem, IC Diametrum Basis: ductâ igitur AIGO area in IC Diametrum Basis, creatur parallelepipedum Rectangulum, quod Cylindrum stringit. Vt igitur 14 ad 11, sic hoc parallelepipedum ad cylindri sui corpus. Per III. præmissæ stereometriæ Regularium. Ergo in qua figura, ex ijs, quæ habent eandem diagonion AC, maximum est hoc parallelepipedum, ibi & Cylinder est maximus. At in figura cuius AIC est dimidia sectio, non est maximum hoc parallelepipedum, quantumvis area sectrix AICO sit maxima: quod sic demonstro.

Sit in quadrante IA punctum H, proximum puncto I, quippe ad finem Quadrantis. Cùm ergo AHC sit alia figura, quam AIC, & habeat eandem cum illa diagonion AC, sint vero AIC, AHC areæ ad se invicem, vt perpendiculares earum IN, HM: erunt in fine quadrantis inter se in minima proportione, & proximè æquales, quia etiam lineæ IN, HM intervallo certo inter se remotæ, in minima ad invicem sunt proportione; quæ proportio inter easdem semper evadit maior, quo propius illæ ad A initium quadrantis, eodem inter ipsas intervallo manente, accesserint.

Atqui, ut corpus creetur, lineæ CI, GH ducendæ sunt in areas AIC, AHC, & per æquipollentiam, ut Rectangulum sub NI, IC, ad Rectangulum sub MH, HC, sic corpus Parallelepipedi AICI, ad corpus AHCH; atqui maior est proportio HC ad CI, quam IN ad HM. Nam CI subtendit quadrantem CH, paulo plus, & ipsarum dimidia sunt perpendiculares dimidij quadrantis & paulò plus: illæ verò non sunt in minima inter se proportione, quippe quæ in medio quadrantis maior est quàm in fine, eodem utrinq; perpendicularium intervallo supposito. Ergò existente eodem perpendiculariũ intervallo, quod sit dimidium arcus HI, perpendiculares circa finem quadrantis I, sunt in minore proportione, quam dimidiæ CI, CH circa medium quadrantis, distantes etiam dimidio arcus HI. Et cum dimidiarũ CI, GH differentia sit maior; quàm perpendiculariũ ad I, quæ dimidio arcus HI distant, totarum igitur CI CH differentia, prioris duplex, erit maior quàm perpendicularium IN, HM, toto arcu HI distantium. Ita conficitur, maiorem esse differentiam inter IC & CH, quam inter HM & IN. Itaq; etsi HM secundæ figuræ est paulo minor quam IN primæ: vicissim tamen CH secundæ figuræ est multo maior quàm CI primæ. Majus est igitur Rectangulum MHC, quàm NIC, & sic maior Cylinder, eiusq; parallelepipedum AHCH, quam AICI. cùm è contrario ipsius Cylindri AHCH, area sectrix AHC, minor antea fuerit, quam AIC. Non est igitur proportio Corporum AICI, AHCH analoga proportioni arearum AIC, AHC. Et AIC quidem est maxima arearum super eadem diagonio, corpus verò AICI non est maximum, sed AHCH est eo maius.

Praxis & per eam successus.

Cùm corpora ex I adhuc crescant versus H, inquisivi logisticè, ubi esset corpus maximum; non enim crescit corpus continuè usq; in A, sed in vicinia ipsius A, rursum attenuatur, & unâ cum area ABC, tandem in A, in nihilum redigitur, quando altitudo Cylindri, analogicè loquendo, punctum est, sc: A, diameter verò Basis AC, cioncidens cum diagonio.

Processus hic fuit: sinum arcus AH, AB multiplicavi in sinum dimidij arcus HC, BC, per omnes quadrantis gradus ordine.

Cùm autem sit tædiosa multiplicatio sinuum, accipe processum breviorem: sit diagonios 20, quadratum 400, sit altitudo AG 1, quadratum 1, hoc ablato à 400, restat quadratum ipsius GC 399: quod duc in altitudinem, venit 399, pro corpore huius columnæ, in comparatione cum cæteris.

Hoc pactò si fuerit

Altitudo	Basis diameter	Erit corpus columnæ
1	20 --	399
2	20 --	794
3	20 --	1173
4	20 --	1536
5	19 +	1875
6	19 +	2184
7	19 --	2457
8	18 +	2688
9	18 --	2871
10	17 +	3000
11	17 --	3069
Sub se-	midupla	3080
12	16.	3072
13	15 +	3003
14	14 +	2856
Æqu-	ales	2828
15	13 +	2625
16	12.	2364
17	11 --	1887
18	8 +	1368
19	6 +	741
20	0.	0

Sed in priori processu attendi, ubi primùm consisterent quotientum, seu corporum, incrementa; ab eoq; termino iterum decrescerent; illos igitur sinus notavi. Quos cùm interpositâ vna nocte repeterem sub aspectum; apparavit, G punctum circumferentiæ, apud quod maximum corpus terminabatur, connexum cum AC, præbere GA, latus cubi in Sphæram AIC inscripti, & GC, diagonium plani cubici, seu latus Tetraedri in eadem. Id igitur sequentibus Theorematibus demonstrabitur. Et nota quod hisce Theorematibus tradatur

Ratio proportionis usitatæ in fabrica dolij Austriaci.

THEOR. IV.

Omnium Parallelepipedorũ

seu

seu columnarum inscriptarum sphæræ eidem, quæ binis ex opposito quadratis Basibus constant, Cubus est maximo corpore.

Theorema est hactenus desideratum: etsi habet dixin evidentem ex Analogia. Circulus est omnium planorum, æqualibus perimetris contentorum, capacissimum, ut demonstravit Pappus, libro V. Sed & planorum æquali laterum numero contentorum, & æquali perimetro, quæ sunt circuli similiora, capaciora sunt.

Rursum & segmentorum ex diversis circulis, quorum circumferentiæ sunt æquales, capacissimum est, semicirculus.

Ad eundem modum & Cubus est solidorum omnium, quæ æqualibus cum illo, superficiebus continentur, capacissimus. Et Polyedrorum Isoperimetrorum, quo fuerit quodlibet Sphæræ similius, ordine & numero laterum: hoc capacius est: Icosaedron quidem capacissimum, quia plurimis Basibus contentum, ut circulus infinitis quasi Basibus. Hæc omnia Pappus habet libro V.

Sed & de segmentis diversorum globorum, Isoperimetris demonstravit Archimedes, capacissimum esse Hemisphærium omnium globi segmentorum, quæ æquali superficie contineantur.

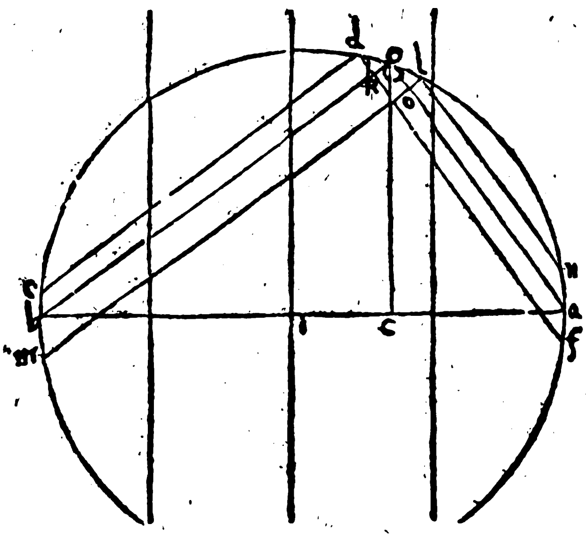
Hæc quidem præstat figuris cæteris, circuli & globi natura, cùm sunt Isoperimetræ. Quando verò remittitur ijs æqualitas superficiei, vicissimq; datur Polyedris eadem sphæra circumscripta; contrarium contingit nonnullis, ut Dodecaedron sit maius Icosaedro, quod demonstrarunt Apollonius & Hypsicles ad Euclidem: at hoc propter eandem globi naturam accidit, & propter similitudinem figuræ cum globo, quæ hic regnat; Prius enim cum æquales essent superficies, similitudo cum globo consistebat in multitudine superficierum: Hic cum angulorum in varijs figuris ponatur orbis æqualis, & dispositio per illum ordinata: similitudo cum globo consistit in multitudine angulorum, quæ maior est in Dodecaedro, quàm in Icosaedro.

Cùm hæc sic habeant, facile apparet, etiam inter corpora, quæ planorum æquali numero continentur, id esset capacius in globo, quod est globi similius: Vbi similitudo consistit in æqualitate & similitudine superficierum, & ordine angulorum. Hæc igitur Cubo adsunt, præ reliquis globi Parallelepipedis. Quare Cubus erit capacior. Hæc quidem dixis est ex Analogia, Nunc plenam subjicio demonstrationem, quæ sanè difficultatem aliquam habet ex eo, quod solidi sectiones minutæ concipiendæ sunt in Schemate plano.

In Schemate proximè subjecto sit Sphæræ circulus maximus AGB, diameter huius, idemq; & axis sphæræ AB, & sit Latus Cubi in Sphæra AG, diagonios unius quadrati Cubici GB. Columnæ igitur binis quadratis Basibus, quæ sphæræ eidem inscribuntur, aut sunt altiores Cubo, Basesq; quadratas Cubicis minores habent, aut sunt humiliores Cubo, Basibus quadratis laxioribus.

Sit primò Columna altior Cubo. Ducatur igitur ipsi GA altitudini Cubi, parallela longior in circulo quæ sit DF, secans GB in K: Similiter & ipsi GB, diagonio quadrati Cubici, ducatur parallela ex puncto D, fine altitudinis columnæ, quæ sit DE, diagonios quadrati Columnaris, dico columnæ FDE corpus, esse minus corpore cubi AGB. Est enim DK ad BK, ut GK ad KF; & vicissim ut FK ad KB, sic GK ad KD: sed AG est minor quam FK, & GB est maior quam KB. Maior est igitur proportio AG ad GB, quam FK ad KB. Maior igitur est earundem AG ad GB, proportio, quam GK ad KD: sed AG ad GB est proportio sub-semidupla. Minor igitur est proportio GK ad KD, quam sub-semidupla, & GK vel plus potest dimidio ipsius KD, vel æquat KD, vel ea etiam longior est.

Schema XX.



Facta verò est appositio ad corporis cubici altitudinem per ductum duorum quadratorum columnarium utrinque, in particulam altitudinis KD. E contrario facta est diminutio à corporis cubici crassitie, per ductum quatuor Quadratorum, columnaris æqualium, circa corpus columnæ, in particulam decrementi, qua semilatus quadrati cubici differt à semilatere quadrati columnaris: quod decrementum est ad GK decrementum semidiagonij, ut AG ad GB, nimirum eius sub-semiduplum. Neque tamen hic expressa est omnis diminutio, quia quatuor hosce laterculos speciei quadratæ, minoris, quam est quadratum cubicum, circumjacent adhuc duodecim columellæ, quæ itidem de crassitie cubi sunt diminutæ. Quod si laterculi quatuor circa columnam, diminuti de corpore cubi, maiores sunt laterculis duobus supra & infra adjectis ad corpus cubi; multò magis tota diminutio de corpore cubi, superabit adjectionem altitudini factam. Atqui maiores sunt quatuor laterculi laterales, duobus laterculis altitudinis, quod sic probo. Est enim unusquilibet laterculorum lateralium ad laterculum altitudinis, ut decrementum lateris cubici, ad incrementum altitudinis, sc. cuius dimidium est KD. Sed decrementum lateris cubici, ad incrementum altitudinis, habet proportionem compositam ex proportione AG ad GB, & GK ad KD. Nam ut decrementum semilateris, ad decrementum semidiagonij GK, sic AG ad GB, quæ est pars proportionis una: altera est ipsa proportio GK ad KD: Atqui proportiones hæ duæ junctæ constituunt aliquid minus subdupla. Est enim AG ad GB sub-semidupla, & GK ad KD minor quam sub-semidupla. Semis autem & minus quàm semis composita, faciunt minus quam totum. Si ergo vnus laterculus lateralis ad vnum altitudinis, habet proportionem minorem subduplâ: vnus ergo altitudinis, non est

planè

planè duplum vnius lateralis, & vnus altitudinis, non planè æquat duos laterales, sed minor est: & per consequens duo altitudinis, sunt minores quatuor lateralibus: Et igitur adjectio facta altitudini, minor est diminutione factà de lateribus cubi. Columna igitur Sphæræ, altior cubo, est minor corpore cubi.

Sit secundò columna Cubo humilior, & ducatur ipsi GA altitudini Cubi, parallela in circulo minor LN, pro altitudine columnæ, & ipsi GB diagonio plani cubici, ducatur ex L parallela LM, pro diagonio quadrati columnaris cubico maioris, secans GA in O.

Rursum igitur, ut prius, est, ut MO ad OA, sic GO decrementum altitudinis ex vna parte ad OL incrementum semidiagonij Sed BG est minor quam MO, & GA est maior quam OA. Ergo proportio BG ad GA, quæ est in Cubo semidupla, minor est quàm GO ad OL. Maior est igitur proportio GO ad OL, quàm semidupla.

Sed proportio inter incrementum semidiagonij OL, & incrementum semilateris quadrati, est semidupla. Ergo compositis semiduplà & plusquàm semiduplà in vnam, erit proportio GO decrementi dimidiæ altitudinis ad incrementum semilateris, maior duplà. Sed per ductum duorum quadratorum cubicorum in GO, creantur laterculi duo diminuti de altitudine corporis cubici. Contrà per ductum quatuor quadratorum cubicorum, in incrementũ semilateris, creantur laterculi quatuor, qui sunt maiores ea adjectione & circumpositione, quæ facta est circa corpus Cubi. Nam etsi appositis his quatuor laterculis, adhuc hiat columna, deficientibus quatuor columellis, apud quatuor erecta columnæ latera; tamen vicissim excedunt hi laterculi altitudinem columnæ; octo alijs columellis æquealtis cum illis deficientibus, crassioribus tamen, quàm illæ. Harum enim crassities est GO, illarum crassities est ad OL, ut AG ad GB, minor sc. quàm OL, multo igitur minor quam GO. Tribus igitur nominibus octo crassæ columellæ excedentes, sunt maiores quatuor exilibus deficientibus. Quatuor igitur laterculi dicti, sunt maiores appositione, factà ad corpus cubi. Quod si igitur incrementum semilateris esset præcisè dimidium ipsius GO: quod creatur à GO, ductà in duo quadrata, æquale esset ei, quod creatur ab incremento semilateris, ducto in quadrata quatuor. At minus est incrementũ semilateris, dimidio ipsius GO, ut demonstratũ. Quare & quatuor laterculi quadrati, minores sunt duobus laterculis altitudinis. Multo igitur minor est adjectio, facta ad latera cubi, quàm diminutio, facta de altitudine. Columna igitur Sphæræ, humilior cubo Sphæræ, minor est corpore Cubi in eadem Sphæra. At prius etiam altior Cubo, minor erat illo: nulla igitur Columna sphæræ, quadratarum basium & rectangulorum laterum, assequitur corpus Cubi in eadem Sphærà: quod erat demonstrandum.

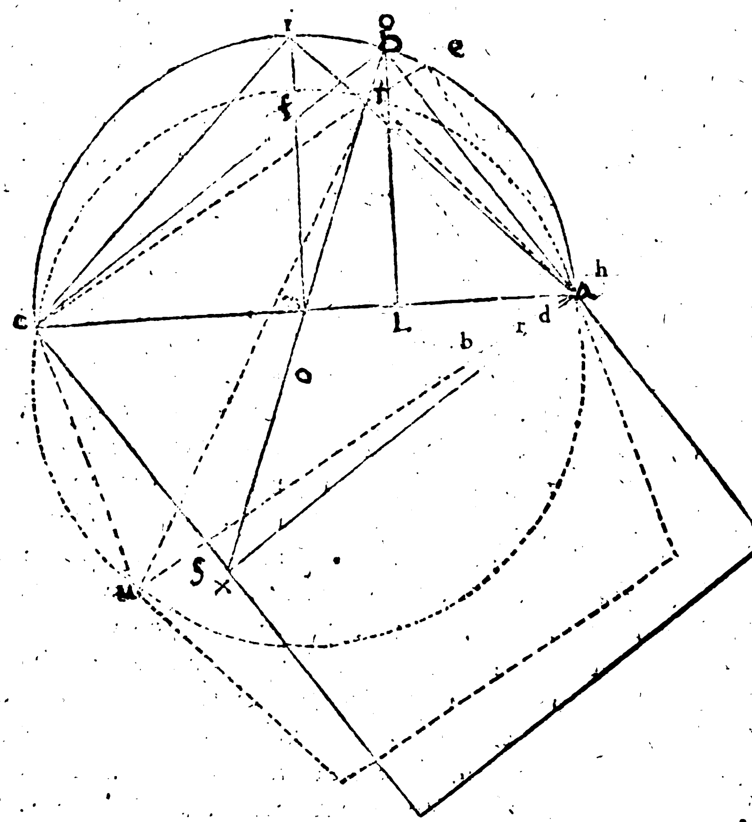
THEOREMA V.

Omnium Cylindrorum, diagonium eandem habentium, maximus & capacissimus est is, cujus diameter Basis, est ad altitudinem in proportione semidupla, seu

vt latus Tetraedri aut diagonios quadrati cubici ad latus cubi in eadem sphæra.

Repetatur Schema Theorematis primi, & sit AC linea diagonios Rectanguli, quo conus secatur per axem, repræsentans virgam mensoriam, & super AC constituatur semicirculus AGC, dividatur verò AC in partes tres æquales, & sit AL pars vna, LC duæ, & ex L erigatur perpendicularis LG, secans circulum in G, & connectatur G cùm A & C. Quia igitur GL ipsius LA est dupla, erit CA ipsius LA tripla. Vt verò CA ad AG, sic AG ad LA. Tribus autẽ existentibus proportionalibus continuè, vt prima est ad tertiam, sic quadratum primæ est ad secundæ quadratum, quia ergo CA prima, est triplum tertiæ LA, quadratum etiam ipsius CA diametri erit triplum quadrati AG, secundæ. Et quia quadratum AC æquat quadrata AG, GC, juncta, quorum AG est tertia pars, erit GC duæ tertiæ ipsius AC, & sic quadratum GC duplum erit quadrati AG. Igitur AG est latus Cubi inscripti sphæræ AGC, & AC est diagonios quadrati Cubici, vel latus Tedraedri inscripti eidem sphæræ. Dico Cylindrum, cuius diameter baseos, est GC, altitudo GA, esse omnium Cylindrorum, quibus est hæc diagonios AC, capacissimum, seu maximo corpore. Nam quia, GC, puncta sunt in superficie sphæræ, & linea GC est diameter basis unius: tota igitur circumferentia illius basis stabit in circumferentia sphæræ; sic & basis opposita, cuius unum punctum A. At si AG latus est Cubi, & GC diagonios lateris Cubici, necessario in circulo GC, & sic in Sphærâ, inscriptum erit quadratum cubicum, cuius oppositi duo anguli G, C, sic & in circulo basis oppositæ per A traductæ. Itaq; Cylindrus jam definitus, habebit inscriptum Cubum eiusdem secum altitudinis, cuius omnes anguli stant in superficie sphæræ.

Schema XXI.



Eodem modo etiam in alio quocunq; sphæræ circulo, cuius verbi gratia IC diameter, intelligitur inscriptum quadratum columnæ, cuius alualtitudo IA, & quadrati unius, anguli duo I. C. oppositi, quadrati alterius anguli A, X: itaq; Cylindro AIC columna æquealta inscripta est.

Atqui omnium Columnarum ad Cylindros æquealtos, quibus inscribuntur, eadem est proportio; Cubus verò omnium in sphæra Columnarum est maximus, Cylinder igitur AIC, cubo sphæræ circumscriptus, omnium aliorum Cylindrorum in sphæra, ut AIC, maximus est.

Eadem demonstratio potest etiam per Schema XIX. in hunc modum institui. Cylindri tres terminentur in H, G, B, punctis, eandem habentes diagonion CA, bases CH, CG, CB, altitudines HA, GA, BA. Sit autem quadratum CG duplum quadrati GA, & CH brevior, CB longior ipsâ CG. Descendant perpendiculares in CA, quæ sint HM, GL, BK. Cùm igitur sit CGA rectus, erit ut quadratum CG ad quadratum GA, sic recta CL ad rectam LA, dupla scilicet eius; & ut quadratum CH ad quadratum HA, sic CM ad MA, & ut quadratum CB, ad quadratum BA, sic CK ad KA. Vt verò quadrata CH, CG, CB inter se, sic sunt etiam bases Cylindrorum circulares inter se. Quare ut CM, CL, CK inter se, sic etiam sunt bases cylindrorum inter se. Componitur autem proportio Cylindrorum ex proportione basium & proportione altitudinum. Ergo rectangula tria, sub CM, CL, CK, quæ habent proportionem basium, & sub HA, GA, BA altitudinibus, habent inter se proportionem Cylindrorum. *Schema XIX.*

Permutatim autem ut AM, AL, AK inter se, sic sunt inter se etiam quadrata altitudinum AH, AG, AB. Est igitur quantitas eadem LM, quæ adijcitur ad LA, & aufertur ab LC; & vicissim quantitas est eadem LK, quæ aufertur ab LA, & adijcitur ad LC. Cùm autem autem CL sit dupla ipsius LA, proportio igitur CM brevioris, ad CL longiorem, est maior dimidia proportione eversa ipsius MA tanto longioris, ad LA breviorem. Vt si CL sit 20, LA 10, deinde CM 19, MA 11, proportio 20 ad 19. maior est dimidia proportione ipsius 11 ad 10, hoc est 22 ad 20. Nam proportio 22 ad 20 habet duo elementa, 22 ad 21, & 21, ad 20, quorum utrumq; minus est proportione 20 ad 19. Est igitur proportio MA ad LA, & sic quadrati HA ad quadratum GA, minor quàm dupla proportionis CL ad CM. Sed rectarum ipsarum HA ad GA proportio est dimidia quadratorum, & duplæ proportionis dimidia, est simpla. Ergo altitudinis HA ad altitudinem BA proportio minor est, quàm LC ad MC, proportio basium. Rectangulum igitur sub HA, CM, repræsentans cylindrum CHA, minus est rectangulo sub GA, CL, repræsentante cylindrum CGA, quia CM est brevior in sua proportione, HA longior in suâ.

Idem demonstratur versis argumentis etiam de cylindro CBA. Nam proportio CK longioris ad CL breviorem, est minor quàm dimidia proportionis eversæ AK brevioris ad AL longiorem. Vt si CL sit 20, LA 10, deinde CK 21, KA 9. Proportio 20 ad 21 minor est quam dimidia ipsius 9 ad 10, vel 18 ad 20. Nam proportionis 18 ad 20 elementa duo, 18 ad 19, & 19 ad 20, sunt singula maiora proportione 20 ad 21. Proportio igitur LA ad AK, hoc est quadrati GA ad quadratum AB, maior est quam dupla KC ad CL: & sic linearum GA ad AB proportio maior est, quàm KC ad CL; nec quanto BA brevior est ipsa GA in proportione sua, tanto vicissim longior CK quàm

CL in-

CL in sua; & rectangulum sub BA, CK minus est rectangulo sub GA, CL, cylinder igitur CBA minor cylindro CGA: solus igitur CGA omnium maximus.

Corollarium I.

Dolia Cylindracea sine Ventre, sive longioris fuerint figuræ quàm Austriaca sive curtioris, minus sunt capacia Austriacis.

Corollarium II.

Patet hinc bono quodam & Geometrico genio esse factum, quod Austriaci Vietores Regulam hanc observent construendi dolij; ut tertia parte de longitudine Tabulæ utantur pro semidiametro Orbis lignei. Nam hac ratione fit, ut Cylinder inter duos orbes ligneos mente adumbratus, quam proximè habeat duas medietates, ad Regulam Theorematis V. quadrantes, & figuræ capacissimæ participes, etsi à perfectione Regulæ nonnihil recedant. Nam figuræ aliæ, terminatæ ad puncta ipsi G proxima cis & ultra, minimum variant capacitatem; quia capacitas figuræ AGC maxima est: circa maximam verò utrinq; circumstantes decrementa habent initio insensilia.

In Schemate sequenti CG ad GA habeat rationem semiduplam, eam nempe quam 100000. ad 70711; duplicata AG ex hac regula debebat habere 141421; at vietores pro hoc sumunt longitudinem 150000. sesquialteram basis, pro longitudine tabulæ GX, quod paulò plus est, quam 141421. Et hoc ipsum facit ad figuræ capacissimæ imitationem accuratiorem. Nam tabulæ & curvantur & marginibus utrinq; extant & procurrunt super crenas, quibus capiunt & stringunt orbes ligneos. Quod igitur nimium est in hac tabularum longitudine, quæ est ad diametrum basis in proportione sesquialterà, id his marginibus imputatur, qui in examinatione figuræ ad regulam Theorematis V, non censebantur.

Quis neget Naturam instinctu solo, sine etiam ratiocinatione docere Geometriam? cùm Vietores nostri, solis oculis & speciei pulchritudine ducti, capacissimam in dimidiato dolio figuram exprimere didicerint? Prodeat Geometra, doceatq; faciliorem Methodum construendi dolij, quod dimidià sui parte ad capacissimum Cylindrum propius accedat, quàm est hæc ipsa, quam Vietores Austriaci ex antiquo tenent, proportionis sesquialteræ: doceat idem Geometra figuram ad compendiosè mensurandum aptiorem, quàm est illa quam struit Austria.

Credere poteram, extitisse olim præstantissimum aliquem in Austria Geometram, qui Vietores ista docuerit; nisi me hoc retinuisset, quod pulcherrimæ demonstrationis vestigia nuspiam extant in libris Geometrarum: quodq; ratio hæc construendi dolij, quod equidem sciam, ad Rhenum, cæteraq; loca vitifera, usitata non est; ferè enim longiora dolia factitant. Quod igitur publicè receptum non est, quî possit esse verisimile, ex libris aut institutione Geometrarum, ab vnà sola natione petitum esse?

Admo-

Admonitio.

Quis tam est ingenio perspicaci & circumspecto, qui eluctatus ex hallucinatione ista, qua Cylindrorum eandem diagonion habentium illis maximum corpus tribuerat, quibus est area maxima sectionis per axem; postquam didicit, ijs Cylindris esse maximum corpus, in quibus diameter basis est semidupla altitudinis, per Th. hoc V, ijs verò, qui lineas has habeant æquales, aream sectionis esse maximam, per Th. I. huius partis: & verò eandem esse circa areas & Truncorum Conicorum rationem, per Th. II. huius: qui inquam his perspectis, non statim etiam de corpore Trunci conici præsumat idem, quod de corpore Cylindri: quòd scilicet etiam Trunci conici illius corpus sit maximum, in quo diameter basis minoris, sit dupla lateris acclivis? Atq; id ego & credidi per hunc sesquiannum, & secutus sum: iamq; in hoc eram, ut hoc nixus fundamento, dolia Rhenensia promiscuè omnia, sine discrimine ventrium, Austriacis postponerem in capacitatis censura: quod nullâ quidem illorum cum iniuria fecissem, sed tamen iure non æquali. Itaq; commoditati Typographiæ præsentis acceptum fero, quòd aurem hic vulsit Geometria, editionem curanti, sequentiaq; Theoremata, velut augendo supplemento ad Archimedem, mihi suppeditavit; quibus simul altera, multoq; priore mirabilior proprietas dolii Austriaci traditur.

Definitio.

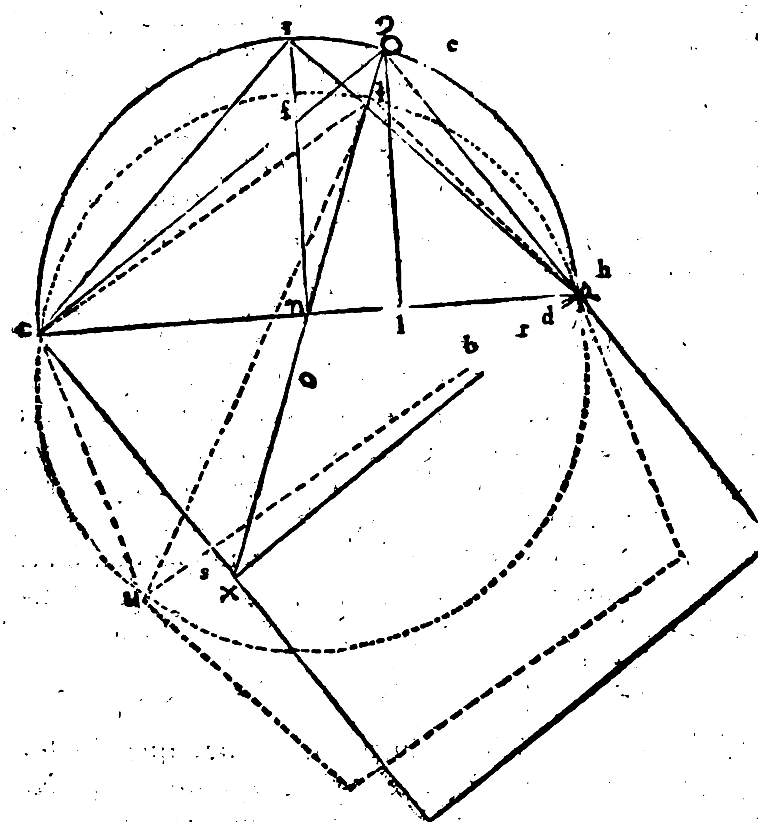
Cylinder & Trunci Conici coniugati dicantur, quando sectionibus utrorumq; per axem fuerit eadem, vel æquales diagonij, & ut diameter basis cylindri ad eius altitudinem; sic diametri minoris basis Truncorum, ad eorum latera acclivia.

THEOREMA VI. Problema.

Dato Cylindro & Trunci conjugati latere, vel basis minoris diametro, invenire trunci conjugati lineas reliquas. Oportet autem proportionem lateris vel basis in Cylindro ad datum latus vel basin Trunci, esse minorem proportione diametri et altitudinis Cylindri junctarum, ad diagonium.

Datus esto Cylinder AGCX, basis diametro CG, altitudine GA, diagónio AC: & Trunci data esto diameter basis CT; & proportio CG ad CT sit minor proportione CG, GA junctarum ad CA. Oportet invenire latus trunci & diametrum basis maioris. Fiat ut CG ad GA, sic CT, ad aliquam, puta AT: & super CA, statuatur triangulum ex CT, AT. Nam quia proportio CG, GA ad CA est maior, quàm proportio CG ad CT, erit etiam maior quàm GA ad AT, & junctis terminis, maior erit proportio CG, GA ad CA, quàm earundem CG, GA ad CT, TA. Ac proinde CT, TA junctæ maiores erunt, quàm CA, poterit igr fieri triangulũ ex CT, TA super CA. Scribatur autem circulus circa C, T, A, puncta; & ex C, ipsi

TA æqualis extensa, applicetur circulo in V, & connectantur AV, dico TA, CV esse Trunci coniugati latera acclivia, AV diametrũ basis maioris.



Connexis enim TV punctis: cùm TA sit ipsi CV æqualis, communi arcu TC apposito ad arcᵒ TA & CV, erunt arcus AC, TV, æquales, proinde & subtensæ AC, TV æquales, & angulus ATC, angulo VCT, æqualis; quadrilaterũ igitur ATCV, erit ordinatum & circulo inscriptũ, eadem diagonio AC vel TV, cum parallelogrammo AGCX, & eadem proportione CT ad TA, qua est CG ad GA; Truncus igitur, cuius sectio per axem ATCV, & cylinder, cuius sectio AGCX, conjugati erunt.

THEOREMA VII.

Si fuerint Cylinder & Truncus Conicus coniugati, & differentia diametrorum in basibus trunci secetur in proportione, quam habent inter se quadrata, diametri Basis, & altitudinis Cylindri; erit hoc diametri quadratum, æquale rectangulo, sub minore diametro Trunci, & sub composita ex hac & segmento, quod diametro Cylindri respondet.

Sit AGCX cylindri sectio, diagonios AC: dividat autem hanc per-perpendicularis à G in partes CL, LA; sicut CL respondeat ipsi CG. Formetur etiam sectio Trunci ATCV, super eadem AC diagonio, per VI præmissam, cuius diametri, minor CT, maior AV, & ablatâ ab AV, ipsi CT æquali VB, residuum esto BA.

Cùm igitur ATCV quadrilaterum stet in circulo, quadratum ab AC, erit æquale rectangulis duobus, & sub TC, AV, & sub TA, CV, id est qua-

quadrato de TA vel CV, junctis. Ablato igitur quadrato ipsius AT, à quadrato ipsius AC, restabit rectangulum sub TC, AV, hoc est sub BV, VA. Atqui etiam quadrato ipsius AG, maioris, quàm est AT, ablato ab eodem quadrato AC, relinquitur rectangulum GC, AX, hoc est quadratum GC, quod ideò minus est rectangulo BVA.

Erit igitur rectangulum aliquod minus quam BVA, æquale quadrato GC; sit BVD, residuum igitur sub DA, BV, erit excessus rectanguli BVA, super quadratum GC. Sed excessus hic, est æqualis excessui quadrati GA, super quadratum AT. Et quia rectangulum BVD, positum fuit æquale quadrato GC, & rectangulum DBV, est excessus rectanguli BVD, super quadratum BV vel TC; est igitur DBV etiam excessus quadrati GC super quadratum TC. Componendo igitur, cum sit quadratum AG ad quadratum GC, ut quadratum AT ad quadratum TC; erit etiam, ut quadratum AG ad quadratum CG, hoc est, ut AL ad LC, sic excessus quadrati AG super quadratum AT, hoc est, rectangulum sub DA, BV, ad excessum quadrati GC super quadratum TC, hoc est ad rectangulum DBV. Vt igitur AL ad LC, sic rectangulum sub AD, BV, ad rectangulum DBV; quare cùm rectangula habeant eandem longitudinem BV, erunt etiam ut AL ad LC, sic latitudines AD ad DB. Quare reflectendo si fuerit divisa AB in D sic, ut sit BD ad DA, sicut est CL ad LA, hoc est, ut quadratum CG ad quadratum GA; rectangulum DBV, æquabit quadratum GC, quod erat demonstrandum.

Corollarium I. & Praxis.

Si dantur quadrata altitudinis & basis Cylindri, cum diametro basis minoris in Trunco, divide quadratum basis per diametrum basis trunci datam, à quotiente aufer divisorem, quod restat, multiplica in summam quadratorum, factum divide qer quadratum altitudinis cylindri, provenit differentia diametrorum, adjicienda ad minorem datam, ut componatur diameter Trunci maior.

Exemplum.

Sit quadratum AG. 20000 quadratum GC etiam 20000 | 167 -- Quotiens
Et sit TC 120 | 120 Divisor

AD 47 - Differentia

Summa quadratorum 40000

Factus 1866667 | 93 + Quotiens AB
quadratum AG 20000 | 120 TC

213 + composita, AV

Corollarium II.

Si verò econtrà datur solùm proportio quadrati altitudinis ad quadratum basis diametri, & diameter utraq; basium Trunci; Diameter Basis Cylindri sic invenitur. Adde numeros, quibus expressa est quadratorum proportio, & multiplicatâ differentiâ diametrorum trunci, in numerum quadrati maioris, factum divide per summam utriusq; Numeri, quotientem multiplica in minorem Trunci diametrum, proveniet quadratum diametri in base Cylindri.

 Sit

Sit CG ad GA ut 3. ad 2. Factus 234.
quadrata ut 9. ad 4. Summa 13. | 18 Quotiens
Sit CT. 130, VA 156 differentia 26. 130 CT.
Factus 234 Factus 2340. qdm CG.

Vel quod idem est, numerum quadrati maioris multiplica in diametrum minorem, & fac, ut summam quadratorum ad differentiam diametrorum trunci, sic factum ad quartum, qui erit quadratum CG.

Corollarium III.

Si quadratum AG, ad quadratum AC, est ut 3. ad 2. DV est duarum medietatum arithmeticarum inter TG, AV maior; Hinc Praxis brevior.

Dia- 19. 20. 21. 22. metri.
19.
399. quadratum GC.

Corollarium IV.

Sicut se habet basis minor Trunci, ad basin Cylindri, aut quadratum lateris acclivis Trunci, ad quadratum altitudinis Cylindri, sic se habet diameter minoris basis, ad compositam DV.

THEOREMA VIII

In Cylindro & Trunco conico coniugatis, altitudinum proportio componitur ex proportione Diametrorum in Basibus, minori Conici trunci, & utraq; Cylindri, & ex proportione perpendiculi, ad latus acclive Trunci.

In Schemate XXI. Sint figuræ conjugatæ CGAX & CTAV, in quibus diametri baseon, Cylindri CG, XA, Trunci minor CT, maior VA, sitq; perpendiculum Trunci TR, latus acclive TA. Dico proportionem altitudinum Cylindri GA, ad Trunci TR, componi ex proportione GC ad CT, & ex proportione AT ad TR. Theorematis ipsius facilis est demonstratio, nec minus tamen separatim fuit tradenda, ob Corollaria & Analogiam notabilem. Cùm enim sit CG ad GA, sicut CT ad TA, permutatim igitur, erit GC ad CT, ut GA ad AT: Sed proportio GA ad TR, composita est ex proportione GA ad AT, & ex proportione AT, ad TR: ergo etiam ex GC, ad CT, & ex AT ad TR.

Corollarium & Praxis quærendæ altitudinis.

Datis CT, & VA, per præmissam, datur etiam quadratum ipsius CG; data verò proportione huius quadrati CG, ad quadratum GA, datur etiam qua-

quadratum GA, & quadratum TA. Sed & differentia ipſarum CT, VA, nota eſt, ſc. BA: & quadratum TA, minus eſt quadrato TR, parte quarta quadrati BA, in omni conjugatione. Anguli enim ad C & T, æquales ſunt, & CT, VB æquales, ex Hypotheſi, atq; etiam parallelæ: connexis igitur B, T, erit BT æqualis ipſi CV: ſed hæc eſt æqualis ipſi TA, ex hypotheſi: Ergo BTA iſoſceles eſt cuius TR perpendiculum: itaq; BR eſt æqualis ipſi RA, eòq; quadratum BA, quadruplum ipſius RA. Ablata igitur parte quarta quadrati BA à quadrato TA, reſtat quadratum TR, altitudinis Trunci, quod comparatum cum quadrato GA, conſtituit quæſitam proportionem.

Exempla.

Sit TC 19 AV. 22. Quod ſi quadratum GC fuerit ad GA duplum: erit quadratum GC ut prius, 399. Erit igitur quadratum GA 399 ſemiſſes, vel 798 quadrantes: proinde cùm quadratum de 19 ſit 361, erit etiam TA 361 ſemiſſes vel 722 quadrantes. Denique cum differentia CT & VA, ſc. 19 & 22, ſit 3, quadratum 9, pars quarta, 9 quadrantes: aufer hos à 722, reſtant 713 quadrantes pro quadrato TR. Ita conſtituitur proportio quadrati GA ad quadratum TR, quæ 798 ad 713.

Sit verò alia conjugatio, quadrata ſc. AG, GC æqualia, & ſic etiam quadrata AT, TC: & maneat CT, 19. VA 22. Erit quadratum TA 1444 quadrantes, eoque quadratum TR 1435 quadrantes: Et proportio quadrati GA ad quadratum TR quæ 1596 ad 1435, vel in minimis, quæ 228 ad 205.

Aliud Exemplum. Sit TC 19. AV 20. ſeu quod idem eſt 57, & 60. ut communicent cum ternario, propter uſus ſecuturos. Deinde ſit quadratum GC ad quadratum GA, non duplum, ut 2. ad 1. vel ut 8. ad 4. ſed minor, ut 7. ad 4. Cùm ergò per præmiſſam, differentia, quę hîc eſt 3, ſit dividenda in proportione 7 & 4, tota igitur eſt ut 11. eòque alij termini ſunt aſſumendi, communicantes cum 11, ſcilicet 627. & 660. ut ſit differentia 33. de qua pars reſpondens quadrato GC, eſt 21. Compoſita igitur VD eſt 648. quam duc in minorem diametrum 627, provenit 406 296, quadratum GC, quod eſt ad quadratum GA, ex hypotheſi, ut 7. ad 4. Ergo quadratum GA 232 169 cum ſeptimâ, ſeu 928 677-|quadrantes. Eſt autem quadratum minoris TC 393 129, Et ut 7 ad 4, ſic quadratum TC ad quadratum TA, quod erit ideò 224-645 & 1 ſeptima, ſeu 898581- quadrantes. Differentia diemetrorum eſt 33, cuius quadratum 1089, & eius quarta pars, totidem quadrantes. Aufer hoc à quadrato TA, reliquuntur 897492-. Hîc ergò eſt proportio q. GA ad q. TR, quę 928 676 ad 897 491, vel 3 714 708 ad 3 589 968; in minimis, ut 464 377 ad 448 746.

Sit autem proportio quadratorum, non ut 7. ad 4, ſed ut 9 ad 4. ipſarum ſc. linearum GC ad CT, quę 3 ad 2. & ſit VC 19. AV 20. Oportet ergò differentiam 1, dividerę in proportione 9. ad 4. Tota ergo ſecanda eſt in particulas 13, & propter communionem cum ternario, in 39. Fient autem termini, VA 780, TC 741, quadratum 549 081. Vt autem 9 ad 4, ſic quadratum hoc ad quadratum TA 244 036, de quo aufer quartam de quadrato 39, ſc. 1521 quadrantes, reſtant 974 623 quadrantes, pro TR. Iam pars ~~diemetri~~, reſpondens quadrato GC, eſt 27: compoſita igitur, eſt 768, qua ducta in diametrum 741, provenit quadratum GC 569 088, ut verò 9 ad 4, ſic hoc ad 252 928 ſeu 1011 712 quartas. Ergo proportio quadrati GA, ad quadratum TR, eſt illa, quę 1011 712 ad 974 623.

Corollarium II. & Analogia.

In conjugatione æqualitatis pulchra exiſtit ſeries proportionum inter quadrata altitudinum: talis nempe.

Si fuerit TC ad AV		Erit qdm GA ad q. TR		In conjugatione dupla talis. TC.AV		qdm GA	qdm TR		Increm: 1ma	2da
ut 1.	ad 2	ut 1.	ad 2	1.	2	ut 3.	diff 7.	10.	22	
2.	3	3.	4	2.	3	21.	11.	32.	34	12
3.	4	5.	6	3.	4	51.	15	66.	46	12
4.	5	7.	8	4.	5	93.	19.	112.	58	12
5.	6	9.	10	5.	6	147.	23.	170.	70	12
6.	7	11.	12	6.	7	213.	27.	240.	82	12
7.	8	13.	13	7.	8	291.	31.	322.	94	12
8.	9	15.	16	8.	9	381.	35.	416.	106	12
9.	10	17.	18.	9.	10	483.	39.	522.		

Quia puncta D, R hic coëunt. Tale quid occurrit in unaqualibet Conjugatione

THEOREMA IX.

Si differentia diametrorum Trunci secetur in proportione laterum Cylindri conjugati, & addatur pars respondens diametro Basis Cylindri ad minorem, fiantq; rectangula, I. sub minore & maiore, II. sub minore & modo composita: Proportio rectanguli primi, aucti tertia parte quadrati à differentia diametrorum, ad rectangulum secundum, & proportio altitudinis Cylindri ad altitudinem Trunci, in vnum compositæ, constituunt proportionem corporis Trunci ad corpus Cylindri conjugati.

In Schemate XXI. manentibus cæteris, ut præcedenti Theoremate, sit BA differentia divisa in D sic, ut sicut quadratum AG ad quadratum GC, sic sit AD, ad DB. Dico proportionem rectanguli sub CT, AV, vnà cum tertia parte quadrati à BA, ad rectangulum CT, VD, & proportionem GA ad TR, in unum compositas, constituere proportionem corporis Trunci ad Cylindri coniugati corpus. Nam per XVII. primæ partis, est ut rectangulum CT, VA, junctà tertià parte quadrati de BA, ad quadratum, CT, sic corpus Trunci CTAV, ad corpus Cylindri ~~æqualis~~ & inscripti, super basi eàdem CT. Vt verò quadratum CT ad quadratum CG, ita corpus Cylindri super CT basi, ad corpus Cylindri æquealti, super basi CG, per dicta ad III & XVI. p. primæ. Vt ergo rectangulū CT, VA, junctà tertià parte quadrati de BA, ad quadratum CG, hoc est, per VI. præmissam, ad rectangulum CT, VA, æquale quadrato GC: ita corpus Trunci, basibus CT, AC, ad corpus Cylindri æquealti. Si ergo Truncus haberet altitudinem Cylindri coniugati, sc. GA; valeret hæc jam dicta proportio sola. Iam verò ut GA, altitudo Cylindri conjugati, ad TR, altitudinem minorem; sic Cylinder coniugatus, ad Cylindrum altitudine Trunci, basibus iisdem, per Th. XVII p. primæ; & sic etiam Truncus altitudine GA, ad truncum coniugatum; altitudine TR. Hæc igitur est proportionis pars altera.

Corol.

Corollarium I. & Praxis.

Data proportione Trunci ad Cylindrum æquealtum, basi CG, per præmissas: datâ etiam proportione quadrati GA, altitudinis Cylindri, ad quadratum TR, altitudinis trunci coniugati, quia quadratorum proportionalium radices etiam proportionales sunt, sed proportionis dimidiæ: quadrabimus igitur numerum, quo effertur corpus Trunci, & faciemus, ut quadratum GA, ad quadratum TR, sic quadratum numeri Trunci, altitudine GA, ad quadratum numeri justi trunci, hoc est conjugati, altitudine TR: Radix ex hoc quadrato numero, prodit numerum corporis trunci, in proportione, ut quadratum GC, valet Cylindri conjugati corpus.

Sit CA quadratum ad quadratum GA ut 7. ad 4. & sint CT. 19. AV. 20, vel ut in exemplo Th. VII, 627. 660. Differentia 33. Minore ergò medietate Arithmeticâ 638 in 627 ductâ, addito quadrato de 627; vel totâ 660 in eandem 627 ductâ, addito rectangulo ex 11 in 33, conflabitur 414183, pro corpore Trunci. Supra verò quadrati altitudinis cylindri conjugati, ad qdm altitudinis Trunci proportio erat quę 464377 ad 448746. Si feceris ergò, ut illum ad hunc, sic quadratum numeri trunci hic inventi ad quartum, proveniet 165773240994, cuius radix 407153 pro Trunco: cùm quadratum cylindri, repręsentans eius corpus, esset 406296. En Truncum maiorem cylindro, plus quàm parte quingentesima, cum in eadem proportione diametrorum, sed conjugatione proportionis duplæ, in hoc Theoremate proposita, Truncus esset minor cylindro, minus quam parte termillesima.

Age verò etiam conjugationem tentemus proportionis dupla maioris. Sit TC 19. AV. 20. & q. GC ad quadratum GA, ut 9 ad 4, Erant supra, Th. VIII, termini TC 641. AV 780. Et quadratum GC 869088. Et quadratum GA ad quadratum TR, ut 1011712 ad 974623.

Ducto autem 741 in 780, & differentiâ 39 in partem tertiam 13, factisque additis, conflatur numerus Trunci 578487. Denique huius quadrato multiplicato in 974623, & facto diviso per 1011712, prodit 3223 9900 7006. Et hinc radix 567802 est argumentum Trunci coniugati, cùm 569088 sit argumentum cylindri. Truncus igitur hic, minor est plus quam parte sexcentesima. Minor autem erat in coniugatione proportionis duplæ, minus quam parte termillesimâ.

Corollarium II.

In coniugatione duplæ proportionis, duarum medietatum arithmeticarum utraq; servit calculo; minor pro Tunicæ corpore, maior pro quadrato GC, & corpore cylindri coniugati.

Exempla

Differentia. Diametri,

3   19.   20.   21.   22.

3   19. Diff. 3.   19.

9   361.   60.   399.

4.   4.   361.   4.

1444.   421.   † 1596.

9.   421.   in minimis per 7.

* 1435.   177241.   † 228. * 205

Multiplicato 177241 per 205, facto diviso per 228, provenit 158362 cuius, radix 398 + denique arguit corpus Trunci in eâ proportione, ut Cylinder conjugatus Valet 399.

In hac ergo conjugatione &

Proportione Diametrorum		reperitur Cylinder,	Truncus
1.	2.	15.	11 +
2.	3.	48.	46 +
3.	4.	99.	97 [illegible]
4.	5.	168.	167 —
5.	6.	255.	254 —
6.	7.	360.	359 —
7.	8.	483.	482 —
8.	9.	624.	623 +
9.	10.	783.	782 +
&c.			
19.	20.	3363.	3362 +

Corollarium III.

In figuratione proportionis æqualitatis, seu cum altitudo æquat diametrum basis, utiles sunt, primò duarum medietatum arithmeticarum minor pro Tunica, deinde vnica medietas arithmetica pro diametro GC.

Exemplum

Diff.	Medi- Dia-		-a duo Unum		-metri.
3	19.	20.		21.	22
Vel 6	38:	40.	41.	42.	44.
6	38.	6.	38.		
36	1444.	240.	1558.		
4	9.1444.		-		
			-		
9	1435.	1684.	-		

In minimis 35. - - - - 38. per cōm. divisorem 41.

Tunica est 240. inscriptus Cylinder 1444. Truncus ergo 1684, cuius numeri quadratum 2835856 multiplicatum in 35, & factus divisus per 38. prodit 2611972, & hinc radix 1616+ pro corpore Trunci, quarium corpus Cylindri conjugati est 1558.

Hoc pacto in proportione		Reperitur Cylin:	Truncus
1.	2.	54.	60
2.	3.	180.	197+
3.	4.	378.	405+
4.	5.	648.	685--
5.	6.	990.	1036--
6.	7.	1404.	1456+
7.	8.	1890.	1846--
8.	9.	2448.	2521
9.	10.	3078.	3160+
&c.			
Demiq; 19.	20	13328.	13468+

pars minor centesimâ secundâ in excessu est.

Consideratio Analogiæ.

Hactenus fuerunt Theoremata aliquot, quibus utitur Calculus inquirendæ proportionis inter Conicum Truncum & suum Cylindrum conjugatum. Ex hoc verò calculo multa desumuntur consideratione dignissima. Nam primùm per Corollaria II. & III. praxesq; varias inter se comparatas, apparet, non semper eandem esse proportionem Trunci ad Cylindrum, in vna aliqua conjugatione, sed variari cum variata proportione Diametrorum Trunci. Et in Corollario quidem II. inventus est decrescere Truncus manente Cylindro: in Corollario verò III crevit truncus, rursum manente Cylindro. Nam in infima linea excessit Cylindrum parte minus centesima, superius parte minus tricesima octava, inde tricesima tertia, & sic semper maiori, usq; ad summam lineam, ubi erat pars omninò decima in excessu. Necesse autem est, si continuetur calculus ulterius, Truncum tandem fieri iterum minorem cylindro, in eadem conjugatione. Quæritur ergo quis Truncus in qualibet conjugatione sit maximus, quis item cylindro conjugato æqualis. Secundò apparuit ex tribus Corollarijs & calculo adjuncto, Vicissitudinem hîc aliquam esse inter conjugationes proportionis dupla maioris, & inter conjugationes, minoris. Nam in qua conjugatione regnat proportio dupla, in ea primùm omnium, Truncus omnis videtur minor existere cylindro, licet insensibiliter, sic, ut cylinder ipse, veluti Truncorum omnium primus, & proportio diametrorum ejus, quæ est proportio æqualitatis, sit Truncorum omnium maximus & sibi ipse æqualis; in qua verò conjugatione regnat proportio maior

dupla,

duplà, trunci omnes, etiam proximi ipsi cylindro, sensibiliter minores fiunt cylindro conjugato: an ergò vicissim, in qua proportio regnat minor duplà, Trunci primùm cylindro evadant maiores, usq; ad certam metam; inde rursum decrescant, fiantq; tandem cylindro suo æquales, deinde minores; donec tandem Trunci penitus evanescant, manente cylindro conjugationis? Tertiò, cum omnium coniugationum cæterarum cylindri sint minores cylindro coniugationis duplà proportione usæ: crescant verò trunci aliquarum coniugationum supra suos cylindros coniugatos: quæritur num hic excessus tantus sit, ut æquet vel superet cylindrum per coniugationes omnes maximum, & si hoc, quæ sint ergo diametrorum proportiones, in quibus truncus fiat cylindro maximo æqualis? Hæc igitur sequentibus aliquot Theorematis nobis sunt expedienda, quantum quidem eius per meam scientiam fieri poterit: sunt enim ad æstimationem & comparationem doliorum cumprimis necessaria.

THEOREMA X.

In omni conjugatione, Trunci per augmentum proportionis diametrorum tandem fiunt minores quacunq; data quantitate solida.

Sit coniugatio quæcunq;, cuius proportio CG ad GA: dico dari truncum, ut CTA, eiusdem coniugationis, scilicet in quo sit CT, ad TA, ut CG ad GA, minorem quacunq; proposita quantitate solida. Hoc verò demonstratu est facile. Nam minui possunt latera figuræ GT, TA, semper manente inter ea proportione, quæ est inter GG ad GA, eousq; dum CT, TA æquent junctæ diagonion CA, quando tria latera VC, CT, TA juncta, æquant quartum VA, quæ est proportio diametrorum CT, ad VA, quanta potest esse in hac coniugatione, maxima: quo casu truncus omnis in basin seu in planitiem circuli VA subsidit. Superficies verò quantacunq;, minor est omni quantitate solida.

THEOREMA XI.

Cylinder æqualis Trunco æquealto, basin habet compositam ex duarum basium Trunci & earum medij proportionalis Trientibus singulis.

Nam rectangulum sub diametris Trunci, est æquale quadrato mediæ proportionalis inter diametros, per 17. VI. Eucl. & duo talia rectangula, vnâ cum quadrato differentiæ, constituunt duo quadrata duarum diametrorum, sub quibus rectangula continentur per 7. II. Eucl. Tria ergo rectangula, vna cum quadrato differentiæ, sunt æqualia tribus quadratis, & duarum diametrorum in basibus, & mediæ proportionalis. Rectangulum igitur unum, cum triente quadrati differentiæ, æquat tertiam partem summæ quadratorum proportionalium, & sic iunctos singulos singulorum Trientes.

3. 5.	15. bis 30.
3. 5.	Diff. 2.2. 4
9.25. -34.	34

Vt vero rectangulũ, cum triente dicto, ad quadrata basium trunci, sic corpus trunci ad corpora Cylindrorum æquealtorũ, super trunci basibus, per XVII. p. imæ. Quare etiam ut tres dicti trientes, ad quadrata basium, sic corpus trunci (& sic etiam cylindri trunco æqualis) ad corpora Cylindrorum super trunci basibus æquealtorum. Cùm autem talium bases ipsæ, sint ut corpora; etiam sic erit basis cylindri, trunco æqualis, ad bases duas trunci: itaq; constabit ex earum & mediæ proportionalis trientibus singulis.

Clavius lib V Geometriæ Practicæ, cap. III. utitur hoc theoremate non nihil transformato, quod & supra tetigi: sed principia demonstrationis adhibet difficiliora, nec evidenter cum meis connexa; lucis ergo causa meis principijs uti malui.

Exemplum. Sint diametri 19. 22, duc utramq; e inseipsam, & in se mutuò: erunt quadrata 361. & 484 & medium proportionale 418. Summa omnium 1263, cuius pars tertia 421 pro corpore Trunci, ut 361 est corpus Cylindri minoris.

THEOREMA XII.

Cylindri habentis altitudinem eandem cum Trunco recto, & diagonion eandem, diameter basis est mediũ arithmeticum inter diametros basium Trunci.

Sit cylinder CEAS, diagonium habens CA, & super ea truncus rectus CTAV, cuius altitudo TR, æqualis altitudini cylindri EA vel CS. Dico basis cylindri diametrum CE, medium esse arithmeticum inter CT, AV, diametros basium trunci. Cùm enim truncus ponatur rectus, & latera acclivia CV, TA, æqualia, æquales vero etiam EA & CS, & anguli S, E, recti, quippe in sectione cylindri per axem: quare etiam VS & TE, latera triangulorum VSC, TEA, erunt æqualia. Est autem æqualis CE ipsi SA: quantum igitur CE excedit CT, sc. quantitate TE; tantum etiam ipsa AV excedit AS vel CE, quantitate sc. æquali VS. Est igitur CE medium arithmeticum inter CT, VA. q. e. d.

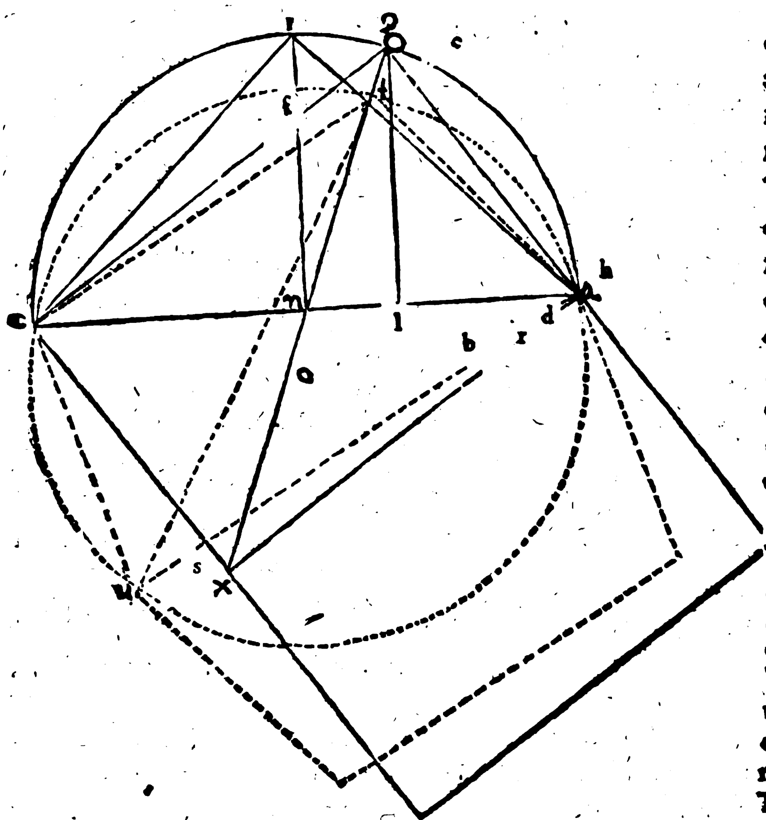
THEOREMA XIII.

Excessus trunci, habentis eandem cum Cylindro altitudinem, eandemq; diagonion, proportionem ad illum habet, quam pars duodecima quadrati differentiæ ad quadratum de diametro Cylindri.

Concipiatur cylinder, basi CT, altitudine eadem TR, quam habet truncus CTAV: erit huius cylindri proportio ad cylindrum, basi CE, altitudine eadem, quæ quadrati CT ad quadratum CE: & ut hæc quadrata ad communem differentiam, sic cylindri CT, CE ad limbum, quem maior cylinder CE, minori CT circumponit. Sed differentia quadratorum constat rectangulis duobus sub CT, TE, & quadrato TE, quæ est dimidia differentia CT, AV, dimidia scilicet AB, hoc est AR. Vicissim cylindro basi CT, circumjecta est tunica trunci CTAV, cuius Tunicæ proportio ad inscriptum Cylindrum CT est eadem, quæ rectanguli sub AB, BV (vel CT) cum Triente quadrati de AB, ad quadratum CT. Rectangulum verò sub AB, CT est æquale duobus rectangulis sub ET, TC: quia AB est dupla ipsius ET. Ablatis igitur his utrinq; æqualibus; illic quidem, quadratum CE maioris, superaddit quadrato CT, quadratum

AR,

AR, hoc est, quartam partem quadrati AB: Hic vero superadditur eiusdem quadrati AD Triens. Sed Triens quadrantem superat Vncia: unâ igitur unciâ de quadrato AB plus additur hîc, quàm illic. Tanto igitur maior est Tunica Trunci, limbo cylindri super basi CE. Quare communi utrinque cylindro super basi CT addito, trúcus CTAV, cylindro CEAS maior erit, parte dicta.



Exemplum. Truncus habeat diametros, CT 19, AV 22. Erit, ex prædictis, cylinder CTRS Trunco inscriptus, ut 361, quadratum de 19. Truncus verò CTAV addet ei Tunicam TRA, CSV, 60. ductâ scilicet differentiâ AB, 3, & in CT, 19, & in partem sui tertiam 1, hoc est in 20: fietque corpus Trunci CTAV 421. Medium verò arithmeticum inter 19 & 22 est 20 semis, & habet quadratum 420 cum quadrante, pro corpore cylindri CE. Nam differentiæ AB 3 dimidium TE, sesqui, multiplicatum in minorem TC 19 bis, creat 57: idem TE sesqui, in seipsum, creat duo cum quadrante. Summa limbi TE circa TC, 59 & quadrans: quem adde cylindro CT 361, prodit, ut dictum, 420 cum quadrante. Cylinder igitur CEAS, minor est Trunco CTAV, tribus quadrantibus unius, qui sunt pars duodecima de quadrato 9, totius differentiæ AB 3.

Corollarium & Analogia.

Auctâ differentia diametrorum Trunci, manente altitudine & cylindro æquealto super eadem diagonio, augetur etiam hic excessus trunci. Atqui potest augeri differentia AB, usque dum fiat æqualis medio arithmetico inter diametros, quando scilicet CT in punctum vanescit, VA verò fit duplum diametri CE, in basi cylindri dicti: tunc enim venitur ad terminum truncorum omnium, scilicet ad Conum, qui diagonion eandem habet cum latere, creante superficiem Coni.

Talis verò Conus, altitudine eâdem cum cylindro CE, basi verò, cuius diameter sit dupla, uti dictum, ad diametrum cylindri CE, est ad illum suum cylindrum in proportione sesquitertia. Cùm enim diametrorum sit proportio dupla, circulorum erit quadrupla, quare & Cylindrorum æquealtorum super ijs basibus, si cylinder staret super basi Coni. Per Th. II. & XVII. p. primæ. At coni corpus, per IV. illius, est subtriplum Cylindri huius quadranti, basi sc. & altitudine ijsdem.

Hic igitur terminus est, quem nullus Truncus assequitur. Nullus inquam truncus Cylindro æquealto, medium arithmeticum habenti in diametro basis, adjicit partem corporis tertiam.

THEOREMA XIV.

Cylinder æqualis Trunco & æquealtus, maiorem illo diagonion habet.

Nam per præmissam, Cylinder eandem habens cum illo, aut æqualem, minor est Trunco, si æquealtus; maior igitur aliquis, Trunco scilicet æquealto æqualis, maiorem etiam habet diagonion.

THEOREMA XV.

Omnes proportiones diametrorum Trunci, locum habentes in coniugatione proportionis certæ, locum etiam habent in coniugatione proportionis maioris.

Nam quia CT, TA in qualibet conjugatione minui possunt, ab æqualitate, usq; dum junctæ fiant æquales ipsi CA: AV verò vicissim augeri, usq; dum æquet AC, CV, vel AT, TC, CV: quibus ergò conjugationibus minor est proportio AT, ad TC, maior scilicet AT, respectu TC illis etiam plus variari potest diametrorum CT, AV proportio. Omnis igitur mutatio proportionis, quæ valet, ubi AT est parva, valet etiam, ubi AT est maior; sed ibi ubi AT est maior, plures valent.

Propter hunc igitur concursum Conjugationum variatum, in ijsdem proportionibus diametrorum, locum habet sequens comparatio.

THEOREMA XVI.

Omnis Cylinder, altior maximo, super eadem diagonio, habet ex Cylindris maximo humilioribus, socium sibi æqualem, quem subcontrarium dicemus.

Nam cum proportio basium permutata est proportionis altitudinum; Cylindri æquales existunt. Respiciatur igitur Schema XIX, in quo sit CGA Cylinder maximus, basi CG, altitudine GA. Sumatur altior illo CHA, dico inveniri humiliorem, ut CBA, cuius BA altitudo, sit ad HA altitudinem prioris, ut est basis vel quadratum CH, ad quadratum CB. Nam ubi maius datur & minus, ibi datur & æquale. Sed CH quadratum crescit à quantitate nulla, continuè cum lineis CQ, CI, CH, CG, CB, CP, usq; ad quadratum diametri CA, faciens proportiones omnis generis. Vicissim altitudo, initio sumpto à longitudine diametri AC, decrescit cum lineis AQ, AI, AH, AG, AB, AP, per omnes itidem proportiones, sic ut fiat proportio quacumq; data proportione maior, donec altitudo absumatur

matur

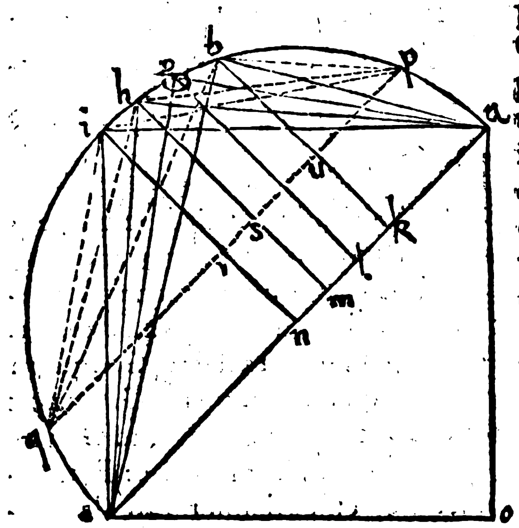
matur in punctum A. Ergò ubi decrementa altitudinum AB, præcipitantur per omnes proportiones, in infinitum crescentibus proportionum augmentis, ibi incrementa quadratorum CB, magis magis minuuntur, & incrementa proportionum decrescunt. Et cum detur Cylinder humilior, quàm CHA, idemq; maior eo, ut est CGA, eoq; minori proportione HA ad GA, quam quadrati CG ad CH: descendendo igitur versus B, transitus erit per aliquod punctum, ubi proportio BA ad HA, quæ prius erat minor, (quippe plus crescens) fiat equalis proportioni quadrati BC ad quadratum HC, quippe minus crescens, cùm prius esset maior. Exempla sunt in calculo ad Th. IV. & V. Cylindrorum æqualium.

Theorema XVII.

In vna qualibet coniugatione, quæ quadratum diametri habet minus, quam duplum quadrati altitudinis, omnes Trunci ab ipso Cylindro proximi, paulatim fiunt Cylindro coniugato maiores, non obstante quod minuitur eorum altitudo, postea decrescunt iterum, semper adhuc maiores Cylindro coniugato, quoad altitudinem habuerint maiorem, quam Cylinder coniugati subcontrarius.

In Schemate XIX. sit coniugatio, in qua quadratum diametri HC minus est duplo quadrati HA, & Cylinder huius coniugationis CHA; illi verò sit socius, hoc est æqualis corpore, ex alia coniugatione, Cylinder CBA, basi CB, altitudine BA. Dico primùm; omnes Truncos coniugationis CHA, quibus altitudo fuerit inter HA & BA, maiores esse Cylindris CHA vel CBA. Nam inter socios, CHA, CBA æquales, interest Cylinder maximus CGA, in quo quadratum CG est duplum quadrati GA. Omnes igitur Cylindri CGA, inter CHA & CBA, sunt maiores extremis ad H & B terminatis, per Th. V. huius: Et habent ij altitudines medias inter HA & BA, quemadmodum & Trunci. Per XIII. verò huius, Trunci æquealti Cylindris super eàdem diagonio CA, sunt iis maiores. Quare multò maiores sunt extremis minoribus ad H B. terminatis.

Schema XIX.



Theo-

THEOREMA XVIII.

In coniugatione proportionis dupla minoris, Truncus æqualis Cylindro coniugato, habet altitudinem, minorem altitudine Cylindri, qui coniugati socius, eidemq; æqualis est, coniugationis tamen diversæ.

Nam truncus æquealtus tali socio cylindro, qui conjugato sit æqualis; maior est illo, per XIII. Maior igitur est etiam conjugato suo cylindro. Qui igitur coniugato suo est æqualis corpore, non erit eiusdem cum illo altitudinis. Aut igitur altior aut humilior. Non verò altior, per XVII. præmissam: Ergo humilior. Ex eo verò Trunci, per X huius, fiunt minores cylindro conjugato, donec tandem evanescant.

Corollarium.

Posito quod dolia constent puro Trunco conico duplicato: dolia oblonga, ventribus modicis, capaciora sunt cylindricis eàdem figuræ longitudine, ventre carentibus: nunquam verò fit, ut habeant ventres adeò immanes & prodigos, per quos rursum fiant minus capacia dolijs cylindricis eàdem figuræ longitudine.

THEOREMA XIX.

In omnibus conjugationibus Truncorum & Cylindri, quibus diameter basis minoris, est minor semidupla lateris acclivis, datur bis aliqua proportio diametrorum Trunci, per quam Truncus fiat æqualis Cylindro ex omnibus conjugationibus maximo.

Sit GC, diameter basis Cylindri, ad GA altitudinem (in hoc quidem Theoremate) minor quàm semidupla. Dico in hac conjugatione duas occurrere proportiones diametrorum CT, AV, quibus possit fieri Truncus æqualis cylindro maximo, cuius diameter basis, est dupla ad altitudinem. Nam si GC minor est semiduplà ipsius GA, maior est itaq; GA, quàm subsemitripla ipsius CA: potest itaq; sumi aliqua minor ipsâ AG, quæ sit AT, & ad AT comparari TC, in ea proportione, in qua est AG ad G ; sic ut perpendiculum ex T, hoc est TR, sit subsemitripla ipsius CA: Et truncus ATCV, fiet æquealtus cylindro maximo cuius diameter ad altitudinem semidupla. Erit itaq; talis truncus adhûc maior hoc cylindro maximo, per Th. XIII. huius partis. Et quia, per XIV. huius, cylinder æquandus, si fuerit Trunco æquealtus, diagonium habet maiorem : diagonium igitur habens minorem, scilicet eandem cum Trunco æquali futuro, debet habere altitudinem Trunco maiorem, ut quod amisit, abbreviatione

diago-

diagonij, recuperet incremento altitudinis: Id est, Truncus illi futurus æqualis, debet fieri minor eo, qui est æquealtus cylindro maximo, super eadem diagonio constructo. Id autem fieri potest duobus modis. Etenim, cum Cylinder in vna qualibet conjugatione sit Truncorum omnium principium: Sit verò in conjugationibus hic propositis, cylinder minor cylindro maximo, erunt etiam Trunci, à cylindro suo conjugato proximi, eóq; altiores, cylindro maximo minores. Inde verò per augmentum AB differentiæ diametrorum CT, AV, crescunt, usq; dum fiant maiores cylindro maximo, ut jam est demonstratum. In hoc igitur incremento ipsius AB, quoad TR minor fuerit altitudine GA, cylindri sui conjugati, maior verò altitudine cylindri maximi; contingit semel, Truncum æqualem fieri cylindro maximo. At non crescunt in infinitum trunci eiusdem conjugationis, crescente AB, sed per X & XVIII. huius, iterum decrescunt: qua in variatione contingit secundò, Truncum fieri æqualem cylindro maximo. Et quia, qui æquealtus erat maximo (cuius TR sub-semittipla ipsius AC) maior erat illo maximo; minoris igitur factus altitudinis, quàm cylinder maximus, fiet illi aliquando iterum æqualis. Adhuc igitur est minuenda TA amplius. Minutâ vero TA, & cum ea TC proportionaliter, minuitur quadratum TA: Manet vero quadratum CA: augetur igitur rectangulum TC, AV residuum: sed eius latitudo TC minuitur, ut dictum: vicissim igitur, & duobus quidem nominibus, augetur longitudo rectanguli AV: qua ratione constituitur proportio certa TC ad AV, qua usus Truncus, fit æqualis cylindro maximo secundò. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XX.

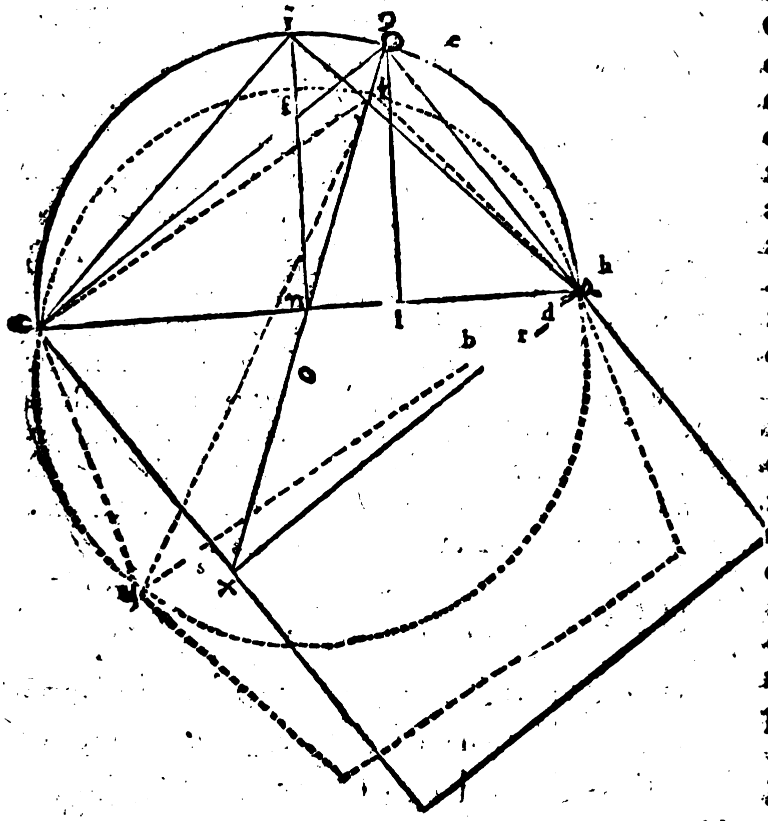
Trunci variarum coniugationum, eandem habentes inter se diametrorum proportionem, quo propius assecuti fuerint altitudine Cylindrum super eadem diagonio maximum, hoc erunt maiores: quo altiores illo, hoc minores.

Inopinabile & hoc est. Quis non dixerit maiorem esse Truncum, cuius altitudo sit IA, trunco alio, cuius altitudo GA: si eadem utriq; diagonios GA, eademq; proportio basium minorum ad maiores? Atqui diversum est verum. Sit enim Cylinder maximus, cuius CG diameter basis, ad GA altitudinem, per Th. V, semidupla: & sit truncus, cuius diameter minor in GG lineà, maior in AX (continuatâ) sitq; earum proportio quæcunq;, mediumq; inter illas arithmeticum GC, per Th. XII. Cùm igitur basium binarum inter se per diversos Truncos eadem ponatur esse proportio: erit etiam differentiæ earum ad medium arithmeticum proportio per omnes eadem. Ac cum omnis talis Truncus superet cylindrum æquealtum in proportione Vnciæ de quadrato differentiæ diametrorum trunci, ad quadratum medij eorum arithmetici, per Th. XIII. huius; maior igitur erit hic excessus trunci, ubi maior cylinder. Sed cylinder CGA est omnium,

super

super eâdem diagonio maximus: ergo excessus Trunci huius seu Vncia dicta, erit omnium reliquarum per reliquos truncos, eandem diametrorum proportionem habentes, maxima. Ac proinde, quamvis maior sit altitudo trunci quam GA: quia tamen minor cylinder huius altitudinis; minor etiam erit truncus.

Verbi causa, sumatur proportio diametrorum trunci omnium maxima, hoc est, infinita, sumatur inquam Conus pro Trunco, finis omnium truncorum. Sit Coni altitudo IA, cuius quadratum est semissis quadrati AC Sitq; basis cylindri CIA æquealti, linea CI æqualis altitudini AI. Et quia CI est mediũ arithmeticum inter diametrum trunci, earum verò altera est o, erit igitur reliqua, sc. diameter basis Coni, dupla ipsius CI. Hic igitur pro corpore huius coni ducenda est pars tertia de AI in quadratũ duplæ CI, quod est quadruplum quadrati CI: duplum ergo quadrati CA.



At Conus alius (rursum pro trunco eiusdem proportionis diametrorum) altitudinem habens GA, cuius quadratum est triens de quadrato CA, similiter duplam ipsius GC, habebit diametrum basis, quadratum ergò quadruplum; Est autem quadratum GC bes quadrati AC; quatuor ergo besses, sunt octo tertiæ, quæ duplum seu sex tertias prioris coni superant duabus tertijs, cum ècontra illius quadratum altitudinis, semissem habens quadrati CA, huius altitudinis quadratum, quod est triens quadrati CA, superet tantum unâ sexta quadrati CA. Nec hoc tamen detrimentum omne est censendum: quia non quadrata, sed altitudines ipsæ ducuntur in bases; imò nec altitudines ipsæ, sed trientes tantùm. Maius igitur lucrum est Coni in basi CG longiori, quam damnum in GA altitudine breviori.

THEOREMA XXI.

Ex omnibus truncis conjugationis eiusdem, maximus est ille, qui habet altitudinem Cylindri maximi, subse-

ſubſemitriplam ſcilicet Diagonii: Ab hoc vero faſtigio cæteri omnes, tam qui altiores, quam qui humiliores, iterum decreſcunt.

Demonſtrationem legitimam aut refutationem, ſi opus eſt, expediant, Snellius, aut Adrianus Romanus, Apollonii Belgæ. Parergon quidem eſt hic, & Epiſagma, quod ſcopum attinet libelli; cognationis tamen cauſa cum præcedenti hîc adſcriptum: cuius ſimilitudo cum hoc, primam mihi fidem fecit: etſi trunci præcedentis Th, non ſic coniugati ſunt, ut nos hactenus hanc vocem uſurpavimus; ſuper eadem tamē & ipſi diagonio ſunt deſcripti, & habent eandem inter ſe proportionem baſium: quemadmodum cæteri coniugati habent eandem inter ſe proportionem diametri baſis minoris ad latus acclive.

Altera dixis eſt ex proprietate coniugationis cylindri maximi, & quod in præcedentibus demonſtravi, eſſe aliquam altitudinem trunci coniugati, maiorem altitudine cylindri maximi, aliquam illâ minorem: quarum utrarumq; trunci ſint æquales cylindro maximo: illum ipſum verò, qui eſt æquealtus maximo, truncus cylindro, corpus habere maius: & utrinq; tam verſus cylindrum coniugatum, quam verſus truncos humilimos, decreſcere truncos. Cauſa igitur nulla apparet, cur alibi in vicinia conſiſtat meta corporis incrementorum, quam in hac ipſa.

Adde indicium calculi. Sit coniugatio, in qua diameter CI, æquet altitudinem IA, & ſit huius coniugationis truncus, æquealtus cylindro CGA hic maximo, ſc. cuius diameter CG, ſemidupla ad GA altitudinem. Ergo minor trunci diameter erit in CG, eſt autem æqualis lateri acclivi, quippe ponitur ad id eſſe, ut CI, ad IA. Eſt igitur CF diameter minor, ſecans IN, perpendicularem ex centro N, in puncto F, & FA latus acclive. Vt igitur GL ad CG ſic CN ad CF. Sed CL eſt bes de CA, & quadratum CL quatuor nonæ de quadrato CA; & quadratum GN eſt quarta pars de quadrato CA, deniq; quadratum CG eſt bes de quadrato CA. Vt autem CL, quatuor nonæ, ad beſſem CG, ſic pars quarta CN ad CF tres octavas. Ergo quadratum CF erunt tres octavæ quadrati CA: tantum verò eſt etiam quadratum ~~altitudinis~~ FA. Ablatæ igitur tres octavæ de quadrato CA, relinquunt quinq; octavas, rectangulo ſub CF diametro minore & oppoſita diametro maiore, quæ cum AX coincidit, excurrens ultra X. Cùm ergo quadratum CF, & rectangulum diametrorum CF & maioris, habeant latitudinem eandem CF; longitudines earum erunt ut plana ipſa, ſcilicet ut tria ad quinq;. Hæc eſt igitur proportio diametrorum trunci qui ex hac coniugatione eſt æquealtus cylindro maximo. Quare, per XIII huius, ut quadratum 16, medii eorum arithmetici 4, ſc. ipſius CG, ad Vnciam quadrati 4, differentiæ diametrorum 2, (vncia verò de 4 eſt triens) ſic corpus cylindri CGA maximi ad exceſſum CFA trunci æquealti: truncus ergò excedit cylindrum maximum triente unius ſedecimæ, ſeu parte quadrageſima octavâ corporis cylindri GA. Quæratur igitur proportio cylindri maximi CGA ad cylindrum coniugatum CIA. Eſt quadratum baſis CI, ſemiſſis quadrati CA; ſed quadratum G, eſt bes quadrati CA: quare proportio baſium CI ad CG ut 3 ad 4. Viciſſim quadratum altitudinis IA eſt ſemiſſis,

 qua-

quadratum altitudinis GA est triens quadrati CA: proportio igitur quadratorum, IA ad GA est ea quæ 3. ad 2. vel quæ 9 ad 6: ipsarum igitur linearum IA ad GA ꝓportio est dimidia, sc. quę 30000 ad 24495- vel huius ad 20000. Componitur autem proportio corporum ex proportione basis & proportione altitudinum. Ductis igitur in se mutuò terminis analogis, proportio cylindri CIA ad cylindrum CGA, ꝓvenit eadem, quę 9000 ad 9798-. Supra Theor. III, Columnarum ex his conjugationibus, proportio erat quæ 2828- ad 3080-. Quòd si hunc numerum cylindri CGA, commuto in 16, seu in 48 trientes, numerum priorem, erit in hac proportione numerus cylindri CIA 44. Est ergo cylinder CIA, ad truncum CFA conjugatum, ut 44 ad 49, & truncus maior parte paulò plus nonâ. Id verò consonum est huic Theoremati & Corollario III. Th. IX. huius partis; ibi enim cum esset proportio diametrorum, quæ 2 ad 3, hoc est quæ 20. ad 30, truncus excedebat parte paulò plus undecimà, crescens: crevit igitur usq; dum esset proportio quæ 3. ad 5, id est, quæ 18 ad 30, tunc maximè truncus excessit parte plus nonâ, ut hic probatum. Vlterius, quando fuit proportio, quæ 1. ad 2. hoc est quæ 15 ad 30, truncus iterum decrevit, ut excederet parte tantum nonà. Quod igitur in vna conjugatione fit, ut truncus æquealtus cylindro maximo, plurimum excrescat super cylindrum conjugatum, id in omnibus fieri consentaneum est.

THEOREMA XXII.

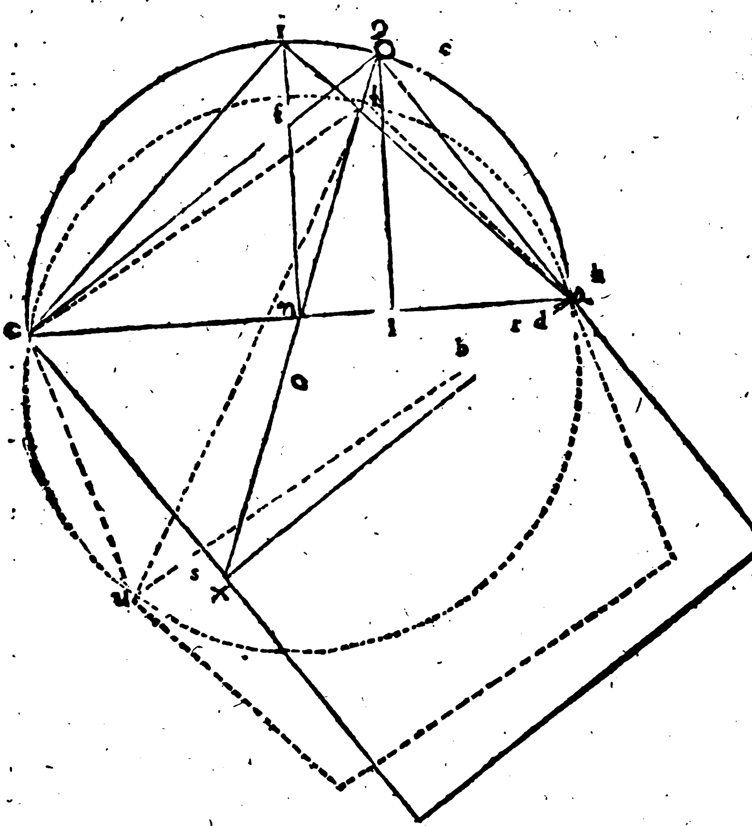
In conjugationibus, quæ quadratum diametri habent duplum quadrati altitudinis aut maius, trunci omnes sunt minores cylindro maximo, conjugato scilicet suo: & hoc tanto plus, quanto recesserimus à proportione dupla.

In Schemate XIX. sit CGA, conjugatio proportionis duplæ quadrati CG ad q. GA, & sit GA ꝓportionis minoris, & subcontrarij cylindri ad H & B: sunt igitur omnes cylindri inter H & B, & proindeetiam trunci illis æquealti, maiores cylindro ad H vel B terminato, & paulo infra B usq; in A, omnes trunci minores cylindris H & B, per XV, & XVI præmissas.

Quo propius verò fuerit H ipsi G, hoc etiam propius erit B ipsi G, & hoc minor arcus HB, in quo trunci maiores: tandem ergò cylinder CGA est idem, ipse & suus subcontrarius, vicem & H & B sustinens. Quemadmodum igitur omnes cylindri post B, minores sunt ipso I, & trunci omnes paulò infra B, sic etiã hic omnes cylindri post G, & cum ijs trunci æquealti, erunt minores ipso CGA conjugato. Quod enim illic trunci non in B sed paulo infra B incipiunt evadere minores; causa est, quia in ipso B datur cylindro truncus æquealtus, conjugationis CIA. At hic in ipso G, non datur truncus cylindro æquealtus ex conjugatione CGA; primi igitur à Cylindro CGA trunci, statim sunt humiliores lineà GA, plus amittentes per altitudinem, quam acquirant per adjectionem trientis.

Eadem analogia apparet etiam sic. Nam trunci conjugationis hujus, omnes ab ipso Cylindro, sunt illo humiliores, quippe conjugationis suæ capite. Qui cum sit ipse Cylindrorum maximus, omnes igitur ei conjugati Trunci sunt eo ordine minores, per Th: XXI. quo ordine absunt ab altitudine illius: maximus igitur inter illos Cylinder ipse: quippe seipsum solus inter illos, æquans altitudine. Hæc

Hæc est demonstratio inconvincibilis per analogiam, sed quia Geometræ minus assuefecerunt se ad analogias, age operosiorem & plane Geometricã tentemus demonstrationem, revocato Schemate XXI: In quo sit truncus CTAV, cõjugatiõisCGA: & continuetur CT, donec secet circulum in E; connectanturque puncta EA, cylinder ergo CEA minor est cylindroCGA, per Th. V. Ei verò æquealtus est Truncus CTAV, ex constructione, quia EA, TR, æquales. Maior est igitur truncus cylindro CEA, triente quadrati de AR, per



XIII. præmissam. Probandum est, proportionem GA ad AE maiorem esset, quam proportionem quadrati CE cum triente quadrati AR vel ET, ad quadratum CG; sic ut cylinder CEA plus amiserit per humilitatem EA, quam lucratus est per trientem quadrati ET. Primùm itaq; quadratum TR vel AE minus est quadrato TA, ipso quadrato toto AR.

Sed & quadratum CE minus est quadrato CE cum triente quadrati AR, ipso hoc triente quadrati AR. Differentiam igitur illic inter terminos, facit aliqua quantitas, quæ est tripla quantitatis, quæ hic terminos differre facit. Et sunt præterea hi termini maiores duplis illorum terminorum. Nam cùm quadratum CG sit duplum quadrati AG, hic quadratum CE, maius est quadrato CG, & quadratum AE, minus quadrato GA. Cùm autem inter aliquos terminos ut 25. 26. differentiam facit aliqua quantitas, ut 1, eius verò quantitatis triplum, ut 3, differentiam facit inter terminos, minores dimidijs, vel saltem posteriorem posterioris dimidium, ut inter 10. 13. proportio minorum terminorum, est maior sextuplã proportionis maiorum; ut 10 ad 13, vel 20 ad 26, proportionem habet maiorem, quàm sextuplam proportionis 25 ad 26: & multo esset maior, si etiam posterior terminus 13 minor fuisset dimidio posterioris 26. Manente enim æquali differentia, quo minores fiunt termini, hoc magis augetur proportio. Est ergo proportio quadrati TA ad quadratum TR vel EA, maior sextuplã proportionis quadratorum CE & trientis de AR, ad CE. Ipsarum igitur linearum TA ad TR vel EA, proportio est maior tripla quadratorum CE & trientis de AR ad quadratum CE.

Eodem modo demonstrabimus etiam, quadratum de CE ad quadratum CG minorem habere proportionem, quam rectas GA ad AT. Nam quadratum CG est æquale rectangulo BVD, divisa BA in D, ut sit AD dimidium ipsius DB, sicut quadratum AG dimidium est ipsius GC, per Th. VII. huius. Sed CE est medium arithmeticum inter VB & VA, per Th. XII. huius. Ergo quadratum CE æquat rectangulum BVA totum, & insuper quadratum AR, dimidiæ ipsius AB: si ergo ad BV vel CT adijciatur parallelogrammum, æquale quadrato AR, accedet ad VA, latitudo parallelogrammi, quæ sit AH. Quadratum igitur CE æquale erit rectangulo BVH. Sed & quadratum CG erat æquale rectangulo BVD. Ergo ut HV ad VD, sic quadratum EC, ad quadratum CG. Dico HV ad VD proportionem esse minorem, quam DV ad VB. Est enim BD dupla ipsius DA, & BA dupla ipsius AR: ergo etiam AD dupla ipsius DR; quod si AH æqualis esset ipsi AD, eoq; æqualis HD ipsi DB: tamen minor esset HV ad VD, quam DV ad VB: Iam verò AH est minor quàm AD, adeoq; etiam minor quàm DR. Nam quadratum CT vel VB semper maius est duplo ipsius BA, per Th. X. huius. Nam si esset duplum, altitudo trunci esset nulla, corpus nullum: semper igitur quadratum VB est maius octuplo ipsius quadrati AR. Cùm igitur sint continuè proportionales, VB, AR, AH. erit etiam ipsa recta VB semper maior octuplo ipsius AH, ac proinde AR medium proportionale inter AH 1, & BV 8 +. Qualium igitur est AR radix de 8 + talium AH est 1. Sed radix de 8 est inter 2 & 3. in altitudine trunci nulla, corpore nullo, & cito fit, vel in minima altitudine trunci, ut ex 8 fiat 9, quando radix eius est 3, & in altitudinibus maioribus semper maior. Ergo AH ubi maxima, inter dimidiam & tertiam partem ipsius AR consistit, fitq; per augmentum altitudinis truncorum conjugatorum, quacunq; parte ipsius AR minor, sic ut tandem cum ipsa AB evanescente (trunco in merum cylindrum transeunte) fiat infinitæ parvitatis portio de AR. Atqui si absq; AH esset, proportio AV ad VD esset minor dimidia ipsius DV ad VB, quia AD est dimidium ipsius DB: & cùm proportio DV ad VB sit dupla ipsarum GC ad CT, vel GA ad AT: ergo si absq; AH esset, proportio AV ad VD, & sic etiam quadratum EC ad quadratum CG, semper esset in minori proportione, quam rectæ GA ad AT.

Cùm autem inter AR & AH, per diversos truncos, sint omnis generis proportiones: fit alicubi, sc. in truncis proximè æquealtis cylindro, ut AH non tantum adijciat, ut proportio HV ad VA æquet proportionem GA ad AT. & tunc res est certa, duo enim elementa sunt proportionis GA ad AE, alterum AT ad EA vel TR, alterum GA ad AT, duobus elementis proportionis, quadrati GE cum triente quadrati AR, ad quadratum GC, singula singulis maiora.

In truncis igitur proximis à cylindro conjugato decrevit altitudo maiori proportione, quam qua crevit basis cylindri, æquantis truncum: atq; hoc solum demonstrandum fuit, dato enim initio truncorum cylindro minorũ, deinceps trunci continuè minuuntur, donec evanescant. Sequentes

tes tamen casus pertinent ad demonstrationis maiorem evidentiam.

Vel æquatur proportio HV ad VD proportioni GA ad AT, in truncis humilioribus; & sic proportionum dictarum elementa posteriora, sunt æqualia, sed priora adhûc inæqualia, & plus triplo maior excessus rectæ AT super TR, in comparatione cum TR, quam triens quadrati AR, in comparatione cum quadrato GE, & id sine compensatione; tota igitur altitudinum proportio, adhûc maior est proportione altitudinis basium.

Vel deniq; superat proportio HV ad VB, proportionem GA ad AT, sed in truncis adhuc humilioribus, quando CE longa efficitur, TR brevis: ubi quadratum AR magis magisq; æquatur quadrato TR, idq; tandem superat, magnam efficiens proportionem inter TR & TA; quæ quidem statim initio, & semper, est maior triplo proportionis inter quadratũ CE cum triente quadrati AR, & inter solitarium quadratum CE: cum econtra triens quadrati RA, non in eodem proportionis incremento, augeat quadratum CE, quippe hoc ipsum per se crescens. Et cùm citò fiat, ut elementum proportionis altitudinum, quod est proportio AT ad TR, fiat maius tertia parte proportionis GA ad AT: ex eo deinceps semper fit, ut excessus elementi huius in proportione altitudinum, non tantum compenset, sed etiam superet magis magisq; excessum elementi illius, in proportione basium: Hic enim totus as crescens quadrati AR, auget proportionem terminorum minorum & decrescentium; illic triens saltem, æqualiter crescens, auget proportionem terminorum maiorum & crescentium. Plus igitur hic potest proportionis augmenti pars tertia, quam illic totum proportionis augmentum.

Hæc igitur de illa conjugatione fuerunt demonstranda, in qua quadratum CG, duplum est quadrati GA. Quod si quadratũ CG fuerit maius duplo illius; multo ista omnia magis obtinent. Nam quod analogiam attinet, Truncorum talium cylindri æquealti, (in Sch. XIX. CBA.) sunt æqualium sed altiorum cylindrorũ CHA subcontrarij, de quibus Th. XVIII. demonstratum, quod trunci ab illis incipiant fieri minores, etiam ij, qui cylindros altos CHA conjugatos habent: quanto magis illi, qui sunt cum his illorum subcontrarijs CBA, conjugationis eiusdem, & qui hic demum oriuntur, primo ortu facti humiliores conjugato cylindro CBA.

Iam verò quod reliquam domonstrationem concernit: cùm in Schemate XXI, cylindri ipsi, conjugationum capita, ponantur humiliores esse cylindro GA: crescit igitur in ijs CG, sed incrementis decrescentibus, minuitur GA sed decrementis crescentibus. Diminutà verò GA & secundum eam & TA, etiam AB differentia diametrorum, licet crescentium, crescit, sed incrementis decrescentibus, per Th. X. huius Fit igitur diminutio corporis cylindri conjugati, per curtationem ipsius TR, magna, quippe & secundum basin CG magnam, & secundum differentiam ipsium TR & AG multo maiorem: appositio verò ad corpus cylindri conjugati, secundum Trientem quadrati AR, & augmentum quadrati CE per BA, fit parva & minoris æstimationis. Retexat, qui vult, omnia demonstrationis præmissæ elementa adhunc modum; inveniet non minus lucis, quam supra Th. IX. hujus, ex calculo emicuit, super huius partis veritate.

 Corol.

Corollarium.

Posito, quod dolia Vinaria constent truncis conicis puris, in iis quidem, quæ curta sunt, venter omnis diminuit æstimationem capacitatis; in Austriacis verò perinde ferè est, sive ventrem habeant, sive cylindricam figuram propius imitentur: quia nunquam usu venit, ut venter in tantam excrescat amplitudinem, ut habeat profunditatem duplam diametri orbis lignei: quo casu sanè, per Corollaria ad Th. IX, amitteret plusquàm quartam partem. Sed nec unquàm profunditas fit sesquialtera diametri orbis lignei, quo casu venter amitteret partem circiter tricesimam. At si sesquitertia, quod valde insolens, jam attenuatum est damnum ventris ad partem septuagesimam.

Atq; hæc est altera illa, & nobilissima quidem proprietas dolij Austriaci. Sicut enim Th. V. nihil magnum potuit ei nocere variata nonnihil figura per errorem artificis, propterea, quod Lege & More ducibus, ad figuram omnium capacissimam aspiravit artifex, incidens in figuras capacissimæ proximas, in quibus, ut proximis, defectus, ex legibus circuli, non est observabilis inter initia: sic nunc etiam nihil ferè in hoc dolio variat venter amplus an strictus, res cumprimis grata opifici: quia non ita facile est, ut proportionem tabularum ad orbes, sic ventris amplitudinem pro lubitu exprimere: nec ad amussim prævidet, quantus dolij venter sit evasurus, redigereturq; in angustum, si lex amplitudinem certam ventrium præscriberet. Quòd igitur lege tali tam molestâ non est opus, id commoditati proportionis Tabularum ad Orbes, quam observat Austria, acceptum est ferendum.

THEOR. XXIII. Problema Geometris propositum.

Data proportione diametrorum Trunci, coniugationem invenire, in qua talis truncus æquet Cylindrum conjugationis maximæ.

Primùm in ipsa conjugatione Cylindri maximi, jam truncus omnis, & sic etiam truncus datam habens proportionem diametrorum, est minor cylindro maximo, per Th. XXI. huius. Ergo coniugatio quæsita, est supra G, conjugationem cylindri maximi, versus conjugationẽ trunci, maximo æquealti, datam diametrorum proportionem habentis. Vt si truncus æquealtus cylindro maximo CGA, fuerit CFA, & conjugatus ei cylinder CIA, Fuerit verò etiam in conjugatione CGA, truncus CTA, & fuerit, ut CF ad diametrum oppositam parallelam per AX, sic etiam CT ad AV, corpus trunci CTA, conjugationis G, minus erit cylindro maximo CGA. Conjugatio ergo quæsita cadet supra conjugationem G, versus I. Quare quæsitus truncus habebit altitudinem maiorem quàm GA. Et cylindri æquealti

alti

alt' diameter basis, quæ medium est arithmeticum inter diametros trunci quæsiti, longitudinem habebit minorem quam CG. Dico conjugationem quæsitam esse etiam ultra I, & altitudinem trunci quæsiti maiorem quàm AI, quod mirum videatur. Nam quia datur proportio diametrorum trunci, semper etiam datur earum proportio ad medium suum arithmeticum. Vt igitur CF ad CG, sic erit etiam quæsiti trunci diameter minor, ad sui æquealti cylindri diametrum. Atqui minor hæc est, quàm CG, & remotior ab A minor igitur etiam illa, quàm CF, & remotior ab A: minor ergo proportio ... ad FA, vel CI ad IA, quam diametri trunci quæsiti ad latus suum acclivi... hoc est, diametri cylindri conjugati ad suam altitudinem. Maior ergo ... e coniugationis altitudo, quàm AI, minor diameter, quàm IC. Hactenus demonstratio: reliquum huius Problematis Adriano Romano, & ... alius est, cui Geber placet, expediendum transmitto.

Cùm enim truncus omnis sit maior cylindro suo æquealto, in proportione Vnciæ de quadrato differentiæ diametrorum, ad quadratum dia... i cylindri æquealti: Quare quadratum CA sic jubemur dividere, ut vna, aucta portione per differentiam diametrorum datã, & ducta in ...is partis alterius, æquet quadratum CG, ductum in rectam GA. ...sultus hac de re Geber, respondit ex Cossa sua, inveniendam altitu... em tantam, ut, tribus post illam continuè proportionalibus existenti... ...ir proportione, ut est ipsa ad CA, primæ aliqua certa multitudo, æquet ...m numerum absolutum, cum aliqua certa multitudine tertiarum: ...smodi verò æquationes in Geometria adhuc quærunt cossistæ, nec, ...ac iudice, invenient unquam.

THEOR. XXIV. Problema Geometris propositum.

Data coniugatione, in qua quadratum diametri in basi Cylindri, minus est duplo quadrati altitudinis, invenire proportiones duas diametrorum, quæ Truncos coniugationis eiusdem efficiat æquales Cylindro maximo.

Data sit coniugatio CIA, in qua quadratum CI, minus sit duplo quadrati IA, oportet invenire truncorum coniugatorum diametros, æquantium cylindrum CGA maximum. Erit igitur altitudo trunci unius, maior quàm GA altitudo cylindri maximi, alterius minor, per XXI, huius. Per consequens igitur, illius proportio diametrorum erit minor proportione diametrorum æquealti cylindro CAG maximo, huius maior: uterq; suum habebit cylindrum æquealtum: qui non erunt subcontrarii ipsi: sed subcontrariis proximi: quia si essent subcontrarii, essent æquales, per XVI huius. At cùm illorum trunci sint proportionis inæqualis diametrorum, quippe in eadem coniugatione diversas habentes altitudines; inæquales igitur adjicerent vncias quadratorum, differentiis suis, per XIII huius: itaq; trunci ipsi fierent inæquales. At requirimus æquales, utrumq; quippe uni CGA æqualem.

Hacte-

Hactenus demonstratio: reliquum Cossistæ conficiant. Data enim esto CF, quæ quæritur: datur igitur & FA ex conjugatione, & quadratum eius: quare & rectangulum diametrorum, & hoc diviso per datam CF diametrum minorem, etiam diameter maior: quare nota erit & differentia maioris & minoris, & eius quadrati vncia, & quadrans; quo subtracto à quadrato AF, restabit quadratum altitudinis; quod cum quadrato GA comparatum, ostendet corporum proportionis partem unam. Sic data utràq; diametro, datur cylindri, qui habet trunci CFA altitudinem, diameter basis, eius sc: quadratum, per XII huius: cui adjecta Vncia prius inventa, facit compositum, quod cum quadrato CG comparatum, ostendet corporum proportionis partem alteram: Oportet verò partes istas proportionis corporum, esse subcontrariè æquales, ut in unum conflatæ constituant proportionem æqualitatis.

Tollite Cossistæ, quam fixi, crucem ingenij, & me sequimini: invenietis, nisi me aversa respexit Minerva, continuè proportionalium primas secundas & quintas, æquari numero absoluto cum proportionalium tertijs & quartis, certo quibusq; numero sumptis. Nec igitur Geometrica est æquatio, sed stochastica Nic. Raimari Vrsi, aut mechanica Iusti Byrgij: nec problema, qualia Pappus ex more antiquorum, Plana appellavit, id est, absolutè Geometrica & scientifica; sed solidum, & cum conditione Geometricum, datis sc. duabus medijs, continuè proportionalibus, quod explicatum scientificum habet nullum. Et præterea non una est resolutio huius æquationis: demonstratum enim est, Truncos huiusmodi esse duos.

THEOREMA XXV.

Si diversarum conjugationum Trunci habuerint eandem inter se proportionem diametrorum, constituti super eadem diagonio: proportio corporum erit composita ex tribus elementis, ex proportione Cylindrorum coniugationis, & ex proportionibus Cylindri cuiusq; ad suum Truncum conjugatum, prioris quidem Cylindri eversa, posterioris vero directa.

Sit truncus CFA, conjugationis CIA, truncus verò CTA, conjugationis CGA, super eadem diagonio CA; & habeat se CF ad diametrum maiorem per AX prolongatam, sicut se habet CT ad AV: dico corporis CFA proportionem ad corpus CTA trunci, compositam esse ex proportionibus tribus, 1. CIA ad CGA, 2. CFA ad CIA, 3. CGA ad CTA. Simplex est subsumptio ad axioma tritissimum, quod quatuor quantitatibus ordine collocatis, proportio primæ ad quartam, sit composita ex proportionibus interjectis: tantum in collocatione cautio est adhibenda: quia enim de proportione satagimus truncorum inter se, oportet truncorum alterum collocare loco quarto, alterum loco primo, cylindros in medio, cuiq; suum coniugatum proximum. Nam per Coroll. ad Th. III. columnarum, & sic

sic etiam cylindrorum datur proportio, sc. CIA ad CGA. Sed per Th. IX. datur proportio eversa CIA ad CFA, scilicet CFA ad CIA, & proportio directa CGA ad CTA: datæ verò proportionis corporibus deinceps collocatis, resultat dicta series,

Corollarium & Praxis.

Ritè collocatis terminis, quibus exprimuntur proportiones tres, multiplica tres antecedentes, duos inter se & factum in tertium; sic etiam age cum tribus consequentibus, & comprehendent, qui prodeunt, proportionem quæsitam.

Sic CIA conjugatio æqualitatis, CGA conjugatio proportionis semiduplæ linearum, duplæ quadratorum. Est igitur in Corollario Th. III. proportio CIA ad CGA ut 2828 ad 3080. vel 101 ad 110. In Corollario verò I ad Th. IX. cum est proportio diametrorum, quæ 1 ad 2: Truncus est ad cylindrorum priorem CIA ut 60 ad 54, hoc est ut 10. ad 9. In Corollario altero, cum est eadem proportio diametrorum quæ 1. ad 2, cylinder posterior CFA est ad Truncum ut 15 ad 11 +, Ergò

Truncus, Cylindri. Trunc⁹. Termini Antec. 10. 101. 15. factus 15150 Truncus CFA
10.— 9. | 15 — 11.+ conseq. 9. 110. 11 + fact⁹ 10890 + Tr. CTA;
101 — 110 In minimis, ut 505 ad 363 + sic Truncus CFA ad Tr. CTA.

Corollarium II.

In conjugationibus Æqualitatis & duplæ quadratorum vel semiduplæ linearum proportionis, ratio corporum per diversas diametrorum proportiones est ista.

In Proportione diametrorum		Truncus æqualitatis
1.	2	superat plus triente
2.	3	superat nonadecimâ
3.	4	æqualis est Trunco alteri
4.	5	deficit parte 42da.
5.	6	deficit parte 26 ta.
6.	7	deficit parte 23 tia
7.	8	deficit parte 20 ma
8.	9	deficit parte 18 va
9.	10.	deficit parte 17 ma

Exinde continuè plus deficit, usq; dum cylinder, conorum omnium principium, deficiat parte vndecima.

In proportionibus verò diametrorum maioribus: prævertitur truncus coniugationis duplæ, evanescendo.

Corollarium III.

Posito, dolia esse ex puris truncis Conicis duplicatis, si eandem habuerint proportionem diametrorum, capacius plerumq; est, quod Austriacam figuram, proportionis sc. semiduplæ diametri orbis lignei ad dimidiam tabularum longitudinem; quàm Rhenense, quod æqualem habet diametrum dimidiæ tabularum longitudini. Rarissimè verò & forte nunquam lii, ut æquentur capacitate; quia vix vnquam profunditates ventrium ad diametrum orbis lignei, attingunt proportionem sesquitertiam.

Hactenus de figura Dolij Austriaci, sequitur,

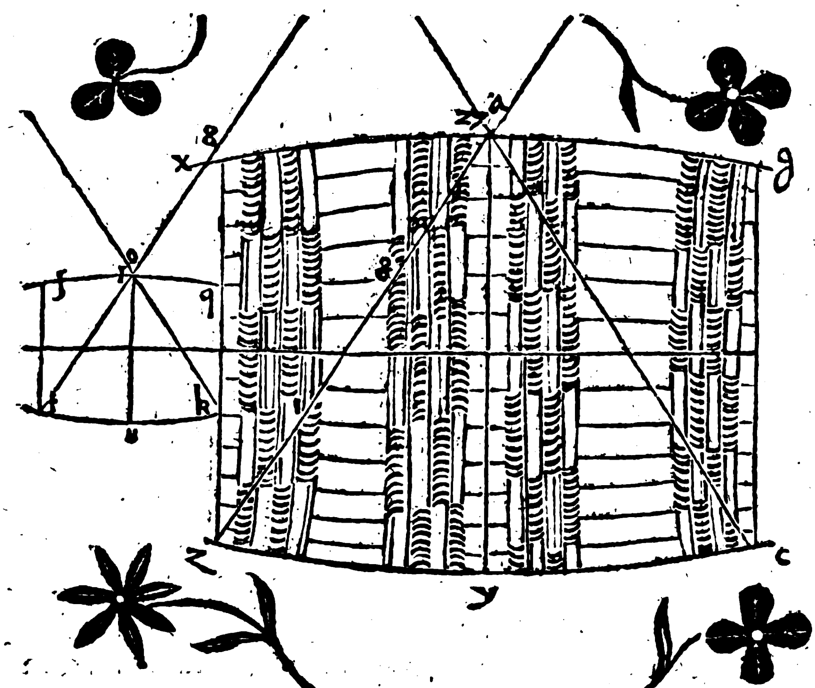
De virga cubicâ eiusq; certitudine.

THEOREMA XXVI.

In dolijs, quæ sunt inter se figuræ similis: proportio capacitatum est tripla ad proportionem illarum longitudinum, quæ sunt ab orificio summo, ad imum calcem alterutrius Orbis lignei.

Sint dolia diversæ magnitudinis, specie eadem SQKT, XGCZ, quorum orificia OA, diametri orbium ligneorum QK, ST & GC, XZ, eorumq; ima T, K & Z, C. longitudines OK, OT æquales, sic & AC, AZ. Dico, capacitates doliorũ, esse in tripla proportione longitudinis OK, AC. Agantur enim per O, A, plana OV, AY, parallela orbibus ligneis, & sint duo trunci Conici, SV & VQ, sic XY, & YG inter se similes. Quæ igitur de proportione dimidiorum doliorum sunt vera, illa etiam de duplicatis erunt vera. Sint igitur propositæ figuræ OVKQ, AYCG, conici trunci, sintq; latera figurarum OQ, VK, & AG, YC. Diametri Basium minorum QK, GC, diametri basium maiorum OV, AY; & OQKV, AGCY sectiones quadrilateræ figurarum per suos axes, similes inter se, earumq; diagonij OK, AC.

Schema XXII.



Ergò cum figuræ similes, sint ad seinvicem in tripla proportione analogorum laterum, erit proportionis AG lateris ad OQ latus, aut GC diametri, ad QK diametrum tripla, proportio GY corporis ad QV corpus. At in figuris planis trilateris AGC & OQK similibus, ut GC ad analogum QK, vel ut AG ad analogum OQ, sic etiam diagonios AC ad analogon diago-

diagonion OX. Quare etiam proportionis AC longitudinis ad OK longitudinem tripla est, proportio GY corporis ad QV corpus: & sic etiam totius GZ dolij ad totum QT dolium.

Corollarium I, & structura virgæ.

Manifestum hinc est, si virga mensoria dividatur in partes æquales tantas; ut prima & infima illarum sit longitudo OK dolioli, quod capit Amphoram unam: ad singulas verò partium æqualium adjciantur numeri, qui sunt inter se in triplicata proportione numerorum divisionis æquabilis, nimirum ad finem primæ partis Vnitas, ad finem partium 2, numerus 8, ad 3. Numerus 27. ad 4. Numerus 64, ad 5 Numerus 125. & sic consequenter, & numeri reliqui, qui cadunt inter hos cubicos, ordinentur in spacia intermedia; sic ut pars secunda subdividatur in particulas 7 alias, non æquales, sed proportionales, quibus apponi possint numeri 2. 3. 4. 5. 6. 7. medij inter 1. & 8. & sic de cæteris: quod Virga in dolium rite immissâ, numeri ad quos usq; pertingit interior tabulæ superficies OA, principio virgæ in K, C vel T, Z stante, sint indices Amphorarum, quas capit dolium, proportionis nimirum eius, quam habet dolium, verbi causa, GZ, ad dolium QT Amphoræ unius.

Corollarium II.

Eodem recidit res, quod quidam in triangulo AGC, pro latere AC metiuntur laterum AG, GC summam, pro virga circumgestantes limbum ex pergamena convolutum, amphorarum numeros eadem lege inscriptum, cuius evoluti principium apud calcem C affigunt, longitudinem à C in G & porrò ad A extendunt, de nota eius quæ tetigerit punctum A, pronunciantes numerum amphorarum. Nam marginis apud G, procurrentem longitudinem, & circulorum ligneorum, viminibus revinctorum, tabularumq; & orbis lignei GC crassitiem, quam amplectuntur circumducti limbi, præsupponunt per omnia dolia similem.

THEOREMA XXVII.

Etiamsi binæ medietates dolij Austriaci non plane fuerint similes, sed orbium ligneorum alter paulo minor & angustior reliquo, dum modo longitudo in mensoria sit eadem, insensibilis erit capacitatum in vtraque medietate differentia.

Dictum enim est in Corollario ad Theor. V. secundæ partis, dolium Austriacum versari circa figurationem capacissimam, à qua figurationes omnes ad latus utrumque, hoc est, dolia tam longiora quàm breviora Austriaco, omnia sint minus capacia, quàm Austriacum.

In ijs verò articulis, in quibus à minori ad maximum iterumq; ad minus fit mutatio, lege aliqua circuli, semper est aliquousq; insensibilis illa differentia. Quod igitur verum est de dolijs integris, eandem habentibus diagonion: id etiam verum erit de binis unius dolij truncis, ut de AYX, AYG; ut etsi orbium alter, puta GC, fuerit minor reliquo XZ; dummodò AC, AZ aequales, capacitas tamen sit utrinq; ad omnem sensibilitatem aequalis.

THEOREMA XXVIII.

At si longitudo virgae per utrumq; dolij truncum non sit aequalis, quod usu venit: medium proportionale inter utramq; virgae longitudinem, id est medius numerus inter duos ab una & ab altera medietate notatos, sine errore pro indice capacitatis usurpatur.

Nam minor longitudo inscriptum habet capacitatis, quae est sui trunci, duplum; maior itidem sui trunci duplum habet inscriptum. Vtraq; ergo longitudo, junctis numeris, inscriptum habent duplum capacitatis totius dolij. Medium igitur arithmeticum inter numeros utriusq; longitudinis, quod aequevalet medio proportionali inter lineas, arguit simplum totius dolij.

THEOREMA XXIX.

Curvatura Tabularum, seu buccositas inter orificium medium & orbem vtrumq; ligneum, in dolio Austriaco nihil derogat indicio Virgae, in Oblongis doliis auget capacitatem à virga indicatam (per se quidem, caeteris paribus) in Curtis minuit.

Nam etsi, per XXIX partis primae, dolium figura Citrij, Pruni, Olivae, Fusi Parabolici aut Hyperbolici, truncatorum, superat capacitate dolium Cylindraceum, vel meri trunci duplicati figuram habens, his gradibus, quo hic ordine figurę sunt recensitę; illud tamen & per se est per parum uti apparet ex Th. XXII p. primae; & quicquid eius sensibile est, jam in virgae numeros ingestum est. Nam primum dolium, cuius capacitas pro vnius Amphorae indicio, virgae fuit inscripta, similiter ut caetera omnia, suam habuit buccositatem: arguit igitur Virga dolia omnia buccositatis similis; quae etsi non omnibus Austriacis est similis, omnibus tamen est aliqua, eoq; minor error circa illam. At cum dolia fuerint longiora Austriacis, longior etiam in ijs flexus est tabularum ab orificio ad orbes, itaq; maioris capacitatis, etiamsi similis vtrinq; ponatur flexura; quemadmodum etiam, si breviora fuerint Austriacis, flexus iste est brevior. Atqui virga flexum longitudinis mediocris arguit, qualis est in dolio Austriaco: non assequitur igitur virga (caeteris paribus) longitudinem flexus in dolio oblongo; superat in dolio brevi.

Pars

III. Pars.

VSVS TOTIVS LIBRI CIRCA DOLIA

I. Comparatio doliorum per virgam transuersalem exploratorum.

Si dolium sit proportionis Austriacæ, fidito uirgæ sine respectu uel ventris inter orbem utrumq;, vel buccositatis sive curvaturæ inter Orificium infusorium & orbem utrumlibet ligneum; & tale dolium alijs omnibus præfer, excepto illo Rhenensi, quod habet profunditatem ventris maiorem sesquitertia diametri orbis lignei, si tamen ullum habet. Ex cæteris igitur elige Oblonga cum multo ventre, qualia sunt aliqua Rhenensia: compensat enim nonnihil gracilitatem & prolixitatem corporis, amplitudo ventris medij, & longitudo buccarum. In contemptis habeto dolia oblonga & cylindracea sine ventre: post hæc Curta tibi censentor, cuiusmodi aliqua veniunt ex Vngaria, parum aut nihil à cylindro puro puto differentia. At curta ventricosa fugito modis omnibus; tres enim notas paupertatis habent, unam ex Th. V. magnitudinem proportionis Orbium ad dimidiam longitudinem Tabularum; secundam ex Th. XXII, ventris magnitudinem, tertiam ex Th. XXIX, buccarum brevitatem.

II. Consideratio methodi mensurandi per virgam transversalem cubicam.

Colligitur igitur ex his omnibus, simul consideratis, nullam inter rationes mensurandi dolia, compendiosiorem simul atq; circumspectiorem esse, usu virgæ transversalis cum divisionibus cubicis, in dolijs Austriacis. Omnes enim cautelas mensorum in se continet. Primùm virga introrsum immissa eliminat crassitiem tabularum, circulorum, qui vincula sunt, viminumq; quibus circuli lignei stringuntur; Eliminat & excessum Marginum, quorum in crenis hærent orbes seu Bases ligneæ. Hoc autem ratio alia mensurandi, unâ & eadem opera præstare nulla potest; quæ non rationes mensuræ apud orificium A exigit, ubi intima superficies tabularum in aperto est. Itaq; Mensores aliqui regulas hic nonnullas memoriæ mandant & sequuntur, æstimandi cæcam hanc tabularum Orbiumq; crassitiem: quarum incertitudine circa inconstantia exempla, omnis reliqua in mensurando scrupulositas eluditur. Secundò modus iste cavet de inæqualitate basium lignearum seu orbium, idq; citra tædiosam multiplicationem, citraq; repetitionem explorationis, vnâ & eadem opera ut Th. XXVI huius dictum. At reliqui mensores in hoc multi sunt, ut doliorum orbes inter se æquent, mediumq; eorum proportionale, donecq; inter capacitates medium conicum inveniant; usum virgæ pla-

 nime-

nimetriæ conjungentes cum calculo molestissimo. Vide recentissimum, Ioannis Hartmanni Bayeri Medici Francofurtensis librum de stereometria Inanium.

Tertiò, neq; dissimilitudo Cadorum (quantula quidem in Austriaca dolia cadit) dum doliorum Opifices Regula sua crassè utuntur, aut dolia vetera præcisis marginibus sarciunt) multum derogat fidei huius mensurationis, ut dictum Corollario I. ad Th. V. & Th. XXII huius. Quartò, non negligitur hic, sed ipsa methodo adsciscitur amplitudo ventris, seu circulus maximus AY: ab illius enim summo A, instituitur mensuratio ad alterius imum C. Eius rei fundamentum pendet & Th. XXII huius partis.

Quintò nec buccositas Trunci Conoidis hic quicquam nocet, per Theor. XXVIII. Est enim & per se exigua, & per omnes omnium doliorum medietates, fere similis conniventia Tabularum, ad structuræ rationes pertinens, quæ nec meram Conicam rectitudinem, nec insignem aliquam ventricositatem, magis tamen illam, quam hanc requirit. At de hac buccositate plerią; mensores valde sunt solliciti: adeo ut Clavius, ut supra dictum, ad Ellipses & Conoidea confugiat: neq; tamen quisquam illorum adhuc genuinas doliorum figuras calculando secutus est, quas ego nunc primùm & cognoscendas dedi demonstrationibus spinosissimis, & in numeros conieci operosissimo calculo: sed quod Austriaca nostra dolia attinet, ingeniosa magis quàm utili vel necessaria machinatione, tantum ut ex comparatione calculi cum usu virgæ Austriacæ, & commoditas huius dimensionis tantò magis elucesceret, & cæteri scrupulosi computatores sese respicerent, perpendentes, quàm hactenus fustra cerebrum fregerint computationibus laboriosissimis, culicem excolantes fractionum minutissimarum, sed camelum errorum deglutientes: sola hac altera re, pariter ipsis ignoratà fœlices, quod nullius ferè momenti sunt plæraq; tam scrupulositates, quam errores circa illas.

Plurimum igitur ad privatorum securitatem fraudesq; eliminandas refert; ut lex illa dolij construendi, quæ tertia parte longitudinis tabularum jubet describere circulum orbium ligneorum; Magistratuum authoritate diligentiàq; conservetur, pœnisq; & proscriptione vasorum, quæ hanc figuram non habent, vindicetur: aut certè, ut virgæ mensoriæ in enormibus illis dolijs dimetiendis, fides publico decreto abrogetur.

III. Quòd usus virgæ transversalis, inscriptas habentis divisiones Cubicas, sit Austriæ proprius.

Patet hinc etiam, cur virgæ transversalis usus multò sit Austriæ familiarior, quàm nationibus cæteris: Nimirum quia hanc dolij figuram receperunt, ad quam collimantes Victores, minimum nocent capacitati, manuum aberratione. At penes nationes cæteras aliæ etiam doliorum figuræ in usu sunt; in quibus ventrium amplitudo tabularumq; longitudo mutata, statim sensibile quid nocet; Quare etsi verum est, usum virgæ transversalis universalem esse, in omnibus dolijs

inter

inter se similibus, secundum Th. XXVI huius partis: at nulla lex nulla institutio sufficit Opificibus, ut semper teneant eandem præcisè proportionem tabularum, multoq; minus profunditatis ventris, ad Orbes; ut in qua conformandâ casus plurimum valet, consilium opificis minimum. Cùm itaq; figuræ institutæ proprietas non subveniat aberrationi manuum, ut in Austria, sic ut figuræ dissimiles æquipolleant similibus: dissimilibus igitur figuris quotidie provenientibus doliorum, nec capacitatis similis, non potest Virgæ transversalis cubicæ solitariæ penes nationes cæteras tam latus esse usus, sine erroris aleà.

IV. Ratio metiendi quodvis dolium circularium Orbium, sine Virga divisionis Cubicæ.

Sed cum generalem hoc libro speculationem proposuerim, praxis etiam ad omnes alias doliorum figuras extendenda videtur, cùm ut fructum aliquem Stereometriæ huius percipiant etiam natiotiones cæteræ: tum etiam ut Austriaci nostri circa dolia peregrina (quæ identidem vel secundo vel adverso Danubio invehuntur in Austriam, aut vino exotico plena, aut exportatura vinum Austriacum) tanto magis juventur: neve usu virgæ suæ, damnum vel inferant alijs, vel ipsi accipiant. Etenim Iustitiæ simulachrum pingitur cum bilance, mensurarum omnium exactarum symbolo; pertinetq; cura hæc circa mensurarum fidem, ad huius virtutis, suum cuiq; tribuentis, cultum; ut, quæ & salvas præstat Respublicas, & ornat, ipsa quovis sole pulchrior; ab eius amico & sereno vultu, omnes nubeculæ errorum quàm longissimè dimoveantur, discutianturq;.

Virga igitur in parato sit, divisa in partes æquales minutissimas; cum illa in orificium dolij immissâ metire primo profunditatem ventris medij, deinde transversas longitudines, ab infusorij medio, ad imos calces utriusq; orbis lignei; tertio virgam extractam siste foris ad calces orbium ligneorum, acie etiam in crenas impressâ, si potest, metiens utriusque orbis lignei diametrum in altitudinem protrectam seorsim; cui æquales ponuntur esse omnes aliæ diametri unius orbis lignei, propter structuræ rationes, & quia hîc non de lagenis agimus. Si tamen aliqua notabilis diversitas esset in diametris unius & eiusdem orbis lignei, orta vel ex aberratione artificis, vel ex natura ligni, quæ cum venarum longitudinem præstet invariabilem, latitudinem tamen tabularum habet auræ mutationibus obnoxiam: tunc etiam transversas orbium ligneorum diametros metire.

Et quia fit interdum, ut ipsa etiam ventris medij amplitudo non ordinetur in perfectum circulum: tentet igitur accuratius mensor, (cui ad omnem curiositatem instrumenta modosq; possibiles suppeditare animus est) viam aliam discendæ areæ, qua dolium in medio sectum esse intelligitur. Ea possit esse talis.

Limbo ex pergameno, aut alia materia flexili, non tamen, ut fila, ductili, circumdato medium ventrem dolij, metiarisq;, quot partes virgæ contineat limbus talis. Posito igitur, quod dolium in medio foris exactè sit

sit circulare, ex numero partium harum facile per Th. I. disces, quanta diameter debeat esse huius circuli: Vt si partes in ambitu invenisses 6283 cum una quinta, diameter deberet habere partes 2000. Atqui jam exploratam habes diametrum interiorem seu profunditatem ventris: aufer igitur à computata crassitiem ligni, quam potes metiri in infusorio, & pro altera tabula in dolij imo aufer tantundem: quod si diameter profunditatis invenitur æqualis huic computatæ, ex ambitu exteriore, & diminutæ: dolij venter exactè circularis credi potest; quia si deflectit à circulo, causa nulla est, cur potius obliquæ diametri (quod tamen etiam fieri potest) quam erecta & transversa sint inæquales. Sed omnem certitudinem huius rei (si fortè sit materia metienda precisior auro, quantitatis eiusdem) disces lignis parallelis, intervallo, quantum requirit dolium, firmiter inter se coassatis, quibus omnes circumcirca diametros, si trabes binæ dolium sustineant, explorare poteris. Quod si igitur deprehendantur inæquales diametri, erecta & transversa, vel alia quæcunq; tunc figura est Ellipsis: quare per Epil. ad Th. I. p. primæ; diameter computata, medium erit arithmeticum inter erectam & transversam. Itaq; quantò computata & diminuta longior est diametro profunditatis, tantò vicissim hæc erit longior diametro transversâ.

Ex cognita igitur diametro vel diametris cuiusq; circuli vel Ellipsis, sic elicies aream, tam orbis lignei, quàm sectionis imaginariæ per medium ventrem, per Th. II, & Epilagma III, partis primæ. Multiplica diametrum erectam in transversam, sive fuerint æquales, sive inæquales: eritq; factus ad summam parvulorum quadratorum, quæ sunt unam virgæ divisionum æqualium longa & lata, contentorum in area talis orbis lignei, sicut 14 ad 11 ferè. Accuratius, (quod dicto Theoremate omissum hinc supple) ut numerus post quaternarium ordinatas habens Cyphras sedecim, ad dimidium numeri, quo effertur circuli circumferentia Th. I. Nam ut obiter hoc dicam à nemine adhuc demonstratum, nescio an à quoquam observatum: In omnibus figuris regularibus; circulo circumscriptis, & sic etiam in ipso circulo, quasi in figura infinitangula, usu venit, ut ipsarum perimetri, quando diameter habere ponitur partes 2, numero contineantur, qui duplus est numeri, quo continetur area figuræ.

Proxima tibi cognitio necessaria, est longitudinis dolij, quam non ita facile foris, vel intus metiri datur virgulà, quia curvantur tabulæ, procurruntq; ultra crenas orbesq; ligneos, quorum etiam crassities ignoratur. Veram igitur longitudinem sic disces; quadra longitudinem transversalem, ab hoc quadrato aufer factum ex diametro orbis lignei & diametro ventris (sumpto medio arithmetico si non fuerint omnes vnius figuræ diametri æquales) residuum serva, deinde orbis lignei diametrum aufer à diametro ventris, residuum quadra, quadrati partem quartam aufer à residuo prius asservato: radix eius quod remanet, est longitudo medietatis illius, cuius orbem ligneum adhibuisti; technicè dicitur altitudo trunci. Quod si doliũ est regulare, duplum erit hujus, longitudo totius dolij; sed tutius ages, repetendo processum eundem cum altera longitudine transversali, alteroq; orbe ligneo: quo patefiet alterius medietatis longitudo, hoc est alterius Trunci altitudo.

Exemplum. Sit inventa in Sch. XXII, transversalis AZ longitudo partium æqualium virgæ 24 semis & paulò plus: ut sit eius quadratum 602 s. Sint etiam inventæ diametri AY 22, XZ 19, partium earundem. Hæ in se mutuò multiplicatæ, faciunt 418, quem aufer à 602 s. restat 184 s. Differunt diametri per 3, cuius quadratum est 9, & hinc pars quarta, 2 cum quarta: quam aufer ab 184 s. restat 182 cum quartà, cuius radix 13 s. dimidij dolij longitudo interna, ut tota GX sit 27 longa. Et cum quadratum de 22 sit 484, de 19, sit 361: Vt igitur 40000 ad 31416, sic 484 & 361 ad 380 + & 283 s. areas circulorum AY, & XZ.

Inventis areis circulorum, & longitudine medietatis utriusq;, trivium occurrit; aut enim pro Truncis Conicis habentur, binæ dolij cuiusq; medietates, aut pro Truncis Citrij, aut pro figuris intermedijs, pro Pruno, Oliva, Fuso Parabolico, vel Hyperbolico, truncatis: hoc est, curvaturæ tabularum tribuitur vel mera rectitudo ab infusorio ad marginem, vel merus circulus inter utrumq; marginem & infusorium, vel figura ex utroq; mixta.

Illa viâ semper paulò minus iusto colliges, istâ promiscuè vel plus iusto, vel iustum attingitur; hac semper iustum attingeretur, si tam facile per hanc incederetur, quàm per illas.

I. Prima via dividitur Truncus quilibet in cylindrum regularem, quasi stantem super basi, orbe ligneo, & in circumiectum illi segmentum limbi Cylindracei Conicum, quod Tunicam apellavimus. Ergò Cylindri corpus, per Th. III partis primæ, computatur, ducta altitudine dimidii dolii, in basin orbis lignei supra inventam: nam numerus inde factus, summam continebit parvulorum Cubiscorum, qui sunt in proposito cylindro, quorum quilibet unam virgæ particulam divisionis æqualis, longus latus & profundus sit. Trunci verò, seu dimidii dolii proportio ad Cylindrum super basi, orbe ligneo, habetur per Corollarium ad Th. XVII partis primæ, ducta diametro orbis lignei, & in se, & in diametrum seu profunditatem ventris; ducta etiam differentia harum diametrorum in sui partem tertiam: & numero Cubiscorum in cylindro prius invento, multiplicato in summam factorum posteriorum, factoq; diviso per quadratum diametri orbis lignei: prodit enim summa Cubiscorum in dolio. Eodem verò modo agendum etiam cum altera dolii medietate si fuerit dissimilis aut inæqualis.

Quot autem huiusmodi Cubiscorum faciant unam mensuram, non aliter disces, quàm si ex lamina ferrea vasculum oblongum, Cylindraceum exactè, & æqualiter rotundum struxeris, cum fundo optimè complanato, deinde infuso liquore unius mensuræ in vas siccum, virga tua mensus fueris altitudinem quam signaverat liquor ante immissionem virgæ in vasculum; mensus etiam fueris amplitudinem circuli in summo, debet enim æqualis esse imo. Nam ex amplitudine disces aream circuli, modo supradicto, ex hac & altitudine, corpus seu numerum Cubiscorum in vna mensura: quo numero si divideris numerum Cubiscorum cuiuscunq; solidi, habebis in quotiente numerum talium mensurarum, quas capit locus solidus, seu dolij seu Cupæ. Atq; hæc est prima methodus, qua dixi colligi minus justo. Exemplum habes post Th. XXII partis primæ.

Sed continuabimus hoc etiam prius inceptum. Duc igitur 13 semis in 283 s. basin minorem, orbis scilicet lignei XZ, fiet Cylinder 3685 s. In hac verò proportione diametrorũ, est cylinder ad Truncum, ut 361 ad 421. Ergò si 361 fit 3685 s. quid 421? sequitur 4298, tot cubiscos valet dimidium dolium: totum ergo 9596. Quod si 30 huiusmodi cubiscorum implerent unam mensuram, diviso 9596 per 30, prodiret 320 fere, tot mensuras caperet dolium totum.

II. Altera methodus, qua dolium consideratur, ut Citrium utrinq; truncatum, quæq; frequentur justum pronunciat, sed æquè frequenter plus justo: jam supra in Exemplo ad Th. XXII & XXV p. primæ prolixè & scrupulosissimè fuit tradita: nec alia repetitione est opus, nisi ut moneam, dolium illic apellari Citrium Truncatum, dolij ventrem illic esse circulum maximum per medium corpus Citrij; Orbes verò ligneos illic appellari circulos Truncantes. Deinde & hoc est addendum, si orbes lignei non fuerint æquales, operandum esse bis, semel per minorem orbem, ac si uterq; tantus esset, iterum per maiorem, ac si uterq; maior; quodq; posterior calculus differens prodet à priori, eius parte dimidia hinc detracta vel inde adjectà, justum (ut in perfecta Citrij figurà) constitutum iri.

III. Quod si tibi scrupulositates istæ nondum sufficiunt, eo quod curvatura tabularum non semper habeat figuram Circularem exactè, & si, ut est Geometricorum ingeniorum natura, non ex aliena & conficta, sed ex genuina & propria cuiusq; dolij figura lubet argumentari & calculare: age, prius inquirito, qualis omninò figura sit huius curvitatis Tabularum?

Quasdam igitur visu simplici dignosces, quibusdam indagandis opus tibi erit instrumento & dexteritate manuum, circaq; hoc exercitium, subtilitate curiosissimà: quasdam deniq; & pleralq; quidem, nullo ingenio discernes à perfecto circulo, propter rudem tabularum coassationem, impedimenta circulorum ligneorum & viminum, inæqualem tabularum crassitiem, & ipsarum figurarum affinitatem inter se.

Quod si in oculos incurrat curvaturæ tabularum in medio ventre dissimilitudo à curvatura versus extremos margines, dolium erit Truncus Fusi Hypercolici, & quo angustius hæc curvatura ventrem circumsteterit, hoc maior Hyperboles pars erit, hoc proprius etiam capacitas dolij ad capacitatem Trunci Conici accedet.

Reliqua hoc instrumento expedies. Cape regulam ex ferro vel orichalco, quadratam, benè politam, longitudine dolij, non flexilem suo pondere; in illa sint stili ferrei graciles & acuti ut clavi, trusatiles per longitudinem regulæ, sic ut in quacunq; eius parte hæreant firmi non vacillantes; possint autem Cochleis à regula extrudi reduciq; ad illam: sint numero, cùm minimum, quinq; melius si septem; quorum medium sufficit fixum adhærere Regulæ mediæ, longitudine, quæ superet crassitiem omnis circuli lignei in dolijs. Statuto igitur stilo fixo in vna commissurarum, qua duæ tabulæ coeunt in medio dolij ventre, reliquos stilos trusatiles, binos & binos, vel si adsunt, ternos, ordina versus dolij margines, intervallo illis indulto modico & utrinq; æquali; cochleisq; extrude, ut omnes tangant commissuram eandem, extimi æqualiter à medio remoti, in marginibus extremis; cæteri in punctis vicinis, insinuantes se inter binos circulos ligneos, quà datur eorum tantulum intervallum. Ita comprehensa stilorum extremitatibus quina vel septena figuræ puncta, cum Regula transfer in planiciem tabulæ bene complanatæ, factis in ea punctis totidem; ut si sint in Schemate XVIII. puncta extrema F, G, medium C, *Schema XVIII* interjecta Q, S, & respondentia in parte alterà. Et ne quis scrupulus supersit, metire etiam crassitiem tabularum, tam in orificio infusorio, quàm in marginibus; ea quanta fuerit, tanto intervallo versus interiora, & centrum veluti curvaturæ, facito puncta alia, deletis prio-

ribus,

ribus, ut interiorem curvitatem dolij, quinis vel septenis punctis in plano habeas propositam.

Primùm igitur connecte puncta F, G, per rectam FG; deinde cùm CG, CF ex processus descriptione sint æquales; ex C perpendicularem duc in FG, quæ sit CO, continueturq; extrorsum aliquousq;. Tertiò per bina puncta extima, ut F, S, & respondentia ex altero latere, duc rectas, & continua illas, usq; in perpendicularem CO continuatam. Quod si reliqua puncta non fuerint intra complexum harum linearum inventa omnia, vel saltem exteriora in hac ipsa linea; aut si duæ hæ lineæ concurrerint alibi, quàm in ipsa perpendiculari CO continuatà, ut in Y; tunc operam lusisti, certumq; habes, vel dolij figuram, vel instrumentum, vel manus tuas, ad hanc subtilitatem esse ineptas. Possumus autem his duabus lineis, etsi, accuratè loquendo, secant Hyperbolen, in punctis singulæ binis, uti loco contingentium; utiq; in dolijs, quæ mihi videre contigit. Quare per Th. XXVII partis primæ, diligenter metire, quæ sit proportio CO (dimidiæ differentiæ diametrorum, ventris & orbis lignei) ad CY. Secto enim angulo OGY in æqualia, si secans transiverit per punctum C, figura ex circulo erit, pertinebitq; ad methodum secundam propriè. Sed quod maximè facit ad comparationem cum cæteris, quæritur tunc segmentũ Globi FGC, deinde per Th. XXV p. primæ, fit ut GO ad OC, sic numerus segmenti globi, ad numerum, qui exprimet dimidium corpus Citrij parvi: cuius proportio ad Zonam circa cylindrum HFGE docetur in Exemplo ad Th. XXII.

Si verò fuerint æquales NC, CY, figura est ex Parabola: quare per Th. XIII. Epis. II. quæritur Parabolicum Conoides ex cono æquealto: Nam area circuli cuius diameter FG, ducta in partem tertiam OC creat numerum corporis Coni, at Conoides est sesquialterum Coni: ergo corpus Conoidis habetur, ducta area FG in semissem CO. Tunc ex Conoide quæritur Fusum parvum in Conoide, per Analogiam Th. XXVII partis primæ: scilicet ut GO ad YO, duplum ipsius CO; sic Conoides inventum ad Fusi eius corpus dimidium. Invento corpore Fusi parvi, processus reliquus idem est, qui cum Trunco Citrij: Zona enim circa fusum, habet partes duas, altera est Fusum parvum, jam inventum, reliqua & maior quidem pars creatur, ducta circumferentia circuli orbis lignei in figuram planam FGC, quæ parabola dicitur; cuius area habetur ex Epis. II ad Th. II. ductâ enim parte dimidia, id est tribus sextis de CO, in rectam FG, creatur area trianguli FCG, cuius sesquitertia cum sit area Paraboles, creatur igitur, ductis quatuor sextis, hoc est besse ipsius CO in rectam FG.

Quòd si fuerit CO maior quàm CY, figura erit ex Hyperbola, proximèq; accedet dolium, ad conum duplicatum: idq; tanto magis, quanto maior fuerit CO quam CY. Eritq; Conoidis Hyperbolici proportio ad corpus dimidij Fusi inscripti, paulò minor, quàm GO ad OY, maior tamen quam GO ad OV, si V centrum sit figuræ. Hoc solum lucramur ex hac scrupulositate circa Hyperbolam: de cætero; Cùm nondum determinata sit recta inter OY & OV, quadrans ad proportionem convenientem; non etiam animum adieci hactenus ad quadraturam Hyperboles, cuius cognitione insuper opus esset, ad Zonam Fusi Hyperbolici ex arte computandam. Opitulamini Apollonij.

Rursum si CO minor quidem fuerit, quàm CY, maior tamen ad CY quam OG ad GY (quod quis qua diligentia discernet?) figura erit ex Ellipsi recta: cuius segmenta ad circuli segmenta facta per rectam axi parallelam, semper habent proportionem eam, quam brevior eius diameter ad longiorem, per ea quæ Archimedes adhibet ad demonstrandum Episagma III ad Th. II, perq; dicta à me in commentarijs de motu Martis, quod ad dictum Th. II primæ partis erat etiam superinducendum. At cum linea proportionis segmenti sphæroidis recti ad Prunum Ellipticum, inter C. Y, nondum sit determinata, ut & prius in hyperbola, nullum hic ingeniosis, & omninò Apollonijs, exitum monstrare possum, quàm quem ipsi sibi sollertissimi ingenij acie, superius Th. XXVI provocati, exciderint & patefecerint: medioeribus ingenijs nullus hic thesaurus utilitatis aut compendij latet absconditus. Idem deniq; teneto, cùm CO minor ad CY fuerit, quam OG ad GY: figura enim erit ex Ellipsi transversa, & Sphæroidis segmenti proportio ad Olivam maior erit, quàm GO ad OC, sed genuina linea nondum est nota: quod tanto minoris momenti impedimentum censeri debet, quanto minus verisimile est, dolia Sphæroidis, quàm Hyperboles aut circuli figuram imitari.

V. Qua ratione quis artificiosè metiri posit, proportionem partis vacuatæ ad residuum liquoris, strato dolio, erectisq; ad perpendiculum diametris Ventris & Orbium ligneorum.

Desiderata hactenus, quantum ego scio, doctrinæ huius pars: utilis tamen patribus familias ad arguenda & cavenda furta: si tamen Bachus à Thetidis ditione suas opes procul collocaverit, eiq; suis finibus interdixerit: solet enim hæc dea sic tegere sui vernę maleficia, ut cùm partem ille subduxerit, ista refundendo corrumpat reliquum. Coigneti aliorumq; modus; qua certus est, angusti est usus: ut verò ad omnis generis dolia extenditur, sine errore & absurdis, quod facile fatebuntur authores, exerceri non potest. Incipiamus tamen ab illo: Nimirum si dolium sit figura cylindri, aut insensibiliter ab ea deflectat, superficies plana liquoris, secat orbes ligneos, ventrisq; amplitudinem, in bina segmenta circuli; quare, per Th. XVII, p. primæ, segmenta duo totius Cylindracei dolij, vacuum & plenum, sunt in proportione segmentorum planorum in basibus.

Sed quia dolium est compositum ex duobus veluti Truncis Conicis, quorum reputatur altitudo technica, quantum est longitudinis inter circulum ventris & orbem ligneum: Truncus verò quilibet constat ex cylindro medio, super basi Trunci minori, & circumjecta Tunica (sic enim appello in dolio dimidiam ventris protuberantiam supra molem intimi cylindri: si totum dolium eiusq; genuinam figuram consideres, tota ventris protubernantia, constans ex duabus talibus veluti tunicis adversis, in superioribus, mihi dicta fuit Zona) animadverte igitur, quod Tunicæ vel Zonæ huius margo primùm subsidit, priusquàm ab intimo cylindro, qui est inter orbes ligneos, quid desiat: posteaquàm cylinder incipit minui, semper unà mi-

minuitur etiam Tunica: ad extremum toto cylindro exhausto, restat in fæcibus adhuc margo Tunicæ vel Zonæ. Quis in hac irregularitate speret ab arte subsidium?

Atqui non plus unico Theoremate nobis opus fuerit, ut de vacuatione Dolij, cum figura Trunci conici duplicati, demonstrativam planè præscribamus Methodum. Dictum est supra Th. XVI partis primæ, nondum esse factam à Geometris disquisitionem de soliditate segmentorum quorundam Coni: quæ inter, sunt etiam ista segmenta Truncorum Conicorum, seu dolij, quæ determinantur per planam superficiem liquoris defluentis, parallelam axi Truncorum conicorum, rectam ad communem basem Truncorum, seu circulum medium Ventris.

De his itaq; segmentis Coni, lubet aliqua disserere etiam hoc loco, ad provocandos Geometras; ut qui hactenus non satagendum putarunt de his segmentis, usu, quod supra dicebam, non exigente; ij jam tandem, postquàm manifestum vident usum eorum, e somno evigilent, demonstrationemq; soliditatis eorum quærant. Primùm itaq; consideravi, si fortè tale coni segmentum, quod fit plano ad axem parallelo, eoq; Hyperbolico, proportionem ad Conum totum habeat, compositam ex proportione segmenti suæ basis ad basim Coni, & ex proportione suæ altitudinis ad Coni altitudinem. Hæc opinio vero quidem est proxima, sed tamen falsa. Nam portio hæc est segmenti Coni scaleni humilioris, scilicet per verticem secti, ad conum propositum altiorem: atqui tale segmentum Coni scaleni per verticem secti, est minus segmento Coni altioris, super eadem basi stanti; exit enim in mucronem; cùm hoc exeat sursum in quandam aciem latam Hyperbolicam: illud continetur superficie Coni minoris & plano triangulari; hoc portione superficiei Coni maioris, & plano Hyperbolico.

Secundò consideravi, num segmentum Coni propositum, sit æquale segmento consimili cylindrici segmenti, habenti eandem basin & altitudinem: de quibus segmentis secundis egimus Th. XVII. p. prioris; quorsum spectat etiam Th. XXII ex parte: & an non tam Cylindraceum quam Conicum segmentum, stantia super eodem segmento circuli, & terminata segmentis planis, illud Elliptico, hoc Hyperbolico, quodlibet æquet partem tertiam segmenti cylindrici recti, per planum axi parallelum facti, super basi eâdem. Sed nec hoc ipsissima veritate nititur, utcunq; prope accedat. Nam si verum hoc esset de uno, non posset esse falsum de semicylindro, quem determinat planum per axem, transiens etiam per inscripti Coni axem & verticem. Nam diviso hoc semicylindro in partes 33, semiconus eodem plano per axem determinatus, est talium partium I, per Th. IV, pa. I æ: at segmentum cylindrici segmenti est talium partiū 14, per Th. XVII. Quod igitur interest corpusculum geminatum, terminatum intus Conica superficie, foris planâ & portiunculis Cylindraceæ, est partium tantùm 9. Etsi verò hic conus dimidius est præcisè triens semicylindri, tamen hoc in alijs segmentis non obtinet, eo ipso, quod tunc Conus non amplius per Verticem secatur; segmentum igitur Coni propositum maius est triente segmenti cylindrici recti æquealti: & videntur ista successivè magis magisq; fieri æqualia, vicissimq; corpuscula interposita magis magisq; attenuari, quo minus fit segmentum ipsum rectum Cylindricum, cuius ista sunt partes.

Tertiò igitur videtur inquirenda quadratura Hyperboles, quæ segmentum coni determinat, qua inventa facile est, cuilibet Hyperbolæ triangulum super eadem basi assignare, cuius area sit æqualis areæ Hyperboles. Nam proportio segmentorum Coni, ad Conum totum, videtur esse composita ex proportione baseon planarum, & proportione altitudinum triangulorum istorum, hyperbolas æquantium. Interim dum hanc prædam venatu referant Apollonij; nos fidem reliqui Theorematis etiam non demonstrati, secuti, id eligemus quod ad veritatem aspirat; & segmenta circulorum quæ sunt bases Conicorum propositorum, ducemus non in altitudines eorum, qua ratio minora justo constitueremus; sed in lineas longiores, scilicet in continuatas has altitudines, usq; ad arcum circuli, per vertices conorum continuatorum, perq; orificium dolij traducti, ut si in Sch. XXI. circulus maximus traduceretur per BC, & oppositum verticem ultra D, ut sit CL sagitta, & LB sinus arcus, determinantis nostras lineas: cui circulo expedit peculiare nomen esse; dicatur Metator. Manifestum enim est, talem arcum non tangere dolium in G, orbe ligneo, ac proinde altitudinem OG technicam segmenti conici COG, continuatam in hunc arcum, fore longiorem, veluti si OZ esset. Segmentum igitur CA ventris, cuius altitudo CO, ducemus in trientem linearum OZ, pro soliditate segmenti Conici. Si quis metuit, ne OZ nimis sit longa, is cogitet segmenta nobis hic proposita non esse merè conica, sed his maiora ex Citrio & Fuso.

Schema XXI.

Nascetur igitur processus iste. Ante omnia notam esse oportet ex superioribus præceptis, amplitudinem ventris CA, & diametrum orbis lignei GE, cum dimidia differentia CO, & per transversalem CE, ipsam etiam altitudinem technicam Trunci OG. Est autem CO ad OG, ut CL ad LB altitudinem Coni continuati. Igitur scientur areæ circulorum CA & GE, ex superioribus, in mensura una, quæ areæ ducendæ sunt in suarum altitudinum LB & KB partes tertias, & auferendus, conus GEB, deficiens à Cono CAB continuato, ut restet truncus CAEG, in numeris aptis præsenti negocio. Iam pro inveniendis lineis OZ opus est diametro Metatoris: quadratum igitur ipsius LB, divide per CL, & prodibit in quotiente, residuum diametri. Adde igitur CL ad hoc residuum, compositus erit diameter Metatoris. Igitur si proposita sit altitudo vacui CO, per eam inquirenda sunt, segmentum circuli ventris, per præcepta superiora, & linea ex O perpendiculariter per superficiem liquoris defluentis exiens in metatorem. Aufer igitur CO à diametro Metatoris, ablatam multiplica in residuum, facti radix est linea quæsita; in cuius partem tertiam, multiplicanda est area segmenti circuli Ventris, pro soliditate segmenti Conici. Quod si altitudo vacui CO non superat dimidiam differentiam diametrorum CA, GE, sufficit hoc laboris. At si superat, labor geminatur. Segmentũ enim Coni tunc excurrit ultra Truncum CGE, in Conum GBE deficientem: quare pars eius deficiens inquirenda, & à segmento toto auferenda erit. Aufer igitur dimidiam differentiam diametrorũ ab altitudine liquoris; cum residuo tanquam sinu verso, quæratur area segmenti orbis lignei, quod extat supra superficiem liquoris; nanciscatur autem eandem dimensionem cum areâ segmenti plani ventris. Tunc quæ est proportio altitudinis liquoris ad excessum suum supra dimidiam diametrorum differentiam; in eadem proportione admetiro

tiro

tire huic minori segmento orbis lignei, portionem de linea OZ, cuius tertiam partem duc in segmentum lignei orbis, pro soliditate partis de Conico segmento deficientis: qua ablata à toto segmento Conico, relinquitur segmentum Trunci inanitum.

Deniq; si tibi cognitus est numerus mensurarum, quas capit dolium totum, eum multiplica in segmentum Trunci, vel una vel duabus operationibus inventum: factum divide per soliditatem Trunci totius, prodibit in quotiente numerus mensurarum, quæ defluxerunt.

Cùm autem & hîc & supra sæpius usuveniat, ut quærenda sint segmenta circulorum, per sinus versos dimidiorum arcuum, quæ res molestias magnas creat; ut hac te molestia ex parte liberarem, tabellam hic confeci, quæ singulis centesimis partibus sinus versi seu sagittæ, à summo versus centrum, assignat quantitatem areæ segmenti in ea proportione, ut circuli illius totius area valet partes 15710: nec enim aptior numerus mihi exivit, utenti facili & expedita via computationis, nec nunc vacat, hunc numerum cum rotundo aliquo permutare.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0.	0	294	818	1478	2237	3072	3964	4900	5868	6856	7855
1.	10	339	879	1550	2318	3159	4056	4996	5966	6956	
2.	27	386	941	1623	2399	3246	4148	5092	6065	7056	
3.	49	434	1004	1697	2481	3334	4241	5188	6163	7155	
4.	76	484	1069	1772	2563	3423	4334	5284	6262	7255	
5.	105	536	1134	1847	2646	3512	4428	5381	6360	7355	
6.	138	589	1201	1923	2730	3601	4521	5478	6459	7455	
7.	173	644	1269	2001	2815	3691	4616	5575	6558	7555	
8.	211	701	1337	2079	2900	3782	4710	5673	6658	7655	
9.	252	759	1407	2158	2985	3873	4805	5770	6757	7755	

Vsus tabellæ: segmenti sagittam seu sinum versum, seu quod est loco eius (vt in Ventre, altitudinem vacui, in orbe ligneo, altitudinem extantis partis supra liquorem) duabus Cyphris auctum, divide per semidiametrum circuli, cuius est segmentum: quod prodit, eius denarios quære in fronte, digitos in margine, & area communis exhibebit aream segmenti, qualium area totius illius circuli valet 15710; quæ si valeret minus aut plus, reductione aliqua opus esset ad communem dimensionem.

Exemplum huius processus. Sit venter dolij CA altus 22, diameter orbis lignei GE 19, dimidia ergo differentia CO sesqui: Et OG 13 ſ. Vt autem CO sesqui ad OG 13 ſ. vel ut 3 ad 27; 1 ad 9. sic CL 11 ad LB 99, ergo KB est 85 ſ. Ponemus autem, aream circuli CA valere numerum Tabellæ, sc. 15710. Erit ergo ut quadratum 484 de CA 22, ad quadratum 361 de GE 19, sic area circuli CA 15710, ad aream circuli GE 11718. Duc 15710 in trientem de 99, prodit 518430, pro corpore CBA: duc 11718 in trientem de 85 ſ. prodit 333963, pro corpore GBE, quod aufer à CBA, restat 184467, pro Trunco CGEA. Iam pro diametro metatoris: ipsius LB 99, quadratum 9801, divide per CL 11, quotiens erit 891; cui adde 11, erit Metatoris diameter 902.

Sit primò altitudo vacui minor quam CO, sc. 1. Vt igitur possis excerpere eius segmentum ex tabella, dic, CL 11 fit 100, quid 1, prodit 9 cum undecimâ: hæc immissa in tabellam, refert segmentum Ventris 256 ferè. Aufer deinde 1 à 902 diametro metatoris, restat 901 quod duc in 1. fit 901. cuius radix 30 +. Duc igitur eius

ter-

tertiam 10 in 256. prodit soliditas segmenti 2560. Quia ergo altitudo vacui minor est, quàm CO: valet tota hæc soliditas. Et ut 184467 ad numerum mensurarum dolij, sic 2560 ad numerum mensurarum quæ defluxerunt. Sed nota, si operareris per simplicem segmenti altitudinem, quæ esset 11, tunc non multo plus tertia parte huius colligeres, quod est certò minus justo.

Sit secundò altitudo vacui, maior quam CO, sc. 6. Vt autem 11. ad 100, sic 6 ad 54, cum 6 undecimis, Ergo in tabella quæsiti, 50 in fronte, & 4 cum appendice in margine, exhibent segmentum 3468. Aufer deinde 6 à 902 restat 896, quod duc in 6, fit 5376, cuius radix 74, minus sexta parte: duc huius tertiam partem in segmentum, prodit soliditas segmenti Conici 85351, sed ultra truncum conicum excurrentis, quia 5 superat CO. Ergo aufer CO sesqui à 6, restant 4 s. cum hoc quærendum segmentum orbis lignei. Si semidiameter eius 9 s. fit 100, tunc 4 s. fit 47 cum triente ferè: cum quo ex tabella eruitur segmentum 2843, qualium area orbis lignei, quæ minor est areà ventris, habet 15710. Duc igitur 2843 in 361, quadratum de 19; factum divide per 484, quadratum de 22, prodit 2120 s. Et quia segmento toti, cuius erat numerus 6, tribuebatur 74, eius parti, cuius est numerus 4 s. tribuendũ erit pro altitudine 55 s. cuius tertiam duc in 2120 s. fiet 3922 s. soliditas apicis, de segmento excurrentis in conum deficientem. Aufer hanc à segmento toto, restat segmentum Trunci conici 81429 s. vacuum. Rursum igitur, ut 184467 ad numerum mensurarum totius dolij, sic 81429 ad numerum exhaustarum mensurarum. Si per simplicem altitudinem segmenti operareris, ea fuisset non 74 sed 66, segmenti soliditas 76312, deficientis verò apicis 3640, soliditas ergò segmenti de Trunco 72672, certò minor justo. Nos igitur quod hic maius invenimus, pro vero amplectimur.

At enim excipient Apollonij, ne sic quidem, hac soliditate segmentorum conicorum concessâ, satisfactum diversitati in dolijs; quippe hæc soliditas, cum ex unius formæ metatore computetur, non plus quàm uni figuræ doliorum quadrabit? Scio equidem; quare ut & illis satisfaciam, ad Th. XXX. partis primæ illos ablego, illic invenient (Apollonij inquam, quærentes, invenient) unde suppleant, quod scientificæ demonstrationi huius artificij adhuc deest.

Conclusio libri.

Constitueram errores aliorum, cum circa doliorum integrorum, tum etiam circa partis vacuæ dimensiones, detegere, fundamentaq; Elenchorum monstrare in Theorematibus huius libri. At cùm una veritas sufficiat vel tacens, contra omnes errorum strepitus; & jam antea liber, vix decem initio Theorematum, præter opinionem excreverit: habeant igitur sibi suos errores, quicunq; ijs delectantur; fruamur nos nostris commodis; & ut fruendi materia, salvis corporis animiq; bonis, affatim suppetat, precabimur.

Et cùm pocula mille mensi erimus,
Conturbabimus illa, ne sciamus.

FINIS.

Errata nonnulla Memoriæ vel typographica quæ sparsim inter legendum occurrerunt, sic corrige.

Pag. C. 1. deest Nota Schematis VI. & VII.
Pag. C. 3. trum figuræ (addit utrinq; axem
Pag. D. 1. fac. b. plicatione & extractione numerorum &c. summa in trientem altitudinis Trunci &c.
Pag. D. 2. fac. b. per spicuitatis majoris causa sic lege menta ista segmenti, quorum basis est semi circulus sint alt. s. p. & s. 1. s. in o. a. r. p. eandem ad cylindri segmentum æquealtum, quæ est totius vel primi segmenti ad totum æquealtum Cylindrum, sc. 7 ad 33. Idem enim locum habet etiam in segmentis segmenti quorum basis est circulus, semper enim segmentum hac basi, sive altū sive humile, est Cylindri sui æquealti dimidium. Quibus verò bases non s. c. e. s. s. a. c. segmenta, illis bases itidem istæ singulæ singulas concilianti proportiones. Itaq; etiam de h. c. s. s. v. a. n. m. q. d. c. e. p. q. q insistant eidem segmento circuli, s. u. a: quæ verò eidem lineæ segmenti circularis, sint ut seg. altitudinis respondentia.
Pag. D. 3. linea penult: pro longiore *lege* breviore
Pag. E. 1. f. b. gatur — — Annulos
Pag. F. 2. f. b. segmento — — At cum AO OL — — VTRL pars — — VTRL
Pag. F. 4. sit — *dele* KO
cularis — cui perpendiculares sint
In Schemate LVXN & KVXO debebant esse æquales mea & LVK MXP integra linea parallela.

Pag. G. 1. Zona — — Sch. VI. *sic & in Margine* per KCN
Pag. H. 2. per XXVII — — reliqui sint
H. 3. pert — — dele Austriaci.
I. 3. f. b. una, LC. duæ. *In schemate XXI hic & quoties recurrit, continuetur CT usq; in E, & VBRDA usq; in H, in quam ducantur perpendiculares CS, TR, EA*
I. 4. dum inst — — H. G. B. pun. LA prop.
l. ultima longior est CK quam
K. 1. f. b. CG ad GA Trun *l.* AC erit — TC. AV &
K. 2. Sit q — 20000. — 20000 *l.* summa quadratorum *l.* Factus 18666667 *l.* quadratum AG.
f. b. Sit CT. 130, VA *l.* quibusdam — minor CT
K. 3. quadrantes — pars differentiæ resp
f. b. CT. sic — Cylindri æquealti & insgulum CT. AV
K. 4. f. b. 856 mul —' 35 & f
L. 2. f. b. plus va — CT. AV. *L. 3. ultimâ*, H. B.
M. 1. quadratum acclivis lateris FA basium CI ad CG.
f. b. CG ad — — CHA prop
M. 3. portionis — — fiat majus ter.
N. 2. f. b. nion — — AYX, AYG
N. 3. f. b. Theor XXIX

Similia his sicubi occurrerint, lector industrius ipse corriges.