Kopie nach e. Original
der UB Basel

<36631825070011

Invention nouvelle

EN

L'ALGEBRE,

PAR

ALBERT GIRARD

MATHEMATICIEN.

Tant pour la ſolution des equations, que pour recognoiſtre le nombre des ſolutions qu'elles reçoivent, avec pluſieurs choſes qui ſont neceſſaires à la perfection de ceſte divine ſcience.

A AMSTERDAM.

Chez Guillaume Ianſſon Blaeuw.

M. DC. XXIX.

A MONSIEVR
Mons^{r} HENRY de BERGAIGNE Capitaine d'une Compagnie de Cavallerie pour Meſſeig^{rs} les Eſtats Generaux des Provinces Vnies des Pays Bas, Receveur des contributions de Brabant au quartier de Breda, &c.

MONSIEVR,

Entre les ſciences leſquelles vous cheriſſez, & qui vous ſont familieres, vous n'y avez pas ſimplement rangé les Mathematiques, mais auſſi y avez fait un progrez au delà du vulgaire, laquelle choſe, & principalement la renommée de vos vertus, m'ont acertené que vous recevriez d'un bon œil ces trois petits traictez, dont le premier n'eſt qu'une briefve introduction en l'Arithmetique, mais les deux autres contiennent quelques nouveautez en l'Algebre & Geometrie, incogneues non ſeulement des modernes, mais auſſi des anciens, & n'y a autre choſe qui me poind preſentement, ſinon qu'elles ſont un peu trop toſt ſorties de ma main pour leur donner quelque luſtre, & auſſi que je n'ay quelqu'autre ſubject tout appreſté à vous demonſtrer en effect que je me repute

Monſieur,

Voſtre tres-humble & tres-affectionné ſerviteur

Albert Girard.

COM-

COMPLEMENT MATHEMATIQVE.

Les commencemens de l'Arithmetique.

PROLATION DES NOMBRES.

Articles		
Nombre	Bilion	Trilion
Mil	Mil Bilions	Mil Trilions
Milion	Milion de Bilions	Milion de Trilions
Mil milion	Mil Milion de Bilions	Mil Milion de Trilions
Premiere masse	*Seconde masse*	*Troisiesme masse*

LA quatriesme masse commence par quadrilion. La cinquiesme par quintilion &c. Chacune masse contient douze chiffres : les nombres vont à l'infiny : Chacun article contient trois termes, assavoir digite, dix, cent.

M. Milion de Trilions	Milion de Trilio :	M. Trilio:	Trilions	M. Milion de Milions	Milion de Bilions	M. Bilio :	Bilions	M. Milions	Milions	Mils	Pieds
314	159	265	358	799	323	846	264	338	327	950	288
1	414	213	562	373	095	048	801	688	724	209	698
teste											queue

DES 4 CONIVGAISONS.

Les 4 Conjugaisons communes, sont,

Addition, Substraction, Multiplication, Division.

Simple Composée

Augment Declin

	Addition	*Soubstraction*	*Multiplication*	*Division*
Ingrediens	6 & 2	ſubject. 6 de exacteur 2	efficient 6 fois coefficient 2	dividende 6 en diviſeur 2
Facits	8 Somme Aggregat	4 Reſte Difference Exces Deffaut	3 Produict	3 Quotient

ADDITION.

SOyent propoſez pluſieurs nombres parfaits, trouver leur ſomme.

```
         1 ⎫
         6 ⎪
        28 ⎪
       496 ⎬ Ingrediens
      8128 ⎪
  33550336 ⎪
8589869056 ⎭
----------
8623428051  Somme
```

Demonſtration pourquoy l'on retient.

```
       9876
        543
       2101
         23
       4567
       1189
       ----
         29
        27
       20
      16
       ----
Somme 18299
```

Commun proverbe.

Qui cognoiſt toutes les parties, peut cognoiſtre le tout.

SOVB-

SOVBSTRACTION.

Subject	26500058000912259287
Exacteur	843983654706887004
Reste	25656074346205705283
Preuve	26500058000912259287

Commun proverbe : Ayant le tout & la partie, le reste est cogneu.

MVLTIPLICATION.

	3090507
	3090
	278145630
	9271521
Produit	9549666630

Efficiens	863247
	1128713
	2589741
	863247
	6042729
	6905976
	1726494
	863247
Produit	111111111111

5732
13000
17196000
5732
74516000

A la multiplication par des nombres qui commencent par 1, & achevent tout en zero : il ne faut que mettre les zero à la fin du nombre qu'on veut multiplier. 28 fois 10 est 280 : Aussi 28 fois 100 ; c'est 2800.

Tout multiplicateur est nombre.

DIVISION.

S'Il y a plus d'une lettre au diviseur, & que la premiere soit moindre à la seconde; on aura quelque difficulté à sonder le quotient. Toutefois la division par 19 est facile, car elle commence par 1, (le moindre des Caracteres) & 9, le majeur des Caracteres : on prend au quotient la moitié des pairs, ou la plus grande moitié des impairs, si on peut :

 Divisez

Diviſez 48706630017 par 19, viendra 2563506843.

S'il y a des zero à la queue du diviſeur, il les faut mettre à la fin, ſous la queue du dividende.

Item auſſi de fois qu'on eſcrit le diviſeur, autant faut il de lettres au quotient.

Le reſtant doit eſtre moindre au diviſeur.

$$\text{Diviſez}\left\{\begin{array}{c}10355524\\5177762\\20711048\\41422096\end{array}\right\}\text{par}\left\{\begin{array}{c}3218\\1609\\6436\\12872\end{array}\right\}\text{viendra } 3218$$

Quand le diviſeur commence par 1 & acheve par zero, alors, il ne faut que retrancher du dividende autant de lettres & de meſme coſté, aſſavoir du coſté droit. Diviſez 3218 par 10 viendra 321 $\frac{8}{10}$, le nombre eſt ainſi tracé 321|8: ſi par 100 ainſi 32|18: & ſi par 1000 ainſi 3|218. &c.

Diviſer par une lettre

	Diviſez	79833600
par	2	39916800
	3	13305600
	4	3326400
	5	665280
	11	60480
	10	6048
	9	672
	8	84
	7	12
	6	2

Viendra

L'Addition & Soubſtraction ſont des effects contraires, de meſme la multiplication & diviſion.

I. PREPARATION AVX FRACTIONS.

Nombres par ſoy premiers ſont ceux qui n'ont autre meſure que ſoy & l'unité.

Comme, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, &c. Les ſurpaſſez ſont par ſoy compoſez, 4, 6, 8, &c. Apres cela ſuit la maniere de trouver toutes les meſures d'un nombre

Nombres entr'eux premiers ſont ceux qui n'ont point d'autre commune meſure que l'unité.

Comme

Comme 12 & 35: car 2, 3, 4 & 6 meſurent bien le 12, auſſi 5 & 7 meſurent bien 35, mais il ny a pas de nombre autre que 1 qui meſure l'un & l'autre.

Au contraire il y a des nombres entr'eux compoſez, qui ont quelque commune meſure autre que l'unité :

	12,	18.
Communes meſures.	6	La plus grande commune meſure eſt la plus exquiſe.
	3	
	2	
	1	

De pluſieurs nombres propoſez, trouver, s'ils ſont premiers entr'eux, ou compoſez entr'eux, & quant & quand leur grande cõmune meſure.

Soyent donnez 385 & 105 : Diviſez le grand par le moindre, & le diviſeur par le reſtant, ſans tenir compte du quotient en cecy, juſques à ce qu'il ne reſte rien : alors le dernier diviſeur ſera la plus grande commune meſure, comme icy 35 : lequel meſure l'un en 11 fois, l'autre en 3, & n'y en a de plus grand, qu'iceluy qui les puiſſe meſurer tous deux :

Notez que quand 1 eſt la plus grand commune meſure, les nombres donnez ſeront premiers entr'eux, comme 512 & 343 : & ſenſuit de là, que lors qu'il reſte 1, que les nombres ſeront entr'eux premiers.

Soyent autrefois plus de deux nombres donnez 385, 105, 100 : La plus grande commune des deux 385, 105 eſt, par la precedente conſtruction, 35. Puis la plus grande commune meſure de 35 & l'autre, qui eſt 100, eſt 5 : parquoy 5 ſera la plus grande commune meſure des trois nombres donnez 385. 105. 100. & ainſi en fera on de davantage.

De deux nombres donnez ou davantage, trouver leur moindre meſure.

Si les nombres ſont entr'eux premiers, le moindre meſure d'iceux eſt leur produit. Mais ſi les nombres ſont entr'eux compoſez, alors il faut trouver leur plus grande commune meſure, & faire comme ſenſuit

Soyent donnez 12 & 18

la plus grand com: meſure 6

2 quotient, puis mult.

Leur moindre meſure ſera 36 produit.

Que

Que s'il y a plusieurs nombres donnez, il faut rejetter les mesures, ou les nombres qui sont subalternes à quelque autre, & puis de deux à deux faire comme dessus: tellement que le moindre mesure de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, est 27720 : là où on trouve de la facilité, en effaçant deux nombres entr'eux premiers & substituant en leur lieu leur produit.

II. PREPARATION AVX ROMPVS.

Nombre Rompu tire son origine de la seule division des entiers : tellement que le nombre rompu est une division imparfaite.

Note superieure 2 ou numerateur
Note inferieure 3 ou denominateur

Mais les deux notes avec la ligne de separation s'appelle fraction ou rompu.

Fraction primitive est celle qui ne se peut abreger, & de qui les notes sont entr'elles premieres: comme $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{11}{37}$. Autrement la fraction seroit derivative comme $\frac{2}{4}$. $\frac{6}{8}$. $\frac{6}{18}$ &c. & la maniere de trouver les derivatives s'appelle amplification, qui se fait lors qu'on multiplie les notes par un mesme nombre, comme $\frac{2}{3}$, chacune multipliée par 7 viendra $\frac{14}{21}$, qui est egale en valeur à sa primitive $\frac{2}{3}$. Au contraire, la maniere de trouver la primitive, s'appelle abreviation, qui se fait lors qu'on divise les notes par une commune mesure, & plus brievement par la plus grande commune mesure, comme $\frac{14}{21}$, divisant les notes par 7 viendra $\frac{2}{3}$; qui vaut autant que $\frac{14}{21}$.

Fraction propre, est celle qui est moindre à l'unité, ce qui se remarque lors que le numerateur est moindre au denominateur, comme $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ &c. mais l'impropre est au contraire, assavoir $\frac{5}{4}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{7}{3}$ &c. Quant à l'unité divisée, l'egalité des nottes la fait cognoistre $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{5}{5}$ $\frac{6}{6}$ &c. Les nombres entiers, se mettent commodément en fraction impropre, en mettant l'unité pour denominateur $\frac{6}{1}$ vaut 6, $\frac{7}{1}$ vaut 7 &c. Les entiers joincts avec les fractions se changent aussi en fraction impropre; comme $2\frac{3}{4}$, disant 4 fois 2 sont 8 & 3 sont 11, pour numerateur, prenant le mesme denominateur 4 ainsi $\frac{11}{4}$ qui vaut $2\frac{3}{4}$.

Au contraire, ayant une fraction impropre, on en peut demesler les entiers des fractions, s'il y en a comme $\frac{11}{4}$: car puis que les fractions ne sont que divisions imparfaites, il faut faire la division ordinaire; viendra $2\frac{3}{4}$ egal à $\frac{11}{4}$.

CON-

CONIVGAISONS DES FRACTIONS.

EN l'addition & soubstraction des fractiōs il y a de la facilité, lors que les denominations sont de mesme, car alors les numerateurs operent seulement : mais quand les denominations sont differentes, on fera comme sensuit.

Soyent proposez $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$

Addition		Soubstraction
10 22 12 $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ 15	Somme $\frac{22}{15}$ ou $1\frac{7}{15}$	Difference $\frac{2}{15}$ car 10 de 12 reste 2

Car $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ sont mis en mesme denomination, assavoir $\frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$.

Or quand on voudra adjouster plusieurs fractions, on trouvera le moindre mesure de tous les denominateurs, comme icy 60, pour estre puis apres la commune denomination, puis adjouster les numerateurs trouuez.

60	
$\frac{2}{3}$	40
$\frac{5}{6}$	50
$\frac{2}{5}$	24
$\frac{3}{4}$	45
$\frac{5}{12}$	25
	189

Somme $\frac{189}{60}$ ou $3\frac{9}{60}$

En la multiplicatiō & division, on n'observe pas là la similitude des denominateurs; que s'il y a des entiers & fractions, on les remet en fraction impropre; s'il y a des entiers d'un costé sans fraction, on les remet en fraction, posant 1 pour nominateur, comme il a esté dit. Item en la multiplication on fait des paralleles; ainsi que si on multiplie $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ viendra $\frac{8}{15}$. Notez qu'en la multiplication & division, on abrege bien deux nombres qui ne sont pas en mesme ligne (ces lignes sont les paralleles

leles de la multiplication , ou la croix de bourgoigne en la division :) la division se fait donc par la croix aussi bien que l'addition & soubstractiō; posant les nombres de solution sur le dividende , & non pas sur le diviseur. Divisez $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ viendra $\frac{10}{12}$ ou $\frac{5}{6}$, car on divise bien un petit par un grand.

Ces lignes dont il a esté dit, sont croisées és trois conjugaisons , & sont paralleles en la multiplication ; elles servent à monstrer quels nombres il faut multiplier ensemble.

De la
REGLE DE TROIS.

LA regle de trois sert à trouver le 4e proportionel. Ordinairement on met les nōbres homologues aux deux extremitez,& doivent estre de mesme nom : Il faut multiplier les deux derniers ensemble, le produit se doit diviser par le premier,alors le quotient est de mesme nom que celuy du milieu:Si 3 aunes vallent 4 francs,combiē vaudront 17 aunes?viendra $22\frac{2}{3}$ francs, car 4 fois 17 sont 68, lequel divisé par 3, viendra $22\frac{2}{3}$ francs. Touchant ces fractions , si on les veut remettre en monnoye les $\frac{2}{3}$ francs, c'est à dire 2 francs qu'il faut diviser par 3:Il faut bien noter l'habitude du premier au troisiesme,afin de distinguer la regle de trois directe,de la rebourse : on met le nombre de question à la fin , c'est à dire au 3 lieu , & son homologue au premier,tant en la directe,qu'en la rebourse : mais en la directe , si le premier est moindre au troisiesme, le second sera moindre au requis; si majeur, majeur : ce qui n'est pas ainsi en la rebourse. Or en la rebourse on opere tout au rebours de la directe ; car on multiplie les deux premiers , & puis on divise le produit par le dernier : Si dans une forteresse , il y a des vivres pour 300 hommes 16 mois de long ; combien pour 100 hommes ?

300 hommes en 16 mois combien 100 hommes ?
16
―――
48|00 Viendra 48 mois.

Fin de l'introduction de l'Arithmetique.

Des

Des Caracteres des puissances & racines.

Combien que les marques ②, ③, ④ &c. denotent les puissances, secondes, tierces, quartes, c'est à dire quarées, cubes, quaré-quarées &c. lesquelles on à fait servir seulement entieres, mais estant rompues le numerateur est la puissance, & le denominateur la racine, comme ($\frac{3}{2}$) 49, le 3 signifie la puissance cubique, & 2 la racine quarée; qu'on peut prononcer la puissance tierce de la racine seconde de 49, & communement le cube de la racine de 49, ou ce qui est tout un, la racine quarée du cube de 49, car c'est tousiours 343.

Notez que quand le Caractere precede le nombre, alors la signification est definie, comme cy dessus la valeur estoit 343 precisement & nul autre nombre, mais quand le caractere suit le nombre, alors la signification est indefinie, car qu'est-ce que 18 ② , ce n'est qu'un adjectif qui ne signifie rien de complet qu'en comparaison; je dis en comparaison, comme si on disoit de quelque nombre que les 18 ② valent les 108 ①, alors ledit nombre est determiné & ne pourra estre autre chose que 6 : toutefois le ⓪ est de signification finie, suivant un nombre, comme 18 ⓪ est 18 precisement, car c'est 18 nullement indefiny; quant à ① 18, c'est le mesme que 18 ① car ils s'accordent là.

Or pource que $\sqrt{}$ est en usage, on le pourra prendre au lieu de ($\frac{1}{2}$) à cause aussi de sa facilité, signifiant racine seconde, ou racine quarée; que si on veut poursuivre la progression on pourra au lieu de $\sqrt{}$ marquer $\sqrt[2]{}$; & pour la racine cubique, ou tierce, ainsi $\sqrt[3]{}$ ou bien ($\frac{1}{3}$), ou bië œ, ce qui peut estre au choix, mais pour en dire mon opinion les fractions sont plus expresses & plus propres à exprimer en perfection, & $\sqrt[3]{}$ plus faciles & expedientes, comme $\sqrt[5]{}$ 32 est à dire la racine quinte de 32, & est 2. Quoy que ce soit l'un & l'autre sont facils à comprendre, mais $\sqrt{}$ & œ sont pris pour facilité.

Des Caracteres de Conjonctions & Disjonctions, appellez signes.

Le sign e + s'appelle *plus*, vaut autant à dire que *&*, ou bien *encore*, mais — ou ÷ signifie *moins*, en telle sorte qu'on dit 3 francs moins 5 sous, d'avantage $\frac{\cdot}{\cdot}$ signifie difference entre les quantitez où il se treuve.

D'avantage voicy deux nouveaux caracteres qui ſont neceſſaires, & viendront doreſnavant en uſage, aſſavoir

ff	plus que
§	moins que

Touchant les lettres de l'Alphabet au lieu des nombres: ſoit A & auſſi B deux grandeurs: la ſomme eſt $A + B$, leur difference eſt $A = B$, (ou bien ſi A eſt majeur on dira que c'eſt $A - B$) leur produit eſt AB, mais diviſant A par B viendra $\frac{A}{B}$ comme és fractions: les voyelles ſe poſent pour les choſes incognues.

Les 4 Conjugaiſons des ſignes + & —

Addition.

Aux ſignes	ſemblables	prenés la	ſomme	avec le ſigne	Commun
	diſſemblables		difference		du majeur nombre.

$$
\begin{array}{r}
3+11+28-13-5-6+3+5 \\
-5-4-40+19+17-7+8-5 \\
\hline
-2+7-12+6+12-13+11
\end{array}
$$

Notez que le ſigne precede le nombre, & que pour brieveté on ne fait nulle marque devant le premier lors qu'il doit avoir +.

Soubſtraction des ſignes + & —

Changez les ſignes de l'exacteur, & ſuivez la regle donnée en l'additiō.

Soit propoſée ceſte ſoubſtraction.

$$
\begin{array}{l|l}
 & 7+31-17+4-8-5+1-10+9 \\
\text{l'exacteur.} & 7+10-6+9-12+7-6+3-7
\end{array}
$$

Changez ſeulement les ſignes de l'exacteur ainſi & ſuivez la regle de l'addition.

$$
\begin{array}{r}
7+31-17+4-8-5+1-10+9 \\
-7-10+6-9+12-7+6-3+7 \\
\hline
+21-11-5+4-12+7-13+16
\end{array}
$$
pour le requis.

Autre

Autre regle pour la ſoubſtraction.

$$\text{aux ſignes}\left\{\begin{matrix}\text{ſemblables}\\ \\ \text{diſſemblables}\end{matrix}\right\}\text{prenez la}\left\{\begin{matrix}\text{difference}\\ \\ \text{ſomme}\end{matrix}\right\}\text{avec le ſigne}\left\{\begin{matrix}\text{commun}\\ \\ \text{contraire}\\ \text{d'enhaut.}\end{matrix}\right. \Bigg|\ \text{ſi l'ordre eſt}\left\{\begin{matrix}\text{droit.}\\ \text{renverſé.}\end{matrix}\right.$$

$$\begin{array}{l} 20-6+12-3-2+3\\ 12-2+15-8+4-8\\ \hline 8-4-3+5-6+11 \text{ pour le requis.}\end{array}$$

Multiplication des ſignes + & —

$$\text{le multiplicateur eſtant}\left\{\begin{matrix}+\\ \\ -\end{matrix}\right\}\text{prenez les ſignes}\left\{\begin{matrix}\text{d'enhaut}\\ \\ \text{contraire d'enhaut.}\end{matrix}\right.$$

$$\begin{array}{lr} & 5+3-9+12+5-17-30\\ & 4-3\\ \hline & -15-9+27-36-15+51+90\\ & 20+12-36+48+20-68-120\\ \hline \text{produit.} & 20-3-45+75-16-83-69+90\end{array}$$

Diviſion des ſignes + & —

On ſçait que la diviſion n'eſt autre choſe que le meſlange de la multiplication & ſoubſtraction, car il faut oſter du dividende le produit du diviſeur & quotient, ce qui pourroit ſuffire ſans en donner autre exemple, joint que les diviſions ne ſont ſi frequentes en l'algebre, ſinon que quand il ny reſte rien, toutesfois voicy la maniere commét on fait ceſte diviſion.

Pour donner au quotient ſon ſigne competant, s'enſuit la regle commune tant en la multiplication qu'en la diviſion.

$$\begin{matrix}\text{Conſiderant le dividende \&}\\ \text{diviſeur, alors ès ſignes}\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{ſemblables}\\ \\ \text{diſſemblables}\end{matrix}\right\}\text{prenez}\left\{\begin{matrix}+\\ \\ -\end{matrix}\right. \Bigg|\ \begin{matrix}\text{pour le}\\ \text{quotient.}\end{matrix}$$

Ayant ja un nombre avec ſon ſigne au quotient, le reſte eſt facile; que ſi on veut achever comme s'enſuit, je le trouve plus aiſé, c'eſt que multipliant à part le diviſeur par le quotient (changeant le ſigne dudict quotient auſſi à part) alors il faudra adjouſter le produit avec le dividende, eſcrivant ce qui vient au deſſus du dividende : & pour un exemple ſoit

 pris

pris pour dividende le produit de la multiplication precedente
20—3—45+75—16—83—69+90 lequel divisé par
5+ 3— 9+12+ 5—17—30:
alors il viendra au quotient 4—3 ſans rien reſter à la fin : On fait bien deux ſignes conſecutifs, mais rarement comme +—3 qui vaut—3 : car le+antecedant n'altere en rien, mais bien le—antecedant, car il contrarie le ſuyvant,

Voyla touchant la Conjugaiſon des ſignes, & ce qu'il y a des nombres aupres, n'eſt que pour plus grand eſclairciſſement, car ils ne ſervent que aux choſes diverſes qu'on ne veut meſler: quant à l'extraction de la racine quarrée, on ne l'extrait que du +: exemple, ſoit +9, ſa racine eſt +3 ou bien —3 : mais la racine de —9 eſt indicible, & n'eſt ny + ny — en ſa racine, & de la racine Cubicque alors + prend +, & —prend — : car la racine Cubicque de +27 eſt +3: mais de —27 eſt—3: la raiſon ſe voit en la generation des quarrez & Cubes, &c.

De la Multiplication & Diviſion des radicaux.

Il faut eſlever les nombres donnez eſgalement juſques à ce qu'ils ſoyent de meſme nature, puis operant avec ces nombres eſlevez, ſelon la queſtion, on abaiſſera le facit autant qu'on avoit eſlevé les donnez, pour le requis:

Exemple en Multiplication.

Soit à multiplier √ 3 & √ 5; je les eſleve tous deux juſques à la ſeconde quantité, viendront 3 & 5 leur produit (pource qu'on requiert le produit) eſt 15, lequel il faut deprimer, prenant ſa racine de ſeconde quantité (ou racine quarrée) & viendra √ 15 pour le produit requis:

Multipliez √ 5 par 3 : leurs quarrez ſont 5 & 9, dont le produit eſt 45, alors ſa racine eſt le produit requis, qui eſt √ 45 : De meſme multipliez √ 20, par cc 3, j'eſleve l'un & l'autre eſgalement, juſques à la ſexte quantité, viendront 8000, & 9, (car le quarré de √ 20 eſt 20, ſon Cube eſt 8000, auſſi le Cube de cc 3, eſt 3, ſon quarré eſt 9) leur produit eſt 72000, ſa racine quarrée de racine Cubicque eſt √ cc 72000, pour le produit requis, & ainſi des autres.

Multipliez

Multipliez	$\sqrt{}$ 3	par	$\sqrt{}$ 5	viendra	$\sqrt{}$ 15
	$\sqrt{}$ 3		$\sqrt{}$ 12		$\sqrt{}$ 36, ou bien 6
	$\sqrt{}$ 5		6		$\sqrt{}$ 180
	œ 4		œ 16		œ 64, ou 4
	$\sqrt{}$ 5		œ 4		$(\frac{1}{6})$ 2000
	W 2		W 8		W 16, ou 2.

Il y a de la facilité en la practique, en ce qu'au lieu de les eſlever, on les interprete tellement, qu'ils ſoyent de meſme eſpece & marque, alors leur produit a meſme marque : & ainſi $(\frac{1}{6})$8 par $(\frac{1}{6})$9 viendra $(\frac{1}{6})$41472:

La diviſion ſe fait de meſme, car diviſant $\sqrt{32}$ par $\sqrt{8}$ viendra $\sqrt{4}$ ou 2: pour avoir des exemples diviſez, le produit cy deſſus par l'un des efficients viendra l'autre.

Preparation à l'Addition & Soubſtraction des Radicaux.

I.

Recognoiſtre ſi deux Radicaux ſont Commenſurables, ou non.

LEs vulgaires & radicaux ſont touſiours incommenſurables, pourtant eſt-ce que la propoſition ne parle que des Radicaux ſoyent donnez $\sqrt{2}$ & $\sqrt{18}$: ſi leur quotient (diviſant l'un par l'autre) eſt inexpliquable, en nombre vulgaire, ils ſeront incommenſurables ; mais eſtant expliquable, comme icy, ils ſeront commenſurables ; car diviſant le grand par le moindre, viendra $\sqrt{9}$, qui eſt expliquable 3. Ou bien ſi on diviſe le moindre par le grand, viendra $\sqrt{\frac{1}{9}}$, qui eſt auſſi expliquable $\frac{1}{3}$: De meſme $\sqrt{8}$ & $\sqrt{18}$ ſont commenſurables, leur quotient eſt $\sqrt{\frac{9}{4}}$ ou $\frac{3}{2}$: ou bien leur moindre quotient ſera $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ou $\frac{2}{3}$: De meſme $\sqrt{3}$ & $\sqrt{27}$ ſeront commenſurables; auſſi $\sqrt{\frac{3}{5}}$ & $\sqrt{\frac{27}{5}}$, mais non pas $\sqrt{2}$ & $\sqrt{6}$, car leur quotient majeur $\sqrt{3}$ eſt inexpliquable en nombre vulgaire, ou bien leur moindre quotient $\sqrt{\frac{1}{3}}$ eſt auſſi inexpliquable ; Or ſi l'un quotient eſt expliquable, auſſi ſera l'autre; ſi non, l'autre ne le ſera non plus.

I I.

Recognoiſtre lequel eſt le majeur de deux nombres propoſez.

NOtez qu'on appelle *un nombre* tant les radicaux ſimples, comme eſt $\sqrt{2}$, ou $\sqrt{5071}$, que les multinomes, comme les binomes $2+\sqrt{5}$, item $7 - \sqrt{48}$, item $\sqrt{26} - 5$, comme les trinomes $4 + \sqrt{2} - \sqrt{17}$, & autres multinomes, car ce qui eſt lié par les ſignes ſoit + ſoit — ne ſont qu'un nombre.

Soyent donnez	$4 + \sqrt{2}$	& $\sqrt{29}$
oſtons $\sqrt{2}$ de chacun, reſtera	4	& $\sqrt{29} - \sqrt{2}$
leurs quarrez	16	$31 - \sqrt{232}$
adjouſtons $\sqrt{232}$ & oſtons 16, viendra	$\sqrt{232}$	15
leurs quarrez	232	225

Et puis que 232 eſt majeur à 225, je conclud que $4 + \sqrt{2}$ ſera majeur à $\sqrt{29}$, car qui à choſe ineſgale adjouſte choſe eſgale, ou oſte choſe eſgale, le majeur demeure touſiours le majeur, & le moindre le moindre.

De meſme 2 ſera trouvé eſtre moindre que $\sqrt{3} + \sqrt{\text{bin.}\ 7 - \sqrt{47}}$. Car oſtez de part & d'autre $\sqrt{3}$; alors d'un coſté reſtera $2 - \sqrt{3}$, & de l'autre $\sqrt{(7 - \sqrt{47})}$, leurs quarrez ſeront $7 - \sqrt{48}$, & $7 - \sqrt{47}$; or $7 - \sqrt{48}$ eſt moindre que $7 - \sqrt{47}$; donc &c.

I I I.

Tout quotient + 1 multiplié par le diviſeur, le produit ſera eſgal à la ſomme du dividende & diviſeur, mais tout quotient — 1 multiplié par le diviſeur, le produit eſt eſgal à l'excez du dividende ſur le diviſeur.

Soit 20 le dividende, & 2 le diviſeur, alors le quotient + 1 ſera 11, lequel multiplié par le diviſeur 2, le produit ſera 22, eſgal à la ſomme de 20 & 2.

Mais le quotient moins 1 ſera 9, lequel multiplié par le diviſeur 2, le produit 18 ſera eſgal à l'excez de 20 ſur 2.

I I I I.

Les choſes heterogenes, ou de diverſe nature, ne ſe doivent meſler; ainſi le bois & le fer ne ſe meſlent pas, en la geometrie les lignes avec les ſuperfices n'entrent point en comparaiſon, auſſi en nombre (& non pas en geometrie) les nombres incommenſurables ne ſe peuvēt meſler, ny par addition, ny ſoubſtraction; car adjouſtez 2 avec $\sqrt{3}$, viendra $2 + \sqrt{3}$; oſtez $\sqrt{3}$ de 2, reſtera $2 - \sqrt{3}$: c'eſt quaſi comme qui diroit, adjouſtez 2 francs avec 3 ſols, il ne faut pas dire 2 & 3 font 5, mais bien la ſomme ſera fera 2 francs & 3 fols, &c. il y a bien des chofes diverfes qui fe peuvent adioufter, comme qui adioufteroit 5 hommes, 3 femmes, & 4 enfans, on pourra dire que la fomme eft 12 perfonnes : De mefme 6 bœufs, 8 moutons, & 2 chameaux, font 16 animaux ; car alors il faut donner à la fomme un nom du genre plus pres qui comprend telles efpeces, mais icy nous ne pouvons dire que ce foyent chofes heterogenes, car 2 & $\sqrt{5}$ peuvent eftre dits de chofes homogenes, comme ligne & ligne ; ou angle & angle, &c. mais il y a cela feulement que les nombres font incommenfurables.

Addition des Radicaux.

I. Des Incommenfurables.

Soyent $\sqrt{2}$ & $\sqrt{3}$ radicaux, lefquels pource qu'ils font incommenfurables, leur fomme fera $\sqrt{2} + \sqrt{3}$: de mefme 5 & $\sqrt{7}$, font enfemble $5 + \sqrt{7}$.

II. Des Commenfurables.

Soyent $\sqrt{2}$ & $\sqrt{18}$ Radicaux a adioufter.

$\sqrt{18}$ | $\sqrt{9}$, ou bien 3
$\sqrt{2}$ |

$+ 1$

4, ou bien $\sqrt{16}$

$\sqrt{2}$

$\sqrt{32}$ pour la fomme requife.

De mefme $\sqrt{3}$ & $\sqrt{48}$ feront enfemble $\sqrt{75}$: auffi $\sqrt{7}$ & $\sqrt{7}$ feront $\sqrt{28}$, item $\sqrt{5}$ & $\sqrt{5}$, & $\sqrt{5}$ feront $\sqrt{45}$: car on pourroit faire cefte addition en multipliant $\sqrt{5}$ par 3 (qui eft $\sqrt{9}$) & viendra $\sqrt{45}$, comme dit eft.

Adiouftez $\sqrt{18}$ & $\sqrt{8}$: leur quotient fera $\sqrt{\frac{18}{8}}$, ou $\sqrt{\frac{9}{4}}$, qui s'explique $\frac{3}{2}$, auquel adioufté 1, viendra $\frac{5}{2}$, qui vaut $\sqrt{\frac{25}{4}}$, lequel multiplié par le divifeur $\sqrt{8}$, viendra $\sqrt{50}$, pour la fomme requife : de mefme adiouftez $\sqrt{1\frac{3}{7}}$, & $\sqrt{5\frac{5}{7}}$, viendra $\sqrt{12\frac{6}{7}}$. Mais quand on voudra eviter telles fractions, on pourra fuivre cefte regle de la 4[e] propofition du deuxiefme des Elemens d'Euclides.

Soit

Soit a adjouster √ 18 & √ 8.
Leur double produit est 24
La somme de leurs quarrez 26

font 50
la √ est √ 50 pour la somme requise.

Soubstraction des Radicaux.

I. Des Incommensurables.

OStez √ 3 de √ 6, restera √ 6 — √ 3 : ostez 2 de √ 5, restera √ 5 — 2 : que si on disoit, ostez 7 de √ 48, il seroit impossible : car √ 48 est moins que 7, toutesfois la solution est √ 48 — 7.

I I. Des Commensurables.

QVand les radicaux sont commensurables, il faut faire comme en l'addition, horsmis que là on adjouste l'unité, & icy il en faut oster l'unité.

Ostez √ 10 de √ 90 : divisez premierement le grand par le moindre.

√ 90
√ 10 | quotient √ 9, ou bien 3

—1

2 qui vaut √ 4
√ 10

√ 40 pour le residu requis.

Item ostez √ 8 de √ 50 : leur quotient est √ $\frac{50}{8}$, ou √ $\frac{25}{4}$, qui vaut $\frac{5}{2}$, ostez en l'unité restera $\frac{3}{2}$, qui vaut √ $\frac{9}{4}$, lequel multiplié par le diviseur √ 8, viendra √ 18 pour le residu requis ; de mesme ostez √ 1 $\frac{1}{7}$ de √ 12 $\frac{6}{7}$, restera √ 5 $\frac{1}{7}$. Pour eviter les fractions on fera comme s'ensuit : pour oster √ 8 de √ 18. la somme des quarrez 26, leur double produit 24, reste 2, sa √ est √ 2, pour le reste requis.

Et à fin de donner matiere d'exercice aux apprentifs, je mettray la Table suivante seulement pour l'addition, car qui sçaura l'addition, entendra aussi bien la soubstraction.

adjoustez

adjoustez	2	avec	$\sqrt{3}$	faict	$2+\sqrt{3}$
	$3-\sqrt{2}$		$\sqrt{18}$		$3+\sqrt{8}$
	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$		$\sqrt{27}-\sqrt{20}$		$\sqrt{48}-\sqrt{5}$
	$\sqrt{(2+\sqrt{3})}$		$\sqrt{(50+\sqrt{1875})}$		$\sqrt{(72+\sqrt{3888})}$
	$\sqrt{(2+\sqrt{7})}$		$\sqrt{10}$		$\sqrt{10}+\sqrt{(2+\sqrt{7})}$
	$\sqrt[3]{16}$		$\sqrt[3]{54}$		$\sqrt[3]{250}$
	$\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})}$		$\sqrt[3]{(54+\sqrt{1458})}$		$\sqrt[3]{(128+\sqrt{8192})}$

Touchant la diviſion des multinomes radicaux, ſoit à diviſer $35+\sqrt{588}$ par $5+\sqrt{12}$: on les diſpoſera comme il faut, le diviſeur ſous le dividende; diſant combien de 5 en 35, il y a 7 fois; donc 7 fois 5 ſont 35, de 35 reſte rien; puis 7 fois $\sqrt{12}$ eſt $\sqrt{588}$, de $\sqrt{588}$ reſte rien: ainſi que le quotient eſt 7: mais quand la diviſion ne ſuccede pas ſans reſter, comme ſi on veut diviſer $30+\sqrt{720}$ par $3+\sqrt{5}$, en faiſant comme devant, combien de 3 en 30? il y a 10 fois; donc 10 fois 3 ſont 30, de 30 reſte rien; puis 10 fois $\sqrt{5}$ ſont $\sqrt{500}$, leſquels oſtez de $\sqrt{720}$, reſte $\sqrt{20}$ [il ne faut eſtre eſmerveillé qu'oſtant $\sqrt{500}$ de $\sqrt{720}$, il ne reſte que $\sqrt{20}$, car voyez la ſoubſtraction cy devant] donc le quotient ſeroit $10\frac{\sqrt{20}}{3+\sqrt{5}}$ que ſi on amplifie la fraction par $3-\sqrt{5}$ (binome disjoinct correſpondant au nominateur conjoint) on aura $10+\sqrt{11\frac{1}{4}}-2\frac{1}{2}$ c'eſt $7\frac{1}{2}+\sqrt{11\frac{1}{4}}$ pour le quotient requis.

Autrement on pouvoit d'abord amplifier les nombres donnez (car on les peut amplifier ou abreger comme on voudra, comme les nottes des rompus) par un nombre qui correſpond au diviſeur, comme icy par $3-\sqrt{5}$, à fin que le diviſeur ſoit ſimple nom, alors on aura $30+\sqrt{180}$ à diviſer par 4 (au lieu de $30+\sqrt{720}$ par $3+\sqrt{5}$) viendra comme devant: & ainſi des autres.

Diviſez	$\sqrt{8}+\sqrt{6}$	par	$2+\sqrt{2}$	viendra	$\sqrt{8}+\sqrt{6}-2-\sqrt{3}$
	18		$4+\sqrt{7}$		$8-\sqrt{28}$
	$\sqrt{8}+\sqrt{6}$		$\sqrt{8}+\sqrt{6}-2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{2}$
	$10+\sqrt{8}$		$2+\sqrt{2}$		$8-\sqrt{18}$
	$\sqrt{72}+\sqrt{12}$		$\sqrt{6}+\sqrt{3}$		$\sqrt{48}+\sqrt{8}-\sqrt{24}-2$
	$\sqrt{32}+\sqrt{27}+5+\sqrt{6}$		$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$		$3+\sqrt{2}$

Soit à diviſer $\sqrt{32}+\sqrt{27}+5+\sqrt{6}$ par $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$: multipliez l'un & l'autre par le correſpondant trinomie du diviſeur qui eſt $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ou $-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ou $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (tellement que ce ſoit quelque choſe n'importe, or $-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1$ eſt moins que rien, toutesfois on ne delaiſſeroit d'en venir à bout, car multipliant l'un & l'autre on aura $-12-\sqrt{32}-\sqrt{48}-\sqrt{24}-\sqrt{96}$ & diviſeur $-4-\sqrt{24}$ leſquels autrefois multipliez par le correſpondant du diviſeur $-4+\sqrt{24}$, on aura un ſimple diviſeur : mais quand il eſt poſſible comme icy, j'aymerois mieux prendre $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$, pour amplifier les donnez, car de premier abord j'auray un nombre ſimple pour diviſeur aſſavoir $\sqrt{8}$, & pour dividende $4+\sqrt{72}$, donc le quotient ſera $\sqrt{2}+3$: notez que quand on multiplie $\sqrt{32}+\sqrt{27}+5+\sqrt{6}$ par $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$, alors il y a trois nombres communs $8+5-9$, qui valent 4 ; & puis $\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{75}$, qui n'eſt rien, non plus que $\sqrt{54}+\sqrt{6}-\sqrt{96}$, mais $\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$, vaut $\sqrt{72}$, comme en l'addition & ſoubſtraction precedente.

Notez auſſi que pluſieurs trinomes ſe peuvent multiplier par des nombres facils a trouver, ainſi que leur produit ſoit nombre ſimple : comme quand le quarré de l'un eſt eſgal aux quarrez des deux autres, exemple $\sqrt{2}+3+\sqrt{11}$, icy le quarré de 11 eſt eſgal aux quarrez de $\sqrt{2}$ & de 3, iceluy $\sqrt{11}$ ayant d'un coſté plus on prendra un moins s'il eſt poſſible, autrement on changera les deux autres comme icy.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{2}+3+\sqrt{11} \\ & \sqrt{2}+3-\sqrt{11} \\ \hline \text{produit} & \sqrt{72} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 5-\sqrt{2}+\sqrt{27} \\ & -5+\sqrt{2}+\sqrt{27} \\ \hline \text{produit} & \sqrt{200} \end{array}$$

Car alors le produit, eſt le double produit des deux moindres nombres. aucunefois il y a un quadrinome, & trinome qui produiſent un ſimple nombre, comme $\sqrt{80}+\sqrt{108}-\sqrt{150}-\sqrt{10}$, & $3+\sqrt{5}+\sqrt{10}$, car leur produit eſt 28 ſeulement ; puis que $20+18-10$ eſt 28 : & $\sqrt{800}-\sqrt{450}-\sqrt{50}$ n'eſt rien, ny non plus $\sqrt{540}+\sqrt{240}-\sqrt{150}$, ny auſſi $\sqrt{1080}-\sqrt{750}-\sqrt{30}$.

De l'extraction des Racines des multinomes Radicaux.

Et premierement de l'extraction de la racine quarree des binomes.

Tout ainſi qu'à l'extraction de la racine quarrée des nombres on pourroit dire que la racine quarrée de 25 eſt $\sqrt{25}$, mais à cauſe qu'on la peut expliquer quelquefois comme icy 5, & aucunefois non juſtement, comme la racine quarrée de 3 eſt $\sqrt{3}$, ainſi auſſi és binomes la racine

cine quarrée de $7+\sqrt{48}$, eſt $\sqrt{(7+\sqrt{48})}$ mais on la peut expliquer plus clairement, aſſavoir $2+\sqrt{3}$; & aucunefois non pas ſi clairement comme la racine quarrée de $3+\sqrt{7}$, eſt $\sqrt{(3+\sqrt{7})}$ or Euclides deſcrit 6 eſpeces de binomes conjoincts par $+$ comme deſſus, & 6 binomes disjoincts par $-$: dont les trois premiers tant des conjoincts que disjoincts, reçoivent racine.

Regle generale pour extraire la $\sqrt{}$ des binomes.

Soit donné $7+\sqrt{48}$ il faut trouver ſa racine.

quarrez des noms	49 / 48
difference	1
ſa racine quarrée	1
Conjuguée avec le majeur nom	7
Donne ſomme, & difference,	8 & 6
Les moitiez	4 & 3
La $\sqrt{}$ de chacun eſt	2 & $\sqrt{3}$

Leſquels liez avec le meſme ſigne donné $2+\sqrt{3}$ ſera la racine requiſe. Tellement que la $\sqrt{}$ du binome disjoinct $7-\sqrt{48}$ ſera $2-\sqrt{3}$, & ainſi des autres : comme la $\sqrt{}$ du binome conjoinct $6+\sqrt{32}$ ſera $2+\sqrt{32}$: item la racine quarrée du binome $\sqrt{18}+4$ ſera $\sqrt{\sqrt{8}}+\sqrt{\sqrt{2}}$: finalement la racine quarrée de $\sqrt{80}+\sqrt{60}$ eſt $\sqrt{\sqrt{45}}+\sqrt{\sqrt{5}}$.

Mais de ceux leſquels on ne peut pas reüſſir comme deſſus ſans commettre petition de principe on fera comme s'enſuit : la racine quarrée de $5+\sqrt{12}$, c'eſt $\sqrt{}$ binomie $5+\sqrt{12}$, ou ainſi marqué $\sqrt{(5+\sqrt{12})}$ que ſi on ſe veut ſervir de la reigle precedente, en commettant la petition de principe, on dira que c'eſt,

$$\sqrt{(2\tfrac{1}{2}+\sqrt{3\tfrac{1}{4}})}+\sqrt{(2\tfrac{1}{2}-\sqrt{3\tfrac{1}{4}})}$$

lequel vaut autant que $\sqrt{(5+\sqrt{12})}$

Semblablement $\sqrt{(5-\sqrt{12})}$ vaudra $\sqrt{(2\tfrac{1}{2}+\sqrt{3\tfrac{1}{4}})}-\sqrt{(2\tfrac{1}{2}-\sqrt{3\tfrac{1}{4}})}$

Touchant donc la racine des binomes, il faut ſçavoir, comme il a eſté dit, qu'il n'y en a que de trois ſortes, deſquelles on puiſſe proprement extraire la racine, (j'appelle binome tant conjoint par $+$ que disjoint par $-$, & ce qui ſe dit de l'un ſe peut entendre de l'autre :) aſſavoir binome premier, ſecond & troiſieſme; mais des 4, 5, & 6ᵉ binomes, on ne peut pas l'extraire ſans plus grand inconvenient.

Or la racine de binome premier, eſt binome.

√ de binome deuxiesme est bimedialle premiere.

√ de binome troisiesme est bimedialle seconde.

Voila tout, il est vray que des six, qu'Euclide appelle Binome, bimedialle tant premiere que seconde, Ligne majeure. Ligne pouvant un rationel & un medial, & finalement de la ligne pouvant deux mediaux: le quarré-quarré d'une chacune est binome premier : & ainsi des residus ou disjoints.

Le binome premier multiplié par un nombre absolu ou commun fera un binome premier : comme $3+\sqrt{5}$ par 2, fait $6+\sqrt{20}$.

Le binome premier multiplié par un simple radical, tel que le moindre nom du produit soit absolu, ledit produit sera binome deuxiesme, comme $3+\sqrt{5}$ multiplié par $\sqrt{20}$, viendra $\sqrt{180}+10$ binome second.

Le binome premier multiplié par un simple radical, tel que le moindre nom soit encor radical (c'est à dire tous deux) ledit produit sera binome troisiesme : comme $3+\sqrt{5}$ par $\sqrt{3}$, viendra $\sqrt{27}+\sqrt{15}$ binome troisiesme.

Or binome premier, est lors que le majeur nom est absolu, & la difference des quarrez des deux noms est aussi quarré : comme $5+\sqrt{21}$ est binome premier, la difference des quarrez 25 & 21 est 4, qui est aussi quarré.

La ligne majeure est admirable en cela, que le majeur nom est aussi une ligne majeur, & le moindre nom est une ligne appellée mineur, & ainsi à l'infiny : de mesme de la mineur.

Finalement la racine quarrée des multinomes se pourra faire suyvant la maniere dont les autres autheurs se sont servy ; ce que j'eusse mis icy, n'eust esté pour eviter prolixité, & aussi pource que je n'ay rien cerché de commode là dessus, n'y rien d'extraordinaire, seulement ay escrit une reigle à l'extraction Cubique, des binomes Cubes, comme s'ensuit: car n'estant Cubes, ils n'auront nulle autre solution, que par la petition de principe, mettant une marque devant, que la racine Cubicque s'en doit extraire: faut noter en passant que personne n'en a donné de meilleure, celle de Raphael Bombelle ne vaut rien.

Reigle servant à l'extraction de la racine Cubicque des binomes.

L'Extraction Cubicque des binomes n'estant encor inventée de personne, on se pourra servir de la reigle suyvante.

Soit

Soit à extraire la œ de $72+\sqrt{5120}$.

quarrez des noms	$\left\{\begin{array}{l}5184\\5120\end{array}\right.$	
difference	64	
dont la racine Cubicque	4	

Ce 4 monstre que les quarrez des noms requis different de 4; & que l'absolu 72 estant nom majeur, qu'aussi en la racine requise le majeur nom sera absolu: D'avantage les majeurs noms sont commensurables, aussi les mineurs de la puissance & racine.

$2+\sqrt{0}$	Donc ayant fait une table comme icy à costé, où les quarrez
$3+\sqrt{5}$	des absolus excedent les quarrez des radicaux en 4 (assavoir
$4+\sqrt{20}$	4 susmentionné) on doit estre certain que le binome requis
$5+\sqrt{29}$	sera dans icelle table; si non, la racine Cubicque requise ne se
&c.	pourra exprimer qu'ainsi œ $(72+\sqrt{5120})$.

Et pour cognoistre si la table est assez prolongée, il faut voir si le majeur nom du dernier binome 5, est plus que racine Cubicque du majeur nom donné 72 (ou bien si $\sqrt{29}$ est plus que œ $\sqrt{5120}$) ce qu'estant ainsi cela me certifiera en avoir assez.

Parquoy pour venir à l'inquisition de la racine Cubicque, voicy comment: je considere quel nombre c'est, qui entre les noms majeurs, mesure le majeur nom donné, & en remarque plusieurs comme le 2, le 3, & le 4, je fais de mesme avec les moindres noms & trouve $\sqrt{5}$ aussi $\sqrt{20}$, & qui plus est commensurables, au donné $\sqrt{5120}$: mais puis que $\sqrt{20}$ est plus que la racine Cubicque du donné $\sqrt{5120}$, il ne vaudra rien, & conclud que $3+\sqrt{5}$ sera la racine Cubicque requise de $72+\sqrt{5120}$; laquelle racine Cubicque doit avoir le mesme signe que sa puissance; assavoir la racine aussi bien que la puissance, selon + ou —: (Notez que cest A, 4 est tousjours le $\frac{1}{3}$ du nombre des ①, de l'equation qui estoit l'origine de ceste question Cubicque.) Mais pour en estre plus certain, il la faudra faire passer ceste espreuve.

B C
$3+\sqrt{5}$.

Quarré de B	9
triple quarré de C	15
somme	24
lequel multiplié par B	3
viendra	72 qui doit estre l'un des deux noms correspon-

dant à B premierement pris.

Seconde preuve.

Quarré de C	5
triple quarré de B	27
ſomme	32
lequel multiplié par C	√ 5
viendra	√5120 qui doit eſtre l'autre nom correſpondant à C.

Ceſte preuve eſt plus facile que de Cuber la racine trouvée : elle eſt tirée de la ſuyvante figure.

Soit un binome conjoint $B+C$.
Son Cube ſera $B\,(B\,q + C\,{}^{3}_{q}) + C\,(B\,{}^{3}_{q} + C\,q)$

Soit un binome disjoint $B — C$
Son Cube ſera $B\,(B\,q + C\,{}^{3}_{q}) — C\,(B\,{}^{3}_{q} + C\,q)$

Tellement que le majéur nom de la puiſſance eſt commenſurable au majeur nom de la racine, & auſſi le mineur au mineur (ſi la racine n'eſt enveloppée d'autre marque plus eſloignée que √.)

Notez que le quarré de la diagonale d'un cube, eſt triple au quarré du coſté d'iceluy.

Conſtruction Algebraïque ſur les Queſtions.

ON y procede le plus ſouvent comme aux fauſſes poſitions ; lors qu'il faut adjouſter ou ſoubſtraire, on meſle les homogenes, aſſavoir les (1) avec les (1) : les (2) avec les (2), &c. mais les heterogenes (comme les (0) avec les (1) ou autres, ou bien les (1) avec les (2), ou autres plus hautes) par + & —. Quant à la multiplication on n'obſerve pas les homogenes, on adjouſte les caracteres comme en la Diſme, de meſme pour la Diviſion, horſmis qu'on ſoubſtrait le caractere du diviſeur de celuy du dividende, le reſte, pour celuy du quotient. Multipliez 4(1)+2 par 8(2)—4(1)+2 viendra 32(3)+4, au produit : Diviſez le produit par l'un des efficients il viendra l'autre : on doit bien entendre les fractions de l'Arithmetique commune. Quant aux extractions on fait de meſme qu'aux entiers, ſinon que l'on n'extrait les racines que des puiſſances parfaictement quarrées ou Cubes, &c. autrement on ſe contente de l'appoſition au devant. On poſera donc (pour ſuivre les fauſſes poſitions) 1 (1) pour le commencement, ou 1 (2) : mais on doit avoir eſgard qu'en ſe reiglant

glant ſelon les conditions, qu'en procedant on n'admette des quantitez ou des nombres rompus : ce qui ſert à la facilité : On taſche auſſi d'eviter de parvenir à la fin, a des equations complettes (voyez la troiſieſme definition cy apres.) Pour donc reſoudre une queſtion, il la faut remettre en queſtion de nombres abſtracts, ſans parler (ſi on peut) de matiere, comme d'eſcus, pieds, &c. Finalement il y a la poſition, les conditions (dont la derniere fait l'equation ſi la queſtion n'eſt defaillante) la reduction, puis la ſolution de l'equation ordonnée : voyez les queſtions de Diophante, reduites en ſix livres, dans l'Arithmetique de Stevin, qu'avons fait depuis peu r'imprimer, en l'an 1625, avec quelques augmentations, corrections & explications.

De la reduction Algebraïque.

IE parleray de la reduction fort briefvement, comme choſe aſſez amplement deſcrite par Stevin, en dix reigles, apres le ſoixante cinquieſme probleme de ſon Arithmetique, page 250 de la nouvelle edition. Et pour dire la verité j'euſſe bien deu rameliorer pluſieurs choſes là meſme, ce que j'aurois fait, n'euſt eſté que mes occupations ordinaires ne m'en donnoyent le loiſir, comme entre autre choſes, en ſa quatrieſme reigle des reductions, il falloit dire que la ſuperieure quantité doit eſtre ſeule, avec le ſigne +, devant les autres, avec le nombre 1, principalement ſi cela ſe peut faire commodement ſans les fractions, & que les autres ſoyent miſes par ordre ſelon leurs quantitez.

Mais puis que ceſt ordre là n'eſt pas ſeul, & qu'il y en a d'autres, comme l'inferieure quantité, (ou bien le nombre abſolu ſeul au conſequent, pour ſeparer le cogneu d'avec l'incogneu) & auſſi l'ordre alternatif, comme on verra en la definition dixieſme ſuivante, qui eſt nouveau, propre pour quelque choſe de particulier : il faut ſçavoir que les reductions reçoivēt encor d'autres reigles qu'il n'en eſcrit, comme il le dit auſſi à la fin. Pour n'eſtre pas long je mettray icy quelques briefves reigles en general.

l'Addition Et la ſoubſtraction	ſert contre	le deſordre, redondance & defaut.
La multiplication		les fractions, des nombres, ou quantitez en general.
La diviſion		les grands nombres, auſſi des quantitez.
La puiſſance		l'Aſymetrie, & trop grande depreſſion.
l'Extraction		les Exaltations exceſſives des quantitez.
l'Iſomere		l'intemperance des nombres ſeulement.

Item

Item és postposées quantitez, on fait la reduction (s'il y a equation) pour eviter la pluralité des postpositions, & aussi l'on met seule celle-la qu'on veut quitter; & finalement les Equations servent a se defaire de toutes les positions, tant preposition que postpositions.

I'eusse donné des exemples des reigles susmentionnées, mais estant assez communes, je ne parleray que de l'Isomere comme s'ensuit.

De l'Isomere.

L'Isomere est contre l'intemperance des nombres seulement, & non pas des quantitez; les valeurs varient, on opere non pas seulement par multiplication pour se despestrer des fractions, mais aussi par division pour s'affranchir des grands nombres : or tout se fait avec des nombres continuellement proportionnaux.

Premierement contre les fractions.

Soit 1(3) esgale à $1\frac{1}{2}$(1)+5: Il faut mettre toutes les quantitez obmises comme icy les (2)

assavoir 1(3) esgale à 0(2)+$1\frac{1}{2}$(1)+5, posez les proportionnaux dessous ainsi. 1. 2. 4. 8.

produits 1(3) esgale à 6(1)+40 la valeur

de 1(1) estant trouvée 4, il faudra le multiplier par $\frac{1}{2}$ (qui sont premier & deuxiesme termes des nombres proportionnaux cy dessus) viendra 2 pour la valeur de 1(1) de l'equation proposée premierement.

Secondement contre les grands nombres.

Soit 9(2) esgale à 72(1)+1456. Divisez par nombres

proport. 9 . 12 . 16

quotients 1(2) esgale à 6(1)+91 là où 1(1) vaut 13 & —7

lesquelles solutions divisez (car on a divisé par les nombres proportio.) par $\frac{9}{12}$ qui est la raison cy dessus, ou $\frac{3}{4}$ viendra $17\frac{1}{3}$ encor —$9\frac{1}{3}$, pour les solutions requises.

Tierce-

Tiercement contre l'Assymetrie.

Soit 1 ③ esgale à 14① — √288 ; il y a defaut des ② qu'il faut premierement remettre

ainsi	1③ esgale à 0② + 14① — √288
diviseurs prop.	1. √2. 2. √8.
quotients	1 ③ esgale à 7① — 6

dont la valeur de 1 ① vaut $\begin{cases} 1 \\ 2 \\ -3 \end{cases}$

lesquels divisez par la raison cy dessus de $\frac{1}{\sqrt{2}}$

viendra pour les valeurs requises de l'equation proposée. $\begin{cases} \sqrt{2} \\ \sqrt{8} \\ -\sqrt{18} \end{cases}$

Des Equations ordonnées.

LEs conditions, d'une proposition, achevées, on vient à une equation, que s'il n'y a pas assez de conditions pour amener le tout à l'equation, & que les nombres Algebraiques ayent en eux les proprietez & conditions requises, alors la question sera defaillante, & recevra autant de solutions qu'on voudra, si l'on admet les moins ; que si l'on n'admet les nullitez, & les moins, elle sera tant plus restrainte, & faut limiter & determiner les solutions, & ce par le moyen des moins, qui se trouvent illec, autrement s'il ny a des moins, il ny aura pas de restriction ou determinaison.

Que si on peut resoudre la proposition sans se servir de toutes les conditions, elle sera excedente, & faut retrencher la derniere condition, si elle repugne : Que si finalement la proposition peut faire parvenir à une equation, la proposition sera pleine & entiere ; mais si l'equation est desordonnée, prolixe, & vitiée, il la faut preparer par la reduction, & l'ayant polie, l'appeller equation ordonnée, de laquelle nous avons à parler : & est preste à recevoir la derniere main.

L'equation ordonnée n'est rien, si on ne la resoud, & est le nœud principal de la question, & pour n'estendre ce discours hors des limites, parlons de la premiere, pour la delaisser doresnavant.

Quand les ② sont esgales à ① ⓪

Par exemple soit 5 ② esgale à 18 ① + 72.

la moitié du nombre des ① est	+ 9
son quarré	+ 81
auquel adjousté le produit de 5 fois + 72 qui est	+ 360
la somme	+ 441
sa √ est	+ 21
lequel adjousté, & osté du premier en l'ordre	30
viendra	— 12

Chacun desquels divisé par le 5 viendra 6 aussi — $\frac{12}{5}$ valeurs de 1 ①

Et ainsi faut-il faire des autres deux accidens de ceste premiere equation : Notez aussi, que la racine de 441 est + 21 aussi — 21 ; mais au lieu de ceste difficulté, là on fera une addition & soubstraction, ou se trouvent 30, ou — 12, autrement on n'eust eu besoin que d'adjouster.

Notez aussi qu'où les ⓪ sont moins, il y a plus de solutions par + qu'autrement, & ce en toutes les equations : Or les solutions par — ne se doivent obmettre.

Finalement quand quelques ② sont esgales à ① — ⓪, il se peut faire que l'equation seroit impossible, comme si 1 ② estoit esgale à 6 ① — 25, alors la valeur de 1 ① seroit inexpliquable, assavoir 3 + √ — 16 ou 3 — √ — 16, ce qui peut arriver seulement aux equations là où le ⓪ est —, & qui sont ambigues, c'est à dire qui reçoivent plus d'une solution par + : & ainsi s'entendra des autres equations.

Quant à l'ambiguité des equations, on choisit la solution la plus commode, si on ne les veut accepter toutes.

On doit aussi recercher toutes les solutions, pource qu'elles donnent plus d'intelligence de ce qu'on cerche, car par exemple; si 1 ② est esgale à 16 ① — 28, on en peut faire une question, disant : il y a deux nombres dont la somme est 16, & leur produit 28 : (la maniere & la raison que cest une telle question, se verra cy apres) ceux-là seront 2 & 14, & chacun est la valeur de 1 ①, & n'en y a pas d'avantage.

Quand 1 ③ est esgale à ① & ⓪

Icy se trouvent les autheurs fort empeschez, & pour dire la verité en chose fort difficile, & pour ne faire trop de discours entrons en la maniere ordinaire restituée.

Soit

Soit 1 ③ esgale à 6 ① + 40

le $\frac{1}{3}$ du 6 est 2	$\frac{1}{2}$ est 20
son cube 8	son □ est 400
	ostez 8
	392

sa √ est √ 392

lequel adjousté à 20 & soubstraict de 20, viendra $\begin{cases} 20 + \sqrt{392} \\ 20 - \sqrt{392} \end{cases}$

la racine cubicque de chacun est $\begin{cases} 2 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{cases}$

la somme est 4 pour la valeur de 1 ①

Voila donc la valeur de 1 ① en perfection, or tout ainsi comme il y a des binomes comme les 4^e, 5^e & 6^e, desquels on ne peut extraire la racine quarrée qu'en posant devant la marque √ bino. comme il a esté dit cy dessus, aussi y a-il des binomes desquels on ne peut autrement extraire la racine cubicque qu'en apposant une marque & enseigne au devant, comme ∛ bino. sans qu'il y ait de l'imperfection en cela, non plus qu'à la racine de 5, donnant pour solution √ 5.

Or la racine cubicque d'un binome estant extraicte, comme nous en avons donné une reigle cy dessus, il s'ensuit de là, qu'on pourra tousjours resoudre ceste equation, horsmis là où on ne pourra oster le Cube du tiers du nombre des ①, du quarré de la moitié des ⓪, & quand cela arrivera, on fera comme s'ensuit.

Reigle pour resoudre l'equation de 1 ③ esgale à ① + ⓪ lors que le cube du tiers du nombre de ① est majeur au quarré de la moitié des ⓪ par l'aide des tables de Sinus.

Soit 1 ③ esgale à 13 ① + 12

Le tiers du nombre des ① est 4$\frac{1}{3}$	la moitié du ⓪ est 6
sa √ est en disme ☞ 20816 ④	le raid 100000
leur produit est 9,0203 ④, diviseur	leur produit 600000, dividende

Or ayant ainsi un dividende & diviseur, on aura un quotient 66515

Sinus de	41 deg.	41'.	37''.
adjoustez y par reigle	180		
somme	221.	41.	37
son tiers	73.	53.	52
son sinus	96078		
son double	192156		
multiplié par ☞	20816 (4)		
viendra	400000		
lequel divisé par le raid	100000		

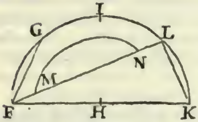
viendra 4 la valeur de 1 (1) principale

Car il y a encor deux valeurs qui sont chacune faite par —; parquoy appliquant (1) à la valeur trouvée 4, & ledit 4 divisant l'(0) donné 12: viendra 3, donnant le signe — à chacun, puis par reigle

1 (2) esgale à — 4 (1) — 3

les valeurs seront — 1 & — 3

Donc les 3 valeurs requises seront $\begin{cases} 4 \\ -3 \\ -1 \end{cases}$



Le mesme en Geometrie de facile expedition.

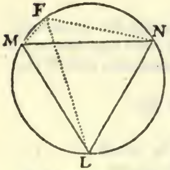
Cy dessus 1 (3) estoit esgale à 13 (1) + 12 Le $\frac{1}{3}$ du 13 est $4\frac{1}{3}$, entre iceluy & l'unité soit trouvé une moyenne proportionnelle F H, icelle comme raid soit fait un demicercle, Or ledit $4\frac{1}{3}$ divisant le 12 donné, viendra $2\frac{10}{13}$, qui sera tousjours moindre au diametre de necessité, en l'accident present selon le tiltre de ceste equation : soit donc F G adaptée esgale à $2\frac{10}{13}$, puis soit trouvé geometriquement par le moyen de l'hyperbole le tiers de l'arc G K, ou bien mechaniquement avec le compas, (car il est impossible de coupper tout arc proposé en 3, sans user d'autres lignes que la droite & circulaire) & soit L K, puis de l'intervalle de la droite L K, comme raid, soit fait l'arc M N homocentrique,

trique , couppant la ligne F L en M , N , alors les trois valeurs de la 1 ①

$$\text{ſeront} \begin{cases} \;\;FL \\ -FN \\ -FM \end{cases}$$

Notez , que ſi on euſt propoſé 1 ③ eſgale à 13 ① — 12 , les trois valeurs euſſent eſté les meſmes , apres avoir changé les ſignes , aſſavoir

$$\begin{cases} -FL \\ \;\;FN \\ \;\;FM \end{cases}$$



On euſt peu faire dans le cercle entier , apres avoir trouvé F L comme deſſus , un triangle equilateral commençant en L ou à F , comme icy en L , puis de l'autre extremité F mener F M & F N , qui devront eſtre eſgales aux F M , F N precedentes ; auſſi M N ſe trouveroit eſtre eſgale à $\sqrt{13}$ (des 13 ① données.)

Ceſte equation donc qu'on n'a peu faire juſques à preſent eſt en Algebre litterale.

A cube eſgal à (B q + B C + C q) A + B C (B + C) par l'aide de laquelle je l'avois bien reſoute par deux ou trois manieres ſans les Tables de Sinus ; mais la maniere generale qui ſuivra en ſon lieu eſt à preferer: or icy A vaut B + C , ou — B , ou — C.

Quand 1 ③ eſgale à ① — ⓪

Les Autheurs ne pouvoyent faire celle-cy non plus , puis qu'ils la renvoyoyent à la precedente , ſans recognoiſtre qu'elle ne pouvoit eſtre rapportée à icelle en general , veu qu'ils n'avoyent pas fait la determinaiſon de la preſente comme s'enſuit.

Determinaiſon : *Il faut icy que le cube du $\frac{1}{3}$ du nombre des ① ne ſoit moindre au quarré de la moitié du ⓪, autrement l'equation eſt abſurde & inepte.*

Lequel accident a eſté tousjours ignoré, & ſa determinaiſon, puis qu'il eſtoit fondé ſur une choſe incogneuë.

Icy il faut ſeulement changer le — en + , & la reſoudre par la precedente ; & ayant les trois ſolutions, il les faut oſter de o, alors on aura les trois ſolutions requiſes, car icy il y a deux ſolutions, chacune plus que rien, & l'autre moins que rien, c'eſt à dire —.

Exemple ſi 1 ③ eſt eſgale à 30 ① — 36; on changera le moins a part, ou aura par la precedente oſtez les de 0, c'eſt changer les ſignes $\left\{\begin{array}{r} 6 \\ -3+\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} \end{array}\right.$

viendra $\left\{\begin{array}{r} -\quad 6 \\ 3-\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} \end{array}\right.$ | chacune eſt la valeur de 1 ①

De meſme ſi 1 ③ eſt eſgale à 12 ① — 16, alors la 1 ①

vaudra $\left\{\begin{array}{r} -4 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right.$ | & ainſi des autres

Mais ſi 1 ③ eſt eſgale à 12 ① — 17 (ou davantage que 17 comme 18, 19; &c.) alors l'equation eſt inepte & abſurde, auſſi bien que 1 ② eſgale à 6 ① — 10 de laquelle equation la determinaiſon eſt auſſi manifeſte.

Quand 1 ③ eſt eſgale à — ① + ⓪

Soit 1 ③ eſgale à — 6 ① + 20

tiers du — 6 eſt — 2	$\frac{1}{2}$ de 20 eſt	10
ſon cube, — 8	ſon quarré	100
	auquel adjouſté	— 8
	viendra	108
	ſa √ eſt	√ 108

lequel adjouſté & ſoubſtraict de 10 cy deſſus

viendra $\left\{\begin{array}{l} 10+\sqrt{108} \\ 10-\sqrt{108} \end{array}\right.$

les racines cubicques de chacun $\left\{\begin{array}{l} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{array}\right.$

ſomme 2 valeur de 1 ①

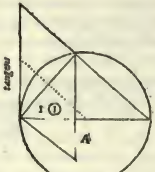
Il ne faut pas trouver eſtrange, que j'ay mis cy deſſus des choſes qui ſont moins que rien, comme 10 — √ 108, ſa cc eſt 1 — √ 3; cela eſt pour monſtrer la generalité de l'anteprecedente.

Or quand ceſt que la valeur de 1 ① ſera aſymmetre, on la pourra trouver par l'extraction de la racine cubicque deux fois comme les binomes le monſtrent: Autrement voicy une petite reigle par le moyen des Tangentes & Sinus d'eſtrange & facile operation.

Soit

Soit 1 (3) esgale a — 24 (1) + 56

$\frac{56}{24}$ me donne le diametre 200000 , combien $\sqrt{}$ 24 , ou 4899 (3) ?
viendra 419885 A
Sinus 100000 prins a plaisir ou le plus pres du vray qu'on pourra.
somme 519885
$\frac{1}{2}$ est 259942 tangente de 68. 58
son double 137, 56
son Sinus 66999 au lieu de celuy a plaisir
A 419885
somme 486884
$\frac{1}{2}$ est 243442
Tangente de 67. 40
son double 135. 20
son Sinus 70298
A 419885
somme 490183
$\frac{1}{2}$ est 245091
Tangente de 67. 48
son double 135. 36
son Sinus 69966
A 419885
somme 489851
moitié 244925
Tangente de 67. 48



Ayant fait ceste circulation tant de fois que les Tangentes s'accordent, comme icy de 67. 48
alors son double 135. 36
son Sinus verse 171447
puis 200000 donne $\frac{56}{24}$ combien 171447
viendra 2 pour la valeur de 1 (1)

S'ensuit

S'ensuit encor une nouvelle maniere pour resoudre les susdites equations, sans autre distinction.

Soit 1 ② esgale à 6 ① + 40

Notez qu'és operations suivantes il faudra poser des nombres apariez, ainsi que leur produict soit le ⓪ (comme icy 40) qui fait que lors que la valeur de 1 ① est nombre entier, qu'alors l'operation est souvent tres brieve & facile plus qu'en nulle sorte de reigle.

Divisons tout par 1 ① viendra 1 ① esgale à $6 + \frac{40}{1\textcircled{1}}$: C'est a dire que 6 + une des parties aliquotes de 40; (si la solution est un nombre entier) sera la valeur de 1 ①.

2	20
4	10
5	8

efficients de 40.

Ayant fait une table comme icy a costé, adjoustez le 6 au 2, fait 8, ce qui n'accorde avec 20: Adjoustez le 6 avec le 4, fait 10, ce qui accorde avec le 10; donc 10 est la valeur de 1 ①.

Et ainsi des autres telles equations, que je delaisse pour briefveté.

Soit 1 ③ *esgale à* 6 ① + 40

Divisons tout par 1 ①

1 ② sera esgale à $6 + \frac{40}{1\textcircled{1}}$

C'est à dire que 6 avec une partie aliquote de 40 sera le quarré de l'autre; cela trouvé, cest autre là sera la valeur de 1 ① : Or faisant une table comme cy dessus, la perquisition sera facile : & pour plus ample explication je la mettray comme s'ensuit.

Adjoustez 6 avec 2 cela n'est pas le quarré de 20.

Adjoustez 6 avec un chacun, on trouvera qu'à la fin adjousté à 10 sera le quarré de 4:

Donc 4 est la valeur de 1 ①.

Autre exemple qui a esté si difficil par le passé, voyez le probleme 69, page 287, de l'Arithmetique de Stevin, de la nouvelle edition.

Soit 1 ③ esgale à 30 ① + 36

Divisons tout par 1 ①

1 ② sera esgale à $30 + \frac{36}{1\textcircled{1}}$

efficients

efficients de 36

2	18
3	12
4	9
6	6

Adjouſtez 30 à un chacun nombre, conſiderant ſi la ſomme eſt quarré de ſon oppoſé:
Donc 30 adjouſté à 6, ſera le quarré de l'autre 6, & ainſi 1(1) vaut 6.

Autre exemple.

Soit 1(3) eſgale à — 6(1) + 20
Diviſons tout par 1(1)

$$1(2) \text{ eſgale à } -6 + \frac{20}{1(1)}$$

efficients de 20

1	20
2	10
4	5

C'eſt à dire qu'un efficient moins 6 ſera quarré de l'autre.
Donc 10 moins 6 (qui vaut 4) eſtant quarré de ſon oppoſé, alors 2 ſera la valeur de 1(1)

Autre exemple, jadis tresdifficil.

Soit 1(3) eſgale à 7(1) — 6
Diviſons tout par 1(1)

$$1(2) \text{ eſgale à } 7 - \frac{6}{1(1)}$$

efficients de 6

1	6
2	3
— 2	— 3

On voit que 7 — l'efficient 6 eſt le quarré de 1.
Auſſi 7 — 3 (qui vaut 4) eſt le quarré de 2.

Donc 1 ou bien 2 ſeront la valeur de 1(1). Mais quand on ne ſçauroit qu'une ſolution, nous monſtrerons la reigle pour trouver les autres: Or en ceſte equation on trouve tousjours deux ſolutions par plus, & une par moins : comme icy 7 — — 2 (c'eſt à dire 9, car deux negations font une affirmation +) vaut le quarré de — 3 (notez que 9 eſt auſſi bien quarré de 3 que de — 3) parquoy 1, 2, — 3 ſont trois ſolutions. Item 1(3) eſgale à 75(1) — 250 les trois ſolutions ſont 5, 5, — 10.

Vn bon Arithmeticien ſe doit conduire ſelon les accidents, & prendre les facilitez lors qu'elles ſe preſentent, & ce ſans detriment des reigles generales; Stevin propoſe 1(3) eſgale à 300(1) + 33915024, il la fait ſelon une maniere, laquelle combien qu'elle ſoit bonne, neantmoins eſt beaucoup trop longue, voicy comment j'y voudrois proceder, car comme dessus est dit, il faut s'esloigner des reigles generales lors que quelque facilité se rencontre. Car si, 1 ③ estoit esgale à 33915024 seulement, alors 1 ① vaudroit plus que 323, comme la racine cubicque le monstre, parquoy il ne sera de besoin, comme il dit, d'aller esprouver si la valeur de 1 ① est 1, 10, 100, 1000, &c. veu qu'on sçait desja que cest plus que 323. Voyez la 351 page de la derniere edition de son Arithmetique.

Parquoy pour prendre des efficients, il n'en faudra pas beaucoup, veu que du moins je commenceray à 323, ou de l'unité d'avantage.

1 ③ esgale à 300 ① + 33915024

efficients — Divisons par 1 ①

324 . 104676 — 1 ② esgale à $300 + \frac{33915024}{1 ①}$

Et devant que de faire d'autre efficients, j'esprouve si celuy-cy est propre (à cause que lesdits efficients sont grands nombres) ainsi

$$\begin{array}{r} 104676 \\ 300 \\ \hline 104976 \end{array}$$

lequel estant quarré de 324, je suis asseuré que 324 est la valeur de 1 ①.

D'autrepart si le nombre des ① estoit plus grand comme

1 ③ esgale à 10367 ① + 3774

Divisons par 1 ①

1 ② sera esgale à $10367 + \frac{3774}{1 ①}$

Pour eviter beaucoup d'ouvrage, posez le cas que 1 ② soit esgale à 10367 (car elle vaut davantage) alors 1 ① vaudra plus que 101, & ainsi on commencera les efficients, plus que 101.

efficients

102 . 37

$$\begin{array}{r} 10367 \\ 37 \\ \hline 10404 \end{array}$$

Et pource que 10404 est quarré de 102, il s'ensuit que 102 sera la valeur de 1 ①

Encor y a-il un autre moyen, par le moyen d'abreger, ce qui se fait par l'Isomere.

Soit

Soit 1 ③ esgale à 576 ① + 25920

diviseurs proportionaux 1 . 12 . 144 . 1728 .

quotients 1 ③ esgale à 4 ① + 15

Dont la valeur de 1 ① estant trouvée de 3 , alors icelle divisée par $\frac{1}{12}$ (raison de l'Isomere) viendra 36 pour la valeur de 1 ① requise.

Quelqu'un pourroit dire que je resouds bien les equations lors qu'elles sont en nombre entier , & non pas lors qu'elles sont en fraction , ou radicales.

S'il y a des fractions ou des radicaux en l'equation , j'ay demonstré cy devant comment l'Isomere les pourra reduire en nombres entiers communs, mais si la valeur de 1 ① est rompue ou radicale , on la trouvera aisément en nombres communs (si on ne veut s'aider de la reigle ordinaire) on m'a donné à resoudre.

1 ③ esgale à 3 ① — 1

Ainsi par l'Isomere 1 ③ est esgale à 300 ① — 1000 (par la progression de 1, 10,&c.) alors la valeur de 1 ① , selon la question proposée , se trouvera estre entre $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{3}{5}$, c'est à dire entre $1\frac{5}{10}$, & $1\frac{6}{10}$.

Si on la veut avoir plus precise , on s'aidera de l'Isomere plus haute par la progression de 1 , 100 , 10000 , 1000000 , assavoir 1 ③ esgale à 30000 ① — 1000000. S'aidant aussi de la valeur cogneue , qui sera icy en ceste grande equation entre 150 & 160 , & touchant les efficients , on ne prend pas les neuf d'entredeux , mais premierement le milieu 155 , par lequel on cognoist s'il faut cercher au dessus , ou dessous, tellement que qui y veut un peu practiquer , trouvera des facilitez incogneuës à ceux qui n'y ont jamais rien essayé , on trouvera que cest entre $1\frac{53}{100}$ & $1\frac{54}{100}$: mais beaucoup plus pres du $1\frac{53}{100}$: Et cerchant plus avant si on veut , on trouvera que ce sera entre $1\frac{532}{1000}$, & $1\frac{533}{1000}$: mais beaucoup plus pres du premier; &c.

Ayant cogneu une solution , on aura les deux autres facilement par icelle, selon qu'il sera dit cy apres.

$$1 \text{ ① vaudra} \begin{cases} 1,\, 532 \\ \quad 347 \\ -1,\, 879 \end{cases}$$

1, 532 et 347 : tous deux trop peu , mais plus pres que l'unité augmentée a la fin des nombres.

Ce qui est exprimé en disme jusques aux tierces.

Il y a encor des facilitez, qui peuvent ſouvent arriver, c'eſt lors que la 1 ① vaut 1.

$$\text{comme } 1 \text{ ③ eſgale à} \begin{cases} 7 \text{ ①} - 6, \text{ car } 7 - 6 \text{ eſt } 1 \\ 5\frac{1}{4} \text{ ①} - 4\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} \text{ ①} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Et auſſi aux autres equations plus baſſe, ou plus haute que ③; & ayant une ſolution, on pourra remettre les autres en queſtion, comme on verra cy apres.

Le Theoreme qui doit ſuivre ayant beſoin de nouveaux termes, les definitions s'enſuivront premierement.

I. Definition.

Equation ſimple, eſt celle qui n'a qu'une quantité eſgale à un nombre : autrement elle eſt dite Compoſée ou Meſlée.

Explication.

Comme quand 1 ② eſt eſgale à 49 : ou 12 ① eſgale à 24, aſſavoir un terme eſtant eſgal a l'autre, l'equation eſt ſimple & pure : Mais quand il y a plus de termes que deux, elle eſt Compoſée & Meſlée, comme ſi 1 ② eſt eſgale a 6 ① + 40, ou des ſemblables equations.

II. Definition.

Quand une grandeur eſt cõparée a une autre, la premiere eſt dite eſtre le ſubjeƈt, ou l'antecedant, l'autre le predicat, parangon, ou conſequent.

Explication.

Comme quand 3 ② — 4 ① eſt eſgale a 70; alors ces 3 ② — 4 ① ſont dites eſtre le ſubjeƈt, & les 70 le parangon ou conſequent.

III. Definition.

Equation complette, eſt celle qui a toutes les quantitez ſans en delaiſſer pas une.

IV. Definition.

Et equation incomplette eſt une equation meſlée, qui n'a pas toutes ſes quantitez.

Explication.

Par exemple ſoit 1 ⑥ eſgale à 11 ⑤ + 13 ④ — 7 ③ + 6 ② + 9 ① — 31, telle equation eſt dite complette, pource qu'elle a toutes les

les quantitez qui se peuvent trouver depuis la majeure (6), car elle a les (5), (4) (3) (2) (1) & (0); au contraire (1) (4) esgale à 5 (2) + 36, ou bien 1 (3) esgale à 12 (1) — 16, & autres de mesme façon sont dites incomplettes pour n'avoir toutes les quantitez depuis la majeure.

V. Definition.

Presque complette est une equation meslée, laquelle n'a qu'un defaut, & complette a deux pres est celle qui a deux defauts, & ainsi a trois pres, &c.

Explication.

Comme 1 (3) esgale à 7 (1) — 6 est presque complette, puis qu'elle n'a qu'un defaut, mais

VI. Definition.

Equation primitive est quand les denominateurs des quantitez sont entr'eux premiers.

Explication.

Comme 1 (4) esgale à 6 (3) — 13 (1) + 16 est primitive : car les denominateurs des quantitez (4) (3) (1) (0) sont entr'eux premiers.

VII. Definition.

Equation derivative est quand les denominateurs des quantitez sont entr'eux composez.

Explication.

Comme 1 (6) esgale à 7 (4) — 9 (2) + 12 (0), car alors les denominateurs (6) (4) (2) (0) sont entr'eux composez, car 2 est leur commune mesure, & (3) (2) (1) (0) sont les primitifs; item 1 (3) esgale à 17, est une equation derivative, & leurs quantitez (3) (0), sont derivatives des primitives, comme dit aussi Stevin en son Arithmetique, Defin 27^e: Or les derivatives se resoudent comme les primitives, seulement ont une extraction davantage, selon la hauteur de la commune mesure.

VIII. Definition.

Es Equations meslées, la plus haute quantité est dite Maxime, ou haute extremité : Celle qui est un degré plus bas, est dite premier meslé; celle qui est encor un degré plus bas, est dite second meslé, & ainsi consequemment, tellement que le (0), est la fermeture ou basse extremité.

Explication.

Soit 1 ⑨ esgale à 3 ⑧ — 10 ⑥ + 4 ① + 12 : alors la 1 ⑨ est la maxime ou haute extremité : les 3 ⑧ le premier meslé : les 10 ⑥ le troisiesme meslé : les 4 ① le huictiesme meslé : & le 12 est la basse extremité ou la fermeture le seul cogneu.

IX. Definition.

Es Equations meslées il y a trois ordres: le premier est dit Ordre prieur, lors que les nombres d'Algebre sont le subject (comme incogneuë a part) & la fermeture ou nombre commun est le predicat ou parangon (comme seul cogneu d'autrepart.) Le second ordre est l'alternatif, où les quantitez paires sont separées des impaires, tellement que la haute extremité soit + & non pas — : Le troisiesme est l'ordre posterieur, là où la haute extremité est seule avec le signe +, avec le nombre 1.

X. Definition.

Ordre alterne des Equations, est quand la maxime ou haute extremité n'a autre nombre que l'unité, avec le signe +, & que les denominateurs ou caracteres impairs sont d'un costé, & les pairs de l'autre, assavoir les uns au subject, les autres au predicat. Ce que sert à retrouver les signes originaux, en remettant l'equation en question.

Explication.

Soit 1 ⑦ esgale à 4 ⑥ + 14 ⑤ — 56 ④ — 49 ③ + 196 ② + 36 ① — 144 : ceste equation estant remise en l'ordre alternatif 1 ⑦ — 14 ⑤ + 49 ③ — 36 ① sera esgale à 4 ⑥ — 56 ④ + 196 ② — 144 ⓪ ; car alors les denominateurs impairs ⑦ ⑤ ③ ① sont d'un costé, & les pairs de l'autre, & n'importe si les pairs ou impairs soyent au subject ou au parangon, ny la maxime non plus, moyennant qu'elle aye le signe de plus, & l'unité pour nombre, comme en l'exemple susdit : or cecy est pour recognoistre les signes, comme sera dit cy apres.

XI. Definition.

Quant plusieurs nombres sont proposez, la somme totale soit dite premiere faction : la somme de tous les produits de deux à deux soit dite deuxiesme faction : la somme de tous les produits de 3 à 3 soit dite la troisiesme faction, & tousjours ainsi jusques à la fin, mais le produit de

tous

tous les nombres ſoit la derniere faction : or il y a autant de factions que de nombres propoſez.

Explication.

Soyent propoſez tant de nombres qu'on voudra 2, 4, 5, leur ſomme 11 eſt la premiere faction : les produits de deux à deux ſont 8, 10, 20, dont la ſomme de tels produits 38 eſt dite deuxieſme faction : mais le produit de trois à trois 40 ne ſe trouve qu'une fois, & partant ſera la derniere faction: item ſi ces quatre nombres eſtoyent propoſez, 2, — 3, 1, 3 : la premiere faction ſeroit 3, la deuxieſme — 7, la troiſieſme — 27, & la quatrieſme & derniere ſeroit — 18 : finalement les factions de ces ſept nombres 1, 2, 3, 4, — 1, — 2, — 3 ſeront 4, — 14, — 56, 49, 196, — 36, — 144, qui ſont auſſi ſept en nombre.

XII. Definition.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Quand pluſieurs unitez ſont miſes comme à coſté, & des autres nombres au milieu, trouvez par le moyen d'addition telle figure, ſoit appellée triangle d'extraction : & l'unité d'enhaut ſignifier l'arithmetique ſimple, & les autres pour l'algebre ; aſſavoir 1, 1, ſoit dit le rang des (1); & 1, 2, 1, le rang des (2); puis 1, 3, 3, 1, ſoit appellé le rang des (3), & tousjours ainſi à l'infiny.

I. Theoreme.

Si une multitude de nombres ſont propoſez, la multitude des produits de chacune faction ſe peut expoſer par le triangle d'extraction : & par le rang d'iceluy ſelon la multitude des nombres.

Explication.

Soyent 4 nombres, il faudra prendre le rang des (4) au triangle d'extraction, qui eſt 1, 4, 6, 4, 1; le premier 1 ſignifie l'unité de la maxime; le 4 la premiere faction qui eſt la ſomme des 4 nombres; le 6 ſignifie que la deuxieſme faction eſt compoſée de 6 produits deux à deux ; & ainſi du reſte.

II. Theoreme.

Toutes les equations d'algebre reçoivent autant de ſolutions, que la denomi-

denomination de la plus haute quantité le demonſtre, excepté les incomplettes : & la premiere faction des ſolutions eſt eſgale au nombre du premier meſlé, la ſeconde faction des meſmes, eſt eſgale au nombre du deuxieſme meſlé ; la troiſieſme, au troiſieſme, & touſjours ainſi, tellement que la derniere faction eſt eſgale à la fermeture, & ce ſelon les ſignes qui ſe peuvent remarquer en l'ordre alternatif.

Explication.

Soit une equation complette 1 ④ eſgale 4 ③ + 7 ② — 34 ① — 24 : alors le denominateur de la plus haute quantité eſt ④, qui ſignifie qu'il y a quatre certaines ſolutions, & non plus ny moins, comme 1, 2, — 3, 4 : tellement que le nombre du premier meſlé 4, eſt la premiere faction des ſolutions, le nombre du deuxieſme meſlé 7, & touſjours ainſi ; mais pour voir la choſe en ſa perfection, il faut prendre les ſignes qui ſe remarquent en l'ordre alternatif, comme 1 ④ — 7 ② — 24 ⓪ eſgale à 4 ③ — 34 ① : alors les nombres avec leurs ſignes, (ſelon l'ordre des quantitez) ſeront 4, — 7, — 34, — 24, qui ſont les quatre factions des quatre ſolutions.

Soit autrefois 1 ④ eſgale à 4 ③ — 6 ② + 4 ① — 1, & en ordre alterne 1 ④ + 6 ② + 1 eſgal à 4 ③ + 4 ① ; dont les nombres avec les ſignes, ſelon l'ordre des quantitez ſont 4, 6, 4, 1, qui ſont factions des quatre ſolutions 1, 1, 1, 1, & ainſi des autres ; (notez icy que quand les ſolutions ſont unitez ſans moins, que les factions ſont les nombres du triangle d'extraction du rang de la plus haute quantité,) de meſme en l'equation de la dixieſme definition, qui eſt 1 ⑦ eſgale 4 ⑥ + 14 ⑤ — 56 ④ — 49 ③ + 196 ② + 36 ① — 144 ; il y aura 7 ſolutions, aſſavoir 1, 2, 3, 4, — 1, — 2, — 3 : deſquels nombres l'expoſition ſe fait en la dixieſme & onzieſme definition.

Touchant les equations incomplettes, elles n'ont pas touſjours tant de ſolutions, neantmoins on ne laiſſe pas d'expliquer les ſolutions qui ſont impoſſible d'exiſter, & monſtrer ou giſt l'impoſſibilité à cauſe de la defectuoſité & incomplexion de l'equation, comme 1 ③ eſgale à 7 ① — 6, alors les trois ſolutions y ſont encore, aſſavoir 1, 2, — 3 ; & toutes les incomplettes comme celle-cy ſe peuvent mettre en forme de complettes ainſi, 1 ③ eſgale à 0 ② + 7 ① — 6, afin de trouver toutes les ſolutions ; comme celle qui a eſté faite cy-devant, aſſavoir 1 ③ eſgale à 167 ① — 26 ; elle ſera complette, ainſi 1 ③ eſgale à 0 ② + 167 ① — 26 :

& en

& en ordre alternatif, 1 (3) — 167 (1) esgal à 0 (2) — 26, les nombres avec leurs signes (selon l'ordre de leurs quantitez) seront 0, — 167, — 26 : c'est à dire trouvons trois nombres qui ayent telles factions, assavoir que leur somme soit 0, les produits de deux à deux — 167, & le produit des trois — 26 ; or en ayant trouvé un des trois comme cy-devant — 13, alors puis que le produit des trois estoit — 26, le produit des deux autres sera 2 ; or la somme des trois nombres est 0, & l'un est — 13 : donc la somme des deux autres sera 13 ; parquoy la question est remise à celle-cy, trouvons deux nombres dont la somme soit 13, & leur produit 2 ; (& notez qu'on dit trouvez deux nombres, ce sera donc une equation dont la majeure quantité est 1 (2), on parle des factions aussi, c'est que la somme soit 13 & le produit 2 ; & ainsi 1 (2) + 2 sera esgale à 13 (1), voila l'equation en ordre alterne, laquelle remise en commune pour la resoudre, on aura 1 (2) esgale à 13 (1) — 2, & alors) les nombres de solution seront $6\frac{1}{2} + \sqrt{40\frac{1}{4}}$ & aussi $6\frac{1}{2} - \sqrt{40\frac{1}{4}}$, lesquels avec — 13 feront les trois solutions requises ; la preuve se fera comme on voudra tout du long.

Item 1 (3) esgale à 300 (1) + 432, laquelle remise en ordre alterne ce sera 1 (3) — 300 (1) esgales à 0 (2) + 432 ; les factions seront 0, — 300, 432 : donc trouvons trois nombres &c. Or l'un est 18 ; donc la somme des deux autres sera — 18, & leur produit 24 ; parquoy 1 (2) sera esgale à — 18 (1) — 24, les deux solutions sont $-9 + \sqrt{57}$ & $-9 - \sqrt{57}$, puis l'autre cy-dessus 18 feront les trois solutions requises : de mesme si 1 (4) est esgale à 4 (1) — 3, alors les quatre factions seront 0, 0, 4, 3 ; & partant les quatre solutions seront

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 + \sqrt{-2} \\ -1 - \sqrt{-2} \end{array}$$

(Notez que le produit des deux derniers est 3 :).

Donc il se faut resouvenir d'observer tousjours cela : on pourroit dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choses, pour la certitude de la reigle generale, & qu'il ny a point d'autre solutions, & pour son utilité : l'utilité est facile, car elle sert à l'invention des solutions de semblables equations comme on peut remarquer en l'arithmetique de Stevin, en la cinquiesme differ. du 71 probleme ; que s'il y

F avoit

avoit une question où la precedente se rencontre, & qu'au nombre de solution il faille adjouster 1, & puis ayant quarré la somme & y adjousté 2 : on auroit quatre facits, 6, 6, 0, 0, tellement que 6 seroit seul & unique facit, à l'exclusion de tout autre, dequoy on n'eust jamais peu estre si certain sans les susdites solutions.

Par ce moyen on trouvera que jamais personne n'a resoud les equations cy-devant avec toutes leurs solutions.

Exemple en Stevin.

En ladite cinquiesme difference du 71 probleme, page 320 de mon edition, ou 344 de la vieille, si 1 ③ est esgale à 6 ② — 10 ① + 3, Stevin ne trouve que 3, & je trouve encor $1\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$ & encor $1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$: Item plus haut si 1 ③ est esgale à 6 ② — 12 ① + 8; Stevin trouve 2, & je trouve 2, 2, 2, tellement que je suis asseuré qu'il n'y a que celle-là de 2, & luy en estoit incertain : de mesme plus bas si 1 ③ est esgale à 6 ② — 9 ① + 4 : Stevin trouve 4, & je trouve encor 1, 1. Item à la difference troisiesme du probleme 69, page 293, de mon edition, si 1 ③ est esgale à 7 ① — 6, Stevin trouve 2 & encor 1, & je dis qu'il y a encor — 3, lesquelles servent comme on voit en la cinquiesme difference du 71 probleme de Stevin, & le requiert à la fin du 70.

Touchant François Viete, qui surpasse tous ses devanciers en l'algebre; on peut voir en son traité (*De Recognitione Æquationum cap. 16. pag. 40. de syncrysi;*) où il dit que telle syncrisis est pour trouver ou colliger la mutuelle comparaison de deux equations correlatives : & il oublioit pour parler generalement de dire és plans, & pour les solides, de trois correlatives, &c. car en la page 54 & 44 : il ne trouve que deux solutions, (comme aussi en beaucoup de lieu dans ses livres) soit dit-il 124 ① — 1 ③ esgale à 240 : Il ne trouve que 2 & 10, & je trouve encor — 12, car voicy les factions 0, — 124, — 240.

Ainsi qu'on peut donner trois noms aux solutions, veu qu'il y en a qui sont plus que rien; d'autres moins que rien; & d'autres envelopées, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$, comme des $\sqrt{-3}$, ou autres nombres semblables.

On peut colliger plusieurs choses de ces Theoremes, premierement l'intelligence du nombre des solutions; secondement la nature des equations, qui est qu'icelles ont leurs termes composé des factions, & que toutes les questions n'ont autre nœud; tiercement comment il est facile de

faire

faire incontinent l'equation, quand la question est des factions, comme:

Trouvons trois nombres, dont la somme soit 12, les trois produits de deux à deux 41, leur solide 42.

Pource que toutes les factions sont denommées autant que trois nombres peuvent recevoir, on posera à part 1 ③ : Et puis la somme des nombres 12, avec une quantité moindre subsequente 12 ② : Aussi 41 ①, finalement 42 ⓪, puis les ayant mis d'ordre alternatif, & ce selon les signes de la proposition (qui sont icy tous +) on aura 1 ③ + 41 ① esgale à 12 ② + 42 : lesquels remis en ordre posterieur 1 ③ sera esgale à 12 ② — 41 ① + 42 : laquelle est apareillée pour resoudre : dont les trois solutions seront les trois nombres requis, & ainsi s'entendra des semblables questions.

Il pourroit sembler à quelqu'un que les factions seroyent encor expliquables autrement que dessus, comme au lieu de dire, la somme : les produits de deux à deux ; les produits de trois à trois, &c. qu'on pourroit dire & plus simplement : La somme : la somme des quarez : la somme des Cubes, &c. ce qui n'est pas ainsi, car soyent plusieurs solutions, la somme sera pour le premier meslé, la somme des produits deux à deux pour le second meslé, &c. comme il a esté suffisamment expliqué ; mais il n'en est pas ainsi des puissances comme on pourroit objecter.

Exemple.

Soit { A premier meslé. / B second. / C troisiesme. / D quatriesme. / &c.

alors en toute sorte d'equation.		sera la somme des	
	A		solutions
	A q — B 2		quarez
	A cub — A B 3 + C 3		Cubes
	A q q — A q B 4 + A C 4 + B q 2 — D 4		quaré-quarez

Et pour mieux expliquer le tout, soit 1 ④ + 35 ② + 24 esgale à 10 ③ + 50 ① : l'ordre des meslez est 10. 35. 50. 24 pour A, B, C, D, cy-dessus : tellement que 10 est voirement la somme des solutions qui sont (1, 2, 3, 4.) Or A q — B 2, c'est à dire le quarré de 10 — deux fois 35 c'est la somme des quarrez, & ainsi du reste ; soit aussi qu'on prenne une equation dont la haute extremité ſoit telle qu'on voudra, & avec des ſolutions de —, cecy s'enſuivra touſjours; qui monſtre que telles puiſſances (quarrez, Cubes, &c.) cy deſſuſdits, ne ſont pas les meſlez, mais au contraire, les meſlez les ſont: bien loin de la ſimplicité des factions.

On en pourroit autant dire des proportionnelles là où on trouveroit que les factions ſont les meſlez, & non pas les proportionnelles ſi ſimplement, car les factions ſont faites ſur les ſolutions, & les ſolutions ſur les proportionnelles.

Exemple.

Soit 1 ③ eſgale à 8 ② + 12168 : alors il y a quatre nombres continuellement proportionaux, 8, 12, 18, 27, dont le premier eſt 8, & la ſomme du ij & iiij eſt √ 12168 diviſé par 8 (qui eſt 39) & la 1 ① vaudra la ſomme de la j & iij. (qui eſt 26.)

Ie ne veux pas dire que les proportionnelles ſoyent à rejetter, nullement, car ce ſont autant de proprietez, & de cecy voyez Viette au livre *De Recognitione Equationum.*

Davantage une ſolution eſtant cogneue, on peut remettre en queſtion les autres ſans memoires ny livre quelconque, dont les exemples cy-deſſus en ſont foy. Voyons-en encor quelques uns.

Soit 1 ④ eſgale à 6 ③ + 9 ② — 94 ① + 120, & une valeur eſtant trouvée 2, on pourra remettre les autres trois en queſtion : les meſlez ſont (comme l'ordre alternatif l'enſeigne) 6, — 9. — 94. 120: Ce qui ſe peut faire ſans peine (mais plus long chemin) par les poſtpoſitions ou bien en raiſonnant: puis que la ſomme des quatre nombres eſt 6; nous avons 2, les trois autres ſeront enſemble 4, lequel on poſera a part comme premier meſlé de trois nombres requis, ainſi + 4 ②. Et d'autant que le produit general eſtoit — 120, iceluy diviſé par 2 viendra — 60 pour le ſolide des requis que je mettray avec ledit 4 ②, n'importe comment.

Et puis que le produit de deux à deux eſtoit — 9 : d'iceluy il faut oſter le produit du 2 trouvé par la ſomme des trois requis 4, qui ſont 8, oſté de — 9 reſte — 17 pour les produits de deux à deux des requis (ce qui ſe pouvoit auſſi trouver autrement en ayant un exemple devant ſoy) lequel comme ſecond meſlé ſera — 17 ①, & pource qu'il m'en faut trois, la maxime ſera 1 ③; & ainſi ay tous les meſlez qu'il faut avoir,

avoir, les posant en ordre alterne avec les mesmes signes ainsi

1 (3) — 17 (1) esgales à 4 (2) — 60

puis si l'on veut en ordre posterieur tiré de là.

1 (3) esgale à 4 (2) + 17 (1) — 60

Que si on trouve encor une solution d'icy comme 3; on pourra trouver les deux autres, faisant de mesme que dessus, on trouvera

1 (2) esgale à 1 (1) + 20

Là où 1 (1) vaudra 4 aussi — 5, parquoy les quatre solutions requises de la premiere equation seront 2, 3, — 4, 5. & ainsi des autres: sans cercher toutes les reigles imparfaites que Viette en a donné.

Il y a de la determinaison aux equations comme nous en avons fait mention cy-dessus.

Soit 1 (2) esgale à 6 (1) — 10 (impossible d'estre esgal)
car la $\frac{1}{2}$ est 3
son quarré 9
avec — 10
— 1 duquel il faut extraire la √, ce qui n'est pas en la nature. donc ce 10 est trop, 9 estoit le plus haut.

Soit 1 (3) esgale à 12 (1) — 18 (impossible d'estre esgal)
car le $\frac{1}{3}$ est 4 — 9 qui est $\frac{1}{2}$ de 18
son Cube 64 — 81 son quarré.

Et puis que 81 est plus que 64, l'equation est impossible & inepte: ce qui a aussi esté dit auparavant, donc 18 est trop, veu que 16 eust esté au plus haut.

Ceçy est propre; 1 (3) esgale à 3 (1) — 2 en petits nombres.

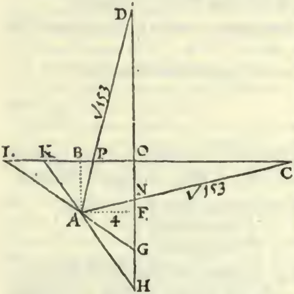
Soit 1 (3) esgale à 12 (2) — 257 (ce qui n'est possible d'estre esgal)
car les $\frac{2}{3}$ est 8
Son Cube 512
sa $\frac{1}{2}$ est 256
avec — 257 ce nombre estoit au plus haut d'e-
— 1 stre 256, parquoy 257 est trop.

Cecy est propre 1 (3) esgale à 3 (2) — 4, & le 4 est au plus haut.

Soit 1 (4) esgale à 12 (3) — 2189 (aussi inepte)
car les $\frac{3}{4}$ est 9
son quarre-quarré 6561
son $\frac{1}{3}$ est 2187
avec — 2189 ce nombre est trop, estant 2187 il seroit au plus haut.

Iusques icy nous n'avons encor expliqué à quoy servent les solutions par moins, quand il y en a. La solution par moins s'explique en Geometrie en retrogradant, & le moins recule, là où le + avance.

Probleme d'Inclinaison.



Soyent deux lignes droictes D G, B C, se couppant en angles droits en O, & indefinies, & du poinct A (dans la ligne qui couppe l'angle droit O en deux esgalement, ainsi que A B O F est quarré, dont chacun costé est 4) on mene une ligne A N C, ainsi que l'intercepte N C (entre les lignes données a angles droits D G, B C) soit $\sqrt{153}$, on demande la longueur de F N.

Ayant fait la position de F N 1 (1), on trouvera que 1 (4) sera esgale à 8 (3) + 121 (2) + 128 (1) — 256; & ainsi la valeur de 1 (1) recevra quatre diverses solutions.

assavoir { 1 | F N
16 | F D
— $4\frac{1}{2}$ + $\sqrt{4\frac{1}{4}}$ | monstrant le poinct G } du poinct F
— $4\frac{1}{2}$ — $\sqrt{4\frac{1}{4}}$ | monstrant le poinct H }

Assavoir monstrant lesdits poincts G & H, comme si les distances F G, F H estoyent moins que rien, en retrogradant, prenant que F N, F D avancent, & F G, F H reculent en arriere, tellement donc que les interceptes

interceptes CN, DP, GL, HK, tendent & s'enclinent au poinct A, faisant chacune $\sqrt{153}$, selon le requis.

Et pour l'interpreter encor mieux, les deux solutions qui sont moins que o, se doivent changer, assavoir les signes.

$$\text{viendra}\begin{cases} 4\frac{1}{2} - \sqrt{4\frac{1}{4}} \text{ pour } FG. \\ 4\frac{1}{2} + \sqrt{4\frac{1}{4}} \text{ pour } FH. \end{cases}$$

Lesquels il faut poser au contraire de FN, FD, comme il est exprimé en la figure precedente : & ainsi le faudra-il entendre de toutes solutions par moins, qui est une chose de consequence en Geometrie, incogneuë auparavant.

S'ensuit aussi la maniere de traicter les postposées quantitez, lesquelles servent de beaucoup à la resolution des problemes. Car combien que par cy-devant on s'ayt servi des mesmes, ce n'a pas esté avec un si grand esclaircissement, ce que j'ay mis icy pour finir le present traicté d'Algebre.

Des postposées quantitez en l'Algebre.

STevin & ses devanciers comme Cardan, selon qu'il le cite és six Theoremes apres le 80e probleme de son Arithmetique, pag. 365 de la nouvelle edition, dit que l'invention de la postposee prime n'est pas encor trouvée, quand il y a un multinomie de ces postposées, & a ceste fin il se sert de quelques proportions qu'il dit avoir tiré du livre intitulé *Ars magna*, chap. 10. dudit Cardan; J'ay entrepris de monstrer la facilité & la resolution de ce qu'il dit n'estre encor legitimement trouvé, afin que telles choses ne soyent doresnavant plus incogneuës; Or pource que la marque de 1 sec. (1) pour postposée quantité signifiant 1 (1), secondement posée est trop prolixe, je prendray A pour la seconde (1).

Question du premier Theoreme.

Soyent 1 (1) M sec. (1) + 6 sec. (1) esgales à 3 (1).

c'est à dire selon nostre supposition, qui est plus claire.

A (1) + 6 A esgales à 3 (1)

Divisons tant le subject, que le comparé par 1 (1) + 6

alors A ou bien 1 sec. (1) sera esgale a $\frac{3\,(1)}{1\,(1) + 6}$

Question

Question du deuxiesme Theoreme.

Soit 1 ① M ſec. ① eſgale à 3 ſec. ① + 4 ①

ceſt A ① eſgale à 3 A + 4 ①

oſtons de chacun coſté 3 A, car il faut mettre enſemble les A, reſtera

A (1 ① — 3) eſgale à 4 ①

Diviſons tout par 1 ① — 3, on trouvera que A vaudra $\dfrac{4\,①}{1\,① - 3}$

Question du troiſieſme Theoreme.

Soyent 10 ſec. ① eſgales à 1 ① M ſec. ① + 3 ①

ceſt 10 A eſgales à A ① + 3 ①

oſtons A ① de part & d'autre, & le reſte diviſé par 10 — 1 ①, alors

A ou 1 ſec. ① vaudra $\dfrac{3\,①}{-1\,① + 10}$

Question du quatrieſme Theoreme.

Soit 1 ② eſgale à 3 ① M ſec. ① + 20 ſec. ①

ceſt 1 ② eſgale à 3 ① A + 20 A

diviſons tout par 3 ① + 20

alors $\dfrac{1\,②}{3\,① + 20}$ ſera la valeur de A ou de 1 ſec. ①

Question du cinquieſme Theoreme.

Soit 1 ① M ſec. ① eſgale à 2 ② + $4\frac{1}{2}$ ſec. ①

ceſt A ①, eſgale à 2 ② + $4\frac{1}{2}$ A

oſtons $4\frac{1}{2}$ A, & diviſons par 1 ① + $4\frac{1}{2}$

alors A ou 1 ſec. ① vaudra $\dfrac{4\,②}{2\,① - 9}$

Question

Question du sixiesme Theoreme.

Soyent 4 sec. $\textcircled{1}$ esgale à $1\,\textcircled{1}$ M sec. $\textcircled{1} + 6\,\textcircled{2}$

cest $4\,A$ esgale à $A\,\textcircled{1} + 6\,\textcircled{2}$

ostons $A\,\textcircled{1}$, puis divisons par $4 - 1\,\textcircled{1}$

alors A ou 1 sec. $\textcircled{1}$ vaudra $\dfrac{6\,\textcircled{2}}{-1\,\textcircled{1} + 4}$

Question 27 de Stevin devant les livres de Diophante, page 402 de la nouvelle edition: qui est aussi la quatriesme Question de Cardan, chapitre 10, livre 10, seulement les nombres changez; là où les susdits autheurs au nom de tous ceux de leur temps, ne l'ont pas sçeu resoudre sans l'aide de la quatriesme Question susmentionnée, comme Stevin le confesse là mesme: tellement que nous la resoudrons par la mesme voye, horsmis où il l'a trouvé incommode.

PArtons 26 en trois parties continuellement proportionelles, ainsi que le quarré de la moyenne, soit esgal à la somme du double du produict de la moyenne par la moindre, & le sextuple de la moindre.

Soit la moyenne partie requise	$1\,\textcircled{1}$
Et la moindre	A
Le quarré de la moyenne	$1\,\textcircled{2}$
Est esgal au double du produict de la moyenne, par la moindre $2\,\textcircled{1}\,A$, avec le sextuple de la moindre partie, qui est $6\,A$, font ensemble	$2\,\textcircled{1}\,A + 6\,A$

C'est icy ou ils se sont arrestez, mais nous acheverons, & passerons au travers de ce nuage, & puis que $1\,\textcircled{2}$ est esgale à $2\,\textcircled{1}\,A + 6\,A$, apres avoir divisé le tout par $2\,\textcircled{1} + 6$, alors $\dfrac{1\,\textcircled{2}}{2\,\textcircled{1} + 6}$ vaudra & se mettra au lieu de A; pour la moindre partie; parquoy la majeure partie sera $2\,\textcircled{1} + 6$.

La somme des trois parties doivent faire 26, mais la somme de la majeure, & moyenne est $3\,\textcircled{1} + 6$, donc la moindre sera $-3\,\textcircled{1} + 20$, esgale à $\dfrac{1\,\textcircled{2}}{2\,\textcircled{1} + 6}$ qui est aussi la moindre, & la reduction faite $7\,\textcircled{2}$ vaudront $22\,\textcircled{1} + 120$, & achevant ceste equation $1\,\textcircled{1}$ vaudra 6, finalement les trois nombres, parties de 26, seront 2, 6, 18. dont la preuve est manifeste.

Fin de l'Algebre.

De la mesure de la superfice des triangles & polygones sphericques, nouvellement inventée,

Par Albert Girard.

AFin de declarer le plus briefvement qu'il me sera possible, ceste science incogneuë jusques à present, si ce n'est devant le deluge, je dis que tout ainsi que pour mesurer un angle on doit signifier quelle partie il est d'un droit, ou de deux, ou bien de quatre droits, &c. sinon que l'on vueille poser que les quatre droits facent un certain nombre, comme 360 degrez, & là dessus on s'enquiere combien l'angle à mesurer tient de tels degrez.

Ainsi aussi devant que de venir à la mesure des triangles & polygones spheriques, nous poserons quelque nombre pour toute la superfice spherique, ou pour sa moitié qu'on appelle hemisphere, & à ceste fin l'on pourroit prendre 1, 10, 100, 1000, &c. ou quelque nombre de ceste progression pour plus grande facilité, lesquels pour dire vray seroyent meilleurs (à cause de la composition des nombres, lesquels on a astraints à la progression denaire sans aucune necessité) mais puis que le nombre de 360 a esté choisi pour estre adapté à la circonference totale, afin de mesurer les arcs & les angles, & que les tables des anciens, & modernes comme les sinus, tangentes, & secantes sont faites là dessus, je ne le pourrois rejetter sans amener quant & quant nouvelles difficultez, donc ce que je le retiens ce n'est pas pource qu'il est entre les nombres le plus pres du nombre des jours de l'an, qui ayt plus de parties aliquotes; je ne rejetteray non plus le mot de degré, combien qu'il ayt esté pris pour signifier le cours que le soleil fait en un jour : car tout ainsi que le nom de pied est admis en la mesure des solides & superfices, aussi bien qu'en la mesure des lignes, nonobstant que les pieds qui mesurent les solides soyent d'autre façon que ceux qui mesurent les superfices, & aussi que ceux qui mesurent les lignes; tout de mesme on a retenu le mot de degré pour mesurer les arcs & angles, combien que celuy qui mesure les arcs est arc, & celuy qui mesure les angles est angle; & aussi retiendray ce mot de degré pour la mesure des superfices spheriques, pour la mesure des angles solides, des secteurs de cercle, & de sphere qui sont six grandeurs en tout; ce n'est pas qu'on soit astraint à ceste mesure, car on ne s'est point astraint non plus à 360 pour la circonference, veu qu'on la mesure aussi avec des

mesmes

meſmes longueurs que celles qui meſurent le diametre, comme autrefois a fait Archimedes, premierement avec le 7 à 22, & puis maintenant & plus preciſement, avec 113 à 355, ſans amener icy la grand raiſon de Ludolf de Cologne : auſſi que j'ay de certains noms arithmetiques autres que degrez, que j'adapte aux angles rectilignes, propres à des effects tres-briefs, incogneus auparavant, comme nous verrons cy apres, Dieu aydant, combien qu'en cela je ne rejette non plus les degrez pour leur meſure ordinaire, & plus ſimple : ſemblablement on ſçait que les quarrez ſont meſures les plus faciles de toutes les ſuperfices, combien qu'il eſt poſſible de prendre autre figure ſuperficielle a ceſte fin ; finalement puis que les meſures ſont & doivent eſtre homogenes aux choſes meſurées, on entendra & retiendra donc, que les degrez qui meſurent les arcs, ſeront auſſi arcs; & qui meſurent les angles, ſeront angles; & qui les ſuperfices, ſuperfices : & qui les angles ſolides angles ſolides; & qui les ſecteurs ſpheriques auſſi tels ; voire finalement on pourroit appliquer les degrez és polygones inſcripts aux cercles, prenant le cercle pour l'as; & pareillement prenant la ſphere ſolide pour l'as, qui empeſcheroit de denotter les corps inſcripts en icelle, & circonſcripts à l'entour, ſelon la raiſon de leur capacité, à celle de la ſphere, n'eſtoit que la pluſpart ſe trouveroyent incommenſurables à icelle, voire tous les cinq corps reguliers ? Et pour terminer ce diſcours, je poſeray donc que la ſuperfice ſphericque entiere contienne 720 degrez ſuperficiels, & ce pour la raiſon qui ſera notoire cy-apres, alors l'hemiſphere en contiendra 360, ſelon l'hypoteſe ſuivante.

HYPOTHESES.

I. Nouvelle Hypotheſe.

SOit poſé que toute la ſuperfice ſphericque, comme l'as, contienne 720 degrez ſuperficiels, & partant la ſuperfice de l'hemiſphere 360 degrez : & chacun degré 60 minutes, &c.

Si tout eſtoit a refaire, touchant les tables mentionnées des anciens, je ſuppoſerois l'as 1, & iceluy contenir 10 (1), & chacune (1), 10 (2), &c. ſelon la diſme.

II. Ancienne Hypotheſe.

Selon l'ancienne hypotheſe, que la circonference comme as contienne 360 degrez, & chacun degré 60 minutes, & la minute 60 secondes, &c. Aussi l'angle droit de 90 degrez angulaires, alors tout le lieu superficiel a l'entour d'un poinct sera 360 degrez.

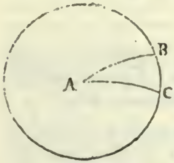
III. Nouvelle Hypothese.

Suyvant la premiere hypothese, que l'angle droit solide (qui est un des 8 angles du cube) soit 90 degrez angulaires, alors tout le lieu solide a l'entour d'un poinct contiendra 720 degrez, qui sont 8 angles droits solides, tellement que tous les angles solides vaudront autant de degrez angulaires, que la superfice sphericque en contient, laquelle ils ont pour base, estant leur sommet au centre; & ainsi des secteurs, assavoir que la solidité de la sphere soit de 720 degrez solides.

On remarque icy, que comme il faut autant d'angles droits superficiels a l'entour d'un poinct, qu'il y en a à l'entour du quarré; qu'aussi il faut autant d'angles droits solides, a l'entour d'un poinct, qu'il y en a à l'entour du cube: c'est hypothese n'a besoin d'explication.

Definition.

Un triangle sphericque avec deux costez chacun de 90 degrez s'appelle fibulle: & l'angle qu'ils comprennent estant aigu, icelle sera dite fibulle aiguë, & ainsi de l'obtuse & rectangle.



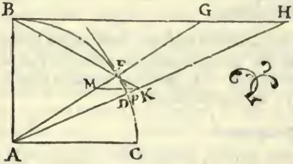
Lemme I.

Soit A pole, du cercle B C majeur ou mineur sur la superfice de la sphere, & deux grands arcs du pole A B, A C; alors telle partie que A est de quatre droits, telle partie sera le triangle A B C de la superfice sphericque comprise par iceluy cercle B C: la demonstration est manifeste.

Lemme II.

Deux arcs d'un mesme cercle, chacun n'excedant le quadrant, & soyent

ſoyent trouvé leur Sinus & Tangentes, comparant le grand au petit ; il y a plus grande raiſon de Tangente à Tangente, que d'arc à arc : ſemblablement il y a plus grande raiſon d'arc à arc que de Sinus à Sinus.



Soit A B C quadrant, & B D, B F, deux arcs chacun moindre à B C, leurs Tangentes B H, B G, je dis que comparant le grand au petit que H B aura plus grande raiſon à B G, que non pas l'arc D B à B F.

Car ayant menée par F, la touchante F B, & B F K, & de K la parallele K M à B H : Alors icelle M K ſera moindre à G H: auſſi F D ſera moindre à la touchante F P, & F P moindre à F K (car F P K eſt obtus, veu que A P F eſt aigu, d'autant que A F P eſt droit) Or on amoindrit la raiſon en amoindriſſant l'antecedant, ou en augmentant le conſequent, parquoy

H G à G B eſt une raiſon, à laquelle
M K à G B, ou K F à F B eſt moindre
D F à F B
D F à F O B

Donc H G aura plus grande raiſon à G B, que D F à F O B, & en compoſant H B Tangente, aura plus grande raiſon, à B G Tangente, que l'arc D B à l'arc B O F, ce qu'il falloit premierement demonſtrer.

Touchant l'autre partie, aſſavoir que comparant le grand au moindre; l'arc aye plus grande raiſon à l'arc, que le Sinus au Sinus, (lors que chacun arc eſt moindre au quadrant) la demonſtration ſe pourra voir à la fin du neufieſme chapitre du premier livre de l'Almageſte de Ptolomee, que Copernique auſſi a mis en ſes revolutions, au 6ᵉ Theoreme du 1 livre.

Lemme III.

Vn Polygone rectiligne, ſoit regulier ou irregulier, eſt tel, que les angles interieurs au long du circuit ſont autant d'angles droits, que le double du nom du polygone, mais de ce double oſtez 4.

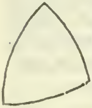
Soit un heptagone rectiligne, ſon nom eſt 7, ſon double eſt 14, duquel oſté 4, reſte encor 10, donc les angles interieurs au long du circuit d'un heptagone, ſont enſemble 10 angles droits; qui valent 900 degrez, dont la demonſtration eſt aiſée, menant d'un poinct de dedans la figure, (où l'on veut) des lignes vers les angles, & des 7 triangles, rabattant 4 droits a l'entour dudit poinct, reſtera encor 10 droits.

Theoreme.

Tout polygone ſphericque compris d'arcs de cercles majeurs, tient autant de degrez ſuperficiels, que la ſomme de tous ſes angles interieurs excede la ſomme des angles interieurs d'un polygone rectiligne de meſme nom : quand la ſuperfice de la ſphere eſt poſée eſtre de 720 degrez ſuperficiels.

Explication I.

Soit un triangle ſphericque dont les trois angles ſont enſemble 190



degrez : & pource que tous triangles rectilignes n'ont pour la ſomme de leurs trois angles que 180 degrez, il s'enſuit ſelon le Theoreme que la ſuperfice dudit triangle aura 10 degrez ſuperficiels, & par conſequent puis que toute la ſphere en contient 720 des meſmes, il eſt notoire que le triangle propoſé ſera la 72e partie de toute la ſuperfice de la ſphere.

Notez

Tout triangle ſphericque (j'entens compris de cercles majeurs comme a l'accouſtumée) eſt de telle nature que tous les trois angles ſont touſjours plus que 180 degrez, qui fait que jamais ny aura defaut en cela de pouvoir trouver l'excez : or tant plus un triangle ſphericque occupe de ſuperfice ſphericque, tant plus la ſomme de ces trois angles excede le nombre de 180 : auſſi tant moins un triangle ſphericque occupe de la ſuperfice de la ſphere, d'autant moins la ſomme de ces trois angles excedera le nombre de 180 : mais nous delaiſſerons cela à la demonſtration.

II.

Soit un heptagone ſphericque, dont la ſomme des ſept angles interieurs ſoit 940 degrez: or la ſomme des ſept angles interieurs d'un heptagone rectiligne fait 900 degrez, parquoy l'excez eſt 40, qui ſignifient qu'un tel heptagone ſphericque contiendra 40 degrez ſuperficiels pour le requis: de meſme ſi un heptagone ſphericque avoit 1020 degrez pour la ſomme de tous ces ſept angles interieurs (au long du circuit) l'excez ſe trouveroit 120, pour ſignifier qu'iceluy heptagone ſphericque contiendroit

droit 120 degrez ſuperficiels, qui valent la ſixieſme partie de toute la ſuperfice de la ſphere : il n'arrive pas tousjours que la ſuperfice meſure preciſement toute la ſphere, mais ce que j'en ay fait eſt pour tant mieux declarer mon intention, car ſi un polygone ſphericque de 100 coſtez avoit 17760 degrez pour la ſomme de ſes 100 angles, on trouvera que ſa ſuperfice ſera auſſi 120 degrez ſuperficiels, qui ſont la ſixieſme de toute la ſuperfice de la ſphere ; que ſi la ſomme des 100 angles euſt eſté 17850, ſa ſuperfice ſeroit 210 degrez ſuperficiels, qui valent les $\frac{7}{12}$ de toute la ſuperfice de la ſphere : finalement ſi on donnoit un polygone ayant trois termes incogneus, & qu'on requiere la ſuperfice : il faut cercher les angles, dont la ſomme cogneuë, & auſſi la ſomme des angles d'un polygone rectiligne de meſme nom, l'excez ſera la ſuperfice requiſe.

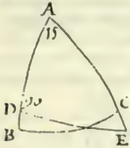
Mais pource qu'il ſeroit beſoin de voir un exemple d'une queſtion ſemblable, ſi un triangle equilateral a chacun coſté de 109 degrez 28 minutes, chacun angle ſe trouvera eſtre de 120 degrez, & partant tous trois 360, que ſi on en oſte 180, il reſtera 180 degrez ſuperficiels, le quart de toute la ſuperfice ſphericque 720.

Item un triangle ſphericque ayant ſes trois coſtez de 40 degrez ; 70 degrez ; & de 38 degrez 30 minutes ; alors la ſomme des trois angles eſt 192 degrez 5 minutes, (car iceux ſont 31, 34. & 130, 3. & 30, 28. je dis qu'un triangle equilateral ayant chacun coſté de 38, 50 : ſera eſgal en ſuperfice au meſme, car ils conviennent à la ſomme des angles 192, 5. parquoy la ſuperfice ſera 12, 5. qui eſt un peu davantage que la ſoixantieſme partie de toute la ſuperfice ſphericque.

Si un œil (ceſt une figure ſphericque appellée auſſi du angle de deux demy cercles ayant deux angles *en tout, & qui ſont eſgaux*) à un des deux angles de 30 degrez, la ſomme des angles eſt 60, duquel il ne faut rien oſter à cauſe qu'un polygone biligne (és figures rectilignes) n'eſt pas polygone, veu que deux lignes droictes n'enferment pas un eſpace, & partant la ſomme des angles eſt 0, qu'il faut oſter de 60 cy-deſſus, reſtera 60 degrez ſuperficiels pour la ſuperfice de l'œil ſphericque ; tellement qu'à la ſomme des angles des yeux, il ne faut rien oſter pour avoir leur ſuperfice : Et pour examiner la choſe davantage ſi on le coupe au milieu en deux triangles rectangles eſgaux (que j'appelle fibulle) la ſuperfice de l'un devroit donc eſtre 30 degrez ſuperficiels : ce qui ſe trouve eſtre ainſi, car la ſomme des angles eſt 210.

On

On voit facilement la maniere de metamorphoser telles figures, en d'autres de mesme nom, ou autrement, en d'autres sortes comme les mixtes; (j'appelle mixtes les figures qui sont faites de cercles majeurs & mineurs; or arc majeur sur la superfice de la sphere est la plus grande, ou la moindre ligne qui se peut faire entre deux poincts, ou si on veut ce sont des arcs qui imitent les lignes droites; & les arcs de cercles mineurs imitent les courbes sur la superfice pleine.)



Exemple.

Soit ABC triangle sphericque mixte, assavoir BA, AC, arcs majeurs esgaux chacun de 36 degrez 52 minutes, comprenans un angle A de 15 degrez, & BC aussi estant un cercle mineur descrit sur le pole A: on veut faire un triangle rectangle sphericque ADE qui soit esgal au mixte ABC.

Mesure du Mixte.

Le verset de l'arc AB ou AC est fort pres de 20000, qui est la $\frac{1}{10}$ partie du diametre, partant le cercle entier de BC comprendra la $\frac{1}{10}$ de toute la superfice, c'est 72 degrez superficiels, mais ce secteur BAC ayant 15 degrez au pole, sera la $\frac{1}{24}$ de la targe, (c'est son cercle entier) or la $\frac{1}{24}$ de 72 est 3 degrez que contient ledit mixte ABC.

On le pourroit trouver plus aiséement, mais c'est pour m'expliquer, autrement je pourrois dire que pour mesurer un secteur tel que dessus ABC, alors le

Verset de AB multiplié par le nombre de l'angle A
divisé par le raid

sera pour la superfice dudit triangle mixte ABC, & ainsi des autres qui sont secteurs.

Mesure du triangle ADE.

Le triangle rectangle ADE doit aussi estre 3 degrez superficiels: par consequent ses trois angles doivent faire 180 degrez, & encor lesdits 3 degrez; c'est assavoir 183 degrez, mais les deux A, D sont desja 105 degrez, donc E sera angle de 78 degrez.

Qui

Qui voudra cercher les costez, il faut de necessité que l'hypothenuse A E soit *majeure* à A C, au *contraire* il faut que A D soit moindre que A B ou A C, ce qu'on trouvera tousjours accorder en tels exemples qu'on voudra, car par le quatriesme accident des rectangles sphericques (de mes Tables de Sinus) A E sera 37 deg. 59 min. qui est davantage que A C 36 deg. 52 min. & A D sera 36 deg. 33 min. de necessité moindre à A B, aussi 36 deg. 52 min.

Touchant la base D E sa comparaison à B C, n'importe pas tant que les autres susdictes, toutesfois D E est 9 degrez 4 minutes; les 15 degrez de B C sont petits degrez, comme de cercles mineurs, que si on les vouloit reduire en mesme grandeur de degrez, que ceux des cercles majeurs, Sinus de A B est 60000 presque; donc 100000 donnent 60000 combien 15 degrez mineurs? facit 9 degrez des plus grands, pour la longueur de B C, lequel sera moindre en longueur à l'arc D E, 9 degrez 4 minutes.

Notez.

On sçait que tant plus l'angle A est petit, & qu'aussi tant plus pres l'arc A B est du quadrant, qu'alors tant moins y aura-il de difference entre les arcs A C, A E, aussi entre A D, A B, lesquelles choses recogneuës, il s'ensuit que la preuve arithmetique de ce Theoreme se peut faire (par maniere de parler) jusques à l'extremité, selon la presente maniere: aussi que les superfices planes des triangles qui ont les mesmes poincts A, D, E, doivent de necessité estre moindres que les superfices sphericques A, D, E, qui est encor un autre moyen pour esprouver la verité de ce mesme Theoreme, quand il ny auroit autre demonstration.

Davantage, on voit comment se peuvent remettre en question la maniere de coupper les triangles en tant de parties, & ce en telle raison qu'on voudra, par une ligne venant de l'angle ou d'un costé comme on voudra.

Par exemple, soit un triangle equilateral de la douziesme partie de la superfice sphericque, iceluy aura un chacun angle de 80 degrez (car la $\frac{1}{12}$ de 720 est 60 pour sa superfice, auquel adjousté 180, viendra 240, dont le tiers est 80 pour chacun angle) & un chacun costé de 77 d 52 m. 10 sec. mais delaissant les secondes (combien qu'il seroit bon de les admettre en la practique des triangles sphericques) & qu'on vueille couper ledit triangle par un arc majeur venant du sommet sur la base, dont l'un triangle soit le tiers du total; iceluy aura 20 degrez de superfice, que si on divise le total en deux esgalement par une perpend: on aura un petit trian-

 gle

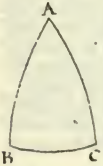
gle rectangle qui tiendra la moitié du requis,ceſt 10 deg. ſuperficiels,adjouſtez-y 180 deg. viendra 190 pour les trois angles dudit triangle rectangle, oſtez-en 90 pour l'angle droit, reſtera 100 deg. pour les deux autres, or ladite perpendiculaire eſt 74 deg. 19½ min. alors on trouvera que ſa baſe ſera 13 deg. 9 min. 25 ſec. environ, & les deux angles l'un 13 deg.38 min. 44 ſec. l'autre 86 deg. 20 min. 43 ſec. qui ſont enſemble 99 deg. 59 min. 27 ſec. qui eſt aſſez pres de 100 : finalement les ſegmens de la baſe du triangle entier ſeront 26 deg.46 min,35 ſec. & 52 deg. 5 m.

Pour donc venir à la demonſtration de ce Theoreme general, je demonſtreray premierement la propoſition ſuyvante qui eſt eſpece d'iceluy.

Propoſition.

Vn triangle ſphericque de trois arcs majeurs, tient autant de degrez de ſuperfice, que l'excez de la ſomme des trois angles ſur 180 degrez.

I Demonſtration particuliere és fibulles.

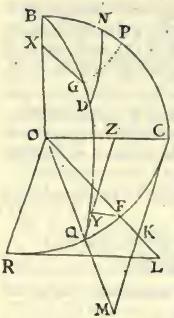


Soit A B C une fibulle, aſſavoir A B, A C, chacun quadran, alors l'angle A & l'arc B C conviennent en degrez, & les angles B, C, droits, donc ſi des trois angles A, B, C, on oſte 180 degrez, aſſavoir B, C, il reſtera A, or toutes fibulles ſont telles parties de la ſuperfice de la ſphere, comme la grandeur de la baſe B C, ou l'angle A, eſt à 720 degrez, ce qui eſt treſnotoire, voire meſme les unes envers les autres, comme leurs baſes: donc la ſuperfice A B C, tiendra autant de degrez ſuperficiels, que l'excez des trois angles ſur 180 degrez.

II Demonſtration, és triangles rectangles ſphericques, ayant un chacun coſté defaillant : en concluſion probable.

Soit B N D triangle rectangle ſphericque, N angle droit, & ſoyent produits les arcs, ainſi que B Q, B C ſoyent quadrans, auſſi produit l'arc C Q, ainſi que C Q R ſoit quadrant,puis du centre de la ſphere O ſoyent menées O B, O C, O Q M, O R, à laquelle O R ſoit C M parallele (qui ſeront perpend. à O C) ſoit auſſi G X perpend.à B O.

Et



Et d'autant que les trois angles du triangle ſphericque B N D, font enſemble plus que deux droits de neceſſité, auſſi que N eſt droit, les deux B, D, ſeront plus qu'un droit, mais Q C arc, tient autant de degrez que B, dont l'angle D ſera plus que l'arc Q R (car C Q R eſt quadrant) ſoit R F eſgal à l'angle aigu D, (j'entens en degrez, car les angles & lignes ſont heterogenes) alors les trois angles du triangle B N D ſeront plus que deux droits, de l'arc Q F.

Il faut ſçavoir que pour trouver l'hypothenuſe B D, par la ſupputation des triangles rectangles ſphericques, ayant la cognoiſſance des angles, ce ſera;

Comme le Raid, à la Tangente de B, ainſi la Tangente de D, à la Secante de B D, c'eſt à dire;

comme O C à C M ainſi R L à Secante de B D.

donc $\frac{CM,\ in\ RL}{OC}$ eſgal à Secante de B D.

Or par le deuxieſme Lemme cy-devant la grand Tangente à une moindre, a plus grand raiſon que l'arc à l'arc, donc M C à C K, ainſi Q C a moins que C F, (prenons R L commune hauteur en la premiere raiſon, & O C commun diviſeur : puis O C commune hauteur & Q C diviſeur en la ſeconde raiſon.

Comme $\frac{RL,\ MC}{OC}$ à $\frac{RL,\ CK}{OC}$ ainſi O C a moins que $\frac{OC,\ CF}{QC}$.

Le deuxieſme terme a pour numerateur R L, C K, produit de deux Tangentes de complemens, qui vaut tousjours le quarré du raid O C: lequel quarré de O C applicqué ou diviſé par O C, viendra encor O C pour le deuxieſme terme cy-deſſus.

Mais par ce qui a eſté dit cy-devant que $\frac{CM,\ in\ RL}{OC}$ (qui eſt auſſi le premier terme) valoit la Secante de B D. donc

Comme Secante de B D à O C, ainſi O C a moins que $\frac{OC,\ CF}{QC}$.

Là où on voit que le rectangle des moyennes eſt le quarré du raid, lequel vaut tousjours le rectangle de Secante, & Sinus d'arcs de complemens, Or B D, D Q ſont complemens, donc $\frac{OC,CF}{QC}$ ſera plus que Sinus de D Q; aſſavoir, Q C à C F, ſera comme B O, a plus que Sinus de D Q, prenons donc un arc plus que D Q, & ſoit G Q, ainſi que O X ſon Sinus ſoit le vray quatrieſme proportionel, alors $\frac{OC,CF}{QC}$ vaudra O X, voyla pour un item.

Davantage ſoit Q Z perpendiculaire à O C, & F Y perpendiculaire à Q Z : Il faut ſçavoir que par les trois angles donnez en un triangle rectangle ſphericque, l'on peut par le moyen de la ſuyvante proportion trouver l'un des coſtez B N, qui fait l'angle droit.

Comme le Raid au Sinus de B, ainſi la Secante de D à la Secante de B N.

Aſſavoir que C O à Q Z, ainſi O L à la Secante de B N.

Donc $\frac{QZ, \text{in } OL}{CO}$ ſera eſgal à Secante de B N.

Par le deuxieſme Lemme, un grand arc eſt au moindre en plus grand raiſon que le Sinus au Sinus. Or Q Z & Y Z ſont Sinus de Q C & C F.

Donc Q C à C F a plus grande raiſon que Q Z à Z Y.

Prenons O C commune hauteur & Q C commun diviſeur en la premiere raiſon : de meſme en la ſeconde raiſon prenons O L commune hauteur, & O C commun diviſeur.

Alors O C à $\frac{OC,CF}{QC}$ aura plus grande raiſon que $\frac{OL,QZ}{OC}$ à $\frac{OL,YZ}{OC}$.

Le numerateur du quatrieſme terme eſt eſgal au quarré du raid, pource que le rectangle d'une Secante & Sinus d'arcs complements eſt eſgal au quarré du raid, or le quarré du raid applicqué ou diviſé par le raid, fait avoir le raid O C.

Le troiſieſme terme $\frac{OL,QZ}{OC}$ eſt eſgal (par la precedente equation) à la ſecante de B N.

Donc O C à $\frac{OC,CF}{QC}$ aura plus grande raiſon que Secante de B N à O C.

Tellement que quarré du raid O C (ou bien le rectangle d'une Secante de B N, & du Sinus de N C qui ſont complement l'un de l'autre, lequel rectangle doit eſtre eſgal au quarré du raid) ſera majeur au rectangle $\frac{OC,CF}{QC}$, & de la meſme Secante de B N : ceſte hauteur commune de ladicte Secante eſtant oſtée, alors le Sinus de N C ſera encor plus grand que $\frac{OC,CF}{OC}$.

Puis

Puis que le Sinus de N C eſt plus grand que $\frac{oc.cr}{qc}$, prenons un Sinus, d'un arc moindre à N C, qui ſoit eſgal à $\frac{oc.cr}{qc}$; or en la premiere partie de ceſte demonſtration on a trouvé que O X (ſinus de G Q) y eſtoit eſgal, & alors ce G Q devoit exceder l'arc D Q, & à preſent il a eſté demonſtré qu'il doit eſtre moindre à N C.

Donc du pole B ſoit fait un arc paſſant par G, il s'enſuit que tel arc doit coupper D N entre D, N, & terminer dans B N, en un poinct P, entre N, C. voyla un autre remarque.

Parquoy puis que O X eſt eſgal à $\frac{oc.cr}{qc}$, alors comme Q C à C F ainſi C O ou B O à O X, & par raiſon converſe C Q ſera à Q F comme O B à B X.

Or parce qu'on peut inferer des livres d'Archimedes, comme O B a B X, ainſi la ſuperfice de la fibule Q B C à la ſuperfice de G b P.

Mais auſſi la circonference à C Q, eſt comme l'hemiſphere à Q B C: d'où s'enſuit une proportion ordonnée.

Circonference	Hemiſphere
C Q	Q B C
Q F	G B P
d'une part	d'autrepart

Il s'enſuit que par raiſon eſgale la circonference ſera à Q F, comme la ſuperfice de l'hemiſphere à G B P, & partant ſi on menoit B F, alors la ſuperfice de Q B F ſeroit eſgale audit G B P, car Q B F peut eſtre le quatrieſme proportionel.

De tout ce que deſſus, il s'enſuit que la fibule Q B F (ſi on menoit B F) a trois angles eſgaux aux trois angles du triangle B N D, car ils ſurpaſſent deux droits de la valeur de l'arc Q F.

Que telle fibule Q B F eſt eſgale à B G P mixte. Et que ledit mixte B G P veut eſgaler le triangle B N D puis qu'il le croiſe tousjours, car G P croiſe tousjours D N.

Donc la fibule Q B F veut eſgaler le triangle B D N, ayant tous deux les trois angles excedans deux droits, de la quantité de l'arc Q F en degrez : & par ce qui a eſté dit des fibules en la premiere demonſtration ; la verité du Theoreme eſt manifeſte & probable.

Finalement puis que cecy accorde avec noſtre Theoreme inceſſamment, tousjours quand meſme N D ſeroit trespetit juſques à l'infiny & B D, quaſi quadrant, car alors G D ou N P ſont trespetites, & neantmoins G P croiſe tousjours, il s'enſuit que B G P ſera eſgal au triangle B N D a la confirmation du Theoreme : notez que j'ay eſprouvé en deux divers exemples que G D estoit plus que double à N P : item que B P ou B G estoit moindre que la moyenne harmonicque entre D B, & B N.

III Demonstration en tous triangles sphericques.

Puis que tous les triangles sphericques se peuvent diviser en deux triangles rectangles, il s'ensuit que la precedente deuxiesme demonstration s'estendra jusques aux triangles sphericques en general ; car tout revient a un : veu que divisant un triangle en deux parties esgales ou inesgales, on aura deux triangles & 180 degrez plus que devant, que si on oste deux fois 180 degrez, pource qu'il y a deux triangles; c'est autant que si du premier on en ostoit 180 seulement.

IIII Demonstration de tous les polygones sphericques.

La deuxiesme & troisiesme demonstration s'estendent jusques aux polygones sphericques en general, composez de grand cercles; veu que tout polygone se resoud & descoupe en triangles.

Par les nombres on pourroit faire des demonstrations particulieres, aussi en une superfice sphericque enclose par une circonference (laquelle superfice s'appelle targe) on pourroit mener des lignes de cercles majeurs du pole à la circonference , & faire plusieurs secteurs esgaux ou non , & puis mener des arcs majeurs à la maniere des costez des polygones inscrits , & puis comparer les secteurs aux triangles : mais le Lecteur se contentera presentement de la demonstration contingente , jusques a ce qu'ayant plus de loisir je la donne à sa perfection.

On pourra encor voir les choses suyvantes où l'on trouvera matiere propre a faire l'espreuve comme aux angles qui sont parties aliquotes des huict droits : de mesme on en trouvera quelques espreuves dans mes Tables de Sinus a la fin.

Du mesurer des angles solides lesquels sont circuits de superfices planes.

Pour faire cela, il faut mesurer les inclinaisons des plans , & les adjouster ensemble , & de la somme en oster la somme des angles d'un polygone rectiligne de mesme nom que la base , le reste sera la valeur requise de l'angle solide : Exemple , en la pyramide reguliere l'angle solide est compris de trois angles plans ; dont l'inclinaison des plans est de 70 deg. 32 min.

32 min. il y en a trois & esgaux, ce sera ensemble 211 deg. 36 min. duquel osté 180, à cause que la figure de la base est triangle, restera 31 deg. 36 m. pour la valeur de l'angle solide de la pyramide, lequel environ la 22^e partie de huict droits, je dis environ, pource qu'il en faut 22¼ fort pres, & ne doute pas qu'il ne soit incommensurable au tout, assavoir à huict droits: & ainsi des autres, qui est une maniere fort facile à la practique, de mesme des secteurs de sphere.

Corrollaire.

Il s'ensuit de tout ce que dessus a esté dit, que la mesure des angles solides sera facile, & que les cinq corps reguliers ont aussi des angles solides esgaux & pareils au centre; car par le tetrahedre ou pyramide on cognoit que tout le lieu à l'entour d'un poinct peut estre remply par quatre angles solides esgaux, chacun compris de trois angles plans esgaux obtus de 109 deg. 28 min.

L'exaedre ou Cube fait cognoistre que le lieu corporel à l'entour d'un poinct se peut diviser en six angles solides esgaux & pareils, chacun ayant quatre angles plans esgaux, aigus, de 70 deg. 32 min.

L'octaedre a huict angles droits, solides au centre, qui sont esgaux entr'eux & pareils, compris de trois angles plans de 90 degrez chacun.

Le Dodecaedre a douze angles solides au centre, qui sont esgaux entre eux & pareils, compris de cinq angles plans, aigus, chacun de 41 d. 48 m.

L'icosaedre a 20 angles solides au centre, qui sont esgaux entr'eux, & pareils, compris de trois angles plans, aigus, chacun de 63 deg. 26 min.

Devant que de passer outre on remarque icy une convenance avec l'inclination des plans des cinq figures regulieres, comme s'ensuit.

Inclination des plans des cinq figures regulieres.

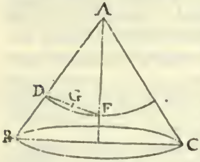
Tetraedre	70 deg.	32 min.	
Cube	90.	0	
Octaedre	109.	28	
Dodecaedre	116.	34	les adjoints de ceux-cy sont
Icosaedre	138.	12	mentionnez cy-dessus.

Pour revenir à la mesure des angles solides, compris de superfices planes, soit par exemple qu'un angle solide de cinq plans; dont les inclinations d'iceux plans soyent trouvé de 110, 90, 151, 120, & 118 degrez; la somme est 589, ostez-en 540 (autant sont les cinq angles d'un pentagone

gone rectiligne) restera 49 degrez solides que ledit angle sera : c'est environ la quinziesme partie du lieu à l'entour d'un poinct.

Autant en faut-il dire des corps compris par lesdits angles, lors que les lignes du sommet vers chacun angle de la base sont esgales, & que la base est une superfice sphericque ayant son centre au sommet de l'angle solide susdit, qu'on pourroit appeller secteur sphericque : & telle partie que l'angle solide est du lieu à l'entour du poinct, lequel lieu on peut nommer huict angles droicts; telle partie sera le secteur, à la sphere.

Voyla comment par la cognoissance des angles on peut calculer les secteurs sphericques, & aussi les angles solides.



Mais pour mesurer l'angle solide du Cone Isocele, soit ABC triangle par l'axe & couppé l'angle A en deux esgalement par AF, & fait un arc DF du centre A, de quelconque interval AD, & menée DF, & G au milieu, alors comme le quarré de DG au quarré de DA, ainsi l'angle solide Conique A à huict droits solides, c'est à dire à 720 degrez, dont la demonstration est manifeste.

F I N.