This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

LIBRERIA
DI
Alberto Litta.

Digitized by Google

IV. A. 21 fo. 2a
IV-C-33
A. o. 25. p.° I.°

Digitized by Google

ÉLÉMENS D'ALGEBRE

PAR

M. LÉONARD EULER,

TRADUITS DE L'ALLEMAND,

AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS.

TOME SECOND.

DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

A LYON,
Chez JEAN-MARIE BRUYSET, Pere & Fils.
ET A PARIS,
Chez la Veuve DESAINT, Libraire,
rue du Foin-Saint-Jacques.

M. DCC. LXXIV.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

Digitized by Google

BIBLIOTECA ALESSANDRINA
NELLA R. UNIV. DI ROMA

Digitized by Google

ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

SECONDE PARTIE.

DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

CHAPITRE PREMIER.

De la réſolution des Equations du premier degré, qui renferment plus d'une inconnue.

I.

ON a vu, dans la premiere Partie, comment une quantité inconnue ſe détermine par une ſeule équation, & comment on peut déterminer deux inconnues moyennant deux équations, trois

Digitized by Google

inconnues moyennant trois équations, & ainſi de ſuite ; en ſorte qu'il faut toujours autant d'équations qu'il y a d'inconnues à déterminer, du moins quand la queſtion elle-même eſt déterminée.

Lors donc que la queſtion ne fournit pas autant d'équations qu'on eſt obligé d'admettre d'inconnues, il y en a de celles-ci qui reſtent indéterminées, & qui dépendent de notre volonté ; & cela fait qu'on nomme ces ſortes de queſtions des *problemes indéterminés*. Ils font le ſujet d'une branche particuliere de l'analyſe, & on appelle cette partie l'*analyſe indéterminée*.

2.

Comme dans ces cas on peut prendre pour une, ou pour pluſieurs inconnues, tels nombres qu'on veut, ils admettent auſſi pluſieurs ſolutions.

Cependant, comme d'un autre côté on ajoute ordinairement la condition que les nombres cherchés doivent être des nombres entiers & même poſitifs, ou du moins

Digitized by Google

des nombres rationnels, le nombre de toutes les ſolutions poſſibles de ces queſtions ſe trouve fort borné par-là ; de ſorte que ſouvent il n'y en a que très-peu de poſſibles ; que d'autres fois il y en a une infinité, mais qui ne ſe préſentent pas à l'eſprit facilement ; que quelquefois enfin il n'y en a aucune de poſſible. Il arrive par-là que cette partie de l'analyſe demande ſouvent des artifices tout-à-fait particuliers, & qu'elle ſert beaucoup à aiguiſer l'eſprit des Commençans, & à leur donner de l'adreſſe dans le calcul.

3.

Nous commencerons par une des queſtions les plus faciles, en cherchant deux nombres dont la ſomme faſſe 10. Il ſera ſuperflu d'ajouter que ces nombres doivent être entiers & poſitifs.

Indiquons-les par x & y ; en ſorte qu'il faut que $x+y=10$; on trouve $x=10-y$, où y n'eſt déterminé qu'en tant que cette lettre ſignifie un nombre entier &

Digitized by Google

positif. On pourroit, par conséquent lui substituer tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à l'infini; mais remarquons que x doit pareillement être un nombre positif, & il s'ensuit que y ne peut être pris plus grand que 10, puisqu'autrement x deviendroit négatif; & si on rejette aussi la valeur de $x=0$, on ne peut même faire y plus grand que 9. Ainsi ce ne sont que les solutions suivantes qui ont lieu.

Si $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$
on a $x=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Or les quatre dernieres de ces neuf solutions étant les mêmes que les quatre premieres, il est clair que la question n'admet au fond que cinq solutions différentes.

Que si l'on demandoit trois nombres, dont la somme fût 10, on n'auroit qu'à partager en deux parties l'un des nombres que nous venons de trouver, & on obtiendroit de cette maniere un plus grand nombre de solutions.

Digitized by Google

4.

Comme nous n'appercevons-là aucune difficulté, nous paſſerons à des queſtions un peu-moins faciles.

Queſtion premiere. Il s'agit de partager 25 en deux parties, dont l'une ſoit diviſible par 2, & dont l'autre ſoit diviſible par 3.

Soit l'une des parties cherchées $=2x$, & l'autre $=3y$, il faudra que $2x+3y=25$, & par conſéquent que $2x=25-3y$. Si l'on diviſe par 2, on a $x=\frac{25-3y}{2}$; d'où nous concluons en premier lieu que $3y$ doit être moindre que 25, & par conſéquent y plus petit que 8. Qu'on tire de cette valeur de x autant d'entiers qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire qu'on diviſe par le dénominateur 2, on aura $x=12-y+\frac{1-y}{2}$; d'où il ſuit que $1-y$, ou bien $y-1$, doit être diviſible par 2. Ainſi nous ferons $y-1=2z$, & nous aurons $y=2z+1$, de ſorte que $x=12-2z-1-z=11-3z$. Or puiſque y ne ſauroit être plus grand que 8,

Digitized by Google

l'on ne peut non plus prendre pour z des nombres qui rendroient $2z+1$ plus grands que 8. Par conſéquent il faut que z ſoit plus petit que 4, c'eſt-à-dire que z ne peut être pris plus grand que 3, & de-là réſultent les ſolutions qui ſuivent:

Si on fait z	$=0$	$z=1$	$z=2$	$z=3$,
on a y	$=1$	$y=3$	$y=5$	$y=7$,
& x	$=11$	$x=8$	$x=5$	$x=2$.

Donc les deux parties de 25 qu'on cherchoit, ſont:

I.) $22+3$, II.) $16+9$, III.) $10+15$, IV.) $4+21$.

5.

Queſtion ſeconde. Partager 100 en deux parties, telles que l'une ſoit diviſible par 7, & l'autre par 11.

Soit donc $7x$ la premiere partie & $11y$ la ſeconde, il faudra que $7x+11y=100$; & par conſéquent que $x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7}$, ou que $x=14-y+\frac{2-4y}{7}$; donc il faut que $2-4y$, ou $4y-2$, ſoit diviſible par 7.

Digitized by Google

Or si l'on peut diviser $4y-2$ par 7, on pourra aussi diviser par 7 sa moitié $2y-1$; qu'on fasse donc $2y-1=7z$, ou $2y=7z+1$, on aura $x=14-y-2z$. Mais puisque $2y=7z+1=6z+z+1$, on aura $y=3z+\frac{z+1}{2}$; & il faudra faire $z+1=2u$, ou $z=2u-1$; cette supposition donne $y=3z+u$, & par conséquent on peut prendre pour u tout nombre entier qui ne rend pas x ou y négatifs. Or comme y devient $=7u-3$ & $x=19-11u$, la premiere de ces formules indique que $7u$ doit surpasser 3; & suivant la seconde, $11u$ doit être moindre que 19, ou u moindre que $\frac{19}{11}$; ainsi u ne peut pas même être $=2$; & puisqu'il est impossible que ce nombre soit 0, il faut nécessairement que $u=1$: c'est la seule valeur que cette lettre puisse avoir. Il résulte de-là que $x=8$, & $y=4$, & que les deux parties de 100 qu'on cherchoit, sont I.) 56, & II.) 44.

Digitized by Google

6.

Queſtion troiſieme. Partager 100 en deux parties, telles qu'en diviſant la premiere par 5, il reſte 2; & qu'en diviſant la ſeconde par 7, il reſte 4.

Puiſque la premiere partie, diviſée par 5, laiſſe le réſidu 2, nous ſuppoſerons qu'elle ſoit $=5x+2$, & par une raiſon ſemblable nous ferons la ſeconde partie $=7y+4$. Nous avons par conſéquent $5x+7y+6=100$, ou $5x=94-7y=90+4-5y-2y$; d'où nous tirons $x=18-y-\frac{2y+4}{5}$. Il s'enſuit de-là que $4-2y$, ou $2y-4$, ou bien la moitié $y-2$, doit être diviſible par 5. Faiſons, par cette conſidération, $y-2=5z$, ou $y=5z+2$, nous aurons $x=16-7z$; d'où nous concluons que $7z$ doit être plus petit que 16, & z plus petit que $\frac{16}{7}$, c'eſt-à-dire que z ne peut ſurpaſſer 2. La queſtion propoſée admet par conſéquent trois ſolutions.

I. $z=0$ donne $x=16$ & $y=2$, d'où réſultent les deux parties de 100 qu'on cherchoit, $82+18$.

Digitized by Google

II. $z=1$ donne $x=9$ & $y=7$, & les deux parties en queſtion ſont $47+53$.

III. $z=2$ donne $x=2$ & $y=12$, & on a les deux parties $12+88$.

7.

Queſtion quatrieme. Deux Payſannes ont enſemble 100 œufs; l'une dit à l'autre: *Quand je compte mes œufs par huitaines, il y a un ſurplus de 7.* La ſeconde répond: *Si je compte les miens par dizaines, je trouve le même ſurplus de 7.* On demande combien chacune avoit d'œufs?

Comme le nombre des œufs de la premiere Payſanne, diviſé par 8, laiſſe le réſidu 7; & que le nombre des œufs de la ſeconde, diviſé par 10, donne le même réſidu 7, on exprimera le premier nombre par $8x+7$, & le ſecond par $10y+7$; de cette façon $8x+10y+14=100$, ou $8x=86-10y$, ou $4x=43-5y=40+3-4y-y$. Par conſéquent ſi l'on fait $y-3=4z$, de ſorte que $y=4z+3$, on aura $x=10-4z-3-z=7-5z$; d'où il ſuit

que $5z$ doit être plus petit que 7, & z plus petit que 2, c'eſt-à-dire qu'on n'aura que les deux ſolutions ſuivantes.

I.) $z=0$ donne $x=7$, & $y=3$; ainſi la premiere Payſanne avoit 63 œufs, & la ſeconde en avoit 37.

II.) $z=1$ donne $x=2$, & $y=7$; donc la premiere Payſanne avoit 23 œufs, & la ſeconde en avoit 77.

8.

Queſtion cinquieme. Une troupe d'hommes & de femmes a dépenſé dans une auberge 1000 ſous. Les hommes ont payé 19 ſous chacun, & les femmes 13. Combien y avoit-il d'hommes & de femmes?

Soit le nombre des hommes $=x$, & celui des femmes $=y$, on aura l'équation $19x+13y=1000$. Donc $13y=1000-19x=988+12-13x-6x$, & $y=76-x+\frac{12-6x}{13}$; d'où il ſuit que $12-6x$, ou $6x-12$, ou auſſi $x-2$, la ſixieme partie de ce nombre, doit être diviſible par 13. Qu'on faſſe donc $x-2=13z$, on aura x

Digitized by Google

$=13z+2$, & $y=76-13z-2-6z$, ou $y=74-19z$; ce qui fait voir que z doit être moindre que $\frac{74}{19}$, & par conſéquent moindre que 4; de ſorte que les quatre ſolutions ſuivantes peuvent avoir lieu.

I.) $z=0$ donne $x=2$ & $y=74$. Dans ce cas il y avoit deux hommes & ſoixante & quatorze femmes; ceux-là ont payé 38 ſous, & celles-ci 962 ſous.

II.) $z=1$ donne le nombre des hommes $x=15$, & celui des femmes $y=55$; ceux-là ont dépenſé 285 ſous, & celles-ci 715 ſous.

III.) $z=2$ donne le nombre des hommes $x=28$, & celui des femmes $y=36$; donc ceux-là ont dépenſé 532 ſous, & celles-ci 468 ſous.

IV.) $z=3$ donne $x=41$, & $y=17$; ainſi les hommes ont dépenſé 779 ſous, & les femmes ont dépenſé 221 ſous.

9.

Queſtion ſixieme. Un Fermier achete à la fois des chevaux & des bœufs pour la

Digitized by Google

ſomme de 1770 écus; il paye 31 écus pour chaque cheval, & 21 écus pour chaque bœuf. Combien a-t-il acheté de chevaux & de bœufs?

Soit le nombre des chevaux $=x$, & celui des bœufs $=y$; il faudra que $31x+21y=1770$, ou que $21y=1770-31x=1764+6-21x-10x$, c'eſt-à-dire que $y=84-x+\frac{6-10x}{21}$. Donc il faut qu'on puiſſe diviſer $10x-6$, & auſſi la moitié $5x-3$, par 21. Qu'on ſuppoſe donc $5x-3=21z$, on aura $5x=21z+3$, & y devient $=84-x-2z$. Or, puiſque $x=\frac{21z+3}{5}=4z+\frac{z+3}{5}$, il faudra faire encore $z+3=5u$; cette ſuppoſition donne $z=5u-3$, $x=21u-12$, & $y=84-21u+12-10u+6=102-31u$; & il ſuit de-là que u doit être plus grand que 0, & cependant plus petit que 4, ce qui fournit les trois ſolutions qui ſuivent:

I.) $u=1$ donne le nombre des chevaux $x=9$, & celui des bœufs $y=71$; donc les premiers ont coûté 279 écus, & les derniers 1491 écus; en tout 1770 écus.

Digitized by Google

II.) $u=2$ donne $x=30$ & $y=40$; ainſi les chevaux ont coûté 930 écus, & les bœufs ont coûté 840 écus, ce qui fait enſemble 1770 écus.

III.) $u=3$ donne le nombre des chevaux $x=51$, & celui des bœufs $y=9$; ceux-là ont coûté 1581 écus, & ceux-ci 189 écus; cela fait enſemble 1770 écus.

IO.

Les queſtions que nous avons conſidérées juſqu'à préſent, conduiſent toutes à une équation de la forme $ax+by=c$, où a, b & c ſignifient des nombres entiers & poſitifs, & où l'on demande pour x & y pareillement des nombres entiers poſitifs. Or ſi b eſt négatif, & que l'équation ait la forme $ax=by+c$, on a des queſtions d'une toute autre eſpece, & qui admettent une infinité de ſolutions: nous allons en traiter auſſi, avant que de finir ce Chapitre.

Les plus ſimples de ces queſtions ſont de la nature de celle-ci: on cherche deux

Digitized by Google

nombres, dont la différence ſoit 6. Si l'on fait ici le plus petit nombre $=x$, & le plus grand $=y$, il faudra que $y-x=6$, & que $y=6+x$. Or rien n'empêche maintenant de ſubſtituer au lieu de x tous les nombres entiers poſſibles, & quelque nombre que l'on adopte, y ſera toujours de 6 plus grand. Qu'on faſſe, par exemple, $x=100$, on aura $y=106$; il eſt donc clair qu'une infinité de ſolutions peuvent avoir lieu.

II.

Viennent enſuite les queſtions où $c=0$, c'eſt-à-dire où ax doit ſimplement équivaloir à by. Qu'on cherche, par exemple, un nombre qui ſoit diviſible tant par 5 que par 7; ſi on écrit N pour ce nombre, on aura d'abord $N=5x$, puiſqu'il faut pouvoir diviſer N par 5; enſuite on aura auſſi $N=7y$, parce que le même nombre doit être diviſible par 7; on aura, par conſéquent $5x=7y$ & $x=\frac{7y}{5}$. Or comme 7 ne peut ſe diviſer par 5, il faut que y ſoit

Digitized by Google

divisible par 5 ; qu'on fasse donc $y=5z$, on aura $x=7z$; de sorte que le nombre cherché $N=35z$; & comme on peut prendre pour z un nombre entier quelconque, on voit qu'on peut assigner pour N un nombre infini de valeurs ; telles sont :

35, 70, 105, 140, 175, 910, &c.

Si on vouloit, outre la condition supposée, que le nombre N fût aussi divisible par 9, on auroit d'abord $N=35z$, & on feroit de plus $N=9u$. De cette maniere $35z=9u$, & $u=\frac{35z}{9}$; & il est clair qu'il faut que z soit divisible par 9. Soit donc $z=9s$; on aura $u=35s$, & le nombre cherché $N=315s$.

12.

La difficulté est plus grande, lorsque c n'est pas 0 ; par exemple, lorsqu'il faut que $5x=7y+3$, équation à laquelle on parvient, en cherchant un nombre N tel qu'on puisse le diviser par 5, & que si on le divise par 7, on obtienne le résidu 3 ; car il faut alors que $N=5x$, & aussi que N

Digitized by Google

$=7y+3$, d'où réſulte l'équation $5x=7y+3$, & par conſéquent $x=\frac{7y+3}{5}=\frac{5y+2y+3}{5}=y+\frac{2y+3}{5}$. Qu'on faſſe $2y+3=5z$, on aura $x=y+z$; or à cauſe de $2y+3=5z$, ou de $2y=5z-3$, on a $y=\frac{5z-3}{2}$ ou $y=2z+\frac{z-3}{2}$. Qu'on ſuppoſe donc encore $z-3=2u$, on aura $z=2u+3$, & $y=5u+6$, & $x=y+z=7u+9$. Donc le nombre cherché $N=35u+45$, où on peut ſubſtituer au lieu de u non-ſeulement tous les nombres entiers poſitifs, mais auſſi des nombres négatifs; car, comme il ſuffit que N devienne poſitif, on peut faire $u=-1$, ce qui rend $N=10$. On obtient les autres valeurs, en ajoutant continuellement 35, c'eſt-à-dire que les nombres cherchés ſont 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, &c.

13.

Les ſolutions de ces ſortes de queſtions dépendent du rapport des deux nombres par leſquels il s'agit de diviſer, c'eſt-à-dire qu'elles deviennent plus ou moins longues, ſuivant la nature de ces diviſeurs.

La

Digitized by Google

La queſtion ſuivante, par exemple, admet une ſolution très-courte : On cherche un nombre qui, diviſé par 6, laiſſe le réſidu 2 ; & qui, diviſé par 13, donne 3 de réſidu.

Soit N ce nombre : il faut d'abord que $N=6x+2$, & après cela que $N=13y+3$; par conſéquent $6x+2=13y+3$, & $6x=13y+1$, & $x=\frac{13y+1}{6}=2y+\frac{y+1}{6}$. Qu'on faſſe $y+1=6z$, on aura $y=6z-1$, & $x=2y+z=13z-2$; d'où il ſuit que le nombre cherché $N=78z-10$. Donc la queſtion admet les valeurs ſuivantes : 68, 146, 224, 302, 380, &c. qui forment une progreſſion arithmétique, dont la différence eſt $78=6.13$. Il ſuffit, par conſéquent, de connoître une ſeule de ces valeurs pour trouver facilement toutes les autres ; on n'a qu'à ajouter conſtamment 78, & ſouſtraire ce nombre auſſi long-temps que cela eſt poſſible.

14.

La queſtion ſuivante fournit un exemple d'une ſolution plus longue & plus pénible.

Digitized by Google

Queſtion huitieme. Trouver un nombre N qui, étant diviſé par 39, donne le réſidu 16, & tel auſſi que ſi on le diviſe par 56, on trouve le réſidu 27.

Il faut en premier lieu que $N=39p+16$, & en ſecond lieu que $N=56q+27$; ainſi $39p+16=56q+27$, ou $39p=56q+11$, & $p=\frac{56q+11}{39}=q+\frac{17q+11}{39}=q+r$, en exprimant par r la fraction $\frac{17q+11}{39}$. Ainſi $39r=17q+11$, & $q=\frac{39r-11}{17}=2r+\frac{5r-11}{17}=2r+ſ$; de façon que $ſ=\frac{5r-11}{17}$, ou $17ſ=5r-11$, d'où provient $r=\frac{17ſ+11}{5}=3ſ+\frac{2ſ+11}{5}=3ſ+t$; de maniere que $t=\frac{2ſ+11}{5}$, ou $5t=2ſ+11$, d'où l'on tire $ſ=\frac{5t-11}{2}=2t+\frac{t-11}{2}=2t+u$, en faiſant $u=\frac{t-11}{2}$ & $t=2u+11$. Or n'y ayant maintenant plus de fractions, on peut prendre u à volonté, & on n'aura plus qu'à paſſer, en rétrogradant, par les déterminations ſuivantes:

$$\begin{aligned} t &= 2u+11, \\ ſ &= 2t+u = 5u+22, \\ r &= 3ſ+t = 17u+77, \\ q &= 2r+ſ = 39u+176, \\ p &= q+r = 56u+253, \end{aligned}$$

Digitized by Google

& enfin $N=39.56u+9883$. On trouvera la plus petite valeur poſſible de N, en faiſant $u=-4$; dans cette ſuppoſition on a $N=1147$. Que ſi l'on fait $u=x-4$, on trouve $N=2184x-8736+9883$, ou $N=2184x+1147$. Ces nombres forment par conſéquent une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt 1147, & dont la différence eſt 2184; en voici quelques termes:

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, &c.

15.

Ajoutons encore quelques autres queſtions, ſur leſquelles on puiſſe s'exercer.

Queſtion neuvieme. Une compagnie d'hommes & de femmes ſe trouvent à un pique-nique; chaque homme dépenſe 25 l. & chaque femme dépenſe 16 liv. & il ſe trouve que toutes les femmes enſemble ont payé 1 liv. de plus que les hommes. Combien y avoit-il d'hommes & de femmes?

Soit le nombre des femmes $=p$, celui des hommes $=q$; les femmes auront dé-

Digitized by Google

penſé $16p$, & les hommes $25q$; ainſi $16p = 25q+1$, & $p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q+r$. Nous venons de faire $r = \frac{9q+1}{16}$, ainſi $9q = 16r-1$, & $q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r+s$. Puis donc que $s = \frac{7r-1}{9}$, ou $9s = 7r-1$, nous avons $r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s+t$; c'eſt-à-dire que $t = \frac{2s+1}{7}$, ou $7t = 2s+1$; ainſi $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2} = 3t+u$, en faiſant $u = \frac{t-1}{2}$ ou $2u = t-1$, de ſorte que $t = 2u+1$.

Nous aurons par conſéquent en rétrogradant :

$$\begin{aligned} t &= 2u+1, \\ s &= 3t+u = 7u+3, \\ r &= s+t = 9u+4, \\ q &= r+s = 16u+7, \\ p &= q+r = 25u+11; \end{aligned}$$

ainſi le nombre des femmes étoit $25u+11$, & celui des hommes étoit $16u+7$; & on peut ſubſtituer dans ces formules, au lieu de u, tels nombres entiers qu'on veut. Les réſultats les plus petits ſont par conſéquent ceux qui ſuivent :

Digitized by Google

Nombre des femmes: $=11, 36, 61, 86, 111$, &c.
—— des hommes: $= 7, 23, 39, 55, 71$, &c.
Suivant la premiere ſolution, ou celle qui renferme les plus petits nombres, les femmes ont dépenſé 176 liv. & les hommes 175 livres, c'eſt-à-dire une livre de moins que les femmes.

16.

Queſtion dixieme. Quelqu'un achete des chevaux & des bœufs ; il paye 31 écus par cheval, & 20 écus pour chaque bœuf, & il ſe trouve que les bœufs lui ont coûté 7 écus de plus que ne lui ont coûté les chevaux : combien cet homme a-t-il acheté de bœufs & de chevaux ?

Suppoſons que p ſoit le nombre des bœufs & q celui des chevaux, il faudra que $20p = 31q+7$, & $p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q + r$; de cette maniere nous avons $20r = 11q+7$, & $q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + s$; ainſi $11s = 9r-7$, & $r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t$, c'eſt-à-dire que $9t = 2s+7$, & $s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u$, moyennant

Digitized by Google

quoi $2u = t - 7$, & $t = 2u + 7$. Par conſéquent

$s = 4t + u = 9u + 28$,

$r = s + t = 11u + 35$,

$q = r + s = 20u + 63$, nomb. des chevaux,

$p = q + r = 31u + 98$, nombre des bœufs.

Donc les plus petites valeurs poſitives de p & de q ſe trouvent en faiſant $u = -3$; celles qui ſont plus grandes ſe ſuivent en progreſſion arithmétique de la maniere qu'on va voir:

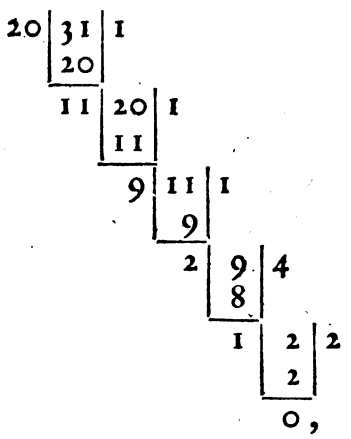
Nombre des bœufs, $p = 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253$, &c.

Nombre des chevaux, $q = 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163$, &c.

17.

Si on conſidere comment, dans cet exemple, les lettres p & q ſe déterminent par les lettres ſuivantes, on remarquera facilement que cette détermination dépend du rapport des nombres 31 & 20, & en particulier du rapport qu'on découvre en cherchant le plus grand commun diviſeur de ces deux nombres. En effet, ſi on fait cette opération

Digitized by Google



il eſt clair que les quotients qu'on obtient ſe retrouvent dans la détermination ſucceſſive des lettres p, q, r, f, &c. & qu'ils ſont liés avec la premiere lettre à droite, pendant que la derniere reſte toujours iſolée; on voit de plus que ce n'eſt que dans la cinquieme & derniere équation que ſe préſente le nombre 7, & qu'il eſt affecté du ſigne +, parce que le nombre de cette équation eſt impair; car ſi ce nombre avoit été pair, on auroit trouvé —7. Ce que nous diſons deviendra encore plus clair par la table ſuivante, dans laquelle on verra d'abord la décompoſition des

Digitized by Google

nombres 31 & 20, & puis la détermination des lettres p, q, r, &c.

$$\begin{array}{rl|l} 31 = 1.20 & +11 & p = 1.q + r \\ 20 = 1.11 & + 9 & q = 1.r + s \\ 11 = 1.9 & + 2 & r = 1.s + t \\ 9 = 4.2 & + 1 & s = 4.t + u \\ 2 = 2.1 & + 0 & t = 2.u + 7. \end{array}$$

18.

On peut repréſenter de la même maniere l'exemple précédent de l'article 14.

$$\begin{array}{rl|l} 56 = 1.39 & +17 & p = 1.q + r \\ 39 = 2.17 & + 5 & q = 2.r + s \\ 17 = 3.5 & + 2 & r = 3.s + t \\ 5 = 2.2 & + 1 & s = 2.t + u \\ 2 = 2.1 & + 0 & t = 2.u + 11. \end{array}$$

19.

Nous ſommes donc en état de réſoudre de la même maniere toutes les queſtions de cette eſpece.

En effet, ſoit donnée l'équation $bp = aq + n$, où a, b & n ſignifient des nombres connus. Il ne s'agira ici que de procéder

Digitized by Google

comme si on cherchoit le plus grand commun diviseur des nombres a & b, on pourra aussi-tôt déterminer p & q par les lettres suivantes, comme on va voir:

Soit		on aura	
$a=Ab+c$		$p=Aq+r$	
$b=Bc+d$		$q=Br+s$	
$c=Cd+e$		$r=Cs+t$	
$d=De+f$		$s=Dt+u$	
$e=Ef+g$		$t=Eu+v$	
$f=Fg+0$,		$u=Fv\pm n$.	

On fera seulement attention encore, que dans la derniere équation il faut donner à n le signe $+$, quand le nombre des équations est impair; & qu'au contraire il faut prendre $-n$, lorsque ce nombre est pair. Et voilà donc comment on peut résoudre avec assez de promptitude les questions dont nous nous occupons dans ce Chapitre: nous en donnerons quelques exemples.

20.

Question onzieme. On cherche un nombre qui, étant divisé par 11, donne le résidu 3, & qui étant divisé par 19, donne le résidu 5.

Digitized by Google

Soit N ce nombre cherché : il faudra d'abord que $N=11p+3$, & en ſecond lieu que $N=19q+5$. Donc $11p=19q+2$, équation qui fournit la table ſuivante :

$$\begin{array}{r|l} 19=1.11+8 & p=q+r \\ 11=1.8+3 & q=r+s \\ 8=2.3+2 & r=2s+t \\ 3=1.2+1 & s=t+u \\ 2=2.1+0 & t=2u+2, \end{array}$$

où l'on peut donner à u telle valeur qu'on veut, & déterminer par-là ſucceſſivement, en rétrogradant, les lettres précédentes. On aura,

$$\begin{aligned} t &= 2u+2 \\ s &= t+u = 3u+2 \\ r &= 2s+t = 8u+6 \\ q &= r+s = 11u+8 \\ p &= q+r = 19u+14; \end{aligned}$$

de-là réſulte le nombre cherché $N=209u+157$; donc le plus petit nombre qui puiſſe exprimer N, ou ſatisfaire à la queſtion, eſt 157.

Digitized by Google

21.

Queſtion douzieme. Trouver un nombre N tel qu'en le diviſant par 11, il reſte 3, & qu'en le diviſant par 19, il reſte 5; & de plus, que ſi on diviſe ce nombre par 29, on obtienne le réſidu 10.

La derniere condition exige que $N=29p+10$; & comme on a déjà fait le calcul pour les deux autres, il faut, en conſéquence de ce qu'on a trouvé, que $N=209u+157$, à la place de quoi nous écrirons $N=209q+157$; ainſi $29p+10=209q+157$, ou $29p=209q+147$; d'où réſulte le type qui ſuit:

$209=7.29+6$; donc $p=7q+r$,
$29=4.6+5$; $q=4r+s$,
$6=1.5+1$; $r=s+t$,
$5=5.1+0$; $s=5t-147$.

Et ſi nous revenons maintenant ſur nos pas, nous aurons

$s=5t-147$,
$r=s+t=6t-147$,
$q=4r+s=29t-735$,
$p=7q+r=209t-5292$.

Digitized by Google

Donc $N=6061t-153458$. Le plus petit nombre se trouve en faisant $t=26$, & cette supposition donne $N=4128$.

22.

Une remarque cependant qu'il faut faire nécessairement, c'est que, pour qu'une telle équation $bp=aq+n$ soit résoluble, il faut que les deux nombres a & b n'ayent d'autre commun diviseur que 1; car sans cela la question seroit impossible, à moins que le nombre n n'eût le même commun diviseur.

Si l'on demandoit, par exemple, que $9p=15q+2$; comme 9 & 15 ont le commun diviseur 3, & que ce n'est pas un diviseur de 2, il est impossible de résoudre la question, parce que $9p-15q$ pouvant toujours être divisé par 3, ne peut en aucun cas devenir $=2$. Mais si dans cet exemple n étoit $=3$, ou $n=6$, &c. la question seroit possible: il suffiroit de diviser auparavant par 3; car on auroit $3p=5q+1$, équation qui seroit facilement réso-

Digitized by Google

luble par la regle donnée ci-deſſus. On voit donc clairement que les nombres a & b ne doivent avoir d'autre commun diviſeur que l'unité, & que notre regle ne peut avoir lieu dans d'autres cas.

23.

Pour le prouver encore plus évidemment, nous traiterons l'équation $9p = 15q + 2$ ſuivant la voie ordinaire. Nous trouvons $p = \frac{15q+2}{9} = q + \frac{6q+2}{9} = q + r$; de ſorte que $9r = 6q + 2$, ou $6q = 9r - 2$; ainſi $q = \frac{9r-2}{6} = r + \frac{3r-2}{6} = r + s$; de façon que $3r - 2 = 6s$, ou $3r = 6s + 2$. Par conſéquent $r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \frac{2}{3}$; or il eſt bien clair que ceci ne peut jamais devenir un nombre entier, parce que s eſt néceſſairement un nombre entier. Cela ſert à confirmer que ces ſortes de queſtions ſont impoſſibles.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

De la regle qu'on nomme regula cœci, *où il s'agit de déterminer par deux équations, trois ou un plus grand nombre d'inconnues.*

24.

NOUS avons vu dans le Chapitre précédent, comment on peut déterminer par une seule équation deux quantités inconnues, au point de les exprimer en nombres entiers & positifs.

Si donc on avoit deux équations, il faudroit, pour que la question fût indéterminée, que ces équations renfermassent plus de deux inconnues. Or il se présente de ces questions dans les livres d'Arithmétique ordinaires; on les résout par la regle dite *regula cœci*, nous ferons voir les fondemens de cette regle.

Digitized by Google

25.

Nous commencerons par un exemple.

Queſtion premiere. Trente perſonnes, hommes, femmes & enfans dépenſent 50 écus dans une auberge; l'écot d'un homme eſt 3 écus, celui d'une femme eſt 2 écus, & celui d'un enfant eſt un écu; combien y avoit-il de perſonnes de chaque claſſe?

Soit le nombre des hommes $=p$, celui des femmes $=q$, & celui des enfans $=r$, nous aurons les deux équations ſuivantes: I.) $p+q+r=30$, II.) $3p+2q+r=50$. Et il s'agit d'en tirer les trois lettres, p, q & r en nombres entiers & poſitifs. La premiere équation donne $r=30-p-q$, d'où nous concluons d'abord que $p+q$ doit être moindre que 30; & ſubſtituant cette valeur de r dans la ſeconde équation, nous avons $2p+q+30=50$, de ſorte que $q=20-2p$ & $p+q=10-p$; ce qui eſt évidemment auſſi moindre que 30. Or comme on peut, en vertu de cette équation, prendre pour p tous les nombres qui ne

Digitized by Google

paſſent pas 10, on aura les onze ſolutions ſuivantes :

Nombre des hommes, $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$
Nombre des femmes, $q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0,$
Nombre des enfans, $r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20;$

& ſi on omet la premiere & la derniere, il en reſtera neuf.

26.

Queſtion ſeconde. Quelqu'un achete 100 pieces de bétail, des porcs, des chevres & des moutons, pour 100 écus ; les porcs lui coûtent $3\frac{1}{2}$ écus la piece ; les chevres, $1\frac{1}{3}$ écu, & les moutons, $\frac{1}{2}$ écu : combien y avoit-il d'animaux de chaque eſpece ?

Soit le nombre des porcs $= p$, celui des chevres $= q$, celui des moutons $= r$, on aura les deux équations ſuivantes : I.) $p + q + r = 100$, II.) $3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100$; & cette derniere étant multipliée par 6, afin de chaſſer les fractions, ſe transforme en celle-ci, $21p + 8q + 3r = 600$. Or la premiere donne $r = 100 - p - q$; & ſi l'on ſubſtitue

Digitized by Google

ſubſtitue cette valeur à r dans la ſeconde, on a $18p+5q=300$, ou $5q=300-18p$, & $q=60-\frac{18p}{5}$. Par conſéquent il faut que $18p$ ſoit diviſible par 5, & renferme 5 comme facteur. Qu'on faſſe donc $p=5f$, on aura $q=60-18f$, & $r=13f+40$, où l'on peut prendre pour f un nombre entier quelconque, pourvu qu'il ſoit tel que q ne devienne pas négatif. Mais cette condition limite la valeur de f à 3, de ſorte que ſi on exclut auſſi 0, il ne peut y avoir que trois ſolutions du probleme; ce ſont les ſuivantes:

Lorſque $f=1, 2, 3,$
on a $p=5, 10, 15,$
$q=42, 24, 16,$
$r=53, 66, 79.$

27.

Lorſqu'on veut ſoi-même ſe propoſer de tels exemples, il faut faire attention ſur-tout qu'ils ſoient poſſibles; & pour pouvoir en juger, voici ce qu'il faut obſerver:

Soient les deux équations auxquelles nous

parvenions juſqu'à préſent, repréſentées par I.) $x+y+z=a$, II.) $fx+gy+hz=b$, où f, g & h, ainſi que a & b, ſont des nombres donnés, ſi nous ſuppoſons qu'entre les nombres f, g & h le premier f ſoit le plus grand, & h le plus petit; comme, à cauſe de $x+y+z=a$, nous avons $fx+fy+fz=fa$, il eſt clair que $fx+fy+fz$ eſt plus grand que $fx+gy+hz$; par conſéquent il faut que fa ſoit plus grand que b, ou que b ſoit plus petit que fa; & puiſque de plus $hx+hy+hz=ha$, & que $hx+hy+hz$ eſt certainement plus petit que $fx+gy+hz$, il faut auſſi que ha ſoit plus petit que b, ou b plus grand que ha. Il s'enſuit donc de-là que ſi b n'eſt pas plus petit que fa, & en même temps plus grand que ha, la queſtion ſera impoſſible.

On exprime cette condition auſſi, en diſant que b doit être contenu entre les limites fa & ha; & il faut de plus faire attention que ce nombre n'approche pas trop de l'une ou de l'autre limite, parce que cela feroit qu'on ne pourroit pas déterminer les autres lettres.

Digitized by Google

Dans l'exemple précédent, où $a=100$, $f=3\frac{1}{2}$ & $h=\frac{1}{2}$, les limites étoient 350 & 50; or si on vouloit supposer $b=51$ au lieu de 100, les équations deviendroient $x+y+z=100$, & $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=51$, ou, en chassant les fractions, $21x+8y+3z=306$; qu'on multiplie la premiere par 3, de sorte que $3x+3y+3z=300$; si l'on soustrait cette équation de l'autre, il reste $18x+5y=6$, ce qu'on voit sur le champ être impossible, parce que x & y doivent être des nombres entiers & positifs.

28.

Les Orfevres & les Monnoyeurs tirent grand parti de cette regle, quand ils se proposent de faire, de trois ou de plusieurs sortes d'argent, un alliage d'un prix donné, ainsi que l'exemple suivant le fera voir.

Question troisieme. Un Monnoyeur a trois sortes d'argent; la premiere à 7 onces, la seconde à $5\frac{1}{2}$ onces, la troisieme à $4\frac{1}{2}$ onces; il a à faire un alliage de 30 marcs

Digitized by Google

peſant, à 6 onces; combien de marcs doit-il prendre de chaque ſorte?

Qu'il prenne x marcs de la premiere ſorte, y marcs de la ſeconde & z marcs de la troiſieme, il aura $x+y+z=30$, & c'eſt la premiere équation.

Enſuite, puiſqu'un marc de la premiere ſorte contient 7 onces d'argent fin, les x marcs de cette ſorte contiendront $7x$ onces de tel argent; de même les y marcs de la ſeconde ſorte contiendront $5\frac{1}{2}y$ onces, & les z marcs de la troiſieme ſorte contiendront $4\frac{1}{2}z$ onces d'argent fin; de ſorte que toute la maſſe contiendra $7x+5\frac{1}{2}y+4\frac{1}{2}z$ onces d'argent fin. Or puiſque cet alliage peſe 30 marcs, & que chacun de ces marcs contient 6 onces d'argent fin, il s'enſuit que la maſſe entiere contiendra 180 onces d'argent fin; & de-là réſulte la ſeconde équation $7x+5\frac{1}{2}y+4\frac{1}{2}z=180$, ou $14x+11y+9z=360$. Si l'on ſouſtrait maintenant de cette équation la premiere priſe neuf fois, ou $9x+9y+9z$

Digitized by Google

$=270$, il reſte $5x+2y=90$, équation qui doit donner en nombres entiers les valeurs de x & de y. Quant à la valeur de z, on la tirera enſuite de l'équation $z=30-x-y$. Or l'équation précédente donne $2y=90-5x$ & $y=45-\frac{5x}{2}$; ſoit donc $x=2u$, on aura $y=45-5u$ & $z=3u-15$; c'eſt ſigne que u doit être plus grand que 4, & cependant plus petit que 10; & par conſéquent la queſtion admet les ſolutions ſuivantes:

$u=$	5,	6,	7,	8,	9,
$x=$	10,	12,	14,	16,	18,
$y=$	20,	15,	10,	5,	0,
$z=$	0,	3,	6,	9,	12.

29.

Il ſe préſente quelquefois des queſtions qui renferment plus de trois inconnues, mais on les réſout de la même maniere, comme l'exemple ſuivant le fera voir.

Queſtion quatrieme. Quelqu'un achete 100 pieces de bétail pour 100 écus; ſavoir,

Digitized by Google

des bœufs à 10 écus la piece, des vaches à 5 écus, des veaux à 2 écus, & des moutons à $\frac{1}{2}$ écu la piece; combien a-t-il acheté de bœufs, de vaches, de veaux & de moutons?

Soit le nombre des bœufs $=p$, celui des vaches $=q$, celui des veaux $=r$, & celui des moutons $=f$; la premiere équation eſt $p+q+r+f=100$, & la ſeconde eſt $10p+5q+2r+\frac{1}{2}f=100$, ou, en retranchant les fractions, $20p+10q+4r+f=200$; ſouſtrayant la premiere équation de celle ci, il reſte $19p+9q+3r=100$, d'où l'on tire $3r=100-19p-9q$, & $r=33+\frac{1}{3}-6p-\frac{1}{3}p-3q$, ou $r=33-6p-3q+\frac{1-p}{3}$; donc il faut que $1-p$ ou $p-1$ ſoit diviſible par 3. Qu'on faſſe

$p-1=3t$, on aura

$p=3t+1$,
$q=q$,
$r=27-19t-3q$,
$f=72+2q+16t$;

il s'enſuit de-là que $19t+3q$ doit être

Digitized by Google

moindre que 27, & que, pourvu que cette condition s'obſerve, on peut au reſte donner à q & à t telle valeur qu'on veut; cela poſé, nous aurons à conſidérer les cas ſuivans:

I. Si $t = 0$	II. Si $t = 1$
on a $p = 1$	$p = 4$
$q = q$	$q = q$
$r = 27 - 3q$	$r = 8 - 3q$
$f = 72 + 2q$.	$f = 88 + 2q$.

On ne peut faire $t = 2$, parce que r deviendroit négatif.

Dans le premier cas q ne doit pas ſurpaſſer 9, & dans le ſecond cas ce nombre ne doit pas excéder 2; ainſi ces deux cas donnent les ſolutions qui ſuivent.

Le premier donne les dix ſolutions que voici:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
f	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Digitized by Google

Le ſecond cas fournit les trois ſolutions ſuivantes :

	I.	II.	III.
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
ſ	88	90	92

Voilà donc en tout treize ſolutions, & elles ſe réduiſent à dix, ſi on exclut celles qui renferment un zéro.

30.

La méthode ne laiſſeroit pas d'être la même, quand même, dans la premiere équation, les lettres ſeroient multipliées par des nombres donnés, comme on le verra par l'exemple ſuivant :

Queſtion cinquieme. Trouver trois nombres entiers, tels que ſi on multiplie le premier par 3, le ſecond par 5 & le troiſieme par 7, la ſomme des produits ſoit 560 ; & que ſi on multiplie le premier par 9, le ſecond par 25 & le troiſieme par 49, la ſomme des produits ſoit 2920.

Digitized by Google

Soit le premier nombre $=x$, le second $=y$, le troiſieme $=z$, on aura les deux équations, I.) $3x+5y+7z=560$, II.) $9x+25y+49z=2920$. Si on ſouſtrait de la ſeconde la premiere priſe trois fois, ou $9x+15y+21z=1680$, il reſte $10y+28z=1240$; diviſant par 2, on a $5y+14z=620$, d'où l'on tire $y=124-\frac{14z}{5}$. Ainſi z doit être diviſible par 5; qu'on faſſe donc $z=5u$, on aura $y=124-14u$; ces valeurs étant ſubſtituées dans la premiere équation, on a $3x-35u+620=560$, ou $3x=35u-60$, & $x=\frac{35u}{3}-20$; c'eſt pourquoi l'on fera $u=3t$, & on aura enfin la ſolution ſuivante, $x=35t-20$, $y=124-42t$, & $z=15t$, où on peut ſubſtituer au lieu de t un nombre entier quelconque, mais tel cependant que t ſurpaſſe 0, & ſoit moindre que 3; de ſorte qu'on ſe trouve borné en effet aux deux ſolutions ſuivantes:

I.) Si $t=1$, on a $x=15$, $y=82$, $z=15$.

II.) Si $t=2$, on a $x=50$, $y=40$, $z=30$.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

Des Equations indéterminées composées, dans lesquelles l'une des inconnues ne passe pas le premier degré.

31.

Nous passerons à présent aux équations indéterminées, dans lesquelles on cherche deux quantités inconnues, & où l'une de ces inconnues est multipliée par l'autre, ou élevée à une puissance plus haute que la premiere, tandis que l'autre inconnue ne s'y trouve cependant encore qu'au premier degré. Il est évident que les équations de cette espece peuvent se représenter par l'expression générale qui suit :

$$a+bx+cy+dxx+exy+fx^3+gxxy+hx^4+kx^3y+\text{ \&c.}=0.$$

Comme dans cette équation y ne passe pas le premier degré, cette lettre se détermine facilement ; mais il faut au reste,

Digitized by Google

comme auparavant, que les valeurs tant de x que de y, ſoient aſſignées en nombres entiers.

Nous allons conſidérer quelques-uns de ces cas, en commençant par les plus faciles.

32.

Queſtion premiere. Trouver deux nombres tels que, ſi on ajoute leur produit à leur ſomme, on obtienne 79.

Nommons x & y les deux nombres cherchés; il faudra que $xy+x+y=79$; ainſi $xy+y=79-x$, & $y=\frac{79-x}{x+1}=-1+\frac{80}{x+1}$, par où l'on voit que $x+1$ doit être un diviſeur de 80. Or 80 ayant beaucoup de diviſeurs, on aura auſſi pluſieurs valeurs de x, comme on va voir:

Les diviſeurs de 80 ſont	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
donc $x=$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
& $y=$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

Mais comme les dernieres ſolutions ſont les mêmes que les premieres, on n'a réellement que les cinq ſolutions ſuivantes:

Digitized by Google

I.	II.	III.	IV.	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	19

33.

C'eſt de la même maniere qu'on pourra réſoudre auſſi l'équation générale $xy+ax+by=c$; car on aura $xy+by=c-ax$, & $y=\frac{c-ax}{x+b}$, ou $y=-a+\frac{ab+c}{x+b}$; c'eſt-à-dire que $x+b$ doit être un diviſeur du nombre connu $ab+c$; de ſorte que chaque diviſeur de ce nombre donne une valeur de x. Qu'on faſſe donc $ab+c=fg$, on aura $y=-a+\frac{fg}{x+b}$; & ſuppoſant $x+b=f$ ou $x=f-b$, il eſt clair que $y=-a+g$ ou $y=g-a$, & par conſéquent qu'on aura même deux ſolutions pour chaque maniere de repréſenter le nombre $ab+c$ par un produit tel que fg. De ces deux ſolutions, l'une eſt $x=f-b$ & $y=g-a$, & l'autre s'obtient en faiſant $x+b=g$, dans lequel cas $x=g-b$ & $y=f-a$.

Si donc on ſe propoſoit l'équation $xy+2x+3y=42$, on auroit $a=2$, $b=3$,

Digitized by Google

& $c=42$; par conſéquent $y=-2+\frac{48}{x+3}$. Or le nombre 48 peut ſe repréſenter de pluſieurs manieres par deux facteurs, comme fg, & dans chacun de ces cas on aura toujours, ſoit $x=f-3$ & $y=g-2$, ſoit auſſi $x=g-3$ & $y=f-2$. Voici le développement de cet exemple:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Facteurs	1 . 48		2 . 24		3 . 16		4 . 12		6.8	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
Nombres	-2	46	-1	22	0	14	1	10	3	6
ou	45	-1	21	0	13	1	9	2	5	4

34.

L'équation peut s'exprimer encore plus généralement, en écrivant $mxy=ax+by+c$, où a, b, c & m ſont des nombres donnés, & où l'on cherche pour x & y des nombres entiers inconnus.

Qu'on ſépare d'abord y, on aura $y=\frac{ax+c}{mx-b}$; & chaſſant x du numérateur, en multipliant par m de part & d'autre, on aura $my=\frac{max}{mx-b}\ \frac{mc}{}=a+\frac{mc+ab}{mx-b}$. On a main-

Digitized by Google

tenant une fraction dont le numérateur eſt un nombre connu, & dont le dénominateur doit être un diviſeur de ce nombre; qu'on repréſente donc le numérateur par un produit de deux facteurs, comme fg, ce qui peut ſouvent ſe faire de pluſieurs manieres, & qu'on voye ſi un de ces facteurs peut ſe comparer avec $mx-b$, de façon que $mx-b=f$. Or il faut pour cet effet, puiſque $x=\frac{f-b}{m}$, que $f+b$ ſoit diviſible par m; & il s'enſuit de-là que parmi les facteurs de $mc+ab$, on ne peut employer que ceux qui ſont tels, qu'en y ajoutant b, les ſommes ſoient diviſibles par m. Nous allons éclaircir ceci par un exemple.

Soit l'équation $5xy=2x+3y+18$, on aura $y=\frac{2x+18}{5x-3}$ & $5y=\frac{10x+90}{5x-3}=2+\frac{96}{5x-3}$; il s'agit par conſéquent de trouver ceux des diviſeurs de 96 qui, ajoutés à 3, donnent des ſommes diviſibles par 5. Or ſi l'on conſidere tous les diviſeurs de 96, qui ſont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, on voit facilement qu'il n'y en a que ces trois, 2, 12, 32, qui peuvent ſervir.

Digitized by Google

Soit donc I.) $5x-3=2$, on aura $5y=50$, & par conſéquent $x=1$, & $y=10$.

II.) $5x-3=12$, on aura $5y=10$, & par conſéquent $x=3$, & $y=2$.

III.) $5x-3=32$, on aura $5y=5$, & par conſéquent $x=7$, & $y=1$.

35.

Comme dans cette ſolution générale on a $my-a=\frac{mc+ab}{mx-b}$, il ſera à propos d'obſerver que, ſi un nombre compris dans la formule $mc+ab$, a un diviſeur de la forme $mx-b$, le quotient dans ce cas doit être néceſſairement compris dans la formule $my-a$, & qu'on peut alors repréſenter le nombre $mc+ab$ par un produit tel que $(mx-b)(my-a)$. Soit, par exemple, $m=12$, $a=5$, $b=7$ & $c=15$, on aura $12y-5=\frac{215}{12x-7}$; or les diviſeurs de 215 ſont 1, 5, 43, 215; il faut en choiſir ceux qui ſont compris dans la formule $12x$

Digitized by Google

-7, ou qui ſont tels qu'en y ajoutant 7, la ſomme ſoit diviſible par 12; mais il n'y a que 5 qui ſatisfaſſe à cette condition, ainſi $12x-7=5$ & $12y-5=43$; & de même que la premiere de ces équations donne $x=1$, on trouve auſſi par l'autre y en nombres entiers, ſavoir $y=4$. Cette propriété eſt de la plus grande importance relativement à la nature des nombres, & mérite par-là qu'on y faſſe attention particuliérement.

36.

Conſidérons maintenant auſſi une équation de cette eſpece, $xy+xx=2x+3y+29$. Elle nous donne $y=\frac{2x-xx+29}{x-3}$, ou $y=-x+1+\frac{26}{x-3}$; ainſi $x-3$ doit être un diviſeur de 26, & dans ce cas, la diviſion étant faite, le quotient ſera $=y+x+1$; or les diviſeurs de 26 étant 1, 2, 13, 26, nous aurons donc les ſolutions ſuivantes:

I.) $x-3=1$, ou $x=4$; de ſorte que $y+x+1=y+5=26$, & $y=21$;

II.)

Digitized by Google

II.) $x-3=2$, ou $x=5$; ainſi $y+x+1=y+6=13$, & $y=7$;

III.) $x-3=13$, ou $x=16$; ainſi $y+x+1=y+17=2$, & $y=-15$.

Cette derniere valeur étant négative doit être omiſe, & par la même raiſon on ne pourra tenir compte du dernier cas, $x-3=26$.

37.

Il ne ſera pas néceſſaire de développer ici un plus grand nombre de ces formules, où on ne rencontre que la premiere puiſſance de y & de plus hautes puiſſances de x; car ces cas ne ſe préſentent que rarement, & peuvent d'ailleurs toujours ſe réſoudre par la méthode que nous avons expliquée. Mais lorſque y auſſi eſt élevé à la ſeconde puiſſance, ou à un degré encore plus haut, & qu'on veut en déterminer la valeur par les regles données, on parvient à des ſignes radicaux, qui comprennent des puiſſances ſecondes ou encore plus hautes de x, & il s'agit alors de trouver

Digitized by Google

pour x des valeurs telles qu'elles faſſent évanouir les ſignes radicaux ou l'irrationnalité. Or le plus grand art de l'analyſe indéterminée, conſiſte préciſément à rendre rationnelles ces formules ſourdes ou incommenſurables; nous en fournirons les moyens dans les Chapitres ſuivans.

CHAPITRE IV.

De la maniere de rendre rationnelles les quantités ſourdes de la forme $\sqrt{a+bx+cxx}$.

38.

IL eſt donc queſtion préſentement de déterminer les valeurs qu'on peut adopter pour x, afin que la formule $a+bx+cxx$ devienne effectivement un quarré, & par conſéquent qu'on puiſſe en aſſigner une racine rationnelle. Or les lettres a, b & c ſignifient des nombres donnés; c'eſt de la nature de ces nombres que dépend principalement la détermination de l'inconnue

Digitized by Google

x, & nous remarquerons d'avance que dans bien des cas la solution devient impossible. Mais lors même qu'elle est possible, il faut du moins se contenter au commencement de pouvoir assigner pour la lettre x des valeurs rationnelles, sans exiger préciſément que ces valeurs soient même des nombres entiers ; cette condition entraîne des recherches tout-à-fait particulieres.

39.

Nous supposons ici, comme on voit, que la formule ne s'étend qu'aux secondes puissances de x ; les degrés plus élevés exigent des méthodes différentes, dont nous parlerons plus bas.

Nous remarquerons d'abord que si la seconde puissance même ne s'y trouvoit pas, & que c fût $=0$, la question n'auroit aucune difficulté ; car si $\sqrt{a+bx}$ étoit la formule proposée, & qu'il fallût déterminer x, de maniere que $a+bx$ fût un quarré, on n'auroit qu'à faire $a+bx=yy$, d'où l'on

Digitized by Google

obtiendroit auſſi-tôt $x = \frac{yy-a}{b}$; or quelque nombre que l'on ſubſtituât ici au lieu de y, il en réſulteroit toujours pour x une valeur telle que $a+bx$ ſeroit un quarré, & par conſéquent $\sqrt{a+bx}$ une quantité rationnelle.

40.

Nous commencerons donc par la formule $\sqrt{1+xx}$, c'eſt-à-dire que nous chercherons pour x des valeurs telles, qu'en ajoutant à leurs quarrés l'unité, les ſommes ſoient pareillement des quarrés; & comme il eſt clair que ces valeurs de x ne pourront être des nombres entiers, il faudra ſe contenter de trouver les nombres fractionnaires qui les expriment.

41.

Si on vouloit, à cauſe que $1+xx$ doit être un quarré, ſuppoſer $1+xx=yy$, on auroit $xx=yy-1$, & $x=\sqrt{yy-1}$; ainſi il faudroit, afin de trouver x, chercher pour y des nombres tels que leurs quarrés,

Digitized by Google

diminués de l'unité, donnaſſent auſſi des quarrés ; & par conſéquent on retomberoit dans une queſtion auſſi difficile que la premiere, & on n'auroit pas fait un pas en avant.

Il eſt cependant certain qu'il y a réellement des fractions qui, étant ſubſtituées à la place de x, font que $1+xx$ devient un quarré ; on peut s'en convaincre par les cas ſuivans :

I.) Si $x=\frac{3}{4}$, on a $1+xx=\frac{25}{16}$; par conſéquent $\sqrt{1+xx}=\frac{5}{4}$.

II.) $1+xx$ devient pareillement un quarré ; ſi $x=\frac{4}{3}$, on trouve $\sqrt{1+xx}=\frac{5}{3}$.

III.) Si on fait $x=\frac{5}{12}$, on obtient $1+xx=\frac{169}{144}$, dont la racine quarrée eſt $\frac{13}{12}$.

Mais il s'agit de faire voir comment on doit trouver ces valeurs de x, & même tous les nombres poſſibles de cette eſpece.

42.

Il y a deux méthodes pour cela. La premiere demande qu'on faſſe $\sqrt{1+xx}=x$

Digitized by Google

$+p$; on a dans cette supposition $1+xx = xx+2px+pp$, où le quarré xx se détruit; de sorte qu'on peut exprimer x sans signe radical. Car effaçant de part & d'autre xx dans l'équation susdite, on trouve $2px+pp=1$, d'où l'on tire $x=\frac{1-pp}{2p}$, quantité dans laquelle on peut substituer à p un nombre quelconque, & même des fractions.

Qu'on suppose donc $p=\frac{m}{n}$, on aura $x = \frac{1-\frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$; & si on multiplie les deux termes de cette fraction par nn, on trouve $x=\frac{nn-mm}{2mn}$.

43.

Ainsi, pour que $1+xx$ devienne un quarré, on peut prendre pour m & n tous les nombres entiers possibles, & trouver de cette maniere pour x une infinité de valeurs.

Si l'on fait aussi en général $x=\frac{nn-mm}{2mn}$, on trouve $1+xx=1+\frac{n^4-2mmnn+m^4}{4mmnn}$,

Digitized by Google

ou $1+xx=\frac{n^4+2mmnn+m^4}{4mmnn}$, fraction qui eſt effectivement un quarré, & qui donne $\sqrt{1+xx}=\frac{nn+mm}{2mn}$.

Nous indiquerons d'après cette ſolution quelques-unes des moindres valeurs de x.

Si $n=$	2	3	3	4	4	5	5	5	5
& $m=$	1	1	2	1	3	1	2	3	4
on a $x=$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{40}$

44.

On voit qu'on a en général $1+\frac{(nn-mm)^2}{(2mn)^2}=\frac{(nn+mm)^2}{(2mn)^2}$; & ſi on multiplie cette équation par $(2mn)^2$, on trouve $(2mn)^2+(nn-mm)^2=(nn+mm)^2$; ainſi nous connoiſſons d'une maniere générale deux quarrés, dont la ſomme donne un nouveau quarré. Cette remarque conduit à la réſolution de la queſtion ſuivante:

Trouver deux nombres quarrés, dont la ſomme ſoit pareillement un nombre quarré.

Digitized by Google

On veut que $pp+qq=rr$; on n'a donc qu'à faire $p=2mn$ & $q=nn-mm$, & on aura $r=nn+mm$.

De plus, comme $(nn+mm)^2-(2mn)^2=(nn-mm)^2$, on peut auſſi réſoudre la queſtion qui ſuit:

Trouver deux quarrés, dont la différence ſoit de même un nombre quarré.

Car ſi on veut que $pp-qq=rr$, on n'a qu'à ſuppoſer $p=nn+mm$ & $q=2mn$, & on aura $r=nn-mm$. On pourroit auſſi faire $p=nn+mm$ & $q=nn-mm$, & on auroit $r=2mn$.

45.

Nous avons parlé de deux manieres de donner à la formule $1+xx$ la forme d'un quarré; voici donc l'autre méthode:

Qu'on ſuppoſe $\sqrt{1+xx}=1+\frac{mx}{n}$, on aura $1+xx=1+\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$; ſi l'on ſouſtrait de part & d'autre 1, on a $xx=\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$; cette équation ſe diviſe par x, & par conſéquent on a $x=\frac{2m}{n}+\frac{mmx}{nn}$, ou $nnx=2mn+mmx$, d'où l'on tire $x=\frac{2mn}{nn-mm}$.

Digitized by Google

Ayant trouvé cette valeur de x, on a $1+xx=1+\frac{4mmnn}{n^4-2mmnn+m^4}$, ou $=\frac{n^4+2mmnn+m^4}{n^4-2mmnn+m^4}$, ce qui eſt le quarré de $\frac{nn+mm}{nn-mm}$. Or comme il réſulte de-là l'équation $1+\frac{(2mn)^2}{(nn-mm)^2}=\frac{(nn+mm)^2}{(nn-mm)^2}$, nous aurons, ainſi que ci-deſſus, $(nn-mm)^2+(2mn)^2=(nn+mm)^2$, c'eſt-à-dire les deux mêmes quarrés dont la ſomme eſt pareillement un quarré.

46.

Le cas que nous venons de développer d'une maniere détaillée, nous fournit deux méthodes pour transformer en un quarré la formule générale $a+bx+cxx$. La premiere de ces méthodes s'applique à tous les cas où c eſt un quarré ; la ſeconde ſe rapporte à ceux où a eſt un quarré ; nous nous arrêterons à l'une & à l'autre ſuppoſition.

I.) Suppoſons d'abord que c ſoit un quarré,

Digitized by Google

ou que la formule proposée soit $a+bx+ffxx$; puisqu'elle doit être un quarré, nous ferons $\sqrt{a+bx+ffxx}=fx+\frac{m}{n}$, & nous aurons $a+bx+ffxx=ffxx+\frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$, où les termes affectés de xx se détruisent, de sorte que $a+bx=\frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$; si nous multiplions par nn, nous avons $nna+nnbx=2mnfx+mm$; nous en concluons $x=\frac{mm-nna}{nnb-2mnf}$, & en substituant à x cette valeur, nous trouvons $\sqrt{a+bx+ffxx}=\frac{mmf-nnaf}{nnb-mnf}+\frac{m}{n}=\frac{mnb-mmf-nnaf}{nnb-2mnf}$.

47.

Comme nous avons trouvé pour x une fraction, nous ferons $x=\frac{p}{q}$, en sorte que $p=mm-nna$, & $q=nnb-2mnf$; ainsi la formule $a+\frac{bp}{q}+\frac{ffpp}{qq}$ est un quarré; & comme elle est pareillement un quarré, si on la multiplie par le quarré qq, il s'ensuit que la formule $aqq+bpq+ffpp$ est aussi un quarré, si on suppose $p=mm-nna$ & $q=nnb-2mnf$. Il est clair qu'il résulte de-là une infinité de solutions en nombres entiers,

Digitized by Google

parce que les valeurs des lettres m & n ſont arbitraires.

48.

II.) Le ſecond cas que nous avons à conſidérer, eſt celui où a eſt un quarré. Soit donc propoſée la formule $ff+bx+cxx$, dont il s'agiſſe de faire un quarré. Nous ſuppoſerons pour cet effet $\sqrt{ff+bx+cxx} = f+\frac{mx}{n}$, & nous aurons $ff+bx+cxx = ff+\frac{2fmx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$, où, les ff ſe détruiſant, on peut diviſer les termes reſtans par x, de ſorte qu'on obtient $b+cx = \frac{2mf}{n}+\frac{mmx}{nn}$, ou $nnb+nncx = 2mnf+mmx$, ou $nncx - mmx = 2mnf - nnb$, ou enfin $x = \frac{2mnf-nnb}{nnc-mm}$. Si nous ſubſtituons maintenant cette valeur à la place de x, nous avons $\sqrt{ff+bx+cxx} = f+\frac{2mmf-mnb}{nnc-mm} = \frac{nncf+mmf-mnb}{nnc-mm}$; & en faiſant $x = \frac{p}{q}$, nous pourrons, de la même maniere que ci-deſſus, transformer en quarré la formule $ffqq+bpq+cpp$, ſavoir en faiſant $p = 2mnf - nnb$, & $q = nnc - mm$.

Digitized by Google

49.

On doit distinguer principalement ici le cas où $a=0$, c'est-à-dire où il s'agit de faire un quarré de la formule $bx+cxx$; car on n'a qu'à supposer $\sqrt{bx+cxx}=\frac{mx}{n}$, on aura l'équation $bx+cxx=\frac{mmxx}{nn}$ qui, divisée par x & multipliée par nn, donne $bnn+cnnx=mmx$, & par conséquent $x=\frac{nnb}{mm-cnn}$.

Qu'on cherche, par exemple, tous les nombres trigonaux qui sont en même temps des quarrés, il faudra que $\frac{xx+x}{2}$, & par conséquent aussi $2xx+2x$, soit un quarré. Supposons que $\frac{mmxx}{nn}$ soit ce quarré, nous aurons $2nnx+2nn=mmx$, & $x=\frac{2nn}{mm-2nn}$; on peut substituer dans cette valeur, au lieu de m & de n, tous les nombres possibles, mais on trouvera pour x ordinairement une fraction, quelquefois cependant on parviendra aussi à des nombres entiers; par exemple, si $m=3$ & $n=2$, on trouve $x=8$, dont le nombre triangu-

Digitized by Google

laire, qui eſt 36, eſt en même temps un quarré.

On peut auſſi faire $m=7$ & $n=5$; dans ce cas $x=-50$, dont le triangle 1225 eſt en même temps celui de $+49$ & le quarré de 35. On auroit trouvé le même réſultat en faiſant $n=7$ & $m=10$; car dans ce cas on a pareillement $x=49$.

De même, ſi $m=17$ & $n=12$, on trouve $x=288$, le nombre trigonal en eſt $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{288.289}{2}=144.289$, ce qui eſt un quarré dont la racine eſt $=12.17=204$.

50.

Nous remarquerons à l'égard de ce dernier cas, que la formule $bx+cxx$ a pu être transformée en un quarré par la raiſon qu'elle avoit un facteur, ſavoir x; cette obſervation nous conduit à de nouveaux cas, dans leſquels la formule $a+bx+cxx$ peut pareillement devenir un quarré, lors même que ni a ni c ne ſont des quarrés.

Ces cas ſont ceux où $a+bx+cxx$ peut ſe décompoſer en deux facteurs, & cela

Digitized by Google

arrive lorsque $bb-4ac$ est un quarré. Pour le prouver, nous remarquerons que les facteurs dépendent toujours des racines d'une équation, & qu'ainsi il faut supposer $a+bx+cxx=0$; cela posé, on a $cxx=-bx-a$, & $xx=-\frac{bx}{c}-\frac{a}{c}$, d'où l'on tire $x=-\frac{b}{2c}\pm\sqrt{\frac{bb}{4cc}-\frac{a}{c}}$, ou $x=-\frac{b}{2c}\pm\frac{\sqrt{bb-4ac}}{2c}$; & il est clair que si $bb-4ac$ est un quarré, cette quantité devient rationnelle.

Soit donc $bb-4ac=dd$, les racines seront $-\frac{b\pm d}{2c}$, c'est-à-dire que $x=-\frac{b\pm d}{2c}$; & par conséquent les diviseurs de la formule $a+bx+cxx$ sont $x+\frac{b-d}{2c}$ & $x+\frac{b+d}{2c}$; & si on multiplie ces facteurs l'un par l'autre, on retrouve la même formule, à cela près qu'elle est divisée par c; car le produit est $xx+\frac{bx}{c}+\frac{bb}{4cc}-\frac{dd}{4cc}$; & puisque $dd=bb-4ac$, on a $xx+\frac{bx}{c}+\frac{bb}{4cc}-\frac{bb}{4cc}+\frac{4ac}{4cc}=xx+\frac{bx}{c}+\frac{a}{c}$; ce qui étant multiplié par c, donne $cxx+bx+a$. On n'a donc qu'à multiplier l'un des facteurs par c, & on aura la formule en question exprimée par le produit

Digitized by Google

$$\left(cx+\frac{b}{2}-\frac{d}{2}\right)\left(x+\frac{b}{2c}+\frac{d}{2c}\right);$$

& on voit que cette ſolution ne peut manquer d'avoir lieu toutes les fois que $bb+4ac$ eſt un quarré.

51.

De-là réſulte le troiſieme cas, dans lequel la formule $a+bx+cxx$ peut ſe tranſformer en un quarré, & que nous allons joindre aux deux autres.

III.) Ce cas, ainſi que nous l'avons inſinué, a lieu lorſque notre formule peut ſe repréſenter par un produit, tel que $(f+gx).(h+kx)$. Pour faire de cette quantité un quarré, ſuppoſons ſa racine, ou $\sqrt{(f+gx).(h+kx)}=\frac{m.(f+gx)}{n}$; nous aurons $(f+gx)(h+kx)=\frac{mm.(f+gx)^2}{nn}$; & en diviſant cette équation par $f+gx$, on a $h+kx=\frac{mm.(f+gx)}{nn}$, c'eſt-à-dire $hnn+knnx=fmm+gmmx$, & par conſéquent $x=\frac{fmm-hnn}{knn-gmm}$.

Digitized by Google

52.

Pour éclaircir ce réſultat, ſoit propoſée la queſtion ſuivante :

Premiere queſtion. Trouver tous les nombres x, tels que ſi du double de leur quarré on retranche 2, le reſte ſoit un quarré.

Puiſque c'eſt $2xx-2$ qui doit être un quarré, il faut faire attention que cette formule s'exprime par les facteurs ſuivans, $2.\overline{x+1}.\overline{x-1}$. Si donc on en ſuppoſe la racine $=\frac{m.(x+1)}{n}$, on a $2(x+1)(x-1)=\frac{mm(xx+1)^2}{nn}$; diviſant par $x+1$ & multipliant par nn, on aura $2nnx-2nn=mmx+mm$, & de-là $x=\frac{mm+2nn}{2nn-mm}$.

Si l'on fait $m=1$ & $n=1$, on trouve $x=3$, & $2xx-2=16=4^2$.

Que ſi $m=3$ & $n=2$, on a $x=-17$; or comme x ne ſe rencontre qu'élevé au ſecond degré, il eſt indifférent qu'on prenne $x=-17$ ou $x=+17$; l'une & l'autre ſuppoſition donne également $2xx-2=576=24^2$.

53.

Digitized by Google

53.

Seconde queſtion. Soit propoſée la formule $6+13x+6xx$, pour être transformée en un quarré, nous avons ici $a=6$, $b=13$ & $c=6$, où ni a ni c n'eſt un quarré. Qu'on voie donc ſi $bb-4ac$ devient un quarré, on trouve 25; ainſi on eſt sûr que la formule peut être repréſentée par deux facteurs; ces facteurs ſont $(2+3x)(3+2x)$. Que $\frac{m(2+3x)}{n}$ ſoit leur racine, on aura $(2+3x)(3+2x)=\frac{mm(2+3x)^2}{nn}$, ce qui ſe change en $3nn+2nnx=2mm+3mmx$, d'où l'on tire $x=\frac{2mm-3nn}{2nn-3mm}=\frac{3nn-2mm}{3mm-2nn}$. Or afin qu'ici le numérateur devienne poſitif, il faut que $3nn$ ſoit plus grand que $2mm$, & par conſéquent $2mm$ plus petit que $3nn$; c'eſt-à-dire qu'il faut que $\frac{mm}{nn}$ ſoit plus petit que $\frac{3}{2}$. Quant au dénominateur, s'il doit devenir poſitif, on voit que $3mm$ doit ſurpaſſer $2nn$, & par conſéquent $\frac{mm}{nn}$ doit être plus grand que $\frac{2}{3}$. Si donc on veut trouver pour x des nombres poſitifs, il faut prendre pour

Digitized by Google

m & n des nombres tels que $\frac{mm}{nn}$ soit moindre que $\frac{3}{2}$ & cependant plus grand que $\frac{2}{3}$.

Soit, par exemple, $m=6$ & $n=5$, on aura $\frac{mm}{nn}=\frac{36}{25}$, ce qui est moindre que $\frac{3}{2}$ & évidemment plus grand que $\frac{2}{3}$; c'est pourquoi on trouve $x=+\frac{3}{58}$.

54.

IV.) Ce troisieme cas donne lieu d'en considérer encore un quatrieme, qui est celui où la formule $a+bx+cxx$ se décompose en deux parties, telle que la premiere soit un quarré, & que la seconde soit le produit de deux facteurs; c'est-à-dire que dans ce cas la formule doit être représentée par une quantité de la forme $pp+qr$, où les lettres p, q & r indiquent des quantités de la forme $f+gx$. Il est clair que la regle pour ce cas sera de faire $\sqrt{pp+qr}=p+\frac{mq}{n}$; car on aura $pp+qr=pp+\frac{2mpq}{n}+\frac{mmqq}{nn}$, où les pp s'en vont, après quoi l'on peut diviser par q, de sorte qu'on obtient $r=\frac{2mp}{n}+\frac{mmq}{nn}$, ou $nnr=2mnp+mmq$, équation

Digitized by Google

par laquelle x se détermine facilement. Voilà donc le quatrieme cas dans lequel notre formule peut se transformer en un quarré ; l'application en est aisée, & nous allons l'éclaircir par quelques exemples.

55.

Troisieme question. On cherche des nombres x, tels que leurs quarrés, pris deux fois, soient de 1 plus grands que d'autres quarrés, ou bien que si on retranche l'unité d'un de ces doubles quarrés, il reste un quarré ; ainsi que le cas a lieu pour le nombre 5, dont le quarré 25, pris deux fois, donne le nombre 50, qui est de 1 plus grand que le quarré 49.

Il faut, d'après cet énoncé, que $2xx-1$ soit un quarré ; & comme nous avons, suivant notre formule, $a=-1$, $b=0$ & $c=2$, on voit que ni a ni c n'est un quarré, & que de plus la quantité proposée ne peut être décomposée en deux facteurs, puisque $bb-4ac=8$ n'est pas non plus un quarré ; de sorte qu'aucun des trois premiers

Digitized by Google

cas n'a lieu. Mais, suivant le quatrieme, cette formule peut être représentée par $xx+(xx-1)=xx+(x-1)(x+1)$. Si donc on en suppose la racine $=x+\frac{m(x+1)}{n}$, on aura $xx+(x+1)(x-1)=xx+\frac{2mx(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$; cette équation, après avoir effacé les xx & divisé les autres termes par $x+1$, donne $nnx-nn=2mnx+mm$, d'où l'on tire $x=\frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; & puisque dans notre formule $2xx-1$, le quarré xx se trouve seul, il est indifférent qu'on trouve pour x des valeurs positives ou négatives. On peut d'abord même écrire $-m$ au lieu de $+m$, afin d'avoir $x=\frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}$.

Si on fait ici $m=1$ & $n=1$, on trouve $x=1$ & $2xx-1=1$; que si on fait $m=1$ & $n=2$, on trouve $x=\frac{5}{7}$ & $2xx-1=\frac{1}{49}$; enfin, si on supposoit $m=1$ & $n=-2$, on trouveroit $x=-5$, ou $x=+5$, & $2xx-1=49$.

Digitized by Google

56.

Quatrieme queſtion. Trouver des nombres dont les quarrés doublés & augmentés de 2, ſoient pareillement des quarrés. Un tel nombre, par exemple, eſt 7, le double de ſon quarré eſt 98, & ſi on y ajoute 2, on a le quarré 100.

Il faut donc que $2xx+2$ ſoit un quarré, & comme $a=2$, $b=0$ & $c=2$; de ſorte que ni a ni c, ni $bb-4ac$ ou -16, ne ſont des quarrés, il faudra recourir à la quatrieme regle.

Suppoſons la premiere partie $=4$, la ſeconde ſera $2xx-2=2(x+1)(x-1)$, ce qui donne à la quantité propoſée la forme $4+2(x+1)(x-1)$.

Que $2+\frac{m(x+1)}{n}$ en ſoit la racine, nous aurons l'équation $4+2(x+1)(x-1)=4+\frac{4m(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$, où les 4 ſe retranchent, de façon qu'après avoir diviſé les autres termes par $x+1$, on a $2nnx-2nn=4mn+mmx+mm$, & par conſéquent $x=\frac{4mn+mm+2nn}{2nn-mm}$.

Digitized by Google

Si on fait dans cette valeur $m=1$ & $n=1$, on trouve $x=7$, & $2xx+2=100$. Mais si $m=0$ & $n=1$, on a $x=1$ & $2xx+2=4$.

57.

Il arrive ſouvent auſſi que, lorſqu'aucune des trois premieres regles n'a lieu, on ne peut trouver comment la formule peut ſe décompoſer en deux parties telles que la quatrieme regle les demande.

Par exemple, s'il eſt queſtion de la formule $7+15x+13xx$, la décompoſition dont nous parlons eſt à la vérité poſſible, mais la façon de la faire ne ſe préſente pas d'abord à l'eſprit; elle exige qu'on ſuppoſe la premiere partie $=(1-x)^2$ ou $1-2x+xx$, de façon que l'autre eſt $=6+17x+12xx$; & on reconnoît que cette partie a des facteurs, parce que $17^2-4.6.12$ étant $=1$, eſt un quarré. En effet les deux facteurs ſont $(2+3x)(3+4x)$; de ſorte que la formule devient $(1-x)^2+(2+3x)(3+4x)$, & qu'on peut maintenant la réſoudre par la quatrieme regle.

Digitized by Google

Mais, ainſi que nous l'avons inſinué, on ne doit pas prétendre que cette décompoſition ſe trouve ſur le champ; c'eſt pourquoi nous indiquerons encore une voie générale, pour reconnoître préalablement ſi la réſolution d'une telle formule eſt poſſible ou non; car il y en a une infinité qui ne peuvent ſe réſoudre du tout: telle eſt, par exemple, la formule $3xx+2$, qui ne peut en aucun cas devenir un quarré. D'un autre côté il ſuffit de connoître un ſeul cas où une formule eſt poſſible, pour en trouver enſuite facilement toutes les ſolutions; c'eſt ſur quoi nous allons entrer dans quelque détail.

58.

On remarquera, d'après ce que nous venons de dire, que tout l'avantage qu'on peut ſe promettre dans ces occaſions, c'eſt de déterminer ou de deviner, pour ainſi dire, quelque cas dans lequel une formule telle que $a+bx+cxx$, ſe transforme en un quarré; & la voie qui ſe préſente na-

Digitized by Google

turellement pour cela, est de supposer successivement pour x de petits nombres, jusqu'à ce qu'on rencontre un cas qui donne un quarré.

Or, comme x peut être un nombre rompu, qu'on commence par substituer en général à x une fraction telle que $\frac{t}{u}$; & si la formule $a+\frac{bt}{u}+\frac{ctt}{uu}$ qui en résulte, est un quarré, elle le sera pareillement après avoir été multipliée par uu; de sorte qu'il ne restera qu'à tâcher de trouver pour t & pour u des valeurs en nombres entiers, telles que la formule $auu+btu+ctt$ soit un quarré. Il est évident qu'après cela la supposition de $x=\frac{t}{u}$ ne peut manquer de faire trouver la formule $a+bx+cxx$ égale à un quarré.

Si enfin, quoi qu'on fasse, on ne parvient à aucun cas satisfaisant, on a tout lieu de soupçonner qu'il est tout-à-fait impossible de transformer la formule en un quarré, ce qui, comme nous l'avons dit, arrive très-fréquemment.

Digitized by Google

59.

Préſentement nous ferons voir que, lorſqu'au contraire on a déterminé un cas ſatisfaiſant, il eſt facile de trouver tous les autres cas qui donnent pareillement un quarré; on verra en même temps que le nombre de ces ſolutions eſt toujours infiniment grand.

Conſidérons d'abord la formule $2+7xx$, où $a=2$, $b=0$ & $c=7$, elle devient évidemment un quarré, ſi l'on ſuppoſe $x=1$; qu'on faſſe donc $x=1+y$, on aura $xx=1+2y+yy$, & notre formule devient $9+14y+7yy$, où le premier terme eſt un quarré; ainſi nous ſuppoſerons, conformément à la ſeconde regle, la racine quarrée de la nouvelle formule $=3+\frac{my}{n}$, & nous aurons l'équation $9+14y+7yy=9+\frac{6my}{n}+\frac{mmy}{nn}$, où nous pouvons effacer 9 de part & d'autre, & diviſer par y; cela fait, nous aurons $14nn+7n^2y=6mn+mmy$; donc $y=\frac{6mn-14nn}{7nn-mm}$, & conſéquem-

ment $x = \frac{6mn - 7nn - m^2}{7nn - mm}$, où l'on peut adopter pour m & n telles valeurs qu'on veut.

Si on fait $m = 1$ & $n = 1$, on a $x = -\frac{1}{3}$; ou bien auſſi, puiſque la ſeconde puiſſance de x eſt ſeule, $x = +\frac{1}{3}$, donc $2 + 7xx = \frac{25}{9}$.

Si $m = 3$ & $n = 1$, on a $x = -1$, ou $x = +1$.

Mais ſi $m = 3$ & $n = -1$, on a $x = 17$; ce qui donne $2 + 7xx = 2025$, le quarré de 25.

Suppoſons auſſi $m = 8$ & $n = 3$, nous aurons de même $x = -17$ ou $x = +17$.

Mais en faiſant $m = 8$ & $n = -3$, on trouve $x = 271$; de ſorte que $2 + 7xx = 514089 = 717^2$.

60.

Examinons à préſent la formule $5xx + 3x + 7$, qui devient un quarré par la ſuppoſition de $x = -1$. Si nous faiſons par cette raiſon $x = y - 1$, notre formule ſe change en celle-ci:

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} 5yy-10y+5 \\ +3y-3 \\ +7 \\ \hline 5yy-7y+9, \end{array}$$

dont nous ſuppoſerons la racine quarrée $=3-\frac{my}{n}$; moyennant cela nous aurons $5yy-7y+9=9-\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$, ou $5nny-7nn=-6mn+mmy$; d'où nous tirons $y=\frac{7nn-6mn}{5nn-mm}$, & enfin $x=\frac{2nn-6mn+mm}{5nn-mm}$.

Soit $m=2$ & $n=1$, on a $x=-6$, & par conſéquent $5xx+3x+7=169=13^2$.

Mais ſi $m=-2$ & $n=1$, on trouve $x=18$, & $5xx+3x+7=1681=41^2$.

61.

Conſidérons maintenant cette autre formule $7xx+15x+13$, où nous ne pouvons que commencer par la ſuppoſition de $x=\frac{t}{u}$; ayant ſubſtitué & multiplié par uu, nous avons la formule $7tt+15tu+13uu$, qui doit être un quarré. Eſſayons donc de prendre quelques petits nombres pour les valeurs de t & de u.

Digitized by Google

Soit $t=1$ & $u=1$, la formule deviendra $= 35$
$t=2$ & $u=1$, — — — — — — $= 71$
$t=2$ & $u=-1$, — — — — — — $= 11$
$t=3$ & $u=1$, — — — — — — $=121$.

Or 121 étant un quarré, c'eſt ſigne que la valeur de $x=3$ ſatisfait ; ſuppoſons donc $x=y+3$, & nous aurons, en ſubſtituant dans la formule, $7yy+42y+63+15y+45+13$, ou $7yy+57y+121$. Soit la racine $=11+\frac{my}{n}$, nous aurons $7yy+57y+121=121+\frac{22my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$, ou $7nny+57nn=22mn+mmy$; donc $y=\frac{57nn-22mn}{mm-7nn}$, & $x=\frac{36nn-22mn+3mm}{mm-7nn}$.

Soit, par exemple, $m=3$ & $n=1$, on trouve $x=-\frac{3}{2}$, & la formule devient $7xx+15x+13=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

Soit $m=1$ & $n=1$, on trouve $x=-\frac{17}{6}$; ſi $m=3$ & $n=-1$, on a $x=\frac{129}{2}$, & la formule $7xx+15x+13=\frac{120409}{4}=\left(\frac{347}{2}\right)^2$.

62.

Mais ſouvent on perd ſa peine à chercher un cas où la formule propoſée puiſſe

Digitized by Google

devenir un quarré. Nous avons déjà dit que $3xx+2$ eſt une de ces formules intraitables, & on verra, en lui donnant d'après la regle la forme $3tt+2uu$, qu'en effet, quelques valeurs que l'on donne à t & à u, cette quantité ne devient jamais un nombre quarré. Et comme les formules de cette eſpece ſont en très-grand nombre, il vaudra la peine d'indiquer quelques caracteres auxquels on puiſſe reconnoître leur impoſſibilité, afin qu'on ſoit ſouvent diſpenſé par-là d'un tâtonnement inutile: c'eſt à quoi nous deſtinons le Chapitre ſuivant.

CHAPITRE V.

Des cas où la formule $a+bx+cxx$ *ne peut jamais devenir un quarré.*

63.

COMME notre formule générale eſt de trois termes, nous obſerverons d'abord qu'elle peut toujours être transformée en

Digitized by Google

une autre, dans laquelle le terme moyen manque. Cela se fait en supposant $x = \frac{y-b}{2c}$; cette substitution change notre formule en celle-ci, $a + \frac{by-bb}{2c} + \frac{yy-2by+bb}{4c}$, ou $\frac{4ac-bb+yy}{4c}$; & puisqu'elle doit être un quarré, qu'on la fasse $= \frac{zz}{4}$, on aura $4ac - bb + yy = czz$, & par conséquent $yy = czz + bb - 4ac$. Lors donc que notre formule sera un quarré, cette derniere $czz + bb - 4ac$ le sera pareillement; & réciproquement, si celle ci est un quarré, la proposée le sera de même. Par conséquent, si on écrit t à la place de $bb - 4ac$, tout reviendra à déterminer si une quantité de la forme $czz + t$ peut devenir un quarré ou non. Et comme cette formule ne consiste qu'en deux termes, il est certainement beaucoup plus facile par-là de juger si elle est possible ou si elle ne l'est pas; c'est au reste la nature des nombres donnés c & t, qui doit nous guider dans cette recherche.

Digitized by Google

64.

Il eſt clair que ſi $t=0$, la formule czz ne peut devenir un quarré que dans le cas où c eſt un quarré; car le quotient de la diviſion d'un quarré par un autre quarré étant pareillement un quarré, la quantité czz ne peut être un quarré, à moins que $\frac{cu}{u}$, c'eſt-à-dire c, n'en ſoit un. Ainſi quand c n'eſt pas un quarré, la formule czz ne peut en aucune maniere devenir un quarré; & au contraire, ſi c eſt par ſoi-même un quarré, czz ſera de même un quarré, quelque nombre que l'on adopte pour z.

65.

Si nous voulons porter un jugement ſur d'autres cas, il nous faudra recourir à ce que nous avons dit plus haut au ſujet des différentes eſpeces de nombres conſidérés relativement à leur diviſion par d'autres nombres.

Nous avons vu, par exemple, que le diviſeur 3 donne lieu à trois eſpeces dif-

Digitized by Google

férentes de nombres : la premiere comprend les nombres qui ſont diviſibles par 3, & qu'on peut exprimer par la formule $3n$.

La ſeconde eſpece comprend les nombres qui, diviſés par 3, laiſſent 1 de reſte, & qui ſont contenus dans la formule $3n+1$.

A la troiſieme eſpece appartiennent les nombres, où le réſidu de la diviſion par 3 eſt 2, & qui ſe repréſentent par l'expreſſion générale $3n+2$.

Or, puiſque tous les nombres ſont contenus dans ces trois formules, conſidérons-en les quarrés. D'abord, s'il s'agit d'un nombre qui ſoit compris dans la formule $3n$, nous voyons que le quarré de cette quantité étant $9nn$, il eſt diviſible non-ſeulement par 3, mais auſſi par 9.

Que ſi le nombre donné eſt compris dans la formule $3n+1$, on a le quarré $9nn+6n+1$, qui, diviſé par 3, donne $3nn+2n$ avec le réſidu 1, & qui par conſéquent appartient de même à la ſeconde eſpece $3n+1$.

Enfin, ſi le nombre en queſtion eſt compris

Digitized by Google

compris dans la formule $3n+2$, on a à considérer le quarré $9nn+12n+4$; si on le divise par 3, on trouve $3nn+4n+1$ & 1 de reste; de sorte que ce quarré appartient, ainsi que le précédent, à l'espece $3n+1$.

Il est clair par-là que les nombres quarrés en général ne sont que de deux especes relativement au diviseur 3; car, ou ils sont divisibles par 3, & dans ce cas ils sont nécessairement aussi divisibles par 9; ou bien ils ne sont point divisibles par 3, & dans ce cas il y aura toujours 1 de résidu & jamais 2. Par cette raison aucun nombre contenu dans la formule $3n+2$, ne peut être un quarré.

66.

Il nous est facile, au moyen de ce que nous venons de dire, de faire voir que la formule $3xx+2$ ne peut jamais devenir un quarré, quelque nombre entier ou fractionnaire qu'on veuille substituer à x. Car si x est un nombre entier, & qu'on divise

Digitized by Google

la formule $3xx+2$ par 3, il reſte 2; donc elle ne peut être un quarré. Enſuite ſi x eſt une fraction, nous l'exprimerons par $\frac{t}{u}$, & nous ſuppoſerons qu'elle eſt déjà réduite à ſes moindres termes, & que t & u n'ont d'autre commun diviſeur que 1. Afin donc que $\frac{3tt}{uu}+2$ fût un quarré, il faudroit, en multipliant par uu, que $3tt+2uu$ fût de même un quarré; or c'eſt ce qui ne ſe peut: car remarquons que le nombre u eſt diviſible par 3, ou qu'il ne l'eſt pas; s'il l'eſt, t ne le ſera pas, parce que t & u n'ont pas de commun diviſeur; c'eſt pourquoi, ſi on fait $u=3f$, comme la formule devient $=3tt+18ff$, on voit bien qu'on ne peut la diviſer par 3 qu'une fois & pas davantage, comme il faudroit pouvoir le faire ſi elle étoit un quarré; en effet, en diviſant d'abord par 3, on a $tt+6ff$. Or ſi d'un côté $6ff$ eſt diviſible par 3, de l'autre tt étant diviſé par 3, laiſſe 1 de reſte. Suppoſons à préſent que u ne ſoit pas diviſible par 3, & voyons ce qui reſte. Puiſque le premier terme eſt diviſible par 3,

Digitized by Google

il s'agira uniquement de savoir quel résidu donne le second terme $2uu$. Or uu étant divisé par 3, donne le reste 1, c'est-à-dire que c'est un nombre de l'espece $3n+1$; ainsi $2uu$ est un nombre de l'espece $6n+2$, & en le divisant par 3 il laisse 2 de reste; par conséquent notre formule $3tt+2uu$, si on la divise par 3, donne le résidu 2, & n'est certainement pas un nombre quarré.

67.

On peut démontrer de la même maniere, que pareillement la formule $3tt+5uu$ ne peut jamais être un quarré, ni même aucune des formules suivantes: $3tt+8uu$, $3tt+11uu$, $3tt+14uu$, où les nombres 5, 8, 11, 14 &c. divisés par 3, donnent 2 pour résidu. Car si l'on suppose que u soit divisible par 3, & que par conséquent t ne le soit pas, & qu'on fasse $u=3s$, on parviendra toujours à des formules divisibles par 3, mais non pas divisibles par 9. Et si u n'est pas divisible par 3, & par conséquent que uu soit un nombre de l'espece

Digitized by Google

$3n+1$, on auroit le premier terme, $3tt$, divisible par 3, tandis que les seconds, $5uu$, $8uu$, $11uu$ &c. auroient les formes $15n+5$, $24n+8$, $33n+11$ &c. & laisseroient constamment 2 de reste, quand on les diviseroit par 3.

68.

Il est évident que cette remarque s'étend même jusqu'à la formule générale $3tt+(3n+2).uu$, laquelle en effet ne peut jamais devenir un quarré, & pas même en prenant pour n des nombres négatifs. Si on vouloit, par exemple, faire $n=-1$, je dis qu'il est impossible que la formule $3tt-uu$ puisse devenir un quarré; la chose est claire, si u est divisible par 3; & si cela n'est pas, comme dans ce cas uu est un nombre de l'espece $3n+1$, notre formule devient $3tt-3n-1$, ce qui, étant divisé par 3, donne le résidu -1 ou $+2$, en augmentant de 3. En général que n soit $=-m$, on aura la formule $3tt-(3m-2)uu$, qui ne peut jamais devenir un quarré.

Digitized by Google

69.

Voilà juſqu'où nous conduit la conſidération du diviſeur 3; ſi nous regardons maintenant auſſi 4 comme un diviſeur, nous voyons qu'un nombre quelconque eſt toujours compris dans une des quatre formules ſuivantes:

I.) $4n$, II.) $4n+1$, III.) $4n+2$, IV.) $4n+3$.

Le quarré de la premiere eſpece de ces nombres eſt $16nn$, & il eſt par conſéquent diviſible par 16.

Celui de la ſeconde eſpece $4n+1$ eſt $16nn+8n+1$; ainſi en le diviſant par 8, il donne 1 de reſte; de ſorte qu'il appartient à la formule $8n+1$.

Le quarré de la troiſieme eſpece, $4n+2$, eſt $16nn+16n+4$; ſi on diviſe par 16, il reſte 4; donc ce quarré eſt compris dans la formule $16n+4$. Enfin le quarré de la quatrieme eſpece $4n+3$, étant $16nn+24n+9$, on voit qu'en diviſant par 8 il reſte 1.

Digitized by Google

70.

Nous apprenons par-là, en premier lieu, que tous les nombres quarrés pairs ſont ou de la forme $16n$, ou de celle-ci $16n+4$; & conſéquemment que toutes les autres formules paires, ſavoir $16n+2$, $16n+6$, $16n+8$, $16n+10$, $16n+12$, $16n+14$, ne peuvent jamais devenir des nombres quarrés.

Enſuite, que tous les quarrés impairs ſont contenus dans la ſeule formule $8n+1$; c'eſt-à-dire que ſi on les diviſe par 8, ils laiſſent 1 de réſidu. Et il ſuit de-là que tous les autres nombres impairs, qui auront la forme ou de $8n+3$, ou de $8n+5$, ou de $8n+7$, ne pourront jamais être des quarrés.

71.

Ces principes fourniſſent une nouvelle preuve que la formule $3tt+2uu$ ne peut être un quarré. Car, ou les deux nombres t & u ſont impairs, ou l'un eſt pair & l'autre

Digitized by Google

eſt impair. Ils ne peuvent être pairs l'un & l'autre, parce que ſi cela étoit, ils auroient au moins le commun diviſeur 2. Dans le premier cas donc, où tant *tt* que *uu* ſont compris dans la formule $8n+1$, le premier terme $3tt$ étant diviſé par 8, laiſſeroit le réſidu 3, & l'autre terme, $2uu$, laiſſeroit 2; ainſi le réſidu total ſeroit 5; ainſi la formule en queſtion ne peut être un quarré. Mais ſi le ſecond cas a lieu, & que *t* ſoit pair & *u* impair, le premier terme $3tt$ ſera diviſible par 4, & le ſecond terme $2uu$, ſi on le diviſe par 4, laiſſera 2 de reſte; ainſi les deux termes enſemble, diviſés par 4, laiſſent 2 de reſte, & ne peuvent par conſéquent former un quarré. Enfin, ſi on vouloit ſuppoſer *u* un nombre pair $=2f$, & *t* impair, de ſorte que $tt=8n+1$, notre formule ſe changeroit en celle-ci, $24n+3+8ff$, qui, diviſée par 8, laiſſe 3, & ne peut donc être un quarré.

Cette démonſtration s'étend auſſi à la formule $3tt+(8n+2)uu$, pareillement à celle-ci, $(8m+3)tt+2uu$, & même auſſi

Digitized by Google

à celle-ci, $(8m+3)tt+(8n+2)uu$, où l'on peut ſubſtituer à m & à n tous les nombres entiers tant poſitifs que négatifs.

72.

Mais allons plus loin & conſidérons le diviſeur 5, à l'égard duquel tous les nombres ſe rangent en cinq claſſes:

I.) $5n$, II.) $5n+1$, III.) $5n+2$, IV.) $5n+3$, V.) $5n+4$.

Nous remarquerons d'abord que ſi un nombre eſt de la premiere eſpece, ſon quarré aura la forme $25nn$, & ſera par conſéquent diviſible non-ſeulement par 5, mais auſſi par 25.

Tout nombre de la ſeconde claſſe aura un quarré de la forme $25nn+10n+1$; & comme la diviſion par 5 donne le réſidu 1, ce quarré ſera compris dans la formule $5n+1$.

Les nombres de la troiſieme eſpece auront le quarré $25nn+20n+4$, qui, diviſé par 5, donne 4 de reſte.

Le quarré d'un nombre de la quatrieme

Digitized by Google

espece est $25nn+30n+9$; si on le divise par 5, il reste 4.

Enfin le quarré d'un nombre de la cinquieme classe est $25nn+40n+16$; qu'on divise ce quarré par 5, il restera 1.

Lors donc qu'un nombre quarré ne peut être divisé par 5, le résidu de la division sera toujours 1 ou 4, & jamais 2 ou 3 ; & il s'ensuit qu'aucun quarré ne peut être contenu dans les formules $5n+2$ & $5n+3$.

73.

Nous partirons de-là pour prouver que ni la formule $5tt+2uu$, ni celle-ci, $5tt+3uu$, ne peuvent être des quarrés. Car, ou bien u est divisible par 5, ou il ne l'est pas ; dans le premier cas ces formules seront divisibles par 5, mais elles ne le seront pas par 25 ; donc elles ne pourront être des quarrés. Si, au contraire, u n'est pas divisible par 5, uu sera ou $5n+1$, ou $5n+4$; & dans le premier de ces cas la premiere formule se change en celle-ci, $5tt+10n+2$, qui, divisée par 5, laisse 2 de

Digitized by Google

reſte, & la ſeconde formule devient $5tt+15n+3$, ce qui étant diviſé par 5, donne 3 de reſte, de ſorte que ni l'une ni l'autre ne peuvent être un quarré; quant au cas de $uu=5n+4$, la premiere formule devient $5tt+10n+8$, ce qui, diviſé par 5, laiſſe 3; & l'autre devient $5tt+15n+12$, ce qui, diviſé par 5, laiſſe 2; ainſi dans ce cas les deux formules ne peuvent pas non plus être des quarrés.

On obſervera par un raiſonnement ſemblable que ni la formule $3tt+(5n+2)uu$, ni cette autre, $5tt+(5n+3)uu$, ne peuvent devenir des quarrés, puiſqu'on parvient aux mêmes réſidus que nous venons de trouver. On pourroit même écrire dans le premier terme $5mtt$ au lieu de $5tt$, pourvu que m ne ſoit pas diviſible par 5.

74.

De ce que tous les quarrés pairs ſont compris dans la formule $4n$, & tous les quarrés impairs dans la formule $4n+1$, & que par conſéquent ni $4n+2$, ni $4n+3$,

Digitized by Google

ne peuvent devenir des quarrés, il s'enſuit que la formule générale $(4m+3)tt+(4n+3)uu$ ne peut jamais être un quarré. Car ſuppoſons que t ſoit pair, tt pourra être diviſé par 4, & l'autre terme étant diviſé par 4, donnera 3 de reſte; & ſi nous ſuppoſons les deux nombres t & u impairs, les reſtes de tt & de uu ſeront 1, & par conſéquent le réſidu de la formule entiere ſera 2; or il n'eſt aucun nombre quarré qui, diviſé par 4, laiſſe 2 de reſte.

Nous remarquerons auſſi que tant m que n peuvent même être pris négativement, ou $=0$, & qu'il s'enſuit que les formules $3tt+3uu$ & $3tt-uu$ ne peuvent pas non plus ſe transformer en des quarrés.

75.

De même que nous avons trouvé pour un petit nombre de diviſeurs, que quelques eſpeces de nombres ne peuvent jamais devenir des quarrés, on pourroit déterminer de pareilles eſpeces de nombres pour tous les autres diviſeurs.

Digitized by Google

Qu'il s'agiſſe du diviſeur 7, on aura à diſtinguer ſept différentes eſpeces de nombres, dont nous examinerons auſſi les quarrés.

Eſpeces des Nombres,	Leurs Quarrés ſont de l'eſpece,	
	$49nn$	$7n$
I. $7n$		
II. $7n+1$	$49nn+14n+1$	$7n+1$
III. $7n+2$	$49nn+28n+4$	$7n+4$
IV. $7n+3$	$49nn+42n+9$	$7n+2$
V. $7n+4$	$49nn+56n+16$	$7n+2$
VI. $7n+5$	$49nn+70n+25$	$7n+4$
VII. $7n+6$	$49nn+84n+36$	$7n+1$.

Puis donc que les quarrés qui ne ſont pas diviſibles par 7, ſont tous contenus dans les trois formules $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, il eſt clair que les trois autres formules, $7n+3$, $7n+5$ & $7n+6$, ne s'accordent pas avec la nature des nombres quarrés.

76.

Pour entrer encore mieux dans le ſens de cette concluſion, on remarquera que

Digitized by Google

la derniere eſpece, $7n+6$, peut auſſi s'exprimer par $7n-1$; que pareillement la formule $7n+5$ eſt la même que $7n-2$, & $7n+4$, la même que $7n-3$. Car, cela poſé, il eſt évident que les quarrés des deux eſpeces, $7n+1$ & $7n-1$, ſi on les diviſe par 7, donneront le même réſidu 1; & que les quarrés des deux eſpeces, $7n+2$ & $7n-2$, doivent ſe reſſembler de la même maniere.

77.

En général donc, quel que ſoit le diviſeur, que nous indiquerons par la lettre d, les différentes eſpeces de nombres qui en réſultent, ſont

dn;

$dn+1$, $dn+2$, $dn+3$, &c.

$dn-1$, $dn-2$, $dn-3$, &c.

où les quarrés de $dn+1$ & $dn-1$ ont cela de commun, qu'étant diviſés par d, ils laiſſent le reſte 1, de ſorte qu'ils appartiennent à la même formule $dn+1$; de même les quarrés des deux eſpeces $dn+2$

Digitized by Google

& $dn-2$, appartiennent à la même formule $dn+4$. De façon qu'on peut conclure en général que les quarrés des deux especes, $dn+a$ & $dn-a$, étant diviſés par d, donnent un même réſidu aa, ou celui qui reſte, en diviſant aa par d.

78.

Ces remarques ſuffiſent pour indiquer une infinité de formules, telles que $att+buu$, qui ne peuvent en aucune maniere devenir des quarrés. C'eſt ainſi que le diviſeur 7 donne facilement à connoître qu'aucune de ces trois formules, $7tt+3uu$, $7tt+5uu$, $7tt+6uu$, ne peut devenir un quarré; parce que la diviſion de u par 7 ne donne pour réſidu que 1, ou 2 ou 4; & que dans la premiere de ces formules il reſte ou 3, ou 6 ou 5, dans la ſeconde, 5, 3 & 6, & dans la troiſieme, 6, ou 5 ou 3, ce qui ne peut avoir lieu dans des quarrés. Lors donc qu'on rencontre de pareilles formules, on eſt sûr qu'on feroit des efforts inutiles en cherchant à deviner quelque cas où elles deviendroient

Digitized by Google

des quarrés, & c'eſt pourquoi les conſidérations dans leſquelles nous venons d'entrer, ne laiſſent pas d'être importantes.

Si, au contraire, une formule propoſée n'eſt pas de cette nature, nous avons vu dans le Chapitre précédent qu'il ſuffit de trouver un ſeul cas où elle devient un quarré, pour être en état de déduire de ce cas une infinité d'autres cas pareils.

La formule propoſée étoit proprement $axx+b$, & comme on trouve ordinairement pour x des fractions, nous avions ſuppoſé $x=\frac{t}{u}$, en ſorte qu'il s'agiſſoit de tranſformer en un quarré la formule $att+buu$.

Mais il ne laiſſe pas d'y avoir ſouvent une infinité de cas où x peut même être aſſigné en nombres entiers, & c'eſt de la détermination de ces cas que nous nous occuperons dans le Chapitre ſuivant.

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

Des Cas en nombres entiers, où la formule axx+b *devient un quarré.*

79.

NOUS avons déjà fait voir plus haut comment on doit transformer des formules telles que $a+bx+cxx$, ſi on veut en retrancher le ſecond terme; ainſi nous n'étendrons qu'à la formule $axx+b$ les recherches préſentes, où il s'agira de trouver pour x uniquement des nombres entiers, qui puiſſent transformer cette formule en un quarré. Or il faut, avant toutes choſes, qu'une telle formule ſoit poſſible; car ſi elle ne l'eſt pas, on ne trouvera pas même pour x des veleurs fractionnaires, bien loin de pouvoir trouver des nombres entiers.

80.

Qu'on ſuppoſe donc $axx+b=yy$, où a & b ſont des nombres entiers, & où x & y

& y doivent être de même des nombres entiers.

Or il eſt abſolument néceſſaire ici qu'on ſache, ou qu'on ait déjà trouvé un cas en nombres entiers, ſans quoi ce ſeroit une peine perdue de chercher d'autres cas ſemblables, puiſqu'il ſe pourroit que la formule fût impoſſible.

Ainſi nous ſuppoſerons que cette formule devienne un quarré, ſi l'on fait $x=f$, & nous indiquerons ce quarré par gg, en ſorte que $aff+b=gg$, où f & g ſont des nombres connus. Tout ſe réduit donc à déduire de ce cas d'autres cas ſemblables; & cette recherche eſt d'autant plus importante, qu'elle eſt ſujette à des difficultés conſidérables que nous viendrons cependant à bout de ſurmonter par les artifices qu'on verra.

81.

Puiſqu'on a déjà trouvé $aff+b=gg$, & que d'ailleurs il faut auſſi que $axx+b=yy$, ſouſtrayons la premiere équation de la ſe-

Digitized by Google

conde, & nous en aurons une nouvelle, $axx - aff = yy - gg$, qui peut se représenter par des facteurs de la maniere suivante, $a(x+f)(x-f) = (y+g)(y-g)$, & qui en multipliant de plus les deux membres par pq, devient $apq(x+f)(x-f) = pq(y+g)(y-g)$. Si nous décomposons maintenant cette équation, en faisant $ap(x+f) = q(y+g)$, & $q(x-f) = p(y-g)$, nous pourrons tirer de ces deux équations des valeurs des deux lettres x & y. La premiere, divisée par q, donne $y+g = \frac{apx+apf}{q}$; la seconde, divisée par p, donne $y-g = \frac{qx-qf}{p}$; soustrayant cette derniere égalité de l'autre, on a $2g = \frac{(app-qq)x+(app+qq)f}{pq}$, ou $2pqg = (app-qq)x + (app+qq)f$; donc $x = \frac{2gpq}{app-qq} - \frac{(app+qq)f}{app-qq}$, & par-là on obtient $y = g + \frac{2gqq}{app-qq} - \frac{(app+qq)fq}{(app-qq)p} - \frac{qf}{p}$. Et comme dans cette derniere valeur les deux premiers termes, contenant tous deux la lettre g, peuvent être mis sous la forme $\frac{g(app+qq)}{app-qq}$, & que les deux autres termes, contenant la lettre f,

Digitized by Google

peuvent s'exprimer par $-\frac{2afpq}{app-qq}$, tous les termes ſeront réduits à la même dénomination, & on aura $y=\frac{g(app+qq)-2afpq}{app-qq}$.

82.

Ce procédé ſemble d'abord ne point convenir à notre but, puiſque devant trouver pour x & pour y des nombres entiers, nous ſommes parvenus à des réſultats fractionnaires, & qu'il s'agiroit de traiter cette nouvelle queſtion, quels nombres on peut ſubſtituer à p & à q pour que les fractions diſparoiſſent? queſtion qui paroît plus difficile encore que notre queſtion principale. Mais on peut employer ici un artifice particulier, qui nous fera parvenir facilement au but; nous allons l'expliquer:

Comme tout doit être exprimé en nombres entiers, faiſons $\frac{app+qq}{app-qq}=m$, & $\frac{2pq}{app-qq}=n$, pour avoir $x=ng-mf$, & $y=mg-naf$.

Or nous ne pouvons pas prendre ici m & n à volonté, puiſque ces lettres doivent ſe déterminer de façon à répondre aux déter-

Digitized by Google

minations précédentes ; ainſi nous conſidérerons pour cet effet leurs quarrés, & nous verrons que $mm = \frac{aap^4 + 2appqq + q^4}{aap^4 - 2appqq + q^4}$ & $nn = \frac{4ppqq}{aap^4 - 2appqq + q^4}$, & que par conſéquent $mm - ann$

$$= \frac{aap^4 + 2appqq + q^4 - 4appqq}{aap^4 - 2appqq + q^4}$$

$$= \frac{aap^4 - 2appqq + q^4}{aap^4 - 2appqq + q^4} = 1.$$

83.

On voit par-là que les deux nombres m & n doivent être tels que $mm = ann + 1$. Ainſi, comme a eſt un nombre connu, il faudra commencer par ſonger aux moyens de déterminer pour n un nombre entier, tel que $ann + 1$ devienne un quarré ; car après cela m ſera la racine de ce quarré ; & quand on aura déterminé pareillement le nombre f, de maniere que $aff + b$ devienne un quarré, ſavoir gg, on aura pour x & pour y les valeurs ſuivantes en nombres

Digitized by Google

entiers, $x=ng-mf$ & $y=mg-naf$, & enfin par-là $axx+b=yy$.

84.

Il eſt évident qu'ayant une fois trouvé m & n, on peut écrire à leur place $-m$ & $-n$, parce que le quarré nn ne laiſſe pas de reſter le même.

Mais nous avons fait entendre que pour trouver x & y en nombres entiers, de maniere que $axx+b=yy$, il falloit d'abord connoître un cas, tel que $aff+b=gg$; lors donc qu'on aura trouvé un ſemblable cas, il faudra tâcher encore de connoître, outre le nombre a, des valeurs de m & de n, telles que $ann+1=mm$, & nous en donnerons la méthode dans la ſuite. Quand enfin tout cela ſera fait, on aura un nouveau cas, ſavoir $x=ng+mf$, & $y=mg+naf$, & après cela $axx+b=yy$.

Mettant enſuite ce nouveau cas à la place du précédent, qu'on avoit regardé comme connu; c'eſt-à-dire, écrivant $ng+mf$ au lieu de f, & $mg+naf$ au lieu de g,

Digitized by Google

on aura pour x & y de nouvelles valeurs, par lesquelles, si on les substitue à x & à y, on en trouve ensuite d'autres nouvelles, & ainsi de suite aussi loin qu'on voudra; de sorte qu'au moyen d'un seul cas qu'on connoissoit d'abord, on en détermine après cela une infinité d'autres.

85.

La maniere dont nous sommes parvenus à cette solution étoit assez embarrassée, & paroissoit d'abord nous éloigner de notre but, puisqu'elle nous avoit conduits à des fractions compliquées qu'un hasard favorable a seul pu réduire; il sera donc à propos d'indiquer une voie plus courte, qui conduit à la même solution.

86.

Puisqu'il faut que $axx+b=yy$, & que l'on a déjà trouvé $aff+b=gg$, la premiere équation nous donne $b=yy-axx$, & la seconde donne $b=gg-aff$; par conséquent il faut aussi que $yy-axx=gg-aff$, & tout se réduit maintenant à déterminer

Digitized by Google

les inconnues x & y par le moyen des quantités connues f & g. On voit que pour cet effet on pourroit faire ſimplement $x=f$ & $y=g$; mais on voit auſſi que cette ſuppoſition ne fourniroit pas un nouveau cas outre celui qu'on connoiſſoit d'avance.

Ainſi nous ſuppoſerons qu'on ait déjà trouvé pour n un nombre tel que $ann+1$ ſoit un quarré, ou bien que $ann+1=mm$; cela poſé, nous avons $mm-ann=1$; & en multipliant par cette équation la derniere que nous avions ci-deſſus, nous trouvons auſſi que $yy-axx=(gg-aff)(mm-ann)=ggmm-affmm-ag^2nn+aaffnn$. Suppoſons à préſent $y=gm+afn$, nous aurons $ggmm+2afgmn+aaffnn-axx=ggmm-affmm-aggnn+aaffnn$, où les termes $ggmm$ & $aaffnn$ ſe détruiſent; de ſorte qu'il reſte $axx=affmm+aggnn+2afgmn$, ou $xx=ffmm+ggnn+2fgmn$; or cette formule eſt évidemment un quarré, & donne $x=fm+gn$; ainſi nous avons trouvé pour x & y les mêmes formules que ci-deſſus.

Digitized by Google

87.

Il ſera néceſſaire maintenant de rendre cette ſolution plus claire, en l'appliquant à quelques exemples.

Premiere queſtion. Trouver pour x toutes les valeurs en nombres entiers, telles que $2xx-1$ devienne un quarré, ou qu'on ait $2xx-1=yy$.

Nous avons ici $a=2$ & $b=-1$, & il ſe préſente auſſi-tôt un cas ſatisfaiſant, qui eſt celui où $x=1$ & $y=1$. Ce cas connu nous donne $f=1$ & $g=1$; or il s'agit de plus de déterminer une valeur de n, telle que $2nn+1$ devienne un quarré mm; & on voit d'abord auſſi que ce cas a lieu quand $n=2$, & par conſéquent $m=3$; ainſi chaque cas connu pour f & g nous donnant ces nouveaux cas $x=3f+2g$ & $y=3g+4f$, nous tirons de la premiere ſolution, $f=1$ & $g=1$, les nouvelles ſolutions ſuivantes:

$x=f=1$	5	29	169	
$y=g=1$	7	41	239	&c.

Digitized by Google

88.

Seconde queſtion. Trouver tous les nombres triangulaires, qui ſont en même temps des quarrés.

Soit z la racine triangulaire, ce ſera le triangle $\frac{zz+z}{2}$ qui devra être en même temps un quarré; & ſi nous nommons x la racine de ce quarré, il faudra que $\frac{zz+z}{2} = xx$. Multiplions par 8, nous aurons $4zz+4z = 8xx$; & ajoutons encore 1 de chaque côté, pour avoir $4zz+4z+1=(2z+1)^2 = 8xx+1$. Ainſi la queſtion eſt de faire en ſorte que $8xx+1$ devienne un quarré; car ſi l'on trouve $8xx+1=yy$, on aura $y=2z+1$, & conſéquemment la racine triangulaire cherchée, $z=\frac{y-1}{2}$.

Or nous avons $a=8$ & $b=1$, & un cas ſatisfaiſant ſaute aux yeux, ſavoir $f=0$ & $g=1$. On voit de plus que $8nn+1 = mm$, en faiſant $n=1$ & $m=3$; donc $x=3f+g$ & $y=3g+8f$; & puiſque $z=\frac{y-1}{2}$, nous aurons les ſolutions ſuivantes:

Digitized by Google

$x=f=0$	1	6	35	204	1189
$y=g=1$	3	17	99	577	3363
$z=\frac{y-1}{2}=0$	1	8	49	288	1681 &c.

89.

Troiſieme queſtion. Trouver tous les nombres pentagones, qui ſont en même temps des quarrés.

Que la racine ſoit z, le pentagone ſera $=\frac{3zz-z}{2}$, que nous égalerons au quarré xx; ainſi $3zz-z=2xx$; multipliant par 12 & ajoutant l'unité, nous avons $36zz-12z+1=24xx+1=(6z-1)^2$; & faiſant $24xx+1=yy$, il faudra que $y=6z-1$, & $z=\frac{y+1}{6}$.

Puiſqu'ici $a=24$ & $b=1$, on connoît le cas $f=0$ & $g=1$; & comme il faut que $24nn+1=mm$, on fera $n=1$, ce qui donne $m=5$; ainſi on aura $x=5f+g$ & $y=5g+24f$; & non-ſeulement $z=\frac{y+1}{6}$, mais auſſi $z=\frac{1-y}{6}$, parce que l'on peut écrire $y=1-6z$; de-là réſultent enfin les ſolutions ſuivantes:

Digitized by Google

$x = f = 0$	1	10	99	980
$y = g = 1$	5	49	485	4801
$z = \frac{y+1}{6} = \frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
ou $z = \frac{1-y}{6} = 0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{8}$	-800 &c.

90.

Quatrieme queſtion. Trouver tous les quarrés en nombres entiers, qui, pris ſept fois & augmentés de 2, redeviennent des quarrés.

On demande par conſéquent que $7xx + 2 = yy$, où $a = 7$ & $b = 2$; & le cas connu tombe auſſi-tôt ſous les ſens, c'eſt-à-dire $x = 1$; de ſorte que $x = f = 1$, & $y = g = 3$. Si l'on conſidere enſuite l'équation $7nn + 1 = mm$, on trouve facilement auſſi que $n = 3$ & $m = 8$; donc $x = 8f + 3g$ & $y = 8g + 21f$, & on aura les ſolutions qui ſuivent:

$x = f = 1$	17	271	
$y = g = 3$	45	717	&c.

Digitized by Google

91.

Cinquieme queſtion. Trouver tous les nombres triangulaires, qui ſont en même temps pentagones.

Que la racine du triangle ſoit $=p$ & celle du pentagone $=q$, il faudra que $\frac{pp+p}{2} = \frac{3qq-q}{2}$, ou $3qq-q=pp+p$; qu'on cherche q, on aura d'abord $qq=\frac{1}{3}q+\frac{pp+p}{3}$, & de-là $q=\frac{1}{6}\pm\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{pp+p}{3}}$, ou $q=\frac{1\pm\sqrt{12pp+12p+1}}{6}$. Par conſéquent il s'agit de faire en ſorte que $12pp+12p+1$ devienne un quarré, & même en nombres entiers. Or comme il y a ici un terme moyen $12p$, on commencera par faire $p=\frac{x-1}{2}$, au moyen de quoi on aura $12pp=3xx-6x+3$ & $12p=6x-6$, par conſéquent $12pp+12p+1=3xx-2$; c'eſt cette derniere quantité préſentement qu'il eſt queſtion de transformer en un quarré.

Si donc on fait $3xx-2=yy$, on aura $p=\frac{x-1}{2}$, & $q=\frac{1+y}{6}$; ainſi tout dépend de la formule $3xx-2=yy$, & on a ici $a=3$

Digitized by Google

& $b=-2$; de plus un cas connu $x=f=1$ & $y=g=1$; enfin dans l'équation $mm=3nn+1$, on a $n=1$ & $m=2$; donc on trouve tant pour x & y que pour p & q les valeurs ſuivantes :

D'abord $x=2f+g$, & $y=2g+3f$, enſuite :

$x=f=1$	3	11	41
$y=g=1$	5	19	71
$p=0$	1	5	20
$q=\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
ou $q=0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{35}{3}$

parce qu'on a auſſi $q=\frac{1-y}{6}$.

92.

Juſqu'à préſent, quand la formule propoſée contenoit un ſecond terme, nous étions obligés de le retrancher ; mais on ne laiſſe pas de pouvoir appliquer la méthode que nous venons de donner, ſans faire diſparoître ce ſecond terme ; nous allons encore en expliquer la maniere.

Soit $axx+bx+c$ la formule propoſée

Digitized by Google

qui doit être un quarré, ou $=yy$, & qu'on connoiſſe déjà le cas $aff+bf+c=gg$.

Si on ſouſtrait cette équation de la premiere, on aura $a(xx-ff)+b(x-f)=yy-gg$, ce qu'on peut exprimer par des facteurs de cette façon: $(x-f)(ax+af+b)=(y-g)(y+g)$. Qu'on multiplie de part & d'autre par pq, on aura $pq(x-f)(ax+af+b)=pq(y-g)(y+g)$, & on décompoſera cette équation en ces deux, I.) $p(x-f)=q(y-g)$, II.) $q(ax+af+b)=p(y+g)$. Multipliant maintenant la premiere par p & la ſeconde par q, & ſouſtrayant le premier produit du ſecond, on obtient $(aqq-pp)x+(aqq+pp)f+bqq=2gpq$, ce qui donne $x=\frac{2gpq}{aqq-pp}-\frac{(aqq+pp)f}{aqq-pp}-\frac{bqq}{aqq-pp}$.

Mais la premiere équation eſt $q(y-g)=p(x-f)=p\left(\frac{2gpq}{aqq-pp}-\frac{2afqq}{aqq-pp}-\frac{bqq}{aqq-pp}\right)$; ainſi $y-g=\frac{2gpp}{aqq-pp}-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp}$, & par conſéquent $y=g\left(\frac{aqq+pp}{aqq-pp}\right)-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp}$.

Il s'agit ici de chaſſer les fractions;

Digitized by Google

faisons pour cet effet, comme ci-devant, $\frac{aqq+pp}{aqq-pp}=m$, & $\frac{2pq}{aqq-pp}=n$, & nous aurons $m+1=\frac{2aqq}{aqq-pp}$, & $\frac{qq}{aqq-pp}=\frac{m+1}{2a}$; donc $x=ng-mf-\frac{b(m+1)}{2a}$, & $y=mg-naf-\frac{1}{2}bn$, où les lettres m & n doivent être telles, ainsi qu'auparavant, que $mm=ann+1$.

93.

Les formules que nous venons de trouver pour x & pour y, sont encore mêlées avec des fractions, puisqu'il y en a dans les termes qui renferment la lettre b; & cela fait qu'elles ne répondent pas à notre but. Mais il faut remarquer que, si de ces valeurs on passe aux suivantes, on trouve constamment des nombres entiers, qu'à la vérité on eût trouvés beaucoup plus facilement par le moyen des nombres p & q que nous avions introduits dès le commencement. En effet, qu'on prenne p & q, de façon que $pp=aqq+1$, on aura $aqq-pp=-1$, & les fractions disparoîtront. Car alors $x=-2gpq+f(aqq+pp)+bqq$, & $y=-g(aqq+pp)+2afpq+bpq$; mais

Digitized by Google

comme dans le cas connu $aff+bf+c=gg$, on ne rencontre que la seconde puissance de g, il est indifférent quel signe l'on donne à cette lettre; qu'on écrive donc $-g$ au lieu de $+g$, on aura les formules $x=2gpq+f(aqq+pp)+bqq$, & $y=g(aqq+pp)+2afpq+bpq$, & on sera assuré maintenant que $axx+bx+c=yy$.

Qu'on cherche, par exemple, les nombres hexagones, qui sont aussi des quarrés.

Il faudra que $2xx-x=yy$, où $a=2$, $b=-1$ & $c=0$, & le cas connu sera évidemment $x=f=1$ & $y=g=1$.

De plus, pour que $pp=2qq+1$, il faut que $q=2$ & $p=3$; ainsi l'on aura $x=12g+17f-4$, & $y=17g+24f-6$, d'où résultent les valeurs qui suivent:

$x=f=1$	25	841	
$y=g=1$	35	1189	&c.

94.

Arrêtons-nous encore à notre premiere formule, où le second terme manquoit, & examinons les cas qui font de la formule

Digitized by Google

mule $axx+b$ un quarré en nombres entiers.

Soit donc $axx+b=yy$, & il s'agira de remplir deux conditions:

1°. Qu'on connoiſſe un cas où cette équation ait lieu, & nous ſuppoſerons ce cas exprimé par l'équation $aff+b=gg$.

2°. Qu'on connoiſſe des valeurs de m & de n, telles que $mm=ann+1$, ce que nous enſeignerons à trouver dans le Chapitre ſuivant.

De-là réſulte un nouveau cas, ſavoir $x=ng+mf$, & $y=mg+anf$, qui conduit enſuite à d'autres cas pareils, que nous repréſenterons de la maniere ſuivante:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l} x=f & A & B & C & D & E \\ y=g & P & Q & R & S & T \ \&c. \end{array}$$

où $A=ng+mf \mid B=nP+mA \mid C=nQ+mB \mid D=nR+mC$
& $P=mg+anf \mid Q=mP+anA \mid R=mQ+anB \mid S=mR+anC$ &c.

& ces deux ſuites de nombres ſe continuent très-aiſément auſſi loin qu'on veut.

95.

On remarquera cependant qu'il n'eſt pas poſſible ici de continuer la ſuite ſupérieure

Digitized by Google

pour x, ſans avoir l'inférieure ſous les yeux; mais il eſt facile de lever cet inconvénient & de donner une regle, non-ſeulement pour trouver la ſuite ſupérieure ſans connoître l'inférieure, mais auſſi pour déterminer celle-ci ſans le ſecours de l'autre.

Il faut obſerver que les nombres qu'on peut ſubſtituer à x ſe ſuivent dans une certaine progreſſion, telle que chaque terme, comme, par ex. E, peut ſe déterminer par les deux termes précédens C & D, ſans que l'on ſoit obligé de recourir aux termes inférieurs R & S. En effet, puiſque $E=nS+mD=n(mR+anC)+m(nR+mC)=2mnR+annC+mmC$, & que $nR=D-mC$, on trouve $E=2mD-mmC+annC$, ou $E=2mD-(mm-ann)C$, ou enfin $E=2mD-C$, à cauſe de $mm=ann+1$ & de $mm-ann=1$; moyennant quoi on voit clairement comment chaque terme ſe détermine par les deux qui le précedent.

Il en eſt de même à l'égard de la ſuite inférieure; car puiſque $T=mS+anD$, & $D=nR+mC$, on a $T=mS+annR$

Digitized by Google

$+amnC$. De plus $S=mR+anC$, ainſi $anC=S-mR$; & ſi l'on ſubſtitue cette valeur de anC, il vient $T=2mS-R$, ce qui prouve que la progreſſion inférieure ſuit la même loi ou la même regle que la ſupérieure.

Qu'on cherche, par exemple, tous les nombres entiers x, tels que $2xx-1=yy$. On aura d'abord $f=1$ & $g=1$; enſuite $mm=2nn+1$, ſi $n=2$ & $m=3$. Donc, puiſque $A=ng+mf=5$, les deux premiers termes ſeront 1 & 5, & on trouvera tous les ſuivans par la formule $E=6D-C$; c'eſt-à-dire que chaque terme pris ſix fois & diminué du terme précédent, donne le terme ſuivant. Il ſuit de-là que les nombres x que nous cherchons, formeront la ſuite que voici:

1, 5, 29, 169, 985, 5741, &c.

On peut continuer cette progreſſion auſſi loin qu'on veut; & ſi l'on vouloit y introduire auſſi des termes fractionnaires, on en trouveroit une infinité par la méthode que nous avons donnée plus haut.

Digitized by Google

CHAPITRE VII.

D'une Méthode particuliere, par laquelle la formule $ann+1$ *devient un quarré en nombres entiers.*

96.

CE que nous avons enſeigné dans le Chapitre précédent, ne peut s'exécuter d'une maniere complette, à moins qu'on ne ſoit en état d'aſſigner pour un nombre quelconque a un nombre n, tel que $ann+1$ devienne un quarré, ou qu'on ait $mm=ann+1$.

Si on vouloit ſe contenter de nombres rompus, cette équation ſeroit facile à réſoudre, vu qu'on n'auroit qu'à faire $m=1+\frac{np}{q}$; car dans cette ſuppoſition on a $mm=1+\frac{2np}{q}+\frac{nnpp}{qq}=ann+1$, où l'on peut retrancher 1 de part & d'autre, & diviſer enſuite les autres termes par n, de ſorte que multipliant de plus par qq, on obtient $2pq+npp=anqq$, & cette équation donnant

Digitized by Google

$n = \frac{2pq}{aqq - pp}$, fourniroit une infinité de valeurs de n. Mais comme n doit être un nombre entier, cette méthode ne nous serviroit de rien, & il faudra en employer une toute autre pour arriver à notre but.

97.

Nous devons commencer par remarquer que si on vouloit que $ann+1$ fût un quarré en nombres entiers pour une valeur quelconque de a, on exigeroit une chose qui n'est pas toujours possible.

Car d'abord il faut exclure tous les cas où a seroit un nombre négatif; ensuite il faut exclure aussi ceux où a seroit lui-même un quarré; parce qu'alors ann seroit un quarré, & qu'aucun quarré augmenté de l'unité, ne peut redevenir un quarré en nombres entiers. Nous sommes obligés par conséquent de restreindre notre formule, de maniere que a ne soit ni négatif ni un quarré; mais au reste toutes les fois que a est un nombre positif sans être un quarré, il sera possible de trouver pour n un nombre

Digitized by Google

entier, tel que $ann+1$ devienne un quarré. Quand on aura trouvé une telle valeur, il ſera aiſé, d'après le Chapitre précédent, d'en déduire un nombre infini de ſemblables; mais il ſuffit pour notre deſſein d'en connoître une ſeule, & même la plus petite, & c'eſt ce qu'un ſavant Anglois, nommé *Pell*, nous a appris à trouver par une méthode ingénieuſe que nous allons expliquer.

98.

Cette méthode n'eſt pas de nature à pouvoir être employée généralement pour un nombre a quelconque, elle n'eſt applicable que dans chaque cas particulier.

Ainſi nous commencerons par les cas les plus faciles, & nous chercherons d'abord pour n un nombre tel que $2nn+1$ ſoit un quarré, ou que $\sqrt{2nn+1}$ devienne rationnel.

On voit auſſi-tôt que cette racine quarrée devient plus grande que n, & cependant plus petite que $2n$. Si donc nous ex-

Digitized by Google

primons cette racine par $n+p$, il eſt sûr que p eſt moindre que n; & nous aurons $\sqrt{2nn+1}=n+p$, enſuite $2nn+1=nn+2np+pp$; donc $nn=2np+pp+1$, & $n=p+\sqrt{2pp-1}$. Tout ſe réduit par conſéquent à ce que $2pp-1$ ſoit un quarré; or ce cas a lieu ſi $p=1$, & il donne $n=2$ & $\sqrt{2nn+1}=3$.

Si on n'avoit pas auſſi-tôt pu s'appercevoir de ce cas, on ſeroit allé plus loin; & puiſque $\sqrt{2pp-1}>p$, & par conſéquent $n>2p$, il auroit fallu ſuppoſer $n=2p+q$; on auroit donc eu $2p+q=p+\sqrt{2pp-1}$, ou $p+q=\sqrt{2pp-1}$, & en quarrant, $pp+2pq+qq=2pp-1$; ainſi $pp=2pq+qq+1$, ce qui auroit donné $p=q+\sqrt{2qq+1}$; de ſorte qu'il eût fallu que $2qq+1$ fût un quarré; & comme ce cas a lieu, ſi on fait $q=0$, on auroit eu $p=1$ & $n=2$, comme auparavant. Cet exemple ſuffit pour donner une idée de la méthode, mais cette idée deviendra encore plus nette par ce qui ſuivra.

Digitized by Google

99.

Soit à préſent $a=3$, c'eſt-à-dire qu'il s'agiſſe de transformer en un quarré la formule $3nn+1$. On fera $\sqrt{3nn+1}=n+p$, ce qui donne $3nn+1=nn+2np+pp$, & $2nn=2np+pp-1$, d'où l'on tire $n=\frac{p+\sqrt{3pp-2}}{2}$. Maintenant, puiſque $\sqrt{3pp-2}$ ſurpaſſe p, & que par conſéquent n eſt plus grand que $\frac{2p}{2}$ ou que p, qu'on ſuppoſe $n=p+q$, & on aura $2p+2q=p+\sqrt{3pp-2}$ ou $p+2q=\sqrt{3pp-2}$; enſuite, en quarrant, $pp+4pq+4qq=3pp-2$; de ſorte que $2pp=4pq+4qq+2$, ou $pp=2pq+2qq+1$, & $p=q+\sqrt{3qq+1}$. Or cette formule eſt ſemblable à la propoſée, ainſi on peut faire $q=0$, & on obtient $p=1$ & $n=1$; de ſorte que $\sqrt{3nn+1}=2$.

100.

Soit $a=5$, afin qu'on ait à faire un quarré de la formule $5nn+1$, dont la racine eſt plus grande que $2n$; on ſuppoſera $\sqrt{5nn+1}$

Digitized by Google

$=2n+p$, ou $5nn+1=4nn+4np+pp$, ainsi on aura $nn=4np+pp-1$, & $n=2p+\sqrt{5pp-1}$. Or $\sqrt{5pp-1}>2p$, il s'ensuit que $n>4p$; c'est pourquoi on fera $n=4p+q$, ce qui rend $2p+q=\sqrt{5pp-1}$, ou $4pp+4pq+qq=5pp-1$, & $pp=4pq+qq+1$, de maniere que $p=2q+\sqrt{5qq+1}$; & comme $q=0$ satisfait à cette équation, on aura $p=1$ & $n=4$; donc $\sqrt{5nn+1}=9$.

101.

Supposons à présent $a=6$, pour avoir à traiter la formule $6nn+1$, dont la racine est pareillement compriſe entre $2n$ & $3n$. Nous ferons donc $\sqrt{6nn+1}=2n+p$, & nous aurons $6nn+1=4nn+4np+pp$, ou $2nn=4np+pp-1$, & de-là $n=p+\frac{\sqrt{6pp-2}}{2}$, ou $n=\frac{2p+\sqrt{6pp-2}}{2}$; ainsi $n>2p$.

Si, en conséquence de cela, nous faisons $n=2p+q$, nous avons $4p+2q=2p+\sqrt{6pp-2}$, ou $2p+2q=\sqrt{6pp-2}$; les quarrés sont $4pp+8pq+4qq=6pp-2$;

Digitized by Google

ainſi $2pp=8pq+4qq+2$, & $pp=4pq+2qq+1$, enfin $p=2q+\sqrt{6qq+1}$; cette formule reſſemblant à la premiere, on a $q=0$; donc $p=1$, $n=2$ & $\sqrt{6nn+1}=5$.

102.

Allons plus loin, & ſoit $a=7$ & $7nn+1=mm$, on voit que $m>2n$; qu'on faſſe donc $m=2n+p$, & on aura $7nn+1=4nn+4np+pp$, ou $3nn=4np+pp-1$, ce qui donne $n=\frac{2p+\sqrt{7pp-3}}{3}$. Préſentement, puiſque $n>\frac{4}{3}p$, & par conſéquent plus grand que p, qu'on faſſe $n=p+q$, on aura $p+3q=\sqrt{7pp-3}$, & paſſant aux quarrés, $pp+6pq+9qq=7pp-3$, ainſi $6pp=6pq+9qq+3$, ou $2pp=2pq+3qq+1$, d'où l'on tire $p=\frac{q+\sqrt{7qq+2}}{2}$. Or on a ici $p>\frac{3q}{2}$, & par conſéquent $p>q$, ainſi on fera $p=q+r$, & l'on aura $q+2r=\sqrt{7qq+2}$; de-là les quarrés $qq+4qr+4rr=7qq+2$; enſuite $6qq=4qr+4rr-2$, ou $3qq=2qr+2rr-1$, & enfin $q=\frac{r+\sqrt{7rr-3}}{3}$. On continuera, à cauſe de q

Digitized by Google

$> r$, en ſuppoſant $q = r + f$, & on aura $2r + 3f = \sqrt{7rr - 3}$, enſuite $4rr + 12rf + 9ff = 7rr - 3$, ou $3rr = 12rf + 9ff + 3$, ou $rr = 4rf + 3ff + 1$, & $r = 2f + \sqrt{7ff + 1}$. Or cette formule eſt pareille à la premiere ; ainſi faiſant $f = 0$, on obtiendra $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ & $n = 3$ ou $m = 8$.

Mais ce calcul peut s'abréger conſidérablement de la maniere qui ſuit, & qu'on peut employer auſſi dans d'autres cas.

Puiſque $7nn + 1 = mm$, il s'enſuit que $m < 3n$.

Qu'on ſuppoſe donc $m = 3n - p$, on aura $7nn + 1 = 9nn - 6np + pp$, ou $2nn = 6np - pp + 1$, d'où l'on tire $n = \frac{3p + \sqrt{7pp + 2}}{2}$; ainſi $n < 3p$; par cette raiſon on écrira $n = 3p - 2q$, &, prenant les quarrés, on aura $9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2$, ou $2pp = 12pq - 4qq + 2$, & $pp = 6pq - 2qq + 1$, d'où réſulte $p = 3q + \sqrt{7qq + 1}$. Or on peut d'abord faire ici $q = 0$, & on trouvera $p = 1$, $n = 3$ & $m = 8$, comme auparavant.

Digitized by Google

103.

Que $a=8$, en ſorte que $8nn+1=mm$ & $m<3n$, il faudra faire $m=3n-p$, & on aura $8nn+1=9nn-6np+pp$, ou $nn=6np-pp+1$, d'où réſulte $n=3p+\sqrt{8pp+1}$, & cette formule étant déjà ſemblable à la propoſée, on peut faire $p=0$, ce qui donne $n=1$ & $m=3$.

104.

On procédera toujours de la même maniere pour tout autre nombre a, pourvu qu'il ſoit poſitif & non un quarré, & on arrivera toujours à la fin à une quantité radicale, comme $\sqrt{att+1}$, qui ſera ſemblable à la premiere ou la propoſée, & on n'aura alors qu'à ſuppoſer $t=0$; car l'irrationnalité diſparoîtra, & en retournant ſur ſes pas on trouvera pour n néceſſairement une valeur telle que $ann+1$ ſoit un quarré.

On arrive quelquefois aſſez vîte au but, mais ſouvent auſſi on eſt obligé de paſſer par un aſſez grand nombre d'opérations;

Digitized by Google

cela dépend de la nature du nombre a, mais ſans qu'on ait des caracteres qui donnent quelques lumieres ſur la quantité des opérations qu'il y aura à faire. Le procédé n'eſt jamais bien long juſqu'à 13, mais lorſque $a=13$, le calcul devient beaucoup plus prolixe, & par cette raiſon il ſera bon de développer ici ce cas.

105.

Soit donc $a=13$, & qu'on doive trouver $13nn+1=mm$. Comme $mm>9nn$, & par conſéquent $m>3n$, on ſuppoſera $m=3n+p$, & on aura $13nn+1=9nn+6np+pp$, ou $4nn=6np+pp-1$, & $n=\frac{3p+\sqrt{13pp-4}}{4}$, ce qui indique que $n>\frac{6}{4}p$, & à plus forte raiſon plus grand que p. Qu'on faſſe donc $n=p+q$, on aura $p+4q=\sqrt{13pp-4}$; en quarrant, $13pp-4=pp+8pq+16qq$; ainſi $12pp=8pq+16qq+4$, ou $3pp=2pq+4qq+1$, & $p=\frac{q+\sqrt{13qq+3}}{3}$. Ici $p>\frac{q+3q}{3}$, ou $p>q$; on continuera donc par $p=q+r$, & on aura $2q+3r=\sqrt{13qq+3}$,

Digitized by Google

enſuite $13qq+3=4qq+12qr+9rr$, ou $9qq=12qr+9rr-3$, ou $3qq=4qr+3rr-1$, ce qui donne $q=\frac{2r+\sqrt{13rr-3}}{3}$.

Préſentement, puiſque $q>\frac{2r+3r}{3}$, ou $q>r$, on fera $q=r+f$, & on aura $r+3f=\sqrt{13rr-3}$; & enſuite $13rr-3=rr+6rf+9ff$, ou $12rr=6rf+9ff+3$, ou $4rr=2rf+3ff+1$, d'où l'on tire $r=\frac{f+\sqrt{13ff+4}}{4}$. Mais $r>\frac{f+3f}{4}$ & plus grand que f, ſoit donc $r=f+t$, & nous aurons $3f+4t=\sqrt{13ff+4}$, & $13ff+4=9ff+24ft+16tt$; ainſi $4ff=24ft+16tt-4$, & $ff=6tf+4tt-1$; donc $f=3t+\sqrt{13tt-1}$. Ici nous avons $f>3t+3t$, ou que $6t$; il faudra donc faire $f=6t+u$; ainſi $3t+u=\sqrt{13tt-1}$, & $13tt-1=9tt+6tu+uu$; après cela $4tt=6tu+uu+1$; enfin $t=\frac{3u+\sqrt{13uu+4}}{4}$, où $t>\frac{6u}{4}$ & $>u$. Si donc on fait $t=u+v$, on aura $u+4v=\sqrt{13uu+4}$, & $13uu+4=uu+8uv+16vv$; donc $12uu=8uv+16vv-4$, ou $3uu=2uv+4vv-1$, enfin $u=\frac{v+\sqrt{13vv-3}}{3}$, ou $u>\frac{4v}{3}$, ou $u>v$.

Digitized by Google

Faisons en conséquence $u=v+x$, & nous aurons $2v+3x=\sqrt{13vv-3}$, & $13vv-3=4vv+12vx+9xx$; ou $9vv=12vx+9xx+3$, ou $3vv=4vx+3xx+1$, & $v=\frac{2x+\sqrt{13xx+3}}{3}$; de sorte que $v>\frac{5}{3}x$ & $>x$.

Supposons donc $v=x+y$, & nous aurons $x+3y=\sqrt{13xx+3}$, & $13xx+3=xx+6xy+9yy$, ou $12xx=6xy+9yy-3$, & $4xx=2xy+3yy-1$; on tire de-là $x=\frac{y+\sqrt{13yy-4}}{4}$, & par conséquent $x>y$. Ainsi nous ferons $x=y+z$, ce qui nous donne $3y+4z=\sqrt{13yy-4}$, & $13yy-4=9yy+24zy+16zz$, ou $4yy=24yz+16zz+4$; donc $yy=6yz+4zz+1$, & $y=3z+\sqrt{13zz+1}$; & cette formule étant à la fin semblable à la premiere, on peut prendre $z=0$, & remonter de la maniere qui suit:

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
z &= 0\\
y &= 1\\
x &= y + z = 1\\
v &= x + y = 2\\
u &= v + x = 3\\
t &= u + v = 5\\
s &= 6t + u = 33\\
r &= s + t = 38\\
q &= r + s = 71\\
p &= q + r = 109\\
n &= p + q = 180\\
m &= 3n + p = 649.
\end{aligned}$$

Il ſuit de-là que 180 eſt après 0 le plus petit nombre qu'on puiſſe ſubſtituer à n, ſi $13nn+1$ doit devenir un quarré.

106.

On voit ſuffiſamment par cet exemple, combien ces calculs peuvent devenir prolixes. Lorſqu'il s'agit de nombres plus grands, on eſt ſouvent obligé de paſſer par dix fois plus d'opérations que nous n'en avons eu à faire pour le nombre 13.

Comme on ne peut guere prévoir non plus

Digitized by Google

plus pour quels nombres on doit s'attendre à tant de longueurs, il ſera bon de profiter de la peine que d'autres ont priſe, & nous joindrons, pour cet effet, à ce Chapitre une table, où ſe trouvent les valeurs de m & de n pour tous les nombres a depuis 2 juſqu'à 100; afin que dans les cas qui peuvent ſe préſenter, on puiſſe en tirer les valeurs de m & de n, qui répondent à un nombre a donné.

107.

Nous remarquerons cependant que pour de certains nombres on peut déterminer en général les lettres m & n; ces cas ſont ceux où a n'eſt que de 1 ou 2 plus grand ou plus petit qu'un quarré; il vaudra la peine de les développer.

108.

Soit donc $a = ee - 2$; & puiſque nous devons avoir $(ee-2)nn+1 = mm$, il eſt clair que $m < en$; c'eſt pourquoi nous ferons $m = en - p$, & nous aurons $(ee-2)nn$

Digitized by Google

$+1 = eenn - 2enp + pp$, ou $2nn = 2enp - pp + 1$; donc $n = \frac{ep + \sqrt{eepp - 2pp + 2}}{2}$; & il eſt évident que ſi on fait $p = 1$, cette quantité devient rationnelle, & que nous aurons $n = e$ & $m = ee - 1$.

Soit, par exemple, $a = 23$, de ſorte que $e = 5$, nous aurons $23nn + 1 = mm$, ſi $n = 5$ & $m = 24$. La raiſon en eſt évidente d'ailleurs; car ſi, dans le cas de $a = ee - 2$, on fait $n = e$, on a $ann + 1 = e^4 - 2ee + 1$, ce qui eſt le quarré de $ee - 1$.

109.

Que $a = ee - 1$, ou d'une unité moindre qu'un quarré, il faudra que $(ee - 1)nn + 1 = mm$. On aura, comme ci-deſſus, $m < en$, & on fera $m = en - p$; cela poſé, on a $(ee - 1)nn + 1 = eenn - 2enp + pp$, ou $nn = 2enp - pp + 1$; donc $n = ep + \sqrt{eepp - pp + 1}$. Or l'irrationnalité diſparoît dans la ſuppoſition de $p = 1$, ainſi $n = 2e$ & $m = 2ee - 1$. Auſſi cela eſt-il facile à voir; car puiſque $a = ee - 1$ & $n = 2e$, on trouve $ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1$, ou égal au quarré de

Digitized by Google

$2ee-1$. Soit, par exemple, $a=24$, ou $e=5$, on aura $n=10$, & $24nn+1=2401=(49)^2$ (*).

II O.

Suppoſons à préſent $a=ee+1$, ou que a ſoit de 1 plus grand qu'un quarré, il faudra que $(ee+1)nn+1=mm$, & m ſera évidemment plus grand que en; écrivons donc $m=en+p$, & nous aurons $(ee+1)nn+1=eenn+2enp+pp$, ou $nn=\frac{2enp+pp-1}{}$, d'où réſulte $n=ep+\sqrt{eepp+pp-1}$. On peut ici faire $p=1$, & cela étant, on a $n=2e$; donc $m=2ee+1$. C'eſt auſſi ce qui devoit arriver, par la raiſon que a étant $=ee+1$ & $n=2e$, on a $ann+1=4e^4+4ee+1$, quarré de $2ee+1$. Soit, par exemple, $a=17$, en ſorte que $e=4$, on aura $17nn+1=mm$, en faiſant $n=8$ & $m=33$.

(*) Le ſigne radical s'évanouit auſſi dans ce cas, ſi l'on fait $p=0$, & cette ſuppoſition donne inconteſtablement pour m & n les plus petits nombres poſſibles, ſavoir $n=1$ & $m=e$; c'eſt-à-dire que ſi $e=5$, la formule $24nn+1$ devient un quarré en faiſant $n=1$, & que la racine de ce quarré ſera $m=e=5$.

Digitized by Google

III.

Soit enfin $a=ee+2$, ou de 2 plus grand qu'un nombre quarré, on aura $(ee+2)nn+1=mm$, &, comme auparavant, $m>en$; c'eſt pourquoi on ſuppoſera $m=en+p$, & on aura $eenn+2nn+1=eenn+2enp+pp$, ou $2nn=2enp+pp-1$, ce qui donne $n=\frac{ep+\sqrt{eepp+2pp-2}}{2}$. Qu'on faſſe $p=1$, on trouvera $n=e$ & $m=ee+1$; & en effet, puiſque $a=ee+2$ & $n=e$, on a $ann+1=e^4+2ee+1$, ce qui eſt le quarré de $ee+1$.

Soit, par exemple, $a=11$, de ſorte que $e=3$, on trouvera $11nn+1=mm$, en faiſant $n=3$ & $m=10$. Voulût-on ſuppoſer $a=83$, on auroit $e=9$ & $83nn+1=mm$ dans le cas de $n=9$ & de $m=82$.

Digitized by Google

TABLE

Qui indique pour chaque valeur de a *les plus petits nombres* m & n, *tels que* mm = ann + 1.

a	*n*	*m*	*a*	*n*	*m*
2	2	3	26	10	51
3	1	2	27	5	26
5	4	9	28	24	127
6	2	5	29	1820	9801
7	3	8	30	2	11
8	1	3	31	273	1520
10	6	19	32	3	17
11	3	10	33	4	23
12	2	7	34	6	35
13	180	649	35	1	6
14	4	15	37	12	73
15	1	4	38	6	37
17	8	33	39	4	25
18	4	17	40	3	19
19	39	170	41	320	2049
20	2	9	42	2	13
21	12	55	43	531	3482
22	42	197	44	30	199
23	5	24	45	24	161
24	1	5	46	3588	24335

Digitized by Google

a	n	m	a	n	m
47	7	48	74	430	3699
48	1	7	75	3	26
50	14	99	76	6630	57799
51	7	50	77	40	351
52	90	649	78	6	53
53	9100	66249	79	9	80
54	66	485	80	1	9
55	12	89	82	18	163
56	2	15	83	9	82
57	20	151	84	6	55
58	2574	19603	85	30996	285769
59	69	530	86	1122	10405
60	4	31	87	3	28
61	226153980	1766319049	88	21	197
62	8	63	89	53000	500001
63	1	8	90	2	19
65	16	129	91	165	1574
66	8	65	92	120	1151
67	5967	48842	93	1260	12151
68	4	33	94	221064	2143295
69	936	7775	95	4	39
70	30	251	96	5	49
71	413	3480	97	6377352	62809633
72	2	17	98	10	99
73	267000	2281249	99	1	10

Digitized by Google

CHAPITRE VIII.

De la Maniere de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt{a+bx+cxx+dx^3}$.

112.

Nous passerons à présent à une formule où x s'éleve à la troisieme puissance, après quoi nous irons aussi jusqu'à la quatrieme puissance de x, quoique ces deux cas se traitent de la même maniere.

Qu'il s'agisse donc de transformer en un quarré la formule $a+bx+cx+dx^3$, & de trouver pour x des valeurs propres pour ce dessein, & exprimées en nombres rationnels. Comme cette recherche est sujette déjà à de bien plus grandes difficultés que les précédentes, il faut aussi plus d'art pour trouver seulement même des valeurs fractionnaires de x, & on est obligé de se contenter de telles valeurs sans prétendre en trouver en nombres entiers.

Digitized by Google

Nous devons remarquer auſſi d'avance qu'on ne peut ici donner une ſolution générale comme dans les cas précédens, & qu'au lieu que la méthode employée ci-deſſus conduiſoit à un nombre infini de ſolutions à la fois, chaque opération maintenant ne nous fera connoître qu'une ſeule valeur de x.

113.

Comme, en traitant de la formule $a+bx+cxx$, nous avons remarqué un nombre infini de cas où la ſolution eſt tout-à-fait impoſſible, on s'imagine bien que cela a lieu bien plus ſouvent encore pour la formule préſente, qui d'ailleurs exige conſtamment qu'on ſache déjà, ou qu'on ait trouvé une ſolution. Auſſi n'eſt-on en état ici de donner des regles que pour les cas où l'on part d'une ſolution connue pour en trouver une nouvelle; par le moyen de celle-ci alors on peut en trouver une autre, & continuer enſuite de la même maniere.

Mais il n'arrive pas même toujours que

Digitized by Google

une ſolution connue faſſe parvenir à une autre ; au contraire il y a bien des cas où il n'y a qu'une ſeule ſolution qui puiſſe avoir lieu, & cette circonſtance eſt d'autant plus remarquable, que dans les cas que nous avons développés précédemment, une ſeule ſolution conduiſoit à une infinité d'autres ſolutions nouvelles.

114.

Nous venons de dire que pour que la formule $a+bx+cxx+dx^3$ puiſſe être transformée en un quarré, il faut néceſſairement préſuppoſer un cas où cette tranſformation eſt poſſible. Or un tel cas s'apperçoit le plus clairement, quand le premier terme eſt lui-même déjà un quarré, & que la formule eſt exprimée ainſi, $ff+bx+cxx+dx^3$; car elle devient évidemment un quarré, ſi $x=0$.

Ce ſera donc par la conſidération de cette formule que nous entrerons en matiere ; nous tâcherons de voir comment, en partant du cas connu $x=0$, nous

Digitized by Google

pourrons parvenir à quelqu'autre valeur de x, & nous emploierons pour cet effet deux méthodes différentes, que nous expliquerons l'une & l'autre; il ſera bon de commencer par des cas particuliers.

115.

Soit donc propoſée la formule $1+2x-xx+x^3$, qui doive devenir un quarré. Comme ici le premier terme eſt un quarré, on adoptera pour la racine cherchée une quantité telle que les deux premiers termes s'évanouiſſent. Soit pour cet effet $1+x$ la racine dont le quarré doit équivaloir à notre formule, on aura $1+2x-xx+x^3=1+2x+xx$, où les deux premiers termes ſe détruiſent, de ſorte qu'on a l'équation $xx=-xx+x^3$ ou $x^3=2xx$, qui, étant diviſée par xx, donne $x=2$; ainſi la formule devient $1+4-4+8=9$.

De même, pour faire un quarré de la formule $4+6x-5xx+3x^3$, on ſuppoſera d'abord ſa racine $=2+nx$, & on cherchera n de maniere que les deux premiers

Digitized by Google

termes disparoissent ; or on aura $4+6x-5xx+3x^3=4+4nx+nnxx$; donc il faut que $4n=6$, & $n=\frac{3}{2}$; de-là résulte l'équation $-5xx+3x^3=\frac{9}{4}xx$, ou $3x^3=\frac{29}{4}xx$, qui donne $x=\frac{29}{12}$; & c'est cette valeur qui fera de la formule proposée un quarré, dont la racine sera $2+\frac{3}{2}x=\frac{45}{8}$.

116.

La seconde méthode consiste à donner à la racine trois termes, comme $f+gx+hxx$, tels que dans l'équation les trois premiers termes s'évanouissent.

Soit proposée, par exemple, la formule $1-4x+6xx-5x^3$, on en supposera la racine $=1-2x+hxx$, & on aura $1-4x+6xx-5x^3=1-4x+4xx-4hx^3+hhx^4+2hxx$;

les deux premiers termes, comme on voit, se détruisent aussi-tôt des deux côtés ; & pour chasser aussi le troisieme, il faudra faire $6=2h+4$, & par conséquent $h=1$;

Digitized by Google

par ce moyen on obtient $-5x^3 = -4x^3 + x^4$, ou $-5 = -4 + x$; de sorte que $x = -1$.

117.

C'est donc de ces deux méthodes qu'on peut faire usage, lorsque le premier terme a est un quarré. La premiere se fonde sur ce qu'on exprime la racine par deux termes, comme $f + px$, où f est la racine quarrée du premier terme, & où p est pris de maniere que le second terme doit pareillement disparoître; en sorte qu'il ne reste qu'à comparer $ppxx$ avec le troisieme & le quatrieme terme de la formule, savoir $cxx + dx^3$; car cette équation alors, pouvant se diviser par xx, donne une nouvelle valeur de x, qui est $x = \frac{pp-c}{d}$.

Dans la seconde méthode on donne trois termes à la racine, c'est-à-dire que si le premier terme a est $= ff$, on exprime la racine par $f + px + qxx$; après quoi on détermine p & q, de façon que les trois premiers termes de la formule s'évanouissent, ce qui se fait de la maniere suivante:

Digitized by Google

Puiſque $ff+bx+cxx+dx^3=ff+2pfx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+qqx^4$, il faut que $b=2fp$, & par conſéquent $p=\frac{b}{2f}$; de plus $c=2fq+pp$, & partant $q=\frac{c-pp}{2f}$; après cela reſte l'équation $dx^3=2pqx^3+qqx^4$; & comme elle eſt diviſible par x^3, on en tire $x=\frac{d-2pq}{qq}$.

118.

Il peut cependant arriver ſouvent que lors même que $a=ff$, aucune de ces deux méthodes ne donne une nouvelle valeur de x. C'eſt ce qu'on peut voir, en conſidérant la formule $ff+dx^3$, où le ſecond & le troiſieme terme manquent.

Car ſi, d'après la premiere méthode, on ſuppoſoit la racine $=f+px$, ou bien que $ff+dx^3=ff+2fpx+ppxx$, on auroit $0=2fp$ & $p=0$; ainſi on trouveroit $dx^3=0$, & par-là $x=0$, ce qui n'eſt point une nouvelle valeur de x.

Que ſi, d'après la ſeconde méthode, on vouloit faire la racine $=f+px+qqx$, ou $ff+dx^3=ff+2fpx+2fqxx+2pqx^3+qqx^4+ppxx$,

Digitized by Google

on trouveroit $o = 2fp$ & $p = o$; de plus $o = 2fq + pp$ & $q = o$; & il en réſulteroit $dx^3 = o$, & pareillement $x = o$.

119.

Il ne reſte d'autre parti à prendre dans ces cas-là, que de tâcher de trouver quelque valeur de x, telle que la formule devienne un quarré; ſi on y réuſſit, cette valeur fera trouver enſuite, par le ſecours de nos deux méthodes, de nouvelles valeurs; & cette voie eſt bonne même pour les cas où le premier terme ne ſeroit pas un quarré.

Que, par exemple, la formule $3 + x^3$ doive devenir un quarré; comme cela arrive quand $x = 1$, on fera $x = 1 + y$, & on aura $4 + 3y + 3yy + y^3$, où le premier terme eſt un quarré. Qu'on en ſuppoſe donc, ſuivant la premiere méthode, la racine $= 2 + py$, on aura $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + ppyy$; & pour que le ſecond terme diſparoiſſe, il faudra que $3 = 4p$, & par conſéquent $p = \frac{3}{4}$; ainſi 3

Digitized by Google

$+y=pp$ & $y=pp-3=\frac{9}{16}-\frac{48}{16}=\frac{-39}{16}$; donc $x=\frac{-23}{16}$, ce qui eſt une nouvelle valeur de x.

Si on fait de plus, conformément à la ſeconde méthode, la racine $=2+py+qyy$, on a $4+3y+3yy+y^3=4+4py+4qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4$, d'où on chaſſera le ſecond terme, en faiſant $3=4p$ ou $p=\frac{3}{4}$, & le quatrieme, en faiſant $3=4q+pp$, ou $q=\frac{3-pp}{4}=\frac{39}{64}$; ainſi $1=2pq+qqy$, d'où l'on tire $y=\frac{1-2pq}{qq}$, ou $y=\frac{352}{1521}$, & par conſéquent $x=\frac{1873}{1521}$.

120.

En général, ſi on a la formule $a+bx+cxx+dx^3$, & qu'on ſache d'ailleurs qu'elle devient un quarré quand $x=f$, de ſorte que $a+bf+cff+df^3=gg$, on fera $x=f+y$, & on aura la nouvelle formule qui ſuit:

Digitized by Google

$$\begin{array}{l} a \\ +bf+by \\ +cff+2cfy+cyy \\ +df^3+3dffy+3dfyy+dy^3 \end{array}$$

$$gg+(b+2cf+3dff)y+(c+3df)yy+dy^3.$$

Dans cette formule le premier terme eſt un quarré ; ainſi on peut y appliquer les deux méthodes précédentes, & elles fourniront de nouvelles valeurs de y, & par conſéquent auſſi de x, puiſque $x=f+y$.

121.

Mais ſouvent auſſi il ne ſert même de rien d'avoir trouvé une valeur de x ; ce cas a lieu dans la formule $1+x^3$, qui devient un quarré quand $x=2$. Car ſi, en conſéquence de cela, on fait $x=2+y$, on trouvera la formule $9+12y+6yy+y^3$, qui devroit de même pouvoir devenir un quarré.

Or ſoit par la premiere regle la racine $=3+py$, on aura $9+12y+6yy+y^3 =9+6py+ppyy$, où il faut que $12=6p$ & $p=2$; donc $6+y=pp=4$, & $y=-2$, ce

Digitized by Google

ce qui donne $x=0$, c'eſt-à-dire une valeur qui ne conduit à rien de plus.

Eſſayons auſſi la ſeconde méthode, & faiſons la racine $=3+py+qyy$, nous aurons $9+12y+6yy+y^3=q+6py+6qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4$, où il faudra d'abord que $12=6p$ & $p=2$; enſuite que $6=6q+pp=6q+4$, & $q=\frac{1}{3}$; on aura d'abord $1=2pq+qqy=\frac{4}{3}+\frac{1}{9}y$; de-là $y=-3$, & par conſéquent $x=-1$, & $1+x^3=0$; d'où l'on ne peut rien conclure de plus, parce que, ſi on vouloit faire $x=-1+z$, on trouveroit la formule $3z-3zz+z^3$, où le premier terme s'en va; de ſorte qu'on ne pourroit faire uſage ni de l'une ni de l'autre méthode.

On eſt aſſez fondé à ſoupçonner, après ce que nous venons de dire, que la formule $1+x^3$ ne peut devenir un quarré que dans les trois cas que voici:

I.) $x=2$, II.) $x=0$, III.) $x=-1$.

Mais c'eſt de quoi on peut ſe convaincre auſſi par d'autres raiſons.

Digitized by Google

122.

Considérons encore, pour nous exercer, la formule $1+3x^3$, qui devient un quarré dans les cas suivans: I.) $x=0$, II.) $x=1$, III.) $x=2$, & voyons si nous parviendrons à trouver d'autres valeurs semblables.

Puis donc que $x=1$ est une des valeurs qui satisfont, supposons $x=1+y$, & nous aurons $1+3x^3=4+9y+9yy+3y^3$. Que la racine de cette nouvelle formule soit $2+py$, en sorte que $4+9y+9yy+3y^3=4+4py+ppyy$, il faudra que $9=4p$ & $p=\frac{9}{4}$, & les autres termes donneront $9+3y=pp=\frac{81}{16}$ & $y=-\frac{21}{16}$; par conséquent $x=-\frac{5}{16}$, & $1+3x^3$ devient un quarré, dont la racine est $-\frac{61}{64}$, ou bien aussi $+\frac{61}{64}$. Si nous voulions à présent continuer, en faisant $x=-\frac{5}{16}+z$, nous ne manquerions pas de trouver de nouvelles valeurs.

Appliquons aussi à la même formule la seconde méthode, & supposons la racine $=2+py+qyy$; cette supposition donne

Digitized by Google

$4+9y+9yy+3y^3=4+4py+4qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4$; donc il faudra que $9=4p$ ou $p=\frac{9}{4}$, & $9=4q+pp=4q+\frac{81}{16}$, ou $q=\frac{63}{64}$; & les autres termes donneront $3=2pq+qqy=\frac{567}{128}+qqy$, ou $567+128qqy=384$, ou $128qqy=-183$; c'eſt-à-dire $126.\frac{63}{64}y=-183$, ou $42.\frac{63}{64}y=-61$. Ainſi $y=-\frac{1952}{1343}$, & $x=-\frac{629}{1323}$; & ces valeurs en fourniront de nouvelles, en ſuivant les voies que nous avons indiquées.

123.

Il faut remarquer cependant que, ſi on vouloit ſe donner la peine de tirer de nouvelles valeurs des deux qu'a fourni le cas connu $x=1$, on parviendroit à des fractions extrêmement prolixes; & on a lieu de s'étonner que ce cas, $x=1$, n'ait pas conduit plutôt à cet autre, $x=2$, qui ne tombe pas moins évidemment ſous les yeux. Et c'eſt-là une imperfection de la méthode dont il eſt queſtion, & qui eſt juſqu'à préſent la ſeule qu'on connoiſſe.

Digitized by Google

On peut partir de la même maniere du cas $x=2$, afin de trouver d'autres valeurs. Qu'on faſſe, pour cet effet $x=2+y$, & il s'agira de faire un quarré de la formule $25+36y+18yy+3y^3$; ſuppoſons-en la racine, d'après la premiere méthode, $=5+py$, nous aurons $25+36y+18yy+3y^3 = 25+10py+ppyy$, & par conſéquent $36=10p$, ou $p=\frac{18}{5}$; effaçant à préſent les termes qui ſe détruiſent, & diviſant les autres par yy, il en réſulte $18+3y=pp-\frac{324}{25}$, & par conſéquent $y=+\frac{42}{25}$, & $x=\frac{8}{25}$; d'où il ſuit que $1+3x^3$ eſt un quarré dont la racine eſt $5+py=-\frac{131}{125}$ ou $+\frac{131}{125}$.

Dans la ſeconde méthode il faudroit ſuppoſer la racine $=5+py+qyy$, & on auroit $25+36y+18yy+3y^3=25+10py+10qyy+2pqy^3+qqy^4$; les ſeconds & $+ppyy$
troiſiemes termes diſparoîtroient en faiſant $36=10p$, ou $p=\frac{18}{5}$, & $18=10q+pp$, ou $10q=18-\frac{324}{25}=\frac{126}{25}$, ou $q=\frac{63}{125}$; & alors les autres termes, diviſés par y^3,

Digitized by Google

donneroient $3 = 2pq + qqy$, ou $qqy = 3 - 2pq = -\frac{393}{625}$, c'eſt-à-dire $y = -\frac{3275}{1323}$ & $x = -\frac{629}{1323}$.

124.

Ce calcul ne devient pas moins long & difficile, même dans des cas où, en partant d'un autre principe, il eſt facile de donner une ſolution générale; comme, par exemple, quand la formule propoſée eſt $1 - x - xx + x^3$, où l'on peut faire généralement $x = nn - 1$, en donnant à n telle valeur qu'on veut. En effet, ſoit $n = 2$, on aura $x = 3$, & la formule devient $= 1 - 3 - 9 + 27 = 16$. Soit $n = 3$, on aura $x = 8$, & la formule devient $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$, & ainſi de ſuite.

Mais remarquons que c'eſt à une circonſtance tout-à-fait particuliere que nous devons une ſolution ſi facile, & cette circonſtance s'apperçoit aiſément, ſi on décompoſe notre formule en facteurs; car on voit auſſi-tôt qu'elle eſt diviſible par $1 - x$, que le quotient ſera $1 - xx$, qu'il

Digitized by Google

est composé des facteurs $(1+x)(1-x)$, & qu'enfin notre formule $1-x-xx+x^3 = (1-x)(1+x)(1-x) = (1-x)^2(1+x)$; or, puisqu'elle doit être un □ (*quarré*), & qu'un □, divisé par un □, donne un □ pour quotient, il faut aussi que $1+x = \square$; & réciproquement, si $1+x$ est un □, il faut que $(1-x)^2(1+x)$ soit un □; on n'a donc qu'à faire $1+x=nn$, & on aura sur le champ $x=nn-1$.

Si cette circonstance nous eût échappé, il auroit été difficile de déterminer même seulement cinq ou six valeurs de x par les méthodes précédentes.

125.

Il s'ensuit donc de-là qu'il est bon pour chaque formule proposée de la résoudre en facteurs, quand cela est possible. Or nous avons fait voir plus haut comment on s'y prend pour cet effet, savoir qu'il faut égaler la formule donnée à zéro, & chercher ensuite la racine de cette équation, chaque racine alors, comme $x=f$, donnant un

Digitized by Google

facteur $f-x$; & cette recherche eſt d'autant plus aiſée, qu'on ne cherche ici que des racines rationnelles, leſquelles ſont toujours des diviſeurs du terme connu ou du terme qui ne renferme point de x.

126.

Cette circonſtance a lieu auſſi dans notre formule générale $a+bx+cx^2+dx^3$, quand les deux premiers termes diſparoiſſent, & que par conſéquent c'eſt la quantité $cxx+dx^3$ qui doit être un quarré ; car il eſt clair, dans ce cas, qu'en diviſant par le quarré xx, il faudra pareillement que $c+dx$ ſoit un quarré, & on n'a donc qu'à ſuppoſer $c+dx=nn$, pour avoir $x=\frac{nn-c}{d}$, valeur qui renferme un nombre infini de ſolutions, & même toutes les ſolutions poſſibles.

127.

Si dans l'application de la premiere des deux méthodes précédentes on ne vouloit pas déterminer la lettre p afin de retrancher le ſecond terme, on parviendroit à une

Digitized by Google

autre formule irrationnelle, qu'il s'agiroit de rendre rationnelle.

Soit, par exemple, $ff+bx+cxx+dx^3$ la formule propoſée, & qu'on en faſſe la racine $=f+px$, on aura $ff+bx+cxx+dx^3=ff+2fpx+ppxx$, où les premiers termes ſe détruiſent; diviſant donc les autres par x, on obtient $b+cx+dxx=2fp+ppxx$, ce qui eſt une équation du ſecond degré, qui donne

$$x=\frac{pp-c\pm\sqrt{p^4-2cpp+8dfp+cc-4bd}}{2d}.$$

Ainſi l'affaire ſe réduit maintenant à trouver pour p des valeurs telles, que la formule $p^4-2cpp+8dfp+cc-4bd$ devienne un quarré. Or comme c'eſt la quatrieme puiſſance du nombre cherché p qui ſe préſente ici, ce cas appartient au Chapitre ſuivant.

Digitized by Google

CHAPITRE IX.

De la maniere de rendre rationnelle la formule incommenſurable

$$\sqrt{a+bx+cxx+dx^3+ex^4}.$$

128.

NOUS voici parvenus à des formules où le nombre indéterminé x monte à la quatrieme puiſſance, & c'eſt par là que nous terminerons nos recherches ſur les quantités affectées du ſigne de la racine quarrée, vu qu'on n'a pas été aſſez loin encore pour pouvoir transformer en quarrés des formules où des puiſſances plus hautes de x ſe préſentent.

Notre nouvelle formule fournit trois cas à conſidérer: le premier, quand le premier terme, a, eſt un quarré; le ſecond, quand le dernier terme, ex^4, eſt un quarré; & le troiſieme, quand le premier terme & le dernier ſont l'un & l'autre des quarrés.

Digitized by Google

Nous traiterons de chacun de ces cas ſéparément.

129.

I.) Réſolution de la formule

$$\sqrt{ff+bx+cxx+dx^3+ex^4}.$$

Comme le premier terme ici eſt un quarré, on pourroit, par la premiere méthode, ſuppoſer la racine $=f+px$, & déterminer p, de maniere que les deux premiers termes diſparuſſent, & que les autres fuſſent diviſibles par xx; mais on ne laiſſeroit pas alors de rencontrer encore un xx dans l'équation, & la détermination de x dépendroit d'un nouveau ſigne radical. Ce ſera donc à la ſeconde méthode que nous aurons recours; nous ferons la racine $=f+px+qxx$; nous déterminerons p & q de façon à pouvoir retrancher les trois premiers termes, & diviſant enſuite les autres par x^3, nous parviendrons à une ſimple équation du premier degré, qui donnera x dégagé de ſignes radicaux.

Digitized by Google

130.

Si donc la racine $=f+px+qxx$, & qu'ainſi $ff+bx+cxx+dx^3+ex^4=ff+2fpx+2fqxx+2pqx^3+qqx^4$, les $+ppxx$ premiers termes diſparoiſſent d'eux-mêmes; quant aux ſeconds, on les chaſſera en faiſant $b=2fp$, ou $p=\frac{b}{2f}$, & il faudra, pour les troiſiemes, que $c=2fq+pp$, ou $q=\frac{c-pp}{2f}$; cela poſé, les autres termes ſeront diviſibles par x^3, & donneront l'équation $d+ex=2pq+qqx$, de laquelle on tire $x=\frac{d-2pq}{qq-e}$, ou $x=\frac{2pq-d}{e-qq}$.

131.

Or il eſt facile de voir que cette méthode ne mene à rien, quand le ſecond & le troiſieme terme manquent dans notre formule, c'eſt-à-dire que tant b que $c=0$; car alors $p=0$ & $q=0$; par conſéquent $x=\frac{d}{e}$, d'où l'on ne peut ordinairement rien conclure, parce que ce cas donne

Digitized by Google

évidemment $dx^3 + ex^4 = 0$, & qu'ainſi notre formule devient égale au quarré ff. Mais c'eſt ſur-tout pour les formules telles que $ff + ex^4$, que cette méthode n'eſt d'aucun uſage, puiſque dans ce cas d étant auſſi $= 0$, on trouve pareillement $x = 0$, valeur qui ne conduit à rien de plus. Il en eſt de même, lorſque $b = 0$ & $d = 0$, c'eſt-à-dire que le ſecond & le quatrieme terme manquent, & que la formule eſt $ff + cxx + ex^4$; car dans ce cas $p = 0$ & $q = \frac{c}{2f}$, d'où réſulte $x = 0$, comme on le voit auſſitôt, & ce qui n'eſt d'aucun uſage ultérieur.

132.

II.) Réſolution de la formule

$$\sqrt{a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4}.$$

On pourroit réduire cette formule au cas précédent, en ſuppoſant $x = \frac{1}{y}$; car, comme il faudroit alors que la formule $a + \frac{b}{y} + \frac{c}{yy} + \frac{d}{y^3} + \frac{gg}{y^4}$ fût un quarré, & que dans ce cas celle-ci reſte un quarré,

Digitized by Google

si on la multiplie par le quarré y^4, on n'auroit qu'à faire cette multiplication, & on obtiendroit la formule $ay^4+by^3+cyy+dy+gg$, qui est tout-à-fait semblable à la précédente écrite à rebours.

Mais on n'a pas besoin de passer par ce procédé ; on n'a qu'à supposer la racine $=gxx+px+q$, ou dans l'ordre inverse, $q+px+gxx$, & on aura $a+bx+cxx+dx^3+ggx^4=qq+2pqx+2gqxx+ppxx+2gpx^3+ggx^4$; or les cinquiemes termes se détruisant ici d'eux-mêmes, on déterminera d'abord p, de maniere que les quatriemes termes se détruisent pareillement, ce qui arrive quand $d=2gp$, ou $p=\frac{d}{2g}$; ensuite on déterminera aussi q, afin de chasser les troisiemes termes, & on fera pour cet effet $c=2gq+pp$, ou $q=\frac{c-pp}{2g}$; cela fait, les deux premiers termes fourniront l'équation $a+bx=qq+2pqx$, d'où l'on tire $x=\frac{a-qq}{2pq-b}$, ou $x=\frac{qq-a}{b-2pq}$.

Digitized by Google

133.

Nous retrouvons ici le défaut que nous avions remarqué ci-deſſus dans le cas où le ſecond & le quatrieme terme manquent, c'eſt-à-d. que $b=0$ & $d=0$; en effet on trouve alors $p=0$ & $q=\frac{c}{2g}$, donc $x=\frac{a-qq}{0}$; or cette valeur étant infinie, ne mene pas plus loin que la valeur $x=0$, dans le premier cas; d'où il ſuit que cette méthode ne peut du tout être employée pour les expreſſions de la forme $a+cx^2+ggx^4$.

134.

III.) Réſolution de la formule $\sqrt{ff+bx+cxx+dx^3+ggx^4}$.

Il eſt clair qu'on peut employer pour cette formule l'une & l'autre des deux méthodes, dont on vient de faire uſage; car d'abord, à cauſe que le premier terme eſt un quarré, on peut prendre pour la racine $f+px+qxx$, & faire évanouir les trois premiers termes; enſuite, comme le dernier terme eſt pareillement un quarré, on

Digitized by Google

peut auſſi faire la racine $=q+px+gxx$, & chaſſer les trois derniers termes, au moyen de quoi on trouvera même deux valeurs de x.

Mais on peut traiter auſſi cette formule par deux autres méthodes qui leur appartiennent particuliérement.

Dans la premiere on ſuppoſe la racine $=f+px+gxx$, & on détermine p de façon que les ſeconds termes ſe détruiſent; c'eſt-à-dire que, comme il faut que $ff+bx+cxx+dx^3+ggx^4=ff+2fpx+2fgxx+ppxx+2gpx^3+ggx^4$, on fait $b=2fp$ ou $p=\frac{b}{2f}$; & puiſque de cette maniere tant les ſeconds termes que les premiers & les derniers termes ſe détruiſent, on pourra diviſer les autres par xx, & on aura l'équation $c+dx=2fg+pp+2gpx$, de laquelle on tirera $x=\frac{c-2fg-pp}{2gp-d}$ ou $x=\frac{pp+2fg-c}{d-2gp}$. Et on doit ſur-tout remarquer ici que comme dans la formule on ne trouve g qu'à la ſeconde puiſſance, la racine de ce quarré, ou g, peut ſe prendre tant négative que

Digitized by Google

positive, & qu'il résulte de-là qu'on obtient encore une autre valeur de x, savoir $x = \frac{c+2fg-pp}{-2gp-d}$, ou $x = \frac{pp-2fg-c}{2gp+d}$.

135.

Il est, ainsi que nous l'avons dit, encore une autre maniere de résoudre cette formule : elle consiste à supposer d'abord, comme auparavant, la racine $= f + px + gxx$, & à déterminer ensuite p de maniere que ce soient les quatriemes termes qui se détruisent ; cela se fait en supposant dans l'équation fondamentale $d = 2gp$, ou $p = \frac{d}{2g}$; car puisque les premiers & les derniers termes disparoissent pareillement, on pourra diviser les autres par x, & il en résultera l'équation $b + cx = 2fp + 2fgx + ppx$, qui donne $x = \frac{b-2fp}{2fg+pp-c}$. De plus nous avons à remarquer que comme dans la formule le quarré ff se trouve seul, on peut supposer également que sa racine soit $-f$, & qu'ainsi on aura aussi $x = \frac{b+2fp}{pp-2fg-c}$. De sorte que cette méthode aussi fournit deux nouvelles valeurs de x, &

Digitized by Google

& que par conſéquent les méthodes que nous avons employées, donnent en tout ſix nouvelles valeurs.

136.

Mais ici ſe préſente de nouveau cette circonſtance fâcheuſe, qui fait que le ſecond & le quatrieme terme manquant, ou b & d étant $=0$, on ne peut trouver pour x aucune valeur qui réponde à notre but; de ſorte qu'on ne peut parvenir à réſoudre la formule $ff+cxx+ggx^4$. En effet, ſi $b=0$ & $d=0$, on a par l'une & l'autre voie $p=0$; & la premiere donnant $x=\frac{c-2fg}{0}$, & l'autre donnant $x=0$., elles ne ſont pas plus propres l'une que l'autre à fournir des concluſions ultérieures.

137.

Voilà donc les trois formules auxquelles on peut appliquer les méthodes que nous avons détaillées juſqu'ici; & ſi dans la formule propoſée ni l'un ni l'autre terme n'eſt un quarré, il n'y aura aucun ſuccès à eſ-

Digitized by Google

pérer avant qu'on ait trouvé une valeur de x, telle que la formule devienne un quarré.

Supposons donc que nous ayons trouvé que notre formule devient un quarré dans le cas de $x=h$, ou que $a+bh+chh+dh^3+eh^4=kk$; si nous faisons $x=h+y$, nous aurons une nouvelle formule dans laquelle le premier terme sera kk, c'est-à-dire un quarré, & qui par conséquent retombera dans le premier cas. On peut aussi faire usage de cette transformation, après avoir déterminé par les méthodes précédentes une des valeurs de x, par exemple $x=h$; on n'a qu'à faire alors $x=h+y$, & on parvient à une nouvelle équation sur laquelle on peut opérer de la même maniere. Les valeurs de x qu'on aura trouvées de cette façon, en fourniront de nouvelles; celles-ci encore d'autres, & ainsi de suite.

138.

Mais il est sur-tout à remarquer qu'on ne peut en aucune maniere espérer de résoudre les formules où le second & le qua-

Digitized by Google

trieme terme manquent, avant que d'avoir, pour ainſi dire, trouvé une ſolution ; & quant au procédé qu'il faut ſuivre après cela, nous allons le mettre ſous les yeux en l'appliquant à la formule $a+ex^4$, qui eſt une de celles qui ſe préſentent le plus ſouvent.

Suppoſons donc qu'on ait trouvé une valeur $x=h$, & qu'on ait $a+eh^4=kk$; ſi l'on veut trouver par-là d'autres valeurs de x, on fera $x=h+y$, & il faudra que la formule ſuivante, $a+eh^4+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4$, ſoit un quarré ; or cette formule revenant à celle-ci, $kk+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4$, appartient à la premiere de nos trois eſpeces ; ainſi nous ferons ſa racine quarrée $=k+py+qyy$, & la formule elle-même par conſéquent égale au quarré $kk+2kpy+2kqyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4$, d'où il faudra d'abord chaſſer le ſecond terme en déterminant p & q en conſéquence, c'eſt-à-dire en faiſant $4eh^3=2kp$, ou $p=\frac{2eh^3}{k}$, & $6ehh=2kq$

Digitized by Google

$+pp$, ou $q=\frac{6ehh-pp}{2k}=\frac{3ehhkk-2eeh^4}{k^3}$

$=\frac{ehh(3kk-2eh^4)}{k^3}$, ou enfin $q=\frac{ehh(kk+2a)}{k^3}$,

à cause de $eh^4=kk-a$; après cela les termes restans, divisés par y^3, donneront $4eh+ey=2pq+qqy$, d'où l'on tire $y=\frac{4eh-2pq}{qq-e}$; le numérateur de cette fraction peut se mettre sous la forme $\frac{4ehk^4-4eeh^5(kk+2a)}{k^4}$, ou, à cause de $eh^4=kk-a$, sous celle-ci,

$$\frac{4ehk^4-4eh(kk-a)(kk+2a)}{k^4}$$

$$=\frac{4eh(-akk+2a^2)}{k^4}=\frac{4aeh(2a-kk)}{k^4}.$$

Quant au dénominateur $qq-e$, il devient

$$=\frac{e(kk-a)(kk+2a)^2-ek^6}{k^6}$$

$=\frac{e(3ak^4-4a^3)}{k^6}=\frac{ea(3k^4-4aa)}{k^6}$; ainsi la valeur cherchée sera $y=\frac{2aeh(2a-kk)}{k^4}$

Digitized by Google

$\frac{k^6}{ae(3k^4-4aa)}$, ou $y=\frac{2hkk(2a-kk)}{3k^4-3aa}$, & par conséquent $x=\frac{h(8akk-k^4-4aa)}{3k^4-4aa}$, ou $x=\frac{h(k^4-8akk+4aa)}{4aa-3k^4}$.

Si donc on substitue cette valeur de x dans la formule $a+ex^4$, elle devient un quarré; & sa racine, que nous avions supposée $k+py+qyy$, aura cette forme, $k+\frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^4-4aa}$ $+\frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)^2}{(3k^4-4aa)^2}$, parce que, comme nous avons vu, $p=\frac{2eh^3}{k}$, $q=\frac{ehh(kk+2a)}{k^3}$, & $y=\frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}$.

139.

Continuons de considérer la formule $a+ex^4$, & puisque le cas $a+eh^4=kk$ est connu, regardons-le comme fournissant deux cas différens à cause de $x=+h$ & de $x=-h$; nous pourrons par cette raison transformer notre formule en une autre

Digitized by Google

de la troisieme espece, dans laquelle le premier & le dernier terme sont des quarrés. Cette transformation se fait par un artifice qui est souvent d'une grande utilité, & qui consiste à faire $x = \frac{h(1+y)}{1-y}$; la formule devient par-là $= \frac{a(1-y)^4 + eh^4(1+y)^4}{(1-y)^4}$, ou bien

$$= \frac{kk + 4(kk-2a)y + 6kkyy + 4(kk-2a)y^3 + kky^4}{(1-y)^4}.$$

Qu'on suppose la racine de cette formule, conformément au troisieme cas, $= \frac{k + py - kyy}{(1-y)^2}$, en sorte que le numérateur de notre formule devra être égal au quarré $kk + 2kpy - 2kkyy - 2kpy^3 + kky^4 + ppyy$; que l'on chasse les seconds termes, en faisant $4kk - 8a = 2kp$, ou $p = \frac{2kk-4a}{k}$; qu'on divise les autres termes par yy, & on aura $6kk + 4(kk-2a)y = -2kk + pp - 2kpy$, ou $y(4kk - 8a + 2kp) = pp - 8kk$; or $p = \frac{2kk-4a}{k}$, & $pk = 2kk - 4a$, ainsi $y(8kk - 16a) = -\frac{4k^4 - 16akk + 16aa}{kk}$, & y

Digitized by Google

$= \frac{-k^4 - 4akk + 4aa}{kk(2kk - 4a)}$. Si nous voulons trouver maintenant x, nous avons d'abord $1 + y = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{kk(2kk - 4a)}$, & en ſecond lieu $1 - y = \frac{3k^4 - 4aa}{kk(2kk - 4a)}$; ainſi $\frac{1+y}{1-y}$ $= \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa}$; & par conſéquent $x = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa} \cdot h$; mais c'eſt au reſte la même valeur que nous avons déjà trouvée ci-deſſus.

140.

Soit, pour appliquer ce réſultat à un exemple, la formule $2x^4 - 1$ qui doive devenir un quarré. Nous avons ici $a = -1$ & $e = 2$; & le cas connu où la formule eſt un quarré, eſt celui où $x = 1$; ainſi $h = 1$ & $kk = 1$, c'eſt-à-dire $k = 1$. Donc nous aurons la nouvelle valeur $x = \frac{1+8+4}{3-4} = -13$; & puiſque la quatrieme puiſſance de x ſe trouve ſeule, on peut écrire

Digitized by Google

aussi $x=+13$, & de-là résulte $2x^4-1=57121=(239)^2$.

Si nous regardons à présent ceci comme le cas connu, nous avons $h=13$ & $k=239$, & nous obtenons une nouvelle valeur de x, qui est $x=\frac{815730721+278488+4}{2447192163-4}\cdot 13=\frac{815959213}{2447192159}\cdot 13=\frac{10607469769}{2447192159}$.

141.

Nous allons considérer de la même maniere la formule un peu plus générale, $a+cxx+ex^4$, & nous prendrons pour le cas connu, où elle devient un quarré, $x=h$; de sorte que $a+chh+eh^4=kk$.

Supposons donc, afin de trouver par-là d'autres valeurs, que $x=h+y$, & notre formule prendra la forme suivante:

$$\begin{array}{l} a \\ chh+2chy+cyy \\ eh^4+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4 \\ \hline kk+(2ch+4eh^3)y+(c+6ehh)yy+4ehy^3+ey^4. \end{array}$$

Le premier terme étant un quarré, nous supposerons que la racine quarrée de cette

Digitized by Google

formule est $k+py+qyy$; & la formule elle-même devra être égale au quarré $kk+2kpy+2kqyy+2pqy^3+qqy^4$; déterminons à présent p & q, afin de retrancher les seconds & les troisiemes termes, nous aurons pour cet effet $2ch+4eh^3=2kp$, ou $p=\frac{ch+2eh^3}{k}$, & $c+6ehh=2kq+pp$, ou $q=\frac{c+6ehh-pp}{2k}$; maintenant les termes suivans étant divisés par y^3, se réduisent à l'équation $4eh+ey=2pq+qqy$, qui donne enfin $y=\frac{4eh-2pq}{qq-e}$, & par conséquent aussi la valeur $x=h+y$, qui fait que la racine quarrée de notre formule est $k+py+qyy$. Si après cela nous regardons ce nouveau cas comme le cas donné, nous pourrons trouver un autre nouveau cas, & continuer de la même maniere autant que nous voudrons.

142.

Rendons l'article précédent plus clair, en l'appliquant à la formule $1-xx+x^4$,

Digitized by Google

dans laquelle $a=1$, $c=-1$ & $e=1$. On voit auſſi-tôt que le cas connu eſt $x=1$, & qu'ainſi $h=1$ & $k=1$. Si nous faiſons donc $x=1+y$, & la racine quarrée de notre formule $=1+py+qyy$, il faudra d'abord que $p=1$ & enſuite $q=2$; & ces valeurs donnent $y=0$ & $x=1$; or voilà le cas connu, & on n'en a pas trouvé un nouveau; mais c'eſt qu'on peut prouver d'autre part que la formule propoſée ne peut devenir un quarré que dans les cas de $x=0$ & de $x=\pm 1$.

143.

Soit donnée auſſi pour exemple la formule $2-3xx+2x^4$, où $a=2$, $c=-3$ & $e=2$. Le cas connu ſe trouve aiſément; il eſt $x=1$; ainſi $h=1$ & $k=1$. Si donc on fait $x=1+y$, & la racine $=1+py+qyy$, on a $p=1$ & $q=4$, & de-là réſulte $y=0$ & $x=1$; ce qui n'eſt, comme ci-deſſus, rien de nouveau.

Digitized by Google

144.

Autre exemple. Soit la formule $1+8xx+x^4$, où $a=1$, $c=8$ & $e=1$. Une légere considération suffit pour remarquer le cas satisfaisant $x=2$; car, en supposant $h=2$, on trouve $k=7$; ainsi faisant $x=2+y$, & la racine $=7+py+qyy$, on aura $p=\frac{32}{7}$ & $q=\frac{272}{343}$, d'où résulte $y=-\frac{5880}{2911}$ & $x=-\frac{58}{2911}$, & on peut omettre dans ces valeurs le signe *moins*. Mais observons de plus dans cet exemple, que, puisque le dernier terme est en soi déjà un quarré, & qu'il doit donc demeurer aussi un quarré dans la nouvelle formule, on peut également appliquer ici le procédé indiqué pour les cas de la troisieme espece. Soit donc comme auparavant $x=2+y$, & nous aurons

$$\begin{array}{l} 32+32y+8yy \\ 16+32y+24yy+8y^3+y^4 \\ \hline 49+64y+32yy+8y^3+y^4, \end{array}$$

expression qu'on peut maintenant trans-

Digitized by Google

former en un quarré de plusieurs manieres. Car d'abord on peut supposer la racine $=7+py+yy$, & par conséquent la formule égale au quarré $49+14py+14yy+2py^3+ppyy+y^4$; faire évanouir les pénultiemes termes par la supposition de $2p=8$, ou de $p=4$; diviser les autres termes par y, & tirer de l'équation $64+32y=14p+14y+ppy=56+30y$; la valeur $y=-4$ & $x=-2$, ou $x=+2$, ce qui n'est à la vérité que le cas déjà connu.

Mais si l'on cherche à déterminer p de façon que les seconds termes disparoissent, on aura $14p=64$, & $p=\frac{32}{7}$; & les autres termes, divisés par yy, formeront l'équation $14+pp+2py=32+8y$, ou $\frac{1710}{49}+\frac{64}{7}y=32+8y$, d'où l'on tire $y=-\frac{71}{28}$, & par conséquent $x=-\frac{15}{28}$, ou $x=+\frac{15}{28}$; & cette valeur transforme notre formule en un quarré, dont la racine est $\frac{1441}{784}$. De plus, comme $-yy$ n'est pas moins la racine du dernier terme que ne l'est $+yy$,

Digitized by Google

on peut auſſi ſuppoſer la racine de la formule $=7+py-yy$, ou la formule même $=49+14py-14yy-2py^3+y^4$; on fera $+ppyy$ évanouir les termes pénultiemes, en ſuppoſant $8=-2p$, ou $p=-4$; & diviſant les autres par y, on trouvera $64+32y=14p-14y+ppy=-56+2y$, ce qui donne $y=-4$, c'eſt-à-dire de nouveau le cas connu. Que ſi l'on vouloit chaſſer les ſeconds termes, on auroit $64=14p$, & $p=\frac{32}{7}$; par conſéquent en diviſant les autres termes par yy, on obtiendroit $32+8y=-14+pp-2py$, ou $32+8y=\frac{338}{49}-\frac{64}{7}y$, d'où l'on tireroit $y=-\frac{71}{28}$ & $x=\mp\frac{15}{28}$, c'eſt-à-dire les mêmes valeurs que nous avons trouvées ci-deſſus.

145.

On peut procéder de la même maniere à l'égard de la formule générale $a+bx+cxx+dx^3+ex^4$, quand on connoît un cas comme $x=h$, dans lequel elle devient

Digitized by Google

un quarré kk ; la méthode eſt toujours de ſuppoſer enſuite $x=h+y$; on obtient par-là une formule d'autant de termes que l'autre, & le premier deſquels eſt kk ; ſi après cela on exprime la racine par $k+py+qyy$, & qu'on détermine p & q de maniere que les ſeconds & les troiſiemes termes diſparoiſſent auſſi, les deux derniers, pouvant être diviſés par y^3, ſe réduiſent à une ſimple équation du premier degré, de laquelle on tire facilement y, & par conſéquent auſſi la valeur de x.

Mais on ſera cependant, comme auparavant, obligé d'exclure un grand nombre de cas que donne cette méthode ; ſavoir ceux où la valeur qu'on trouve pour x, n'eſt autre que celle de $x=h$, qui étoit donnée, & dans leſquels par conſéquent on n'a pas fait un pas en avant ; ces ſortes de cas indiquent ou que la formule eſt impoſſible en elle-même, ou qu'il faudroit trouver encore quelqu'autre cas où elle devînt un quarré.

Digitized by Google

146.

Et voilà juſqu'où on eſt parvenu juſqu'à préſent dans la réſolution des formules qui ſont affectées du ſigne de la racine quarrée. On n'a fait encore aucune découverte pour celles où les quantités qui ſont ſous le ſigne paſſent le quatrieme degré, & lorſqu'il ſe préſente des formules qui renferment la cinquieme puiſſance ou une puiſſance plus haute de x, les artifices que nous avons développés ne ſuffiſent pas pour les réſoudre, quand même on auroit un cas donné.

Pour qu'on puiſſe mieux ſe convaincre de la vérité de ce que nous diſons, nous conſidérerons la formule $kk+bx+cxx+dx^3+ex^4+fx^5$, dont le premier terme eſt déjà un quarré. Si on vouloit, ainſi qu'auparavant, ſuppoſer la racine de cette formule, $=k+px+qxx$, & déterminer p & q de maniere à faire diſparoître les ſeconds & les troiſiemes termes, il reſteroit cependant toujours encore trois termes

Digitized by Google

qui, diviſés par x^3, formeroient une équation du ſecond degré, & on ne pourroit évidemment exprimer x que par une nouvelle quantité irrationnelle. Mais voulût-on ſuppoſer la racine $=k+px+qxx+rx^3$, ſon quarré monteroit à la ſixieme puiſſance, & quand même, par conſéquent, on détermineroit p, q & r de façon à retrancher les ſeconds, troiſiemes & quatriemes termes, il n'en reſteroit pas moins la quatrieme, la cinquieme & la ſixieme puiſſance; & en diviſant par x^4, on ne laiſſeroit pas d'avoir une équation du ſecond degré, qu'on ne pourroit réſoudre ſans le ſecours d'un ſigne radical. On voit par-là qu'en effet nous avons épuiſé ce qu'il y avoit à dire ſur les formules qui doivent être transformées en des quarrés, & il ne nous reſte qu'à paſſer aux quantités affectées du ſigne de la racine cubique.

CHAPITRE

Digitized by Google

CHAPITRE X.

De la Méthode de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt[3]{a+bx+cxx+dx^3}$.

147.

ON cherche donc à préſent des valeurs de x, telles que la formule $a+bx+cxx+dx^3$ devienne un cube, & qu'on en puiſſe extraire la racine cubique. Nous préviendrons auſſi-tôt qu'on ne pourroit eſpérer aucune ſolution de cette eſpece, ſi la formule paſſoit le troiſieme degré; & nous ajouterons que ſi elle n'étoit que du ſecond degré, c'eſt-à-dire que le terme dx^3 diſparût, la ſolution n'en deviendroit cependant pas plus facile. Quant au cas où les deux derniers termes diſparoîtroient, & dans lequel ce ſeroit la formule $a+bx$ qu'il s'agiroit de réduire en cube, on voit aſſez qu'il ne ſouffre aucune difficulté, & qu'on n'a qu'à faire $a+bx=p^3$, pour trouver ſur le champ $x=\frac{p^3-a}{b}$.

Digitized by Google

148.

Nous devons remarquer de nouveau, avant que d'aller plus loin, que lorſque ni le premier ni le dernier terme ne ſont des cubes, on ne doit pas penſer à réſoudre la formule, à moins qu'on ne connoiſſe déjà un cas où elle devient un cube, ſoit que ce cas ſe préſente naturellement, ſoit qu'on ait été obligé de le chercher par le tâtonnement.

Ainſi nous avons d'abord trois eſpeces de formules à conſidérer: l'une a lieu quand le premier terme eſt un cube; & comme alors la formule s'exprime par $f^3+bx+cxx+dx^3$, on s'apperçoit immédiatement que le cas connu eſt celui de $x=0$. La ſeconde eſpece comprend la formule $a+bx+cxx+g^3x^3$, c'eſt-à-dire le cas où le dernier terme eſt un cube. La troiſieme eſpece enfin eſt compoſée des deux premieres, & comprend les cas dans leſquels tant le premier terme que le dernier terme eſt un cube.

Digitized by Google

149.

Premier cas. Soit $f^3+bx+cxx+dx^3$ la formule proposée qu'il s'agit de transformer en un cube.

Supposons que sa racine soit $=f+px$, & par conséquent que la formule soit égale au cube $f^3+3ffpx+3fppxx+p^3x^3$; comme les premiers termes disparoissent d'eux-mêmes, nous déterminerons p de façon à faire disparoître aussi les seconds termes, savoir en faisant $b=3ffp$, ou $p=\frac{b}{3ff}$; présentement les termes restans, étant divisibles par xx, donnent $c+dx=3fpp+p^3x$, ainsi $x=\frac{c-3fpp}{p^3-d}$.

Si le dernier terme dx^3 ne s'étoit pas trouvé dans la formule, on auroit pu supposer simplement la racine cubique $=f$, & on auroit eu $f^3=f^3+bx+cxx$, ou $b+cx=0$ & $x=-\frac{b}{c}$; mais cette valeur n'auroit pu servir à en trouver d'autres.

Digitized by Google

150.

Deuxieme cas. Si en second lieu l'expression proposée a cette forme, $a+bx+cxx+g^3x^3$, on indiquera sa racine cubique par $p+gx$, dont le cube est $p^3+3gppx+3ggpx+g^3x^3$, de sorte que les derniers termes se détruisent; maintenant qu'on détermine p de façon qu'aussi les pénultiemes disparoissent: cela se fera en supposant $c=3ggp$ ou $p=\frac{c}{3gg}$, & les autres termes donneront ensuite $a+bx=p^3+3gp^2x$, d'où l'on tire $x=\frac{a-p^3}{3gpp-b}$.

Si le premier terme a avoit manqué, on auroit pu se contenter d'exprimer la racine cubique par gx, & on auroit eu $g^3x^3=bx+cxx+g^3x^3$, ou $o=b+cx$, donc $x=-\frac{b}{c}$; mais cette valeur ordinairement ne sert de rien pour en trouver d'autres.

151.

Troisieme cas. Soit enfin troisiémement la formule $f^3+bx+cxx+g^3x^3$, dans la-

Digitized by Google

quelle le premier & le dernier terme ſont des cubes ; il eſt clair qu'on pourra la traiter comme l'une & comme l'autre des deux eſpeces précédentes, & par conſéquent qu'on pourra obtenir deux valeurs de x.

Mais outre cela on peut auſſi faire la racine $=f+gx$, puis égaler la formule au cube $f^3+3ffgx+3fggxx+g^3x^3$, & à cauſe que les premiers & les derniers termes ſe détruiſent, & que les autres ſont diviſibles par x, parvenir à l'équation $b+cx=3ffg+3fggx$, qui donne $x=\frac{b-3ffg}{3ffg-c}$.

152.

Lorſqu'au contraire la formule propoſée n'appartient à aucune des trois eſpeces ci-deſſus, on n'a d'autre reſſource que de chercher à trouver une valeur qui change cette formule en un cube ; enſuite ayant trouvé une telle valeur, par exemple, $x=h$, de ſorte que $a+bh+chh+dh^3=k^3$, on ſuppoſe $x=h+y$, & ſubſtituant on trouve

Digitized by Google

$$\begin{array}{l} a \\ bh+by \\ chh+2chy+cyy \\ dh^3+3dhhy+3dhyy+dy^3 \\ \hline k^3+(b+2ch+3dhh)y+(c+3dh)yy+dy^3. \end{array}$$

Cette nouvelle formule appartenant à la premiere eſpece, on ſait comment on doit déterminer y, & on trouvera par-là une nouvelle valeur de x, qu'on pourra faire ſervir enſuite à en trouver d'autres.

153.

Eclairciſſons cette méthode par quelques exemples, & ſuppoſons d'abord qu'on demande que la formule $1+x+xx$, qui appartient à la premiere eſpece, devienne un cube. Nous pourrions faire auſſi-tôt la racine cubique $=1$, & nous trouverions $x+xx=0$, c'eſt-à-dire $x(1+x)=0$, & par conſéquent, ou $x=0$ ou $x=-1$; mais nous ne pourrions rien conclure de-là. Ecrivons donc pour la racine cubique $1+px$, & comme le cube en eſt $1+3px$

Digitized by Google

$+3ppx^2+p^3x^3$, nous aurons $1=3p$ ou $p=\frac{1}{3}$; moyennant quoi les autres termes étant diviſés par xx, donnent $1=3pp+p^3x$, ou $x=\frac{1-3pp}{p^3}$; or $p=\frac{1}{3}$; ainſi $x=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}}=18$, & notre formule eſt $1+18+324=343$, & la racine cubique, $1+px=7$. Si nous continuons à préſent, en faiſant $x=18+y$, notre formule prendra la forme $343+37y+yy$, & il faudra par la premiere regle en ſuppoſer la racine cubique $=7+py$; en la comparant après cela avec le cube $343+147py+21ppyy+p^3y^3$, nous voyons qu'il faut faire $37=147p$, ou $p=\frac{37}{147}$; les autres termes donnent en ce cas l'équation $1=21pp+p^3y$, d'où nous tirons la valeur de $y=\frac{1-21pp}{p^3}=-\frac{340.121.147}{37^3}=-\frac{1049580}{50653}$, qui peut conduire de la même maniere à de nouvelles valeurs.

Digitized by Google

154.

Soit proposé d'égaler à un cube cette autre formule $2+xx$. Comme on trouve assez aisément le cas $x=5$, nous ferons aussi-tôt $x=5+y$, & nous aurons $27+10y+yy$; nous en supposerons la racine cubique $=3+py$, ainsi la formule même $=27+27py+9ppyy+p^3y^3$, & nous aurons à faire $10=27p$, ou $p=\frac{10}{27}$; donc $1=9pp+p^3y$, & $y=\frac{1-9pp}{p^3}=-\frac{19\cdot 9\cdot 27}{1000}=-\frac{4617}{1000}$, & $x=\frac{383}{1000}$; par-là notre formule devient $2+xx=\frac{2146689}{1000000}$, dont la racine cubique ne peut manquer d'être $3+py=\frac{129}{100}$.

155.

Voyons aussi si cette formule-ci, $1+x^3$, peut devenir un cube hors des cas évidens de $x=0$, & de $x=-1$. Nous remarquons d'abord que, quoique cette formule appartienne à la troisieme espece, la racine $1+x$ ne nous est cependant d'aucun

Digitized by Google

uſage, parce que ſon cube $1+3x+3xx+x^3$, étant égal à la formule, donne $3x+3xx=0$, ou $x(1+x)=0$, c'eſt-à-dire de nouveau $x=0$, ou $x=-1$.

Que ſi nous voulions faire $x=-1+y$, nous aurions à transformer en cube la formule $3y-3yy+y^3$, qui appartient à la ſeconde eſpece; ainſi ſuppoſant ſa racine cubique $=p+y$, ou la formule même égale au cube $p^3+3ppy+3pyy+y^3$, nous aurions $-3=3p$ ou $p=-1$, & de-là l'équation $3y=p^3+3ppy=-1+3y$, qui donne $y=\frac{1}{0}$, ou infini; de ſorte qu'on ne tire aucun parti non plus de cette ſeconde ſuppoſition. Il ne faut pas s'en étonner, & c'eſt en vain qu'on chercheroit d'autres valeurs pour x; car il eſt démontré que la ſomme de deux cubes, comme t^3+x^3, ne peut jamais devenir un cube; ainſi, en faiſant $t=1$, il eſt clair que la formule, $1+x^3$, ne peut devenir un cube que dans les cas que nous avons dit.

Digitized by Google

156.

On trouvera pareillement que la formule, $2+x^3$, ne peut devenir un cube que dans le cas $x=-1$. Cette formule appartient à la seconde espece; mais on ne peut y appliquer la regle donnée pour ce cas, parce que les termes moyens manquent. C'est en supposant $x=-1+y$, ce qui donne $1+3y-3yy+y^3$, qu'on peut traiter la formule suivant tous les trois cas, & qu'on peut se convaincre de la vérité de ce que nous avançons. En effet, si dans le premier cas on fait la racine $=1+y$, dont le cube est $1+3y+3yy+y^3$, on a $-3yy=3yy$, ce qui ne peut être vrai que lorsque $y=0$. Qu'on suppose, d'après le second cas, la racine $=-1+y$, ou la formule $=-1+3y-3yy+y^3$, on aura $1+3y=-1+3y$, & $y=\frac{2}{0}$ ou une valeur infinie. Le troisieme cas enfin exigeroit qu'on supposât la racine $1+y$, ce qu'on a déjà fait pour le premier.

Digitized by Google

157.

Soit proposée aussi la formule $3+3x^3$, qui doive devenir un cube: ce cas a lieu premiérement si $y=-1$, mais on n'en peut rien conclure, ensuite aussi quand $x=2$. Qu'on suppose, à cause de ce second cas, $x=2+y$, on aura la formule $27+36y+18yy+3y^3$; & comme elle est de la premiere espece, on fera sa racine $=3+py$, dont le cube est $27+27py+9ppyy+p^3y^3$; comparant maintenant, on trouve $36=27p$ ou $p=\frac{4}{3}$, & de-là résulte l'équation $18+3y=9pp+p^3y=16+\frac{64}{27}y$, qui donne $y=\frac{-54}{17}$, & par conséquent $x=\frac{-20}{17}$. Donc notre formule $3+3x^3=-\frac{9261}{4913}$, & sa racine cubique $3+py=\frac{21}{17}$; & cette solution fournira de nouvelles valeurs, si l'on en souhaite.

158.

Considérons encore la formule $4+xx$, qui devient un cube dans deux cas qu'on

Digitized by Google

peut regarder comme connus, ſavoir $x=4$ & $x=11$. Si nous faiſons d'abord $x=2+y$, ce ſera la formule $8+4y+yy$ qui devra être un cube dont la racine ſoit $2+\frac{1}{3}y$, & ce cube étant $8+4y+\frac{2}{3}yy+\frac{1}{27}y^3$, nous trouvons $1=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y$; donc $y=9$ & $x=11$, c'eſt-à-dire le ſecond cas donné.

Si nous ſuppoſons à préſent $x=11+y$, nous avons $125+22y+yy$, ce qui étant égalé au cube de $5+py$, ou à $125+75py+15ppyy+p^3y^3$, donne $p=\frac{22}{75}$, & par-là $1=15pp+p^3y$, ou $p^3y=1-15pp=-\frac{109}{375}$; & par conſéquent $y=-\frac{122625}{10648}$, & $x=-\frac{5497}{10648}$.

Puiſque x peut également être négatif & poſitif, ſuppoſons $x=\frac{2+2y}{1-y}$, & notre formule deviendra $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, ce qui doit être un cube; multiplions donc les deux termes par $1-y$, afin que le dénominateur devienne un cube, & nous aurons $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, & ce ne ſera plus que

Digitized by Google

le numérateur $8-8y+8yy-8y^3$, ou, en diviſant par 8, que la formule $1-y+yy-y^3$ qu'il s'agira de transformer en un cube. Cette formule ſe rapportant à toutes les trois eſpeces, conformons-nous d'abord à la premiere, en prenant pour racine $1-\frac{1}{3}y$; le cube en eſt $1-y+\frac{1}{3}yy-\frac{1}{27}y^3$; ainſi nous avons $1-y=\frac{1}{3}-\frac{1}{27}y$, ou $27-27y=9-y$; donc $y=\frac{9}{13}$; donc $1+y=\frac{22}{13}$ & $1-y=\frac{4}{13}$; donc $x=11$, comme auparavant.

On trouveroit le même réſultat, en regardant la formule comme de la ſeconde eſpece.

Enfin, ſi on vouloit s'en tenir à la troiſieme & prendre pour racine $1-y$, dont le cube eſt $1-3y+3yy-y^3$, on auroit $-1+y=-3+3y$, & $y=1$; ainſi $x=\frac{1}{0}$, ou infini, & par conſéquent un réſultat qui n'eſt de nul uſage.

159.

Mais puiſque nous connoiſſons déjà les deux cas, $x=2$ & $x=11$, nous pouvons

Digitized by Google

aussi faire $x=\frac{2+11y}{1+y}$; car, moyennant cela, si $y=0$, on a $x=2$; & si $y=\infty$, on a $x=+11$.

Soit donc $x=\frac{2+11y}{1+y}$, & notre formule devient $4+\frac{4+44y+121yy}{1+2y+yy}$, ou $\frac{8+52y+125yy}{(1+y)^2}$; multiplions les deux termes par $1+y$, afin que le dénominateur devienne un cube, & ce sera le numérateur $8+60y+177yy+125y^3$ qu'il s'agira de transformer en un cube. Si pour cet effet nous supposions la racine $=2+5y$, nous verrions disparoître non-seulement les deux premiers termes, mais aussi les derniers. Ce sera donc à la seconde espece que nous rapporterons notre formule, en prenant pour racine $p+5y$; le cube en est $p^3+15ppy+75pyy+125y^3$; ainsi nous ferons $177=75p$, ou $p=\frac{59}{25}$, & il en résulte $8+60y=p^3+15ppy$, ou $-\frac{2943}{125}y=\frac{80379}{15623}$, & $y=\frac{80379}{367875}$, d'où l'on pourroit tirer une valeur de x.

Mais on peut supposer aussi $x=\frac{2+11y}{1-y}$, & dans ce cas notre formule devient

Digitized by Google

$4+\frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125yy}{(1-y)^2}$;
de sorte qu'en multipliant les deux termes par $1-y$, on a $8+28y+89yy-125y^3$ à transformer en un cube. Si donc nous supposons, conformément au premier cas, la racine $=2+\frac{7}{3}y$, dont le cube est $8+28y+\frac{98}{3}yy+\frac{343}{27}y^3$, nous avons $89-125y=\frac{98}{3}+\frac{343}{27}y$, ou $\frac{3718}{27}y=\frac{169}{3}$, & par conséquent $y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22}$; d'où l'on tire $x=11$, c'est-à-dire une des valeurs déjà connues.

Mais considérons plutôt notre formule relativement au troisieme cas, & supposons-en la racine $=2-5y$; le cube de ce binome étant $8-60y+150yy-125y^3$, nous aurons $28+89y=-60+150y$; donc $y=\frac{88}{61}$, d'où l'on tire $x=-\frac{1090}{27}$; de sorte que notre formule devient $=\frac{1191016}{729}$, ou égale au cube de $\frac{106}{9}$.

160.

Voilà donc les méthodes dont on est en possession quant à présent, pour réduire

Digitized by Google

des formules telles que celles que nous avons considérées, soit à un quarré, soit à un cube, pourvu que la plus haute puissance de l'inconnue ne passe pas le quatrieme degré dans le premier cas, ni le troisieme dans le second cas.

On pourroit ajouter encore la question de transformer une formule proposée en un quarré-quarré, dans le cas où l'inconnue ne passeroit pas le second degré. Mais on observera que si une formule, telle que $a+bx+cxx$, doit être un quarré-quarré, il faut premiérement qu'elle soit un quarré, après quoi il ne restera qu'à faire de la racine de ce quarré un nouveau quarré, par les regles que nous avons données pour cela. Que $xx+7$, par exemple, doive être un bi-quarré, on fera d'abord un quarré, en prenant $x=\frac{7pp-qq}{2pq}$, ou bien aussi $x=\frac{qq-7pp}{2pq}$; la formule alors devient égale au quarré $\frac{q^4-14qqpp+49p^4}{4ppqq}+7$ $=\frac{q^4+14qqpp+49p^4}{4ppqq}$, dont il faut transformer

former la racine $\frac{7pp+qq}{2pq}$ pareillement en un quarré ; qu'on multiplie dans ce deſſein les deux termes par $2pq$, afin que le dénominateur devenant un quarré, on n'ait à traiter que le numérateur $2pq(7pp+qq)$. On ne peut faire un quarré de cette formule, qu'après avoir déjà trouvé un cas ſatisfaiſant ; ainſi ſuppoſant $q=pz$, il faudra que la formule $2ppz(7pp+ppzz)=2p^4z(7+zz)$, & par conſéquent auſſi, en diviſant par p^4, que la formule $2z(7+zz)$ devienne un quarré. Le cas connu eſt ici $z=1$, c'eſt pourquoi on fera $z=1+y$, & on aura $(2+2y)(8+2y+yy)=16+20y+6yy+2y^3$, dont on ſuppoſera la racine $=4+\frac{5}{2}y$; le quarré $16+20y+\frac{25}{4}yy$ étant égalé à la formule, donne $6+2y=\frac{25}{4}$; donc $y=\frac{1}{8}$ & $z=\frac{9}{8}$. Or $z=\frac{q}{p}$; ainſi $q=9$ & $p=8$, ce qui rend $x=\frac{367}{144}$, & la formule $7+xx=\frac{279841}{20735}$. Si enfin on extrait la racine quarrée de cette fraction, on trouve $\frac{529}{144}$, & tirant encore de celle-ci la racine quarrée, on trouve $\frac{23}{12}$; donc c'eſt

Digitized by Google

de $\frac{23}{12}$ que la formule proposée est le quarré-quarré.

161.

Enfin nous avons à remarquer encore dans ce Chapitre, qu'il est des formules dont on peut faire des cubes d'une maniere tout-à-fait générale ; car si, par exemple, cxx doit être un cube, on n'a qu'à faire sa racine $=px$, & on trouve $cxx=p^3x^3$, ou $c=p^3x$, c'est-à-dire $x=\frac{c}{p^3}$, ou $x=cq^3$, en écrivant $\frac{1}{q}$ au lieu de p.

La raison en est évidemment que la formule contient un quarré ; c'est pourquoi toutes les formules, comme $a(b+cx)^2$, ou $abb+2abcx+ac^2xx$, peuvent très-facilement se transformer en cubes. En effet, qu'on en suppose la racine cubique $=\frac{b+cx}{q}$, on aura l'équation $a(b+cx)^2=\frac{(b+cx)^3}{q^3}$, qui, divisée par $(b+cx)^2$, donne $a=\frac{b+cx}{q^3}$; d'où l'on tire $x=\frac{aq^3-b}{c}$, valeur dans laquelle q est arbitraire.

Digitized by Google

Il eſt bien clair par-là combien il eſt utile de réſoudre les formules propoſées en leurs facteurs toutes les fois que cela eſt poſſible; & c'eſt donc une matiere de laquelle nous croyons, avec raiſon, devoir traiter au long dans le Chapitre ſuivant.

CHAPITRE XI.

De la Réſolution de la formule axx+bxy+cyy *en ſes facteurs.*

162.

Les lettres x & y ne ſignifieront ici que des nombres entiers; & nous avons vu ſuffiſamment dans ce qui a précédé, & même lorſqu'il falloit ſe contenter de réſultats fractionnaires, que la queſtion peut toujours être ramenée à des nombres entiers. En effet ſi, par exemple, le nombre cherché x eſt une fraction, on n'a qu'à faire $x=\frac{t}{u}$, & on pourra toujours aſſigner t & u en nombres entiers; & comme cette

Digitized by Google

fraction peut se réduire à ses moindres termes, on regardera les nombres t & u comme n'ayant aucun commun diviseur.

Supposons donc que dans la formule présente x & y ne soient que des nombres entiers, & tâchons de déterminer quelles valeurs on doit donner à ces lettres, pour que la formule obtienne deux ou plusieurs facteurs; c'est une recherche préliminaire très-nécessaire, avant que nous puissions faire voir comment cette formule se transforme en un quarré, un cube ou une puissance plus haute.

163.

Trois cas se présentent à considérer ici. Le premier, quand la formule se décompose réellement en deux facteurs rationnels, ce qui arrive, comme nous avons déjà vu plus haut, lorsque $bb - 4ac$ devient un quarré.

Le second cas est celui où ces deux facteurs sont égaux, & où par conséquent la formule est un quarré.

Digitized by Google

Le troiſieme cas a lieu, quand la formule n'a que des facteurs irrationnels, ſoit qu'ils ſoient ſimplement irrationnels, ſoit qu'ils ſoient même imaginaires. Ils ſeront ſimplement irrationnels, lorſque $bb-4ac$ ſera un nombre poſitif ſans être un quarré; ils ſeront imaginaires, ſi $bb-4ac$ eſt négatif.

164.

Si, pour commencer par le premier cas, nous ſuppoſons que la formule ſoit réſoluble en deux facteurs rationnels, on pourra lui donner cette forme $(fx+gy)(hx+ky)$, qui renferme donc naturellement déjà deux facteurs. Voudra-t-on enſuite qu'elle contienne d'une maniere générale un plus grand nombre de facteurs, on n'aura qu'à faire $fx+gy=pq$, & $hx+ky=rſ$; notre formule deviendra dans ce cas égale au produit $pqrſ$, elle contiendra par conſéquent quatre facteurs, & on pourra augmenter ce nombre à volonté. Or nous obtenons par ces deux équations-là pour x une double valeur, ſavoir $x=\frac{pa-gy}{f}$ & $x=\frac{rſ-ky}{h}$, ce qui

Digitized by Google

donne $hpq-hgy=frf-fky$, & par conséquent $y=\frac{frf-hpq}{fk-hg}$, & $x=\frac{kpq-grf}{fk-hg}$; or si l'on veut que x & y soient exprimés en nombres entiers, il faudra donner aux lettres p, q, r & f des valeurs telles que le numérateur soit réellement divisible par le dénominateur; ce qui arrive lorsque soit p & r, soit q & f sont divisibles par ce dénominateur.

165.

Pour rendre tout cela plus clair, soit donnée la formule $xx-yy$, qui est composée des facteurs $(x+y)(x-y)$. Si cette formule doit être résolue en un plus grand nombre de facteurs, on fera $x+y=pq$, & $x-y=rf$, & on aura $x=\frac{pq+rf}{2}$, & $y=\frac{pq-rf}{2}$; or il faudra donc pour que ces valeurs deviennent des nombres entiers, que les deux nombres pq & rf soient ou tous deux pairs ou tous deux impairs.

Soit, par exemple, $p=7$, $q=5$, $r=3$ & $f=1$, on aura $pq=35$ & $rf=3$; donc $x=19$ & $y=16$; & de-là résulte $xx-yy$

Digitized by Google

$=105$, lequel nombre eſt compoſé en effet des facteurs 7.5.3.1, de ſorte que ce cas ne ſouffre aucune difficulté.

166.

Le ſecond en ſouffre encore moins, ſavoir celui où la formule renfermant deux facteurs égaux, peut ſe repréſenter de cette maniere, $(fx+gy)^2$, c'eſt-à-dire par un quarré, qui ne peut avoir d'autres facteurs que ceux qui proviennent de la racine $fx+gy$; car ſi l'on fait $fx+gy=pqr$, la formule devient $=ppqqrr$, & peut avoir par conſéquent autant de facteurs que l'on veut. Il faut remarquer de plus que l'un ſeulement des deux nombres x & y eſt déterminé, & que l'autre peut ſe prendre à volonté; car $x=\frac{pqr-gy}{f}$, & il eſt facile de donner à y une valeur telle que la fraction diſparoiſſe.

La formule de cette eſpece la plus aiſée à traiter, eſt xx; ſi l'on fait $x=pqr$, le quarré xx renfermera trois facteurs quarrés, ſavoir pp, qq & rr.

Digitized by Google

167.

On rencontre bien plus de difficultés en traitant le troiſieme cas, qui eſt celui dans lequel notre formule ne peut ſe décompoſer en deux facteurs rationnels; & il faut ici des artifices particuliers, afin de trouver pour x & y des valeurs telles que la formule renferme deux ou pluſieurs facteurs.

Nous rendrons cependant cette recherche moins difficile, en obſervant que notre formule ſe transforme facilement en une autre, dans laquelle le terme moyen manque; car en effet on n'a qu'à ſuppoſer $x = \frac{z-by}{2a}$, pour avoir la formule ſuivante: $\frac{zz-2byz+bbyy}{4a} + \frac{byz-bbyy}{2a} + cyy = zz + \frac{(4ac-bb)yy}{4a}$. Ainſi nous omettrons auſſi-tôt le terme moyen, nous conſidérerons la formule $axx+cyy$, & nous chercherons quelles valeurs on doit donner à x & à y, pour que cette formule ſe décompoſe en facteurs. On jugera facilement que cela dépend de la nature des nombres a & c; auſſi com-

Digitized by Google

mencerons-nous par quelques formules déterminées de cette espece.

168.

Soit donc proposée d'abord la formule $xx+yy$, qui comprend tous les nombres qui sont la somme de deux quarrés, & dont nous allons mettre les plus petits sous les yeux; savoir ceux qui sont compris entre 1 & 50:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50.

On voit qu'il se trouve parmi ces nombres quelques nombres premiers qui n'ont point de diviseurs; ce sont ceux-ci: 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41. Les autres ont des diviseurs, & ils rendent plus claire la question: Quelles valeurs on doit adopter pour x & y, afin que la formule $xx+yy$ ait des diviseurs ou des facteurs, & qu'elle ait même autant de ces facteurs que l'on voudra? Nous remarquerons de plus qu'on peut faire abstraction des cas où x & y ont un

Digitized by Google

commun diviſeur, parce qu'alors $xx+yy$ ſeroit diviſible par le même diviſeur, & même par ſon quarré : par exemple, ſi $x=7p$ & $y=7q$, la ſomme des quarrés, ou $49pp+49qq=49(pp+qq)$, ſera diviſible non-ſeulement par 7, mais auſſi par 49. C'eſt pourquoi nous n'étendrons la queſtion qu'à des formules où x & y n'ont aucun commun diviſeur.

On voit facilement à préſent en quoi gît la difficulté ; car ſi d'un côté il eſt clair que, lorſque les deux nombres x & y ſont impairs, la formule $xx+yy$ devient un nombre pair, & par conſéquent diviſible par 2, il eſt ſouvent d'autant moins aiſé de ſavoir ſi la formule a des diviſeurs ou ſi elle n'en a pas, lorſque de l'autre côté un des nombres x & y étant pair & l'autre impair, la formule elle-même devient impaire. Nous ne parlons pas du cas où x & y ſeroient pairs, parce que nous avons déjà fait ſentir que ces nombres ne doivent point avoir de commun diviſeur.

Digitized by Google

169.

Que les deux nombres x & y ſoient donc premiers entr'eux, & que cependant la formule $xx+yy$ doive contenir deux ou pluſieurs facteurs. La méthode précédente ne peut s'appliquer ici, parce que la formule n'eſt pas réſoluble en deux facteurs rationnels; mais les facteurs irrationnels qui compoſent la formule, & qu'on peut repréſenter par le produit $(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})$, nous rendront le même ſervice. En effet, on ſent bien que ſi la formule $xx+yy$ a des facteurs réels, il faut que ces facteurs irrationnels ſoient compoſés d'autres facteurs; parce que s'ils n'avoient pas auſſi des diviſeurs, leur produit ne pourroit pas non plus en avoir. Or comme ces facteurs ſont irrationnels, & même imaginaires, & que de plus les nombres x & y ne doivent point avoir de commun diviſeur, ils ne peuvent renfermer des facteurs rationnels, & il faut qu'ils ſoient pareillement irrationnels, & même imaginaires.

Digitized by Google

170.

Si l'on veut donc que la formule $xx+yy$ ait deux facteurs rationnels, il faudra décomposer chacun des deux facteurs irrationnels en deux autres facteurs; c'est pourquoi, supposons d'abord $x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+s\sqrt{-1})$; & puisque $\sqrt{-1}$ peut se prendre aussi bien en *moins* qu'en *plus*, nous aurons en même temps $x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1})$; prenons maintenant le produit de ces deux quantités, & nous verrons que notre formule $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$, c'est-à-dire qu'elle contient les deux facteurs rationnels $pp+qq$ & $rr+ss$.

Il nous reste à présent à déterminer les valeurs de x & de y, qui doivent de même être rationnelles; or la supposition que nous avons faite, donne $x+y\sqrt{-1}=pr-qs+ps\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1}$, & $x-y\sqrt{-1}=pr-qs-qr\sqrt{-1}-ps\sqrt{-1}$; si nous ajoutons ces formules, nous avons $x=pr-qs$; si nous les soustrayons l'une de l'autre, nous

Digitized by Google

trouvons $2y\sqrt{-1} = 2pf\sqrt{-1} + 2qr\sqrt{-1}$, ou $y = pf + qr$.

Il s'enſuit par conſéquent de-là, qu'en faiſant $x = pr - qf$ & $y = pf + qr$, notre formule $xx + yy$ ne peut manquer d'obtenir deux facteurs, puiſqu'on trouve $xx + yy = (pp + qq)(rr + ff)$. Que ſi l'on demandoit après cela un plus grand nombre de facteurs, on n'auroit qu'à donner de la même maniere à p & à q des valeurs telles que $pp + qq$ eût deux facteurs; on auroit alors trois facteurs en tout, & ce nombre pourroit être augmenté par la méthode autant qu'on voudroit.

171.

Comme nous n'avons rencontré dans cette ſolution que les ſecondes puiſſances de p, q, r & f, on peut prendre auſſi ces lettres en *moins*; que q, par exemple, ſoit négatif, on aura $x = pr + qf$ & $y = pf - qr$; mais la ſomme des quarrés ſera la même qu'auparavant, ce qui nous fait voir que quand un nombre eſt égal à un produit tel

Digitized by Google

que $(pp+qq)(rr+ss)$, on peut de deux façons le décomposer en deux quarrés; car nous avons trouvé d'abord $x=pr-qs$ & $y=ps+qr$, & après cela aussi $x=pr+qs$ & $y=ps-qr$.

Soit, par exemple, $p=3$, $q=2$, $r=2$ & $s=1$, on aura le produit $13.5=65=xx+yy$, où $x=4$ & $y=7$, comme $x=8$ & $y=1$; puisque dans l'un & l'autre cas $xx+yy=65$. Si l'on multiplie plusieurs nombres de cette espece, on aura aussi un produit qui pourra être d'un plus grand nombre de façons la somme de deux quarrés. Qu'on multiplie, par exemple, $2^2+1^2=5$, $3^2+2^2=13$, & $4^2+1^2=17$, on trouvera 1105, lequel nombre peut se décomposer en deux quarrés de quatre manieres, comme on va voir:

I.) 33^2+4^2, II.) 32^2+9^2, III.) 31^2+12^2, IV.) 24^2+23^2.

172.

Parmi les nombres qui sont contenus dans la formule $xx+yy$, se trouvent donc

Digitized by Google

premiérement ceux qui ſont, par la multiplication, le produit de deux ou de pluſieurs nombres; en ſecond lieu ceux qui ſont formés différemment. Nous nommerons ces derniers *facteurs ſimples* de la formule $xx+yy$, & les premiers *facteurs compoſés*. D'après cela les facteurs ſimples ſeront des nombres tels que les ſuivans:

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49, &c.

& on diſtinguera dans cette ſuite deux eſpeces de nombres; les uns ſont les nombres premiers, 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, qui n'ont aucun diviſeur, & qui tous, excepté le nombre 2, ſont tels que ſi l'on en ôte 1, le reſte ſe trouve diviſible par 4; de ſorte que tous ces nombres ſont contenus dans l'expreſſion $4n+1$. La ſeconde eſpece comprend les nombres quarrés 9, 49, &c. & on remarquera que les racines de ces quarrés, ſavoir 3, 7, &c. ne ſe trouvent pas dans la ſuite, & que ces racines ſont contenues dans la formule $4n-1$. Il eſt clair d'ailleurs qu'aucun nombre de la forme $4n-1$ ne peut être la ſomme de

Digitized by Google

deux quarrés ; car puiſque ces nombres ſont impairs, il faudroit que l'un des deux quarrés fût pair & que l'autre fût impair ; or nous avons vu plus haut que tous les quarrés pairs ſont diviſibles par 4, & que les quarrés impairs ſont contenus dans l'expreſſion $4n+1$; ſi donc on ajoute un quarré pair & un quarré impair, la ſomme aura toujours la forme de $4n+1$, & jamais de $4n-1$. Que tout nombre premier au reſte qui appartient à la formule $4n+1$, eſt la ſomme de deux quarrés ; c'eſt une vérité indubitable, mais qui n'eſt pas tant aiſée à démontrer.

173.

Allons plus loin, & conſidérons la formule $xx+2yy$, dans le deſſein de voir quelles valeurs il faut donner à x & à y, afin qu'elle ait des facteurs. Comme cette formule s'exprime par les facteurs imaginaires $(x+y\sqrt{-2})(x-y\sqrt{-2})$, on voit, ainſi qu'auparavant, que ſi elle a des diviſeurs, ces facteurs imaginaires doivent pareillement

Digitized by Google

pareillement en avoir. Qu'on ſuppoſe donc $x+y\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})(r+s\sqrt{-2})$, d'où s'enſuit de ſoi-même $x-y\sqrt{-2}=(p-q\sqrt{-2})(r-s\sqrt{-2})$, & on aura $xx+2yy=(pp+2qq)(rr+2ss)$; ainſi cette formule a deux facteurs, deſquels l'un & l'autre ont la même forme. Mais il reſte à déterminer les valeurs de x & de y, qui produiſent cette transformation; on conſidérera, pour y parvenir, que, puiſque $x+y\sqrt{-2}=pr-2qs+qr\sqrt{-2}+ps\sqrt{-2}$, & que $x-y\sqrt{-2}=pr-2qs-qr\sqrt{-2}-ps\sqrt{-2}$, on a la ſomme $2x=2pr-4qs$, & par conſéquent $x=pr-2qs$, & qu'on a de plus la différence $2y\sqrt{-2}=2qr\sqrt{-2}+2ps\sqrt{-2}$; de ſorte que $y=qr+ps$. Lors donc que notre formule $xx+2yy$ doit avoir des facteurs, ils ſeront toujours des nombres de la même eſpece que la formule, c'eſt-à-dire que l'un aura la forme $pp+2qq$, & l'autre la forme $rr+2ss$; & afin que ce cas ait lieu, x & y pourront encore ſe déterminer de deux manieres différentes, à cauſe que q

Digitized by Google

peut être également négatif & positif; car on aura d'abord $x = pr - 2qs$, & $y = ps + qr$, & en second lieu $x = pr + 2qs$ & $y = ps - qr$.

174.

Cette formule $xx + 2yy$ renferme donc tous les nombres qui résultent de l'addition d'un quarré & du double d'un autre quarré; & voici l'énumération de ces nombres poussée jusqu'au nombre 50:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 49, 50.

Nous diviserons, comme auparavant, ces nombres en simples & composés; les simples, ou ceux qui ne sont pas composés des nombres précédens, sont ceux-ci: 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49, qui tous, excepté les quarrés 25 & 49, sont des nombres premiers; & il faut remarquer qu'en général, si un nombre est premier & ne se trouve pas dans cette suite, on est sûr d'y rencontrer son quarré. On

Digitized by Google

peut obſerver auſſi que tous les nombres premiers qui ſont contenus dans notre formule, appartiennent tous ſoit à l'expreſſion $8n+1$, ſoit à $8n+3$, tandis que tous les autres nombres premiers, ſavoir ceux qui ſont compris dans les formules $8n+5$ & $8n+7$, ne peuvent jamais former la ſomme d'un quarré & d'un double quarré; il eſt de plus très-certain que tous les nombres premiers qui ſont contenus dans une des autres formules, $8n+1$ & $8n+3$, ſont toujours réſolubles en un quarré joint au double d'un quarré.

175.

Paſſons à l'examen de la formule générale $xx+cyy$, & voyons moyennant quelles valeurs de x & de y on peut la transformer en un produit de facteurs.

Nous procéderons comme ci-deſſus; nous repréſenterons la formule par le produit $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, & nous exprimerons pareillement chacun de ces facteurs par deux facteurs de la même

Digitized by Google

eſpece; c'eſt-à-dire que nous ferons $x+y\sqrt{-c}=(p+qr\sqrt{-c})(r+f\sqrt{-c})$ & $x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})(r-f\sqrt{-c})$; de-là réſulte $xx+cyy=(pp+cqq)(rr+cff)$, & l'on voit donc que de nouveau les facteurs ſont de la même eſpece que la formule. Quant aux valeurs de x & de y, on trouvera de même facilement $x=pr+cqf$ & $y=qr+pf$, ou bien auſſi $x=pr-cqf$, & $y=pf-qr$, & il eſt aiſé d'imaginer comment la formule peut ſe réſoudre en un plus grand nombre de facteurs.

176.

Il ſera facile maintenant de procurer auſſi des facteurs à la formule $xx-cyy$; car d'abord on n'a qu'à écrire $-c$ au lieu de $+c$; mais de plus on peut les trouver immédiatement de la maniere ſuivante: comme notre formule équivaut au produit $(x+y\sqrt{c})(x-y\sqrt{c})$, qu'on faſſe $x+y\sqrt{c}=(p+q\sqrt{c})(r+f\sqrt{c})$, & $x-y\sqrt{c}=(p-q\sqrt{c})(r-f\sqrt{c})$, & on aura ſur le champ $xx-cyy=(pp-cqq)(rr-cff)$;

Digitized by Google

en ſorte que cette formule eſt, de même que les précédentes, égale à un produit dont les facteurs lui reſſemblent par la forme. Pour ce qui regarde les valeurs de x & de y, elles ſe trouveront pareillement être doubles; cela veut dire qu'on aura $x=pr+cqſ$ & $y=qr+pſ$, & qu'on aura auſſi $x=pr-cqſ$ & $y=pſ-qr$. Que ſi on vouloit faire la preuve & voir ſi on obtiendroit par-là le produit qu'on a trouvé, on auroit, en eſſayant les premieres valeurs, $xx=pprr+2cpqrſ+ccqqſſ$, & $yy=ppſſ+2pqrſ+qqrr$, ou $cyy=cppſſ+2cpqrſ+cqqrr$; de ſorte que $xx-cyy=pprr-cppſſ+ccqqſſ-cqqrr$, ce qui n'eſt autre choſe que le produit trouvé, $(pp-cqq)(rr-cſſ)$.

177.

Juſqu'à préſent nous avons conſidéré le premier terme ſans coefficient; mais nous allons ſuppoſer à préſent que ce terme ſoit pareillement multiplié par une autre lettre, & nous chercherons quels facteurs la formule $axx+cyy$ peut obtenir.

Digitized by Google

Il eſt évident ici que notre formule eſt égale au produit $(x\sqrt{a}+y\sqrt{-c})(x\sqrt{a}-y\sqrt{-c})$, & il s'agit par conſéquent de donner de même des facteurs à ces deux facteurs. Or il ſe préſente en ce point une difficulté; car ſi l'on vouloit, d'après la méthode précédente, faire $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}+f\sqrt{-c})=apr-cqf+pf\sqrt{-ac}+qr\sqrt{-ac}$, & $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}-f\sqrt{-c})=apr-cqf-pf\sqrt{-ac}-qr\sqrt{-ac}$, on auroit $2x\sqrt{a}=2apr-2cqf$, & $2y\sqrt{-c}=2pf\sqrt{-ac}+2qr\sqrt{-ac}$; c'eſt-à-dire qu'on trouveroit tant pour x que pour y des valeurs irrationnelles, leſquelles ne peuvent être admiſes ici.

178.

Mais cette difficulté peut ſe lever, & voici comment: Qu'on faſſe $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r+f\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqf\sqrt{a}+qr\sqrt{-c}+apf\sqrt{-c}$, & $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r-f\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqf\sqrt{a}-qr\sqrt{-c}-apf\sqrt{-c}$;

Digitized by Google

cette ſuppoſition donnera pour x & y les valeurs rationnelles ſuivantes; $x=pr-cqf$ & $y=qr+apf$; & notre formule, $axx+cyy$, aura les facteurs $(app+cqq)(rr+acff)$, dont l'un ſeulement eſt de la même eſpece que la formule, l'autre ayant une forme différente.

179.

Il ne laiſſe pas cependant d'y avoir une grande affinité entre ces deux formules, vu que tous les nombres qui ſont contenus dans la premiere formule, ſi on les multiplie par un nombre compris dans la ſeconde, retombent dans la premiere. Nous avons auſſi déjà vu que deux nombres de la ſeconde forme $xx+acyy$, laquelle revient à la formule $xx+cyy$ que nous avons conſidérée, étant multipliés l'un par l'autre, redonnent un nombre de la même forme.

Il ne nous reſte donc qu'à examiner à quelle formule appartient le produit de deux nombres de la premiere eſpece, ou de la forme $axx+cyy$.

Digitized by Google

Multiplions, dans cette vue, les deux formules $(app+cqq)(arr+cff)$, qui ſont de la premiere eſpece; il eſt aiſé à voir que ce produit pourra être repréſenté de cette maniere: $(apr+cqf)^2+ac(pf-qr)^2$. Si donc nous ſuppoſons ici $apr+cqf=x$, & $pf-qr=y$, nous aurons la formule $xx+acyy$, qui eſt de la derniere eſpece. Il s'enſuit de-là que deux nombres de la premiere eſpece $axx+cyy$, étant multipliés l'un par l'autre, le produit eſt un nombre de la ſeconde eſpece. Si nous indiquons les nombres de la premiere eſpece par I, & ceux de la ſeconde par II, nous pouvons indiquer de la maniere abrégée qui ſuit les concluſions auxquelles nous venons d'arriver:

I.I donne II; I.II donne I; II.II donne II.

Et on voit par-là d'autant mieux ce qui doit en réſulter, ſi on multiplie plus de deux de ces nombres; ſavoir que

I.I.I fait I; que I.I.II fait II; que I.II.II fait I.

Enfin que II.II.II fait II.

Digitized by Google

180.

Soit, pour éclaircir l'article précédent, $a=2$ & $c=3$, il en réſultera deux eſpeces de nombres, l'une contenue dans la formule $2xx+3yy$, l'autre compriſe dans la formule $xx+6yy$. Or les nombres de la premiere pouſſés juſqu'à 50, ſont

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

Et les nombres de la ſeconde eſpece, pouſſés de même juſqu'au nombre 50, ſont

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Si donc nous multiplions maintenant un nombre de la premiere eſpece, par exemple 35, par un nombre de la ſeconde, ſuppoſons par 31, le produit 1085 ſera ſurement compris dans la formule $2xx+3yy$; ou bien on peut trouver pour y un nombre tel que $1085-3yy$ ſoit le double d'un quarré, ou $=2xx$; or cela arrive d'abord quand $y=3$, dans lequel cas $x=23$; en

Digitized by Google

ſecond lieu, quand $y=11$, en ſorte que $x=19$; en troiſieme lieu, lorſque $y=13$, ce qui donne $x=17$; & enfin, en quatrieme lieu, quand $y=19$, d'où réſulte $x=1$.

On peut partager ces deux eſpeces de nombres, comme les autres, en nombres ſimples & en nombres compoſés; on donnera ce dernier nom à ceux qui ſont compoſés de deux ou de pluſieurs des nombres plus petits de l'une ou de l'autre eſpece; ainſi les nombres ſimples de la premiere eſpece ſeront ceux-ci: 2, 3, 5, 11, 29, & les nombres compoſés de la même eſpece, ſeront 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50, &c.

Les nombres ſimples de la ſeconde eſpece ſeront 1, 7, 31, & tous les autres de cette eſpece ſeront des nombres compoſés, ſavoir 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

Digitized by Google

CHAPITRE XII.

De la Transformation de la formule axx $+$cyy *en des quarrés & en des puiſſances plus élevées.*

181.

Nous avons déjà vu plus haut qu'il eſt ſouvent impoſſible de réduire à des quarrés des nombres de la forme $axx+cyy$; mais toutes les fois que cela eſt poſſible, on peut transformer cette formule en une autre, dans laquelle $a=1$.

Par exemple, la formule $2pp-qq$ peut devenir un quarré, & comme elle peut auſſi ſe repréſenter par $(2p+q)^2-2(p+q)^2$, on n'a qu'à faire $2p+q=x$ & $p+q=y$, & on parvient à la formule $xx-2yy$, dans laquelle $a=1$ & $c=2$. C'eſt une ſemblable transformation qui a lieu toutes les fois que de telles formules peuvent devenir des quarrés. Ainſi quand il s'agit de transformer la formule $axx+cyy$ en un

Digitized by Google

quarré, ou, en une puiſſance plus haute, mais paire, on peut, ſans balancer, ſuppoſer $a=1$, & regarder les autres cas comme impoſſibles.

182.

Soit donc propoſée la formule $xx+cyy$, & qu'il s'agiſſe d'en faire un quarré. Comme elle eſt compoſée des facteurs $(x+y\sqrt{-c})$ $(x-y\sqrt{-c})$, il faut que ces facteurs ſoient ou des quarrés ou des quarrés multipliés par un même nombre. Car ſi le produit de deux nombres, par exemple, pq, doit être un quarré, il faut que $p=rr$ & $q=ſſ$; c'eſt-à-dire que chaque facteur ſoit de ſoi-même un quarré, ou bien que $p=mrr$ & $q=mſſ$, & qu'ainſi ces facteurs ſoient des quarrés multipliés l'un & l'autre par un même nombre. C'eſt pourquoi nous ferons $x+y\sqrt{-c}=m(p+q\sqrt{-1})^2$; il s'enſuivra $x-y\sqrt{-c}=m(p-q\sqrt{-c})^2$, & nous aurons $xx+cyy=mm(pp+cqq)^2$, ce qui eſt un quarré. Nous avons de plus, pour déterminer x & y, les équations $x+y\sqrt{-c}$

Digitized by Google

$=mpp+2mpq\sqrt{-c}-mcqq$, & $x-y\sqrt{-c}=mpp-2mpq\sqrt{-c}-mcqq$, dans lesquelles naturellement x équivaut à la partie rationnelle, & $y\sqrt{-c}$ à la partie irrationnelle; ainsi $x=mpp-mcqq$, & $y\sqrt{-c}=2mpq\sqrt{-c}$, ou $y=2mpq$, & ce sont ces valeurs de x & de y qui transforment l'expression $xx+cyy$ en un quarré $mm(pp+cqq)^2$, dont la racine est $mpp+mcqq$.

183.

Si les nombres x & y ne doivent point avoir de diviseur commun, il faut supposer $m=1$. Alors, pour faire que $xx+cyy$ devienne un quarré, on se contente de prendre $x=pp-cqq$ & $y=2pq$, ce qui rend la formule égale au quarré $pp+cqq$.

On peut aussi, au lieu de faire $x=pp-cqq$, supposer $x=cqq-pp$, vu que le quarré xx ne laisse pas d'être le même.

Les mêmes formules, au reste, ayant été trouvées plus haut par des voies tout-à-fait différentes, il ne peut y avoir de

Digitized by Google

doute sur la justesse de la méthode que nous venons d'employer. En effet, si on veut que $xx+cyy$ devienne un quarré, par la méthode précédente on suppose la racine $=x+\frac{py}{q}$, & on trouve $xx+cyy=xx+\frac{2pxy}{q}+\frac{ppyy}{qq}$; on efface les xx, on divise les autres termes par y, on multiplie par qq, & on a $cqqy=2pqx+ppy$, ou $cqqy-ppy=2pqx$; divisant enfin par $2pq$ & par y, il en résulte $\frac{x}{y}=\frac{cqq-pp}{2pq}$. Or x & y devant, ainsi que p & q, n'avoir point de diviseur commun, il faut égaler x au numérateur & y au dénominateur, & on obtient par-là les mêmes résultats que nous venons de trouver, savoir $x=cqq-pp$, & $y=2pq$.

184.

Cette solution est bonne, que le nombre c soit positif ou qu'il soit négatif; mais si de plus ce nombre a lui-même des facteurs, comme si c'étoit, par exemple, la formule $xx+acyy$ qui dût devenir un quarré, on auroit non-seulement la solu-

Digitized by Google

tion précédente, qui donne $x=acqq-pp$ & $y=2pq$, mais encore cette autre, $x=cqq-app$ & $y=2pq$; car dans ce dernier cas on a, de même que dans l'autre, $xx+acyy=ccq^4+2acppqq+aap^4=(cqq+app)^2$; ce qui a lieu auſſi, quand on prend $x=app-cqq$, parce que le quarré xx reſte le même.

Cette nouvelle ſolution ſe trouve auſſi par la derniere méthode, de la façon ſuivante.

Qu'on faſſe $x+y\sqrt{-ac}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^2$, & $x-y\sqrt{-ac}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^2$, on aura $xx+acyy=(app+cqq)^2$, & par conſéquent $=\square$; de plus, à cauſe de $x+y\sqrt{-ac}=app+2pq\sqrt{-ac}-cqq$, & de $x-y\sqrt{-ac}=app-2pq\sqrt{-ac}-cqq$, on trouve $x=app-cqq$ & $y=2pq$.

Il eſt clair auſſi que ſi le nombre ac eſt réſoluble en deux facteurs d'un plus grand nombre de manieres, on pourra trouver auſſi un plus grand nombre de ſolutions.

Digitized by Google

185.

Eclairciſſons tout cela au moyen de quelques formules déterminées ; & d'abord, ſi c'eſt la formule $xx+yy$ qui doit devenir un quarré, nous avons $ac=1$; ainſi $x=pp-qq$, & $y=2pq$, d'où s'enſuit $xx+yy=(pp+qq)^2$.

Si on veut que $xx-yy=\square$; on a $ac=-1$; ainſi on prendra $x=pp+qq$ & $y=2pq$, & il en réſultera $xx-yy=(pp-qq)^2$.

Veut-on que la formule $xx+2yy=\square$, on a $ac=2$; qu'on prenne donc $x=pp-2qq$, ou $x=2pp-qq$ & $y=2pq$, & on aura $xx+2yy=(pp+2qq)^2$, ou $xx+2yy=(2pp+qq)^2$.

Si, en quatrieme lieu, on veut que $xx-2yy=\square$, où $ac=-2$, on aura $x=pp+2qq$ & $y=2pq$; donc $xx-2yy=(pp-2qq)^2$.

Qu'on veuille enfin que $x+6yy=\square$, on aura $ac=6$, & par conſéquent ou $a=1$ & $c=6$, ou $a=2$ & $c=3$; dans le premier cas

Digitized by Google

cas $x=pp-6qq$, & $y=2pq$; de sorte que $xx+6yy=(pp+6qq)^2$; dans le second cas $x=2pp-3qq$, & $y=2pq$; d'où résulte $xx+6yy=(2pp+3qq)^2$.

186.

Mais si c'est maintenant la formule $axx+cyy$ qu'on doit transformer en un quarré; comme nous avons prévenu que cela ne peut se faire que quand on connoît déjà un cas dans lequel cette formule devient réellement un quarré, nous supposerons que ce cas donné ait lieu, quand $x=f$ & $y=g$; de sorte qu'alors $aff+cgg=hh$; & nous remarquerons que cette formule peut se transformer en une autre de la forme $tt+acuu$, si l'on fait $t=\frac{afx+cgy}{h}$ & $u=\frac{gx-fy}{h}$; car en effet, si $tt=\frac{aaffxx+2acfgxy+ccggyy}{hh}$, & que $uu=\frac{ggxx-2fgxy+ffyy}{hh}$, on a $tt+acuu=\frac{aaffxx+ccggyy+acggxx+acffyy}{hh}=\frac{axx(aff+cgg)+cyy(aff+cgg)}{hh}$; ainsi, puisque $aff+cgg=hh$, on a $tt+acuu=axx+cyy$; or nous avons donné des regles faciles pour transformer en un quarré

Digitized by Google

l'expreſſion $tt+acuu$, à laquelle nous venons de réduire la formule propoſée $axx+cyy$.

187.

Allons à préſent plus loin, & voyons comment la formule $axx+cyy$, dans laquelle x & y ſont ſuppoſés n'avoir aucun diviſeur commun, peut ſe réduire à un cube. Les regles données plus haut ne ſuffiſent aucunement pour cela, au lieu que la méthode que nous avons indiquée en dernier lieu s'applique ici avec le plus grand ſuccès; & ce qui eſt ſur-tout digne de remarque, c'eſt que la formule peut toujours être transformée en un cube, quelques nombres que ſoient a & c; ce qui n'avoit point lieu pour les quarrés, à moins qu'on n'eût déjà un cas connu, & ce qui n'a de même point lieu pour aucune des autres puiſſances paires; la ſolution au contraire eſt toujours poſſible pour les puiſſances impaires, telles que la troiſieme, la cinquieme, la ſeptieme, &c.

Digitized by Google

188.

Lors donc qu'il s'agira de réduire en cube la formule $axx+cyy$, on ſuppoſera d'une maniere analogue à celle qu'on a employée $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^3$, & $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^3$; le produit $(app+cqq)^3$, qui eſt un cube, ſera égal à la formule $axx+cyy$. Mais on cherche auſſi à déterminer pour x & y des valeurs rationnelles, & heureuſement on y réuſſit. En effet, ſi l'on prend réellement les deux cubes indiqués, on a les deux équations $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a}+3appq\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a}-cq^3\sqrt{-c}$, & $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a}-3appq\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a}+cq^3\sqrt{-c}$, deſquelles il ſuit évidemment que $x=ap^3-3cpqq$, & $y=3appq-cq^3$.

Qu'on cherche, par exemple, deux quarrés xx & yy, dont la ſomme $xx+yy$ faſſe un cube. Puiſqu'ici $a=1$ & $c=1$, on aura $x=p^3-3pqq$, & $y=3ppq-q^3$, ce qui donne $xx+yy=(pp+qq)^3$. Main-

Digitized by Google

tenant si $p=2$ & $q=1$, on trouve $x=2$ & $y=11$; donc $xx+yy=125=5^3$.

189.

Considérons aussi la formule $xx+3yy$ dans le dessein de la faire égale à un cube: comme nous avons pour cet effet $a=1$ & $c=3$, nous trouvons $x=p^3-9pqq$, & $y=3ppq-3q^3$, d'où résulte $xx+3yy=(pp+3qq)^3$. Cette formule se présente assez souvent: c'est une raison pour en donner ici du moins les cas les plus faciles.

p	q	x	y	$xx+3yy$
1	1	8	0	$64=4^3$
2	1	10	9	$343=7^3$
1	2	35	18	$2197=13^3$
3	1	0	24	$1728=12^3$
1	3	80	72	$21952=28^3$
3	2	81	30	$9261=21^3$
2	3	154	45	$29791=31^3$

190.

Sans la condition que les deux nombres x & y ne doivent point avoir de commun

Digitized by Google

diviſeur, la queſtion ne ſeroit ſujette à aucune difficulté; car ſi $axx+cyy$ devoit être un cube, on n'auroit qu'à faire $x=tz$ & $y=uz$, & la formule deviendroit $attz+cuuzz$; on l'égaleroit au cube $\frac{z^3}{v^3}$, & on trouveroit auſſi-tôt $z=v^3(att+cuu)$; par conſéquent les valeurs cherchées de x & de y ſeroient $x=tv^3(att+cuu)$, & $y=uv^3(att+cuu)$, leſquelles ont, outre le cube v^3, auſſi la quantité $att+cuu$ pour commun diviſeur; de ſorte donc que cette ſolution donne ſur le champ $axx+cyy=v^6(att+cuu)^2(att+cuu)=v^6(att+cuu)^3$, ce qui eſt évidemment le cube de $v^2(att+cuu)$.

191.

La méthode dont nous avons fait uſage en dernier lieu, eſt d'autant plus remarquable, que c'eſt par le moyen de quantités irrationnelles & même imaginaires, que nous ſommes parvenus à des ſolutions qui demandoient abſolument des nombres rationnels & même entiers. Mais ce qui eſt

Digitized by Google

encore plus digne d'attention, c'eſt que dans les cas où l'irrationnalité s'évanouit, notre méthode ne peut plus avoir lieu. En effet lorſque, par exemple, la formule $xx + cyy$ doit être un cube, on ne peut qu'en inférer que ſes deux facteurs irrationnels, $x + y\sqrt{-c}$ & $x - y\sqrt{-c}$, doivent pareillement être des cubes, vu que x & y n'ayant point de diviſeur commun, ces facteurs ne peuvent pas non plus en avoir. Mais ſi les radicaux diſparoiſſoient, comme, par exemple, dans le cas de $c = -1$, ce principe n'auroit plus lieu; parce qu'il ſe pourroit très-bien que les deux facteurs, qui ſeroient alors $x + y$ & $x - y$, euſſent des diviſeurs communs, quand même x & y n'en auroient pas; ce qui arriveroit, par exemple, ſi ces deux lettres exprimoient des nombres impairs.

Ainſi, lorſque $xx - yy$ doit devenir un cube, il n'eſt pas néceſſaire que tant $x + y$ que $x - y$ ſoient d'eux-mêmes des cubes; mais on pourra ſuppoſer $x + y = 2p^3$, & $x - y = 4q^3$; & la formule $xx - yy$ ne

Digitized by Google

laiſſera pas de devenir un cube inconteſtablement, puiſqu'on la trouvera $=8p^3q^3$, dont la racine cubique eſt $2pq$. On aura de plus $x=p^3+2q^3$, & $y=p^3-2q^3$. Lorſqu'au contraire la formule $axx+cyy$ n'eſt pas réſoluble en deux facteurs rationnels, on ne pourra trouver d'autres ſolutions que celles qui ont été données.

192.

Nous éclaircirons les recherches qui précedent par quelques queſtions curieuſes.

Queſtion premiere. On demande un quarré xx en nombres entiers, & tel qu'en y ajoutant 4, la ſomme ſoit un cube; le cas a lieu pour $xx=121$, mais on veut ſavoir s'il y a d'autres cas ſemblables?

Comme 4 eſt un quarré, on cherchera d'abord les cas où $xx+yy$ devient un cube; or nous en avons trouvé un qui a lieu, ſi $x=p^3-3pqq$, & $y=3ppq-q^3$. Puis donc que $yy=4$, on a $y=\pm 2$, & par conſéquent ou $3ppq-q^3=+2$, ou $3ppq-q^3=-2$: dans le premier cas on a donc

Digitized by Google

$q(3pp-qq)=2$; ainſi q eſt un diviſeur de 2.

Cela poſé, ſuppoſons premiérement $q=1$, nous aurons $3pp-1=2$; donc $p=1$, d'où ſe dérivent $x=2$ & $xx=4$.

Si nous ſuppoſons en ſecond lieu $q=2$, nous avons $6pp-8=\pm 2$; que ſi nous admettons le ſigne $+$, nous trouvons $6pp=10$ & $pp=\frac{5}{3}$, d'où réſulteroit une valeur de p irrationnelle, & qui ne peut avoir lieu ici; mais ſi nous conſidérons le ſigne $-$, nous avons $6pp=6$ & $p=1$; donc $x=11$. Voilà les ſeuls cas poſſibles, & ce ne ſont donc que les deux quarrés 4 & 121 qui, ajoutés à 4, donnent des cubes.

193.

Queſtion deuxieme. On cherche en nombres entiers d'autres quarrés que 25, qui, ajoutés à 2, donnent des cubes.

Puis donc que $xx+2$ doit devenir un cube, & puiſque 2 eſt le double d'un quarré, déterminons d'abord les cas où la formule $xx+2yy$ devient un cube; nous avons

Digitized by Google

pour cet effet, par l'article 188, où $a=1$ & $c=2$; nous avons, dis-je, $x=p^3-6pqq$ & $y=3ppq-2q^3$; il faut donc, à cause de $y=\pm 1$, que $3ppq-2q^3$, ou $q(3pp-2qq)=\pm 1$, & par conséquent que q soit un diviseur de 1.

Soit donc $q=1$, & nous aurons $3pp-2=\pm 1$; si nous prenons le signe supérieur, nous trouvons $3pp=3$ & $p=1$, d'où résulte $x=5$; & si nous adoptons l'autre signe, nous parvenons à une valeur de p, qui étant irrationnelle, ne nous est d'aucun usage; il s'ensuit donc qu'il n'y a pas de quarré, hors 25, qui ait la propriété désirée.

194.

Question troisieme. On cherche des quarrés qui, multipliés par 5 & ajoutés à 7, produisent des cubes; ou bien on demande que $5xx+7$ soit un cube.

Qu'on cherche premiérement les cas où $5xx+7yy$ devient un cube; on trouvera par l'article 188, où $a=5$ & $c=7$, qu'il faut pour cela que $x=5p^3-21pqq$, &

Digitized by Google

que $y=15ppq-7q^3$; ainſi comme dans notre exemple $y=\pm 1$, on a $15ppq-7q^3 = q(15pp-7qq)=\pm 1$, il faut donc que q ſoit un diviſeur de 1, c'eſt-à-dire que $q=1$; on aura par conſéquent $15pp-7=\pm 1$, d'où réſultent, dans l'un & l'autre cas, des valeurs de p qui ſont irrationnelles; mais d'où il ne faut pas conclure cependant que la queſtion eſt impoſſible, vu que p & q pourroient être des fractions telles que $y=1$ & que x devînt un nombre entier; & c'eſt ce qui arrive réellement; car ſi $p=\frac{1}{2}$ & $q=\frac{1}{2}$, on trouve $y=1$ & $x=2$; mais il eſt vrai qu'il n'y a pas d'autres fractions qui rendent la ſolution poſſible.

195.

Queſtion quatrieme. On demande en nombres entiers des quarrés dont le double, diminué de 5, ſoit un cube; ou bien on veut que $2xx-5$ ſoit un cube.

Si nous commençons par chercher les cas qui ſatisfont pour la formule $2xx-5yy$, nous avons dans le 188e. article $a=2$, &

Digitized by Google

$c=-5$; ainſi $x=2p^3+15pqq$, & $y=6ppq+5q^3$. Préſentement il faut ici que $y=\pm 1$, & par conſéquent $6ppq+5q^3=q(6pp+5qq)=\pm 1$; & comme cela ne ſe peut ni en nombres entiers ni même en fractions, ce cas devient très-remarquable, parce qu'il y a néanmoins une valeur de x qui ſatisfait, ſavoir $x=4$; en effet dans ce cas $2xx-5=27$, ou égal au cube de 3. Il eſt important de rechercher la raiſon de cette ſingularité.

196.

Non-ſeulement il eſt poſſible, comme nous voyons, que la formule $2xx-5yy$ ſoit un cube ; mais ce qui plus eſt, la racine de ce cube a la forme $2pp-5qq$, comme on peut s'en convaincre en faiſant $x=4$, $y=1$, & $p=2$, $q=1$; ainſi nous connoiſſons un cas où $2xx-5yy=(2pp-5qq)^3$, quoique les deux facteurs de $2xx-5yy$, ſavoir $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$, & $x\sqrt{2}-y\sqrt{5}$, qui, ſuivant notre méthode, devroient être les cubes de $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}$, & de $p\sqrt{2}-q\sqrt{5}$,

Digitized by Google

ne ſoient pas des cubes ; car dans notre cas $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}$, au lieu que $(p\sqrt{2}+q\sqrt{5})^3=(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^3=46\sqrt{2}+29\sqrt{5}$, ce qui n'eſt nullement identique avec $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

Mais il faut remarquer que la formule $rr-10ff$ peut devenir 1 ou -1 en un nombre infini de cas ; par exemple, ſi $r=3$ & $f=1$, ſi $r=19$ & $f=6$; & cette formule multipliée par $2pp-5qq$ reproduit un nombre de cette derniere forme.

Soit donc $ff-10gg=1$, & au lieu de ſuppoſer, comme nous avons fait ci-devant, $2xx-5yy=(2pp-5qq)^3$, nous pourrons ſuppoſer d'une façon plus générale $2xx-5yy=(ff-10gg)(2pp-5qq)^3$; de ſorte que prenant les facteurs, nous aurons $x\sqrt{2}\pm y\sqrt{5}=(f\pm g\sqrt{10})(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})^3$. Or $(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})^3=(2p^3+15pqq)\sqrt{2}\pm(6ppq+5q^3)\sqrt{5}$; & ſi, pour abréger, nous écrivons $A\sqrt{2}+B\sqrt{5}$ à la place de cette quantité, & que nous multipliions par $f+g\sqrt{10}$, nous aurons $Af\sqrt{2}+Bf\sqrt{5}+2Ag\sqrt{5}+fBg\sqrt{2}$ à égaler à $x\sqrt{2}$

Digitized by Google

$+y\sqrt{5}$, d'où réſulte $x=Af+5Bg$, & $y=Bf+2Ag$; or, puiſqu'il faut que $y=\pm 1$, il n'eſt pas abſolument néceſſaire que $6ppq+5q^3=1$; au contraire il ſuffit que la formule $Bf+2Ag$, c'eſt-à-dire que $f(6ppq+5q^3)+2g(2p^3+15pqq)$ devienne $=\pm 1$; de ſorte que f & g peuvent avoir pluſieurs valeurs. Soit, par exemple, $f=3$ & $g=1$, il faudra que la formule $18ppq+15q^3+4p^3+30pqq$ devienne $=\pm 1$, ou bien que $4p^3+18ppq+30pqq+15q^3=\pm 1$.

197.

Cette difficulté de déterminer tous les cas poſſibles de cette eſpece, n'a lieu cependant que lorſque dans la formule $axx+cyy$ le nombre c eſt négatif; & la cauſe en eſt qu'alors cette formule, ou bien cette autre $xx-acyy$, qui en dépend, peut devenir $=1$; ce qui n'arrive jamais quand c eſt un nombre poſitif, parce que $axx+cyy$, ou $xx+acyy$, donne toujours de plus grands nombres, plus on donne de

Digitized by Google

grandes valeurs à x & à y. C'eſt pourquoi la méthode que nous venons d'expliquer, ne peut s'employer avec avantage que dans les cas où les deux nombres a & c ont des valeurs poſitives.

198.

Paſſons maintenant au quatrieme degré, & commençons par obſerver que, ſi la formule $axx+cyy$ doit devenir un bi-quarré, il faut que $a=1$; car ſi ce nombre n'étoit pas un quarré, il ne ſeroit pas même poſſible de transformer la formule en un quarré ; & ſi cela étoit poſſible, on pourroit auſſi lui donner la forme $tt+acuu$; c'eſt pourquoi nous n'étendrons la queſtion qu'à cette derniere formule, qui revient à la précédente $xx+cyy$, dans la ſuppoſition de $a=1$. Cela poſé, il s'agit de voir quelle doit être la nature des valeurs de x & de y, pour que la formule $xx+cyy$ devienne un quarré-quarré. Or comme elle eſt compoſée des deux facteurs $(r+y\sqrt{-c})$ $(x-y\sqrt{-c})$, il faut que chacun de ces

Digitized by Google

facteurs soit aussi un quarré-quarré de la même espece; & on doit faire $x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})^4$, & $x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})^4$, d'où il résulte que la formule proposée devient égale au bi-quarré $(pp+cqq)^4$. Quant aux valeurs de x & de y, elles se déterminent facilement par le développement qui suit:

$$x+y\sqrt{-c}=p^4+4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq+ccq^4-4cpq^3\sqrt{-c},$$

$$x-y\sqrt{-c}=p^4-4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq+ccq^4+4cpq^3\sqrt{-c};$$

donc $x=p^4-6cppqq+ccq^4$, & $y=4p^3q-4cpq^3$.

199.

Ainsi, lorsque $xx+yy$ doit être un bi-quarré, comme actuellement $c=1$, nous avons $x=p^4-6ppqq+q^4$, & $y=4p^3q-4pq^3$; en sorte que $xx+yy=(pp+qq)^4$.

Supposons, par exempl. $p=2$ & $q=1$, & nous trouverons $x=7$ & $y=24$, d'où résulte $xx+yy=625=5^4$.

Digitized by Google

Si $p=3$ & $q=2$, nous obtenons $x=119$ & $y=120$, ce qui donne $xx+yy=13^4$.

200.

Quelle que ſoit la puiſſance paire dans laquelle il s'agiſſe de transformer la formule $axx+cyy$, il eſt toujours abſolument néceſſaire que cette formule puiſſe être réduite à un quarré; mais il ſuffit pour cet effet qu'on connoiſſe un ſeul cas où cela arrive; car on pourra transformer la formule enſuite, comme nous avons vu, en une quantité de la forme $tt+acuu$, dans laquelle le premier terme tt n'eſt multiplié que par 1; de ſorte qu'on peut la regarder comme étant contenue dans l'expreſſion $xx+cyy$; & c'eſt d'une maniere toujours ſemblable qu'on peut donner à cette derniere expreſſion la forme d'une ſixieme puiſſance ou d'une puiſſance paire plus haute quelconque.

201.

Cette condition n'eſt pas requiſe pour les puiſſances impaires; & quels que ſoient les nombres

Digitized by Google

nombres a & c, on pourra toujours transformer la formule $axx+cyy$ en une puissance impaire quelconque. Qu'on demande, par exemple, la cinquieme; on n'aura qu'à faire $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^5$, & $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^5$, & on obtiendra évidemment $axx+cyy=(app+cqq)^5$; de plus, comme la cinquieme puissance de $p\sqrt{a}+q\sqrt{-c}$ est $aap^5\sqrt{a}+5aap^4q\sqrt{-c}-10acp^3qq\sqrt{a}-10acppq^3\sqrt{-c}+5ccpq^4\sqrt{a}+ccq^5\sqrt{-c}$, on trouvera avec la même facilité $x=aap^5-10acp^3qq+5ccpq^4$, & $y=5aap^4q-10acppq^3+ccq^5$.

Si donc on demande que la somme de deux quarrés, ou $xx+yy$, soit en même temps une cinquieme puissance, on aura $a=1$ & $c=1$; donc $x=p^5-10p^3qq+5pq^4$, & $y=5p^4q-10ppq^3+q^5$; & en faisant de plus $p=2$ & $q=1$, on trouvera $x=38$ & $q=41$; par conséquent $xx+yy=3125=5^5$.

Digitized by Google

CHAPITRE XIII.

De quelques Expreſſions de la forme $ax^4 + by^4$, *qui ne ſont pas réductibles à des quarrés.*

202.

ON s'eſt donné beaucoup de peine pour trouver deux bi-quarrés, dont la ſomme ou la différence fût un quarré; mais inutilement, & même on eſt parvenu à la fin à démontrer que ni la formule x^4+y^4, ni la formule x^4-y^4, ne peuvent devenir des quarrés, ſi ce n'eſt dans les cas évidens où, dans la premiere, x ou $y=0$, & où, dans la ſeconde, $y=0$ ou $y=x$. La choſe eſt d'autant plus remarquable, qu'on peut trouver, comme on l'a vu, une infinité de ſolutions, lorſqu'il ne s'agit que de ſimples quarrés.

203.

Nous allons donner la démonſtration dont nous venons de parler, & afin de pro-

Digitized by Google

céder par ordre, nous remarquerons avant toutes choſes que les deux nombres x & y peuvent être regardés comme premiers entr'eux. En effet, ſi ces nombres avoient un commun diviſeur, de façon qu'on pût faire $x = dp$ & $y = dq$, nos formules deviendroient $d^4p^4 + d^4q^4$ & $d^4p^4 - d^4q^4$; ces formules, ſi elles étoient des quarrés, reſteroient des quarrés étant diviſées par d^4; donc auſſi les formules $p^4 + q^4$ & $p^4 - q^4$, dans leſquelles p & q n'ont plus de commun diviſeur, ſeroient des quarrés; par conſéquent il ſuffira de prouver que nos formules, dans le cas où x & y ſont des nombres premiers entr'eux, ne peuvent devenir des quarrés, & notre démonſtration s'étendra d'elle-même à tous les cas où x & y auroient des diviſeurs communs.

204.

Nous commencerons donc par la ſomme de deux bi-quarrés, ſavoir par la formule $x^4 + y^4$, & en conſidérant x & y comme des nombres qui ſont premiers entr'eux. Il

Digitized by Google

s'agit de prouver que cette formule ne peut devenir un quarré que dans les cas mentionnés ci-deſſus ; on va voir les raiſonnemens que cette démonſtration exige.

Si quelqu'un nioit la propoſition, ce ſeroit ſoutenir qu'il peut y avoir des valeurs de x & de y telles que x^4+y^4 fût un quarré, quelque grandes qu'elles fuſſent, puiſqu'il n'y en a pas de petites.

Or on peut faire voir clairement que ſi x & y avoient des valeurs ſatisfaiſantes, on pourroit, quelque grandes que fuſſent ces valeurs, en déduire de moindres pareillement ſatisfaiſantes, tirer de celles-ci des valeurs encore plus petites, & ainſi de ſuite. Puis donc qu'on ne connoît aucune valeur en petits nombres, excepté les deux cas ci-deſſus qui ne menent pas plus loin, on peut auſſi conclure avec aſſurance qu'il n'exiſte point de valeurs de x & de y de la nature de celles qu'on cherche, & pas même dans les plus grands nombres. La propoſition avancée à l'égard de la différence de deux bi-quarrés, x^4-y^4, ſe

Digitized by Google

démontrera par le même principe, comme on le verra plus bas.

205.

Ce ſont les points ſuivans qu'il faut conſidérer maintenant, ſi on veut ſe convaincre que x^4+y^4 ne peut devenir un quarré que dans les cas évidens dont nous avons parlé.

I.) Puiſque nous ſuppoſons que x & y ſont des nombres premiers entr'eux, c'eſt-à-dire, qui n'ont point de commun diviſeur, il faut qu'ils ſoient ou impairs tous les deux, ou que l'un ſoit pair & que l'autre ſoit impair.

II.) Mais ils ne pourroient être impairs tous deux, à cauſe que la ſomme de deux quarrés impairs ne peut jamais être un quarré; car un quarré impair eſt toujours contenu dans la formule $4n+1$, & par conſéquent la ſomme de deux quarrés impairs aura la forme $4n+2$, ce qui étant diviſible par 2, mais non par 4, ne peut être un quarré. Or ce que nous venons de dire doit

Digitized by Google

s'entendre auſſi de deux bi-quarrés impairs.

III.) Si donc x^4+y^4 doit être un quarré, il faut qu'un des termes ſoit pair, & que l'autre ſoit impair. Or nous avons vu plus haut que, pour que la ſomme de deux quarrés ſoit un quarré, il faut que la racine de l'un puiſſe être exprimée par $pp-qq$, & celle de l'autre par $2pq$; donc il faudroit que $xx=pp-qq$ & $yy=2pq$, & on auroit $x^4+y^4=(pp+qq)^2$.

IV.) Ici par conſéquent y ſeroit pair & x ſeroit impair; mais puiſque $xx=pp-qq$, il faut auſſi que des nombres p & q l'un ſoit pair & l'autre impair. Or le premier p ne peut être pair, parce que s'il l'étoit, $pp-qq$ ſeroit un nombre de la forme $4n-1$ ou $4n+3$, & ne pourroit devenir un quarré. Donc il faudroit que p fût impair & que q fût pair, & en ce cas il eſt clair que ces nombres ſeront premiers entr'eux.

V.) Pour que $pp-qq$ devienne un quarré ou $=xx$, il faut, comme nous avons vu plus haut, que $p=rr+ff$ & $q=2rf$; car en ce cas $xx=(rr-ff)^2$ & $x=rr-ff$.

Digitized by Google

VI.) Or il faut que yy ſoit pareillement un quarré ; & puiſque nous avions $yy=2pq$, nous aurons à préſent $yy=4rſ(rr+ſſ)$; de ſorte que cette formule doit être un quarré ; donc il faut auſſi que $rſ(rr+ſſ)$ ſoit un quarré : & remarquons que r & $ſ$ ſont des nombres premiers entr'eux, de façon que les trois facteurs de cette formule, ſavoir r, $ſ$ & $rr+ſſ$, n'ont point de commun diviſeur.

VII.) Or, quand un produit de pluſieurs facteurs qui n'ont point de diviſeur commun, doit être un quarré, il faut que chaque facteur ſoit de lui-même un quarré ; ainſi on fera $r=tt$ & $ſ=uu$, & il faudra que $t^4+u^4=\square$.

Si donc x^4+u^4 étoit un $\square$, notre formule, t^4+u^4, qui eſt pareillement la ſomme de deux bi-quarrés, ſeroit de même un $\square$. Et il eſt bon d'obſerver ici que puiſque $xx=t^4-u^4$ & $yy=4ttuu(t^4+u^4)$, les nombres t & u ſeront évidemment bien plus petits que x & y, vu que x & y ſe déterminent même par les quatriemes puiſſances

Digitized by Google

de t & de u, & ne peuvent par conſéquent que devenir bien plus grands que ces nombres.

VIII.) Il s'enſuit de-là que ſi on pouvoit aſſigner, quand même ce ſeroit en nombres très-grands, deux bi-quarrés, comme x^4 & y^4, dont la ſomme fût un quarré, on pourroit en déduire une ſomme de deux bi-quarrés beaucoup plus petits, qui ſeroit pareillement un quarré ; cette nouvelle ſomme en feroit trouver enſuite une autre de la même nature & encore plus petite, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on parvînt à des nombres très-petits. Or une telle ſomme, en nombres très-petits, n'étant pas poſſible, il s'enſuit évidemment qu'il n'y en a aucune qu'on puiſſe exprimer par des nombres très-grands.

IX.) On pourroit objecter, à la vérité, qu'il exiſte une ſomme de l'eſpece dont nous parlons, en nombres très-petits, ſavoir dans le cas dont nous avons fait mention, où l'un des deux bi-quarrés devient zéro ; mais nous répondons qu'on n'arrivera certaine-

Digitized by Google

ment pas à ce cas, en revenant des nombres très-grands aux plus petits, ſuivant la méthode indiquée; car ſi dans la petite ſomme ou dans la ſomme réduite $-t^4+u^4$, on avoit $t=0$ ou $u=0$, on auroit néceſſairement $yy=0$ dans la grande ſomme; or c'eſt un cas qui n'entre point ici en conſidération.

206.

Paſſons à la ſeconde propoſition, & prouvons auſſi que la différence de deux biquarrés, ou x^4-y^4, ne peut jamais devenir un quarré que dans les cas où $y=0$ & $y=x$.

I.) On peut regarder les nombres x & y comme premiers entr'eux, & par conſéquent comme étant ou impairs tous les deux, ou l'un pair & l'autre impair. Or comme dans l'un & l'autre cas la différence de deux quarrés peut redevenir un quarré, il faudra conſidérer ces deux cas ſéparément.

II.) Suppoſons d'abord les deux nombres x & y impairs, & que $x=p+q$ & $y=p-q$, il faudra néceſſairement que l'un des deux

Digitized by Google

nombres p & q ſoit impair, & que l'autre ſoit pair. Or nous avons $xx-yy=4pq$, & $xx+yy=2pp+2qq$; donc notre formule $x^4-y^4=4pq(2pp+2qq)$; & ceci devant être un quarré, il faut auſſi que ſa quatrieme partie, $pq(2pp+2qq)=2pq(pp+qq)$, ſoit un quarré; & puiſque les facteurs de cette formule n'ont point de commun diviſeur, à cauſe que ſi p eſt pair q eſt impair, chacun de ces facteurs, $2p$, q & $pp+qq$, doit être de ſoi un quarré. Afin donc de faire en ſorte que les deux premiers deviennent des quarrés, qu'on ſuppoſe $2p=4rr$ ou $p=2rr$, & $q=ss$, où s doit être impair, & il faudra que le troiſieme facteur, $4r^4+s^4$, ſoit pareillement un quarré.

III.) Or, puiſque s^4+4r^4 eſt la ſomme de deux quarrés, dont le premier, s^4, eſt impair, & dont l'autre, $4r^4$, eſt pair, qu'on faſſe la racine du premier $ss=tt-uu$, où t ſoit impair & u pair; & la racine du ſecond, $2rr=2tu$, ou $rr=tu$, où t & u ſont premiers entr'eux.

Digitized by Google

IV.) Puis donc que $tu = rr$ doit être un quarré, il faut que tant t que u ſoient des quarrés. Qu'on ſuppoſe donc $t = mm$ & $u = nn$, en entendant par m un nombre impair, & par n un nombre pair, on aura $ff = m^4 - n^4$; de ſorte qu'il faudroit de nouveau qu'une différence de deux bi-quarrés, ſavoir $m^4 - n^4$, fût un quarré. Or il eſt clair que ces nombres ſeroient bien plus petits que x & y, puiſqu'ils ſont moindres que r & f, qui ſont eux-mêmes évidemment plus petits que x & y. Si donc une ſolution étoit poſſible dans de grands nombres, & que $x^4 - y^4$ fût un quarré, il faudroit qu'il y en eût une auſſi qui fût poſſible pour des nombres beaucoup plus petits; celle-ci devroit faire parvenir à une autre pour des nombres encore plus petits, & ainſi de ſuite.

V.) Or les nombres les plus petits, pour leſquels un tel quarré peut ſe trouver, ont lieu dans le cas où un des bi-quarrés eſt $= 0$, ou qu'il eſt égal à l'autre bi-quarré. Dans le premier cas il faudroit que $n = 0$; donc $u = 0$, & de même $r = 0$, $p = 0$,

Digitized by Google

& enfin $x^4 - y^4 = 0$, ou $x^4 = y^4$; ce qui eſt un cas, duquel il n'eſt pas queſtion ici; que ſi $n = m$, on trouveroit $t = u$, enſuite $f = 0$, $q = 0$, & enfin auſſi $x = y$, ce qui n'entre point ici en conſidération.

207.

On pourroit faire ici l'objection que, puiſque m eſt impair & que n eſt pair, la derniere différence n'eſt plus ſemblable à la premiere, & qu'ainſi on ne peut en tirer des concluſions analogues pour des nombres plus petits. Mais il ſuffit que la premiere différence nous ait fait arriver à la ſeconde, & nous allons faire voir que $x^4 - y^4$ ne peut non plus devenir un quarré, quand l'un des bi-quarrés eſt pair & que l'autre eſt impair.

I.) D'abord ſi le premier x^4 étoit pair, & que y^4 fût impair, la choſe ſeroit claire d'elle-même, puiſqu'on auroit un nombre de la forme $4n + 3$, qui ne peut être un quarré. Soit donc x impair & y pair, il faudra que $xx = pp + qq$, & $y = 2pq$, d'où réſulte $x^4 - y^4 = p^4 - 2ppqq + q^4$

Digitized by Google

$=(pp-qq)^2$, où des deux nombres p & q l'un doit être pair & l'autre impair.

II.) Or $pp+qq=xx$ devant être un quarré, on a $p=rr-ss$ & $q=2rs$; donc $x=rr+ss$. Mais de-là réſulte $yy=2(rr-ss).2rs$, ou $yy=4rs(rr-ss)$, ce qui devant être un quarré, le quart $rs(rr-ss)$, dont les facteurs ſont premiers entr'eux, doit pareillement être un quarré.

III.) Qu'on faſſe donc $r=tt$ & $s=uu$, on aura le troiſieme facteur $rr-ss=t^4-u^4$, qui devra de même être un quarré; or comme ce facteur équivaut à la différence de deux bi-quarrés, qui ſont beaucoup moindres que les premiers, la démonſtration précédente eſt pleinement confirmée; & il eſt évident que ſi la différence de deux bi-quarrés pouvoit devenir égale au quarré d'un nombre, quelque grand qu'on veuille le ſuppoſer, on pourroit, moyennant ce cas connu, parvenir à des différences de plus en plus petites, qui ſeroient de même réductibles à des quarrés, ſans cependant retomber dans les deux cas évidens, dont

Digitized by Google

nous avons parlé au commencement ; donc il eſt impoſſible que la choſe puiſſe avoir lieu même pour les plus grands nombres.

208.

La premiere partie de la démonſtration précédente, ſavoir où x & y ſont ſuppoſés impairs, peut s'abréger de la maniere ſuivante : ſi $x^4 - y^4$ étoit un quarré, il faudroit qu'on eût $xx = pp + qq$ & $yy = pp - qq$, en entendant par p & q des nombres dont l'un ſoit pair & l'autre impair ; moyennant cela on auroit $xxyy = p^4 - q^4$, & il faudroit par conſéquent que $p^4 - q^4$ fût un quarré ; or c'eſt-là une différence de deux bi-quarrés dont l'un eſt pair & dont l'autre eſt impair ; & il a été prouvé dans la ſeconde partie de la démonſtration, qu'une différence de cette nature ne peut devenir un quarré.

209.

Nous avons donc prouvé ces deux propoſitions capitales, que ni la ſomme ni la différence de deux bi-quarrés ne peut de-

Digitized by Google

venir un nombre quarré, ſi ce n'eſt dans un petit nombre de cas tout-à-fait évidens.

Quelques formules donc qu'on veuille transformer en des quarrés, ſi ces formules demandent qu'on réduiſe à un quarré la ſomme ou la différence de deux bi-quarrés, on peut prononcer que ces formules propoſées ſont pareillement impoſſibles. C'eſt ce qui arrive à l'égard de celles que nous allons indiquer.

I.) Il n'eſt pas poſſible que la formule x^4+4y^4 devienne un quarré; car puiſque cette formule eſt la ſomme de deux quarrés, il faudroit que $xx=pp-qq$, & $2yy=2pq$ ou $yy=pq$; or p & q étant des nombres premiers entr'eux, il faudroit que l'un & l'autre fût un $\square$. Si donc on fait $p=rr$ & $q=ss$, on aura $xx=r^4-s^4$; c'eſt-à-dire qu'il faudroit que la différence de deux bi-quarrés fût un quarré, ce qui eſt impoſſible.

II.) Il n'eſt pas poſſible non plus que la formule x^4-4y^4 devienne un quarré; car il faudroit dans ce cas que $xx=pp+qq$, & $2yy=2pq$, afin qu'on eût x^4-4y^4

$=(pp-qq)^2$; or pour que $yy=pq$, il faut que tant p que q ſoit un quarré; & ſi on fait en conſéquence $p=rr$ & $q=ff$, on a $xx=r^4+f^4$; c'eſt-à-dire qu'il faudroit que la ſomme de deux bi-quarrés pût devenir un quarré, ce qui eſt impoſſible.

III.) Il eſt impoſſible auſſi que la formule $4x^4-y^4$ devienne un quarré, parce qu'il faudroit en ce cas néceſſairement que y fût un nombre pair; or ſi l'on fait $y=2z$, on trouve que $4x^4-16z^4$, & par conſéquent auſſi la quatrieme partie x^4-4z^4, devroit pouvoir ſe réduire à un quarré; ce que nous venons de voir n'être pas poſſible.

IV.) La formule $2x^4+2y^4$ ne peut pas non plus ſe transformer en un quarré; car, puiſqu'il faudroit que ce quarré fût pair, & par conſéquent $2x^4+2y^4=4zz$, on auroit $x^4+y^4=2zz$, ou $2zz+2xxyy=x^4+2xxyy+y^4=\square$, ou pareillement $2zz-2xxyy=x^4-2xxyy+y^4=\square$. Ainſi, comme tant $2zz+2xxyy$ que $2zz-2xxyy$ deviendroient des quarrés, il faudroit que leur

Digitized by Google

leur produit $4z^4 - 4x^4y^4$, auſſi bien que le quart de ce produit, ou $z^4 - x^4y^4$, fût un quarré. Mais ce quart eſt la différence de deux bi-quarrés ; donc, &c.

V.) Enfin je dis auſſi que la formule $2x^4 - 2y^4$ ne peut être un quarré ; car les deux nombres x & y ne peuvent être pairs tous deux, puiſque s'ils l'étoient, ils auroient un diviſeur commun ; ils ne peuvent être non plus pair l'un & impair l'autre, puiſqu'autrement une partie de la formule ſeroit diviſible par 4, & l'autre ſeulement par 2, & qu'ainſi la formule entiere ne ſeroit diviſible que par 2 ; donc il faut que ces nombres x & y ſoient impairs tous les deux. Or ſi l'on fait à préſent $x = p + q$, & $y = p - q$, un des nombres p & q ſera pair, & l'autre ſera impair ; & puiſque $2x^4 - 2y^4 = 2(xx+yy)(xx-yy)$, & que $xx+yy = 2pp+2qq = 2(pp+qq)$, & que $xx-yy = 4pq$, notre formule ſe trouvera exprimée par $16pq(pp+qq)$, dont la ſeizieme partie, ou $pq(pp+qq)$, devra être pareillement un quarré. Mais ces facteurs ſont premiers entre

Digitized by Google

eux ; ainſi chacun doit de ſon côté être un quarré. Qu'on faſſe donc les deux premiers $p=rr$ & $q=ff$, & le troiſieme devenant $=r^4+f^4$, ce qui ne peut être un quarré, prouvera que la formule propoſée ne peut pas non plus devenir un quarré.

210.

On peut démontrer de même que la formule x^4+2y^4 ne devient jamais un quarré ; voici l'ordre de cette démonſtration :

I.) Le nombre x ne peut être pair, parce qu'il faudroit en ce cas que y fût impair ; & la formule ne ſeroit diviſible que par 2 & non par 4 ; donc x doit être impair.

II.) Qu'on ſuppoſe donc la racine quarrée de notre formule $=xx+\frac{2pyy}{q}$, afin qu'elle devienne impaire, on aura $x^4+2y^4=x^4+\frac{4pxxyy}{q}+\frac{4ppy^4}{qq}$, où les x^4 ſe détruiſent ; en ſorte qu'en diviſant les autres termes par yy & multipliant par qq, on trouve $4pqxx+4ppyy=2qqyy$, ou $4pqxx=2qqyy$

Digitized by Google

$-4ppyy$, d'où l'on tire $\frac{xx}{yy}=\frac{qq-2pp}{2pq}$; c'est-à-dire $xx=qq-2pp$ & $yy=2pq$, qui sont les mêmes formules que nous avons déjà données plus haut.

III.) Ainsi $qq-2pp$ devroit être un quarré, & c'est ce qui ne peut arriver, à moins qu'on ne fasse $q=rr+2ss$ & $p=2rs$, afin d'avoir $xx=(rr-2ss)^2$; or on auroit alors $4rs(rr+2ss)=yy$; & il faudroit qu'aussi le quart $rs(rr+2ss)$ fût un quarré, & par conséquent que r & s fussent chacun en particulier des quarrés. Si donc on suppose $r=tt$ & $s=uu$, on trouvera le troisieme facteur $rr+2ss=t^4+2u^4$, qui devroit être un quarré.

IV.) Par conséquent si x^4+2y^4 étoit un quarré, il faudroit aussi que t^4+2u^4 fût un quarré; & comme les nombres t & u seroient beaucoup moindres que x & y, on pourroit parvenir de la même maniere à des nombres toujours plus petits. Or il est facile de se convaincre, par quelques essais, que la formule proposée n'est pas un quarré de quelque petit nombre; donc elle ne

Digitized by Google

l'eſt pas non plus d'un nombre même très-grand.

211.

Pour ce qui regarde au contraire la formule $x^4 - 2y^4$, il n'eſt pas poſſible de prouver qu'elle ne peut devenir un quarré, & on trouve même par un raiſonnement ſemblable au précédent, qu'il y a une infinité de cas où cette formule devient réellement un quarré.

En effet, que $x^4 - 2y^4$ doive être un quarré, nous venons de voir qu'en faiſant $xx = pp + 2qq$ & $yy = 2pq$, on trouve $x^4 - 2y^4 = (pp - 2qq)^2$. Or $pp + 2qq$ doit donc devenir pareillement un quarré, & c'eſt ce qui arrive, lorſque $p = rr - 2ff$ & $q = 2rf$, vu qu'on a dans ce cas $xx = (rr + 2ff)^2$. De plus il eſt à remarquer qu'on pourroit prendre pour le même effet $p = 2ff - rr$ & $q = 2rf$: nous ferons attention à l'un & à l'autre cas.

I.) Soit d'abord $p = rr - 2ff$ & $q = 2rf$, on aura $x = rr + 2ff$; & à cauſe de $yy = 2pq$, on aura maintenant $yy = 4rf(rr$

Digitized by Google

$-2ff$) ; de sorte que r & f doivent être des quarrés. Qu'on fasse donc $r=tt$ & $f=uu$, on trouvera $yy=4ttuu(t^4-2u^4)$. Ainsi $y=2tu\sqrt{t^4-2u^4}$ & $x=t^4+2u^4$; donc, lorsque t^4-2u^4 est un quarré, on trouvera aussi $x^4-2y^4=\square$; mais quoique t & u soient des nombres plus petits que x & y, on ne peut conclure cependant, comme auparavant, que x^4-2y^4 ne peut être un quarré, de ce qu'on parvient à une formule semblable en de moindres nombres ; car x^4-2y^4 peut devenir un quarré, sans qu'on parvienne à la formule t^4-2u^4, comme on le verra en considérant le second cas.

II.) Soit donc $p=2ff-rr$ & $q=2rf$, on aura à la vérité, comme ci-devant, $xx=rr+2ff$; mais on trouvera $yy=2pq=4rf(2ff-rr)$. Si l'on suppose maintenant $r=tt$ & $f=uu$, on obtient $yy=4ttuu(2u^4-t^4)$, par conséquent $y=2tu\sqrt{2u^4-t^4}$ & $x=t^4+2u^4$, moyennant quoi il est clair que notre formule x^4-2y^4 peut devenir

Digitized by Google

auſſi un quarré, quand la formule $2u^4-t^4$ devient un quarré. Or ce cas a lieu évidemment, quand $t=1$ & $u=1$; & nous obtenons par-là $x=3$ & $y=2$, & enfin $x^4-2y^4=81-2.16=49$.

III.) Nous avons auſſi vu plus haut que $2u^4-t^4$ devient un quarré, lorſque $u=13$ & $t=1$, puiſqu'alors $\sqrt{2u^4-t^4}=239$. Si nous ſubſtituons donc ces valeurs au lieu de t & de u, nous trouvons un nouveau cas pour notre formule, ſavoir $x=1+2.13^4=57123$, & $y=2.13.239=6214$.

IV.) De plus, dès qu'on a trouvé des valeurs de x & de y, on peut les ſubſtituer à t & à u dans les formules du n°. 1, & on obtiendra par ce moyen de nouvelles valeurs de x & de y.

Or nous venons de trouver $x=3$ & $y=2$; faiſons donc, dans les formules n°. 1, $t=3$ & $u=2$, de ſorte que $\sqrt{t^4-2u^4}=7$, & nous aurons les nouvelles valeurs ſuivantes, $x=81+2.16=113$ & $y=2.3.2.7=84$; ainſi $xx=12769$, & x^4

Digitized by Google

$=163047361$; de plus $yy=7056$, & y^4 $=49787136$; donc $x^4-2y^4=63473089$: la racine quarrée de ce nombre eſt 7967, & elle s'accorde parfaitement avec la formule adoptée au commencement, $pp-2qq$; car puiſque $t=3$ & $u=2$, on a $r=9$ & $s=4$; donc $p=81-32=49$ & $q=72$, d'où réſulte $pp-2qq=2401-10368$ $=-7967$.

CHAPITRE XIV.

Solutions de quelques Queſtions qui appartiennent à cette partie de l'Analyſe.

212.

Nous avons expliqué juſqu'ici les artifices qui ſe préſentent dans cette partie de l'analyſe, & qui peuvent être néceſſaires pour réſoudre quelque queſtion que ce ſoit qui appartienne à cette partie ; il nous reſte à les mettre dans un plus grand jour, en joignant ici quelques-unes de ces queſtions avec leurs ſolutions.

Digitized by Google

213.

Premiere queſtion. Trouver un nombre tel que, ſi on y ajoute ou qu'on en retranche l'unité, on obtienne dans l'un & l'autre cas un nombre quarré.

Soit le nombre cherché $= x$, il faut que tant $x+1$ que $x-1$ ſoit un quarré. Supposons pour le premier cas $x+1=pp$, nous aurons $x=pp-1$ & $x-1=pp-2$, ce qui devra pareillement être un □. Que la racine en ſoit donc $p-q$, nous aurons $pp-2=pp-2pq+qq$, & par conſéquent $p=\frac{qq+2}{2q}$, au moyen de quoi on obtient $x=\frac{q^4+4}{4qq}$, où l'on peut donner à q une valeur quelconque même fractionnaire.

Si nous faiſons donc $q=\frac{r}{f}$, en ſorte que $x=\frac{r^4+4f^4}{4rrff}$, nous aurons pour quelques petits nombres les valeurs qui ſuivent:

Si $r=$	1	2	1	3
& $f=$	1	1	2	1
on a $x=$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$.

Digitized by Google

214.

Seconde queſtion. Trouver un nombre x tel que, ſi on y ajoute deux nombres quelconques, par exemple 4 & 7, on obtienne dans l'un & l'autre cas un quarré.

Il faut d'après cet énoncé que les deux formules, $x+4$ & $x+7$, deviennent des quarrés. Qu'on ſuppoſe donc la premiere $x+4=pp$, on aura $x=pp-4$, & la ſeconde deviendra $x+7=pp+3$; or cette formule devant auſſi être un quarré, ſoit ſa racine $=p+q$, & on aura $pp+3=pp+2pq+qq$, d'où l'on tirera $p=\frac{3-qq}{2q}$, & par conſéquent $x=\frac{9-22qq+q^4}{4qq}$. Si de plus on prend pour q une fraction $\frac{r}{f}$, on trouve pour x la valeur $\frac{9f^4-22rrff+r^4}{4rrff}$, dans laquelle on peut ſubſtituer à r & à f tous les nombres entiers qu'on veut.

Si l'on fait $r=1$ & $f=1$, on trouve $x=-3$; donc $x+4=1$ & $x+7=4$.

Que ſi l'on demandoit que x fût un

Digitized by Google

nombre positif, on pourroit faire $f=2$ & $3=1$, & on auroit $x=\frac{57}{16}$, moyennant quoi $x+4=\frac{121}{16}$, & $x+7=\frac{169}{16}$.

Si l'on fait $f=3$ & $r=1$, on a $x=\frac{133}{9}$, d'où résultent $x+4=\frac{169}{9}$ & $x+7=\frac{196}{9}$.

Veut-on que le dernier terme de la formule qui exprime x, surpasse le moyen, qu'on fasse $r=5$ & $f=1$, on aura $x=\frac{21}{25}$, & par conséquent $x+4=\frac{121}{25}$ & $x+7=\frac{196}{25}$.

215.

Troisieme question. On cherche une valeur fractionnaire de x, telle qu'ajoutée à 1 ou soustraite de 1, elle donne dans l'un & l'autre cas un quarré.

Puisque ce sont les deux formules $1+x$ & $1-x$ qui doivent devenir des quarrés, qu'on suppose la premiere $1+x=pp$, on aura $x=pp-1$, & la seconde formule $1-x=2-pp$. Or comme cette formule-ci doit devenir un quarré, & que ni le premier terme ni le dernier n'est un quarré, il faudra tâcher de trouver un cas où la

Digitized by Google

formule devienne un □ ; on ne tarde pas à en appercevoir un, c'eſt celui de $p=1$. Qu'on faſſe donc $p=1-q$, de ſorte que $x=qq-2q$, notre formule $2-pp$ ſera $=1+2q-qq$; & en ſuppoſant la racine $=1-qr$, on aura $1+2q-qq=1-2qr+qqrr$; ainſi $2-q=-2r+qrr$, & $q=\frac{2r+2}{rr+1}$; de-là réſulte $x=\frac{4r-4r^3}{(rr+1)^2}$; & puiſque r eſt une fraction, qu'on faſſe $r=\frac{t}{u}$, on aura $x=\frac{4tu^3-4t^3u}{(tt+uu)^2}=\frac{4tu(uu-tt)}{(tt+uu)^2}$, & il eſt clair que u doit être plus grand que t.

Soit donc, par exemple, $u=2$ & $t=1$, on trouvera $x=\frac{24}{25}$.

Soit $u=3$ & $t=2$, on aura $x=\frac{120}{169}$, & les formules $1+x=\frac{289}{169}$ & $1-x=\frac{49}{169}$, ſeront toutes deux des quarrés.

216.

Quatrieme queſtion. Trouver des nombres x tels que, ſoit qu'on les ajoute à 10, ſoit qu'on les ſouſtraie de 10, il en réſulte des quarrés.

Digitized by Google

Il s'agit donc de transformer en quarrés les formules $10+x$ & $10-x$, & on pourroit le faire par la méthode qu'on vient d'employer ; mais indiquons une autre voie pour y parvenir. On remarquera d'abord que le produit de ces deux formules, ou $100-xx$, doit pareillement devenir un quarré ; or ſon premier terme étant déjà un quarré, il faut en ſuppoſer la racine $=10-px$, moyennant quoi on aura $100-xx=100-20px+ppxx$; donc $x=\frac{20p}{pp+1}$; or par-là ce n'eſt encore que le produit des deux formules qui devient un quarré, & non pas chacune en particulier. Mais pourvu que l'une devienne un quarré, l'autre ſera néceſſairement auſſi un quarré ; or $10+x=\frac{10pp+20p+10}{pp+1}=\frac{10(pp+2p+1)}{pp+1}$, & puiſque $pp+2p+1$ eſt déjà un quarré, tout ſe réduit à ce qu'auſſi la fraction $\frac{10}{pp+1}$, ou bien celle-ci $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$, ſoit un quarré. Il faut pour cela ſeulement que $10pp+10$ ſoit un quarré, & on a de nouveau beſoin ici de trouver un cas où cela ait lieu. On remar-

Digitized by Google

quera qu'un tel cas eſt $p=3$; c'eſt pourquoi on fera $p=3+q$, & on aura $100+60q+10qq$. Que la racine de ceci ſoit $10+qt$, on aura l'équation finale $100+60q+10qq=100+20qt+qqtt$, qui donne $q=\frac{60-20t}{tt-10}$, au moyen de quoi on déterminera $p=3+q$, & $x=\frac{20p}{pp+1}$.

Soit $t=3$, on trouvera $q=0$ & $p=3$; donc $x=6$, & nos formules $10+x=16$ & $10-x=4$.

Mais ſi $t=1$, on a $q=-\frac{40}{9}$ & $p=-\frac{13}{9}$, ainſi $x=-\frac{234}{25}$; or il eſt indifférent de faire auſſi $x=+\frac{234}{25}$, donc $10+x=\frac{484}{25}$ & $10-x=\frac{16}{25}$, quantités qui ſont toutes deux des quarrés.

217.

Remarque. Si on vouloit généraliſer cette queſtion en demandant pour un nombre quelconque a des nombres x, tels que tant $a+x$ que $a-x$ fuſſent des quarrés, la ſolution deviendroit ſouvent impoſſible, ſavoir dans tous les cas où a ne ſeroit pas la ſomme de deux quarrés. Or nous avons

Digitized by Google

déjà vu plus haut que depuis 1 juſqu'à 50 ce ne ſont que les nombres ſuivans qui ſont les ſommes de deux quarrés, ou qui ſont contenus dans la formule $xx+yy$:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50.

Ainſi les autres nombres compris entre 1 & 50, & qui ſont:

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48,

ne peuvent ſe décompoſer en deux quarrés; par conſéquent toutes les fois que a ſeroit un de ces derniers nombres, la queſtion ſeroit impoſſible. La démonſtration en eſt facile. Soit $a+x=pp$ & $a-x=qq$, l'addition des deux formules donnera $2a=pp+qq$; donc il faut que $2a$ ſoit la ſomme de deux quarrés; or ſi $2a$ eſt une ſomme de cette eſpece, a en ſera une ſemblable; par conſéquent, lorſque a n'eſt pas la ſomme de deux quarrés, il ſera toujours impoſſible que $a+x$ & $a-x$ ſoient en même temps des quarrés.

Digitized by Google

218.

Comme 3 n'eſt pas la ſomme de deux quarrés, il ſuit de ce que nous avons dit, que, ſi $a=3$, la queſtion eſt impoſſible. Mais on pourroit objecter qu'il y a peut-être deux quarrés fractionnaires, dont la ſomme eſt $=3$; nous répondons que cela n'eſt pas poſſible non plus; car ſi 3 étoit $=\frac{pp}{qq}+\frac{rr}{ff}$, & qu'on multipliât par $qqff$, on auroit $3qqff=ppff+qqrr$, où le ſecond membre, qui eſt la ſomme de deux quarrés, ſeroit diviſible par 3; or nous avons vu plus haut qu'une ſomme de deux quarrés ne peut avoir pour diviſeurs que des nombres qui ſoient eux-mêmes des ſommes de cette eſpece.

Il eſt vrai que les nombres 9 & 45 ſont diviſibles par 3, mais ils ſont diviſibles auſſi par 9, & même chacun des deux quarrés qui compoſent tant l'un que l'autre, eſt diviſible par 9, vu que $9=3^2+0^2$, & $45=6^2+3^2$; c'eſt donc un cas différent & duquel il n'eſt pas queſtion ici; & nous

Digitized by Google

pouvons donc nous en tenir à la conclusion, que si un nombre a n'est pas en nombres entiers la somme de deux quarrés, il ne le sera pas non plus en fractions. Lorsqu'au contraire le nombre a est en nombres entiers la somme de deux quarrés, il peut être d'une infinité de manieres la somme de deux quarrés en nombres fractionnaires; c'est ce que nous allons faire voir.

219.

Cinquieme question. Décomposer en autant de manieres qu'on voudra un nombre, qui est la somme de deux quarrés, en une autre somme de deux quarrés.

Soit $ff+gg$ le nombre proposé, & qu'on cherche deux autres quarrés, par exemple xx & yy, dont la somme $xx+yy$ soit égale au nombre $ff+gg$. Il est clair d'abord que si x est ou plus grand ou plus petit que f, il faut qu'au contraire y soit ou plus petit ou plus grand que g. Qu'on fasse donc $x=f+pz$ & $y=g-qz$, on aura $ff+2fpz+ppzz+gg-2gqz+qqzz$ $=ff$

Digitized by Google

$=ff+gg$, où les deux termes ff & gg se détruisent; après quoi il ne reste que des termes qui sont divisibles par z. Ainsi on aura $2fp+ppz-2gq+qqz=0$, ou $ppz+qqz=2gq-2fp$; donc $z=\frac{2gq-2fp}{pp+qq}$, d'où l'on tire pour x & y les valeurs suivantes, $x=\frac{2gpq+f(qq-pp)}{pp+qq}$ & $y=\frac{2fpq+g(pp-qq)}{pp+qq}$, dans lesquelles on peut adopter pour p & q tous les nombres possibles à volonté.

Que, par exemple, 2 soit le nombre proposé, en sorte que $f=1$ & $g=1$, on aura $xx+yy=2$; & à cause de $x=\frac{2pq+qq-pp}{pp+qq}$ & de $y=\frac{2pq+pp-qq}{pp+qq}$, si on fait $p=2$ & $q=1$, on trouve $x=\frac{1}{5}$ & $y=\frac{7}{5}$.

220.

Sixieme question. Si a est la somme de deux quarrés, trouver des nombres x, tels que $a+x$ & $a-x$ deviennent des quarrés.

Soit $a=13=9+4$, & qu'on fasse $13+x=pp$ & $13-x=qq$, on aura d'abord par l'addition $26=pp+qq$, ensuite par la soustraction, $2x=pp-qq$; il faut par conséquent que p & q soient tels que pp

Digitized by Google

$+qq$ devienne égal au nombre 26, qui eſt auſſi la ſomme de deux quarrés, ſavoir de $25+1$. Or puiſqu'il s'agit en effet de décompoſer 26 en deux quarrés, dont le plus grand puiſſe exprimer pp, & le plus petit qq, on aura ſur le champ $p=5$ & $q=1$, de ſorte que $x=12$; mais l'on peut réſoudre le nombre 26 encore d'une infinité de manieres en deux quarrés. Car puiſque $f=5$ & $q=1$, ſi nous écrivons dans les formules de ci-deſſus t & u au lieu de p & q, & p & q au lieu de x & y, nous trouvons $p=\frac{2tu+5(uu-tt)}{tt+uu}$ & $q=\frac{10tu+tt-uu}{tt+uu}$. Maintenant nous pouvons ſubſtituer à t & u des nombres quelconques, & déterminer par-là p & q, & par conſéquent auſſi la valeur de $x=\frac{pp-qq}{2}$.

Soit, par exemple, $t=2$ & $u=1$, on aura $p=\frac{11}{5}$ & $q=\frac{23}{5}$; donc $pp-qq=\frac{408}{25}$ & $x=\frac{204}{25}$.

221.

Mais afin de réſoudre cette queſtion d'une maniere générale, ſoit $a=cc+dd$, &

Digitized by Google

l'inconnue $=z$; c'eſt-à-dire que ce ſoient les formules $a+z$ & $a-z$ qui doivent devenir des quarrés.

Faiſons $a+z=xx$ & $a-z=yy$, nous aurons d'abord $2a=2(cc+dd)=xx+yy$, enſuite $2z=xx-yy$. Donc il faut que les quarrés xx & yy ſoient tels que $xx+yy=2(cc+dd)$, où en effet $2(cc+dd)$ eſt la ſomme de deux quarrés, ſavoir $=(c+d)^2+(c-d)^2$. Suppoſons, pour abréger, $c+d=f$, & $c-d=g$, il faudra que $xx+yy=ff+gg$, & cela arrivera, d'après ce qui a été dit ci-deſſus, quand $x=\frac{2gpq+f(qq-pp)}{pp+qq}$ & $y=\frac{2fpq+g(pp-qq)}{pp+qq}$. On obtient par-là une ſolution très-facile, en faiſant $p=1$ & $q=1$; car on trouve $x=\frac{2g}{2}=g=c-d$, & $y=f=c+d$; par conſéquent $z=2cd$; & il eſt clair que $a+z=cc+dd+2cd=(c+d)^2$, & $a-z=cc+dd-2cd=(c-d)^2$.

Cherchons une autre ſolution, en faiſant $p=2$ & $q=1$; nous aurons $x=\frac{c-7d}{5}$ & $y=\frac{7c+d}{5}$, où tant c & d que x & y peuvent ſe prendre en moins, parce qu'il n'eſt

Digitized by Google

queſtion que de leurs quarrés. Or puiſque x doit être plus grand que y, qu'on faſſe d négatif, on aura $x = \frac{c+7d}{5}$ & $y = \frac{7c-d}{5}$. De-là réſulte $z = \frac{24dd+14cd-24cc}{25}$, & cette valeur étant ajoutée à $a = cc+dd$, donne $\frac{cc+14cd+49dd}{25}$, dont la racine quarrée eſt $\frac{c+7d}{5}$; ſi l'on ſouſtrait enſuite z de a, il reſte $\frac{49cc-14cd+dd}{25}$, le quarré de $\frac{7c-d}{5}$; & on voit qu'en effet de ces deux racines quarrées la premiere eſt $= x$ & la ſeconde $= y$.

222.

Septieme queſtion. On cherche un nombre x tel que, ſoit qu'on ajoute 1 à ce nombre même, ſoit qu'on ajoute 1 à ſon quarré xx, on obtienne un quarré.

Il s'agit de transformer en quarrés les deux formules $x+1$ & $xx+1$. Qu'on ſuppoſe donc la premiere $x+1 = pp$, & à cauſe de $x = pp-1$, la ſeconde $xx+1 = p^4 - 2pp+2$, devra être un quarré. Cette derniere formule eſt de nature à ne point admettre de ſolution, à moins qu'on ne

Digitized by Google

connoiſſe d'avance un cas ſatisfaiſant ; mais un tel cas ſe préſente auſſi-tôt, c'eſt celui de $p=1$. Soit donc $p=1+q$, on aura $xx+1=1+4qq+4q^3+q^4$, ce qui peut devenir un quarré en bien des manieres.

I.) Qu'on en ſuppoſe d'abord la racine $=1+qq$, on aura $1+4qq+4q^3+q^4=1+2qq+q^4$; ainſi $4q+4qq=2q$, ou $4+4q=2$ & $q=-\frac{1}{2}$; donc $p=\frac{1}{2}$ & $x=-\frac{3}{4}$.

II.) Soit la racine $=1-qq$, on trouvera $1+4qq+4q^3+q^4=1-2qq+q^4$; par conſéquent $q=-\frac{3}{2}$ & $p=-\frac{1}{2}$, ce qui donne $x=-\frac{3}{4}$, comme auparavant.

III.) Si l'on fait la racine $=1+2q+qq$, afin de retrancher le premier & les deux derniers termes, on a $1+4qq+4q^3+q^4=1+4q+6qq+4q^3+q^4$, d'où l'on tire $q=-2$ & $p=-1$; donc $x=0$.

IV.) On peut adopter auſſi $1-2q-qq$ pour la racine, & on a dans ce cas $1+4qq+4q^3+q^4=1-4q+2qq+4q^3+q^4$; mais on trouve comme auparavant $q=-2$.

V.) On peut, ſi l'on veut, retrancher les

Digitized by Google

deux premiers termes, en faisant la racine $=1+2qq$; car on aura $1+4qq+4q^3+q^4 = 1+4qq+4q^4$; alors $q=\frac{4}{3}$ & $p=\frac{7}{3}$; par conséquent $x=\frac{40}{9}$; enfin $x+1=\frac{49}{9}=\left(\frac{7}{3}\right)^2$, & $xx+1=\frac{1681}{81}=\left(\frac{41}{9}\right)^2$.

On trouvera un plus grand nombre de valeurs pour q, en faisant usage pour cela d'une de celles qu'on vient de déterminer, par exemple de celle-ci, $q=-\frac{1}{2}$; car soit à présent $q=-\frac{1}{2}+r$, on a $p=\frac{1}{2}+r$; $pp=\frac{1}{4}+r+rr$, & $p^4=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}rr+2r^3+r^4$; donc l'expression $\frac{25}{16}-\frac{3}{2}r-\frac{1}{2}rr+2r^3+r^4$, à laquelle notre formule se réduit, devra être un quarré, & elle devra l'être aussi étant multipliée par 16, dans lequel cas on a $25-24r-8rr+32r^3+16r^4$. C'est pourquoi faisons à présent:

I.) La racine $=5+fr\pm 4rr$; en sorte que $25-24r-8rr+32r^3+16r^4=25+10fr\pm 40rr+ffrr\pm 8fr^3+16r^4$. Les premiers & les derniers termes se détruisent, & nous ôterons aussi les seconds, en faisant $-24=10f$, & par conséquent

Digitized by Google

$f=-\frac{12}{5}$; diviſant enſuite les termes reſtans par rr, nous avons $-8+32r=\pm 40+ff\pm 8fr$; & en admettant le ſigne ſupérieur, nous trouvons $r=\frac{48+ff}{32-8f}$. Or, à cauſe de $f=-\frac{12}{5}$, nous avons $r=\frac{21}{20}$; donc $p=\frac{31}{20}$, & $x=\frac{561}{400}$; ainſi $x+1=\left(\frac{31}{20}\right)^2$, & $xx+1=\left(\frac{689}{400}\right)^2$.

II.) Que ſi nous adoptons le ſigne inférieur, nous avons $-8+32r=-40+ff-8fr$, d'où ſe conclut $r=\frac{ff-32}{32+8f}$; & puiſque $f=-\frac{12}{5}$, on a $r=-\frac{41}{20}$; donc $p=\frac{31}{20}$, ce qui conduit à l'équation précédente.

III.) Soit $4rr+4r\pm 5$ la racine de la formule; de ſorte que $16r^4+32r^3-8rr-24r+25=16r^4+32r^3\pm 40rr\pm 40r+25$. Comme $+16rr$ de part & d'autre les deux premiers termes & le dernier ſe détruiſent, nous aurons $-8r-24=\pm 40r+16r\pm 40$, ou $-24r-24=\pm 40r\pm 40$. Si nous admettons le ſigne ſupérieur, nous avons par conſéquent $-24r-24=40r+40$, ou $0=64r+64$, ou $0=r+1$, c'eſt-à-dire $r=-1$ & $p=-\frac{1}{2}$;

Digitized by Google

mais c'eſt un cas qui nous eſt déjà connu, & on n'en auroit pas trouvé un différent en faiſant uſage de l'autre ſigne.

IV.) Que la racine ſoit $5+fr+grr$, & qu'on détermine f & g, de façon à faire évanouir les trois premiers termes. Puiſque actuellement $25-24r-8rr+32r^3+16r^4 = 25+10fr+10grr+2fgr^3+ggr^4+ffrr$, on aura d'abord $-24=10f$, ainſi $f=-\frac{12}{5}$; enſuite $-8=10g+ff$, ou $g=-\frac{8-ff}{10} = \frac{-344}{250} = \frac{-172}{125}$. Quand on aura donc ſubſtitué & diviſé les termes reſtans par r^3, on aura $32+16r=2fg+ggr$, & $r=\frac{2fg-32}{16-gg}$. Or le numérateur $2fg-32$ devient ici $= \frac{+24.172-32.625}{5.125} = \frac{-32.496}{625} = \frac{-16.32.31}{625}$, & le dénominateur $16-gg=(4-g)(4+g)=\frac{328}{125}\cdot\frac{672}{125} = \frac{8.32.41.21}{25.625}$; ainſi $r=-\frac{1550}{861}$; & on en conclut $p=-\frac{2239}{1722}$, moyennant quoi on obtient une nouvelle valeur de x à cauſe de $x=pp-1$.

Digitized by Google

223.

Huitieme queſtion. Trouver un nombre x qui, ajouté à chacun des nombres donnés a, b & c, produiſe un quarré.

Puiſqu'il faut que les trois formules $x+a$, $x+b$ & $x+c$ ſoient des quarrés, qu'on faſſe la premiere $x+a=zz$, on aura $x=zz-a$, & les deux autres formules ſe changeront en $zz+b-a$, & $zz+c-a$. Il faudroit préſentement que chacune de celles-ci fût un quarré; mais c'eſt ce qui n'admet point de ſolution générale; ſouvent la choſe eſt impoſſible, & ſa poſſibilité dépend uniquement de la nature des nombres $b-a$ & $c-a$. Car ſi, par exemple, $b-a=1$ & $c-a=-1$, c'eſt-à-dire $b=a+1$ & $c=a-1$, il faudroit que $zz+1$ & $zz-1$ fuſſent des quarrés, & que z par conſéquent fût une fraction; ainſi on feroit $z=\frac{p}{q}$, & il faudroit que les deux formules $pp+qq$ & $pp-qq$ fuſſent des quarrés, & que par conſéquent auſſi leur produit p^4-q^4 fût un quarré; or nous avons fait voir plus haut que cela eſt impoſſible.

Digitized by Google

Voulût-on faire $b-a=2$, & $c-a=-2$, c'eſt-à-dire $b=a+2$ & $c=a-2$, on auroit, en faiſant encore $z=\frac{p}{q}$, les deux formules $pp+2qq$ & $pp-2qq$ à transformer en quarrés; par conſéquent il faudroit auſſi que leur produit p^4-4q^4 devînt un quarré; or c'eſt ce que nous avons de même fait voir être impoſſible.

Soit en général $b-a=m$ & $c-a=n$; de plus $z=\frac{p}{q}$, il faudra que les formules $pp+mqq$ & $pp+nqq$ deviennent des quarrés; & nous venons de voir que cela eſt impoſſible, tant lorſque $m=+1$ & $n=-1$, que lorſque $m=+2$ & $n=-2$.

Cela eſt impoſſible auſſi, lorſque $m=ff$ & $n=-ff$; car on auroit dans ce cas deux formules, dont le produit ſeroit $=p^4-f^4q^4$, c'eſt-à-dire la différence de deux bi-quarrés, & nous ſavons qu'une telle différence ne peut jamais devenir un quarré.

De même, quand $m=2ff$ & $n=-2ff$, on a les deux formules $pp+2ffqq$ & $pp-2ffqq$ qui ne peuvent devenir toutes les deux des quarrés, parce qu'il faudroit que

Digitized by Google

leur produit $p^4 - 4f^4q^4$ pût devenir un quarré ; or ſi l'on fait $fq = r$, ce produit ſe change en $p^4 - 4r^4$, qui eſt une formule dont l'impoſſibilité a été démontrée plus haut.

Que ſi l'on ſuppoſe $m = 1$ & $n = 2$, en ſorte qu'il s'agiſſe de réduire en quarrés les formules $pp + qq$ & $pp + 2qq$, on fera $pp + qq = rr$ & $pp + 2qq = ff$; la premiere équation donnera $pp = rr - qq$, & la ſeconde donnera $rr + qq = ff$; donc il faudroit que tant $rr - qq$ que $rr + qq$ pût être un quarré ; or l'impoſſibilité en eſt prouvée, puiſque le produit de ces formules, ou $r^4 - q^4$, ne peut devenir un quarré.

Les exemples que nous venons de donner ſuffiſent pour faire voir qu'il n'eſt pas facile de choiſir pour m & n les nombres qui rendent la ſolution poſſible. L'unique moyen de trouver de telles valeurs de m & de n, c'eſt de les imaginer, ou bien de les déterminer par la méthode qui ſuit.

On fait $ff + mgg = hh$ & $ff + ngg = kk$; on a par la premiere équation $m = \frac{hh - ff}{gg}$,

Digitized by Google

& par la seconde $n=\frac{kk-ff}{gg}$; cela posé, on n'a qu'à prendre pour f, g, h & k des nombres quelconques à volonté, & on aura des valeurs de m & de n qui rendront la solution possible.

Soit, par exemp. $h=3$, $k=5$, $f=1$ & $g=2$, on aura $m=2$ & $n=6$; & on peut être certain maintenant qu'il est possible de réduire en quarrés les formules $pp+2qq$ & $pp+6qq$, puisque cela arrive quand $p=1$ & $q=2$. Mais la premiere formule devient en général un quarré, si $p=rr-2ss$ & $q=2rs$; car il en résulte $pp+2qq=(rr+2ss)^2$. La seconde formule devient alors $pp+6qq=r^4+20rrss+4s^4$, & nous connoissons un cas où elle devient un quarré, savoir le cas de $p=1$ & $q=2$, qui donne $r=1$ & $s=1$, ou en général $r=s$; de sorte que la formule est $=25s^4$. Connoissant donc ce cas, nous ferons $r=s+t$; nous aurons $rr=ss+2st+tt$, & $r^4=s^4+4s^3t+6sstt+4st^3+t^4$, notre formule deviendra $25s^4+44s^3t+26sstt+4st^3+t^4$; & supposant que sa racine soit $5ss$

Digitized by Google

$+ffst+tt$, nous l'égalerons au quarré $25f^4 + 10ff^3t + 10fftt + 2fft^3 + t^4$, au moyen $+ffffst$ de quoi les premiers & les derniers termes ſe détruiront. Faiſons de plus $4=2f$, ou $f=2$, afin de chaſſer les termes pénultiemes, & nous parviendrons à l'équation $44f+26t=10ff+10t+fft=20f+14t$, ou $2f=-t$, & $\frac{f}{t}=-\frac{1}{2}$; donc $f=-1$ & $t=2$, ou $t=-2f$, & par conſéquent $r=-f$ & $rr=ff$, ce qui n'eſt autre choſe que le cas déjà connu.

Mais déterminons donc plutôt f, de façon que les ſeconds termes s'évanouiſſent: il faudra faire $44=10f$, ou $f=\frac{22}{5}$; & en diviſant enſuite les autres termes par ftt, nous aurons $26f+4t=10f+fff+2ft$, c'eſt-à-dire $-\frac{84}{25}f=\frac{24}{5}t$; ce qui donne $t=-\frac{7}{10}f$ & $r=f+t=\frac{3}{10}f$, ou $\frac{r}{f}=\frac{3}{10}$; ainſi $r=3$ & $f=10$; moyennant cela nous trouvons $p=2ff-rr=191$ & $q=2rf=60$, & nos formules ſeront $pp+2qq=43681=(209)^2$ & $pp+6qq=58081=\overline{241}^2$.

Digitized by Google

224.

Remarque. On peut trouver de la même maniere encore d'autres nombres pour m & n, qui faſſent que nos formules deviennent des quarrés; & il eſt bon de remarquer que le rapport de m à n eſt arbitraire.

Soit ce rapport, comme a à b, & qu'on ait $m = az$ & $n = bz$, il ſera queſtion de ſavoir comment on doit déterminer z, afin que les deux formules $pp + azqq$ & $pp + bzqq$ puiſſent être transformées en quarrés. Nous en indiquerons les moyens dans la ſolution du probleme ſuivant.

225.

Neuvieme queſtion. Si a & b ſont des nombres donnés, trouver le nombre z, tel que les deux formules $pp + azqq$ & $pp + bzqq$ deviennent des quarrés, & déterminer en même temps les plus petites valeurs poſſibles de p & de q.

Qu'on faſſe $pp + azqq = rr$ & $pp + bzqq = ſſ$, & qu'on multiplie la premiere équation par b & la ſeconde par a, la différence

Digitized by Google

des deux produits fournira l'équation $(b-a)$ $pp=brr-aff$, & par conſéquent $pp=\frac{brr-aff}{b-a}$, & il faudra que cette formule ſoit un quarré; or c'eſt ce qui arrive, quand $r=f$. Qu'on ſuppoſe donc, afin de faire ſortir les fractions, $r=f+(b-a)t$, on aura $pp=\frac{brr-aff}{b-a}$ $=\frac{bff+2b(b-a)ft+b(b-a)^2tt-aff}{b-a}$

$=\frac{(b-a)ff+2b(b-a)ft+b(b-a)^2tt}{b-a}$

$=ff+2bft+b(b-a)tt.$

Qu'on faſſe maintenant $p=f+\frac{x}{y}t$, on aura $pp=ff+\frac{2x}{y}ft+\frac{xx}{yy}tt=ff+2bft+b$ $(b-a)tt$, où les ff ſe détruiſent; de ſorte que les autres termes étant diviſés par t, & multipliés par yy, donnent $2bfyy+b$ $(b-a)tyy=2fxy+txx$, d'où réſulte $t=\frac{2fxy-2bfyy}{b(b-a)yy-xx}$ & $\frac{t}{f}=\frac{2xy-2byy}{b(b-a)yy-xx}$. Ainſi $t=2xy$ $-2byy$, & $f=b(b-a)yy-xx$; de plus $r=2(b-a)xy-b(b-a)yy-xx$, & par conſéquent $p=f+\frac{x}{y}t=b(b-a)yy+xx$ $-2bxy=(x-by)^2-abyy$.

Ayant donc trouvé p, r & f, il nous

Digitized by Google

reſte à déterminer z. Souſtrayons pour cet effet la premiere équation $pp+azqq=rr$ de la ſeconde $pp+bzqq=ff$, le reſte fera $zqq(b-a)=ff-rr=(f+r)(f-r)$. Or $f+r=2(b-a)xy-2xx$, & $f-r=2b(b-a)yy-2(b-a)xy$, ou $f+r=2x((b-a)y-x)$, & $f-r=2(b-a)y(by-x)$; ainſi $(b-a)zqq=2x((b-a)y-x).2(b-a)y(by-x)$, ou $zqq=2x((b-a)y-x)2y(by-x)$, ou $zqq=4xy((b-a)y-x)(by-x)$; par conſéquent $z=\frac{4xy((b-a)y-x)(by-x)}{qq}$.

Il s'agit donc de prendre pour qq le plus grand quarré, par lequel le numérateur ſoit diviſible; mais remarquons premiérement que nous avons déjà trouvé $p=b(b-a)yy+xx-2bxy=(x-by)^2-abyy$, & qu'ainſi on peut ſimplifier en faiſant $x=v+by$, ou $x-by=v$, vu qu'alors $p=vv-abyy$, & $z=\frac{4(v+by).y.v(v+ay)}{qq}$, ou $z=\frac{4vy(v+ay)(v+by)}{qq}$. Moyennant cela on pourra prendre pour v & y des nombres quelconques, & adoptant pour qq le plus grand quarré contenu dans le numérateur, on déterminera facilement

Digitized by Google

lement la valeur de z; après quoi on reviendra aux équations $m=az$, $n=bz$, & $p=vv-abyy$, & on obtiendra les formules qu'on cherchoit.

I.) $pp+azqq=(vv-abyy)^2+4avy(v+ay)(v+by)$, qui eſt un quarré dont la racine eſt $r=-vv-2avy-abyy$.

II.) La ſeconde formule devient $pp+bzqq=(vv-abyy)^2+4bvy(v+ay)(v+by)$, ce qui eſt auſſi un quarré dont la racine $ſ=-vv-2bvy-abyy$; & on peut prendre les valeurs tant de r que de $ſ$ poſitives. Développons ces réſultats dans quelques exemples.

226.

Exemple premier. Soit $a=-1$ & $b=+1$, & qu'on cherche des nombres z, tels que les deux formules $pp-zqq$ & $pp+zqq$ deviennent des quarrés; ſavoir la premiere $=rr$, & la ſeconde $=ſſ$.

Nous avons donc $p=vv+yy$, & nous n'aurons, afin de trouver z, qu'à conſidérer la formule $z=\frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$; nous donnerons

Digitized by Google

à v & à y différentes valeurs, & nous verrons celles qui en réſultent pour z.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
$v-y$	1	1	3	1	7	7
$v+y$	3	5	5	9	25	9
zqq	4.6	4.30	16.15	9.16.5	36.25.16 7	16.9.14
qq	4	4	16	9.16	36.25.16	16.9
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

Nous ſommes en état, moyennant ces valeurs, de réſoudre les formules ſuivantes, & d'en faire des quarrés.

I.) On peut transformer en quarrés les formules $pp-6qq$ & $pp+6qq$: cela ſe fait en ſuppoſant $p=5$ & $q=2$; car la premiere devient $=25-24=1$, & la ſeconde $=25+24=49$.

II.) Auſſi les deux formules $pp-30qq$ & $pp+30qq$: ſavoir en faiſant $p=13$ & $q=2$; car la premiere devient $=169-120=49$, & la ſeconde $=169+120=289$.

III.) De même les deux formules $pp-15qq$ & $pp+15qq$: car ſi l'on fait $p=17$ &

Digitized by Google

$q=4$, on a la premiere $=289-240=49$, & la seconde $=289+240=529$.

IV.) Les deux formules $pp-5qq$ & $pp+5qq$ deviennent pareillement des quarrés : savoir quand $p=41$ & $q=12$; car alors $pp-5qq=1681-720=961=31^2$, & $pp+5qq=1681+720=2401=49^2$.

V.) Les deux formules $pp-7qq$ & $pp+7qq$ sont des quarrés, si $p=337$ & $q=120$; car la premiere alors est $=113569-100800=12769=113^2$, & la seconde est $=113569+100800=214369=463^2$.

VI.) Les formules $pp-14qq$ & $pp+14qq$ deviennent des quarrés dans le cas de $p=65$ & de $q=12$; car alors $pp-14qq=4225-2016=2209=47^2$, & $pp+14qq=4225+2016=6241=79^2$.

227.

Exemple second. Lorsque les deux nombres m & n sont dans le rapport de 1:2, c'est-à-dire que $a=1$ & $b=2$, & qu'ainsi $m=z$ & $n=2z$, trouver pour z des valeurs

Digitized by Google

telles, que les formules $pp+\zeta qq$ & $pp+2\zeta qq$ puiſſent être transformées en quarrés.

Il ſeroit ſuperflu ici de faire uſage des formules générales que nous avons données plus haut, cet exemple pouvant ſe réduire immédiatement au précédent. En effet, ſi $pp+\zeta qq=rr$ & $pp+2\zeta qq=ff$, on a par la premiere équation $pp=rr-\zeta qq$, ce qui étant ſubſtitué dans la ſeconde, donne $rr+\zeta qq=ff$; ainſi la queſtion eſt uniquement que les deux formules $rr-\zeta qq$ & $rr+\zeta qq$ puiſſent devenir des quarrés, & c'eſt, comme on voit, le cas de l'exemple précédent. On aura par conſéquent pour ζ les valeurs ſuivantes, 6, 30, 15, 5, 7, 14, &c.

On peut faire auſſi en général une tranſformation ſemblable. Car ſuppoſons que les deux formules $pp+mqq$ & $pp+nqq$ puiſſent devenir des quarrés, & faiſons $pp+mqq=rr$ & $pp+nqq=ff$; la premiere équation donnant $pp=rr-mqq$, la ſeconde deviendra $ff=rr-mqq+nqq$, ou $rr+(n-m)qq=ff$; ſi donc les premieres

formules ſont poſſibles, ces dernieres $rr - mqq$ & $rr + (n-m)qq$ le ſeront de même, & comme m & n peuvent être mis l'un à la place de l'autre, les formules $rr - nqq$ & $rr + (m-n)qq$ ſeront poſſibles pareillement; & au contraire, ſi les premieres ſont impoſſibles, les autres ne le ſeront pas moins.

228.

Exemple troiſieme. Que m ſoit à n comme 1:3, ou bien que $a=1$ & $b=3$, de ſorte que $m=7$ & $n=37$, & qu'il s'agiſſe de transformer en quarrés les formules $pp+7qq$ & $pp+37qq$.

Puiſque $a=1$ & $b=3$, la queſtion ſera poſſible dans tous les cas où $7qq=4vy(v+y)(v+3y)$, & $p=vv-3yy$. Ainſi adoptons pour v & y les valeurs ſuivantes:

Digitized by Google

	I.	II.	III.	IV.	V.
v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
$v+y$	2	5	5	9	25
$v+3y$	4	9	7	25	43
zqq	16.2	4.9.30	4.4.35	4.9.25.4.2	4.9.16.25.43
qq	16	4.9	4.4	4.4.9.25	4.9.16.25
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Or nous avons ici deux cas pour $z=2$, ce qui fait que nous pouvons transformer de deux manieres les formules $pp+2qq$ & $pp+6qq$.

La premiere eſt de faire $p=2$ & $q=4$, & par conſéquent auſſi $p=1$ & $q=2$; car nous avons alors $pp+2qq=9$ & $pp+6qq=25$.

La ſeconde maniere eſt de ſuppoſer $p=191$ & $q=60$, moyennant quoi nous aurons $pp+2qq=(209)^2$ & $pp+6qq=241^2$. Il eſt difficile de décider ſi on ne pourroit pas faire auſſi $z=1$; ce qui auroit lieu, quand zqq ſeroit un quarré. Mais quant à la queſtion, ſi les deux formules $pp+qq$ & $pp+3qq$ peuvent devenir des quarrés, voici le procédé qu'elle exige.

Digitized by Google

229.

Il s'agit de rechercher si on peut transformer en quarrés, ou non, les formules $pp+qq$ & $pp+3qq$: qu'on suppose $pp+qq=rr$ & $pp+3qq=ss$, & qu'on considere les points suivans :

I.) Les nombres p & q peuvent être regardés comme premiers entr'eux ; car s'ils avoient un commun diviseur, les deux formules ne laisseroient pas de rester des quarrés, après qu'on auroit divisé p & q par ce diviseur.

II.) p ne peut être un nombre pair ; car en ce cas q seroit impair, & par conséquent la seconde formule seroit un nombre de l'espece $4n+3$, qui ne peut devenir un quarré ; donc p est nécessairement impair, & pp est un nombre de l'espece $8n+1$.

III.) Puis donc que p est impair, il faut que, dans la premiere formule, q soit non-seulement pair, mais qu'il soit même divisible par 4, afin que qq devienne un nombre de l'espece $16n$, & que $pp+qq$ soit de l'espece $8n+1$.

Digitized by Google

IV.) De plus p ne peut être divisible par 3 ; car si cela étoit, pp seroit divisible par 9, & qq ne le seroit pas ; ainsi $3qq$ ne seroit divisible que par 3 & non par 9 ; par conséquent aussi $pp+3qq$ ne pourroit être divisé que par 3 & non par 9, & ne pourroit donc être un quarré ; ainsi p ne peut être divisé par 3, & pp sera un nombre de l'espece $3n+1$.

V.) Puisque p n'est pas divisible par 3, il faut que q le soit ; car autrement qq seroit un nombre de l'espece $3n+1$, & par conséquent $pp+qq$ un nombre de l'espece $3n+2$, qui ne peut être un quarré ; donc q doit pouvoir se diviser par 3.

VI.) p n'est pas divisible non plus par 5 ; car si cela étoit, q ne le seroit pas, & qq seroit un nombre de l'espece $5n+1$ ou $5n+4$; par conséquent $3qq$ seroit de l'espece $5n+3$ ou $5n+2$, & comme $pp+3qq$ appartiendroit aux mêmes especes, cette formule ne pourroit devenir un quarré ; donc il faut nécessairement que p ne soit pas divisible par 5, & que pp soit un

Digitized by Google

nombre de l'eſpece $5n+1$, ou de l'eſpece $5n+4$.

VII.) Mais puiſque p n'eſt pas diviſible par 5, voyons ſi q eſt diviſible par 5 ou non; que ſi q n'étoit pas diviſible par 5, qq ſeroit de l'eſpece $5n+2$ ou $5n+3$, comme nous avons vu; & puiſque pp eſt $5n+1$ ou $5n+4$, il faudroit que $pp+3qq$ fût de même, ou $5n+1$ ou $5n+4$.

Qu'on s'imagine $pp=5n+1$, on aura $qq=5n+4$, parce qu'autrement $pp+qq$ ne pourroit être un quarré; mais on auroit alors $3qq=5n+2$ & $pp+3qq=5n+3$, ce qui ne peut être un quarré.

Soit en ſecond lieu $pp=5n+4$, on a dans ce cas $qq=5n+1$ & $3qq=5n+3$; donc $pp+3qq=5n+2$, ce qui ne peut être non plus un quarré. Il s'enſuit de-là que qq doit être diviſible par 5.

VIII.) Or q étant diviſible d'abord par 4, enſuite par 3 & en troiſieme lieu auſſi par 5, il faut que ce ſoit un nombre tel que $4.3.5m$, ou que $q=60m$; ainſi nos formules deviendroient $pp+3600mm=rr$,

Digitized by Google

& $pp+10800mm=ff$; cela posé, la premiere, étant soustraite de la seconde, donnera $7200mm=ff-rr=(f+r)(f-r)$; de sorte qu'il faudra que $f+r$ & $f-r$ soient des facteurs de $7200mm$; & on doit faire attention en même temps qu'il faut que f & r soient des nombres impairs, & de plus premiers entr'eux.

IX.) Soit de plus $7200mm=4fg$, ou que les facteurs en soient $2f$ & $2g$, & qu'on suppose $f+r=2f$ & $f-r=2g$, on aura $f=f+g$ & $r=f-g$; & il faudra que f & g soient premiers entr'eux, & que l'un soit pair & l'autre impair. Or comme $fg=1800mm$, il faudra donc décomposer $1800mm$ en deux facteurs, dont l'un soit pair & l'autre impair, & qui n'aient aucun commun diviseur.

X.) Il est à remarquer en outre, que puisque $rr=pp+qq$, & qu'ainsi r est un diviseur de $pp+qq$, il faut que $r=f-g$ soit pareillement la somme de deux quarrés, & comme ce nombre est impair, il faut qu'il soit contenu dans la formule $4n+1$.

Digitized by Google

XI.) Si nous commençons maintenant par ſuppoſer $m=1$, nous aurons $fg=1800=8.9.25$, & de-là réſulteront les décompoſitions ſuivantes: $f=1800$ & $g=1$, ou $f=200$ & $g=9$, ou $f=72$ & $g=25$, ou $f=225$ & $g=8$. La premiere donne $r=f-g=1799=4n+3$; la ſeconde donne $r=f-g=191=4n+3$; la troiſieme donne $r=f-g=47=4n+3$; mais la quatrieme donne $r=f-g=217=4n+1$. Ainſi les trois premieres décompoſitions devront être exclues, & il ne nous reſtera que la quatrieme; nous pouvons en conclure en général, que le plus grand facteur doit être impair, & que le plus petit doit être pair; mais au reſte la valeur $r=217$ ne peut même avoir lieu ici, parce que ce nombre eſt diviſible par 7, ce qui n'eſt pas la ſomme de deux quarrés.

XII.) Soit $m=2$, on aura $fg=7200=32.225$; c'eſt pourquoi l'on fera $f=225$ & $g=32$, en ſorte que $r=f-g=193$; & ce nombre étant la ſomme de deux quarrés, il vaudra la peine de l'eſſayer.

Digitized by Google

Or comme $q=120$ & $r=193$, & que $pp=rr-qq=(r+q)(r-q)$, on aura $r+q=313$, & $r-q=73$; mais puiſque ces facteurs ne ſont pas des quarrés, on voit bien que pp ne devient pas un quarré. On perdroit de même ſa peine à ſubſtituer au lieu de m d'autres nombres, c'eſt ce que nous allons encore faire voir.

230.

Théoreme. Il eſt impoſſible que les deux formules $pp+qq$ & $pp+3qq$ ſoient l'une & l'autre un quarré en même temps; de ſorte que dans les cas où l'une eſt un quarré, il eſt sûr que l'autre n'en eſt pas un.

Démonſtration. Puiſque p eſt impair & que q eſt pair, ainſi que nous l'avons vu, $pp+qq$ ne peut être un quarré que lorſque $q=2rſ$ & $p=rr-ſſ$; & $pp+3qq$ ne peut être $=\square$, que lorſque $q=2tu$ & $p=tt-3uu$, ou $p=3uu-tt$. Or comme dans les deux cas q doit être un double produit, qu'on ſuppoſe pour l'un & l'autre $q=2abcd$, & qu'on faſſe pour la premiere formule

Digitized by Google

$r=ab$ & $f=cd$, & pour la seconde $t=ac$ & $u=bd$, on aura pour celle-là $p=aabb-ccdd$, & pour celle-ci $p=aacc-3bbdd$, ou $p=3bbdd-aacc$, & ces deux valeurs doivent être égales ; ainsi l'on a ou $aabb-ccdd=aacc-3bbdd$, ou bien $aabb-ccdd=3bbdd-aacc$, & on observera que les nombres a, b, c & d sont généralement plus petits que p & q. Il faudra maintenant considérer chaque cas séparément : le premier donne $aabb+3bbdd=ccdd+aacc$, ou $bb(aa+3dd)=cc(aa+dd)$, d'où résulte $\frac{bb}{cc}=\frac{aa+dd}{aa+3dd}$, fraction qui doit être un quarré. Or le numérateur & le dénominateur ne peuvent avoir ici d'autre commun diviseur que 2, parce qu'ils ont pour différence $2dd$. Si donc 2 étoit un commun diviseur, il faudroit que tant $\frac{aa+dd}{2}$ que $\frac{aa+3dd}{2}$ fût un quarré ; mais les nombres a & d sont dans ce cas impairs l'un & l'autre, ainsi leurs quarrés sont de la forme $8n+1$, & la formule $\frac{aa+3dd}{2}$ est compriſe dans l'expreſſion $4n+2$, & ne peut être un quarré ; donc 2 ne peut être un diviseur commun ;

Digitized by Google

le numérateur $aa+dd$ & le dénominateur $aa+3dd$ ſont premiers entr'eux, & il faut que chacun ſoit de ſoi-même un quarré. Or ces formules ſont ſemblables aux premieres, & ſi celles-ci étoient des quarrés, il faudroit que des formules ſemblables, mais compoſées des plus petits nombres, fuſſent auſſi des quarrés; ainſi on peut conclure réciproquement de ce qu'on n'a pas trouvé des quarrés dans les petits nombres, qu'il n'y en a point dans les grands.

Cette concluſion cependant n'eſt admiſſible qu'autant que le ſecond cas $aabb-ccdd=3bbdd-aacc$, nous en fournira une pareille. Or cette équation donne $aabb+aacc=3bbdd+ccdd$, ou $aa(bb+cc)=dd(3bb+cc)$, & par conſéquent $\frac{aa}{dd}=\frac{bb+cc}{3bb+cc}=\frac{cc+bb}{cc+3bb}$; ainſi cette fraction devant être un quarré, la concluſion précédente ſe trouve pleinement confirmée; car ſi dans de grands nombres il y avoit des cas où $pp+qq$ & $pp+3qq$ fuſſent des quarrés, il faudroit que de tels cas exiſtaſſent auſſi pour des nombres plus petits, & c'eſt ce qui n'a pas lieu.

Digitized by Google

231.

Douzieme queſtion. Déterminer trois nombres, x, y & z, tels qu'en les multipliant enſemble deux à deux, & ajoutant 1 au produit, on obtienne chaque fois un quarré; c'eſt-à-dire qu'il s'agit de tranſformer en quarrés les trois formules ſuivantes:

I.) $xy+1$, II.) $xz+1$, & III.) $yz+1$.

Qu'on ſuppoſe des deux dernieres l'une $xz+1=pp$, & l'autre $yz+1=qq$, & on aura $x=\frac{pp-1}{z}$ & $y=\frac{qq-1}{z}$. La premiere formule ſe trouve transformée par-là en celle-ci, $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz}+1$, qui doit par conſéquent être un quarré, & qui ne le ſera pas moins ſi on la multiplie par zz; de ſorte que la formule $(pp-1)(qq-1)+zz$, doit être un quarré, ce qu'il eſt facile d'obtenir. En effet, que la racine en ſoit $=z+r$, on aura $(pp-1)(qq-1)=2rz+rr$, & $z=\frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r}$, où l'on peut ſubſtituer à p, q & r des nombres quelconques.

Soit, par exemple, $r=-pq-1$, on

Digitized by Google

aura $rr = ppqq + 2pq + 1$, & $z = \frac{-2pq-pp-qq}{-2pq-2}$ $= \frac{pp+2pq+qq}{2pq+2}$; donc $x = \frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp+2pq+qq}$ $= \frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2}$, & $y = \frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}$.

Mais si l'on demande des nombres entiers, il faudra faire la premiere formule $xy + 1 = pp$, & supposer $z = x + y + q$; alors la seconde formule devient $xx + xy + xq + 1 = xx + qx + pp$, & la troisieme sera $xy + yy + qy + 1 = yy + qy + pp$, & elles deviennent évidemment des quarrés, si l'on fait $q = \pm 2p$, vu que dans ce cas la seconde est $= xx \pm 2px + pp$, dont la racine est $x \pm p$, & la troisieme est $= yy \pm 2py + pp$, dont la racine est $y \pm p$. Nous avons par conséquent cette solution très-élégante : $xy + 1 = pp$ ou $xy = pp - 1$, qui a lieu facilement pour une valeur quelconque de p; & de plus le troisieme nombre se trouve moyennant cela de deux manieres, puisqu'on a ou $z = x + y + 2p$, ou $z = x + y - 2p$. Eclaircissons ces résultats par quelques exemples.

I.) Soit

I.) Soit $p=3$, on aura $pp-1=8$; & ſi l'on fait $x=2$ & $y=4$, on aura ou $z=12$, ou $z=0$; ainſi les trois nombres cherchés ſont 2, 4 & 12.

II.) Soit $p=4$, on a $pp-1=15$; maintenant ſi $x=5$ & $y=3$, on trouve $z=16$ ou $z=0$; donc les trois nombres cherchés ſont 3, 5 & 16.

III.) Soit $p=5$, on aura $pp-1=24$; & ſi de plus on fait $x=3$ & $y=8$, on trouve $z=21$, ou bien auſſi $=1$; d'où réſultent les nombres ſuivans: 1, 3 & 8, ou 3, 8 & 21.

232.

Treizieme queſtion. On cherche trois nombres entiers, x, y, & z, tels que ſi on ajoute à chaque produit de ces nombres multipliés deux à deux, un nombre donné a, on obtienne chaque fois un quarré.

Puiſque les trois formules ſuivantes doivent être des quarrés, I.) $xy+a$, II.) $xz+a$, III.) $yz+a$, qu'on ſuppoſe la premiere $xy+a=pp$, & qu'on faſſe $z=x+y+q$,

Digitized by Google

on aura pour la seconde formule $xx+xy+xq+a=xx+xq+pp$, & pour la troisieme $xy+yy+yq+a=yy+qy+pp$, & elles deviennent toutes deux des quarrés, si $=\pm 2p$; ainsi $z=x+y\pm 2p$, c'est-à-dire qu'on peut trouver pour z deux valeurs différentes.

233.

Quatorzieme question. On demande quatre nombres entiers, x, y, z & v, tels que si on ajoute aux produits de ces nombres pris deux à deux, un nombre donné a, il en résulte des quarrés.

Il faut donc que les six formules suivantes deviennent des quarrés:

I.) $xy+a$, II.) $xz+a$, III.) $yz+a$,
IV.) $xv+a$, V.) $yv+a$, VI.) $zv+a$.

Qu'on commence par supposer la premiere $xy+a=pp$, & qu'on prenne $z=x+y+2p$, la seconde & la troisieme formule deviendront des quarrés. Si de plus on suppose $v=x+y-2p$, la quatrieme & la cinquieme formules deviendront pa-

Digitized by Google

reillement des quarrés ; il ne reſte donc que la ſixieme formule qui ſera $xx+2xy+yy-4pp+a$, & qui devra de même devenir un quarré. Or comme $pp=xy+a$, cette derniere formule devient $xx-2xy+yy-3a$, & par conſéquent il s'agit de tranſformer en quarrés les deux formules ſuivantes :

I.) $xy+a=pp$, & II.) $(x-y)^2-3a$.

Que la racine de la derniere ſoit $(x-y)-q$, on aura $(x-y)^2-3a=(x-y)^2-2q(x-y)+qq$; ainſi $-3a=-2q(x-y)+qq$, & $x-y=\frac{qq+3a}{2q}$, ou $x=y+\frac{qq+3a}{2q}$; par conſéquent $pp=yy+\frac{qq+3a}{2q}y+a$.

Soit à préſent $p=y+r$, il en réſultera $2ry+rr=\frac{qq+3a}{2q}y+a$, ou $4qry+2qrr=(qq+3a)y+2aq$, ou $2qrr-2aq=(qq+3a)y-4qry$, & $y=\frac{2qrr-2aq}{qq+3a-4qr}$, où q & r ſont arbitraires, pourvu que x & y deviennent des nombres entiers ; car puiſque $p=y+r$, les nombres z & v ſeront entiers pareillement. Le tout dépend principalement de la nature du nombre a, & il eſt vrai que

Digitized by Google

la condition par laquelle on exige des nombres entiers, pourroit causer quelques difficultés; mais il faut remarquer que la solution est déjà fort restreinte d'un autre côté, parce qu'on a donné aux lettres z & v les valeurs $x+y\pm 2p$, tandis qu'elles pourroient en avoir évidemment un grand nombre d'autres. Voici donc quelques considérations sur cette question, qui peuvent avoir leur utilité aussi dans d'autres cas.

I.) Lorsque $xy+a$ doit être un quarré, ou $xy=pp-a$, il faut toujours que les nombres x & y aient la forme $rr-aff$; si donc nous supposons $x=bb-acc$ & $y=dd-aee$, nous trouvons $xy=(bd-ace)^2-a(be-cd)^2$.

Soit maintenant $be-cd=\pm 1$, nous aurons $xy=(bd-ace)^2-a$, & par conséquent $xy+a=(bd-ace)^2$.

II.) Si de plus nous supposons $z=ff-agg$, & que nous donnions à f & à g des valeurs telles que $bg-cf=\pm 1$, & que aussi $dg-ef=\pm 1$, les formules $xz+a$ & $yz+a$ deviendront pareillement des quarrés. Ainsi tout se réduit à donner tant à b,

Digitized by Google

c, d & e qu'à f & à g, des valeurs telles que la propriété que nous avons ſuppoſée ait lieu.

III.) Repréſentons ces trois couples de lettres par les fractions $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ & $\frac{f}{g}$; elles devront être telles que chaque différence de deux d'entr'elles ſoit exprimée par une fraction, dont le numérateur $=1$. Car puiſque $\frac{b}{c}-\frac{d}{e}=\frac{be-dc}{ce}$, il faut, ainſi que nous l'avons vu, que ce numérateur ſoit $=\pm 1$. Une de ces fractions au reſte eſt arbitraire, & il eſt facile d'en trouver une autre, de façon que la condition preſcrite ait lieu. Soit, par exemple, la premiere $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$, il faudra que la ſeconde $\frac{d}{e}$ lui ſoit à peu près égale; qu'on faſſe donc $\frac{d}{e}=\frac{4}{3}$, on aura la différence $\frac{1}{6}$. On peut auſſi déterminer cette ſeconde fraction par le moyen de la premiere, d'une maniere générale; car puiſque $\frac{3}{2}-\frac{d}{e}=\frac{3e-2d}{2e}$, il faut que $3e-2d=1$, & par conſéquent $2d=3e-1$, & $d=e+\frac{e-1}{2}$. Ainſi faiſant $\frac{e-1}{2}=m$, ou $e=2m+1$, nous aurons $d=3m+1$, & notre ſeconde fraction ſera

Digitized by Google

$\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. C'eſt de la même maniere qu'on pourra déterminer la ſeconde fraction pour telle premiere que l'on voudra, comme on le voit par les exemples ſuivans:

$\frac{b}{c} =$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} =$	$\frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+1}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+2}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV.) Quand on a déterminé de la façon requiſe les deux fractions $\frac{b}{c}$ & $\frac{d}{e}$, il eſt facile d'en trouver auſſi une troiſieme analogue à celles-là. On n'a qu'à ſuppoſer $f = b+d$ & $g = c+e$, de ſorte que $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$; car les deux premieres donnant $be - cd = \pm 1$, on a $\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\mp 1}{cc+ce}$; & en ſouſtrayant de même la ſeconde de la troiſieme, on aura $\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be-cd}{ee+ce} = \frac{\pm 1}{ce+ee}$.

V.) Après avoir déterminé de cette maniere les trois fractions $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ & $\frac{f}{g}$, il eſt facile de réſoudre notre queſtion pour trois nombres x, y & z, en faiſant que les trois formules $xy+a$, $xz+a$ & $yz+a$, deviennent des quarrés: on n'a qu'à faire

Digitized by Google

$x=bb-acc$, $y=dd-aee$ & $z=ff-agg$. Qu'on prenne, par exemple, dans la table du n°. III, $\frac{b}{c}=\frac{5}{3}$ & $\frac{d}{e}=\frac{7}{4}$, on aura $\frac{f}{g}=\frac{12}{7}$; d'où réſulte $x=25-9a$, $y=49-16a$ & $z=144-49a$; & au moyen de quoi on a d'abord $xy+a=1225-840a+144a^2=(35-12a)^2$; enſuite $xz+a=3600-2520a+441a^2=(60-21a)^2$; enfin $yz+a=7056-4704a+784aa=(64-28a)^2$.

234.

Qu'il s'agiſſe maintenant de déterminer, conformément à notre queſtion, quatre lettres, x, y, z & v, il faudra joindre une quatrieme fraction aux trois précédentes. Soient donc les trois premieres $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{f}{g}=\frac{b+d}{c+e}$, & qu'on ſuppoſe la quatrieme fraction $\frac{h}{k}=\frac{d+f}{e+g}=\frac{2d+b}{2e+c}$, de façon qu'elle ait avec la troiſieme & la ſeconde le rapport preſcrit; ſi l'on fait après cela $x=bb-aacc$, $y=dd-aee$, $z=ff-agg$ & $v=hh-akk$, on aura rempli déjà les conditions ſuivantes: I.) $xy+a=\square$, II.) $xz+a=\square$, III.) yz

Digitized by Google

$+a = \square$, IV.) $yv+a = \square$, V.) $zv+a = \square$; & il ne reſte donc qu'à faire en ſorte qu'auſſi $xv+a$ devienne un quarré, ce qui ne réſulte pas des ſuppoſitions précédentes, parce que la premiere fraction n'a pas avec la quatrieme le rapport preſcrit. Cela nous oblige à conſerver dans les trois premieres fractions le nombre indéterminé m; c'eſt par ce moyen, & en déterminant m, que nous parviendrons à tranſformer auſſi en quarré la formule $xv+a$.

VI.) Qu'on tire donc de notre petite table le premier cas, & qu'on faſſe $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ & $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$; on aura $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$ & $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$, d'où réſulte $x = 9-4a$ & $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$; ainſi $xv+a = 9(6m+5)^2 - 4a(6m+5)^2 - 9a(4m+4)^2 + 4aa(4m+4)^2$, ou $xv+a = 9(6m+5)^2 - a(288m^2+538m+243) + 4aa(4m+4)^2$, de quoi on peut facilement faire un quarré, vu que mm ſe trouve multiplié par un quarré; mais c'eſt à quoi nous ne nous arrêterons pas.

VII.) On peut auſſi indiquer d'une maniere plus générale les fractions dont nous

Digitized by Google

avons fait voir qu'on avoit besoin ; car soit $\frac{b}{c}=\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}}$, $\frac{d}{e}=\frac{n\mathrm{I}-1}{n}$, on aura $\frac{f}{g}=\frac{n\mathrm{I}+\mathrm{I}-1}{n+1}$, & $\frac{g}{h}=\frac{2n\mathrm{I}+\mathrm{I}-2}{2n+1}$; qu'on suppose dans cette derniere fraction $2n+1=m$, elle deviendra $=\frac{\mathrm{I}m-2}{m}$; par conséquent la premiere donne $x=\mathrm{II}-a$, & la derniere fournit $v=(\mathrm{I}m-2)^2-amm$. La question est donc seulement que $xv+a$ devienne un quarré. Or à cause de $v=(\mathrm{II}-a).mm-4\mathrm{I}m+4$, on a $xv+a=(\mathrm{II}-a)^2mm-4(\mathrm{II}-a)\mathrm{I}m+4\mathrm{II}-3a$; & puis donc que ceci doit être un quarré, qu'on en suppose la racine $=(\mathrm{II}-a)m-p$; le quarré de cette quantité étant $(\mathrm{II}-a)^2mm-2(\mathrm{II}-a)mp+pp$, on aura $-4(\mathrm{II}-a)\mathrm{I}m+4\mathrm{II}-3a=-2(\mathrm{II}-a)mp+pp$; donc $m=\frac{pp-4\mathrm{II}+3a}{(\mathrm{II}-a)(2p-4\mathrm{I})}$. Soit $p=2\mathrm{I}+q$, on trouvera $m=\frac{4\mathrm{I}q+qq+3a}{2q(\mathrm{II}-a)}$, où l'on peut adopter pour I & q tels nombres que l'on voudra.

Si, par exemple, $a=1$, qu'on fasse $\mathrm{I}=2$, on aura $m=\frac{4q+qq+3}{6q}$; & en faisant $q=1$, on trouvera $m=\frac{4}{3}$, de plus $m=2n+1$; mais ne nous arrêtons pas à cette question plus long-temps, & passons à une autre.

Digitized by Google

Quinzieme queſtion. On cherche trois nombres x, y & z, tels que les ſommes & les différences de ces nombres pris deux à deux, ſoient des quarrés.

La queſtion exigeant qu'on transforme en quarrés les ſix formules ſuivantes: I.) $x+y$, II.) $x+z$, III.) $y+z$, IV.) $x-y$, V.) $x-z$, VI.) $y-z$, on commencera par les trois dernieres, & on ſuppoſera $x-y=pp$, $x-z=qq$ & $y-z=rr$; les deux dernieres fourniront $x=qq+z$ & $y=rr+z$; de ſorte qu'on aura $qq=pp+rr$, à cauſe de $x-y=qq-rr=pp$; ainſi $pp+rr$, ou la ſomme de deux quarrés, doit équivaloir à un quarré qq; or c'eſt ce qui arrive, quand $p=2ab$ & $r=aa-bb$, puiſqu'alors $q=aa+bb$. Mais conſervons encore les lettres p, q & r, & conſidérons auſſi les trois premieres formules, nous aurons 1°. $x+y=qq+rr+2z$; 2°. $x+z=qq+2z$; 3°. $y+z=rr+2z$. Soit la premiere $qq+rr+2z=tt$, moyennant quoi $2z=tt-qq-rr$; il faudra encore que $tt-rr=\square$ & $tt-qq=\square$, c'eſt-à-dire $tt-(aa-bb)^2$

$=\square$ & $tt-(aa+bb)^2=\square$; ou bien nous aurons à traiter les deux formules $tt-a^4-b^4+2aabb$ & $tt-a^4-b^4-2aabb$; or comme tant $cc+dd+2cd$ que $cc+dd-2cd$ ſont des quarrés, il eſt aiſé de voir que nous atteindrons notre but, en comparant $tt-a^4-b^4$ avec $cc+dd$ & $2aabb$ avec $2cd$. Suppoſons dans ce deſſein $cd=aabb=ffgghhkk$, & prenons $c=ffgg$ & $d=hhkk$; $aa=ffhh$ & $bb=ggkk$, ou $a=fh$ & $b=gk$; la premiere équation $tt-a^4-b^4=cc+dd$, prendra la forme $tt-f^4h^4-g^4k^4=f^4g^4+h^4k^4$; donc $tt=f^4g^4+f^4h^4+h^4k^4+g^4k^4$, ou $tt=(f^4+k^4)(g^4+h^4)$; il faudra par conſéquent que ce produit ſoit un quarré ; mais comme la réſolution en ſeroit difficile, reprenons les choſes d'une autre maniere.

Si nous déterminons par les trois premieres équations $x-y=pp$, $x-z=qq$, $y-z=rr$, les lettres y & z ; nous trouvons $y=x-pp$ & $z=x-qq$, d'où s'enſuit $qq=pp+rr$. Or nos premieres formules deviennent maintenant $x+y=2x-pp$, $x+z=2x-qq$, & $y+z=2x-pp-qq$. Faiſons

Digitized by Google

cette derniere $2x-pp-qq=tt$, de sorte que $2x=tt+pp+qq$, il ne nous restera à transformer en quarrés que les formules $tt+qq$ & $tt+pp$. Mais puisqu'il faut que $qq=pp+rr$, soit $q=aa+bb$, & $p=aa-bb$, nous aurons $r=2ab$, & par conséquent nos formules seront :

I.) $tt+(aa+bb)^2=tt+a^4+b^4+2aabb=\square$

II.) $tt+(aa-bb)^2=tt+a^4+b^4-2aabb=\square$.

Nous n'avons à présent, pour arriver à notre but, qu'à comparer de nouveau $tt+a^4+b^4$ avec $cc+dd$ & $2aabb$ avec $2cd$. Soit donc, comme ci-dessus, $c=ffgg$, $d=hhkk$, & $a=fh$, $b=gk$, nous aurons $cd=aabb$, & il faudra encore que $tt+f^4h^4+g^4k^4=cc+dd=f^4g^4+h^4k^4$; d'où résulte $tt=f^4g^4-f^4h^4+h^4k^4-g^4k^4=(f^4-k^4)(g^4-h^4)$. Ainsi tout se réduit à trouver deux différences de deux bi-quarrés, savoir f^4-k^4 & g^4-h^4, qui, multipliées l'une par l'autre, produisent un quarré.

Considérons pour cet effet la formule m^4-n^4, voyons quels nombres elle fournit, si l'on substitue à m & à n des nombres

Digitized by Google

donnés, & faisons attention aux quarrés qui se trouveront parmi ces nombres; la propriété de $m^4 - n^4 = (mm + nn)(mm - nn)$, nous servira à construire pour notre dessein la table qui suit:

TABLE des Nombres compris dans la Formule $m^4 - n^4$.

mm	*nn*	*mm*—*nn*	*mm*+*nn*	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	3.5
9	1	8	10	16.5
9	4	5	13	5.13
16	1	15	17	3.5.17
16	9	7	25	25.7
25	1	24	26	16.3.13
25	9	16	34	16.2.17
49	1	48	50	25.16.2.3
49	16	33	65	3.5.11.13
64	1	63	65	9.5.7.13
81	49	32	130	64.5.13
121	4	117	125	25.9.5.13
121	9	112	130	16.2.5.7.13
121	49	72	170	144.5.17
144	25	119	169	169.7.17
169	1	168	170	16.3.5.7.17
169	81	88	250	25.16.5.11
225	64	161	289	289.7.23

Digitized by Google

Nous pouvons déjà déduire de-là quelques solutions. En effet, soit $ff=9$ & $kk=4$, nous avons $f^4-k^4=13.5$; soit de plus $gg=81$ & $hh=49$, nous aurons $g^4-h^4=64.5.13$; donc alors $tt=64.25.169$, & $t=520$. Or puisque $tt=270400$, $f=3$, $g=9$, $k=2$, $h=7$, nous aurons $a=21$, $b=18$; ainsi $p=117$, $q=765$, & $r=756$; de tout cela résulte $2x=tt+pp+qq=869314$, & par conséquent $x=434657$; ensuite $y=x-pp=420968$, & enfin $z=x-qq=-150568$; & ce dernier nombre peut aussi se prendre positif ; la différence alors devient la somme, & réciproquement la somme devient la différence. Puis donc que les trois nombres cherchés sont :

$$\begin{array}{rl} & x=434657 \\ & y=420968 \\ & z=150568 \\ \hline \text{nous avons} & x+y=855625=(925)^2 \\ & x+z=585225=(765)^2 \\ & y+z=571536=(756)^2 \\ \hline \text{\& de plus} & x-y=13689=(117)^2 \\ & x-z=284089=(533)^2 \\ & y-z=270400=(520)^2. \end{array}$$

Digitized by Google

La table que nous avons donnée, feroit trouver encore d'autres nombres, en supposant $ff=9$, $kk=4$, & $gg=121$, $hh=4$; car alors $tt=13.5.5.13.9.25=9.25.25.169$, & $t=3.5.5.13=975$. Or comme $f=3$, $g=11$, $k=2$ & $h=2$, on a $a=fh=6$ & $b=gk=22$; par conséquent $p=aa-bb=-448$, $q=aa+bb=520$, & $r=2ab=264$; de-là provient $2x=tt+pp+qq=950625+200704+270400=1421729$, & $x=\frac{1421729}{2}$; donc $y=x-pp=\frac{1020321}{2}$, & $z=x-qq=\frac{880929}{2}$. Or il faut observer que si ces nombres ont la propriété qu'on exige, ils la conserveront par quelque quarré qu'on les multiplie. Si donc on les prend quatre fois plus grands, il faut que les nombres suivans satisfassent également: $x=2843458$, $y=2040642$ & $z=1761858$; & comme ces nombres sont plus grands que les précédens, on peut regarder ceux-ci comme les plus petits que la question admette.

Digitized by Google

236.

Seizieme queſtion. On demande trois quarrés, tels que la différence de chaque couple de ces quarrés ſoit un quarré.

La ſolution précédente peut ſervir à réſoudre auſſi cette nouvelle queſtion. En effet, ſi x, y & z ſont des nombres tels que les formules ſuivantes deviennent des quarrés: I.) $x+y$, II.) $x-y$, III.) $x+z$, IV.) $x-z$, V.) $y+z$, VI.) $y-z$; il eſt clair que pareillement le produit $xx-yy$ de la premiere & de la ſeconde, le produit $xx-zz$ de la troiſieme & de la quatrieme, & le produit $yy-zz$ de la cinquieme & de la ſixieme ſeront des quarrés, & par conſéquent xx, yy & zz ſeront trois quarrés tels qu'on les demande. Mais ces nombres ſeroient fort grands, & il y en a ſans doute de moindres qui ſatisfont, vu qu'il n'eſt pas néceſſaire, pour que $xx-yy$ devienne un quarré, que $x+y$ & $x-y$ ſoient des quarrés; car, par exemple, $25-9$ eſt un quarré, quoique ni $5+3$ ni $5-3$ ne ſoient pas

Digitized by Google

pas des quarrés. Ainſi réſolvons la queſtion indépendamment de cette conſidération, & remarquons d'abord qu'on peut prendre 1 pour l'un des quarrés cherchés : la raiſon en eſt que ſi les formules $xx-yy$, $xx-zz$ & $yy-zz$ ſont des quarrés, elles ne le ſeront pas moins, ſi on les diviſe par zz ; par conſéquent on peut ſuppoſer qu'il s'agit de transformer $\frac{xx}{zz}-\frac{yy}{zz}$, $\frac{xx}{zz}-1$, & $\frac{yy}{zz}-1$, & la queſtion ne roule à préſent que ſur les deux fractions $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$.

Or ſi nous ſuppoſons $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}$ & $\frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1}$, les deux dernieres conditions ſe trouveront remplies, puiſque de cette façon $\frac{xx}{zz}-1 = \frac{4pp}{(pp-1)^2}$ & $\frac{yy}{zz}-1=\frac{4qq}{(qq-1)^2}$. Par ce moyen-là il ne nous reſte à traiter que la premiere formule $\frac{xx}{zz}-\frac{yy}{zz}=\frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2}-\frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2}=\left(\frac{pp+1}{pp-1}+\frac{qq+1}{qq-1}\right)\times\left(\frac{pp+1}{pp-1}-\frac{qq+1}{qq-1}\right)$; or le premier facteur eſt ici $=\frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$, le ſecond eſt $=\frac{2(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, & le produit

Digitized by Google

de ces deux facteurs est $= \frac{4(ppqq-1)(qq-pp)}{(pp-1)^2(qq-1)^2}$.

On voit que dans ce produit le dénominateur est déjà un quarré, & que le numérateur renferme le quarré 4; donc il ne s'agit que de transformer en quarré la formule $(ppqq-1)(qq-pp)$, ou bien celle-ci, $(ppqq-1)(\frac{qq}{pp}-1)$, & on y parvient en faisant $pq = \frac{ff+gg}{2fg}$ & $\frac{q}{p} = \frac{hh+kk}{2hk}$, puisque dans ce cas chaque facteur devient séparément un quarré. Pour s'en convaincre, on remarquera que $qq = \frac{ff+gg}{2fg} \times \frac{hh+kk}{2hk}$, que par conséquent le produit de ces deux fractions doit être un quarré, qu'il doit l'être aussi étant multiplié par $4ffgg.hhkk$, moyennant quoi il devient $= fg(ff+gg)\,hk(hh+kk)$; ensuite, que cette formule devient tout-à-fait semblable à celle qu'on a trouvée précédemment, si l'on fait $f = a+b$, $g = a-b$, $h = c+d$ & $k = c-d$; puisqu'alors on a $2(a^4-b^4).2(c^4-d^4) = 4(a^4-b^4)(c^4-d^4)$, ce qui a lieu, comme nous avons vu, quand $aa = 9$, $bb = 4$, $cc = 81$ & $dd = 49$, ou $a = 3$, $b = 2$, $c = 9$

Digitized by Google

& $d=7$. Ainſi $f=5$, $g=1$, $h=16$ & $k=2$, d'où réſulte $pq=\frac{13}{5}$ & $\frac{q}{p}=\frac{260}{64}=\frac{65}{16}$; le produit de ces deux équations donne $qq=\frac{65.13}{16.5}=\frac{13.13}{16}$; donc $q=\frac{13}{4}$, & il s'enſuit que $p=\frac{4}{5}$, moyennant cela nous avons $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}=-\frac{41}{9}$, & $\frac{y}{z}=-\frac{qq+1}{qq-1}=\frac{185}{153}$; puis donc que $x=-\frac{41z}{9}$ & $y=\frac{185z}{153}$, faiſons, à l'effet d'obtenir des nombres entiers, $z=153$, & nous aurons $x=-697$ & $y=185$. Donc enfin les trois nombres quarrés cherchés ſont

$xx=485809$, & en effet $xx-yy=451584=(672)^2$
$yy=34225$, $yy-zz=10816=(104)^2$
$zz=23409$, $xx-zz=462400=(680)^2$.

Il eſt évident de plus que ces quarrés ſont beaucoup plus petits que ceux que nous euſſions trouvés, en quarrant les trois nombres x, y & z de la ſolution précédente.

237.

On nous objectera ſans doute ici que cette ſolution n'a été trouvée que par un ſimple tâtonnement, puiſque nous avons fait uſage de la table de l'art. 235. Mais nous répondrons que nous ne nous ſommes

Digitized by Google

ſervi de ce moyen, qu'afin de parvenir aux plus petits nombres poſſibles; car ſi on vouloit ne pas avoir égard à la briéveté, il ſeroit facile, moyennant les regles données ci-deſſus, de trouver une infinité de ſolutions. En effet, ayant trouvé $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1}$ & $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1}$, nous avons réduit la queſtion à celle de transformer en quarré le produit $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$; ſi donc nous faiſons $\frac{q}{p} = m$ ou $q = mp$, notre formule deviendra $(mmp^4-1)(mm-1)$, ce qui eſt évidemment un quarré, quand $p = 1$; mais de plus nous allons voir que cette valeur nous en fera connoître d'autres, ſi nous écrivons $p = 1+f$; nous avons, en conſéquence de cette ſuppoſition, à transformer la formule $(mm-1).(mm-1+4mmf+6mmff+4mmf^3+mmf^4)$; elle ne ſera pas moins un quarré, ſi on la diviſe par $(mm-1)^2$; cette diviſion nous donne $1+\frac{4mmf}{mm-1}+\frac{6mmff}{mm-1}+\frac{4mmf^3}{mm-1}+\frac{mmf^4}{mm-1}$; & ſi pour abréger nous faiſons $\frac{mm}{mm-1} = a$, nous

Digitized by Google

aurons à réduire en quarré la formule $1 + 4af + 6aff + 4af^3 + af^4$. Que la racine en ſoit $1 + ff + gff$, dont le quarré eſt $1 + 2ff + 2gff + ffff + 2fgf^3 + ggf^4$, & qu'on détermine f & g de maniere que les trois premiers termes s'évanouiſſent, ſavoir en faiſant $4a = 2f$ ou $f = 2a$, & $6a = 2g + ff$ ou $g = \frac{6a - ff}{2} = 3a - 2aa$, les deux derniers termes fourniront l'équation $4a + af = 2fg + ggf$, d'où réſulte $f = \frac{4a - 2fg}{gg - a}$ $= \frac{4a - 12aa + 8a^3}{4a^4 - 12a^3 + 9aa - a} = \frac{4 - 12a + 8aa}{4a^3 - 12aa + 9a - 1}$, ou $f = \frac{4(2a-1)}{4aa - 8a + 1}$, ſi on diviſe la fraction précédente par $a - 1$. Cette valeur eſt déjà ſuffiſante pour nous donner une infinité de ſolutions, parce que le nombre m, dans la valeur de a, $= \frac{mm}{mm-1}$, peut ſe prendre à volonté: c'eſt ce qu'il eſt à propos d'éclaircir par quelques exemples.

I.) Soit $m = 2$, on aura $a = \frac{4}{3}$; ainſi $f = 4 \cdot \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{23}{9}} = -\frac{60}{23}$; donc $p = -\frac{37}{23}$, & $q = -\frac{74}{23}$; enfin $\frac{x}{z} = \frac{949}{420}$, & $\frac{y}{z} = \frac{6005}{4947}$..

Digitized by Google

II.) Soit $m=\frac{3}{2}$, on aura $a=\frac{9}{5}$ & $f=4\cdot\frac{\frac{13}{5}}{\frac{-11}{25}}=-\frac{260}{11}$; par conſéquent $p=-\frac{249}{11}$, & $q=\frac{747}{22}$; au moyen de quoi l'on peut déterminer les fractions $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$.

Il eſt un cas particulier qui mérite que nous y faſſions attention; c'eſt celui où a eſt un quarré, & il a lieu, par exemple, quand $m=\frac{5}{3}$, puiſqu'alors $a=\frac{25}{16}$. Si nous faiſons encore ici, pour abréger, $a=bb$, en ſorte que notre formule ſoit $1+4bbf+6bbff+4bbf^3+bbf^4$, nous pourrons la comparer avec le quarré de $1+2bbf+bff$, c'eſt-à-dire avec $1+4bbf+2bff+4b^4ff+4b^3f^3+bbf^4$; & effaçant de part & d'autre les deux premiers termes & le dernier, & diviſant les autres par ff, nous aurons $6bb+4bbf=2b+4b^4+4b^3f$, d'où réſulte $f=\frac{6bb-2b-4b^4}{4b^3-4bb}=\frac{3b-1-2b^3}{2bb-2b}$; ou bien cette fraction étant diviſible encore par $b-1$, nous aurons enfin $f=\frac{1-2b-2bb}{2b}$ & $p=\frac{1-2bb}{2b}$.

Digitized by Google

Remarquons que nous aurions auſſi pu adopter $1+2bf+bff$ pour la racine de notre formule; le quarré du trinome étant $1+4bf+2bff+4bbff+4bbf^3+bbf^4$, nous aurions effacé le premier & les deux derniers termes; & diviſant les autres par f, nous ſerions parvenus à l'équation $4bb+6bbf=4b+2bf+4bbf$. Mais comme $bb=\frac{25}{16}$ & $b=\frac{5}{4}$, cette équation nous auroit donné $f=-2$ & $p=-1$; par conſéquent $pp-1=0$, & nous n'aurions pu tirer de-là aucune concluſion, puiſque z deviendroit $=0$.

Pour revenir donc à la ſolution précédente, qui a donné $p=\frac{1-2bb}{2b}$, comme $b=\frac{5}{4}$, elle nous indique que ſi $m=\frac{5}{3}$, on a $p=\frac{17}{20}$ & $q=mp=\frac{17}{12}$, par conſéquent $\frac{x}{z}=\frac{689}{111}$ & $\frac{y}{z}=\frac{433}{143}$.

238.

Dix-ſeptieme queſtion. On cherche trois nombres quarrés, tels que la ſomme de chaque couple ſoit un quarré.

Puiſque ce ſont les trois formules $xx+yy$, $xx+zz$ & $yy+zz$, qu'il s'agit de tranſ-

Digitized by Google

former, diviſons-les par zz, afin d'avoir ces trois autres :

$$\text{I.)}\ \frac{xx}{zz}+\frac{yy}{zz}=\square,\ \text{II.)}\ \frac{xx}{zz}+1=\square,$$
$$\text{III.)}\ \frac{yy}{zz}+1=\square.$$

On ſatisfait aux deux dernieres, en faiſant $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}$ & $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}$, & la premiere formule ſe change par-là en celle-ci, $\frac{(pp-1)^2}{4pp}+\frac{(qq-1)^2}{4qq}$, qui doit auſſi être un quarré, ſi on la multiplie par $4ppqq$, c'eſt-à-dire qu'il faut que $qq(pp-1)^2+pp(qq-1)^2=\square$; or c'eſt ce qui ne peut guere s'obtenir, à moins qu'on ne connoiſſe d'ailleurs un cas où cette formule devient un quarré ; & comme il eſt difficile auſſi de trouver un ſemblable câs, il faudra avoir recours à d'autres artifices, dont nous allons rapporter quelques-uns.

I.) Comme la formule en queſtion peut s'exprimer ainſi, $qq(p+1)^2(p-1)^2+pp(q+1)^2(q-1)^2=\square$, qu'on faſſe en ſorte qu'elle ſoit diviſible par le quarré $(p+1)^2$; on l'obtient en faiſant $q-1=p+1$, ou $q=p+2$; car alors $q+1=p+3$, & la

Digitized by Google

formule devient $(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2(p+1)^2 = \square$; de sorte qu'en divisant par $(p+1)^2$, on a $(p+2)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2$, ce qui doit être un quarré, & à quoi on peut donner la forme $2p^4+8p^3+6pp-4p+4$. Or le dernier terme étant ici un quarré, supposons que la racine de la formule soit $2+fp+gpp$ ou $gpp+fp+2$, dont le quarré est $ggp^4+2fgp^3+4gpp+ffpp+4fp+4$, & nous chasserons les trois derniers termes, en faisant $-4=4f$ ou $f=-1$, & $g=4g+1$ ou $g=\frac{1}{4}$; les premiers termes étant divisés par p^3, donneront ensuite $2p+8=ggp+2fg=\frac{25}{16}p-\frac{5}{2}$; nous trouvons par-là $p=-24$ & $q=-22$; donc enfin $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}=-\frac{575}{48}$, ou $x=-\frac{575}{48}z$, & $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{483}{44}$, ou $y=-\frac{483}{44}z$.

Faisons maintenant $z=16.3.11$, nous aurons $x=575.11$ & $y=483.12$, & par conséquent les racines des trois quarrés que nous cherchons, seront:

Digitized by Google

$x=6325=11.23.25$; $y=5796=12.21.23$;
$z=528=3.11.16$;

car il en réſulte:

$xx+yy=23^2(275^2+252^2)=23^2.373^2.$
$xx+zz=11^2(575^2+48^2)=11^2.577^2.$
$yy+zz=12^2(483^2+44^2)=12^2.485^2.$

II.) On peut obtenir encore d'une infinité de manieres, que notre formule ſoit diviſible par un quarré; qu'on ſuppoſe, par exemple, $(q+1)^2=4(p+1)^2$, ou $q+1=2(p+1)$, c'eſt-à-dire $q=2p+1$ & $q-1=2p$, la formule deviendra $(2p+1)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp.4.(p+1)^2(4pp)=\square$, ce qu'on peut diviſer par $(p+1)^2$, moyennant quoi l'on a $(2p+1)^2(p-1)^2+16p^4=\square$, ou $20p^4-4p^3-3pp+2p+1=\square$, mais de quoi on ne peut tirer aucun parti.

III.) Faiſons donc plutôt $(q-1)^2=4(p+1)^2$, ou $q-1=2(p+1)$, nous aurons $q=2p+3$ & $q+1=2p+4$, ou $q+1=2(p+2)$, & nous obtiendrons, après avoir diviſé notre formule par $(p+1)^2$, cette autre formule: $(2p+3)^2(p-1)^2+16pp$

Digitized by Google

$(p+2)^2$ ou $9-6p+53pp+68p^3+20p^4$; que la racine en soit $3-p+gpp$, dont le quarré est $9-6p+6gpp+pp-2gp^3+ggp^4$; les deux premiers termes s'évanouissent, & nous chassons le troisieme en faisant $53=6g+1$, ou $g=\frac{26}{3}$; ainsi les autres termes se divisent par p & donnent $20p+68=ggp-2g$, ou $\frac{256}{3}=\frac{496}{9}p$; donc $p=\frac{48}{31}$ & $q=\frac{189}{31}$, au moyen de quoi nous obtenons une nouvelle solution.

IV.) Si l'on veut faire $q-1=\frac{4}{3}(p-1)$, on a $q=\frac{4}{3}p-\frac{1}{3}$ & $q+1=\frac{4}{3}p+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(2p+1)$, & la formule après avoir été divisée par $(p-1)^2$, devient $\left(\frac{4p-1}{9}\right)^2(p+1)^2+\frac{64}{81}pp(2p+1)^2$; multipliant par 81, on a $9(4p-1)^2(p+1)^2+64pp(2p+1)^2=400p^4+472p^3+73pp-54p+9$, où le premier & le dernier terme sont l'un & l'autre des quarrés. Qu'on suppose donc la racine $=20pp-9p+3$, dont le quarré est $400p^4-360p^3+120pp+81pp-54p+9$, on aura $472p+73=-360p+201$; donc $p=\frac{2}{13}$, & $q=\frac{8}{39}-\frac{1}{3}$.

Digitized by Google

On auroit auſſi pu prendre pour racine $20pp+9p-3$, ce qui eſt celle de $400p^4+360p^3-120pp+81pp-54p+9$; mais en comparant ce quarré avec notre formule, on auroit trouvé $472p+73=360p-39$, & par conſéquent $p=-1$, valeur qui ne peut nous ſervir.

V.) On peut faire auſſi que notre formule ſoit même diviſible par les deux quarrés $(p+1)^2$ & $(p-1)^2$ en même tems. Qu'on faſſe pour cet effet $q=\frac{pt+1}{p+t}$, de ſorte que $q+1=\frac{pt+p+t+1}{p+t}=\frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$, & $q-1=\frac{pt-p-t+1}{p+t}=\frac{(p-1)(t-1)}{p+t}$, la formule ſe diviſera par $(p+1)^2(p-1)^2$, & ſe réduira à $\frac{(pt+1)^2}{(p+t)^2}+pp\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4}$; ſi on multiplie par $(p+t)^4$, il faudra, comme auparavant, que la formule puiſſe devenir un quarré, & on aura $(pt+1)^2(p+t)^2+pp(t+1)^2(t-1)^2$, ou $ttp^4+2t(tt+1)p^3+2ttpp+(tt+1)^2pp+(tt-1)^2pp+2t(tt+1)p+tt$, où le premier & le dernier termes ſont des quarrés. Qu'on prenne donc pour racine $tpp+(tt+1)p-t$, ce

Digitized by Google

qui eſt celle du quarré $ttp^4+2t(tt+1)p^3-2ttpp+(tt+1)^2pp-2t(tt+1)p+tt$, on aura, en comparant, $2ttp+(tt+1)^2p+(tt-1)^2p+2t(tt+1)=-2ttp+(tt+1)^2p-2t(tt+1)$, ou $4ttp+(tt-1)^2p+4t(tt+1)=0$, ou $(tt+1)^2p+4t(tt+1)=0$, c'eſt-à-dire $tt+1=\frac{-4t}{p}$; de-là réſulte $p=\frac{-4t}{tt+1}$; par conſéquent $pt+1=\frac{-3tt+1}{tt+1}$, & $p+t=\frac{t^3-3t}{tt+1}$; enfin auſſi $q=\frac{-3tt+1}{t^3-3t}$, & la lettre t eſt arbitraire.

Soit, par exemple, $t=2$, on aura $p=\frac{-8}{5}$ & $q=\frac{-11}{2}$; ainſi $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}=+\frac{39}{80}$, & $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{117}{44}$, ou $x=\frac{3.13}{4.4.5}z$ & $y=\frac{9.13}{4.11}z$. Si de plus $z=4.4.5.11$, on a $x=3.13.11$ & $y=4.5.9.13$, & les racines des trois quarrés cherchés ſont $x=3.11.13=429$, $y=4.5.9.13=2340$, & $z=4.4.5.11=880$. On voit qu'elles ſont encore plus petites que celles que nous avons trouvées ci-deſſus, & il en réſulte

$xx+yy=3^2.13^2(121+3600)=3^2.13^2.61^2$,
$xx+zz=11^2.(1521+6400)=11^2.89^2$,
$yy+zz=20^2.(13689+1936)=20^2.125^2$.

Digitized by Google

VI.) Une derniere remarque que nous ferons au ſujet de cette queſtion, c'eſt que chaque ſolution en fournit aiſément une nouvelle ; car lorſqu'on a trouvé trois valeurs, $x=a$, $y=b$ & $z=c$, de ſorte que $aa+bb=\square$, $aa+cc=\square$, & $bb+cc=\square$, les trois valeurs ſuivantes ſatisferont pareillement, ſavoir $x=ab$, $y=bc$ & $z=ac$. Il faut que

$$xx+yy=aabb+bbcc=bb(aa+cc)=\square,$$
$$xx+zz=aabb+aacc=aa(bb+cc)=\square,$$
$$yy+zz=aacc+bbcc=cc(aa+bb)=\square.$$

Or, comme nous venons de trouver $x=a=3.11.13$, $y=b=4.5.9.13$ & $z=c=4.4.5.11$, nous avons d'après la nouvelle ſolution,

$$x=ab=3.4.5.9.11.13.13,$$
$$y=bc=4.4.4.5.5.9.11.13,$$
$$z=ac=3.4.4.5.11.11.13.$$

Et toutes ces trois valeurs étant diviſibles par $3.4.5.11.13$, ſe réduiſent aux ſuivantes, $x=9.13$, $y=3.4.4.5$ & $z=4.11$, ou $x=117$, $y=240$ & $z=44$, qui ſont encore moindres que celles qu'a données la ſolution précédente, & il en réſulte

Digitized by Google

$xx+yy=71289=267^2$,
$xx+zz=15625=125^2$,
$yy+zz=59536=244^2$.

239.

Dix-huitieme queſtion. On cherche deux nombres x & y, tels que l'un ajouté au quarré de l'autre, produiſe un quarré; c'eſt-à-dire que $xx+y$ & $yy+x$ ſoient des quarrés.

Si on vouloit commencer par ſuppoſer $xx+y=pp$, & en déduire $y=pp-xx$, on auroit pour l'autre formule $p^4-2ppxx+x^4+x=\square$, & on auroit de la peine à la réſoudre.

Qu'on ſuppoſe donc en même tems l'une des deux formules $xx+y=(p-x)^2=pp-2px+xx$, & l'autre $yy+x=(q-y)^2=qq-2qy+yy$, on obtiendra par-là les deux équations ſuivantes, I.) $y+2px=pp$, & II.) $x+2qy=qq$, deſquelles on tire aiſément $x=\frac{2qpp-qq}{4pq-1}$ & $y=\frac{2pqq-qq}{4pq-1}$, où p & q ſont indéterminés. Qu'on ſuppoſe donc, par exemple, $p=2$ & $q=3$, on aura les

Digitized by Google

deux nombres cherchés $x=\frac{15}{23}$ & $y=\frac{32}{23}$, moyennant quoi $xx+y=\frac{225}{529}+\frac{32}{23}=\frac{961}{529}=\left(\frac{31}{23}\right)^2$, & $yy+x=\frac{1024}{529}+\frac{15}{23}=\frac{1369}{529}=\left(\frac{37}{23}\right)^2$.

Si on faiſoit $p=1$ & $q=3$, on auroit $x=-\frac{3}{11}$ & $y=\frac{17}{11}$, ſolution qu'on pourroit ne pas admettre, parce que l'un des nombres cherchés ſe trouve négatif.

Mais ſoit $p=1$ & $q=\frac{3}{2}$, nous aurons $x=\frac{3}{20}$ & $y=\frac{7}{10}$, d'où nous dérivons $xx+y=\frac{9}{400}+\frac{7}{10}=\frac{289}{400}=\left(\frac{17}{20}\right)^2$, & $yy+x=\frac{49}{100}+\frac{3}{20}=\frac{64}{100}=\left(\frac{8}{10}\right)^2$.

240.

Dix-neuvieme queſtion. Trouver deux nombres dont la ſomme ſoit un quarré, & dont les quarrés ajoutés enſemble produiſent un bi-quarré.

Nommons ces nombres x & y; & puiſque $xx+yy$ doit devenir un bi-quarré, commençons par en faire un quarté, en ſuppoſant $x=pp-qq$ & $y=2pq$, au moyen de quoi $xx+yy=(pp+qq)^2$. Or, pour

Digitized by Google

pour que ce quarré devienne un bi-quarré, il faut que $pp+qq$ ſoit un quarré; continuons donc en faiſant $p=rr-ff$ & $q=2rf$, afin que $pp+qq=(rr+ff)^2$; & préſentement nous avons $xx+yy=(rr+ff)^4$, ce qui eſt un bi-quarré. Or, ſuivant ces ſuppoſitions, nous avons $x=r^4-6rrff+f^4$ & $y=4r^3f-4rf^3$; il nous reſte donc par conſéquent à transformer en un quarré la formule $x+y=r^4+4r^3f-6rrff-4rf^3+f^4$.

Imaginons que ſa racine ſoit $rr+2rf+ff$, ou la formule égale au quarré $r^4+4r^3f+6rrff+4rf^3+f^4$, nous pourrons effacer de part & d'autre les deux premiers & le dernier terme, & diviſer les autres par rff, ainſi nous aurons $6r+4f=-6r-4f$, ou $12r+8f=0$; de ſorte que $f=-\frac{12r}{8}=-\frac{3}{2}r$. Nous pourrions auſſi ſuppoſer la racine $=rr-2rf+ff$, en égalant la formule au quarré $r^4-4r^3f+6rrff-4rf^3+f^4$; de cette maniere le premier & les deux derniers termes ſe détruiſant des deux côtés, nous aurions, en diviſant par rrf,

Digitized by Google

les autres termes, $4r-6f=-4r+6f$, ou $8r=12f$; par conſéquent $r=\frac{3}{2}f$; ainſi dans cette ſeconde ſuppoſition ſi $r=3$ & $f=2$, nous trouverions $x=-119$, ou une valeur négative.

Mais faiſons à préſent $r=\frac{3}{2}f+t$, nous aurons pour notre formule

$$rr=\tfrac{9}{4}ff+3ft+tt;\ r^3=\tfrac{27}{8}f^3+\tfrac{27}{4}fft+\tfrac{9}{2}ftt+t^3.$$

Donc

$$\begin{aligned}
r^4 &= \tfrac{81}{16}f^4+\tfrac{27}{2}f^3t+\tfrac{27}{2}fftt+6ft^3+t^4\\
+4r^3f &= \tfrac{27}{2}f^4+27f^3t+18fftt+4ft^3\\
-6rrff &= -\tfrac{27}{2}f^4-18f^3t-6fftt\\
-4rf^3 &= -6f^4-4f^3t\\
+f^4 &= +f^4;
\end{aligned}$$

& par conſéquent la formule

$$\tfrac{1}{16}f^4+\tfrac{37}{2}f^3t+\tfrac{51}{2}fftt+10ft^3+t^4.$$

Cette formule doit auſſi être un quarré, ſi on la multiplie par 16, moyennant quoi elle devient $f^4+296f^3t+408fftt+160ft^3+16t^4$. Egalons-la au quarré de $ff+148ft-4tt$, c'eſt-à-dire à $f^4+296f^3t+21896fft-1184ft^3+16t^4$; nous voyons les deux premiers termes & le dernier ſe détruire des deux côtés, & nous parvenons par-là

Digitized by Google

à l'équation $21896f-1184t=408f+160t$, qui fournit $\frac{f}{t}=\frac{1344}{21488}=\frac{336}{5372}=\frac{84}{1343}$. Puis donc que $f=84$ & $t=1343$, nous aurons $r=\frac{1}{2}f+t=1469$, & par conséquent $x=r^4-6rrff+f^4=4565486027761$, & $y=4r^3f-4rf^3=106165229352o$.

CHAPITRE XV.

Solutions de quelques Questions où l'on demande des Cubes.

241.

Nous avons traité dans le Chapitre précédent quelques questions où il s'agissoit de faire en sorte que certaines formules devinssent des quarrés, & elles nous ont donné occasion de développer différens artifices que demande l'application des regles que nous avions données plus haut. Il nous reste à présent à considérer des questions qui roulent sur la transformation de certaines formules en cubes; les solutions qui vont suivre

Digitized by Google

répandront du jour sur les regles que nous avons aussi indiquées plus haut pour les transformations de cette espece.

242.

Question premiere. On demande que la somme de deux cubes, x^3 & y^3, soit un cube.

Puisque x^3+y^3 doit être un cube, il faut qu'en divisant cette formule par le cube y^3, le quotient soit pareillement un cube, ou que $\frac{x^3}{y^3}+1=C$. Soit donc $\frac{x}{y}=z-1$, nous aurons $z^3-3zz+3z=C$. Si nous voulions maintenant, en suivant les regles données plus haut, supposer ici la racine cubique $=z-u$, & en comparant la formule avec le cube $z^3-3uzz+3uuz-u^3$, déterminer u de façon que le second terme aussi s'évanouît, nous aurions $u=1$ & les autres termes, formant l'équation $3z=3uuz-u^3=3z-1$; nous trouverions $z=\infty$, d'où nous ne pourrions rien conclure. Laissons donc plutôt u indéterminé, & tirons z de l'équa-

Digitized by Google

tion quarrée $-3zz+3z=-3uzz+3uuz-u^3$, ou $3uzz-3zz=3uuz-3z-u^3$, ou $3(u-1)zz=3(uu-1)z-u^3$, ou $zz=(u+1)z-\frac{u^3}{3(u-1)}$; nous trouverons

$$z=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\frac{uu+2u+1}{4}-\frac{u^3}{3(u-1)}}$$

ou $z=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\frac{-u^3+3uu-3u-3}{12(u-1)}}$; la queſtion ſe réduit par conſéquent à tranſformer en quarré la fraction qui eſt ſous ce ſigne radical. Multiplions d'abord pour cet effet les deux termes par $3(u-1)$, afin que le dénominateur devenant un quarré, ſavoir $36(u-1)^2$, nous n'ayons à traiter que le numérateur $-3u^4+12u^3-18uu+9$. Comme le dernier terme eſt un quarré, nous ſuppoſerons la formule, conformément à la regle, égale au quarré de $guu+fu+3$, c'eſt-à-dire à $ggu^4+2fgu^3+6guu+6fu+9$, nous ferons diſparoître $+ffuu$ les trois derniers termes, en faiſant $o=6f$ ou $f=o$, & $6g+ff=-18$, ou $g=-3$;

Digitized by Google

& l'équation qui reſte, ſavoir $-3u+12=ggu+2fu=9u$, donnera $u=1$. Mais cette valeur ne nous apprend encore rien ; ainſi nous continuerons en écrivant $u=1+t$; or notre formule devenant dans ce cas $-12t-3t^4$, ce qui ne peut être un quarré, à moins que t ne ſoit négatif, faiſons auſſi-tôt $t=-f$; nous avons par ce moyen la formule $12f-3f^4$, qui devient un quarré dans le cas de $f=1$. Mais nous voici arrêtés de nouveau ; car dans ce cas de $f=1$, on a $t=-1$ & $u=0$, d'où l'on ne peut conclure autre choſe, ſi ce n'eſt que de quelque maniere qu'on s'y prenne, on ne trouvera jamais une valeur qui faſſe parvenir au but qu'on ſe propoſe ; & l'on peut en inférer déjà avec aſſez de confiance, qu'il eſt impoſſible de trouver deux cubes dont la ſomme ſoit un cube ; on s'en convaincra entiérement par la démonſtration ſuivante.

Digitized by Google

243.

Théoreme. Il n'eſt pas poſſible de trouver deux cubes dont la ſomme ou bien la différence ſoit un cube.

Nous commencerons par faire obſerver que ſi l'impoſſibilité dont nous parlons a lieu pour la ſomme, elle a lieu auſſi pour la différence de deux cubes. En effet, s'il eſt impoſſible que $x^3+y^3=z^3$, il eſt impoſſible auſſi que $z^3-y^3=x^3$; or z^3-y^3 eſt la différence de deux cubes; donc, &c. Cela poſé, il ſuffira de démontrer l'impoſſibilité en queſtion, ſoit de la ſomme ſeulement, ſoit de la différence; or voici la ſuite des raiſonnemens que cette démonſtration exige.

I.) On peut regarder les nombres x & y comme premiers entr'eux; car s'ils avoient un commun diviſeur, les cubes ſeroient auſſi diviſibles par le cube de ce diviſeur. Par exemple, ſoit $x=2a$ & $y=2b$, on auroit $x^3+y^3=8a^3+8b^3$; or ſi cette formule eſt un cube, a^3+b^3 en eſt auſſi un.

Digitized by Google

II.) Puis donc que x & y n'ont point de facteur commun, ces deux nombres ſont ou impairs tous les deux, ou bien l'un eſt pair & l'autre eſt impair. Dans le premier cas il faudroit que z fût pair, & dans l'autre ce nombre ſeroit impair. Par conſéquent de ces trois nombres x, y & z, il y en a toujours un qui eſt pair & deux qui ſont impairs; & il nous ſuffira donc pour notre démonſtration de conſidérer le cas où x & y ſont tous deux impairs, parce qu'il eſt indifférent de prouver l'impoſſibilité dont il s'agit pour la ſomme ou pour la différence, & qu'il arrive ſeulement que la ſomme devient la différence, lorſqu'une des racines eſt négative.

III.) Si donc x & y ſont impairs, il eſt clair que tant leur ſomme que leur différence ſera un nombre pair. Soit donc $\frac{x+y}{2}=p$ & $\frac{x-y}{2}=q$, nous aurons $x=p+q$ & $y=p-q$, d'où il ſuit que l'un des deux nombres p & q doit être pair & que l'autre doit être impair. Or nous avons $x^3+y^3=2p^3+6pqq=2p(pp+3qq)$; de ſorte qu'il

Digitized by Google

s'agit de prouver que ce produit $2p(pp+3qq)$ ne peut devenir un cube ; & ſi la démonſtration devoit ſe rapporter à la différence, on auroit $x^3-y^3=6ppq+2q^3=2q(qq+3pp)$, formule tout-à-fait la même que la précédente, ſi on met p & q à la place l'un de l'autre. Par conſéquent il ſuffit pour notre queſtion de démontrer l'impoſſibilité de la formule $2p(pp+3qq)$, puiſqu'il s'enſuivra néceſſairement que ni la ſomme ni la différence de deux cubes ne peut devenir un cube.

IV.) Si donc $2p(pp+3qq)$ étoit un cube, ce cube ſeroit pair, & par conſéquent diviſible par 8 ; donc il faudroit que la huitieme partie de notre formule, ou $\frac{1}{4}p(pp+3qq)$, fût un nombre entier & outre cela un cube. Or nous ſavons que l'un des nombres p & q eſt pair, & l'autre impair ; ainſi $pp+3qq$ doit être un nombre impair, qui n'étant point diviſible par 4, il faut que p le ſoit, ou que $\frac{p}{4}$ ſoit un nombre entier.

V.) Mais afin que le produit $\frac{p}{4}(pp+3qq)$ ſoit un cube, il faut que chacun de ces

Digitized by Google

facteurs, s'ils n'ont point de diviseur commun, soit un cube séparément; car si un produit de deux facteurs qui sont premiers entr'eux, doit être un cube, il faut nécessairement que chacun soit de soi-même un cube; le cas est différent & demande une considération particuliere, si ces facteurs ont un diviseur commun. Ainsi la question est ici de savoir si les deux facteurs p & $pp+3qq$ ne pourroient pas avoir un diviseur commun? Pour y répondre, il faut considérer que si ces facteurs ont un diviseur commun, les nombres pp & $pp+3qq$ auront le même diviseur; que la différence aussi de ces nombres, qui est $3qq$, aura le même diviseur commun avec pp, & que, puisque p & q sont premiers entre eux, ces nombres pp & $3qq$ ne peuvent avoir d'autre commun diviseur que 3, ce qui a lieu quand p est divisible par 3.

VI.) Nous avons par conséquent deux cas à examiner: l'un est celui où les facteurs p & $pp+3qq$ n'ont point de commun diviseur, ce qui arrive toujours, lorsque

Digitized by Google

p n'eſt pas diviſible par 3 ; l'autre cas eſt celui où ces facteurs ont un diviſeur commun, & il a lieu quand p peut ſe diviſer par 3 ; parce qu'alors les deux nombres ſont diviſibles par 3. Nous avons beſoin de diſtinguer ſoigneuſement ces deux cas l'un de l'autre, parce qu'ils exigent chacun une démonſtration particuliere.

VII.) *Premier cas.* Que p ne ſoit pas diviſible par 3, & que par conſéquent nos deux facteurs $\frac{p}{4}$ & $pp+3qq$ ſoient premiers entr'eux, de ſorte que chacun en particulier doive être un cube. Pour faire d'abord que $pp+3qq$ devienne un cube, il n'y a, comme nous l'avons vu plus haut, qu'à ſuppoſer $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$ & $p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$, ce qui donne $pp+3qq=(tt+3uu)^3$ ou un cube. Or par-là $p=t^3-9tuu=t(tt-9uu)$, & $q=3ttu-3u^3=3u(tt-uu)$. Puis donc que q eſt un nombre impair, il faut que u auſſi ſoit impair, & par conſéquent que t ſoit pair, parce que ſans cela $tt-uu$ ſeroit pair.

Digitized by Google

VIII.) Maintenant que nous avons transformé $pp+3qq$ en cube, & que nous avons trouvé $p=t(tt-9uu)=t(t+3u)(t-3u)$, il s'agit auſſi que $\frac{p}{4}$, & par conſéquent auſſi que $2p$ ſoit un cube; ou, ce qui revient au même, que la formule $2t(t+3u)(t-3u)$ ſoit un cube. Or nous avons à obſerver ici que t eſt un nombre pair & non diviſible par 3; puiſqu'autrement p ſeroit diviſible par 3, ce qu'on a expreſſément ſuppoſé n'être pas; ainſi les trois facteurs, $2t$, $t+3u$ & $t-3u$, ſont premiers entr'eux, & il faudroit que chacun d'eux fût un cube en particulier. Si donc nous faiſons $t+3u=f^3$ & $t-3u=g^3$, nous aurons $2t=f^3+g^3$. Si donc $2t$ eſt un cube, nous aurons deux cubes f^3 & g^3, dont la ſomme ſeroit un cube, & qui ſeroient évidemment beaucoup plus petits que les cubes x^3 & y^3 adoptés au commencement; car comme nous avons d'abord fait $x=p+q$ & $y=p-q$, & que nous venons à préſent de déterminer p & q par les lettres t & u, il faut néceſſairement que

Digitized by Google

les nombres x & y ſoient beaucoup plus grands que t & u.

IX.) Si donc il exiſtoit dans de grands nombres deux cubes tels que nous les demandons, on pourroit auſſi aſſigner en de moindres nombres deux cubes dont la ſomme feroit un cube, & on pourroit parvenir de la même maniere à des cubes toujours plus petits. Or comme il eſt très-certain qu'il n'y a point de ces cubes dans les petits nombres, il s'enſuit qu'il n'y en a point non plus dans les plus grands. Cette concluſion ſe confirme par celle que fournit le ſecond cas & qui eſt la même, comme on va voir.

X.) *Second cas.* Suppoſons à préſent que p ſoit diviſible par 3, & que q ne le ſoit pas, & faiſons $p=3r$, notre formule deviendra $\frac{3r}{4}.(9rr+3qq)$, ou $\frac{9}{4}r(3rr+qq)$; & ces deux facteurs ſont premiers entr'eux, vu que $3rr+qq$ n'eſt diviſible ni par 2 ni par 3, & que r doit être pair auſſi bien que p; c'eſt pourquoi chacun de ces deux facteurs doit être un cube en particulier.

Digitized by Google

XI.) Or en transformant le second facteur $3rr+qq$ ou $qq+3rr$, nous trouvons de la même maniere que ci-dessus $q=t(tt-9uu)$ & $r=3u(tt-uu)$; & il faut remarquer que puisque q étoit impair, t doit être ici pareillement un nombre impair, & que u doit être pair.

XII.) Mais il faut aussi que $\frac{9r}{4}$ soit un cube; ou en multipliant par le cube $\frac{8}{27}$, que $\frac{2r}{8}$ ou $2u(tt-uu)=2u(t+u)(t-u)$, soit un cube; & comme ces trois facteurs sont des nombres premiers entr'eux, il faut que chacun par lui-même soit un cube. Supposons donc $t+u=f^3$ & $t-u=g^3$, il s'ensuivra $2u=f^3-g^3$, c'est-à-dire que si $2u$ étoit un cube, f^3-g^3 seroit un cube. On auroit par conséquent deux cubes f^3 & g^3 beaucoup plus petits que les premiers, dont la différence seroit un cube, & par-là même on connoîtroit aussi deux cubes dont la somme seroit un cube, puisqu'on n'auroit qu'à faire $f^3-g^3=h^3$ pour avoir $f^3=h^3+g^3$, ou un cube égal à la somme de deux cubes. Voilà donc la conclusion précédente pleinement

Digitized by Google

confirmée ; c'eſt-à-dire qu'on ne peut aſſigner même par les plus grands nombres deux cubes tels, que leur ſomme ou leur différence ſoit un cube, & cela par la raiſon qu'on ne rencontre point de cubes de cette eſpece dans les plus petits nombres.

244.

Puis donc qu'il eſt impoſſible de trouver deux cubes dont la ſomme ou la différence ſoit un cube, notre premiere queſtion tombe d'elle-même ; auſſi a-t-on coutume plutôt de commencer dans cette matiere par la queſtion de déterminer trois cubes, dont la ſomme faſſe un cube ; mais en ſuppoſant que deux de ces cubes ſoient arbitraires, de ſorte qu'il ne s'agît que de trouver le troiſieme ; ainſi nous paſſerons immédiatement à cette queſtion.

245.

Queſtion deuxieme. Deux cubes a^3 & b^3 étant donnés, on demande un troiſieme cube, tel que ces trois cubes ajoutés enſemble faſſent un cube.

Digitized by Google

Il s'agit de transformer en cube la formule $a^3+b^3+x^3$; cela ne peut se faire à moins qu'on ne connoisse d'avance un cas satisfaisant; mais un cas de cette espece se présente aussi-tôt, c'est celui de $x=-a$; qu'on fasse donc $x=y-a$, on aura $x^3=y^3-3yy+3ayy-a^3$; c'est par conséquent la formule $y^3-3ayy+3aay+b^3$ qui doit devenir un cube; or le premier & le dernier terme étant ici des cubes, on trouve aussi-tôt deux solutions.

I.) La premiere demande qu'on fasse la racine de la formule $=y+b$, dont le cube est $y^3+3byy+3bby+b^3$; on a de cette maniere $-3ay+3aa=3by+3bb$; & par conséquent $y=\frac{aa-bb}{a+b}=a-b$; mais $x=-b$; de sorte que cette solution ne nous est d'aucun usage.

II.) Mais on peut aussi prendre pour racine $b+fy$, dont le cube est $f^3y^3+3bffyy+3bbfy+b^3$, & déterminer f de façon qu'aussi les troisiemes termes se détruisent, savoir en faisant $3aa=3bbf$, ou $f=\frac{aa}{bb}$; car alors on parvient à l'équation $y-3a=f^3y$

Digitized by Google

$=f^3y+3bff=\frac{a^6y}{b^6}+\frac{3a^4}{b^3}$, qui, multipliée par b^6, devient $b^6y-3ab^6=a^6y+3a^4b^3$, & donne $y=\frac{3a^4b^3+3ab^6}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3(a^3+b^3)}{b^6-a^6}$ $=\frac{3ab^3}{b^3-a^3}$, & par conſéquent $x=y-a$ $=\frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3}=a.\frac{2b^3+a^3}{b^3-a^3}$. Ainſi les deux cubes a^3 & b^3 étant donnés, nous connoiſſons auſſi la racine du troiſieme cube cherché; & ſi nous voulons que cette racine ſoit poſitive, nous n'avons qu'à ſuppoſer le cube b^3 plus grand que l'autre a^3: faiſons-en l'application à quelques exemples.

I.) Soient 1 & 8 les deux cubes donnés, en ſorte que $a=1$ & $b=2$; la formule $9+x^3$ deviendra un cube, ſi $x=\frac{17}{7}$; car on aura $9+x^3=\frac{8000}{343}=\left(\frac{20}{7}\right)^3$.

II.) Soient les cubes donnés 8 & 27, de ſorte que $a=2$ & $b=3$; la formule $35+x^3$ ſera un cube dans le cas de $x=\frac{124}{19}$.

III.) Que 27 & 64 ſoient les cubes donnés, c'eſt-à-dire que $a=3$ & $b=4$;

Digitized by Google

la formule $91+x^3$ deviendra un cube, si $x=\frac{465}{37}$.

Si l'on vouloit déterminer pour deux cubes donnés d'autres troisiemes cubes, il faudroit poursuivre en substituant $\frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3}+z$ au lieu de x, dans la formule $a^3+b^3+x^3$; car on parviendroit par ce moyen à une formule semblable à la précédente, & qui fourniroit ensuite de nouvelles valeurs de z; mais on voit assez qu'on s'engageroit dans des calculs très-prolixes.

246.

Il se présente au reste dans cette question un cas remarquable, celui où les deux cubes donnés sont égaux, où $a=b$; car dans ce cas on a $x=\frac{3a^4}{0}=\infty$; c'est-à-dire qu'on n'a aucune solution; & voilà la raison pour laquelle on n'a pu encore résoudre le probleme de transformer en cube la formule $2a^3+x^3$. Soit, par exemple $a=1$, ou que cette formule soit $2+x^3$, on trou-

Digitized by Google

vera que quelques formes qu'on lui donne, ce ſera toujours inutilement, & qu'on cherchera en vain une valeur de x qui ſatisfaſſe. On conclut de-là avec aſſez de certitude, qu'il eſt impoſſible de trouver un cube égal à la ſomme d'un cube & d'un double cube, ou bien que l'équation $2a^3+x^3=y^3$ eſt impoſſible; & comme cette équation donne $2a^3=y^3-x^3$, il ſeroit impoſſible auſſi de trouver deux cubes dont la différence fût égale au double d'un autre cube; cette conſéquence s'étend de même à la ſomme de deux cubes; & tout cela va être porté juſqu'à une évidence complette par la démonſtration qui ſuit.

247.

Théoreme. Ni la ſomme ni la différence de deux cubes ne peut devenir égale au double d'un autre cube; cela veut dire que la formule $x^3\pm y^3=2z^3$ eſt toujours impoſſible, ſi ce n'eſt dans le cas évident $y=x$.

On peut encore ici regarder x & y comme premiers entr'eux; car ſi ces nombres avoient un diviſeur commun, il faudroit

Digitized by Google

que z eût le même diviseur, & que toute l'équation, par conséquent, fût divisible par le cube de ce diviseur. Cela posé, comme $x^3 \pm y^3$ doit être un nombre pair, il faut que les nombres x & y soient impairs tous les deux, moyennant quoi tant leur somme que leur différence sera paire. Ainsi faisons $\frac{x+y}{2} = p$ & $\frac{x-y}{2} = q$, nous aurons $x = p+q$ & $y = p-q$, & il faudra que des deux nombres p & q l'un soit pair & l'autre impair. Or de-là il suit $x^3+y^3 = 2p^3+6pqq = 2p(pp+3qq)$, & $x^3-y^3 = 6ppq+2q^3 = 2q(3pp+qq)$, c'est-à-dire deux formules tout-à-fait semblables. Par conséquent il suffira de prouver que la formule $2p(pp+3qq)$ ne peut devenir le double d'un cube, ou que $p(pp+3qq)$ ne peut être un cube. On va voir comment nous nous y prendrons pour cette démonstration.

I.) Il se présente de nouveau deux cas différens à considérer : l'un où les deux facteurs p & $pp+3qq$ n'ont point de commun diviseur, & doivent être un cube chacun séparément ; l'autre où ces facteurs ont un diviseur commun, lequel diviseur cepen-

Digitized by Google

dant, comme nous avons vu, ne peut être autre que 3.

II.) *Premier cas.* En ſuppoſant donc que p ne ſoit pas diviſible par 3, & qu'ainſi les deux facteurs ſoient premiers entr'eux, nous réduirons d'abord $pp+3qq$ en cube, en faiſant $p=t(tt-9uu)$ & $q=3u(tt-9uu)$; moyennant cela il faudra ſeulement encore que p devienne un cube. Or t n'étant pas diviſible par 3, puiſqu'autrement p ſeroit auſſi diviſible par 3, les deux facteurs t & $tt-9uu$ ſont premiers entr'eux, & par conſéquent il faut que chacun en particulier ſoit un cube.

III.) Mais le dernier facteur à ſon tour a deux facteurs, ſavoir $t+3u$ & $t-3u$, qui ſont des nombres premiers entr'eux, d'abord parce que t n'eſt pas diviſible par 3, & en ſecond lieu, parce que l'un des nombres t & u eſt pair, tandis que l'autre eſt impair; car ſi ces nombres étoient impairs tous les deux, il faudroit que non-ſeulement p, mais auſſi que q fût impair, ce qui ne ſe peut; donc il faut que chacun de ces deux facteurs, $t+3u$ & $t-3u$ en particulier ſoit un cube.

Digitized by Google

IV.) Soit donc $t+3u=f^3$ & $t-3u=g^3$, nous aurons $2t=f^3+g^3$. Or t doit être un cube que nous désignerons par h^3, moyennant quoi il faudroit que $f^3+g^3=2h^3$; par conséquent nous aurions deux cubes beaucoup moindres, savoir f^3 & g^3, dont la somme seroit le double d'un cube.

V.) *Second cas.* Supposons à présent p divisible par 3, & conséquemment que q ne le soit pas.

Si nous faisons $p=3r$, notre formule devient $3r(9rr+3qq)=9r(3rr+qq)$, & ces facteurs étant maintenant des nombres premiers entr'eux, il faut que l'un & l'autre soient un cube.

VI.) Afin donc de transformer en cube le second, $qq+3rr$, nous ferons $q=t(tt-9uu)$ & $r=3u(tt-uu)$, & il faudra encore que l'un des nombres t & u soit impair & l'autre pair, vu qu'autrement les deux nombres q & r seroient pairs. Or nous obtenons par-là le premier facteur $9r=27u(tt-uu)$; & comme il doit être un cube, il faut aussi qu'en le divisant par 27, la formule $u(tt-uu)$, ou $u(t+u)(t-u)$, soit un cube.

Digitized by Google

VII.) Mais ces trois facteurs étant premiers entr'eux, il faut qu'ils soient tous eux-mêmes des cubes. Ainsi supposons pour les deux derniers $t+u=f^3$ & $t-u=g^3$, nous aurons $2u=f^3-g^3$; mais u devant être un cube, nous aurions de cette maniere, en de bien plus petits nombres, deux cubes dont la différence seroit égale au double d'un autre cube.

VIII.) Puis donc qu'on ne peut assigner en petits nombres des cubes tels que leur somme ou leur différence soit un cube doublé, il est clair qu'il n'y a point de cubes de cette espece, même parmi les plus grands nombres.

IX.) On objectera peut-être que notre conclusion pourroit induire en erreur; parce qu'il existe dans ces moindres nombres un cas satisfaisant, savoir celui de $f=g$. Mais on doit considérer que lorsque $f=g$, on a dans le premier cas $t+3u=t-3u$, & ainsi $u=0$; que par conséquent aussi $q=0$, & que comme nous avions supposé $x=p+q$ & $y=p-q$, il faudroit que les deux premiers cubes x^3 & y^3 eussent déjà été égaux

Digitized by Google

l'un & l'autre, lequel cas a été expreſſément excepté. De même, dans le ſecond cas, ſi $f=g$, il faut que $t+u=t-u$, & pareillement $u=0$; donc auſſi $r=0$ & $p=0$; donc les deux premiers cubes x^3 & y^3 deviendroient encore égaux, de quoi il n'eſt pas queſtion dans le probleme.

248.

Queſtion troiſieme. On demande en général trois cubes, x^3, y^3 & z^3, dont la ſomme ſoit égale à un cube.

Nous venons de voir qu'on peut ſuppoſer deux de ces cubes connus, & qu'on peut déterminer par-là le troiſieme, pourvu qu'il n'y en ait pas deux d'égaux; mais la méthode précédente ne fournit dans chaque cas qu'une ſeule valeur pour le troiſieme cube, & il ſeroit difficile d'en déduire de nouvelles.

Nous regarderons donc à préſent les trois cubes comme inconnus; & afin de donner une ſolution générale, nous ferons $x^3+y^3+z^3=v^3$; nous tranſpoſerons un des premiers pour avoir $x^3+y^3=v^3-z^3$; & voici

Digitized by Google

comment nous ſatisferons à cette équation.

I.) Soit $x=p+q$ & $y=p-q$, nous aurons, comme nous avons vu, $x^3+y^3=2p(pp+3qq)$. Soit de plus $v=r+ſ$ & $z=r-ſ$, nous aurons auſſi $v^3-z^3=2ſ(ſſ+3rr)$; donc il faut que $2p(pp+3qq)=2ſ(ſſ+3rr)$, ou $p(pp+3qq)=ſ(ſſ+3rr)$.

II.) Nous avons vu plus haut qu'un nombre, tel que $pp+3qq$, ne peut avoir pour diviſeurs que des nombres de la même forme. Puis donc que ces deux formules $pp+3qq$ & $ſſ+3rr$, doivent avoir néceſſairement un diviſeur commun, ſoit ce diviſeur $=tt+3uu$.

III.) Faiſons en conſéquence $pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu)$ & $ſſ+3rr=(hh+3kk)(tt+3uu)$, & nous aurons $p=ft+3gu$ & $q=gt-fu$; par conſéquent $pp=fftt+6fgtu+9gguu$ & $qq=ggtt-2fgtu+ffuu$, d'où réſulte $pp+3qq=(ff+3gg)tt+(3ff+9gg)uu$, ou bien $pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu)$.

IV.) Nous tirons de la même maniere de l'autre formule, $ſ=ht+3ku$ & $r=kt$

Digitized by Google

$-hu$; d'où réſulte l'équation $(ft+3gu)(ff+3gg)(tt+3uu)=(ht+3ku)(hh+3kk)(tt+3uu)$, qui, diviſée par $tt+3uu$, donne $ft(ff+3gg)+3gu(ff+3gg)=ht(hh+3kk)+3ku(hh+3kk)$, ou $ft(ff+3gg)-ht(hh+3kk)=3ku(hh+3kk)-3gu(ff+3gg)$, moyennant quoi $t=\frac{3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)}{f(ff+3gg)-h(hh+3kk)}u$.

V.) Chaſſons encore les fractions, en faiſant $u=f(ff+3gg)-h(hh+3kk)$, & nous aurons $t=3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)$, où l'on peut donner telles valeurs qu'on veut aux lettres f, g, h & k.

VI.) Lors donc que nous aurons déterminé par ces quatre nombres les valeurs de t & de u, nous aurons I.) $p=ft+3gu$, II.) $q=gt-fu$, III.) $ſ=ht+3ku$, IV.) $r=kt-hu$; de-là nous parviendrons enfin à la ſolution de la queſtion, $x=p+q$, $y=p-q$, $z=r-ſ$ & $v=r+ſ$; & cette ſolution eſt générale, au point qu'elle renferme tous les cas poſſibles, vu que dans tout ce calcul on n'a admis aucune limitation arbitraire. Tout l'artifice conſiſtoit à rendre notre équation diviſible par $tt+3uu$, moyennant quoi nous avons pu

Digitized by Google

déterminer les lettres t & u par une équation du premier degré. On peut faire des applications ſans nombre de nos formules : nous en donnerons quelques-unes pour exemples.

I.) Soit $k=0$ & $h=1$, on aura $t=-3g(ff+3gg)$, & $u=f(ff+3gg)-1$; ainſi $p=-3fg(ff+3gg)+3fg(ff+3gg)-3g=-3g$, & $q=-(ff+3gg)^2+f$; de plus $f=-3g(ff+3gg)$, & $r=-f(ff+3gg)+1$; par conſéquent

$$x=-3g-(ff+3gg)^2+f,$$
$$y=-3g+(ff+3gg)^2-f,$$
$$z=(3g-f)(ff+3gg)+1;$$

enfin $v=-(3g+f)(ff+3gg)+1$.

Si outre, cela nous ſuppoſons $f=-1$ & $g=+1$, nous aurons $x=-20$, $y=14$, $z=17$ & $v=-7$; & de-là réſulte l'équation finale $-20^3+14^3+17^3=-7^3$, ou $14^3+17^3+7^3=20^3$.

II.) Soit $f=2$, $g=1$, & par conſéquent $ff+3gg=7$; de plus $h=0$ & $k=1$; ainſi $hh+3kk=3$; on aura $t=-12$ & $u=14$; de ſorte que $p=2t+3u=18$, $q=t-2u=-40$, $r=t=-12$, & $f=3u=42$;

Digitized by Google

il en réſultera $x=p+q=-22$, $y=p-q=58$, $z=r-s=-54$, & $v=r+s=30$; donc $-22^3+58^3-54^3=30^3$, ou $58^3=30^3+54^3+22^3$; & comme toutes les racines ſont diviſibles par 2, on aura auſſi $29^3=15^3+27^3+11^3$.

III.) Soit $f=3$, $g=1$, $h=1$ & $k=1$; en ſorte que $ff+3gg=12$, & $hh+3kk=4$; & qu'ainſi $t=-24$ & $u=32$, ces deux valeurs ſont diviſibles par 8; & comme il ne s'agit ici que de leurs rapports, nous pouvons faire $t=-3$ & $u=4$. Nous obtenons par-là $p=3t+3u=+3$, $q=t-3u=-15$, $r=t-u=-7$ & $s=t+3u=+9$; par conſéquent $x=-12$ & $y=18$, $z=-16$ & $v=2$, d'où provient $-12^3+18^3-16^3=2^3$, ou $18^3=16^3+12^3+2^3$, ou bien auſſi, en diviſant par le cube de 2, $9^3=8^3+6^3+1^3$.

IV.) Suppoſons auſſi $g=0$ & $k=h$, au moyen de quoi nous laiſſons f & h indéterminées. Nous aurons $ff+3gg=ff$ & $hh+3kk=4hh$; ainſi $t=12h^3$ & $u=f^3-4h^3$; de plus $p=st=12fh^3$, $q=-f^4+4fh^3$, $r=12h^4-hf^3+4h^4=16h^4-hf^3$, & f

Digitized by Google

$=3hf^3$; donc enfin $x=p+q=16fh^3-f^4$, $y=p-q=8fh^3+f^4$, $z=r-s=16h^4-4hf^3$, & $v=r+s=16h^4+2hf^3$. Si nous faisons maintenant $f=h=1$, nous avons $x=15$, $y=9$, $z=12$, & $v=18$, ou bien, en divisant tout par 3, $x=5$, $y=3$, $z=4$ & $v=6$; de façon que $3^3+4^3+5^3=6^3$. La progression de ces trois racines 3, 4, 5, augmentant de l'unité, est digne d'attention; c'est pourquoi nous rechercherons s'il y en a encore d'autres de la même espece.

249.

Question quatrieme. On demande trois nombres qui forment une progression arithmétique, dont la différence soit 1, & qui soient tels que leurs cubes ajoutés ensemble reproduisent un cube.

Soit x le nombre ou le terme moyen, $x-1$ sera le plus petit & $x+1$ le plus grand; la somme des cubes de ces trois nombres est $3x^3+6x=3x(xx+2)$, & elle doit être un cube. Il nous faut ici d'avance un cas où cette propriété ait lieu, & nous

Digitized by Google

trouvons après quelques essais que ce cas est $x=4$.

Ainsi nous pouvons, d'après les regles établies plus haut, faire $x=4+y$; en sorte que $xx=16+8y+yy$ & $x^3=64+48y+12yy+y^3$, & moyennant quoi notre formule devient $216+150y+36yy+3y^3$, où le premier terme est un cube, mais où le dernier ne l'est pas.

Supposons donc la racine $=6+fy$, ou la formule $=216+108fy+18ffyy+f^3y^3$, & faisons évanouir les deux seconds termes, en écrivant $150=108f$, ou $f=\frac{25}{18}$; les autres termes, divisés par yy, donneront $36+3y=18ff+f^3y=\frac{25^2}{18}+\frac{25^3}{18^3}y$, ou $18^3.36+18^3.3y=18^2.25^2+25^3y$, ou $18^3.36-18^2.25^2=25^3y-18^3.3y$; donc $y=\frac{18^3.36-18^2.25^2}{25^3-3.18^3}=\frac{18^2.(18.36-25^2)}{25^3-3.18^2}$, c'est-à-dire $y=\frac{-324.23}{1871}=\frac{-7452}{1871}$, & par conséquent $x=\frac{32}{1871}$.

Comme on pourroit trouver embarrassant de poursuivre cette réduction en cubes,

Digitized by Google

il eſt bon d'obſerver que la queſtion peut toujours ſe réduire à des quarrés. En effet, puiſque $3x(xx+2)$ doit être un cube, qu'on ſuppoſe cette formule $=x^3y^3$, & on aura $3xx+6=xxy^3$, & par conſéquent $xx=\frac{6}{y^3-3}=\frac{36}{6y^3-18}$. Or le numérateur de cette fraction étant déjà un quarré, nous n'avons beſoin de transformer en quarré que le dénominateur $6y^3-18$, ce qui exige auſſi qu'on ait trouvé un cas. Conſidérons pour cet effet que 18 eſt diviſible par 9, mais que 6 eſt ſeulement diviſible par 3, & qu'ainſi y pourra ſe diviſer par 3; ſi nous faiſons donc $y=3z$, notre dénominateur deviendra $=162z^3-18$, ce qui étant diviſé par 9 & devenant $18z^3-2$, doit encore être un quarré; or c'eſt ce qui a lieu évidemment dans le cas de $z=1$. Ainſi nous ferons $z=1+v$, & il faudra que $16+54v+54vv+18v^3=\square$; que la racine en ſoit $4+\frac{27}{4}v$, dont le quarré eſt $16+54v+\frac{729}{16}vv$, il faudra que $54+18v=\frac{729}{16}$; ou $18v=-\frac{135}{16}$, ou $2v=-\frac{15}{16}$, & par conſéquent $v=-\frac{15}{32}$; ce qui produit $z=1+v=\frac{17}{32}$, & après cela $y=\frac{51}{32}$.

Digitized by Google

Reprenons à préſent le dénominateur $6y^3 - 18 = 162z^3 - 18 = 9(18z^3 - 2)$; puiſque la racine quarrée du facteur $18z^3 - 2$ eſt $4 + \frac{27}{4}v = \frac{107}{128}$, celle du dénominateur total eſt $\frac{321}{128}$; mais la racine du numérateur eſt 6; donc $x = \frac{6}{\frac{321}{128}} = \frac{256}{107}$, valeur tout-à-fait différente de celle que nous avons trouvée précédemment. Il s'enſuit que les racines de nos trois cubes cherchés ſont I.) $x - 1 = \frac{149}{107}$, II.) $x = \frac{256}{107}$, III.) $x + 1 = \frac{363}{107}$; & la ſomme des cubes de ces trois nombres ſera un cube dont la racine $xy = \frac{256}{107} \cdot \frac{51}{32} = \frac{408}{107}$.

250.

Nous terminerons ici ce traité de l'Analyſe indéterminée, ayant eu ſuffiſamment occaſion dans les queſtions que nous avons réſolues, d'expliquer les principaux artifices qu'on a imaginés juſqu'à préſent dans cette partie de l'Analyſe.

Fin des Élémens d'Algebre.

ADDITIONS.

Digitized by Google

ADDITIONS.

Digitized by Google

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

LES Géometres du ſiecle paſſé ſe ſont beaucoup occupés de l'Analyſe indéterminée, qu'on appelle vulgairement *Analyſe de Diophante ;* mais il n'y a proprement que Meſſieurs *Bachet* & *Fermat* qui aient ajouté quelque choſe à ce que *Diophante* lui-même nous a laiſſé ſur cette matiere.

On doit ſur-tout au premier une Méthode complette pour réſoudre en nombres entiers tous les problemes indéterminés du premier degré [*a*] ;

[*a*] Voyez plus bas le paragraphe III. Au reſte je ne parle point ici de ſon Commentaire ſur *Diophante*, parce que cet Ouvrage, excellent dans ſon genre, ne renferme à proprement parler aucune découverte.

Digitized by Google

le ſecond eſt l'Auteur de quelques Méthodes pour la réſolution des équations indéterminées qui paſſent le ſecond degré [*b*] ; de la Méthode ſinguliere, par laquelle on démontre qu'il eſt impoſſible que la ſomme ou la différence de deux carrés-carrés, puiſſe jamais être un carré [*c*] ; de la ſolution d'un grand nombre de problemes très-difficiles & de pluſieurs beaux théoremes ſur les nombres entiers, qu'il a laiſſés ſans démonſtration, mais dont la plupart

[*b*] Ce ſont celles qui ſont expoſées dans les chapitres 8, 9 & 10 du Traité précédent. Le P. *Billi* les a recueillies dans différens écrits de M. *Fermat*, & les a publiées à la tête de la nouvelle édition de *Diophante*, donnée par M. *Fermat* le fils.

[*c*] Cette méthode eſt détaillée dans le chapit. 13 du Traité précédent ; on en trouve les principes dans la *Remarque* de M. *Fermat*, qui eſt après la Queſtion XXVI du Livre VI de *Diophante*.

Digitized by Google

ont été enſuite démontrés par Mr. *Euler* dans les Commentaires de Pétersbourg [*d*].

Cette branche de l'Analyſe a été preſque abandonnée dans ce ſiecle ; & ſi on en excepte Mr. *Euler*, je ne connois perſonne qui s'y ſoit appliqué ; mais les belles & nombreuſes découvertes que ce grand Géometre y a faites, nous ont bien dédommagé de l'eſpece d'indifférence que les autres Géometres paroiſſent avoir eue juſqu'ici pour ces ſortes de recher-

[*d*] Les problemes & les théoremes dont nous parlons, ſont répandus dans les *Remarques* de M. *Fermat* ſur les Queſtions de *Diophante*, & dans ſes Lettres imprimées dans les *Opera Mathematica*, *&c.* & dans le ſecond volume des Œuvres de *Wallis*.

On trouvera auſſi dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour les années 1770 & ſuiv. les démonſtrations de quelques théoremes de cet Auteur, qui n'avoient pas encore été démontrés.

Digitized by Google

ches. Les Commentaires de Pétersbourg ſont pleins des travaux de Mr. *Euler* dans ce genre, & l'Ouvrage qu'il vient de donner eſt un nouveau ſervice qu'il rend aux Amateurs de l'Analyſe de *Diophante*. On n'avoit point encore d'Ouvrage où cette ſcience fût traitée d'une maniere méthodique, & qui renfermât & expliquât clairement les principales regles connues juſqu'ici pour la ſolution des problemes indéterminés. Le Traité précédent réunit ce double avantage; mais pour le rendre encore plus complet, j'ai cru devoir y faire pluſieurs additions dont je vais rendre compte en peu de mots.

La théorie des fractions continues eſt une des plus utiles de l'Arithmé-

Digitized by Google

tique, où elle ſert à réſoudre avec facilité des problemes qui, ſans ſon ſecours, ſeroient preſqu'intraitables; mais elle eſt d'un plus grand uſage encore dans la ſolution des problemes indéterminés, lorſqu'on ne demande que des nombres entiers. Cette raiſon m'a engagé à expoſer cette théorie avec toute l'étendue néceſſaire pour la faire bien entendre; comme elle manque dans les principaux Ouvrages d'Arithmétique & d'Algebre, elle doit être peu connue des Géometres; je ſerai ſatisfait, ſi je puis contribuer à la leur rendre un peu plus familiere. A la ſuite de cette théorie qui occupe le §. 1, viennent différens problemes curieux & entiérement nouveaux, qui dépen-

Digitized by Google

dent à la vérité de la même théorie ; mais que j'ai cru devoir traiter d'une maniere directe, pour en rendre la ſolution plus intéreſſante ; on y remarquera principalement une méthode très-ſimple & très-facile pour réduire en fractions continues les racines des équations du ſecond degré, & une démonſtration rigoureuſe que ces fractions doivent toujours être néceſſairement périodiques.

Les autres Additions concernent ſur-tout la réſolution des équations indéterminées du premier & du ſecond degré ; je donne pour celles-ci des méthodes générales & nouvelles, tant pour le cas où l'on ne demande que des nombres rationnels, que pour celui où l'on exige que les nombres

Digitized by Google

cherchés ſoient entiers ; & je traite d'ailleurs quelques autres matieres importantes & relatives au même objet.

Enfin le dernier paragraphe renferme des recherches ſur les fonctions qui ont la propriété, que le produit de deux ou de pluſieurs fonctions ſemblables, eſt auſſi une fonction ſemblable ; j'y donne une méthode générale pour trouver ces ſortes de fonctions, & j'en fais voir l'uſage pour la réſolution de différens problemes indéterminés, ſur leſquels les méthodes connues n'auroient aucune priſe.

Tels ſont les principaux objets de ces Additions, auxquelles j'aurois pu donner beaucoup plus d'étendue, ſi

Digitized by Google

je n'avois craint de paſſer de juſtes bornes ; je ſouhaite que les matieres que j'y ai traitées puiſſent mériter l'attention des Géometres, & réveiller leur goût pour une partie de l'Analyſe, qui me paroît très-digne d'exercer leur ſagacité.

Digitized by Google

ADDITIONS.

PARAGRAPHE PREMIER.

SUR LES FRACTIONS CONTINUES.

1. COMME la théorie des Fractions continues manque dans les livres ordinaires d'Arithmétique & d'Algebre, & que par cette raiſon elle doit être peu connue des Géometres, nous croyons devoir commencer ces Additions par une expoſition abrégée de cette théorie, dont nous aurons ſouvent lieu de faire l'application dans la ſuite.

On appelle en général *fraction continue* toute expreſſion de cette forme,

Digitized by Google

$$\alpha+\frac{b}{\beta+\frac{c}{\gamma+\frac{d}{\delta+}}},\ \&c.$$

où les quantités α, β, γ, δ, &c. & b, c, d, &c. ſont des nombres entiers poſitifs ou négatifs; mais nous ne conſidérerons ici que les fractions continues, où les numérateurs b, c, d, &c. ſont égaux à l'unité, c'eſt-à-dire celles qui ſont de la forme

$$\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta+}}},\ \&c.$$

α, β, γ, &c. étant d'ailleurs des nombres quelconques entiers poſitifs ou négatifs; car celles-ci ſont, à proprement parler, les ſeules qui ſoient d'un grand uſage dans l'Analyſe, les autres n'étant preſque que de pure curioſité.

2. Milord Brouncker eſt, je crois, le premier qui ait imaginé les fractions continues; on connoît celle qu'il a trouvée pour exprimer le rapport du carré circonſcrit, à l'aire du cercle, & qui eſt

$$1+\frac{1}{2+\frac{9}{2+\frac{25}{2+}}},\ \&c.$$

Digitized by Google

Mais on ignore le chemin qui l'y a conduit. On trouve seulement dans l'*Arithmetica infinitorum* quelques recherches sur ce sujet, dans lesquelles Wallis démontre d'une maniere assez indirecte, quoique fort ingénieuse, l'identité de l'expression de Brouncker avec la sienne, qui est, comme l'on sait, $\frac{3.3.5.5.5...}{2.4.4.6.6...}$; il y donne aussi la méthode de réduire en général toutes sortes de fractions continues à des fractions ordinaires. Au reste il ne paroît pas que l'un ou l'autre de ces deux grands Géometres ait connu les principales propriétés & les avantages singuliers des fractions continues ; nous verrons ci-après que la découverte en est principalement due à Huyghens.

3. Les fractions continues se présentent naturellement toutes les fois qu'il s'agit d'exprimer en nombres des quantités fractionnaires ou irrationnelles. En effet, supposons qu'on ait à évaluer une quantité quelconque donnée a, qui ne soit pas exprimable par un nombre entier ; la voie la plus simple est de commencer par chercher

Digitized by Google

le nombre entier qui ſera le plus proche de la valeur de a, & qui n'en différera que par une fraction moindre que l'unité. Soit ce nombre α, & l'on aura $a-\alpha$ égal à une fraction plus petite que l'unité; de ſorte que $\frac{1}{a-\alpha}$ ſera au contraire un nombre plus grand que l'unité; ſoit donc $\frac{1}{a-\alpha}=b$, & comme b doit être un nombre plus grand que l'unité, on pourra chercher de même le nombre entier qui approchera le plus de la valeur de b; & ce nombre étant nommé β, on aura de nouveau $b-\beta$ égal à une fraction plus petite que l'unité, & par conſéquent $\frac{1}{b-\beta}$ ſera égal à une quantité plus grande que l'unité, qu'on pourra déſigner par c; ainſi, pour évaluer c, il n'y aura qu'à chercher pareillement le nombre entier le plus proche de c, lequel étant déſigné par γ, on aura $c-\gamma$ égal à une quantité plus petite que l'unité, & par conſéquent $\frac{1}{c-\gamma}$ ſera égal à une quantité d plus grande que l'unité, & ainſi de ſuite. Par ce moyen il eſt clair qu'on doit épuiſer

Digitized by Google

peu à peu la valeur de a, & cela de la maniere la plus ſimple & la plus prompte qu'il eſt poſſible, puiſqu'on n'emploie que des nombres entiers dont chacun approche, autant qu'il eſt poſſible, de la valeur cherchée.

Maintenant, puiſque $\frac{1}{a-\alpha}=b$, on aura $a-\alpha=\frac{1}{b}$, & $a=\alpha+\frac{1}{b}$; de même, à cauſe de $\frac{1}{b-\beta}=c$, on aura $b=\beta+\frac{1}{c}$; &, à cauſe de $\frac{1}{c-\gamma}=d$, on aura pareillement $c=\gamma+\frac{1}{d}$, & ainſi de ſuite; de ſorte qu'en ſubſtituant ſucceſſivement ces valeurs, on aura

$$a=\alpha+\frac{1}{b},$$

$$=\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{c}},$$

$$=\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta}}},$$

& en général

$$a=\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta+}}},\ \&c.$$

Il eſt bon de remarquer ici que les nombres α, β, γ, &c. qui repréſentent, comme

Digitized by Google

nous venons de le voir, les valeurs entieres approchées des quantités a, b, c, &c. peuvent être pris chacun de deux manieres différentes, puiſqu'on peut prendre également pour la valeur entiere approchée d'une quantité donnée, l'un ou l'autre des deux nombres entiers, entre leſquels ſe trouve cette quantité; il y a cependant une différence eſſentielle entre ces deux manieres de prendre les valeurs approchées par rapport à la fraction continue qui en réſulte; car ſi on prend toujours les valeurs approchées plus petites que les véritables, les dénominateurs β, γ, δ, &c. ſeront tous poſitifs; au lieu qu'ils ſeront tous négatifs, ſi on prend les valeurs approchées toutes plus grandes que les véritables, & ils ſeront en partie poſitifs & en partie négatifs, ſi les valeurs approchées ſont priſes tantôt trop petites & tantôt trop grandes.

En effet, ſi α eſt plus petit que a, $a - \alpha$ ſera une quantité poſitive; donc b ſera poſitive, & β le ſera auſſi; au contraire $a - \alpha$ ſera négative, ſi α eſt plus grand que a; donc

donc b ſera négative, & β le ſera auſſi. De même ſi β eſt plus petit que b, $b-\beta$ ſera toujours une quantité poſitive ; donc c le ſera auſſi, & par conſéquent auſſi γ ; mais ſi β eſt plus grand que b, $b-\beta$ ſera une quantité négative ; de ſorte que c, & par conſéquent auſſi γ, ſeront négatifs, & ainſi de ſuite.

Au reſte, lorſqu'il s'agit de quantités négatives, j'entends par quantités plus petites celles qui, priſes poſitivement, ſeroient plus grandes ; nous aurons cependant quelquefois dans la ſuite occaſion de comparer entr'elles des quantités purement par rapport à leur grandeur abſolue ; mais nous aurons ſoin d'avertir alors qu'il faudra faire abſtraction des ſignes.

Je dois remarquer encore que ſi, parmi les quantités b, c, d, &c. il s'en trouve une qui ſoit égale à un nombre entier, alors la fraction continue ſera terminée, parce qu'on pourra y conſerver cette quantité même ; par exemple, ſi c eſt un nombre entier, la fraction continue qui donne la valeur de a, ſera

Digitized by Google

$$a=\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}.$$

En effet, il eſt clair qu'il faudroit prendre $\gamma=c$, ce qui donneroit $d=\frac{1}{c-\gamma}=\frac{1}{0}=\infty$, & par conſéquent $\delta=\infty$; de ſorte que l'on auroit

$$a=\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\infty},$$

les termes ſuivans évanouiſſant vis-à-vis de la quantité infinie ∞ ; or $\frac{1}{\infty}=0$; donc on aura ſimplement

$$a=\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c}.$$

Ce cas arrivera toutes les fois que la quantité a ſera commenſurable, c'eſt-à-dire qu'elle ſera exprimée par une fraction rationnelle ; mais lorſque a ſera une quantité irrationnelle ou tranſcendante, alors la fraction continue ira néceſſairement à l'infini.

4. Suppoſons que la quantité a ſoit une fraction ordinaire $\frac{A}{B}$, A & B étant des nombres entiers donnés ; il eſt d'abord évident

Digitized by Google

que le nombre entier α qui approchera le plus de $\frac{A}{B}$, ſera le quotient de la diviſion de A par B; ainſi ſuppoſant la diviſion faite à la maniere ordinaire, & nommant α le quotient & C le reſte, on aura $\frac{A}{B} - \alpha = \frac{C}{B}$; donc $b = \frac{B}{C}$; pour avoir de même la valeur entiere approchée β de la fraction $\frac{B}{C}$, il n'y aura qu'à diviſer B par C, & prendre pour β le quotient de cette diviſion; alors nommant D le reſte, on aura $b - \beta = \frac{D}{C}$, & par conſéquent $c = \frac{C}{D}$; on continuera donc à diviſer C par D, & le quotient ſera la valeur du nombre γ, & ainſi de ſuite; d'où réſulte cette regle fort ſimple pour réduire les fractions ordinaires en fractions continues.

Diviſez d'abord le numérateur de la fraction propoſée par ſon dénominateur, & nommez le quotient α; diviſez enſuite le dénominateur par le reſte, & nommez le quotient β; diviſez après cela le premier reſte par le ſecond reſte, & ſoit le quotient γ; continuez ainſi en diviſant toujours l'avant-dernier reſte

Digitized by Google

par le dernier, jusqu'à ce qu'on parvienne à une division qui se fasse sans reste, ce qui doit nécessairement arriver, puisque les restes sont tous des nombres entiers qui vont en diminuant; vous aurez la fraction continue

$$\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta}+}, \text{ \&c.}$$

qui sera égale à la fraction donnée.

5. Soit proposé de réduire en fraction continue la fraction $\frac{1103}{887}$; on divisera donc 1103 par 887, on aura le quotient 1 & le reste 216; on divisera 887 par 216, on aura le quotient 4 & le reste 23; on divisera 216 par 23, ce qui donnera le quotient 9 & le reste 9; on divisera encore 23 par 9, on aura le quotient 2 & le reste 5; on divisera 9 par 5, on aura le quotient 1 & le reste 4; on divisera 5 par 4, on aura le quotient 1 & le reste 1; enfin, divisant 4 par 1, on aura le quotient 4 & le reste nul, de sorte que l'opération sera terminée. Rassemblant donc par ordre tous les quotiens trouvés, on aura cette série 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4, d'où l'on formera la fraction continue

Digitized by Google

$$\frac{1103}{887} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}.$$

6. Comme dans la maniere ordinaire de faire les diviſions, on prend toujours pour quotient le nombre entier qui eſt égal ou moindre que la fraction propoſée, il s'enſuit que par la méthode précédente on n'aura que des fractions continues, dont tous les dénominateurs ſeront des nombres poſitifs.

Or on peut auſſi prendre pour quotient le nombre entier, qui eſt immédiatement plus grand que la valeur de la fraction, lorſque cette fraction n'eſt pas réductible à un nombre entier, & pour cela il n'y a qu'à augmenter d'une unité la valeur du quotient trouvé à la maniere ordinaire; alors le reſte ſera négatif, & le quotient ſuivant ſera néceſſairement négatif. Ainſi on pourra à volonté rendre les termes de la fraction continue poſitifs ou négatifs.

Dans l'exemple précédent, au lieu de prendre 1 pour le quotient de 1103 diviſé

Digitized by Google

par 887, je puis prendre 2; mais j'aurai le reſte négatif —671, par lequel il faudra maintenant diviſer 887; on diviſera donc 887 par —671, & l'on aura ou le quotient —1 & le reſte 216, ou le quotient —2 & le reſte —455. Prenons le quotient plus grand —1, & alors il faudra diviſer le reſte —671 par le reſte 216, d'où l'on aura ou le quotient —3 & le reſte —23, ou le quotient —4 & le reſte 193. Je continue la diviſion en adoptant le quotient plus grand —3; j'aurai à diviſer le reſte 216 par le reſte —23, ce qui me donnera ou le quotient —9 & le reſte 9, ou le quotient —10 & le reſte —14, & ainſi de ſuite.

De cette maniere on aura

$$\frac{1103}{887} = 2 + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-3} + \frac{1}{-9} +, \&c.$$

où l'on voit que tous les dénominateurs ſont négatifs.

7. On peut au reſte rendre poſitif chaque dénominateur négatif, en changeant le

Digitized by Google

ſigne du numérateur ; mais il faut alors changer auſſi le ſigne du numérateur ſuivant ; car il eſt clair qu'on a

$$\mu+\frac{1}{-\nu}+\frac{1}{\pi}+, \&c. \qquad =\mu-\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\pi}+, \&c.$$

Enſuite on pourra, ſi l'on veut, faire diſparoître tous les ſignes — de la fraction continue, & la réduire à une autre, où tous les termes ſoient poſitifs ; car on a en général

$$\mu-\frac{1}{\nu}+, \&c. = \mu-1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\nu-1}+, \&c.$$

comme on peut s'en convaincre aiſément, en réduiſant ces deux quantités en fractions ordinaires.

On pourroit auſſi par un moyen ſemblable introduire des termes négatifs à la place des poſitifs, car on a

$$\mu+\frac{1}{\nu}+, \&c. = \mu+1-\frac{1}{1}+\frac{1}{\nu-1}+, \&c.$$

D'où l'on voit que par ces ſortes de tranſformations on peut quelquefois ſimplifier une fraction continue, & la réduire à un moindre nombre de termes ; ce qui aura

Digitized by Google

lieu toutes les fois qu'il y aura des dénominateurs égaux à l'unité positive ou négative.

En général il est clair que pour avoir la fraction continue la plus convergente qu'il est possible vers la valeur de la quantité donnée, il faut toujours prendre pour α, β, γ; &c. les nombres entiers qui approchent le plus des quantités a, b, c, &c. soit qu'ils soient plus petits ou plus grands que ces quantités; or il est facile de voir que si, par exemple, on ne prend pas pour α le nombre entier qui approche le plus, soit en excès ou en défaut, de a, le nombre suivant β sera nécessairement égal à l'unité; en effet la différence entre a & α sera alors plus grande que $\frac{1}{2}$, par conséquent on aura $b = \frac{1}{a-\alpha}$ plus petit que 2; donc β ne pourra être qu'égal à l'unité.

Ainsi toutes les fois que dans une fraction continue on trouvera des dénominateurs égaux à l'unité, ce sera une marque que l'on n'a pas pris les dénominateurs précédens aussi approchans qu'il est possible,

Digitized by Google

& que par conſéquent la fraction peut ſe ſimplifier en augmentant ou en diminuant ces dénominateurs d'une unité, ce qu'on pourra exécuter par les formules précédentes, ſans être obligé de refaire en entier le calcul.

8. La méthode de l'art. 4 peut ſervir auſſi à réduire en fraction continue toute quantité irrationnelle ou tranſcendante, pourvu qu'elle ſoit auparavant exprimée en décimales; mais comme la valeur en décimales ne peut être qu'approchée, & qu'en augmentant d'une unité le dernier caractere on a deux limites, entre leſquelles doit ſe trouver la vraie valeur de la quantité propoſée, il faudra, pour ne pas ſortir de ces limites, faire à la fois le même calcul ſur les deux fractions dont il s'agit, & n'admettre enſuite dans la fraction continue que les quotiens qui réſulteront également des deux opérations.

Soit, par exemple, propoſé d'exprimer par une fraction continue le rapport de la circonférence du cercle au diametre.

Digitized by Google

Ce rapport exprimé en décimales eſt, par le calcul de Viete, 3,1415926535.... ; de ſorte qu'on aura la fraction $\frac{3141592535}{1000000000}$ à réduire en fraction continue par la méthode ci-deſſus ; or ſi on ne prend que la fraction $\frac{314159}{100000}$, on trouve les quotiens 3, 7, 15, 1, *&c.* & ſi on prenoit la fraction plus grande $\frac{314160}{100000}$, on trouveroit les quotiens 3, 7, 16, *&c.* de ſorte que le troiſieme quotient demeureroit incertain ; d'où l'on voit que, pour, pouvoir pouſſer ſeulement la fraction continue au-delà de trois termes, il faudra néceſſairement adopter une valeur de la périférie qui ait plus de ſix caracteres.

Or ſi on prend la valeur donnée par Ludolph en trente-cinq caracteres, & qui eſt 3, 14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288 ; & qu'on opere en même temps ſur cette fraction & ſur la même, en y augmentant le dernier caractere 8 d'une unité, on trouvera cette ſuite de quotiens, 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2,

Digitized by Google

1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1; de sorte que l'on aura

$$\frac{\text{Périph.}}{\text{diamétr.}} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \&c.$$

Comme il y a ici des dénominateurs égaux à l'unité, on pourra simplifier la fraction, en y introduisant des termes négatifs, par les formules de l'art. 7, & l'on trouvera

$$\frac{\text{Périph.}}{\text{diamétr.}} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \frac{1}{294} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} +, \&c.$$

ou bien

$$\frac{\text{Périph.}}{\text{diamétr.}} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{-294} + \frac{1}{3} + \frac{1}{-3} + \&c.$$

9. Nous avons montré ailleurs comment on peut appliquer la théorie des fractions continues à la résolution numérique des équations, pour laquelle on n'avoit encore que des méthodes imparfaites & insuffi-

Digitized by Google

ſantes. (*Voyez les Mémoires de l'Académie de Berlin pour les années 1767 & 1768.*) Toute la difficulté conſiſte à pouvoir trouver dans une équation quelconque la valeur entiere la plus approchée, ſoit en excès ou en défaut de la racine cherchée, & c'eſt ſur quoi nous avons donné les premiers des regles ſures & générales, par leſquelles on peut non-ſeulement reconnoître combien de racines réelles poſitives ou négatives, égales ou inégales, contient la propoſée, mais encore trouver facilement les limites de chacune de ces racines, & même les limites des quantités réelles qui compoſent les racines imaginaires. Suppoſant donc que x ſoit l'inconnue de l'équation propoſée, on cherchera d'abord le nombre entier qui approchera le plus de la racine cherchée, & nommant ce nombre α, il n'y aura qu'à faire, comme on l'a vu dans l'art. 3, $x = \alpha + \frac{1}{y}$; (je nomme ici x, y, z, &c. ce que j'ai dénoté dans l'art. cité par a, b, c, &c.) & ſubſtituant cette valeur à la place de x, on aura, après avoir fait évanouir les frac-

Digitized by Google

tions, une équation du même degré en y, qui devra avoir au moins une racine positive ou négative plus grande que l'unité. On cherchera donc de nouveau la valeur entiere approchée de cette racine, & nommant cette valeur β, on fera enſuite $y = \beta + \frac{1}{z}$, ce qui donnera de même une équation en z, qui aura auſſi néceſſairement une racine plus grande que l'unité, & dont on cherchera pareillement la valeur entiere approchée γ, & ainſi de ſuite. De cette maniere la racine cherchée ſe trouvera exprimée par la fraction continue

$$\alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} +, \text{ \&c.}$$

qui ſera terminée ſi la racine eſt commenſurable, mais qui ira néceſſairement à l'infini, ſi elle eſt incommenſurable.

On trouvera dans les Mémoires cités tous les principes & les détails néceſſaires pour ſe mettre au fait de cette méthode & de ſes uſages, & même différens moyens pour abréger ſouvent les opérations qu'elle de-

Digitized by Google

mande ; nous croyons n'y avoir preſque rien laiſſé à déſirer ſur ce ſujet ſi important.

Au reſte, pour ce qui regarde les racines des équations du ſecond degré, nous donnerons plus bas, (art. 33 & ſuiv.) une méthode particuliere & très-ſimple pour les convertir en fractions continues.

10. Après avoir expliqué la génération des fractions continues, nous allons en montrer les uſages & les principales propriétés.

Il eſt d'abord évident que plus on prend de termes dans une fraction continue, plus on doit approcher de la vraie valeur de la quantité qu'on a exprimée par cette fraction ; de ſorte que ſi on s'arrête ſucceſſivement à chaque terme de la fraction, on aura une ſuite de quantités qui ſeront néceſſairement convergentes vers la quantité propoſée.

Ainſi ayant réduit la valeur de a à la fraction continue

$$\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta+}}},\ \&c.$$

Digitized by Google

on aura les quantités

$$\alpha, \alpha+\frac{1}{\beta}, \alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}, \&c.$$

ou bien, en réduiſant,

$$\alpha, \frac{\alpha\beta+1}{\beta}, \frac{\alpha\beta\gamma+\alpha+\gamma}{\beta\gamma+1}, \&c.$$

qui approcheront de plus en plus de la valeur de a.

Pour pouvoir mieux juger de la loi & de la convergence de ces quantités, nous remarquerons que par les formules de l'article 3 on a

$$a=\alpha+\frac{1}{b},\ b=\beta+\frac{1}{c},\ c=\gamma+\frac{1}{d},\ \&c.$$

d'où l'on voit d'abord que α eſt la premiere valeur approchée de a; qu'enſuite ſi on prend la valeur exacte de a, qui eſt $\frac{\alpha b+1}{b}$, & qu'on y ſubſtitue pour b ſa valeur approchée β, on aura cette valeur plus approchée $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$; qu'on aura de même une troiſieme valeur plus approchée de a, en mettant d'abord pour b ſa valeur exacte $\frac{\beta c+1}{c}$, ce qui donne $a=\frac{(\alpha\beta+1)c+\alpha}{\beta c+1}$, & prenant enſuite pour c la valeur approchée γ; par

Digitized by Google

ce moyen la nouvelle valeur approchée de a ſera

$$\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}$$

continuant le même raiſonnement, on pourra approcher davantage, en mettant, dans l'expreſſion de a trouvée ci-deſſus, à la place de c ſa valeur exacte $\frac{\gamma d+1}{d}$, ce qui donnera

$$a=\frac{((\alpha\beta+1)\gamma+\alpha)d+\alpha\beta+1}{(\beta\gamma+1)d+\beta}$$

& prenant enſuite pour d ſa valeur approchée δ; de ſorte qu'on aura pour la quatrieme approximation la quantité

$$\frac{((\alpha\beta+1)\gamma+\alpha)\delta+\alpha\beta+1}{(\beta\gamma+1)\delta+\beta}$$

& ainſi de ſuite.

De-là il eſt facile de voir que ſi par le moyen des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. on forme les expreſſions ſuivantes,

$A=\alpha$	$A'=1$
$B=\beta A+1$	$B'=\beta$
$C=\gamma B+A$	$C'=\gamma B'+A'$
$D=\delta C+B$	$D'=\delta C'+B'$
$E=\varepsilon D+C$	$E'=\varepsilon D'+C'$
&c.	&c.

on

on aura cette ſuite de fractions convergentes vers la quantité a,

$$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'}, \frac{F}{F'}, \&c.$$

Si la quantité a eſt rationnelle, & repréſentée par une fraction quelconque $\frac{V}{V'}$, il eſt évident que cette fraction ſera toujours la derniere dans la ſérie précédente; puiſque dans ce cas la fraction continue ſera terminée, & que la derniere fraction de la ſérie ci-deſſus doit toujours équivaloir à toute la fraction continue.

Mais ſi la quantité a eſt irrationnelle ou tranſcendante, alors la fraction continue allant néceſſairement à l'infini, on pourra auſſi pouſſer à l'infini la ſérie des fractions convergentes.

11. Examinons maintenant la nature de ces fractions; & d'abord il eſt viſible que les nombres A, B, C, &c. doivent aller en augmentant, auſſi bien que les nombres A', B', C', &c. car 1°. ſi les nombres α, β, γ, &c. ſont tous poſitifs, les nombres

Digitized by Google

A, B, C, &c. A', B', C', &c. seront aussi tous positifs, & l'on aura évidemment $B > A$, $C > B$, $D > C$, &c. & $B' =$ ou $> A'$, $C' > B'$, $D' > C'$, &c.

2°. Si les nombres α, β, γ, &c. sont tous ou en partie négatifs, alors parmi les nombres A, B, C, &c. & A', B', C', il y en aura de positifs & de négatifs; mais dans ce cas on considérera que l'on a en général par les formules précédentes

$$\frac{B}{A} = \beta + \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}, \quad \frac{D}{C} = \delta + \frac{B}{C}, \text{ &c.}$$

d'où l'on voit d'abord que si les nombres α, β, γ, &c. sont différens de l'unité, quels que soient d'ailleurs leurs signes, on aura nécessairement, en faisant abstraction des signes, $\frac{B}{A}$ plus grand que l'unité; donc $\frac{A}{B}$ moindre que l'unité, par conséquent $\frac{C}{B}$ plus grand que l'unité, & ainsi de suite; donc B plus grand que A, C plus grand que B, &c.

Il n'y aura d'exception que lorsque parmi les nombres α, β, γ, &c. il s'en trouvera d'égaux à l'unité; supposons, par exemple,

Digitized by Google

que le nombre γ soit le premier qui soit égal à ± 1 ; on aura d'abord B plus grand que A, mais C sera moindre que B, s'il arrive que la fraction $\frac{A}{B}$ soit de signe différent de γ ; ce qui est clair par l'équation $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$; parce que dans ce cas $\gamma + \frac{A}{B}$ sera un nombre moindre que l'unité ; or je dis qu'alors on aura nécessairement D plus grand que B ; car puisque $\gamma = \pm 1$, on aura, (art. 10), $c = \pm 1 + \frac{1}{d}$, & $c - \frac{1}{d} = \pm 1$; or comme c & d sont des quantités plus grandes que l'unité, (art. 3), il est clair que cette équation ne pourra subsister, à moins que c & d ne soient de même signe ; donc, puisque γ & δ sont les valeurs entieres approchées de c & d, ces nombres γ & δ devront être aussi de même signe ; mais la fraction $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$ doit être de même signe que γ, à cause que γ est un nombre entier, & $\frac{A}{B}$ une fraction moindre que l'unité ; donc $\frac{C}{B}$ & δ seront des quantités de même signe ; par conséquent $\frac{\delta C}{B}$ sera une quantité positive. Or on a $\frac{D}{C}$

Digitized by Google

$= \delta + \frac{B}{C}$; donc multipliant par $\frac{C}{B}$, on aura $\frac{D}{B} = \delta \frac{C}{B} + 1$; donc $\frac{\delta C}{B}$ étant une quantité positive, il eſt clair que $\frac{D}{B}$ ſera plus grande que l'unité; donc D plus grand que B.

De-là on voit que s'il arrive que dans la ſérie A, B, C, &c. il ſe trouve un terme qui ſoit moindre que le précédent, le terme ſuivant ſera néceſſairement plus grand; de ſorte qu'en mettant à part ces termes plus petits, la ſérie ne laiſſera pas d'aller en augmentant.

Au reſte on pourra toujours éviter, ſi l'on veut, cet inconvénient, ſoit en prenant les nombres α, β, γ, &c. tous poſitifs, ſoit en les prenant tous différens de l'unité, ce qui eſt toujours poſſible.

On fera les mêmes raiſonnemens par rapport à la ſérie A', B', C', &c. dans laquelle on a pareillement

$$\frac{B'}{A'} = \beta, \quad \frac{C'}{B'} = \gamma + \frac{A'}{B'}, \quad \frac{D'}{C'} = \delta + \frac{B'}{C'}, \text{ &c.}$$

d'où l'on déduira des concluſions ſemblables aux précédentes.

Digitized by Google

12. Maintenant, si on multiplie en croix les termes des fractions voisines dans la série $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, &c. on trouvera $BA' - AB' = 1$, $CB' - BC' = AB' - BA'$, $DC' - CD' = BC' - CB'$, &c. d'où je conclus qu'on aura en général

$$BA' - AB' = 1$$
$$CB' - BC' = -1$$
$$DC' - CD' = 1$$
$$ED' - DE' = -1, \text{ \&c.}$$

Cette propriété est très-remarquable, & donne lieu à plusieurs conséquences importantes.

D'abord on voit que les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, &c. doivent être déjà réduites à leurs moindres termes; car si, par exemple, C & C' avoient un commun diviseur autre que l'unité, le nombre entier $CB' - BC'$ seroit aussi divisible par ce même diviseur, ce qui ne se peut, à cause de $CB' - BC' = -1$.

Digitized by Google

Enſuite ſi on met les équations précédentes ſous cette forme

$$\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'B'}$$
$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{C'B'}$$
$$\frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{C'D'}$$
$$\frac{E}{E'} - \frac{D}{D'} = -\frac{1}{D'E'}, \text{ \&c.}$$

il eſt aiſé de voir que les différences entre les fractions voiſines de la ſérie $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$ \&c. vont continuellement en diminuant, de ſorte que cette ſérie eſt néceſſairement convergente.

Or je dis que la différence entre deux fractions conſécutives eſt auſſi petite qu'il eſt poſſible; en ſorte qu'entre ces mêmes fractions il ne ſauroit tomber aucune autre fraction quelconque, à moins qu'elle n'ait un dénominateur plus grand que ceux de ces fractions-là.

Digitized by Google

Car prenons, par exemple, les deux fractions $\frac{C}{C'}$ & $\frac{D}{D'}$, dont la différence eſt $\frac{1}{C'D'}$, & ſuppoſons, s'il eſt poſſible, qu'il exiſte une autre fraction $\frac{m}{n}$, dont la valeur tombe entre celles de ces deux fractions, & dans laquelle le dénominateur n ſoit moindre que C' ou que D'; donc puiſque $\frac{m}{n}$ doit ſe trouver entre $\frac{C}{C'}$ & $\frac{D}{D'}$, il faudra que la différence entre $\frac{m}{n}$ & $\frac{C}{C'}$, qui eſt $\frac{mC'-nC}{nC'}$ ou $\frac{nC-mC'}{nC'}$, ſoit plus petite que $\frac{1}{C'D'}$, différence entre $\frac{D}{D'}$ & $\frac{C}{C'}$; mais il eſt clair que celle-là ne ſauroit être moindre que $\frac{1}{nC'}$; donc, ſi $n < D'$, elle ſera néceſſairement plus grande que $\frac{1}{C'D'}$; de même la différence entre $\frac{m}{n}$ & $\frac{D}{D'}$ ne pouvant être plus petite que $\frac{1}{nD'}$, ſera

Digitized by Google

néceſſairement plus grande que $\frac{1}{C'D'}$, ſi $n < C$, au lieu qu'elle devroit en être plus petite.

13. Voyons préſentement de combien chaque fraction de la ſérie $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, &c. approchera de la valeur de la quantité a. Pour cela on remarquera que les formules trouvées dans l'art. 10 donnent

$$a = \frac{Ab + 1}{A'b}$$

$$a = \frac{Bc + A}{B'c + A'}$$

$$a = \frac{Cd + B}{C'd + B'}$$

$$a = \frac{De + C}{D'e + C'}$$

& ainſi de ſuite.

Donc ſi on veut ſavoir de combien la fraction $\frac{C}{C'}$, par exemple, approche de la quantité, on cherchera la différence entre $\frac{C}{C'}$ & a; en prenant pour a la quantité

Digitized by Google

$\frac{Cd+B}{C'd+B'}$, on aura $a-\frac{C}{C'}=\frac{Cd+B}{C'd+B'}$ $-\frac{C}{C'}=\frac{BC'-CB'}{C'(C'd+B')}=\frac{1}{C'(C'd+B')}$, à cauſe de $BC'-CB'=1$, (art. 12); or comme on ſuppoſe que δ ſoit la valeur approchée de d, en ſorte que la différence entre d & δ ſoit moindre que l'unité, (art. 3), il eſt clair que la valeur de d ſera renfermée entre les deux nombres δ & $\delta\pm1$, (le ſigne ſupérieur étant pour le cas où la valeur approchée δ eſt moindre que la véritable d, & le ſigne inférieur pour le cas où δ eſt plus grand que d), & que par conſéquent la valeur de $C'd+B'$, ſera auſſi renfermée entre ces deux-ci, $C'\delta+B'$ & $C'(\delta\pm1)+B'$, c'eſt-à-dire entre D' & $D'\pm C'$; donc la différence $a-\frac{C}{C'}$ ſera renfermée entre ces deux limites $\frac{1}{C'D'}$, $\frac{1}{C'(D'\pm C')}$; d'où l'on pourra juger de la quantité de l'approximation de la fraction $\frac{C}{C'}$.

Digitized by Google

14. En général on aura

$$a = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'b}$$

$$a = \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'(B'c + A')}$$

$$a = \frac{C}{C'} + \frac{1}{C'(C'd + B')}$$

$$a = \frac{D}{D'} - \frac{1}{D'(D'e + C')}$$

& ainſi de ſuite.

Or ſi on ſuppoſe que les valeurs approchées α, β, γ, &c. ſoient toujours priſes moindres que les véritables, ces nombres ſeront tous poſitifs, auſſi bien que les quantités b, c, d, &c. (art. 3); donc les nombres A', B', C', &c. ſeront auſſi tous poſitifs; d'où il s'enſuit que les différences entre la quantité a & les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, &c. ſeront alternativement poſitives & négatives; c'eſt-à-dire que ces fractions ſeront alternativement plus petites & plus grandes que la quantité a.

Digitized by Google

De plus, comme $b > \beta$, $c > \gamma$, $d > \delta$, &c. (*hyp.*) on aura $b > B'$, $B'c + A' > B'\gamma + A' > C'$, $C'd + B' > C'\delta + B' > D'$, &c. & comme $b < \beta + 1$, $c < \gamma + 1$, $d < \delta + 1$, on aura $b < B' + 1$, $B'c + A' < B'(\gamma + 1) + A' < C' + B'$, $C'd + B' < C'(\delta + 1) + B' < D' + C'$, &c. de sorte que les erreurs qu'on commettroit en prenant les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, &c. pour la valeur de a, seroient respectivement moindres que $\frac{1}{A'B'}$, $\frac{1}{B'C'}$, $\frac{1}{C'D'}$, &c. mais plus grandes que $\frac{1}{A'(B'+A')}$, $\frac{1}{B'(C'+B')}$, $\frac{1}{C'(D'+C')}$, &c. d'où l'on voit combien ces erreurs sont petites, & combien elles vont en diminuant d'une fraction à l'autre.

Mais il y a plus : puisque les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, &c. sont alternativement plus petites & plus grandes que la quantité a, il est clair que la valeur de cette quantité

Digitized by Google

ſe trouvera toujours entre deux fractions conſécutives quelconques ; or nous avons vu ci-deſſus, (art. 12), qu'il eſt impoſſible qu'entre deux telles fractions puiſſe ſe trouver une autre fraction quelconque qui ait un dénominateur moindre que l'un de ceux de ces deux fractions ; d'où l'on peut conclure que chacune des fractions dont il s'agit, exprime la quantité a plus exactement que ne pourroit faire toute autre fraction quelconque, dont le dénominateur ſeroit plus petit que celui de la fraction ſuivante ; c'eſt-à-dire que la fraction $\frac{C}{C'}$, par exemple, exprimera la valeur de a plus exactement que toute autre fraction $\frac{m}{n}$, dans laquelle n ſeroit moindre que D.

15. Si les valeurs approchées α, β, γ, &c. ſont toutes ou en partie plus grandes que les véritables, alors parmi ces nombres il y en aura néceſſairement de négatifs, (art. 3), ce qui rendra auſſi négatifs quelques-uns des termes des ſéries A, B, C, &c. A', B', C', &c. par conſéquent les

Digitized by Google

différences entre les fractions $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, &c. & la quantité a, ne seront plus alternativement positives & négatives, comme dans le cas de l'article précédent ; de sorte que ces fractions n'auront plus l'avantage de donner toujours des limites en *plus* & en *moins* de la quantité a, avantage qui me paroît d'une très-grande importance, & qui doit par conséquent faire préférer toujours dans la pratique les fractions continues où les dénominateurs seront tous positifs. Ainsi nous ne considérerons plus dans la suite que des fractions de cette espece.

16. Considérons donc la série $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}$, &c. dans laquelle les fractions sont alternativement plus petites & plus grandes que la quantité a, & il est clair qu'on pourra partager cette série en ces deux-ci:

$$\frac{A}{A'}, \frac{C}{C'}, \frac{E}{E'}, \text{ \&c.}$$

$$\frac{B}{B'}, \frac{D}{D'}, \frac{F}{F'}, \text{ \&c.}$$

Digitized by Google

donc la premiere ſera compoſée de fractions toutes plus petites que a, & qui iront en augmentant vers la quantité a; donc la ſeconde ſera compoſée de fractions toutes plus grandes que a, mais qui iront en diminuant vers cette même quantité. Examinons maintenant chacune de ces deux ſéries en particulier: dans la premiere on aura, (art. 10 & 12),

$$\frac{C}{C'} - \frac{A}{A'} = \frac{\gamma}{A'C'}$$

$$\frac{E}{E'} - \frac{C}{C'} = \frac{\epsilon}{C'E'}, \text{ \&c.}$$

& dans la ſeconde on aura

$$\frac{B}{B'} - \frac{D}{D'} = \frac{\delta}{B'D'}$$

$$\frac{D}{D'} - \frac{F}{F'} = \frac{\zeta}{D'F'}, \text{ \&c.}$$

Or ſi les nombres γ, δ, ϵ, &c. étoient tous égaux à l'unité, on pourroit prouver, comme dans l'art. 12, qu'entre deux fractions conſécutives quelconques de l'une ou de l'autre des ſéries précédentes, il ne pourroit jamais ſe trouver aucune autre fraction

Digitized by Google

dont le dénominateur ſeroit moindre que ceux de ces deux fractions ; mais il n'en ſera pas de même, lorſque les nombres γ, δ, ε, &c. ſeront différens de l'unité ; car dans ce cas on pourra inſérer entre les fractions dont il s'agit autant de fractions *intermédiaires* qu'il y aura d'unités dans les nombres $\gamma-1$, $\delta-1$, $\varepsilon-1$, &c. & pour cela il n'y aura qu'à mettre ſucceſſivement dans les valeurs de C & C', (art. 10), les nombres 1, 2, 3, &c. γ à la place de γ ; & de même dans les valeurs de D & D', les nombres 1, 2, 3, &c. δ à la place de δ, & ainſi de ſuite.

17. Suppoſons, par exemple, que γ ſoit $=4$, on aura $C=4B+A$ & $C'=4B'+A'$, & on pourra inſérer entre les fractions $\frac{A}{A'}$ & $\frac{C}{C'}$ trois fractions *intermédiaires*, qui ſeront $\frac{B+A}{B'+A'}$, $\frac{2B+A}{2B'+A'}$, $\frac{3B+A}{3B'+A'}$.

Or il eſt clair que les dénominateurs de

Digitized by Google

ces fractions forment une suite croissante arithmétiquement depuis A' jusqu'à C' ; & nous allons voir que les fractions elles-mêmes croissent aussi continuellement depuis $\frac{A}{A'}$ jusqu'à $\frac{C}{C'}$, en sorte qu'il seroit maintenant impossible d'insérer dans la série $\frac{A}{A'}, \frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}, \frac{3B+A}{3B'+A'}, \frac{4B+A}{4B'+A'}$ ou $\frac{C}{C'}$, aucune fraction dont la valeur tombât entre celles de deux fractions consécutives, & dont le dénominateur se trouvât aussi entre ceux des mêmes fractions. Car si on prend les différences entre les fractions précédentes, on aura, à cause de $BA' - AB' = 1$,

$$\frac{B+A}{B'+A'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'(B'+A')}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B+A}{B'+A'} = \frac{1}{(B'+A')(2B'+A')}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{2B+A}{2B'+A'} = \frac{1}{(2B'+A')(3B'+A')}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{3B+A}{3B'+A'} = \frac{1}{(3B'+A')C'};$$

d'où l'on voit d'abord que les fractions

$\frac{A}{A'}$,

Digitized by Google

$\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, &c. vont en augmentant, puiſque leurs différences ſont toutes poſitives; enſuite, comme ces différences ſont égales à l'unité diviſée par le produit des deux dénominateurs, on pourra prouver par un raiſonnement analogue à celui que nous avons fait dans l'art. 12, qu'il eſt impoſſible qu'entre deux fractions conſécutives de la ſérie précédente, il puiſſe tomber une fraction quelconque $\frac{m}{n}$, ſi le dénominateur n tombe entre les dénominateurs de ces fractions, ou en général s'il eſt plus petit que le plus grand des deux dénominateurs.

De plus, comme les fractions dont nous parlons ſont toutes plus grandes que la vraie valeur de a, & que la fraction $\frac{B}{B'}$ en eſt plus petite, il eſt évident que chacune de ces fractions approchera de la quantité a, en ſorte que la différence en ſera plus petite que celle de la même fraction & de la fraction $\frac{B}{B'}$; or on trouve

Digitized by Google

$$\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{A'B'}$$

$$\frac{B+A}{B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{(B'+A')B'}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{(2B'+A')B'}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{(3B'+A')B'}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{C'B'}.$$

Donc, puiſque ces différences ſont auſſi égales à l'unité, diviſée par le produit des dénominateurs, on y pourra appliquer le même raiſonnement de l'article 12, pour prouver qu'aucune fraction $\frac{m}{n}$ ne ſauroit tomber entre une quelconque des fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, $\frac{2B+A}{2B'+A'}$, *&c.* & la fraction $\frac{B}{B'}$, ſi le dénominateur n eſt plus petit que celui de la même fraction ; d'où il ſuit que chacune de ces fractions approche plus de la quantité a que ne pourroit faire toute autre fraction plus petite que a, & qui auroit

Digitized by Google

un dénominateur plus petit, c'eſt-à-dire, qui ſeroit conçue en termes plus ſimples.

18. Nous n'avons conſidéré dans l'article précédent que les fractions *intermédiaires* entre $\frac{A}{A'}$ & $\frac{C}{C'}$, il en ſera de même des fractions *intermédiaires* entre $\frac{C}{C'}$ & $\frac{E}{E'}$, entre $\frac{E}{E'}$ & $\frac{G}{G'}$, *&c.* ſi ϵ, η, *&c.* ſont des nombres plus grands que l'unité.

On peut auſſi appliquer à l'autre ſérie $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, *&c.* tout ce que nous venons de dire relativement à la premiere ſérie $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, *&c.* de ſorte que ſi les nombres δ, ζ, *&c.* ſont plus grands que l'unité, on pourra inſérer entre les fractions $\frac{B}{B'}$ & $\frac{D}{D'}$, entre $\frac{D}{D'}$ & $\frac{F}{F'}$, *&c.* différentes fractions *intermédiaires* toutes plus grandes que a, mais qui iront continuellement en diminuant, & qui ſeront telles qu'elles expri-

Digitized by Google

meront la quantité a plus exactement que ne pourroit faire aucune autre fraction plus grande que a, & qui ſeroit conçue en termes plus ſimples.

De plus, ſi β eſt auſſi un nombre plus grand que l'unité, on pourra pareillement placer avant la fraction $\frac{B}{B'}$ les fractions $\frac{A+1}{1}$, $\frac{2A+1}{2}$, $\frac{3A+1}{3}$, &c. juſqu'à $\frac{\beta A+1}{\beta}$, ſavoir $\frac{B}{B'}$, & ces fractions auront les mêmes propriétés que les autres fractions *intermédiaires*.

De cette maniere on aura donc ces deux ſuites complettes de fractions convergentes vers la quantité a.

Fractions croiſſantes & plus petites que a.

$$\frac{A}{A'}, \frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}, \frac{3B+A}{3B'+A'} \text{ &c.}$$

$$\frac{\gamma B+A}{\gamma B'+A'}, \frac{C}{C'}, \frac{D+C}{D'+C'}, \frac{2D+C}{2D'+C'}, \frac{3D+C}{3D'+C'} \text{ &c.}$$

$$\frac{\epsilon D+C}{\epsilon D'+C'}, \frac{E}{E'}, \frac{F+E}{F'+E'}, \text{ \&c. \&c. \&c.}$$

Digitized by Google

Fractions décroiſſantes & plus grandes que a.

$$\frac{A+1}{1}, \frac{2A+1}{2}, \frac{3A+1}{3}, \&c.$$

$$\frac{\beta A+1}{\beta}, \frac{B}{B'}, \frac{C+B}{C'+B'}, \frac{2C+B}{2C'+B'}, \&c.$$

$$\frac{\delta C+B}{\delta C'+B'}, \frac{D}{D'}, \frac{E+D}{E'+D'}, \&c.\ \&c.\ \&c.$$

Si la quantité *a* eſt irrationnelle ou tranſcendante, les deux ſéries précédentes iront à l'infini, puiſque la ſérie des fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, *&c.* que nous nommerons dans la ſuite fractions *principales*, pour les diſtinguer des fractions *intermédiaires*, va d'elle-même à l'infini (art. 10).

Mais ſi la quantité *a* eſt rationnelle & égale à une fraction quelconque $\frac{V}{V'}$, nous avons vu dans l'article cité, que la ſérie dont il s'agit ſera terminée, & que la derniere fraction de cette ſérie ſera la fraction même $\frac{V}{V'}$, donc cette fraction terminera

Digitized by Google

auſſi néceſſairement une des deux ſéries ci-deſſus, mais l'autre ſérie pourra toujours aller à l'infini.

En effet, ſuppoſons que δ ſoit le dernier dénominateur de la fraction continue, alors $\frac{D}{D'}$ ſera la derniere des fractions *principales*, & la ſérie des fractions plus grandes que a ſera terminée par cette même fraction $\frac{D}{D}$; or l'autre ſérie des fractions plus petites que a, ſe trouvera naturellement arrêtée à la fraction $\frac{C}{C'}$, qui précede $\frac{D}{D'}$; mais pour la continuer, il n'y a qu'à conſidérer que le dénominateur ε, qui devroit ſuivre le dernier dénominateur δ ſera $= \infty$, (art. 3); de ſorte que la fraction $\frac{E}{E'}$, qui ſuivroit $\frac{D}{D'}$ dans la ſuite des fractions *principales*, ſeroit $\frac{\infty D + C}{\infty D' + C'} = \frac{D}{D'}$; or par la loi des fractions *intermédiaires*, il eſt clair

Digitized by Google

qu'à cause de $\epsilon = \infty$, on pourra inférer entre les fractions $\frac{C}{C'}$ & $\frac{E}{E'}$ une infinité de fractions *intermédiaires*, qui seront

$$\frac{D+C}{D'+C'}, \frac{2D+C}{2D'+C'}, \frac{3D+C}{3D'+C'}, \&c.$$

Ainsi dans ce cas on pourra, après la fraction $\frac{C}{C'}$ dans la premiere suite de fractions, placer encore les fractions *intermédiaires* dont nous parlons, & les contiuuer à l'infini.

PROBLEME.

19. *Une fraction exprimée par un grand nombre de chiffres étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres termes qui approchent si près de la vérité, qu'il soit impossible d'en approcher davantage sans en employer de plus grandes.*

Ce probleme se résoudra facilement par la théorie que nous venons d'expliquer.

On commencera par réduire la fraction proposée en fraction continue par la méthode de l'art. 4, en ayant soin de prendre

Digitized by Google

toutes les valeurs approchées plus petites que les véritables, pour que les nombres β, γ, δ, &c. ſoient tous poſitifs; enſuite, à l'aide des nombres trouvés α, β, γ, &c. on formera, d'après les formules de l'art. 10, les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, &c. dont la derniere ſera néceſſairement la même que la fraction propoſée, parce que dans ce cas la fraction continue eſt terminée. Ces fractions ſeront alternativement plus petites & plus grandes que la fraction donnée, & ſeront ſucceſſivement conçues en termes plus grands; & de plus elles ſeront telles que chacune de ces fractions approchera plus de la fraction donnée, que ne pourroit faire toute autre fraction quelconque qui ſeroit conçue en termes moins ſimples. Ainſi on aura par ce moyen toutes les fractions conçues en moindres termes que la propoſée, qui pourront ſatisfaire au probleme.

Que ſi on veut conſidérer en particulier les fractions plus petites & les fractions plus grandes que la propoſée, on inférera entre

Digitized by Google

les fractions précédentes autant de fractions *intermédiaires* que l'on pourra, & on en formera deux ſuites de fractions convergentes, les unes toutes plus petites & les autres toutes plus grandes que la fraction donnée, (art. 16, 17 & 18); chacune de ces ſuites aura en particulier les mêmes propriétés que la ſuite des fractions principales $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, *&c.* car les fractions dans chaque ſuite ſeront ſucceſſivement conçues en plus grands termes, & chacune d'elles approchera plus de la fraction propoſée, que ne pourroit faire aucune autre fraction qui ſeroit pareillement plus petite ou plus grande que la propoſée, mais qui ſeroit conçue en termes plus ſimples.

Au reſte il peut arriver qu'une des fractions *intermédiaires* d'une ſérie n'approche pas ſi près de la fraction donnée, qu'une des fractions de l'autre ſérie, quoique conçue en termes moins ſimples que celle-ci; c'eſt pourquoi il ne convient d'employer les fractions *intermédiaires*, que lorſqu'on

Digitized by Google

veut que les fractions cherchées ſoient toutes plus petites ou toutes plus grandes que la fraction donnée.

EXEMPLE I.

20. Suivant M. de la Caille, l'année ſolaire eſt de $365^j\ 5^h\ 48'\ 49''$, & par conſéquent plus longue de $5^h\ 48'\ 49''$ que l'année commune de 365^j; ſi cette différence étoit exactement de 6 heures, elle donneroit un jour au bout de quatre années communes; mais ſi on veut ſavoir au juſte au bout de combien d'années communes cette différence peut produire un certain nombre de jours, il faut chercher le rapport qu'il y a entre 24^h & $5^h\ 48'\ 49''$, & on trouve ce rapport $= \frac{86400}{20929}$; de ſorte qu'on peut dire qu'au bout de 86400 années communes, il faudroit intercaler 20929 jours pour les réduire à des années tropiques.

Or comme le rapport de 86400 à 20929 eſt exprimé en termes fort grands, on propoſe de trouver en de termes plus petits des rapports auſſi approchés de celui-ci qu'il eſt poſſible.

Digitized by Google

On réduira donc la fraction $\frac{86400}{20929}$ en fraction continue par la regle donnée dans l'art. 4, qui eſt la même que celle qui ſert à trouver le plus grand commun diviſeur de deux nombres donnés : on aura

20929|86400|4=α
|83716|
2684|20929|7=β
|18788|
2141|2684|1=γ
|2141|
543|2141|3=δ
|1629|
512|543|1=ε
|512|
31|512|16=ζ
|496|
16|31|1=η
|16|
15|16|1=θ
|15|
1|15|15=ι
|15|
0.

Connoiſſant ainſi tous les quotiens α, β, γ, &c. on en formera aiſément la ſérie $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, &c. de la maniere ſuivante :

4, 7, 1, 3, 1, 16, 1, 1, 15.

$\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, $\frac{128}{31}$, $\frac{161}{39}$, $\frac{2704}{655}$, $\frac{2865}{694}$, $\frac{5569}{1349}$, $\frac{86400}{20929}$,

Digitized by Google

où l'on voit que la derniere fraction eſt la même que la propoſée.

Pour faciliter la formation de ces fractions, on écrira d'abord, comme je viens de le faire, la ſuite des quotiens 4, 7, 1, &c. & on placera au-deſſous de ces coefficiens les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, &c. qui en réſultent.

La premiere fraction aura toujours pour numérateur le nombre qui eſt au-deſſus, & pour dénominateur l'unité.

La ſeconde aura pour numérateur le produit du nombre qui y eſt au-deſſus par le numérateur de la premiere, plus l'unité, & pour dénominateur le nombre même qui eſt au-deſſus.

La troiſieme aura pour numérateur le produit du nombre qui y eſt au-deſſus par le numérateur de la ſeconde, plus celui de la premiere; & de même pour dénominateur, le produit du nombre qui eſt au-deſſus par le dénominateur de la ſeconde, plus celui de la premiere.

Et en général chaque fraction aura pour

Digitized by Google

numérateur le produit du nombre qui y eſt au-deſſus par le numérateur de la fraction précédente, plus celui de l'avant-précédente ; & pour dénominateur le produit du même nombre par le dénominateur de la fraction précédente, plus celui de l'avant-précédente.

Ainſi $29=7.4+1$, $7=7$, $33=1.29+4$, $8=1.7+1$, $128=3.33+29$, $31=3.8+7$, & ainſi de ſuite ; ce qui s'accorde avec les formules de l'art. 10.

Maintenant on voit par les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, *&c.* que l'intercalation la plus ſimple eſt celle d'un jour dans quatre années communes, ce qui eſt le fondement du calendrier Julien ; mais qu'on approcheroit plus de l'exactitude en n'intercalant que ſept jours dans l'eſpace de vingt-neuf années communes, ou huit dans l'eſpace de trente-trois ans, & ainſi de ſuite.

On voit de plus que comme les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$ ſont alternativement plus petites & plus grandes que la fraction $\frac{86400}{20929}$ ou

Digitized by Google

$\frac{24^h}{5^h\,48'\,49''}$, l'intercalation d'un jour sur quatre ans sera trop forte, celle de sept jours sur vingt-neuf ans trop foible, celle de huit jours sur trente-trois ans trop forte, & ainsi de suite; mais chacune de ces intercalations sera toujours la plus exacte qu'il est possible dans le même espace de temps.

Or, si on range dans deux séries particulieres les fractions plus petites & les fractions plus grandes que la fraction donnée, on y pourra encore insérer différentes fractions secondaires pour compléter les séries; & pour cela on suivra le même procédé que ci-dessus, mais en prenant successivement à la place de chaque nombre de la série supérieure tous les nombres entiers moindres que ce nombre, (lorsqu'il y en a).

Ainsi, considérant d'abord les fractions croissantes

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{33},\ \frac{1}{161},\ \frac{1}{2865},\ \frac{15}{86400},$$

on voit qu'à cause que l'unité est au-dessus

Digitized by Google

de la seconde, de la troisieme & de la quatrieme, on ne pourra placer aucune fraction *intermédiaire*, ni entre la premiere & la seconde; ni entre la seconde & la troisieme, ni entre la troisieme & la quatrieme; mais comme la derniere fraction a au-dessus d'elle le nombre 15, on pourra entre cette fraction & la précédente, placer quatorze fractions *intermédiaires*, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique $2865+5569$, $2865+2.5569$, $2865+3.5569$ *&c.* & dont les dénominateurs formeront aussi la progression arithmétique $694+1349$, $694+2.1349$, $694+3.1349$, *&c.*

Par ce moyen la suite complette des fractions croissantes sera

$$\frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{161}{39}, \frac{2865}{694}, \frac{8434}{2043}, \frac{14003}{3392}, \frac{19572}{4741}, \frac{25141}{6090},$$
$$\frac{30710}{7439}, \frac{36279}{8788}, \frac{41848}{10137}, \frac{47417}{11486}, \frac{52986}{12835}, \frac{58555}{14184}, \frac{64124}{15533},$$
$$\frac{69693}{16882}, \frac{75262}{18231}, \frac{80831}{19580}, \frac{86400}{20929}.$$

Et comme la derniere fraction est la même que la fraction donnée, il est clair que cette série ne peut pas être poussée plus loin.

Digitized by Google

De-là on voit que si on ne veut admettre que des intercalations qui pechent par excès, les plus simples & les plus exactes seront celles d'un jour sur quatre années, ou de huit jours sur trente-trois ans, ou de trente-neuf sur cent soixante-un ans, & ainsi de suite.

Considérons maintenant les fractions décroissantes

$$7,\ 3,\ 16,\ 1.$$
$$\frac{29}{7},\ \frac{128}{31},\ \frac{2704}{655},\ \frac{5569}{1349},$$

& d'abord, à cause du nombre 7 qui est au-dessus de la premiere fraction, on pourra en placer six autres avant celle-ci, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique $4+1$, $2.4+1$, $3.4+1$, *&c.* & dont les dénominateurs formeront la progression 1, 2, 3, *&c.* de même, à cause du nombre 7, on pourra placer entre la premiere & la seconde fraction deux fractions *intermédiaires*; & entre la seconde & la troisieme on en pourra placer 15, à cause du nombre 16 qui est au-dessus de la troisieme;

Digitized by Google

troiſieme ; mais entre celle-ci & la derniere on n'en pourra inſérer aucune, à cauſe que le nombre qui y eſt au-deſſus eſt l'unité.

De plus, il faut remarquer que comme la ſérie précédente n'eſt pas terminée par la fraction donnée, on peut encore la continuer auſſi loin que l'on veut, comme nous l'avons fait voir dans l'art. 18. Ainſi on aura cette ſérie de fractions croiſſantes

$\frac{5}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{17}{4}, \frac{21}{5}, \frac{25}{6}, \frac{29}{7}, \frac{62}{15}, \frac{95}{23}, \frac{128}{31},$
$\frac{289}{70}, \frac{450}{109}, \frac{611}{148}, \frac{772}{187}, \frac{933}{226}, \frac{1094}{265}, \frac{1255}{304}, \frac{1416}{343},$
$\frac{1577}{382}, \frac{1738}{421}, \frac{1899}{460}, \frac{2060}{499}, \frac{2221}{538}, \frac{2382}{577}, \frac{2543}{616},$
$\frac{2704}{655}, \frac{5569}{1349}, \frac{91969}{22278}, \frac{178369}{43207}, \frac{264769}{64136}, \frac{351169}{85065},$
$\frac{437569}{105994}$, &c.

leſquelles ſont toutes plus petites que la fraction propoſée, & en approchent plus que toutes autres fractions qui ſeroient conçues en termes moins ſimples.

On peut conclure de-là, que ſi on ne vouloit avoir égard qu'aux intercalations qui pécheroient par défaut, les plus ſimples & les plus exactes ſeroient celles d'un

Digitized by Google

jour ſur cinq ans, ou de deux jours ſur neuf ans, ou de trois jours ſur treize ans, &c.

Dans le calendrier grégorien on intercale ſeulement quatre-vingt dix-ſept jours dans quatre cents années; on voit par la table précédente qu'on approcheroit beaucoup plus de l'exactitude, en intercalant cent neuf jours en quatre cents cinquante années.

Mais il faut remarquer que dans la réformation grégorienne on s'eſt ſervi de la détermination de l'année donnée par Copernic, laquelle eſt de $365^j\ 5^h\ 49'\ 20''$. En employant cet élément on auroit, au lieu de la fraction $\frac{86400}{20929}$, celle-ci $\frac{86400}{20960}$, ou bien $\frac{540}{131}$; d'où l'on trouveroit par la méthode précédente les quotiens 4, 8, 5, 3, & de-là ces fractions *principales*

$$4,\ 8,\ 5,\ 3.$$
$$\frac{4}{1},\ \frac{33}{8},\ \frac{169}{41},\ \frac{540}{131},$$

qui ſont, à l'exception des deux premieres, aſſez difiérentes de celles que nous avons trouvées ci-deſſus. Cependant on ne trouve pas parmi ces fractions la fraction $\frac{400}{97}$ adop-

Digitized by Google

tée dans le calendrier grégorien ; & cette fraction ne peut pas même se trouver parmi les fractions *intermédiaires* qu'on pourroit insérer dans les deux séries $\frac{4}{1}$, $\frac{169}{41}$, & $\frac{33}{8}$, $\frac{140}{131}$; car il est clair qu'elle ne pourroit tomber qu'entre ces deux dernieres fractions, entre lesquelles, à cause du nombre 3 qui est au-dessus de la fraction $\frac{140}{131}$, il peut tomber deux fractions *intermédiaires*, qui seront $\frac{202}{49}$ & $\frac{371}{90}$; d'où l'on voit qu'on auroit approché plus de l'exactitude, si dans la réformation grégorienne on avoit prescrit de n'intercaler que quatre-vingt-dix jours dans l'espace de trois cents soixante & onze ans.

Si on réduit la fraction $\frac{400}{97}$ à avoir pour numérateur le nombre 86400, elle deviendra $\frac{86400}{20952}$, ce qui supposeroit l'année tropique de $365^j\,5^h\,49'\,12''$.

Dans ce cas l'interpolation grégorienne seroit tout-à-fait exacte ; mais comme les observations donnent l'année plus courte de plus de 20″, il est clair qu'il faudra nécessairement, au bout d'un certain espace

Digitized by Google

de temps, introduire une nouvelle intercalation.

Si on vouloit s'en tenir à la détermination de M. de la Caille, comme le dénominateur 97 de la fraction $\frac{400}{97}$ se trouve entre les dénominateurs de la cinquieme & de la sixieme des fractions principales trouvées ci-devant, il s'ensuit de ce que nous avons démontré, (art. 14), que la fraction $\frac{161}{39}$ approcheroit plus de la vérité que la fraction $\frac{400}{97}$; au reste, comme les Astronomes sont encore partagés sur la véritable longueur de l'année, nous nous abstiendrons de prononcer sur ce sujet; aussi n'avons-nous eu d'autre objet dans les détails que nous venons de donner, que de faciliter les moyens de se mettre au fait des fractions continues & de leurs usages; dans cette vue nous ajouterons encore l'exemple suivant.

EXEMPLE II.

21. Nous avons déjà donné, (art. 8), la fraction continue qui exprime le rapport de la circonférence du cercle au diametre,

Digitized by Google

en tant qu'elle réſulte de la fraction de Ludolph; ainſi il n'y aura qu'à calculer, de la maniere enſeignée dans l'exemple précédent, la ſérie des fractions convergentes vers ce même rapport, laquelle ſera

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1,

$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99532},$

2, 1, 3, 1, 14,

$\frac{833719}{265381}, \frac{1146408}{364913}, \frac{4272943}{1360120}, \frac{5419351}{1725033}, \frac{80143857}{25510582},$

2, 1, 1, 2,

$\frac{165707065}{52746197}, \frac{245850922}{78256779}, \frac{411557987}{131002976}, \frac{1068966896}{340262731},$

2, 2, 2, 1,

$\frac{2549491779}{811528438}, \frac{6167950454}{1963319607}, \frac{14885392687}{4738167652}, \frac{21053343141}{6701487259},$

84, 2, 1,

$\frac{1783366216531}{567663097408}, \frac{3587785776203}{1142027682075}, \frac{5371151992734}{1709690779483},$

1, 15, 3,

$\frac{8958937768937}{2851718461558}, \frac{139755218526789}{44485467702853}, \frac{428224593349304}{136308121570117},$

13, 1, 4,

$\frac{5706674932067741}{1816491048114374}, \frac{6134899525417045}{1952799169684491}, \frac{30246273033735921}{9627687726852338},$

Digitized by Google

2, 6,

$\frac{6662744559288887}{21208174623389167}$, $\frac{4300109465910692 43}{1368767354671873 40}$,

6, 1.

$\frac{3646693125139304345}{8424685874265 13207}$, $\frac{3076704071730373588}{9793453228937005 47}$.

Ces fractions ſeront donc alternativement plus petites & plus grandes que la vraie raiſon de la circonférence au diametre, c'eſt-à-dire que la premiere $\frac{3}{1}$ ſera plus petite, la ſeconde $\frac{22}{7}$ plus grande, & ainſi de ſuite; & chacune d'elles approchera plus de la vérité que ne pourroit faire toute autre fraction qui ſeroit exprimée en termes plus ſimples, ou, en général, qui auroit un dénominateur moindre que le dénominateur de la fraction ſuivante; de ſorte que l'on peut aſſurer que la fraction $\frac{3}{1}$ approche plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction dont le dénominateur ſeroit moindre que 7; de même la fraction $\frac{22}{7}$ approchera plus de la vérité que toute autre fraction dont le dénominateur ſeroit moindre que 106, & ainſi des autres.

Digitized by Google

Quant à l'erreur de chaque fraction, elle ſera toujours moindre que l'unité diviſée par le produit du dénominateur de cette fraction par celui de la fraction ſuivante. Ainſi l'erreur de la fraction $\frac{3}{1}$ ſera moindre que $\frac{1}{7}$, celle de la fraction $\frac{22}{7}$ ſera moindre que $\frac{1}{7.106}$, & ainſi de ſuite. Mais en même temps l'erreur de chaque fraction ſera plus grande que l'unité diviſée par le produit du dénominateur de cette fraction, par la ſomme de ce dénominateur, & du dénominateur de la fraction ſuivante; de ſorte que l'erreur de la fraction $\frac{3}{1}$ ſera plus grande que $\frac{1}{8}$, celle de la fraction $\frac{22}{7}$ plus grande que $\frac{1}{7.113}$, & ainſi de ſuite, (art. 14).

Si on vouloit maintenant ſéparer les fractions plus petites que le rapport de la circonférence au diametre, d'avec les plus grandes, on pourroit, en inférant les fractions *intermédiaires* convenables, former deux ſuites de fractions, les unes croiſſantes & les autres décroiſſantes vers le vrai rapport

Digitized by Google

dont il s'agit ; on auroit de cette maniere

Fractions plus petites que $\frac{\text{périph.}}{\text{diam.}}$.

$\frac{3}{1}, \frac{25}{8}, \frac{47}{15}, \frac{69}{22}, \frac{91}{29}, \frac{113}{36}, \frac{135}{43}, \frac{157}{50}, \frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}, \frac{333}{106}, \frac{688}{219}, \frac{1043}{332}, \frac{1398}{445}, \frac{1753}{558}, \frac{2108}{671}, \frac{2463}{784}$, *&c.*

Fractions plus grandes que $\frac{\text{périph.}}{\text{diam.}}$.

$\frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \frac{104348}{33215}, \frac{312689}{99532}, \frac{1146408}{364913}, \frac{5419351}{1725033}, \frac{85563208}{27235615}, \frac{165707065}{52746197}, \frac{411557987}{131002976}, \frac{1480524883}{471265707}$, *&c.*

Chaque fraction de la premiere série approche plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples, & qui pécheroit aussi par défaut ; & chaque fraction de la seconde série approche aussi plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples & péchant par excès.

Au reste ces séries deviendroient fort prolixes, si on vouloit les pousser aussi loin que nous avons fait celle des fractions

Digitized by Google

principales donnée ci-deſſus. Les bornes de cet Ouvrage ne nous permettent pas de les inſérer ici dans toute leur étendue ; mais on peut les trouver au beſoin dans le chap. XI de l'Algebre de Wallis, (*Operum Mathemat.* vol. II.)

REMARQUE.

22. La premiere ſolution de ce probleme a été donnée par Wallis dans un petit Traité qu'il a joint aux Œuvres poſthumes d'Horrocius, & on la retrouve dans l'endroit cité de ſon Algebre ; mais la méthode de cet Auteur eſt indirecte & fort laborieuſe. Celle que nous venons de donner eſt due à Huyghens, & on doit la regarder comme une des principales découvertes de ce grand Géometre. La conſtruction de ſon automate planétaire, paroît en avoir été l'occaſion. En effet il eſt clair que pour pouvoir repréſenter exactement les mouvemens & les périodes des planetes, il faudroit employer des roues où les nombres des dents

Digitized by Google

fuſſent préciſément dans les mêmes rapports que les périodes dont il s'agit ; mais comme on ne peut pas multiplier les dents au-delà d'une certaine limite dépendante de la grandeur de la roue, & que d'ailleurs les périodes des planetes ſont incommenſurables, ou du moins ne peuvent être repréſentées avec une certaine exactitude que par de très-grands nombres, on eſt obligé de ſe contenter d'un *à-peu-près*, & la difficulté ſe réduit à trouver des rapports exprimés en plus petits nombres, qui approchent autant qu'il eſt poſſible de la vérité, & plus que ne pourroient faire d'autres rapports quelconques qui ne ſeroient pas conçus en termes plus grands.

M. Huyghens réſout cette queſtion par le moyen des fractions continues, comme nous l'avons fait ci-deſſus ; il donne la maniere de former ces fractions par des diviſions continuelles, & il démontre enſuite les principales propriétés des fractions convergentes qui en réſultent, ſans oublier

Digitized by Google

même les fractions *intermédiaires*. Voyez dans ſes *Opera poſthuma* le Traité intitulé *Deſcriptio automati planetarii*.

D'autres grands Géometres ont enſuite conſidéré les fractions continues d'une maniere plus générale. On trouve ſur-tout dans les Commentaires de Pétersbourg, (tom. IX & XI des anciens, & tom. IX & XI des nouveaux), des Mémoires de M^r. Euler remplis des recherches les plus ſavantes & les plus ingénieuſes ſur ce ſujet; mais la théorie de ces fractions, enviſagée du côté arithmétique qui en eſt le plus intéreſſant, n'avoit pas encore été, ce me ſemble, autant cultivée qu'elle le méritoit; c'eſt ce qui m'a engagé à en compoſer ce petit Traité pour la rendre plus familiere aux Géometres. Voyez auſſi les Mémoires de Berlin pour les années 1767 & 1768.

Au reſte cette théorie eſt d'un uſage très-étendu dans toute l'Arithmétique, & il y a peu de problemes de cette ſcience, au moins parmi ceux pour leſquels les regles

Digitized by Google

ordinaires ne ſuffiſent pas, qui n'en dépendent directement ou indirectement. Mr. Jean Bernoulli vient d'en faire une application heureuſe & utile dans une nouvelle eſpece de calcul qu'il a imaginé pour faciliter la conſtruction des tables de parties proportionnelles. Voyez le tome I de ſon *Recueil pour les Aſtronomes.*

Digitized by Google

PARAGRAPHE II.

Solutions de quelques Problemes curieux & nouveaux d'Arithmétique.

QUOIQUE les problemes dont nous allons nous occuper aient un rapport immédiat avec le précédent, & dépendent des mêmes principes, nous croyons cependant devoir les traiter d'une maniere directe, & ſans rien ſuppoſer de ce qui a été démontré juſqu'ici.

On aura par ce moyen la ſatisfaction de voir comment dans ces ſortes de matieres on eſt néceſſairement conduit à la théorie des fractions continues; d'ailleurs cette théorie en deviendra beaucoup plus lumineuſe, & recevra par-là de nouveaux degrés de perfection.

PROBLEME I.

23. *Etant donnée une quantité poſitive* a, *rationnelle ou non, & ſuppoſant que* p *&* q *ne puiſſent être que des nombres entiers po-*

Digitized by Google

ſitifs & premiers entr'eux, on demande de trouver des valeurs de p *&* q, *telles que la valeur de* p—aq, (*abſtraction faite du ſigne*), *ſoit plus petite qu'elle ne ſeroit, ſi on donnoit à* p *&* q *des valeurs moindres quelconques.*

Pour pouvoir réſoudre ce probleme directement, nous commencerons par ſuppoſer que l'on ait en effet déjà trouvé des valeurs de *p* & *q* qui aient les conditions requiſes; donc prenant pour *r* & *ſ* des nombres quelconques entiers poſitifs moindres que *p* & *q*, il faudra que la valeur de *p* —*aq* ſoit moindre que celle de *r*—*aſ*, abſtraction faite des ſignes de ces deux quantités, c'eſt-à-dire en les prenant toutes deux poſitivement. Or je remarque d'abord que ſi les nombres *r* & *ſ* ſont tels que *pſ*—*qr* $= \pm 1$, le ſigne ſupérieur ayant lieu lorſque *p*—*aq* eſt un nombre poſitif, & l'inférieur, lorſque *p*—*aq* eſt un nombre négatif, on en peut conclure en général que la valeur de toute expreſſion *y*—*az* ſera toujours plus grande, (abſtraction faite du ſigne), que celle de *p*—*aq*, tant qu'on ne donnera

Digitized by Google

à z & à y que des valeurs entieres, moindres que celles de p & q.

En effet, il eſt clair qu'on peut ſuppoſer en général

$$y = pt + ru, \text{ \& } z = qt + ru,$$

t & u étant deux inconnues ; or par la réſolution de ces équations on a

$$t = \frac{fy - rz}{pf - qr}, \quad u = \frac{qy - pz}{qr - pf};$$

donc, à cauſe de $pf - qr = \pm 1$, $t = \pm(fy - rz)$, & $u = \pm(qy - pz)$; d'où l'on voit que t & u ſeront toujours des nombres entiers, puiſque p, q, r, f & y, z ſont ſuppoſés entiers.

Donc, t & u étant des nombres entiers, & p, q, r, f des nombres entiers poſitifs, il eſt clair que pour que les valeurs de y & z ſoient moindres que celles de p & q, il faudra néceſſairement que les nombres t & u ſoient de ſignes différens.

Maintenant je remarque que la valeur de $r - af$ ſera auſſi de différent ſigne que celle de $p - aq$; car faiſant $p - aq = P$, & $r - af = R$, on aura $\frac{p}{q} = a + \frac{P}{q}$, $\frac{r}{f} = a$

Digitized by Google

$+\frac{R}{f}$; mais l'équation $pf-qr=\pm 1$, donne $\frac{p}{q}-\frac{r}{f}=\pm\frac{1}{qf}$; donc $\frac{P}{q}-\frac{R}{f}=\pm\frac{1}{qf}$; donc, puiſqu'on ſuppoſe que le ſigne ambigu ſoit pris conformément à celui de la quantité $p-aq$ ou P, il faudra que la quantité $\frac{P}{q}-\frac{R}{f}$ ſoit poſitive, ſi P eſt poſitif, & négative, ſi P eſt négatif; or comme f eſt $<q$, & que R eſt plus grand que P, (*hyp.*), il eſt clair que $\frac{R}{f}$ ſera à plus forte raiſon plus grand que $\frac{P}{q}$, (abſtraction faite du ſigne); donc la quantité $\frac{P}{q}-\frac{R}{f}$ ſera toujours de ſigne différent de $\frac{R}{f}$, c'eſt-à-dire de R, puiſque f eſt poſitif; donc P & R ſeront néceſſairement de ſignes différens.

Cela poſé, on aura, en ſubſtituant les valeurs ci-deſſus de y & z, $y-az=(p-aq)t+(r-af)u=Pt+Ru$; or t & u étant de ſignes différens, auſſi bien que P & R, il eſt clair que Pt & Ru ſeront des quantités de mêmes ſignes; donc puiſque t & u ſont d'ailleurs des nombres entiers, il eſt viſible que la valeur de $y-az$ ſera toujours plus grande que P, c'eſt-à-dire que

Digitized by Google

que la valeur de $p-aq$, abſtraction faite des ſignes.

Mais il reſte maintenant à ſavoir ſi, les nombres p & q étant donnés, on peut toujours trouver des nombres r & $ſ$ moindres que ceux-là, & tels que $pſ-qr=\pm 1$, les ſignes ambigus étant à volonté; or cela ſuit évidemment de la théorie des fractions continues; mais on peut auſſi le démontrer directement & indépendamment de cette théorie. Car la difficulté ſe réduit à prouver qu'il exiſte néceſſairement un nombre entier poſitif & moindre que p, lequel étant pris pour r, rendra $qr\pm 1$ diviſible par p; or ſuppoſons qu'on ſubſtitue ſucceſſivement à la place de r les nombres naturels 1, 2, 3, &c. juſqu'à p, & qu'on diviſe les nombres $q\pm 1$, $2q\pm 1$, $3q\pm 1$, &c. $pq\pm 1$ par p, on aura p, reſtes moindres que p, qui ſeront néceſſairement tous différens les uns des autres; car ſi, par exemple, $mq\pm 1$ & $nq\pm 1$, (m & n étant des nombres entiers différens qui ne ſurpaſſent pas p), étant diviſés par p, donnoient un même reſte, il

Digitized by Google

eſt clair que leur différence, $(m-n)q$, devroit être diviſible par p; or c'eſt ce qui ne ſe peut, à cauſe que q eſt premier à p, & que $m-n$ eſt un nombre moindre que p. Donc, puiſque tous les reſtes dont il s'agit, ſont des nombres entiers poſitifs moindres que p & différens entr'eux, & que ces reſtes ſont au nombre de p, il eſt clair qu'il faudra néceſſairement que le zéro ſe trouve parmi ces reſtes, & conſéquemment qu'il y ait un des nombres $q\pm 1$, $2q\pm 1$, $3q\pm 1$, &c. $pq\pm 1$, qui ſoit diviſible par p; or il eſt clair que ce ne peut être le dernier; ainſi il y aura ſûrement une valeur de r moindre que p, laquelle rendra $rq\pm 1$ diviſible par p; & il eſt clair en même temps que le quotient ſera moindre que q; donc il y aura toujours une valeur entière & poſitive de r moindre que p, & une autre valeur pareille de s & moindre que q, leſquelles ſatisferont à l'équation $s=\frac{qr\pm 1}{p}$, ou $ps-qr=\pm 1$.

24. La queſtion eſt donc réduite maintenant à trouver quatre nombres entiers & poſitifs, p, q, r, s, dont les deux derniers

Digitized by Google

ſoient moindres que les premiers, c'eſt-à-dire $r < p$ & $ſ < q$, & qui ſoient tels que $pſ - qr = \pm 1$, que de plus les quantités $p - aq$ & $r - aſ$ ſoient de ſignes différens, & qu'en même temps $r - aſ$ ſoit une quantité plus grande que $p - aq$, abſtraction faite des ſignes.

Déſignons, pour plus de ſimplicité, r par p' & $ſ$ par q', en ſorte que l'on ait $pq' - qp' = \pm 1$; & comme $q > q'$, (*hyp.*), ſoit μ le quotient qui proviendroit de la diviſion de q par q', & ſoit le reſte q'', qui ſera par conſéquent $< q'$; ſoit de même μ' le quotient de la diviſion de q' par q'', & q''' le reſte, qui ſera $< q''$; pareillement ſoit μ'' le quotient de la diviſion de q'' par q''', & q^{IV} le reſte $< q'''$, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on parvienne à un reſte nul; on aura de cette maniere

$$\begin{aligned} q &= \mu q' + q'' \\ q' &= \mu' q'' + q''' \\ q'' &= \mu'' q''' + q^{IV} \\ q''' &= \mu''' q^{IV} + q^{V}; \text{ \&c.} \end{aligned}$$

où les nombres $\mu, \mu', \mu'', \text{\&c.}$ ſeront tous entiers & poſitifs, & où les nombres $q, q',$

Digitized by Google

q'', q''', &c. seront aussi entiers positifs, & formeront une suite décroissante jusqu'à zéro.

Supposons pareillement

$$\begin{aligned} p &= \mu p' + p'' \\ p' &= \mu' p'' + p''' \\ p'' &= \mu'' p''' + p'^{v} \\ p''' &= \mu''' p'^{v} + p^{v}, \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Et comme les nombres p & p' sont regardés ici comme donnés, aussi bien que les nombres μ, μ', μ'', &c. on pourra déterminer par ces équations les nombres p'', p''', p'^{v}, &c. qui seront évidemment tous entiers.

Maintenant, comme on doit avoir $pq' - qp' = \pm 1$, on aura aussi, en substituant les valeurs précédentes de p & q, & effaçant ce qui se détruit, $p''q' - q''p' = \pm 1$; & substituant de nouveau dans cette équation les valeurs de p' & q', il viendra $p''q''' - q''p''' = \pm 1$, & ainsi de suite; de sorte qu'on aura en général

$$\begin{aligned} pq' - qp' &= \pm 1 \\ p'q'' - q'p'' &= \mp 1 \\ p''q''' - q''p''' &= \pm 1 \\ p'''q'^{v} - q'''p'^{v} &= \mp 1, \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Digitized by Google

Donc, si q^{III}, par exemple, étoit nul, on auroit $-q^{II}p^{III}=\pm 1$; donc $q^{II}=1$ & $p^{III}=\mp 1$; mais si q^{IV} étoit $=0$, on auroit $-q^{III}p^{IV}=\mp 1$; donc $q^{III}=1$ & $p^{IV}=\pm 1$; donc en général, si $q^{\rho}=0$, on aura $q^{\rho-1}=1$; & ensuite $p^{\rho}=\pm 1$, si ρ est pair, & $p^{\rho}=\mp 1$, si ρ est impair.

Or, comme on ne sait pas d'avance si c'est le signe supérieur ou l'inférieur qui doit avoir lieu, il faudroit supposer successivement $p^{\rho}=1$ & $=-1$; mais je remarque que l'on peut toujours ramener l'un de ces cas à l'autre; & pour cela il est clair qu'il suffit de prouver qu'on peut toujours faire en sorte que le ρ du terme q^{ρ} qui doit être nul, soit pair ou impair à volonté. En effet, supposons, par exemple, que q^{IV} soit $=0$, on aura donc $q^{III}=1$ & $q^{II}>1$, c'est-à-dire $q^{II}=2$ ou >2, à cause que les nombres q, q^{I}, q^{II}, *&c.* forment naturellement une série décroissante; donc, puisque $q^{II}=\mu^{II}q^{III}+q^{IV}$, on aura $q^{II}=\mu^{II}$, de sorte que μ^{II} sera $=$ ou >2; ainsi on pourra, si l'on veut, diminuer μ^{II} d'une

Digitized by Google

unité, sans que ce nombre devienne nul, & alors q^{IV}, qui étoit $=0$, deviendra $=1$, & q^{V} sera $=0$; car mettant $\mu^{II}-1$ à la place de μ^{II}, on aura $q^{II}=(\mu^{II}-1)q^{III}+q^{IV}$; mais $q^{II}=\mu^{II}$, $q^{III}=1$; donc $q^{IV}=1$; ensuite ayant $q^{III}=\mu^{III}q^{IV}+q^{V}$, c'est-à-dire $1=\mu^{III}+q^{V}$, on aura nécessairement $\mu^{III}=1$ & $q^{V}=0$.

De-là on peut donc conclure en général que, si $q^{p}=0$, on aura $q^{p-1}=1$ & $p^{p}=\pm 1$, le signe ambigu étant à volonté.

Maintenant, si on substitue les valeurs de p & q données par les formules précédentes dans $p-aq$, celles de p' & q' dans $p'-aq'$, & ainsi des autres, on aura

$$p-aq=\mu(p'-aq')+p''-aq''$$
$$p'-aq'=\mu'(p''-aq'')+p'''-aq'''$$
$$p''-aq''=\mu''(p'''-aq''')+p^{IV}-aq^{IV}$$
$$p'''-aq'''=\mu'''(p^{IV}-aq^{IV})+p^{V}-aq^{V},$$
$$\&c.$$

d'où l'on tire

$$\mu=\frac{aq''-p''}{p'-aq'}+\frac{p-aq}{p'-aq'}$$

Digitized by Google

$$\mu' = \frac{aq''' - p'''}{p'' - aq''} + \frac{p' - aq'}{p'' - aq''}$$

$$\mu'' = \frac{aq^{IV} - p^{IV}}{p''' - aq'''} + \frac{p'' - aq''}{p''' - aq'''}$$

$$\mu''' = \frac{aq^{V} - p^{V}}{p^{IV} - aq^{IV}} + \frac{p''' - aq'''}{p^{IV} - aq^{IV}}, \text{ \&c.}$$

Or comme, (*hyp.*), les quantités $p - aq$ & $p' - aq'$ ſont de ſignes différens, & que de plus $p' - aq'$ doit être, (abſtraction faite des ſignes) $> p - aq$, il s'enſuit que $\frac{p - aq}{p' - aq'}$ ſera une quantité négative & plus petite que l'unité. Donc, pour que μ ſoit un nombre entier poſitif, comme il le faut, il eſt clair que $\frac{aq'' - p''}{p' - aq'}$ doit être une quantité poſitive plus grande que l'unité; & il eſt viſible en même temps que μ ne peut être que le nombre entier, qui eſt immédiatement moindre que $\frac{aq'' - p''}{p' - aq'}$, c'eſt-à-dire, qui eſt contenu entre ces limites $\frac{aq'' - p''}{p' - aq'}$ & $\frac{aq'' - p''}{p' - aq'} - 1$; car puiſque $- \frac{p - aq}{p' - aq'}$

Digitized by Google

> 0 & < 1, on aura $\mu < \frac{aq'' - p''}{p' - aq'}$, & $> \frac{aq'' - p''}{p' - aq'} - 1$.

De même, puiſque nous venons de voir que $\frac{aq'' - p''}{p' - aq'}$ doit être une quantité poſitive plus grande que l'unité, il s'enſuit que $\frac{p' - aq'}{p'' - aq''}$ ſera une quantité négative plus petite que l'unité, (je dis plus petite que l'unité, en faiſant abſtraction du ſigne). Donc, pour que μ' ſoit un nombre entier poſitif, il faudra que $\frac{aq''' - p'''}{p'' - aq''}$ ſoit une quantité poſitive plus grande que l'unité, & le nombre μ' ne pourra être par conſéquent que le nombre entier, qui ſera immédiatement au-deſſus de la quantité $\frac{aq''' - p'''}{p'' - aq''}$.

On prouvera de la même maniere & par la conſidération, que μ'' doit être un nombre entier poſitif, que la quantité $\frac{aq^{IV} - p^{IV}}{p''' - aq'''}$

Digitized by Google

sera nécessairement positive & au-dessus de l'unité, & que μ^{II} ne pourra être que le nombre entier, qui sera immédiatement au-dessous de la même quantité, & ainsi de suite.

Il s'ensuit de-là, 1°. que les quantités $p - aq$, $p^{I} - aq^{I}$, $p^{II} - aq^{II}$, &c. seront successivement de signes différens, c'est-à-d. alternativement positives & négatives, & qu'elles formeront une suite continuellement croissante; 2°. que si on désigne par le signe $<$ le nombre entier, qui est immédiatement moindre que la valeur de la quantité placée après ce signe, on aura pour la détermination des nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, &c.

$$\mu < \frac{aq^{II} - p^{II}}{p^{I} - aq^{I}}$$

$$\mu^{I} < \frac{aq^{III} - p^{III}}{p^{II} - aq^{II}}$$

$$\mu^{II} < \frac{aq^{IV} - p^{IV}}{p^{III} - aq^{III}}, \text{ \&c.}$$

Or nous avons vu plus haut que la série q, q^{I}, q^{II}, &c. doit se terminer par zéro, & qu'alors le terme précédent sera $= 1$, &

Digitized by Google

le terme correſpondant à zéro dans l'autre ſérie p, p', p'', &c. ſera $=\pm 1$ à volonté.

Ainſi ſuppoſons, par exemple, que l'on ait $q^{IV}=0$, on aura donc $q'''=1$ & $p^{IV}=1$; donc $p'''-aq'''=p'''-a$, & $p^{IV}-aq^{IV}=1$; donc il faudra que $p'''-a$ ſoit une quantité négative & moindre que 1, abſtraction faite du ſigne; c'eſt-à-dire que $a-p'''$ devra être >0 & <1; de ſorte que p''' ne pourra être que le nombre entier, qui ſera immédiatement au-deſſous de a; on connoîtra donc les valeurs de ces quatre termes

$$p^{IV}=1 \qquad q^{IV}=0$$
$$p'''<a \qquad q'''=1,$$

à l'aide deſquelles on pourra, en remontant par les formules ci-deſſus, trouver tous les termes précédens. En effet on aura d'abord la valeur de μ'', enſuite on aura p'' & q'' par les formules $p''=\mu''p'''+p^{IV}$ & $q''=\mu'''q'''+q^{IV}$; de-là on trouvera μ' & enſuite p' & q', & ainſi du reſte.

En général ſoit $q^{\rho}=0$, on aura $q^{\rho-1}$ & $p^{\rho}=1$; & on prouvera, comme ci-deſſus, que $p^{\rho-1}$ ne pourra être que le nombre entier

Digitized by Google

qui eſt immédiatement au-deſſous de a; de ſorte qu'on aura ces quatre termes

$$p^{\rho} = 1 \qquad q^{\rho} = 0$$
$$p^{\rho-1} < a \qquad q^{\rho-1} = 1;$$

enſuite on aura

$$\mu^{\rho-2} < \frac{a q^{\rho} - p^{\rho}}{p^{\rho-1} - a q^{\rho-1}} < \frac{1}{a - p^{\rho-1}}$$

$$p^{\rho-2} = \mu^{\rho-2} p^{\rho-1} + p^{\rho}, \quad q^{\rho-2} = \mu^{\rho-2} q^{\rho-1} + q^{\rho}$$

$$\mu^{\rho-3} < \frac{a q^{\rho-1} + p^{\rho-1}}{p^{\rho-2} + a q^{\rho-2}}$$

$p^{\rho-3} = \mu^{\rho-3} p^{\rho-2} + p^{\rho-1}$, $q^{\rho-3} = \mu^{\rho-3} q^{\rho-2} + q^{\rho-1}$, & ainſi de ſuite.

On pourra donc remonter de cette maniere aux premiers termes p & q; mais nous remarquerons que tous les termes ſuivans, p^{I}, q^{I}, p^{II}, q^{II}, &c. jouiſſent des mêmes propriétés que ceux-là, & réſolvent également le probleme propoſé. Car il eſt viſible par les formules précédentes que les nombres p, p^{I}, p^{II}, &c. & q, q^{I}, q^{II}, &c. ſont tous entiers poſitifs, & forment deux ſéries continuellement décroiſſantes, dont la premiere ſe termine par l'unité, & la ſeconde par zéro.

Digitized by Google

De plus, on a vu que ces nombres ſont tels, que $pq^{I} - qp^{I} = \pm 1$, $p^{I}q^{II} - q^{I}p^{II} = \mp 1$, &c. & que les quantités $p - aq$, $p^{I} - aq^{I}$, $p^{II} - aq^{II}$, &c. ſont alternativement poſitives & négatives, & forment en même temps une ſuite continuellement croiſſante. D'où il ſuit que les mêmes conditions qui ont lieu entre les quatre nombres p, q, r, $ſ$, ou p, q, p^{I}, q^{I}, & d'où dépend la ſolution du probleme, comme on l'a vu plus haut, ont lieu également entre les nombres p^{I}, q^{I}, p^{II}, q^{II}, & entre ceux-ci, p^{II}, q^{II}, p^{III}, q^{III}, & ainſi de ſuite.

Donc, en commençant par les derniers termes p^{t} & q^{t}, & remontant toujours par les formules qu'on vient de trouver, on aura ſucceſſivement toutes les valeurs de p & q qui peuvent réſoudre la queſtion propoſée.

25. Comme les valeurs des termes p^{t}, p^{t-1}, &c. q^{t}, q^{t-1}, &c. ſont indépendantes de l'expoſant t, nous pouvons en faire abſtraction, & déſigner les termes de ces deux ſéries croiſſantes de cette maniere,

Digitized by Google

$p^0, p^I, p^{II}, p^{III}, p^{IV}$, &c. $q^0, q^I, q^{II}, q^{III}, q^{IV}$, &c. ainſi nous aurons les déterminations ſuivantes,

$$p^0 = 1 \qquad q^0 = 0$$
$$p^I = \mu \qquad q^I = 1$$
$$p^{II} = \mu^I p^I + 1 \qquad q^{II} = \mu^I$$
$$p^{III} = \mu^{II} p^{II} + p^I \qquad q^{III} = \mu^{II} q^{II} + q^I$$
$$p^{IV} = \mu^{III} p^{III} + p^{II} \qquad q^{IV} = \mu^{III} q^{III} + q^{II}$$
$$\&c. \qquad \&c.$$

Enſuite

$$\mu < a$$
$$\mu^I < \frac{p^0 - q^0}{a q^I - p^I} < \frac{1}{a - \mu}$$
$$\mu^{II} < \frac{a q^I - p^I}{p^{II} - a q^{II}}$$
$$\mu^{III} < \frac{p^{II} - a q^{II}}{a q^{III} - p^{III}}$$
$$\mu^{IV} < \frac{a q^{III} - p^{III}}{p^{IV} - a q^{IV}}, \ \&c.$$

où le ſigne $<$ dénote le nombre entier qui eſt immédiatement moindre que la valeur de la quantité placée après ce ſigne.

On trouvera ainſi ſucceſſivement toutes les valeurs de p & q qui pourront ſatisfaire

Digitized by Google

au probleme, ces valeurs ne pouvant être que les termes correſpondans des deux ſéries $p^0, p^I, p^{II}, p^{III}$, &c. & $q^0, q^I, q^{II}, q^{III}$, &c.

COROLLAIRE I.

26. Si on fait

$$b = \frac{p^0 - q^0}{aq^I - p^I}$$

$$c = \frac{aq^I - p^I}{p^{II} - aq^{II}}$$

$$d = \frac{p^{II} - aq^{II}}{aq^{III} - p^{III}}, \text{ \&c.}$$

on aura, comme il eſt facile de le voir,

$$b = \frac{I}{a - \mu}$$

$$c = \frac{I}{b - \mu^I}$$

$$d = \frac{I}{c - \mu^{II}}, \text{ \&c.}$$

& $\mu < a$, $\mu^I < b$, $\mu^{II} < c$, $\mu^{III} < d$, &c. donc les nombres μ, μ^I, μ^{II}, &c. ne ſeront autre choſe que ceux que nous avons déſignés par α, β, γ, &c. dans l'art. 3, c'eſt-à-dire que ces nombres ſeront les termes de la

Digitized by Google

fraction continue qui repréſente la valeur de a, en ſorte que l'on aura ici

$$a=\mu+\frac{1}{\mu'}+\frac{1}{\mu''}+, \&c.$$

Par conſéquent les nombres p', p'', p''', &c. ſeront les numérateurs, & q', q'', q''', &c. les dénominateurs des fractions convergentes vers a, fractions que nous avons déſignées ci-devant par $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, &c. (art. 10).

Ainſi tout ſe réduit à convertir la valeur de a en une fraction continue, dont tous les termes ſoient poſitifs, ce qu'on peut exécuter par les méthodes expoſées plus haut, pourvu qu'on ait ſoin de prendre toujours les valeurs approchées en défaut; enſuite il n'y aura plus qu'à former la ſuite des fractions *principales* convergentes vers a, & les termes de chacune de ces fractions donneront des valeurs de p & q, qui réſoudront le probleme propoſé; de ſorte que $\frac{p}{q}$ ne pourra être qu'une de ces mêmes fractions.

Digitized by Google

COROLLAIRE II.

27. Il réſulte de-là une nouvelle propriété des fractions dont nous parlons ; c'eſt que nommant $\frac{p}{q}$ une des fractions *principales* convergentes vers a, (pourvu qu'elles ſoient déduites d'une fraction continue, dont tous les termes ſoient poſitifs), la quantité $p - aq$ aura toujours une valeur plus petite, (abſtraction faite du ſigne), qu'elle n'auroit, ſi on y mettoit à la place de p & q d'autres nombres moindres quelconques.

PROBLEME II.

28. *Etant propoſée la quantité* $Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 +$, &c. $+ Vq^m$, *dans laquelle* A, B, C, &c. *ſont des nombres entiers donnés poſitifs ou négatifs, & où* p & q *ſont des nombres indéterminés qu'on ſuppoſe devoir être entiers & poſitifs ; on demande quelles valeurs on doit donner à* p & q, *pour que la quantité propoſée devienne la plus petite qu'il eſt poſſible.*

Soient α, β, γ, &c. les racines réelles, &

Digitized by Google

& $\mu \pm \nu\sqrt{-1}$, $\pi \pm \rho\sqrt{-1}$, &c. les racines imaginaires de l'équation

$A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} +$, &c. $+ V = 0$, on aura par la théorie des équations $Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 +$, &c. $+ \sqrt{q^m} = A(p - \alpha q)(p - \beta q)(p - \gamma q)\ldots (p - (\mu + \nu\sqrt{-1})q)(p - (\mu - \nu\sqrt{-1})q)(p - (\pi + \rho\sqrt{-1})q)(p - (\pi - \rho\sqrt{-1})q)\ldots = A(p - \alpha q)(p - \beta q)(p - \gamma q)\ldots ((p - \mu q)^2 + \nu^2 q^2)((p - \pi q)^2 + \rho^2 q^2)\ldots$

Donc la queſtion ſe réduit à faire en ſorte que le produit des quantités $p - \alpha q$, $p - \beta q$, $p - \gamma q$, &c. & $(p - \mu q)^2 + \nu^2 q^2$, $(p - \pi q)^2 + \rho^2 q^2$, &c. ſoit le plus petit qu'il eſt poſſible, tant que p & q ſont des nombres entiers poſitifs.

Suppoſons qu'on ait trouvé les valeurs de p & q qui répondent au *minimum*; & ſi l'on met à la place de p & q d'autres nombres moindres, il faudra que le produit dont il s'agit, acquiere une valeur plus grande. Donc il faudra néceſſairement que quelqu'un des facteurs augmente de valeur. Or il eſt viſible que ſi α, par exemp.

Digitized by Google

étoit négatif, le facteur $p - \alpha q$ diminueroit toujours, lorsque p & q décroîtroient; la même chose arriveroit au facteur $(p-\mu q)^2 + \nu^2 q^2$, si μ étoit négatif, & ainsi des autres; d'où il s'ensuit que parmi les facteurs simples réels il n'y a que ceux où les racines sont positives, qui puissent augmenter de valeur; & parmi les facteurs doubles imaginaires, il n'y aura que ceux où la partie réelle de la racine imaginaire sera positive, qui puissent augmenter aussi; de plus il faut remarquer à l'égard de ces derniers, que pour que $(p-\mu q)^2 + \nu^2 q^2$ augmente tandis que p & q diminuent, il faut nécessairement que la partie $(p-\mu q)^2$ augmente, parce que l'autre terme $\nu^2 q^2$ diminue nécessairement; de sorte que l'augmentation de ce facteur dépendra de la quantité $p - \mu q$, & ainsi des autres.

Donc les valeurs de p & q qui répondent au *minimum*, doivent être telles que la quantité $p - aq$ augmente, en donnant à p & q des valeurs moindres, & prenant pour a une des racines réelles positives de l'équation

Digitized by Google

$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +$, &c. $+V = 0$, ou une des parties réelles positives des racines imaginaires de la même équation, s'il y en a.

Soient r & f deux nombres entiers positifs moindres que p & q ; il faudra donc que $r - af$ soit $> p - aq$, (abstraction faite du signe de ces deux quantités). Qu'on suppose, comme dans l'article 23, que ces nombres soient tels que $pf - qr = \pm 1$, le signe supérieur ayant lieu, lorsque $p - aq$ est positive ; & l'inférieur, lorsque $p - aq$ est négative ; en sorte que les deux quantités $p - aq$ & $r - af$ deviennent de différens signes, & l'on aura exactement le cas auquel nous avons réduit le probleme précédent, (art. 24), & dont nous avons déjà donné la solution.

Donc, (art. 26), les valeurs de p & q devront nécessairement se trouver parmi les termes des fractions *principales* convergentes vers a, c'est-à-dire vers quelqu'une des quantités que nous avons dit pouvoir être prises pour a. Ainsi il faudra réduire

Digitized by Google

toutes ces quantités en fractions continues, (ce qu'on pourra exécuter facilement par les méthodes enſeignées ailleurs), & en déduire enſuite les fractions convergentes dont il s'agit, après quoi on fera ſucceſſivement p égal à tous les numérateurs de ces fractions, & q égal aux dénominateurs correſpondans, & celle de ces ſuppoſitions qui donnera la moindre valeur de la fonction propoſée, ſera néceſſairement auſſi celle qui répondra au *minimum* cherché.

REMARQUE I.

29. Nous avons ſuppoſé que les nombres p & q devoient être tous deux poſitifs; il eſt clair que ſi on les prenoit tous deux négatifs, il n'en réſulteroit aucun changement dans la valeur abſolue de la formule propoſée; elle ne feroit que changer de ſigne dans le cas où l'expoſant m ſeroit impair; & elle demeureroit abſolument la même, dans le cas où l'expoſant m ſeroit pair; ainſi il n'importe quels ſignes on donne aux nombres p & q, lorſqu'on les ſuppoſe tous deux de mêmes ſignes.

Digitized by Google

Mais il n'en ſera pas de même, ſi on donne à p & q des ſignes différens ; car alors les termes alternatifs de l'équation propoſée changeront de ſigne, ce qui en fera changer auſſi aux racines α, β, γ, &c. $\mu \pm \nu\sqrt{-1}$, $\pi \pm \rho\sqrt{-1}$, &c. de ſorte que celles des quantités α, β, γ, &c. μ, π, &c. qui étoient négatives, & par conſéquent inutiles dans le premier cas, deviendront poſitives dans celui-ci, & devront être employées à la place des autres.

De-là je conclus en général que lorſqu'on recherche le *minimum* de la formule propoſée ſans autre reſtriction, ſinon que p & q ſoient des nombres entiers, il faut prendre ſucceſſivement pour a toutes les racines réelles α, β, γ, &c. & toutes les parties réelles μ, π, &c. des racines imaginaires de l'équation

$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +$, &c. $+ V = 0$,

en faiſant abſtraction des ſignes de ces quantités ; mais enſuite il faudra donner à p & q les mêmes ſignes, ou des ſignes différens, ſuivant que la quantité qu'on aura

Digitized by Google

prise pour a, aura eu originairement le signe positif ou le signe négatif.

REMARQUE II.

30. Lorsque parmi les racines réelles α, β, γ, &c. il y en a de commensurables, alors il est clair que la quantité proposée deviendra nulle, en faisant $\frac{p}{q}$ égal à une de ces racines ; de sorte que dans ce cas il n'y aura pas, à proprement parler, de *minimum ;* dans tous les autres cas il sera impossible que la quantité dont il s'agit devienne zéro, tant que p & q seront des nombres entiers ; or comme les coefficiens A, B, C, &c. sont aussi des nombres entiers, (*hyp.*) cette quantité sera toujours égale à un nombre entier, & par conséquent elle ne pourra jamais être moindre que l'unité.

Donc si on avoit à résoudre en nombres entiers l'équation

$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \&c. + Vq^m = \pm 1$,

il faudroit chercher les valeurs de p & q par la méthode du probleme précédent,

Digitized by Google

excepté dans les cas où l'équation

$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +$, &c. $+V = 0$,

auroit des racines ou des diviſeurs quelconques commenſurables ; car alors il eſt viſible que la quantité

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 +, \text{ \&c.}$$

pourroit ſe décompoſer en deux ou pluſieurs quantités ſemblables de degrés moindres ; de ſorte qu'il faudroit que chacune de ces formules partielles fût égale à l'unité en particulier, ce qui donneroit pour le moins deux équations qui ſerviroient à déterminer p & q.

Nous avons déjà donné ailleurs, (*Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1768*), une ſolution de ce dernier probleme ; mais celle que nous venons d'indiquer eſt beaucoup plus ſimple & plus directe, quoique toutes les deux dépendent de la même théorie des fractions continues.

Digitized by Google

PROBLEME III.

31. *On demande les valeurs de* p *&* *de* q, *qui rendront la quantité*

$$Ap^2+Bpq+Cq^2$$

la plus petite qu'il eſt poſſible, dans l'hypotheſe qu'on n'admette pour p *&* q *que des nombres entiers.*

Ce probleme n'eſt, comme l'on voit, qu'un cas particulier du précédent; mais nous avons cru devoir le traiter en particulier, parce qu'il eſt ſuſceptible d'une ſolution très-ſimple & très-élégante, & que d'ailleurs nous aurons dans la ſuite occaſion d'en faire uſage dans la réſolution des équations du ſecond degré à deux inconnues, en nombres entiers.

Suivant la méthode générale il faudra donc commencer par chercher les racines de l'équation

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

leſquelles ſont, comme l'on ſait,

$$\frac{-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}.$$

Digitized by Google

Or, 1°. si $B^2 - 4AC$ est égal à un nombre carré, les deux racines seront commensurables, & il n'y aura point de *minimum* proprement dit, parce que la quantité $Ap^2 + Bpq + Cq^2$ pourra devenir nulle.

2°. Si $B^2 - 4AC$ n'est pas carré, alors les deux racines seront irrationnelles ou imaginaires, suivant que $B^2 - 4AC$ sera $>$ ou <0, ce qui fait deux cas qu'il faut considérer séparément; nous commencerons par le dernier, qui est le plus facile à résoudre.

Premier Cas lorsque $B^2 - 4AC < 0$.

32. Les deux racines étant dans ce cas imaginaires, on aura $\frac{-B}{2A}$ pour la partie toute réelle de ces racines, laquelle devra par conséquent être prise pour a. Ainsi il n'y aura qu'à réduire la fraction $\frac{-B}{2A}$, (en faisant abstraction du signe qu'elle peut avoir), en fraction continue par la méthode de l'art. 4, & en déduire ensuite la série des fractions convergentes, (art. 10), laquelle sera nécessairement terminée; cela fait,

Digitized by Google

on eſſayera ſucceſſivement pour p les numérateurs de ces fractions, & pour q les dénominateurs correſpondans, en ayant ſoin de donner à p & q les mêmes ſignes ou des ſignes différens, ſuivant que $\frac{-B}{2A}$ ſera un nombre poſitif ou négatif. On trouvera de cette maniere les valeurs de p & q, qui peuvent rendre la formule propoſée un *moindre*.

EXEMPLE.

Soit propoſée, par exemple, la quantité

$$49p^2 - 238pq + 290q^2.$$

On aura donc ici $A = 49$, $B = -238$, $C = 290$; donc $B^2 - 4AC = -196$, & $\frac{-B}{2A} = \frac{238}{98} = \frac{17}{7}$. Opérant donc ſur cette fraction de la maniere enſeignée dans l'art. 4, on trouvera les quotiens 2, 2, 3, à l'aide deſquels on formera ces fractions, (voyez l'art. 20),

$$2, \quad 2, \quad 3.$$
$$\frac{1}{0}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{17}{7}.$$

De ſorte que les nombres à eſſayer ſeront 1, 2, 5, 17 pour p, & 0, 1, 2, 7 pour q;

Digitized by Google

or désignant par P la quantité proposée, on trouvera

p	q	P
1	0	49
2	1	10
5	2	5
17	7	49 ;

d'où l'on voit que la plus petite valeur de P est 5, laquelle résulte de ces suppositions $p=5$ & $q=2$; ainsi on peut conclure en général que la formule proposée ne pourra jamais devenir plus petite que 5, tant que p & q seront des nombres entiers ; de sorte que le *minimum* aura lieu, lorsque $p=5$ & $q=2$.

Second Cas lorsque $B^2-4AC>0$.

33. Comme dans le cas présent l'équation $Ax^2+Bx+C=0$ a deux racines réelles irrationnelles, il faudra les réduire l'une & l'autre en fractions continues. Cette opération peut se faire avec la plus grande facilité par une méthode particuliere que nous avons exposée ailleurs, & que nous

Digitized by Google

croyons devoir rapeler ici, d'autant qu'elle ſe déduit naturellement des formules de l'article 25, & qu'elle renferme d'ailleurs tous les principes néceſſaires pour la ſolution complette & générale du probleme propoſé.

Dénotons donc par a la racine qu'on a deſſein de convertir en fraction continue, & que nous ſuppoſerons toujours poſitive, & ſoit en même temps b l'autre racine, on aura, comme l'on ſait, $a+b=-\frac{B}{A}$, & $ab=\frac{C}{A}$; d'où $a-b=\frac{\sqrt{(B^2-4AC)}}{A}$, ou bien en faiſant, pour abréger,

$$B^2-4AC=E,$$

$a-b=\frac{\sqrt{E}}{A}$, où le radical $\sqrt{E}$ peut être poſitif ou négatif; il ſera poſitif, lorſque la racine a ſera la plus grande des deux, & négatif, lorſque cette racine ſera la plus petite; donc

$$a=\frac{-B+\sqrt{E}}{2A},\quad b=\frac{-B-\sqrt{E}}{2A}.$$

Maintenant, ſi on conſerve les mêmes dénominations de l'art. 25, il n'y aura qu'à

Digitized by Google

ſubſtituer à la place de a la valeur précédente, & la difficulté ne conſiſtera qu'à pouvoir déterminer facilement les valeurs entieres approchées μ', μ'', μ''', &c.

Pour faciliter ces déterminations, je multiplie le haut & le bas des fractions $\frac{p^0-q^0}{aq'-p'}$, $\frac{aq'-p'}{p''-aq''}$, $\frac{p''-aq''}{aq'''-p'''}$, &c. reſpectivement par $A(bq'-p')$, $A(p''-bq'')$, $A(bq'''-p''')$, &c. & comme on a

$A(p^0-aq^0)(p^0-bq^0)=A$

$A(aq'-p')(bq'-p')=Ap'^2-A(a+b)p'q'$
$-Aabq'^2=Ap'^2+Bp'q'+Cq'^2$,

$A(p''-aq'')(p''-bq'')=Ap''^2-A(a+b)$
$p''q''-Aabq''^2=Ap''^2+Bp''q''+Cq''^2$, &c.

$A(p^0-aq^0)(bq'-p')=-\mu A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}\sqrt{E}$,

$A(aq'-p')(p''-bq'')=-Ap'p''+Aap''q'$
$+Abp'q''-Aabq'q''=-Ap'p''-Cq'q''$
$-\frac{1}{2}B(p'q''+q'p'')+\frac{1}{2}\sqrt{E}(p''q'-q''p')$,

$A(p''-aq'')(bq'''-p''')=-Ap''p'''+Aap'''p''$
$+Abp''q'''-Aabq''q'''=-Ap''p'''-Cq''q'''$
$-\frac{1}{2}B(p''q'''+q''p''')+\frac{1}{2}\sqrt{E}(p'''q''-q'''p'')$,

& ainſi de ſuite, je fais, pour abréger,

Digitized by Google

$$P^{\circ} = A$$

$$P^{\prime} = A p^{\prime 2} + B p^{\prime} q^{\prime} + C q^{\prime 2}$$

$$P^{\prime\prime} = A p^{\prime\prime 2} + B p^{\prime\prime} q^{\prime\prime} + C q^{\prime\prime 2}$$

$$P^{\prime\prime\prime} = A p^{\prime\prime\prime 2} + B p^{\prime\prime\prime} q^{\prime\prime\prime} + C q^{\prime\prime\prime 2}, \text{ \&c.}$$

$$Q^{\circ} = \tfrac{1}{2} B$$

$$Q^{\prime} = A\mu + \tfrac{1}{2} B$$

$$Q^{\prime\prime} = A p^{\prime} p^{\prime\prime} + \tfrac{1}{2} B (p^{\prime} q^{\prime\prime} + q^{\prime} p^{\prime\prime}) + C q^{\prime} q^{\prime\prime}$$

$$Q^{\prime\prime\prime} = A p^{\prime\prime} p^{\prime\prime\prime} + \tfrac{1}{2} B (p^{\prime\prime} q^{\prime\prime\prime} + q^{\prime\prime} p^{\prime\prime\prime}) + C q^{\prime\prime} q^{\prime\prime\prime}, \text{ \&c.}$$

J'aurai, à cauſe de $p^{\prime\prime} q^{\prime} - q^{\prime\prime} p^{\prime} = 1$, $p^{\prime\prime\prime} q^{\prime\prime} - q^{\prime\prime\prime} p^{\prime\prime} = -1$, $p^{\text{IV}} q^{\prime\prime\prime} - q^{\text{IV}} p^{\prime\prime\prime} = 1$, &c. les formules ſuivantes,

$$\mu < \frac{-Q^{\circ} + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\circ}}$$

$$\mu^{\prime} < \frac{-Q^{\prime} - \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\prime}}$$

$$\mu^{\prime\prime} < \frac{-Q^{\prime\prime} + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\prime\prime}}$$

$$\mu^{\prime\prime\prime} < \frac{-Q^{\prime\prime\prime} - \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\prime\prime\prime}}, \text{ \&c.}$$

Or ſi dans l'expreſſion de $Q^{\prime\prime}$ on met pour $p^{\prime\prime}$ & $q^{\prime\prime}$ leurs valeurs $\mu^{\prime} p^{\prime} + 1$ & $\mu^{\prime\prime}$, elle deviendra $\mu^{\prime} P^{\prime} + Q^{\prime}$; de même ſi on ſubſtitue dans l'expreſſion de $Q^{\prime\prime\prime}$ pour $p^{\prime\prime\prime}$

Digitized by Google

& q^{III} leurs valeurs $\mu^{II}p^{II}+p^{I}$, & $\mu^{II}q^{II}+q^{I}$, elle ſe changera en $\mu^{II}P^{II}+Q^{II}$, & ainſi du reſte; de ſorte que l'on aura

$$Q^{I} = \mu P^{o} + Q^{o}$$
$$Q^{II} = \mu^{I} P^{I} + Q^{I}$$
$$Q^{III} = \mu^{II} P^{II} + Q^{II}$$
$$Q^{IV} = \mu^{III} P^{III} + Q^{III}, \&c.$$

Pareillement ſi on ſubſtitue dans l'expreſſion de P^{II} les valeurs de p^{II} & q^{II}, elle deviendra $\overset{I}{\mu^{2}} P^{I}+2\mu^{I}Q^{I}+A$; & ſi on ſubſtitue les valeurs de p^{III} & q^{III} dans l'expreſſion de P^{III}, elle deviendra $\overset{II}{\mu^{2}} P^{II}+2\mu^{II}Q^{II}+P^{I}$, & ainſi de ſuite; de ſorte que l'on aura

$$P^{I} = \mu^{2} P^{o} + 2\mu Q^{o} + C$$
$$P^{II} = \overset{I}{\mu^{2}} P^{I} + 2\mu^{I} Q^{I} + P^{o}$$
$$P^{III} = \overset{II}{\mu^{2}} P^{II} + 2\mu^{II} Q^{II} + P^{I}$$
$$P^{IV} = \overset{III}{\mu^{2}} P^{III} + 2\mu^{III} Q^{III} + P^{II}, \&c.$$

Ainſi on pourra, à l'aide de ces formules, continuer auſſi loin qu'on voudra les ſuites des nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, Q^{o}, Q^{I}, Q^{II}, & P^{o}, P^{I}, P^{II}, &c. qui dépendent, comme l'on voit, mutuellement les uns des

Digitized by Google

autres, sans qu'il soit nécessaire de calculer en même temps les nombres p°, p^{I}, p^{II}, &c. & q°, q^{I}, q^{II}, &c.

On peut encore trouver les valeurs de P^{I}, P^{II}, P^{III}, &c. par des formules plus simples que les précédentes, en remarquant que l'on a $\overset{\text{I}}{Q}{}^2 - P^{\text{I}} = (\mu^{\text{I}} A + \frac{\text{I}}{2} B)^2 - A(\overset{\text{I}}{\mu}{}^2 A + \mu^{\text{I}} B + C) = \frac{\text{I}}{4} B^2 - AC$, $\overset{\text{II}}{Q}{}^2 - P^{\text{I}} P^{\text{II}} = (\mu^{\text{I}} P^{\text{I}} + Q^{\text{I}})^2 - P^{\text{I}}(\overset{\text{I}}{\mu}{}^2 P^{\text{I}} + 2\mu^{\text{I}} Q^{\text{I}} + A) = \overset{\text{I}}{Q}{}^2 - AP^{\text{I}}$, & ainsi de suite; c'est-à-dire

$$\overset{\text{I}}{Q}{}^2 - P^{\circ} P^{\text{I}} = \frac{\text{I}}{4} E$$
$$\overset{\text{II}}{Q}{}^2 - P^{\text{I}} P^{\text{II}} = \frac{\text{I}}{4} E$$
$$\overset{\text{III}}{Q}{}^2 - P^{\text{II}} P^{\text{I}} = \frac{\text{I}}{4} E, \text{ &c.}$$

d'où l'on tire

$$P^{\text{I}} = \frac{\overset{\text{I}}{Q}{}^2 - \frac{\text{I}}{4} E}{P^{\circ}}$$

$$P^{\text{II}} = \frac{\overset{\text{II}}{Q}{}^2 - \frac{\text{I}}{4} E}{P^{\text{I}}}$$

$$P^{\text{III}} = \frac{\overset{\text{III}}{Q}{}^2 - \frac{\text{I}}{4} E}{P^{\text{II}}}, \text{ &c.}$$

Les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, &c. étant donc trouvés

Digitized by Google

trouvés ainſi, on aura, (art. 26), la fraction continue

$$a=\mu+\frac{1}{\mu'}+\frac{1}{\mu''}+, \&c.$$

& pour trouver le *minimum* de la formule $Ap^2+Bpq+Cq^2$, il n'y aura qu'à calculer les nombres p^0, p', p'', p''', &c. & q^0, q', q'', q''', &c. (art. 25), & les eſſayer enſuite à la place de p & q; mais on peut encore ſe diſpenſer de cette opération, en remarquant que les quantités P^0, P', P'' &c. ne ſont autre choſe que les valeurs de la formule dont il s'agit, lorſqu'on y fait ſucceſſivement $p=p^0$, p', p'', &c. & $q=q^0$, q', q'', &c. Ainſi il n'y aura qu'à voir quel eſt le plus petit terme de la ſuite P^0, P', P'', &c. qu'on aura calculée en même temps que la ſuite μ, μ', μ'', &c. & ce ſera le *minimum* cherché; on trouvera enſuite les valeurs correſpondantes de p & q par les formules citées.

34. Maintenant je dis qu'en continuant la ſérie P^0, P', P'', &c. on doit néceſſairement parvenir à deux termes conſécu-

Digitized by Google

tifs de ſignes différens, & qu'alors tous les termes ſuivans ſeront auſſi deux à deux de différens ſignes. Car on a, (art. précéd.), $P^{o}=A(p^{o}-aq^{o})(p^{o}-bq^{o})$, $P^{I}=A(p^{I}-aq^{I})(p^{I}-bq^{I})$, &c. or de ce qu'on a démontré dans le probleme II, il s'enſuit que les quantités $p^{o}-aq^{o}$, $p^{I}-aq^{I}$, $p^{II}-aq^{II}$, &c. doivent être de ſignes alternatifs, & aller toujours en diminuant; donc, 1°. ſi b eſt une quantité négative, les quantités $p^{o}-bq^{o}$, $p^{I}-bq^{I}$, &c. ſeront toutes poſitives; par conſéquent les nombres P^{o}, P^{I}, P^{II} ſeront tous de ſignes alternatifs; 2°. ſi b eſt une quantité poſitive, comme les quantités $p^{I}-aq^{I}$, $p^{II}-aq^{II}$, &c. & à plus forte raiſon les quantités $\frac{p^{I}}{q^{I}}-a$, $\frac{p^{II}}{q^{II}}-a$, forment une ſuite décroiſſante à l'infini, on arrivera néceſſairement à une de ces dernieres quantités, comme $\frac{p^{III}}{q^{III}}-a$, qui ſera $<a-b$, (abſtraction faite du ſigne), & alors toutes les ſuivantes, $\frac{p^{IV}}{q^{IV}}-a$, $\frac{p^{V}}{q^{V}}-a$,

Digitized by Google

le ſeront auſſi ; de ſorte que toutes les quantités $a-b+\frac{p'''}{q'''}-a$, $a-b+\frac{p^{IV}}{q^{IV}}-a$ &c. ſeront néceſſairement de même ſigne que la quantité $a-b$; par conſéquent les quantités $\frac{p'''}{q'''}-b$, $\frac{p^{IV}}{q^{IV}}-b$, &c. & celles-ci, $p'''-bq'''$, $p^{IV}-bq^{IV}$, &c. à l'infini, ſeront toutes de même ſigne ; donc les nombres P''', P^{IV}, &c. ſeront tous de ſignes alternatifs.

Suppoſons donc en général que l'on ſoit parvenu à des termes de ſignes alternatifs dans la ſérie P', P'', P''', &c. & que P^{λ} ſoit le premier de ces termes, en ſorte que tous les termes, P^{λ}, $P^{\lambda+1}$, $P^{\lambda+2}$, &c. à l'infini, ſoient alternativement poſitifs & négatifs, je dis qu'aucun de ces termes ne pourra être plus grand que E. Car ſi, par exemple, P''', P^{IV}, P^{V}, &c. ſont tous de ſignes alternatifs, il eſt clair que les produits deux à deux, $P'''P^{IV}$, $P^{IV}P^{V}$, &c. ſeront néceſſairement tous négatifs ; mais on a, (article précéd.) $Q^{IV^2}-P'''P^{IV}=E$,

Digitized by Google

$Q^2 - P^{IV} P^V = E$, &c. donc les nombres positifs, $-P^{III} P^{IV}$, $-P^{IV} P^V$, seront tous moindres que E, ou au moins pas plus grands que E; de sorte que, comme les nombres P^I, P^{II}, P^{III}, &c. sont d'ailleurs tous entiers par leur nature, les nombres P^{III}, P^{IV}, &c. & en général les nombres P^λ, $P^{\lambda+1}$, &c. (abstraction faite de leurs signes), ne pourront jamais surpasser le nombre E.

Il s'ensuit aussi de-là que les termes Q^{IV}, Q^V, &c. & en général $Q^{\lambda+1}$, $Q^{\lambda+2}$, &c. ne pourront jamais être plus grands que $\sqrt{E}$.

D'où il est facile de conclure que les deux séries P^λ, $P^{\lambda+1}$, $P^{\lambda+2}$, &c. & $Q^{\lambda+1}$, $Q^{\lambda+2}$, &c. quoique poussées à l'infini, ne pourront être composées que d'un certain nombre de termes différens, ces termes ne pouvant être pour la premiere que les nombres naturels jusqu'à E pris positivement ou négativement, & pour la seconde, les nombres naturels jusqu'à $\sqrt{E}$ avec les fractions intermédiaires $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. pris aussi positivement ou négativement; car il est visible par les formules de l'article précé-

Digitized by Google

dent que les nombres Q', Q'', Q''', &c. ſeront toujours entiers, lorſque B ſera pair, mais qu'ils contiendront chacun la fraction $\frac{1}{2}$, lorſque B ſera impair.

Donc, en continuant les deux ſéries P', P'', P''', &c. & Q', Q'', Q''', &c. il arrivera néceſſairement que deux termes correſpondans, comme P^{π} & Q^{π}, reviendront après un certain intervalle de termes, dont le nombre pourra toujours être ſuppoſé pair; car, comme il faut que les mêmes termes P^{π} & Q^{π} reviennent en même temps une infinité de fois, à cauſe que le nombre des termes différens dans l'une & dans l'autre ſérie eſt limité, & par conſéquent auſſi le nombre de leurs combinaiſons différentes, il eſt clair que ſi ces deux termes revenoient toujours après un intervalle d'un nombre impair de termes, il n'y auroit qu'à conſidérer leurs retours alternativement, & alors les intervalles ſeroient tous compoſés d'un nombre pair de termes.

Digitized by Google

On aura donc, en dénotant par 2ρ, le nombre des termes intermédiaires

$$P^{\pi+2\rho} = P^{\pi}, \text{ \& } Q^{\pi+2\rho} = Q^{\pi},$$

& alors tous les termes P^{π}, $P^{\pi+1}$, $P^{\pi+2}$ &c. Q^{π}, $Q^{\pi+1}$, $Q^{\pi+2}$, & μ^{π}, $\mu^{\pi+1}$, $\mu^{\pi+2}$, &c. reviendront auſſi au bout de chaque intervalle de 2ρ termes. Car il eſt facile de voir par les formules données dans l'article précédent pour la détermination des nombres μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, &c. Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, &c. & P^{I}, P^{II}, P^{III}, &c. que dès qu'on aura $P^{\pi+2\rho} = P^{\pi}$, & $Q^{\pi+2\rho} = Q^{\pi}$, on aura auſſi $\mu^{\pi+2\rho} = \mu^{\pi}$, enſuite $Q^{\pi+2\rho+1} = Q^{\pi+1}$ & $P^{\pi+2\rho+1} = P^{\pi+1}$; donc auſſi $\mu^{\pi+2\rho+1} = \mu^{\pi+2\rho}$, & ainſi de ſuite.

Donc, ſi Π eſt un nombre quelconque égal ou plus grand que π, & que m dénote un nombre quelconque entier poſitif, on aura en général

$$P^{\Pi+2m\rho} = H^{\Pi}, \quad Q^{\Pi+2m\rho} = Q^{\Pi}, \quad \mu^{\Pi+2m\rho} = \mu^{\Pi};$$

de ſorte qu'en connoiſſant les $\pi+2\rho$ premiers termes de chacune de ces trois ſuites, on connoîtra auſſi tous les ſuivans, qui ne

Digitized by Google

ſeront autre choſe que les 2ρ derniers termes répétés à l'infini dans le même ordre.

De tout cela il s'enſuit que pour trouver la plus petite valeur de $P=Ap^2+Bpq+Cq^2$, il ſuffit de pouſſer les ſéries P^0, P^I, P^{II}, &c. & Q^0, Q^I, Q^{II}, &c. juſqu'à ce que deux termes correſpondans, comme P^π & Q^π reparoiſſent enſemble après un nombre pair de termes intermédiaires, en ſorte que l'on ait $P^{\pi+2\rho}=P^\pi$, & $Q^{\pi+2\rho}=Q^\pi$; alors le plus petit terme de la ſérie P^0, P^I, P^{II}, &c. $P^{\pi+2\rho}$ ſera le *minimum* cherché.

COROLLAIRE I.

35. Si le plus petit terme de la ſérie P^0, P^I, P^{II}, &c. $P^{\pi+2\rho}$ ne ſe trouve pas avant le terme P^π, alors ce terme reparoîtra une infinité de fois dans la même ſuite prolongée à l'infini; ainſi il y aura alors une infinité de valeurs de p & de q qui répondront au *minimum*, & qu'on pourra trouver toutes par les formules de l'art. 25, en continuant la ſérie des nombres μ^I, μ^{II}, μ^{III}, &c. au-delà du terme $\mu^{2\rho+\pi}$ par la répétition des

Digitized by Google

mêmes termes $\mu^{\pi+1}$, $\mu^{\pi+2}$, &c. comme on l'a dit plus haut.

On peut auſſi dans ce cas avoir des formules générales qui repréſentent toutes les valeurs de p & de q dont il s'agit ; mais le détail de la méthode qu'il faut employer pour y parvenir, nous meneroit trop loin ; quant à préſent, nous nous contenterons de renvoyer pour cet objet aux *Mémoires de Berlin* déjà cités, *an. 1768, pag. 123 & ſuiv.* où l'on trouvera une théorie générale & nouvelle des fractions continues périodiques.

COROLLAIRE II.

36. Nous avons démontré dans l'art. 34, qu'en continuant la ſérie P^{I}, P^{II}, P^{III} &c. on doit trouver des termes conſécutifs de ſignes différens. Suppoſons donc, par ex. que P^{III} & P^{IV} ſoient les deux premiers termes de cette qualité, on aura néceſſairement les deux quantités $p^{III} - bq^{III}$ & $p^{IV} - bq^{IV}$ de mêmes ſignes, à cauſe que les quantités $p^{III} - aq^{III}$ & $p^{IV} - aq^{IV}$ ſont de leur

Digitized by Google

nature de différens signes. Or en mettant dans les quantités $p^{v}-bq^{v}$, $p^{vi}-bq^{vi}$, &c. les valeurs de p^{v}, p^{vi}, &c. q^{v}, q^{vi}, &c. (art. 25), on aura

$$p^{v}-bq^{v}=\mu^{iv}(p^{iv}-bq^{iv})+p^{iii}-bq^{iii}$$
$$p^{vi}-bq^{vi}=\mu^{v}(p^{v}-bq^{v})+p^{iv}-bq^{iv}\ \&c.$$

D'où, à cause que μ^{iv}, μ^{v}, &c. sont des nombres positifs, il est clair que toutes les quantités $p^{v}-bq^{v}$, $p^{vi}-bq^{vi}$, &c. à l'infini, seront de mêmes signes que les quantités $p^{iii}-bq^{iii}$ & $p^{iv}-bq^{iv}$; par conséquent tous les termes P^{iii}, P^{iv}, P^{v}, &c. à l'infini, auront alternativement les signes *plus* & *moins*.

Maintenant on aura par les équations précédentes

$$\mu^{iv}=\frac{p^{v}-bq^{v}}{p^{iv}-bq^{iv}}-\frac{p^{iii}-bq^{iii}}{p^{iv}-bq^{iv}}$$
$$\mu^{v}=\frac{p^{vi}-bq^{vi}}{p^{v}-bq^{v}}-\frac{p^{iv}-bq^{iv}}{p^{v}-bq^{v}}$$
$$\mu^{vi}=\frac{p^{vii}-bq^{vii}}{p^{vi}-bq^{vi}}-\frac{p^{v}-bq^{v}}{p^{vi}-bq^{vi}},\ \&c.$$

où les quantités $\frac{p^{iii}-bq^{iii}}{p^{iv}-bq^{iv}}$, $\frac{p^{iv}-bq^{iv}}{p^{v}-bq^{v}}$, &c. seront toutes positives.

Digitized by Google

Donc, puiſque les nombres μ^{IV}, μ^{V}, μ^{VI}, &c. doivent être tous entiers poſitifs, (*hyp.*) la quantité $\frac{p^{V}-bq^{V}}{p^{IV}-bq^{IV}}$ devra être poſitive & >1, de même que les quantités $\frac{p^{VI}-bq^{VI}}{p^{V}-bq^{V}}$, $\frac{p^{VII}-bq^{VII}}{p^{VI}-bq^{VI}}$, &c. donc les quantités $\frac{p^{IV}-bq^{IV}}{p^{V}-bq^{V}}$, $\frac{p^{V}-bq^{V}}{p^{VI}-bq^{VI}}$, &c. ſeront poſitives & moindres que l'unité; de ſorte que les nombres μ^{V}, μ^{VI}, &c. ne pourront être que les nombres entiers, qui ſont immédiatement moindres que les valeurs de $\frac{p^{VI}-bq^{VI}}{p^{V}-bq^{V}}$, $\frac{p^{VII}-bq^{VII}}{p^{VI}-bq^{VI}}$, &c. quant au nombre μ^{IV}, il ſera auſſi égal au nombre entier, qui eſt immédiatement moindre que la valeur de $\frac{p^{V}-bq^{V}}{p^{IV}-bq^{IV}}$, toutes les fois qu'on aura $\frac{p^{III}-bq^{III}}{p^{IV}-bq^{IV}}<1$. Ainſi on aura

$$\mu^{IV}<\frac{p^{V}-bq^{V}}{p^{IV}-bq^{IV}}, \text{ ſi } \frac{p^{III}-bq^{III}}{p^{IV}-bq^{IV}}<1,$$

$$\mu^{V}<\frac{p^{VI}-bq^{VI}}{p^{V}-bq^{V}},$$

$$\mu^{VI}<\frac{p^{VII}-bq^{VII}}{p^{VI}-bq^{VI}}, \text{ &c.}$$

Digitized by Google

le signe $<$ placé après les nombres μ^{III}, μ^{IV}, μ^{V}, &c. dénotant, comme plus haut, les nombres entiers qui sont immédiatement au-dessous des quantités qui suivent ce même signe.

Or il est facile de transformer, par des réductions semblables à celles de l'art. 33, les quantités $\frac{P^{V}-bq^{V}}{P^{IV}-bq^{IV}}$, $\frac{P^{VI}-bq^{VI}}{P^{V}-bq^{V}}$, &c. en celles-ci, $\frac{Q^{V}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{IV}}$, $\frac{Q^{VI}-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{V}}$ &c. de plus la condition de $\frac{P^{III}-bq^{III}}{P^{IV}-bq^{IV}} < 1$ peut se réduire à celle-ci $\frac{-P^{III}}{P^{IV}} < \frac{aq^{III}-P^{III}}{P^{IV}-aq^{IV}}$; laquelle, à cause de $\frac{aq^{III}-P^{III}}{P^{IV}-aq^{IV}} > 1$, aura sûrement lieu lorsqu'on aura $\frac{-P^{III}}{P^{IV}} =$ ou < 1; donc on aura

$\mu^{IV} < \frac{Q^{V}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{IV}}$, si $\frac{-P^{III}}{P^{IV}} =$ ou < 1,

$\mu^{V} < \frac{Q^{VI}-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{V}}$,

$\mu^{VI} < \frac{Q^{VII}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{VI}}$, &c.

Digitized by Google

En combinant ces formules avec celles de l'art. 33, qui renferment la loi des séries P^{I}, P^{II}, P^{III}, &c. & Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, &c. on verra aisément que si on suppose donnés deux termes correspondans de ces deux séries, dont le numéro soit plus grand que 3, on pourra remonter aux termes précédens jusqu'à P^{IV} & Q^{V}, & même jusqu'aux termes P^{III} & Q^{IV}, si la condition de $\frac{-P^{III}}{P^{IV}}$ $=$ ou <1 a lieu; en sorte que tous ces termes seront absolument déterminés par ceux qu'on a supposé donnés.

En effet connoissant, par exemple, P^{VI} & Q^{VI}, on connoîtra d'abord P^{V} par l'équation $Q^{2}{}^{VI} - P^{V}P^{VI} = \frac{1}{4}E$; ensuite ayant Q^{VI} & P^{V}, on trouvera la valeur de μ^{V}, à l'aide de laquelle on trouvera ensuite la valeur de Q^{V} par l'équation $Q^{VI} = \mu^{V}P^{V} + Q^{V}$; or l'équation $Q^{2}{}^{V} - P^{IV}P^{V} = \frac{1}{4}E$ donnera P^{IV}; & si on sait d'avance que $\frac{-P^{III}}{P^{IV}}$ doit être $=$ ou <1, on trouvera μ^{IV}, après quoi

Digitized by Google

on aura Q^{IV} par l'équation $Q^{V} = \mu^{IV} P^{IV} + Q^{IV}$, & enſuite P^{III} par celle-ci, $\overset{IV}{Q}{}^{2} - P^{III} P^{IV} = \frac{1}{4} E$.

De-là il eſt facile de tirer cette concluſion générale, que ſi P^{λ} & $P^{\lambda+1}$ ſont les premiers termes de la ſérie P^{I}, P^{II}, P^{III}, &c. qui ſe trouvent conſécutivement de différens ſignes, le terme $P^{\lambda+1}$ & les ſuivans reviendront toujours après un certain nombre de termes intermédiaires, & qu'il en ſera de même du terme P^{λ}, ſi l'on a $\frac{\pm P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}} =$ ou < 1.

Car imaginons, comme dans l'art. 34, que l'on ait trouvé $P^{\pi+2\rho} = P^{\pi}$, & $Q^{\pi+2\rho} = Q^{\pi}$, & ſuppoſons que π ſoit $> \lambda$, c'eſt-à-dire $\pi = \lambda + \nu$; donc on pourra d'un côté remonter du terme P^{π} au terme $P^{\lambda+1}$ ou P^{λ}, & de l'autre, du terme $P^{\pi+2\rho}$ au terme $P^{\lambda+2\rho+1}$ ou $P^{\lambda+2\rho}$; & comme les termes d'où l'on part, de part & d'autre ſont égaux, tous les dérivés ſeront auſſi reſpectivement égaux; de ſorte qu'on aura $P^{\lambda+2\rho+1} = P^{\lambda+1}$, ou même $P^{\lambda+2\rho} = P^{\lambda}$, ſi $\frac{\pm P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}} =$ ou < 1.

Digitized by Google

Par-là on pourra donc juger d'avance du commencement des périodes dans la série P^0, P^I, P^{II}, P^{III}, *&c.* & par conséquent aussi dans les deux autres séries, Q^0, Q^I, Q^{II}, Q^{III}, *&c.* & μ, μ^I, μ^{II}, μ^{III}, *&c.* mais quant à la longueur des périodes, cela dépend de la nature du nombre E, & même uniquement de la valeur de ce nombre, comme je pourrois le démontrer, si je ne craignois que ce détail ne me menât trop loin.

COROLLAIRE III.

37. Ce qu'on vient de démontrer dans le corol. préc. peut servir encore à prouver ce beau théoreme: *Que toute équation de la forme* $p^2 - Kq^2 = 1$, *où* K *est un nombre entier positif non carré, &* p *&* q *deux indéterminées, est toujours résoluble en nombres entiers.*

Car, en comparant la formule $p^2 - Kq^2$ avec la formule générale $Ap^2 + Bpq + Cq^2$, on a $A = 1$, $B = 0$, $C = -K$; donc $E = B^2 - 4AC = 4K$, & $\frac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{K}$,

Digitized by Google

(art. 33). Donc $P^0=1$, $Q^0=0$; donc $\mu < \sqrt{K}$, $Q^1=\mu$, & $P^1=\mu^2-K$; d'où l'on voit 1°. que P^1 eſt négatif, & par conſéquent de ſigne différent de P^0; 2°. que $-P^1$ eſt $=$ ou >1, parce que K & μ ſont des nombres entiers; de ſorte qu'on aura $\frac{P^0}{-P^1} =$ ou <1; donc on aura, (art. préc.) $\lambda=0$, & $P^{2\rho}=P^0=1$; de ſorte qu'en continuant la ſérie P^0, P^1, P^{11}, *&c.* le terme $P^0=1$ reviendra néceſſairement après un certain intervalle de termes; par conſéquent on pourra toujours trouver une infinité de valeurs de p & de q qui rendent la formule p^2-Kq^2 égale à l'unité.

COROLLAIRE IV.

38. On peut auſſi démontrer cet autre théoreme : *Que ſi l'équation* $p^2-Kq^2=\pm H$ *eſt réſoluble en nombres entiers, en ſuppoſant* K *un nombre poſitif non-carré, &* H *un nombre poſitif & moindre que* $\sqrt{K}$, *les nombres* p & q *doivent être tels que* $\frac{p}{q}$ *ſoit une des fractions* principales *convergentes vers la valeur de* $\sqrt{K}$.

Digitized by Google

Suppoſons que le ſigne ſupérieur doive avoir lieu, en ſorte que $p^2 - Kq^2 = H$; donc on aura $p - q\sqrt{K} = \frac{H}{p+q\sqrt{K}}$ & $\frac{p}{q} - \sqrt{K} = \frac{H}{q^2(\frac{p}{q}+\sqrt{K})}$; qu'on cherche deux nombres entiers poſitifs, r & $ſ$, moindres que p & q, & tels que $pſ - qr = 1$, ce qui eſt toujours poſſible, comme on l'a démontré dans l'art. 23, & l'on aura $\frac{p}{q} - \frac{r}{ſ} = \frac{1}{qſ}$; donc retranchant cette équation de la précédente, il viendra $\frac{r}{ſ} - \sqrt{K} = \frac{H}{q^2(\frac{p}{q}+\sqrt{K})} - \frac{1}{qſ}$;

de ſorte qu'on aura

$$p - q\sqrt{K} = \frac{H}{q(\frac{p}{q}+\sqrt{K})}$$

$$r - ſ\sqrt{K} = \frac{1}{q}\left(\frac{ſH}{q(\frac{p}{q}+\sqrt{K})} - 1\right).$$

Or comme $\frac{p}{q} > \sqrt{K}$ & $H < \sqrt{K}$, il eſt clair que $\frac{H}{\frac{p}{q}+\sqrt{K}}$ ſera $< \frac{1}{2}$; donc $p - q\sqrt{K}$ ſera $< \frac{1}{2q}$; donc $\frac{ſH}{q(\frac{p}{q}+\sqrt{K})}$ ſera à plus

Digitized by Google

plus forte raiſon $< \frac{1}{2}$, puiſque $f < q$; de ſorte que $r - f\sqrt{K}$ ſera une quantité négative, laquelle, priſe poſitivement, ſera $> \frac{1}{2q}$, à cauſe de $1 - \frac{fH}{q(\frac{p}{q} + K)} > \frac{1}{2}$.

Ainſi on aura les deux quantités $p - q\sqrt{K}$ & $r - f\sqrt{K}$, ou bien, en faiſant $a = \sqrt{K}$, $p - aq$ & $r - af$, leſquelles ſeront aſſujetties aux mêmes conditions que nous avons ſuppoſées dans l'art. 24, & d'où l'on tirera des concluſions ſemblables ; donc &c. (art. 26), ſi l'on avoit $p^2 - Kq^2 = -H$, alors il faudroit chercher les nombres r & f, tels que $pf - qr = -1$, & l'on auroit ces deux équations

$$q\sqrt{K} - p = \frac{H}{q(\sqrt{K} + \frac{p}{q})}$$

$$f\sqrt{K} - r = \frac{1}{q}\left(\frac{fH}{q(\sqrt{K} + \frac{p}{q})} - 1\right).$$

Comme $H < \sqrt{K}$ & $f < q$, il eſt clair que $\frac{fH}{q(\sqrt{K} + \frac{p}{q})}$ ſera < 1 ; de ſorte que la quantité $f\sqrt{K} - r$ ſera négative ; or je dis

Digitized by Google

que cette quantité, prise positivement, sera plus grande que $q\sqrt{K}-p$; pour cela il faut démontrer que $\frac{1}{q}\left(1-\frac{fH}{q(\sqrt{K}+\frac{p}{q})}\right) > \frac{H}{q(\sqrt{K}+\frac{p}{q})}$, ou bien que $1>\frac{H(1+\frac{f}{q})}{\sqrt{K}+\frac{p}{q}}$, savoir $\sqrt{K}+\frac{p}{q}>H+\frac{fH}{q}$; mais $H<\sqrt{K}$, (*hyp.*); donc il suffit de prouver que $\frac{p}{q}>\frac{f\sqrt{K}}{q}$, ou bien que $p>f\sqrt{K}$; c'est ce qui est évident, à cause que la quantité $f\sqrt{K}-r$ étant négative, il faut que $r>f\sqrt{K}$, & à plus forte raison $p>f\sqrt{K}$, puisque $p>r$.

Ainsi les deux quantités, $p-q\sqrt{K}$ & $r-f\sqrt{K}$, seront de différens signes, & la seconde sera plus grande que la premiere, (abstraction faite des signes), comme dans le cas précédent; donc, &c.

Donc, lorsqu'on aura à résoudre en nombres entiers une équation de la forme $p^2-Kq^2=\pm H$, ou $H<\sqrt{K}$, il n'y aura qu'à suivre les mêmes procédés de l'art. 33, en faisant $A=1$, $B=0$ & $C=-K$; &

Digitized by Google

si dans la série P^{o}, P^{I}, P^{II}, P^{III} &c. P^{n+2r}, on rencontre un terme $=\pm H$, on aura la résolution cherchée, sinon on sera assuré que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en nombres entiers.

REMARQUE.

39. Nous n'avons considéré dans l'art. 33 qu'une des racines de l'équation $Au^2+Bu+C=0$, que nous avons supposé positive; si cette équation a ses deux racines positives, il faudra les prendre successivement pour α, & faire la même opération sur l'une que sur l'autre; mais si l'une des deux racines ou toutes deux étoient négatives, alors on les changeroit d'abord en positives, en changeant seulement le signe de B, & on opéreroit comme ci-dessus; mais ensuite il faudroit prendre les valeurs de p & de q avec des signes différens, c'est-à-dire l'une positivement & l'autre négativement, (art. 29).

Donc en général on donnera à la valeur de B le signe ambigu $\pm$, de même qu'à

Digitized by Google

$\sqrt{E}$, c'eſt-à-dire qu'on fera $Q^0 = \mp\frac{1}{2}B$, & qu'on mettra $\pm$ à la place de $\sqrt{E}$, & il faudra prendre ces ſignes, en ſorte que la racine

$$a = \frac{\mp\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{E}}{A}$$

ſoit poſitive, ce qui pourra toujours ſe faire de deux manieres différentes; le ſigne ſupérieur de B indiquera une racine poſitive, auquel cas il faudra prendre p & q tous deux de mêmes ſignes; au contraire le ſigne inférieur de B indiquera une racine négative, auquel cas les valeurs de p & q devront être priſes de ſignes différens.

EXEMPLE.

40. *On demande quels nombres entiers il faudroit prendre pour* p & q, *afin que la quantité*

$$9p^2 - 118pq + 378q^2$$

devînt la plus petite qu'il eſt poſſible.

Comparant cette quantité avec la formule générale du probleme III, on aura $A = 9$, $B = -118$, $C = 378$, donc $B^2 - 4AC = 316$; d'où l'on voit que ce cas

Digitized by Google

ſe rapporte à celui de l'art. 33. On fera donc $E=316$ & $\frac{1}{2}\sqrt{E}=\sqrt{79}$, où l'on remarquera d'abord que $\sqrt{79}>8$ & <9; de ſorte que dans les formules dont il ne s'agira que d'avoir la valeur entiere approchée, on pourra prendre ſur le champ à la place du radical $\sqrt{79}$ le nombre 8 ou 9, ſuivant que ce radical ſe trouvera ajouté ou retranché des autres nombres de la même formule.

Maintenant on donnera tant à B qu'à $\sqrt{E}$ le ſigne ambigu ± 1, & on prendra enſuite ces ſignes tels que

$$a=\frac{\pm 59\pm\sqrt{79}}{9}$$

ſoit une quantité poſitive, (art. 39); d'où l'on voit qu'il faut toujours prendre le ſigne ſupérieur pour le nombre 59, & que pour le radical $\sqrt{79}$ on peut prendre également le ſupérieur & l'inférieur. Ainſi on fera toujours $Q^{o}=-\frac{1}{2}B$, & $\sqrt{E}$ pourra être pris ſucceſſivement en plus & en moins.

Soit donc 1°. $\frac{1}{2}\sqrt{E}=\sqrt{79}$ avec le ſigne poſitif, on fera, (art. 33), le calcul ſuivant:

Digitized by Google

$$Q^{\circ} = -59, \qquad P^{\circ} = 9, \qquad \mu < \frac{59+\sqrt{79}}{9} = 7,$$

$$Q^{I} = 9 \cdot 7 - 59 = 4, \quad P^{I} = \frac{16-79}{9} = -7, \quad \mu^{I} < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1,$$

$$Q^{II} = -7 \cdot 1 + 4 = -3, \quad P^{II} = \frac{9-79}{-7} = 10, \quad \mu^{II} < \frac{3+\sqrt{79}}{10} = 1,$$

$$Q^{III} = 10 \cdot 1 - 3 = 7, \quad P^{III} = \frac{49-79}{10} = -3, \quad \mu^{III} < \frac{-7-\sqrt{79}}{-3} = 5,$$

$$Q^{IV} = -3 \cdot 5 + 7 = -8, \quad P^{IV} = \frac{64-79}{-3} = 5, \quad \mu^{IV} < \frac{8+\sqrt{79}}{5} = 3,$$

$$Q^{V} = 5 \cdot 3 - 8 = 7, \quad P^{V} = \frac{49-79}{5} = -6, \quad \mu^{V} < \frac{-7-\sqrt{79}}{-6} = 2,$$

$$Q^{VI} = -6 \cdot 2 + 7 = -5, \quad P^{VI} = \frac{25-79}{-6} = 9, \quad \mu^{VI} < \frac{5+\sqrt{79}}{9} = 1,$$

$$Q^{VII} = 9 \cdot 1 - 5 = 4, \quad P^{VII} = \frac{16-79}{9} = -7, \quad \mu^{VII} < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1,$$

&c. &c. &c.

Digitized by Google

Je m'arrête ici, parce que je vois que $Q^{VII}=Q^{I}$, & $P^{VII}=P^{I}$, & que la différence entre les deux numéros 1 & 7 eſt paire; d'où il s'enſuit que tous les termes ſuivans ſeront auſſi les mêmes que les précédens; ainſi on aura $Q^{VII}=4$, $Q^{VIII}=-3$, $Q^{IX}=7$, *&c.* $P^{VII}=-7$, $P^{VIII}=10$, *&c.* de ſorte qu'on pourra, ſi l'on veut, continuer les ſéries ci-deſſus à l'infini, en ne faiſant que répéter les mêmes termes.

2°. Prenons maintenant le radical $\sqrt{79}$ avec un ſigne négatif, & le calcul ſera comme il ſuit:

Digitized by Google

$Q^0 = -59$, $P^0 = 9$, $\mu^0 < \frac{59-\sqrt{79}}{9} = 5$,

$Q^1 = 9.5-59 = -14$, $P^1 = \frac{196-79}{9} = 13$, $\mu^1 < \frac{14+\sqrt{79}}{13} = 1$,

$Q^{11} = 13.1-14 = -1$, $P^{11} = \frac{1-79}{13} = -6$, $\mu^{11} < \frac{1-\sqrt{79}}{-6} = 1$,

$Q^{111} = -6.1-1 = -7$, $P^{111} = \frac{49-79}{-6} = 5$, $\mu^{111} < \frac{5}{7+\sqrt{79}} = 3$,

$Q^{1V} = 5.3-7 = 8$, $P^{1V} = \frac{64-79}{5} = -3$, $\mu^{1V} < \frac{-8-\sqrt{79}}{-3} = 5$,

$Q^V = -3.5+8 = -7$, $P^V = \frac{49-79}{-3} = 10$, $\mu^V < \frac{7+\sqrt{79}}{10} = 1$,

$Q^{V1} = 10.1-7 = 3$, $P^{V1} = \frac{9-79}{10} = -7$, $\mu^{V1} < \frac{-3-\sqrt{79}}{-7} = 1$,

$Q^{V11} = -7.1+3 = -4$, $P^{V11} = \frac{16-79}{-7} = 9$, $\mu^{V11} < \frac{4+\sqrt{79}}{9} = 1$,

$Q^{V111} = 9.1-4 = 5$, $P^{V111} = \frac{25-79}{-6} = -6$, $\mu^{V111} < \frac{-5-\sqrt{79}}{-6} = 2$,

$Q^{1X} = -6.2+5 = -7$, $P^{1X} = \frac{9}{49-79} = 5$, $\mu^{1X} < \frac{7+\sqrt{79}}{5} = 3$,

&c. &c. &c.

On peut s'arrêter ici, puiſque l'on a trouvé $Q^{1X} = Q^{111}$ & $P^{1X} = P^{111}$, & que la différence des numéros 9 & 3 eſt paire;

car en continuant les séries on ne retrouveroit plus que les mêmes termes qu'on a déjà trouvés.

Or si on considere les valeurs des termes P^0, P^I, P^{II}, P^{III}, &c. trouvées dans les deux cas, on verra que le plus petit de ces termes est égal à -3 ; dans le premier cas c'est le terme P^{III} auquel répondent les valeurs p^{III} & q^{III} ; & dans le second cas, c'est le terme P^{IV} auquel répondent les valeurs p^{IV} & q^{IV}.

D'où il s'ensuit que la plus petite valeur que puisse recevoir la quantité proposée est -3 ; & pour avoir les valeurs de p & q qui y répondent, on prendra dans le premier cas les nombres μ, μ', μ'', savoir 7, 1 & 1, & l'on en formera les fractions *principales* convergentes $\frac{7}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{15}{2}$; la troisieme fraction sera donc $\frac{p'''}{q'''}$, en sorte que l'on aura $p'''=15$ & $q'''=2$; c'est-à-dire que les valeurs cherchées seront $p=15$ & $q=2$. Dans le second cas on prendra les nombres μ, μ', μ'', μ''', savoir 5, 1, 1, 3,

Digitized by Google

lesquels donneront ces fractions $\frac{5}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{39}{7}$; de sorte qu'on aura $p^{IV}=39$ & $q^{IV}=7$; donc $p=39$ & $q=7$.

Les valeurs qu'on vient de trouver pour p & q dans le cas du *minimum*, sont aussi les plus petites qu'il est possible; mais on pourra, si l'on veut, en trouver successivement d'autres plus grandes; car il est clair que le même terme -3 reviendra toujours au bout de chaque intervalle de six termes; de sorte que dans le premier cas on aura $P^{III}=-3$, $P^{IX}=-3$, $P^{XV}=-3$, *&c.* & dans le second, $P^{IV}=-3$, $P^{X}=-3$, $P^{XVI}=-3$, *&c.* Donc dans le premier cas on aura pour les valeurs satisfaisantes de p & q celles-ci, p^{III}, q^{III}, p^{IX}, q^{IX}, p^{XI}, q^{XV}, *&c.* & dans le second cas celles-ci, p^{IV}, q^{IV}, p^{X}, q^{X}, p^{XVI}, q^{XVI}, *&c.* Or les valeurs de μ, μ^{I}, μ^{II}, *&c.* sont dans le premier cas 7, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, *&c.* à l'infini, parce que $\mu^{VII}=\mu^{I}$ & $\mu^{VIII}=\mu^{II}$, *&c.* ainsi il n'y aura qu'à former par la méthode de l'art. 20 les fractions

Digitized by Google

7, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5.

$\frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{15}{2}, \frac{83}{11}, \frac{264}{35}, \frac{611}{81}, \frac{875}{116}, \frac{1486}{197}, \frac{2361}{313}, \frac{13291}{1762}$,

&c.

& on pourra prendre pour p les numérateurs de la troiſieme, de la neuvieme, *&c.* & pour q les dénominateurs correſpondans; on aura donc $p=15$, $q=2$, ou $p=2361$, $q=313$ ou, *&c.*

Dans le ſecond cas les valeurs de μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, *&c.* ſeront 5, 1, 1, 3, 5, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 1, 1, 2, *&c.* parce que $\mu^{IX}=\mu^{III}$, $\mu^{X}=\mu^{IV}$, *&c.* On formera donc ces fractions-ci,

5, 1, 1, 3, 5, 1, 1, 1, 2, 3, 5.

$\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}, \frac{206}{37}, \frac{245}{44}, \frac{451}{81}, \frac{696}{125}, \frac{1843}{331}, \frac{6225}{1118}, \frac{32968}{5921}$, *&c.*

& les fractions quatrieme, dixieme, *&c.* donneront les valeurs de p & q, leſquelles ſeront donc $p=39$, $q=7$, ou $p=6225$, $q=1118$, *&c.*

De cette maniere on pourra donc trouver par ordre toutes les valeurs de p & q,

Digitized by Google

qui rendront la formule proposée $=-3$, valeur qui est la plus petite qu'elle puisse recevoir. On pourroit même avoir une formule générale qui renfermât toutes ces valeurs de p & de q; on la trouvera, si l'on en est curieux, par la méthode que nous avons exposée ailleurs, & dont nous avons parlé plus haut, (art. 35).

Nous venons de trouver que le *minimum* de la quantité proposée est -3, & par conséquent négatif; or on pourroit proposer de trouver la plus petite valeur positive que la même quantité puisse recevoir, alors il n'y auroit qu'à examiner les séries P^{o}, P^{I}, P^{II}, P^{III}, &c. dans les deux cas, & on verroit que le plus petit terme positif est 5 dans les deux cas; & comme dans le premier cas c'est P^{IV}, & dans le second P^{III} qui est $=5$, les valeurs de p & de q, qui donneront la plus petite valeur positive de la quantité proposée, seront p^{IV}, q^{IV}, ou p^{X}, q^{X}, ou &c. dans le premier cas, & p^{III}, q^{III}, ou p^{IX}, q^{IX} &c. dans le second; de sorte que l'on aura par les frac-

Digitized by Google

tions ci-dessus $p=83$, $q=11$, ou $p=13291$, $q=1762$ &c. ou $p=11$, $q=2$, $p=1843$, $q=331$ &c.

Au reste on ne doit pas oublier de remarquer que les nombres μ, μ', μ'', &c. trouvés dans les deux cas ci-dessus, ne sont autre chose que les termes des fractions continues, qui représentent les deux racines de l'équation

$$9x^2-118x+378=0.$$

De sorte que ces racines seront

$$7+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+, \text{ &c.}$$

$$5+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+, \text{ &c.}$$

expressions qu'on pourra continuer à l'infini par la simple répétition des mêmes nombres.

Ainsi on voit par-là comment on doit s'y prendre pour réduire en fractions continues les racines de toute équation du second degré.

Digitized by Google

SCOLIE.

41. M. *Euler* a donné dans le tome XI des nouveaux Commentaires de Pétersbourg une méthode analogue à la précédente, quoique déduite de principes un peu différens, pour réduire en fraction continue la racine d'un nombre quelconque entier non-carré, & il y a joint une table où les fractions continues sont calculées pour tous les nombres naturels non-carrés jusqu'à 120. Comme cette table peut être utile en différentes occasions, & sur-tout pour la solution des problemes indéterminés du second degré, comme on le verra plus bas, (§. VII.), nous croyons faire plaisir à nos Lecteurs de la leur présenter ici; on remarquera qu'à chaque nombre radical il répond deux suites de nombres entiers; la supérieure est celle des nombres P°, $-P^{\prime}$, $P^{\prime\prime}$, $-P^{\prime\prime\prime}$, *&c.* & l'inférieure est celle des nombres μ, $\mu^{\prime}$, $\mu^{\prime\prime}$, $\mu^{\prime\prime\prime}$, *&c.*

Digitized by Google

√2.	1 1 1 1 &c. 1 2 2 2 &c.
√3	1 2 1 2 1 2 1 &c. 1 1 2 1 2 1 2 &c.
√5	1 1 1 1 &c. 2 4 4 4 &c.
√6	1 2 1 2 1 2 1 &c. 2 2 4 2 4 2 4 &c.
√7	1 3 2 3 1 3 2 3 1 &c. 2 1 1 1 4 1 1 1 4 &c.
√8	1 4 1 4 1 4 1 &c. 2 1 4 1 4 1 4 &c.
√10	1 1 1 1 &c. 3 6 6 6 &c.
√11	1 2 1 2 1 2 1 &c. 3 3 6 3 6 3 6 &c.
√12	1 3 1 3 1 3 1 &c. 3 2 6 2 6 2 6 &c.
√13	1 4 3 3 4 1 4 3 3 4 1 &c. 3 1 1 1 1 6 1 1 1 1 6 &c.
√14	1 5 2 5 1 5 2 5 1 &c. 3 1 2 1 6 1 2 1 6 &c.
√15	1 6 1 6 1 6 1 &c. 3 1 6 1 6 1 6 &c.
√17	1 1 1 1 1 &c. 4 8 8 8 8 &c.
√18	1 2 1 2 1 2 1 2 1 &c. 4 4 8 4 8 4 8 4 8 &c.
√19	1 3 5 2 5 3 1 3 5 2 5 3 1 &c. 4 2 1 3 1 2 8 2 1 3 1 2 8 &c.
√20	1 4 1 4 1 4 1 4 1 &c. 4 2 8 2 8 2 8 2 8 &c.
√21	1 5 4 3 4 5 1 5 4 3 4 5 1 &c. 4 1 1 2 1 1 8 1 1 2 1 1 8 &c.
√22	1 6 3 2 3 6 1 6 3 2 3 6 1 &c. 4 1 2 4 2 1 8 1 2 4 2 1 8 &c.

Digitized by Google

V23	1 7 2 7 1 7 2 7 1 &c.
	4 1 3 1 8 1 3 1 8 &c.
V24	1 8 1 8 1 8 1 &c.
	4 1 8 1 8 1 8 &c.
V26	1 1 1 1 &c.
	5 10 10 10 &c.
V27	1 2 1 2 1 2 1 &c.
	5 5 10 5 10 5 10 &c.
V28	1 3 4 3 1 3 4 3 1 &c.
	5 3 2 3 10 3 2 3 10 &c.
V29	1 4 5 5 4 1 4 5 5 4 1 &c.
	5 2 1 1 2 10 2 1 1 2 10 &c.
V30	1 5 1 5 1 5 1 5 1 &c.
	5 2 10 2 10 2 10 2 10 &c.
V31	1 6 5 3 2 3 5 6 1 6 5 &c.
	5 1 1 3 5 3 1 1 10 1 1 &c.
V32	1 7 4 7 1 7 4 7 1 &c.
	5 1 1 1 10 1 1 1 10 &c.
V33	1 8 3 8 1 8 3 8 1 &c.
	5 1 2 1 10 1 2 1 10 &c.
V34	1 9 2 9 1 9 2 9 1 &c.
	5 1 4 1 10 1 4 1 10 &c.
V35	1 10 1 10 1 10 1 10 &c.
	5 1 10 1 10 1 10 1 &c.
V37	1 1 1 1 1 &c.
	6 12 12 12 12 &c.
V38	1 2 1 2 1 2 1 &c.
	6 6 12 16 12 6 12 &c.
V39	1 3 1 3 1 3 1 &c.
	6 4 12 4 12 4 12 &c.
V40	1 4 1 4 1 4 1 &c.
	6 3 12 3 12 3 12 &c.
V41	1 5 5 1 5 5 1 &c.
	6 2 2 12 2 2 12 &c.
V42	1 6 1 6 1 6 1 &c.
	6 2 12 2 12 2 12 &c.

V43

Digitized by Google

√43	1 7 6 3 9 2 9 3 6 7 1 7 6 &c.	
	6 1 1 3 1 5 1 3 1 1 12 1 1 &c.	
√44	1 8 5 7 4 7 5 8 1 8 5 &c.	
	6 1 1 1 2 1 1 1 12 1 1 &c.	
√45	1 9 4 5 4 9 1 9 4 5 4 9 1 9 4 &c.	
	6 1 2 2 2 1 12 1 2 2 2 1 12 1 2 &c.	
√46	1 10 3 7 6 5 2 5 6 7 3 10 1 10 3 &c.	
	6 1 3 1 1 2 6 2 1 1 3 1 12 1 3 &c.	
√47	1 11 2 11 1 11 2 11 1 &c.	
	6 1 5 1 12 1 5 1 12 &c.	
√48	1 12 1 12 1 12 &c.	
	6 1 12 1 12 1 &c.	
√50	1 1 1 1 &c.	
	7 14 14 14 &c.	
√51	1 2 1 2 1 2 &c.	
	7 7 14 7 14 7 &c.	
√52	1 3 9 4 9 3 1 3 9 4 9 3 1 3 &c.	
	7 4 1 2 1 4 14 4 1 2 1 4 14 4 &c.	
√53	1 4 7 7 4 1 4 7 7 4 1 4 7 &c.	
	7 3 1 1 3 14 3 1 1 3 14 3 1 &c.	
√54	1 5 9 2 9 5 1 5 9 2 9 5 1 5 &c.	
	7 2 1 6 1 2 14 2 1 6 1 2 14 2 &c.	
√55	1 6 5 6 1 1 6 5 6 1 &c.	
	7 2 2 2 14 2 2 2 14 2 &c.	
√56	1 7 1 7 1 7 1 &c.	
	7 2 14 2 14 2 14 &c.	
√57	1 8 7 3 7 8 1 8 7 &c.	
	7 1 1 4 1 1 14 1 1 &c.	
√58	1 9 6 7 7 6 9 1 9 6 &c.	
	7 1 1 1 1 1 1 14 1 1 &c.	
√59	1 10 5 2 5 10 1 10 5 &c.	
	7 1 2 7 2 1 14 1 2 &c.	
√60	1 11 4 11 1 11 4 &c.	
	7 1 2 1 14 1 2 &c.	
√61	1 12 3 4 9 5 5 9 4 3 12 1 12 3 &c.	
	7 1 4 3 1 2 2 1 3 4 1 14 1 4 &c.	

Digitized by Google

V62	1 13 2 13 1 13 2 &c. 7 1 6 1 14 1 6 &c.
V63	1 14 1 14 1 14 &c. 7 1 14 1 14 1 &c.
V65	1 1 1 1 &c. 9 16 16 16 &c.
V66	1 2 1 2 1 &c. 8 8 16 8 16 &c.
V67	1 3 6 7 9 2 9 7 6 3 1 3 6 &c. 8 5 2 1 1 7 1 1 2 5 16 5 2 &c.
V68	1 4 1 4 1 4 &c. 8 4 16 4 16 4 &c.
V69	1 5 4 11 3 11 4 5 1 5 4 &c. 8 3 3 1 4 1 3 3 16 3 3 &c.
V70	1 6 9 5 9 6 1 6 9 &c. 8 2 2 2 1 2 16 2 1 &c.
V71	1 7 5 11 2 11 5 7 1 7 5 &c. 8 2 2 1 7 1 2 2 16 2 2 &c.
V72	1 8 1 8 1 8 &c. 8 2 16 2 16 2 &c.
V73	1 9 8 3 3 8 9 1 9 8 &c. 8 1 1 5 5 1 1 16 1 1 &c.
V74	1 10 7 7 10 1 10 7 &c. 8 1 1 1 1 16 1 1 &c.
V75	1 11 6 11 1 11 6 &c. 8 1 1 1 16 1 1 &c.
V76	1 12 5 8 9 3 4 3 9 8 5 12 1 12 5 &c. 8 1 2 1 1 5 4 5 1 1 2 1 16 1 2 &c.
V77	1 13 4 7 4 13 1 13 4 &c. 8 1 3 2 3 1 16 1 3 &c.
V78	1 14 3 14 1 14 3 &c. 8 1 4 1 16 1 4 &c.
V79	1 15 2 15 1 15 2 &c. 8 1 7 1 16 1 7 &c.
V80	1 16 1 16 1 16 &c. 8 1 16 1 16 1 &c.

Digitized by Google

√82	1 1 1 1 &c. 9 18 18 18 &c.
√83	1 2 1 2 1 2 &c. 9 9 18 9 18 9 &c.
√84	3 3 1 3 1 3 &c. 9 6 18 6 18 6 &c.
√85	1 4 9 9 4 1 4 9. &c. 9 4 1 1 4 18 4 1 &c.
√86	1 5 10 7 11 2 11 7 10 5 1 5 10 &c. 9 3 1 1 1 8 1 1 1 3 18 3 1 &c.
√87	1 6 1 6 1 6 &c. 9 3 18 3 18 3 &c.
√88	1 7 9 8 9 7 1 7 9 &c. 9 2 1 1 1 2 18 2 1 &c.
√89	1 8 5 5 8 1 8 5. &c. 9 2 3 3 2 18 2 3 &c.
√90	1 9 1 9 1 &c. 9 2 18 2 18 &c.
√91	1 10 9 3 14 3 9 10 1 10 9 &c. 9 1 1 5 1 5 1 1 18 1 1 &c.
√92	1 11 8 7 4 7 8 11 1 11 8 &c. 9 1 1 2 4 2 1 1 18 1 1 &c.
√93	1 12 7 11 4 3 4 11 7 12 1 12 7 &c. 9 1 1 1 4 6 4 1 1 1 18 1 1 &c.
√94	1 13 6 5 9 10 3 15 2 15 3 10 9 5 6 13 1 &c. 9 1 2 3 1 1 5 1 8 1 5 1 1 3 2 1 18 &c.
√95	1 14 5 14 1 14 &c. 9 1 2 1 18 1 &c.
√96	1 15 4 15 1 15 &c. 9 1 3 1 18 1 &c.
√97	1 16 3 11 8 9 9 8 11 3 16 1 16 &c. 9 1 5 1 1 1 1 1 1 5 1 18 1 &c.
√98	1 17 2 17 1 17 &c. 9 1 8 1 18 1 &c.
√99	1 18 1 18 1 &c. 9 1 18 1 18 &c.

Digitized by Google

Ainſi on aura, par exemple,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} +, \text{ \&c.}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} +, \text{ \&c.}$$

& ainſi des autres.

Et ſi on forme les fractions convergentes $\frac{p^0}{q^0}, \frac{p^I}{q^I}, \frac{p^{II}}{q^{II}}, \frac{p^{III}}{q^{III}}$, &c. d'après chacune de ces fractions continues on aura

$$(p^0)^2 - 2(q^0)^2 = 1, \quad p^{I2} - 2q^{I2} = -1,$$
$$p^{II2} - 2q^{II2} = 1, \text{ \&c.}$$

& de même,

$$(p^0)^2 - 3(q^0)^2 = 1, \quad p^{I2} - 3q^{I2} = -2,$$
$$p^{II2} - 3q^{II2} = 1, \text{ \&c. \&c.}$$

Digitized by Google

PARAGRAPHE III.

Sur la réſolution des Equations du premier degré à deux inconnues en nombres entiers.

Addition pour le Chapitre I.

42. LORSQU'ON a à réſoudre une équation de cette forme

$$ax - by = c,$$

où a, b, c ſont des nombres entiers donnés poſitifs ou négatifs, & où les deux inconnues x & y doivent être auſſi des nombres entiers, il ſuffit de connoître une ſeule ſolution, pour pouvoir en déduire facilement toutes les autres ſolutions poſſibles.

En effet, ſuppoſons que l'on ſache que ces valeurs, $x = \alpha$ & $y = \beta$, ſatisfont à l'équation propoſée, α & β étant des nombres entiers quelconques, on aura donc $a\alpha - b\beta = c$, & par conſéquent $ax - by = a\alpha - b\beta$, ou bien $a(x - \alpha) - b(y - \beta) = 0$; d'où l'on tire

$$\frac{x-\alpha}{y-\beta} = \frac{b}{a}.$$

Digitized by Google

Qu'on réduise la fraction $\frac{b}{a}$ à ses moindres termes, & supposant qu'elle se change par-là en celle-ci, $\frac{b'}{a'}$, où b' & a' seront premiers entr'eux, il est visible que l'équation $\frac{x-\alpha}{y-\beta}=\frac{b'}{a'}$ ne sauroit subsister, dans la supposition que $x-\alpha$ & $y-\beta$ soient des nombres entiers, à moins que l'on ait $x-\alpha=mb'$, & $y-\beta=ma'$, m étant un nombre quelconque entier; de sorte que l'on aura en général $x=\alpha+mb'$, & $y=\beta+ma'$, m étant un nombre entier indéterminé.

Comme on peut prendre m positif ou négatif à volonté, il est facile de voir qu'on pourra toujours déterminer ce nombre m, en sorte que la valeur de x ne soit pas plus grande que $\frac{b'}{2}$, ou que celle de y ne soit pas plus grande que $\frac{a'}{2}$, (abstraction faite des signes de ces quantités); d'où il s'ensuit que si l'équation proposée, $ax-by=c$,

Digitized by Google

est réfoluble en nombres entiers, & qu'on y ſubſtitue ſucceſſivement à la place de x tous les nombres entiers tant poſitifs que négatifs, renfermés entre ces deux limites $\frac{b'}{2}$ & $\frac{-b'}{2}$, on en trouvera néceſſairement un qui ſatisfera à cette équation; & on trouvera de même une valeur ſatisfaiſante de y parmi les nombres entiers poſitifs ou négatifs, contenus entre les limites $\frac{a'}{2}$ & $\frac{-a'}{2}$.

Ainſi on pourra par ce moyen trouver une premiere ſolution de la propoſée, après quoi on aura toutes les autres par les formules ci-deſſus.

43. Mais ſi on ne veut pas employer la méthode de tâtonnement que nous venons de propoſer, & qui ſeroit ſouvent très-laborieuſe, on pourra faire uſage de celle qui eſt expoſée dans le chap. 1 du traité précédent, & qui eſt très-ſimple & très-directe, ou bien on pourra s'y prendre de la maniere ſuivante.

On remarquera 1°, que ſi les nombres

Digitized by Google

a & b ne ſont pas premiers entr'eux, l'équation ne pourra ſubſiſter en nombres entiers, à moins que le nombre donné c ne ſoit diviſible par la plus grande commune meſure de a & b. De ſorte qu'en ſuppoſant la diviſion faite lorſqu'elle a lieu, & déſignant les quotiens par a', b', c', on aura à réſoudre l'équation

$$a'x - b'y = c',$$

où a' & b' ſeront premiers entr'eux.

2°. Que ſi l'on peut trouver des valeurs de p & de q qui ſatisfaſſent à l'équation

$$a'p - b'q = \pm 1,$$

on pourra réſoudre l'équation précédente; car il eſt viſible qu'en multipliant ces valeurs par $\pm c'$, on aura des valeurs qui ſatisferont à l'équation $a'x - b'y = c'$; c'eſt-à-dire qu'on aura $x = \pm pc'$ & $y = \pm qc'$.

Or l'équation $a'p - b'q = \pm 1$ eſt toujours réſoluble en nombres entiers, comme nous l'avons démontré dans l'art. 23; & pour trouver les plus petites valeurs de p & de q qui y peuvent ſatisfaire, il n'y aura qu'à

Digitized by Google

convertir la fraction $\frac{b'}{a'}$ en fraction continue par la méthode de l'art. 4, & en déduire enſuite la ſérie des fractions *principales* convergentes vers la même fraction $\frac{b'}{a'}$ par les formules de l'art. 10; la derniere de ces fractions ſera la fraction même $\frac{b'}{a'}$, & ſi on déſigne l'avant-derniere par $\frac{p}{q}$, on aura par la loi de ces fractions, (art. 12), $a'p - b'q = \pm 1$, le ſigne ſupérieur étant pour le cas où le quantieme de la fraction $\frac{p}{q}$ eſt pair, & l'inférieur pour celui où ce quantieme eſt pair.

Ces valeurs de p & de q étant ainſi connues, on aura donc d'abord $x = \pm pc'$ & $y = \pm qc'$, & prenant enſuite ces valeurs pour α & β, on aura en général (art. 42), $x = \pm pc' + mb'$, $y = \pm qc' + ma'$, expreſſions qui renfermeront néceſſairement toutes les ſolutions poſſibles en nombres entiers de l'équation propoſée.

Au reſte, pour ne laiſſer aucun embarras

Digitized by Google

dans la pratique de cette méthode, nous remarquerons que quoique les nombres a & b puissent être positifs ou négatifs, on peut néanmoins les prendre toujours positivement, pourvu qu'on donne des signes contraires à x, si a est négatif, & à y, si b est négatif.

EXEMPLE.

44. Pour donner un exemple de la méthode précédente, nous prendrons celui de l'art. 14 du chap. 1 du traité précéd. où il s'agit de résoudre l'équation $39p = 56q + 11$; changeant p en x & q en y, on aura donc

$$39x - 56y = 11.$$

Ainsi on fera $a = 39$, $b = 56$ & $c = 11$; & comme 56 & 39 sont déjà premiers entre eux, on aura $a' = 39$, $b' = 56$, $c' = 11$. On réduira donc en fraction continue la fraction $\frac{b'}{a'} = \frac{56}{39}$, & pour cela on fera, (comme on l'a déjà pratiqué dans l'art. 20), le calcul suivant,

Digitized by Google

$$
\begin{array}{l}
39\,|\,56\,|\,1 \\
\quad\;\;\,|\,39\,| \\
\quad\;\;\,\overline{\;\;17\,|\,39\,|\,2} \\
\qquad\qquad\;\;\,|\,34\,| \\
\qquad\qquad\;\;\,\overline{\;\;\;\;5\,|\,17\,|\,3} \\
\qquad\qquad\qquad\;\;\,|\,15\,| \\
\qquad\qquad\qquad\;\;\,\overline{\;\;\;\;2\,|\,5\,|\,2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;\,|\,4\,| \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;\,\overline{\;\;\;\;1\,|\,2\,|\,2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;\,|\,2\,| \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;\,\overline{\;\;\;\;0.}
\end{array}
$$

Ensuite, à l'aide des quotiens 1, 2, 3, &c. on formera les fractions

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 2,\quad 2.$$
$$\frac{1}{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{10}{7},\quad \frac{23}{16},\quad \frac{56}{39},$$

& la pénultieme fraction $\frac{23}{16}$ sera celle que nous avons désignée en général par $\frac{p}{q}$; de sorte qu'on aura $p=23$, $q=16$; & comme cette fraction est la quatrieme, & par conséquent d'un quantieme pair, il faudra prendre le signe supérieur; ainsi l'on aura en général

$x=23.11+56m$, & $y=16.11+39m$, m pouvant être un nombre quelconque entier positif ou négatif.

Digitized by Google

REMARQUE.

45. On doit la premiere ſolution de ce problème à M. *Bachet de Meziriac*, qui l'a donnée dans la ſeconde édition de ſes Récréations mathématiques, intitulées *Problemes plaiſans & délectables, &c.* La premiere édition de cet Ouvrage a paru en 1612, mais la ſolution dont il s'agit, n'y eſt qu'annoncée, & ce n'eſt que dans l'édition de 1624 qu'on la trouve complette. La méthode de M. *Bachet* eſt très-directe & très-ingénieuſe, & ne laiſſe rien à déſirer du côté de l'élégance & de la généralité.

Nous ſaiſiſſons avec plaiſir cette occaſion de rendre à ce ſavant Auteur la juſtice qui lui eſt due ſur ce ſujet, parce que nous avons remarqué que les Géometres qui ont traité le même probleme après lui, n'ont jamais fait aucune mention de ſon travail.

Voici en peu de mots à quoi ſe réduit la méthode de M. *Bachet*. Après avoir fait voir comment la ſolution des équations de

Digitized by Google

la forme $ax - by = c$, (a & b étant premiers entr'eux), ſe réduit à celle de $ax - by = \pm 1$, il s'attache à réſoudre cette derniere équation, & pour cela il preſcrit de faire entre les nombres a & b la même opération que ſi on vouloit chercher leur plus grand commun diviſeur, (c'eſt auſſi la même que nous avons pratiquée ci-devant); enſuite nommant c, d, e, f, &c. les reſtes provenant des différentes diviſions, & ſuppoſant, par exemple, que f ſoit le dernier reſte qui ſera néceſſairement égal à l'unité, (à cauſe que a & b ſont premiers entr'eux, *hyp.*), il fait, lorſque le nombre des reſtes eſt pair, comme dans ce cas,

$$e \mp 1 = \varepsilon, \quad \frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta, \quad \frac{\delta c \mp 1}{d} = \gamma, \quad \frac{\gamma b \pm 1}{c} = \beta,$$
$$\frac{\beta a \mp 1}{b} = \alpha;$$

ces derniers nombres β & α ſeront les plus petites valeurs de x & y.

Si le nombre des reſtes étoit impair, comme ſi g étoit le dernier reſte $= 1$, alors il faudroit faire

$$f \pm 1 = \zeta, \quad \frac{\zeta e \mp 1}{f} = \varepsilon, \quad \frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta, \text{ \&c.}$$

Digitized by Google

Il eſt facile de voir que cette méthode revient au même dans le fond que celle du chapitre premier ; mais elle en eſt moins commode, parce qu'elle demande des diviſions ; au reſte, les Géometres qui ſont curieux de ces matieres, verront avec plaiſir dans l'Ouvrage de M. *Bachet* les artifices qu'il a employés pour parvenir à la regle précédente, & pour en déduire la ſolution complette des équations de la forme $ax - by = c$.

Digitized by Google

PARAGRAPHE IV.

Méthode générale pour réſoudre en nombres entiers les Equations à deux inconnues, dont l'une ne paſſe pas le premier degré.

Addition pour le Chapitre III.

46. SOIT propoſée l'équation générale, $a+bx+cy+dx^2+exy+fx^3+gx^2y+hx^4+kx^3y+$ &c. $=0$, dans laquelle les coefficiens a, b, c &c. ſoient des nombres entiers donnés, & où x & y ſoient deux nombres indéterminés, qui doivent auſſi être entiers.

Tirant la valeur de y de cette équation, on aura

$$y=-\frac{a+bx+dx^2+fx^3+hx^4+, \text{ \&c.}}{c+ex+gx^2+kx^3+, \text{ \&c.}}$$

ainſi la queſtion ſera réduite à trouver un nombre entier qui, étant pris pour x, rende le numérateur de cette fraction diviſible par ſon dénominateur.

Digitized by Google

Soit supposé

$$p = a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + , \&c.$$
$$q = c + ex + gx^2 + kx^3 + , \&c.$$

& qu'on retranche x de ces deux équations par les regles ordinaires de l'Algebre, on aura une équation finale de cette forme,

$$A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + Gp^3 + \&c. = 0,$$

où les coefficiens A, B, C &c. seront des fonctions rationnelles & entieres des nombres a, b, c, &c.

Maintenant, puisque $y = -\frac{p}{q}$, on aura aussi $p = -qy$; de sorte qu'en substituant cette valeur de p, il viendra

$$A - Byq + Cq + Dy^2q^2 - Epq^2y^2 + Fq^2 + \&c. = 0,$$

où l'on voit que tous les termes sont multipliés par q, à l'exception du premier terme A; donc il faudra que le nombre A soit divisible par le nombre q, autrement il seroit impossible que les nombres q & y pussent être entiers à la fois.

On cherchera donc tous les diviseurs du nombre entier connu A, & on prendra successivement

Digitized by Google

ſucceſſivement chacun de ces diviſeurs pour q; on aura par chacune de ces ſuppoſitions une équation déterminée en x, dont on cherchera, par les méthodes connues, les racines rationnelles & entieres, s'il y en a; on ſubſtituera enſuite ces racines à la place de x, & on verra ſi les valeurs réſultantes de p & de q ſeront telles que $\frac{p}{q}$ ſoit un nombre entier. On ſera sûr de trouver par ce moyen toutes les valeurs entieres de x, qui peuvent donner auſſi des valeurs entieres pour y dans l'équation propoſée.

De-là on voit que le nombre des ſolutions en entiers de ces ſortes d'équations eſt toujours néceſſairement limité; mais il y a un cas qui doit être excepté, & qui échappe à la méthode précédente.

47. Ce cas eſt celui où les coefficiens e, g, k, &c. ſont nuls, en ſorte que l'on ait ſimplement

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + \&c.}{c};$$

or voici comment il faudra s'y prendre

Digitized by Google

pour trouver toutes les valeurs de x qui pourront rendre la quantité

$a+bx+dx^2+fx^3+hx^4+$, &c.

diviſible par le nombre donné c: je ſuppoſe d'abord qu'on ait trouvé un nombre entier n qui ſatisfaſſe à cette condition, il eſt facile de voir que tout nombre de la forme $n\pm\mu c$ y ſatisfera auſſi, μ étant un nombre quelconque entier; de plus ſi n eſt $>\frac{c}{2}$, (abſtraction faite des ſignes de n & de c), on pourra toujours déterminer le nombre μ & le ſigne qui le précede, en ſorte que le nombre $n\pm\mu c$ devienne $<\frac{c}{2}$; & il eſt aiſé de voir que cela ne ſauroit ſe faire que d'une ſeule maniere, les valeurs de n & de c étant données; donc ſi on déſigne par n' cette valeur de $n\pm\mu c$, laquelle eſt $<\frac{c}{2}$, & qui ſatisfait à la condition dont il s'agit, on aura en général $n=n'\pm\mu c$, μ étant un nombre quelconque.

D'où je conclus que ſi on ſubſtitue ſucceſſivement, dans la formule $a+bx+dx^2+fx^3+$, &c. à la place de x tous les nombres entiers poſitifs ou négatifs qui ne paſſent

Digitized by Google

pas $\frac{c}{2}$, & qu'on dénote par n', n'', n''' &c. ceux de ces nombres qui rendront la quantité $a+bx+dx^2+$ &c. divisible par c, tous les autres nombres qui pourront faire le même effet, seront nécessairement renfermés dans ces formules

$$n' \pm \mu' c,\ n'' \pm \mu'' c,\ n''' \pm \mu''' c,\ \&c.$$

μ', μ'', μ''', &c. étant des nombres quelconques entiers.

On pourroit faire ici différentes remarques pour faciliter la recherche des nombres n', n'', n''', &c. mais nous ne croyons pas devoir nous arrêter davantage sur ce sujet, d'autant que nous avons déjà eu occasion de le traiter dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1768, & qui a pour titre *nouvelle Méthode pour résoudre les Problemes indéterminés.*

48. Je dirai cependant encore un mot de la maniere de déterminer deux nombres x & y, en sorte que la fraction

$$\frac{ay^m+by^{m-1}x+dy^{m-2}x^2+fy^{m-3}x^3+\&c.}{c}$$

Digitized by Google

devienne un nombre entier ; c'eſt une recherche qui nous ſera fort utile dans la ſuite.

Je ſuppoſe que y & x doivent être premiers entr'eux, & que de plus y doive être premier à c, je dis qu'on pourra toujours faire $x = ny - cz$, n & z étant des nombres indéterminés ; car en regardant x, y & c comme des nombres donnés, on aura une équation qui ſera toujours réſoluble en entiers par la méthode du §. III, à cauſe que y & c n'ont d'autre commune meſure que l'unité, par l'hypotheſe. Or ſi on ſubſtitue cette expreſſion de x dans la quantité $ay^m + by^{m-1}x + dy^{m-2}x^2 + \&c.$ elle deviendra

$$(a + bn + dn^2 + fn^3 + \&c.)y^m$$
$$-(b + 2dn + 3fn^2 + \&c.)cy^{m-1}z$$
$$+(d + 3fn + \&c.)c^2y^{m-2}z^2$$
$$-, \&c.$$

& il eſt clair que cette quantité ne ſauroit être diviſible par c, à moins que le premier terme

$$(a + bn + dn^2 + fn^3 + \&c.)y^m$$

ne le ſoit, puiſque tous les autres termes

Digitized by Google

ſont des multiples de c. Donc, comme c & y ſont ſuppoſés premiers entr'eux, il faudra que la quantité

$$a+bn+dn^2+fn^3+, \&c.$$

ſoit elle-même diviſible par c; ainſi il n'y aura qu'à chercher par la méthode de l'art. préc. toutes les valeurs de n qui pourront ſatisfaire à cette condition, & alors on aura en général

$$x=ny-az,$$

z étant un nombre quelconque entier.

Il eſt bon d'obſerver que quoique nous ayons ſuppoſé que les nombres x & y doivent être premiers entr'eux, ainſi que les nombres y & c, notre ſolution n'en eſt cependant pas moins générale; car ſi on vouloit que x & y euſſent une commune meſure α, il n'y auroit qu'à mettre $\alpha x'$ & $\alpha y'$ à la place de x & y, & on regarderoit enſuite x' & y' comme premiers entr'eux; de même ſi y'' & c devoient avoir une commune meſure β, on pourroit mettre $\beta y''$ à la place de y', & il ſeroit permis de regarder y'' & c comme premiers entr'eux.

Digitized by Google

PARAGRAPHE V.

Méthode directe & générale pour trouver les valeurs de x, *qui peuvent rendre rationnelles les quantités de la forme*

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)},$$

& pour réſoudre en nombres rationnels les équations indéterminées du ſecond degré à deux inconnues, lorſqu'elles admettent des ſolutions de cette eſpece.

Addition pour le Chapitre IV.

49. JE ſuppoſe d'abord que les nombres connus a, b, c ſoient entiers; s'ils étoient fractionnaires, il n'y auroit qu'à les réduire à un même dénominateur carré, & alors il eſt clair qu'on pourroit toujours faire abſtraction de leur dénominateur; quant au nombre x, on ſuppoſera ici qu'il puiſſe être entier ou fractionnaire, & on verra par la ſuite comment il faudra réſoudre la queſtion, lorſqu'on ne veut admettre que des nombres entiers.

Digitized by Google

Soit donc

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)}=y,$$

& l'on en tirera

$$2cx+b=\sqrt{(4cy^2+b^2-4ac)};$$

de sorte que la difficulté sera réduite à rendre rationnelle la quantité

$$\sqrt{(4cy^2+b^2-4ac)}.$$

50. Supposons donc en général qu'on ait à rendre rationnelle la quantité $\sqrt{(Ay^2+B)}$, c'est-à-dire, à rendre Ay^2+B égal à un carré, A & B étant des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, & y un nombre indéterminé qui doit être rationnel.

Il est d'abord clair que si l'un des nombres A ou B étoit $=1$, ou égal à un carré quelconque, le probleme seroit résoluble par les méthodes connues de *Diophante*, qui sont détaillées dans le chap. IV; ainsi nous ferons ici abstraction de ces cas, ou plutôt nous tâcherons d'y ramener tous les autres.

De plus, si les nombres A & B étoient divisibles par des nombres carrés quelconques, on pourroit aussi faire abstraction de

Digitized by Google

ces diviſeurs, c'eſt-à-dire, les ſupprimer, en ne prenant pour A & B que les quotiens qu'on auroit après avoir diviſé les valeurs données par les plus grands carrés poſſibles; en effet, ſuppoſant $A=\alpha^2 A'$, & $B=\beta^2 B'$, on aura à rendre carré le nombre $A'\alpha^2 y^2 + B'\beta^2$; donc diviſant par β^2, & faiſant $\frac{\alpha y}{\beta}=y'$, il s'agira de déterminer l'inconnue y'; en ſorte que $A'y'^2+B'$ ſoit un carré.

D'où il s'enſuit que dès qu'on aura trouvé une valeur de y propre à rendre Ay^2+B égal à un carré, en rejetant dans les valeurs données de A & de B les facteurs carrés α^2 & β^2 qu'elles pourroient renfermer, il n'y aura qu'à multiplier la valeur trouvée de y par $\frac{\beta}{\alpha}$, pour avoir celle qui convient à la quantité propoſée.

51. Conſidérons donc la formule Ay^2+B, dans laquelle A & B ſoient des nombres entiers donnés qui ne ſoient diviſibles par aucun carré; & comme on ſuppoſe que y puiſſe être une fraction, faiſons $y=\frac{p}{q}$, p & q étant des nombres entiers & premiers

Digitized by Google

entr'eux, pour que la fraction soit réduite à ses moindres termes; on aura donc la quantité $\frac{Ap^2}{q^2}+B$ qui devra être un carré; donc Ap^2+Bq^2 devra en être un aussi; de sorte qu'on aura à résoudre l'équation $Ap^2+Bq^2=z^2$, en supposant p, q & z des nombres entiers.

Or je dis qu'il faudra que q soit premier à A, & que p le soit à B; car si q & A avoient un commun diviseur, il est clair que le terme Bq^2 seroit divisible par le carré de ce diviseur; & que le terme Ap^2 ne seroit divisible que par la première puissance du même diviseur, à cause que q & p sont premiers entr'eux, & que A est supposé ne contenir aucun facteur carré; donc le nombre Ap^2+Bq^2 ne seroit divisible qu'une seule fois par le diviseur commun de q & de A, par conséquent il seroit impossible que ce nombre fût un carré. On prouvera de même que p & B ne sauroient avoir aucun diviseur commun.

Digitized by Google

Réſolution de l'équation $Ap^2+Bq^2=z^2$ *en nombres entiers.*

52. Suppoſons A plus grand que B, on écrira cette équation ainſi,

$$Ap^2=z^2-Bq^2,$$

& on remarquera que comme les nombres p, q & z doivent être entiers, il faudra que z^2-Bq^2 ſoit diviſible par A.

Donc, puiſque A & q ſont premiers entr'eux, (art. préc.), on fera, ſuivant la méthode du §. IV, art. 48, ci-deſſus,

$$z=nq-Aq',$$

n & q' étant deux nombres entiers indéterminés; ce qui changera la formule z^2-Bq^2 en celle-ci,

$$(n^2-B)q^2-2nAqq'+A^2q'^2,$$

dans laquelle il faudra que n^2-B ſoit diviſible par A, en prenant pour n un nombre entier non $>\frac{A}{2}$.

On eſſayera donc pour n tous les nombres entiers qui ne ſurpaſſent pas $\frac{A}{2}$, & ſi on n'en trouve aucun qui rende n^2-B diviſible par A, on en conclura ſur le champ

Digitized by Google

que l'équation $Ap^2 = \zeta^2 - Bq^2$ n'eſt pas réſoluble en nombres entiers, & qu'ainſi la quantité $Ay^2 + B$ ne ſauroit jamais devenir un carré.

Mais ſi on trouve une ou pluſieurs valeurs ſatisfaiſantes de n, on les mettra l'une après l'autre à la place de n, & on pourſuivra le calcul comme on va le voir.

Je remarquerai ſeulement encore qu'il ſeroit inutile de donner auſſi à n des valeurs plus grandes que $\frac{A}{2}$; car nommant n', n'', n''' &c. les valeurs de n moindres que $\frac{A}{2}$, qui rendront $n^2 - B$ diviſible par A, toutes les autres valeurs de n qui pourront faire le même effet ſeront renfermées dans ces formules, $n' \pm \mu' A$, $n'' \pm \mu'' A$, $n''' \pm \mu''' A$ &c. (article 47 du §. IV); or ſubſtituant ces valeurs à la place de n dans la formule $(n^2 - B)q^2 - 2nAqq' + A^2q^2$, c'eſt-à-dire $(nq - Aq')^2 - Bq^2$, il eſt clair qu'on aura les mêmes réſultats que ſi on mettoit ſeulement n', n'', n''' &c. à la place de n, & qu'on ajoutât à q' les quantités $\mp \mu' q$,

Digitized by Google

$\mp\mu''q$, $\mp\mu'''q$ &c. de sorte que, comme q' est un nombre indéterminé, ces substitutions ne donneroient pas des formules différentes de celles qu'on aura par la simple substitution des valeurs n', n'', n''', &c.

53. Puis donc que n^2-B doit être divisible par A, soit A' le quotient de cette division, en sorte que $AA'=n^2-B$; & l'équation $Ap^2=\zeta^2-Bq^2=(n^2-B)q^2-2nAqq'+A^2q'^2$, étant divisée par A, deviendra celle-ci,

$$p^2=A'q^2-2nqq'+Aq'^2,$$

où A' sera nécessairement moindre que A, à cause que $A'=\frac{n^2-B}{A}$ & que $B<A$, & n non $>\frac{A}{2}$.

Or 1°. si A' est un nombre carré, il est clair que cette équation sera résoluble par les méthodes connues, & l'on en aura la solution la plus simple qu'il est possible, en faisant $q'=0$, $q=1$ & $p=\sqrt{A'}$.

2°. Si A' n'est pas égal à un carré, on verra si ce nombre est moindre que B; où

Digitized by Google

au moins s'il eſt diviſible par un nombre quelconque carré, en ſorte que le quotient ſoit moindre que B, abſtraction faite des ſignes; alors on multipliera toute l'équation par A', & l'on aura, à cauſe de $AA'-n^2=-B$,

$$A'p^2=(A'q-nq')^2-B'q'^2;$$

de ſorte qu'il faudra que $B'q'^2+A'p^2$ ſoit un carré; donc diviſant par p^2 & faiſant $\frac{q'}{p}=y'$ & $A'=C$, on aura à rendre carrée la formule $B'y'^2+C$, laquelle eſt, comme l'on voit, analogue à celle de l'art. 2. Ainſi, ſi C contient un facteur carré γ^2, on pourra le ſupprimer, en ayant attention de multiplier enſuite par γ la valeur qu'on trouvera pour y', pour avoir ſa véritable valeur; & l'on aura une formule qui ſera dans le cas de celle de l'art. 51, mais avec cette différence que les coefficiens B & C de celle-ci ſeront moindres que les coefficiens A & B de celle-là.

54. Mais ſi A' n'eſt pas moindre que B, ni ne peut le devenir en le diviſant par le

Digitized by Google

plus grand carré qui le mesure, alors on fera $q = {}^{\nu}q' + q''$, & substituant cette valeur dans l'équation, elle deviendra

$$p^2 = A' q''^2 - 2n' q'' q' + A'' q'^2,$$

où $n' = n - {}^{\nu}A'$,

& $A'' = A' {}^{\nu 2} - 2n {}^{\nu} + A = \frac{n'^2 - B}{A'}$.

On déterminera, ce qui est toujours possible, le nombre entier ν, en sorte que n' ne soit pas $> \frac{A'}{2}$, abstraction faite des signes, & alors il est clair que A'' deviendra $< A'$, à cause de $A'' = \frac{n'^2 - B}{A'}$ & de $B = $ ou $< A'$, & $n' = $ ou $< \frac{A'}{2}$.

On fera donc ici le même raisonnement que nous avons fait dans l'article précédent, & si A'' est carré, on aura la résolution de l'équation; si A'' n'est pas carré, mais qu'il soit $< B$ ou qu'il le devienne, étant divisé par un carré, on multipliera l'équation par A'' & on aura, en faisant $\frac{p}{q''} = y'$ & A''

Digitized by Google

$= C$, la formule $B y^2 + C$, qui devra être un carré, & dans laquelle les coefficiens B & C, (après avoir supprimé dans C les diviseurs carrés, s'il y en a), seront moindres que ceux de la formule $Ay^2 + B$ de l'art. 51.

Mais si ces cas n'ont pas lieu, on fera, comme ci-dessus, $q' = \nu' q'' + q'''$, & l'équation se changera en celle-ci,

$$p^2 = A''' q^2 - 2n'' q'' q''' + A'' q^2,$$

où $n'' = n' - \nu' A''$,

& $A''' = A'' \nu^2 - 2n' \nu' + A' = \frac{n^2 - B}{A''}$.

On prendra donc pour ν' un nombre entier, tel que n'' ne soit pas $> \frac{A''}{2}$, abstraction faite des signes; & comme B n'est pas $> A''$, (*hyp.*), il s'ensuit de l'équation $A''' = \frac{n^2 - B}{A''}$ que A''' sera $< A''$; ainsi on pourra faire derechef les mêmes raisonnemens que ci-dessus, & on en tirera des conclusions semblables, & ainsi de suite.

Digitized by Google

Maintenant, comme les nombres A, A', A'', A''' &c. forment une ſuite décroiſſante de nombres entiers, il eſt viſible qu'en continuant cette ſuite on parviendra néceſſairement à un terme moindre que le nombre donné B; & alors nommant ce terme C, on aura, comme nous l'avons vu ci-deſſus, la formule $B'y^2+C$ à rendre égale à un carré. De ſorte que par les opérations que nous venons d'expoſer, on ſera toujours aſſuré de pouvoir ramener la formule Ay^2+B à une autre plus ſimple, telle que $B'y^2+C$, au moins ſi le probleme eſt réſoluble.

55. Or, de même qu'on a réduit la formule Ay^2+B à celle-ci $B'y^2+C$, on pourra réduire cette derniere à cette autre-ci, $C''y^2+D$, où D ſera moindre que C, & ainſi de ſuite; & comme les nombres A, B, C, D &c. forment une ſérie décroiſſante de nombres entiers, il eſt clair que cette ſérie ne pourra pas aller à l'infini, & qu'ainſi l'opération ſera toujours néceſſairement

Digitized by Google

rement terminée. Si la queſtion n'admet point de ſolution en nombres rationnels, on parviendra à une condition impoſſible; mais ſi la queſtion eſt réſoluble, on arrivera toujours à une équation ſemblable à celle de l'art. 53, & où l'un des coefficiens, comme A', ſera carré; en ſorte qu'elle ſera ſuſceptible des méthodes connues; or cette équation étant réſolue, on pourra, en rétrogradant, réſoudre ſucceſſivement toutes les équations précédentes, juſqu'à la premiere $Ap^2+Bq^2=\zeta^2$.

Eclairciſſons cette méthode par quelques exemples.

EXEMPLE I.

56. Soit propoſé de trouver une valeur rationnelle de x, telle que la formule

$$7+15x+13x^2$$

devienne un carré. (Voy. chap. IV. art. 57 du traité précédent).

On aura donc ici $a=7$, $b=15$, $c=13$; donc $4c=4.13$, & $b^2-4ac=-139$; de ſorte qu'en nommant y la racine du carré

Digitized by Google

dont il s'agit, on aura la formule $4.13y^2 - 139$ qui devra être un carré ; ainsi on aura $A = 4.13$ & $B = -139$, où l'on remarquera d'abord que A est divisible par le carré 4 ; de sorte qu'il faudra rejeter ce diviseur carré & supposer simplement $A = 13$; mais on se souviendra ensuite de diviser par 2 la valeur qu'on trouvera pour y, (art. 50).

On aura donc, en faisant $y = \frac{p}{q}$, l'équation $13p^2 - 139q^2 = z^2$, ou bien, à cause que 139 est > 13, on fera $y = \frac{q}{p}$, pour avoir $-139p^2 + 13q^2 = z^2$, équation qu'on écrira ainsi,

$$-139p^2 = z^2 - 13q^2.$$

On fera, (art. 52), $z = nq - 139q'$, & il faudra prendre pour n un nombre entier non $> \frac{139}{2}$, c'est-à-dire < 70, tel que $n^2 - 13$ soit divisible par 139 ; je trouve $n = 41$, ce qui donne $n^2 - 13 = 1668 = 139.12$; de sorte qu'en faisant la substitution & divisant ensuite par -139, on aura l'équation

$$p^2 = -12q^2 + 2.41qq' - 139q'^2.$$

Digitized by Google

Or, comme -12 n'eſt pas un carré, cette équation n'a pas encore les conditions requiſes; ainſi, puiſque 12 eſt déjà moindre que 13, on multipliera toute l'équation par -12, & elle deviendra $-12p'^2=(-12q'+41q')^2-13q'^2$, de ſorte qu'il faudra que $13q'^2-12p'^2$ ſoit un carré, ou bien, en faiſant $\frac{q'}{p'}=y'$, que $13y'^2-12$, en ſoit un auſſi.

On voit ici qu'il n'y auroit qu'à faire $y'=1$, mais comme ce n'eſt que le haſard qui nous donne cette valeur, nous allons pourſuivre le calcul ſelon notre méthode, juſqu'à ce que l'on arrive à une formule qui ſoit ſuſceptible des méthodes ordinaires. Comme 12 eſt diviſible par 4, je rejete ce diviſeur carré, en me ſouvenant que je dois enſuite multiplier la valeur de y' par 2; j'aurai donc à rendre carrée la formule $13y'^2-3$, ou bien, en faiſant $y'=\frac{r}{f}$, (on ſuppoſe que r & f ſont des nombres entiers premiers entr'eux, en ſorte que la fraction

Digitized by Google

$\frac{r}{f}$ soit déjà réduite à ses moindres termes, comme la fraction $\frac{q}{p}$), celle-ci $13r^2-3f^2$; soit la racine z', j'aurai

$$13r^2=z'^2+3f^2,$$

& je ferai $z'=mf-13f'$, m étant un nombre entier non $>\frac{13}{2}$, c'est-à-d. <7, & tel que m^2+3 soit divisible par 13; or je trouve $m=6$, ce qui donne $m^2+3=39=13.3$; donc substituant la valeur de z' & divisant toute l'équation par 13, on aura

$$r^2=3f^2-2.6ff'+13f'^2.$$

Comme le coefficient 3 de f^2 n'est ni carré ni moindre que celui de f^2 dans l'équation précédente, on fera, (art. 54), $f=\mu f'+f''$, & substituant l'on aura la transformée

$$r^2=3f''^2-2(6-3\mu)f''f'+(3\mu^2-2.6\mu+13)f'^2;$$

on déterminera μ, en sorte que $6-3\mu$ ne soit pas $>\frac{3}{2}$, & il est clair qu'il faudra faire $\mu=2$, ce qui donne $6-3\mu=0$; & l'équation deviendra

$$r^2=3f''^2+f'^2,$$

laquelle est, comme l'on voit, réduite à

Digitized by Google

l'état demandé, puiſque le coefficient du carré de l'une des deux indéterminées du ſecond membre eſt auſſi carré.

On fera donc, pour avoir la ſolution la plus ſimple qu'il eſt poſſible, $f''=0$, $f'=1$ & $r=1$; donc $f=\mu=2$, & de-là $y'=\frac{r}{f}=\frac{1}{2}$; mais nous avons vu qu'il faut multiplier la valeur de y' par 2; ainſi on aura $y'=1$; donc, en rétrogradant toujours, on aura $\frac{q'}{p}=1$; donc $q'=p$; donc l'équation $-12p^2=(-12q+41q')^2-13q'^2$, donnera $(-12q+41p)^2=p^2$; donc $-12q+41p=p$, c'eſt-à-dire $12q=40p$; donc $y=\frac{q}{p}=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}$; mais comme il faut diviſer la valeur de y par 2, on aura $y=\frac{5}{3}$; ce ſera le côté de la racine de la formule propoſée $7+15x+13x^2$; ainſi faiſant cette quantité $=\frac{25}{9}$, on trouvera par la réſolution de l'équation, $26x+15=\pm\frac{7}{3}$, d'où $x=-\frac{19}{39}$, ou $=-\frac{2}{3}$.

On auroit pu prendre auſſi $-12q+41p=-p$, & l'on auroit eu $y=\frac{q}{p}=\frac{21}{6}$, &

Digitized by Google

diviſant par 2, $y=\frac{21}{12}$; faiſant donc $7+15x+13x^2=\left(\frac{21}{12}\right)^2$, on trouvera $26x+15=\pm\frac{9}{2}$; donc $x=-\frac{21}{52}$, ou $=-\frac{3}{4}$.

Si on vouloit avoir d'autres valeurs de x, il n'y auroit qu'à chercher d'autres ſolutions de l'équation $r^2=3\overset{11}{f}^2+\overset{1}{f}^2$, laquelle eſt réſoluble en général par les méthodes connues; mais on peut auſſi, dès qu'on connoît une ſeule valeur de x, en déduire immédiatement toutes les autres valeurs ſatisfaiſantes de x par la méthode expliquée dans le chap. IV du traité précédent.

REMARQUE.

57. Suppoſons en général que la quantité $a+bx+cx^2$ devienne égale à un carré g^2, lorſque $x=f$, en ſorte que l'on ait $a+bf+cf^2=g^2$; donc $a=g^2-bf-cf^2$; de ſorte qu'en ſubſtituant cette valeur dans la formule propoſée, elle deviendra

$$g^2+b(x-f)+c(x^2-f^2).$$

Qu'on prenne $g+m(x-f)$ pour la racine de cette quantité, m étant un nombre indéterminé, & l'on aura l'équation

Digitized by Google

$g^2+b(x-f)+c(x^2-f^2)=g^2+2mg(x-f)+m^2(x-f)^2$, c'eſt-à-dire en effaçant g^2 de part & d'autre, & diviſant enſuite par $x-f$, $b+c(x+f)=2mg+m^2(x-f)$; d'où l'on tire

$$x=\frac{fm^2-2gm+b+cf}{m^2-c}.$$

Et il eſt clair qu'à cauſe du nombre indéterminé m, cette expreſſion de x doit renfermer toutes les valeurs qu'on peut donner à x, pour que la formule propoſée devienne un carré; car quel que ſoit le nombre carré auquel cette formule peut être égale, il eſt viſible que la racine de ce nombre pourra toujours être repréſentée par $g+m(x-f)$, en donnant à m une valeur convenable. Ainſi quand on aura trouvé par la méthode expliquée ci-deſſus une ſeule valeur ſatisfaiſante de x, il n'y aura qu'à la prendre pour f, & la racine du carré qui en réſultera pour g; l'on aura, par la formule précédente, toutes les autres valeurs poſſibles de x.

Dans l'exemple précédent on a trouvé

Digitized by Google

$y=\frac{1}{3}$ & $x=-\frac{2}{3}$; ainſi on fera $g=\frac{1}{3}$, & $f=-\frac{2}{3}$, & l'on aura

$$x=\frac{19-10m-2m^2}{3(m^2-13)},$$

c'eſt l'expreſſion générale des valeurs rationnelles de x, qui peuvent rendre carrée la quantité $7+15x+13x^2$.

EXEMPLE II.

58. Soit encore propoſé de trouver une valeur rationnelle de y, telle que $23y^2-5$ ſoit un carré.

Comme 23 & 5 ne ſont diviſibles par aucun nombre carré, il n'y aura aucune réduction à y faire. Ainſi en faiſant $y=\frac{p}{q}$, il faudra que la formule $23p^2-5q^2$ devienne un carré z^2; de ſorte qu'on aura l'équation $23p^2=z^2+5q^2$.

On fera donc $z=nq-23q'$, & il faudra prendre pour n un nombre entier non $>\frac{23}{2}$, tel que n^2+5 ſoit diviſible par 23. Je trouve $n=8$, ce qui donne $n^2+5=23.3$, & cette valeur de n eſt la ſeule qui ait

Digitized by Google

les conditions requiſes. Subſtituant donc $8q-23q'$ à la place de z, & diviſant toute l'équation par 23, j'aurai celle-ci,

$$p^2=3q^2-2.8qq'+23q'^2,$$

dans laquelle on voit que le coefficient 3 eſt déjà moindre que la valeur de B qui eſt 5, abſtraction faite du ſigne.

Ainſi on multipliera toute l'équation par 3, & l'on aura $3p^2=(3q-8q')^2+5q'^2$; de ſorte qu'en faiſant $\frac{q'}{p}=y'$, il faudra que la formule $-5y'^2+3$ ſoit un carré, où les coefficiens 5 & 3 n'admettent aucune réduction.

Soit donc $y'=\frac{r}{f}$, (r & f ſont ſuppoſés premiers entr'eux, au lieu que q' & p peuvent ne pas l'être), & l'on aura à rendre carrée la quantité $-5r^2+3f^2$; de ſorte qu'en nommant la racine z', on aura $-5r^2+3f^2=z'^2$, & de-là $-5r^2=z'^2-3f^2$.

On prendra donc $z'=mf+5f$, & il faudra que m ſoit un nombre entier non $>\frac{1}{2}$, & tel que m^2-3 ſoit diviſible par 5; or c'eſt ce qui eſt impoſſible, car on ne

Digitized by Google

pourroit prendre que $m=1$ ou $=2$; ce qui donne $m^2-3=-2$ ou $=1$. Ainsi on en doit conclure que le probleme n'est pas résoluble, c'est-à-dire qu'il est impossible que la formule $23y^2-5$ puisse jamais devenir égale à un nombre carré, quelque nombre que l'on substitue à la place de y.

COROLLAIRE.

59. Si on avoit une équation quelconque du second degré à deux inconnues, telle que $a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=0$, & que l'on proposât de trouver des valeurs rationnelles de x & y qui satisfissent à cette équation, on y pourroit parvenir, lorsque cela est possible, par la méthode que nous venons d'exposer.

En effet, si on tire la valeur de y en x, on aura

$$2fy+ex+c=\sqrt{((c+ex)^2-4f(a+bx+dx^2))},$$

ou bien en faisant

$$\alpha=c^2-4af,\ \beta=2ce-4bf,\ \gamma=e^2-4df,$$

$$2fy+ex+c=\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)};$$

de sorte que la question sera réduite à trouver des valeurs de x qui rendent rationnel le radical $\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$.

Digitized by Google

REMARQUE.

60. Nous avons déjà traité ce même ſujet, mais d'une maniere un peu différente, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin pour l'année 1767, & nous croyons être les premiers qui ayons donné une méthode directe & exempte de tâtonnement pour la ſolution des problemes indéterminés du ſecond degré. Le Lecteur qui ſera curieux d'approfondir cette matiere, pourra conſulter les Mémoires cités, où il trouvera ſur-tout des remarques nouvelles & importantes ſur la recherche des nombres entiers qui, étant pris pour n, peuvent rendre $n^2 - B$ diviſible par A, A & B étant des nombres donnés.

On trouvera auſſi dans les Mémoires pour les années 1770 & ſuivantes, des recherches ſur la forme des diviſeurs des nombres repréſentés par $z^2 - Bq^2$; de ſorte que par la forme même du nombre A, on pourra juger ſouvent de l'impoſſibilité de l'équation $Ap^2 = z^2 - Bq^2$, où $Ay^2 + B =$ *à un carré*, (art. 52).

Digitized by Google

PARAGRAPHE VI.

Sur les doubles & triples Egalités.

61. Nous traiterons ici en peu de mots des doubles & triples égalités, qui ſont d'un uſage très-fréquent dans l'analyſe de *Diophante*, & pour la ſolution deſquelles ce grand Géometre & ſes Commentateurs ont cru devoir donner des regles particulieres.

Lorſqu'on a une formule contenant une ou pluſieurs inconnues à égaler à une puiſſance parfaite, comme à un carré ou à un cube &c. cela s'appelle dans l'analyſe de *Diophante* une égalité ſimple; & lorſqu'on a deux formules contenant la même ou les mêmes inconnues à égaler chacune à des puiſſances parfaites, cela s'appelle une égalité double, & ainſi de ſuite.

Juſqu'ici on a vu comment il faut réſoudre les égalités ſimples où l'inconnue ne paſſe pas le ſecond degré, & où la puiſſance propoſée eſt la ſeconde, c'eſt-à-dire le carré.

Digitized by Google

Voyons donc comment on doit traiter les égalités doubles & triples de la même eſpece.

62. Soit d'abord propoſée cette égalité doublée,

$$a+bx = \text{à un carré}$$
$$c+dx = \text{à un carré},$$

où l'inconnue x ne ſe trouve qu'au premier degré.

Faiſant $a+bx=t^2$ & $c+dx=u^2$, & chaſſant x de ces deux équations, on aura $ad-bc=dt^2-bu^2$; donc $dt^2=bu^2+ad-bc$, & $(dt)^2=dbu^2+(ad-bc)d$; de ſorte que la difficulté ſera réduite à trouver une valeur rationnelle de u, telle que dbu^2+ad^2-bcd devienne un carré. On réſoudra cette égalité ſimple par la méthode expoſée ci-deſſus, & connoiſſant ainſi u on aura $x=\frac{u^2-c}{d}$.

Si l'égalité doublée étoit

$$ax^2+bx = \text{à un carré}$$
$$cx^2+dx = \text{à un carré},$$

il n'y auroit qu'à faire $x=\frac{1}{x'}$, & multi-

Digitized by Google

plier enſuite l'une & l'autre formule par le carré x^2, on auroit ces deux autres égalités $a+bx=$ *à un carré* & $c+dx=$ *à un carré*, qui ſont ſemblables aux précédentes.

Ainſi on peut réſoudre en général toutes les égalités doubles où l'inconnue ne paſſe pas le premier degré, & celles où l'inconnue ſe trouve dans tous les termes, pourvu qu'elle ne paſſe pas le ſecond degré; mais il n'en eſt pas de même lorſque l'on a des égalités de cette forme,

$$a+bx+cx^2=\text{à un carré}$$
$$\alpha+\beta x+\gamma x^2=\text{à un carré.}$$

Si on réſoud la premiere de ces égalités par notre méthode, & qu'on nomme f la valeur de x qui rend $a+bx+cx^2=$ au carré g^2, on aura en général, (art. 57),

$$x=\frac{fm^2-2gm+b+cf}{m^2-c};$$

donc ſubſtituant cette expreſſion de x dans l'autre formule $\alpha+\beta x+\gamma x^2$, & la multipliant enſuite par $(m^2-c)^2$, on aura à réſoudre l'égalité,

$$\alpha(m^2-c)^2+\beta(m^2-c)(fm^2-2gm+b+cf)$$

Digitized by Google

$+\gamma(fm^2-2gm+b+cf)^2=$ *à un carré*, dans laquelle l'inconnue m monte au quatrieme degré.

Or on n'a juſqu'à préſent aucune regle générale pour réſoudre ces ſortes d'égalités, & tout ce qu'on peut faire, c'eſt de trouver ſucceſſivement différentes ſolutions, lorſqu'on en connoît une ſeule. (Voyez le chapitre IX).

63. Si on avoit la triple égalité

$$\left.\begin{matrix} ax+by \\ cx+dy \\ hx+ky \end{matrix}\right\} = \text{à un carré},$$

on feroit $ax+by=t^2$, $cx+dy=u^2$, & $hx+ky=f^2$, & chaſſant x de ces trois équations, on auroit celle-ci, $(ak-bh)u^2-(ck-dh)t^2=(ad-cb)f^2$; de ſorte qu'en faiſant $\frac{u}{t}=z$, la difficulté ſe réduiroit à réſoudre l'égalité ſimple,

$$\frac{ak-bh}{ad-cb}z^2-\frac{ck-dh}{ad-cb}=\text{à un carré},$$

laquelle eſt, comme l'on voit, dans le cas de notre méthode générale.

Digitized by Google

Ayant trouvé la valeur de z, on aura $u=tz$, & les deux premieres équations donneront

$$x=\frac{d-bz^2}{ad-cb}t^2,\quad y=\frac{az^2-c}{ad-cb}t^2.$$

Mais ſi la triple égalité propoſée ne contenoit qu'une ſeule variable, on retomberoit alors dans une égalité où l'inconnue monteroit au quatrieme degré.

En effet, il eſt clair que ce cas peut ſe déduire du précédent, en faiſant $y=1$; de ſorte qu'il faudra que l'on ait $\frac{az^2-c}{ad-cb}t^2=1$, & par conſéquent $\frac{az^2-c}{ad-cb}=$ *à un carré.*

Or nommant f une des valeurs de z qui peuvent ſatisfaire à l'égalité ci-deſſus, & faiſant, pour abréger, $\frac{ak-bh}{ad-cb}=e$, on aura en général, (art. 57),

$$z=\frac{fm^2-2gm+ef}{m^2-e}.$$

Donc, ſubſtituant cette valeur de z dans la derniere égalité, & la multipliant toute par le carré de m^2-e, on aura celle-ci,

$a(fm^2$

Digitized by Google

$$\frac{a(fm^2 - 2gm + ef)^2 - c(m^2 - e)^2}{ad - cb}$$

$=$ *à un carré*, où l'inconnue m monte, comme l'on voit, au quatrieme degré.

PARAGRAPHE VII.

Méthode directe & générale pour trouver toutes les valeurs de y *exprimées en nombres entiers, par lesquelles on peut rendre rationnelles les quantités de la forme*

$$\sqrt{(Ay^2 + B)},$$

A & B *étant des nombres entiers donnés; & pour trouver auſſi toutes les ſolutions poſſibles en nombres entiers des Equations indéterminées du ſecond degré à deux inconnues.*

Addition pour le Chapitre VI.

64. QUOIQUE par la méthode du §. V on puiſſe trouver des formules générales qui renferment toutes les valeurs rationnelles de y, propres à rendre $Ay^2 + B$ égal à un carré, cependant ces formules ne ſont

Digitized by Google

d'aucun uſage, lorſqu'on demande pour y des valeurs exprimées en nombres entiers; c'eſt pourquoi nous ſommes obligés de donner ici une méthode particuliere pour réſoudre la queſtion dans le cas des nombres entiers.

Soit donc $Ay^2+B=x^2$; & comme A & B ſont ſuppoſés des nombres entiers, & que y doit être auſſi un nombre entier, il eſt clair que x devra être pareillement entier; de ſorte qu'on aura à réſoudre en entiers l'équation

$$x^2-Ay^2=B.$$

Je commence par remarquer ici que ſi B n'eſt diviſible par aucun nombre carré, il faudra néceſſairement que y ſoit premier à B; car ſuppoſons, s'il eſt poſſible, que y & B aient une commune meſure α, en ſorte que $y=\alpha y'$, & $B=\alpha B'$; donc on aura $x^2=A\alpha^2y'^2=\alpha B'$, d'où il s'enſuit qu'il faudra que x^2 ſoit diviſible par α; & comme α n'eſt ni carré ni diviſible par aucun carré, (*hyp.*), à cauſe que α eſt facteur

de B, il faudra que x soit divisible par α; faisant donc $x = \alpha x'$, on aura $\alpha^2 x'^2 = \alpha^2 A y^2 + \alpha B'$, ou bien en divisant par α, $\alpha x'^2 = \alpha A y^2 + B'$; d'où l'on voit que B' devroit encore être divisible par α, ce qui est contre l'hypothese.

Ce n'est donc que lorsque B contient des facteurs carrés que y peut avoir une commune mesure avec B; & il est facile de voir par la démonstration précédente que cette commune mesure de y & de B ne peut être que la racine d'un des facteurs carrés de B, & que le nombre x devra avoir la même commune mesure; en sorte que toute l'équation sera divisible par le carré de ce commun diviseur de x, y & B.

De-là je conclus, 1°. que si B n'est divisible par aucun carré, y & B seront premiers entr'eux.

2°. Que si B est divisible par un seul carré α^2, y pourra être premier à B ou divisible par α, ce qui fait deux cas qu'il faudra examiner séparément; dans le premier

Digitized by Google

cas on réſoudra l'équation $x^2 - Ay^2 = B$, en ſuppoſant y & B premiers entr'eux ; dans le ſecond on aura à réſoudre l'équation $x^2 - Ay^2 = B'$, B' étant $= \frac{B}{\alpha^2}$, en ſuppoſant auſſi y & B' premiers entr'eux ; mais il faudra enſuite multiplier par α les valeurs qu'on aura trouvées pour y & x, pour avoir les valeurs convenables à l'équation propoſée.

3°. Que ſi B eſt diviſible par deux différens carrés, α^2 & β^2, on aura trois cas à conſidérer ; dans le premier on réſoudra l'équation $x^2 - Ay^2 = B$, en regardant y & B comme premiers entr'eux ; dans le ſecond on réſoudra de même l'équation $x^2 - Ay^2 = B'$, B' étant $= \frac{B}{\alpha^2}$, dans l'hypotheſe de y & B' premiers entr'eux, & on multipliera enſuite les valeurs de x & y par α ; dans le troiſieme on réſoudra l'équation $x^2 - Ay^2 = B''$, B'' étant $= \frac{B}{\beta^2}$, dans l'hypotheſe de y & B'' premiers entr'eux, & on multipliera enſuite les valeurs de x & de y par β.

Digitized by Google

4°. &c. Ainſi on aura autant d'équations différentes à réſoudre, qu'il y aura de différens diviſeurs carrés de B; mais ces équations ſeront toutes de la même forme $x^2 - Ay^2 = B$, & y ſera auſſi toujours premier à B.

65. Conſidérons donc en général l'équation $x^2 - Ay^2 = B$, où y eſt premier à B; & comme x & y doivent être des nombres entiers, il faudra que $x^2 - Ay^2$ ſoit diviſible par B.

On fera donc, ſuivant la méthode du §. IV, art. 48, $x = ny - Bz$, & l'on aura l'équation

$$(n^2 - A)y^2 - 2nByz + B^2z^2 = B,$$

par laquelle on voit que le terme $(n^2 - A)y^2$ doit être diviſible par B, puiſque tous les autres le ſont d'eux-mêmes; donc, comme y eſt premier à B, (*hyp.*), il faudra que $n^2 - A$ ſoit diviſible par B; de ſorte qu'en faiſant $\frac{n^2 - A}{B} = C$, on aura, après avoir diviſé par B,

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1;$$

Digitized by Google

or cette équation eſt plus ſimple que la propoſée, en ce que le ſecond membre eſt égal à l'unité.

On cherchera donc les valeurs de n qui peuvent rendre $n^2 - A$ diviſible par B; pour cela il ſuffira, (art. 47), d'eſſayer pour n tous les nombres entiers poſitifs ou négatifs non $> \frac{B}{2}$; & ſi parmi ceux-ci on n'en trouve aucun qui ſatisfaſſe, on en conclura d'abord qu'il eſt impoſſible que $n^2 - A$ puiſſe être diviſible par B, & qu'ainſi l'équation propoſée n'eſt pas réſoluble en nombres entiers.

Mais ſi on trouve de cette maniere un ou pluſieurs nombres ſatisfaiſans, on les prendra l'un après l'autre pour n, ce qui donnera autant de différentes équations qu'il faudra traiter ſéparément, & dont chacune pourra fournir une ou pluſieurs ſolutions de la queſtion propoſée.

Quant aux valeurs de n qui ſurpaſſeroient celle de $\frac{B}{2}$, on en pourra faire abſtraction, parce qu'elles ne donneroient point d'équations différentes de celles qui réſulteront

Digitized by Google

des valeurs de n qui ne ſont pas $> \frac{B}{2}$, comme nous l'avons déjà montré dans l'art. 52.

Au reſte, comme la condition par laquelle on doit déterminer n eſt que $n^2 - A$ ſoit diviſible par B, il eſt clair que chaque valeur de n pourra être également poſitive ou négative; de ſorte qu'il ſuffira d'eſſayer ſucceſſivement pour n tous les nombres naturels qui ne ſont pas plus grands que $\frac{B}{2}$, & de prendre enſuite les valeurs ſatisfaiſantes de n tant en *plus* qu'en *moins*.

Nous avons donné ailleurs des regles pour faciliter la recherche des valeurs de n qui peuvent avoir la propriété requiſe, & même pour trouver ces valeurs *à priori* dans un grand nombre de cas. *Voyez les Mémoires de Berlin pour l'année 1767, pages 194 & 274.*

Digitized by Google

Réſolution de l'équation $Cy^2-2nyz+Bz^2=1$ *en nombres entiers.*

On peut réſoudre cette équation par deux méthodes différentes que nous allons expliquer.

PREMIERE MÉTHODE.

66. Comme les quantités C, n, B ſont ſuppoſées des nombres entiers, de même que les indéterminées y & z, il eſt viſible que la quantité $Cy^2-2nyz+Bz^2$ ſera toujours néceſſairement égale à des nombres entiers; par conſéquent l'unité ſera la plus petite valeur qu'elle puiſſe recevoir, à moins qu'elle ne puiſſe devenir nulle, ce qui ne peut arriver que lorſque cette quantité peut ſe décompoſer en deux facteurs rationnels; comme ce cas n'a aucune difficulté, nous en ferons d'abord abſtraction, & la queſtion ſe réduira à trouver les valeurs de y & z, qui rendront la quantité dont il s'agit la plus petite qu'il eſt poſſible; ſi le *minimum* eſt égal à l'unité, on aura la réſolution de l'équation propoſée, ſinon

Digitized by Google

on ſera aſſuré qu'elle n'admet aucune ſolution en nombres entiers. Ainſi le probleme préſent rentre dans le probleme III du §. II, & eſt ſuſceptible d'une ſolution ſemblable. Or comme l'on a ici $(2n)^2 - 4BC = 4A$, (art. 65), il faudra diſtinguer deux cas, ſuivant que A ſera poſitif ou négatif.

Premier Cas lorſque $n^2 - BC = A < 0$.

67. Suivant la méthode de l'art. 32 il faudra réduire en fraction continue la fraction $\frac{n}{c}$, priſe poſitivement; c'eſt ce qu'on exécutera par la regle de l'art. 4; enſuite on formera par les formules de l'art. 10 la ſérie des fractions convergentes vers $\frac{n}{c}$, & il n'y aura plus qu'à eſſayer ſucceſſivement les numérateurs de ces fractions pour le nombre y, & les dénominateurs correſpondans pour le nombre z; ſi la propoſée eſt réſoluble en nombres entiers, on trouvera de cette maniere les valeurs ſatisfaiſantes de y & z; & réciproquement on ſera aſſuré que la propoſée n'admet aucune ſolution en nombres entiers, ſi parmi les nombres qu'on

Digitized by Google

aura essayés il ne s'en trouve point de satisfaisans.

Second Cas lorsque $n^2 - BC = A > 0$.

68. On fera usage ici de la méthode de l'art. 33 & suiv. ainsi, à cause de $E = 4A$, on considérera d'abord la quantité, (article 39),

$$a = \frac{n \pm \sqrt{A}}{C},$$

dans laquelle il faudra déterminer les signes tant de la valeur de n, que nous avons vu pouvoir être également positive & négative, que de $\sqrt{A}$, en sorte qu'elle devienne positive ; ensuite on fera le calcul suivant :

$$Q^0 = -n, \quad P^0 = C, \quad \mu < \frac{-Q^0 \pm \sqrt{A}}{P^0}$$

$$Q^I = \mu P^0 + Q^0, \quad P^I = \frac{Q^2 - A}{P^0}, \quad \mu^I < \frac{-Q^I \mp \sqrt{A}}{P^I}$$

$$Q^{II} = \mu^I P^I + Q^I, \quad P^{II} = \frac{Q^2 - A}{P^I}, \quad \mu^{II} < \frac{-Q^{II} \pm \sqrt{A}}{P^{II}}$$

$$Q^{III} = \mu^{II} P^{II} + Q^{II}, \quad P^{III} = \frac{Q^2 - A}{P^{II}}, \quad \mu^{III} < \frac{-Q^{III} \mp \sqrt{A}}{P^{III}}$$

&c. &c. &c.

& on continuera seulement ces séries jusqu'à ce que deux termes correspondans de la

Digitized by Google

premiere & de la seconde série reparoissent ensemble ; alors, si parmi les termes de la seconde série P^0, P^1, P^{11} &c. il s'en trouve un égal à l'unité positive, ce terme donnera une solution de l'équation proposée, & les valeurs de y & z seront les termes correspondans des deux séries p^0, p^1, p^{11}, &c. & q^0, q^1, q^{11}, calculées par les formules de l'art. 25 ; sinon on en conclura sur le champ que la proposée n'est pas résoluble en nombres entiers. (*Voyez l'exemple de l'art. 40.*)

Troisieme Cas lorsque A = à un carré.

69. Dans ce cas le nombre $\sqrt{A}$ deviendra rationnel, & la quantité $Cy^2 - 2nyz + Bz^2$ pourra se décomposer en deux facteurs rationnels. En effet cette quantité n'est autre chose que celle-ci, $\frac{(Cy - nz)^2 - Az^2}{C}$, laquelle, en supposant $A = a^2$, peut se mettre sous cette forme,

$$\frac{(Cy \pm (n+a)z)(Cy \pm (n-a)z)}{C}.$$

Or comme $n^2 - a^2 = AC = (n+a)(n-a)$, il faudra que le produit de $n+a$ par $n-a$

Digitized by Google

soit divisible par C, & par conséquent que l'un de ces deux nombres $n+a$ & $n-a$ soit divisible par un des facteurs de C, & l'autre par le facteur réciproque ; supposons donc $C=bc$ & que $n+a=fb$, & $n-a=gc$, f & b étant des nombres entiers, & la quantité précédente deviendra le produit de ces deux facteurs linéaires, $cy\pm fz$ & $by\pm gz$; donc, puisque ces deux facteurs sont égaux à des nombres entiers, il est clair que leur produit ne sauroit être $=1$, comme l'équation proposée le demande, à moins que chacun d'eux ne soit en particulier $=\pm 1$; on fera donc $cy\pm fz=\pm 1$ & $by\pm gz=\pm 1$, & on déterminera par-là les nombres y & z ; si ces nombres se trouvent entiers, on aura la solution de l'équation proposée, sinon elle sera insoluble au moins en nombres entiers.

SECONDE MÉTHODE.

70. Qu'on pratique sur la formule $Cy^2-2nyz+Bz^2$ des transformations semblables à celles dont nous avons fait usage plus

Digitized by Google

haut, (art. 54), & je dis qu'on pourra toujours parvenir à une transformée, telle que

$$L\xi^2 - 2M\xi\psi + N\psi^2,$$

les nombres L, M, N étant des nombres entiers dépendans des nombres donnés C, B, n, en ſorte que l'on ait $M^2 - LN = n^2 - CB = A$, & que de plus $2M$ ne ſoit pas plus grand, (abſtraction faite des ſignes), que le nombre L, ni que le nombre N, les nombres ξ & ψ ſeront auſſi des nombres entiers, mais dépendans des nombres indéterminés y & z.

En effet ſoit, par exemple, C moindre que B, & qu'on mette la formule dont il s'agit ſous cette forme

$$B'y^2 - 2nyy' + By'^2,$$

en faiſant $C = B'$ & $z = y'$; ſi $2n$ n'eſt pas plus grand que B', il eſt clair que cette formule aura déjà d'elle-même les conditions requiſes; mais ſi $2n$ eſt plus grand que B', alors on ſuppoſera $y = my' + y''$, & ſubſtituant on aura la transformée

Digitized by Google

$$B^{I}y^{II2} - 2n^{I}y^{II}y^{I} + B^{II}y^{I2},$$

où $n^{I} = n - mB^{I}$,

$$B^{II} = m^{2}B^{I} - 2mn + B = \frac{n^{I2} - A}{B^{I}}.$$

Or comme le nombre m est indéterminé, on pourra, en le supposant entier, le prendre tel que le nombre $n - mB^{I}$ ne soit pas plus grand que $\frac{1}{2}B^{I}$; alors $2n^{I}$ ne surpassera pas B^{I}. Ainsi, si $2n^{I}$ ne surpasse pas non plus B^{II}, la transformée précédente sera déjà dans le cas qu'on a en vue; mais si $2n^{I}$ est plus grand que B^{II}, on continuera alors à supposer $y^{I} = my^{II} + y^{III}$, ce qui donnera la nouvelle transformée

$$B^{III}y^{II2} - 2n^{II}y^{II}y^{III} + B^{II}y^{III2},$$

où $n^{II} = +n^{I} - m^{I}B^{II}$,

$$B^{III} = m^{I2}B^{II} - 2m^{I}n^{I} + B^{I} = \frac{n^{II2} - A}{B^{II}}.$$

On déterminera le nombre entier m^{I}, en sorte que $n^{I} - m^{I}B^{II}$ ne soit pas plus grand que $\frac{B^{II}}{2}$, moyennant quoi $2n^{II}$ ne surpassera pas B^{II}; de sorte que l'on aura

Digitized by Google

la transformée cherchée, si $2n''$ ne surpasse pas non plus B''', mais si $2n''$ surpasse B''', on supposera de nouveau $y''=m''y'''+y^{IV}$ &c. &c.

Or il est visible que ces opérations ne peuvent pas aller à l'infini; car puisque $2n$ est plus grand que B' & que $2n'$ ne l'est pas, il est clair que n' sera moindre que n; de même $2n'$ est plus grand que B'', & $2n''$ ne l'est pas; donc n'' sera moindre que n', & ainsi de suite; de sorte que les nombres n, n', n'' &c. formeront une suite décroissante de nombres entiers, laquelle ne pourra par conséquent pas aller à l'infini. On parviendra donc nécessairement à une formule où le coefficient du terme moyen ne sera pas plus grand que ceux des deux termes extrêmes, & qui aura d'ailleurs les autres propriétés que nous avons énoncées ci-dessus; ce qui est évident par la nature même des transformations pratiquées.

Pour faciliter la transformation de la formule

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2$$

Digitized by Google

en celle-ci,

$$L\xi^2 - 2M\xi\psi + N\psi^2,$$

je désigne par D le plus grand des deux coefficiens extrêmes C & B, & par D^{I} l'autre coefficient; &, *vice versâ*, je désigne par θ la variable dont le carré se trouvera multiplié par D^{I} & par θ^{I} l'autre variable; en sorte que la formule proposée prenne cette forme

$$D^{\text{I}}\theta^2 - 2n\theta\theta^{\text{I}} + D^{\text{I}}\theta^{\text{I}2},$$

où D^{I} soit moindre que D; ensuite je n'aurai qu'à faire le calcul suivant:

$$m = \frac{n}{D^{\text{I}}},\quad n^{\text{I}} = n - mD^{\text{I}}\quad D^{\text{II}} = \frac{n^2 - A}{D^{\text{I}}},\quad \theta = m\theta^{\text{I}} + \theta^{\text{II}}$$

$$m^{\text{I}} = \frac{n^{\text{I}}}{D^{\text{II}}},\quad n^{\text{II}} = n^{\text{I}} - m^{\text{I}}D^{\text{II}}\quad D^{\text{III}} = \frac{n^{\text{II}2} - A}{D^{\text{II}}},\quad \theta^{\text{I}} = m^{\text{I}}\theta^{\text{II}} + \theta^{\text{III}}$$

$$m^{\text{II}} = \frac{n^{\text{II}}}{D^{\text{III}}},\quad n^{\text{III}} = n^{\text{II}} - m^{\text{II}}D^{\text{III}}\quad D^{\text{IV}} = \frac{n^{\text{III}2} - A}{D^{\text{III}}},\quad \theta^{\text{II}} = m^{\text{II}}\theta^{\text{III}} + \theta^{\text{IV}}$$

&c. &c. &c.

où il faut bien remarquer que le signe $=$, qui est mis après les lettres m, m^{I}, m^{II} *&c.* n'indique pas une égalité parfaite, mais seulement une égalité aussi approchée qu'il est possible,

Digitized by Google

poſſible, en tant qu'on n'entend par m, m', m'' &c. que des nombres entiers. Je n'ai employé ce ſigne $=$ que faute d'un autre ſigne convenable.

Ces opérations doivent être continuées juſqu'à ce que dans la ſérie n, n', n'' &c. on trouve un terme comme n^t, qui, (abſtraction faite du ſigne), ne ſurpaſſe pas la moitié du terme correſpondant D^t de la ſérie D', D'', D''' &c. non plus que la moitié du terme ſuivant D^{t+1}. Alors on pourra faire $D^t = L$, $n^t = N$, $D^{t+1} = M$, & $\theta^t = \Psi$, $\theta^{t+1} = \xi$, ou bien $D^t = M$, $D^{t+1} = L$ & $\theta^t = \xi$, $\theta^{t+1} = \Psi$. Nous ſuppoſerons toujours dans la ſuite qu'on ait pris pour M le plus petit des deux nombres D^t, D^{t+1}.

71. L'équation $Cy^2 - 2nyz + Dz^2 = 1$ ſera donc réduite à celle-ci,

$$L\xi^2 - 2N\xi\Psi + M\Psi^2 = 1,$$

où $N^2 - LM = A$, & où $2N$ n'eſt ni $> L$ ni $> M$, (abſtraction faite des ſignes). Or, M étant le plus petit des deux coefficiens L & M, qu'on multiplie toute l'équation par ce coefficient M, & faiſant

Digitized by Google

$$v = M\Psi - N\xi,$$

il eſt clair qu'elle ſe changera en celle-ci,

$$v^2 - A\xi^2 = M,$$

dans laquelle il faudra maintenant diſtinguer les deux cas de A poſitif & de A négatif.

Soit 1°. A négatif & $= -a$, a étant un nombre poſitif, l'équation ſera donc $v^2 + a\xi^2 = M$. Or, comme $N^2 - LM = A$, on aura $a = LM - N^2$; d'où l'on voit d'abord que les nombres L & M doivent être de mêmes ſignes; d'ailleurs $2N$ ne doit être ni $> L$ ni $> M$; donc N^2 ne ſera pas $> \frac{LM}{4}$; donc $a =$ ou $> \frac{3}{4} LM$; & puiſque M eſt ſuppoſé moindre que L, ou au moins pas plus grand que L, on aura à plus forte raiſon $a =$ ou $> \frac{3}{4} M^2$; donc $M =$ ou $< \sqrt{\frac{4a}{3}}$; donc, $M < \frac{4}{3}\sqrt{a}$.

On voit par-là que l'équation $v^2 + a\xi^2 = M$ ne ſauroit ſubſiſter dans l'hypotheſe que v & ξ ſoient des nombres entiers, à moins que l'on ne faſſe $\xi = 0$ & $v^2 = M$, ce qui demande que M ſoit un nombre carré.

Digitized by Google

Suppoſons donc $M=\mu^2$, & l'on aura $\xi=0$, $\upsilon=\pm\mu$; donc par l'équation $\upsilon=M\Psi-N\xi$, on aura $\mu^2\Psi=\pm\mu$, & par conſéquent $\Psi=\pm\frac{1}{\mu}$; de ſorte que Ψ ne ſauroit être un nombre entier, comme il le doit, (*hyp.*) à moins que μ ne ſoit égal à l'unité, ſoit $=\pm 1$, & par conſéquent $M=1$.

De-là je tire donc cette conſéquence, que l'équation propoſée ne ſauroit être réſoluble en nombres entiers, à moins que M ne ſe trouve égal à l'unité poſitive. Si cette condition a lieu, alors on fera $\xi=0$, $\Psi=\pm 1$, & on remontera de ces valeurs à celles de y & z.

Cette méthode revient pour le fond au même que celle de l'art. 67, mais elle a ſur celle-là l'avantage de n'exiger aucun tâtonnement.

2°. Soit maintenant A un nombre poſitif, on aura $A=N^2-LM$; or comme N^2 ne peut pas être plus grand que $\frac{LM}{4}$, il eſt clair que l'équation ne pourra ſubſiſter, à moins que $-LM$ ne ſoit un nombre poſitif, c'eſt-à-dire que L & M ne ſoient de

Digitized by Google

ſignes différens. Ainſi A ſera néceſſairement $< -LM$, ou tout au plus $= -LM$, ſi $N = 0$; de ſorte qu'on aura $-LM =$ ou $< A$, & par conſéquent $M^2 =$ ou $< A$, ou $M =$ ou $< \sqrt{A}$.

Le cas de $M = \sqrt{A}$ ne peut avoir lieu que lorſque A eſt un carré; par conſéquent ce cas eſt très-facile à réſoudre par la méthode donnée plus haut, (art. 69).

Reſte donc le cas où A n'eſt pas carré, & dans lequel on aura néceſſairement $M < \sqrt{A}$, (abſtraction faite du ſigne de M); alors l'équation $v^2 - A\xi^2 = M$ ſera dans le cas du théoreme de l'art. 38, & ſe réſoudra par conſéquent par la méthode que nous y avons indiquée.

Ainſi il n'y aura qu'à faire le calcul ſuivant,

$$Q^0 = 0, \qquad P^0 = 1, \qquad \mu < \sqrt{A}$$

$$Q^I = \mu, \qquad P^I = Q^2 - A, \mu^I < \frac{-Q^I - \sqrt{A}}{P^I}$$

$$Q^{II} = \mu^I P^I + Q^I, \quad P^{II} = \frac{Q^2 - A}{P^I}, \mu^{II} < \frac{-Q^{II} + \sqrt{A}}{P^{II}}$$

$$Q^{III} = \mu^{II} P^{II} + Q^{II}, \quad P^{III} = \frac{Q^2 - A}{P^{II}}, \mu^{III} < \frac{-Q^{III} - \sqrt{A}}{P^{III}}$$

&c. &c. &c.

Digitized by Google

qu'on continuera jusqu'à ce que deux termes correspondans de la premiere & de la seconde série reparoissent ensemble, ou bien jusqu'à ce que dans la série P', P'', P''' &c. il se trouve un terme égal à l'unité positive, c'est-à-dire $= P^0$; car alors tous les termes suivans reviendront dans le même ordre dans chacune des trois séries, (article 37). Si dans la série P', P'', P''' &c. il se trouve un terme égal à M, on aura la résolution de l'équation proposée; car il n'y aura qu'à prendre pour υ & ξ les termes correspondans des séries p', p'', p''' &c. q', q'', q''' &c. calculées d'après les formules de l'art. 25; & même on pourra trouver une infinité de valeurs satisfaisantes de υ & ξ, en continuant à l'infini les mêmes séries.

Or dès qu'on connoîtra deux valeurs de υ & ξ, on aura, par l'équation $\upsilon = M\Psi - N\xi$, celle de Ψ, laquelle sera aussi toujours égale à un nombre entier; ensuite on pourra remonter de ces valeurs de ξ & Ψ, c'est-à-dire de $\theta^{\prime+1}$ & θ', à celles de θ & θ', ou bien de y & z, (art. 70).

Digitized by Google

Mais si dans la série P', P'', P''' &c. il n'y a aucun terme qui soit $= M$, on en conclura hardiment que l'équation proposée n'admet aucune solution en nombres entiers.

Il est bon de remarquer que comme la série P°, P', P'' &c. ainsi que les deux autres, Q°, Q', Q'' &c. & μ, μ', μ'', &c. ne dépendent que du nombre A; le calcul une fois fait pour une valeur donnée de A servira pour toutes les équations où A, c'est-à-dire $n^2 - CB$, aura la même valeur; & c'est en quoi la méthode précédente est préférable à celle de l'art. 68, qui exige un nouveau calcul pour chaque équation.

Au reste tant que A ne passera pas 100, on pourra faire usage de la table que nous avons donnée à l'art. 41, laquelle contient pour chaque radical $\sqrt{A}$, les valeurs des termes des deux séries P°, $-P'$, P'', $-P'''$ &c. & μ, μ', μ'', μ''' &c. continues, jusqu'à ce que l'un des termes P', P'', P''' &c. devienne $= 1$, après quoi tous les termes suivans de l'une & de l'autre série

Digitized by Google

reviennent dans le même ordre. De ſorte qu'on pourra juger ſur le champ, par le moyen de cette table, de la réſolubilité de l'équation $v^2 - A\xi^2 = M$.

De la maniere de trouver toutes les ſolutions poſſibles de l'Equation

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1,$$

lorſqu'on n'en connoît qu'une ſeule.

72. Quoique par les méthodes que nous venons de donner on puiſſe trouver ſucceſſivement toutes les ſolutions de cette équation, lorſqu'elle eſt réſoluble en nombres entiers, cependant on peut parvenir à cet objet d'une maniere encore plus ſimple que voici:

Qu'on nomme p & q les valeurs trouvées de y & z, en ſorte que l'on ait

$$Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1,$$

& qu'on prenne deux autres nombres entiers r & $ſ$, tels que $pſ - qr = 1$, (ce qui eſt toujours poſſible, à cauſe que p & q ſont néceſſairement premiers entr'eux), qu'on ſuppoſe enſuite

Digitized by Google

$$y=pt+ru, \text{ \& } z=qt+su,$$

t & u étant deux nouvelles indéterminées; ſubſtituant ces expreſſions dans l'équation

$$Cy^2-2nyz+Bz^2=1,$$

& faiſant pour abréger

$$P=Cp^2-2npq+Bq^2,$$
$$Q=Cpr-n(ps+qr)+Bqs,$$
$$R=Cr^2-2nrs+Bs^2,$$

on aura cette transformée,

$$Pt^2+2Qtu+Ru^2=1.$$

Or on a, (*hyp.*), $P=1$; de plus ſi on nomme ρ & σ deux valeurs de r & s qui ſatisfaſſent à l'équation $ps-qr=1$, on aura en général, (art. 42),

$$r=\rho+mp, s=\sigma+mq,$$

m étant un nombre quelconque entier; donc mettant ces valeurs dans l'expreſſion de Q, elle deviendra

$$Q=C\rho\rho-n(p\sigma+q\rho)+Bq\sigma+mP;$$

de ſorte que comme $P=1$, on pourra rendre $Q=0$, en prenant

$$m=-C\rho\rho+n(p\sigma+q\rho)-Bq\sigma.$$

Maintenant je remarque que la valeur de Q^2-PR ſe réduit, (après les ſubſtitu-

Digitized by Google

tions & les réductions), à celle-ci, $(n^2-CB)(p\zeta-qr)^2$; de sorte que comme $p\zeta-qr=1$, on aura $Q^2-PR=n^2-CB=A$; donc faisant $P=1$ & $Q=0$, il viendra $-R=A$, savoir $R=-A$; ainsi l'équation transformée ci-dessus se changera en celle-ci, $t^2-Au^2=1$; or comme y, ζ, p, q, r & ζ sont par l'hypothese des nombres entiers, il est facile de voir que t & u seront aussi des nombres entiers; car, en tirant leurs valeurs des équations $y=pt+ru$ & $\zeta=qt+\zeta u$, on a $t=\frac{\zeta y-r\zeta}{p\zeta-qr}$, & $u=\frac{qy-p\zeta}{qr-p\zeta}$, c'est-à-dire, à cause de $p\zeta-qr=1$, $t=\zeta y-r\zeta$, $u=p\zeta-qy$.

Il n'y aura donc qu'à résoudre en nombres entiers l'équation

$$t^2-Au^2=1,$$

& chaque valeur de t & de u donnera de nouvelles valeurs de y & ζ.

En effet, substituant dans les valeurs générales de r & ζ la valeur du nombre m trouvée ci-dessus, on aura

$$r=\rho(1-C\rho^2)-B\rho q\sigma+np(p\sigma+q\rho),$$
$$\zeta=\sigma(1-Bq^2)-C\rho q\rho+nq(p\sigma+q\rho),$$

Digitized by Google

ou bien, à cauſe de $Cp^2-2npq+Bq^2=1$,

$r=(Bq-np)(q\rho-p\sigma)=-Bq+np$,

$f=(Cp-nq)(p\sigma-q\rho)=Cp-nq$.

Donc mettant ces valeurs de r & f dans les expreſſions ci-deſſus de y & z, on aura en général

$$y=pt-(Bq-np)u,$$
$$z=qt+(Cp-nq)u.$$

73. Tout ſe réduit donc à réſoudre l'équation $t^2-Au^2=1$.

Or, 1°. ſi A eſt un nombre négatif, il eſt viſible que cette équation ne ſauroit ſubſiſter en nombres entiers, qu'en faiſant $u=0$ & $t=1$, ce qui donneroit $y=p$ & $z=q$. D'où l'on peut conclure que dans le cas où A eſt un nombre poſitif, l'équation propoſée, $Cy^2-2nyz+Bz^2=1$, ne peut jamais admettre qu'une ſeule ſolution en nombres entiers.

Il en ſeroit de même, ſi A étoit un nombre poſitif carré; car faiſant $A=a^2$, on auroit $(t+au)(t-au)=1$; donc $t+au=\pm 1$, & $t-au=\pm 1$; donc $2au=0$; donc $u=0$, & par conſéquent $t=\pm 1$.

Digitized by Google

2°. Mais si A est un nombre positif non-carré, alors l'équation $t^2 - Au^2 = 1$ est toujours susceptible d'une infinité de solutions en nombres entiers, (art. 37), qu'on peut trouver toutes par les formules données ci-dessus, (art. 71, n°. 2); mais il suffira de trouver les plus petites valeurs de t & u, & pour cela, dès que l'on sera parvenu, dans la série P', P'', P''' &c. à un terme égal à l'unité, il n'y aura qu'à calculer par les formules de l'art. 25 les termes correspondans des deux séries p', p'', p''' &c. & q', q'', q''' &c. ce seront les valeurs cherchées de t & u. D'où l'on voit que le même calcul qu'on aura fait pour la résolution de l'équation $v^2 - A\xi^2 = M$, servira aussi pour celle de l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Au reste, tant que A ne passe pas 100, on a les plus petites valeurs de t & u toutes calculées dans la table qui est à la fin du chap. VII du traité préc. & dans laquelle les nombres a, m, n sont les mêmes que ceux que nous appellons ici A, t & u.

74. Désignons par t', u' les plus petites

Digitized by Google

valeurs de t, u dans l'équation $t^2 - Au^2 = 1$; & de même que ces valeurs peuvent servir à trouver de nouvelles valeurs de y & z dans l'équation $Cy^2 - 2yz + Bz^2 = 1$, de même aussi elles pourront servir à trouver de nouvelles valeurs de t & u dans l'équation $t^2 - Au^2 = 1$, qui n'est qu'un cas particulier de celle-là. Pour cela il n'y aura qu'à supposer $C = 1$ & $n = 0$, ce qui donne $-B = A$, & prendre ensuite t, u à la place de y, z, & t', u' à la place de p, q. Faisant donc ces substitutions dans les expressions générales de y & z de l'art. 72, & mettant de plus T, V à la place de t, u, on aura en général

$$t = Tt' + AVu',$$
$$u = Tu' + Vt',$$

& pour la détermination de T & V l'équation $T^2 - AV^2 = 1$, qui est semblable à la proposée.

Ainsi on pourra supposer $T = t'$, & $V = u'$, ce qui donnera

$$t = t'^2 + Au'^2, \quad u = t'u' + t'u'.$$

Digitized by Google

Nommant donc t'', u'' les ſecondes valeurs de t & u, on aura

$$t''=t'^2+Au'^2,\quad u''=2t'u'.$$

Maintenant il eſt clair qu'on peut prendre ces nouvelles valeurs t'', u'' à la place des premieres t', u'; ainſi l'on aura

$$t=Tt''+AVu'',$$
$$u=Tu''+Vt'',$$

où l'on peut ſuppoſer de nouveau $T=t'$, $V=u'$, ce qui donnera

$$t=t't''+Au'u'',\quad u=t'u''+u't''.$$

Ainſi on aura de nouvelles valeurs de t & u, leſquelles ſeront

$$t'''=t't''+Au'u''=t'(t'^2+3Au'^2),$$
$$u'''=t'u''+u't''=u'(3t'^2+Au'^2),$$

& ainſi de ſuite.

75. La méthode précédente ne fait trouver que ſucceſſivement les valeurs t'', t''' &c. u'', u''' &c. voyons maintenant comment on peut généraliſer cette recherche. On a d'abord

$$t=Tt'+AVu',\quad u=Tu'+Vt';$$

d'où je tire cette combinaiſon,

Digitized by Google

$t \pm u\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})(T \pm V\sqrt{A})$;

donc ſuppoſant $T = t'$ & $V = u'$, on aura

$$t'' \pm u''\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^2.$$

Qu'on mette à préſent ces valeurs de t'' & u'' à la place de celles de t' & u', l'on aura

$$t \pm u\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^2 (T \pm V\sqrt{A}),$$

où faiſant de nouveau $T = t'$ & $u = u'$, & nommant t''', u''' les valeurs réſultantes de t & u, il viendra

$$t''' \pm u'''\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^3.$$

On trouvera de même

$$t^{IV} \pm u^{IV}\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^4,$$

& ainſi de ſuite.

Donc, ſi pour plus de ſimplicité on nomme maintenant T & V les premieres & plus petites valeurs de t, u, que nous avons nommées ci-deſſus t', u', on aura en général

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^m,$$

m étant un nombre quelconque entier poſitif; d'où l'on tire à cauſe de l'ambiguité des ſignes

Digitized by Google

$$t = \frac{(T+V\sqrt{A})^m + (T-V\sqrt{A})^m}{2}$$

$$u = \frac{(T+V\sqrt{A})^m - (T-V\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}.$$

Quoique ces expreſſions paroiſſent ſous une forme irrationnelle, cependant il eſt aiſé de voir qu'elles deviendront rationnelles, en développant les puiſſances de $T \pm V\sqrt{A}$; car on a, comme l'on ſait,

$$(T \pm V\sqrt{A})^m = T^m \pm mT^{m-1}V\sqrt{A} + \frac{m(m-1)}{2}T^{m-2}V^2A + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}T^{m-3}V^3A\sqrt{A} +, \&c.$$

Donc

$$t = T^m + \frac{m(m-1)}{2}AT^{m-2}V^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}A^2T^{m-4}V^4 +, \&c.$$

$$u = mT^{m-1}V + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}AT^{m-3}V^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^2T^{m-5}V^5 +, \&c.$$

où l'on pourra prendre pour m des nombres quelconques entiers poſitifs.

Il eſt clair qu'en faiſant ſucceſſivement $m = 1, 2, 3, 4$ &c. on aura des valeurs de t & u, qui iront en augmentant.

Or je vais prouver que l'on aura de cette

Digitized by Google

maniere toutes les valeurs poſſibles de t & u, pourvu que T & V en ſoient les plus petites. Pour cela il ſuffit de prouver qu'entre les valeurs de t & u qui répondent à un nombre quelconque m, & celles qui répondroient au nombre ſuivant $m+1$, il eſt impoſſible qu'il ſe trouve des valeurs intermédiaires qui puiſſent ſatisfaire à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Prenons, par exemple, les valeurs t^{III}, u^{III}, qui réſultent de la ſuppoſition de $m=3$, & les valeurs t^{IV}, u^{IV}, qui réſultent de la ſuppoſition $m=4$, & ſoient, s'il eſt poſſible, d'autres valeurs intermédiaires θ & v, qui ſatisfaſſent auſſi à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Puiſque l'on a $t^{III2} - Au^{III2} = 1$, $t^{IV2} - Au^{IV2} = 1$ & $\theta^2 - Av^2 = 1$, on aura $\theta^2 - t^{III2} = A(v^2 - u^{III2})$ & $t^{IV2} - \theta^2 = A(u^{IV2} - v^2)$, d'où l'on voit que ſi $\theta > t^{III}$ & $< t^{IV}$, on aura auſſi $v > u^{III}$ & $< u^{IV}$. De plus on aura auſſi ces autres valeurs de t & u, ſavoir $t = \theta t^{IV} - Avu^{IV}$, $u = \theta u^{IV} - vt^{IV}$, qui ſatisferont à la même équation $t^2 - Au^2 = 1$; car en les y ſubſtituant,

Digitized by Google

tuant, on auroit $(\theta t^{IV} - A\upsilon u^{IV})^2 - A(\upsilon t^{IV} - \theta u^{IV})^2 = (\theta^2 - A\upsilon^2)(t^{IV2} - Au^{IV2}) = 1$, équation identique, à cause de $\theta^2 - A\upsilon^2 = 1$, & $t^{IV2} - Au^{IV2} = 1$, (*hyp.*). Or ces deux dernieres équations donnent $\theta - \upsilon\sqrt{A} = \frac{1}{\theta + \upsilon\sqrt{A}}$ & $t^{IV} - u^{IV}\sqrt{A} = \frac{1}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}}$; donc mettant, dans l'expression de $u = \theta u^{IV} - \upsilon t^{IV}$, à la place de θ, $\upsilon\sqrt{A} + \frac{1}{\theta + \upsilon\sqrt{A}}$, & à la place de t^{IV}, $u^{IV}\sqrt{A} + \frac{1}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}}$, on aura

$$u = \frac{u^{IV}}{\theta + \upsilon\sqrt{A}} - \frac{\upsilon}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}};$$

de même, si on considere la quantité $t^{III} u^{IV} - u^{III} t^{IV}$, elle pourra aussi, à cause de $t^{III2} - Au^{III2} = 1$, se mettre sous la forme

$$\frac{u^{IV}}{t^{III} + u^{III}\sqrt{A}} - \frac{u^{III}}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}}.$$

Or il est facile de voir que la quantité précédente doit être plus petite que celle-ci, à cause de $\theta > t^{III}$ & $\upsilon > u^{III}$; donc on aura une valeur de u, qui sera moindre

Digitized by Google

que la quantité $t^{III}u^{IV} - u^{III}t^{IV}$; mais cette quantité est égale à V; car

$$t^{III} = \frac{(T+V\sqrt{A})^3 + (T-V\sqrt{A})^3}{2},$$

$$t^{IV} = \frac{(T+V\sqrt{A})^4 + (T-V\sqrt{A})^4}{2},$$

$$u^{III} = \frac{(T+V\sqrt{A})^3 - (T-V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}},$$

$$u^{IV} = \frac{(T+V\sqrt{A})^4 - (T-V\sqrt{A})^4}{2\sqrt{A}};$$

d'où $t^{III}u^{IV} - t^{IV}u^{III} =$

$$\frac{(T-V\sqrt{A})^3(T+V\sqrt{A})^4 - (T-V\sqrt{A})^4(T+V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}}$$

de plus

$(T-V\sqrt{A})^3(T+V\sqrt{A})^3 = (T^2-AV^2)^3 = 1$, puisque $T^2 - AV^2 = 1$, (*hypoth.*); donc $(T-V\sqrt{A})^3 \times (T+V\sqrt{A})^4 = T+V\sqrt{A}$, & $(T-V\sqrt{A})^4(T+V\sqrt{A})^3 = T-V\sqrt{A}$; de sorte que la valeur de $t^{III}u^{IV} - u^{III}t^{IV}$ se réduira à $\frac{2V\sqrt{A}}{2\sqrt{A}} = V$.

Il s'ensuivroit donc de-là qu'on auroit une valeur de $u < V$, ce qui est contre l'hypothese, puisque V est supposé la plus petite valeur possible de u. Donc il ne

Digitized by Google

ſauroit y avoir de valeurs de t & u intermédiaires entre celles-ci, t^{III}, t^{IV} & u^{III}, u^{IV}. Et comme ce raiſonnement peut s'appliquer en général à toutes valeurs de t & u qui réſulteroient des formules ci-deſſus, en y faiſant m égal à un nombre entier quelconque, on en peut conclure que ces formules renferment effectivement toutes les valeurs poſſibles de t & u.

Au reſte il eſt inutile de remarquer que les valeurs de t & de u peuvent être également poſitives ou négatives; car cela eſt viſible par l'équation même $t^2 - Au^2 = 1$.

De la maniere de trouver toutes les ſolutions poſſibles, en nombres entiers, des Equations indéterminées du ſecond degré à deux inconnues.

76. Les méthodes que nous venons d'expoſer ſuffiſent pour la réſolution complette des équations de la forme $Ay^2 + B = x^2$; mais il peut arriver qu'on ait à réſoudre des équations du ſecond degré d'une forme plus compoſée; c'eſt pourquoi nous croyons

Digitized by Google

devoir montrer comment il faudra s'y prendre.

Soit proposée l'équation

$$ar^2+brf+cf^2+dr+ef+f=0,$$

où a, b, c, d, e, f soient des nombres entiers donnés, & où r & f soient deux inconnues qui doivent être aussi des nombres entiers.

J'aurai d'abord, par la résolution ordinaire,

$$2ar+bf+d$$
$$=\sqrt{((bf+d)^2-4a(cf^2+ef+d))},$$

d'où l'on voit que la difficulté se réduit à faire en sorte que

$$(bf+d)^2-4a(cf^2+ef+d)$$

soit un carré.

Supposons pour plus de simplicité

$$b^2-4ac=A,$$
$$bd-2ae=g,$$
$$d^2-4af=h,$$

& il faudra que $Af^2+2gf+h$ soit un carré; supposons ce carré $=y^2$, en sorte que l'on ait l'équation

$$Af^2+2gf+h=y^2,$$

Digitized by Google

& tirant la valeur de f, on aura

$$Af+g=\sqrt{(Ay^2+g^2-Ah)};$$

de sorte qu'il ne s'agira plus que de rendre carrée la formule Ay^2+g^2-Ah.

Donc si on fait encore

$$g^2-Ah=B,$$

on aura à rendre rationnel le radical

$$\sqrt{(Ay^2+B)};$$

c'est à quoi on parviendra par les méthodes données.

Soit $\sqrt{(Ay^2+B)}=x$, en sorte que l'équation à résoudre soit

$$Ay^2+B=x^2,$$

l'on aura donc $Af+g=\pm x$; d'ailleurs on a déjà $2ar+bf+d=\pm y$; ainsi dès qu'on aura trouvé les valeurs de x & y, on aura celles de r & f par les deux équations

$$f=\frac{\pm x-g}{A},$$

$$r=\frac{\pm y-d-bf}{2a}.$$

Or comme r & f doivent être des nombres entiers, il est visible qu'il faudra 1°. que x & y soient des nombres entiers aussi; 2°. que $\pm x-g$ soit divisible par A, &

Digitized by Google

qu'enſuite $\pm v - d - bf$ le ſoit par 2*a*. Ainſi, après avoir trouvé toutes les valeurs poſſibles de x & y en nombres entiers, il reſtera encore à trouver parmi ces valeurs, celles qui pourront rendre r & f des nombres entiers.

Si A eſt un nombre négatif ou un nombre poſitif carré, nous avons vu que le nombre des ſolutions poſſibles en nombres entiers eſt toujours limité; de ſorte que dans ces cas il n'y aura qu'à eſſayer ſucceſſivement pour x & y les valeurs trouvées, & ſi l'on n'en rencontre aucune qui donne pour r & f des nombres entiers, on en conclura que l'équation propoſée n'admet point de ſolution de cette eſpece.

La difficulté ne tombe donc que ſur le cas où A eſt un nombre poſitif non-carré, dans lequel on a vu que le nombre des ſolutions poſſibles en entiers peut être infini; comme l'on auroit dans ce cas un nombre infini de valeurs à eſſayer, on ne pourroit jamais bien juger de la réſolubilité de l'équation propoſée, à moins d'avoir une

Digitized by Google

regle qui réduiſe le tâtonnement entre certaines limites ; c'eſt ce que nous allons rechercher.

77. Puiſqu'on a, (art. 65), $x=ny-B\zeta$, &, (art. 72), $y=pt-(Bq-np)u$, & $\zeta=qt+(Cp-nq)u$, il eſt facile de voir que les expreſſions générales de r & s ſeront de cette forme,

$$r=\frac{\alpha t+\beta u+\gamma}{\delta},\quad s=\frac{\alpha' t+\beta' u+\gamma'}{\delta'},$$

α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' étant des nombres entiers connus, & t, u étant donnés par les formules de l'art. 75, dans leſquelles l'expoſant m peut être un nombre entier poſitif quelconque ; ainſi la queſtion ſe réduit à trouver quelle valeur on doit donner à m, pour que les valeurs de r & s ſoient des nombres entiers.

78. Je remarque d'abord qu'il eſt toujours poſſible de trouver une valeur de u qui ſoit diviſible par un nombre quelconque donné Δ ; car ſuppoſant $u=\Delta\omega$, l'équation $t^2-Au^2=1$ deviendra $t^2-A\Delta^2\omega^2=1$, laquelle eſt toujours réſoluble en nombres

Digitized by Google

entiers ; & l'on trouvera les plus petites valeurs de t & u, en faisant le même calcul qu'auparavant, mais en prenant $A\Delta^2$ à la place de A ; or, comme ces valeurs satisfont aussi à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$, elles seront nécessairement renfermées dans les formules de l'art. 75. Ainsi il y aura nécessairement une valeur de m qui rendra l'expression de u divisible par Δ.

Qu'on dénote cette valeur de m par μ, & je dis que si dans les expressions générales de t & u de l'article cité on fait $m = 2\mu$, la valeur de u sera divisible par Δ, & celle de t étant divisée par Δ donnera 1 pour reste.

Car si on désigne par T' & V' les valeurs de t & u, où $m = \mu$, & par T'' & V'' celles où $m = 2\mu$, on aura, (art. 75),
$T' \pm V'\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{\mu}$, &
$T'' \pm V''\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{2\mu}$; donc
$(T \pm V'\sqrt{A})^2 = (T'' \pm V''\sqrt{A})$,
c'est-à-dire en comparant la partie rationnelle du premier membre avec la rationnelle du second, & l'irrationnelle avec l'irrationnelle

Digitized by Google

$T^{11} = T^{2} + AV^{2}$, & $V^{11} = 2T^{1}V^{1}$;
donc, puiſque V^{1} eſt diviſible par Δ, V^{11} le ſera auſſi, & T^{11} laiſſera le même reſte que laiſſeroit T^{2}; mais on a $T^{2} - AV^{2} = 1$, (*hyp.*) donc $T^{2} - 1$ doit être diviſible par Δ & même par Δ^{2}, puiſque V^{2} l'eſt déjà; donc T^{2} & par conſéquent auſſi T^{11} étant diviſé par Δ, laiſſera le reſte 1.

Maintenant je dis que les valeurs de t & u qui répondent à un expoſant quelconque m, étant diviſées par Δ, laiſſeront les mêmes reſtes que les valeurs de t & u, qui répondroient à l'expoſant $m + 2\mu$. Car déſignant ces dernieres par θ & υ, on aura

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{m},$$
& $$\theta \pm \upsilon\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{m+2\mu};$$
donc
$$\theta \pm \upsilon\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$
mais nous venons de trouver ci-deſſus
$$T^{11} \pm V^{11}\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$
donc on aura
$$\theta \pm \upsilon\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T^{11} \pm V^{11}\sqrt{A}),$$
d'où l'on tire, en faiſant la multiplication

Digitized by Google

& comparant enſuite les parties rationnelles enſemble & les irrationnelles enſemble,

$$\theta = tT'' + AuV'', \quad \upsilon = tV'' + uT''.$$

Or V'' eſt diviſible par Δ, & T'' laiſſe le reſte 1 ; donc θ laiſſera le même reſte que t, & υ le même reſte que u.

Donc en général les reſtes des valeurs de t & u répondantes aux expoſans $m+2\mu$, $m+4\mu$, $m+6\mu$, &c. ſeront les mêmes que ceux des valeurs qui répondent à l'expoſant quelconque m.

De-là on peut donc conclure que ſi l'on veut avoir les reſtes provenans de la diviſion des termes t', t'', t''' &c. & u', u'', u''' &c. qui répondent à $m = 1, 2, 3$ &c. par le nombre Δ, il ſuffira de trouver ces reſtes juſqu'aux termes $t^{2\mu}$ & $u^{2\mu}$ incluſivement ; car, après ces termes, les mêmes reſtes reviendront dans le même ordre, & ainſi de ſuite à l'infini.

Quant aux termes $t^{2\mu}$ & $u^{2\mu}$, auxquels on pourra s'arrêter, ce ſeront ceux dont l'un $u^{2\mu}$ ſera exactement diviſible par Δ, & dont l'autre $t^{2\mu}$ laiſſera l'unité pour reſte ;

Digitized by Google

ainſi il n'y aura qu'à pouſſer les diviſions juſqu'à ce qu'on parvienne aux reſtes 1 & 0; alors on ſera aſſuré que les termes ſuivans redonneront toujours les mêmes reſtes que l'on a déjà trouvés.

On pourroit auſſi trouver l'expoſant 2μ *à priori*; car il n'y auroit qu'à faire le calcul indiqué dans l'art. 71, n°. 2, premiérement pour le nombre A, & enſuite pour le nombre $A\Delta^2$; & ſi on nomme π le numéro du terme de la ſérie P^{I}, P^{II}, P^{III} *&c.* qui dans le premier cas ſera $=1$, & ρ le numéro du terme qui ſera $=1$ dans le ſecond cas, on n'aura qu'à chercher le plus petit multiple de π & de ρ, lequel étant diviſé par π, donnera la valeur cherchée de μ.

Ainſi ſi l'on a, par exemple, $A=6$ & $\Delta=3$, on trouvera dans la table de l'article 41 pour le radical $\sqrt{6}$, $P^{o}=1$, $P^{I}=-2$, $P^{II}=1$; donc $\pi=2$; enſuite on trouvera dans la même table pour le radical $\sqrt{(6.9)}=\sqrt{54}$, $P^{o}=1$, $P^{I}=-5$, $P^{II}=9$, $P^{III}=-2$, $P^{IV}=9$, $P^{V}=-5$, $P^{VI}=1$; donc $\rho=6$; or le plus petit mul-

Digitized by Google

tiple de 2 & 6 eſt 6, qui étant diviſé par 2 donne 3 pour quotient, de ſorte qu'on aura ici $\mu = 3$ & $2\mu = 6$.

Donc, pour avoir dans ce cas tous les reſtes de la diviſion des termes t', t'', t''' &c. & u', u'', u''' &c. par 3, il ſuffira de chercher ceux des ſix premiers termes de l'une & de l'autre ſérie; car les termes ſuivans redonneront toujours les mêmes reſtes, c'eſt-à-dire que les ſeptiemes termes donneront les mêmes reſtes que les premiers, les huitiemes les mêmes reſtes que les ſeconds, & ainſi de ſuite à l'infini.

Au reſte il peut arriver quelquefois que les termes t^{μ} & u^{μ} aient les mêmes propriétés que les termes $t^{2\mu}$ & $u^{2\mu}$, c'eſt-à-dire que u^{μ} ſoit diviſible par Δ, & que t^{μ} laiſſe l'unité pour reſte. Dans ces cas on pourra s'arrêter à ces mêmes termes; car les reſtes des termes ſuivans $t^{\mu+1}$, $t^{\mu+2}$ &c. $u^{\mu+1}$, $u^{\mu+2}$ &c. ſeront les mêmes que ceux des termes t', t'', &c. u', u'', &c. & ainſi des autres.

En général nous déſignerons par M la

plus petite valeur de l'exposant m, qui rendra $t-1$ & u divisibles par Δ.

79. Supposons maintenant que l'on ait une expression quelconque composée de t & u & de nombres entiers donnés, de maniere qu'elle représente toujours des nombres entiers, & qu'il s'agisse de trouver les valeurs qu'il faudroit donner à l'exposant m, pour que cette expression devînt divisible par un nombre quelconque donné Δ, il n'y aura qu'à faire successivement $m=1, 2, 3$ &c. jusqu'à M; & si aucune de ces suppositions ne rend l'expression proposée divisible par Δ, on en conclura hardiment qu'elle ne peut jamais le devenir, quelques valeurs qu'on donne à m.

Mais si l'on trouve de cette maniere une ou plusieurs valeurs de m qui rendent la proposée divisible par Δ, alors nommant N chacune de ces valeurs, toutes les valeurs possibles de m qui pourront faire le même effet, seront N, $N+M$, $N+2M$, $N+3M$ &c. & en général $N+\lambda M$, λ étant un nombre entier quelconque.

Digitized by Google

De même, si l'on avoit une autre expression composée de même de t, u & de nombres entiers donnés, laquelle dût être en même temps divisible par un autre nombre quelconque donné Δ', on chercheroit pareillement les valeurs convenables de M & de N, que nous désignerons ici par M' & N', & toutes les valeurs de l'exposant m qui pourront satisfaire à la condition proposée, seront renfermées dans la formule $N' + \lambda' M'$, λ' étant un nombre quelconque entier. Ainsi il n'y aura plus qu'à chercher les valeurs qu'on doit donner aux nombres entiers λ & λ', pour que l'on ait $N + \lambda M = N' + \lambda' M'$, savoir

$$M\lambda - M\lambda' = N' - N,$$

équation résoluble par la méthode de l'article 42.

Il est maintenant aisé de faire l'application de ce que nous venons de dire au cas de l'art. 77, où les expressions proposées sont de la forme $\alpha t + \beta u + \gamma$, $\alpha' t + \beta' u + \gamma'$, & les diviseurs sont δ & δ'.

Il faudra seulement se souvenir de prendre

Digitized by Google

les nombres t & u ſucceſſivement en *plus* & en *moins*, pour avoir tous les cas poſſibles.

REMARQUE.

80. Si l'équation propoſée à réſoudre en nombres entiers étoit de la forme

$$ar^2+2brf+cf^2=f,$$

on y pourroit appliquer immédiatement la méthode de l'art. 65 ; car 1°. il eſt viſible que r & f ne pourroient avoir un commun diviſeur, à moins que le nombre f ne fût en même temps diviſible par le carré de ce diviſeur ; de ſorte qu'on pourra toujours réduire la queſtion au cas où r & f ſeront premiers entr'eux. 2°. On voit auſſi que f & f ne pourroient avoir un commun diviſeur, à moins que ce diviſeur n'en fût un auſſi du nombre a, en ſuppoſant r premier à f ; ainſi on pourra réduire encore la queſtion au cas où f & f ſeront premiers entr'eux. (Voyez l'art. 64).

Or f étant ſuppoſé premier à f & à r, on pourra faire $r=nf-fz$, & il faudra,

Digitized by Google

pour que l'équation ſoit réſoluble en nombres entiers, qu'il y ait une valeur de n poſitive ou négative pas plus grande que $\frac{f}{2}$, laquelle rende la quantité $an^2+2bn+c$ diviſible par f. Cette valeur étant miſe à la place de n, toute l'équation deviendra diviſible par f, & ſe trouvera réduite au cas de celle de l'art. 66 & ſuiv.

Il eſt facile de voir que la même méthode peut ſervir à réduire toute équation de la forme

$ar^m+br^m\zeta+cr^{m-1}\zeta^2+$ &c. $+k\zeta^m=b$,

a, b, c &c. étant des nombres entiers donnés, & r & ζ deux indéterminées qui doivent être auſſi des nombres entiers, en une autre équation ſemblable, mais dans laquelle le terme tout connu ſoit l'unité, & alors on y pourra appliquer la méthode générale du §. II. Voy. la *remarque* de l'art. 30.

EXEMPLE I.

81. Soit propoſé de rendre rationnelle cette quantité,

$$\sqrt{(30+62\zeta-7\zeta^2)},$$

en

Digitized by Google

en ne prenant pour f que des nombres entiers ; on aura donc à réſoudre cette équation

$$30+62f-7f^2=y^2,$$

laquelle étant multipliée par 7, peut ſe mettre ſous cette forme,

$$7\cdot 30+(31)^2-(7f-31)^2=7y^2,$$

ou bien en faiſant $7f-31=x$, & tranſpoſant

$$x^2=1171-7y^2, \text{ ou } x^2+7y^2=1171.$$

Cette équation eſt donc maintenant dans le cas de l'article 64 ; de ſorte qu'on aura $A=-7$ & $B=1171$; d'où l'on voit d'abord que y & B doivent être premiers entr'eux, puiſque ce dernier nombre ne renferme aucun facteur carré.

On fera, ſuivant la méthode de l'art. 65, $x=ny-1171\zeta$, & il faudra, pour que l'équation ſoit réſoluble, que l'on puiſſe trouver pour n un nombre entier poſitif ou négatif non $>\frac{B}{2}$, c'eſt-à-dire non >580, tel que n^2-A ou n^2+7 ſoit diviſible par B ou par 1171.

Je trouve $n=\pm 321$, ce qui donne n^2+7

Digitized by Google

$=1171\times88$; ainſi je ſubſtitue dans l'équation précédente $\pm321y-1171z$ à la place de x, moyennant quoi elle ſe trouve toute diviſible par 1171, & la diviſion faite, elle devient $88y^2\mp642yz+1171z^2=1$.

Pour réſoudre cette équation je vais faire uſage de la ſeconde méthode expoſée dans l'art. 70, parce qu'elle eſt en effet plus ſimple & plus commode que la premiere. Or comme le coefficient de y^2 eſt plus petit que celui de z^2, j'aurai ici $D=1171$, $D'=88$ & $n=\pm321$; donc retenant pour plus de ſimplicité la lettre y à la place de θ, & mettant y' à la place de z, je ferai le calcul ſuivant, où je ſuppoſerai d'abord $n=321$:

$$m=\frac{321}{88}=4,\quad n'=321-4.88=-31,$$

$$m'=\frac{-31}{11}=-3,\quad n''=-31+3.11=2,$$

$$m''=\frac{2}{1}=2,\quad n'''=2-2.1=0,$$

$$D''=\frac{31^2+7}{88}=11,\quad y=4y'+y'',$$

$$D'''=\frac{4+7}{11}=1,\quad y'=-3y''+y''',$$

$$D^{IV}=\frac{7}{1}=7,\quad y''=2y'''+y^{IV}.$$

Digitized by Google

Puiſque $n^{III}=0$ & par conſéquent $<\frac{D^{III}}{2}$ & $<\frac{D^{IV}}{2}$, on s'arrêtera ici & on fera $D^{III}=M=1$, $D^{IV}=L=7$, $n^{III}=0=N$, & $y^{III}=\xi$, $y^{IV}=\Psi$, à cauſe que D^{III} eſt $<D^{IV}$.

Maintenant je remarque que A étant $=-7$, & par conſéquent négatif, il faut, pour la réſolubilité de l'équation, que l'on ait $M=1$; c'eſt ce que l'on vient de trouver; de ſorte qu'on en peut conclure d'abord que la réſolution eſt poſſible. On ſuppoſera donc $\xi=y^{III}=0$, $\Psi=y^{IV}=\pm 1$; & l'on aura, par les formules ci-deſſus, $y^{II}=\pm 1$, $y^{I}=\mp 3=7$, $y=\mp 12\pm 1=\mp 11$, les ſignes ambigus étant à volonté. Donc $x=321y-11717=\mp 18$, & conſéquemment $f=\frac{x+31}{7}=\frac{31\mp 18}{7}=\frac{13}{7}$, ou $=\frac{49}{7}=7$. Or comme on exige que la valeur de f ſoit égale à un nombre entier, on ne pourra prendre que $f=7$.

Il eſt remarquable que l'autre valeur de f, ſavoir $\frac{13}{7}$, quoique fractionnaire, donne

Digitized by Google

néanmoins un nombre entier pour la valeur du radical $\sqrt{(30+62f-7f^2)}$, & le même nombre 11 que donne la valeur $f=7$; de ſorte que ces deux valeurs de f ſeront les racines de l'équation $30+62f-7f^2=121$.

Nous avons ſuppoſé ci-deſſus $n=321$; or on peut faire également $n=-321$; mais il eſt facile de voir d'avance que tout le changement qui en réſultera dans les formules précédentes, c'eſt que les valeurs de m, m', m'', & de n', n'', changeront de ſigne, moyennant quoi les valeurs de y' & de y deviendront auſſi de différens ſignes, ce qui ne donnera aucun nouveau réſultat, puiſque ces valeurs ont déjà d'elles-mêmes le ſigne ambigu $\pm$.

Il en ſera de même dans tous les autres cas; de ſorte qu'on pourra toujours ſe diſpenſer de prendre ſucceſſivement la valeur de n en *plus* & en *moins*.

La valeur $f=7$ que nous venons de trouver, réſulte de la valeur de $n=\pm 321$; on pourroit trouver d'autres valeurs de f, ſi on trouvoit d'autres valeurs de n qui

Digitized by Google

eussent la condition requise ; mais comme le diviseur $B=1171$ est un nombre premier, il ne sauroit y avoir d'autres valeurs de n de la même qualité, comme nous l'avons démontré ailleurs, (*Mémoires de Berlin pour l'année 1767, pag. 194*), d'où il faut conclure que le nombre 7 est le seul qui puisse satisfaire à la question.

J'avoue au reste qu'on peut résoudre le probleme précédent avec plus de facilité par le simple tâtonnement ; car dès qu'on est parvenu à l'équation $x^2=1171-7y^2$, il n'y aura qu'à essayer pour y tous les nombres entiers dont les carrés multipliés par 7 ne surpasseront pas 1171, c'est-à-dire tous les nombres $<\sqrt{\frac{1171}{7}}<13$.

Il en est de même de toutes les équations où A est un nombre négatif ; car dès qu'on est arrivé à l'équation $x^2=B+Ay^2$, où, (en faisant $A=-a$), $x^2=B-ay^2$, il est clair que les valeurs satisfaisantes de y, s'il y en a, ne pourront se trouver que parmi les nombres $<\sqrt{\frac{B}{a}}$. Aussi n'ai-je donné des méthodes particulieres pour le cas de A

Digitized by Google

négatif, que parce que ces méthodes ont une liaiſon intime avec celles qui concernent le cas de A poſitif, & que toutes ces méthodes étant ainſi rapprochées les unes des autres, peuvent ſe prêter un jour mutuel & acquérir un plus grand degré d'évidence.

EXEMPLE II.

82. Donnons maintenant quelques exemples pour le cas de A poſitif, & ſoit propoſé de trouver tous les nombres entiers qu'on pourra prendre pour y, en ſorte que la quantité radicale,

$$\sqrt{(13y^2+101)},$$

devienne rationnelle.

On aura ici, (art. 64), $A=13$, $B=101$, & l'équation à réſoudre en entiers ſera

$$x^2-13y^2=101,$$

dans laquelle, à cauſe que 101 n'eſt diviſible par aucun carré, y ſera néceſſairement premier à 101.

On fera donc, (art. 65), $x=ny-101z$, & il faudra que n^2-13 ſoit diviſible par 101, en prenant $n<\frac{101}{2}<51$.

Digitized by Google

Je trouve $n=35$, ce qui donne $n^2=1225$ & $n^2-13=1212=101\times 12$; ainſi on pourra prendre $n=\pm 35$, & ſubſtituant, au lieu de x, $\pm 35y-101z$, on aura une équation toute diviſible par 101, qui, la diviſion faite, ſera

$$12y^2\mp 70yz+101z^2=1.$$

Employons encore, pour réſoudre cette équation, la méthode de l'art. 70; faiſons $D'=12$, $D=101$, $n=\pm 35$, mais au lieu de la lettre θ nous conſerverons la lettre y, & nous changerons ſeulement z en y', comme dans l'exemple précédent.

Soit, 1°. $n=35$, on fera le calcul ſuivant:

$$m=\frac{35}{12}=3,\ n'=35-3.12=-1,\ D''=\frac{1-13}{12}=-1,\ y=3y'+y''$$

$$m'=\frac{-1}{-1}=1,\ n''=-1+1=0,\quad D'''=\frac{-13}{-1}=13,\ y'=y''+y'''$$

Comme $n''=0$ & conſéquemment $<\frac{D''}{2}$ & $<\frac{D'''}{2}$, on s'arrêtera ici & l'on aura la transformée

$$D'''y''^2-2n''y''y'''+D''y'''^2=1,$$

ou bien

Digitized by Google

$$13y''^2 - y'''^2 = 1,$$

laquelle étant réduite à cette forme

$$y'''^2 - 13y''^2 = -1,$$

ſera ſuſceptible de la méthode de l'art. 71, n°. 2; & comme $A = 13$ eſt < 100, on pourra faire uſage de la table de l'art. 41.

Ainſi il n'y aura qu'à voir ſi dans la ſérie ſupérieure des nombres qui répondent à $\sqrt{13}$. il ſe trouve le nombre 1 dans une place paire; car il faut, pour que l'équation précédente ſoit réſoluble, que dans la ſérie P^0, P', P'' &c. il ſe trouve un terme $= -1$; mais on a $P^0 = 1$, $-P' = 4$, $P'' = 3$ &c. donc &c. or dans la ſérie 1, 4, 3, 3, 4, 1 &c. on trouve juſtement 1 à la ſixieme place, en ſorte que $P^v = -1$; donc on aura une ſolution de l'équation propoſée, en prenant $y''' = p^v$, & $y'' = q^v$, les nombres p^v, q^v étant calculés d'après les formules de l'art. 25, en donnant à μ, μ', μ'' &c. les valeurs 3, 1, 1, 1, 1, 6 &c. qui forment la ſérie inférieure des nombres répondans à $\sqrt{13}$ dans la même table.

Digitized by Google

On aura donc

$p^0 = 1$ $\quad q^0 = 0$

$p^{I} = 3$ $\quad q^{I} = 1$

$p^{II} = p^{I} + p^0 = 4$ $\quad q^{II} = 1$

$p^{III} = p^{II} + p^{I} = 7$ $\quad q^{III} = q^{II} + q^{I} = 2$

$p^{IV} = p^{III} + p^{II} = 11$ $\quad q^{IV} = q^{III} + q^{II} = 3$

$p^{V} = p^{IV} + p^{III} = 18$, $\quad q^{V} = q^{IV} + q^{III} = 5$.

Donc $y^{III} = 18$ & $y^{II} = 5$; donc $y^{I} = y^{II} + y^{III} = 23$, & $y = 3y^{I} + y^{II} = 74$.

Nous avons ſuppoſé ci-deſſus $n = 35$, mais on peut auſſi prendre $n = -35$.

Soit donc, 2°. $n = -35$, on fera

$m = \frac{-35}{12} = -3$, $n' = -35 + 3.12 = 1$, $D'' = \frac{1-13}{12} = -1$, $y = -3y' + y''$,

$m' = \frac{1}{-1} = -1$, $n'' = 1 - 1 = 0$, $D''' = \frac{-13}{-1} = 13$, $y' = -y'' + y'''$,

ainſi on aura les mêmes valeurs de D^{II}, D^{III} & n^{II} qu'auparavant, de ſorte que la tranſformée en y^{II} & y^{III} ſera auſſi la même.

On aura donc auſſi $y^{III} = 18$ & $y^{II} = 5$; donc $y^{I} = -y^{II} + y^{III} = 13$, & $y = -3y^{I} + y^{II} = -34$.

Nous avons donc trouvé deux valeurs de y avec les valeurs correſpondantes de y^{I} ou z ; & ces valeurs réſultent de la ſup-

Digitized by Google

position de $n=\pm 35$; or comme on ne peut trouver aucune autre valeur de n qui ait les conditions requises, il s'ensuit que les valeurs précédentes seront les seules valeurs *primitives* que l'on puisse avoir; mais on pourra ensuite en trouver une infinité de *dérivées* par la méthode de l'art. 72.

Prenant donc ces valeurs de y & z pour p & q, on aura en général, (art. cité),

$$y=74t-(101.23-35.74)u=74t+267u$$
$$z=23t+(12.74-35.23)u=23t+83u$$

ou

$$y=-34t-(101.13-35.34)u=-34t-123u$$
$$z=13t+(-12.34+35.13)u=13t+47u$$

& il n'y aura plus qu'à tirer les valeurs de t & u de l'équation $t^2-13u^2=1$; or ces valeurs se trouvent déjà toutes calculées dans la table qui est à la fin du chap. VII du traité précédent; on aura donc sur le champ $t=649$ & $u=180$; de sorte que prenant ces valeurs pour T & V dans les formules de l'art. 75, on aura en général

$$t=\frac{(649+180\sqrt{13})^m+(649-180\sqrt{13})^m}{2}$$

Digitized by Google

$$u = \frac{(649+180\sqrt{13})^m - (649-180\sqrt{13})^m}{2\sqrt{13}}$$

où l'on pourra donner à m telle valeur qu'on voudra, pourvu qu'on ne prenne que des nombres entiers positifs.

Or comme les valeurs de t & u peuvent être prises tant en *plus* qu'en *moins*, les valeurs de y qui peuvent satisfaire à la question, seront toutes renfermées dans ces deux formules,

$$y = \pm 74t \pm 267u,$$
$$= \pm 34t \pm 123u,$$

les signes ambigus étant à volonté.

Si on fait $m=0$, on aura $t=1$ & $u=0$; donc $y=\pm 74$, ou $=\pm 34$; & cette derniere valeur sera la plus petite qui puisse résoudre le probleme.

Nous avons déjà résolu ce même probleme dans les *Mémoires de Berlin pour l'année 1768, pag. 243*; mais comme nous y avons fait usage d'une méthode un peu différente de la précédente, & qui revient au même pour le fond que la *premiere* méthode de l'art. 66 ci-dessus, nous avons cru

Digitized by Google

devoir le redonner ici, pour que la comparaiſon des réſultats qui ſont les mêmes par l'une & l'autre méthode, puiſſe leur ſervir de confirmation, s'il en eſt beſoin.

EXEMPLE III.

83. Soit propoſé encore de trouver des nombres entiers qui, étant pris pour y, rendent rationnelle la quantité

$$\sqrt{(79y^2+101)}.$$

On aura donc à réſoudre en entiers l'équation

$$x^2-79y^2=101,$$

dans laquelle y ſera premier à 101, puiſque ce nombre ne renferme aucun facteur carré.

Qu'on ſuppoſe donc $x=ny-101z$, & il faudra que n^2-79 ſoit diviſible par 101, en prenant $n<\frac{101}{2}<51$; on trouve $n=33$, ce qui donne $n^2-13=1010=101\times 10$; ainſi on pourra prendre $n=\pm 33$, & ces valeurs ſeront les ſeules qui aient la condition requiſe.

Subſtituant donc $\pm 33y-101z$ à la place

Digitized by Google

de x, & diviſant toute l'équation par 101, on aura cette transformée

$$10y^2 \mp 66yz + 101z^2 = 1.$$

On fera donc $D' = 10$, $D = 101$, $n = \pm 33$, & prenant d'abord n en *plus*, on opérera comme dans l'exemple précédent; on aura ainſi

$$m = \frac{33}{10} = 3,\ n' = 33 - 3.10 = 3,\ D'' = \frac{9-79}{10} = -7,\ y = 3y' + y''.$$

Or comme $n' = 3$ eſt déjà $< \frac{D'}{2}$ & $< \frac{D''}{2}$, il ne ſera pas néceſſaire d'aller plus loin; ainſi on aura la transformée

$$-7y'^2 - 6y'y'' + 10y''^2 = 1,$$

laquelle étant multipliée par -7, pourra ſe mettre ſous cette forme,

$$(7y' + 3y'')^2 - 79y''^2 = -7.$$

Puiſque donc 7 eſt $< \sqrt{79}$, ſi cette équation eſt réſoluble, il faudra que le nombre 7 ſe trouve parmi les termes de la ſérie ſupérieure des nombres qui répondent à $\sqrt{79}$ dans la table de l'art. 41, & même que ce nombre 7 y occupe une place paire, puiſqu'il a le ſigne —. Mais la ſérie dont

Digitized by Google

il s'agit ne renferme que les nombres 1, 15, 2, qui reviennent toujours; donc on doit conclure sur le champ que la derniere équation n'est pas résoluble, & qu'ainsi la proposée ne l'est pas, au moins d'après la valeur de $n=33$.

Il ne reste donc qu'à essayer l'autre valeur $n=-33$, laquelle donnera

$$m=\frac{-33}{10}=-3,\quad n'=-33+3.10=-3,\quad D''=\frac{9-79}{10}=-7;\quad y=-3y'+y''$$

de sorte qu'on aura cette autre transformée,

$$-7y'^2+6y'y''+10y''^2=1,$$

laquelle se réduit à la forme

$$(7y'-3y'')^2-79y''^2=-7,$$

qui est semblable à la précédente. D'où je conclus que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en nombres entiers.

REMARQUE.

84. M. *Euler*, dans un excellent Mémoire imprimé dans le tome IX des *nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, trouve par induction cette regle, pour juger de la résolubilité de toute équation de la forme

Digitized by Google

$x^2 - Ay^2 = B$, lorsque B est un nombre premier; c'est que l'équation doit être possible toutes les fois que B sera de la forme $4An + r^2$, ou $4An + r^2 - A$; mais l'exemple précédent met cette regle en défaut; car 101 est un nombre premier de la forme $4An + r^2 - A$, en faisant $A = 79$, $n = -4$ & $r = 38$; cependant l'équation $x^2 - 79y^2 = 101$ n'admet aucune solution en nombres entiers.

Si la regle précédente étoit vraie, il s'ensuivroit que si l'équation $x^2 - Ay^2 = B$ est possible lorsque B a une valeur quelconque b, elle le seroit aussi en prenant $B = 4An + b$, pourvu que B fût un nombre premier. On pourroit limiter cette derniere regle, en exigeant que b fût aussi un nombre premier; mais avec cette limitation même elle se trouveroit démentie par l'exemple précédent; car on a $101 = 4An + b$, en prenant $A = 79$, $n = -2$ & $b = 733$; or 733 est un nombre premier de la forme $x^2 - 79y^2$, en faisant $x = 38$ & $y = 3$; cependant 101 n'est pas de la même forme $x^2 - 79y^2$.

Digitized by Google

PARAGRAPHE VIII.

Remarques sur les Equations de la forme

$$p^2 = Aq^2 + 1,$$

& sur la maniere ordinaire de les résoudre en nombres entiers.

85. LA méthode du chap. VII du traité précédent, pour résoudre les équations de cette espece, est la même que celle que M. *Wallis* donne dans son Algebre, (chap. XCVIII), & qu'il attribue à Milord *Brounker;* on la trouve aussi dans l'Algebre de M. *Ozanam*, qui en fait honneur à M. de *Fermat.* Quoi qu'il en soit de l'Inventeur de cette méthode, il est au moins certain que M. de *Fermat* est l'Auteur du probleme qui en fait l'objet; il l'avoit proposé comme un défi à tous les Géometres Anglois, ainsi qu'on le voit par le *commercium epistolicum* de M. *Wallis;* c'est ce qui donna occasion à Milord *Brounker* d'inventer la méthode dont nous parlons; mais il ne paroît pas que cet

Digitized by Google

cet Auteur ait connu toute l'importance du probleme qu'il avoit réſolu ; on ne trouve même rien ſur ce ſujet dans les écrits qui nous ſont reſtés de M. *Fermat*, ni dans aucun des Ouvrages du ſiecle paſſé, où l'on traite de l'Analyſe indéterminée. Il eſt bien naturel de croire que M. *Fermat*, qui s'étoit principalement occupé de la théorie des nombres entiers, ſur leſquels il nous a d'ailleurs laiſſé de très-beaux théoremes, avoit été conduit au probleme dont il s'agit par les recherches qu'il avoit faites ſur la réſolution générale des équations de la forme $x^2 = Ay^2 + B$, auxquelles ſe réduiſent toutes les équations du ſecond degré à deux inconnues ; cependant ce n'eſt qu'à M^r. *Euler* que nous devons la remarque que ce probleme eſt néceſſaire pour trouver toutes les ſolutions poſſibles de ces ſortes d'équations. (Voyez le chap. VI ci-deſſus, le tome VI des *anciens Commentaires de Pétersbourg*, & le tome IX des *nouveaux*).

La méthode que nous avons ſuivie pour démontrer cette propoſition eſt un peu dif-

Digitized by Google

férente de celle de M. *Euler*, mais auſſi eſt-elle, ſi je ne me trompe, plus directe & plus générale. Car d'un côté la méthode de M. *Euler* conduit naturellement à des expreſſions fractionnaires lorſqu'il s'agit de les éviter, & de l'autre on ne voit pas clairement que les ſuppoſitions qu'on y fait pour faire diſparoître les fractions, ſoient les ſeules qui puiſſent avoir lieu. En effet nous avons fait voir ailleurs qu'il ne ſuffit pas toujours de trouver une ſeule ſolution de l'équation $x^2 = Ay^2 + B$, pour pouvoir en déduire toutes les autres, à l'aide de l'équation $p^2 = Aq^2 + 1$; & qu'il peut y avoir ſouvent, au moins lorſque B n'eſt pas un nombre premier, des valeurs de x & y qui ne ſauroient être renfermées dans les expreſſions générales de M. *Euler*. (Voy. l'art. 45 de mon *Mémoire ſur les problemes indéterminés*, dans les Mémoires de Berlin, année 1767).

Quant à la méthode de réſoudre les équations de la forme $p^2 = Aq^2 + 1$, il nous ſemble que celle du chap. VII, quelque

Digitized by Google

ingénieuſe qu'elle ſoit, eſt encore aſſez imparfaite. Car, 1°. elle ne fait pas voir que toute équation de ce genre eſt toujours réſoluble en nombres entiers, lorſque a eſt un nombre poſitif non-carré. 2°. Il n'eſt pas démontré qu'elle doive faire parvenir toujours à la réſolution cherchée. M. *Wallis* a, à la vérité, prétendu prouver la premiere de ces deux propoſitions; mais ſa démonſtration n'eſt, ſi j'oſe le dire, qu'une ſimple pétition de principe. (Voy. le chap. XCIX de ſon Algebre). Je crois donc être le premier qui en ait donné une tout-à-fait rigoureuſe; elle ſe trouve dans les *Mélanges de Turin*, tome IV; mais elle eſt très-longue & très-indirecte; celle de l'art. 37 ci-deſſus, eſt tirée des vrais principes de la choſe, & ne laiſſe, ce me ſemble, rien à déſirer. Cette méthode nous met auſſi en état d'apprécier celle du chap. VII, & de reconnoître les inconvéniens où l'on pourroit tomber, ſi on la ſuivoit ſans aucune précaution; c'eſt ce que nous allons diſcuter.

Digitized by Google

86. De ce que nous avons démontré dans le §. II, il s'ensuit que les valeurs de p & q qui satisfont à l'équation $p^2 - Aq^2 = 1$, ne peuvent être que les termes de quelqu'une des fractions *principales* déduites de la fraction continue qui exprimeroit la valeur de $\sqrt{A}$; de sorte que supposant cette fraction continue représentée ainsi,

$$\mu + \frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\mu''} + \frac{1}{\mu'''} + \&c.$$

on aura nécessairement

$$\frac{p}{q} = \mu + \frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\mu''} + \&c. + \frac{1}{\mu^\rho},$$

μ^ρ étant un terme quelconque de la série infinie μ', μ'' &c. dont le quantieme ρ ne peut se déterminer qu'*à posteriori*.

Il faut remarquer que dans cette fraction continue les nombres μ, μ', μ'' &c. doivent être tous positifs, quoique nous ayons vu dans l'art. 3 qu'on peut en général, dans les fractions continues, rendre les dénominateurs positifs ou négatifs, suivant que

Digitized by Google

l'on prend les valeurs approchées plus petites ou plus grandes que les véritables ; mais la méthode du probleme I, (art. 23 & suiv.) exige absolument que les valeurs approchées μ, μ', μ'' &c. soient toutes prises en défaut.

87. Maintenant, puisque la fraction $\frac{p}{q}$ est égale à une fraction continue dont les termes sont μ, μ', μ'' &c. μ^t, il est clair, par l'art. 4, que μ sera le quotient de p divisé par q, que μ' sera celui de q divisé par le reste, μ'' celui de ce reste divisé par le second reste, & ainsi de suite ; de sorte que nommant r, s, t &c. les restes dont il s'agit, on aura, par la nature de la division, $p = \mu q + r$, $q = \mu' r + s$, $r = \mu'' s + t$, &c. où le dernier reste sera nécessairement $= 0$, & l'avant-dernier $= 1$, à cause que p & q sont des nombres premiers entr'eux. Ainsi μ sera la valeur entiere approchée de $\frac{p}{q}$, μ' celle de $\frac{q}{r}$, μ'' celle de $\frac{r}{s}$ &c. ces valeurs étant toutes prises moindres que les véritables, à l'exception de la derniere μ^t, qui sera exactement égale à la fraction corref-

Digitized by Google

pondante, à cauſe que le reſte ſuivant eſt ſuppoſé nul.

Or comme les nombres μ, μ', μ'' &c. μ^{t}, ſont les mêmes pour la fraction continue qui exprime la valeur de $\frac{p}{q}$, & pour celle qui exprime la valeur de $\sqrt{A}$, on peut prendre, juſqu'au terme μ^{t}, $\frac{p}{q}=\sqrt{A}$, c'eſt-à-dire $p^2-Aq^2=0$. Ainſi on cherchera d'abord la valeur approchée en défaut de $\frac{p}{q}$, c'eſt-à-dire de $\sqrt{A}$, & ce ſera la valeur de μ; enſuite on ſubſtituera dans $p^2-Aq^2=0$, à la place de p ſa valeur $\mu q+r$, ce qui donnera $(\mu^2-A)q^2+2\mu qr+r^2=0$, & on cherchera de nouveau la valeur approchée en défaut de $\frac{q}{r}$, c'eſt-à-dire de la racine poſitive de l'équation

$$(\mu^2-A)\left(\frac{q}{r}\right)^2+2\mu\frac{q}{r}+1=0,$$

& l'on aura la valeur de μ'.

On continuera à ſubſtituer dans la tranſformée $(\mu^2-A)q^2+2\mu qr+r^2=0$, à la place de q, $\mu' r+f$; on aura une équation dont la racine ſera $\frac{r}{f}$; on prendra la valeur approchée en défaut de cette racine, & l'on

Digitized by Google

aura la valeur de μ''. On ſubſtituera $\mu''r+ſ$ à la place de r, &c.

Suppoſons maintenant que t ſoit, par ex. le dernier reſte qui doit être nul, $ſ$ ſera l'avant-dernier qui doit être $=1$; donc ſi la transformée en $ſ$ & t de la formule $p^2 - Aq^2$ eſt $Pſ^2+Qſt+Rt^2$, il faudra qu'en y faiſant $t=0$ & $ſ=1$ elle devienne $=1$, pour que l'équation propoſée $p^2-Aq^2=1$ ait lieu; donc P devra être $=1$. Ainſi il n'y aura qu'à continuer les opérations & les transformations ci-deſſus, juſqu'à ce que l'on parvienne à une transformée où le coefficient du premier terme ſoit égal à l'unité; alors on fera dans cette formule la premiere des deux indéterminées, comme r, égale à 1, & la ſeconde, comme $ſ$, égale à zéro; & en remontant on aura les valeurs convenables de p & q.

On pourroit auſſi opérer ſur l'équation même $p^2-Aq^2=1$, en ayant ſeulement ſoin de faire abſtraction du terme tout connu 1, & par conſéquent auſſi des autres termes tout connus qui peuvent réſulter de celui-ci,

Digitized by Google

dans la détermination des valeurs approchées μ, μ', μ'' &c. de $\frac{p}{q}$, $\frac{q}{r}$, $\frac{r}{f}$ &c. dans ce cas on essayera à chaque nouvelle transformation, si l'équation transformée peut subsister en y faisant l'une des deux indéterminées $=1$ & l'autre $=0$; quand on sera parvenu à une pareille transformée, l'opération sera achevée, & il n'y aura plus qu'à revenir sur ses pas pour avoir les valeurs cherchées de p & de q.

Nous voilà donc conduits à la méthode du chapitre VII. A examiner cette méthode en elle-même & indépendamment des principes d'où nous venons de la déduire, il doit paroître assez indifférent de prendre les valeurs approchées de μ, μ', μ'' &c. plus petites ou plus grandes que les véritables, d'autant que, de quelque maniere qu'on prenne ces valeurs, celles de r, f, t &c. doivent aller également en diminuant jusqu'à zéro, (art. 6).

Aussi M. *Wallis* remarque-t-il expressément qu'on peut employer à volonté les limites en *plus* ou en *moins* pour les nombres

Digitized by Google

μ, μ^{I}, μ^{II} &c. & il propoſe même ce moyen comme propre à abréger ſouvent le calcul; c'eſt auſſi ce que M. *Euler* fait obſerver dans l'art. 102 & ſuiv. du chap. cité; cependant je vais faire voir par un exemple, qu'en s'y prenant de cette maniere on peut riſquer de ne jamais parvenir à la ſolution de l'équation propoſée.

Prenons l'exemple de l'art. 101 du même chap. où il s'agit de réſoudre une équation de cette forme, $p^2 = 6q^2 + 1$, ou bien $p^2 - 6q^2 = 1$. On aura donc $p = \sqrt{(6q^2+1)}$, & négligeant le terme conſtant 1, $p = q\sqrt{6}$; donc $\frac{p}{q} = \sqrt{6} > 2 < 3$; prenons la limite en moins & faiſons $\mu = 2$, & enſuite $p = 2q + r$; ſubſtituant donc cette valeur, on aura $-2q^2 + 4qr + r^2 = 1$; donc $q = \frac{2r + \sqrt{(6r^2 - 2)}}{2}$, ou bien, en rejettant le terme conſtant -2, $q = \frac{2r + r\sqrt{6}}{2}$, d'où $\frac{q}{r} = \frac{2+\sqrt{6}}{2} > 2 < 3$; prenons de nouveau la limite en *moins*, & faiſons $q = 2r + s$, la derniere équation deviendra $r^2 - 4rs - 2s^2 = 1$, où l'on voit d'abord

Digitized by Google

qu'on peut ſuppoſer $f=0$ & $r=1$; ainſi on aura $q=2$, $p=5$.

Maintenant reprenons la premiere tranſformée $-2q^2+4qr+r^2=1$, où nous avons vu que $\frac{q}{r}>2$ & <3, & au lieu de prendre la limite en *moins*, prenons-la en *plus*, c'eſt-à-dire, ſuppoſons $q=3r+f$, ou bien, puiſque f doit être alors une quantité négative, $q=3r-f$, on aura la tranſformée ſuivante, $-5r^2+8rf-2f^2=1$, laquelle donnera $r=\frac{4f+\sqrt{(6f^2-5)}}{5}$; donc négligeant le terme conſtant 5, $r=\frac{4f+f\sqrt{6}}{5}$, & $\frac{r}{f}=\frac{4+\sqrt{6}}{5}>1<2$.

Prenons de nouveau la limite en *plus*, & faiſons $r=2f-t$, on aura $-6f^2+12ft-5t^2=1$; donc $f=\frac{6t+\sqrt{(6t^2-6)}}{6}$; donc, rejetant le terme -6, $f=\frac{6t+t\sqrt{6}}{6}$, & $\frac{f}{t}=1+\frac{\sqrt{6}}{6}>1<2$.

Qu'on continue à prendre les limites en *plus* & qu'on faſſe $f=2t-u$, il viendra $-5t^2+12tu-6u^2=1$; donc $t=\frac{6u+\sqrt{(6u^2-5)}}{5}$;

Digitized by Google

donc $\frac{t}{u} = \frac{6+\sqrt{6}}{5} > 1 < 2$. Faiſons donc de même $t = 2u - x$, on aura $-2u^2 + 8ux - 5x^2 = 1$; donc *&c.*

Continuant de cette maniere à prendre toujours les limites en *plus*, on ne trouvera jamais de transformée où le coefficient du premier terme ſoit égal à l'unité, comme il le faut, pour qu'on puiſſe trouver une ſolution de la propoſée.

La même choſe arrivera néceſſairement toutes les fois qu'on prendra la premiere limite en *moins*, & les ſuivantes toutes en *plus*; je pourrois en donner la raiſon *à priori*; mais comme le Lecteur peut la trouver aiſément par les principes de notre théorie, je ne m'y arrêterai pas. Quant à préſent il me ſuffit d'avoir montré la néceſſité de traiter ces ſortes de problemes d'une maniere plus rigoureuſe & plus profonde qu'on ne l'avoit encore fait.

Digitized by Google

PARAGRAPHE IX.

De la maniere de trouver des Fonctions algébriques de tous les degrés, qui étant multipliées enſemble produiſent toujours des fonctions ſemblables.

Addition pour les Chapitres XI & XII.

88. JE crois avoir eu en même temps que M. *Euler* l'idée de faire ſervir les facteurs irrationnels & même imaginaires des formules du ſecond degré, à trouver les conditions qui rendent ces formules égales à des carrés ou à des puiſſances quelconques; j'ai lu ſur ce ſujet à l'Académie en 1768, un Mémoire qui n'a pas été imprimé, mais dont j'ai donné un précis à la fin de mes recherches *ſur les Problemes indéterminés*, qui ſe trouvent dans le volume pour l'année 1767, lequel a paru en 1769, avant même la traduction Allemande de l'Algebre de M. *Euler*.

J'ai fait voir dans l'endroit que je viens

Digitized by Google

de citer, comment on peut étendre la même méthode à des formules de degrés plus élevés que le ſecond; & j'ai par ce moyen donné la ſolution de quelques équations dont il auroit peut-être été fort difficile de venir à bout par d'autres voies. Je vais maintenant généraliſer encore davantage cette méthode, qui me paroît mériter particuliérement l'attention des Géometres par ſa nouveauté & par ſa ſingularité.

89. Soient α & β les deux racines de l'équation du ſecond degré

$$f^2 - af + b = 0,$$

& conſidérons le produit de ces deux facteurs

$$(x + \alpha y)(x + \beta y),$$

qui ſera néceſſairement réel; ce produit ſera $x^2 + (\alpha + \beta)xy + \alpha\beta y^2$; or on a $\alpha + \beta = a$, & $\alpha\beta = b$, par la nature de l'équation $f^2 - af + b = 0$; donc on aura cette formule du ſecond degré

$$x^2 + axy + by^2,$$

laquelle eſt compoſée des deux facteurs

$$x + \alpha y \text{ & } x + \beta y.$$

Digitized by Google

Maintenant il eſt viſible que ſi l'on a une formule ſemblable

$$x'^2 + ax'y' + by'^2,$$

& qu'on veuille les multiplier l'une par l'autre, il ſuffira de multiplier enſemble les deux facteurs $x+\alpha y$, $x'+\alpha y'$, & les deux $x+\beta y$, $x'+\beta y'$, enſuite les deux produits l'un par l'autre. Or le produit de $x+\alpha y$ par $x'+\alpha y'$ eſt $xx'+\alpha(xy'+yx')+\alpha^2yy'$; mais puiſque α eſt une des racines de l'équation $f^2 - af + b = 0$, on aura $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$; donc $\alpha^2 = a\alpha - b$; donc ſubſtituant cette valeur de α^2 dans la formule précédente, elle deviendra $xx' - byy' + \alpha(xy' + yx' + ayy')$; de ſorte qu'en faiſant, pour plus de ſimplicité,

$$X = xx' - byy',$$
$$Y = xy' + yx' + ayy',$$

le produit des deux facteurs $x+\alpha y$, $x'+\alpha y'$, ſera $X+\alpha Y$, & par conſéquent de la même forme que chacun d'eux. On trouvera de même que le produit des deux autres facteurs, $x+\beta y$ & $x'+\beta y'$, ſera $X+\beta Y$;

Digitized by Google

de sorte que le produit total sera $(X+{}^{\alpha}Y)(X+{}^{\beta}Y)$, savoir

$$X^2+aXY+bY^2.$$

C'est le produit des deux formules semblables,

$$x^2+axy+by^2, \text{ \& } x'^2+ax'y'+by'^2.$$

Si on vouloit avoir le produit de ces trois formules semblables

$$x^2+axy+by^2,$$
$$x'^2+axy+by'^2,$$
$$x''^2+axy^2+by''^2,$$

il n'y auroit qu'à trouver celui de la formule $X^2+aXY+bY^2$ par la derniere $x''^2+ax''y''+by''^2$, & il est visible, par les formules ci-dessus, qu'en faisant

$$X'=Xx''-bYy'',$$
$$Y'=Xy''+Yx''+aYy'',$$

le produit cherché seroit

$$X'^2+aX'Y'+bY'^2.$$

On pourra trouver de même le produit de quatre ou d'un plus grand nombre de formules semblables à celle-ci,

Digitized by Google

$$x^2+axy+by^2,$$

& ces produits seront toujours aussi de la même forme.

90. Si on fait $x=x$ & $y=y$, on aura

$$X=x^2-by^2,\quad Y=2xy+ay^2,$$

& par conséquent

$$(x^2+axy+by^2)^2=X^2+aXY+bY^2.$$

Donc, si l'on veut trouver des valeurs rationnelles de X & Y, telles que la formule $X^2+aXY+bY^2$ devienne un carré, il n'y aura qu'à donner à X & à Y les valeurs précédentes, & l'on aura pour la racine du carré la formule $x^2+axy+by^2$, x & y étant deux indéterminées.

Si on fait de plus $x''=x'=x$ & $y''=y'=y$, on aura $X'=Xx-bYy$, $Y'=Xy+Yx+aYy$, c'est-à-dire en substituant les valeurs précédentes de X & Y,

$$X'=x^3-3bxy^2+aby^3,$$

$$Y'=3x^2y+3axy^2+(a^2-b)y^3;$$

donc

$$(x^2+axy+by^2)^3=X'^2+aX'Y'+bY'^2.$$

Ainsi, si l'on proposoit de trouver des valeurs

valeurs rationnelles de $X^{\prime}$ & $Y^{\prime}$, telles que la formule $X^{\prime 2}+aX^{\prime}Y^{\prime}+bY^{\prime 2}$ devînt un cube, il n'y auroit qu'à donner à $X^{\prime}$ & $Y^{\prime}$ les valeurs précédentes; moyennant quoi on auroit un cube dont la racine seroit $x^2+axy+by^2$, x & y étant deux indéterminées.

On pourroit résoudre d'une maniere semblable les questions où il s'agiroit de produire des puissances quatrièmes, cinquiemes &c. mais on peut aussi trouver immédiatement des formules générales pour une puissance quelconque m, sans passer par les puissances inférieures.

Soit donc proposé de trouver des valeurs rationnelles de X & Y, telles que la formule $X^2+aXY+bY^2$ devienne une puissance m, c'est-à-dire qu'il s'agisse de résoudre l'équation

$$X^2+aXY+bY^2=Z^m.$$

Comme la quantité $X^2+aXY+bY^2$ est formée du produit des deux facteurs $X+\alpha Y$ & $X+\beta Y$, il faudra, pour que cette quan-

Digitized by Google

tité devienne une puiſſance du degré m, que chacun de ſes deux facteurs devienne auſſi, une ſemblable puiſſance.

Faiſons donc d'abord

$$X+\alpha Y=(x+\alpha y)^m;$$

& développant cette puiſſance par le théoreme de *Newton*, on aura

$$x^m+mx^{m-1}y\alpha+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2\alpha^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2}x^{m-3}y^3\alpha^3+\&c.$$

Or, puiſque α eſt une des racines de l'équation $f^2-af+b=0$, on aura auſſi $\alpha^2-a\alpha+b=0$; donc $\alpha^2=a\alpha-b$, $\alpha^3=a\alpha^2-b\alpha=(a^2-b)\alpha-ab$, $\alpha^4=(a^2-b)\alpha^2-ab\alpha=(a^3-2ab)\alpha-a^2b+b^2$, & ainſi de ſuite. Ainſi il n'y aura qu'à ſubſtituer ces valeurs dans la formule précédente, & elle ſe trouvera par-là compoſée de deux parties, l'une toute rationnelle qu'on comparera à X, & l'autre toute multipliée par la racine α, qu'on comparera à αY.

Si on fait pour plus de ſimplicité

$A^{\prime}=1$ $\quad$ $B^{\prime}=0$

$A^{\prime\prime}=a$ $\quad$ $B^{\prime\prime}=b$

Digitized by Google

$A^{III} = aA^{II} - bA^{I}$ $B^{III} = aB^{II} - bB^{I}$
$A^{IV} = aA^{III} - bA^{II}$ $B^{IV} = aB^{III} - bB^{II}$
$A^{V} = aA^{IV} - bA^{III}$, $B^{V} = aB^{IV} - bB^{III}$,
&c. &c. &c.

on aura

$$\alpha = A^{I}\alpha - B^{I}$$
$$\alpha^{2} = A^{II}\alpha - B^{II}$$
$$\alpha^{3} = A^{III}\alpha - B^{III}$$
$$\alpha^{4} = A^{IV}\alpha - B^{IV}, \&c.$$

Donc ſubſtituant ces valeurs, & comparant, on aura

$X = x^{m} - mx^{m-1}yB^{I} - \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^{2}B^{II}$
$- \frac{m(m-1)(m-2)}{2}x^{m-3}y^{3}B^{III} - \&c.$
$Y = mx^{m-1}yA^{I} + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^{II}A^{II}$
$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2}x^{m-3}y^{3}A^{III} + \&c.$

Or, comme la racine α n'entre point dans les expreſſions de X & Y, il eſt clair qu'ayant $X + \alpha Y = (x + \alpha y)^{m}$, on aura auſſi $X + \beta Y = (x + \beta y)^{m}$; donc multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura

$X^{2} + aXY + bY^{2} = (x^{2} + axy + by^{2})^{m}$,

& par conſéquent

Digitized by Google

$$Z = x^2 + axy + by^2.$$

Ainſi le probleme eſt réſolu.

Si a étoit $= 0$, les formules précédentes deviendroient beaucoup plus ſimples; car on auroit $A^{I} = 1$, $A^{II} = 0$, $A^{III} = -b$, $A^{IV} = 0$, $A^{V} = b^2$, $A^{VI} = 0$, $A^{VII} = -b^3$ &c. & de même $B^{I} = 0$, $B^{II} = b$, $B^{III} = 0$, $B^{IV} = -b^2$, $B^{V} = 0$, $B^{VI} = b^3$ &c. donc

$$X = x^m - \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 b + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} x^{m-4} y^4 b^2 - \&c.$$

$$Y = m x^{m-1} y + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3} y^3 b + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} x^{m-5} y^5 b^2 - \&c.$$

& ces valeurs ſatisferont à l'équation

$$X^2 + bY^2 = (x^2 + by^2)^m.$$

91. Paſſons maintenant aux formules de trois dimenſions; pour cela nous déſignerons par α, β, γ les trois racines de l'équation du troiſieme degré,

$$\int^3 - a\int^2 + b\int - c = 0,$$

& nous conſidérerons enſuite le produit de ces trois facteurs,

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \beta y + \beta^2 z)(x + \gamma y + \gamma^2 z),$$

Digitized by Google

lequel ſera néceſſairement rationnel, comme on va le voir. La multiplication faite, on aura le produit ſuivant,

$$x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2y+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2z+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)xy^2+(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta)xyz+(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)xz^2+\alpha\beta\gamma y^3+(\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\gamma+\gamma^2\alpha\beta)y^2z+(\alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma^2\beta+\beta^2\gamma^2\alpha)yz^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2z^3;$$

or par la nature de l'équation on a

$$\alpha+\beta+\gamma=a,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b,\ \alpha\beta\gamma=c;$$

de plus on trouvera

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=a^2-2b,$$
$$\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-3\alpha\beta\gamma=ab-3c,\ \alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-2(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma=b^2-2ac,\ \alpha^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\gamma+\gamma^2\alpha\beta=(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma=ac,\ \alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma^2\beta+\beta^2\gamma^2\alpha=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\alpha\beta\gamma=bc;$$

donc faiſant ces ſubſtitutions, le produit dont il s'agit ſera

$$x^3+ax^2y+(a^2-2b)x^2z+bxy^2+(ab-3c)xyz+(b^2-2ac)xz^2+cy^3+acy^2z+bcyz^2+c^2z^3.$$

Et cette formule aura la propriété, que ſi on multiplie enſemble autant de ſemblables formules que l'on veut, le produit ſera toujours auſſi une formule ſemblable.

Digitized by Google

En effet ſuppoſons qu'on demande le produit de cette formule-là par cette autre-ci, $x'^3+ax'^2y'+(a^2-2b)x'^2z'+bx'y'^2+(ab-3c)x'y'z'+(b^2-2ac)x'z'^2+cy'^3+acy'^2z'+bcy'z'^2+c^2z'^3$; il eſt clair qu'il n'y aura qu'à chercher celui de ces ſix facteurs, $x+\alpha y+\alpha^2 z$, $x+\beta y+\beta^2 z$, $x+\gamma y+\gamma^2 z$, $x'+\alpha y'+\alpha^2 z'$, $x'+\beta y'+\beta^2 z'$, $x'+\gamma y'+\gamma^2 z'$; qu'on multiplie d'abord $x+\alpha y+\alpha^2 z$ par $x'+\alpha y'+\alpha^2 z'$, on aura ce produit partiel $xx'+\alpha(xy'+yx')+\alpha^2(xz'+zx'+yy')+\alpha^3(yz'+zy')+\alpha^4 zz'$; or α étant une des racines de l'équation $f^3-af^2+bf-c=0$, on aura $\alpha^3-a\alpha^2+b\alpha-c=0$, par conſéquent $\alpha^3=a\alpha^2-b\alpha+c$; donc $\alpha^4=a\alpha^3-b\alpha^2+c\alpha=(a^2-b)\alpha^2-(ab-c)\alpha+ac$; de ſorte qu'en ſubſtituant ces valeurs, & faiſant pour abréger

$X=xx'-c(yz'+zy')+aczz'$,

$Y=xy'+yx'-b(yz'+zy')-(ab-c)zz'$,

$Z=xz'+zx'+yy'+a(yz'+zy')+(a^2-b)zz'$,

le produit dont il s'agit deviendra de cette forme

$$X+\alpha Y+\alpha^2 Z,$$

Digitized by Google

c'eſt-à-dire de la même forme que chacun des produiſans. Or comme la racine α n'entre point dans les valeurs de X, Y, Z, il eſt clair que ces quantités ſeront les mêmes en changeant α en β ou en γ; donc puiſque l'on a déjà

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x'+\alpha y'+\alpha^2 z')=X+\alpha Y+\alpha^2 Z,$$

on aura auſſi, en changeant α en β,

$$(x+\beta y+\beta^2 z)(x'+\beta y'+\beta^2 z')=X+\beta Y+\beta^2 Z,$$

& en changeant α en γ,

$$(x+\gamma y+\gamma^2 z)(x'+\gamma y'+\gamma^2 z')=X+\gamma Y+\gamma^2 Z;$$

donc multipliant ces trois équations enſemble, on aura d'un côté le produit des deux formules propoſées, & de l'autre la formule

$$X^3+aX^2Y+(a^2-2b)X^2Z+bXY^2+(ab-3c)XYZ+(b^2-2ac)XZ^2+cY^3+acY^2Z+bcYZ^2+c^2Z^3,$$

qui ſera donc égale au produit demandé, & qui eſt, comme l'on voit, de la même forme que chacune des deux formules dont elle eſt compoſée.

Si on avoit une troiſieme formule telle que celle-ci,

Digitized by Google

$$\overset{11}{x}{}^3+a\overset{11}{x}{}^2y^{11}+(a-2b)\overset{11}{x}{}^2z^{11}+bx^{11}\overset{11}{y}{}^2+(ab-3c)x^{11}y^{11}z^{11}+(b^2-2ac)x^{11}\overset{11}{z}{}^2+c\overset{11}{y}{}^3+ac\overset{11}{y}{}^2z^{11}+bcy^{11}\overset{11}{z}{}^2+c^2\overset{11}{z}{}^3,$$

& qu'on voulût avoir le produit de cette formule & des deux précédentes, il est clair qu'il n'y auroit qu'à faire

$$X^1=Xx^{11}-c(Yz^{11}+Zy^{11})+acZz^{11},$$
$$Y^1=Xy^{11}+Yx^{11}-b(Yz^{11}+Zy^{11})-(ab-c)Zz^{11}$$
$$Z^1=Xz^{11}+Zx^{11}+Yy^{11}+a(Yz^{11}+Zy^{11})+(a^2-b)Zz^{11},$$

& l'on auroit pour le produit cherché

$$\overset{1}{X}{}^3+a\overset{1}{X}{}^2Y^1+(a^2-2b)\overset{1}{X}{}^2Z^1+bX^1\overset{1}{Y}{}^2+(ab-3c)X^1Y^1Z^1+(b^2-2ac)X^1\overset{1}{Z}{}^2+c\overset{1}{Y}{}^3+ac\overset{1}{Y}{}^2Z^1+bcY^1\overset{1}{Z}{}^2+c^2\overset{1}{Z}{}^3.$$

92. Faisons maintenant $x^1=x$, $y^1=y$, $z^1=z$, nous aurons

$$X=x^2-2cyz+acz^2,$$
$$Y=2xy-2byz-(ab-c)z^2,$$
$$Z=2xz+y^2+2ayz+(a^2-b)z^2,$$

& ces valeurs satisferont à l'équation

$$X^3+aX^2Y+bXY^2+cY^3+(a^2-2b)X^2Z+(ab-3c)XYZ+acY^2Z+(b^2-2ac)XZ^2+bcYZ^2+c^2Z^3=V^2,$$

Digitized by Google

en prenant

$$V=x^3+ax^2y+bxy^2+cy^3+(a^2-2b)x^2z+(ab-3c)xyz+acy^2z+(b^2-2ac)xz^2+bcyz^2+c^2z^3;$$

donc si l'on avoit, par exemple, à résoudre une équation de cette forme,

$$X^3+aX^2Y+bXY^2+cY^3=V^2,$$

a, b, c étant des quantités quelconques données, il n'y auroit qu'à rendre $Z=0$, en faisant

$$2xz+y^2+2ayz+(a^2-b^2)z^2=0,$$

d'où l'on tire

$$x=-\frac{y^2+2ayz+(a^2-b)z^2}{2z},$$

& substituant cette valeur de x dans les expressions précédentes de X, Y & V, on aura des valeurs très-générales de ces quantités, qui satisferont à l'équation proposée.

Cette solution mérite d'être bien remarquée à cause de sa généralité & de la maniere dont nous y sommes parvenus, qui est peut-être l'unique qui puisse y conduire facilement.

Digitized by Google

On auroit de même la résolution de l'équation

$$X'^3+aX'^2Y'+(a^2-2b)X'^2Z'+bX'Y'^2+(ab-3c)X'Y'Z'+(b^2-2ac)X'Z'^2+cY'^3+acY'^2Z'+bcY'Z'^2+c^2Z'^3=V^3,$$

en faisant dans les formules ci-dessus

$$x''=x'=x,\ y''=y'=y,\ z''=z'=z,$$

& prenant

$$V=x^3+ax^2y+(a^2-2b)x^2z+bxy^2+(ab-3c)xyz+(b^2-2ac)xz^2+cy^3+acy^2z+bcyz^2+c^2z^3.$$

Et on pourroit résoudre aussi successivement les cas où, au lieu de la troisieme puissance V^3, on auroit V^4, V^5 &c. mais nous allons traiter ces questions d'une maniere tout-à-fait générale, comme nous l'avons fait dans l'art. 90 ci-dessus.

93. Soit donc proposé de résoudre une équation de cette forme,

$$X^3+aX^2Y+(a^2-2b)X^2Z+bXY^2+(ab-3c)XYZ+(b^2-2ac)XZ^2+cY^3+acY^2Z+bcYZ^2+c^2Z^3=V^m.$$

Puisque la quantité qui forme le premier

Digitized by Google

membre de cette équation n'eſt autre choſe que le produit de ces trois facteurs, $(X+\alpha Y+\alpha^2 Z)(X+\beta Y+\beta^2 Z)(X+\gamma Y+\gamma^2 Z)$, il eſt clair que pour rendre cette quantité égale à une puiſſance du degré m, il ne faudra que rendre chacun de ſes facteurs en particulier égal à une pareille puiſſance. Soit donc

$$X+\alpha Y+\alpha^2 Z=(x+\alpha y+\alpha^2 z)^m,$$

on commencera par développer la puiſſance m de $x+\alpha y+\alpha^2 z$ par le théoreme de *Newton*, ce qui donnera

$$x^m+mx^{m-1}(y+\alpha z)\alpha+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(y+\alpha z)^2\alpha^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}(y+\alpha z)^3\alpha^3+, \&c.$$

ou bien, en formant les différentes puiſſances de $y+\alpha z$, & ordonnant enſuite, par rapport aux dimenſions de α,

$$x^m+mx^{m-1}y\alpha+(mx^{m-1}z+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2)\alpha^2 +(m(m-1)x^{m-2}yz+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y^3)\alpha^3 + \&c.$$

Mais comme dans cette formule on ne voit pas aiſément la loi des termes, nous ſuppoſerons en général

Digitized by Google

$(x+\alpha y+\alpha^2 z)^m = P + P^{I}\alpha + P^{II}\alpha^2 + P^{III}\alpha^3 + P^{IV}\alpha^4 + \&c.$

& l'on trouvera

$$P = x^m,$$

$$P^{I} = \frac{myP}{x},$$

$$P^{II} = \frac{(m-1)yP^{I} + 2mzP}{2x},$$

$$P^{III} = \frac{(m-2)yP^{II} + (2m-1)zP^{I}}{3x},$$

$$P^{IV} = \frac{(m-3)yP^{III} + (2m-2)zP^{II}}{4x} \&c.$$

c'eſt ce qui ſe démontre facilement par le calcul différentiel.

Maintenant on aura, à cauſe que α eſt une des racines de l'équation $f^3 - af^2 + bf - c = 0$, on aura, dis-je, $\alpha^3 - a\alpha^2 + b\alpha - c = 0$; d'où

$\alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha + c$; donc

$\alpha^4 = a\alpha^3 - b\alpha^2 + c\alpha = (a^2 - b)\alpha^2 - (ab - c)\alpha + ac$,

$\alpha^5 = (a^2 - b)\alpha^3 - (ab - c)\alpha^2 + ac\alpha = (a^3 - 2ab + c)\alpha^2 - (a^2b - b^2 - ac)\alpha + (a^2 - b)c$,

& ainſi de ſuite.

De ſorte que ſi on fait pour plus de ſimplicité

Digitized by Google

$$A^{I} = 0$$
$$A^{II} = 1$$
$$A^{III} = a$$
$$A^{IV} = aA^{III} - bA^{II} + cA^{I}$$
$$A^{V} = aA^{IV} - bA^{III} + cA^{II}$$
$$A^{VI} = aA^{V} - bA^{IV} + cA^{III}, \text{ \&c.}$$

$$B^{I} = 1$$
$$B^{II} = 0$$
$$B^{III} = b$$
$$B^{IV} = aB^{III} - bB^{II} + cB^{I}$$
$$B^{V} = aB^{IV} - bB^{III} + cB^{II}$$
$$B^{VI} = aB^{V} - bB^{IV} + cB^{III}, \text{ \&c.}$$

$$C^{I} = 0$$
$$C^{II} = 0$$
$$C^{III} = c$$
$$C^{IV} = aC^{III} - bC^{II} + cC^{I}$$
$$C^{V} = aC^{IV} - bC^{III} + cC^{II}$$
$$C^{VI} = aC^{V} - bC^{IV} + cC^{III}, \text{ \&c.}$$

on aura

$$\alpha = A^{I}\alpha^{2} - B^{I}\alpha + C^{I}$$
$$\alpha^{2} = A^{II}\alpha^{2} - B^{II}\alpha + C^{II}$$
$$\alpha^{3} = A^{III}\alpha^{2} - B^{III}\alpha + C^{III}$$
$$\alpha^{4} = A^{IV}\alpha^{2} - B^{IV}\alpha + C^{IV}, \text{ \&c.}$$

Digitized by Google

Subſtituant donc ces valeurs dans l'expreſſion de $(x+\alpha y+\alpha^2 z)^m$, elle ſe trouvera compoſée de trois parties, l'une toute rationnelle, l'autre toute multipliée par α, & la troiſieme toute multipliée par α^2; ainſi il n'y aura qu'à comparer la premiere à X, la ſeconde à αY, & la troiſieme à $\alpha^2 Z$, & l'on aura par ce moyen

$$X=P+P^{I}C^{I}+P^{II}C^{II}+P^{III}C^{III}+P^{IV}C^{IV}\ \&c.$$
$$Y=-P^{I}B^{I}-P^{II}B^{II}-P^{III}B^{III}-P^{IV}B^{IV}\ \&c.$$
$$Z=P^{I}A^{I}+P^{II}A^{II}+P^{III}A^{III}+P^{IV}A^{IV}\ \&c.$$

Ces valeurs ſatisferont donc à l'équation

$$X+\alpha Y+\alpha^2 Z=(x+\alpha y+\alpha^2 z)^m;$$

& comme la racine α n'entre point en particulier dans les expreſſions de X, Y & Z, il eſt clair qu'on pourra changer α en β, ou en γ; de ſorte qu'on aura également

$$X+\beta Y+\beta^2 Z=(x+\beta y+\beta^2 z)^m,$$

&

$$X+\gamma Y+\gamma^2 Z=(x+\gamma y+\gamma^2 z)^m.$$

Or multipliant enſemble ces trois équations, il eſt viſible que le premier membre ſera le même que celui de l'équation propoſée, & que le ſecond ſera égal à une

Digitized by Google

puiſſance m, dont la racine étant nommée V, on aura

$$V = x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz + (b^2 - 2ac)xz^2 + cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3.$$

Ainſi on aura les valeurs demandées de X, Y, Z & V, leſquelles renfermeront trois indéterminées x, y, z.

94. Si on vouloit trouver des formules de quatre dimenſions qui euſſent les mêmes propriétés que celles que nous venons d'examiner, il faudroit conſidérer le produit de quatre facteurs de cette forme,

$$x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 t$$
$$x + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 t$$
$$x + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 t$$
$$x + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 t,$$

en ſuppoſant que α, β, γ, δ fuſſent les racines d'une équation du quatrieme degré, telle que celle-ci,

$$f^4 - af^3 + bf^2 - cf + d = 0;$$

on aura ainſi

Digitized by Google

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=a,$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=b,$$
$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=c,$$
$$\alpha\beta\gamma\delta=d,$$

moyennant quoi on pourra déterminer tous les coefficiens des différens termes du produit dont il s'agit, ſans connoître les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en particulier. Mais comme il faudra faire pour cela différentes réductions qui peuvent ne pas ſe préſenter facilement, on pourra s'y prendre, ſi on le juge plus commode, de la maniere que voici.

Qu'on ſuppoſe en général

$$x+fy+f^2z+f^3t=p;$$

& comme f eſt déterminé par l'équation

$$f^4-af^3+bf^2-cf+d=0,$$

qu'on chaſſe f de ces deux équations par les regles connues, & l'équation réſultante de l'évanouiſſement de f étant ordonnée par rapport à l'inconnue p, montera au quatrieme degré; de ſorte qu'elle pourra ſe mettre ſous cette forme,

$$p^4-Np^3+Pp^2-Qp+R=0.$$

Or

Digitized by Google

Or cette équation en ρ ne monte au quatrieme degré que parce que $\int$ peut avoir les quatre valeurs α, β, γ, δ, & qu'ainſi ρ peut avoir auſſi ces quatre valeurs correſpondantes,

$$x+\alpha y+\alpha^2 z+\alpha^3 t$$
$$x+\beta y+\beta^2 z+\beta^3 t$$
$$x+\gamma y+\gamma^2 z+\gamma^3 t$$
$$x+\delta y+\delta^2 z+\delta^3 t,$$

leſquelles ne ſont autre choſe que les facteurs dont il s'agit d'avoir le produit. Donc, puiſque le dernier terme R doit être le produit de toutes les quatre racines, ou valeurs de ρ, il s'enſuit que cette quantité R ſera le produit demandé.

Mais en voilà aſſez ſur ce ſujet, que nous pourrons peut-être reprendre dans une autre occaſion.

Je terminerai ici ces Additions, que les bornes que je me ſuis preſcrites ne me permettent pas d'étendre plus loin; peut-être même les trouvera-t-on déjà trop longues; mais les objets que j'y ai traités étant d'un

Digitized by Google

genre assez nouveau & peu connu, j'ai cru devoir entrer dans plusieurs détails nécessaires pour se mettre bien au fait des méthodes que j'ai exposées, & de leurs différens usages.

FIN.

Digitized by Google

TABLE
DES MATIERES
CONTENUES
DANS LA SECONDE PARTIE.

DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

CHAP. I. *De la réſolution des équations du premier degré, qui renferment plus d'une inconnue*, p. 1

—— II. *De la regle qu'on nomme* regula cœci, *où il s'agit de déterminer, par deux équations, trois ou un plus grand nombre d'inconnues*, 30

—— III. *Des équations indéterminées compoſées, dans leſquelles l'une des inconnues ne paſſe pas le premier degré*, 42

Digitized by Google

CH. IV. *De la maniere de rendre rationnelles les quantités sourdes de la forme* $\sqrt{a+bx+cxx}$, p. 50

—— V. *Des cas où la formule* $a+bx+cxx$ *ne peut jamais devenir un carré*, 77

—— VI. *Des cas en nombres entiers, où la formule* $axx+b$ *devient un carré*, 96

—— VII. *D'une méthode particuliere, par laquelle la formule* $ann+1$ *devient un carré en nombres entiers*, 116

—— VIII. *De la maniere de rendre rationnelle la formule irrationnelle* $\sqrt{a+bx+cxx+dx^3}$, 135

—— IX. *De la maniere de rendre rationnelle la formule incommensurable* $\sqrt{a+bx+cxx+dx^3+ex^4}$, 153

—— X. *De la méthode de rendre rationnelle la formule irrationnelle* $\sqrt[3]{a+bx+cxx+dx^3}$, 177

Digitized by Google

CH. XI. *De la réſolution de la formule* axx+bxy+cyy *en ſes facteurs*, pag. 195

—— XII. *De la transformation de la formule* axx+cyy *en des carrés & en des puiſſances plus élevées*, 219

— XIII. *De quelques expreſſions de la forme* ax^4+by^4, *qui ne ſont pas réductibles à des carrés*, 242

— XIV. *Solutions de quelques queſtions qui appartiennent à cette partie de l'analyſe*, 263

—— XV. *Solutions de quelques queſtions où l'on demande des cubes*, 339

Digitized by Google

TABLE
DES MATIERES
CONTENUES DANS LES ADDITIONS.

Avertissement, pag. 371
§. I. *Sur les fractions continues*, 379
§. II. *Solutions de quelques problemes curieux & nouveaux d'Arithmétique*, 445
§. III. *Sur la réſolution des équations du premier degré à deux inconnues en nombres entiers*, 517
§. IV. *Méthode générale pour réſoudre en nombres entiers les équations à deux inconnues, dont l'une ne paſſe pas le premier degré*, 527
§. V. *Méthode directe & générale pour réſoudre les équations du ſecond degré à deux inconnues, en nombres rationnels*, 534

Digitized by Google

Réſolution de l'équation $Ap^2+Bq^2=z^2$ *en nombres entiers*, pag. 538

§. VI. *Sur les doubles & triples égalités*, 556

§. VII. *Méthode directe & générale pour réſoudre en nombres entiers les équations du ſecond degré à deux inconnues*, 561

Réſolution de l'équation $Cy^2-2nyz+Bz^2=1$ *en nombres entiers.*

Premiere méthode, 568

Seconde méthode, 572

De la maniere de trouver toutes les ſolutions poſſibles de l'équation $Cy^2-2nyz+Bz^2=1$, *lorſqu'on en connoît une ſeule*, 583

De la maniere de trouver toutes les ſolutions poſſibles en nombres entiers des équations du ſecond degré à deux inconnues, 595

§. VIII. *Remarques ſur les équations de la forme* $p^2=Aq^2+1$, *& ſur la maniere ordinaire de les réſoudre en nombres entiers*, 624

Digitized by Google

§. IX. *De la maniere de trouver des fonctions algébriques de tous les degrés, qui étant multipliées enſemble produiſent toujours des fonctions ſemblables,* pag. 636

Digitized by Google

APPROBATION.

J'AI lu par ordre de Monſeigneur le Chancelier la Traduction Françoiſe des *Elémens d'Algebre de M. Euler;* les moindres ouvrages des grands hommes ſont toujours précieux, les Additions que M. de la Grange a faites à celui-ci le rendent plus précieux encore. A Paris, le 17 Août 1771.

MARIE.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prévôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra: SALUT. Notre amé le Sieur J. M. BRUYSET, Libraire à Lyon, Nous a fait expoſer qu'il déſireroit faire imprimer & donner au Public *des Elémens d'Algebre par M. Euler, traduits de l'Allemand & enrichis de notes par M. Bernoulli, avec un traité d'Analyſe indéterminée par M. de la Grange;* s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui ſemblera, & de le vendre, faire vendre &

Digitized by Google

débiter par tout notre Royaume pendant le temps de ſix années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes. FAISONS défenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance ; comme auſſi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucuns extraits, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts ; A LA CHARGE que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en beau papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, à peine de déchéance du préſent Privilege ; qu'avant de l'expoſer en vente, le Manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier Garde des Sceaux de France, le Sieur DE MAUPEOU ; qu'il en ſera enſuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit Sieur DE MAUPEOU ; le tout à peine de nullité des Préſentes : DU CONTENU deſquelles vous mandons

Digitized by Google

& enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayans cauſes, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenue pour dûment ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers-Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris, le douzieme jour du mois de Septembre, l'an de grace mil ſept cent ſoixante & onze, & de notre Regne le cinquante-ſeptieme.

PAR LE ROI EN SON CONSEIL.

Signé LEBEGUE.

Regiſtré ſur le Regiſtre XVIII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 1638, fol. 530, *conformément au Réglement de 1723. A Paris, ce 17 Septembre 1771.*

Signé, J. HERISSANT, *Syndic.*

Digitized by Google

672

Digitized by Google

Digitized by Google