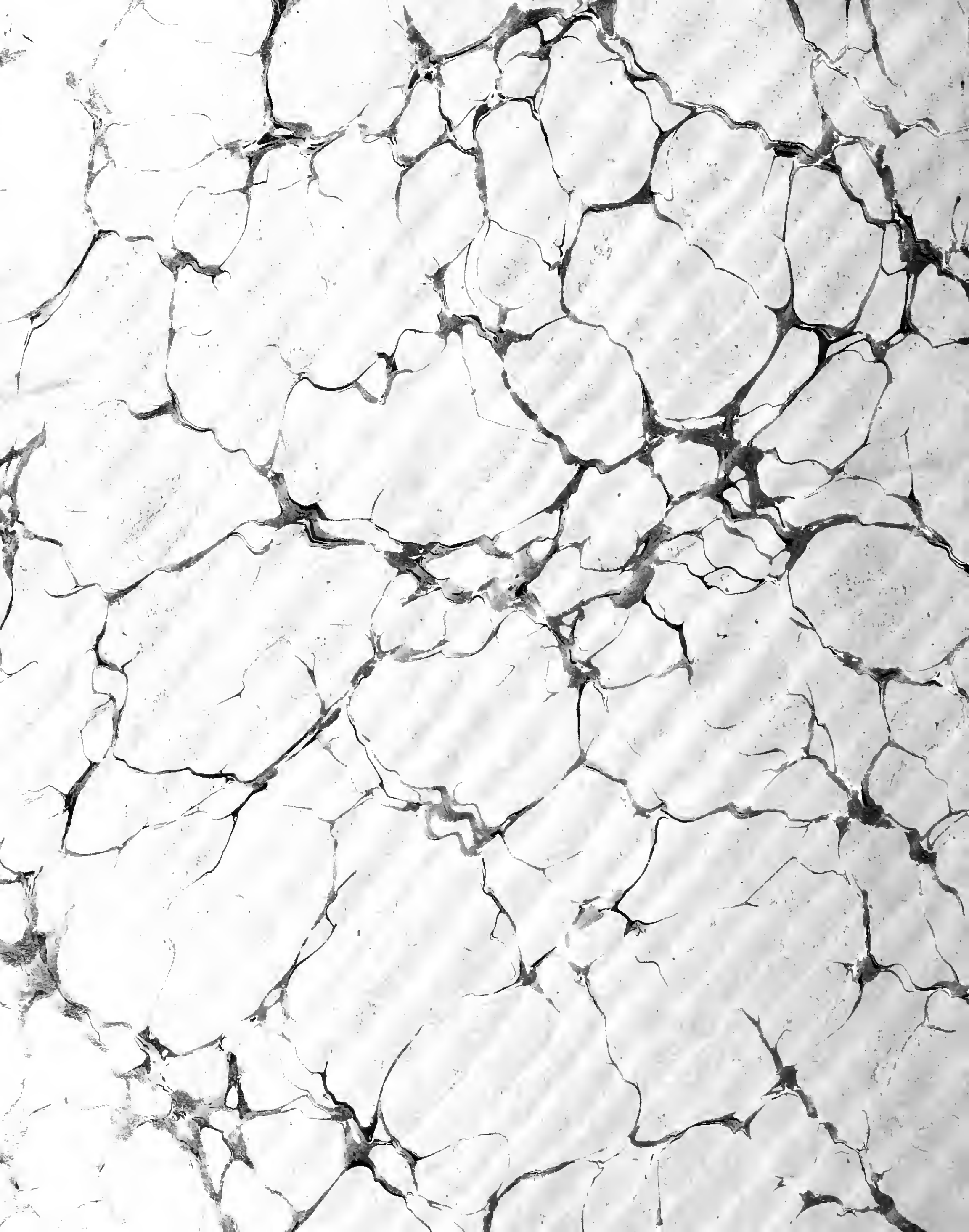
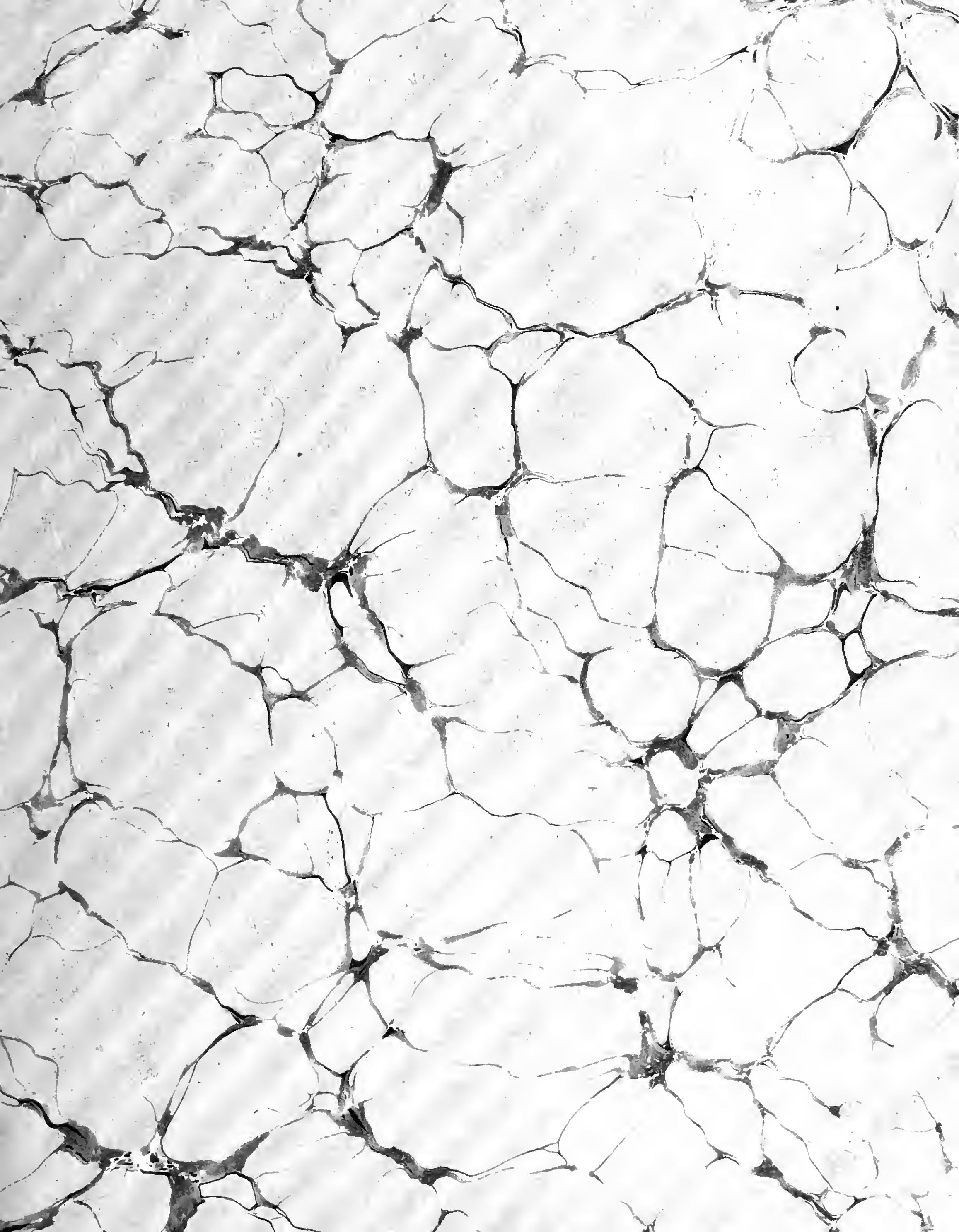




INTRODUCTION

A

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

INTRODUCTION

A

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE,

PAR LÉONARD EULER;

Traduite du latin en français, avec des Notes et des Éclaircissemens,

PAR J. B. LABEY,

Professeur de Mathématiques aux Écoles Centrales du Département de la Seine.

TOME SECOND.

(Imprimé en 1797.)

A PARIS,

Chez BACHELIER, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique, du Bureau des Longitudes, etc.,

QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

1835.

TABLE DES CHAPITRES

du Tome second.

INTRODUCTION A L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

TRAITÉ ABRÉGÉ DES SURFACES.

Fin de la Table des Chapitres du Tome second.

ERRATA du Tome second.

Nota. Quelques-unes des fautés d'impreſſion indiquées dans cet *Errata*, viennent du texte même, ſur lequel j'ai corrigé preſque toutes les épreuves, le temps ne m'ayant pas permis de refaire tous les calculs, à meſure que les feuilles s'imprimoient.

Page 6, lig. 35, *au lieu de* & parce que la nature d'une courbe, *mettez* ou lorſque la nature de la courbe
P. 13, lig. 5, *au lieu de* des quantités, *mettez* de quantités
Ibid. lig. 21, *au lieu de* t & u, *mettez* entre t & u,
P. 16, lig. 19, *au lieu de* eſt renfermée dans, *mettez* renferme
P. 19, lig. 2, *au lieu de* $\frac{\alpha}{6}$, mettez $\frac{a}{6}$;
P. 31, lig. 11, *au lieu de* où, *mettez* ou
P. 52, lig. 30, *au lieu de* *ſin.* PQM, mettez *ſin.* PMQ
P. 53, lig. 21, *après* $-\alpha$, *mettez* $=0$,
P. 58, lig. 1, *au lieu de* $CA.AP$, mettez $CA:AP$.
P. 59, à la marge, *au lieu de* Fig. 31, *mettez* Fig. 30.
P. 76, lig. 16, *au lieu de* Bi, mettez Ai
P. 78, lig. 22, *au lieu de* CH^2, mettez GH^2.
P. 80, lig. 18, *au lieu de* l'un ou l'autre, *mettez* l'un & l'autre
P. 89, lig. 8, *au lieu de* uo, *mettez* ou
P. 90, lig. 26, *au lieu de* $\frac{F}{g^5 t}$, mettez $\frac{F}{g^5 t^2}$
P. 92, lig. 12, *au lieu de* $ay+bx$, mettez $ay-bx$
P. 105, à la marge, *au lieu de* Pl. V. *mettez* Pl. IV.
P. 136, lig. 6, *au lieu de* e, mettez c
P. 149, lig. 17, *au lieu de* alternatives, *mettez* alternations;
Ibid. lig. 18, *au lieu de*, ſi les deux, *mettez* ſi deux
P. 151, lig. 11, *au lieu de* 0,933, *mettez* $-0{,}933$
P. 153, lig. 14, *au lieu de* mq, mettez Mq,
P. 163, lig. 17, *au lieu de* Eu^3, mettez Eu^2
P. 166, lig. 26, *au lieu de* qu'elle lui ſoit parallèle, *mettez* à ſa parallèle,
P. 168, lig. 4, *au lieu de* $A.\,A^2E$, mettez A^2E
Ibid. lig. 10, *au lieu de* $\frac{A^2MN^3}{b^4}$, mettez $\frac{a^2MN^3}{b^4}$.
P. 170, lig. 17, *au lieu de* appliquée s, *mettez* appliquée s négative,
Ibid. lig. 27, *au lieu de* $r\sqrt{(A^2+B^n)}$, mettez $r\sqrt{(A^2+B^2)}$
P. 175, lig. 2, *au lieu de* M, mettez m;
P. 180, lig. 20, *au lieu de* Q & R ou T & S, *mettez* Q & T ou R & S,
P. 186, à la marge, dernière indication, *mettez* Fig. 72.
P. 192, lig. 21, *au lieu de* AE, BE, mettez $AE\,BF$,
P. 194, lig. 29, *au lieu de* quarrés, *mettez* quarrés quarrés.
P. 199, lig. 12, *au lieu de* $-3v\sqrt[5]{a}$, mettez $-3v\sqrt[3]{a}$
Ibid. lig. 18, *au lieu de* $-3v\sqrt{a}$, mettez $-3v\sqrt[3]{a}$
Ibid. même ligne, *au lieu de* $-3v\sqrt[5]{aR}$, mettez $-3v\sqrt[3]{aR}$
P. 201, lig. 22 & 23, *au lieu de* l'origine x des abſciſſes, *mettez* l'origine des abſciſſes x,
P. 204, lig. 1, *au lieu de* $\sqrt{(\alpha^{\frac{2}{n}}+Q^2)}$, *mettez* $\sqrt{(a^{\frac{2}{n}}+Q^2)}$

P. 207, lig. 26, *au lieu de* $\pm\,\alpha^3$, mettez $\pm\,a^3$
P. 219, lig. 20, *au lieu de* $+\,6\,y^2$, mettez $+\,6\,x\,y$
P. 228, lig. 20, *au lieu de* CAM, mettez ACM
P. 230, lig. 28, *au lieu de* $-\,L^4 z^4$, mettez $+\,L^4 z^4$
P. 257, lig. 23, *au lieu de* $\frac{-}{r}$, mettez $\frac{-p}{r}$
P. 263, lig. 16, *au lieu de* $(Sp - Qs)$, mettez $(Sq - Qs)$
P. 267, lig. 1, *au lieu de* p^{n-1}, mettez $p\,y^{n-1}$
P. 268, lig. 19, *au lieu de* $Q^2 p$, mettez $Q^2 p^2$
P. 269, lig. 9, *au lieu de* $\alpha\,S$, mettez $\alpha\,s$.
P. 273, lig. 6, *au lieu de* $-\frac{B(a^2+b^2)}{4A^2a^2}$, mettez $\frac{-B^2(a^2+b^2)}{4A^2a^2}$
P. 277, lig. 15, *au lieu de* $\frac{AA}{15}$, mettez $\frac{2AA}{16}$
P. 278, lig. 22 & 23, *au lieu de* $-\,4\,BE$, *mettez* $-\,4\,BEE$
P. 281, lig. 30, *au lieu de* quarante-neuvième, *mettez* quarante-deuxième
P. 292, lig. 15, *au lieu de* $\frac{u^3}{6b^2}$, mettez $\frac{u^3}{6b^3}$
P. 294, lig. 5, *au lieu de* & $\frac{a}{3} + l.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. *mettez* & $\frac{a}{3} + l.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;
P. 295, lig. 33, *au lieu de* B, mettez C
P. 307, lig. 1, *au lieu de* $\frac{2v^2}{2n^2}$, mettez $\frac{v^2}{2n^2}$
P. 312, lig. 22, *au lieu de* ACB, mettez AEB
P. 315, à la marge, *au lieu de* Fig. 115, *mettez* Fig. 113.
P. 316, à la marge, *au lieu de* Fig. 24, *mettez* Fig. 114.
Ibid. lig. 8, *au lieu de* au demi-cercle, *mettez* à la moitié du demi-cercle
P. 319, lig. 23, *au lieu de* cos. $(45^\circ - \frac{1}{2})\,s$, *mettez* cos. $(45^\circ - \frac{1}{2}s)$
P. 322, lig. dernière, *au lieu de* 50°, *mettez* 5°
P. 335, lig. 6 & 7, *au lieu de* $\frac{pqR}{VIII}$, mettez $\frac{pqr}{VIII}$
P. 337, lig. 8, *au lieu de* z, y, z, mettez z, y, x
P. 360, lig. 12, *au lieu de* cos. θ. sin. φ au dénominateur, *mettez* cos. θ. cos. φ
Ibid. lig. 29, *au lieu de* cos. $n\,n$, *mettez* cos. n^2
P. 364, avant-dernière ligne, *au lieu de* $\frac{-}{m}$ *f. sin.* φ, mettez $\frac{n^2}{m}$. *f. sin.* φ
P. 378, lig. 13, *au lieu de* celle-ci, *mettez* celles-ci
P. 380, lig. 10, *au lieu de* α au dénominateur, *mettez* $2\,\alpha$
P. 383, lig. 21, *au lieu de* $\alpha z =$, mettez $2\,a\,z =$
P. 387, lig. 2, *au lieu de* ne manque. Mais, *mettez* ne manque, mais
P. 392, lig. 13, *après* genre, *mettez* parce qu'ils sont ou droits ou scalènes,
Ibid. lig. 20, *au lieu de* égal, *mettez* égalé
P. 400, au commencement de la ligne 20, *mettez* 147.
P. 413, lig. 19, *au lieu de* $a^{\frac{n-m}{n}}\,x^{\frac{m}{}}$, mettez $a^{\frac{n-m}{n}}\,x^{\frac{n-m}{n}}$
P. 416, lig. 1, *au lieu de* $\frac{l}{k} > \frac{m}{}$, mettez $\frac{l}{k} > \frac{m}{n}$

*Fin de l'*Errata *du Tome second.*

INTRODUCTION

INTRODUCTION

A

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

LIVRE SECOND,

CONTENANT la Théorie des Lignes courbes, avec un Traité abrégé des Surfaces.

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes Courbes en général.

1. UNE quantité variable étant une grandeur conſidérée en général, qui renferme toutes les valeurs déterminées; une droite indéfinie, telle que RS, ſera très-propre à repréſenter, en géométrie, une quantité de cette nature. En effet, puiſqu'on peut prendre ſur une droite indéfinie, une partie quelconque, qui ait une valeur déterminée, cette ligne préſente à l'eſprit la même idée de grandeur, que la quantité variable. Il faut donc, avant tout, fixer ſur une ligne indéfinie RS un point A, qui ſera cenſé l'origine des grandeurs déterminées, qu'on en ſéparera; ainſi une portion déterminée AP repréſentera une valeur déterminée compriſe dans la quantité variable. Pl. I. Fig. 1.

2. Soit donc x une quantité variable, repréſentée par la droite indéfinie RS; il eſt clair que toutes les valeurs déterminées de x, pourvu qu'elles ſoient réelles, peuvent être exprimées par des portions priſes ſur la ligne RS. Par exemple,

si le point P tombe sur le point A, l'intervalle AP, devenant nul, représentera la valeur de $x=0$; mais plus le point P s'éloignera du point A, plus la valeur déterminée de x représentée par l'intervalle AP deviendra grande.

On appelle ces intervalles AP, ABSCISSES.

Ainsi les abscisses représentent les valeurs déterminées de la variable x.

3. Or, comme la droite indéfinie RS s'étend à l'infini de part & d'autre du point A, on pourra aussi couper de part & d'autre toutes les valeurs de x. Mais, si nous prenons les valeurs positives de x, en allant sur la droite depuis le point A, les intervalles Ap situés sur la gauche représenteront les valeurs négatives de x. En effet, puisque plus le point P s'éloigne du point A vers la droite, plus est grande la valeur de x représentée par l'intervalle AP; réciproquement, plus le point P s'éloigne vers la gauche, plus la valeur de x est diminuée; &, si P tombe sur A, la valeur de x devient $=0$. C'est pourquoi, si le point P est reculé davantage vers la gauche, les valeurs de x deviendront plus petites que zéro, c'est-à-dire, seront négatives, & les intervalles Ap pris sur la gauche depuis le point A, représenteront les valeurs négatives de x, si les intervalles AP, situés à la droite, sont censés représenter les valeurs positives. Au reste, il est indifférent de prendre du côté qu'on voudra les valeurs positives de x; car le côté opposé renfermera toujours les valeurs négatives.

Pl. I. Fig. 2. 4. Puisqu'une ligne droite indéfinie est propre à représenter une quantité variable x, cherchons à présent une manière très-commode de représenter géométriquement une fonction quelconque de x. Soit y cette fonction de x; laquelle par conséquent recevra une valeur déterminée, si on substitue pour x une valeur donnée. Ayant pris une droite indéfinie RAS pour représenter les valeurs de x, il faudra, pour chaque valeur déterminée AP de x, élever sur cette ligne une perpendiculaire PM, égale à la valeur correspondante de y; c'est-à-dire que, si la valeur de y est positive, il faudra la placer au-dessus de RS; mais, si la valeur de y devient négative, il faudra la placer perpendiculairement au-dessous de la droite

RS. Car les valeurs positives de y étant prises au-dessus de la droite RS, celles qui deviennent nulles tomberont sur la ligne même RS, & celles qui sont négatives, au-dessous.

5. La figure donne donc pour y une fonction de x, telle qu'en faisant $x=0$, y a une valeur positive $=AB$; qu'en faisant $x=AP$, $y=PM$; que si $x=AD$, y devient $=0$, & que si $x=AP$, la fonction y prend une valeur négative, & par conséquent la perpendiculaire PM tombe au-dessous de la droite RS. De même les valeurs de y, qui répondent aux valeurs négatives de x, sont représentées par des perpendiculaires placées au-dessus de RS, si elles sont positives; & dans le cas contraire, elles doivent être placées au-dessous de la droite RS, comme pm : mais, si pour une valeur quelconque de x, comme $-x=AE$, y devient $=0$; alors la longueur de la perpendiculaire devient nulle.

6. Si donc, pour chaque valeur donnée de x, on détermine de cette manière les valeurs correspondantes de y; on élevera à chaque point P de la droite RS des perpendiculaires PM, qui exprimeront les valeurs de la fonction y : l'une des extrémités P tombera sur la droite RS, & l'autre M au-dessus de RS, si les valeurs de y sont positives; ou au-dessous, si elles sont négatives; ou même sur la ligne RS, si elles sont égales à zéro, comme il arrive aux points D & E. Les extrémités M de chacune des perpendiculaires représenteront une certaine ligne droite ou courbe, qui par conséquent se trouvera déterminée par la fonction y. Ainsi chaque fonction de x, rapportée de cette manière à la géométrie, donnera une ligne droite ou courbe, dont la nature dépendra de celle de la fonction y.

7. On connoît parfaitement, en suivant ce procédé, la ligne courbe qui résulte de la fonction y, puisque c'est cette fonction qui en détermine tous les points; en effet, pour chaque point P on a la longueur de la perpendiculaire PM, dont l'extrémité M appartient à la courbe; & on trouve ainsi tous les points de cette ligne. Or, quelle que soit la nature de la courbe, on peut mener de chacun de ses points des perpendiculaires à la droite RS; on a par-là les intervalles AP, qui

expriment les valeurs de la variable x; & les longueurs des perpendiculaires PM, qui repréſentent les valeurs de la fonction y; ainſi il n'y aura aucun point de la courbe, qui ne ſoit déterminé de cette manière par le moyen de la fonction y.

8. Quoiqu'on puiſſe décrire mécaniquement pluſieurs lignes courbes par le mouvement continu d'un point, qui préſente aux yeux la courbe dans ſon enſemble; nous les conſidérons ici principalement comme le réſultat de fonctions; cette manière de les enviſager étant plus analytique, plus générale & plus propre au calcul. Ainſi une fonction quelconque de x donnera une certaine ligne droite ou courbe; d'où il ſuit que réciproquement on pourra rapporter aux fonctions les lignes courbes. Par conſéquent, la nature d'une ligne courbe ſera déterminée par une fonction de x, qui repréſentera toujours la longueur de la perpendiculaire MP, tandis que les intervalles AP pris ſur la ligne RS, ſur laquelle tombent les perpendiculaires MP abaiſſées de chaque point M de la courbe, ſont indiqués par la variable x.

9. De cette idée des lignes courbes découle naturellement leur diviſion en *continues*, & en *diſcontinues* ou *mixtes*. La ligne courbe continue eſt celle dont la nature eſt exprimée par une ſeule fonction déterminée de x. Mais, ſi la ligne courbe eſt compoſée de différentes portions BM, MD, DM, &c. déterminées par pluſieurs fonctions de x, de manière qu'une partie BM étant le réſultat d'une fonction, une autre MD ſoit celui d'une ſeconde fonction; nous appelons ces ſortes de lignes courbes *diſcontinues*, ou *mixtes* & *irrégulières*, parce qu'elles ne ſont pas formées ſuivant une ſeule loi conſtante, & qu'elles ſont compoſées de portions de différentes courbes continues.

10. Il s'agit principalement en géométrie de courbes continues, & on fera voir dans la ſuite que les courbes, qui ſont décrites mécaniquement d'un mouvement uniforme, ſuivant une certaine loi conſtante, peuvent auſſi être exprimées par une fonction unique, & que par conſéquent ce ſont des courbes continues. Soit donc $mEBMDM$ une ligne courbe continue,

dont la nature eſt exprimée par une fonction quelconque y de x; il eſt évident qu'en prenant ſur la droite RS depuis un point fixe A des valeurs déterminées de x, les valeurs correſpondantes de y donnent la longueur des perpendiculaires PM.

11. Il y a dans ce que nous venons de dire ſur la nature des courbes, certains noms à retenir, & dont l'uſage revient très-fréquemment dans leur théorie.

D'abord la droite RS, ſur laquelle ſe prennent les valeurs de x, s'appelle l'AXE, ou la *directrice*.

Le point A, depuis lequel ſe comptent les valeurs de x, ſe nomme l'*origine des abſciſſes*.

Les parties de l'axe AP qui repréſentent les valeurs déterminées de x, s'appellent ordinairement ABSCISSES.

Et on a donné le nom d'APPLIQUÉES * aux perpendiculaires PM, menées des extrémités des abſciſſes à la courbe.

Les appliquées ſont dites dans ce cas-ci *perpendiculaires* ou *orthogonales*, parce qu'elles font avec l'axe un angle droit; & comme les appliquées PM peuvent de même faire avec l'axe un angle oblique, on les appelle alors des *appliquées obliques*. Au reſte, dans l'explication que nous ferons de la nature des courbes, nous emploierons conſtamment des appliquées perpendiculaires, à moins que nous n'avertiſſions expreſſément du contraire.

12. Si donc une abſciſſe quelconque AP eſt repréſentée par la variable x, de manière qu'on ait $PA = x$; alors la fonction y indiquera la grandeur de l'appliquée PM, & on aura $PM = y$. La nature de la ligne courbe, lorſqu'elle eſt continue, dépendra donc de celle de la fonction, ou de la manière dont les quantités x, y & les conſtantes ſont combinées entre elles. Ainſi la portion AS priſe ſur l'axe RS ſera le lieu des abſciſſes poſitives, & la portion AR celui des abſciſſes négatives;

* Les appliquées ſe nomment encore ordinairement *ordonnées*; mais Euler paroît avoir réſervé la dénomination d'*ordonnées* aux droites qui partent d'un point de la courbe, & qui ſe terminent à un autre point de cette courbe; c'eſt ce qu'il appelle auſſi *cordes*, comme on le verra par la ſuite.

quant aux appliquées, les positives tomberont au-dessus de l'axe RS, & les négatives au-dessous.

13. Une fonction quelconque de x donnant naissance à une ligne courbe continue, il s'ensuit qu'on pourra par son moyen la connoître & la décrire. Car donnons à x des valeurs positives, qui croissent successivement depuis o jusqu'à ∞, & cherchons pour chacune les valeurs correspondantes de la fonction y, qui soient représentées par des appliquées menées au-dessus ou au-dessous, suivant qu'elles sont positives ou négatives; on aura la portion de la courbe BMM. En donnant ensuite semblablement à x toutes les valeurs négatives depuis o jusqu'à ∞, les valeurs correspondantes de y détermineront la portion BEm de la courbe; ainsi toute la courbe renfermée dans la fonction se trouvera décrite.

14. Puisque y est une fonction de x, il s'ensuit ou que y sera égal à une fonction explicite de x, ou qu'on aura une équation entre x & y, qui déterminera la valeur de y en x. Dans les deux cas on dit que cette équation exprime la nature de la courbe. C'est pourquoi la nature d'une ligne courbe quelconque est donnée par une équation entre deux variables x & y, dont la première x représente les abscisses comptées sur l'axe depuis leur origine A, & la seconde les appliquées perpendiculaires à l'axe. Ces abscisses & ces appliquées considérées ensemble s'appellent les COORDONNÉES *perpendiculaires*. Ainsi on dit que la nature d'une ligne courbe est exprimée par une équation entre les coordonnées perpendiculaires, lorsqu'on a entre x & y une équation, qui exprime la nature de la fonction y.

15. Puisque la connoissance des lignes courbes est ramenée à celle des fonctions, il y aura autant d'espèces de lignes courbes que nous avons vu qu'il y avoit de fonctions différentes. Ainsi les courbes se divisent très-bien, de même que les fonctions, en *algébriques* & en *transcendantes*. La courbe sera algébrique, si l'appliquée y est une fonction algébrique de l'abscisse x; &, parce que la nature d'une courbe est exprimée par une équation algébrique entre les coordonnées x & y, on a coutume d'appeler aussi ces sortes de lignes des

courbes *géométriques*. Une courbe *tranfcendante* eft celle dont la nature eft exprimée par une équation tranfcendante entre x & y, ou dans laquelle y devient une fonction tranfcendante de x. Telle eft la principale divifion des lignes courbes continues, qui font ou *algébriques* ou *tranfcendantes*.

16. Pour décrire une ligne courbe réfultante d'une fonction de x, qui donne la valeur de l'appliquée y, il faudra bien faire attention à la nature de cette fonction, pour favoir fi elle eft uniforme ou multiforme. Suppofons d'abord que y foit une fonction uniforme de x, ou que $y = P$, P défignant une fonction quelconque uniforme de x; comme en donnant à x une valeur quelconque déterminée, il en réfulte auffi pour y une valeur déterminée; il s'enfuit qu'à chaque abfciffe répondra une appliquée, & que par conféquent la courbe fera d'une forme telle que, fi on élève à un point quelconque P de l'axe RS une perpendiculaire PM, cette perpendiculaire coupera toujours la courbe, & cela en un feul point M. Ainfi à chaque point de l'axe répondra un point de la courbe; & comme l'axe s'étend à l'infini des deux côtés, la courbe s'étendra auffi à l'infini de part & d'autre; ou la courbe qui naîtra d'une telle fonction, fe prolongera à l'infini de part & d'autre avec l'axe par un cours continu, ainfi que le fait voir la figure 2, où la ligne courbe $mEBMDM$ s'étend à l'infini fans interruption à droite & à gauche.

17. Soit y une fonction biforme de x; ou bien, les lettres P & Q défignant des fonctions uniformes de x, foit $yy = 2Py - Q$, ou $y = P \pm \sqrt{(PP - Q)}$. On voit qu'à chaque abfciffe x répond une double appliquée y; & l'une & l'autre eft ou réelle ou imaginaire, fuivant que PP eft $> Q$ ou $< Q$. Ainfi, tant que les deux valeurs de y feront réelles, il y aura pour chaque abfciffe AP deux appliquées PM, PM; ou la perpendiculaire élevée fur l'axe au point P coupera la courbe dans deux points M & M. Mais lorfque $PP < Q$, il n'y a plus d'appliquée, qui réponde à l'abfciffe; ou la perpendiculaire à l'axe menée par ces points ne rencontrera la courbe nulle part; c'eft ce qui arrive au point p. Mais comme auparavant PP étoit $> Q$; PP n'a pu devenir $< Q$, qu'en paffant Pl. I. Fig. 3.

par le cas où $PP = Q$, qui eſt la limite entre les appliquées réelles & imaginaires. Ainſi, lorſque les appliquées ceſſent d'être réelles, comme en C ou en G, y devient alors $= P \pm o$; c'eſt-à-dire que les deux appliquées deviennent égales entre elles, & la courbe forme en ce point une inflexion dans ſon cours.

18. Il eſt clair, d'après l'inſpection de la figure, que, tant que l'abſciſſe négative $-x$ eſt renfermée entre les limites AC & AE, l'appliquée y eſt imaginaire; mais qu'en avançant vers la gauche au-delà du point E, les appliquées redeviennent réelles; ce qui ne peut arriver, à moins qu'on n'ait en E, $PP = Q$, & que par conſéquent les deux appliquées ne ſe confondent. Alors aux abſciſſes AP répond de nouveau une double appliquée Pm, Pm, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé en G, où les deux appliquées ſe confondent; & au-delà de G, elles ſont encore imaginaires. Une telle courbe pourra donc être compoſée de deux ou de pluſieurs parties ſéparées les unes des autres, comme $MBDBM$ & $Fm\ Hm$: cependant l'enſemble de ces parties eſt cenſé ne former qu'une ligne courbe continue ou régulière, parce que ces parties réſultent d'une ſeule & même fonction. Ces courbes ont donc cette propriété que, ſi on prolonge les perpendiculaires MM élevées à chaque point de l'axe, elles ne rencontreront la courbe nulle part, ou elles la couperont en deux points, à moins que par haſard les deux points d'interſection ne ſe réuniſſent en un ſeul, ce qui arrive lorſque les appliquées paſſent par les points D, F, H & I.

19. Si y eſt une fonction triforme de x, ou ſi y eſt déterminé par l'équation $y^3 - Py^2 + Qy - R = o$; P, Q & R étant des fonctions uniformes de x, alors, pour chaque valeur de x, l'appliquée y aura trois valeurs, qui ſeront toutes réelles, ou dont l'une ſeulement le ſera, tandis que les deux autres ſeront imaginaires. Toutes les appliquées couperont donc la courbe ou en trois points, ou ſeulement en un ſeul, à moins que deux ou même trois points d'interſection ne ſe réuniſſent en un ſeul. Puiſqu'il répond à chaque abſciſſe au moins une appliquée réelle, il s'enſuit que la courbe s'étend à l'infini avec l'axe

l'axe de part & d'autre. La courbe ſera donc formée d'un ſeul trait continu comme dans la *figure quatrième;* ou de deux parties ſéparées l'une de l'autre, comme dans la *figure cinquième;* ou même d'un plus grand nombre de parties, qui pourtant ne conſtituent enſemble qu'une ſeule & même courbe continue. Pl. I. Fig. 4 & 5.

20. Si y eſt une fonction quadriforme de x, ou ſi y eſt donné par l'équation $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$, on aura pour chaque valeur de x, ou quatre valeurs réelles correſpondantes de y, ou deux ſeulement, ou enfin on n'en aura aucune. Ainſi, dans une courbe qui eſt le réſultat d'une fonction quadriforme, les appliquées couperont la courbe ou en quatre points, ou en deux ſeulement, ou ne la couperont nulle part; ces cas ſont repréſentés par la *figure ſixième* : il faut diſtinguer les points I & o, où deux points d'interſection ſe réuniſſent en un ſeul. C'eſt pourquoi, tant à droite qu'à gauche, ou la courbe n'aura aucune branche qui s'étende à l'infini, ou elle en aura deux, ou elle en aura quatre. Dans le premier cas où nulle branche de la courbe ne s'étend à l'infini d'aucun côté, la courbe ſera fermée de toute part, ainſi que le fait voir la figure, & elle renfermera un eſpace déterminé. On peut donc déjà conclure de ce qui précède la nature des lignes courbes, qui ſont formées de fonctions multiformes d'un degré quelconque. Pl. I. Fig. 6.

21. Si y eſt une fonction multiforme, ou eſt déterminé par une équation, dans laquelle n ſoit le plus grand expoſant de la puiſſance y; dans ce cas le nombre des valeurs réelles de y ſera ou n, ou $n-2$, ou $n-4$, ou $n-6$, &c.; chaque appliquée coupera donc la courbe en autant de points. Ainſi, ſi une appliquée coupe la courbe continue en m points, toutes les autres la couperont en un nombre de points, qui différera toujours de m d'un nombre pair; la courbe ne pourra donc être coupée nulle part par une appliquée en $m+1$, ou $m-1$, ou $m \pm 1$, &c. points; c'eſt-à-dire, que ſi le nombre des interſections d'une appliquée eſt pair ou impair, toutes les autres appliquées couperont auſſi la courbe en un nombre de points pair ou impair.

22. Par conſéquent ſi une appliquée coupe la courbe en un

nombre de points impair, il eſt impoſſible qu'il y ait un point où elle ne puiſſe plus être rencontrée par une autre. La courbe aura donc, de chaque côté, au moins une branche infinie, & ſi de part & d'autre il y a pluſieurs branches, qui s'étendent à l'infini, le nombre en doit être impair, puiſque le nombre des interſections de chaque appliquée ne peut être pair; donc, ſi on compte de part & d'autre toutes les branches qui s'étendent à l'infini, leur nombre ſera conſtamment pair. La même remarque a lieu, ſi les appliquées rencontrent la courbe en un nombre pair de points, car alors il n'y aura de part & d'autre en particulier aucune branche qui s'éloigne à l'infini, ou il y en aura deux, ou quatre, &c.; & par conſéquent le nombre de toutes les branches infinies ſera encore pair. Nous avons donc déjà acquis la connoiſſance de quelques propriétés remarquables, qui appartiennent aux courbes continues & régulières, & qui peuvent ſervir à les diſtinguer des courbes diſcontinues & irrégulières.

CHAPITRE II.

Du changement des Coordonnées.

23. De même qu'au moyen de l'équation entre les coordonnées x & y, dont la première repréſente l'abſciſſe, & la ſeconde l'appliquée, on décrit une courbe déterminée ſur un axe RS, en prenant à volonté un point A pour l'origine des abſciſſes; de même, réciproquement, ſi la courbe eſt déjà décrite, ſa nature pourra être exprimée par une équation entre
Pl. I. Fig. 2. les coordonnées. Mais ici, quoique la courbe ſoit donnée, deux choſes cependant reſtent indéterminées, ſavoir la poſition de l'axe RS, & l'origine A des abſciſſes; &, comme on peut les varier d'une infinité de manières, il s'enſuit qu'on pourra avoir pour une même ligne courbe une quantité innombrable d'équations; c'eſt pourquoi on ne peut pas toujours de

la diverfité des équations conclure celle des lignes courbes qu'elles renferment, quoique des courbes différentes donnent toujours des équations différentes.

24. Puifqu'en faifant varier l'axe & l'origine des abfciffes, on multiplie indéfiniment les équations, qui expriment la nature d'une même courbe, il faut donc qu'elles foient toutes d'une telle forme, qu'une feule une fois donnée puiffe faire trouver toutes les autres; car l'équation donnée entre les coordonnées fait connoître la courbe même, &, celle-ci une fois connue, fi on prend une droite quelconque pour l'axe, & fur cette ligne un point pour l'origine des abfciffes, l'équation entre les coordonnées perpendiculaires fera déterminée. Nous donnerons donc dans ce chapitre une méthode, au moyen de laquelle l'équation d'une courbe étant donnée, on puiffe trouver pour un autre axe quelconque, & une autre origine des abfciffes, une équation entre les coordonnées, laquelle exprime la nature de la même courbe : on trouvera de cette manière toutes les équations, qui peuvent convenir à la même courbe, & il fera ainfi plus facile de juger de la diverfité des lignes courbes par celle des équations.

25. Soit donc donnée une équation quelconque entre x & Pl.I. Fig. 7.
y, au moyen de laquelle, après avoir pris une droite RS pour l'axe, & le point A pour l'origine des abfciffes, de manière que x repréfente l'abfciffe AP, & y l'appliquée PM, on ait décrit la courbe CBM, dont la nature par conféquent eft exprimée par cette équation. Confervons d'abord le même axe RS, & prenons fur cet axe un autre point D pour l'origine des abfciffes, de forte qu'à préfent au point M de la courbe réponde l'abfciffe DP, que je fuppofe $= t$, l'appliquée MP reftera la même qu'auparavant & $= y$: cherchons une équation entre t & y propre à exprimer la nature de la courbe CBM. Soit $= f$ la diftance AD, qui tombe à la gauche du point A du côté des abfciffes négatives, on aura $DP = t = f + x$, & par conféquent $x = t - f$. Si dans l'équation donnée entre x & y on fubftitue par-tout pour x $t - f$, on aura une équation entre t & y, qui repréfentera la même ligne courbe CBM; & comme la grandeur $AD = f$

eſt arbitraire, il s'enſuit que nous avons déjà une infinité d'équations, qui repréſentent toutes la même courbe.

26. Si la courbe rencontre quelque part l'axe RS comme en C, alors en prenant ce point C pour l'origine des abſciſſes, on aura une équation, qui, en faiſant l'abſciſſe $CP = 0$, donnera en même temps pour l'appliquée PM une quantité nulle, pourvu qu'il n'y en ait qu'une qui réponde au point C de l'axe. Au reſte, l'interſection C, s'il y en a une ou pluſieurs, ſe trouvera, au moyen de l'équation propoſée, entre x & y, en ſuppoſant $y = 0$, & en cherchant, d'après cette ſuppoſition, la valeur ou les valeurs de x; car, à l'endroit où la courbe rencontre l'axe, y devient $= 0$, &, réciproquement, en faiſant $y = 0$, on aura toutes les abſciſſes, ou les valeurs de x, où la courbe tombe ſur l'axe.

27. On changera donc l'origine des abſciſſes, ſans changer l'axe, en augmentant ou en diminuant l'abſciſſe x d'une quantité donnée, c'eſt-à-dire, en écrivant $t - f$ à la place de x; la quantité f ſera poſitive, ſi la nouvelle origine des abſciſſes D tombe à la gauche du point A, & la quantité f ſera négative, ſi le point D tombe à la droite du même point A.

Pl. I. Fig. 8. Suppoſons maintenant que la courbe LBM ayant été décrite au moyen d'une équation donnée entre $AP = x$ & $PM = y$, on prenne un autre axe rs parallèle au premier, & ſur cet axe le point D pour l'origine des abſciſſes : que cet axe tombe du côté des appliquées négatives, & que ſa diſtance AF du premier $= g$; & que l'intervalle $DF = AG = f$. Si on fait ſur ce nouvel axe l'abſciſſe DQ, qui répond au point $M = t$, & l'appliquée $QM = u$, on aura $t = DF + FQ = f + x$, & $u = PM + PQ = g + y$; ce qui donne $x = t - f$, & $y = u - g$. C'eſt pourquoi, ſi dans l'équation donnée entre x & y on met par-tout $t - f$ à la place de x, & $u - g$ à la place de y, on aura l'équation entre t & u, qui exprimera la nature de la même ligne courbe.

28. Puiſque les grandeurs f & g ſont à notre choix, & qu'il y a pour cette raiſon une infinité de manières de les déterminer, il y aura infiniment plus d'équations dans ce cas-ci que

dans le premier, qui toutes, cependant, appartiendront à la même ligne courbe. Donc, ſi deux équations, l'une entre x & y & l'autre entre t & u, diffèrent entre elles de manière cependant que l'une puiſſe ſe transformer en l'autre, en augmentant ou en diminuant les coordonnées de l'une des quantités données, les deux équations, quoique différentes, appartiendront néanmoins à la même courbe. On pourra donc former facilement de cette manière tant d'équations différentes qu'on voudra, qui toutes ſeront propres à exprimer la nature d'une même courbe.

29. Suppoſons que le nouvel axe rs ſoit perpendiculaire au premier RS & qu'il le coupe à l'origine des abſciſſes A, de manière que l'origine des abſciſſes ſoit la même pour les deux axes. Comme on a par rapport à l'axe RS l'équation de la courbe LM entre l'abſciſſe $AP = x$, & l'ordonnée $PM = y$; ſoit menée du point M de la courbe ſur le nouvel axe rs la perpendiculaire MQ, & ſoit la nouvelle abſciſſe $AQ = t$, & la nouvelle appliquée $QM = u$; à cauſe du parallélogramme rectangle $APMQ$, on aura $t = y$ & $u = x$. Donc, au moyen de l'équation donnée entre x & y, on formera l'équation t & u, en mettant u à la place de x, & t à la place de y. Ainſi la première abſciſſe x devient l'appliquée $QM = u$, & la première appliquée y devient l'abſciſſe $AQ = t$; il n'y aura donc pour ce nouvel axe aucun autre changement dans l'équation, ſinon que les coordonnées x & y ſont échangées: c'eſt pour cela qu'on appelle ordinairement l'abſciſſe & l'appliquée les coordonnées, étant indifférent laquelle des deux quantités on prend pour l'abſciſſe ou pour l'appliquée; car une équation étant donnée entre deux coordonnées x & y, il en réſulte la même courbe, ſi on prend x ou y pour repréſenter l'abſciſſe. Pl. I. Fig. 9.

30. Nous avons ſuppoſé ici que la portion As du nouvel axe rs repréſentoit les abſciſſes poſitives, & que la droite de l'axe rs étoit le lieu des appliquées poſitives; comme cela eſt arbitraire, on pourra les changer à volonté. Par exemple, ſi la portion Ar de l'axe eſt deſtinée aux abſciſſes poſitives, on aura alors $AQ = -t$; ainſi dans l'équation entre x & y il

faudra mettre $-t$ au lieu de y; si on suppose ensuite que la droite de l'axe rs soit réservée pour les appliquées négatives, QM deviendra $=-u$, & on devra écrire $-u$ au lieu de x. On comprend par-là que la nature d'une ligne courbe ne change pas, quoiqu'on fasse dans son équation une des coordonnées ou toutes les deux négatives, ce qu'il sera bon de se rappeler dans tous les changemens d'équation.

Pl.II. Fig. 10. 31. Supposons que le nouvel axe rs coupe le premier RS sous un angle quelconque SAs, & que l'intersection soit faite au point A qui deviendra par-là l'origine commune des abscisses pour les deux axes. Soit donnée pour l'axe RS une équation quelconque pour la courbe LM entre l'abscisse $AP=x$, & l'appliquée $PM=y$; on veut trouver l'équation à la même courbe pour le nouvel axe rs, ou, en imaginant abaissée du point M de la courbe au nouvel axe la perpendiculaier MQ, une équation entre l'abscisse $AQ=t$, & l'appliquée $MQ=u$. Soit l'angle $SAs=q$, son sinus $=m$ & son cosinus $=n$; ayant pris l'unité pour le sinus total, de manière que $mm+nn=1$; Soient menées du point P les perpendiculaires Pp & Pq sur les nouvelles coordonnées; on aura $AP=x$, $Pp=x.\ \mathit{sin}.\ q$; $Ap=x.\ \mathit{cos}.\ q$. Ensuite, comme l'angle $PMQ=PAQ=q$, on aura, à cause de $PM=y$, $Pq=Qp=y.\ \mathit{sin}.\ q$; $Mq=y.\ \mathit{cos}.\ q$. On tirera donc de là $AQ=t=Ap-Qp=x.\ \mathit{cos}.\ q-y.\ \mathit{sin}.\ q$; & $QM=u=Mq+Pp=x.\ \mathit{sin}.\ q+y.\ \mathit{cos}.\ q$.

32. Mais, comme nous avons fait $\mathit{sin}.\ q=m$, $\mathit{cos}.\ q=n$, nous aurons $t=nx-my$ & $u=mx+ny$; & par suite $nt+mu=n^2x+m^2x=x$, & $nu-mt=n^2y+m^2y=y$. On trouvera donc l'équation cherchée entre t & u, si dans l'équation proposée entre x & y on écrit par-tout $mu+nt$ au lieu de x, & $nu-mt$ au lieu de y, pourvu toutefois que la portion As de l'axe renferme les abscisses positives, & que les appliquées positives tombent du côté de QM. Nous avons aussi supposé ici que l'angle SAs tomboit du côté des appliquées négatives; car si As tomboit au-dessus de AS, il faudroit faire dans le calcul l'angle $SAs=q$ négatif, & par conséquent son sinus m devroit être pris négativement.

33. Donnons à préſent au nouvel axe rs une poſition quelconque, & prenons, à volonté, ſur cet axe un point D pour l'origine des abſciſſes. Soit RS le premier axe pour lequel on a l'équation entre l'abſciſſe $AP = x$ & l'appliquée $PM = y$, laquelle exprime la nature de la courbe LM; il s'agit d'avoir l'équation entre les autres coordonnées t & u rapportées au nouvel axe rs. Soit abaiſſée de chaque point M de la courbe ſur le nouvel axe rs la perpendiculaire MQ; ſoit faite l'abſciſſe $DQ = t$, & l'appliquée $QM = u$. Pour trouver l'équation cherchée, menons du point D, nouvelle origine des abſciſſes, la perpendiculaire DG ſur le premier axe RS, & faiſons $AG = f$, & $DG = g$; enſuite ſoit menée par le point D parallèlement au premier axe RS la ligne DO, qui ſoit rencontrée en O par le prolongement de la première appliquée PM; on aura $MO = y + g$ & $DO = GP = x + f$. Enfin, ſoit l'angle $ODQ = q$, dont le ſinus $= m$, & le coſinus $= n$, le ſinus total étant toujours $= 1$, de ſorte que $mm + nn = 1$. Pl. II. Fig. 11.

34. Soient abaiſſées maintenant du point O ſur le nouvel axe DQ & ſur l'appliquée MQ les perpendiculaires Op & Oq; à cauſe de l'angle $OMQ = ODQ$, de $DO = x + f$, & de $MO = y + g$, on aura $Op = Qq = (x + f)\ \mathit{ſin.}\ q = mx + mf$, & $Dp = (x + f)\ \mathit{coſ.}\ q = nx + nf$; enſuite $Oq = Qp = (y + g)\ \mathit{ſin.}\ q = my + mg$, & $Mq = (y + g)\ \mathit{coſ.}\ q = ny + ng$. On conclura de là $DQ = t = nx + nf - my - mg$, & $QM = u = mx + mf + ny + ng$; on aura ainſi les nouvelles coordonnées t & u en x & en y. On en tirera $nt + mu = x + f$, & $nu - mt = y + g$, à cauſe de $mm + nn = 1$; on aura donc $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, qui ſeront les valeurs qu'il faudra ſubſtituer dans l'équation entre x & y, au lieu de ces quantités, pour avoir l'équation entre t & u, qui exprimera la nature de la même courbe.

35. Puiſqu'on ne peut imaginer aucun axe rs, pourvu qu'il ſoit ſitué dans le même plan que la courbe, qui ne ſe trouve compris dans cette dernière ſolution, il n'exiſtera non plus pour la même courbe LM, entre les coordonnées perpendi-

culaires, aucune équation, qui ne ſoit renfermée dans celle qui a été trouvée entre t & u; &, comme on peut varier d'une infinité de manières les quantités f & g, ainſi que l'angle q qui détermine m & n, il s'enſuit que toutes les équations, qui ſont compriſes dans celle qu'on vient d'obtenir de cette manière entre t & u, expriment la nature de la même courbe. C'eſt pourquoi on a coutume d'appeler cette équation entre t & u l'équation générale de la courbe LM, parce qu'elle renferme généralement toutes celles qui appartiennent à la même ligne.

36. Nous avons donné à entendre auparavant qu'il étoit difficile de juger, par la diverſité de quelques équations entre les coordonnées, ſi elles appartenoient à la même courbe ou à des courbes différentes : il ſe préſente à préſent un moyen de réſoudre toutes ces ſortes de queſtions. En effet, ſoient propoſées deux équations, l'une entre x & y, & l'autre entre t & u; ſoient ſuppoſés dans la première $x = mu + nt - f$, & $y = nu - mt - g$, dans laquelle m & n dépendent mutuellement l'une de l'autre, de manière que $mm + nn = 1$; alors il faudra voir ſi cette nouvelle équation entre t & u eſt renfermée dans celle qu'on a déjà; ou ſi les quantités f, g avec m & n peuvent être déterminées de manière qu'il en réſulte l'autre équation entre t & u. Si cela peut ſe faire, ce ſera une preuve que les deux équations expriment la même ligne courbe; ſinon, elles appartiennent à des courbes différentes.

EXEMPLE.

On verra de cette manière que ces deux équations

$$yy - ax = 0$$

&

$$16u^2 - 24tu + 9t^2 - 55au + 10at = 0,$$

appartiennent à la même courbe, quoiqu'elles diffèrent beaucoup entre elles. En effet, ſi nous ſuppoſons dans la première équation $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, elle ſe transformera en celle-ci :

$$\left.\begin{array}{l} n^2u^2 - 2mntu + m^2t^2 - 2ngu + 2mgt + gg \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - mau - nat + af \end{array}\right\} = 0$$

Pour

Pour savoir si cette équation contient l'autre, multiplions celle-ci par nn, & la dernière par 16, afin que les premiers termes soient les mêmes de part & d'autre, on aura :

$$16n^2u^2 - 24n^2tu + 9n^2t^2 - 55n^2au + 10n^2at = 0$$

&

$$16n^2u^2 - 32mntu + 16m^2t^2 - 32ngu + 32mgt + 16g^2 - 16mau - 16nat + 16af = 0$$

Cherchons à présent combien il y a de termes à égaler pour déterminer les quantités arbitraires f, g, m & n; nous aurons d'abord $24n^2 = 32mn$, & $9n^2 = 16m^2$; chacune de ces équations donne $3n = 4m$, &, comme $m^2 = 1 - n^2$, on aura aussi $25n^2 = 16$, par conséquent $n = \frac{4}{5}$, & $m = \frac{3}{5}$; voilà donc déjà trois termes qui se conviennent. Le quatrième & le cinquième donnent $55n^2a = 32ng + 16ma$, & $10n^2a = 32mg - 16na$; d'où il faut savoir si l'on tirera pour g la même valeur; la première équation donne $g = \frac{55na}{32} - \frac{ma}{2n} = \frac{11a}{8} - \frac{3}{8}a = a$, & la seconde, $g = \frac{5n^2a}{16m} + \frac{na}{2m} = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = a$; les deux valeurs sont les mêmes, & les cinq premiers termes s'accordent : il ne reste plus qu'à satisfaire à l'équation $gg + af = 0$, ce qui ne souffre aucune difficulté, puisque f n'a point encore été déterminée; on aura $f = -a$. On a donc fait voir que les deux équations proposées représentent la même courbe.

37. Mais, quoiqu'il puisse arriver que des équations très-différentes appartiennent à la même courbe, cependant de la différence des équations on conclut souvent en sûreté celle des lignes courbes; c'est lorsque les équations proposées sont de différens degrés, ou que les plus grandes dimensions, que forment les coordonnées x & y ou t & u, sont différentes dans les deux équations; car, à coup sûr, dans ce cas, les lignes conrbes qu'elles représentent, seront aussi différentes. En effet, de quelque ordre que soit une équation entre x & y, si on fait $x = mu + nt - f$, & $y = nu - mt - g$, il en

résultera entre t & u une équation du même ordre ; donc, si une autre équation proposée entre t & u appartient à un autre ordre, elle exprimera aussi une autre courbe.

38. Ainsi, toutes les fois que deux équations proposées, l'une entre x & y & l'autre entre t & u, ne sont pas du même ordre, on en pourra conclure sur-le-champ que les courbes qu'elles expriment sont différentes. Il ne peut donc plus y avoir de doute que pour les cas où les deux équations sont du même ordre ; & alors il faudra s'aider du moyen que nous venons d'expliquer : mais, comme cette recherche est assez pénible, lorsque les équations sont d'un degré plus élevé, nous donnerons dans la suite des règles plus expéditives, qui feront juger sur-le-champ de la variété des courbes.

Pl. II. Fig. 12. 39. Ce que nous venons de prescrire, pour trouver l'équation générale, qui appartient à une ligne courbe quelconque, peut aussi s'appliquer à la ligne droite. Car, soit proposée, au lieu d'une ligne courbe, la droite LM que nous supposerons parallèle à l'axe RS : dans quelque endroit qu'on place l'origine A des abscisses, l'appliquée PM sera toujours d'une grandeur constante, ou $y = a$: telle est l'équation de la ligne droite parallèle à l'axe. Cherchons à présent l'équation générale de la ligne droite, rapportée à un axe quelconque rs ; ayant fait $DG = g$, le sinus de l'angle $ODs = m$, le cosinus $= n$, & ayant appelé l'abscisse $DQ = t$, & l'appliquée $MQ = u$, à cause de $y = nu - mt - g$, on aura $nu - mt - g - a = 0$, équation générale de la ligne droite. Multiplions-la par la constante k, & supposons $nk = \alpha$, $mk = -\beta$ & $(g + a)k = -b$, nous aurons l'équation $\alpha u + \beta t + b = 0$ pour la ligne droite ; comme c'est l'équation générale du premier ordre entre t & u, il est clair qu'aucune équation du premier ordre entre deux coordonnées ne représente une ligne courbe, mais bien une ligne droite.

Pl. II. Fig. 13. 40. Toutes les fois donc qu'on aura entre les coordonnées x & y une équation de cette forme : $\alpha x + \beta y - a = 0$, elle appartiendra à une ligne droite, dont on déterminera ainsi la position à l'égard de l'axe RS. Soit fait d'abord $y = 0$, on trouvera par-là sur l'axe le point C où cette droite le coupe ;

car AC devient $= \frac{a}{\alpha}$; ſoit fait enſuite $x = 0$, y deviendra $= \frac{a}{6}$, qui eſt la valeur de l'appliquée AB à l'origine des abſciſſes; & puiſqu'on a deux points B & C ſur la droite demandée, elle ſera déterminée, & par conſéquent la droite LN ſatisfera à l'équation propoſée. Car, ſoit ſuppoſée une abſciſſe quelconque $AP = x$, & l'appliquée correſpondante $MP = y$, on aura, à cauſe de la ſimilitude des triangles CPM, CAB; $CP : PM :: CA : AB$, c'eſt-à-dire $\frac{a}{\alpha} - x : y :: \frac{a}{\alpha} : \frac{a}{6}$, d'où l'on tirera $\frac{ay}{\alpha} = \frac{a^2}{\alpha 6} - \frac{ax}{6}$ ou $\alpha x + 6y = a$, qui eſt l'équation propoſée.

41. Si α ou $6 = 0$, cette conſtruction ne pourra plus avoir lieu; mais ces cas ſont très-faciles par eux-mêmes; car ſoit $\alpha = 0$, & $y = a$, il eſt clair que la ligne qui ſatiſfait eſt une droite parallèle à l'axe, & qui en eſt éloignée d'une quantité $= a$; ſi $a = 0$, ou $y = 0$, la ligne qui ſatiſfera ſe confondra avec l'axe. Mais, ſi $6 = 0$, & $x = a$, il eſt évident que la ligne qui ſatiſfait eſt une droite perpendiculaire à l'axe, qui eſt éloignée de l'origine des abſciſſes d'une quantité $= a$; c'eſt-à-dire, que dans ce cas il ne répond qu'une ſeule abſciſſe à toutes les appliquées, de ſorte que l'abſciſſe ceſſe d'être une quantité variable. On voit donc clairement, d'après cela, comment les lignes droites peuvent être déſignées par des équations entre des coordonnées perpendiculaires.

42. Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que les coordonnées, qui exprimoient la nature de la courbe, étoient perpendiculaires entre elles; mais on déterminera ſemblablement la ligne courbe au moyen d'une équation donnée, ſi les appliquées ſont inclinées à l'axe ſous un angle quelconque; donc, réciproquement, la nature d'une courbe pourra être exprimée par une équation entre deux coordonnées obliques; & on peut, ſans changer la courbe, faire varier ces équations d'une infinité de manières, en variant l'axe & l'origine des abſciſſes; ainſi on peut obtenir l'équation générale de la courbe pour chaque obliquité des coordonnées; mais ſi on ſuppoſe auſſi que l'obliquité varie,

l'équation de la courbe ſera encore beaucoup plus étendue, & nous l'appellerons pour cette raiſon l'équation la plus générale, parce qu'elle exprime la nature de la courbe, non-ſeulement en ſuppoſant l'équation rapportée à un axe quelconque & à une origine quelconque des abſciſſes, mais encore pour toute eſpèce d'obliquité entre les coordonnées. Ainſi cette équation la plus générale de toutes deviendra l'équation générale que nous avons donnée, ſi l'angle que font entre elles les coordonnées eſt droit.

Pl. II. Fig. 14. 43. Soit donnée pour la courbe LM une équation entre les coordonnées perpendiculaires ; & ſans changer l'axe RS ni l'origine A des abſciſſes, cherchons l'équation entre les coordonnées, qui font entre elles un angle φ. Du point M ſoit menée à l'axe RS la droite MQ, qui faſſe l'angle donné MQA, dont le ſinus $= \mu$ & le coſinus $= \nu$; AQ ſera donc la nouvelle abſciſſe, & MQ, la nouvelle appliquée : en faiſant $AQ = t$ & $QM = u$, on aura dans le triangle rectangle PMQ, $\frac{y}{u} = \mu$ & $\frac{PQ}{u} = \nu = \frac{t-x}{u.}$. Donc $u = \frac{y}{\mu}$, & $t = \nu u + x = \frac{\nu y}{\mu} + x$; & réciproquement $y = \mu u$ & $x = t - \nu u$. Conſéquemment, ſi dans l'équation propoſée entre x & y on ſuppoſe $x = t - \nu u$ & $y = \mu u$, on aura l'équation entre les coordonnées obliques t & u, qui font entre elles un angle donné φ.

44. Mais, ſi l'équation de la courbe LM eſt donnée entre les coordonnées obliques AQ & QM, on en pourra conclure réciproquement l'équation de la même courbe entre les coordonnées perpendiculaires AP & PM. Car, ſoit φ l'angle que les appliquées MQ font avec les abſciſſes AQ, dont le ſinus $= \mu$ & le coſinus $= \nu$, & ſoit donnée l'équation entre $AQ = t$ & $QM = u$; il faudra mener du point M ſur l'axe la perpendiculaire MP, & ayant fait l'abſciſſe $AP = x$ & l'appliquée $MP = y$; comme $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \frac{\nu y}{\mu} + x$, en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation propoſée entre t & u, on obtiendra l'équation entre x & y, que l'on cherchoit.

45. Etant donnée maintenant une équation entre les coordonnées perpendiculaires $AP = x$ & $PM = y$, relativement à une courbe LM; on pourra trouver de cette manière l'équation la plus générale, qui convient à cette même courbe. Soit prise une droite quelconque rs pour l'axe, & sur cette ligne un point D pour l'origine des abscisses; que les appliquées MT menées à cet axe fassent un angle $DTM = \varphi$, dont le sinus $= \mu$, & le cosinus $= \nu$; on aura donc une nouvelle abscisse DT & une nouvelle appliquée TM, entre lesquelles il s'agit de trouver l'équation. Du point D soit menée sur le premier axe RS la perpendiculaire DG, & soit $AG = f$, $DG = g$; ayant mené DO parallèlement à l'axe RS, soit le sinus de l'angle $ODs = m$, & le cosinus $= n$. Abaissons, comme nous l'avons fait auparavant, du point M sur le nouvel axe rs la perpendiculaire MQ, & supposons $DQ = t$, $QM = u$; soient les coordonnées obliques $DT = r$, $TM = s$; on aura d'abord $t = r - \nu s$ & $u = \mu s$ (art. 43); ensuite $x = mu + nt - f$, & $y = nu - mt - g$ (art. 36). On conclura de-là $x = nr - (n\nu - m\mu)s - f$ & $y = -mr + (\mu n + \nu m)s - g$; équations dans lesquelles la quantité $n\nu - m\mu$ exprime le cosinus de l'angle AVM, que les nouvelles appliquées font avec le premier axe RS, & la quantité $\mu n + \nu m$ exprime le sinus du même angle AVM. Donc, si dans l'équation entre x & y on substitue les valeurs qu'on a trouvées pour x & y, on aura l'équation entre les coordonnées obliques r & s, qui sera l'équation la plus générale, qui appartienne à la courbe LM. Pl. II. Fig. 15.

46. Comme dans les valeurs qu'on substitue pour x & pour y, les nouvelles variables r & s n'ont qu'une dimension, il est évident que l'équation la plus générale est du même ordre que l'équation proposée entre x & y. Ainsi, de quelque manière qu'on transforme l'équation d'une courbe, en changeant, comme on voudra, l'axe & l'origine des abscisses avec l'inclinaison mutuelle des coordonnées, l'équation restera toujours du même ordre. Donc, quoiqu'une équation entre les coordonnées, soit perpendiculaires, soit obliques, puisse varier d'une infinité de manières, sans cesser d'appartenir à la même

courbe; cependant on ne pourra jamais la ramener à un degré ſupérieur ou inférieur. C'eſt pour cela que des équations d'un ordre différent, quelque affinité qu'elles paroiſſent avoir d'ailleurs, repréſenteront toujours des courbes différentes.

CHAPITRE III.

De la Diviſion des Lignes courbes algébriques en Ordres.

47. COMME il y a une variété infinie de lignes courbes ainſi que de fonctions, il ſera impoſſible d'en acquérir la connoiſſance, à moins qu'on ne faſſe de cette multitude infinie des claſſes bien diſtinctes, & qu'on n'aide & dirige, par ce moyen, l'eſprit dans leur examen. Nous avons déjà diviſé les courbes en *algébriques* & en *tranſcendantes;* mais ces deux diviſions, à cauſe de la variété infinie des courbes, ont beſoin d'une ſubdiviſion ultérieure. Au reſte, nous ne conſidérons pour le préſent que les courbes *algébriques*, qu'il s'agit ici de claſſer de la manière la plus avantageuſe. Il faut donc d'abord fixer les caractères qui les diſtinguent, afin de rapporter à la même claſſe celles qui préſentent le même caractère, & à une autre celles qui en préſentent un différent.

48. Les caractères diſtinctifs de ces différentes claſſes ne peuvent donc ſe tirer d'ailleurs que des fonctions ou équations qui repréſentent la nature des lignes courbes, parce qu'il n'y a pas encore d'autre moyen d'arriver à la connoiſſance des courbes, & qu'aucun autre connu ne peut s'appliquer à toutes les courbes algébriques. Or, on peut diſtribuer de pluſieurs manières, en différens genres, les fonctions & les équations entre deux coordonnées, comme nous l'avons fait dans le premier livre. Le point de vue qui ſe préſente d'abord, & qui paroît le plus favorable pour la diviſion des lignes courbes en différentes claſſes, eſt de conſidérer les fonctions ſous le rapport de leur multiformité. Il s'enſuivroit

de-là que les lignes courbes, qui naiſſent des fonctions uniformes, ſeroient rapportées au premier genre ; que celles qui proviennent des fonctions biformes, ſeroient du ſecond genre, & que celles qui réſultent des fonctions triformes, appartiendroient au troiſième genre ; ainſi de ſuite.

49. Quoique cette diviſion paroiſſe naturelle, cependant, ſi on y fait un peu plus d'attention, elle ne ſe trouvera nullement conforme à la nature & au caractère des lignes courbes. Car la multiformité des fonctions dépend principalement de la poſition de l'axe, laquelle eſt arbitraire ; de ſorte que ſi pour un axe l'appliquée eſt une fonction uniforme de l'abſciſſe, elle peut en devenir, en changeant l'axe, une fonction multiforme ; de cette manière une même ligne courbe ſe trouveroit appartenir à différens genres, ce qui ne rempliroit pas notre but. Par exemple, la ligne courbe renfermée dans l'équation $a^3y = a^2x^2 - x^4$ appartiendroit au premier genre, parce que l'appliquée y eſt une fonction uniforme de x ; mais en échangeant les coordonnées, ou en prenant un axe perpendiculaire au premier, la même courbe ſera repréſentée par l'équation $y^4 - a^2y^2 + a^3x = 0$, & appartiendroit par conſéquent au quatrième genre. On ne peut donc admettre la multiformité des fonctions pour établir un caractère diſtinctif entre les différentes claſſes de lignes courbes.

50. La ſimplicité que les équations, qui expriment la nature des lignes courbes, peuvent préſenter, eu égard au nombre de leurs termes, n'eſt pas plus propre à fixer leur diſtinction. En effet, ſi on rapporte au premier genre les courbes dont l'équation eſt compoſée de deux termes, comme $y^m = \alpha x^n$; au ſecond, celles dont l'équation renferme trois termes, comme $\alpha y^m + \beta y^p x^q + \gamma x^n = 0$; & ainſi de ſuite : il eſt clair que la même ligne appartiendroit encore à pluſieurs genres. Car l'exemple donné art. 36 nous apprendroit que la ligne courbe, qui eſt repréſentée par l'équation $yy - ax = 0$, devroit être rapportée à la fois au premier genre & au quatrième, puiſqu'en changeant l'axe, elle eſt auſſi exprimée par cette équation :

$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0.$$

Elle devroit auſſi, en choiſiſſant un autre axe & une autre origine des abſciſſes, appartenir en même temps au ſecond genre, au troiſième & au cinquième : cette diviſion n'eſt donc pas admiſſible.

51. Nous éviterons ces inconvéniens, en prenant, pour claſſer les courbes, les ordres des équations qui expriment la relation entre les coordonnées. Car, pour une même courbe, l'équation reſtant toujours du même ordre, de quelque manière qu'on varie l'axe & l'origine des abſciſſes & même l'inclinaiſon des coordonnées, une même ligne courbe ne ſera plus rapportée à différentes claſſes. Si on prend donc pour caractère diſtinctif le nombre des dimenſions que les coordonnées perpendiculaires ou obliques forment dans l'équation, on ne troublera plus l'ordre des claſſes, en changeant l'axe ou l'origine des abſciſſes, ou en faiſant varier l'inclinaiſon des coordonnées; & la même courbe ſera toujours rangée dans la même claſſe, ſoit qu'on prenne chaque équation particulière entre les coordonnées, ſoit qu'on prenne l'équation générale, ou même la plus générale. Ainſi le caractère diſtinctif tiré du degré des équations convient parfaitement à la diſtinction des lignes courbes.

52. Comme nous avons appelé *ordres* les divers genres d'équations que conſtitue le nombre plus ou moins grand de dimenſions, nous diſtinguerons par le même nom les différens genres de lignes qui en réſultent. Conſéquemment, l'équation générale du premier ordre étant

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y,$$

nous rapporterons au premier ordre toutes les lignes courbes qui, en prenant x & y pour coordonnées perpendiculaires ou obliques, proviennent de cette équation. Mais nous avons vu ci-deſſus que cette équation renfermoit ſeulement la ligne droite; donc le premier ordre comprend la ſeule ligne droite, qui eſt la plus ſimple de toutes les lignes; & comme par cette raiſon le nom de courbe ne convient pas au premier ordre, nous ne diſtinguerons point les différens ordres par le nom de *lignes courbes*, mais ſimplement par le terme générique de *lignes ;* ainſi le premier ordre des lignes ne renferme aucune courbe, & comprend uniquement la ligne droite.

53. Au

53. Au reste, il est indifférent que les coordonnées soient perpendiculaires ou non; car, si les appliquées font avec l'axe un angle ϕ, dont le sinus soit μ & le cosinus ν, on ramenera l'équation aux coordonnées perpendiculaires, en faisant $y=\frac{u}{\mu}$, & $x=\frac{\nu u}{\mu}+t$ (art. 44); ce qui donne pour l'équation entre les perpendiculaires t & u

$$o=\alpha+\beta t+\left(\frac{\beta\nu}{\mu}+\frac{\gamma}{\mu}\right)u.$$

Comme elle s'applique à autant de cas que la première, car l'une & l'autre est générale, il s'ensuit évidemment que la signification de l'équation ne se trouve pas restreinte, quoique l'angle que les appliquées font avec l'axe, soit supposé droit. Il en sera de même des équations des ordres supérieurs, qui n'en seront pas moins générales, quoique les coordonnées soient perpendiculaires. Ainsi, puisque la détermination de l'inclinaison des appliquées sur l'axe ne fait rien perdre de sa généralité à une équation générale d'un ordre quelconque, nous ne mettrons aucune restriction à ce qu'elle signifie, en supposant les coordonnées perpendiculaires; car, quelle que soit la ligne courbe comprise dans une équation générale d'un ordre quelconque, lorsque les coordonnées font entre elles des angles obliques, la même ligne sera renfermée dans la même équation, si elles font des angles droits.

54. Toutes les lignes du second ordre seront comprises dans cette équation générale du second ordre

$$o=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2;$$

c'est-à-dire que nous rangerons parmi les lignes du second ordre, toutes les lignes courbes que cette équation exprime, x & y désignant les coordonnées perpendiculaires. Ces lignes courbes sont donc les plus simples de toutes, puisqu'il n'y a point de lignes courbes dans le premier ordre; c'est pour cette raison que quelques-uns les appellent les lignes courbes du premier ordre. Mais les courbes renfermées dans cette équation sont plus connues sous le nom de *Sections coniques*, parce qu'elles résultent toutes de la section d'un cône. Ces différentes espèces de lignes sont le Cercle, l'Ellipse, la

Parabole & l'Hyperbole, que nous déduirons dans la ſuite de l'équation générale.

55. On rapporte aux lignes du troiſième ordre toutes les courbes que peut donner l'équation générale ſuivante du troiſième ordre :

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \varkappa y^3,$$

x & y étant pris pour les coordonnées perpendiculaires, puiſque la condition de l'obliquité des appliquées ne change rien à l'expreſſion de cette équation, comme nous l'avons déjà remarqué. Il y a dans cette équation beaucoup plus de lettres conſtantes que dans la précédente, & qu'on peut déterminer à volonté ; auſſi le nombre des eſpèces différentes compriſes dans cet ordre eſt-il beaucoup plus conſidérable. NEWTON en a fait l'énumération.

56. On regarde comme appartenant au quatrième ordre toutes les lignes courbes, que fournit l'équation générale du quatrième ordre :

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \varkappa y^3 + \lambda x^4 + \mu x^3 y + \nu x^2 y^2 + \xi xy^3 + o y^4,$$

en prenant toujours x & y pour les coordonnées perpendiculaires; car, encore une fois, l'obliquité des appliquées n'ajoute rien à la généralité de l'équation. Il y a dans cette dernière équation quinze quantités conſtantes, qu'on peut déterminer à volonté ; ce qui donne une variété d'eſpèces encore beaucoup plus conſidérable pour cet ordre que pour le précédent. On appelle ordinairement ces lignes du quatrième ordre les courbes du troiſième ordre, parce que le ſecond ordre des lignes en général ne forme que le premier ordre des courbes; & que pareillement les lignes du troiſième ordre ſe confondent avec les courbes du ſecond.

57. On comprend déjà par ce qui précède quelles ſont les lignes courbes qui appartiennent au cinquième ordre, au ſixième, au ſeptième & aux ſuivans ; mais comme il faut ajouter à l'équation générale du quatrième ordre, les termes

$$x^5;\ x^4 y;\ x^3 y^2;\ x^2 y^3;\ xy^4;\ y^5;$$

pour avoir l'équation générale qui renferme toutes les lignes du cinquième ordre; cette dernière ſera compoſée de vingt &

un termes : & l'équation générale qui comprend toutes les lignes courbes du sixième ordre, aura vingt-huit termes, & ainsi des autres suivant la loi des nombres triangulaires. Ainsi l'équation générale pour les lignes de l'ordre n contiendra $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ termes, & autant de lettres constantes, qu'on peut déterminer à volonté.

58. Il ne faut pas croire que chaque détermination différente des constantes produise des courbes différentes; car nous avons vu dans le chapitre précédent qu'on pouvoit avoir pour une même ligne courbe, en changeant l'axe & l'origine des abscisses, une infinité d'équations différentes; ainsi la diversité des équations qui appartiennent au même ordre, ne mène point à la diversité des courbes indiquées par ces équations. C'est pourquoi dans l'énumération des genres & des espèces du même ordre, que l'on déduit de l'équation générale, il faut bien prendre garde de rapporter la même ligne courbe à deux espèces, ou à un plus grand nombre.

59. Puisque l'ordre de l'équation proposée entre les coordonnées fait connoître celui de la ligne courbe; étant donnée une équation algébrique quelconque entre les coordonnées x & y, on saura tout de suite à quel ordre il faudra rapporter la courbe représentée par cette équation. D'abord, si l'équation est irrationnelle, il faudra la délivrer de son irrationnalité, &, s'il y a des fractions, il faudra de même les faire disparoître; cela fait, le nombre le plus grand des dimensions que forment les variables x & y, indiquera l'ordre auquel appartient la ligne courbe. Ainsi la courbe que donne cette équation $yy - ax = 0$, sera du second ordre; mais la courbe renfermée dans cette équation $yy = x\sqrt{(a^2 - x^2)}$, laquelle, débarrassée de son irrationnalité, devient du quatrième ordre, sera du quatrième ordre; & la ligne courbe que fournit cette équation $y = \frac{a^3 - axx}{aa + xx}$ sera du troisième ordre, parce que l'équation, après qu'on a fait disparoître les fractions, devient $aay + xxy = a^3 - axx$, où le terme x^2y renferme trois dimensions.

60. Il eſt poſſible qu'une ſeule & même équation donne pluſieurs lignes courbes différentes, ſuivant que les appliquées tombent ſur l'axe ou perpendiculairement, ou ſous une obliquité donnée. Par exemple, cette équation $yy = ax - xx$ donne un Cercle, lorſque les coordonnées ſont ſuppoſées perpendiculaires; mais, ſi les coordonnées ſont obliques, la courbe ſera une Ellypſe. Cependant toutes ces courbes différentes appartiennent au même ordre, parce que le changement des coordonnées obliques en coordonnées perpendiculaires n'influe pas ſur l'ordre de la courbe. Ainſi, quoique la grandeur de l'angle que forment les appliquées avec l'axe, n'ajoute ou n'ôte rien à la généralité de l'équation, qui exprime les lignes courbes de chaque ordre, cependant une équation particulière étant donnée, la courbe qu'elle renferme ne ſera déterminée qu'autant que l'angle que font entre elles les coordonnées le ſera auſſi.

61. Pour qu'une ligne courbe ſe rapporte proprement à l'ordre indiqué par l'équation, il faut que cette équation ne puiſſe ſe décompoſer en facteurs rationnels; car, ſi elle étoit compoſée de deux ou de pluſieurs facteurs, alors elle comprendroit deux ou pluſieurs équations, dont chacune engendreroit une ligne courbe particulière, & la réunion de ces courbes feroit tout ce que l'équation propoſée pourroit repréſenter. Ces ſortes d'équations qui ſont décompoſables en facteurs, ne renferment donc pas une ſeule courbe continue, mais pluſieurs à la fois, dont chacune peut être exprimée par une équation particulière; ces courbes n'ont pas d'autre connexion entre elles, que celle qui réſulte de la multiplication de leurs équations les unes par les autres; &, comme cette connexion eſt entièrement dépendante de notre volonté, de telles courbes ne peuvent pas être cenſées former une ſeule ligne continue. Ces équations que nous avons auparavant appelées complexes, produiront des lignes courbes non continues, mais compoſées cependant de courbes continues; c'eſt la raiſon qui les a fait appeler complexes.

62. Ainſi cette équation $y^2 = ay + xy - ax$ qui paroît appartenir à une ligne du ſecond ordre, ſi on la réduit à zéro,

en faisant $yy - ay - xy + ax = 0$, sera composée de ces facteurs $(y-x)(y-a) = 0$: elle renferme donc ces deux équations $y - x = 0$ & $y - a = 0$. L'une & l'autre appartient à la ligne droite; la première forme avec l'axe à l'origine des abscisses un angle égal à la moitié d'un angle droit, & la seconde est parallèle à l'axe & menée à une distance $= a$. Ces deux lignes considérées ensemble sont comprises dans l'équation proposée $yy = ay + xy - ax$. On doit semblablement regarder comme complexe cette équation $y^4 - xy^3 - a^2x^2 - ay^3 + axxy + a^2xy = 0$; & par conséquent elle ne représente point une ligne continue du quatrième ordre ; car les facteurs étant $(y - x)(y-a)(yy-ax)$, elle renfermera trois lignes distinctes, savoir deux droites & une courbe comprise dans l'équation $y^2 - ax = 0$.

63. On peut donc former à volonté des lignes complexes quelconques, qui renferment deux ou plusieurs droites ou courbes décrites, comme on voudra. Car, si la nature de chaque ligne est exprimée par une équation rapportée au même axe & à la même origine des abscisses, & qu'après avoir réduit chacune des équations à zéro, on les multiplie l'une par l'autre, il en résultera une équation complexe qui contiendra à la fois toutes les lignes supposées. Par exemple, si du centre C, & avec un rayon $CA = a$, on décrit un cercle, & qu'en outre on mène par le centre C une droite LN, on pourra pour un axe quelconque trouver une équation qui renferme en même temps le cercle & la ligne droite, comme si ces deux lignes n'en formoient qu'une. Pl. II. Fig. 16.

64. Soit pris pour l'axe le diamètre AB, qui forme avec la droite LN un angle égal à la moitié d'un angle droit; ayant placé l'origine des abscisses en A, fait l'abscisse $AP = x$, & l'appliquée $PM = y$; on aura pour la ligne droite $PM = CP = a - x$: &, parce que le point M de la droite tombe du côté des appliquées négatives, on aura $y = -a + x$, ou $y - x + a = 0$; or, pour le cercle on a $PM^2 = AP \cdot PB$, & $BP = 2a - x$, ce qui donne $y^2 = 2ax - x^2$, ou $y^2 + + x^2 - 2ax = 0$. Multiplions à présent ces deux équations l'une par l'autre, nous obtiendrons l'équation complexe du troisième ordre :

$y^3 - y^2x + yx^2 - x^3 + ayy - 2axy + 3axx - 2a^2x = 0$, qui représentera à la fois le cercle & la ligne droite. Ainsi on trouvera qu'à l'abscisse $AP = x$ répondent trois appliquées, deux pour le cercle & une pour la ligne droite. Soit, par exemple, $x = \frac{1}{2}a$, l'équation deviendra $y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{3}{4}a^2y - \frac{3}{8}a^3 = 0$; d'où l'on tire d'abord $y + \frac{1}{2}a = 0$, & en divisant par cette racine, $y^2 - \frac{3}{4}a^2 = 0$, ce qui donne les trois valeurs de y.

$$\text{I.}\quad y = -\tfrac{1}{2}a;$$
$$\text{II.}\quad y = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3};$$
$$\text{III.}\quad y = -\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

On voit donc que le tout est représenté par une équation, comme si le cercle ne formoit avec la droite LN qu'une courbe continue.

65. Cette différence entre les courbes incomplexes & complexes une fois bien établie, il est clair que les lignes du second ordre sont ou des courbes continues, ou des lignes complexes formées de deux lignes droites; car si l'équation générale a des facteurs, ils seront du premier ordre & désigneront par conséquent des lignes droites. Les lignes du troisième ordre seront ou incomplexes, ou complexes formées d'une droite & d'une ligne du second ordre, ou formées de trois lignes droites. De même les lignes du quatrième ordre seront continues, ou incomplexes, ou bien complexes renfermant une ligne droite & une ligne du troisième ordre, ou deux lignes du second ordre, ou enfin quatre lignes droites. Les lignes complexes du cinquième ordre & des ordres supérieurs seront susceptibles d'une combinaison analogue & d'une semblable énumération. Il suit de-là qu'un ordre quelconque de lignes renferme à la fois toutes les lignes des ordres inférieurs, c'est-à-dire, qu'elle peut contenir une ligne complexe des ordres inférieurs avec une ou plusieurs lignes droites, ou avec des

lignes du ſecond ordre, du troiſième ou des ſuivans, de manière que, ſi on fait une ſomme des nombres de chaque ordre, auquel appartiennent les lignes ſimples, il en réſulte le nombre qui indique l'ordre de la ligne complexe.

CHAPITRE IV.

Des principales Propriétés de chaque Ordre de Lignes.

66. PARMI les principales propriétés des lignes de chaque ordre, celle qui frappe d'abord eſt leur rencontre avec la ligne droite, ou le nombre d'interſections que ces lignes peuvent faire avec elle. Comme la ligne du premier ordre, où une droite ne peut être coupée par une autre droite que dans un ſeul point, & que les lignes courbes peuvent l'être en pluſieurs, on a donc raiſon de chercher en combien de points une courbe d'un ordre quelconque peut être rencontrée par une droite menée comme on voudra; car la ſolution de cette queſtion ſervira à faire mieux connoître la nature des lignes courbes des différens ordres. On trouvera qu'une ligne du ſecond ordre ne peut être coupée par une ligne droite en plus de deux points; une ligne du troiſième ordre en plus de trois points, & ainſi de ſuite.

67. Nous avons déjà parlé de la manière dont on peut trouver en combien de points l'axe d'une courbe quelconque eſt coupé par cette courbe. Étant donnée une équation entre l'abſciſſe x & l'appliquée y; comme à l'endroit où la courbe tombe ſur l'axe, l'appliquée y devient $=0$, on fera donc l'équation $y=0$, & l'équation réſultante qui renfermera ſeulement x, donnera les valeurs de x, & par conſéquent les points de l'axe où la courbe le coupera. Ainſi, dans l'équation au cercle que nous avons trouvée ci-deſſus, $yy=2ax-xx$; Pl. II. Fig. 16.
ſi nous ſuppoſons $y=0$, l'équation deviendra $0=2ax-$

xx, ce qui donne pour x deux valeurs; $x = 0$ & $x = 2a$, qui indiquent que l'axe RS rencontre le cercle d'abord à l'origine A des abſciſſes, & enſuite au point B, AB étant $= 2a$. De même dans les autres courbes, en faiſant dans l'équation $y = 0$; les racines de x indiqueront les interſections de la courbe avec l'axe.

68. Comme dans l'équation générale d'une courbe une droite quelconque fait la fonction d'un axe, en ſuppoſant dans cette équation l'appliquée $y = 0$, celle qui reſtera fera voir en combien de points la courbe eſt rencontrée par une droite quelconque. Or, on aura une équation qui ne contiendra plus que l'abſciſſe x comme inconnue, & dont les racines feront connoître les interſections de la courbe avec l'axe. Le nombre des interſections dépendra donc de la plus grande puiſſance de x dans l'équation, & par conſéquent il ne pourra être plus grand que l'expoſant de cette plus grande puiſſance. Il y aura, au reſte, autant d'interſections que l'expoſant de la plus grande puiſſance de x contient d'unités, ſi toutes les racines de l'équation ſont réelles; mais, s'il y a quelques racines imaginaires, le nombre des interſections en ſera diminué d'autant.

69. Comme nous avons donné pour chaque ordre de lignes l'équation la plus générale, nous en pourrons conclure, de la manière que nous venons d'expoſer, en combien de points une droite quelconque peut couper les lignes de chaque ordre. Prenons donc l'équation générale qui convient aux lignes du premier ordre, ou à la ligne droite, $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$; en faiſant $y = 0$, on a $0 = \alpha + \beta x$, équation qui ne peut avoir plus d'une racine; d'où il ſuit qu'une ligne droite ne peut être coupée qu'en un point par une autre ligne droite; mais, ſi on ſuppoſe $\beta = 0$, l'équation $0 = \alpha$ eſt impoſſible & fait voir que dans ce cas l'axe n'eſt rencontré nulle part par la ligne droite; en effet ces deux droites ſeront parallèles entre elles, comme l'apprend l'équation $0 = \alpha + \gamma y$, que donne la ſuppoſition de $\beta = 0$.

70. Si dans l'équation générale pour les lignes du ſecond ordre :

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy,$$

nous

nous faisons $y=0$, nous aurons l'équation :

$$0=\alpha+\beta x+\delta x^2,$$

qui renferme deux racines réelles, ou qui n'en renferme aucune, ou bien qui en renferme une seule, si $\delta=0$. Ainsi une ligne du second ordre sera coupée par une droite ou dans deux points, ou dans un seul, ou ne le sera nulle part. Ces cas peuvent être renfermés dans un seul, en disant qu'une ligne du second ordre ne peut être coupée par une ligne-droite en plus de deux points.

71. Si dans l'équation générale pour les lignes du troisième ordre, nous supposons $y=0$, nous aurons l'équation :

$$0=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3;$$

qui, ne pouvant avoir plus de trois racines, fait voir clairement que les lignes du troisième ordre ne peuvent être coupées par une droite en plus de trois points. Mais il peut arriver que la ligne du troisième ordre soit rencontrée par une droite en un plus petit nombre de points; savoir en deux, si $\delta=0$, & si en même temps les deux racines de l'équation $0=\alpha+\beta x+\gamma xx$ sont réelles; ou en un seul point, si deux racines de l'équation sont imaginaires, ou si on a à la fois $\delta=0$ & $\gamma=0$; ou enfin, qu'elle ne le soit nulle part, si $\delta=0$, & que les autres racines de l'équation soient imaginaires; ce qui arrivera aussi, si β, γ, & δ s'évanouissent, & que α ne soit pas une quantité égale à zéro.

72. On conclura d'une manière semblable, que les lignes du quatrième ordre ne peuvent être coupées par une droite en plus de quatre points, & cette propriété s'étendra également à tous les autres ordres, de manière que les lignes de l'ordre n ne pourront être coupées par une ligne droite en plus de n points. Il ne s'ensuit pas de-là qu'une ligne droite quelconque coupe en n points toute ligne de l'ordre n; il peut arriver que le nombre des intersections soit moindre, & même nul, ainsi que nous l'avons observé pour les lignes du second & du troisième ordre. Ainsi tout le sens de la proposition consiste en ce que le nombre des intersections ne peut jamais être plus grand que l'exposant de l'ordre, auquel la ligne courbe est rapportée.

73. Le nombre des interſections qu'une ligne droite quelconque fait avec une ligne donnée, ne pourra donc déterminer l'ordre auquel une ligne courbe appartient. Car, ſi le nombre des interſections $= n$, il ne s'enſuit pas que la courbe appartienne à l'ordre n; mais elle peut être rapportée auſſi à quelque ordre ſupérieur : il peut ſe faire même que la courbe ne ſoit pas algébrique, mais tranſcendante. Ce cas excepté, on peut toujours affirmer en toute ſûreté qu'une ligne courbe, qui eſt coupée par une droite en n points, ne peut appartenir à aucun ordre inférieur de lignes. Ainſi, lorſqu'une droite coupe dans quatre points une courbe propoſée, il eſt certain qu'elle n'appartient ni au ſecond, ni au troiſième ordre; mais doit-elle être rapportée au quatrième ordre, ou à un ordre ſupérieur, ou bien eſt-elle tranſcendante? C'eſt ce qu'on ne peut décider.

74. Les équations générales, que nous avons données pour les lignes de chaque ordre, contiennent pluſieurs quantités conſtantes arbitraires, qui détermineront entièrement la ligne courbe, ſi on leur donne des valeurs déterminées; & elles ſeront décrites ſur un axe donné, de manière que toutes les autres courbes, qui étoient renfermées dans la même équation générale, ſe trouvent par-là exclues. Ainſi, quoique l'équation du premier ordre $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ ne convienne qu'à la ligne droite, on peut varier à ſon égard, d'une infinité de manières, la poſition de l'axe, ſuivant la diverſité infinie des valeurs qu'on peut donner aux conſtantes α, β, γ. Mais, dès qu'une fois ces quantités conſtantes ont une valeur déterminée, la poſition de la ligne droite eſt fixée; & il n'y en a plus aucune autre qui puiſſe ſatisfaire à l'équation.

75. Cette équation $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ pourroit paroître ſuſceptible de trois déterminations, à cauſe des trois conſtantes arbitraires α, β & γ. Mais on ſait par la nature des équations, que pour qu'elle ſoit déterminée, il ſuffit de connoître le rapport entre ces conſtantes, c'eſt-à-dire le rapport de deux d'entre elles à la troiſième; ainſi cette équation ſera ſeulement ſuſceptible de deux déterminations. En effet, ſi on détermine β & γ par la lettre α, de manière que $\beta = -\alpha$, & $\gamma = 2\alpha$,

l'équation $o = \alpha - \alpha x + 2\alpha y$, à caufe que α fort par la divifion, fera entièrement déterminée. Par une raifon femblable, l'équation générale des lignes du fecond ordre, qui contient fix conftantes arbitraires, eft fufceptible feulement de cinq déterminations; l'équation générale des lignes du troifième ordre feulement de neuf; &, généralement, l'équation générale pour les lignes de l'ordre n admettra $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ déterminations.

76. En déterminant ces conftantes arbitraires, on peut affujettir la ligne courbe à paffer par un point donné, ce qui donnera déjà une détermination. Car, foit propofée l'équation générale d'un ordre quelconque de lignes, qu'il s'agiffe de déterminer en faifant paffer la ligne courbe par le point B. Ayant pris à volonté un axe & fur cette ligne un point A pour l'origine des abfciffes, foit abaiffée du point B fur l'axe la perpendiculaire Bb, il eft évident que fi la courbe paffe par le point B, en prenant l'intervalle Ab pour x, la perpendiculaire Bb donne la valeur de l'appliquée y. C'eft pourquoi, fi dans l'équation générale propofée on fubftitue Ab au lieu de x & Bb au lieu de y, il en réfultera une équation qui pourra déterminer une des conftantes α, β, γ, δ, ε, &c.; cela fait, toutes les courbes qui font comprifes dans l'équation générale déterminée de cette manière, pafferont par le point donné B. Pl. II. Fig. 17.

77. Si la ligne courbe doit paffer, en outre, par le point C, ayant abaiffé de ce point une perpendiculaire Cc à l'axe, & fait dans l'équation $x = Ac$ & $y = Cc$, la nouvelle équation qui en proviendra, déterminera pareillement une des quantités conftantes α, β, γ, δ, &c. On conçoit de même que, fi on affigne trois points B, C, D, par où la ligne courbe doive paffer, cette condition déterminera trois conftantes, & qu'avec quatre points B, C, D, E, quatre conftantes fe trouvent déterminées. Donc, fi on propofe autant de points, par où la courbe doive paffer, qu'il y a de déterminations dont l'équation générale foit fufceptible, la ligne courbe fera entièrement déterminée, & elle fera par conféquent la feule qui puiffe paffer par tous les points propofés.

78. Puiſque l'équation générale pour les lignes du premier ordre, ou pour la ligne droite, n'eſt ſuſceptible que de deux déterminations ; ſi on propoſe deux points par où la ligne du premier ordre ou une droite ſoit aſſujettie à paſſer, cette ligne eſt entièrement déterminée, & par deux points on ne pourra pas mener plus d'une ligne droite; ce qui, à la vérité, eſt connu par les élémens. Mais ſi on ne donnoit qu'un point, alors, comme l'équation ne ſeroit pas déterminée, on pourroit mener encore une infinité de lignes droites par ce même point.

79. L'équation générale pour les lignes du ſecond ordre admet cinq déterminations; par conſéquent, ſi on propoſe cinq points par leſquels une ligne courbe doive paſſer, la ligne du ſecond ordre eſt entièrement déterminée. C'eſt pourquoi on ne peut faire paſſer qu'une ſeule ligne du ſecond ordre par cinq points donnés; mais, ſi on propoſe ſeulement quatre points ou un moindre nombre, comme l'équation n'eſt pas alors déterminée, il y aura une infinité de lignes toutes du ſecond ordre qu'on pourra faire paſſer par ces points. S'il arrivoit que de ces cinq points trois fuſſent en ligne droite, comme une ligne du ſecond ordre ne peut être rencontrée par une droite en trois points, on n'aura aucune courbe continue, mais bien une ligne complexe, ſavoir deux lignes droites, qui, comme nous en avons déjà prévenu, ſont renfermées dans l'équation générale du ſecond ordre.

80. L'équation générale pour les lignes du troiſième ordre étant ſuſceptible de neuf déterminations, en prenant neuf points à volonté, on pourra toujours y faire paſſer une ligne du troiſième ordre, & ce ſera la ſeule. Mais, ſi le nombre des points eſt au-deſſous de neuf, on pourra faire paſſer par ces points une infinité de lignes du troiſième ordre. Semblablement, par quatorze points donnés on ne pourra faire paſſer qu'une ligne du quatrième ordre, & par vingt points qu'une ligne du cinquième ordre, ainſi de ſuite; &, en général, les lignes d'un ordre n ſeront déterminées par autant de points que cette formule $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n.(n+3)}{2}$ con-

tient d'unités ; de ſorte que, ſi le nombre des points donnés eſt moindre, on peut alors faire paſſer par ces points une infinité de lignes de l'ordre n.

81. A moins qu'on ne propoſe un nombre de points plus grand que $\frac{n(n+3)}{2}$, il y aura toujours une ligne ou une infinité de lignes de l'ordre n qu'on pourra faire paſſer par ces points; ſavoir une, ſi le nombre des points donnés $= \frac{n.(n+3)}{2}$, & une infinité, s'il eſt moindre. Au reſte, de quelque manière que ces points ſoient diſpoſés, la ſolution ne deviendra jamais impoſſible; car la détermination des coefficiens α, β, γ, δ, &c. n'exige jamais la réſolution d'une équation du ſecond degré ou d'un degré ſupérieur, mais s'achève toute entière par des équations ſimples ; on n'aura donc jamais de valeurs imaginaires pour les quantités α, β, γ, &c., ni de valeurs multiformes : c'eſt pourquoi on aura toujours une ligne réelle qui paſſera par les points propoſés ; & cette ligne ſera unique, ſi on propoſe autant de points que l'équation générale peut recevoir de déterminations.

82. Comme la poſition de l'axe eſt arbitraire, la détermination des coefficiens deviendra plus facile, ſi on fait paſſer l'axe par un des points donnés, & qu'on y place en même temps l'origine A des abſciſſes; car en ſuppoſant $x = 0$, on devra avoir $y = 0$, ce qui fait voir tout de ſuite que dans l'équation générale :

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \&c.,$$

α devient $= 0$. On peut enſuite faire auſſi paſſer l'axe par un autre point propoſé ; par ce moyen le nombre des quantités, qui fixent la poſition des points donnés, ſera diminué. Enfin, au lieu d'appliquées perpendiculaires, on peut choiſir des appliquées obliques, de manière que celle qui paſſe par l'origine des abſciſſes, paſſe en même temps par un autre point donné ; car il n'y a pas plus de difficulté pour connoître & conſtruire la courbe, lorſque les appliquées ſont inclinées à l'axe, que lorſqu'elles ſont perpendiculaires.

83. Si pour trouver une ligne du ſecond ordre, qui paſſe Pl. II. Fig. 18.

par les cinq points donnés A, B, C, D & E, on mène l'axe par les deux points A & B, & qu'on place l'origine des abſciſſes à un de ces points A; on joindra alors ce point A avec un troiſième C, & on prendra l'angle CAB pour marquer l'obliquité des appliquées. Il faudra donc mener des autres points D & E ſur l'axe les appliquées Dd, Ee parallèles à AC. Enſuite on fera $AB = a$; $AC = b$; $Ad = c$; $Dd = d$; $Ae = e$ & $eE = f$; ſi on prend l'équation générale des lignes du ſecond ordre :

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2,$$

il eſt évident

qu'en ſuppoſant	on aura
$x = o$	$y = o$
$x = o$	$y = b$
$x = a$	$y = o$
$x = c$	$y = d$
$x = e$	$y = f$

d'où réſultent les cinq équations

I. $o = \alpha$

II. $o = \alpha + \gamma b + \zeta b^2$

III. $o = \alpha + \beta a + \delta a^2$

IV. $o = \alpha + \beta c + \gamma d + \delta c^2 + \varepsilon cd + \zeta d^2$

V. $o = \alpha + \beta e + \gamma f + \delta e^2 + \varepsilon ef + \zeta f^2$.

On aura donc $\alpha = o$; $\gamma = -\zeta b$; $\beta = -\delta a$; ces valeurs ſubſtituées dans les autres équations donnent :

$$o = -\delta ac - \zeta bd + \delta c^2 + \varepsilon cd + \zeta dd$$
$$o = -\delta ae - \zeta bf + \delta e^2 + \varepsilon ef + \zeta ff;$$

multiplions la première par ef & la ſeconde par cd, & retranchons l'une de l'autre pour éliminer ε, nous aurons :

$$o = -\delta acef - \zeta bdef + \delta ccef + \zeta ddef + \delta acde + \zeta bcdf - \delta cdee - \zeta cdff,$$

ou

$$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{bdef - bcdf - ddef + cdff}{acde - acef - cdee + ccef},$$

d'où l'on conclut :

$$\delta = df(be - bc - de + cf)$$
$$\zeta = ce(ad - af - de + cf);$$

& par conséquent tous les coefficiens seront déterminés.

84. Après avoir trouvé de cette manière tous les coefficiens de l'équation générale $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 +$ &c.; on décrira la ligne courbe sur l'axe donné & sous l'angle choisi pour l'obliquité des appliquées, en déterminant, au moyen de l'équation, autant de points qu'on voudra; & cette ligne courbe passera par tous les points proposés. Si l'équation générale est susceptible de plus de déterminations qu'il n'y a de points donnés, on prendra les autres à volonté, & on aura à décrire, au moyen d'une équation entièrement déterminée, une ligne courbe qui passera par chacun des points proposés. Au reste, on donne à l'abscisse x successivement des valeurs tant positives que négatives, comme 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.; & -1, -2, -3, -4, &c.; & l'on tire de l'équation pour chacune de ces valeurs, celles de l'appliquée y qui conviennent; par ce moyen on aura un grand nombre de points assez voisins, par où passera la courbe, & qui par conséquent rendront sensible le cours de cette ligne.

CHAPITRE V.

Des Lignes du second Ordre.

85. COMME le premier ordre des lignes ne comprend que la ligne droite dont la nature est déjà assez connue par les élémens de géométrie, passons aux lignes du SECOND ORDRE, & examinons-les avec un peu plus d'attention, tant parce que ce sont les courbes les plus simples, que parce qu'elles ont un usage très-étendu dans toute la haute géométrie. Ces lignes, qu'on désigne aussi sous le nom de SECTIONS CONIQUES, jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables, qui étoient connues des anciens géomètres, ou qui ont été découvertes par les modernes. La connoissance en est jugée si nécessaire, que la plupart des auteurs

ont accoutumé de les expliquer immédiatement après la géométrie élémentaire. Mais, comme toutes ces propriétés ne peuvent pas dériver d'un feul principe ; qu'il y en a qui fe tirent de l'équation de ces courbes, & d'autres de leur génération par la fection d'un cône ; & qu'il y en a d'autres enfin qui fe concluent de la manière dont elles font décrites ; nous nous contenterons d'examiner ici celles qu'on peut déduire de leur équation, fans recourir à d'autres moyens.

86. Confidérons donc cette équation générale :

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon x y + \zeta y y,$$

qui, comme nous l'avons fait voir, eft propre à repréfenter toutes les lignes du fecond ordre, quelle que foit l'inclinaifon fous laquelle les appliquées rencontrent l'axe. Donnons-lui cette forme :

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)y}{\zeta} + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = o;$$

elle apprend clairement que pour chaque abfciffe x on a deux appliquées y, ou qu'on n'en a aucune, fuivant que les deux racines de y feront réelles ou imaginaires. Si $\zeta = o$, alors il n'y aura plus qu'une appliquée qui répondra à chaque abfciffe ; l'autre deviendra infinie : ainfi ce cas ne peut nuire à la recherche dont nous nous occupons.

Pl. II. Fig. 19. 87. Toutes les fois que les deux valeurs de y font réelles ; ce qui a lieu, lorfque l'appliquée PMN coupe la courbe en deux points M & N, on aura la fomme des racines $PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta}$ $= \frac{-\varepsilon . AP - \gamma}{\zeta}$; en prenant la droite AEF pour l'axe des abfciffes, A pour leur origine, & l'angle arbitraire APN pour marquer l'inclinaifon des appliquées à l'égard de l'axe. Si on mène fous le même angle une autre appliquée quelconque npm, dont la valeur pm eft négative, on aura de même $pn - pm = \frac{-\varepsilon . Ap - \gamma}{\zeta}$. En retranchant cette équation de la première, le réfultat fera $PM + pm + PN - pn = \frac{\varepsilon(Ap - AP)}{\zeta}$ $= \frac{\varepsilon . Pp}{\zeta}$. Menons des points m & n des droites parallèles à l'axe, l'axe, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la première appliquée aux points μ & ν; nous aurons $M\mu + N\nu = \frac{\varepsilon . Pp}{\zeta}$, ou la ſomme $M\mu + N\nu$ dans le rapport conſtant de ε à ζ avec Pp, ou $m\mu$, ou $n\nu$. Ainſi ce rapport ſera toujours le même, quelles que ſoient les droites MN & mn qu'on menera dans la courbe, pourvu qu'elles faſſent avec l'axe un angle conſtant, & que les droites $n\nu$ & $m\mu$ ſoient parallèles à l'axe.

88. Si l'appliquée PMN eſt reculée juſqu'à ce que les points M & N coïncident, alors elle touchera la courbe; car, lorſque les deux points d'interſection coïncident, la ſécante devient tangente. Soit donc KCI une telle tangente, Pl. II. Fig. 20. à laquelle ſoient menées parallèlement tant de droites qu'on voudra MN, mn, qui rencontrent la courbe de part & d'autre. On appelle ordinairement ces droites CORDES & ORDONNÉES; & ſoient menées des points M, N, m, n, à la tangente les droites MI, NK, & mi, nk, parallèles à l'axe qu'on a choiſi d'abord. Comme les intervalles CK, Ck, tombent à préſent en ſens contraire du point C, on devra les prendre négativement. On aura donc $CI - CK : MI :: \varepsilon : \zeta$; & $Ci - Ck : mi :: \varepsilon : \zeta$; donc $CI - CK : MI :: Ci - Ck : mi$, ou $MI : mi :: CI - CK :: Ci - Ck$.

89. La poſition de l'axe à l'égard de la courbe étant arbitraire, on pourra mener à volonté les droites MI, NK, mi, nk, pourvu qu'elles ſoient parallèles entre elles; & on aura toujours $MI : mi :: CI - CK : Ci - Ck$. Donc, ſi les parallèles MI & NK ſont menées de manière que $CI = CK$, ce qui arrivera, ſi les lignes MI & NK ſont menées parallèlement à la droite CL, qui, partant du point de contact C, diviſe l'ordonnée MN en deux parties égales au point L: alors, à cauſe de $CI - CK = 0$, on aura auſſi $Ci - Ck = \frac{mi}{MI}(CI - CK) = 0$. Donc, ſi on prolonge CL juſqu'en l, comme, à cauſe des lignes mi & nk auſſi parallèles à CL, on a $ml = Ci$, & $nl = Ck$, on aura pareillement $ml = nl$. D'où il ſuit qu'une droite CLl, qui, menée du point de contact C diviſe en deux parties égales une ordonnée MN paral-

lèle à la tangente, coupe auſſi de la même manière toutes les ordonnées $m\,n$ parallèles à la même tangente.

90. Par la raiſon que la droite CLl diviſe en deux parties égales toutes les ordonnées qui ſont parallèles à la tangente ICK, cette ligne CLl s'appelle ordinairement le DIAMÈTRE *de la ligne du ſecond ordre* ou *de la ſection conique*. On peut donc mener dans chaque ligne du ſecond ordre une infinité de diamètres, puiſqu'il n'y a aucun point de la courbe où l'on ne puiſſe imaginer une tangente. En effet, quelle que ſoit la tangente donnée ICK, on n'a qu'à lui mener parallèlement une ordonnée quelconque MN, & la diviſer en deux également au point L, la droite CL ſera un diamètre de la ligne du ſecond ordre, qui coupera en deux parties égales toutes les ordonnées parallèles à la tangente IK.

91. Il ſuit auſſi de ce qui précède, que, ſi une droite Ll diviſe en deux parties égales deux ordonnées parallèles quelconques MN & mn, elle partagera de la même manière toutes les autres ordonnées parallèles à celles-ci; car la courbe aura quelque part une tangente IK parallèle à ces ordonnées, & par conſéquent la droite dont il s'agit ſera un diamètre. Voilà donc une nouvelle manière de trouver pour une ligne donnée du ſecond ordre une infinité de diamètres : il ſuffira de mener à volonté deux ordonnées ou cordes MN & mn parallèles entre elles, de les diviſer en deux également aux points L & l; la droite qui paſſera par ces deux points, diviſera ſemblablement toutes les autres ordonnées parallèles à celles-ci, on aura par ce moyen un diamètre; &, ſi par le point C, où le diamètre prolongé rencontre la courbe, on mène une droite IK parallèlement aux ordonnées, cette droite touchera la courbe au point C.

92. Nous avons été conduits à cette propriété par la ſimple conſidération de la ſomme des racines de y dans l'équation :

Pl. II. Fig. 19.

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0.$$

Mais il eſt conſtant, par la même équation, que le produit des deux racines $PM.PN = \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta}$. Cette expreſſion

$\frac{\delta x^2 + \epsilon x + \alpha}{\zeta}$ a deux facteurs ſimples réels, ou n'en a point. Le premier cas a lieu, ſi l'axe coupe la courbe en deux points E & F; car, comme on a pour ces points $y = 0$, on aura auſſi $\frac{\delta x^2 + \epsilon x + \alpha}{\zeta} = 0$; les racines de x ſeront AE & AF, & les facteurs $(x - AE)(x - AF)$; de ſorte que $\frac{\delta xx + \epsilon x + \alpha}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}(x - AE)(x - AF) = \frac{\delta}{\zeta}. PE. PF$, à cauſe de $x = AP$. On aura donc $PM.\ PN = \frac{\delta}{\zeta}.\ PE.\ PF$, ou le rectangle $PM.\ PN$ ſera au rectangle $PE.\ PF$ dans le rapport conſtant de $\delta : \zeta$, par-tout où ſera menée l'appliquée PMN, pourvu que l'angle NPF ſoit égal à celui qui déſigne l'inclinaiſon des appliquées à l'axe. Donc, ſi on imagine une ordonnée mn, à cauſe que les quantités Ep & pm deviennent négatives, on aura ſemblablement $pm.\ pn = \frac{\delta}{\zeta}.\ pE.\ pF$.

93. Ayant donc tiré une droite quelconque PEF qui coupe la ligne du ſecond ordre aux deux points E & F, ſi on mène à cette ligne des ordonnées quelconques NMP, npm, parallèles entre elles, on aura toujours $PM.\ PN : PE.\ PF :: pm.pn : pE.pF$; car les deux rapports de cette proportion ſont égaux à $\delta : \zeta$. Semblablement, comme la poſition de l'axe eſt arbitraire, en prenant la droite PMN pour l'axe, & menant parallèlement à PEF une autre ligne quelconque eqf, on aura $PM.PN : PE.PF :: qM.qN : qe.qf :: pm.pn : pE.pF$, & alternant, $qe.qf : pE.pF :: qM.qN : pm.pn$. Etant donc données deux ordonnées parallèles ef, EF, ſi on en imagine deux autres quelconques MN & mn auſſi parallèles entre elles, & qui coupent les premières aux points P, p, q, r, on aura cette ſuite de rapports égaux $PM.PN : PE.PF :: pm.pn : pE.pF :: qM.qN : qe.qf :: rm.rn : re.rf$. C'eſt-là une ſeconde propriété générale des lignes du ſecond ordre. Pl. III. Fig. 21.

94. Donc, ſi les deux points M & N de la courbe coïncident, la droite PMN deviendra tangente au point de

concours de ces deux points, & le rectangle $PM.PN$ deviendra le quarré de PM ou de PN; ce qui donne une nou-
Pl. III. Fig. 24. velle propriété des tangentes. En effet, supposons la droite CPp qui touche la ligne du second ordre au point C, & menons tant de lignes que nous voudrons PMN, pmn, parallèles entre elles, & qui par conséquent fassent toutes avec la tangente un même angle, nous aurons, par la propriété qui vient d'être trouvée :

$$PC^2 : PM.PN :: pC^2 : pm.pn;$$

c'est-à-dire, que, quelle que soit l'ordonnée qu'on mène à la tangente sous un angle donné, le rapport du quarré de la droite CP au rectangle $PM \times PN$ sera constant.

Pl. II. Fig. 20. 95. Il suit de-là en même temps que, si dans une ligne du second ordre on mène un diamètre quelconque CD, qui coupe en deux parties égales toutes les cordes MN, mn, & que ce diamètre rencontre la courbe en deux points C & D, on aura :

$$CL.LD : LM.LN :: Cl.lD : lm.ln.$$

Mais, comme $LM = LN$ & $lm = ln$, on aura $LM^2 : lm^2 :: CL.LD : Cl.lD$, ou le quarré de la demi-ordonnée LM sera continuellement au rectangle $CL.LD$ dans un rapport constant. Ainsi, en prenant le diamètre CD pour axe, les demi-ordonnées LM pour appliquées, on trouvera l'équation aux lignes du second ordre; car, soit le diamètre $CD = a$, l'abscisse $CL = x$, & l'appliquée $LM = y$, LD sera $a - x$, & on aura y^2 à $ax - xx$ dans un rapport constant, que je supposerai celui de h à k : ce qui donnera pour les lignes du second ordre l'équation $yy = \frac{h}{k}(ax - x^2)$.

Pl. III. Fig. 22. 96. Les deux propriétés des lignes du second ordre, que nous avons déjà trouvées, pourront nous en faire découvrir plusieurs autres. Supposons dans une ligne du même ordre deux ordonnées AB & CD parallèles entre elles, & achevons le quadrilatère $ACDB$; si nous menons par un point quelconque M de la courbe une ordonnée MN parallèle à AB & à CD, & qui coupe les droites AC & BD aux points P

& Q, les parties PM & QN seront égales entre elles. Car la droite qui coupe en deux parties égales les deux ordonnées AB & CD parallèles entre elles, coupera de la même manière l'ordonnée MN; mais, comme on le sait par la géométrie élémentaire, la même droite qui partage également les deux côtés AB & CD, divisera aussi en deux parties égales la portion PQ. Ainsi, puisque les lignes MN & PQ sont divisées également au même point, il s'ensuit nécessairement que $MP = NQ$, & $MQ = NP$. On pourra donc, étant donné, outre les quatre points A, B, C & D, un cinquième M, en trouver, au moyen de ce dernier, un sixième N, en prenant $NQ = MP$.

97. Puisque $MQ.QN$ est à $BQ.QD$ dans un rapport constant, à cause de $QN = MP$, $MP.MQ$ sera aussi à $BQ.QD$ dans le même rapport; c'est-à-dire, que si on prend un autre point quelconque de la courbe, comme c, & que par ce point on imagine la droite GcH parallèle aux lignes AB & CD, jusqu'à ce qu'elle rencontre les côtés AC, BD, aux points G & H, on aura aussi le même rapport constant pour celui de $cG.cH$ à $BH.DH$, & par conséquent $cG.cH : BH.DH :: MP.MQ : BQ.DQ$. Mais, si on mène par M parallèlement à la base BD une ligne RMS, qui rencontre les ordonnées parallèles AB, CD, en R & en S, à cause de $BQ = MR$, & de $DQ = MS$, le rapport $MP.MQ : MR.MS$ sera aussi constant. Donc, si par un point M quelconque de la courbe on mène deux droites, l'une MPQ parallèle aux côtés AB, CD, & l'autre RMS parallèle à la base BD, les intersections P, Q, R & S seront tellement disposées, que le rapport de $MP.MQ$ à $MR.MS$ sera constant.

98. Si au lieu de l'ordonnée CD, qui est supposée parallèle à AB, on en mène une autre quelconque Dc du point D, & qu'on tire la corde Ac : de manière que les droites MQ & RMS menées, comme auparavant, par le point M, parallèlement aux côtés AB & BD, coupent les côtés du quadrilatère $ABDc$ aux points p, Q, R & s; une semblable propriété aura lieu. En effet, on a $MP.MQ : BQ.DQ$

$:: cG.cH : BH.DH$, ou $MP.MQ : MR.MS :: cG.cH : BH.DH$, à cauſe de la droite RS parallèle & égale à BD; mais les triangles ſemblables APp, AGc, & DSs, cHD, donnent, ſavoir les premiers, la proportion $Pp : AP :: Gc : AG$, ou, parce que $AP : AG :: BQ : BH$, celle-ci : $Pp : BQ :: Gc : BH$, & les derniers, la proportion $DS\ (MQ) : Ss :: cH : DH$; &, en multipliant par ordre, on aura $MQ.Pp : MR.Ss :: cG.cH : BH.DH$, à cauſe de $BQ = MR$. Cette dernière proportion comparée avec celle qui a été trouvée ci-deſſus, donne :

$$MP.MQ : MR.MS :: Pp.MQ : MR.Ss,$$

& prenant la ſomme des antécédens & celle des conſéquens :

$$MP.MQ : MR.MS :: Mp.MQ : MR.Ms;$$

ainſi, dans quelque endroit de la courbe qu'on prenne les points c & M, le rapport de $Mp.MQ$ à $MR.Ms$, ſera toujours le même, pourvu que les droites MQ & Rs, qui paſſent par M, ſoient parallèles aux cordes AB & BD. Il ſuit de la proportion précédente que $MP : MS :: Mp.Ms$; donc, puiſqu'en faiſant varier le point c on ne fait que changer les points p & s, le rapport de Mp à Ms ſera conſtant, quelle que ſoit la poſition du point c, pourvu que le point M reſte fixe.

99. Si on prend quatre points A, B, C, D, ſur une ligne du ſecond ordre, & qu'on les joigne par des droites, afin d'avoir le trapèze inſcrit $ABDC$, on déduira de ce qui précède une propriété des ſections coniques beaucoup plus générale; c'eſt que, ſi d'un point quelconque M de la courbe on mène à chacun des côtés du trapèze, ſous des angles donnés, les droites MP, MQ, MR & MS, les rectangles formés par les deux lignes menées aux côtés oppoſés feront toujours entre eux dans le même rapport, c'eſt-à-dire, que $MP.MQ$ ſera à $MR.MS$ dans un rapport conſtant, quelle que ſoit la poſition du point M ſur la courbe, pourvu que les angles en P, Q, R & S, ne changent pas. Pour le faire voir, menons par le point M deux droites Mq & rs, la première parallèle au côté AB, la ſeconde au côté BD; & marquons les points d'interſection p, q, r & s, avec les côtés du trapèze; ſuivant

Pl. III. Fig. 23.

ce que nous avons vu, $Mp.Mq$ sera à $Mr.Ms$ dans un rapport constant; mais, comme les angles sont tous donnés, les rapports $MP : Mp$; $MQ : Mq$; $MR : Mr$ & $MS : Ms$, seront aussi donnés; d'où il suit que $MP.MQ$ sera à $MR.MS$ encore dans un rapport constant.

100. Comme nous avons vu ci-dessus que, si on prolonge les ordonnées parallèles MN, mn, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la tangente CPp en P & p, on aura $PM.PN : CP^2 :: pm.pn : Cp^2$; si on marque les points L & l, de manière que PL soit moyenne proportionnelle entre PM & PN, & qu'il en soit de même de pl à l'égard de pm & pn, on aura $PL^2 : CP^2 :: pl^2 : Cp^2$; & par conséquent $PL : CP :: pl : Cp$; d'où il suit que tous les points L, l, sont situés sur la ligne droite qui passe par le point de contact C. Donc, si une appliquée PMN est partagée au point L de manière que $PL^2 = PM.PN$, la droite CLD menée par les points C & L divisera aussi toutes les autres appliquées pmn en l, de façon que pl soit moyenne proportionnelle entre pm & pn; ou bien, si on coupe deux appliquées PN & pn aux points L & l, de sorte que $PL^2 = PM.PN$, & $pl^2 = pm.pn$, la droite qui passe par L & l étant prolongée, passera par le point de contact C, & coupera dans le même rapport toutes les autres appliquées parallèles à celles-ci. Pl. III. Fig. 24.

101. Après avoir exposé ces propriétés des lignes du second ordre, qui découlent immédiatement de la forme de l'équation, passons à la recherche d'autres propriétés plus cachées. Soit, pour cet effet, proposée l'équation générale des lignes du second ordre : Pl. III. Fig. 25.

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0;$$

comme il répond à chaque abscisse $AP = x$ deux appliquées y, savoir PM & PN, on pourra déterminer la position du diamètre qui coupe en deux parties égales toutes les ordonnées MN. Car, soit IG ce diamètre qui doit couper l'ordonnée MN au milieu L, qui tombera par conséquent sur le diamètre cherché. Faisons $PL = z$, puisque $z = \frac{1}{2} PM + \frac{1}{2} PN$, nous aurons $z = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{2\zeta}$, ou $2\zeta z + \varepsilon x + \gamma = 0$, qui est l'équation demandée pour déterminer la position du diamètre IG.

102. On pourra déduire de-là la longueur du diamètre IG, qui indique sur la courbe les deux endroits où les points M & N coïncident, ou bien dans quels points $PM = PN$. L'équation donne $PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta}$ & $PM \cdot PN = \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$, & par conséquent $(PM - PN)^2 = (PM + PN)^2 - 4PM \cdot PN = \frac{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)x^2 + 2(\varepsilon\gamma - 2\beta\zeta)x + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{\zeta\zeta} = 0$, ou $x^2 - \frac{2(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}x + \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta} = 0$; les racines de cette équation sont donc AK & AH, de sorte que $AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\varepsilon\gamma}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ & $AK \cdot AH = \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$. Il suit de-là que $(AH - AK)^2 = KH^2 = \frac{4(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 - 4(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)^2}$. Mais $IG^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon + 4\zeta\zeta}{4\zeta\zeta}KH^2$, si toutefois les appliquées sont perpendiculaires à l'axe.

103. Supposons que les appliquées que nous avons considérées ici soient perpendiculaires à l'axe, & cherchons à présent l'équation qui convient aux appliquées obliques. Menons, en conséquence, d'un point quelconque M de la courbe à l'axe une appliquée Mp, qui fasse avec cet axe l'angle oblique MpH, dont le sinus soit $= \mu$ & le cosinus $= \nu$. Soit la nouvelle abscisse $Ap = t$, la nouvelle appliquée $pM = u$, on aura $\frac{y}{u} = \mu$, & $\frac{Pp}{u} = \nu$; d'où $y = \mu u$ & $x = t + \nu u$. Ces valeurs étant substituées dans l'équation entre x & y : $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy$; donnent :

$$\begin{aligned} 0 = \alpha + \beta t + \nu\beta u + \delta t^2 &+ 2\nu\delta tu + \nu\nu\delta u^2 \\ + \mu\gamma u \qquad &+ \mu\varepsilon tu + \mu\nu\varepsilon u^2 \\ &+ \mu\mu\zeta u^2, \end{aligned}$$

ou

$$uu + \frac{((\mu\varepsilon + 2\nu\delta)t + \mu\gamma + \nu\beta)u + \delta t^2 + \beta t + \alpha}{\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu\nu\delta} = 0.$$

104.

104. Chaque appliquée aura donc encore ici deux valeurs, pM & pn; ainsi on pourra déterminer, comme auparavant, le diamètre $i\,l\,g$ des ordonnées Mn. En effet, ayant coupé en deux parties égales l'ordonnée Mn en l, le point l appartiendra au diamètre. Soit donc $p\,l = v$; on aura $v = \frac{pM + pn}{2} = \frac{-(\mu\varepsilon + 2\nu\delta)t - \mu\gamma - \nu\beta}{2(\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu\nu\delta)}$. Abaissons du point l sur l'axe AH la perpendiculaire lq, & faisons $A\,q = p$, $ql = q$, nous aurons $\mu = \frac{q}{v}$ & $\nu = \frac{pq}{v} = \frac{p-t}{v}$, & par conséquent $v = \frac{q}{\mu}$ & $t = p - \nu v = p - \frac{\nu q}{\mu}$. Substituons ces valeurs dans l'équation trouvée entre t & v, & nous aurons $\frac{q}{\mu} = \frac{-\mu\varepsilon p - 2\nu\delta p + \nu\varepsilon q + 2\nu\nu\delta q : \mu - \mu\gamma - \nu\beta}{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\varepsilon + 2\nu\nu\delta}$

ou

$$(2\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon)\,q + (\mu\mu\varepsilon + 2\mu\nu\delta)\,p + \mu\mu\gamma + \mu\nu\beta = 0,$$

ou enfin

$$(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)\,q + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\,p + \gamma\mu + \nu\beta = 0,$$

équation qui détermine la position du diamètre $i\,g$.

105. Le premier diamètre IG, dont la position est déterminée par cette équation $2\zeta z + \varepsilon x + \gamma = 0$, étant prolongé, rencontrera l'axe en O, & on aura $A\,O = \frac{-\gamma}{\varepsilon}$, & par conséquent $P\,O = \frac{-\gamma}{\varepsilon} - x$. La tangente de l'angle $L\,O\,P$ sera $= \frac{z}{PO} = \frac{-\varepsilon z}{\varepsilon x + \gamma} = \frac{\varepsilon}{2\zeta}$, & la tangente de l'angle MLG, sous lequel le diamètre IG coupe les ordonnées MN sera $= \frac{2\zeta}{\varepsilon}$. L'autre diamètre $i\,g$ prolongé rencontrera l'axe en o, & on aura $Ao = \frac{-\mu\gamma - \nu\beta}{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}$, & la tangente de l'angle $A\,o\,l$ sera $= \frac{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}{2\mu\zeta + \nu\varepsilon}$. Comme celle de l'angle $A\,O\,L = \frac{\varepsilon}{2\zeta}$, les deux diamètres se couperont en un certain point C, & feront entre eux un angle $O\,C\,o = A\,o\,l - A\,O\,L$, dont la tangente par conséquent est $= \frac{4\nu\delta\zeta - \nu\varepsilon\varepsilon}{4\mu\zeta\zeta + 2\nu\delta\varepsilon + 2\nu\varepsilon\zeta + \mu\varepsilon\varepsilon}$. Mais

l'angle sous lequel cet autre diamètre coupe ses ordonnées, est $Mlo = 180° - lpo - Aol$, dont la tangente $= \frac{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\varepsilon + 2\nu\nu\delta}{\mu\mu\varepsilon + 2\mu\nu\delta - 2\mu\nu\zeta - \nu\nu\varepsilon}$.

106. Cherchons maintenant le point C où ces deux diamètres se coupent mutuellement. Pour cela, imaginons une perpendiculaire CD abaissée de ce point sur l'axe ; appelons $AD = g$, $CD = h$: d'abord, en tant que le point C appartient au diamètre IG, nous aurons $2\zeta h + \varepsilon g + \gamma = 0$, & ensuite, en tant qu'il appartient au diamètre ig, nous aurons $(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)h + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)g + \mu\gamma + \nu\beta = 0$. Retranchons de cette dernière équation la première, après l'avoir multipliée par μ, & il nous restera $\nu\varepsilon h + 2\nu\delta g + \nu\beta = 0$, ou $\varepsilon h + 2\delta g + \beta = 0$; d'où l'on tire $h = \frac{-\varepsilon g - \gamma}{2\zeta} = \frac{-2\delta g - \beta}{\varepsilon}$, & par conséquent $(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)g = 2\beta\zeta - \gamma\varepsilon$; $g = \frac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ & $h = \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$. Comme les quantités μ & ν, d'où dépend l'obliquité des appliquées pMn, n'entrent pas dans ces expressions, il s'ensuit évidemment que le point C reste le même, quelle que soit cette obliquité.

107. Puisque tous les diamètres IG & ig se coupent mutuellement dans un même point C; dès qu'il sera une fois trouvé, on aura un point par où passeront tous les diamètres; & réciproquement toutes les droites menées par ce point seront autant de diamètres qui couperont toutes les ordonnées qu'on aura tirées sous un certain angle ; & comme ce point où tous les diamètres s'entrecoupent, est unique dans chaque ligne du second ordre, on a coutume de le nommer le CENTRE de la section conique. On le trouvera au moyen de l'équation proposée entre x & y,

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2;$$

en prenant $AD = \frac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$, & $CD = \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$.

108. Nous avons trouvé ci-dessus que $AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$; mais IK & GH sont des perpendiculaires abais-

ſées des extrémités du diamètre IG ſur l'axe, ce qui fait voir que $AD = \frac{AK + AH}{2}$; & par conſéquent le point D ſera le milieu entre les points K & H. C'eſt pourquoi le centre C ſera auſſi placé au milieu du diamètre IG; & comme cela doit également s'entendre de tout autre diamètre, il s'enſuit que non-ſeulement tous les diamètres ſe coupent les uns les autres en un même point C, mais qu'ils s'y coupent réciproquement en deux parties égales.

109. Prenons à préſent un diamètre quelconque AI pour l'axe, auquel les ordonnées MN ſoient appliquées ſous un angle $APM = q$, dont le ſinus $= m$ & le coſinus $= n$. Soit l'abſciſſe $AP = x$ & l'appliquée $PM = y$; comme celle-ci a deux valeurs égales, l'une poſitive, l'autre négative, & que par conſéquent leur ſomme $= 0$, l'équation générale pour la ligne du ſecond ordre prendra cette forme: $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, laquelle donnera, en faiſant $y = 0$, les deux points G & I où la courbe traverſe l'axe. Ainſi les racines de l'équation $xx + \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha}{\gamma} = 0$, ſeront $x = AG$ & $x = AI$; & par conſéquent on aura $AG + AI = \frac{-\beta}{\gamma}$ & $AG.AI = \frac{\alpha}{\gamma}$. Puis donc que le centre C eſt placé au milieu du diamètre GI, on trouvera facilement le centre C de la ſection conique; car on aura $AC = \frac{AG + AI}{2} = \frac{-\beta}{2\gamma}$. Pl. III. Fig. 26.

110. Le centre C de la ſection conique étant maintenant connu, on pourra très-bien le prendre pour l'origine des abſciſſes. Soit en conſéquence $CP = t$, comme $PM = y$ reſte la même, à cauſe de $x = AC - CP = \frac{-\beta}{2\gamma} - t$, on aura cette équation entre les coordonnées t & y:

$$yy = \alpha - \frac{\beta\beta}{2\gamma} + \frac{\beta\beta}{4\gamma} - \beta t + \beta t + \gamma t^2$$

ou

$$yy = \alpha - \frac{\beta\beta}{4\gamma} + \gamma tt.$$

On aura donc, en écrivant x au lieu de t, l'équation générale pour les lignes du second ordre, un diamètre quelconque étant pris pour axe, & les abscisses étant comptées du centre; &, si on change la forme des constantes, elle deviendra $yy = \alpha - \beta xx$. En faisant $y = 0$, on aura $CG = CI = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, & par conséquent le diamètre entier GI sera $= 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

111. Soit fait $x = 0$, & on trouvera l'ordonnée EF qui passe par le centre; on aura $CE = CF = \sqrt{\alpha}$, & conséquemment toute l'ordonnée $EF = 2\sqrt{\alpha}$; &, comme elle passe par le centre, elle sera aussi un diamètre qui fera avec le premier GI un angle $ECG = q$. Or, cet autre diamètre EF coupera également toutes les ordonnées parallèles au diamètre GI; car, ayant fait l'abscisse CP négative, l'appliquée aM qui tombera du côté de I sera égale à la première PM; &, comme elle lui est en même temps parallèle, les deux points M joints ensemble donneront une ligne parallèle au diamètre GI, & qui devra par conséquent être divisée en deux parties égales par le diamètre EF. Ces deux diamètres GI & EF sont donc tellement disposés entre eux, que l'un coupe en deux également toutes les ordonnées parallèles à l'autre, & réciproquement; & c'est à cause de cette propriété que ces deux diamètres se nomment CONJUGUÉS. Donc, si on mène par les extrémités G & I du diamètre GI des droites parallèles à l'autre diamètre EF, elles toucheront la courbe; & de même, si par les points E & F on mene des droites parallèles au diamètre GI, elles toucheront la courbe aux points E & F.

112. Soit menée à présent une appliquée oblique quelconque MQ qui fasse l'angle $AQM = \varphi$, dont le sinus $= \mu$ & le cosinus $= \nu$; soit l'abscisse $CQ = t$, & l'appliquée $MQ = u$; comme l'angle $PMQ = \varphi - q$, & partant $\mathit{sin.}\, PQM = \mu n - \nu m$, on aura, dans le triangle PMQ, $y : u : PQ :: \mu : m : \mu n - \nu m$; donc $y = \frac{\mu u}{m}$ & $PQ = \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$, & par conséquent $x = t - PQ = t - \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$. Substituons ces valeurs dans l'équation donnée ci-dessus $yy = \alpha - \beta xx$, ou $yy + \beta xx - \alpha = 0$, & nous aurons :

$(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)uu - 2\beta m(\mu n - \nu m)tu + \beta m^2 t^2 - \alpha m^2 = 0$, équation qui donne pour l'appliquée u deux valeurs QM & $-Qn$, & par conséquent $QM - Qn = \frac{2\beta m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}$. Si on coupe en deux parties égales l'ordonnée Mn en p, la droite Cpg sera un nouveau diamètre qui coupera par le milieu toutes les ordonnées parallèles à Mn, & on aura $Qp = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}$.

113. On trouve par-là que la tangente de l'angle $GCg = \frac{\mu Qp}{CQ + \nu . Qp}$, ou que *tang.* $GCg = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\beta(\mu n - \nu m)}$, & que *tang.* $Mpg = \frac{\mu . CQ}{pQ + \nu . CQ} = \frac{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}{\mu\nu + \beta(\mu n - \nu m)(\nu n + \mu m)}$; c'est l'angle sous lequel les nouvelles ordonnées Mn sont coupées par le diamètre gi. Au reste, $Cp^2 = CQ^2 + Qp^2 + 2\nu . CQ . Qp = \frac{\mu^4 + 2\beta\mu^3 n(\mu n - \nu m) + \beta\beta\mu\mu(\mu n - \nu m)^2}{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)^2} tt$ & $Cp = \mu t . \frac{\sqrt{(\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}$. Si on fait $Cp = r$ & $pM = s$, on aura $t = \frac{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)r}{\mu\sqrt{(\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta^2(\mu n - \nu m)^2)}}$ & $u = s + Qp = s + \frac{\beta m(\mu n - \nu m)r}{\mu\sqrt{(\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta^2(\mu n - \nu m)^2)}}$; Ces valeurs donnent :

$$y = \frac{\mu s}{m} + \frac{\beta(\mu n - \nu m)r}{\sqrt{(\ldots\ldots\ldots)}}$$

$$x = -\frac{(\mu n - \nu m)s}{m} + \frac{\mu r}{\sqrt{(\ldots\ldots)}},$$

d'où l'on conclura, en substituant dans l'équation $yy + \beta xx - \alpha$, $\frac{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)ss}{mm} + \frac{\beta(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)rr}{\mu\mu + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta^2(\mu n - \nu m)^2} - \alpha = 0$.

114. Faisons à présent le demi-diamètre $CG = f$ & le demi-conjugué $CE = CF = g$; nous aurons $f = \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}$, & $g = \sqrt{\alpha}$, ou $\alpha = g^2$ & $\beta = \frac{g^2}{f^2}$; d'où résulte l'équation $yy + \frac{gg}{ff}xx = gg$. Supposons l'angle $GCg = p$, nous aurons *tang.* $p = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\beta(\mu n - \nu m)}$. Mais à cause de l'angle $GCE = q$, si on

fait l'angle $ECe = \pi$, on aura $AQM = \varphi = q + \pi$, & par conſéquent $\mu = \text{ſin.}\,(q + \pi)$, $\nu = \text{coſ.}\,(q + \pi)$, $m = \text{ſin.}\,q$ & $n = \text{coſ.}\,q$. Donc $\text{tang.}\,p = \frac{\beta\,.\,\text{ſin.}\,q\,.\,\text{ſin.}\,\pi}{\text{ſin.}\,(q+\pi) + \beta\,.\,\text{coſ.}\,q\,\text{ſin.}\,\pi}$ $= \frac{\beta\,\text{tang.}\,q\,.\,\text{tang.}\,\pi}{\text{tang.}\,q + \text{tang.}\,\pi + \beta\,.\,\text{tang.}\,\pi}$; $\text{ſin.}\,p = \frac{\beta\,\text{ſin.}\,q\,\text{ſin.}\,\pi}{\sqrt{(\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}$; & $\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2 = (\text{ſin.}\,(q+\pi))^2 + \beta(\text{ſin.}\,\pi)^2$. Ces valeurs étant ſubſtituées, on obtiendra, pour l'équation entre r & s, $\frac{((\text{ſin}\,\overline{q+\pi})^2 + \beta(\text{ſin.}\,\pi)^2)\,ss}{(\text{ſin.}\,q)^2} + \frac{\beta((\text{ſin.}\,\overline{q+\pi})^2 + \beta.(\text{ſin.}\,\pi)^2)\,rr(\text{ſin.}\,p)^2}{\beta\beta(\text{ſin.}\,q)^2(\text{ſin.}\,\pi)^2}$ $- \alpha = 0$; mais $\beta = \frac{\text{tang.}\,p\,.\,\text{ſin.}\,(q+\pi)}{(\text{ſin.}\,q - \text{coſ.}\,q\,.\,\text{tang}\,p)\,\text{ſin.}\,\pi} = \frac{\text{tang.}\,p\,(\text{tang.}\,q + \text{tang.}\,\pi)}{\text{tang.}\,\pi\,(\text{tang.}\,q - \text{tang.}\,p)}$ $= \frac{gg}{ff} = \frac{\text{cot.}\,\pi\,.\,\text{tang.}\,q + 1}{\text{cot.}\,p\,.\,\text{tang.}\,q - 1}$, ou $\text{tang.}\,q = \frac{ff + gg}{gg\,.\,\text{cot.}\,p - ff.\,\text{cot.}\,\pi}$, d'où l'on peut déduire pluſieurs corollaires; au reſte, on aura $\frac{gg}{ff} = \frac{\text{ſin.}\,p\,.\,\text{ſin.}\,(q+\pi)}{\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,(q-p)}$.

115. Soit le demi-diamètre $Cg = a$, & ſon demi-conjugué $Ce = b$, on trouvera, par l'équation donnée ci-deſſus, $a = \frac{\text{ſin.}\,q\,\text{ſin.}\,\pi\,.\,\sqrt{\alpha\beta}}{\text{ſin.}\,p\,.\sqrt{((\text{ſin.}\,\overline{q+\pi})^2 + \beta(\text{ſin.}\,\pi)^2)}} = \frac{gg\,\text{ſin.}\,q\,.\,\text{ſin.}\,\pi}{\text{ſin.}\,p\sqrt{(ff(\text{ſin.}\,(q+\pi))^2 + g^2(\text{ſin.}\,\pi)^2)}}$ & $b = \frac{fg\,\text{ſin.}\,q}{\sqrt{(ff(\text{ſin.}\,(q+\pi))^2 + gg(\text{ſin.}\,\pi)^2)}}$, on aura donc $a : b :: g\,\text{ſin.}\,\pi : f.\text{ſin.}\,p$. Mais $(\text{ſin.}\,(q+\pi))^2 + \frac{gg}{ff}(\text{ſin.}\,\pi)^2 = \frac{\text{ſin.}\,(q+\pi)}{\text{ſin.}\,(q-p)}$ $(\text{ſin.}(q-p)(\text{ſin.}(q+\pi) + \text{ſin.}\,p\,.\,\text{ſin.}\,\pi) = \frac{\text{ſin.}\,q\,.\,\text{ſin.}(q+\pi)\text{ſin.}(q+\pi-p)}{\text{ſin.}\,(q-p)}$; donc $a = \frac{gg\,\text{ſin.}\,\pi}{f\,.\,\text{ſin.}\,p}\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,q\,.\,\text{ſin.}\,(q-p)}{\text{ſin.}(q+\pi)\,\text{ſin.}\,(q+\pi-p)}}$; ou, à cauſe de $\frac{gg}{ff} = \frac{\text{ſin.}\,p\,.\,\text{ſin.}\,(q+\pi)}{\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,(q-p)}$, $a = f\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,q\,.\,\text{ſin.}\,(q+\pi)}{\text{ſin.}\,(q-p)\,\text{ſin.}\,(q+\pi-p)}}$ & $b = g\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,q\,.\,\text{ſin.}\,(q-p)}{\text{ſin}\,(q+\pi)\,\text{ſin.}\,(q+\pi-p)}}$; donc $a : b :: f.\text{ſin.}\,(q+\pi) : g.\,\text{ſin.}\,(q-p)$ & $ab = \frac{fg\,.\,\text{ſin.}\,q}{\text{ſin.}\,(q+\pi-p)}$.

116. Donc, ſi dans une ſection conique on conçoit les diamètres conjugués GI, EF & gi, ef, on aura d'abord :

$$Cg : Ce :: CE\,.\,\text{ſin.}\,ECe : CG\,.\,\text{ſin.}\,GCg,$$

donc

$$\text{ſin.}\,GCg : \text{ſin.}\,ECe :: CE.Ce : CG.Cg;$$

&, si on imagine des cordes Ee & Gg, le triangle CGg deviendra = au triangle CEe; on aura ensuite $Cg : Ce ::$ $CG.\text{sin.}\, GCe : CE.\text{sin.}\, gCE$, ou $Ce.CG.\text{sin.}GCe = CE.$ $Cg.\text{sin.}\, gCE$; donc, si on mène des cordes Ge & gE, les triangles GCe & gCE seront égaux entre eux, ou bien, en prenant ceux qui sont opposés, le triangle ICf sera = au triangle iCF. La derniere équation $ab.\text{sin.}(q+\pi-p) = fg.\text{sin.}$ q donnera $Cg.Ce.\text{sin.}\, gCe = CG.CE\, \text{sin.}\, GCE$. Donc, si on mène des cordes EG & eg, ou à l'opposite FI & fi, les triangles ICF & iCf seront pareillement égaux; d'où il suit que tous les parallélogrammes construits autour des deux diamètres conjugués sont égaux.

117. On a donc trois paires de triangles égaux entre eux, savoir :

I. Le triangle FCf égal au triangle ICi;
II. Le triangle fCI égal au triangle FCi;
III. Le triangle FCI égal au triangle fCi;

d'où il suit que les trapèzes $FfCI$ & $iICf$ seront égaux entre eux; si on en retranche le même triangle fCI, le triangle FIf sera = au triangle Ifi; &, comme ils ont même base fI, il est nécessaire que la corde Fi soit parallele à fI. On aura donc encore le triangle FIi = au triangle ifF; & si on leur ajoute les triangles égaux FCI & fCi, il en résultera les deux trapèzes égaux entre eux $FCIi = iCfF$.

118. On conclut aussi de-là une méthode de mener une tangente MT à un point quelconque M d'une ligne du second ordre. Car ayant pris pour axe un diamètre GI, dont le demi-conjugué soit EC, menons du point M à l'axe, parallèlement à CE, la ligne MP qui sera une demi-ordonnée, & qui donnera $PN = PM$; ayant tiré ensuite le demi-diamètre CM, cherchons son demi-conjugué CK, & la tangente demandée MT lui sera parallèle. Soit l'angle $GCE = q$, $GCM = p$ & $ECK = \pi$, on aura, comme nous l'avons vu, $\frac{EC^2}{GC^2} = \frac{\text{sin.}\, p.\text{sin.}\,(q+\pi)}{\text{sin.}\,\pi.\text{sin.}\,(q-p)}$ & $MC = CG\sqrt{\frac{\text{sin.}\, q.\text{sin.}\,(q+\pi)}{\text{sin.}\,(q-p)\,\text{sin.}\,(q+\pi-p)}}$. Mais Pl. III. Fig. 27.

dans le triangle CMP on a $MC^2 = CP^2 + MP^2 + 2\,PM.CP.\,cos.\,q$; de plus, $MP : MC :: sin.\,p : sin.\,q$ & $MP : CP :: sin.\,p : sin.\,(q-p)$. En outre, dans le triangle CMT, dont les angles sont donnés, on aura $CM : CT : MT :: sin.\,(q+\pi) : sin.\,(q+\pi-p) : sin.\,p$. Donc, en éliminant les angles, on aura $MC = CG\sqrt{\frac{MC.CM}{CP.CT}}$ ou $CG^2 = CP.CT$; donc $CP : CG :: CG : CT$; ce qui donne un moyen expéditif de trouver la position de la tangente. Cette proportion donnera aussi, *dividendo*, $CP : PG :: CG : TG$, & *componendo*, à cause de $CG = CI$, $CP : IP :: CG : TI$.

119. Puisqu'on a $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{sin.\,p.\,sin.\,(q+\pi)}{sin.\,\pi.\,sin.\,(q-p)}$; $\frac{CK^2}{CM^2} = \frac{sin.\,p.\,sin.\,(q-p)}{sin.\,\pi.\,sin.\,(q+\pi)}$; $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{sin.\,q.\,sin.\,(q+\pi)}{sin.\,(q-p)\,sin.\,(q+\pi-p)}$, & $\frac{CK^2}{CE^2} = \frac{sin.\,q.\,sin.\,(q-p)}{sin.\,(q+\pi)\,sin.\,(q+\pi-p)}$; il s'ensuit que $\frac{CE^2+CG^2}{CG^2} = \frac{sin.\,p.\,sin.\,(q+\pi)+sin.\,\pi.\,sin.\,(q-p)}{sin.\,\pi.\,sin.\,(q-p)}$, & $\frac{CK^2+CM^2}{CM^2} = \frac{sin.\,p.\,sin.\,(q-p)+sin.\,\pi.\,sin.\,(q+\pi)}{sin.\,\pi.\,sin.\,(q+\pi)}$. Mais $sin.\,A.\,sin.\,B = \frac{1}{2}\,cos.\,(A-B) - \frac{1}{2}\,cos.\,(A+B)$; & réciproquement $\frac{1}{2}\,cos.\,A - \frac{1}{2}\,cos.\,B = sin.\,\frac{A+B}{2}\,sin.\,\frac{B-A}{2}$. On aura donc $sin.\,p.\,sin.\,(q+\pi) + sin.\,\pi.\,sin.\,(q-p) = \frac{1}{2}\,cos.\,(q+\pi-p) - \frac{1}{2}\,cos.\,(q+\pi+p) + \frac{1}{2}\,cos.\,(q-\pi-p) - \frac{1}{2}\,cos.\,(q+\pi-p) = \frac{1}{2}\,cos.\,(q-\pi-p) - \frac{1}{2}\,cos.\,(q+\pi+p) = sin.\,q.\,sin.\,(p+\pi)$. De même $sin.\,p.\,sin.\,(q-p) + sin.\,\pi.\,sin.\,(q+\pi) = \frac{1}{2}\,cos.\,(q-2p) - \frac{1}{2}\,cos.\,q + \frac{1}{2}\,cos.\,q - \frac{1}{2}\,cos.\,(q+2\pi) = \frac{1}{2}\,cos.\,(q-2p) - \frac{1}{2}\,cos.\,(q+2\pi) = sin.\,(q+\pi-p)\,sin.\,(p+\pi)$. On aura donc :

$$\frac{CE^2+CG^2}{CG^2} = \frac{sin.\,q.\,sin.\,(p+\pi)}{sin.\,\pi.\,sin.\,(q-p)},$$

&

$$\frac{CK^2+CM^2}{CM^2} = \frac{sin.\,(q+\pi-p)\,sin.\,(p+\pi)}{sin.\,\pi.\,sin.\,(q+\pi)};$$

d'où

d'où l'on tire $\frac{CE^2 + CG^2}{CK^2 + CM^2} = \frac{CG^2}{CM^2} \cdot \frac{\text{fin.}\,q\,.\,\text{fin.}\,(q+\pi)}{\text{fin.}\,(q-p)\,\text{fin.}\,(q+\pi-p)} = \frac{CG^2}{CM^2} \cdot \frac{CM^2}{CG^2}$. donc $CE^2 + CG^2 = CK^2 + CM^2$, & par conféquent la fomme des quarrés de deux diamètres conjugués eft toujours conftante dans une même ligne du fecond ordre.

120. Les deux demi-diamètres conjugués CG & CE étant donnés, fi on prend à volonté un demi-diamètre CM, on trouve tout de fuite fon demi-conjugué CK, en prenant $CK = \sqrt{(CE^2 + CG^2 - CM^2)}$. Mais, par les propriétés des fections coniques trouvées auparavant, $TG.TI : TM^2 :: CG.CI : CK^2 :: CG^2 : CK^2 :: CG^2 : CE^2 + CG^2 - CM^2$; & par conféquent $TM = \frac{1}{CG}\sqrt{(TG.TI\,(CE^2 + CG^2 - CM^2))}$. Si, en fuppofant l'ordonnée MN prolongée, on imagine la tangente NT, les deux tangentes MT & NT rencontreront l'axe TI au même point T; car on aura pour l'une & pour l'autre $CP : CG :: CG : CT$. Mais, fi on mène la droite CN, on aura $TN = \frac{1}{CG}.\sqrt{(TG.TI.(CE^2 + CG^2 - CN^2))}$, & conféquemment $TM^2 : TN^2 :: CE^2 + CG^2 - CM^2 : CE^2 + CG^2 - CN^2$; & comme MN eft divifée en deux parties égales en P, on aura $\text{fin.}\,CTM : \text{fin.}\,CTN :: TN : TM :: \sqrt{(CE^2 + CG^2 - CN^2)} : \sqrt{(CE^2 + CG^2 - CM^2)}$.

121. Menons aux extrémités A & B du diamètre les tangentes AK, BL, & foit prolongée une autre tangente quelconque MT, jufqu'à ce qu'elle rencontre les deux premières aux points K & L; foit de plus le diamètre conjugué ECF, auquel les appliquées MP & les tangentes AK & BL feront parallèles. Puifque par la nature de la tangente $CP : CA :: CA : CT$, à caufe de $CB = CA$, on aura $CP : AP :: CA : AT$, & $CP : BP :: CA : BT$; donc $CP : CA :: CA : CT :: AP : AT :: BP : BT$; d'où $AT : BT :: AP : BP$; mais $AT : BT :: AK : BL$; donc $AK : BL :: AP : BP$. Pl. III. Fig. 28.
On a enfuite $AT = \frac{CA.AP}{CP}$, $BT = \frac{CA.BP}{CP}$, $PT = \frac{CA.AP}{CP} + AP = \frac{AP.BP}{CP}$; donc $AT : PT :: CA : BP$

$:: AK : PM$. On a ſemblablement $BT : PT :: CA . AP :: BL : PM$; d'où l'on tire $AK = \frac{AC . PM}{BP}$, $BL = \frac{AC . PM}{AP}$ & $AK . BL = \frac{CA^2 . PM^2}{AP . BP}$. Mais $AP . BP : PM^2 :: AC^2 : CE^2$; d'où l'on conclut cette belle propriété $AK . BL = CE^2$. Il ſuit de-là que $AK = CE \sqrt{\frac{AP}{BP}}$, & $BL = CE . \sqrt{\frac{BP}{AP}}$; $AP : BP :: AK^2 : CE^2 :: CE^2 : BL^2 :: KM : ML$, & $AK : BL :: KM : LM$.

122. Donc, ſi on mène à un point quelconque M de la courbe une tangente qui en rencontre deux autres AK, BL, parallèles entre elles, en K & en L, le demi-diametre CE parallèle aux tangentes AK & BL ſera toujours moyen proportionnel entre AK & BL, ou $CE^2 = AK . BL$. Donc, ſi on mène d'une manière ſemblable à un autre point quelconque m de la courbe une tangente kml, on aura auſſi $CE^2 = Ak . Bl$; & par conſéquent $AK : Ak :: Bl : BL$, & $AK : Kk :: Bl : Ll$. Si les tangentes ſe coupent en o, on aura $AK : Bl :: Ak : BL :: Kk : Ll :: ko : lo :: Ko : Lo$. Telles ſont les principales propriétés des ſections coniques, au moyen deſquelles NEWTON a réſolu un grand nombre de problêmes remarquables dans ſes *Principes*.

123. Puiſqu'on a $AK : Bl :: Ko : Lo$, ſi on prolonge la tangente LB juſqu'en I de manière que $BI = AK$, le point I ſera le point où la tangente menée de l'autre côté parallèlement à KL doit rencontrer cette tangente LB, comme le point K ſur la tangente LK eſt celui où elle eſt coupée par la tangente AK parallèle à BL. La droite IK paſſera donc par le centre C, & y ſera partagée en deux également. Donc, ſi deux tangentes quelconques BL, ML, ſont prolongées, ainſi qu'on vient de le preſcrire, juſqu'en I & en K, & qu'elles ſoient coupées par une troiſième lmo aux points l & o, on aura $BI : Bl :: Ko : Lo$, & *componendo*, $IB : Il :: Ko : KL$; ainſi, quel que ſoit le point par où la troiſième tangente lmo paſſera, on aura toujours $IB . KL = Il . Ko$. Ayant donc mené une quatrième tangente quelconque $\lambda \mu \omega$, qui

coupe les deux premières IL & KL en λ & en ω, on aura pareillement $IB.KL = I\lambda.K\omega$, & par conséquent $Il.Ko = I\lambda.K\omega$, ou $Il : I\lambda :: K\omega : Ko$. Donc, si on imagine les deux droites $l\omega$, λo, coupées dans un rapport quelconque, la droite, qui passera par les points de division, partagera IK dans le même rapport. Conséquemment, si les droites $l\omega$ & λo sont coupées par le milieu, la droite qui passera par les deux points d'intersection divisera aussi la droite IK en deux parties égales, & passera par conséquent par le centre de la section conique.

124. On démontrera ainsi par la géométrie, que si $Il : I\lambda :: K\omega : Ko$, ou $I\lambda : \lambda l :: Ko : o\omega$, la droite nmH, qui coupe les droites $l\omega$, λo dans un rapport donné, doit couper dans le même rapport la ligne KI. Supposons que la ligne mn coupe les deux autres $l\omega$ & λo dans le rapport de $m : n$, ou que $\lambda m : mo :: ln : n\omega :: m : n$; & que prolongée elle rencontre les tangentes IL & KL en Q & en R, on aura $\mathit{sin.}\ Q : \mathit{sin.}\ R :: \frac{ln}{Ql} : \frac{n\omega}{R\omega} :: \frac{\lambda m}{Q\lambda} : \frac{mo}{Ro} :: \frac{m}{Ql} : \frac{n}{R\omega}$. Donc $Ql : R\omega :: Q\lambda : Ro$, & *dividendo*, $l\lambda : o\omega :: Q\lambda : Ro :: Ql : R\omega$; mais, comme on a $l\lambda : o\omega : I\lambda : Ko$, on aura aussi $QI : RK :: l\lambda : o\omega$, & $\mathit{sin.}\ Q : \mathit{sin.}\ R :: \frac{m}{l\lambda} : \frac{n}{o\omega}$. Or, on a encore $\mathit{sin.}\ Q : \mathit{sin.}\ R :: \frac{HI}{QI} : \frac{HK}{KR} :: \frac{HI}{l\lambda} : \frac{HK}{o\omega}$; d'où il suit que $HI : HK :: m : n = \lambda m : mo :: ln : n\omega$. Pl. IV. Fig. 31.

125. Etant donc donnés deux demi-diamètres conjugués CG, CE, qui font un angle oblique $GCE = q$, on pourra toujours en trouver deux autres CM & CK, qui forment entre eux un angle droit MCK. Soit l'angle $GCM = p$; en supposant $ECK = \pi$, on aura $q + \pi - p = 90°$, & par conséquent $\mathit{sin.}\ \pi = \mathit{cos.}\ (q-p)$ & $\mathit{sin.}\ (q+\pi) = \mathit{cos.}\ p$; d'où (art. 119) $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\mathit{sin.}\ p\ .\ \mathit{cos.}\ p}{\mathit{sin.}\ (q-p)\ \mathit{co.}\ (q-p)} = \frac{\mathit{sin.}\ 2p}{\mathit{sin.}\ 2(q-p)} = \frac{\mathit{sin.}\ 2p}{\mathit{sin.}\ 2q\ .\ \mathit{cos.}\ 2p - \mathit{cos.}\ 2q\ .\ \mathit{sin.}\ 2p}$; donc $\frac{CG^2}{CE^2} = \mathit{sin.}\ 2q\ .\ \mathit{cot.}\ 2p - \mathit{cos.}\ 2q$, d'où l'on tire $\mathit{cot.}\ 2GCM = \mathit{cot.}\ 2q + \frac{CG^2}{CE^2\ .\ \mathit{sin.}\ 2q}$, équation qui présente une solution Pl. III. Fig. 27.

toujours possible; mais on aura $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\text{sin. } q \text{ cos. } p}{\text{sin. } (q-p)}$ & $\frac{CG^2}{CM^2} = 1 - \frac{\text{tang. } p}{\text{tang. } q}$; donc $\text{tang. } p = \text{tang. } q - \frac{CG^2}{CM^2} \cdot \text{tang. } q$; & comme on a $CM^2 + CK^2 = CG^2 + CE^2$ & $CK.CM = CG.CE . \text{sin. } q$, on aura $CM + CK = \sqrt{(CG^2 + 2\,CG.CE \text{ sin. } q + CE^2)}$ & $CM - CK = \sqrt{(CG^2 - 2\,CG \times CE \text{ sin. } q + CE^2)}$; au moyen de quoi on trouvera les diamètres conjugués qui sont perpendiculaires entre eux.

Pl. III. Fig. 29. 126. Soient donc CA & CE deux demi-diamètres conjugués d'une section conique, qui se coupent au centre C à angle droit; on les nomme ordinairement DIAMÈTRES PRINCIPAUX. Soit l'abscisse $CP = x$, l'appliquée $PM = y$, nous aurons, comme nous l'avons vu, $yy = \alpha - \mathcal{C}xx$; & en supposant les demi-diamètres principaux $AC = a$, $CE = b$, nous trouverons $\alpha = bb$, & $\mathcal{C} = \frac{b^2}{a^2}$; ce qui donne $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$. On voit par cette équation, qui ne change point, soit qu'on prenne les x & les y positivement, soit qu'on les prenne négativement, que la courbe sera composée de quatre portions semblables & égales situées de part & d'autre autour des diamètres AC & EF; c'est-à-dire, que le quart ACE sera semblable & égal au quart ACF; & les deux autres parties pareilles à celles-ci sont situées de l'autre côté du diamètre EF.

127. Si du centre C, que nous avons pris pour l'origine des abscisses, nous menons la droite CM, elle sera $= \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + xx)}$; ce qui fait voir que, si $b = a$ ou $CE = CA$, on aura $CM = \sqrt{bb} = b = a$; dans ce cas toutes les droites menées du centre C à la courbe seront donc égales entre elles; & comme c'est-là la propriété du cercle, il est clair que la section conique dont les deux diamètres conjugués principaux sont égaux entre eux, est un cercle dont l'équation rapportée aux coordonnées perpendiculaires sera, en faisant $CP = x$ & $PM = y$, $yy = a^2 - x^2$; & le rayon de ce cercle sera $CA = a$.

128. Mais si b n'est pas $= a$, on ne pourra jamais avoir pour

CM une expreſſion rationnelle en x. Cependant il y aura ſur l'axe un autre point D d'où toutes les droites DM menées à la courbe peuvent être exprimées d'une manière rationnelle; pour le trouver, faiſons $CD = f$; à cauſe de $DP = f - x$, on aura $DM^2 = ff - 2fx + x^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = b^2 + f^2 - 2fx + \frac{(a^2 - b^2)x^2}{aa}$; expreſſion qui deviendra un quarré, ſi $ff = \frac{(aa - bb)(bb + ff)}{aa}$, ou $0 = aa - bb - ff$; ce qui donne $f = \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Il y aura donc ſur l'axe AC un double point tel que nous le cherchons, & l'un & l'autre ſera à une diſtance du centre $CD = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. On aura $DM^2 = aa - 2x\sqrt{(a^2 - b^2)} + \frac{(aa - bb)x^2}{aa}$, & $DM = a - \frac{x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} = AC - \frac{CD \cdot CP}{AC}$. Si on fait $CP = 0$, DM deviendra $= DE = a = AC$; mais, ſi on fait l'abſciſſe $CP = CD$, ou $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, la droite DM deviendra l'appliquée DG, & on aura $DG = \frac{b^2}{a} = \frac{CE^2}{AC}$, ou DG troiſième proportionnelle à AC & CE.

129. Cette propriété remarquable, qui convient aux points D déterminés comme nous venons de le faire, a paru digne d'attention; & comme ces mêmes points du diamètre principal ont encore beaucoup d'autres propriétés qui les diſtinguent, on leur a donné pour cette raiſon des noms particuliers. On les appelle les FOYERS* de la ſection conique, &, parce qu'ils ſont ſitués ſur le plus grand diamètre a, on l'a diſtingué de ſon conjugué b en appelant le premier l'axe principal & *tranſverſe*, & l'autre b ſimplement l'axe *conjugué*. L'appliquée perpendiculaire, qui paſſe par l'un ou l'autre foyer, a été nommée le DEMI-PARAMETRE; car le PARAMÈTRE entier eſt l'ordonnée qui paſſe par D, ou le double de DG. On l'appelle auſſi *latus rectum*. Le demi-axe conjugué CE eſt donc moyen proportionnel entre le demi-paramètre DG & le demi-axe tranſverſe AC. Les extrémités de l'axe tranſverſe, où il eſt rencontré par la

* On les a appelés auſſi les *Umbilics*, du latin *Umbilicus*.

courbe, se nomment les SOMMETS; tel est le point A; & la tangente menée par ces deux points de la courbe a la propriété d'être perpendiculaire à l'axe principal AC.

130. Supposons le demi-paramètre $DG = c$, la distance du foyer au sommet $AD = d$, nous aurons $CD = a - d = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ & $DG = \frac{bb}{a} = c$, d'où $bb = ac$ & $a - d = \sqrt{(aa - ac)}$; donc $ac = 2ad - dd$, $a = \frac{dd}{2d - c}$ & $b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}$. Ainsi, lorsque la distance du foyer au sommet $AD = d$, & le demi-paramètre $DG = c$, sont donnés, la section conique est déterminée. Soit à présent $CP = x$, DM sera $= a - \frac{(a-d)x}{a} = \frac{dd}{2d - c} - \frac{(c-d)x}{d}$. Soit aussi $DP = t$, x sera $= CD - t = \frac{(c-d)d}{2d - c} - t$; donc DM devient $= c + \frac{(c-d)t}{d}$. Faisons l'angle $ADM = v$, nous aurons $\frac{t}{DM} = -\ cos.\ v$, & par conséquent $d.DM = cd + (d - c)\ DM.cos.\ v$ & $DM = \frac{cd}{d - (d - c)\ cos.v}$ & $cos.\ v = \frac{d(DM - DG)}{(d - c)\ DM}$.

CHAPITRE VI.

De la Subdivision des Lignes du second Ordre en Genres.

131. LES propriétés que nous avons développées dans le chapitre précédent, conviennent également à toutes les lignes du second ordre, & nous n'avons fait mention d'aucune variété qui les distinguât les unes des autres. Mais, quoique toutes ces propriétés soient communes à toutes les lignes du second ordre, cependant elles diffèrent beaucoup entre elles par leur figure; c'est pourquoi il convient de les distribuer en genres, afin d'avoir plus de facilité pour en distinguer les

différentes figures, & pour découvrir les propriétés qui conviennent à chaque genre en particulier.

132. Nous avons donné, en changeant ſeulement l'axe & l'origine des abſciſſes, une forme telle à l'équation générale des lignes du ſecond ordre, qu'elles ſont renfermées dans l'équation $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, dans laquelle x & y repréſentent les coordonnées perpendiculaires; &, puiſque pour chaque abſciſſe x l'appliquée y a deux valeurs, l'une poſitive, l'autre négative, cet axe, ſur lequel ſe comptent les abſciſſes x, diviſera la courbe en deux parties égales & ſemblables; il en ſera par conſéquent un diamètre orthogonal; donc on peut dire que toute ligne du ſecond ordre a un diamètre orthogonal, qui n'eſt rien autre choſe que l'axe ſur lequel je compte ici les abſciſſes.

133. Il entre dans cette équation trois quantités conſtantes α, β & γ, qui, pouvant être variées d'une infinité de manières, indiquent une variété infinie de lignes courbes, qui différeront plus ou moins entre elles par la forme qu'elles auront. Car la même figure peut réſulter une infinité de fois de l'équation propoſée $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$; il n'y a qu'à changer l'origine des abſciſſes, ce qui ſe fait en augmentant ou en diminuant l'axe d'une quantité donnée. De plus, la même figure compriſe dans l'équation peut être plus ou moins grande, de ſorte qu'il y a une infinité de lignes courbes, qui diffèrent entre elles ſeulement en grandeur; tels ſont les cercles décrits avec différens rayons. Il ſuit de-là que toute variation dans les lettres α, β & γ, ne produit pas une variété d'eſpèces ou de genres dans les lignes du ſecond ordre.

134. La plus grande différence des lignes courbes renfermées dans l'équation $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, dépend de la nature du coéfficient γ, ſuivant qu'il a une valeur poſitive ou négative. Car ſi γ a une valeur poſitive, en faiſant x infini, dans ce cas le terme γxx deviendra infiniment plus grand que les autres $\alpha + \beta x$, & par conſéquent l'expreſſion $\alpha + \beta x + \gamma xx$ obtient une valeur poſitive; l'appliquée y aura pareillement une double valeur infiniment grande, l'une poſitive, l'autre négative; la même choſe arrive ſi on fait $x = -\infty$;

dans ce dernier cas, l'expreſſion $\alpha + \beta x + \gamma x x$ aura encore une valeur infinie poſitive. C'eſt pourquoi, lorſque γ eſt une quantité poſitive, la courbe a quatre branches qui s'étendent à l'infini; deux qui répondent à l'abſciſſe $x = + \infty$, & deux à l'abſciſſe $x = - \infty$. Ces ſortes de courbes qui ont quatre branches infinies, ſont cenſées conſtituer un genre de lignes du ſecond ordre, & ſont connues ſous le nom d'HYPERBOLES.

135. Mais ſi le coéfficient γ a une valeur négative; en faiſant $x = + \infty$, ou $x = - \infty$, l'expreſſion $\alpha + \beta x + \gamma x x$ aura une valeur négative, & par conſéquent l'appliquée y deviendra imaginaire. Dans ce cas, ni l'abſciſſe ni l'appliquée ne pourront donc être infinies, & conſéquemment aucune portion de la courbe ne s'étendra à l'infini; mais elle ſera renfermée toute entière dans un eſpace fini & déterminé. Cette ſeconde eſpèce des lignes du ſecond ordre a obtenu le nom d'ELLYPSES, & elles ſont compriſes dans cette équation $yy = \alpha + \beta x + \gamma x x$, γ étant ſuppoſé une quantité négative.

136. Puiſque la valeur de γ, ſuivant qu'elle eſt poſitive ou négative, introduit dans les lignes du ſecond ordre une ſi grande différence, qu'elle a donné lieu à la diſtinction de deux genres; ſi on fait $\gamma = 0$, qui eſt la valeur qui tient le milieu entre les valeurs poſitives & les valeurs négatives, la courbe qui en réſultera, conſtituera auſſi une eſpèce moyenne entre les Hyperboles & les Ellypſes, qu'on appelle PARABOLES, dont la nature ſera exprimée par l'équation $yy = \alpha + \beta x$. Il eſt indifférent ici que β ſoit une quantité poſitive ou négative, parce que la nature d'une courbe ne change point, lorſqu'on fait l'abſciſſe négative. Soit donc β une quantité poſitive; il eſt évident que, ſi l'abſciſſe x croît à l'infini, l'appliquée y ſera auſſi une quantité infinie poſitive & négative; d'où il ſuit que la Parabole a deux branches infinies; mais elle n'en peut avoir plus de deux, parce qu'en faiſant $x = - \infty$, la valeur de l'appliquée y devient imaginaire.

137. Nous avons donc trois eſpèces de lignes du ſecond ordre, l'Ellypſe, la Parabole & l'Hyperbole, qui diffèrent tellement entre elles, qu'il eſt impoſſible de les confondre

enſemble,

ensemble. Car leur différence essentielle consiste dans le nombre de leurs branches infinies; l'Ellypse n'en a aucune & est renfermée toute entière dans un espace fini, la Parabole en a deux, & l'Hyperbole quatre. Ainsi, après avoir considéré en général, dans le chapitre précédent, les propriétés des sections coniques, il nous reste à examiner les propriétés particulières de chaque espèce.

138. Commençons par l'Ellypse dont l'équation est $yy = \alpha + \beta x - \gamma xx$, les abscisses étant prises sur le diamètre orthogonal. Comme l'origine des abscisses est arbitraire, si nous l'éloignons d'un intervalle $\frac{\beta}{2\gamma}$, nous aurons une équation de cette forme $yy = \alpha - \gamma xx$, dans laquelle les abscisses sont comptées du centre de la figure. Soit donc C le centre, & AB l'axe, l'abscisse sera $CP = x$, & l'appliquée $PM = y$. On aura donc $y = 0$, en prenant $x = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$; & si x passe ces limites $+\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}, -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, l'appliquée deviendra imaginaire; ce qui indique que la courbe entière est renfermée entre ces limites. On aura donc $CA = CB = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$; faisant ensuite $x = 0$, on aura $CD = CE = \sqrt{\alpha}$. Supposons donc le demi-diamètre ou le demi-axe principal $CA = CB = a$, & le demi-axe conjugué $CD = CE = b$, nous aurons $\alpha = bb$ & $\gamma = \frac{bb}{aa}$; d'où résulte pour l'Ellypse cette équation $yy = bb - \frac{bbxx}{aa} = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$. Pl. IV. Fig 31.

139. Quand les demi-axes conjugués a & b deviennent égaux entre eux, alors l'Ellypse se change en cercle à cause de $yy = aa - x^2$, ou $yy + xx = aa$; car on aura $CM = \sqrt{(xx + yy)} = a$; & par conséquent tous les points M de la courbe seront également éloignés du centre C; ce qui est la propriété du cercle. Mais, si les demi-axes a & b sont inégaux entre eux, la courbe sera allongée; car ou AB sera plus grand que DE, ou DE plus grand que AB. Mais, comme on peut

échanger les axes conjugués AB & DE, & qu'il eſt indifférent ſur lequel des deux on prend les abſciſſes, ſuppoſons que AB ſoit le plus grand, ou que a ſoit plus grand que b; on trouvera ſur cet axe les foyers de l'Ellypſe F & G, en prenant $CF = CG = \sqrt{(a^2 - b^2)}$; le demi-paramètre ſera $= \frac{bb}{a}$; lequel exprime la grandeur de l'appliquée élevée à l'un ou à l'autre foyer F ou G.

140. Si on mène de chaque foyer à un point M de la courbe les droites FM & GM; nous avons vu ci-deſſus qu'on auroit $FM = AC - \frac{CF \cdot CP}{AC} = a - \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$, & $GM = a + \frac{x\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$; & par conſéquent $FM + GM = 2a$. Donc, ſi à un point quelconque M de la courbe on mène des deux foyers les droites FM & GM, leur ſomme ſera toujours égale au plus grand axe $AB = 2a$; ce qui nous fait connoître une propriété remarquable des foyers, & nous fournit en même temps un moyen facile de décrire mécaniquement l'Ellypſe.

141. Soit menée au point M la tangente TMt qui rencontre les axes aux points T & t; on aura, comme nous l'avons démontré auparavant, $CP : CA :: CA : CT$; donc $CT = \frac{aa}{x}$, on aura de même, en échangeant les coordonnées, $Ct = \frac{bb}{y}$. Donc $TP = \frac{aa}{x} - x$, $TF = \frac{aa}{x} - \sqrt{(a^2 - b^2)}$ & $TA = \frac{aa}{x} - a$. TP deviendra donc $= \frac{aa - xx}{x} = \frac{aayy}{bbx}$, & $TM = \frac{y\sqrt{(b^4x^2 + a^4y^2)}}{bbx}$; donc *tang.* $CTM = \frac{bbx}{aay}$; *ſin.* $CTM = \frac{bbx}{\sqrt{(b^4x^2 + a^4y^2)}}$ & *coſ.* $CTM = \frac{aay}{\sqrt{(b^4x^2 + a^4y^2)}}$. Par conſéquent, ſi on élève au point A une perpendiculaire AV à l'axe, laquelle touchera en même temps la courbe, on aura $AV = \frac{a(a-x)}{x} \cdot \frac{bbx}{aay} = \frac{bb(a-x)}{ay} = b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, à cauſe de $ay = b\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

142. Puiſque $FT = \frac{a^2 - x\sqrt{(a^2-b^2)}}{x}$ & $FM = \frac{a^2 - x\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$,

on aura $FT : FM :: a : x$; on aura ſemblablement, à cauſe que $GT = \frac{a^2 + x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{x}$ & $GM = \frac{a^2 + x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$, $GT : GM :: a : x$; donc $FT : FM :: GT : GM$. Mais $FT : FM :: \text{ſin.}\, FMT : \text{ſin.}\, CTM$, & $GT : GM :: \text{ſin.}\, GMt : \text{ſin.}\, CTM$; donc on aura $\text{ſin.}\, FMT = \text{ſin.}\, GMt$; & par conſéquent l'angle FMT ſera $=$ à l'angle GMt. Donc les deux droites menées des foyers à un point quelconque M de la courbe ſont également inclinées à l'égard de la tangente menée par ce point M; ce qui eſt la principale propriété des foyers.

143. Puiſqu'on a $GT : GM :: a : x$, à cauſe de $CT = \frac{aa}{x}$, on aura auſſi $CT : CA :: a : x$; doù l'on tire $GT : GM :: CT : CA$. Donc, ſi du centre C on mène parallèlement à GM la ligne CS qui rencontre la tangente en S, on aura $CS = CA = a$. De même, ſi du point C on mène une parallèle à FM terminée à la tangente, elle ſera auſſi égale à $CA = a$. Puiſqu'on a $TM = \frac{y}{bbx}\sqrt{(b^4xx + a^4y^2)}$, on aura auſſi, à cauſe de $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$, $TM = \frac{y}{bx}\sqrt{(a^4 - x^2(a^2 - b^2))}$; mais $FT.GT = \frac{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}{xx}$; donc $TM = \frac{y}{b}\sqrt{FT.GT}$. Comme $TG : TC :: TM : TS$, TS ſera $= \frac{TM.CT}{TG}$; & par conſéquent $TS = \frac{y.CT}{b}\sqrt{\frac{FT}{GT}} = \frac{y.CT.FT}{b\sqrt{FT.GT}} = \frac{y^2.CT.FT}{b^2.TM}$. Enſuite $PT = \frac{a^2y^2}{b^2x} = \frac{CT.yy}{b^2}$; donc $TS = \frac{PT.FT}{TM}$, & conſéquemment $TM : PT :: FT : TS$; ce qui fait voir que les triangles TMP & TFS ſont ſemblables, & que par conſéquent la droite FS menée du foyer à la tangente lui eſt perpendiculaire. On aura d'ailleurs $SV = \frac{AF.MV}{GM}$, comme on peut le conclure de ce qui précède.

144. Donc, ſi de l'un des foyers F on mène ſur la tangente la perpendiculaire FS, & qu'on joigne le point S & le centre C par la droite CS, cette droite CS ſera toujours égale au demi-grand axe $AC = a$; mais comme $TM : y :: TF : FS$,

$FS = \frac{y \cdot TF}{TM} = \frac{b \cdot TF}{\sqrt{FT \cdot GT}} = b\sqrt{\frac{FT}{GT}}$. Donc $GT : FT :: GM : FM :: CD^2 : FS^2$; mais la perpendiculaire abaiſſée de l'autre foyer ſur la tangente ſera $= b\sqrt{\frac{GT}{FT}}$; par conſéquent le demi-petit axe $CD = b$ ſera moyen proportionnel entre ces perpendiculaires. Abaiſſons à préſent du centre C ſur la tangente la perpendiculaire CQ, nous aurons $TF : FS :: CT : CQ$. Donc $CQ = \frac{b \cdot CT}{\sqrt{FT \cdot GT}} = \frac{bx \cdot CT}{a\sqrt{FM \cdot GM}} = \frac{ab}{\sqrt{FM \cdot GM}}$. Donc $CQ - FS = \frac{b \cdot CF}{\sqrt{FT \cdot GT}} = CX$, FX étant menée parallèlement à la tangente. On conclura de-là que $CQ - CX = \frac{b \cdot TF}{\sqrt{FT \cdot GT}}$ & $CQ + CX = \frac{b \cdot TG}{\sqrt{FT \cdot GT}}$; donc $CQ^2 - CX^2 = b^2$, & $CX = \sqrt{(CQ^2 - b^2)}$. Donc le petit axe étant donné, on trouve ſur la perpendiculaire CQ le point X où doit être élevée la perpendiculaire qui paſſe par le foyer F.

145. Après avoir expoſé les propriétés relatives aux foyers, paſſons à celles de deux diamètres conjugués quelconques. On ſait que CM étant un demi-diamètre, on trouvera ſon conjugué, ſi on mène du centre parallèlement à la tangente TM la ligne CK. Soit $CM = p$, $CK = q$, & l'angle $MCK = CMT = s$, on aura d'abord $p^2 + q^2 = a^2 + b^2$, & enſuite $pq\,ſin.\,s = ab$, comme nous l'avons vu ci-deſſus; mais $p^2 = x^2 + y^2 = b^2 + \frac{(a^2 - b^2)xx}{a^2}$, & $q^2 = a^2 + b^2 - p^2 = a^2 - \frac{(a^2 - b^2)xx}{a^2} = FM \cdot GM$; de même $p^2 = FK \cdot GK$. D'ailleurs, puiſque $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM \cdot GM}}$, on aura $ſin.\,CMQ = ſin.\,s = \frac{ab}{p\sqrt{FM \cdot GM}}$. On aura enſuite $TM : TP :: \frac{y}{b}\sqrt{FT \cdot GT} : \frac{a^2y^2}{b^2x} :: \sqrt{FM \cdot GM} : \frac{ay}{b} :: CK : CR$; donc $CR = \frac{ay}{b}$ & $KR = \frac{bx}{a}$, & par conſéquent $CR \cdot KR = CP \cdot PM$. De plus, on trouvera $ſin.\,FMS = \frac{b}{\sqrt{GM \cdot FM}} = \frac{b}{q}$; & comme $x = CP = \frac{a\sqrt{(p^2 - b^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$ & $y = \frac{b\sqrt{(a^2 - p^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} = PM$, $CR = \frac{a\sqrt{(a^2 - p^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$ & $KR = \frac{b\sqrt{(p^2 - b^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$,

on aura $tang.\ ACM = \frac{y}{x}$, & $tang.\ 2\,ACM = \frac{2yx}{x^2 - y^2} = \frac{2ab\sqrt{(a^2-p^2)(p^2-b^2)}}{(a^2+b^2)p^2 - 2a^2b^2}$. Or $ab = pq\ fin.\ s$, $a^2+b^2 = p^2+q^2$ & $\sqrt{(a^2-p^2)(p^2-b^2)} = -pq\ cof.\ s$; donc $tang.\ 2\,ACM = -\frac{2q^2 fin.\ s.\ cof.\ s}{p^2+q^2 cof.\ 2s}$, à caufe que $cof.\ s$ eft négatif. Enfin $CK^2 = MT.Mt$; mais on tire de ce qui précède $MV = q\sqrt{\frac{AP}{BP}}$ & $AV = b\sqrt{\frac{AP}{BP}}$; donc on aura $AV : MV :: b : q :: CE : CK$; donc, fi on mène des droites AM & EK, elles feront parallèles.

146. Puifque $pq\ fin.\ s = ab$, on aura pq plus grand que ab, &, à caufe que $pp + qq = aa + bb$, les quantités p & q approchent plus de la raifon d'égalité que a & b; donc, parmi tous les diamètres conjugués, ceux qui font perpendiculaires diffèrent le plus l'un de l'autre; il y aura donc deux diamètres conjugués égaux entre eux. Pour les trouver, foit $q=p$, on aura $2pp = a^2+b^2$ & $p = q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $fin.\ s = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ & $cof.\ s = \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}$; donc $fin.\ \frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}$, $cof.\ \frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}}$; ce qui donne $tang.\ \frac{1}{2}s = \frac{a}{b} = tang.\ CEB$, & $MCK = 2\,CEB = AEB$. De plus $CP = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $PM = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Donc les deux demi-diamètres conjugués CM, CK, égaux entre eux, feront parallèles aux cordes AE & BE.

147. Si on compte les abfciffes du fommet A, & qu'on faffe $AP = x$, $PM = y$, comme ce qui étoit auparavant x eft à préfent $a - x$, on aura cette équation $yy = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}xx$, dans laquelle il eft évident que $\frac{2b^2}{a}$ exprime le paramètre de l'Ellypfe. Suppofons le demi-paramètre ou l'appliquée au foyer $= c$, & la diftance AF du foyer au fommet $= d$, on aura $\frac{b^2}{a} = c$ & $a - \sqrt{(a^2-b^2)} = d = a - \sqrt{(a^2-ac)}$, d'où l'on tire $2ad - d^2 = ac$ & $a = \frac{d^2}{2d-c}$.

On aura donc $yy = 2cx - \frac{c(2d-c)xx}{dd}$ pour l'équation à l'Ellypſe entre les coordonnées perpendiculaires x & y, en comptant les abſciſſes x ſur l'axe principal AB depuis le ſommet A; & prenant pour conſtantes la diſtance $AF = d$ du foyer au ſommet, & le demi-paramètre $= c$. Il faut remarquer ici que $2d$ doit toujours être plus grand que c, parce que $AC = a = \frac{dd}{2d-c}$, & $CD = b = d\sqrt{\frac{c}{2d-c}}$.

Pl. IV. Fig 32. 148. Si $2d = c$, on aura $yy = 2cx$, équation que nous avons vu auparavant appartenir à la Parabole; car l'équation $yy = \alpha + \beta x$, que nous avons donnée ci-deſſus, ſe ramène à cette forme en déplaçant l'origine des abſciſſes d'une quantité $= \frac{\alpha}{\beta}$. Soit donc MAN une Parabole, dont la nature ſoit exprimée par cette équation $yy = 2cx$ entre l'abſciſſe $AP = x$ & l'appliquée $PM = y$. On aura la diſtance du foyer au ſommet $AF = d = \frac{1}{2}c$, & le demi-paramètre $FH = c$, & pour tous les points de la courbe $PM^2 = 2FH.AP$; d'où il ſuit qu'en ſuppoſant l'abſciſſe AP infinie, les appliquées PM & PN le deviennent auſſi; & que par conſéquent la courbe s'étend à l'infini des deux côtés de l'axe AP. Mais, ſi on fait l'abſciſſe x négative, l'appliquée devient imaginaire, & conſéquemment aucune portion de la courbe ne répond à l'axe au-delà du point A vers T.

149. L'équation à l'Ellypſe exprimant une parabole, lorſqu'on fait $2d = c$, il eſt évident que la Parabole n'eſt rien autre choſe qu'une Ellypſe dont le demi-axe $a = \frac{d^2}{2d-c}$ devient infini; c'eſt pourquoi toutes les propriétés que nous avons trouvées pour l'Ellypſe s'appliqueront à la Parabole, en faiſant l'axe a infini. D'abord, puiſque $AF = \frac{1}{2}c$, FP ſera $= x - \frac{1}{2}c$; & en menant du foyer F à un point M de la courbe la droite FM, on aura $FM^2 = x^2 - cx + \frac{1}{4}c^2 + yy = xx + cx + \frac{1}{4}c^2$, & par conſéquent $FM = x + \frac{1}{2}c = AP +$

AF; ce qui eſt la principale propriété du foyer dans la Parabole.

150. Puiſque la Parabole n'eſt rien autre choſe qu'une Ellypſe, dont le grand axe a été augmenté à l'infini, traitons cette courbe comme ſi elle étoit réellement une Ellypſe; ſoit à cet effet ſon demi-axe $AC = a$, a étant une quantité infinie, de manière que le centre C ſoit à une diſtance infinie du ſommet A. Menons au point M une tangente à la courbe MT qui rencontre l'axe en T; comme on avoit $CP : CA :: CA : CT$, CT ſera $= \frac{a^2}{a-x}$, à cauſe de $CP = a - x$, & partant $AT = \frac{ax}{a-x}$; mais, comme a eſt une quantité infinie, l'abſciſſe x diſparoîtra devant cette dernière quantité, & on aura $a - x = a$, & par conſéquent $AT = x = AP$; ce qu'on peut démontrer de cette autre manière; puiſque $AT = \frac{ax}{a-x}$, on aura $AT = x + \frac{x^2}{a-x}$; mais, à cauſe que le dénominateur de la fraction $\frac{xx}{a-x}$ eſt infini, le numérateur étant fini, la valeur de la fraction devient nulle, & conſéquemment $AT = AP = x$.

151. Si d'un point M on mène au centre C de la Parabole infiniment éloigné la ligne MC qui ſera parallèle à l'axe, elle ſera auſſi un diamètre de la courbe, lequel diviſera en deux parties égales toutes les cordes parallèles à la tangente MT. Par exemple, ſi on imagine la corde ou l'ordonnée mn parallèle à la tangente MT, elle ſera diviſée également en p par le diamètre Mp. Toute droite menée dans la Parabole parallèlement à l'axe AP ſera donc un diamètre obliquangle. Pour en déterminer la nature, ſoit $Mp = t$, $pm = u$; ſoit menée du point m à l'axe la perpendiculaire msr, à cauſe de $PT = 2x$ & de $MT = \sqrt{(4xx + 2cx)}$, on aura $\sqrt{(4xx + 2cx)} : 2x : \sqrt{2cx} :: pm : ps : ms$; ce qui donne $ps = \frac{2xu}{\sqrt{(4x^2 + 2cx)}} = u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$ & $ms = u\sqrt{\frac{c}{2x+c}}$. Donc $Ar = x + t + u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$ & $mr = \sqrt{2cx} + u\sqrt{\frac{c}{2x+c}}$;

mais $mr^2 = 2c.Ar$; donc $2cx + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}} + \frac{cuu}{2x+c} =$ $2cx + 2ct + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$ & $u^2 = 2t(2x+c) = 4FM.t$, ou $pm^2 = 4FM.Mp$. Quant au sinus de l'angle oblique mps, il sera $= \sqrt{\frac{c}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AF}{FM}}$; son cosinus $= \sqrt{\frac{2x}{2x+c}} =$ $\sqrt{\frac{AP}{FM}}$; & par conséquent $\mathit{fin.}\ 2mps = \frac{2\sqrt{2cx}}{2x+c} = \frac{y}{FM} =$ $\mathit{fin.}\ MFr$. Donc l'angle $mps = MTP = \frac{1}{2}MFr$.

152. Comme $MF = AP + AF$, à cause de $AP = AT$, on aura $FM = FT$; le triangle MFT sera isocèle, & l'angle MFr sera $= 2MTA$, comme nous venons de le trouver; &, puisque ensuite on a $MT = 2\sqrt{x(x+\frac{1}{2}c)}$, MT sera $=$ $2\sqrt{AP.FM}$; donc, si on abaisse du foyer F sur la tangente une perpendiculaire FS, on aura $MS = TS = \sqrt{AP.FM} =$ $\sqrt{AT.TF}$; d'ou l'on conclut la proportion $AT : TS :: TS : TF$, qui nous apprend que le point S est sur une droite AS perpendiculaire à l'axe au sommet A. Mais $AS = \frac{1}{2}PM$, & $AS : TS :: AF : FS$. Donc $FS = \sqrt{AF.FM}$, & FS sera moyenne proportionnelle entre AF & FM. On aura, en outre, $AS : MS :: AS : TS :: FS : FM :: \sqrt{AF} : \sqrt{FM}$. Si au point M on élève une perpendiculaire à la tangente MW qui coupe l'axe en W, on aura $PT : PM :: PM : PW$, ou $2x : \sqrt{2cx} :: \sqrt{2cx} : PW$, d'où l'on tire $PW = c$. Donc l'intervalle PW intercepté sur l'axe entre l'appliquée PM & la normale WM, a par-tout une grandeur constante & égale au demi-paramètre ou à l'appliquée FH. On aura d'ailleurs $FW =$ $FT = FM$ & $MW = 2\sqrt{AF.FM}$.

153. Nous voilà arrivés à l'Hyperbole dont la nature est exprimée par cette équation $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, les abscisses étant comptées sur le diamètre orthogonal. Si on transporte l'origine des abscisses à une distance $= \frac{\beta}{2\gamma}$, on trouvera une équation de cette forme $yy = \alpha + \gamma xx$ dans laquelle les abscisses sont comptées du centre. Or, il est nécessaire que

que γ soit une quantité positive ; quant à la valeur de α, il est indifférent qu'elle soit positive ou négative ; car, en échangeant les coordonnées x & y, la quantité α de positive devient négative, & réciproquement. Supposons donc α une quantité négative, & $yy = \gamma xx - \alpha$; il est visible que l'appliquée y devient nulle en deux endroits, savoir, lorsque $x = + \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ & $x = - \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$. Soit C le centre, A & B les points où l'axe est coupé par la courbe ; ayant fait le demi-axe $CA = CB = a$, on aura $a = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ & $\alpha = \gamma a^2$, d'où résulte $yy = \gamma xx - \gamma aa$. Ainsi, tant que xx sera plus petit que a^2, l'appliquée sera imaginaire ; ce qui fait voir qu'aucune portion de la courbe ne répond à la totalité de l'axe AB. Mais, si on prend xx plus grand que aa, les appliquées croissent de plus en plus jusqu'à devenir infinies. Donc l'Hyperbole aura quatre branches AI, Ai, BK, Bk, qui s'étendent à l'infini & qui sont égales & semblables entre elles ; c'est-là la propriété principale des Hyperboles. Pl. IV. Fig. 33.

154. Puisqu'en faisant $x = 0$, on a $yy = - \gamma aa$, l'Hyperbole n'aura point comme l'Ellypse un axe conjugué, parce que l'appliquée au centre C est imaginaire. Cet axe conjugué sera donc imaginaire ; mais, pour conserver quelque analogie avec l'Ellypse, faisons-le $= b\sqrt{-1}$, de sorte que $\gamma a^2 = b^2$ & $\gamma = \frac{b^2}{a^2}$. Ayant fait l'abscisse $CP = x$ & l'appliquée $PM = y$, on aura $yy = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; ce qui fait voir que l'équation à l'Ellypse que nous avons traitée auparavant, savoir $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ devient l'équation à l'Hyperbole en mettant $-b^2$ à la place de b^2. A cause de cette affinité, les propriétés de l'Ellypse, que nous avons trouvées auparavant, se rameneront facilement à l'Hyperbole. Par exemple, la distance des foyers au centre dans l'Ellypse étoit $\sqrt{(aa - b^2)}$; pour l'Hyperbole, elle sera $CF = CG = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. On aura donc $FP = x - \sqrt{(a^2 + b^2)}$ & $GP = x + \sqrt{(a^2 + b^2)}$; donc, à cause de $y^2 = - b^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}$, FM deviendra $= \sqrt{(a^2}$

$+x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}-2x\sqrt{(a^2+b^2)}))=\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}-a$, & $GM=\sqrt{(a^2+x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}+2x\sqrt{(a^2+b^2)})}=\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}+a$. Ayant donc mené de chaque foyer à un point M de la courbe les droites FM, GM, on aura $FM+AC=\frac{CP.CF}{CA}$ & $GM-AC=\frac{CP.CF}{CA}$. La différence $GM-FM$ de ces deux droites eſt donc égale à $2AC$. On voit par-là que ſi dans l'Ellypſe c'eſt la ſomme de ces deux lignes qui eſt égale à l'axe principal, au contraire dans l'Hyperbole c'eſt leur différence.

155. On peut auſſi conclure de-là la poſition de la tangente MT; car on a toujours pour les lignes du ſecond ordre $CP : CA :: CA : CT$; d'où $CT=\frac{aa}{x}$ & $PT=\frac{x^2-a^2}{x}=\frac{a^2y^2}{b^2x}$; il s'enſuit que $MT=\frac{y}{b^2x}\sqrt{(b^4x^2+a^4y^2)}=\frac{y}{bx}\sqrt{(a^2x^2+b^2x^2-a^4)}$. Mais $FM.GM=\frac{a^2x^2+b^2x^2-a^4}{a^2}$; donc $MT=\frac{ay}{bx}\times\sqrt{FM.GM}$. On a enſuite $FT=\sqrt{(a^2+b^2)}-\frac{a^2}{x}$ & $GT=\sqrt{(a^2+b^2)}+\frac{a^2}{x}$. Donc $FT : FM :: a : x$ & $GT : GM :: a : x$; d'où il ſuit que $FT : GT :: FM : GM$, proportion qui apprend que l'angle FMG eſt diviſé en deux parties égales par la tangente MT, & que $FMT = GMT$. La droite CM prolongée ſera un diamètre obliquangle qui partage en deux également toutes les ordonnées parallèles à la tangente MT.

156. Soit abaiſſée du centre C ſur la tangente la perpendiculaire CQ, on aura $TM : PT : PM :: CT : TQ : CQ$, ou $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM} : \frac{a^2y^2}{b^2x} : y :: \frac{a^2}{x} : TQ : CQ$, d'où l'on tire $TQ=\frac{a^3y}{bx\sqrt{FM.GM}}$ & $CQ=\frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$. Soit de même abaiſſée du foyer F ſur la tangente la perpendiculaire FS, on aura $TM : PT : PM :: FT : TS : FS$, ou $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM} : \frac{a^2y^2}{b^2x} : y$

$:: \frac{a.FM}{x} : TS : FS$; d'où l'on tire $TS = \frac{a^2 y FM}{bx\sqrt{FM.GM}}$ & $FS = \frac{b.FM}{\sqrt{FM.GM}}$; pareillement, si on abaisse de l'autre foyer G sur la tangente la perpendiculaire Gs, on aura $Ts = \frac{a^2 y.GM}{bx\sqrt{FM.GM}}$; & $Gs = \frac{b.GM}{\sqrt{FM.GM}}$. On a donc $TS.Ts = \frac{a^4 y^2}{b^2 x^2} = \frac{a^2(x^2-a^2)}{xx} = CT.PT$ & $TS : CT :: PT : Ts$; ensuite $FS.Gs = b^2$. Et, comme $QS = Qs$, on aura $QS = \frac{TS+Ts}{2} = \frac{a^2 y(FM+GM)}{2bx\sqrt{FM.GM}} = \frac{ay\sqrt{(a^2+b^2)}}{b\sqrt{FM.GM}} = Qs$; d'où il suit que $CS^2 = CQ^2 + QS^2 = \frac{a^2 b^4 + a^4 y^2 + a^2 b^2 y^2}{b^2.FM.GM} = \frac{a^2 b^4 + (a^2+b^2)(b^2 x^2 - a^2 b^2)}{b^2.FM.GM} = \frac{(a^2+b^2)x^2 - a^4}{FM.GM} = a^2$. On aura donc, comme dans l'Ellypse, la droite $CS = a = CA$; on a ensuite $CQ + FS = \frac{bx\sqrt{(a^2+b^2)}}{a\sqrt{FM.GM}}$, & par conséquent $(CQ+FS)^2 - CQ^2 = \frac{b^2 x^2(a^2+b^2) - a^4 b^2}{a^2 FM.GM} = b^2$. Donc, si on mène du foyer F, parallèlement à la tangente, la droite FX qui coupe la perpendiculaire CQ prolongée en X, on aura $CX = \sqrt{(b^2 + CQ^2)}$, propriété semblable à celle qui a été trouvée dans l'Ellypse.

157. Si on élève aux sommets A & B des perpendiculaires à l'axe, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la tangente en V & v, à cause de $AT = \frac{a(x-a)}{x}$ & $BT = \frac{a(x+a)}{x}$, la proportion $PT : PM :: AT : AV :: BT : Bv$ donnera $AV = \frac{b^2(x-a)}{ay}$ & $Bv = \frac{b^2(x+a)}{ay}$; donc $AV.Bv = \frac{b^4(x^2-a^2)}{a^2 y^2} = b^2$, ou $AV \times Bv = FS.Gs$. On a ensuite $PT : TM :: AT : TV :: BT : Tv$; donc $TV = \frac{b(x-a)}{xy}\sqrt{FM.GM}$ & $Tv = \frac{b(x+a)}{xy} \times \sqrt{FM.GM}$; d'où l'on conclut $TV.Tv = \frac{a^2}{x^2} FM.GM = FT.GT$. On peut tirer encore de là, d'une manière semblable, plusieurs autres corollaires.

158. De ce que $CT = \frac{aa}{x}$, il s'ensuit évidemment que, plus

l'abſciſſe $CP = x$ ſera grande, plus l'intervalle CT ſera petit; ainſi la tangente qui atteint la courbe prolongée à l'infini, paſſera par le centre C, & CT deviendra $= 0$; or, puiſque *tang.* $PTM = \frac{PM}{PT} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, ſi le point M s'éloigne à l'infini, ou ſi $x = \infty$; alors $y = \frac{b}{a}\sqrt{(xx - a^2)} = \frac{bx}{a}$. Donc la tangente de la courbe prolongée à l'infini paſſera par le centre C & fera avec l'axe un angle ACD, dont la tangente $= \frac{b}{a}$. Donc, ſi on mène par le ſommet A une perpendiculaire à l'axe $AD = b$, la droite CD prolongée de part & d'autre à l'infini ne touchera la courbe en aucun point; mais la courbe approchera de la droite CI toujours de plus en plus, juſqu'à ce qu'à l'infini elle ſe confonde entièrement avec elle. La même choſe aura lieu par rapport à la partie Ck, qui à la fin ſe confondra avec la branche Bk; &, ſi on mène de l'autre côté ſous un même angle la droite KCi, elle ſe confondra avec les branches BK & Bi prolongées à l'infini. Ces ſortes de lignes droites, dont une courbe quelconque approche toujours de plus en plus & qu'elle atteint à la fin à une diſtance infinie, s'appellent ASYMPTOTES; ainſi les deux droites ICk, KCi, ſont deux aſymptotes de l'Hyperbole.

159. Les aſymptotes ſe coupent donc réciproquement au centre C de l'Hyperbole, & forment avec l'axe l'angle $ACD = ACd$ dont la tangente $= \frac{b}{a}$, & la tangente du double $DCd = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$; ce qui nous apprend que, ſi $b = a$, on aura l'angle DCd ſous lequel les aſymptotes ſe coupent $=$ à un angle droit. Dans ce cas, l'Hyperbole eſt dite *équilatère*; mais, puiſqu'on a $AC = a$, $AD = b$, on aura $CD = Cd = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; c'eſt pourquoi, ſi on abaiſſe du foyer G, ſur celle des deux aſymptotes qu'on voudra, la perpendiculaire GH; à cauſe de $CG = \sqrt{(a^2 + b^2)} = CD$, on aura $CH = AC = BC = a$ & $GH = b$.

160. Soit prolongée de part & d'autre l'ordonnée $MPN = 2y$, juſqu'à ce qu'elle coupe les aſymptotes en m & n, on

aura $Pm = Pn = \frac{bx}{a}$, & $Cm = Cn = \frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a} = FM + AC = GM - AC$; on aura auſſi $Mm = Nn = \frac{bx-ay}{a}$, & $Nm = Mn = \frac{bx+ay}{a}$; donc $Mm.Nm = Mm.Mn = \frac{b^2x^2-a^2y^2}{a^2} = b^2$, à cauſe de $a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2$. On aura donc par-tout $Mm.Nm = Mm.Mn = Nn.Nm = Nn.Mn = b^2 = AD^2$. Soit menée du point M la parallèle Mr à l'aſymptote Cd, on aura $2b : \sqrt{(a^2+b^2)} :: Mm : mr(Mr)$; donc $mr = Mr = \frac{(bx-ay)\sqrt{(a^2+b^2)}}{2ab}$ & $Cm - mr = Cr = \frac{(bx+ay)\sqrt{(a^2+b^2)}}{2ab}$. On en conclura donc $Mr.Cr = \frac{(b^2x^2-a^2y^2)(a^2+b^2)}{4a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{4}$; ou, en menant du point A la parallèle AE à l'aſymptote Cd, on aura $AE = CE = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$; & par conſéquent $Mr.Cr = AE.CE$, propriété principale de l'Hyperbole rapportée à ſes aſymptotes.

161. Si donc on prend les abſciſſes $CP = x$ ſur une aſymptote, à compter du centre, & qu'on ſuppoſe les appliquées $PM = y$ parallèles à l'autre aſymptote; on aura $yx = \frac{a^2+b^2}{4}$, en faiſant $AC = BC = a$ & $AD = Ad = b$; ou bien, en faiſant $AE = CE = h$, $yx = h^2$ & $y = \frac{hh}{x}$. En ſuppoſant donc $x = 0$, y devient $= \infty$, & réciproquement, en faiſant $x = \infty$, y deviendra $= 0$. Menons à préſent par un point M de la courbe une droite quelconque $QMNR$, parallèlement à une droite GH priſe à volonté, & ſuppoſons $CQ = t$, $QM = u$, nous aurons $GH : CH : CG :: u : PQ : PM$; donc $PQ = \frac{CH}{GH}.u$; $PM = \frac{CG}{GH}.u$; ce qui donne $y = \frac{CG}{GH}.u$ & $x = t - \frac{CH}{GH}.u$; on aura, par la ſubſtitution de ces valeurs, $\frac{CG}{GH}tu - \frac{CH.CG}{GH^2}u^2 = hh$ ou $u^2 - \frac{GH}{CH}tu + \frac{GH^2}{CH.CG}h^2 = 0$. L'appliquée u aura donc deux valeurs, ſavoir, QM & QN dont la ſomme ſera $= \frac{GH}{CH}t = QR$, & le rectangle $QM \times QN = \frac{GH^2}{CH.CG}hh$. Pl. IV. Fig. 34.

162. Puisque $QM + QN = QR$, on aura $QM = RN$ & $QN = RM$. Par conséquent, si les points M & N coïncident, auquel cas la ligne QR devient tangente, elle sera coupée en deux parties égales au point de contact. Par exemple, si la droite XY touche l'Hyperbole, le point de contact Z sera situé au milieu de la droite XY. Donc, si du point Z on mène ZV parallèlement à l'autre asymptote, on aura $CV = VY$; ce qui fournit un moyen expéditif de mener une tangente par un point quelconque Z de l'Hyperbole. On prendra $VY = CV$, & la droite qui passera par Y & par le point Z de la courbe, touchera l'Hyperbole en ce même point Z.

L'égalité $CV \, . \, ZV = h^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ donnera $CX \, . \, CY = a^2 + b^2 = CD^2 = CD \, . \, Cd$; ce qui fait voir que, si on menoit des droites DX & dY, ces lignes seroient parallèles entre elles, & ce qui donne par conséquent un moyen très-facile de mener tant de tangentes qu'on voudra à la courbe.

163. Puisqu'on a ensuite le rectangle $QM \, . \, QN = \frac{GH^2}{CH \, . \, CG} h^2$, il est clair que, par-tout où l'on menera la ligne QR parallèle à HG, le rectangle $QM \, . \, QN$ sera toujours d'une même grandeur. On aura donc aussi $QM \, . \, QN = QM \, . \, MR = QN \, . \, NR = \frac{CH^2}{CH \, . \, CG} hh$. Donc, si on conçoit une tangente parallèle à QR, à cause que la partie interceptée entre les asymptotes sera coupée en deux parties égales au point de contact, en supposant la moitié de cette tangente $= q$, on aura toujours $QM \, . \, QN = QM \, . \, MR = RN \, . \, RM = RN \, . \, NQ = qq$; propriété remarquable des Hyperboles décrites entre les asymptotes.

164. Comme l'Hyperbole est composée de deux parties diamétralement opposées IAi & KBk, ces propriétés n'appartiennent pas seulement aux lignes droites situées entre les asymptotes qui coupent en deux points la même portion de la courbe, mais encore à celles qui aboutissent aux parties opposées. En effet, soit menée par le point M la droite $Mqrn$ à la partie opposée à laquelle Gh soit parallèle; faisons $Cq = t$ & qM

$= u$, nous aurons, à cause des triangles semblables, CGh & PMq, $PM = y = \frac{CG}{Gh} u$ & $qP = x - t = \frac{Ch}{Gh} u$; d'où l'on tire $x = t + \frac{Ch}{Gh} u$; &, puisqu'on a $xy = hh$, on aura $\frac{CG}{Gh} tu + \frac{CG \cdot Ch}{Gh^2} uu = hh$, ou $uu + \frac{Gh}{Ch} tu - \frac{Gh^2}{CG \cdot Ch} \cdot hh = 0$.

165. L'appliquée u aura donc deux valeurs, savoir. qM & $-qn$; je prends qn négativement, parce qu'elle tombe de l'autre côté de l'asymptote CP qui a été prise pour l'axe. La somme de ces deux racines $qM - qn$ sera donc $= -\frac{Gh}{Ch} t = -qr$, & par conséquent $qn - qM = qr$; d'où il suit que $qM = rn$ & $qn = rM$. L'équation qu'on vient de trouver fait voir, de plus, que le produit des racines $-qM.qn = -\frac{Gh^2}{CG \cdot Ch} h^2$, ou $qM.qn = qM.rM = rn.qn = rn.rM = \frac{Gh^2}{CG \cdot Ch} \cdot h^2$. Ces rectangles, en quelque endroit qu'on mène les droites Mn parallèles à Gh, auront toujours une grandeur constante. Telles sont les principales propriétés de chaque espèce de lignes du second ordre; lesquelles, réunies avec celles que nous avons trouvées d'une manière générale, donnent une multitude presque infinie de propriétés dignes de remarque.

CHAPITRE VII.

De la Recherche des Branches infinies.

166. Si une ligne courbe quelconque a une branche, ou une portion, qui s'étende à l'infini, & que d'un de ces points infiniment éloigné on abaisse à un axe quelconque une appliquée perpendiculaire; alors ou l'abscisse x, ou l'appliquée y, ou l'une & l'autre coordonnée sera infinie. Car, si l'une des deux, ou toutes les deux n'étoient pas infinies, la distance du point de la courbe,

dont il s'agit, à l'origine des abſciſſes ſeroit finie, ſavoir $=\sqrt{(x^2+y^2)}$; ce qui eſt contre l'hypothèſe. C'eſt pourquoi, ſi une courbe a une branche qui s'étende à l'infini, il arrivera qu'à une abſciſſe quelconque finie répondra une appliquée réelle infinie, ou qu'à une abſciſſe infiniment grande répondra une appliquée réelle ſoit finie, ſoit infinie. C'eſt donc en partant de ce principe, qu'on pourra procéder à la recherche des branches infinies des courbes.

167. Soit propoſée une équation algébrique d'un degré indéterminé n entre les coordonnées x & y, & examinons à part les termes dans leſquels les variables x & y ont un nombre n de dimenſions, ſavoir, $\alpha y^n + \beta y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \delta y^{n-3}x^3 + \ldots\ldots + \xi x^n$; cette expreſſion pourra être décompoſée en facteurs ſimples de la forme $Ay+Bx$, réels ou imaginaires; ſi elle renferme des facteurs imaginaires, ils ſeront en nombre pair, & deux combinés enſemble donneront un facteur double réel de la forme $A^2y^2 - 2ABxy\,cof.\,\varphi + B^2x^2$. Or un tel facteur, lorſque x ou y, ou l'un ou l'autre eſt ſuppoſé infini $=\infty$, aura toujours une valeur infinie $=\infty^2$, parce que le terme $2ABy\,x.cof.\,\varphi$ eſt toujours plus petit que la ſomme des deux autres $A^2y^2 + B^2x^2$, & que d'ailleurs ni A ni B ne peut être $=0$. Le facteur de la forme $A^2y^2 - 2ABxy.cof.\,\varphi + B^2x^2$, lorſqu'on ſuppoſe ou x ou y, ou l'un & l'autre infini, ne peut donc être égal à zéro, ni à une quantité finie, ni même à la quantité infinie ∞, puiſqu'elle eſt $=\infty^2$, quantité infiniment plus grande que ∞.

168. Donc, ſi la partie ſupérieure de l'équation $\alpha y^n + \beta y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \ldots\ldots + \xi x^n$ ne renferme aucun facteur ſimple réel; ce qui, à la vérité, ne peut arriver, à moins que n ne ſoit un nombre pair, elle ſera alors compoſée ſeulement de facteurs doubles de cette forme $A^2y^2 - 2ABxy.cof.\,\varphi + B^2x^2$. Ainſi, en ſuppoſant ou x ou y, ou l'un & l'autre infini, cette expreſſion recevra une valeur infinie $=\infty^n$; elle ne peut donc être égale ni à une quantité finie, ni à aucune quantité infinie ∞^m, dont l'expoſant m ſeroit moindre que n. Les autres membres de l'équation dans leſquels les variables x & y ont de plus petites dimenſions, don-

nant

nant des infinis d'un ordre inférieur à n, ne peuvent égaler ce plus grand infini ; & par conséquent l'équation ne peut subsister, si on fait ou x ou y, ou les deux infinis.

169. Il suit de-là qu'une ligne courbe exprimée par une équation entre les coordonnées x & y, dont le membre supérieur ne renferme aucun facteur simple réel, n'aura aucune branche qui s'étende à l'infini ; & que, par conséquent, toute la courbe sera comprise dans un espace fini, comme l'Ellypse ou le Cercle. C'est pourquoi, si dans l'équation générale du second ordre $\alpha y^2 + \beta x y + \gamma x x + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0$, le membre supérieur $\alpha y^2 + \beta x y + \gamma x x$, dans lequel les variables x & y ont deux dimensions, ne contient point de facteurs simples réels, ce qui a lieu lorsque $\beta\beta$ est plus petit que $4\alpha\gamma$, la courbe n'aura dans ce cas aucune branche qui s'étende à l'infini, & sera par cette raison une Ellypse.

170. Pour mieux éclaircir tout cela, distinguons dans toute équation proposée entre les coordonnées x & y plusieurs membres, de manière que le premier membre, ou le membre de l'ordre le plus élevé, renferme tous les termes de l'équation, dans lesquels les variables x & y forment la plus grande dimension dont l'exposant soit n. Je rapporte au second membre tous les termes dans lesquels les deux variables forment $n-1$ dimensions. Le troisième membre comprendra ceux dans lesquels le nombre de dimensions de x & de y sera $n-2$, & ainsi des autres, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au dernier membre dans lequel la dimension de x & de y sera nulle, & qui par conséquent sera composé seulement d'une quantité constante. Au reste, nous désignerons par P le premier membre, ou le membre le plus élevé, par Q le second membre, par R le troisième, par S le quatrième, ainsi de suite.

171. Puis donc qu'une ligne courbe représentée par l'équation $P + Q + R + S + \&c. = 0$, lorsque le membre de l'ordre le plus élevé P n'a aucun facteur simple réel, ne peut avoir de branche qui s'éloigne à l'infini ; supposons à présent que ce membre P renferme un seul facteur simple réel $ay - bx$, de sorte que $P = (ay - bx) M$; M étant

une fonction de x & de y à la fois, d'un nombre $n-1$ de dimensions, laquelle ne contienne aucuns facteurs simples réels. En faisant ou x ou y, ou l'un & l'autre infini, M deviendra $=\infty^{n-1}$, Q pourra être un infini du même ordre; mais R, S, &c., deviendront des infinis d'un degré inférieur. Conséquemment, l'équation $P+Q+R+$ &c. $=0$ pourra subsister, si $ay-bx$ est égal à une quantité finie ou à zéro; & la courbe, par cette raison, s'étendra à l'infini.

172. Soit donc $ay-bx=p$, p étant une quantité finie telle que, lorsque la courbe s'éloigne à l'infini, $pM+Q+R+S+$&c.$=0$, ou $p=\frac{-Q-R-S-\&c.}{M}$; mais, comme M est une quantité infinie d'un ordre supérieur à R & à S &c., les facteurs $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$, &c. $=0$, & par conséquent $p=\frac{-Q}{M}$. Donc la fraction $\frac{-Q}{M}$ donnera la valeur de p, si les variables x & y sont infinies; mais, comme $ay-bx=p$, on aura $y=\frac{bx+p}{a}$ & $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}+\frac{p}{ax}=\frac{b}{a}$, à cause de $\frac{p}{ax}=0$, lorsque $x=\infty$. Ainsi, lorsque la courbe s'étend à une distance infinie, y devient $=\frac{bx}{a}$.

173. Les quantités Q & M étant des fonctions homogènes de $n-1$ dimensions, $\frac{-Q}{M}$ sera une fonction de dimension nulle, & donnera par conséquent une valeur constante pour p, si on suppose $y=\frac{bx}{a}$; ou, parce que la fonction $\frac{-Q}{M}$ est déterminée, si on détermine seulement le rapport entre y & x, qui est $b:a$, on obtiendra la valeur de p en écrivant partout dans l'expression $\frac{-Q}{M}$, b au lieu de y & a au lieu de x. Ayant donc trouvé p de cette manière, on aura l'équation $ay-bx=p$, laquelle est contenue dans l'équation même proposée $P+Q+R+S+$&c.$=0$, lorsque la courbe s'éloigne à l'infini.

174. La portion de la courbe qui se trouve à une distance infinie sera donc exprimée par cette équation $ay-bx=p$;

& comme cette équation appartient à la ligne droite, il s'ensuit que cette ligne droite prolongée à l'infini se confondra à la fin avec la courbe. Elle sera donc l'asymptote de la courbe, puisque cette dernière en approchera toujours de plus en plus, & que prolongée à la fin elle se confondra avec elle. De plus, comme l'équation proposée $P+Q+R+S+$ &c. $=0$, lorsqu'on fait x ou $y=\infty$, se change en celle-ci : $ay-bx=p$, on conçoit en même temps que cette ligne droite prolongée de part & d'autre à l'infini coïncide à la fin avec la courbe. La courbe aura donc deux branches infinies opposées l'une à l'autre, dont la première se confondra par-devant, & la seconde par derrière, avec la ligne droite prolongée à l'infini.

175. Puisque la courbe, lorsque le premier membre P de l'équation $P+Q+R+S+$ &c. $=0$, contient un seul facteur simple réel, jette deux branches infinies & convergentes de part & d'autre à une même ligne droite, cette ligne droite en est l'asymptote; supposons à présent que le premier membre P contienne deux facteurs simples réels $ay-bx$ & $cy-dx$, de manière que $P=(ay-bx)(cy-dx)M$, M sera une fonction homogène de $n-2$ dimensions. Il se présente alors deux cas à examiner, suivant que ces deux facteurs seront égaux ou inégaux entre eux.

176. Supposons-les inégaux, il est visible que l'équation $(ay-bx)(cy-dx)M+Q+R+S+$ &c. $=0$ peut subsister de deux manières pour des abscisses ou des appliquées infinies; savoir, en faisant ou $ay-bx$, ou $cy-dx$ égal à une quantité finie. Soit donc $ay-bx=p$, comme p est une quantité finie, on aura à l'infini $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, & p deviendra, comme auparavant, $=\frac{-Q-R-S-\&c.}{(cy-dx)M}=\frac{-Q}{(cy-dx)M}$, fonction de dimension nulle de x & de y; c'est pourquoi, si on suppose $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, ou, ce qui revient au même, si on écrit partout b au lieu de y & a au lieu de x, on obtiendra la vraie valeur de la constante cherchée p. On aura donc $p=$

$\frac{-Q}{(bc-ad)M}$; &, comme les facteurs sont inégaux, $bc-ad$ ne sera point $=0$; il en sera de même de la quantité M, parce qu'elle ne renferme aucun facteur simple réel. La valeur résultante de p sera donc finie, ou même $=0$; ce qui aura lieu si le membre Q manque entièrement, ou s'il contient le facteur $ay-bx$.

177. A cause du facteur simple réel $ay-bx$ du membre supérieur P, la courbe aura, comme dans le premier cas, une asymptote, dont la position est indiquée par l'équation $ay-bx=p$. Par une raison semblable, l'autre facteur $cy-dx$ donnera aussi une asymptote déterminée par cette équation $cy-dx=q$, q étant $=\frac{-Q}{(ay-bx)M}$, après qu'on aura substitué par-tout à y & à x les valeurs déterminées d & c. Ainsi la courbe aura deux asymptotes, & par conséquent quatre branches infinies qui se confondront à la fin avec ces droites. Ce cas a eu lieu dans l'Hyperbole; donc, si dans l'équation aux lignes du second ordre $\alpha yy+\beta xy+\gamma xx+\delta y+\varepsilon x+\zeta=0$, le premier membre $\alpha yy+\beta xy+\gamma xx$ renferme deux facteurs simples réels inégaux, ce qui aura lieu, si $\beta\beta$ surpasse $4\alpha\gamma$, la courbe sera une Hyperbole.

178. Soient les deux facteurs $ay-bx$ & $cy-dx$ égaux entre eux, ou soit $P=(ay-bx)^2M$. Puisque $P+Q+R+S+$ &c. $=0$, on aura $(ay-bx)^2=\frac{-Q-R-S-\&c.}{M}$; mais Q étant une fonction de $n-1$, R, de $n-2$, & S, de $n-3$ dimensions; à cause que M est une fonction de $n-2$ dimensions, dans le cas de l'infini, $\frac{S}{M}=0$; & par conséquent $(ay-bx)^2=\frac{-Q}{M}-\frac{R}{M}=\frac{-Q}{M(\mu y+\nu x)}(\mu y+\nu x)-\frac{R}{M}$. Mais $\frac{Q}{M(\mu y+\nu x)}$ & $\frac{R}{M}$ sont des fonctions de x & de y de dimension nulle; par conséquent, comme à l'infini $y:x::b:a$, si on substitue ce rapport $\frac{b}{a}$ pour $\frac{y}{x}$, ou, si on met b pour y & a pour x, les deux fonctions se changeront en une quantité constante.

179. Soit donc, après la substitution faite, $\frac{Q}{M(\mu y+\nu x)}=A$ & $\frac{R}{M}=B$; on aura $(ay-bx)^2=-A(\mu y+\nu x)-B$ pour l'équation à la ligne courbe, avec laquelle se confondra à l'infini celle qui est représentée par l'équation $P+Q+R+S+$ &c. $=0$. Mais, comme les quantités μ & ν sont arbitraires, prenons $\mu=b$ & $\nu=a$; &, pour changer les coordonnées, faisons $ay-bx=u\sqrt{(a^2+b^2)}$ & $by+ax=t\sqrt{(a^2+b^2)}$; nous aurons pour cette même courbe l'équation $uu+\frac{At}{\sqrt{(a^2+b^2)}}+\frac{B}{a^2+b^2}=0$, qui appartient évidemment à la Parabole. La courbe cherchée, prolongée à l'infini, se confondra donc avec la Parabole. Elle aura donc seulement deux branches infinies qui n'auront plus pour asymptote une ligne droite, mais la Parabole exprimée par l'équation précédente.

180. Cela a lieu, si A n'est pas $=0$; mais, si $A=0$, ce qui arrivera lorsque le second membre Q manquera ou sera divisible par $ay-bx$, l'équation dans ce cas cesse d'appartenir à la Parabole, & devient $u^2+\frac{B}{a^2+b^2}=0$. Il y aura trois cas à examiner; le premier, si B est une quantité négative; par exemple, si $\frac{B}{a^2+b^2}=-ff$; alors l'équation $uu-ff=0$, renfermera deux équations $u-f=0$ & $u+f=0$, qui appartiennent à deux lignes droites parallèles entre elles; l'une & l'autre sera une asymptote de la courbe, comme dans le premier cas; & par conséquent la courbe aura quatre branches qui s'étendront à l'infini, & qui se confondront avec ces deux droites.

181. Le second cas est lorsque B est une quantité positive, comme ff, alors l'équation $u^2+f^2=0$, étant impossible, la courbe n'aura aucune branche infinie, mais elle sera renfermée toute entière dans un espace fini. Non-seulement donc la courbe exprimée par l'équation $P+Q+R+S+$ &c. $=0$, n'aura aucune branche infinie, dans le cas où le membre supérieur P ne renferme aucun facteur simple réel; mais cela peut encore arriver, quoique P ait des facteurs, comme nous ve-

nons de le voir. Il se présentera dans la suite plusieurs autres cas semblables.

182. Le troisième cas a lieu lorsque B devient $=0$; &, comme chacun des deux précédens peut tomber sur celui-ci, il en pourroit résulter du doute sur la nature de la courbe.

Pour en déterminer la figure, il faudra recourir aux termes suivans. En effet, puisque $P+Q+R+S+$ &c. $=0$ & $P=(ay-bx)^2 M$; on aura à l'infini $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$ & $(ay-bx)^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \frac{T}{M} +$ &c. $=0$; supposons, comme auparavant, après avoir fait la substitution de $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$; $\frac{Q}{M}=A(by+ax)$, $\frac{R}{M}=B$; &, comme S, T, V, &c., sont des fonctions de $n-3$, $n-4$, &c., dimensions, tandis que M est une fonction de $n-2$ dimensions; supposons $\frac{S(by+ax)}{M} = C$; $\frac{T(by+ax)^2}{M}=D$; $\frac{V(by+ax)^3}{M}=E$, &c.; nous aurons $(ay-bx)^2 + A(by+ax) + B + \frac{C}{by+ax} + \frac{D}{(by+ax)^2} + \frac{E}{(by+ax)^3} +$ &c. $=0$. Cette équation exprime donc la nature de la ligne courbe, dont la portion infiniment éloignée, qui résulte de la supposition que $by+ax$ est une quantité infinie, se confondra avec la courbe représentée par l'équation $P+Q+R+S+$ &c. $=0$; car quoique, la courbe s'éloignant à l'infini, $(ay-bx)^2$ obtienne une valeur ou finie, ou infinie, mais d'un ordre inférieur à ∞^2; cependant $by+ax$ aura une valeur infinie.

183. Changeons maintenant l'axe auquel nous rapportons l'asymptote que nous avons trouvée, & prenons sur cet axe l'abscisse $\frac{ax+by}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=t$ & l'appliquée $\frac{ay-bx}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=u$; & soit, pour abréger, $\sqrt{(a^2+b^2)}=g$; on aura l'équation $uu+\frac{At}{g} + \frac{B}{g^2} + \frac{C}{g^3 t} + \frac{D}{g^4 t^2} + \frac{E}{g^5 t^3} +$ &c. $=0$. Puisque dans le cas que nous devons traiter, $A=0$ & $B=0$, elle deviendra $uu+\frac{C}{g^3 t} + \frac{D}{g^4 t^2} + \frac{E}{g^5 t^3} +$ &c. $=0$. S'il arrive que C ne soit pas

$=0$, en faiſant t infini, les termes $\frac{D}{g^4 t^2} + \frac{E}{g^5 t^3} +$ &c. diſparoîtront devant $\frac{C}{g^3 t}$, & il reſtera $uu + \frac{C}{g^3 t} = 0$. Cette équation exprime la nature de la courbe, qui, en ſuppoſant $t = \infty$, ſe confondra avec la courbe cherchée. Ainſi, puiſqu'on en tire $u = \pm \sqrt{-\frac{C}{g^3 t}}$, la courbe aura deux branches infinies convergentes de part & d'autre à la même partie de l'axe.

184. Si, en outre, $C = 0$, il faudra prendre cette équation $u^2 + \frac{D}{g^4 t^2} = 0$, où il ſe préſente encore trois cas à examiner ſuivant que D eſt une quantité poſitive ou négative, ou nulle. Dans le premier cas, comme l'équation eſt impoſſible, la courbe n'aura aucune branche infinie; mais elle ſera renfermée toute entière dans un eſpace fini. Dans le ſecond cas, ſi $\frac{D}{g^4} = -ff$, à cauſe que $u^2 = \frac{f^2}{t^2}$, l'appliquée u, ſoit qu'on faſſe $t = +\infty$ ou $= -\infty$, obtiendra une double valeur évanouiſſante, l'une poſitive, l'autre négative, & la courbe aura par conſéquent quatre branches convergentes à l'axe de part & d'autre vers les deux extrémités. Dans le troiſième cas où $D = 0$, il faut prendre l'équation $uu + \frac{E}{g^5 t^3} = 0$, à laquelle s'appliquera ce que nous avons dit dans l'article précédent. On devra continuer de la même manière, tant que l'équation $P + Q + R + S +$ &c. fournira des termes ultérieurs.

185. Suppoſons maintenant que le premier membre P de l'équation $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, contienne trois facteurs ſimples réels; il eſt évident que, ſi ces facteurs ſont inégaux entre eux, on peut appliquer à chacun ce que nous avons dit d'un ſeul facteur réel. Dans ce cas, la courbe aura donc ſix branches infinies convergentes à trois aſymptotes droites. S'il y a deux facteurs égaux, il faudra alors ſe comporter, pour le troiſième qui eſt inégal, de la manière que nous avons preſcrite; & pour les deux qui ſont égaux, on devra obſerver auſſi les règles que nous avons données auparavant. Reſte à traiter le troiſième cas, où tous les trois facteurs ſont

égaux entre eux. Soit donc $P = (ay - bx)^3 M$; comme l'équation $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, ne peut subsister à l'infini, à moins que $(ay - bx)^3$ n'ait une valeur ou finie, ou infinie à la vérité, mais d'un ordre inférieur à ∞^3, afin que la puissance de l'infini que donne le premier membre P soit moindre que ∞^n; on aura toujours à l'infini $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

186. Pour traiter ce cas, il faut d'abord voir si le second membre Q renferme le même facteur $ay - bx$, ou non. Remarquez que, s'il manque entièrement, ce cas rentre dans le premier, parce que zéro admet toute espèce de facteurs. Supposons donc en premier lieu que Q ne soit pas divisible par $ay - bx$; comme Q est une fonction de $n - 1$ dimensions, & M de $n - 3$ dimensions; $\frac{Q}{(ax + by)^2 M}$ sera une fonction de dimension nulle, laquelle par conséquent, en faisant $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ se changera en une quantité constante que j'appelle A, & on aura $(ay - bx)^3 + A(ax + by)^2 = 0$; car les membres suivans fourniront des termes qui sont nuls à l'infini à l'égard de $A(ax + by)^2$.

187. La ligne courbe exprimée par cette équation, prolongée à l'infini, se confondra donc avec la courbe représentée par $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$. Pour la connoître plus intimement, rapportons-la à un autre axe sur lequel nous prendrons l'abscisse $t = \frac{ax + by}{g}$, & l'appliquée $u = \frac{ay - bx}{g}$, en supposant $\sqrt{(a^2 + b^2)} = g$; nous trouverons l'équation $u^3 + \frac{At^2}{g} = 0$, qui, dans l'hypothèse de $t = \infty$, donnera la partie de la courbe cherchée $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, qui existe à une distance infinie. Ainsi, en connoissant la figure de la courbe représentée par $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$, on connoîtra en même temps celle de la portion infiniment éloignée de la courbe exprimée par $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$. Nous traiterons expressément dans le chapitre suivant de la nature de ces asymptotes courbes.

188.

188. Si le ſecond membre Q renferme le facteur $ay-bx$; ou il ſera diviſible par $(ay-bx)^2$, ou il ne le ſera pas. Suppoſons d'abord qu'il ne ſoit pas diviſible par $(ay-bx)^2$, & prenons cette fonction de dimenſion nulle $\frac{Q}{(ay-bx)(ax+by)M}$ qui, en faiſant $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, donne cette quantité conſtante A, nous aurons $(ay-bx)^3+A(ay-bx)(ax+by)+\frac{R}{M}+\frac{S}{M}+\&c.=0$. Ici $\frac{R}{M}$, en ſuppoſant $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, deviendra ou $B(ay-bx)$ uo $B(ax+by)$, ſuivant que R ſera ou ne ſera pas diviſible par $ay-bx$; mais $\frac{S}{M}$ ſera une quantité conſtante C. Ainſi, en rapportant cette équation à un autre axe entre les coordonnées t & u, comme nous l'avons fait auparavant, elle deviendra ou $u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bu}{gg}+\frac{C}{g^3}=0$, ou $u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bt}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0$. Mais, comme il n'eſt queſtion ici que des cas où $t=\infty$, les derniers termes diſparoiſſent; nous aurons donc, pour le premier cas, $u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bu}{g^2}=0$; ce qui donne deux aſymptotes, ſavoir $u=0$, & $uu+\frac{At}{g}=0$, l'une droite, l'autre parabolique. Pour le ſecond cas, lorſque $t=\infty$, il eſt poſſible que u ait une valeur finie; &, à cauſe que les quantités finies diſparoiſſent devant les quantités infinies, on aura alors $\frac{Atu}{g}+\frac{Bt}{g^2}=0$, & partant $u=\frac{-B}{Ag}$; ce qui donne une ligne droite. Mais u pourra avoir en outre une valeur infinie; ainſi, le troiſième terme diſparoiſſant, il en réſultera l'équation à la Parabole $u^2+\frac{At}{g}=0$. On a donc dans ces deux cas deux aſymptotes, l'une droite, l'autre parabolique; ainſi il ne ſera pas néceſſaire de ſéparer ces deux cas l'un de l'autre.

189. Soit à préſent Q diviſible par $(ay-bx)^2$; ſuivant que R le ſera ou ne le ſera pas par $ay-bx$, en faiſant les mêmes opérations qu'auparavant, on aura entre t & u les équations:

$u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, ou $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$. Le premier cas eſt pour trois lignes droites parallèles entre elles, ſi toutes les racines de l'équation $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$ ſont réelles; ou pour une ſeule aſymptote droite, ſi deux racines ſont imaginaires. De là naiſſent des variétés, ſuivant que deux, ou la totalité de ces trois aſymptotes coïncident. Le dernier cas $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$, dans la ſuppoſition de $t = \infty$, ne peut avoir lieu, à moins que u ne ſoit infini, le terme $\frac{Au^2}{g}$ diſparoîtra donc devant le premier u^3, & on aura l'équation $u^3 + \frac{Bt}{g^2} = 0$, qui indique une aſymptote curviligne du troiſième ordre.

190. Mais, ſi on a $A = 0$, $B = 0$ & $C = 0$, il faut alors recourir aux termes ſuivans de l'équation $P + Q + R + S$ + &c. $= 0$, leſquels donneront une équation de cette forme $u^3 + \frac{D}{g^4 t} + \frac{E}{g^5 t^2} + \frac{F}{g^6 t^3}$ + &c. $= 0$, dans laquelle, à moins que D ne ſoit $= 0$, le troiſième terme s'évanouit avec ceux qui ſuivent, de ſorte qu'on a l'équation $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$; mais, ſi $D = 0$, on aura $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$, & ſi $E = 0$, on aura $u^3 + \frac{F}{g^6 t^3} = 0$, &c. Ces équations déſignent les lignes courbes qui, en faiſant $t = \infty$, ſe confondront avec celle qu'exprime l'équation $P + Q + R$ + &c. $= 0$. Ces équations, à cauſe de la puiſſance impaire u^3, ſont toujours réelles, & donnent par conſéquent des branches infinies. Cependant, dans ce même cas, on pourra auſſi prendre pour aſymptote la ligne droite exprimée par l'équation $u = 0$; car elle l'eſt évidemment des courbes qui ont pour équation $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$; $u^3 + \frac{E}{g^5 t} = 0$, &c.

191. La différence entre les branches des courbes convergentes a une aſymptote droite, pouvant être auſſi grande, il eſt à propos d'examiner avec plus de ſoin cette diverſité; ce que nous ferons en déterminant la courbe la plus ſimple qui,

rapportée à la même asymptote, se confondra avec la courbe proposée. Ainsi, quoique l'équation $u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0$, si elle a trois racines réelles, donne trois asymptotes droites parallèles entre elles; on ne voit pas si les branches de la courbe prolongées à l'infini sont hyperboliques, c'est-à-dire, exprimées par l'équation $u=\frac{C}{t}$, ou d'un autre genre, exprimées, par exemple, par l'équation $u=\frac{C}{t^2}$ ou $u=\frac{C}{t^3}$, &c. Pour nous en assurer, prenons dans l'équation le terme voisin qui vient après, savoir $\frac{D}{g^4 t}$; ou, si celui-ci manque, $\frac{E}{g^5 t^2}$ ou même, au défaut de ce dernier, $\frac{F}{g^6 t^3}$. Pour plus de généralité, supposons que le terme qui suit, soit $\frac{K}{t^k}$; il est visible par la nature de l'équation $P+Q+R+$ &c. $=0$, qui est du degré n, que k ne peut être un nombre plus grand que $n-3$. Imaginons que l'équation $u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0$ ait pour racines ou facteurs $(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)$, nous aurons $(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)-\frac{K}{t^k}=0$. Soit $u-\alpha=\frac{I}{t^\mu}$, l'équation qui exprimera la nature d'une des asymptotes; on aura $\frac{I}{t^\mu}\left(\alpha-\beta+\frac{I}{t^\mu}\right)\left(\alpha-\gamma+\frac{I}{t^\mu}\right)=\frac{K}{t^k}$; en supposant t infini, elle deviendra $\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)I}{t^\mu}=\frac{K}{t^k}$.

192. Cette équation a lieu, lorsque α diffère des autres racines β & γ; dans ce cas $I=\frac{K}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$ & $\mu=k$; donc la racine $u=\alpha$ donnera l'asymptote curviligne $u-\alpha=\frac{K}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)t^k}$. Si toutes les racines sont inégales entre elles, elles fourniront chacune des asymptotes d'une même nature. Mais, s'il y a deux racines égales; que, par exemple, $\beta=\alpha$, deux asymptotes se confondront en une, & on aura $\frac{I^2(\alpha-\gamma)}{t^{2\mu}}=$

$\frac{K}{t^k}$; d'où l'on tirera $I^2 = \frac{K}{\alpha - \gamma}$ & $2\mu = k$. La nature de cette double asymptote sera donc exprimée par cette équation $(u - \alpha)^2 = \frac{K}{(\alpha - \gamma)t^k}$. Et, si les trois racines sont égales, les trois asymptotes n'en feront plus qu'une, dont la nature sera exprimée par l'équation $(u - \alpha)^3 = \frac{K}{t^k}$.

193. Si le membre de l'ordre le plus élevé P de l'équation $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ renferme quatre facteurs simples réels; ou ils seront tous inégaux entre eux, ou deux & même trois seront égaux; dans ces cas, on pourra conclure de ce qui précède la nature des branches infinies avec celle de leurs asymptotes; il reste à examiner le cas où toutes les racines sont égales entre elles. Soit, à cet effet, $P = (ay + bx)^4 M$, de sorte que la fonction M ait $n - 4$ dimensions; si on fait comme auparavant, dans les fonctions de dimension nulle, $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, afin d'avoir des quantités constantes, & qu'en changeant la direction de l'axe on suppose $t = \frac{ax + by}{g}$ & $u = \frac{ay - bx}{g}$, g étant $= \sqrt{aa + bb}$, on trouvera, pour déterminer les asymptotes, les équations suivantes entre t & u.

194. D'abord, si Q n'est pas divisible par $ay - bx$, on aura $u^4 + \frac{At^3}{g} = 0$. Ensuite, si Q est divisible par $ay - bx$, mais non par $(ay - bx)^2$, on aura l'équation $u^4 + \frac{Attu}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, dans laquelle, en faisant $t = \infty$, l'appliquée u peut être une quantité finie ou infinie; ce qui donne deux asymptotes, l'une droite représentée par $u + \frac{B}{gA} = 0$, & l'autre courbe représentée par $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$. Pour connoître plus intimement la première, il faudra prendre le terme voisin suivant, que je suppose $\frac{K}{t^k}$, & on trouvera $u + \frac{B}{gA} + \frac{gK}{At^{k+2}} = 0$ pour l'équation de la courbe, dont la partie correspondante à l'abscisse $t = \infty$ se confondra avec la courbe cherchée.

195. Si Q est divisible par $(ay-bx)^2$ & non par $(ay-bx)^3$, il faudra voir si R est divisible par $ay-bx$ ou non. Dans le premier cas, on aura $u^4+\frac{Atu^2}{g}+\frac{Btu}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0$, & dans le second $u^4+\frac{Atu^2}{g}+\frac{Btt}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0$. Le premier cas fournit deux équations, suivant que u est fini ou infini, & donne par conséquent $uu+\frac{Bu}{gA}+\frac{C}{g^2A}=0$, & $uu+\frac{At}{g}=0$. La première équation, si ses deux racines sont réelles & inégales, indique deux droites parallèles; mais, si elles sont imaginaires, elle ne désigne aucune branche infinie; celle-ci $uu+\frac{At}{g}=0$, donne une Parabole pour asymptote. L'autre équation $u^4+\frac{Atu^2}{g}+\frac{Bt^2}{gg}=0$ (car $\frac{Ct}{g^3}$ disparoît devant $\frac{Btt}{gg}$, en faisant $t=\infty$) en renferme deux autres de la forme $uu+at=0$, qui désignent deux asymptotes paraboliques, si A^2 est plus grand que $4B$; lesquelles se réduisent à une seule si $A^2=4B$, & qui deviennent imaginaires, si A^2 est plus petit que $4B$; dans ce dernier cas, la courbe n'a point de branche désignée qui s'étende à l'infini.

196. Soit à présent Q divisible par $(ay-bx)^3$, on obtiendra, suivant que R & S seront ou ne seront pas divisibles par $ay-bx$, les équations suivantes:

$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{Bu^2}{g^2}+\frac{Cu}{g^3}+\frac{D}{g^4}=0$$
$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{Bu^2}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0$$
$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{But}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0$$
$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{Btt}{gg}=0.$$

La première de ces équations est pour quatre lignes droites, parallèles entre elles, si toutes ses racines sont réelles & inégales, & dont deux, ou un plus grand nombre, se réduisent à une seule, lorsqu'il y a des racines égales; mais s'il y a des racines imaginaires, deux de ces lignes, ou même toutes les quatre n'ont plus lieu. Dans la seconde équation, à cause de $t=\infty$, l'appliquée u

ne peut manquer d'être infinie, & on aura $u^4 + \frac{Ct}{g^3} = 0$, ou une asymptote courbe du quatrième ordre. La troisième équation peut donner la valeur finie $u + \frac{C}{gB} = 0$; mais elle renferme en outre cette équation $u^3 + \frac{Bt}{gg} = 0$, qui annonce pour asymptote une ligne du troisième ordre. La quatrième enfin, à cause de $u = \infty$, si $t = \infty$ se change en celle-ci $u^4 + \frac{Btt}{gg}$, laquelle est impossible si B est une quantité positive, & désigne, lorsqu'il est négatif, deux Paraboles opposées par le sommet, avec lesquelles la courbe se confond à une distance infinie.

197. On connoît par ce qui précède la marche ultérieure qu'il faut suivre, lorsque le membre P du degré le plus élevé renferme un plus grand nombre de facteurs simples égaux entre eux. Car, pour ce qui regarde les facteurs inégaux, on peut les considérer chacun séparément, & déterminer l'asymptote rectiligne qui en résulte. S'il se trouve deux facteurs égaux, on pourra déterminer la nature de la courbe par ce qui a été dit *art.* 178 & *suiv.* Pour trois facteurs égaux on aura de même recours à ce qui a été expliqué *art.* 185 & *suiv.*; & nous venons de développer le cas où quatre facteurs sont égaux; d'où l'on peut conclure la manière de traiter l'égalité d'un plus grand nombre de facteurs à la fois. Au reste, on est à portée de juger par-là de la multiplicité & de la variété qui peut se rencontrer dans les lignes courbes, en ayant seulement égard à leurs branches qui s'étendent à l'infini; car il n'a point encore été question de la variété qu'elles peuvent offrir dans un espace fini.

CHAPITRE VIII.

Des Asymptotes.

198. Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il y avoit plusieurs espèces d'asymptotes; car, outre la ligne droite, nous avons trouvé aussi pour asymptotes diverses courbes exprimées par l'équation $u^{\mu} = Ct^{\nu}$. La ligne droite elle-même a fourni d'autres asymptotes curvilignes, avec lesquelles la courbe converge davantage qu'avec la ligne droite. Or, toutes les fois qu'on trouve une droite pour asymptote d'une courbe quelconque, il est possible d'assigner une autre courbe qui soit aussi asymptote de celle-là. Au reste, une telle asymptote est plus propre à donner une idée exacte de la nature de la courbe dont elle est asymptote; car elle fait connoître en même temps le nombre des branches qui convergent avec la droite, & de quel côté elles en approchent, si c'est au-dessus ou au-dessous, à droite ou à gauche.

199. Il sera très-facile de partager en ordres cette variété infinie d'asymptotes, en suivant la marche qui nous les a fait découvrir; car les facteurs inégaux du premier membre donnent des asymptotes d'une espèce; deux facteurs égaux en donnent d'une autre; trois facteurs égaux encore d'une autre; il en est de même de quatre facteurs égaux entre eux, ainsi de suite. Soit donc proposée une équation du degré n entre les coordonnées x & y, savoir, $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, dans laquelle P soit le membre de l'ordre le plus élevé, lequel contient tous les termes d'un nombre n de dimensions; Q le second membre, qui contient les termes de $n - 1$ dimensions; R le troisième; S le quatrième; ainsi de suite.

200. Soit $ay - bx$ le facteur simple & unique de P, & faisons $P = (ay - bx) M$; M sera une fonction homogène de $n - 1$ dimensions non divisible par $ay - bx$. Soit AZ l'axe sur Pl. IV. Fig. 35.

lequel eſt priſe l'abſciſſe $AP = x$, & l'appliquée $PM = y$. Pour exprimer plus brièvement le facteur $ay - bx$, prenons pour axe une autre droite AX, qui coupe le premier à l'origine même des abſciſſes ſous un angle XAZ dont la tangente $= \frac{b}{a}$, & dont le ſinus par conſéquent $= \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & le coſinus $= \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Soit à l'égard de cet axe l'abſciſſe $AQ = t$ & l'appliquée $QM = u$; on aura, en menant Pg, Pf, parallèlement aux nouvelles coordonnées u & t, $Pg = Qf = \frac{bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Ag = \frac{ax}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Mf = \frac{ay}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Pf = Qg = \frac{by}{\sqrt{(aa+bb)}}$; & par conſéquent $t = Ag + Qg = \frac{ax+by}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ & $u = Mf - Qf = \frac{ay-bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$. L'appliquée u ſera donc à préſent un facteur du premier membre P.

201. On conclura réciproquement de ce qui précède $y = \frac{au+bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & $x = \frac{at-bu}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Si on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation $P + Q + R +$ &c. $= 0$, on en aura une autre entre t & u pour la même courbe rapportée à l'axe AX. Mais, pour éviter la trop grande multitude de coefficiens, nous ſuppoſons que α, β, γ, δ, &c., tiennent lieu de tous; après la ſubſtitution, chaque lettre aura les valeurs ſuivantes :

$$\begin{aligned}
M &= \alpha t^{n-1} + \alpha t^{n-2} u + \alpha t^{n-3} u^2 + \text{\&c.}\\
Q &= \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2} u + \beta t^{n-3} u^2 + \text{\&c.}\\
R &= \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \text{\&c.}\\
S &= \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \text{\&c.}\\
T &= \varepsilon t^{n-4} + \varepsilon t^{n-5} u + \varepsilon t^{n-6} u^2 + \text{\&c.},\\
&\text{\&c.}
\end{aligned}$$

Mais, comme pour trouver l'aſymptote on doit ſuppoſer l'abſciſſe t infinie, tous les termes dans chaque membre diſparoîtront devant le premier; c'eſt pourquoi, ſi le premier terme de chaque membre ne manque pas, on pourra négliger les ſuivans; mais, s'il manque, il faudra prendre le ſecond, & ſi le premier & le ſecond manquent à la fois, on commencera par le troiſième.

202. La fonction M n'étant pas diviſible par u, le premier terme

terme ne peut manquer; on aura donc $\alpha t^{n-1} u + \beta t^{n-1} = 0$; d'où réſulte pour u une valeur finie que je ſuppoſerai $= c$; c'eſt-à-dire que la droite parallèle à l'axe AX, & qui en ſera éloignée d'un intervalle c, ſera une aſymptote. A préſent, pour trouver l'aſymptote curviligne qui approche plus de la courbe, écrivons par-tout, excepté dans le premier terme, $u = c$, nous trouverons cette équation $\alpha t^{n-1} u + \beta t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$; ou, à cauſe de $\alpha u + \beta = u - c$*, $(u - c) t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$. Si le ſecond terme ne manque pas, on pourra négliger tous les ſuivans, & on aura $(u - c) + \frac{A}{t} = 0$; ſi le ſecond manque, on prendra le troiſième, & on aura $(u - c) + \frac{A}{tt} = 0$; ſi le troiſième manque auſſi, on aura $(u - c) + \frac{A}{t^3} = 0$, ainſi de ſuite. Si tous manquent, excepté le dernier terme conſtant, on aura $(u - c) + \frac{A}{t^{n-1}} = 0$. Enfin, ſi tous manquoient à la fois, l'équation entière ſeroit diviſible par $u - c$, & par conſéquent la droite dont l'équation ſeroit $u - c = 0$, ſeroit une portion de la courbe.

203. Si on ſuppoſe $u - c = z$, c'eſt-à-dire, ſi les abſciſſes ſont priſes ſur la droite qui ſert d'aſymptote, toutes les aſymptotes curvilignes que renferme le facteur unique du premier membre ſont compriſes dans cette équation générale $z = \frac{C}{t^k}$, k déſignant un nombre entier quelconque moindre que l'expoſant n. Examinons donc la nature de ces aſymptotes curvilignes, lorſque t eſt ſuppoſé infini. Prenons à cet effet pour axe l'aſymptote rectiligne XY & le point A pour origine des abſciſſes; ſi on mène la droite CD, elle formera quatre régions que nous déſignerons par les lettres P, Q, R & S. Soit à Pl. IV. Fig. 36.

* Il faudroit, à la rigueur, $\alpha u + \beta = \alpha(u - c)$; mais cela n'influe en rien ſur les conſéquences qu'on doit en tirer.

préſent $z = \frac{c}{t}$; comme, en faiſant t négatif, z devient auſſi négatif, la courbe aura deux branches EX & FY qui s'approcheront de plus en plus de la droite XY dans les régions oppoſées P & S. La même choſe arrivera, ſi k eſt un nombre impair quelconque; mais, ſi $k = 2$ ou $z = \frac{c}{tt}$, comme z demeure toujours poſitif, ſoit qu'on ſuppoſe t poſitif, ſoit qu'on le ſuppoſe négatif, la courbe ſera compoſée de deux branches EX & FY convergentes à la droite XY dans les régions P & Q; ce qui a lieu toutes les fois que k eſt un nombre pair quelconque, avec cette différence ſeulement que la convergence eſt d'autant plus rapide que l'expoſant k eſt plus grand.

Pl. V. Fig. 37.

204. Si le premier membre P renferme deux facteurs $ay - bx$ égaux entre eux; après avoir tranſporté, comme auparavant, l'équation à un autre axe, on aura :

$$\begin{aligned}
P &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \alpha t^{n-2} u^2 + \alpha t^{n-3} u^3 + \&c. \\
Q &= \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2} u + \beta t^{n-3} u^2 + \beta t^{n-4} u^3 + \&c. \\
R &= \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \gamma t^{n-5} u^3 + \&c. \\
S &= \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \delta t^{n-6} u^3 + \&c. \\
&\qquad\qquad \&c;
\end{aligned}$$

d'où l'on tirera les deux équations ſuivantes, ſelon que le premier terme du membre Q s'y trouvera, ou ne s'y trouvera pas :

I.

$$\alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-1} = 0;$$

ou

$$\alpha u^2 + \beta t = 0;$$

II.

$$\alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = 0;$$

ou

$$\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0.$$

Donc, ſi la première équation $\alpha u^2 + \beta t = 0$ a lieu, l'aſymptote devient une Parabole, avec les deux branches de laquelle ſe confondront celles de la courbe à une diſtance in-

Pl. V. Fig. 38.

finie. Dans ce cas, la courbe aura deux branches dans les régions P & R, lesquelles s'appliqueront à la fin sur la Parabole EAF.

205. Mais, si l'autre équation $\alpha uu + \beta u + \gamma = 0$ a lieu, il faut voir si ses deux racines sont réelles, ou ne le sont pas. Dans le dernier cas, aucune branche infinie n'est désignée par l'équation; si les deux racines sont réelles & inégales, que l'une soit $u = c$ & l'autre $u = d$, la courbe aura pour asymptotes deux droites parallèles entre elles; nous en chercherons la nature, comme auparavant; pour cela, à cause de $\alpha uu + \beta u + \gamma = (u - c)(u - d)$*, nous mettrons par-tout, excepté dans le facteur $u - c$, $u = c$; ce qui donnera $(c - d)t^{n-2}(u - c) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \varepsilon) + \&c. = 0$. A moins donc que le second terme ne manque, tous les suivans, en faisant $t = \infty$, disparoîtront, & on aura une asymptote représentée par l'équation $(u - c) + \frac{A}{t} = 0$, ou par $(u - c) + \frac{A}{tt} = 0$, si le second terme manque, ainsi de suite. Si tous les termes, excepté le terme constant, sont $= 0$, on aura l'équation $(u - c) + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$, qui représente des courbes dont nous avons décrit auparavant les figures, lorsque $t = \infty$.

206. Mais, si les deux racines de l'équation sont égales, ou que $\alpha uu + \beta u + \gamma = (u - c)^2$; comme $u = c$, si on substitue cette valeur dans les autres termes, on trouvera l'équation $t^{n-2}(u - c)^2 + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \varepsilon) + \&c. = 0$; d'où résultent les équations suivantes pour déterminer les asymptotes, selon qu'à l'exception du premier terme, le second ne manque pas, ou que le second manquant, le troisième ne manque pas, ou que le second & le troisième manquant, le quatrième ne manque pas, &c. :

---

* Même remarque que ci-dessus; il faudroit, à la rigueur, $\alpha uu + \beta u + \gamma = \alpha(u - c)(u - d)$.

$$(u-c)^2+\frac{A}{t}=0;$$

$$(u-c)^2+\frac{A}{tt}=0;$$

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^3}=0;$$

jusqu'à

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^{n-2}}=0,$$

si tous les termes manquent, excepté le dernier; mais, si le dernier manquoit aussi, on auroit $(u-c)^2=0$; & par conséquent la ligne droite feroit partie de la courbe, qui par cette raison feroit complexe.

207. Quoiqu'il semble que nous ayions fait l'énumération de tous les cas que présentent deux facteurs égaux, cependant la dernière équation peut encore prendre d'autres formes, qui fourniront des asymptotes d'une nature différente. Cela arrive, lorsque le facteur de la puissance t^{n-3} est divisible par $u-c$; car alors, en y laissant comme dans le premier terme $u-c$, & y ajoutant le premier terme qui vient après, on aura des équations de cette forme :

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^2}=0;$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^3}=0;$$

jusqu'à

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

Mais si le second terme manque entièrement, ou qu'il soit divisible par $(u-c)^2$, on passera au troisième dans lequel on laissera $u-c$, s'il est divisible par $u-c$, & on lui ajoutera le premier terme qui se trouvera ensuite. On aura dans ce cas des équations de la forme suivante :

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^3}=0;$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^4}=0;$$

jusqu'à

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

Et ſi le troiſième terme manque auſſi, & que le quatrième ſoit diviſible par $u-c$, ou que ce dernier manquant, ce ſoit le cinquième, ainſi de ſuite; il en réſultera pour l'aſymptote curviligne une équation de cette forme:

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0;$$

dans laquelle l'expoſant p eſt toujours plus petit que q, & q plus petit que $n-1$.

208. Suppoſons $u-c=z$; toutes ces équations ſont renfermées dans cette formule: $zz-\frac{Az}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0$. Il ſe préſente trois cas à développer, ſuivant que q eſt plus grand que $2p$, ou q égal à $2p$, ou q plus petit que $2p$.

Le premier cas, où q ſurpaſſe $2p$, offre deux équations, ſavoir $z-\frac{A}{t^p}=0$ & $Az-\frac{B}{t^{q-p}}=0$; car l'une & l'autre ſatisfait, dans la ſuppoſition de $t=\infty$. En effet, en faiſant $z=\frac{A}{t^p}$, l'équation ci-deſſus devient $\frac{A^2}{t^{2p}}-\frac{A^2}{t^{2p}}+\frac{B}{t^q}$ ou $A^2-A^2+\frac{B}{t^{q-2p}}=0$; ce qui eſt vrai, à cauſe que q eſt plus grand que $2p$; quant à p, il ſera plus petit que $\frac{n-2}{2}$. Mais, ſi $z=\frac{B}{At^{q-p}}$, elle deviendra $\frac{BB}{A^2t^{2q-2p}}-\frac{B}{t^q}+\frac{B}{t^q}$ ou $\frac{BB}{A^2t^{q-2p}}-B+B=0$, ce qui eſt encore vrai, à cauſe du premier terme qui s'évanouit, lorſque $t=\infty$. On a donc dans ce cas ſur la même aſymptote droite deux aſymptotes curvilignes, & par conſéquent quatre branches qui s'étendent à l'infini.

Le ſecond cas, où $q=2p$, donne l'équation $zz-\frac{Az}{t^p}+\frac{B}{t^{2p}}=0$, qui renferme deux racines imaginaires, & ne fournit par conſéquent aucune aſymptote, ſi AA eſt plus petit que $4B$; mais qui fournit deux aſymptotes ſemblables exprimées par $z=\frac{C}{t^p}$, lorſque AA eſt plus grand que $4B$.

Dans le troiſième cas, où q eſt plus petit que $2p$, le terme moyen de l'équation s'évanouit toujours, lorſque $t=\infty$; & on aura pour l'équation de l'aſymptote $zz + \frac{B}{t^q} = 0$. Nous avons fait connoître auparavant les formes des aſymptotes précédentes; il nous reſte à examiner celles qui ſont renfermées dans l'équation $zz = \frac{C}{t^k}$.

209. Pour cela, prenons l'axe ſur l'aſymptote même repréſentée par $u = c$, & ſuppoſons $= z$ l'appliquée $u - c$; toutes les aſymptotes curvilignes dont il s'agit ſeront compriſes dans cette équation $zz = \frac{C}{t^k}$, k déſignant un nombre entier moindre que $n - 1$. Les branches de ces courbes, lorſqu'elles s'éloigneront à l'infini, ou que $t = \infty$, ſe trouveront ainſi : Si $k = 1$,
Pl. V. Fig. 39. ou $zz = \frac{C}{t}$; comme t ne peut devenir négatif, la courbe aura deux branches EX & FX qui s'étendront à l'infini dans les régions P & R; la même choſe arrivera, ſi k eſt un nombre impair quelconque. Mais, ſi k eſt un nombre pair, comme 2, ou qu'on ait $zz = \frac{C}{tt}$; il faudra voir d'abord ſi C eſt une quantité négative ou poſitive. Dans le premier cas, l'équation ne peut avoir de racine réelle, & par conſéquent on ne pourra en
Pl. V. Fig. 40. conclure aucune branche infinie pour la courbe. Dans le ſecond, la courbe aura quatre branches qui s'étendront à l'infini, & qui ſe confondront avec l'aſymptote XY. Ces branches ſeront EX, FX, GY & HY, & ſeront diſperſées dans les quatre régions P, Q, R & S.

210. Suppoſons que le premier membre P de l'équation renferme trois facteurs égaux, & ramenons l'équation aux coordonnées t & u, de manière que u devienne un facteur triple de P, nous aurons :

$$
\begin{aligned}
P &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \alpha t^{n-3}u^3 + \alpha t^{n-4}u^4 + \&c.\\
Q &= \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 + \beta t^{n-5}u^4 + \&c.\\
R &= \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \gamma t^{n-6}u^4 + \&c.\\
S &= \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \delta t^{n-7}u^4 + \&c.,\\
&\qquad\qquad \&c.
\end{aligned}
$$

De là naiſſent, ſuivant la différente compoſition des membres Q & R, les équations qui ſuivent :

I.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-1} = 0;$$

II.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = 0;$$

III.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-2} = 0;$$

IV.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-3} u + \delta t^{n-3} = 0.$$

211. La première équation se change en $\alpha u^3 + \beta t^2 = 0$, & donne par conséquent pour asymptote une ligne du troisième ordre, dont la figure sera telle que, si on compte les abscisses t sur l'axe XY depuis le point A, elle aura deux branches E & F qui s'étendront à l'infini dans les régions P & Q. Pl. V. Fig. 41.

La seconde équation se transforme en celle-ci : $\alpha u^3 + \beta t u + \gamma t = 0$; d'où il suit qu'en faisant $t = \infty$, u peut avoir deux valeurs, l'une finie, l'autre infinie. Par conséquent elle se résout en ces deux équations $\beta u + \gamma = 0$ & $\alpha u u + \beta t = 0$; la seconde est, comme nous l'avons vu, pour la Parabole ; ce qui annonce que la courbe aura deux branches qui s'étendront à l'infini, & qui s'approcheront de plus en plus de la Parabole. Supposons que la première équation donne $u - c = 0$; elle indiquera une asymptote rectiligne dont on déterminera la nature, en écrivant par-tout c au lieu de u, excepté dans $\beta u + \gamma = u - c$; on aura donc $t^{n-2}(u-c) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \varepsilon) + \&c = 0$; d'où l'on conclura, comme ci-dessus, ou $(u-c) + \frac{A}{t} = 0$, ou $(u-c) + \frac{A}{tt} = 0$, &c. La dernière équation qu'on puisse obtenir, est $(u-c) + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$. La courbe aura donc dans ce cas deux asymptotes, l'une rectiligne dont la nature vient d'être déterminée, & l'autre parabolique.

212. La troisième équation $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma t = 0$ ne peut subsister en faisant $t = \infty$, à moins que u ne soit $= \infty$; par conséquent le terme βu^2 disparoît devant αu^3, & il reste l'équation du troisième ordre $\alpha u^3 + \gamma t = 0$ pour exprimer l'asymptote, qui aura, comme on en peut juger par sa figure, deux branches AE & AF qui s'étendront à l'infini dans les régions P & S. Pl. V. Fig. 42.

Quant à la quatrième équation $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$; elle indique une ou trois asymptotes rectilignes parallèles entre elles, à moins que deux ou même toutes ne soient égales. Pour en connoître la nature, soit d'abord $u = c$ une racine de l'équation qui n'en renferme point d'autres semblables; & soit $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = (u - c)(fu^2 + gu + h)$. En substituant par-tout $u = c$, excepté dans le facteur $u - c$, on aura une équation de cette forme $t^{n-3}(u-c) + At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} +$ &c. $= 0$; ce qui donnera une asymptote de la nature $u - c = \frac{K}{t^k}$, k étant un nombre plus petit que $n - 2$.

213. Si l'équation $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$ renferme deux racines égales, de sorte qu'elle soit $= (u-c)^2(fu+g)$; en faisant $u = c$, excepté dans le membre où le facteur $u - c$ peut se trouver, on parviendra à une telle équation: $(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$; où q sera moindre que $n - 2$ & p moindre que q; c'est un cas que nous avons développé auparavant. Reste donc celui où l'équation $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$ contient trois racines égales, par exemple, $(u-c)^3$; on obtiendra alors une équation de cette forme $(u-c)^3 t^{n-3} + Pt^{n-4} + Qt^{n-5} + Rt^{n-6} + St^{n-7} +$ &c. $= 0$. Si P n'est pas divisible par $u - c$, on fera $u = c$, & elle deviendra $(u-c)^3 + \frac{A}{t} = 0$; mais, si P a pour diviseur $u - c$ une fois seulement, & qu'on écrive par-tout, excepté dans ce facteur, $u = c$, on obtiendra une équation de cette forme $(u-c)^3 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{B}{t^q} = 0$, q étant plus petit que $n - 2$, & $\frac{B}{t^q}$ désignant le terme qui suit immédiatement celui qui ne s'évanouit pas, en faisant $u - c = 0$. Si P est de plus divisible par $(u-c)^2$ & que Q ne le soit pas par $u-c$, il viendra une équation de la forme $(u-c)^3 + \frac{A(u-c)^2}{t} + \frac{B}{tt} = 0$. S'il arrivoit que le second terme fût divisible par $(u-c)^3$, il faudroit passer de suite à un autre qui ne fût pas divisible par $(u-c)^3$; & s'il l'est par $u - c$, on ira plus loin jusqu'à ce qu'on

qu'on ſoit arrivé à un terme non diviſible par $u - c$. Mais, ſi ce terme étoit diviſible par $(u - c)^2$, on paſſeroit outre, juſqu'à ce qu'on en trouvât un qui ſeroit ou non diviſible, ou diviſible par $u - c$; dans le premier cas, l'équation ſera terminée; & dans le ſecond, on ira plus loin juſqu'à ce qu'on arrive enfin à un terme qui ne ſoit plus diviſible par $(u - c)$. On obtiendra ainſi dans tous les cas une équation compriſe dans la formule générale $(u - c)^3 + \frac{A(u-c)^2}{t^p} + \frac{B(u-c)}{t^q} + \frac{C}{t^r} = 0$, dans laquelle r ſera plus petite que $n - 2$, q plus petit que r & p plus petit que q.

214. Cette équation en renferme trois autres de la forme $u - c = \frac{K}{t^k}$, ou une ſeulement de cette forme & une autre de celle-ci : $(u - c)^2 = \frac{K}{t^k}$, ou enfin une ſeule en tout, telle que $(u - c)^3 = \frac{K}{t^k}$. Ce dernier cas aura lieu ſi $3p$ eſt plus grand que r & $3q$ plus grand que $2r$. Mais il peut ſe faire auſſi que deux équations deviennent imaginaires; & alors elles n'indiqueront aucune aſymptote. Au reſte, les formes de ces aſymptotes ont été données, excepté celle de la dernière repréſentée par $(u - c)^3 = \frac{K}{t^k}$. Quant à celle-ci, elle ſera, ſi k eſt un nombre impair, de la forme déſignée par la figure trente-ſixième, avec deux branches EX & FY qui s'étendront à l'infini dans les régions oppoſées P & S. Mais ſi k eſt un nombre pair, on aura une forme telle que la donne la figure trente-ſeptième avec deux branches EX & FY du même côté de l'aſymptote rectiligne XY, ou qui ramperont à l'infini dans les régions P & Q. Pl. V. Fig. 36.

215. Comme on voit facilement par ce qui précède ce qu'il y a à faire pour trouver la forme des aſymptotes, lorſque le premier membre de l'équation contient quatre facteurs ſimples égaux ou davantage, je n'irai pas plus loin, & je me contenterai de terminer ce chapitre par une application des règles précédentes à un exemple.

EXEMPLE.

Soit proposée la ligne courbe renfermée dans l'équation $y^3xx(y-x)-xy(yy+xx)+1=0$, *dont le membre supérieur* $y^3xx(y-x)$ *contient un seul facteur simple* $y-x$, *deux égaux* xx *& trois autres égaux* y^3.

Pl. V. Fig. 43. Considérons d'abord le facteur simple $y-x$; en faisant $y=x$, on aura $y-x-\frac{2}{x}=0$, &, à cause de $x=\infty$, $y-x=0$; équation pour l'asymptote rectiligne BAC, qui fait avec l'axe XY à l'origine des abscisses un angle demi-droit BAY. Rapportons l'équation à cette ligne considérée comme axe, ce qui se fera en supposant $y=\frac{u+t}{\sqrt{2}}$ & $x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$; cela posé, on aura l'équation $\frac{(u+t)(tt-uu)^2u}{4}-\frac{(tt-uu)(tt+uu)}{2}+1=0$, laquelle étant multipliée par 4 deviendra :

$$\begin{aligned} 0 = t^5u &+ t^4uu - 2t^3u^3 - 2ttu^4 + tu^5 + u^6 \\ &- 2t^4 \qquad\qquad\qquad\quad + 2u^4 \\ &+ 4 \end{aligned}$$

En faisant $t=\infty$, on trouve $u=0$ & les autres termes, excepté ces deux-ci t^5u-2t^4, disparoissent; ce qui donne pour l'asymptote curviligne l'expression $u=\frac{2}{t}$. Ainsi la courbe cherchée aura, en vertu de ce facteur, deux branches bB, cC, qui s'étendront à l'infini.

216. Considérons à présent les deux facteurs égaux xx; on aura $xx=\frac{xy(yy+xx)-1}{y^3(y-x)}$. Si donc on prend pour axe la droite AD perpendiculaire au premier XY, y deviendra $=t$ & $x=u$, & l'équation résultante sera :

$$\begin{aligned} 0 = t^4u^2 &- t^3u^3 \\ - t^3u &- tu^3 \\ +1 & \end{aligned}$$

laquelle, en supposant t infini, se change en $t^4u^2-t^3u+1=0$; d'où dérivent deux équations $u=\frac{1}{t}$ & $u=\frac{1}{t^3}$. Ce facteur fournit donc quatre branches infinies, savoir deux dD, eE, provenantes de l'équation $u = \frac{1}{t}$, & deux autres δD & εE situées des mêmes côtés, & qui proviennent de l'équation $u = \frac{1}{t^3}$.

217. Les trois facteurs égaux y^3 se rapportent à l'axe même XY; par conséquent t sera $= x$ & $y = u$; ce qui donne lieu à cette équation :

$$o = -t^3u^3 + ttu^4 - t^3u - tu^3 + 1,$$

qui, en supposant t infini, donne $t^3u^3 + t^3u = o$, ou $u(uu + 1) = o$. On n'aura donc, à cause de l'équation impossible $uu + 1 = o$, qu'une seule asymptote rectiligne, qui sera donnée par l'équation $u = o$, & qui se confondra avec l'axe même XY, & dont la nature sera déterminée par cette équation $t^3u + 1 = o$ ou $u = \frac{1}{t^3}$; par conséquent ce facteur triple ne produit que deux branches yY & xX qui se prolongent à l'infini. La courbe aura donc en tout huit branches infinies, dont ce n'est pas encore le lieu d'expliquer l'intersection dans un espace fini.

218. On peut juger facilement par là & par ce qui a été dit dans le chapitre précédent, de la variété des branches dont le cours est infini. Car ou ces branches s'approchent d'une certaine ligne droite, qui est leur asymptote, comme il arrive dans l'Hyperbole, ou elles n'ont point d'asymptote rectiligne; telle est la Parabole. Dans le premier cas, elles sont dites *hyperboliques*; & dans le second, *paraboliques*. L'une & l'autre classe fournissent une multitude innombrable d'espèces. Les hyperboliques sont exprimées par les équations suivantes entre les coordonnées t & u, t étant supposé infini :

$$u = \frac{A}{t};\ u = \frac{A}{tt};\ u = \frac{A}{t^3};\ u = \frac{A}{t^4};\ \&c.$$
$$u^2 = \frac{A}{t};\ u^2 = \frac{A}{tt};\ u^2 = \frac{A}{t^3};\ u^2 = \frac{A}{t^4};\ \&c.$$
$$u^3 = \frac{A}{t};\ u^3 = \frac{A}{tt};\ u^3 = \frac{A}{t^3};\ u^3 = \frac{A}{t^4};\ \&c.$$

&c.

Et les différentes eſpèces de branches paraboliques ſont indiquées par les équations qui ſuivent :

$$u^2 = At\ ;\ u^3 = At\ ;\ u^4 = At\ ;\ u^5 = At\ ,\ \&c.$$
$$u^3 = At^2;\ u^4 = At^2;\ u^5 = At^2;\ u^6 = At^2,\ \&c.$$
$$u^4 = A.t^3;\ u^5 = At^3;\ u^6 = At^3;\ u^7 = At^3,\ \&c.$$
$$\&c.$$

Chacune des équations précédentes donne au moins deux branches infinies, ſi les expoſans t & u ne ſont pas l'un & l'autre un nombre pair; mais s'ils ſont tous deux pairs, la courbe alors n'aura aucune branche infinie, ou elle en aura quatre ; le premier cas a lieu, ſi l'équation eſt impoſſible, & le ſecond, ſi elle eſt poſſible.

CHAPITRE IX.

De la Subdiviſion des lignes du troiſième ordre en Eſpèces.

219. La nature & le nombre des branches infinies paroiſſent à juſte titre établir une différence eſſentielle dans les lignes courbes; & c'eſt de cette ſource que nous avons tiré une ſubdiviſion très commode des lignes de chaque ordre dans leurs eſpèces différentes. Nous aurions pu en conclure pour les lignes du ſecond ordre la même ſubdiviſion en eſpèces, que celle que la nature même de la choſe nous avoit donnée.

En effet, ſoit propoſée l'équation générale des lignes de cet ordre :

$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0;$$

il faudra examiner le premier membre $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx$, & voir s'il renferme des facteurs ſimples réels ou non. S'il n'en contient aucun, on aura la première eſpèce, appelée *Ellypſe* ; s'il renferme des facteurs réels, il faudra voir de plus s'ils ſont inégaux ou égaux. Dans le premier cas, on a une *Hyperbole*; & dans le ſecond, une *Parabole*.

220. Dans le cas où les facteurs du premier membre ſont réels & inégaux, la courbe aura donc deux aſymptotes rectilignes qu'il s'agit de déterminer. Soit à cet effet $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx = (ay - bx)(cy - dx)$, de manière qu'on ait :

$$(ay - bx)(cy - dx) + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0.$$

Conſidérons d'abord le facteur $ay - bx$, qui à l'infini donne $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, on aura :

$$ay - bx + \frac{\delta b + \varepsilon a}{bc - ad} + \frac{\zeta}{cy - dx} = 0;$$

d'où l'on tire l'équation $ay - bx + \frac{\delta b + \varepsilon a}{bc - ad} = 0$, qui détermine la poſition d'une aſymptote. Celle de la ſeconde ſera déterminée d'une manière ſemblable par cette équation $cy - dx + \frac{\delta d + \varepsilon c}{ad - bc} = 0$.

221. Pour mieux connoître la nature de chacune de ces aſymptotes, rapportons l'équation à un autre axe, en faiſant $y = \frac{au + bt}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ & $x = \frac{at - bu}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$; & ſoit $\sqrt{(aa + bb)} = g$, on aura :

$$u((ac + bd)u + (bc - ad)t) + \frac{(\delta a - \varepsilon b)u + (\delta b + \varepsilon a)t}{g} + \zeta = 0;$$

& par conſéquent

$g(bc - ad)tu + g(ac + bd)uu + (\delta b + \varepsilon a)t + (\delta a - \varepsilon b)u + \zeta g = 0$; d'où l'on conclura, en mettant dans les autres membres $u = \frac{-\delta b - \varepsilon a}{g \cdot (bc - ac)}$, $(g(bc - ad)u + \delta b + \varepsilon a)t + \frac{(ac + bd)(\delta b + \varepsilon a)^2}{g(bc - ad)^2} - \frac{(\delta a - \varepsilon b)(\delta b + \varepsilon a)}{g(bc - ad)} + \zeta g = 0$, ou $g(bc - ad)u + \delta b + \varepsilon a + \frac{g(\delta d + \varepsilon c)(\delta b + \varepsilon a)}{(bc - ad)^2 t} + \frac{\zeta g}{t} = 0$; on aura donc une aſymptote hyperbolique du genre $u = \frac{A}{t}$; l'autre facteur $cy - dx$ en donnera une ſemblable. Ainſi la courbe aura deux paires de branches qui s'étendront à l'infini, & qui ſeront repréſentées l'une & l'autre par une équation de la forme $u = \frac{A}{t}$.

222. Supposons à présent les deux facteurs égaux, ou $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx = (ay - bx)^2$; ayant transporté comme auparavant l'équation à un autre axe, en faisant $y = \frac{au+bt}{g}$ & $x = \frac{at-bu}{g}$, nous aurons $gguu + \frac{(\delta a - \varepsilon b)u}{g} + \frac{(\delta b + \varepsilon a)t}{g} + \zeta = 0$; &, en supposant t infini, $uu + \frac{(\delta b + \varepsilon a)t}{g^3} = 0$; équation qui annonce deux branches paraboliques de l'espèce $uu = At$; en effet la courbe qui est une Parabole est elle-même son asymptote. Mais, si $\delta b + \varepsilon a$ étoit $= 0$, alors l'équation $gguu + \frac{\delta gu}{a} + \zeta = 0$ appartiendroit à deux lignes droites parallèles entre elles; c'est le cas où l'équation du second ordre est décomposable en deux facteurs simples.

Nous aurions donc trouvé par ce moyen les espèces de lignes du second ordre, si nous ne les connoissions pas déjà.

223. Traitons de la même manière les lignes du troisième ordre représentées par l'équation générale :

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0.$$

Le premier membre $\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yx^2 + \delta x^3$, étant d'un nombre impair de dimensions, aura ou un facteur simple réel, ou tous ses trois facteurs simples réels. Nous avons donc les cas suivans à examiner.

I.

Si un seul facteur simple est réel.

II.

Si tous les trois sont réels & inégaux entre eux.

III.

Si deux facteurs sont égaux.

IV.

Si tous les facteurs sont égaux.

Comme il suffit dans chaque cas d'appliquer le calcul à un seul facteur; soit ce facteur, que je suppose seul ou accompagné d'autres égaux ou inégaux entre eux, représenté par

$ay - bx$; & changeons à son égard, comme nous avons fait jusqu'à présent, la position de l'axe; après cela, nous prendrons, à la place de l'équation ci-dessus, celle-ci qui est aussi étendue :

$$\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3 + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t + \theta u + \iota = 0,$$

dans laquelle le premier membre $\alpha ttu + \beta tu + \gamma u^3$ renferme au moins le facteur u.

PREMIER CAS.

224. Supposons donc que le premier membre n'ait qu'un facteur réel u, ce qui a lieu lorsque $\beta\beta$ est plus petit que $4\alpha\gamma$; en supposant t infini, nous aurons $\alpha u + \delta = 0$, équation qui convient à une asymptote rectiligne. Soit $= c$ la valeur de u qui en résulte, nous aurons, pour exprimer la nature de l'asymptote, l'équation

$$\alpha tt(u - c) + t(\beta cc + \varepsilon c + \eta) + \gamma c^3 + \zeta cc + \theta c + \iota = 0.$$

Nous en conclurons, suivant que $\beta cc + \varepsilon c + \eta$ ne sera pas $= 0$ ou sera $= 0$, deux espèces d'asymptotes, savoir $u - c = \frac{A}{t}$ ou $u - c = \frac{A}{tt}$; ce qui donne les deux premières espèces de lignes du troisième ordre.

I.

LA PREMIÈRE Espèce a une asymptote unique de la nature $u = \frac{A}{t}$.

II.

LA SECONDE Espèce a une asymptote unique de la nature $u = \frac{A}{tt}$.

SECOND CAS.

Supposons les trois facteurs simples du premier membre réels & inégaux entre eux; ce qui a lieu, si dans l'équation

$$\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3 + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t + \theta u + \iota = 0,$$

$\beta\beta$ est plus grand que $4\alpha\gamma$. Il faudra donc dans ce cas observer pour chaque facteur ce que nous venons d'exposer pour un seul, c'est-à-dire que chacun fournira deux branches hyperboliques ou de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, ou de l'espèce $u = \frac{A}{tt}$. Ainsi ce cas renferme quatre espèces différentes de lignes du troisième ordre, pourvues de trois asymptotes rectilignes inclinées entre elles d'une manière quelconque. Les voici :

III.

LA TROISIÈME Espèce a trois asymptotes de la nature $u = \frac{A}{t}$.

IV.

LA QUATRIÈME Espèce a deux asymptotes de la nature $u = \frac{A}{t}$ & une de la nature $u = \frac{A}{tt}$.

La cinquième espèce a une asymptote de la nature $u = \frac{A}{t}$, *& deux de la nature* $u = \frac{A}{tt}$. *

La sixième espèce a trois asymptotes de la nature $u = \frac{A}{tt}$.

226. Voyons, avant d'aller plus loin, si toutes ces espèces sont possibles. Pour nous en assurer, prenons cette équation très-étendue :

$$y(\alpha y - \beta x)(\gamma y - \delta x) + \varepsilon xy + \zeta yy + \eta x + \theta y + \iota = 0,$$

dont le premier membre contient trois facteurs ; car, quoique le terme xx ne s'y trouve pas, elle n'en est pas moins étendue. On sait par ce qui précède que le facteur y donne une asymptote $u = \frac{A}{t}$, si η n'est pas $= 0$. Cherchons quelle espèce d'asymptote donnera le facteur $\alpha y - \beta x$. Faisons pour cela $y = \alpha u + \beta t$ & $x = \alpha t - \beta u$; & soit, pour abréger, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, ce qu'il est permis de supposer ; l'équation proposée se transformera en celle-ci :

$$\left.\begin{array}{lll} \beta(\beta\gamma - \alpha\delta)ttu + (2\alpha\beta\gamma - (\alpha\alpha - \beta\beta)\delta)tuu + \alpha(\alpha\gamma + \beta\delta)u^3 \\ + \beta(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)tt + (2\alpha\beta\zeta + (\alpha\alpha - \beta\beta)\varepsilon)tu & + \alpha(\alpha\zeta - \beta\varepsilon)u^2 \\ \qquad + (\alpha\eta + \beta\theta)t & + (\alpha\theta - \beta\eta)u \\ & + \iota \end{array}\right\} = 0.$$

* Voyez plus bas, page 113.

Le

Le facteur $\alpha y - \beta x$ s'est changé en u, d'où l'on tire, en faisant t infini, $u = \left(\frac{\alpha\varepsilon + \beta\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right) = c$; valeur qui, substituée à la place de u dans le second membre qui contient t, apprend que ce facteur u ou $\alpha y - \beta x$ donne naissance à une asymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$, à moins qu'on n'ait

$$\frac{\alpha\eta + \beta\theta}{\beta} + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0.$$

Le facteur $\gamma y - \delta x$ donnera de même une asymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$, à moins qu'on n'ait

$$\frac{\gamma\eta + \delta\theta}{\delta} + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0.$$

227. Il est clair qu'il peut arriver que ni η, ni aucune des deux formules qu'on vient de trouver, ne disparoisse; ainsi la troisième espèce sera toujours possible. Pour la quatrième, soit $\eta = 0$, afin d'avoir une asymptote de la forme $u = \frac{A}{tt}$; alors les deux autres expressions n'en font plus qu'une, & conséquemment les deux autres asymptotes seront de la forme $u = \frac{A}{t}$, à moins qu'on n'ait $\theta + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0$; la quatrième espèce est donc possible; mais si, outre $\eta = 0$, l'une des deux autres expressions devient $= 0$, la seconde devient aussi nulle; c'est pourquoi il est impossible que deux asymptotes soient de la forme $u = \frac{A}{tt}$, sans que la troisième prenne la même forme. La cinquième espèce est donc impossible; mais par cela même la sixième est possible, puisqu'elle a lieu, si $\eta = 0$ & $\theta = \frac{-(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}$. Ainsi les deux premiers cas ne fournissent que cinq espèces de lignes du troisième ordre, parce que celle que nous avons admise pour la cinquième, doit être rejetée, &

V.

LA CINQUIÈME espèce a trois asymptotes de la nature $u = \frac{A}{tt}$.

TROISIEME CAS.

228. Si le membre de l'ordre le plus élevé renferme deux facteurs u égaux ; ce qui a lieu, lorsque dans l'équation du cas précédent le premier terme $\alpha t t u$ disparoît, l'équation générale qui appartiendra à ce cas, sera de cette forme :

$$\alpha t u u - \beta u^3 + \gamma t t + \delta t u + \varepsilon u u + \zeta t + \eta u + \theta = 0.$$

Le membre supérieur renferme donc deux facteurs u égaux, & un troisième $\alpha t - \beta u$ différent des autres. Ce troisième facteur produira une asymptote ou de la forme $u = \frac{A}{t}$, ou de la forme $u = \frac{A}{tt}$, suivant que cette expression $(\alpha\delta + 2\beta\gamma)(\alpha^2\varepsilon + \alpha\beta\delta + \beta\beta\gamma) - \alpha^3(\alpha\eta + \beta\zeta)$* n'est pas $= 0$, ou est $= 0$.

229. Quant aux deux facteurs égaux, il faudra voir d'abord si γ n'est pas $= 0$; car alors, en faisant $t = \infty$, on aura $\alpha u u + \gamma t = 0$, équation qui appartient à une asymptote parabolique de l'espèce $uu = At$. On aura donc ces deux nouvelles espèces de lignes du troisième ordre.

VI.

LA SIXIÈME espèce a une asymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$, & une asymptote de l'espèce $uu = At$.

VII.

LA SEPTIÈME espèce a une asymptote de la nature $u = \frac{A}{tt}$, & une parabolique de l'espèce $uu = At$.

230. Soit à présent $\gamma = 0$; le troisième facteur $\alpha t - \beta u$ donnera une asymptote de la forme $u = \frac{A}{tt}$, si $\delta(\alpha\varepsilon + \beta\delta)$

---

* Cette expression se trouve en égalant à zéro le coefficient de t, après qu'on a transformé l'équation en faisant $\alpha t - \beta u = z$, après qu'on a substitué à u sa valeur $\frac{\alpha t - z}{\beta}$ & mis à la place de z sa valeur $\frac{-(\beta^2\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha^2\varepsilon)}{\alpha^2}$, qu'on trouve en égalant à zéro la somme des termes qui renferment t^2.

$= \alpha(\alpha\eta + \beta\zeta)$; mais ſi cette égalité n'a pas lieu, l'aſymptote ſera de la forme $u = \frac{A}{t}$. Nous aurons donc cette équation :

$$\left.\begin{array}{ll} +\alpha t u u & -\beta u^3 \\ +\delta t u & +\varepsilon u u \\ +\zeta t & +\eta u \\ +\theta & \end{array}\right\} = 0;$$

&, en faiſant $t = \infty$, elle deviendra $\alpha u u + \delta u + \zeta = 0$.

Soit d'abord $\delta\delta$ plus petit que $4\alpha\zeta$, cette équation n'indiquera aucune aſymptote ; ce cas fournira donc les deux eſpèces ſuivantes.

VIII.

LA HUITIÈME eſpèce a une ſeule aſymptote de la nature $u = \frac{A}{t}$.

IX.

LA NEUVIÈME eſpèce a une ſeule aſymptote de la forme $u = \frac{A}{tt}$.

231. Si les deux racines de l'équation $\alpha u u + \delta u + \zeta = 0$ ſont réelles & inégales ; c'eſt-à-dire, ſi $\delta\delta$ eſt plus grand que $4\alpha\zeta$, cette condition fournira deux aſymptotes rectilignes parallèles entre elles, qui ſeront l'une & l'autre de la forme $u = \frac{A}{t}$; ce qui donne deux autres eſpèces de courbes.

X.

LA DIXIÈME eſpèce a une aſymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$, & deux autres parallèles entre elles repréſentées par $u = \frac{A}{t}$.

XI.

LA ONZIÈME eſpèce a une aſymptote de l'eſpèce $u = \frac{A}{tt}$, & deux parallèles entre elles de la forme $u = \frac{A}{t}$.

232. Si les deux racines de l'équation $\alpha u u + \delta u + \zeta = 0$ sont égales entre elles, ou si $\delta\delta = 4\alpha\zeta$, & qu'on ait $\alpha u u + \delta u + \zeta = \alpha(u-c)^2$; l'équation ci-dessus deviendra $\alpha t(u-c)^2 = \beta c^3 - \varepsilon c c - \eta c - \theta$, d'où naît une asymptote rectiligne de l'espèce $u u = \frac{A}{t}$. Ce qui nous donne deux nouvelles espèces.

XII.

LA DOUZIEME espèce a une asymptote de la forme $u = \frac{A}{t}$, & une de la nature $u u = \frac{A}{t}$.

XIII.

LA TREIZIEME espèce a une asymptote de cette forme $u = \frac{A}{t t}$, & une autre de celle-ci : $u u = \frac{A}{t}$.

QUATRIEME CAS.

233. Si tous les facteurs du premier membre sont égaux, l'équation aura cette forme :

$$\alpha u^3 + \beta t^2 + \gamma t u + \delta u^2 + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0.$$

D'abord, si le terme $\beta t t$ ne manque pas, la courbe aura une asymptote parabolique de la forme $u^3 = A t t$; d'où résulte une espèce.

XIV.

LA QUATORZIEME espèce a une asymptote unique & parabolique de la nature $u^3 = A t t$.

234. Si le terme $\beta t t$ ne se trouve pas dans l'équation, elle deviendra

$$\alpha u^3 + \gamma t u + \delta u u + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0;$$

& par conséquent, dans l'hypothèse de t infini, $\alpha u^3 + \gamma t u + \varepsilon t = 0$, à moins qu'on n'ait γ & $\varepsilon = 0$. Supposons que γ ne soit pas $= 0$, cette équation en renfermera deux autres, savoir $\alpha u u + \gamma t = 0$ & $\gamma u + \varepsilon = 0$; la première désigne une asymptote parabolique de l'espèce $u u = A t$, & la seconde, en faisant $\frac{-\varepsilon}{\gamma} = c$, donnera cette équation :

$$\gamma t(u-c) + \alpha c^3 + \delta c c + \zeta c + \eta = 0;$$

laquelle indiquera une asymptote hyperbolique de la forme $u = \frac{A}{t}$, d'où

X V.

LA QUINZIEME espèce a une asymptote parabolique de la forme $uu = At$, & une rectiligne de l'espèce $u = \frac{A}{t}$; & l'axe de la parabole est parallèle à l'autre asymptote rectiligne.

235. Soit aussi $\gamma = 0$, ce qui donne l'équation

$$\alpha u^3 + \delta uu + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0.$$

Ici ε ne peut s'évanouir, autrement la ligne cesseroit d'être une courbe. Si t est infini, il est nécessaire que u soit aussi infini; d'où résulte l'équation $\alpha u^3 + \varepsilon t = 0$, qui fournit la dernière espèce.

X V I.

LA SEIZIEME espèce a une asymptote parabolique de l'espèce $u^3 = At$.

236. Nous avons donc réduit toutes les lignes du troisième ordre à *seize espèces*, dans lesquelles sont comprises les *soixante-douze* espèces qui forment la division que NEWTON a donnée de ces lignes. Au reste, il ne faut pas s'étonner qu'il y ait une si grande différence entre notre division & celle de NEWTON; car nous n'avons distingué les espèces de courbes que par la nature de leurs branches infinies, tandis qu'il a eu, de plus, égard à leur état dans un espace fini, & qu'il a établi sur cette considération la variété de ses espèces. Mais, quoique cette division paroisse arbitraire, il faut convenir cependant que NEWTON, en suivant cette méthode, auroit pu en admettre un plus grand nombre, tandis que par la mienne il est impossible d'en admettre ni plus ni moins.

237. Pour mieux faire connoître la nature et la constitution de chaque espèce, je vais présenter l'équation générale de chacune sous la forme la plus simple, sans nuire toutefois à leur généralité, & j'aurai soin d'y rapporter en même temps les espèces de *Newton* qu'elle renferme.

PREMIERE ESPECE.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + bx + cy + d = 0,^*$$

mm étant plus petite que nn, & b n'étant pas $= 0$.

C'eſt à cette eſpèce qu'appartiennent les eſpèces 33, 34, 35, 36, 37, 38 de NEWTON.

SECONDE ESPECE.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + cy + d = 0,$$

mm étant plus petite que nn.

Elle renferme les eſpèces 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45 de NEWTON.

TROISIEME ESPECE.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + bx + cy + d = 0;$$

b n'étant pas $= 0$, ni $mb + c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, ni $nb + c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, ni $m = n$.

On rapportera à cette eſpèce les eſpèces 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de NEWTON; & même les eſpèces 24, 25, 26, 27, lorſque $a = 0$.

QUATRIEME ESPECE.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + cy + d = 0,$$

où ni $c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, ni $m = n$.

Rapportez à cette eſpèce les eſpèces 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, de NEWTON, & même, ſi $a = 0$, celles-ci : 28, 29, 30, 31.

---

* On ramène l'équation générale de l'art 223 à cette forme, en faiſant le coefficient de t^2, ſavoir : $\alpha u + \delta = y$; & faiſant diſparoître enſuite, après avoir ſubſtitué à u sa valeur, le terme qui renferme yt; la même remarque a lieu pour la ſuite.

CINQUIEME ESPECE.

$$y(x-my)(x-ny)+ayy-\frac{aay}{(m-n)^2}+d=0,$$

m n'étant pas $= n$.

Les eſpèces 22, 23 & 32 de NEWTON appartiennent à cette eſpèce.

SIXIEME ESPECE.

$$yy(x-my)+axx+bx+cy+d=0,$$

ſi a n'eſt pas $=0$, ni $2m^3aa-mb-c=0$.

Elle contient les eſpèces 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52 de NEWTON.

SEPTIEME ESPECE.

$$yy(x-my)+axx+bx+m(2m^2a^2-b)y+d=0,$$

a n'étant pas $=0$.

Les eſpèces 53, 54, 55, 56 de NEWTON appartiennent à celles-ci.

HUITIEME ESPECE.

$$yy(x-my)+bbx+cy+d=0,$$

pourvu que c ne ſoit pas $=-mbb$, ni $b=0$.

Rapportez à cette eſpèce les eſpèces 61 & 62 de NEWTON.

NEUVIEME ESPECE.

$$yy(x-my)+bbx-mbby+d=0,$$

b n'étant pas $=0$.

Rapportez-y l'eſpèce 63 de NEWTON.

DIXIEME ESPECE.

$$yy(x-my)-bbx+cy+d=0,$$

ſi c n'eſt pas $=mbb$, ni $b=0$.

Les espèces 57, 58, 59 de NEWTON appartiennent à cette dernière.

ONZIEME ESPECE.

$$yy(x-my)-bbx+mbby+d=0,$$

b n'étant pas $=0$.

Elle contient l'espèce 60 de NEWTON.

DOUZIEME ESPECE.

$$yy(x-my)+cy+d=0,$$

si c n'est pas $=0$.

L'espèce 64 de NEWTON convient à celle-ci.

TREIZIEME ESPECE.

$$yy(x-my)+d=0.$$

C'est à celle-ci qu'il faut rapporter l'espèce 65 de NEWTON.

QUATORZIEME ESPECE.

$$y^3+axx+bxy+cy+d=0,$$

a n'étant pas $=0$.

C'est à cette espèce qu'appartiennent les espèces 67, 68, 69, 70, 71 de NEWTON.

QUINZIEME ESPECE.

$$y^3+bxy+cx+d=0.$$

Elle renferme l'espèce 66 de NEWTON.

SEIZIEME ESPECE,

$$y^3+ay+bx=0,$$

b n'étant pas $=0$.

L'espèce 72 de NEWTON doit être rapportée à cette dernière. 238.

238. La plupart de ces espèces de courbes sont si étendues qu'elles comprennent chacune des variétés assez considérables, si on a égard à la forme qu'elles présentent dans un espace fini. C'est pour cette raison que NEWTON a multiplié le nombre de ses espèces, afin de distinguer l'une de l'autre les courbes qui offrent des différences notables dans cet espace. Il sera donc plus à propos d'appeler *Genres* ce que nous avons désigné par *Espèces*, & de rapporter aux espèces les variétés qu'elles renferment. Il faudra sur-tout avoir cette attention, si l'on veut diviser d'une manière semblable les lignes du quatrième ordre ou d'un ordre plus élevé; car on verra que chaque espèce renferme une variété encore beaucoup plus considérable.

CHAPITRE X.

Des principales Propriétés des Lignes du troisième Ordre.

239. DE la même manière que nous avons déduit de l'équation générale les principales propriétés des lignes du second ordre, on pourra aussi reconnoître, au moyen de l'équation générale, les propriétés les plus remarquables des lignes du troisième ordre; & on pourra conclure semblablement les propriétés des lignes du quatrième ordre ou d'un ordre plus élevé, de l'équation qui les représente. Prenons donc l'équation la plus générale des lignes du troisième ordre:

$$\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3+\varepsilon y^2+\zeta yx+\eta x^2+\theta y+\iota x+\varkappa=0,$$

laquelle exprimera la nature de chaque ligne de cet ordre, les coordonnées x & y étant supposées inclinées sous un angle quelconque, & une droite quelconque étant prise pour axe.

240. A moins donc que α ne soit$=0$, il répondra à chaque abscisse x ou une ou trois appliquées réelles. Supposons qu'il

y en ait trois de réelles, il eſt clair que l'équation fera connoître le rapport que ces quantités ont entre elles. Si on fait $\alpha = 1$, on obtiendra une équation de cette forme :

$$y^3 + (\beta x + \varepsilon) yy + (\gamma xx + \zeta x + \theta) y + \delta x^3 + \eta x^2 + \iota x + \kappa = 0;$$

& la ſomme des trois appliquées qui répondent à la même abſciſſe x, ſera $= -\beta x - \varepsilon$; la ſomme des rectangles qu'elles formeront, priſes deux à deux, ſera $= (\gamma xx + \zeta x + \theta)$; & enfin le produit de toutes, ou le parallélipipède qui en réſulteroit, ſeroit $= -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \kappa = 0$. Si deux appliquées étoient imaginaires, ce que nous venons de dire auroit encore lieu, mais ne pourroit s'appliquer à la figure des lignes, parce qu'il eſt impoſſible qu'elle préſente à l'eſprit l'idée de la ſomme ou d'un rectangle de deux appliquées imaginaires.

Pl. V. Fig. 44. 241. Soit une ligne quelconque du troiſième ordre rapportée à l'axe AZ, auquel ſoient appliquées ſous un angle donné les ordonnées LMN, lmn, qui coupent la courbe en trois points. L'abſciſſe AP étant ſuppoſée $= x$, l'appliquée y aura trois valeurs PL, PM & $-PN$; d'où il ſuit qu'on aura $PL + PM - PN = -\beta x - \varepsilon$. Par conſéquent, ſi on prend $PO = z = \frac{PL + PM - PN}{3}$; le point O ſera ſitué au milieu, de manière que $LO = MO + NO$. Puiſqu'on a $z = \frac{-\beta x - \varepsilon}{3}$, ce point O ſera ſitué ſur une droite OZ qui coupera conſéquemment toutes les ordonnées lmn parallèles à LMN en un point o, de manière que $lo + mo = no$, propriété analogue à celle des diamètres des lignes du ſecond ordre. Si donc on a deux ordonnées parallèles, & qui coupent la courbe en trois points, diviſées aux points O & o, de manière que la ſomme de deux appliquées ſituées d'un côté ſoit égale à la troiſième ſituée de l'autre côté, la droite qui paſſera par ces points O & o diviſera d'une manière ſemblable toutes les autres ordonnées parallèles à celles-ci, & pourra pour cette raiſon être regardée comme une ſorte de diamètre de cette courbe.

242. Comme dans les lignes du ſecond ordre tous les dia-

mètres se coupent en un même point, voyons si nous pourrions trouver plusieurs diamètres de cette nature pour les lignes du troisième ordre. Concevons des appliquées au même axe AP sous un autre angle quelconque; soit l'abscisse $= t$ & l'appliquée $= u$, on aura $y = nu$ & $x = t - mu$; valeurs qui, substituées dans l'équation générale,

$$y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

donneront celle-ci:

$$\left.\begin{array}{l} + n^3u^3 + \beta n^2u^2t + \gamma nutt + \delta t^3 + \varepsilon n^2u^2 + \zeta nut + \eta tt + \theta nu + \iota t + \kappa \\ - \beta mn^2u^3 - 2\gamma mnu^2t - 3\delta mutt - \zeta mnuu - 2\eta mut - \iota mu \\ + \gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t \qquad\qquad + \eta m^2u^2 \\ - \delta m^3u^3. \end{array}\right\} = 0.$$

Si, à l'égard de la ligne droite qui fait les fonctions de diamètre, on fait $= v$ l'appliquée menée à l'abscisse t sous le même angle, on aura:

$$3v = \frac{-\beta n^2t + 2\gamma mnt - 3\delta m^2t - \varepsilon nn + \zeta mn - \eta mm}{n^3 - \beta mn^2 + \gamma m^2n - \delta m^3}.$$

243. Imaginons à présent que O soit l'intersection de ces deux diamètres, d'où on ait mené d'abord à l'axe AZ parallèlement aux premieres appliquées la ligne OP, & ensuite OQ, parallèlement aux secondes; on aura $AP = x$, $PO = z$, $AQ = t$ & $OQ = v$; puis $z = nv$ & $x = t - mv$; & par conséquent $v = \frac{z}{n}$ & $t = x + \frac{m}{n}z$. On a donc $3z = -\beta x - \varepsilon$, & $3v = -\frac{\beta x}{n} - \frac{\varepsilon}{n}$ & $t = x - \frac{\beta mx}{3n} - \frac{\varepsilon m}{3n}$. Substituons ces valeurs dans l'équation trouvée auparavant, & nous aurons: Pl. V. Fig. 45.

$$\left.\begin{array}{llll} -\beta nnx + \beta\beta mnx - \beta\gamma mmx + \frac{\beta\delta m^3x}{n} \\ -\varepsilon nn \quad + \beta\varepsilon mn \quad - \gamma\varepsilon mm \quad + \frac{\delta\varepsilon m^3}{n} \\ + \beta nnx \quad - \frac{\beta\beta mnx}{3} \quad - \frac{\beta\varepsilon mn}{3} \quad + \varepsilon nn \\ - 2\gamma mnx + \frac{2\beta\gamma mmx}{3} \quad + \frac{2\gamma\varepsilon mm}{3} \quad - \zeta mm \\ + 3\delta mmx - \frac{\beta\delta m^3x}{n} \quad - \frac{\delta\varepsilon m^3}{n} \quad + \eta mm \end{array}\right\} = 0.$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}\beta\beta mnx - \frac{1}{3}\beta\gamma mmx - 2\gamma mnx + 3\delta mmx \\ + \frac{2}{3}\beta\varepsilon mn \quad - \frac{1}{3}\gamma\varepsilon mm \quad - \zeta mn \quad + \eta mm \end{array}\right\} = 0.$$

244. L'intersection O des diamètres dépend donc ici de l'inclinaison que forment les appliquées à l'axe, laquelle est représentée par les lettres m & n; par conséquent, (si on juge à propos d'appeler *Centre* l'intersection des diamètres) on ne peut pas dire que toutes les lignes du troisième ordre en aient un. Cependant on peut trouver des cas où la commune intersection des diamètres tombe en un point fixe. Cela arrivera, si les termes affectés de mn & de mm sont supposés séparément égaux à zéro, & que les valeurs de x qui en résultent soient égales; on trouvera, au moyen de ces deux égalités, $x = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma} = \frac{3\eta - \gamma\varepsilon}{\beta\gamma - 9\delta}$. Pour que ces deux valeurs soient les mêmes, il faut que

$$6\beta\beta\eta - 2\beta\beta\gamma\varepsilon - 18\gamma\eta + 6\gamma\gamma\varepsilon = 3\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\gamma\varepsilon - 27\delta\zeta + 18\beta\delta\varepsilon,$$

ou

$$\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\eta - 9\delta\zeta + 6\gamma\eta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon = 0;$$

d'où $\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\delta\zeta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}$. Toutes les fois donc que η aura une telle valeur, tous les diametres se couperont mutuellement en un seul & même point; par conséquent ces sortes de lignes du troisieme ordre auront un centre qu'on trouvera en prenant sur l'axe

$$AP = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}, \text{ \& ensuite}$$

$$PO = \frac{-\beta\zeta + 2\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}.$$

245. Cette même détermination du centre, s'il doit y en avoir un, a encore lieu si le premier coefficient α n'est pas supposé égal à l'unité; car, si on prend l'équation la plus générale des lignes du troisième ordre

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta xy + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

ces courbes auront un centre, si on a $\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\alpha\delta\zeta + 6\beta\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$. Ce centre sera en O, si on a pris $AP = \frac{3\alpha\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$ & $PO = \frac{2\gamma\varepsilon - \beta\zeta}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$. Donc, si une ordonnée qui coupe la courbe en trois points est tellement divisée, que deux appliquées situées d'un côté soient égales à une troisième située de l'autre côté, la droite qui passera par ce centre & par ce point de division, coupera d'une manière semblable toutes les autres ordonnées qui lui sont parallèles.

246. Si nous appliquons ce que nous venons de dire aux équations des différentes espèces, dont nous avons fait ci-dessus l'énumération, on trouvera facilement que la première, la seconde, la troisième, la quatrième & la cinquième espèce ont un centre, pourvu que $a = 0$; & dans ce cas le centre est placé à l'origine des abscisses; que la sixième & la septième espèce en manquent absolument, puisque le coefficient a ne peut s'évanouir; que la huitième, la neuvième, la dixième, la onzième, la douzième & la treizième en ont un toujours placé à l'origine des abscisses. Quant aux quatorzième, quinzième & seizième espèces, leur centre est à une distance infinie; & par conséquent toutes ces lignes que l'on considère comme diamètres, sont parallèles entre elles.

247. Après avoir fait ces remarques sur la somme des trois valeurs de chaque appliquée, examinons maintenant leur produit; car on n'a trouvé rien du tout de remarquable pour la somme de leurs rectangles. L'équation générale de l'art. 239 donnera $-PM.PL.PN = -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \kappa$. Pour développer cette expression, faisons attention que, si $y = 0$, elle devient $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = 0$; équation dont les racines feront connoître les intersections de l'axe AZ avec la courbe. Si elles se trouvent aux points B, C & D, on aura $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = \delta(x - AB)(x - AC)(x - AD)$; donc $PL.PM.PN = \delta.PB.PC.PD$; & par conséquent en prenant une autre ordonnée quelconque lmn parallèle à la première, on aura $PL.PM.PN : PB.PC.PD :: pl.pm.pn :$

$pB.pC.pD$; propriété entièrement ſemblable à celle que nous avons trouvée auparavant pour les lignes du ſecond ordre à l'égard de leurs rectangles ; & à laquelle il s'en trouvera également une ſemblable pour les lignes du quatrième & du cinquième ordre, & de tous les ordres ſupérieurs.

Pl. VI. Fig. 46. 248. Lorſqu'une ligne du troiſième ordre a trois aſymptotes droites FBf, GDg, HCh; comme elle dégénère en ces trois aſymptotes, ſi l'équation à la courbe eſt décompoſable en trois facteurs ſimples de la forme $py+qx+r$, on pourra concevoir pour les aſymptotes, conſidérées comme une ligne complexe, une équation particulière dont le premier membre s'accordera avec le premier membre de l'équation à la courbe ; de plus, la poſition des aſymptotes étant déterminée par le ſecond membre de l'équation, ce dernier ſera auſſi commun aux deux équations, de ſorte que, ſi en rapportant la courbe à l'axe AP, on a entre l'abſciſſe $AP=x$ & l'appliquée $PM=y$, l'équation :

$$y^3+(\beta x+\varepsilon)y^2+(\gamma xx+\zeta x+\theta)y+\delta x^3+\eta xx+\iota x+\kappa=0;$$

en rapportant de même les aſymptotes au même axe AP, on aura, entre l'abſciſſe $AP=x$ & l'appliquée $PG=z$, l'équation ſuivante :

$$z^3+(\beta x+\varepsilon)z^2+(\gamma xx+\zeta x+B)z+\delta x^3+\eta x^2+Cx+D=0;$$

dans laquelle les coefficiens ζ, B, C, D, ſont tels, que l'équation deviendra réſoluble en trois facteurs ſimples.

249. Donc, ſi on mène une appliquée quelconque PN qui coupe en même temps la courbe en trois points L, M, N, & les aſymptotes en trois points F, G, H, on aura, par l'équation à la courbe, $PL+PM+PN=-\beta x-\varepsilon$, & par l'équation aux aſymptotes, $PF+PG+PH=-\beta x-\varepsilon$; ainſi, $PL+PM+PN=PF+PG+PH$, ou $FL-GM+HN=0$; & ſi on ſuppoſe une autre appliquée pf, on aura de même $fn-gm+hl=0$. Donc, ſi une droite quelconque coupe la courbe & les aſymptotes en trois points, les deux parties de la ligne que les aſymptotes & la courbe comprennent entre elles du même côté, ſeront égales à la partie ſituée en ſens contraire.

250. Il ſuit de-là que dans une ligne du troiſième ordre qui a trois aſymptotes droites, les trois branches qui s'en approchent de plus en plus, ne peuvent être à leur égard placées du même côté; mais que, ſi deux ſont ſituées d'un côté, la troiſième l'eſt néceſſairement du côté oppoſé. C'eſt pour cette raiſon qu'une ligne du troiſième ordre, telle qu'elle eſt repréſentée par la figure 47 eſt impoſſible, parce que la droite qui coupe les aſymptotes aux points f, g, h, & la courbe aux points l, m, n, donne les parties fn, gm, hl, ſituées du même côté, & dont la ſomme par conſéquent ne peut être égale à zéro; car les parties qui vont dans un ſens ont le même ſigne, par exemple $+$, & celles qui vont en ſens contraire, le ſigne $-$; d'où il ſuit que la ſomme de ces trois parties ne peut devenir nulle, à moins qu'elles ne ſoient précédées de différens ſignes. Pl. VI. Fig. 47.

251. On apperçoit clairement à cette heure la raiſon pour laquelle dans une ligne du troiſième ordre, on ne peut obtenir deux aſymptotes droites de l'eſpèce $u = \frac{A}{tt}$, tandis que la troiſième feroit de l'eſpèce $u = \frac{A}{t}$; c'eſt que les premieres branches hyperboliques convergent infiniment plus vers leur aſymptote, que celle qui eſt repréſentée par $u = \frac{A}{t}$. Car ſuppoſons que la droite fl s'éloigne à l'infini, les intervalles fn, gm, hl, deviendront infiniment petits; mais ſi deux branches nx, my, ſont ſuppoſées de l'eſpèce $u = \frac{A}{tt}$, & la troiſième branche lz de l'eſpèce $u = \frac{A}{t}$, alors les intervalles fn & gm feront infiniment plus petits que l'intervalle hl, & il eſt impoſſible que $gm = fn + hl$. Pl. VI. Fig. 46.

252. De-là il s'enſuit que dans les lignes des ordres ſupérieurs, qui ont autant d'aſymptotes que de dimenſions, une ſeule aſymptote ne peut être de l'eſpèce $u = \frac{A}{t}$, tandis que les autres feroient d'eſpèces ſupérieures, $u = \frac{A}{tt}$, $u = \frac{A}{t^3}$ &c.;

mais, ſi l'une eſt de l'eſpèce $u=\frac{A}{t}$, il doit y en avoir néceſſairement une autre du même genre. Par la même raiſon, s'il n'y a point d'aſymptote de l'eſpèce $u=\frac{A}{t}$, il eſt impoſſible qu'il n'y en ait qu'une de l'eſpèce $u=\frac{A}{tt}$, mais il devra y en avoir au moins deux. Car les branches hyperboliques de l'eſpèce $u=\frac{A}{t^3}$, $u=\frac{A}{t^4}$, &c., convergent infiniment plus vers leurs aſymptotes que celles de l'eſpèce $u=\frac{A}{tt}$. Ainſi, dans l'énumération des eſpèces renfermées dans un ordre ſupérieur quelconque, il ſera facile de connoître les cas qui doivent être rejetés, & d'éviter par-là des calculs longs & pénibles.

Pl. VI Fig 48. 253. Si nous ſuppoſons une ligne du troiſième ordre coupée par une droite quelconque en deux points ſeulement, elle ſera auſſi rencontrée en deux points par toutes les autres droites parallèles à celles-ci, ou ne le ſera nulle part. Si donc on imagine ſur un axe quelconque des appliquées y parallèles à cette droite, l'équation ſera telle qu'on la voit ici:

$$yy+\frac{(\gamma xx+\zeta x+\theta)y}{\beta x+\varepsilon}+\frac{\delta x^3+\eta xx+\iota x+\kappa}{\beta x+\varepsilon}=0.$$

Par exemple, ſi on fait $AP=x$, on aura deux appliquées y, ſavoir PM & $-PN$; & par la nature de l'équation $PM-PN=\frac{-\gamma xx-\zeta x-\theta}{\beta x+\varepsilon}$. Si l'ordonnée MN eſt coupée en deux parties égales au point O, PO ſera $=\frac{1}{2}\,\frac{\gamma xx+\zeta x+\theta}{\beta x+\varepsilon}$; & par conſéquent, ſi on fait $PO=z$, on aura $2z(\beta x+\varepsilon)=\gamma xx+\zeta x+\theta$; d'ou il ſuit que tous les points O qui coupent les ordonnées parallèles MN en deux également ſont ſitués ſur une Hyperbole, à moins que $\gamma xx+\zeta x+\theta$ ne ſoit diviſible par $\beta x+\varepsilon$; car dans ce cas le point O appartiendra à une ligne droite.

254. Donc, ſi $\gamma xx+\zeta x+\theta$ eſt diviſible par $\beta x+\varepsilon$, la courbe aura un diamètre ou une droite qui partagera en deux parties égales toutes les ordonnées parallèles MN; nous avons

vij

vû que cette propriété convenoit à toutes les lignes du second ordre. Si on suppose $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisible par $6x + \varepsilon$, cette quantité devra s'évanouir, en faisant $x = \frac{-\varepsilon}{6}$; par conséquent, si $\gamma\varepsilon\varepsilon - 6\varepsilon\zeta + 66\theta = 0$, la ligne du troisième ordre aura un diamètre.

255. Nous sommes donc en état de déterminer de la manière la plus générale tous les cas, où les lignes du troisième ordre ont un diamètre; car soit proposée l'équation générale :

$$\alpha y^3 + 6y^2x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \varkappa = 0.$$

Ici les appliquées y, à cause qu'elles ont ou trois valeurs ou une seule, n'admettent point de diamètre. Nous menerons donc au même axe, sous un autre angle quelconque d'autres appliquées u, de manière que $y = nu$ & $x = t - mu$, & qu'après la substitution on ait

$$\left.\begin{array}{l} +\alpha n^3u^3 + 6n^2u^2t + \gamma nutt + \delta t^3 + \varepsilon n^2u^2 + \zeta nut + \eta tt + \theta nu + \iota t + \varkappa \\ -6mn^2u^3 - 2\gamma mnu^2t - 3\delta mutt - \zeta mnu^2 - 2\eta mut \quad - \iota mu \\ +\gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t \qquad\qquad + \eta m^2u^2 \\ -\delta m^3n^3 \end{array}\right\} = 0.$$

D'abord, pour que ces nouvelles appliquées soient propres à recevoir un diamètre, il faut qu'elles ne puissent avoir que deux valeurs; on aura par conséquent

$$\alpha n^3 - 6mn^2 + \gamma m^2n - \delta m^3 = 0.$$

256. Mais il faut de plus que la quantité par laquelle u est multiplié, savoir $(\gamma n - 3\delta m)tt + (\zeta n - 2\eta m)t + \theta n - \iota m$, soit divisible par celle qui multiplie uu, laquelle est $(6n^2 - 2\gamma mn + 3\delta mm)t + \varepsilon nn - \zeta mn + \eta mm$; ou que la première devienne égale à zéro, si l'on fait $t = \frac{-\varepsilon nn + \zeta mn - \eta mm}{6nn - 2\gamma mn + 3\delta mm}$; d'où l'on conclura :

$$\iota = \frac{\theta n}{m} - \frac{(\zeta n - 2\eta m)(\varepsilon nn - \zeta mn + \eta mm)}{(6nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)m} + \frac{(\gamma n - 3\delta m)(\varepsilon nn - \zeta mn + \eta mm)^2}{(6nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)^2 m}.$$

257. Si nous faiſons l'application de tout ce que nous venons de dire aux eſpèces dont nous avons fait ci-deſſus le dénombrement, on verra que la première eſpèce manque abſolument de diamètre; qu'il y en a un pour la ſeconde eſpèce, lequel diviſe en deux parties égales les ordonnées parallèles à l'axe, ſur lequel ſont comptées les abſciſſes x. La troiſième eſpèce n'admet pas plus que la première de diamètre; la quatrième en a toujours un qui coupe les ordonnées parallèles à une aſymptote; la cinquième en a trois qui coupent les ordonnées parallèles à chacune des aſymptotes. La ſixième n'en peut avoir, & la ſeptième en a toujours un pour les ordonnées parallèles à l'aſymptote qui réſulte du facteur $x - my$. La huitième en a un auſſi pour les ordonnées parallèles à l'axe; la neuvième eſpèce en a deux, l'un pour les ordonnées parallèles à l'axe, l'autre pour les ordonnées parallèles à la ſeconde aſymptote; la dixième eſt comme la huitième, & la onzième comme la neuvième. La douzième, par rapport aux diamètres, rentre dans la claſſe de la huitième, & la treizième dans la claſſe de la neuvième. La quatorzième a un diamètre pour les ordonnées parallèles à l'axe. Quant à la quinzième & à la ſeizième eſpèce, comme elles n'ont point d'ordonnées qui rencontrent la courbe en deux points, elles ne peuvent pour cette raiſon avoir de diamètre. Ces ſortes de propriétés ont été très-bien diſtinguées par NEWTON; & c'eſt pourquoi il nous a paru à propos d'entrer dans les détails que nous venons de donner.

258. Quoique nous ayions ſuppoſé, dans les équations que nous avons données ci-deſſus, pour chaque eſpèce de lignes du troiſième ordre les coordonnées x & y perpendiculaires entre elles, cependant la nature de l'eſpèce n'eſt point changée, quoiqu'elles ſoient inclinées d'une manière quelconque à l'égard l'une de l'autre. En effet, quel que ſoit le nombre des branches infinies, lorſque les coordonnées ſont perpendiculaires, la même équation en fournira autant, ſi les appliquées ont une inclinaiſon quelconque par rapport à l'axe. Le changement d'inclinaiſon des coordonnées ne change pas non plus la nature des branches infinies; celles qui ſont paraboliques, reſtent paraboliques; & celles qui ſont hyperboliques, con-

ſervent auſſi leur caractère; de plus, l'eſpèce des branches ſoit paraboliques, ſoit hyperboliques, ne recevra aucune altération. Ainſi toute courbe que ſon équation range dans la claſſe de la première eſpèce, que les coordonnées ſoient perpendiculaires ou obliques, doit toujours être rapportée à la même claſſe; & il en ſera de même de toutes les autres eſpèces.

259. En admettant une obliquité quelconque pour les coordonnées, les équations que nous avons données ci-deſſus, ne ſeront point limitées, ſi au lieu de y on met νu, & au lieu de x, $t - \mu u$, $\mu\mu + \nu\nu$ étant $= 1$. Mais en prenant à volonté l'obliquité de l'angle, il ſera facile de ſimplifier les équations que nous avons données ci-deſſus. Ainſi on obtiendra pour chaque eſpèce, ſous la forme la plus ſimple, les équations ſuivantes entre les coordonnées obliquangles t & u.

PREMIERE ESPECE.

$$u(tt + nnuu) + auu + bt + cu + d = 0;$$

n n'étant pas $= 0$, ni $b = 0$.

SECONDE ESPECE.

$$u(t^2 + nnuu) + auu + cu + d = 0;$$

n n'étant pas $= 0$.

TROISIEME ESPECE.

$$u(tt - nnuu) + auu + bt + cu + d = 0;$$

n n'étant pas $= 0$, ni $b = 0$, ni $\pm nb + c + \frac{aa}{4nn} = 0$.

QUATRIEME ESPECE.

$$u(tt - nnuu) + auu + cu + d = 0;$$

n n'étant pas $= 0$, ni $c + \frac{aa}{4nn} = 0$.

CINQUIEME ESPECE.

$$u(tt - nnuu) + auu - \frac{aau}{4nn} + d = 0;$$

n n'étant pas $= 0$.

SIXIEME ESPECE.

$$tuu + att + bt + cu + d = 0;$$

a n'étant pas $= 0$, ni $c = 0$.

SEPTIEME ESPECE.

$$tuu + att + bt + d = 0;$$

a n'étant pas $= 0$.

HUITIEME ESPECE.

$$tuu + bbt + cu + d = 0;$$

b n'étant pas $= 0$, ni $c = 0$.

NEUVIEME ESPECE.

$$tuu + bbt + d = 0;$$

b n'étant pas $= 0$.

DIXIEME ESPECE.

$$tuu - bbt + cu + d = 0;$$

b n'étant pas $= 0$, ni $c = 0$.

ONZIEME ESPECE.

$$tuu - bbt + d = 0;$$

b n'étant pas $= 0$.

DOUZIEME ESPECE.

$$tuu + cu + d = 0;$$

c n'étant pas $= 0$.

TREIZIEME ESPECE.

$$tuu + d = 0.$$

QUATORZIEME ESPECE.

$$u^3 + att + cu + d = 0.$$

QUINZIEME ESPECE.

$$u^3 + atu + bt + d = 0;$$

a n'étant pas $= 0$.

SEIZIEME ESPECE.

$$u^3 + at = 0.$$

CHAPITRE XI.

Des Lignes du Quatrième Ordre.

260. L'ÉQUATION générale pour les lignes du quatrième ordre eſt:

$$\alpha y^4 + \beta y^3 x + \gamma y^2 x^2 + \delta y x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta y^3 + \eta y^2 x + \theta y x x + \iota x^3 + \varkappa yy + \lambda yx + \mu xx + \nu y + \xi x + o = 0.$$

En faiſant varier l'inclinaiſon des coordonnées, la poſition de l'axe & l'origine des abſciſſes, on peut dans les différens cas la ramener de pluſieurs manières à une forme plus ſimple. Pour faire l'énumération de toutes les *Eſpèces* ou plutôt de tous les

Genres de lignes renfermées dans cet ordre, suivant la méthode que nous avons donnée, il faudra avoir égard au premier membre, dont la considération fera naître les cas suivans.

I.

Si les quatre facteurs simples du premier membre sont tous imaginaires.

I I.

Si deux facteurs seulement sont réels & inégaux entre eux.

I I I.

Si deux facteurs seulement sont réels & égaux.

I V.

Si tous les quatre facteurs sont réels & inégaux.

V.

Si deux facteurs sont égaux entre eux, les deux autres étant inégaux entre eux.

V I.

Si, outre deux facteurs égaux, les deux autres sont aussi égaux entre eux.

V I I.

Si trois facteurs simples sont égaux entre eux.

V I I I.

Si tous les facteurs sont inégaux entre eux.

PREMIER CAS.

261. Si tous les facteurs du membre supérieur sont imaginaires, la courbe n'aura point de branches infinies; & comme nous tirons de la diversité des branches infinies le caractère

diſtinctif des genres, ce cas fournira le premier genre. Ainſi le

Ier Genre

n'a point de branches qui s'éloignent à l'infini, & ſa nature ſera exprimée par cette équation ſimplifiée

$$(yy+mmxx)(yy-2pxy+qqxx)+ay^2x+byx^2+cyy$$
$$+dyx+exx+fy+gx+h=0,$$

pp étant moindre que qq. En effet, comme les termes y^4 & x^4 ſe trouvent néceſſairement dans le premier membre, en augmentant ou diminuant les coordonnées x & y d'une quantité donnée, on peut faire diſparoître y^3 & x^3 du ſecond membre.

SECOND CAS.

262. Si deux facteurs ſeulement du membre ſupérieur ſont réels & inégaux, on pourra, en changeant convenablement l'obliquité des coordonnées & la ſituation de l'axe, faire en ſorte que l'un ſoit y & l'autre x; l'équation prendra donc cette forme :

$$yx(yy-2myx+nnxx)+ay^2x+byx^2+cyy+dyx+exx$$
$$+fy+gx+h=0,$$

mm étant plus petite que nn.

Car, comme les termes y^3x+yx^3 ſe trouvent néceſſairement dans le premier membre, on pourra faire diſparoître dans le ſecond les termes y^3 & x^3. La courbe aura donc deux aſymptotes rectilignes, l'une déſignée par l'équation $y=0$, l'autre par l'équation $x=0$; la première ſera donc caractériſée par cette équation $nnyx^3+exx+gx+h=0$, & la ſeconde par $xy^3+cyy+fy+h=0$; d'où réſultent les

IIe Genre,

qui a deux aſymptotes rectilignes, toutes deux de la nature $u=\frac{A}{t}$; lorſque ni c ni e ne ſont des quantités nulles.

III^e GENRE,

qui a deux asymptotes rectilignes, l'une de la nature $u = \frac{A}{t}$, & l'autre de la nature $u = \frac{A}{tt}$; il est renfermé dans l'équation

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + gx + h = 0;$$

e n'étant pas $= 0$, ni $g = 0$.

IV^e GENRE,

qui a deux asymptotes rectilignes, l'une de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, l'autre de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$. Il est renfermé dans cette équation:

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + h = 0;$$

c n'étant pas $= 0$.

V^e GENRE,

qui a deux asymptotes rectilignes, toutes deux du genre $u = \frac{A}{tt}$, & dont l'équation est :

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ayyx + byxx + dyx + fy + gx + h = 0;$$

f n'étant pas $= 0$, ni $g = 0$.

VI^e GENRE,

qui a deux asymptotes rectilignes, l'une de l'espèce $u = \frac{A}{tt}$, & l'autre de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$. Il est exprimé par l'équation

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ayyx + byxx + dyx + fy + h = 0;$$

f n'étant pas $= 0$.

VII^e

VII^e GENRE,

qui a deux asymptotes rectilignes, toutes deux de l'espèce $u=\frac{A}{t^3}$, & qui est renfermé dans cette équation :

$$yx(yy-2myx+nnxx)+ayyx+byxx+dyx+h=0;$$

nn étant par-tout plus grande que mm.

TROISIEME CAS.

263. Si les deux facteurs du membre supérieur, qui sont seuls réels, sont égaux entre eux, l'équation aura cette forme :

$$yy(yy-2myx+nnxx)+ayxx+bx^3+cyy+dyx+exx \\ +fy+gx+h=0;$$

nn étant encore plus grande que mm; équation qui, à moins que b ne soit $=0$, donne le

VIII^e GENRE,

qui a une asymptote parabolique de l'espèce $uu=At$. Mais, si $b=0$; en supposant $x=\infty$, on aura $yy+\frac{ay}{nn}+\frac{e}{nn}+\frac{g}{nnx}+\frac{h}{nnxx}=0$; d'où, si aa est plus petit que $4nne$, naît le

IX^e GENRE,

qui n'a aucune branche infinie.

Si $b=0$, & que aa soit plus grand que $4nne$, & que g ne soit pas $=0$, on a le

X^e GENRE,

qui a deux asymptotes parallèles entre elles de l'espèce $u=\frac{A}{t}$.

Si $b=0$, si $g=0$, & que aa soit plus grand que $4nne$, on aura le

XI^e GENRE,

qui a deux asymptotes parallèles entre elles de l'espèce $u = \frac{A}{tt}$.

Si $b = 0$, si $aa = 4nne$, & que g ne soit pas $= 0$, on a le

XII^e GENRE,

qui a une asymptote hyperbolique de l'espèce $uu = \frac{A}{t}$.

Si $b = 0$, $g = 0$, & $aa = 4nne$, & que h soit une quantité négative, il en résulte le

XIII^e GENRE,

qui a une asymptote hyperbolique de l'espèce $uu = \frac{A}{tt}$.

Mais, si $b = 0$, $g = 0$, $aa = 4nne$, & que h soit une quantité positive, on obtient alors le

XIV^e GENRE,

qui n'a point de branches infinies.

QUATRIEME CAS.

264. Si tous les quatre facteurs simples du premier membre sont réels & inégaux, l'équation sera de cette forme :

$$yx(y-mx)(y-nx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

La courbe aura donc quatre asymptotes rectilignes exprimées ou par $u = \frac{A}{t}$, ou par $u = \frac{A}{tt}$, ou par $u = \frac{A}{t^3}$; ainsi, en faisant attention à la règle que nous avons exposée à l'art. 251, on trouvera les Genres suivans.

XV^e GENRE,

diſtingué par quatre aſymptotes hyperboliques, toutes de l'eſpèce $u = \frac{A}{t}$.

XVI^e GENRE,

diſtingué par quatre aſymptotes hyperboliques, trois de l'eſpèce $u = \frac{A}{t}$, & une de l'eſpèce $u = \frac{A}{tt}$.

XVII^e GENRE,

diſtingué par quatre aſymptotes hyperboliques, trois de l'eſpèce $u = \frac{A}{t}$, & une de l'eſpèce $u = \frac{A}{t^3}$.

XVIII^e GENRE,

caractériſé par quatre aſymptotes hyperboliques, deux de l'eſpèce $u = \frac{A}{t}$, & deux de l'eſpèce $u = \frac{A}{tt}$.

XIX^e GENRE,

caractériſé par quatre aſymptotes hyperboliques, deux de l'eſpèce $u = \frac{A}{t}$, une de l'eſpèce $u = \frac{A}{tt}$, & la quatrième de l'eſpèce $u = \frac{A}{t^3}$.

XX^e GENRE,

diſtingué par quatre aſymptotes hyperboliques, deux de l'eſpèce $u = \frac{A}{t}$, & deux de l'eſpèce $u = \frac{A}{t^3}$.

XXI^e GENRE,

diſtingué par quatre aſymptotes hyperboliques, toutes de l'eſpèce $u = \frac{A}{t^4}$.

XXII^e GENRE,

pourvu de quatre asymptotes hyperboliques, trois de l'espèce $u = \frac{A}{tt}$, & une de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$.

XXIII^e GENRE,

pourvu de quatre asymptotes hyperboliques, deux de l'espèce $u = \frac{A}{tt}$, & deux de celle-ci $u = \frac{A}{t^3}$.

XXIV^e GENRE,

pourvu de quatre asymptotes hyperboliques, toutes de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$.

CINQUIEME CAS.

265. Si deux facteurs du membre supérieur sont égaux entre eux, les autres étant inégaux, l'équation prendra cette forme :

$$y^2x(y+nx)+ayx^2+bx^3+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$$

D'abord, en ayant égard aux facteurs égaux, on trouve tous les Genres qui sont compris dans le *troisième cas*, & chacun peut être combiné avec autant de variétés que les facteurs inégaux peuvent en présenter, c'est-à-dire en autant de manières que le second cas contient de Genres. On auroit donc pour ce cas six fois sept ou quarante-deux Genres; mais il y en a deux qui sont impossibles, savoir lorsque deux asymptotes parallèles sont de l'espèce $u = \frac{A}{tt}$, & l'une des autres de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, la troisième étant ou de l'espèce $u = \frac{A}{tt}$, ou de celle-ci $u = \frac{A}{t^3}$. Par conséquent ce cas fournit quarante Genres, qui, ajoutés avec les précédens, en font un nombre de *soixante-quatre*, & qu'il feroit trop long de détailler ici; & même, comme il auroit été trop long de les discuter chacun en particulier, ne puis-je affirmer qu'ils soient tous réels. Au reste, si quelqu'un veut prendre ce soin, en se conformant aux préceptes qui ont été donnés auparavant, il sera à portée de réformer & de limiter, s'il en est besoin, le nombre des Genres.

SIXIEME CAS.

266. Ce cas, qui comprend deux paires de facteurs égaux, sera représenté par l'équation

$$yyxx + ay^3 + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Or chaque paire de facteurs égaux considérée en elle-même donne sept variétés ; & par conséquent les deux donneront quarante-neuf Genres. Mais, comme h ne peut être en même temps positif & négatif, deux deviennent impossibles ; ce qui réduit le nombre des Genres renfermés dans ce cas à quarante-sept ; nombre encore trop grand pour qu'on puisse en faire ici le recensement. Voilà déjà jusqu'ici *cent onze* Genres.

SEPTIEME CAS.

267. Si trois facteurs sont égaux entre eux, l'équation aura cette forme :

$$y^3x + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Le facteur x donne une asymptote de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, si c n'est pas $= 0$; mais, si $c = 0$ & qu'en même temps f ne soit pas $= 0$, il donne une asymptote de l'espèce $u = \frac{A}{tt}$; &, si $c = 0$ & $f = 0$, il donne une asymptote de l'espèce $u = \frac{A}{t^3}$. Ensuite le facteur y^3, à moins que b ne soit $= 0$, donne une asymptote parabolique de l'espèce $u^3 = Att$; mais, si $b = 0$, en faisant x infini, l'équation devient $y^3 + ayx + dy + ex + g + \frac{cyy + fy + h}{x} = 0$. Dans ce cas, si e n'est pas $= 0$, on aura

$y^3 + ayx + ex = 0$, d'où l'on tire, si a n'est pas $= 0$, $y^2 + ax = 0$ & $ay + e = 0$. On a donc à la fois une asymptote parabolique de l'espèce $uu = At$, & une hyperbolique exprimée par cette équation $(ay+e)x - \frac{e^3}{a^3} - \frac{de}{a} - g + \frac{cee - afe + aah}{aax}$. A moins donc que $e^3 + aade + a^3g$ ne soit $= 0$, cette asymptote est de l'espèce $u = \frac{A}{t}$; & dans le cas contraire de l'espèce $u = \frac{A}{tt}$; mais, si $a = 0$ sans que e soit $= 0$, on aura $y^3 + ex = 0$; ce qui donne une asymptote parabolique de l'espèce $u^3 = At$; & si $e = 0$ & $a = 0$, on aura $y^3 + dy + g = 0$; équation qui donne une seule asymptote de l'espèce $u = \frac{A}{t}$, ou trois de la même espèce, ou une de l'espèce $u = \frac{A}{t}$; & une de l'espèce $uu = \frac{A}{t}$, ou une de l'espèce $u^3 = \frac{A}{t}$. Cela fait en tout huit variétés qui, multipliées par les trois qui résultent du facteur x, donneront vingt-quatre Genres. Tous les cas que nous avons traités jusqu'ici fournissent donc *cent trente-cinq* Genres.

HUITIEME CAS.

268. Si tous les facteurs sont égaux entre eux, l'équation qui suit aura lieu :

$$y^4 + ay^2x + byx^2 + kx^3 + cy^2 + dyx + ex^2 + fy + gx + h = 0.$$

Ce dernier cas, si k n'est pas $= 0$, fournit le

CXXXVI^e GENRE,

qui a une asymptote parabolique de l'espece $u^4 = At^3$.

Soit $k = 0$, & non $b = 0$; on aura $y^4 + byxx + exx = 0$, d'où $y^3 + bxx = 0$ & $by + e = 0$; par conséquent l'asymptote rectiligne $by + e = 0$, donnera $(by + e)xx + \frac{e^4}{b^4} + \frac{ae^2x}{bb}$

$+\frac{cee}{bb}-\frac{dex}{b}-\frac{cf}{b}+gx+h=0$; donc, si $aee-bde+bbg$ n'est pas $=0$, l'asymptote sera de l'espèce $u=\frac{A}{t}$, & dans le cas contraire, de l'espèce $u=\frac{A}{tt}$; d'où résultent le

CXXXVII^e GENRE,

qui a une asymptote parabolique de l'espèce $u^3=Att$, & une hyperbolique de l'espèce $u=\frac{A}{t}$, & le

CXXXVIII^e GENRE,

qui a une asymptote parabolique de l'espèce $u^3=Att$, & une hyperbolique de l'espèce $u=\frac{A}{tt}$.

269. Soient à présent $k=0$ & $b=0$, de manière qu'on ait

$$y^4+ay^2x+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0.$$

Si e n'est pas $=0$, on aura $y^4+ayyx+exx=0$, équation impossible, lorsque aa est moindre que $4e$; & qui, lorsque aa est plus grand que $4e$, fournit deux asymptotes paraboliques rapportées au même axe, & de l'espèce $uu=At$; & si $aa=4e$, ces deux paraboles se confondent en une seule. De là les CXXXIX, CXL & CXLI^e Genres.

Mais, si $e=0$, on aura l'équation

$$y^4+ayyx+cyy+dyx+fy+gx+h=0,$$

laquelle, si a n'est pas $=0$, deviendra $y^4+ayyx+cyy+dyx+gx=0$; d'où l'on conclura celles-ci : $yy+ax=0$, & $ayy+dy+g=0$; cette derniere donnera pour y deux valeurs réelles inégales ou égales, ou n'en donnera aucune. Dans le premier cas, la courbe, outre une asymptote parabolique, en aura deux autres parallèles de l'espèce $u=\frac{A}{t}$; dans le second, une de l'eſpèce $uu=\frac{A}{t}$; & dans le troiſième elle n'en aura aucune; d'où réſultent encore trois Genres qui forment les CXLII, CXLIII & CXLIV^e^.

270. Soit maintenant $a=0$; ou ſoit l'équation

$$y^4+cyy+dyx+fy+gx+h=0.$$

Dans ce cas, ſi d n'eſt pas $=0$, la courbe aura une aſymptote parabolique de l'eſpèce $u^3=At$, & une rectiligne déſignée par l'équation $dy+g=0$ de l'eſpèce $u=\frac{A}{t}$. Enfin, ſi $d=0$, la courbe aura une aſymptote parabolique de l'eſpèce $u^4=At$. C'eſt ainſi que toutes les lignes du quatrième ordre ſe trouvent compriſes ſous *cent quarante-ſix* Genres, qui renferment eux-mêmes pour la plupart pluſieurs eſpèces, qui ont entre elles des différences notables.

271. En voilà aſſez pour faire voir combien les Genres ſe multiplient pour les lignes du cinquième ordre, ou d'un ordre plus élevé, de ſorte qu'il ſeroit impoſſible d'en faire le dénombrement, comme nous l'avons fait pour le troiſième ordre, ſans y conſacrer un volume entier. Quant aux principales propriétés des lignes du quatrième ordre, ou d'un ordre ſupérieur, on les déduira de leur équation générale, de la même manière que nous l'avons fait pour les lignes du troiſième ordre; c'eſt pourquoi nous ne nous arrêterons pas à les chercher ici.

CHAPITRE

CHAPITRE XII.

De la Figure des Lignes Courbes.

272. Ce que nous venons d'expofer dans les chapitres précédens fert à faire connoître la figure des lignes courbes confidérées à une diftance infinie; mais il eft fouvent très-difficile de juger par leur équation de celle que chacune peut avoir dans un efpace fini; car il faudroit pour chaque abfciffe finie en conclure les valeurs correfpondantes de l'appliquée, & diftinguer les valeurs réelles de celles qui font imaginaires; ce qui furpaffe fouvent les forces de l'analyfe, lorfque l'équation eft d'un degré un peu élevé. En effet, fi on attribue à l'abfciffe une valeur connue quelconque, l'appliquée tiendra lieu d'inconnue; & la réfolution de l'équation qui doit en donner la valeur, dépendra du nombre des dimenfions de l'appliquée; mais il y a un moyen de diminuer beaucoup ce travail; c'eft de ramener l'équation à une forme plus fimple, en choififfant pour cela l'axe le plus commode & l'inclinaifon des coordonnées la plus convenable; ou encore, comme il eft indifférent de prendre l'une des coordonnées pour abfciffe, de choifir pour appliquée celle des deux qui a le moins de dimenfions dans l'équation.

273. Ainfi, pour trouver la figure des lignes du troifième ordre qui appartiennent à la première efpèce, nous prendrons de préférence l'équation la plus fimple que nous en avons donnée art. 259; & des deux coordonnées t & u, nous confidérerons la première t comme l'appliquée, & l'autre u comme l'abfciffe, parce que t n'a que deux dimenfions. Nous aurons donc une équation de cette forme :

$$yy = \frac{2bv + axx + cx + d - nnx^3}{x},$$

laquelle, étant réfolue, donne:

$$y = \frac{b \pm \sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)}}{x},$$

ni b ni n n'étant $= 0$.

274. Lorſque les nombres ſubſtitués à x donnent à la fonction $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ une valeur poſitive, il y a pour chaque abſciſſe deux appliquées qui n'en font plus qu'une, lorſque cette fonction s'évanouit ; ou, ſi l'on veut, les deux appliquées alors deviennent égales entre elles; mais, ſi elle devient négative, il n'y a plus d'appliquée qui réponde à l'abſciſſe. Or les valeurs de cette fonction, ſi elles étoient d'abord poſitives, n'ont pu devenir négatives ſans être devenues auparavant égales à zéro, ou ſans que la fonction ſe ſoit évanouie ; il faudra donc faire attention principalement aux cas où la fonction $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ devient $= 0$; ce qui peut toujours avoir lieu dans deux circonſtances. Car il eſt viſible que, ſi x paſſe une certaine limite, ſoit en plus, ſoit en moins, ſa valeur devient négative. Ainſi toute la courbe répondra à un eſpace déterminé de l'abſciſſe, au-delà duquel toutes les appliquées ſont imaginaires.

Pl. VI. Fig. 49. 275. Suppoſons que l'expreſſion $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ ne renferme que deux facteurs réels, ou qu'elle ne puiſſe s'évanouir que dans deux cas ſeulement, qu'on trouvera en déterminant ſur l'abſciſſe les points P & S auxquels répond ſeulement une appliquée unique ; il s'enſuivra que dans tout l'eſpace PS les appliquées ſeront doubles & réelles, & que, hors du même eſpace PS, elles ſeront toutes imaginaires; la courbe entière ſera donc ſituée entre les appliquées Kk & Nn. L'appliquée qui répond à l'origine A des abſciſſes ſera aſymptote de la courbe, & la coupera en outre en un point quelconque. En effet, ſi on fait $x = 0$, $\sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)}$ deviendra $= b + \frac{dx}{2b}$, & par conſéquent $y = \frac{b \pm \left(b + \frac{dx}{2b}\right)}{x}$; c'eſt-à-dire, $y = \infty$, ou $y = \frac{-d}{2b}$. La courbe aura donc une forme

Pl. VI. telle que la *Figure* 50 la repréſente.

276. Supposons que l'expression $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ contienne quatre facteurs simples réels & inégaux, & que par conséquent elle s'évanouisse dans quatre cas différens; il y aura donc autant d'endroits *P*, *Q*, *R* & *S* où les appliquées ne feront que toucher la courbe en un seul point; &, puisque les appliquées étoient imaginaires dans l'espace *XP* de l'axe, elles seront maintenant réelles dans l'espace *PQ*, & elles seront de nouveau imaginaires dans toute l'étendue *QR* pour redevenir réelles dans l'étendue *RS*; mais au-delà de *S*, vers *Y*, elles deviendront encore imaginaires. Il s'ensuit que la courbe sera composée de deux parties séparées l'une de l'autre, dont l'une sera renfermée entre les droites *Kk* & *Ll*, & l'autre entre les droites *Mm* & *Nn*; mais, comme à l'origine *A* des abscisses les appliquées sont réelles, il faut qu'elle se trouve ou dans l'intervalle *PQ*, ou dans l'intervalle *RS* de l'axe. Dans ce cas, la courbe aura donc une figure telle que la donne la *Figure* 51; c'est-à-dire qu'elle sera composée d'une ovale, séparée du reste de la courbe rapportée à l'asymptote *DE*, & qu'on appelle OVALE CONJUGUÉE. Pl. VI.

277. Si deux racines deviennent égales entre elles; ou les points *P* & *Q*, ou *Q* & *R*, ou *R* & *S*, se confondront; si le premier cas avoit lieu, comme le point *A* est situé entre *P* & *Q*, il faudroit que les deux racines devinssent égales à zéro; ce qui ne peut être, puisque *b* ne peut disparoître. Mais, si les points *R* & *S* se confondent, l'ovale conjuguée deviendra infiniment petite & dégénérera en un POINT CONJUGUÉ. Si ce sont les points *Q* & *R* qui se réunissent, l'ovale se joindra au reste de la courbe qui deviendra la courbe NOUÉE de la *Figure* 52; mais si trois racines sont égales, ou que les points *Q*, *R* & *S* coïncident, le nœud se changera en une POINTE très-aiguë*, telle que la fait voir la *Figure* 53. La première espèce fournit donc cinq variétés différentes, dont NEWTON a fait autant d'espèces. Pl. VI. Pl. VI.

* Cette pointe s'appelle *point de rebroussement.*

278. NEWTON a fait de semblables subdivisions des autres espèces, parce que dans toutes les équations qui les représentent, une des coordonnées n'a pas plus de deux dimensions. Mais, quand une des coordonnées n'a qu'une dimension, la forme de la figure sera très-facile à reconnoître; car alors l'équation sera de cette forme $y = P$, P étant une fonction quelconque rationnelle de l'abscisse x; ainsi, quelque valeur qu'on donne à x, l'appliquée en a toujours une correspondante, & la courbe aura un cours continu qui accompagnera l'axe à l'infini de part & d'autre. Si la fonction P est fractionnaire, il peut arriver que l'appliquée devienne infinie en un ou plusieurs endroits, & que par cette raison elle devienne asymptote de la courbe; ce qui a lieu, lorsque le dénominateur de la fonction P s'évanouit.

279. Faisons en conséquence $y = \frac{P}{Q}$, ces appliquées infinies seront données par toutes les racines réelles de l'équation $Q = 0$; en effet, chaque racine de cette équation, par exemple $x = f$, fait voir que, si on prend l'abscisse $x = f$, l'appliquée y sera infinie, puisque Q devient $= 0$. Il est clair alors que, si les appliquées y étoient positives, tandis que x étoit plus grand que f, elles seront négatives, lorsque x sera plus petit que f; & par conséquent l'appliquée sera une asymptote de l'espèce $u = \frac{A}{t}$; la même chose doit s'entendre de tous les facteurs inégaux. Mais lorsque le dénominateur Q a deux facteurs égaux, par exemple, $(x-f)^2$; alors, si les appliquées sont positives, f étant plus petite que x, elles resteront encore positives, si x est moindre que f; & l'appliquée y, si on fait $x = f$, deviendra une asymptote de la forme $u = \frac{A}{tt}$. Mais, si le dénominateur Q renferme trois facteurs égaux, par exemple, $(x-f)^3$, les appliquées qui précèdent & qui suivent celle qui est infinie, ont des signes différens, comme dans le premier cas.

280. Après l'examen de ces équations, il est très facile de traiter celles qui sont comprises sous la forme $yy = \frac{2Py - R}{Q}$;

P, Q & R étant des fonctions entières quelconques de l'abscisse x. Dans ce cas, il y aura pour chaque abscisse x deux appliquées correspondantes, ou il n'y en aura aucune; il y en aura deux, si PP est plus grand que QR; & il n'y en aura point, si PP est plus petit que QR. Donc, à chaque limite qui sépare les appliquées réelles des imaginaires, on aura $PP = QR$; alors y devient $= \frac{P}{Q}$, & l'appliquée ne fait plus que raser la courbe, ou la toucher seulement en un point. Ainsi, pour en connoître la nature, il faudra considérer l'équation $PP - QR = 0$, dont chaque racine réelle fera connoître les endroits où les appliquées touchent la courbe en un seul point; si on les marque sur l'axe, & si on suppose que toutes les racines soient inégales, les parties de l'axe comprises entre ces points auront alternativement deux appliquées réelles & imaginaires; la courbe aura donc autant de parties séparées les unes des autres, qu'il y aura de ces sortes d'alternatives; ce qui donne naissance aux ovales conjuguées.

281. Si les deux racines de l'équation $PP - QR = 0$ deviennent égales, alors deux des points dont nous venons de parler se confondront; & il y aura sur l'axe une portion à laquelle répondoient des appliquées soit imaginaires, soit réelles, qui s'évanouira. Dans le premier cas, la courbe aura un nœud, comme dans la *Figure* 52; & dans le second cas, Pl. VI. l'ovale conjuguée se réduira en un point conjugué. Si cette équation renferme trois racines égales, le nœud deviendra infiniment petit & se terminera en pointe, comme dans la *Figure* 53; s'il y a quatre racines égales, deux ovales séparées se réuniront en un point, ou bien il y aura un nœud réuni à une pointe, ou deux pointes opposées par le sommet; s'il y a cinq racines égales, il n'en résultera presque pas de nouvelles formes; car il en résulte une pointe où se réunissent, non une seule ovale, comme auparavant, mais deux à la fois; & une plus grande quantité de racines égales n'apportera pas une nouvelle différence dans les figures résultantes.

282. Un nœud ou l'intersection de deux branches d'une courbe s'appelle ordinairement POINT DOUBLE, parce que

la ligne droite qui rencontre la courbe en ce point eſt cenſée la couper en deux points; s'il arrivoit qu'une autre branche paſſât par ce nœud, cette interſection donneroit naiſſance à un point *triple*; & le point ſeroit *quadruple*, ſi deux points doubles ſe réuniſſoient; ce qui fait connoître la nature & la génération des points *multiples*. L'ovale évanouiſſante, ou le point conjugué, ſera donc auſſi un point double; il en ſera de même d'une pointe qui réſulte d'un point conjugué réuni au reſte de la courbe.

283. Si l'équation entre l'appliquée y & l'abſciſſe x eſt cubique ou d'un degré plus élevé, de ſorte que y ſoit égal à une fonction multiforme de x; il répondra à chaque abſciſſe autant d'appliquées, que y a de dimenſions dans l'équation; ou bien le nombre en ſera diminué de deux, de quatre, ou de ſix, &c. Il y a donc toujours deux appliquées qui deviennent imaginaires en même temps, & avant que de le devenir, elles deviennent égales entre elles. Ce paſſage des imaginaires aux réelles donne lieu à pluſieurs variétés qui ſe trouvent parmi celles que nous venons d'expliquer, ou qui en ſont compoſées. Au ſurplus, en cherchant pour un aſſez grand nombre d'abſciſſes tant poſitives que négatives toutes les valeurs correſpondantes de l'appliquée, on connoîtra facilement le cours & la figure de la courbe, en la faiſant paſſer par les points qu'on aura ainſi trouvés.

284. Eclairciſſons tout cela par un exemple, dans lequel, quoiqu'il ſoit tiré d'une équation d'un degré plus élevé, l'appliquée eſt cependant exprimée par des racines quarrées. Soit donc :

$$2y = \pm\sqrt{(6x - xx)} \pm \sqrt{(6x + xx)} \pm \sqrt{(36 - xx)};$$

équation, où à chaque abſciſſe doivent répondre huit appliquées. Il eſt évident que, ſi on fait l'abſciſſe x négative, l'appliquée ſera imaginaire; la même choſe aura lieu, ſi l'abſciſſe eſt priſe plus grande que 6; de-là il ſuit que toute la courbe eſt renfermée entre les limites $x = 0$ & $x = 6$; donnons donc ſucceſſivement à x les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, nous aurons :

Si	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
$\sqrt{(6x-x^2)}$	0,000	2,235	2,828	3,000	2,828	2,235	0,000
$\sqrt{(6x+xx)}$	0,000	2,645	4,000	5,196	6,324	7,416	8,484
$\sqrt{(36-xx)}$	6,000	5,916	5,656	5,196	4,470	3,316	0,000
Somme,	6,000	10,796	12,484	13,392	13,622	12,967	8,484
d'où y, ſi							
$(+\ +\ +)$	3,000	5,398	6,242	6,696	6,811	6,483	4,242
$(-\ +\ +)$	3,000	3,163	3,414	3,696	3,983	4,248	4,242
n prend $(+\ -\ +) =$	3,000	2,753	2,242	1,500	0,487	0,933	$-4,242$
$(+\ +\ -)$	$-3,000$	$-0,518$	0,586	1,500	2,341	3,167	4,242

Les réſultats que donneroient les quatre autres permutations, ne différeroient de ceux-ci que par les ſignes. Ainſi on aura pour chaque abſciſſe huit appliquées correſpondantes; & ſi on veut décrire la courbe qui en réſulte, on la trouvera compoſée de deux parties qui s'entrelacent $AFBEcagbcDA$ & $afbECAGBCDa$, ayant deux pointes en A & a, & quatre points doubles ou quatre interſections de branches en D, E, C & c. Pl. VI. Fig. 54.

CHAPITRE XIII.

Des Affections des Lignes Courbes.

285. NOUS avons déterminé ci-deffus la nature des branches infinies en affignant une ligne droite, ou une courbe plus fimple, qui fe confondît avec la courbe propofée à une diftance infinie; nous nous propofons de même, dans ce chapitre, d'examiner une portion quelconque de la courbe confidérée dans un efpace fini, & de chercher la ligne droite, ou la courbe la plus fimple, avec laquelle elle puiffe fe confondre, au moins dans un efpace très-petit. D'abord il eft clair que toute ligne droite qui touche la courbe en un point, fe confond avec elle en cet endroit, ou qu'elle a avec elle au moins deux points communs. Mais on peut auffi affigner d'autres courbes qui fe confondent plus exactement avec la portion donnée de la courbe propofée, & la baifent en quelque forte. On connoîtra très-bien par-là l'état de la ligne courbe pour chaque point avec fes différentes affections.

Pl. VII. Fig. 55. 286. Soit donc propofée une équation quelconque entre les coordonnées x & y pour une courbe quelconque. Donnons à l'abfciffe x une valeur déterminée $AP=p$, & cherchons celle de l'appliquée qui répond à cette abfciffe; s'il y en a plufieurs, nous en prendrons une à volonté $PM=q$; le point M appartiendra à la courbe, ou fera un point par où elle paffera. Mais alors, fi dans l'équation propofée entre x & y on écrit p au lieu de x & q au lieu de y, tous les termes de l'équation fe détruiront mutuellement, de forte que le refte fera nul. A préfent, pour connoître la nature de cette portion de la courbe qui paffe par le point M, menons de ce point M la droite Mq parallèle à l'axe AP que nous prendrons maintenant pour axe; & faifons cette nouvelle abfciffe $Mq=t$ & l'appliquée $qm=u$. Comme le point m appartient auffi à la la courbe, si on prolonge mq jusqu'en p, & qu'on mette au lieu de x, $Ap = p + t$, & au lieu de y, $pm = q + u$; il en doit résulter pareillement une équation identique.

287. Après avoir fait cette substitution dans l'équation proposée entre x & y, tous les termes, dans lesquels ni t ni u ne se trouvent pas, se détruiront mutuellement; & il ne restera que ceux qui renferment les nouvelles coordonnées t & u. On aura donc une équation de cette forme:

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \&c.;$$

dans laquelle A, B, C, D, &c., sont des quantités constantes, composées des constantes de la première équation & des quantités p & q que nous regardons aussi comme constantes. La nature de la courbe est donc exprimée par cette nouvelle équation; mais elle est rapportée à l'axe mq, sur lequel le point M même de la courbe est pris pour l'origine des abscisses.

288. D'abord il est clair que, si on fait $Mq = t = 0$, on aura aussi $qm = u = 0$, parce que le point m tombe sur M. Ensuite, comme notre but est de connoître seulement la très-petite portion de la courbe qui est près de M, nous le remplirons en prenant pour t des nombres très-petits; auquel cas $qm = u$ aura aussi une valeur très-petite; car il ne s'agit que d'un arc Mm presque évanouissant. Mais, si nous prenons pour t & u des valeurs très-petites, les termes tt, tu, & uu, seront encore beaucoup plus petits, & les suivans t^3, t^2u, tuu, u^3, &c., encore plus petits que ceux-ci, & ainsi de suite; c'est pourquoi, comme on peut omettre des grandeurs très-petites à l'égard d'autres qui sont en quelque sorte infiniment plus grandes, il restera l'équation $0 = At + Bu$, qui appartient à la ligne droite $M\mu$ menée par le point M, & qui apprend que, si le point m s'approche très-près de M, cette droite se confond avec la courbe.

289. Cette dtoite $M\mu$ sera donc une tangente de la courbe au point M; d'où l'on peut conclure un moyen de mener une tangente μMT à un point quelconque M de la courbe.

Il n'y a qu'à tirer de l'équation $At + Bu = 0$, $\frac{u}{t} = -\frac{A}{B} = \frac{q\mu}{Mq}$; ce qui donnera $q\mu : Mq :: MP : PT :: -A : B$; & par conséquent, à cause que $PM = q$, $PT = \frac{-Bq}{A}$. Cette portion PT de l'axe se nomme ordinairement SOUSTANGENTE; on en conclura donc cette

RÈGLE

pour trouver la Soustangente.

Après avoir trouvé dans l'équation à la courbe, que l'appliquée $y = q$ satisfait à l'abscisse $x = p$, on supposera $x = p + t$, & $y = q + u$; & des termes qui résulteront de la substitution, on conservera seulement ceux dans lesquels t & u ont une seule dimension, en négligeant tous les autres; on arrivera par ce moyen à cette équation de deux termes $At + Bu = 0$; ce qui, A & B étant supposés connus, donnera la soustangente $PT = \frac{-Bq}{A}$.

EXEMPLE I.

Soit proposée la Parabole *dont la nature est exprimée par l'équation* $yy = 2ax$, AP *étant l'axe principal &* A *le sommet.*

Prenons $AP = p$; & si nous supposons $PM = q$, nous aurons $qq = 2ap$, ou $q = \sqrt{2ap}$. Faisons ensuite $x = p + t$ & $y = q + u$, ce qui donne $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at$; & en conservant seulement les termes que la règle prescrit de garder, $2qu = 2at$; d'où $at - qu = 0$, $\frac{u}{t} = \frac{a}{q} = \frac{-A}{B}$. Donc la soustangente $PT = \frac{qq}{a} = 2p$, à cause de $qq = 2ap$. Ainsi la soustangente PT est double de l'abscisse AP.

EXEMPLE II.

Soit la courbe une Ellypſe *décrite du centre* A, *dont l'équation eſt* $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ *ou* $aayy + bbxx = aabb$.

Ayant pris $AP = p$ & ſuppoſé $PM = q$, on aura $aaqq + bbpp = aabb$. Faiſant enſuite $x = p + t$ & $y = q + u$; comme il ſuffit de conſerver ſeulement les termes où t & u n'ont qu'une dimenſion, on peut négliger tout de ſuite les autres, & on aura $2aaqu + 2bbpt = 0$; d'où l'on tire $\frac{u}{t} = \frac{-bbp}{aaq} = \frac{-A}{B}$. La ſoustangente PT ſera donc $= \frac{-B}{A}q = -\frac{aaqq}{bbp} = \frac{-aa+pp}{p}$; & comme ce réſulat eſt négatif, il apprend que le point T tombe du côté oppoſé. Au reſte, cette expreſſion s'accorde parfaitement avec celle que nous avons trouvée auparavant pour déterminer les tangentes de l'Ellypſe.

EXEMPLE III.

Soit propoſée la ligne du troiſieme ordre *de la ſeptième eſpèce* $yyx = axx + bx + c$.

Prenant toujours $AP = p$, & ſuppoſant $PM = q$, on aura $pqq = app + bp + c$. Et faiſant enſuite $x = p + t$ & $y = q + u$, $(p+t)(qq + 2qu + uu) = a(pp + 2pt + tt) + b(p+t) + c$; rejetant tous les termes inutiles, il reſtera $2pqu + qqt = 2apt + bt$; d'où l'on tire $\frac{u}{t} = \frac{2ap + b - qq}{2pq} = \frac{-A}{B}$; & par conſéquent la ſoustangente $PT = \frac{-B}{A}q = \frac{2pqq}{2ap + b - q^2} = \frac{2app + 2bp + 2c}{2ap + b - qq} = \frac{2ap^3 + 2bp^2 + 2cp}{app - c}$, ou $PT = \frac{2ppqq}{app - c}$.

290. La tangente de la courbe étant donc connue de cette manière, on connoît en même temps la direction que ſuit la

courbe au point M. Car on peut très-bien regarder une ligne courbe, comme la trace qu'un point en mouvement formeroit en changeant continuellement de direction, & par conséquent le point qui par son mouvement décrit la courbe, sera dirigé en M suivant la tangente $M\mu$; &, s'il conservoit cette direction, il décriroit la droite $M\mu$: mais il s'en écarte à chaque instant, puisqu'il décrit une courbe. Ainsi, pour connoître le cours d'une ligne courbe, il suffiroit de déterminer pour chaque point la position de la tangente; ce qui peut se faire facilement, en suivant la méthode que nous venons de donner; & ce qui ne présentera jamais aucune difficulté, pourvu que l'équation à la courbe soit rationnelle & délivrée de fractions; or on peut toujours ramener à une telle forme toutes les équations; mais, si l'équation est irrationnelle ou embarrassée de fractions, & qu'on veuille se dispenser de la ramener à une forme rationnelle & entière, on pourra encore employer la même méthode, mais avec quelque modification; & c'est cette modification qui a donné naissance au *Calcul différentiel;* c'est pourquoi nous réserverons pour ce calcul la méthode de trouver les tangentes, lorsque l'équation à la courbe ne sera pas rationnelle & entière.

291. On connoît encore par là l'inclinaison de la tangente $M\mu$ à l'axe AP ou à sa parallèle Mq; car, puisqu'on a $q\mu : Mq :: -A : B$, si les coordonnées sont perpendiculaires entre elles, & forment par conséquent l'angle droit $Mq\mu$, on aura $-\frac{A}{B}$ pour la tangente de l'angle $qM\mu$; mais, si les coordonnées sont obliques, alors, au moyen de l'angle donné $Mq\mu$ & du rapport des côtés Mq, $q\mu$, on trouvera par la trigonométrie l'angle $qM\mu$. Au reste, il est clair que, si dans l'équation résultante $At + Bu = 0$, on a $A = 0$, l'angle $qM\mu$ devient nul; & que par conséquent la tangente $M\mu$ sera parallèle à l'axe AP; & que, si au contraire $B = 0$, la tangente $M\mu$ sera parallèle aux appliquées PM, ou l'appliquée même PM touchera la courbe au point M.

292. La tangente MT étant trouvée, si on mène au point de contact M la perpendiculaire MN, elle sera en même temps

perpendiculaire à la courbe même ; & par conséquent il sera facile d'en déterminer la position pour chaque cas. On l'aura sur-tout très-commodément, si les coordonnées AP & PM sont perpendiculaires entre elles ; car alors les triangles semblables $Mq\mu$ & MPN donnent $Mq : q\mu :: MP : PN$, ou $-B : A :: q : PN$; d'où l'on tire $PN = \frac{-Aq}{B}$. On a coutume d'appeler SOUSNORMALE cette portion PN de l'axe comprise entre l'appliquée & la normale MN. Cette sousnormale se trouve donc facilement au moyen de la soustangente PT, lorsque les coordonnées sont perpendiculaires; car on aura $PT : PM :: PM : PN$, ou $PN = \frac{PM^2}{PT}$. De plus, si l'angle APM est droit, on aura la tangente $MT = \sqrt{(PT^2 + PM^2)}$, & la normale $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)}$; ou, parce que $PT : TM :: PM : MN$, $MN = \frac{PM . TM}{PT} = \frac{PM}{PT} \times \sqrt{(PT^2 + PM^2)}$.

293. Comme nous venons de voir que la tangente sera parallèle à l'axe ou aux appliquées, suivant que dans l'équation $At + Bu = 0$, on a ou $A = 0$, ou $B = 0$; il reste à examiner le cas où les deux coefficiens A & B deviennent à la fois $= 0$; lorsque cela arrive, les termes de l'équation trouvée ci-dessus (art. 286), dans lesquels t & u ont deux dimensions, ne peuvent plus être négligés à l'égard de ceux-ci $At + Bu$, qui disparoissent eux-mêmes. Il faudra donc considérer l'équation $0 = Ctt + Dtu + Euu$, négligeant les autres qui deviennent nuls par rapport à ceux-ci, lorsque t & u sont infiniment petits. On voit donc par cette équation, comme par l'équation générale, que, si $t = 0$, u sera aussi $= 0$; & que par conséquent M est un point de la courbe, ce qui est conforme à l'hypothèse.

294. L'équation $0 = Ctt + Dtu + Euu$ faisant connoître l'état de la courbe auprès du point M, il est évident que, si DD est plus petit que $4CE$, l'équation sera imaginaire, à moins que t & u ne soient $= 0$. Dans ce cas, le point M appartiendra bien à la courbe, mais il sera séparé du reste ; ce

ſera par conſéquent une ovale conjuguée qui ſe réduit à un point évanouiſſant, tel que nous en avons remarqué dans le chapitre précédent. On ne peut donc pas ſe former ici une idée de tangente; car la tangente étant une droite qui a deux points voiſins communs avec la courbe, il eſt impoſſible qu'une droite touche de cette manière un point. S'il y a quelque point conjugué dans la courbe, on le reconnoîtra de cette manière; & il ſera ſéparé des autres points.

Pl. VII. Fig. 56. 295. Si DD eſt plus grand que $4CE$, l'équation $0 = Ctt + Dtu + Euu$ ſera réſoluble en deux équations de cette forme $\alpha t + \beta u = 0$, dont chacune eſt propre également à faire connoître la nature de la courbe; puiſque chacune repréſente la poſition de la tangente, ou la direction de la courbe au point M, il faut qu'il y ait au point M deux branches qui ſe coupent, & qui y forment un point double. Ayant donc pris $Mq = t$, ſoient $q\mu$ & $q\nu$ les deux valeurs de u que donne l'équation; les droites $M\mu$ & $M\nu$ feront deux tangentes de la courbe au point M. Il y aura donc en M deux branches qui ſe rencontreront, dont l'une ſera dirigée ſuivant $M\mu$ & l'autre ſuivant $N\nu$. Puis donc qu'un point conjugué peut pareillement être regardé comme un point double, il s'enſuit que cette équation $Ctt + Dtu + Euu = 0$ indiquera toujours un point double, comme l'équation $At + Bu = 0$, toutes les fois qu'elle a lieu, déſigne ſeulement un point ſimple.

296. Mais ſi $DD = 4CE$, alors ces deux tangentes $M\mu$ & $M\nu$ coïncideront, & l'angle $\mu M\nu$ deviendra nul; ce qui fait voir que non-ſeulement les deux branches de la courbe concourent en M, mais encore qu'elles y ont une même direction, & que par conſéquent elles ſe touchent; dans ce cas le point M n'en ſera pas moins un point double, parce que la droite qui y paſſe, eſt cenſée couper la courbe en deux points. Ainſi, lorſque dans l'équation que nous avons obtenue (art. 286), les deux premiers coefficiens A & B s'évanouiſſent, on doit en conclure pour la courbe un point double, dont trois eſpèces différentes peuvent avoir lieu; ſavoir une ovale qui ſe réduit en un point qu'on appelle point conjugué; ou l'interſection

mutuelle de deux branches de la courbe qu'on appelle nœud, ou bien l'attouchement de deux branches. Ces trois eſpèces différentes de point double dépendent des trois conditions qui peuvent ſe trouver dans l'équation $0 = Ctt + Dtu + Euu$.

297. Si outre les coefficiens A & B, les trois C, D & E diſparoiſſent auſſi, il faudra prendre alors les termes ſuivans dans leſquels t & u ont trois dimenſions; & on aura l'équation $Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + Tu^3 = 0$. Si cette équation n'a qu'un facteur ſimple réel, il déſignera une branche de la courbe qui paſſe par le point M, & fera connoître en même temps ſa direction ou la tangente; & les deux autres facteurs imaginaires indiqueront une ovale évanouiſſante au point même M. Mais, ſi toutes les autres racines de l'équation ſont réelles, on ſaura par-là que la courbe a trois branches qui ſe croiſent ou ſe touchent au même point M, ſuivant que ces racines ſont ou inégales ou égales. Quel que ſoit celui de ces cas qui ait lieu, la courbe aura toujours au point M un point triple, & la droite qui y paſſera ſera cenſée couper la courbe en trois points.

298. Si, outre les coefficiens précédens, les quatre F, G, H & I ſont encore nuls; dans ce cas, pour déterminer la nature du point M, il faudra recourir aux termes ſuivans de l'équation dans leſquels t & u auront quatre dimenſions; ce qui annoncera l'exiſtence d'un point quadruple. En effet, ou deux ovales conjuguées ſe confondent dans ce point, ce qui a lieu lorſque toutes les racines de l'équation du quatrième degré ſont imaginaires; ou bien le point M réunit l'interſection ou le contact de deux branches de courbe avec un point conjugué, ſavoir, lorſque parmi les racines deux ſont réelles & deux imaginaires; &, ſi elles ſont toutes réelles, il y aura en M l'interſection de quatre branches; & l'interſection de deux, de trois, ou même de quatre branches, ſe changera en un point de contact, ſi deux, trois, ou toutes les quatre racines deviennent égales; il faudra raiſonner d'une manière ſemblable, ſi, les termes où t & u ont quatre dimenſions venant à manquer, on eſt obligé de paſſer aux termes de cinq dimenſions, ou même d'un plus grand nombre.

299. Cela poſé, il ſera facile de trouver l'équation générale pour toutes les courbes qui non ſeulement paſſent par le

point M, mais qui ont en M un point ou ſimple, ou double, ou triple, ou du degré de multiplicité qu'on voudra. Car, ayant ſuppoſé $AP = p$, $PM = q$, & P, Q, R, S, &c. déſignant des fonctions quelconques des coordonnées x & y, il eſt clair que cette équation $P(x-p) + Q(y-q) = 0$ exprime une courbe qui paſſe par le point M; car, ſi on ſuppoſe $x = AP = p$, alors $y = PM = q$, pourvu que P ne ſoit pas diviſible par $y-q$, ni Q par $x-p$, pourvu enfin que ces facteurs $x-p$ & $y-q$, dont dépend le paſſage de la courbe par le point M, ne ſortent pas de l'équation par la diviſion; il eſt évident que toutes les courbes qui doivent paſſer par M, ſont renfermées dans cette équation $P(x-p) + Q(y-q) = 0$; & ce point M ſera un point ſimple, ſi l'équation n'eſt pas de la forme de celle que nous allons donner pour les points multiples.

300. Si M eſt un point double, l'équation à la courbe ſera compriſe dans cette forme $P(x-p)^2 + Q(x-p)(y-q) + R(y-q)^2 = 0$, pourvu que cette forme ne diſparoiſſe pas par la diviſion. On voit par là qu'il n'y a pas de point double pour les lignes du ſecond ordre; car il faut que P, Q & R ſoient des conſtantes, pour que l'équation ſoit du ſecond degré; mais alors elle n'appartient plus à une courbe, mais à deux lignes droites. Si P, Q & R ſont des fonctions du premier ordre, telles que $\alpha x + \beta y + \gamma$, on aura dans ce cas des lignes du troiſième ordre qui auront en M un point double. Mais une ligne du troiſième ordre, à moins qu'elle ne ſoit compoſée de trois lignes droites, ne peut avoir plus d'un point double; car ſuppoſons qu'elle en pût avoir deux, & imaginons par ces points une droite; elle couperoit la courbe en quatre points, ce qui eſt contraire à la nature des lignes du troiſième ordre. La ligne du quatrième ordre aura ſeulement deux points doubles, & une ligne du cinquième n'en pourra avoir plus de trois, ainſi de ſuite.

301. Si M eſt un point triple, la nature de la ligne ſera exprimée par $P(x-p)^3 + Q(x-p)^2(y-q) + R(x-p)(y-q)^2 + S(y-q)^3 = 0$; ſi cette équation repréſente une courbe, elle ſera d'un ordre ſupérieur au troiſième; car, ſi P, Q, R & S étoient

étoient des constantes, comme l'exige la nature des lignes du troisième ordre, l'équation auroit trois facteurs de la forme $\alpha(x-p)+\beta(y-q)$, & appartiendroit par conséquent à un système de trois lignes droites. Ainsi un point triple ne peut appartenir aux lignes d'un ordre inférieur au quatrième, ni les lignes du cinquième ordre ne peuvent avoir plus d'un point triple; car autrement une droite pourroit couper une ligne du cinquième ordre en six points. Mais rien n'empêche qu'une ligne du sixième ordre n'ait deux point triples.

302. Si l'équation est de cette forme : $P(x-p)^4+Q(x-p)^3(y-q)+R(x-p)^2(y-q)^2+S(x-p)(y-q)^3+T(y-q)^4=0$, la courbe aura en M un point quadruple. La courbe la plus simple qui puisse avoir un point quadruple, appartiendra donc aux lignes du cinquième ordre; & deux points quadruples ne peuvent convenir qu'aux lignes du huitième ordre, ou d'un degré plus élevé. On pourra assigner d'une manière semblable les équations générales des lignes qui auroient en M un point quintuple, ou multiple quelconque.

303. Mais si M est un point double, ou triple, ou un autre multiple, la courbe aura autant de branches qui se couperont ou se toucheront en M; & si le nombre des branches qui se coupent est moindre, c'est une preuve qu'il y aura un ou plusieurs points conjugués, qui se réuniront au point M : l'état de la courbe pourra être connu par ce qui a été dit ci-dessus. On écrira par-tout dans les fonctions P, Q, R, S &c. p & q au lieu de x & de y, & t & u au lieu des facteurs $x-p$ & $y-q$; on aura par ce moyen les équations qui serviront à déterminer la nature de la courbe, & à trouver les tangentes des branches qui se coupent en M.

CHAPITRE XIV.

De la Courbure des Lignes Courbes.

304. NOUS avons cherché dans le chapitre précédent les lignes droites qui marquoient pour chaque point les directions de la courbe elle-même, nous nous occuperons de même dans celui-ci de la recherche des lignes courbes plus ſimples, qui s'accordent pour un point quelconque tellement avec la propoſée, qu'elles ſe confondent en quelque ſorte avec elle au moins dans un très-petit eſpace. Par ce moyen, la nature de la courbe plus ſimple étant connue, on en conclura en même temps celle de la propoſée. Nous procéderons ici, comme nous avons fait lorſqu'il a été queſtion de connoître la nature des branches qui s'étendoient à l'infini, c'eſt-à-dire que nous chercherons d'abord la ligne droite qui touche la courbe, & enſuite la courbe plus ſimple qui s'accorde beaucoup mieux avec la propoſée, & qui au lieu de la toucher ſimplement, l'embraſſe ou la baiſe pour ainſi dire. Ce contact intime de ces ſortes de courbes s'appelle ordinairement OSCULATION.

Pl. VII. Fig. 55. 305. Soit donc propoſée une équation quelconque entre les coordonnées perpendiculaires x & y; pour reconnoître la nature de la petite portion Mm de la courbe ſituée vers le point M, après avoir trouvé l'abſciſſe $AP = p$ & l'appliquée $PM = q$, nous prendrons ſur l'axe MR la petite abſciſſe $Mq = t$, & l'appliquée $qm = u$; ce qui donnera $x = p + t$, & $y = q + u$. Ces valeurs ſubſtituées dans l'équation, ſuppoſons qu'on arrive à l'équation

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \&c.;$$

laquelle exprimera la nature de la même courbe rapportée à l'axe MR. Comme nous ſuppoſons ces nouvelles coordonnées t & u très-petites, les termes ſuivans ſeront preſque infiniment plus petits que ceux qui précédent, & pourront par cette raison être négligés à l'égard de ceux-ci.

306. Ainsi, à moins que les deux premiers coefficiens A & B ne manquent à la fois, si on rejette tous les termes qui suivent, l'équation $0 = At + Bu$ indiquera la ligne droite $M\mu$ qui touche la courbe au point M, & dont la direction en cet endroit se confond avec celle de la courbe. On aura donc $Mq : q\mu :: B : -A$; & par conséquent, les quantités A & B étant connues, la position de la tangente $M\mu$ qui rencontre la courbe seulement au point M, le sera aussi; voyons à présent combien la courbe Mm s'éloigne de la droite $M\mu$, au moins dans un petit espace. A cet effet, prenons la normale MN pour axe, sur lequel on supposera abaissée du point m l'appliquée perpendiculaire mr; & soit $Mr = r$, $rm = s$, on aura $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ & $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$; $r = \frac{-At - Bu}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ & $s = \frac{Bt - Au}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$. Il suit de-là qu'à cause de l'équation $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^3 + Ft^3 + Gttu +$ &c., r sera infiniment plus petite que t & u; & que par conséquent aussi r sera infiniment plus petite que s; car s est déterminée par t & par u, & r l'est par les quarrés ou les puissances supérieures des mêmes lettres t & u.

307. Nous connoîtrons donc plus intimement la nature de la courbe Mm, si nous faisons entrer aussi dans le calcul les termes $Ct^2 + Dtu + Eu^2$, en négligeant les suivans; nous aurons entre t & u cette équation $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$; si nous y substituons, au lieu de t & de u, leurs valeurs trouvées ci-dessus, nous aurons $r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \frac{(A^2C + ABD + B^2E)rr}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2D - B^2D - 2ABC + 2ABE)rs}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2E - ABD + B^2C)ss}{A^2 + B^2}$; mais, comme r est infiniment plus petite que s, les termes rr & rs disparoîtront devant le terme ss, & on aura $ss = \frac{(A^2 + B^2)r\sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$; équation qui exprime la nature de la courbe osculatrice au point M.

308. Le petit arc Mm de la courbe se confondra donc

avec le sommet d'une parabole décrite sur l'axe MN, dont le paramètre est $= \frac{(A^2+E^2)\sqrt{(A^2+E^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$. Ainsi la courbure de la courbe proposée au point M sera la même que celle de la parabole à son sommet ; mais, comme il n'y a point de courbure dont on ait une idée plus distincte que celle du cercle, parce qu'elle est par-tout la même, & qu'elle est d'ailleurs d'autant plus grande que le rayon est plus petit ; il sera plus commode de déterminer la courbure des courbes par celle d'un cercle d'une égale courbure, qu'on appelle ordinairement *cercle osculateur*. C'est pourquoi il faut trouver le cercle dont la courbure s'accorde avec celle de la parabole proposée à son sommet, afin de pouvoir substituer ce cercle à la parabole osculatrice.

309. Pour cela, nous regarderons comme inconnue la courbure du cercle, & nous l'exprimerons, comme ci-dessus, par celle de la parabole ; car on pourra ainsi réciproquement substituer à la parabole osculatrice le cercle osculateur. Soit donc la courbe proposée Mm un cercle décrit avec le rayon $= a$, & dont la nature sera exprimée par l'équation $yy = 2ax - xx$. Ayant pris $AP = p$ & $PM = q$, on aura $qq = 2ap - pp$. Si on fait en outre $x = p + t$ & $y = q + u$, on aura l'équation $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at - pp - 2pt - t^2$, laquelle, à cause de $qq = 2ap - pp$, se réduit à celle-ci : $0 = 2at - 2pt - 2qu - tt - uu$. Comparée avec celle trouvée ci-dessus, elle donne $A = 2a - 2p$; $B = -2q$; $C = -1$; $D = 0$ & $E = -1$; d'où l'on tire $AA + BB = 4(aa - 2ap + pp + qq) = 4aa$, & $(AA+BB)\sqrt{(AA+BB)} = 8a^3$, & $AAE - ABD + BBC = -AA - BB = -4aa$. Donc le cercle qui a un rayon $= a$, se confond à chaque point avec le sommet d'une parabole dont l'équation est $ss = 2ar$; donc réciproquement la courbe embrassée par le sommet d'une parabole $ss = br$, le sera également par le cercle, dont le rayon $= \frac{1}{2}b$.

310. Comme nous avons trouvé ci-dessus que la courbe Mm étoit embrassée par une parabole dont l'équation est $ss =$

$\frac{(AA+BB)\sqrt{(AA+BB)}}{A^2E-ABD+B^2C}r$; il s'ensuit évidemment que la courbure de la même courbe au point M est la même que celle d'un cercle dont le rayon seroit $=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}$. Cette expression donne donc le rayon du cercle osculateur, & c'est ce qu'on appelle ordinairement le *rayon osculateur*, ou le *rayon de courbure*. Au moyen de l'équation entre t & u, que nous avons tirée de celle entre x & y, on peut donc conclure sur-le-champ le rayon osculateur de la courbe au point M, ou le rayon du cercle qui embrasse la courbe en M; car, si l'on rejette dans l'équation entre t & u les termes dans lesquels t & u ont plus de deux dimensions, on arrivera à une équation de cette forme :

$$0=At+Bu+Ctt+Dtu+Euu;$$

laquelle donne tout de suite le rayon osculateur $=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}$.

311. Mais, à cause de l'ambiguité du signe radical, il est incertain si l'expression $\sqrt{(A^2+B^2)}$ est positive ou négative; c'est-à-dire, si c'est la concavité ou la convexité de la courbe qui est tournée vers N. Pour lever ce doute, il faut chercher si le point m de la courbe est situé entre la tangente $M\mu$ vers l'axe AN, ou s'il tombe au-delà de la tangente. Dans le premier cas, la courbe sera concave vers N, & le centre du cercle osculateur tombera sur la partie de la droite MN située vers l'axe; & dans le second cas, sur la partie de la droite NM prolongée au-delà de M. Il ne restera donc plus aucun doute, pourvu qu'on cherche si qm est plus petit que $q\mu$, ou plus grand; car dans le premier cas la courbe sera concave vers N; & elle sera convexe au contraire, si le second cas a lieu.

312. Or $q\mu=\frac{-At}{B}$ & $qm=u$; il faut donc voir si $\frac{-At}{B}$ est plus grand ou plus petit que u. Soit la petite ligne $m\mu=w$, u sera $=\frac{-At}{B}-w$; donc, en faisant la substitution, on aura

$$o = -Bw + Ctt - \frac{ADtt}{B} - Dtw + \frac{A^2Ett}{BB} + \frac{2AEtw}{B} + Ew^2;$$

équation dans laquelle les termes tw & w^2 disparoissent, à cause que w est très-petit à l'égard de t. Donc $w = \frac{(B^2C - ABD + A^2E)tt}{B^3}$.
Ainsi, lorsque w sera une quantité positive, ce qui a lieu, si $\frac{B^2C - ABD + A^2E}{B^3}$ ou $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ est une quantité positive, alors la courbe sera concave vers N; mais si $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ est une quantité négative, la convexité de la courbe regardera le point N.

Pl. VII. Fig. 57. 313. Pour éclaircir tout cela, examinons séparément différens cas qui peuvent se présenter. Soit donc d'abord $B = o$, auquel cas l'appliquée PM sera elle-même tangente de la courbe Mm; le rayon osculateur sera $= \frac{A}{2E}$. Or il est facile de juger par l'équation $o = At + Ctt + Dtu + Euu$, si la courbe est concave vers R, comme le représente la figure, ou si elle est convexe; car, comme $Mq = t$ & $qm = u$, à cause que t est infiniment plus petit que u, les termes tt & tu disparoîtront devant uu, & il restera $At + Euu = o$; or cette dernière équation apprend que, si les coefficiens A & E ont des signes contraires, ou si $\frac{A}{E}$ est une quantité négative, la courbe sera concave vers R; & que, si les coefficiens A & E ont des signes semblables, ou si $\frac{E}{A}$ est une quantité positive, la courbe sera située de l'autre côté de la tangente; car l'abscisse Mq doit être négative, pour que l'appliquée correspondante qm soit réelle.

Pl. VII. Fig. 55. 314. Supposons à présent que la tangente $M\mu$ soit inclinée à l'axe AP ou qu'elle lui soit parallèle, de manière que l'angle $RM\mu$ soit aigu, & que la perpendiculaire MN coupe l'axe en N au-delà de P; dans ce cas les appliquées u qui répondront aux abscisses t seront positives; d'où il suit que les coefficiens A & B auront des signes différens, & que la fraction $\frac{A}{B}$ sera négative. Nous avons déjà vu que dans ce cas la courbe sera concave vers N, si $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ est une quantité positive; ou, puisque $\frac{B}{A}$ est une quantité négative, si $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ est une quantité négative; mais si $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ est une quantité négative ou $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ une quantité positive, alors la courbe tournera sa convexité vers N. Au reste, dans ces deux cas le rayon osculateur sera $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

315. Soit maintenant $A = 0$, dans ce cas la droite MR parallèle à l'axe sera en même temps tangente de la courbe, & u sera infiniment plus petit que t; ce qui donnera $0 = Bu + Ctt$. Par conséquent, si B & C ont des signes semblables, ou si BC est une quantité positive, u doit alors avoir une valeur négative, & la courbe sera concave vers le point P, où tombe aussi le point N; c'est ce que nous apprend la règle donnée auparavant, si on fait $A = 0$; dans ce cas le rayon osculateur sera $= \frac{B}{2C}$. La règle que nous venons de citer servira de même si la tangente MT rencontre l'axe au-delà du point P; car alors la courbe sera pareillement concave ou convexe vers N, suivant que cette expression $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ sera ou positive ou négative, & le rayon osculateur sera comme auparavant $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$. Pl. VII. Fig. 58. Pl. VII. Fig. 59.

316. Soit proposée une Ellypse, ou du moins un quart d'Ellypse DMC, dont le centre soit A, le demi-axe transverse $AD = a$, & le demi-axe conjugué $= b$. En prenant les abscisses x sur l'axe AD à compter du centre A, on aura pour l'équation de l'Ellypse $aayy + bbxx = aabb$; & si on suppose une abscisse quelconque $AP = p$, & l'appliquée correspondante $PM = q$, l'équation deviendra $aaqq + bbpp = aabb$. Soit ensuite $x = p + t$ & $y = q + u$, on aura $aaqq + 2aaqu + aauu + bbpp + 2bbpt + bbtt = aabb$, ou $2bbpt + 2aaqu + bbtt + aauu = 0$. D'abord, à cause des coefficiens de t & u, la normale MN Pl. VII. Fig. 60.

rencontre l'axe en deçà de P; & on a $PM : PN :: B : A :: aaq : bbp$ & $PN = \frac{bbp}{aa}$, à cause de $A = 2bbp$ & $B = 2aaq$. Ensuite, à cause que $C = bb$, $D = 0$ & $E = aa$, on aura $\frac{AA^2E - ABD + B^2C}{B} = \frac{4aabb(aaqq + bbpp)}{2aaq} = \frac{4a^4b^4}{2aaq}$; quantité positive, qui fait voir que la courbe est concave vers N.

317. Pour trouver à présent la valeur du rayon osculateur, nous observerons que $A^2 + B^2 = 4(a^4q^2 + b^4p^2)$ & $A^2E - ABD + B^2C = 4a^4b^4$; donc la valeur demandée sera $= \frac{(a^4qq + b^4pp)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$; mais $MN = \sqrt{\left(qq + \frac{b^4pp}{a^4}\right)}$, d'où $\sqrt{(a^4qq + b^4pp)} = aaMN$; & par conséquent le rayon osculateur $= \frac{A^2 . MN^3}{b^4}$. Si sur le prolongement de la normale MN on abaisse du centre A la perpendiculaire AO, on aura, à cause de $AN = p - \frac{bbp}{aa}$, & de la similitude des triangles MNP & ANO, $NO = \frac{aabbpp - b^4pp}{a^4 . MN}$, & $MO = NO + MN = \frac{aaqq + bb . pp}{aa . MN} = \frac{bb}{MN}$, & par conséquent $MN = \frac{bb}{MO}$; donc le rayon osculateur $= \frac{aabb}{MO^3}$; expression qui se rapporte également aux deux axes AD & AC.

318. Lorsqu'on a trouvé le rayon osculateur qui convient à chaque point de la courbe, la nature de la courbe est assez bien connue. Car si on divise une portion de la courbe en plusieurs parties très-petites, chacune pourra être regardée comme un petit arc de cercle, dont le rayon sera le rayon osculateur qui convient en cet endroit. On pourra aussi, en prenant un assez grand nombre de points, décrire beaucoup plus exactement la courbe; car, après qu'on aura marqué plusieurs points par où la courbe doit passer, si on cherche pour chacun de ces points d'abord les tangentes, ensuite les normales & les rayons osculateurs, on pourra décrire, au moyen du compas, les petites portions de la courbe qui sont situées entre les

les points donnés; & on aura de cette manière une description de la courbe d'autant plus exacte, que les points dont il s'agit seront plus voisins.

319. Ainsi la petite portion de la courbe qui est en M, se confondant avec le petit arc de cercle décrit avec le rayon osculateur, la même courbure appartiendra non-seulement à l'élément Mm, mais encore au précédent Mn; car, puisque la nature de la petite portion Mm de la courbe est exprimée par cette équation $ss = \alpha r$ entre les coordonnées $Mr = r$ & $rm = s$, l'équation donnera pour chaque petite abscisse $Mr = r$ deux appliquées s, l'une positive, l'autre négative; & par conséquent la courbe s'étendra également vers n & vers m. Toutes les fois donc que le rayon osculateur, qui est $= \frac{1}{2}\alpha$, aura une valeur finie, la courbure sera uniforme de part & d'autre d'un même point, au moins dans un petit espace. Ainsi dans ces cas le cours de la courbe ne changera point tout-à-coup pour former un point de rebroussement; il n'arrivera point non plus qu'en changeant de courbure, une partie Mn tourne sa convexité vers N, tandis que l'autre partie Mm tournera sa concavité vers N; on appelle ordinairement ce dernier changement de courbure INFLEXION ou point de FLEXION CONTRAIRE. On peut donc dire que, lorsque le rayon osculateur est fini, il ne peut y avoir ni point de rebroussement, ni point de flexion contraire. Pl. VII. Fig. 55.

320. L'équation entre t & u

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \&c.$$

donnant le rayon osculateur $= \frac{(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$, il s'ensuit évidemment que, si $A^2E - ABD + B^2C = 0$, alors le rayon osculateur devient infiniment grand; & que par conséquent le cercle osculateur se change en ligne droite. Lorsque cela arrive, la courbe n'a plus de courbure, & deux de ses élémens sont situés en ligne droite. Pour connoître plus à fond dans ces cas la nature de la courbe, la substitution de $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(AA+BB)}}$ & de $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(AA+BB)}}$ doit se faire aussi dans les termes $Ft^3+Gttu+Htuu+Iu^3$. Mais comme, à l'égard du premier terme $r\sqrt{(A^2+B^2)}$, tous les termes ſuivans qui contiennent r diſparoiſſent; en rejetant ces derniers, & faiſant la ſubſtitution dans toute l'équation, on en obtiendra une autre de cette forme :

$$r\sqrt{(A^2+B^2)}=\alpha ss+\beta s^3+\gamma s^4+\delta s^5+\&c.$$

321. Cette équation donne tout de ſuite, comme ci-deſſus, le rayon oſculateur $=\frac{\sqrt{(AA+BB)}}{2\alpha}$; mais, ſi $\alpha=0$, il devient alors infini. Pour avoir dans ce cas une connoiſſance plus exacte de la nature de la courbe, il faut prendre le terme ſuivant βs^3, de ſorte que $r\sqrt{(A^2+B^2)}=\beta s^3$; car, à moins que β ne ſoit $=0$, les termes ſuivans γs^4, δs^5, &c. s'évanouiſſent tous devant celui-ci. La courbe ſera donc embraſſée en M dans ce cas par une autre dont l'équation eſt $r\sqrt{(A^2+B^2)}$ $=\beta s^3$; laquelle fera connoître la figure de la courbe propoſée
Pl. VII. Fig. 61. vers le point M. Puis donc qu'à l'abſciſſe r priſe négativement répond une appliquée s, il s'enſuit que la courbe aura une forme anguinée $mM\mu$ en M; & qu'elle aura par conſéquent en cet endroit un point de flexion contraire.

Pl. VII. Fig. 62. 322. Si, outre α, β eſt auſſi $=0$, la nature de la courbe ſera exprimée en M par l'équation $r\sqrt{(A^2+B^2)}=\gamma s^4$; comme alors il y a pour chaque abſciſſe r deux appliquées s, l'une poſitive, l'autre négative, & qu'on ne peut prendre d'abſciſſe de part & d'autre, les deux portions Mm & $M\mu$ de la courbe ſeront ſituées du même côté de la tangente; mais ſi, parce que α, β & γ ſeroient zéro, la nature de la courbe en M eſt exprimée par l'équation $r\sqrt{(A^2+B^n)}=\delta s^5$, la courbe aura de nouveau en M un point de flexion contraire,
Pl. VII. comme dans la *Fig.* 61. Et ſi $\delta=0$, & qu'on ait $r\sqrt{(A^2+B^2)}$ $=\varepsilon s^6$, la courbe ſera telle qu'elle eſt repréſentée *Figure* 62,
Pl. VII. & elle n'aura point d'inflexion. En général, ſi l'expoſant de s eſt un nombre impair, la courbe aura en M un point d'inflexion; & elle n'en aura point, comme on le voit *Figure* 62, ſi s eſt un nombre pair.

323. Tels sont les phénomènes des Courbes, qui se présentent lorsque le point M est simple, ou que dans l'équation Pl. VII. Fig. 56.

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \&c.$$

les deux coefficiens A & B ne manquent pas à la fois. Mais, si on a en même temps $A = 0$ & $B = 0$, & que la courbe ait deux branches, ou davantage, qui s'entrecoupent au point M, on cherchera séparément, comme on a fait ci-dessus, la courbure & la nature de chaque branche au point M. En effet, si, pour la tangente d'une des branches, on a l'équation $mt + nu = 0$, & qu'on cherche pour cette même branche celle entre les coordonnées r & s, dont la première r soit prise sur la perpendiculaire MN, de manière que r soit infiniment plus petite que s; il faudra faire $t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$ & $u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$; ce qui étant fait, & ayant négligé les termes qui par leur petitesse infinie s'évanouissent à l'égard des autres, on arrivera, si M est un point double, à une équation de cette forme : $rs = \alpha s^3 + \beta s^4 + \gamma s^5 + \delta s^6 + \&c.$; & si M est un point triple, à une autre telle que celle-ci : $rss = \alpha s^4 + \beta s^5 + \gamma s^6 + \&c.$; ainsi de suite. Toutes ces équations sont comprises dans la formule : Pl. VII. Fig. 55.

$$r = \alpha ss + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

324. On voit par cette équation que la branche de la courbe que nous considérons, a au point M un rayon osculateur $= \frac{1}{2\alpha}$, qui devient $= \infty$, lorsque $\alpha = 0$. Dans ce cas, la nature de la courbe sera donc exprimée ou par cette équation $r = \beta s^3$, ou par $r = \gamma s^4$, ou par $r = \delta s^5$, &c.; d'où l'on conclura, comme auparavant, que la branche de la courbe aura ou n'aura pas en M un point d'inflexion. Le premier cas a lieu, si l'exposant de s est un nombre impair; & le second, si l'exposant est pair. Tel est le jugement qu'il faudra porter de chaque branche en particulier qui passe par le point M,

lorſqu'on aura ſa tangente, & qu'elle diffère des tangentes des autres branches, qui ſe rencontrent au même point M.

Pl. VII. Fig. 55. 325. Mais il faudra porter un autre jugement, s'il arrive que les tangentes de deux ou de pluſieurs branches coïncident au point M. En effet A & B diſparoiſſant, ſupoſons que dans l'équation $0 = Ctt + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u +$ &c. les facteurs ſimples du premier membre $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ ſoient égaux entre eux, ou, ce qui revient au même, que les deux branches qui ſe coupent au point M aient une tangente commune; & faiſons en conſéquence $Ctt + Dtu + Euu = (mt + nu)^2$; en tranſportant l'équation aux coordonnées $Mr = r$ & $rm = s$, & faiſant $t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$ & $u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{m^2 + n^2}}$, nous arriverons à une équation de cette forme : $rr = \alpha rss + \beta s^3 + \gamma rs^3 + \delta s^4 + \varepsilon rs^4 + \zeta s^5 +$ &c.; car les termes où r a deux dimenſions, ou davantage, s'évanouiſſent à l'égard du premier rr.

326. Il faut d'abord avoir égard au terme βs^3. S'il ne manque pas, tous les autres diſparoiſſent devant lui, parce que r eſt infiniment plus petite que s. A moins donc que β ne ſoit $= 0$, la nature de la courbe au point M ſera exprimée par cette équation $rr = \beta s^3$, laquelle donnant $r = s\sqrt{\beta s} = ss\sqrt{\frac{\beta}{s}}$ apprend qu'au point M le rayon oſculateur $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\beta}}$, ou, qu'à cauſe que s devient preſque nulle au point M, le rayon oſculateur devient auſſi $= 0$. La courbure en ce point ſera donc infiniment grande; ou, ce qui eſt la même choſe, l'élément de la courbe en M ſera une portion de cercle infiniment petit. Mais, comme l'appliquée s conſerve la même valeur,
Pl. VII. Fig. 63. ſoit qu'on faſſe r poſitive, ſoit qu'on la faſſe négative, il eſt clair que la courbe aura en M un point de rebrouſſement, & qu'elle ſe fourche en M en deux branches Mm, $M\mu$, qui ſe touchent l'une l'autre en ce point, & qui tournent leur convexité à la tangente Mt.

327. Si $\beta = 0$, & que l'équation renferme le terme δs^4 devant lequel diſparoît γrs^3, la nature de la courbe au point M ſera exprimée par $rr = \alpha rss + \delta s^4$. Si $\alpha\alpha$ eſt moindre que -4δ, à

cause des facteurs imaginaires, on aura en M un point conjugué; mais, si $\alpha\alpha$ est plus grand que -4δ, l'équation précédente se décompose en deux autres de cette forme $r=fss$ & $r=gss$. C'est pourquoi les deux branches de la courbe se toucheront réciproquement en M; le rayon osculateur de l'une sera $=\frac{1}{2f}$, & celui de l'autre $=\frac{1}{2g}$. Si donc ces deux branches tournent leur concavité du même côté, la figure sera celle de deux arcs de cercle qui se touchent en dedans, & si au contraire leurs concavités sont dirigées en sens opposés, la figure sera celle de deux arcs de cercle qui se touchent extérieurement. Pl. VII. Fig. 64. Pl. VII. Fig. 65.

328. Mais si δ manque aussi, alors l'équation sera résoluble en deux autres, ou elle ne le sera pas. Dans le premier cas, on aura deux branches qui se touchent au point M, & dont la nature sera exprimée par une équation de cette forme $r=\alpha s^m$; on obtiendra donc autant de figures différentes qu'il y a de combinaisons de deux branches qui forment en M un point simple. Nous appellerons celles-ci *branches du premier ordre;* lesquelles sont toutes comprises dans l'équation $r=\alpha s^m$. Mais dans le second cas, où l'équation ne peut se décomposer en deux autres, la nature de la courbe sera exprimée ou par $rr=\alpha s^5$, ou par $rr=\alpha s^7$, ou par $rr=\alpha s^9$, &c. Nous appellerons ces dernières branches, avec celle trouvée ci-dessus & représentée par $rr=\alpha s^3$, *branches du second ordre*, parce qu'elles tiennent lieu de deux branches du premier ordre qui se toucheroient en M. Au surplus, toutes ces branches du second ordre auront en M un point de rebroussement, comme l'a fait voir l'équation $rr=\alpha s^3$; avec cette différence cependant que pour l'équation $rr=\alpha s^3$ le rayon osculateur étoit infiniment petit, & que pour les autres il est infiniment grand. En effet, l'équation $rr=\alpha s^5$ donnant $r=ss\sqrt{\alpha s}$, le rayon osculateur en $M=\frac{1}{2\sqrt{\alpha s}}$, c'est-à-dire qu'il est infini, à cause de $s=0$. Pl. VII. Fig. 63.

329. S'il arrive que trois branches se rencontrent en M, & que leurs tangentes tombent les unes sur les autres; alors ou trois branches du premier ordre se toucheront au même

point M, ou il y aura en M un point de contact d'une branche du second ordre avec une branche du premier ordre; ou enfin il n'y aura qu'une *branche du troisième ordre* qui passera par ce point. La nature des branches du troisième ordre sera exprimée par des équations de la forme suivante $r^3 = \alpha s^4$; $r^3 = \alpha s^5$; $r^3 = \alpha s^7$; $r^3 = \alpha s^8$; ou généralement par $r^3 = \alpha s^n$; n étant un nombre entier quelconque plus grand que trois & non divisible par trois. La figure de ces branches sera telle, qu'elles auront en M un point de flexion contraire, si n est un nombre impair, & qu'elles auront un cours continu sans
Pl. VII. inflexion (comme dans la *Figure* 62) si n est un nombre pair. Du reste, le rayon osculateur dans ces courbes sera infiniment petit au point M, si n est plus petite que 6, & infiniment grand, si n est plus grande que 6.

330. Semblablement, si quatre tangentes de branches qui se coupent en M coïncident, il y aura ou quatre branches du premier ordre, ou deux du premier ordre & une du second, ou deux du second, ou une du premier & une du troisième, qui se toucheront au même point M; ou enfin il y aura *une branche* unique *du quatrième ordre* qui passera par M. Au reste, la nature des branches du quatrième ordre est renfermée dans cette équation générale $r^4 = \alpha s^n$, n étant un nombre entier impair plus grand que 4. On aura dans tous les cas un point de rebroussement comme dans les courbes du second ordre; & le
Pl. VII. Fig. 63. rayon osculateur en M sera infiniment petit si n est plus petite que 8, & infiniment grand, si n est plus grande que 8.

331. On développera de la même manière la nature des branches du *cinquième* ordre ou des ordres supérieurs. Quant à leur figure, les branches du cinquième, du septième, du neuvième & de tous les ordres impairs, s'accordent avec les branches du premier ordre qui présentent deux particularités, c'est-à-dire un point avec ou sans inflexion. Les branches du sixième, du huitième & de tous les ordres pairs s'accordent de leur côté avec les branches du second & du quatrième ordre; c'est-à-dire qu'elles auront toutes un point de rebroussement en M, comme le représente la *Figure* 63. Quant à la grandeur du rayon osculateur, il est aisé de voir que la nature de ces

arcs étant exprimée par cette équation $r^m = \alpha s^n$, dans laquelle n est un nombre plus grand que M; il sera infiniment petit, si n est plus petite que $2m$, & qu'il sera au contraire infiniment grand, si n est plus grande que $2m$.

332. Les phénomènes qui se présentent dans toute courbe, se réduisent donc à trois. Le premier a lieu lorsque la courbure de la courbe est *continue* sans inflexion ni point de rebroussement; c'est ce qui arrive toutes les fois que le rayon osculateur a partout une grandeur finie, quoiqu'il y ait aussi des cas où il peut avoir une valeur infiniment grande ou infiniment petite, sans que la continuité du cours de la courbe en soit altérée. Cela a lieu, lorsque la nature de la courbe au point M est exprimée par l'équation $\alpha r^m = s^n$, m étant un nombre impair, & n un nombre pair plus grand que m. Le second phénomène consiste dans *le point de flexion contraire*, qui ne peut avoir lieu qu'autant que le rayon osculateur est infiniment grand ou infiniment petit. C'est ce qu'indique l'équation $\alpha r^m = s^n$, lorsque l'un & l'autre exposant m & n sont un nombre impair, n étant toujours plus grande que m; car le rayon osculateur sera infiniment grand, si n est plus grande que $2m$; & infiniment petit, si n est plus petite que $2m$. Le troisième phénomène est donné par le *point de rebroussement*, lorsque deux branches convexes l'une par rapport à l'autre se réunissent & se terminent en un point, se touchant réciproquement. Un tel point est désigné par l'équation $\alpha r^m = s^n$, si m est un nombre pair & n un nombre impair. Le rayon osculateur est donc toujours infiniment petit ou infiniment grand au point de rebroussement.

333. Puisque toutes les variétés que peut présenter le cours continu d'une courbe se trouvent comprises dans les trois espèces que nous venons d'examiner, on conçoit d'abord qu'une branche de courbe continue ne peut jamais s'infléchir de manière à former en un point C un angle fini ACB; ensuite, que, Pl. VII. Fig. 66. comme les deux branches qui forment un point de rebroussement se tournent l'une à l'autre leur convexité, il ne peut y Pl. VIII. Fig. 67. avoir en C un point de rebroussement ACB, tel que des deux branches AC & BC qui ont en C une tangente commune, l'une tourne sa concavité vers la convexité de l'autre; & toutes

les fois qu'il se présente un tel point, c'est une marque que la courbe n'est point complète; de sorte qu'en la complétant & l'exprimant dans toutes ses parties au moyen de l'équation qui la représente, on aura une figure telle que la donne la *Fi-*
Pl. VII. *gure* 64. Il y a, à la vérité, des manières de décrire les courbes qui donnent naissance à un point ACB de cette nature; & que, pour cette raison, L'HOSPITAL appelle *point de rebroussement de la seconde espèce.* Mais il faut remarquer que les descriptions mécaniques ne donnent pas toujours la courbe entière exprimée par l'équation, mais souvent une certaine portion seulement; cette seule remarque semble terminer la dispute qui s'est élevée à l'occasion du point de rebroussement de la seconde espèce.

Nonobstant ces raisons, qui paroissent détruire l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce, il y a pourtant des courbes algébriques sans nombre qui présentent ces sortes de points. On peut prendre entre autres celles du quatrième ordre comprise dans l'équation $y^4 - 2y^2x - 4yxx - x^3 + x^2 = 0$, que donne $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$. Car ici le signe du premier terme $\sqrt{x}$ ne peut être douteux; il doit être nécessairement $+$. Car, si on le supposoit négatif, l'autre terme $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{(x\sqrt{x})}$ deviendroit imaginaire. Cet exemple est propre à faire connoître l'espèce de restriction qu'il faut apporter à ce que nous venons d'avancer.

334. Si deux branches qui ont une tangente commune en M, & qui fournissent par conséquent quatre arcs qui partent de ce point; savoir Mm, $M\mu$, Mn, $M\nu$, sont exprimées par différentes équations, il n'y aura aucun doute sur ceux de ces
Pl. VII. Fig. 64. arcs qui sont continus; ce sont évidemment ceux qui sont compris sous la même équation; ainsi l'arc Mm sera la continuation de l'arc Mn, & $M\mu$ celle de l'arc νM. Mais si ces deux branches sont représentées par la même équation, alors la première raison que nous avons alléguée n'existant plus, l'arc Mm pourra être regardé également comme la continuation de l'arc νM & de l'arc nM. Mais, puisque chacun des arcs Mn & $M\nu$ peut passer également pour la continuation de l'arc Mm, il s'ensuit que l'un des deux pourra aussi être regardé comme

comme la continuation de l'autre. Ainſi les arcs Mm & $M\mu$ ſont cenſés former une courbe continue, auſſi bien que deux autres arcs quelconques; & dans ce cas il y aura deux points de rebrouſſement de la ſeconde eſpèce $mM\mu$, $nN\nu$, qui ſe regarderont en M.

335. Cela ne doit pas ſeulement s'entendre de deux branches qui, n'ayant ni point d'inflexion ni point de rebrouſſement, ſe touchent réciproquement en M, & qui ſont exprimées par une même équation; mais la même raiſon de continuité aura lieu, quelle que ſoit la nature des deux branches qui ſe touchent mutuellement en M, pourvu qu'elles ſoient repréſentées par une équation commune. Cela arrive toutes les fois qu'on a entre r & s une équation de cette forme $\alpha^2 r^{2m} - 2\alpha\beta r^m s^n + \beta\beta s^{2n} = 0$; car alors chaque branche eſt déſignée par l'équation $\alpha r^m = \beta s^n$. Ainſi dans ce cas, des quatre arcs qui partent du point M, deux quelconques peuvent être regardés comme une ligne continue; ce qui donne lieu à une infinité de points de rebrouſſement de la ſeconde eſpèce. Or c'eſt pour cette raiſon que certaines deſcriptions ou conſtructions mécaniques, produiſent quelquefois des ſingularités de cette nature; cela ne peut arriver cependant que lorſque la deſcription ne donne pas la courbe entière compriſe dans l'équation, mais ſeulement une ou quelques-unes de ſes branches.

CHAPITRE XV.

Des Courbes qui ont un ou plusieurs Diamètres.

336. Nous avons vu auparavant que toutes les lignes du second ordre avoient au moins un diamètre orthogonal, qui partageoit la courbe entière en deux parties semblables & égales. La parabole, par exemple, n'a qu'un diamètre de cette espèce; elle est en conséquence composée de deux parties égales & semblables; mais l'Ellypse & l'Hyperbole en ont deux qui se coupent l'un l'autre perpendiculairement au centre : aussi ces dernières courbes offrent-elles quatre arcs ou quatre branches égales & semblables entre elles. Quant au Cercle, comme toute ligne droite menée par le centre le partage en deux parties semblables & égales, il aura une infinité de parties égales; en effet, les arcs qui sont soustendus par des cordes égales, sont en même temps égaux & semblables entre eux.

Pl. VIII. Fig. 68. 337. Nous nous proposons donc ici d'examiner la similitude de deux ou de plusieurs parties de la même courbe, & de rappeler à des équations générales ces sortes de courbes qui ont deux ou plusieurs parties égales entre elles. D'abord, considérons l'équation entre les coordonnées perpendiculaires x & y. Si, après avoir partagé l'espace entier en quatre régions désignées par les lettres Q, R, S, T, au moyen des droites AB, EF, qui se coupent perpendiculairement en C, on suppose x & y positifs, on aura la portion de la courbe située dans la région Q; si on fait x positif & y négatif, on obtiendra la portion de la courbe située en R; mais si on fait x négatif, y restant positif, cela donnera la partie de la courbe située en S; & enfin on trouvera celle située en T, en prenant négativement l'une & l'autre coordonnée y & x.

338. Les portions situées dans les régions Q & R seront donc

égales & ſemblables entre elles, ſi l'équation ne change pas en écrivant $-y$ au lieu de y. Comme toute puiſſance de y, dont l'expoſant eſt pair, a cette propriété, il s'enſuit, que ſi l'équation de la courbe ne contient aucune puiſſance impaire de y, les portions ſituées en Q & en R ſeront égales & ſemblables entre elles; & que par conſéquent la droite AB ſur laquelle ſont priſes les abſciſſes $CP = x$, ſera un diamètre de la courbe. Toutes les courbes de cette nature, pourvu toutefois qu'elles ſoient algébriques, ſont donc compriſes dans cette équation générale :

$$0=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta y^2+\varepsilon x^3+\zeta xy^2+\eta x^4+\theta x^2y^2+\iota y^4 \text{ \&c.};$$

expreſſion qui peut être regardée comme une fonction quelconque rationnelle de x & de yy. Ainſi, lorſque Z eſt une fonction quelconque rationnelle de x & de yy, $Z = 0$ exprimera une ligne courbe qui ſera partagée en deux parties égales & ſemblables par la droite AB; les portions ſituées dans les régions S & T ſeront donc auſſi égales & ſemblables.

339. Mais, pour que les portions ſituées dans les régions Q & S ſoient égales & ſemblables, il faut qu'en mettant $-x$, au lieu de x, l'équation ne change point. Par conſéquent, ſi Z eſt une fonction quelconque rationnelle de xx & de y, alors l'équation $Z = 0$ exprimera une courbe que la droite EF diviſera en deux parties ſemblables & égales. L'équation pour ces ſortes de courbe ſera donc de cette forme :

$$0=\alpha+\beta y+\gamma x^2+\delta y^2+\varepsilon x^2y+\zeta y^3+\eta x^4+\theta x^2y^2+\iota y^4+\text{\&c.}$$

Dans ce cas la portion de la courbe ſituée en S ſera ſemblable & égale à la portion en Q; & il en ſera de même de la portion en T à l'égard de celle en R.

340. Les portions ſituées dans les régions oppoſées Q & T ou R & S ſeront ſemblables & égales, ſi, en faiſant x & y négatifs, cette ſuppoſition n'apporte aucun changement dans l'équation donnée entre les coordonnées x & y. Soit $Z = 0$ l'équation de ces ſortes de courbes; il eſt clair que, ſi Z eſt une fonction de dimenſions paires de x & de y, ou ſi elle eſt compoſée d'autant

de fonctions homogènes de dimensions paires qu'on voudra, l'équation $Z=0$ jouira de la propriété susdite. De plus, si Z est un composé d'un nombre quelconque de fonctions homogènes de dimensions impaires, x & y étant pris négativement, Z se changera en $-Z$; &, comme on avoit auparavant $Z=0$, on aura aussi $-Z=0$; ce qui donnera deux équations générales pour les courbes qui ont des parties égales & semblables dans les régions opposées Q & T, & dans celles R & S. La première sera :

$$0=\alpha+\beta x^2+\gamma xy+\delta y^2+\varepsilon x^4+\zeta x^3y+\eta x^2y^2+\theta xy^3+\iota y^4+\varkappa x^6+\&c.$$

& la seconde

$$0=\alpha x+\beta y+\gamma x^3+\delta x^2y+\varepsilon xy^2+\zeta y^3+\eta x^5+\theta x^4y+\iota x^3y^2+\&c.$$

341. Il y a donc deux espèces de courbes qui ont deux parties semblables & égales; car ou ces parties sont situées de part & d'autre d'une ligne droite qui divise également en deux toutes les ordonnées qui lui sont perpendiculaires; c'est le cas où cette droite est appelée le *Diamètre orthogonal* de la courbe & auquel appartiennent les équations données art. 338 & 339; ou les deux parties semblables & égales tombent dans les régions opposées Q & R ou T & S, de manière que toute droite menée par le point C divise la courbe en deux parties alternativement égales. Telles sont les courbes comprises dans les équations de l'article précédent. Nous distinguerons cette différente situation des parties égales, en disant que celles qui appartiennent à la première espèce sont *diamétralement égales*, & que celles qui appartiennent à la seconde sont *alternativement égales*; mais, comme dans le second cas il y a un point C tel que toute droite qui y passe, & qui est prolongée de part & d'autre jusqu'à la rencontre de la courbe, se trouve partagée en deux parties égales, nous le distinguerons par le nom de *Centre*, de façon que pour désigner la différence qui caractérise les courbes dont deux parties sont alternativement ou diamétralement égales, nous dirons des premières qu'elles ont un centre, & des dernières, qu'elles ont un diamètre.

342. Puisque l'équation $Z=0$ représente les courbes dont

la droite AB eſt un diamètre, lorſque la coordonnée y n'a que des dimenſions paires dans la fonction Z; & que la même équation $Z = 0$ indique la droite EF pour un diamètre de la courbe, lorſque l'autre coordonnée x a par-tout des expoſans pairs; il s'enſuit que, ſi Z eſt une fonction de x & de y qui ne donne pour ces variables que des expoſans pairs, les droites AB & EF feront l'une & l'autre un diamètre orthogonal de la courbe; & que par conſéquent les quatre parties ſituées dans les régions Q, R, S & T feront égales & ſemblables entre elles. Les courbes de cette eſpèce feront donc toutes compriſes dans cette équation générale :

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta x^4 + \varepsilon x^2 y^2 + \zeta y^4 + \eta x^6 + \theta x^4 y^2 + \&c.$$

343. Les courbes renfermées dans cette équation auront donc deux diamètres, AB & EF qui ſe coupent réciproquement en C à angle droit. Ainſi ces courbes appartiennent au ſecond, ou au quatrième, ou au ſixième ordre, &c.; de ſorte qu'il eſt impoſſible qu'une courbe d'un ordre impair puiſſe avoir deux diamètres qui ſe coupent l'un l'autre perpendiculairement. De plus, cette équation étant renfermée dans la première donnée art. 339, ces ſortes de courbes auront en même temps un centre en C, où toute droite terminée de part & d'autre à la courbe ſe trouvera diviſée en deux également. Les courbes de cette nature, & qui auront un double diamètre, ſont donc repréſentées par l'équation $Z = 0$, pourvu que Z ſoit une fonction quelconque rationnelle de xx & de yy.

344. Étant arrivés de cette manière à la connoiſſance des lignes courbes qui ont deux diamètres, cherchons à préſent les équations de celles qui en ont un plus grand nombre. Il eſt d'abord facile de faire voir que, ſi une courbe quelconque n'a que deux diamètres, ils doivent être perpendiculaires entre eux, de manière qu'il n'exiſte aucune courbe à deux diamètres qui ne ſoit pas compriſe dans l'équation trouvée ci-deſſus. En effet, ſuppoſons qu'une courbe quelconque ait deux diamètres AB & EF qui ne ſe coupent pas perpendiculairement en C; puiſque EC eſt un diamètre, la courbe ſera parfaitement ſemblable de chaque côté; &, puiſque la partie qui eſt en deçà a Pl. VIII Fig 69.

la droite AC pour diamètre, il eſt néceſſaire que la partie qui eſt au-delà en ait un auſſi GC, qui faſſe au même point C avec EC un angle $GCE = ACE$. Par la même raiſon que GC eſt un diamètre, il devra y en avoir un autre IC qui fera l'angle $GCI = GCE$, & qui ſera de même eſpèce que EC. La droite LC ſera auſſi un diamètre, ſi on prend l'angle $ICL = ICG$; & en continuant ainſi, on trouvera de nouveaux diamètres, juſqu'à ce qu'on en ait un qui tombe ſur le premier AC; ce qui arrivera toutes les fois que l'angle ACE aura un rapport rationnel à l'angle droit.

345. A moins donc que l'angle ACE n'ait un rapport rationnel à l'angle droit, le nombre des diamètres ſera infini, & la courbe ſera un cercle; en effet toute droite menée par le centre d'un cercle en eſt un diamètre orthogonal; car nous reſtreignons ici la dénomination de diamètre aux ſeuls qui ſont perpendiculaires aux ordonnées, comme étant les ſeuls qui partagent la courbe en deux parties ſemblables & égales. On comprend par-là qu'aucune courbe algébrique ne peut avoir deux diamètres parallèles entre eux; car, s'il en étoit ainſi, par les raiſons que nous venons d'alléguer, elle en auroit une infinité d'autres pareillement parallèles & également diſtans l'un de l'autre; & par conſéquent il y auroit une ligne droite qui pourroit rencontrer une telle courbe en une infinité de points; propriété qui ne convient point aux courbes algébriques.

346. Ainſi, toutes les fois qu'une ligne courbe aura pluſieurs diamètres, ils ſe couperont tous réciproquement dans un même point C, & formeront entre eux des angles égaux. Ces diamètres ſeront alternativement de même eſpèce; car le diamètre CG ſera de même nature que CA, & l'équation à la courbe qui convient au diamètre CG pris pour axe, s'accordera avec l'équation à la même courbe rapportée au diamètre CA conſidéré comme axe. Les diamètres alternatifs CA, CG, CL, &c. ſeront donc également affectés à la courbe, &, par la même raiſon, les diamètres CE, CI, &c. appartiendront ſemblablement à la courbe. C'eſt pourquoi, ſi le nombre des dimètres eſt fini, l'angle ACG ſera une partie aliquote de quatre

angles droits, ou l'angle ACE ſera une partie aliquote de 180 degrés, ou de la demi-circonférence que nous ſuppoſerons $= \pi$.

347. Si l'angle $ACE = 90° = \frac{1}{2}\pi$, ce ſera le cas déjà traité, où la courbe a deux diamètres perpendiculaires entre eux. Occupons-nous de nouveau de la recherche de ces ſortes de courbes; mais employons une méthode différente de la première, & qui puiſſe s'appliquer également à la recherche d'un plus grand nombre de diamètres. Soit donc une courbe qui ait deux diamètres AB & EF; prenons ſur ſa circonférence un point quelconque M, & ayant mené du centre C la droite CM, ſuppoſons-la $= z$; faiſons en même temps l'angle $ACM = s$, & cherchons une équation entre z & s. On conçoit d'abord que la droite AC étant un diamètre, il faut que z ſoit une fonction de s qui reſte la même, ſi on met $-s$ à la place de s; car, en ſuppoſant l'angle $ACM = s$ égal à l'angle négatif ACm, la droite Cm doit être $= CM$. Or $cos. s$ eſt une fonction de s qui reſte la même, lorſqu'on met $-s$ au lieu de s. La condition demandée ſera donc remplie, ſi z eſt une fonction quelconque rationnelle de $cos. s$. Pl. VIII. Fig. 70.

348. Soit l'abſciſſe $CP = x$ & l'appliquée $PM = y$, on aura $z = \sqrt{(xx+yy)}$, & $cos. s = \frac{x}{z}$. Soit $Z = 0$ l'équation à la courbe, dont la droite CA eſt un diamètre; Z devra être une fonction rationnelle de z & de $\frac{x}{z}$, ou de z & de x; ou enfin, pour n'avoir que des quantités rationnelles, de $xx + yy$ & de x. Mais ſi Z eſt une fonction de $xx+yy$ & de x, il ſera auſſi une fonction de yy & de x. Car ſoit $xx + yy = u$; puiſque Z doit être une fonction de x & de u; en faiſant $u = t + xx$, de ſorte que $t = yy$, Z deviendra une fonction de t & de x; c'eſt-à-dire, de yy & de x. Toutes les fois donc que Z ſera une fonction rationnelle de yy & de x, la droite CA ſera un diamètre de la courbe; propriété, qui eſt la même que nous avons trouvé auparavant appartenir aux courbes qui n'ont qu'un diamètre.

849. Mais la courbe demandée doit en avoir deux AB &

EF; par conséquent CB sera un diamètre de même nature que CA. C'est pourquoi, si la droite $CM = z$ est rapportée au diamètre CB, à cause de l'angle $BCM = \pi - s$, il faut que z soit une fonction de s telle qu'elle ne subisse aucun changement, lorsqu'au lieu de s on met $\pi - s$. Une telle fonction seroit $\sin. s$, car $\sin. s = \sin. (\pi - s)$; mais on ne satisferoit pas de cette manière à la condition précédente. Il faut trouver une expression qui appartienne également aux angles s, $-s$ & $\pi - s$; tel est $\cos. 2s$; car $\cos. 2s = \cos. -2s = \cos. 2(\pi - s)$. C'est pourquoi l'équation $Z = 0$ exprimera une courbe qui aura deux diamètres AB & EF, si Z est une fonction rationnelle de z & de $\cos. 2s$. Or $\cos. 2s = \frac{xx - yy}{zz}$. Donc Z devra être une fonction de $xx + yy$ & de $xx - yy$, ou seulement de xx & de yy, comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

Pl. VIII. Fig. 71. 350. Passons à la recherche des courbes qui auroient trois diamètres AB, EF & GH; ces diamètres se couperont réciproquement en un même point C, si on fait les angles ACE, ECG, $GCB = 60° = \frac{1}{3}\pi$; & si on les prend alternativement, les diamètres CA, CG, CF, seront de même nature. C'est pourquoi, si on suppose $CM = z$, & l'angle $ACM = s$, à cause de $GCM = \frac{2}{3}\pi - s$, dans l'équation à la courbe $Z = 0$, Z devra être une fonction rationnelle de z & d'une certaine quantité w qui dépende tellement de s, qu'elle demeure la même, soit qu'on mette $-s$ à la place de s, soit qu'on mette $\frac{2}{3}\pi - s$. On aura donc $w = \cos. 3s$; en effet $\cos. 3s = \cos. -3s = \cos. (2\pi - 3s)$. Mais en supposant les coordonnées $CP = x$, $PM = y$, on aura $\cos. 3s = \frac{x^3 - 3xyy}{z^3}$. Donc Z doit être une fonction rationnelle de $xx + yy$, & de $x^3 - 3xyy$.

351. Si donc on suppose $xx + yy = t$ & $x^3 - 3xyy = u$, l'équation générale pour les courbes à trois diamètres sera de cette forme :

$0 = \alpha$

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \&c.;$$

laquelle donne celle-ci, entre x & y :

$$0 = \alpha + \beta(xx+yy) + \gamma x(xx-3yy) + \delta(xx+yy)^2 + \&c.$$

Comme l'équation $0 = \alpha + \beta xx + \beta yy$ appartient au cercle, lequel, ayant une infinité de diamètres égaux, ne peut manquer de satisfaire aussi à la question des trois diamètres; il s'ensuit que la courbe à trois diamètres la plus simple sera une ligne du troisième ordre exprimée par cette équation $x^3 - 3xyy = axx + ayy + b^3$, laquelle aura trois asymptotes comprenant un triangle équilatéral, au milieu duquel est placé le point C; & chacune de ces asymptotes sera de l'espèce $u = \frac{A}{tt}$. Ces courbes appartiennent donc à la cinquième espèce, suivant l'énumération que nous en avons faite auparavant.

352. Si la courbe a quatre diamètres AB, EF, GH & IK, qui se coupent mutuellement au point C sous des angles demi-droits $= \frac{1}{4}\pi$, alors les diamètres CA, CG, CB & CH, seront de même nature; par conséquent, en faisant $CM = z$ & l'angle $ACM = s$, on doit chercher une fonction de s qui ne change pas lorsqu'on écrit, au lieu de s, $-s$ ou $\frac{2}{4}\pi - s$. Telle est la fonction $\cos. 4s$. Donc, si Z est une fonction de z & de $\cos. 4s$; ou, ce qui revient au même, de $xx+yy$ & de $x^4 - 6xxyy + y^4$, l'équation $Z = 0$ donnera une courbe à quatre diamètres. En faisant $t = xx+yy$ & $u = x^4 - 6xxyy + y^4$, on aura pour Z une fonction de t & de u; & si on suppose $v = tt - u$, Z deviendra une fonction de t & de v, c'est-à-dire, de $xx+yy$ & de $xxyy$. On peut dire aussi que Z est une fonction de ces deux quantités $xx+yy$ & $x^4 + y^4$. Pl. VIII. Fig. 72.

353. Pour qu'une courbe exprimée par l'équation $Z = 0$ ait cinq diamètres, il faut que Z soit une fonction de z & de $\cos. 5s$. Par conséquent, si on suppose les coordonnées x & y perpendiculaires, à cause de $\cos. 5s = \frac{x^5 - 10x^3yy + 5xy^4}{z^5}$, Z

devra être une fonction rationnelle de ces expressions $xx + yy$ & $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4$. Ainsi la courbe la plus simple, qui, après le cercle aura cinq diamètres, est une ligne du cinquième ordre, & elle est exprimée par cette équation $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4 = a(xx + yy)^2 + b(xx + yy) + c$. Cette courbe, à cause que tous les facteurs du premier membre sont réels, aura donc cinq asymptotes qui par leurs intersections forment un pentagone régulier, au milieu duquel est le centre C.

354. Il suit de ce qui précède, qu'en général une courbe dont l'équation est $Z = 0$, aura un nombre n de diamètres, dont les deux plus voisins comprennent un angle $= \frac{\pi}{n}$, si Z est une fonction de z & de $cos.\, ns$; ou, si on a entre les coordonnées perpendiculaires une fonction quelconque rationnelle de ces expressions $xx + yy$ & $x^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2}y^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4}y^4 -$ &c.; ou bien cette équation

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \theta ttu + \&c.$$

représentera une courbe à n diamètres, si on suppose $t = xx + yy$, & $u = x^n - \frac{n.(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2}y^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4}y^4 -$ &c. On peut donc trouver des courbes qui aient autant de diamètres qu'on voudra, qui se couperont réciproquement au même point C sous des angles égaux. Et ces équations comprennent en même temps toutes les courbes algébriques, qui ont un nombre donné de diamètres.

Pl. VIII. Fig. 70. 355. Ces sortes de courbes à plusieurs diamètres ont un nombre double de parties égales & semblables entre elles. Ainsi une courbe à deux diamètres aura quatre parties égales & semblables AE, BE, AF & BF. Une courbe à trois dia-
Pl. VIII. Fig. 71. mètres est composée de six parties semblables & égales AE, GE, GB, FB, FH & AH; une courbe à quatre diamè-
Pl. VIII. Fig. 71. tres renfermera huit parties semblables & égales AE, AK, GE, GI, BI, BF, HF & HK; & semblablement le nombre des parties égales est toujours double de celui des

diamètres. De plus, comme nous avons vu ci-dessus qu'il y avoit des courbes qui, sans avoir de diamètres, avoient deux parties semblables, il y aura de même des courbes qui seront composées d'un plus grand nombre de parties semblables & égales, & qui manqueront cependant de diamètres.

356. Commençons par un cas que nous avons déjà traité, & qui est celui où deux parties égales AME, BKF, sont situées à l'opposite l'une de l'autre; car si une courbe est composée seulement de deux parties égales, il est nécessaire qu'elles soient opposées; ce qui se comprendra mieux, quand nous examinerons un plus grand nombre de parties égales. Supposons donc, comme auparavant, $CM = z$, & l'angle $ACM = s$; il est clair que la même valeur de z doit convenir aux angles s & $\pi + s$; car en faisant $ACM = \pi + s$, z deviendra $= CK$; mais on doit avoir $CK = CM$; il faut donc chercher une expression commune aux angles s & $\pi + s$; telle est *tang.* s; car on a *tang.* $s =$ *tang.* $(\pi + s)$. L'équation $Z = 0$ représentera donc la courbe que nous cherchons, si Z est une fonction de z & de *tang.* s, ou une fonction de $xx + yy$ & de $\frac{x}{y}$. Si nous faisons $\frac{x}{y} = t$, nous aurons $xx + yy = yy(1 + tt)$. Donc Z devra être une fonction de t & de $y^2(1 + tt)$, c'est-à-dire, de t & de yy; d'où résultent les mêmes équations que nous avons trouvées ci-dessus. Pl. VIII. Fig. 73.

357. Mais, pour éviter les fractions qui entrent dans l'expression des tangentes, nous pourrons traiter la même question au moyen des sinus & des cosinus; car, puisque *sin.* $2s =$ *sin.* $2(\pi + s)$ & *cos.* $2s =$ *cos.* $2(\pi + s)$; on obtiendra ce qu'on cherche, si on suppose Z une fonction quelconque rationnelle de ces trois formules z, *sin.* $2s$ & *cos.* $2s$, ou de $xx + yy$, $2xy$ & $xx - yy$. Remarquez à cette occasion que, si l'une des expressions *sin.* $2s$ & *cos.* $2s$ manque, la courbe aura en outre un diamètre. La solution de la question revient donc à ce qu'on prenne pour Z une fonction rationnelle de xx, yy & xy; d'où résulte l'équation de la forme suivante :

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma xy + \delta y^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta x^2 y^2 + \theta x y^3 + \iota y^4 + \&c.$$

& si les termes, dans lesquels x ne se trouve pas, manquent, toute l'équation sera divisible par x, & deviendra :

$$o = \beta x + \gamma y + \varepsilon x^3 + \zeta xxy + \eta xyy + \theta y^3 + \kappa x^5 + \&c;$$

ce qui redonne les deux équations que nous avons trouvées ci-dessus.

Pl. VIII. Fig. 74. 358. Cherchons maintenant une courbe qui contienne seulement trois parties semblables & égales AM, BN & DL. Il faudra donc qu'après avoir mené du milieu C trois droites CM, CN & CL sous des angles égaux, ces lignes soient toujours égales entre elles. Ainsi, l'angle ACM étant supposé $= s$, & la droite $CM = z$, la droite z devra être exprimée par s, de manière que la même valeur de z convienne aux trois angles s, $\frac{2}{3}\pi + s$ & $\frac{4}{3}\pi + s$; car on a $MCN = NCL = \frac{2}{3}\pi$. Or les expressions communes à ces trois angles sont *sin.* $3s$ & *cos.* $3s$. C'est pourquoi, si Z est une fonction rationnelle de ces trois quantités $xx + yy$, $3xxy - y^3$ & $x^3 - 3xyy$, l'équation $Z = o$ donnera toutes les courbes demandées. L'équation générale sera donc :

$$o = \alpha + \beta(xx + yy) + \gamma(3xxy - y^3) + \delta(x^3 - 3xyy) + \varepsilon(xx + yy)^2 + \zeta(xx + yy)(3xxy - y^3) + \eta(xx + yy)(x^3 - 3xyy) + \&c.$$

Ainsi les lignes du troisième ordre qui jouiront de cette propriété sont comprises dans cette équation :

$$o = \alpha + \beta xx + \beta yy + \delta x^3 + 3\gamma xxy - 3\delta xyy - \gamma y^3.$$

Pl. VIII. Fig. 73. 359. Si la courbe doit avoir quatre parties égales AM, EN, BK & FL, de manière que quatre droites quelconques CM, CN, CK & CL, menées du milieu C, forment entre elles des angles égaux & soient toutes égales; en faisant l'angle $ACM = s$ & la droite $CM = z$; à cause des angles $MCN = NCK = KCL = 90° = \frac{1}{2}\pi$, l'expression de z par l'angle s doit être telle qu'une même valeur réponde à ces angles

$s, \frac{1}{2}\pi + s, \pi + s, \frac{3}{2}\pi + s$. Or cette propriété appartient aux expreſſions *ſin.* $4s$ & *coſ.* $4s$. Donc l'équation $Z = 0$ donnera une courbe compoſée de quatre parties égales, ſi Z eſt une fonction quelconque rationnelle de ces trois quantités $xx + yy$, $4x^3y - 4xy^3$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$. Conſéquemment l'expreſſion générale pour ces ſortes de courbes ſera :

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \beta y^2 + \gamma x^4 + \delta x^3 y + \varepsilon x^2 y^2 - \delta x y^3 + \gamma y^4 + \&c.$$

360. On voit ſemblablement que, ſi on avoit à chercher une courbe ſans diamètres, mais qui eût cependant cinq parties égales & ſemblables, il faudroit que dans l'équation $Z = 0$, Z fût une fonction rationnelle de ces trois quantités $xx + yy$, $5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$ & $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$; & ſi le nombre des parties égales doit être $= n$, alors Z doit être une fonction rationnelle de ces trois quantités $xx + yy$,

$$nx^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3}y^3 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} x^{n-5}y^5 - \&c.$$

&

$$x^n - \frac{n.(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2}y^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4}y^4 - \&c.$$

Et ſi l'une ou l'autre des deux dernières expreſſions n'entre pas dans l'équation, la courbe aura autant de diamètres que le nombre n contient d'unités.

361. La double énumération que nous venons de faire des courbes à diamètres ou ſans diamètres qui ſont compoſées de quelques parties égales, comprend généralement toutes les courbes algébriques qui ont deux ou pluſieurs parties égales & ſemblables. Pour le faire voir, ſuppoſons une courbe continue qui ait les deux parties OAa, OBb, ſemblables & égales entre elles. Menons AB, & ſur cette ligne comme baſe conſtruiſons un triangle iſoſcèle ACB, dont l'angle C ſoit égal à l'angle O. Puiſque les angles OAC & OBC ſont égaux, les parties de la courbe CAa & CBb ſeront auſſi ſemblables & égales; &, à cauſe de la loi de continuité, ſi on prend les Pl. VIII. Fig. 75.

angles BCD, DCE, &c., égaux chacun à l'angle ACB, & $CD = CE = CA = CB$, la courbe aura en outre les parties Dd, Ee, &c., ſemblables & égales aux parties Aa, Bb. A moins donc que le rapport de l'angle ACB à $360°$ ne ſoit irrationnel, le nombre des parties égales ſera fini, & dans le cas contraire, il ſera infini ; & par conſéquent la courbe ne ſera plus comptée parmi les courbes algébriques. La courbe dont il eſt queſtion, eſt donc renfermée dans celles que nous avons cherchées auparavant, & qui n'avoient point de diamètres.

Pl. VIII. Fig. 76. 362. Mais ſi les deux parties ſemblables & égales tombent en ſens contraire par rapport aux droites AO & BO, de ſorte que la partie AOa ſoit ſemblable & égale à la partie OBb; en menant de part & d'autre les droites AR & BS qui faſſent l'angle $OAR = OBS = \frac{1}{2} AOB$; les lignes AR & BS ſeront parallèles entre elles. Joignons AB, & par le milieu C menons CV parallèlement à AR & à BS; les parties aA, bB, ſeront ſemblables & égales à l'égard de la droite CV; ainſi, à moins que ba ne ſoit $= 0$, comme en allant de b vers a, il répond de l'autre côté un arc aA ſemblable & égal à l'arc bB; ſemblablement, en parcourant de a en e un eſpace $ae = ba$, il répondra au premier de l'autre part un arc ſemblable & égal eE; & à celui-ci un arc dD; de ſorte que la courbe aura une infinité de parties ſemblables & égales ſituées de part & d'autre de la droite CV; & par conſéquent cette courbe ne peut être algébrique.

363. Cela a lieu, ſi la droite AB eſt inclinée aux parallèles AR & BS; ou, ce qui revient au même, ſi dans le triangle AOB les côtés AO & BO ſont inégaux. Mais ſi $AO = BO$, alors la droite AB ſera perpendiculaire aux parallèles AR & BS, & à CV qui paſſera en même temps par le point O. Dans ce cas les points b & a ſe confondront; &, parce que les portions aA & bB ne ſeront pas ſeulement égales & ſemblables, mais encore placées de la même manière de chaque coté de la droite CV, il s'enſuit que cette dernière ligne CV ſera un diamètre de la courbe; ces cas appartiennent aux

courbes que nous avons examinées auparavant, & qui avoient un diamètre. Par conséquent, on peut rapporter aux différens cas que nous avons exposés dans ce chapitre, toutes les courbes algébriques qui ont deux ou plusieurs parties semblables & égales.

CHAPITRE XVI.

De la Manière de trouver les Courbes par la connoissance de quelques Propriétés des Appliquées.

364. Soient P & Q des fonctions quelconques rationnelles de l'abscisse x, & supposons que la nature de la courbe soit exprimée par cette équation $yy - Py + Q = 0$. Il n'y aura donc point d'appliquée qui réponde à une abscisse, ou il y en aura deux; or la somme de ces deux appliquées $= P$, & leur produit $= Q$. Donc, si P est une quantité constante, la somme des deux appliquées correspondantes à chaque abscisse sera constante, & la courbe aura un diamètre. La même chose a lieu, lorsque $P = a + nx$; car alors la ligne droite comprise dans l'équation $z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}nx$ sera aussi un diamètre, en prenant ce mot dans un sens plus étendu qui n'exclud plus l'obliquité des coordonnées entre elles. Mais, si Q est une quantité constante, le rectangle des appliquées sera par-tout constant; l'axe ne pourra donc être rencontré nulle part par la courbe. Mais, si $Q = \alpha + \beta x + \gamma xx$ & que cette expression renferme deux facteurs réels, l'axe coupera la courbe en deux points, & Q sera un multiple d'un rectangle formé par des parties de l'axe; & par conséquent le rectangle des appliquées sera à celui des parties de l'axe dans un rapport constant.

365. Ainsi ces propriétés, qui, comme nous l'avons observé auparavant, conviennent aux Sections Coniques, s'appliquent à une infinité d'autres courbes. Par exemple, cette propriété

que nous avons vu appartenir à l'Hyperbole rapportée à ſes aſymptotes, & qui conſiſte dans la grandeur conſtante du rectangle des deux appliquées qui répondent à la même abſciſſe, lui eſt commune avec toutes les courbes renfermées dans l'équation $yy - Py \pm aa = 0$. De plus, en prenant pour axe la droite EF qui coupe la courbe en deux points E & F, la propriété des Sections Coniques par laquelle le rectangle
Pl. II. Fig. 19. $PM.PN$ conſerve un rapport conſtant avec celui de $PE.PF$, conviendra de même à toutes les courbes compriſes dans cette équation $yy - Py + ax - nxx = 0$; & on aura $PM.PN = PE.PF$, ou $pm.pn = Ep.pF$, ſi $yy - Py = ax - xx$. Cette propriété qu'on fait par les élémens convenir au Cercle, ne lui eſt donc pas ſeulement commune avec une infinité de courbes d'ordres ſupérieurs, mais s'applique encore aux autres Sections Coniques. En effet, ſoit $P = b + nx$, & l'équation $yy - nxy + xx = ax + by$, laquelle appartient au Cercle, lorſque $n = 0$, & que l'angle EPM eſt droit, comprendra auſſi l'Ellypſe, ſi nn eſt moindre que 4; l'Hyperbole, ſi nn eſt plus grande que 4, & la Parabole, ſi $nn = 4$.

Pl. VIII. Fig. 77. 366. Nous concluons de là que dans toute ſection conique AE, BE, dont les axes ou les diamètres principaux ſoient AB, EF, ſi on mène deux droites quelconques pq & mn qui forment avec les axes un angle demi-droit; elles ſe couperont réciproquement en h, de ſorte que $mh.nh = ph.qh$; ce qui eſt une ſuite manifeſte des premières propriétés connues. En effet, ſi on mène par le centre C les droites PQ & MN qui faſſent des angles demi-droits avec les axes principaux, elles ſeront égales entre elles; & par conſéquent $MC.NC = PC.QC$; & comme toutes les droites qui leur ſont parallèles ſe coupent ſuivant la même loi, on aura auſſi par cette raiſon $mh.nh = ph.qh$. On conçoit encore par là que, ſi les droites MN & PQ ſont également inclinées au même axe principal, ou qu'on ait $PCA = NCA$; à cauſe de $CP = CN$, toutes les droites qui leur ſont parallèles, ſe couperont réciproquement de manière que les rectangles des parties ſoient égaux, c'eſt-à-dire que $mh.hn = ph.hq$.

367. Cela poſé, paſſons à d'autres queſtions relatives aux deux

deux appliquées qui répondent à chaque abſciſſe dans l'équation $yy - Py + Q = 0$. Soit l'abſciſſe $AP = x$, à laquelle répondent deux appliquées PM, PN. Cherchons d'abord toutes les courbes qui aient cette propriété que $PM^2 + PN^2$ ſoit une quantité conſtante $= aa$. Puiſque $PM + PN = P$, & $PM.PN = Q$, on aura $PM^2 + PN^2 = PP - 2Q$, & on ſatisfera à la queſtion, ſi $PP - 2Q = aa$, ou $Q = \frac{PP - aa}{2}$; ce qui donnera pour les courbes demandées l'équation $yy - Py + \frac{PP - aa}{2} = 0$. Si on fait $P = 2nx$, on aura une ſection conique qui jouira de la propriété dont il eſt queſtion, $yy - 2nxy + 2nnxx - \frac{1}{2}aa = 0$; équation à l'Ellypſe dans laquelle les abſciſſes ſont comptées du centre. Pl. VIII. Fig. 78.

368. On conclut de là une propriété aſſez belle des Ellypſes. Si on décrit autour de deux diamètres quelconques conjugués AB & EF d'une Ellypſe un parallélogramme $GHIK$, dont les côtés touchent l'Ellypſe aux points A, B, E, F, les diagonales GK & HI de ce parallélogramme couperont en P & p toutes les cordes MN parallèles à l'un des deux diamètres EF, de manière que la ſomme des quarrés $PM^2 + PN^2$ ou $pM^2 + pN^2$ ſoit toujours conſtante & égale à $2CE^2$. De même, ayant mené la corde RS parallèlement à l'autre diamètre AB, on aura $PR^2 + PS^2 = \pi R^2 + \pi S^2 = 2CA^2$. Car, en faiſant $CA = CB = a$, $CE = CF = b$, $CQ = t$, $QM = u$, on aura $aauu + bbtt = aabb$. Mais $a : b :: CQ\ (t) : PQ$, & CP eſt à CQ dans un rapport donné, de $m : 1$, par exemple. Ainſi, en ſuppoſant $CP = x$, $PM = y$, on aura $x = mt$ & $y = u + \frac{bt}{a}$, ou $t = \frac{x}{m}$ & $u = y - \frac{bx}{ma}$. Ces valeurs ſubſtituées donneront l'équation $aayy - \frac{2abxy}{m} + \frac{2bbxx}{mm} = aabb$. Soit $\frac{b}{ma} = n$, elle deviendra $yy - 2nxy + 2n^2x^2 = bb$; ce qui donne l'équation trouvée ci-deſſus, qui indiquoit que $PM^2 + PN^2$ étoit une quantité conſtante. Pl. IX. Fig. 79.

369. Cherchons à préſent les courbes dans leſquelles la Pl. VIII. Fig. 78.

somme des cubes $PM^3 + PN^3$ doit être toujours une quantité constante. Puisque $PM + PN = P$, on aura $PM^3 + PN^3 = P^3 - 3PQ$; c'est pourquoi, si on suppose $PM^3 + PN^3 = a^3$, on aura $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$; & par conséquent l'équation générale de ces sortes de courbes sera $yy - Py + \frac{1}{3}P^2 - \frac{a^3}{3P} = 0$, dans laquelle on peut prendre pour P une fonction quelconque rationnelle de x. La courbe la plus simple qui aura cette propriété, sera donc une ligne du troisième ordre, qui, en supposant $P = 3nx$ & $a = 3nb$, sera exprimée par cette équation :

$$xyy - 3nxxy + 3nnx^3 - 3nnb^3 = 0,$$

laquelle appartient à la seconde espèce, suivant l'énumération qui en a été faite ci-dessus.

370. Semblablement, si on vouloit que $PM^4 + PN^4$ fût une quantité constante; comme $PM^4 + PN^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ$, la quantité Q devroit être déterminée par P, de manière que $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$ ou $Q = PP + \sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$. Mais, parce que P & Q doivent être l'un & l'autre des fonctions rationnelles ou uniformes de x, pour que y ne puisse avoir plus de deux valeurs pour chaque abscisse x, la quantité $\sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$ devroit être rationnelle; & comme cela ne peut être, la fonction Q sera toujours biforme, & sera par conséquent de l'appliquée y une fonction quadriforme. Mais l'équation $yy - Py + Q = 0$ donne $y = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}PP \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}\right)}$; d'où il suit que l'appliquée y ne peut être réelle, à moins qu'on ne prenne positivement $\sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$. Ainsi, quoique la fonction Q soit biforme, l'appliquée y n'aura jamais plus de deux valeurs, dont les quarrés ajoutés fassent une somme constante, comme l'exige l'état de la question.

371. Mais, si on cherche une courbe telle que les puis-

ſances cinquièmes des deux valeurs de y, qui répondent à chaque abſciſſe x, faſſent une ſomme conſtante, ou que $PM^5+PN^5=a^5$; on devra avoir $P^5-5P^3Q+5PQ^2=a^5$. Puis donc que l'équation à la courbe $yy-Py+Q=0$ donne $Q=-yy+Py$, on aura $P^5-5P^4y+10P^3yy-10P^2y^3+5Py^4=a^5$, ou $(P-y)^5+y^5=a^5$. On trouvera de même, ſi PM^6+PN^6 doit être $=a^6$, cette équation $(P-y)^6+y^6=a^6$; & en général, ſi on cherche la courbe dans laquelle $PM^n+PN^n=a^n$, on obtiendra cette équation $(P-y)^n+y^n=a^n$, où l'on peut prendre à volonté pour P une fonction quelconque uniforme de x. La raiſon en eſt facile à ſaiſir; car, puiſque la ſomme des deux appliquées $=P$, ſi l'une eſt y, l'autre ſera $P-y$; ce qui donne ſur-le-champ $(P-y)^n+y^n=a^n$.

372. Si au lieu de Q on élimine P, en mettant dans les équations qui expriment la relation entre P & Q, $P=\frac{yy+Q}{y}$, on aura pour $PM^n+PN^n=a^n$ cette équation $y^n+\frac{Q^n}{y^n}=a^n$. Car, le produit des appliquées étant $=Q$, ſi l'une eſt ſuppoſée $=y$, l'autre ſera $=\frac{Q}{y}$; d'où réſulte ſur-le champ l'équation trouvée. Ainſi nous avons obtenu pour les courbes dans leſquelles $PM^n+PN^n=a^n$, deux équations générales, l'une $(P-y)^n+y^n=a^n$; l'autre $y^n+\frac{Q^n}{y^n}=a^n$. On conclut de la dernière $y^{2n}=a^ny^n-Q^n$ & $y^n=\frac{1}{2}a^n\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^{2n}-Q^n)}$, d'où l'on tire $y=\sqrt[n]{(\frac{1}{2}a^n\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^{2n}-Q^n)})}$; fonction biforme ſeulement, & qui ne donne pas plus de deux appliquées pour chaque abſciſſe, pourvu que Q^n ſoit une fonction rationnelle ou uniforme de x. Mais la première équation $y^n+(P-y)^n=a^n$ a l'avantage d'avoir un nombre de dimenſions moindre.

373. Ces équations ne réſolvent pas ſeulement la queſtion où n eſt un nombre entier poſitif, mais encore celles où n eſt un nombre ſoit négatif, ſoit fractionnaire. Ainſi

ſi on doit avoir	on aura cette équation
$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{a}$	$aP = Py - yy$ ou $aQ + ayy = Qy$
$\frac{1}{PM^2} + \frac{1}{PN^2} = \frac{1}{a^2}$	$a^2y^2 + a^2(P-y) = y^2(P-y)^2$ ou $a^2Q^2 + a^2y^4 = Q^2y^2$
$\frac{1}{PM^3} + \frac{1}{PN^3} = \frac{1}{a^3}$	$a^3y^3 + a^3(P-y)^3 = y^3(P-y)^3$ ou $a^3Q^3 + a^3y^6 = Q^3y^3$

&c.

Quant aux expoſans fractionnaires, les choſes ſe paſſeront comme il ſuit :

ſi on doit avoir	on aura cette équation
$\sqrt{PM} + \sqrt{PN} = \sqrt{a}$	$\sqrt{y} + \sqrt{(P-y)} = \sqrt{a}$, ou celle-ci $y = \sqrt{ay} - \sqrt{Q}$ lesquelles, rendues rationnelles, deviennent $y^2 - Py + \frac{1}{4}(a-P)^2 = 0$, ou $y^2 - (a - 2\sqrt{Q})y + Q = 0$
$\sqrt[3]{PM} + \sqrt[3]{PN} = \sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{(P-y)} = \sqrt[3]{a}$, ou $y^2 - Py + \frac{1}{27a}(a-P)^3 = 0$ ou bien $\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{\frac{Q}{y}} = \sqrt[3]{a}$, ou $y^2 - (a - 3\sqrt[3]{aQ})y + Q = 0$

&c.

Toutes les courbes algébriques dans leſquelles on a par-tout

$PM^n + PN^n = a^n$, peuvent donc être renfermées de cette manière dans une ſeule équation générale, ſoit qu'on ſuppoſe n un nombre entier poſitif, ſoit qu'on la ſuppoſe un nombre négatif ou fractionnaire.

374. Ce que nous venons d'expoſer ici de la condition de deux appliquées qui répondent à une même abſciſſe x, on peut, en ſuivant la même méthode, l'appliquer à trois appliquées qui répondroient à chaque abſciſſe. L'équation générale pour les courbes que chaque appliquée coupe en trois points, eſt celle-ci :

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0,$$

les lettres P, Q & R déſignant des fonctions quelconques uniformes de x. Soient p, q, r, les trois appliquées qui répondent à l'abſciſſe x, dont l'une à la vérité eſt toujours réelle; mais nous avons ici principalement égard aux endroits de la courbe où toutes les trois appliquées ſont réelles. On aura par la nature des équations $P = p + q + r$, $Q = pq + pr + qr$ & $R = pqr$; par conſéquent, ſi on deſire une courbe dans laquelle ou $p + q + r$, ou $pq + pr + qr$, ou pqr, ſoit une quantité conſtante; il n'y aura rien autre choſe à faire qu'à égaler à une conſtante ou P, ou Q, ou R; les deux autres reſtant arbitraires.

375. On pourra donc trouver auſſi les courbes dans leſquelles $p^n + q^n + r^n$ eſt par-tout une quantité conſtante; car on a, comme on l'a vu dans le premier livre,

$$p + q + r = P$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 2Q$$
$$p^3 + q^3 + r^3 = P^3 - 3PQ + 3R$$
$$p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$$
$$p^5 + q^5 + r^5 = P^5 - 5P^3Q + 5PQQ + 5PPR - 5QR$$
&c.

Enſuite, ſi n eſt un nombre négatif, en faiſant $z = \frac{1}{y}$, on aura

$z^3 - \frac{Qzz}{R} + \frac{Pz}{R} - \frac{1}{R} = 0$, dont les trois racines font $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$. On aura donc pareillement

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{Q}{R}$$
$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{Q^2 - 2PR}{RR}$$
$$\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} = \frac{Q^3 - 3PQR + 3RR}{R^3}$$
$$\frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r^4} = \frac{Q^4 - 4PQ^2R + 4QRR + 2P^2R^2}{R^4},$$
&c.

Une expreffion de cette forme, égalée à une quantité conftante, donnera donc la relation convenable entre les fonctions P, Q & R. Et fi, au moyen de cette derniere équation, on élimine de celle-ci $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ l'une des fonctions P, Q ou R, on obtiendra l'équation pour la courbe cherchée. Ainfi, lorfqu'on demande une courbe dans laquelle $p^3 + q^3 + r^3 = a^3$, on fera $P^3 - 3PQ + 3R = a^3$; &, à caufe de $R = y^3 - Py^2 + Qy$, on aura cette équation $3y^3 - 3Py^2 + 3Qy + P^3 - 3PQ = a^3$ pour les courbes qui fatisfont à la queftion.

376. On voit que, fi n eft un nombre entier pofitif ou négatif, la folution s'obtiendra facilement par les formules que nous venons de donner; mais il fe préfente une plus grande difficulté lorfque n eft un nombre fractionnaire. Propofons-nous de trouver une courbe dans laquelle on ait $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = \sqrt{a}$; nous prendrons de part & d'autre les quarrés; &, à caufe de $p + q + r = P$, nous aurons $P + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} = a$, ou $\frac{a - P}{2} = \sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}$. Elevant de nouveau les deux membres au quarré, & confidérant que $pq + pr + qr = Q$, nous aurons $\frac{(a - P)^2}{4} = Q + 2\sqrt{p^2qr} + 2\sqrt{pq^2r} + 2\sqrt{pqr^2} = Q + 2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{pqr} = 2\sqrt{aR} + Q$; d'où naît l'équation $(a - P)^2 = 4Q + 8\sqrt{aR}$,

ou $Q = \frac{(a-P)^2}{4} - 2\sqrt{aR}$. Les courbes cherchées seront donc contenues dans cette équation $y^3 - Pyy + (\frac{1}{4}(a-P)^2 - 2\sqrt{aR})y - R = 0$; ou (en faisant disparoître l'irrationnalité, à cause de $R = \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a}$,) dans celle-ci $y^3 - Pyy + Qy - \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a} = 0$.

377. Mais cette opération devient trop pénible, lorsqu'on propose les racines de puissances plus élevées; il faudra donc prendre une autre voie, que l'exemple suivant est très-propre à faire connoître. A cet effet, cherchons la courbe dans laquelle $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{a}$. Soit $\sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{pr} + \sqrt[3]{qr} = v$; à cause que $\sqrt[3]{pqr} = \sqrt[3]{R}$, on aura $\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} + \sqrt[3]{r^2} = \sqrt[3]{a^2} - 2v$; & $p + q + r = a - 3v\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{R} = P$. Ensuite, $\sqrt[3]{p^2q^2} + \sqrt[3]{p^2r^2} + \sqrt[3]{q^2r^2} = v^2 - 2\sqrt[3]{aR}$, & $pq + pr + qr = Q = v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt[3]{RR}$. Après avoir trouvé pour P & pour Q des valeurs convenables, prenant pour v une fonction quelconque de x, on obtiendra pour les courbes, dont il s'agit, cette équation :

$$y^3 - (a - 3v\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{R})y^2 + (v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt[3]{R^2})y - R = 0.$$

378. Cependant, malgré ces difficultés, on pourra arriver à une solution générale. Car, puisque dans l'équation $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, y désigne ces trois appliquées p, q & r; en faisant $p = y$, on aura $P = y + q + r$, & $Q = qy + ry + qr$, ou $q + r = P - y$ & $qr = Q - y(q + r) = Q - Py + yy$. D'où l'on tire $q - r = \sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}$: & par conséquent

$$q = \frac{1}{2}(P - y) + \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}$$

&

$$r = \frac{1}{2}(P - y) - \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}.$$

Ainsi, lorsqu'on cherche une courbe dans laquelle $p^n + q^n + r^n = a^n$, l'équation suivante satisfera à la question :

$y^n + \left(\frac{1}{2}(P-y) + \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}\right)^n + \left(\frac{1}{2}(P-y) - \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}\right)^n = a^n$. Remarquez que cette équation réfoud également la queftion, foit qu'on prenne pour n un nombre entier, foit qu'on prenne un nombre fractionnaire.

379. On peut par la même méthode réfoudre une infinité d'autres queftions relatives à la condition de ces trois appliquées; on peut, par exemple, prendre pour a^n une fonction quelconque de x; outre la fomme de puiffances quelconques, on peut auffi fe propofer d'autres fonctions de p, q & r, pourvu que la permutation réciproque de ces quantités ne change rien dans l'expreffion. Ainfi, on pourra trouver trois appliquées p, q & r, correfpondantes à la même abfciffe x, qui forment un triangle dont l'aire foit conftante. Car la furface de ce triangle $= \frac{1}{4}\sqrt{(2p^2q^2 + 2p^2r^2 + 2q^2r^2 - p^4 - q^4 - r^4)}$; nous la fuppoferons $= aa$. Puifque $p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2QQ$, & $p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = Q^2 - 2PR$; on aura $16a^4 = 4P^2Q - 8PR - P^4$, & $R = \frac{1}{2}PQ - \frac{1}{8}P^3 - \frac{2a^4}{P}$; & par conféquent l'équation $y^3 - Pyy + Qy - \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{8}P^3 + \frac{2a^4}{P} = 0$. Si P eft une quantité conftante $= 2b$, le périmètre de tous ces triangles fera de plus conftant. Par conféquent, fi on fuppofe $Q = mxx + nbx + kaa$, on aura une ligne du troifième ordre exprimée par cette équation $y^3 + mxxy - 2byy + nbxy - mbxx + kaay - nbbx + \frac{a^4}{b} - kaab + b^3 = 0$. Telle fera la propriété de cette courbe, que la fomme des trois appliquées p, q & r, qui répondent à chaque abfciffe, fera d'abord une quantité conftante $= 2b$; & que de plus l'aire du triangle, formé par les trois côtés p, q & r, fera toujours la même & $= aa$.

380. On peut, moyennant la même méthode, réfoudre des queftions femblables à l'égard de quatre appliquées ou davantage, qui répondroient à la même abfciffe. Comme cette matière ne

ne préſente plus aucune difficulté, paſſons à d'autres queſtions, où il ne s'agira pas de comparer des appliquées qui répondent au même, mais à différens points. Soit propoſée à cet effet une certaine relation entre les appliquées PM & QN, dont l'une réponde à l'abſciſſe $AP = +x$, & l'autre à l'abſciſſe $AQ = -x$. Soit $y = X$ l'équation à cette courbe, X étant une fonction quelconque de x qui donne l'appliquée PM; & qui, en mettant par-tout $-x$ au lieu de x, donnera l'autre appliquée QN. Conſéquemment, ſi X étoit une fonction paire de $x = P$, QN ſeroit $= PM$; mais, ſi X eſt une fonction impaire de $x = Q$, on aura $QN = -PM$; & ſi P & R déſignent des fonctions paires de x, tandis que Q & S en déſignent des fonctions impaires, & que l'équation à la courbe ſoit $y = \frac{P+Q}{R+S}$, on aura $PM = \frac{P+Q}{R+S}$ & $QN = \frac{P-Q}{R-S}$. Pl. IX. Fig. 80.

381. Qu'on ait à trouver une courbe dans laquelle $PM + QN$ ſoit une quantité conſtante $= 2AB$, par exemp. $= 2a$; il eſt clair que l'équation $y = a + Q$ ſatisfait à cette queſtion, Q étant une fonction impaire de x; car on aura $PM = a + Q$ & $QN = a - Q$; & par conſéquent $PM + QN = 2a$, ainſi qu'il eſt requis. Donc, ſi on fait $y - a = u$, on aura $u = Q$, équation à la même courbe; la droite Bp étant priſe pour axe & le point B pour l'origine x des abſciſſes, de façon que $Bp = x$ & $pM = u$. Or l'équation $u = Q$ apprend que la courbe eſt compoſée de parties égales diſpoſées de part & d'autre autour du centre B. Ayant donc décrit une courbe quelconque MBN de cette nature, & pris pour axe une droite quelconque PQ, on aura ſatisfait à la queſtion, de ſorte qu'en abaiſſant du centre B ſur cet axe une perpendiculaire BA, & prenant de part & d'autre des abſciſſes égales $AP = AQ$, on aura toujours pour $PM + PQ$ une ſomme conſtante $= 2AB$.

382. Or nous avons trouvé ci-deſſus pour les courbes qui ont deux parties égales diſpoſées alternativement autour du centre C, deux ſortes d'équations entre les coordonnées x & u, ſavoir :

I.

$$o = \alpha x + \beta u + \gamma x^3 + \delta x^2 u + \varepsilon x u^2 + \zeta u^3 + \eta x^5 + \theta x^4 u + \&c.$$

I I.

$$o = \alpha + \beta x^2 + \gamma x u + \delta u^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 u + \eta x^2 u^2 + \theta x u^3 + \&c.$$

Par conféquent, fi dans chacune de ces expreffions on fuppofe $u = y - a$, on aura deux équations générales entre les coordonnées x & y pour les courbes algébriques, qui fatisfont à la queftion propofée. D'abord toute ligne droite menée par le point B fatisfait; enfuite toute fection conique qui aura fon centre au point B donnera auffi une folution. Mais, comme dans ce dernier cas il répond une double appliquée à chaque abfciffe AP & AQ (à moins pourtant que la courbe ne foit une hyperbole, & que les appliquées ne foient parallèles à l'autre afymprote) on aura quatre appliquées qui formeront deux à deux une même fomme.

383. Si on cherche une courbe MBN dans laquelle ce ne foit pas la fomme de deux appliquées PM & QN, mais celle de leurs puiffances quelconques qui doit être conftante; on s'y prendra d'une manière femblable pour réfoudre la queftion. En effet, fi on doit avoir $PM^n + QN^n = 2a^n$; il eft clair que la condition eft remplie par l'équation $y^n = a^n + Q$, Q étant une fonction quelconque impaire de x; car on aura $PM^n = a^n + Q$, & $QN^n = a^n - Q$; & par conféquent $PM^n + QN^n = 2a^n$. Soit $y^n - a^n = u$, l'équation réfultante $u = Q$ exprimera une courbe dont les coordonnées x & u formeront deux parties égales placées alternativement autour du centre B. C'eft pourquoi, fi dans les équations de l'article précédent on écrit partout, au lieu de u, $y^n - a^n$, on obtiendra les équations générales qui fatisfont à la queftion.

384. Ces fortes de queftions ne préfentant point de difficulté, foit propofée celle-ci où l'on demande une courbe MBN, dans laquelle, prenant fur l'axe de part & d'autre

d'un point fixe A des abſciſſes égales AP, AQ, le rectangle des appliquées $PM.QN$ ait toujours une valeur conſtante $= aa$. On peut donner de cette queſtion pluſieurs ſolutions particulières, dont nous développerons les principales avant que de nous occuper de la ſolution générale. Soit P une fonction paire & Q une fonction impaire de l'abſciſſe $AP = x$, & ſuppoſons l'appliquée $PM = y = P + Q$, nous en tirerons, en faiſant x négatif, $QN = P - Q$. Il faut donc que $PM \times QN = PP - QQ = aa$, ou $P = \sqrt{(aa + QQ)}$; cette expreſſion $\sqrt{(aa + QQ)}$, à cauſe que QQ eſt une fonction paire de x, eſt elle-même une fonction paire, & donne pour P une valeur convenable. On aura donc pour la courbe demandée cette équation $y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$, en prenant pour Q une fonction quelconque impaire de x.

385. Mais, à cauſe de l'ambiguité du ſigne radical, il y aura deux appliquées, l'une poſitive, l'autre négative, qui répondront à chaque abſciſſe x; ainſi à l'abſciſſe AP répondront les appliquées $Q + \sqrt{(aa + QQ)}$ & $Q - \sqrt{(aa + QQ)}$, tandis qu'à l'abſciſſe AQ répondront les appliquées $-Q + \sqrt{(aa + QQ)}$ & $-Q - \sqrt{(aa + QQ)}$; d'où il ſuit que la courbe aura des parties alternativement égales, ſituées autour du point A comme centre; & il eſt à remarquer qu'on ne peut ici faire diſparoître l'ambiguité du ſigne, en prenant pour Q une fonction impaire, telle que $\frac{aa}{4x} - x$, par laquelle $a^2 + Q^2$ devienne un quarré; car $\sqrt{(aa + QQ)}$ deviendroit $= \frac{aa}{4x} + x$; ce qui donneroit une fonction impaire qui ne pourroit plus être ſubſtituée à P. On doit donc prendre pour Q une fonction impaire de x, telle que $aa + QQ$ ne devienne pas un quarré.

386. Semblablement, ſi on fait $y = (P + Q)^n$, QN deviendra $= (P - Q)^n$; & conſéquemment on devra avoir $(P^2 - Q^2)^n = aa$; on tirera de là $P^2 = a^{\frac{2}{n}} + Q^2$, & $P = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)}$; quantité qui peut être priſe pour P, pourvu qu'elle ſoit irrationnelle. Ainſi on aura, pour ſatisfaire à la

queſtion, cette équation $y = (Q + \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)})^n$. Au reſte, la conſtruction de ces courbes ſera facile; il n'y aura qu'à décrire une courbe quelconque qui ait deux parties ſemblables & égales placées alternativement autour du centre A, & faire z l'appliquée correſpondante à l'abſciſſe $AP = x$; z ſera une fonction impaire de x, qui par conſéquent pourra être miſe à la place de Q. Mais l'équation qui vient d'être trouvée donne $y^{\frac{1}{n}} - Q = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)}$, & partant $Q = z = \frac{y^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{2}{n}}}{2y^{\frac{1}{n}}}$; donc, ſi on ſuppoſe $\frac{1}{n} = m$, & ſi dans l'équation donnée entre z & x on fait par-tout $z = \frac{y^{2m} - a^{2m}}{2y^m}$, on obtiendra entre x & y l'équation qui convient à la courbe demandée. Ayant donc trouvé deux équations entre z & x, ſavoir:

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma xz + \delta z^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 z + \eta x^2 z^2 + \theta x z^3 + \&c.$$

ou

$$0 = \alpha x + \beta z + \gamma x^3 + \delta x^2 z + \varepsilon x z^2 + \zeta z^3 + \eta x^5 + \theta x^4 z + \&c.$$

il ne s'agit plus que de faire dans ces équations $z = y^m - \frac{a^{2m}}{y^m}$ (nous négligeons le diviſeur 2, parce qu'on peut prendre pour Q un multiple quelconque de z), pour avoir les deux équations générales des courbes qui ſatisfont à la queſtion.

387. Si, outre P, R eſt une fonction paire, que Q & S ſoient à la fois des fonctions impaires de x, & qu'on prenne pour les courbes cherchées cette équation $y = \frac{P+Q}{R+S} = PM$; on aura $QN = \frac{P-Q}{R-S}$ & $\frac{PP-QQ}{RR-SS} = aa$; condition à laquelle il eſt très-facile de ſatisfaire, en ſuppoſant $y = \frac{P+Q}{P-Q}a$, ou même $y = \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^n a$. On évite de cette manière le premier inconvénient où deux appliquées, ou davantage, répondoient à chaque abſciſſe, & l'on trouve à préſent des courbes

qui pour chaque abſciſſe donnent ſeulement une ſeule appliquée. Ainſi la courbe la plus ſimple qui ſatisfera, ſera une ligne du ſecond ordre exprimée par cette équation $y = \frac{b+x}{b-x}a$, c'eſt-à-dire, une hyperbole. Mais l'hyperbole ſatisfait auſſi à l'équation trouvée auparavant $y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$, en faiſant $Q = nx$; car on aura $yy - 2nxy = aa$. On peut donc réſoudre le problême de deux manières par le moyen de l'Hyperbole.

388. Ces préliminaires poſés, il eſt clair que l'équation à la courbe cherchée doit être telle, qu'en mettant $-x$ au lieu de x & $\frac{aa}{y}$ au lieu de y, elle ne ſubiſſe aucun changement. Ces ſortes de formules ſont $\left(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n}\right)P$ & $\left(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n}\right)Q$; pourvu à la vérité que P déſigne une fonction paire & Q une fonction impaire de x. Donc, ſi on forme une équation compoſée d'autant de ces ſortes de formules qu'on voudra, elle appartiendra à la courbe qui doit ſatisfaire à la queſtion propoſée. Donc, ſi M, P, R, T, &c., repréſentent des fonctions quelconques paires de x; & N, Q, S, V, &c., des fonctions impaires, on aura l'équation générale qui ſuit:

$$0 = M + \left(\frac{y}{a} + \frac{a}{y}\right)P + \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{a^2}{y^2}\right)R + \left(\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3}\right)T \text{ \&c.}$$
$$+ \left(\frac{y}{a} - \frac{a}{y}\right)Q + \left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{a^2}{y^2}\right)S + \left(\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^8}\right)V \text{ \&c.}$$

Si on la multiplie par une fonction impaire de x, les fonctions paires ſe changeront en impaires, & réciproquement; d'où réſulte l'équation ſuivante qui ſatisfera de même à la queſtion.

$$0 = N + \left(\frac{y}{a} + \frac{a}{y}\right)Q + \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{a^2}{y^2}\right)S + \left(\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3}\right)V \text{ \&c.}$$
$$+ \left(\frac{y}{a} - \frac{a}{y}\right)P + \left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{a^2}{y^2}\right)R + \left(\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^3}\right)T \text{ \&c.}$$

Ces formules délivrées de fractions donneront les deux équations rationnelles de l'ordre indéfini n.

I.

$$o = a^n y^n M + a^{n-1} y^{n+1}(P+Q) + a^{n-2} y^{n+2}(R+S) + a^{n-3} y^{n+3}(T+V) \text{ \&c.}$$
$$+ a^{n+1} y^{n-1}(P-Q) + a^{n+2} y^{n-2}(R-S) + a^{n+3} y^{n-3}(T-V) \text{ \&c.}$$

II.

$$o = a^n y^n N + a^{n-1} y^{n+1}(P+Q) + a^{n-2} y^{n+2}(R+S) + a^{n-3} y^{n+3}(T+V) \text{ \&c.}$$
$$- a^{n+1} y^{n-1}(P-Q) - a^{n+2} y^{n-2}(R-S) - a^{n+3} y^{n-3}(T-V) \text{ \&c.}$$

389. Mais on peut auſſi prendre pour n des nombres fractionnaires dans les formules $\left(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n}\right) P$ & $\left(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n}\right) Q$. Si au lieu de n, on écrit les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c., l'irrationalité diſparoîtra d'elle-même des équations générales qui en réſultent; car on aura :

$$o = \frac{y+a}{\sqrt{ay}} P + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}} R + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} T + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}} Q + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}} S + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} V + \text{\&c.}$$

ou cette autre équation

$$o = \frac{y+a}{\sqrt{ay}} Q + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}} S + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} V + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}} P + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}} R + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} T + \text{\&c.}$$

Ces équations, délivrées de leurs fractions, ſe changent en celles-ci :

$$o = + a^n y^{n+1}(P+Q) + a^{n-1} y^{n+2}(R+S) + a^{n-2} y^{n+3}(T+V) \text{ \&c.}$$
$$+ a^{n+1} y^n (P-Q) + a^{n+2} y^{n-1}(R-S) + a^{n+3} y^{n-2}(T-V) \text{ \&c.}$$

&

$$o = + a^n y^{n+1}(P+Q) + a^{n-1} y^{n+2}(R+S) + a^{n-2} y^{n+3}(T+V) \text{ \&c.}$$
$$- a^{n+1} y^n (P-Q) - a^{n+2} y^{n-1}(R-S) - a^{n+3} y^{n-2}(T-V) \text{ \&c.}$$

390. Il eſt à préſent facile de trouver, au moyen de ces quatre équations, quelles ſont les lignes de chaque ordre qui réſolvent le problême. D'abord, pour le premier ordre, la ligne droite parallèle à l'axe AP, & paſſant par le point B, ſatiſfait ; enſuite, pour le ſecond ordre, les deux premières équations, en faiſant $n = 1$, donnent $\alpha a x y + y y - a a = o$, équation que l'on tire de la ſeconde formule, en faiſant $N = \alpha x$, $P = 1$ & $Q = o$; car la première ne donne aucune ligne courbe ; mais les deux dernières, en faiſant $n = o$, donnent $y(\alpha + \beta x) \pm a(\alpha - \beta x) = o$. Quant aux lignes du troiſième ordre, les deux premières équations donneront, en ſuppoſant $n = 1$,

$$o = a y (\alpha + \beta x x) + y y (\gamma + \delta x) + a a (\gamma - \delta x)$$

&

$$o = \alpha a x y + y y (\gamma + \delta x) - a a (\gamma - \delta x)$$

& les deux dernières donneront, en ſuppoſant $n = o$ & $n = 1$,

$$o = y(\alpha + \beta x + \gamma x x) \pm a(\alpha - \beta x + \gamma x x)$$

&

$$o = a y^2 (\alpha + \beta x) + y^3 \pm a^2 y (\alpha - \beta x) \pm \alpha^3$$

On trouvera d'une manière ſemblable celles des courbes des ordres ſupérieurs, qui ſatisferont à la queſtion.

CHAPITRE XVII.

De la Manière de trouver les Courbes en vertu d'autres Propriétés.

391. LES queſtions que nous avons réſolues dans le chapitre précédent, étoient de nature à être facilement ramenées à une équation entre des coordonnées, qui formoient entre elles des angles ou droits ou obliques. Nous allons donc examiner à préſent d'autres propriétés qui ne ſuppoſent pas expreſſément que les appliquées ſoient parallèles entre elles; comme s'il étoit queſtion, par exemple, d'un examen relatif à des lignes droites menées d'un point donné à la courbe. Pl. IX. Fig. 81. Soit C le point d'où les droites CM, CN, ſont menées à la courbe; & propoſons-nous quelque propriété qui concerne ces lignes; il faudra s'écarter de la méthode ſuivie juſqu'ici, d'exprimer les courbes par des coordonnées, pour introduire ces droites dans l'équation.

392. Comme il y a pluſieurs manières de repréſenter la nature des lignes par des équations formées entre deux variables, nous prendrons, dans la circonſtance actuelle, pour l'une de ces dernières quantités la droite CM menée du point C à la courbe; &, comme il faut une autre variable pour déterminer la poſition de cette droite, on prendra pour axe une ligne droite CA menée à volonté par le point C; & l'angle ACM, ou une quantité quelconque qui en dépende, ſera très-propre à tenir lieu de l'autre variable dont on a beſoin. Soit donc $CM = z$, & l'angle $ACM = \varphi$, dont on fait entrer le ſinus ou la tangente dans l'équation; il eſt clair que, ſi on a une équation quelconque entre z & *ſin.* φ ou *tang.* φ, elle fera connoître la nature de la courbe; car pour chaque angle ACM on aura la longueur de la droite CM; ce qui déterminera par conſéquent la poſition du point M de la courbe.

393.

393. Examinons un peu attentivement cette nouvelle manière d'exprimer les courbes, & d'abord égalons la distance z à une fonction quelconque du sinus de l'angle φ; si cette fonction est uniforme, il sembleroit que la droite CM devroit rencontrer la courbe en un seul point M, parce qu'il ne répond à l'angle $ACM = \varphi$ qu'une seule valeur de la droite CM. Mais, si on augmente φ de deux angles droits, la position de la droite CM menée par le point C sera la même, avec cette différence qu'elle tombera en sens contraire; & il en résultera ainsi une autre intersection de la même droite CM avec la courbe, quoique z soit égal à une fonction uniforme du sinus de l'angle φ. Si, par exemple, P représente cette fonction du sinus de l'angle φ, ou si $z = P$, ce qui détermine le point M de la courbe; qu'on augmente ensuite l'angle φ de deux angles droits, ou qu'on fasse son sinus négatif, de manière que P devienne Q, ou que $z = Q$, on obtiendra une nouvelle intersection de la même droite prolongée CM avec la courbe m, en prenant $Cm = Q$. Pl. IX. Fig. 82.

394. Ainsi, quoique P soit une fonction uniforme du sinus de l'angle φ, cependant la droite CM, menée sous un angle donné $ACM = \varphi$ par le point C, rencontrera la courbe en deux points M & m, à moins que Q ne soit $= -P$. Donc, si chaque droite CM ne doit rencontter la courbe qu'en un seul point, cette quantité P sera une fonction impaire du sinus de l'angle φ. La même chose a lieu, si P est une fonction impaire du cosinus de l'angle φ. Toutes les courbes que les droites menées de C couperont en un seul point, seront donc renfermées dans cette équation $z = P$, si P est une fonction impaire du sinus ou du cosinus de l'angle $ACM = \varphi$.

395. Puis donc que les courbes qui sont coupées en un seul point par les droites tirées du point C, sont renfermées dans l'équation $z = P$, P étant une fonction impaire du sinus & du cosinus de l'angle φ, ou une fonction dont la valeur devient négative, lorsqu'on prend négativement le sinus & le cosinus de l'angle φ, il sera facile de trouver pour ces sortes de courbes une équation entre les coordonnées perpendiculaires. En effet, ayant abaissé du point M sur l'axe CA la per- Pl. IX. Fig. 81.

pendiculaire MP, si on fait $CP = x$, $PM = y$, on aura $\frac{y}{z} = \text{sin.}\ \varphi$, & $\frac{x}{z} = \text{cos.}\ \varphi$; d'où il suit que, si P est une fonction impaire de $\frac{x}{z}$ & de $\frac{y}{z}$, toutes ces courbes seront renfermées dans cette équation $z = P$. En commençant donc par les plus simples, on aura :

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y};$$

& passant ensuite aux puissances plus élevées

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y} + \frac{\varepsilon x^3}{z^3} + \frac{\zeta x^2 y}{z^3} + \frac{\eta x y^2}{z^3} + \frac{\theta y^3}{z^3} + \frac{\iota xx}{yz} + \frac{\varkappa yy}{xz} + \frac{\lambda yz}{xx} + \&c.$$

396. Si on divise cette équation par z, il ne restera plus que des puissances paires de z; par conséquent, comme $z = \sqrt{(xx+yy)}$, en éliminant z, on fera disparoître toute irrationalité; & il restera une équation rationnelle entre x & y. L'équation sera donc telle que l'unité, ou une quantité constante, sera égale à une fonction de -1 dimension de x & de y. Si P est une fonction de cette nature, on aura $C = P$, & partant $\frac{1}{C} = \frac{1}{P}$; mais $\frac{1}{P}$ est une fonction d'une dimension de x & de y; d'où il suit que, si on égale à une constante une fonction quelconque d'une dimension de x & de y, on aura l'équation de la courbe, que les droites menées par le point C rencontrent en un seul point.

397. Soit P une fonction de n dimensions de x & de y, & Q une fonction de $n+1$ dimensions de x & de y, $\frac{Q}{P}$ sera une fonction d'une seule dimension; & conséquemment toutes les courbes, que nous considérons ici, seront renfermées dans l'équation $\frac{Q}{P} = c$, ou $Q = cP$. Ainsi, n désignant un nombre quelconque, l'équation générale de ces courbes sera $\alpha x^{n+1} + \beta x^n y +$

$\gamma x^{n-1}y^2 + \delta x^{n-2}y^3 + \varepsilon x^{n-3}y^4 + \&c. = c\,(A x^n + B x^{n-1}y + C x^{n-2}y^2 + D x^{n-3}y^3 + \&c.)$. Les lignes de chaque ordre que les droites menées du point C coupent ſeulement en un point, ſeront donc compriſes dans les équations ſuivantes :

I.

$$\alpha x + \beta y = c$$

II.

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = c\,(Ax + By)$$

III.

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 = c\,(Ax^2 + Bxy + Cy^2)$$

IV.

$$\alpha x^4 + \beta x^3 y + \gamma x^2 y^2 + \delta xy^3 + \varepsilon y^4 = c\,(Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3)$$

&c.

398. D'abord, la première équation fait voir que la ligne droite ſatisfait; & que par conſéquent elle ne peut être coupée qu'en un point par d'autres droites menées par un point donné. La ſeconde eſt l'équation générale des Sections Coniques, pourvu que la courbe paſſe par le point C; cette derniere interſection étant commune à toutes les droites qui partent du point C, on ne la compte point; &, puiſque les ſections coniques ne peuvent être rencontrées par une droite quelconque qu'en deux points, il s'enſuit que toute droite priſe à volonté ſur un point quelconque C de la courbe, ne donnera qu'une interſection. Or les courbes des ordres ſuivans paſſent toutes par le même point C; ce qui donne à la vérité une interſection, mais dont on ne tient pas compte, parce qu'elle eſt commune à toutes les droites qui paſſent par ce point. C'eſt pourquoi les équations précédentes ne contiennent des courbes des ordres ſupérieurs que celles qui ſont coupées en un ſeul point par les droites tirées du point C. Nous

avons donc fait une énumération complète de toutes les courbes algébriques que les lignes droites, menées par un point donné C, ne rencontrent qu'en un point.

399. Passons à présent à la recherche des courbes que les droites menées par le point C coupent en deux points, ou ne rencontrent nulle part, lorsque les racines de l'équation qui indique une double intersection, deviennent imaginaires. Puisque la droite $CM = z$ doit avoir pour chaque angle $ACM = \varphi$ une double valeur; elle sera déterminée par une équation du second degré. Soit donc $zz - Pz + Q = 0$, où P & Q doivent être des fonctions de l'angle φ, ou bien de son sinus ou de son cosinus. Mais, puisque la droite CM ne doit couper la courbe qu'en deux points M & N, non seulement P & Q doivent être des fonctions uniformes, mais il faut encore qu'en augmentant l'angle φ de deux angles droits, il n'en résulte aucune nouvelle intersection; ce qui aura lieu, lorsque P sera une fonction impaire du sinus & du cosinus de l'angle φ, de sorte qu'il prenne une valeur négative lorsque le sinus & le cosinus sont pris négativement; mais alors Q doit être une fonction paire du même sinus & du même cosinus.

400. En supposant les coordonnées perpendiculaires $CP = x$ & $PM = y$; on aura $\frac{y}{z} = \mathit{sin}.\, \varphi$ & $\frac{x}{z} = \mathit{cos}.\, \varphi$; P devra donc être une fonction impaire de $\frac{x}{z}$ & de $\frac{y}{z}$, & Q une fonction paire de $\frac{x}{z}$ & de $\frac{y}{z}$. Il suit de là que $\frac{P}{z}$ sera une fonction rationnelle de x & de y, & une fonction homogène de -1 dimension. Semblablement, $\frac{Q}{zz}$ sera une fonction rationnelle & homogène de -2 dimensions de x & de y. Si donc on suppose L une fonction homogène de $(n+2)$ dimensions, M une fonction homogène de $(n+1)$ dimensions, & N une fonction quelconque de n dimensions de x & de y; la fraction $\frac{M}{L}$ donnera une fraction convenable pour $\frac{P}{z}$, & $\frac{N}{L}$ une fonction convenable pour $\frac{Q}{zz}$. Ainsi, puisque $zz - Pz + Q = 0$, on aura $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{zz} = 0$.

D'où l'on conclura pour les courbes qui ſont coupées en deux points par les droites qui paſſent par le point C, l'équation générale $1 - \frac{M}{L} + \frac{N}{L} = 0$, ou $L - M + N = 0$, dans laquelle $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nzz}{L} = \frac{N(xx+yy)}{L}$; P ſera donc une fonction irrationnelle de x & de y, à cauſe de $z = (\sqrt{x^2+y^2})$; & Q une fonction rationnelle de dimenſion nulle.

401. Il ſera aiſé maintenant d'avoir les lignes de chaque ordre qui ſont coupées en deux points par les droites menées par un point donné C, ou qui n'en ſont rencontrées nulle part. Il n'y aura qu'à faire pour le ſecond ordre $n = 0$, & on obtiendra l'équation la plus générale des Sections Coniques :

$$\alpha xx + \beta xy + \gamma yy - \delta x - \varepsilon y + \zeta = 0.$$

En quelque endroit donc qu'on prenne le point C, toute droite menée par ce point coupera la ſection conique en deux points, ou ne la rencontrera pas du tout. Il peut cependant arriver qu'une droite ne coupe la courbe qu'en un point; mais comme, parmi la quantité infinie de lignes menées par C, cette propriété ne convient qu'à une ou deux tout au plus, cette exception ne peut être d'aucune importance, & on peut même expliquer cette eſpèce de paradoxe en diſant qu'une des interſections a lieu à une diſtance infinie; c'eſt pour cela que cette exception eſt cenſée n'apporter aucune atteinte à la généralité de la propoſition que nous venons d'avancer.

402. Pour ſavoir, au reſte, dans quel cas cette exception a lieu, il faut ramener l'équation entre x & y à une autre qui contienne z & l'angle $ACM = \varphi$. L'équation, à cauſe de $y = z \sin. \varphi$ & de $x = z \cos. \varphi$, ſe changera en celle-ci :

$$z^2(\alpha(\cos.\varphi)^2 + \beta.\sin.\varphi.\cos.\varphi + \gamma(\sin.\varphi)^2) - z(\delta\cos.\varphi + \varepsilon\sin.\varphi) + \zeta = 0.$$

On voit par là que, ſi le coefficient de z^2 eſt égal à zéro, une ſeule interſection a lieu; ce qui arrive par conſéquent, lorſque $\alpha + \beta \,.\, \mathrm{tang.}\,\varphi + \gamma\,(\mathrm{tang.}\,\varphi)^2 = 0$. Donc, ſi cette équation contient deux racines réelles, il y aura deux cas où la droite menée par le point C coupera la droite ſeulement en un point. Mais, comme les racines de la même équation indiquent les aſymptotes de la courbe, il eſt clair que les hyperboles ne ſont coupées qu'en un point par les droites parallèles à une aſymptote; & il ne paſſe par le point C que deux lignes qui aient cette propriété. Dans la Parabole, il n'y a que la droite parallèle à l'axe qui ſouffrira cette exception. Mais, ſi la ſection conique eſt une Ellypſe, en quelque endroit qu'on place le point C, toute droite qui y paſſera, ou rencontrera la courbe en deux points, ou ne la rencontrera nulle part.

403. Les lignes du troiſième ordre qui jouiſſent de la même propriété ſe trouveront, en faiſant $n = 1$, compriſes dans cette équation;

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 - \varepsilon x^2 - \zeta x y - \eta y^2 + \theta x + \iota y = 0;$$

formule qui renferme toutes les lignes du troiſième ordre, qui par conſéquent ſont toutes propres à ſatisfaire à la queſtion, pourvu que le point C ſoit pris ſur la courbe même; car, en faiſant $x = 0$, la valeur de y devient en même temps nulle. Semblablement, pour les courbes du quatrième ordre qui conviennent au cas préſent, il faudra que le point C non-ſeulement ſoit un point de la courbe, mais en ſoit un point double; ainſi toute ligne du quatrième ordre qui aura un point double ſatisfera à la queſtion, pourvu que le point C ſoit placé ſur ce point. Mais ſi C étoit un point triple, alors toute droite menée par ce point coupera la courbe en un point unique, & appartiendra au cas que nous avons examiné en premier lieu. Les lignes du cinquième ordre ſatisferont pareillement, ſi C eſt placé ſur un point triple; & ainſi des autres. Mais il ne faut pas perdre de vue que, ſi la droite menée par le point C eſt parallèle à quelque aſymptote droite, ou à un axe parabolique, il n'y a réellement qu'un ſeul point d'interſection, l'autre ſe trouvant à une diſtance infinie.

404. Tout cela s'accorde à merveille avec la nature des lignes de chaque ordre; car, puiſqu'une ligne d'un ordre quel-

conque peut être coupée par une droite en autant de points que l'expoſant de l'ordre contient d'unités; (& elle eſt en effet coupée en autant de points, à moins que quelques-unes des interſections ne deviennent imaginaires, ou ne ſe faſſent à une diſtance infinie) & que nous tenons compte ici de toutes les interſections, ſoit réelles, ſoit faites à une diſtance infinie, ſoit imaginaires; & que nous excluons ſeulement celles qui ont lieu au point C, il eſt clair qu'une ligne de l'ordre n devant être coupée en n points par une ligne droite quelconque, le point C doit être placé en un point multiple du degré $n-2$, pour qu'il en réſulte une interſection double.

405. Ces remarques une fois faites, il ſera facile de réſoudre les problêmes qu'on propoſe ordinairement ſur la relation entre deux valeurs quelconques CM & CN de z, ou de faire voir au moins ſi la ſolution convient ou ne convient pas à toute rigueur. Car, comme les deux valeurs de z, CM & CN, ſont les racines de cette équation $zz - Pz + Q = 0$, leur ſomme ſera $= P$, & leur rectangle $CM.CN = Q$. Par conſéquent, ſi on vouloit des courbes dans leſquelles la ſomme $CM + CN$ fût par-tout une ſomme conſtante, il faudroit que la fonction P fût conſtante. Mais comme d'ailleurs, par la nature de la queſtion, il faudroit que chaque droite menée par le point C rencontrât la courbe ſeulement en deux points, il ſeroit néceſſaire que P fût $= \frac{Mz}{L} = \frac{M\sqrt{(xx+yy)}}{L}$ (art. 399); quantité qui, à cauſe de l'irrationalité qu'elle renferme, ne peut jamais être conſtante. Il n'y a donc point de courbe qui ſatisfaſſe proprement à cette queſtion.

406. Mais, ſi on rejette la condition qu'il y ait ſeulement deux points d'interſection avec la courbe pour chaque ligne tirée par le point C, & qu'on demande des courbes qui, à la vérité, ſoient ſuſceptibles de plus de deux interſections, mais parmi leſquelles il s'en trouve deux telles que $CM + CN$ ſoient une quantité conſtante; on pourra en obtenir une infinité, en faiſant $P =$ à cette quantité conſtante $CM + CN = a$. Car on aura $zz - az + Q = 0$, Q déſignant la fonction $\frac{Nzz}{L}$; & en faiſant diſparoître l'irrationalité de cette équa-

tion, on trouvera $a^2 z^2 = (zz + Q)^2$, ou $a^2 = zz\left(1 + \frac{N}{L}\right)^2$ ou $a^2 L^2 = (xx + yy)(L^2 + 2LN + NN)$, équation dans laquelle L eſt une fonction homogène de $n + 2$, & N une fonction homogène de n dimenſions de x & de y. Ainſi on trouvera la courbe la plus ſimple qui réſoudra la queſtion dans ce ſens, en faiſant $L = xx + yy$ & $N = \pm bb$; ce qui donnera $aa(xx + yy) = (xx + yy \pm bb)^2$, ou une ligne complexe du quatrième ordre; car cette expreſſion comprend deux cercles concentriques en C. Les courbes continues les plus ſimples qui ſatisfont à la queſtion ſont du ſixième ordre, & on les obtient en faiſant $L = \alpha xx + \beta xy + \gamma y^2$ & $N = \pm bb$, d'où réſulte pour ces courbes l'équation $a^2(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)^2 = (x^2 + y^2)(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \pm bb)^2$. Soit $\alpha = 1$, $\beta = 0$ & $\gamma = 0$; on aura $y^2 + x^2 = \frac{aax^4}{x^4 \pm 2b^2x^2 + b^4}$, ou $y = \frac{x\sqrt{(aaxx - x^4 \mp 2bbxx - b^4)}}{xx \pm bb}$.

407. Mais, ſi on rejette les ſolutions qui ſuppoſent que les droites menées par C rencontrent la courbe en plus de deux points, condition que paroît exiger l'état de la queſtion, on ne pourra plus dire qu'il y ait des courbes qui ſatisfaſſent; &, par conſéquent, il n'exiſtera aucunes lignes continues qui ſoient coupées ſeulement en deux points M & N par des droites menées par le point C, de manière que la ſomme $CM + CN$ ſoit conſtante. Si au contraire on demandoit des interſections, en vertu deſquelles le rectangle $CM \times CN$ dût être une quantité conſtante; propriété qui appartient au Cercle, en quelque endroit que ſoit placé le point C, on pourroit trouver une infinité d'autres lignes courbes qui auroient la même propriété. En effet, il faudra pour cela que Q ſoit une quantité conſtante, ou égale au rectangle $CM \,.\, CN$, que je ſuppoſe $= aa$; hypothèſe qui ne répugne pas, à cauſe que $Q = \frac{Nzz}{L}$; & qu'il eſt par conſéquent une fonction rationnelle de x & de y.

408. Soit donc $\frac{Nzz}{L} = aa$, ou $L = \frac{Nzz}{aa} = \frac{N(xx+yy)}{aa}$. Les courbes

courbes qui satisfont seront toutes contenues dans cette équation $\frac{N(xx+yy)}{aa} - M + N = 0$, ou $Maa = N(x^2+y^2+a^2)$, où M désigne une fonction quelconque homogène de $n+1$ dimensions, & N une fonction homogène de n dimensions de x & de y, de manière que $\frac{M}{N} = \frac{xx+yy+aa}{aa}$ soit une fonction d'une seule dimension de x & de y. Cette équation renferme donc toutes les courbes qui, coupées seulement en deux points M & N par les droites qui passent par le point C, donnent par-tout pour le rectangle $CM \cdot CN$ une quantité constante $= aa$.

409. Puisque $\frac{M}{N}$ est une fonction homogène d'une dimension de x & de y, le cas le plus simple qu'on puisse obtenir sera celui où l'on fera $\frac{M}{N} = \frac{\alpha x + \beta y}{a}$; supposition qui donnera cette équation $xx + yy - a(\alpha x + \beta y) + aa = 0$, laquelle appartient au Cercle; &, comme on a par là l'équation générale de cette courbe entre les coordonnées perpendiculaires, il est évident que le cercle satisfait à la question, quelle que soit la position du point C, comme on le sait d'ailleurs par les élémens. Il n'y a donc parmi les Sections Coniques que le Cercle qui satisfasse à cette question; mais parmi les lignes des ordres suivans on en trouvera une infinité qui satisferont, & même toutes celles de chaque ordre qui peuvent convenir. Ainsi les lignes du troisième ordre qui jouissent de cette propriété, seront comprises dans cette équation:

$$\frac{\alpha xx + \beta xy + \gamma yy}{a(\delta x + \epsilon y)} = \frac{xx+yy+aa}{aa}$$

ou

$$(\delta x + \epsilon y)(x^2+y^2) - a(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) + a^2(\delta x + \epsilon y) = 0.$$

On trouvera d'une manière semblable celles des lignes des ordres suivans qui pourront satisfaire.

410. Proposons-nous à présent cette question. Parmi toutes les lignes courbes qui sont coupées en deux points par des

droites menées par le point C, trouver celles dans lesquelles la somme des quarrés CM^2+CN^2 est une quantité constante, ou $=aa$. Puisque $CM+CN=P$ & que $CM.CN=Q$, on aura $CM^2+CN^2=PP-2Q$; il faudra donc que $PP-2Q=2aa$, ou que $Q=\frac{PP-2aa}{2}$. Ainsi, à cause de $P=\frac{Mz}{L}$ & de $Q=\frac{Nzz}{L}$, on aura $\frac{2Nzz}{L}=\frac{MMzz}{LL}-2aa$, & par conséquent $N=\frac{MM}{2L}-\frac{aaL}{zz}$; équation qui ne renferme aucune contradiction, par la raison que L est une fonction de $n+2$ dimensions, M une fonction de $n+1$ dimensions, & N une fonction de n dimensions des variables x & y. Ayant donc pris pour L & pour M de telles fonctions, on aura $N=\frac{MM}{2L}-\frac{aaL}{zz}$; d'où résulte pour les courbes qui satisferont à la question, l'équation générale:

$$L-M+\frac{MM}{2L}-\frac{aaL}{zz}=0,$$

ou

$$2L^2(x^2+y^2)-2LM(x^2+y^2)+M^2(x^2+y^2)-2a^2L^2=0;$$

laquelle, si $M=0$, donne un cercle dont le centre est en C, & qui satisfait à la question, comme cela d'ailleurs est évident.

411. Supposons $n+1=0$, de sorte que M soit une quantité constante $=2b$ & $L=\alpha x+\beta y$; nous aurons une ligne du quatrième ordre exprimée par cette équation:

$$(\alpha x+\beta y)^2(x^2+y^2-a^2)-2b(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2)+2b^2(x^2+y^2)=0.$$

On trouve une autre équation du quatrième ordre, en faisant $L=xx+yy$ & $M=2(\alpha x+\beta y)a$; car alors l'équation étant divisée par $2xx+2yy$ donnera:

$$(x^2+y^2)^2-2a(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2)+2a^2(\alpha x+\beta y)^2-a^2(x^2+y^2)=0.$$

A moins donc que la diviſion ne ſe faſſe par $xx+yy$, l'équation ci-deſſus, ou, (en mettant $2M$ au lieu de M) celle-ci :

$$L^2(x^2+y^2)-2LM(x^2+y^2)+2M^2(x^2+y^2)-a^2L^2=0,$$

ſera toujours de l'ordre $2n+6$. Donc on obtient de chaque ordre pair une équation pour une courbe qui doit ſatisfaire. Mais, s'il arrive que L ſoit diviſible par $xx+yy$; ou que, N déſignant une fonction quelconque homogène de n dimenſions de x & de y, on ait $L=(xx+yy)N$, on obtiendra cette autre équation générale de l'ordre $2n+4$,

$$N^2(x^2+y^2)^2-2MN(x^2+y^2)+2M^2-a^2N^2(x^2+y^2)=0;$$

d'où il réſulte que chaque ordre pair donne deux équations pour les courbes qui ſont douées de la propriété donnée. C'eſt ainſi que l'on trouve que les courbes du ſixième ordre compriſes dans les deux équations ſuivantes, ſatisfont :

$$(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)^2(x^2+y^2-a^2)-2a(\delta x+\varepsilon y)(x^2+y^2)$$
$$(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2-a(\delta x+\varepsilon y))=0,$$

&

$$(\delta x+\varepsilon y)^2(x^2+y^2)(x^2+y^2-a^2)=2a(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)$$
$$((\delta x+\varepsilon y)(x^2+y^2)-a(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma y^2)).$$

Il n'y a donc point de lignes d'un ordre impair qui puiſſent réſoudre la queſtion.

412. Si on demande à préſent non pas des courbes, dans leſquelles la ſomme des quarrés CM^2+CN^2 ſoit conſtante, mais dans leſquelles $CM^2+CM.CN+CN^2$, ou généralement $CM^2+n.CM\times CN+CN^2$ ſoit une quantité conſtante; on réſoudra le problême de la manière ſuivante. Car, puiſque $CM^2+n.CM.CN+CN^2=P^2+(n-2)Q$, on fera $P^2+(n-2)Q=aa$, d'où $Q=\frac{aa-PP}{n-2}$, équation évidem-

ment admissible; ainsi P étant $= \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nzz}{L}$, on aura $\frac{M^2z^2}{L^2} + \frac{(n-2)Nzz}{L} = aa$; & par conséquent $N = \frac{aaL}{(n-2)zz} - \frac{M^2}{(n-2)L}$. Mais l'équation à la courbe est $L - M + N = 0$; on aura donc, pour remplir la condition que $CM^2 + n . CM \times CN + CN^2$ doit être une quantité constante $= aa$, cette équation :

$$(n-2)L^2z^2 - (n-2)LMz^2 + a^2L^2 - M^2z^2 = 0;$$

ou, à cause de $zz = xx + yy$,

$a^2L^2 + (x^2+y^2)((n-2)L^2 - (n-2)LM - M^2) = 0$, L étant une fonction de $m+2$, & M une fonction de $m+1$ dimensions de x & de y. Soit N une fonction quelconque homogène de m dimensions, & $L = (xx+yy)N$; on aura cette autre équation générale :

$$a^2(x^2+y^2)N^2 + (n-2)(x^2+y^2)^2N^2 - (n-2)(x^2+y^2)MN - M^2 = 0.$$

413. Si on suppose $n = 2$, de sorte que $(CM+CN)^2 = a^2$, on aura ou $a^2L^2 = (x^2+y^2)M^2$, ou $M^2 = a(x^2+y^2)N^2$. Or ces deux équations, étant homogènes, en contiendront chacune deux, ou davantage, de la forme $\alpha y = \beta x$; & par conséquent on ne pourra satisfaire à la question qu'au moyen de deux lignes droites, ou d'un plus grand nombre, qui seront menées par le point C. Mais, comme ce n'est pas résoudre le problême dans le sens qu'il est proposé, il est évident qu'il n'est susceptible d'aucune solution, comme nous l'avons déjà remarqué ci-dessus. En effet $CM + CN$ devroit être égal à une constante a. Mais, si on fait $n = -2$, de manière que le quarré de la différence $(CN - CM)^2$, & par suite la différence même MN soit une constante, on trouvera ces deux équations :

$$aaLL = (xx+yy)(2L-M)^2$$

&

$$aa(xx+yy)NN = (2(xx+yy)N - M)^2;$$

d'où l'on tirera la ſolution la plus ſimple, en faiſant $N = 1$ & $M = 2bx$; car on aura :

$$aa(xx+yy) = 4(xx+yy-bx)^2;$$

ou, en ſuppoſant $aa = 8cc$,

$$(xx+yy)^2 = 2(cc+bx)(xx+yy) - bbxx.$$

Donc $xx+yy = cc+bx \pm c\sqrt{(cc+2bx)}$,

&

$$y = \sqrt{(cc+bx-xx \pm c\sqrt{(cc+2bx)})}.$$

414. Il y a donc une infinité de lignes courbes qui ſont coupées en deux points M & N par les droites menées par le point C, de manière que l'intervalle MN ſoit toujours conſtant ; & d'abord il eſt évident que le cercle, dont le centre eſt en C, ſatisfait à cette condition; car l'intervalle MN ſera par-tout $=$ au diamètre du cercle. Or le cercle ſe conclut des équations générales, en faiſant $M = 0$. Enſuite, les courbes qui, après le cercle, ſatisfont, ſont des lignes du quatrième ordre exprimées par cette équation $aa(xx+yy) = 4(xx+yy-bx)^2$ & par cette autre $aaxx = (xx+yy)(2x-2b)^2$. Pour connoître la figure de ces courbes, il faudra revenir à l'équation entre z & l'angle φ. Puis donc que $xx+yy = zz$, & $x = z\, cof.\, \varphi$, & $y = z\, fin.\, \varphi$, en ſuppoſant $a = 2c$, on aura d'abord :

$$cczz = (zz - bz\, cof.\, \varphi)^2 \text{ ou } b\,.\, cof.\, \varphi \pm c = z;$$

puis

$$cc(cof.\, \varphi)^2 = (z\, cof.\, \varphi - b)^2 \text{ ou } z = \frac{b}{cof.\, \varphi} \pm c.$$

Ce qui donne pour ces courbes une conſtruction facile.

415. En effet, pour conſtruire la courbe exprimée par l'équation $z = b\,.\, cof.\, \varphi \pm c$, on menera par C une droite ACB, ſur laquelle on prendra $CD = b$, & à partir du point D, on prendra de part & d'autre $DA = DB = c$; d'abord les points Pl. IX. Fig. 83, 84, 85.

A & B appartiendront à la courbe. Enſuite, ayant mené une droite quelconque NCM par C, on abaiſſera du point D ſur cette ligne la perpendiculaire DL, & on prendra de part & d'autre du point L, $LM = LN = c$; les points M & N ſeront à la courbe cherchée, & par conſéquent l'intervalle MN ſera par-tout $= 2c$, comme l'exige la queſtion.

Fig. 83. Remarquez ici que, ſi $CD = b$ eſt plus petit que c, la courbe aura en C un point conjugué.

Fig. 84. Mais, ſi $b = c$, la courbe aura en C une pointe, l'intervalle AC devenant nul.

Fig. 85. Enfin, ſi b eſt plus grand que c, le point A tombera entre C & B; & la courbe aura en C un nœud ou un point double. Au reſte, ces courbes auront pour diamètre la droite ACB, & la perpendiculaire à celle-ci ECF ſera $= 2c$.

Pl. IX. Fig. 86. 416. Outre ces courbes du quatrième ordre qui reviennent ſur elles mêmes, il y en a d'autres du même ordre qui ſatiſfont, & qui s'éloignent à l'infini. Elles ſont compriſes dans l'équation $z = \frac{b}{cof.\,\varphi} \pm c$. En voici la conſtruction : Ayant mené par C la droite principale CAB, on prendra $CD = b$; & ſi on prend $DA = DB = c$, les points A & B ſeront à la courbe. On menera enſuite par D la perpendiculaire EDF; & en tirant une droite quelconque CL, & ſuppoſant l'angle $DCL = \varphi$, on aura $CL = \frac{b}{cof.\,\varphi}$. On continuera de prendre $LM = LN = c$, & les points M & N détermineront la courbe cherchée. Il eſt clair par cette conſtruction que la courbe ainſi décrite eſt la *Conchoïde* des anciens, qui a le point C pour pole & pour aſymptote la droite EF, vers laquelle convergent de plus en plus les quatre branches de la courbe. La portion hBh ſe nomme la *Conchoïde extérieure*, & gAg, la *Conchoïde intérieure*. Outre ces parties, il y a en C un point conjugué.

417. Telles ſont les lignes du quatrième ordre qui ſatisfont; mais il eſt aiſé d'en trouver, autant qu'on voudra, des ordres ſupérieurs. Car ſi P eſt une fonction impaire du ſinus & du coſinus de l'angle φ, alors l'équation $z = bP \pm c$ repréſentera

une courbe continue que toutes les droites menées par le point C couperont en deux points M & N, de manière que l'intervalle MN soit constant & $= 2c$. Toutes ces courbes peuvent se rapporter au genre des Conchoïdes, en substituant à la directrice EF une ligne courbe quelconque exprimée par l'équation $z = bP$. Or nous avons vu ci-dessus que cette équation renfermoit les lignes courbes, que les droites menées par le point C ne rencontrent qu'en un seul point. Ainsi, comme l'intervalle c est arbitraire, on pourra, au moyen de chaque courbe $z = bP$, en décrire une infinité d'autres qui auront la propriété qu'on demande.

418. Qu'on prenne, par exemple, à volonté la courbe $CEDLF$, qui ne doit être coupée que dans les points uniques D, L, par toutes les droites menées par le point C. Alors, si sur chacune de ces droites CL prolongées on prend de part & d'autre du point L des intervalles égaux $LM = LN = c$; les points M & N appartiendront à la courbe cherchée. Ainsi donc on pourra décrire d'un mouvement continu la courbe $AMPCQBNRC$, que les droites menées par le point C couperont en deux points M & N, de manière que l'intervalle MN soit toujours une quantité constante $= 2c$. On doit observer ici que, si la courbe $CEDF$ est un cercle qui passe par le point C, la courbe décrite sera la même ligne du quatrième ordre, que nous avons trouvée d'abord art. 414. Pl. IX. Fig. 87.

419. Nous avons donc ainsi satisfait à la question qui consistoit à trouver les lignes courbes AMN, qui fussent coupées par les droites menées par le point C en deux points M & N, de façon que $CN - CM$ ou $CM^2 - 2CM.CN + CN^2$ eût toujours une valeur constante. Développons encore en peu de mots le cas où $CM^2 + CM.CN + CN^2$ doit être une quantité constante. On fera donc, dans l'art. 412, $n = 1$; ce qui donnera cette équation: Pl. IX. Fig. 81.

$$aaLL = (xx + yy)(L^2 - LM + M^2);$$

L étant une fonction de $m + 1$, & M une fonction de m dimensions de x & de y; ou bien cette autre-ci:

$$a^2(x^2+y^2)N^2=(x^2+y^2)^2N^2-(x^2+y^2)MN+M^2,$$

dans laquelle M eſt une fonction homogène de x & de y, qui ſurpaſſe d'une dimenſion la fonction N.

420. On voit d'abord que, ſi on fait $M=0$, on a un cercle dont le centre eſt placé au point C. Comme toutes les droites menées du centre à la courbe ſont égales, il eſt bien clair qu'il ſatisfait auſſi à toutes les queſtions de ce genre. Mais, pour le cas préſent, on trouvera les courbes les plus ſimples, en faiſant dans la première équation $M=b$ & $L=x$; & on aura:

$$aaxx=(xx+yy)(xx-bx+bb)$$

ou

$$yy=\frac{xx(aa-bb+bx-xx)}{bb-bx+xx}.$$

Et ſi dans l'autre équation on ſuppoſe $N=1$ & $M=bx$, on aura encore une ligne du quatrième ordre:

$$aa(xx+yy)=(xx+yy)^2-bx(xx+yy)+bbxx$$

ou

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}a^2\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^2bx-\frac{3}{4}b^2x^2\right)};$$

laquelle ſatisfera à la queſtion auſſi bien que la première.

421. Ces queſtions réſolues, conſidérons les puiſſances plus élevées des deux valeurs de z qui proviennent de l'équation $zz-Pz+Q=0$, P étant $=\frac{Mz}{L}$ & $Q=\frac{Nzz}{L}$. Ici L repréſente une fonction homogène de $n+2$, M une fonction de $n+1$, & N une fonction de n dimenſions de x & de y; & $x=$ à l'abſciſſe CP, & $y=$ à l'appliquée PM. Suppoſons donc qu'il ſoit queſtion de trouver deux interſections M & N, telles que $CM^3+CN^3=a^3$. Comme, par la nature de l'équation $zz-Pz+Q=0$, $CM^3+CN^3=P^3-3PQ$, on

on devra avoir $P^3 - 3PQ = a^3$; équation qui ne peut avoir lieu, à cause que P^3 & PQ sont des quantités irrationnelles. On ne peut donc, rigoureusement parlant, satisfaire à cette question; mais, si on n'a pas égard au nombre des intersections, quoiqu'il y en ait plus de deux, on pourra trouver un nombre infini de courbes qui satisfont, en supposant $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$, & en prenant pour P une fonction quelconque du sinus & du cosinus de l'angle $ACM = \varphi$.

422. Mais si on veut avoir des courbes dans lesquelles $CM^4 + CN^4 = a^4$, on devra faire $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$; équation qui n'implique pas contradiction, parce qu'elle ne renferme aucune irrationalité. On devra donc avoir $Q = PP + \sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$; fonction qui, malgré le signe radical, peut être regardée comme uniforme, parce que, si on prenoit négativement $\sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$, il en résulteroit pour z des valeurs imaginaires. On aura donc $\frac{Nzz}{L} = \frac{M^2z^2}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4\right)}$; & puisqu'on a pour la courbe $L - M + N = 0$, ou $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{Nzz}{L} = 0$; on aura $zz - \frac{Mz^2}{L} + \frac{M^2z^2}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4\right)} = 0$. On aura conséquemment, en faisant disparoître le radical,

$$\frac{z^4}{L^4}(L^2 - LM + M^2)^2 = \frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2(2(L^2 - LM + M^2)^2 - M^4) = a^4L^4;$$

expression qui comprend toutes les courbes qui peuvent satisfaire.

423. Il y a une autre manière plus facile, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus art. 372, de résoudre cette question & les autres semblables. En effet, puisque $CM \cdot CN = Q$, si l'une des deux quantités CM & CN est $= z$, l'autre sera

$= \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$, à cause de $Q = \frac{Nzz}{L}$. Par conséquent, si on doit avoir $CM^n + CN^n = a^n$, cette équation deviendra $z^n + \frac{N^n z^n}{L^n} = a^n$, ou $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$. Si n est un nombre pair, elle est rationnelle, & satisfait par conséquent à la question; mais, si n est un nombre impair, il faudra prendre les quarrés pour faire évanouir l'irrationalité; d'où résulte un nombre double d'interfections, & une courbe qui, strictement parlant, ne remplit pas le but qu'on se propose. Si on doit avoir, par exemple $CM^2 + CN^2 = a^2$, l'équation deviendra $zz = xx + yy = \frac{a^2 L^2}{L^2 + N^2}$; laquelle s'accorde avec celle trouvée auparavant $xx + yy = \frac{aaLL}{(L-M)^2 + L^2}$ (410), à cause de $L - M + N = 0$. Donc, en général, si on doit avoir $CM^n + CN^n = a^n$, & que n soit un nombre pair, on obtiendra cette équation $z^n = (xx + yy)^{\frac{n}{2}} = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n} = \frac{a^n L^n}{L^n + (L-M)^n}$; L étant une fonction de $m + 2$ dimensions, M une fonction de $m + 1$ dimensions, & N une fonction de m dimensions de x & de y.

424. La même solution se trouve par la considération de la somme $CM + CN = P$. En effet, si l'une des deux valeurs CM & CN est supposée $= z$, l'autre sera $= P - z$. D'où il suit que, si $CM^n + CN^n$ doit être une quantité constante, on aura $z^n + (P - z)^n = a^n$. Or nous avons vu que P devoit être $= \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nzz}{L}$, de manière que $L - M + N = 0$; on aura donc $z^n + z^n \frac{(M-L)^n}{L^n} = a^n$; ou $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + (M-L)^n}$, ou $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$; ou bien, en éliminant L, $z^n = \frac{a^n (M-N)^n}{(M-N)^n + N^n}$. Ces équations remplissent complètement la condition proposée, si n est un nombre pair; mais, si n est un nombre impair, on aura bien, à la vérité deux interfections M & N, telles que $CM^n + CN^n = a^n$; mais, outre ces deux interfections, il y en aura deux autres qui jouiront de la

même propriété, de ſorte que chaque droite menée par le point C aura doublement la propriété dont il s'agit.

425. Cela poſé, il ſera aiſé de réſoudre d'autres queſtions beaucoup plus difficiles. Qu'il ſoit queſtion, par exemple, de trouver une courbe qui ſoit coupée en deux points M & N par toutes les droites menées par C, de manière que $CM^n + CN^n + \alpha . CM . CN . (CM^{n-2} + CN^{n-2}) + \beta . CM^2 . CN^2 (CM^{n-4} + CN^{n-4})$ &c. ſoit une quantité conſtante $= a^n$. En faiſant l'une des valeurs $CM = z$, l'autre CN ſera $= \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$; en ſubſtituant ces valeurs, on aura pour l'équation qui exprime la nature de la courbe, $z^n(L^n+N^n+\alpha LN(L^{n-2}+N^{n-2})+\beta L^2N^2(L^{n-4}+N^{n-4})+ \&c.) = a^n L^n$. Or $L-M+N=0$, & L, M & N, ſont des fonctions homogènes de x & de y, de $m+2$, $m+1$ & m dimenſions, comme nous l'avons dit ci-deſſus; d'où il ſuit qu'on aura ou $L=M-N$, ou $N=M-L$, & par conſéquent une infinité de ſolutions.

426. Paſſons à préſent à la recherche des courbes qui doivent être coupées en trois points par les droites qui paſſent par un point fixe C. La nature de ces ſortes de courbes ſera exprimée par cette équation générale:

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0;$$

dans laquelle z marque la diſtance de chaque point de la courbe au point C, & P, Q, R, ſont des fonctions de l'angle $ACM = \varphi$, ou de ſon ſinus & de ſon coſinus. Or, pour qu'il n'y ait pas plus de trois interſections, il faut, par les mêmes raiſons que nous avons alléguées ci-deſſus, que P & R ſoient des fonctions impaires de *ſin.* φ & de *coſ.* φ, & que Q en ſoit une fonction paire. Si donc on ſuppoſe les coordonnées perpendiculaires $CP = x$, $PM = y$, de ſorte que $xx + yy = zz$; & ſi K, L, M & N déſignent des fonctions homogènes de $(n+3)$, $(n+2)$, $n+1$ & n dimenſions de x & de y, on aura $P = \frac{Lz}{K}$, $Q = \frac{Mzz}{K}$ & $R = \frac{Nz^3}{K}$; & par conſéquent l'équation générale entre les coordonnées perpendiculaires x & y, qui convient aux courbes dont il s'agit, ſera :

$$K - L + M - N = 0;$$

d'où il ſuit que le point C ſera un point multiple d'un degré marqué par le nombre d'unités contenues dans n.

427. On voit donc d'abord que toutes les lignes du troiſième ordre appartiennent à ce cas, en quelque endroit qu'on prenne le point C hors de la courbe. Enſuite cette équation renferme toutes les lignes du quatrième ordre, pourvu que le point C ſoit pris ſur la courbe ; en troiſième lieu, elle comprend toutes les lignes du cinquième ordre qui ont un point double, pourvu que le point C ſoit placé ſur le point double. Semblablement, les lignes des ordres plus élevés rempliront cette condition, pourvu qu'elles aient des points multiples d'un degré exprimé par le nombre d'unités contenues dans n, lorſque $n + 3$ eſt l'expoſant de l'ordre auquel appartient l'équation.

428. Soient p, q, r, les trois valeurs de z que donne l'équation $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$ pour chaque valeur de l'angle $CAM = \phi$; on aura, par la nature des équations, $P = p + q + r$; $Q = pq + pr + qr$ & $R = pqr$. Puiſque P & R ne peuvent être une expreſſion rationnelle de x & de y, il eſt d'abord évident qu'on ne peut avoir des courbes dans leſquelles ou $p+q+r$, ou pqr ſoit une quantité conſtante; & par conſéquent on ne pourra ſuppoſer égale à une conſtante aucune fonction impaire de p, q & r. Mais les fonctions paires pourront ſans aucune difficulté obtenir une valeur conſtante. Ainſi, ſi l'on demande que $pq + pr + qr = aa$, on aura $Q = \frac{Mzz}{K} = aa$; & par conſéquent $M(xx + yy) = aaK$; valeur qui, ſubſtituée dans l'équation $K - L + M - N = 0$, donne l'équation générale pour toutes les courbes qui jouiſſent de la propriété demandée ; ſavoir :

$$M(x^2 + y^2) - a^2L + a^2M - a^2N = 0;$$

ou, en éliminant M,

$$(x^2+y^2)K-(x^2+y^2)L+a^2K-(x^2+y^2)N=0.$$

429. Il sera facile de résoudre pareillement d'autres questions; comme s'il s'agissoit d'avoir une courbe qui fût coupée en trois points par les droites menées par le point C, de manière que $p^2+q^2+r^2=aa$. Car, comme on a $p^2+q^2+r^2=P^2-2Q$; $P=\frac{Lz}{K}$ & $Q=\frac{Mzz}{K}$, l'équation deviendra $\frac{L^2z^2}{K^2}-\frac{2Mzz}{K}=a^2$, ou $(x^2+y^2)L^2-2(x^2+y^2)KM=a^2K^2$. Mais on a pour les courbes susceptibles de trois intersections cette équation générale $K-L+M-N=0$, dont la nature consiste en ce que la plus grande dimension des x & des y surpasse la plus petite de trois. Ainsi, pour obtenir une telle équation & avoir en même temps $(x^2+y^2)L^2-2(x^2+y^2)KM=a^2K^2$, on multipliera la première équation par $2(x^2+y^2)K$, afin de pouvoir éliminer M; & on trouvera, pour satisfaire à la question, cette équation générale:

$$2(xx+yy)KK-2(xx+yy)KL+(xx+yy)L^2-aaKK$$
$$-2(xx+yy)KN=0;$$

car le plus grand nombre de dimensions de x & de y se trouve dans le terme $2(x^2+y^2)K^2$, lequel en contient $2n+8$, & le terme $2(x^2+y^2)KN$, qui en donne le plus petit nombre, en contient $2n+5$, comme l'exige la nature de la chose.

430. Ainsi, puisque les termes où se trouvent le plus & le moins de dimensions ne peuvent disparoître ni l'un ni l'autre; supposons, pour trouver la courbe la plus simple, $n=0$, $N=b^3$, $K=x(x^2+y^2)$ & $L=0$, nous aurons cette équation:

$$2(x^2+y^2)^3x^2-a^2x^2(x^2+y^2)^2-2b^3x(x^2+y^2)^2=0;$$

laquelle, étant divisée par $2x(x^2+y^2)^2$, donne celle-ci:

$$x(xx+yy)-\frac{1}{2}aax-b^3=0,$$

qui appartient au troisième ordre. Mais, si L n'est pas $=0$, & que $L = 2c(x^2+y^2)$, on aura cette équation du quatrième ordre :

$$x^2(x^2+y^2)-2cx(x^2+y^2)+2c^2(x^2+y^2)-\frac{1}{2}a^2x^2-b^3x=0.$$

ou

$$x^2(x^2+y^2)+(2c-x)^2(x^2+y^2)=a^2x^2+2b^3x.$$

En s'y prenant de la même manière, on trouvera dans les ordres plus élevés beaucoup d'autres courbes propres à satisfaire à la question.

431. Ensuite, on pourra trouver aussi les courbes dans lesquelles $p^4+q^4+r^4$ est une quantité constante; car, comme on a $p^4+q^4+r^4 = P^4-4P^2Q+2Q^2+4PR$, il n'y aura qu'à faire $P^4-4P^2Q+2Q^2+4PR = c^4$. On aura donc :

$$z^4(L^4-4KL^2M+2K^2M^2+4K^2LN) = c^4K^4;$$

& par conséquent

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - z^4(L^4-4KL^2M+2K^2M^2);$$

&, en substituant la valeur de N dans l'équation $K-L+M-N=0$, on obtiendra l'équation générale qui représentera les courbes qui doivent satisfaire à la question.

432. On pourra satisfaire en même temps à cette nouvelle condition $p^4+q^4+r^4=c^4$, & à la précédente $p^2+q^2+r^2=a^2$. En effet, pour celle-ci on doit avoir $z^2L^2-2z^2KM=a^2K^2$; d'où l'on tire $2z^2KM=z^2L^2-a^2K^2$. Comme ensuite :

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - L^4z^4 + 4KL^2Mz^4 - 2K^2M^2z^4,$$

on aura

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - L^4z^4 - 2aaK^2L^2z^2 - 2K^2M^2z^4,$$

&

$$4K^2LMz^4 = 2KL^3z^4 - 2aaK^3Lzz.$$

Substituons ces valeurs pour M & pour N dans l'équation $K - L + M - N = 0$, ou $4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 4K^2LMz^4 - 4K^2LNz^4 = 0$; & nous aurons pour l'équation à la courbe :

$$4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 2KL^3z^4 - 2a^2K^3Lz^2 - c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2z^2 + 2K^2M^2z^4 = 0.$$

Mais, à cause de

$$KMzz = \frac{1}{2}L^2zz - \frac{1}{2}aaKK,$$

nous aurons

$2K^2M^2z^4 = \frac{1}{2}L^4z^4 - aaK^2L^2z^2 + \frac{1}{2}a^4K^4$; donc l'équation générale pour les courbes demandées sera :

$$8K^3Lz^4 - 8K^2L^2z^4 + 4KL^3z^4 - 4a^2K^3Lz^2 - 2c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2z^2 + a^4K^4 = 0.$$

433. Comme K doit être une fonction homogène de x & de y d'une dimension de plus que L, la courbe la plus simple dans laquelle trois intersections donneront à la fois $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$ & $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$, se trouvera en faisant $K = zz$ & $L = bx$; on aura donc :

$$8bxz^6 - 8b^2x^2z^4 + 4b^3x^3z^2 - 4a^2bxz^4 - 2c^4z^4 - b^4x^4 + 2a^2b^2x^2z^2 + a^4z^4 = 0;$$

équation qui, à cause de $zz = xx + yy$, est rationnelle & donne une ligne du septième ordre, dont C est un point quadruple. On obtiendra une autre ligne du septième ordre, laquelle satisfera également, en faisant $K = x$ & $L = b$; car on aura :

$$8bx^3z^4 - 8bbxxz^4 + 4b^3xz^4 - 4aabx^3zz - 2c^4x^4 - b^4z^4 + 2aabbxxzz + a^4x^4 = 0$$

ou

$$z^4 = \frac{4a^2bx^3z^2 - 2a^2b^2x^2z^2 + 2c^4x^4 - a^4x^4}{8bx^3 - 8b^2x^2 + 4l^3x - l^4};$$

d'où l'on tire

$$z^2 = \frac{2a^2bx^3 - a^2b^2x^2 \pm x^2\sqrt{(2bx - b^2)(2c^4(l^2 - 2bx + 4x^2) - 2a^4(b^2 - 2bx + 2x^2))}}{b(2x - b)(4xx - 2lx + bb)}$$

434. On pourroit aller plus loin, & parmi les courbes qui ſont coupées en quatre points par les droites menées par le point C, chercher celles qui jouiſſent de certaines propriétés données. Mais, ſi on fait attention aux règles que nous venons d'expoſer, on ne rencontrera plus aucune difficulté, & tout ce qu'on pourra deſirer en ce genre ſe trouvera preſque ſans aucune peine; ou du moins, ſi la queſtion propoſée n'eſt pas ſuſceptible d'une véritable ſolution, on le reconnoîtra ſur-le-champ; c'eſt pourquoi je ne m'arrêterai pas davantage ſur cette matière, pour paſſer à un autre ſujet qui a rapport à la connoiſſance des lignes courbes.

CHAPITRE XVIII.

De la Similitude & de l'Affinité des lignes Courbes.

435. TOUTE équation à une ligne courbe doit renfermer, outre les coordonnées perpendiculaires x & y, une ou pluſieurs quantités conſtantes, telles que a, b, c, &c. leſquelles déſignent des lignes conſtantes, & qui font par-tout avec les variables x & y un même nombre de dimenſions de lignes. Car, s'il y a dans un terme un produit de n lignes multipliées entre elles, il faut néceſſairement que les autres termes renferment un produit d'autant de lignes; autrement on devroit comparer entre elles des quantités hétérogènes, ce qui eſt impoſſible.

impossible. Ainsi, dans toute équation à une courbe, les lignes constantes a, b, c, &c., formeront par-tout avec les variables x & y un même nombre de dimensions, à moins que par hasard une des lignes constantes ne soit exprimée par l'unité ou par un autre nombre abstrait. Il suit de cette remarque que, s'il ne se trouvoit aucune ligne constante dans l'équation, les variables x & y compléteroient elles seules dans chaque terme un même nombre de dimensions; & que par conséquent elles formeroient une fonction homogène. Mais nous avons vu auparavant qu'une telle équation n'appartient point à une ligne courbe, mais bien à un système de lignes droites qui s'entrecoupent réciproquement au même point.

436. Examinons donc une équation qui, outre les deux variables x & y, renferme une ligne constante a, de manière que les trois lignes a, x & y, forment par-tout dans l'équation le même nombre de dimensions. Une équation de cette nature, suivant la valeur qu'on jugera à propos de donner à la constante a, exprimera une infinité de courbes qui ne différeront entre elles que par la grandeur, & qui d'ailleurs seront entièrement semblables. Ainsi toutes les courbes qui sont comprises de cette manière dans une même équation, sont regardées avec raison comme étant d'une même espèce & semblables les unes aux autres; & on ne remarquera entre elles d'autre différence que celle qu'on conçoit exister dans les cercles de différente grandeur.

437. Pour mieux faire sentir cette similitude, nous prendrons une équation déterminée, qui, outre les variables x & y, renferme une seule ligne constante a, que nous appellerons *Paramètre*; celle-ci, par exemple :

$$y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0.$$

Soit $AC = a$ la valeur du paramètre, & AMB la ligne courbe exprimée par cette équation, en prenant la droite AB pour axe, & en supposant les coordonnées $AP = x$ & $PM = y$. Donnons à présent au paramètre a une autre valeur quelconque $ac = a$, & soit amb la courbe représentée alors par Pl. IX. Fig. 88. Pl. IX. Fig. 89.

l'équation propoſée ; ces deux courbes AMB & amb ſeront ſemblables l'une à l'autre. En effet, ſi AC reſte $= a$, $AP = x$, $PM = y$, & que $ac = \frac{1}{n} AC = \frac{a}{n}$; que dans ce cas on prenne $ap = \frac{1}{n} AP = \frac{x}{n}$, on aura $pm = \frac{1}{n} PM = \frac{y}{n}$; car, ſi au lieu de a, x & y, on écrit reſpectivement $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$ & $\frac{y}{n}$, l'équation demeurera la même, à cauſe que tous les termes ſont diviſés par n^3.

438. Ainſi une des propriétés des courbes ſemblables, & qui peut caractériſer leurs ſimilitudes, eſt que, ſi on prend les abſciſſes AP, ap, proportionnelles aux paramètres AC & ac, les appliquées PM & pm auront en même temps le même rapport; c'eſt-à-dire que, ſi on ſuppoſe $AP : ap :: AC : ac$, on aura auſſi $PM : pm :: AC : ac$. Puiſqu'on a $AP : PM :: ap : pm$, ces courbes ſeront donc ſemblables dans le ſens géométrique, & jouiront ſous tous les rapports, à la grandeur près, des mêmes affections. Par exemple, en prenant des abſciſſes AP, ap, homologues ou proportionnelles aux paramètres AC & ac, non-ſeulement les appliquées PM & pm auront le même rapport, mais encore toutes les autres lignes ſemblablement tirées. Les arcs AM & am ſeront auſſi comme AC & ac. De plus, les aires ſemblables APM & apm ſeront dans un rapport doublé, ou comme AC^2 à ac^2; & ſi on prend deux points homologues quelconques O & o, de manière qu'on ait $AO : ao :: AC : ac$; & que de ces deux points on mène, ſous des angles égaux AOM, aom, des droites OM, om aux courbes, on aura auſſi $OM : om :: AC : ac$. Enfin la ſimilitude des figures fera que les tangentes aux points homologues M & m ſeront également inclinées à l'axe, & que les rayons oſculateurs auront auſſi le même rapport des paramètres AC & ac.

439. Il ſuit de là que tous les cercles ſont des figures ſemblables exprimées par l'équation $yy = 2ax - xx$, & qu'il en eſt de même de toutes les courbes renfermées dans l'équation $yy = ax$, c'eſt-à-dire, de toutes les paraboles.

Comme dans ces sortes d'équations qui, comme nous venons de le voir, comprennent les courbes semblables, les coordonnées x & y avec le paramètre a forment dans tous les termes un même nombre de dimensions, il s'ensuit que, si on détermine la valeur de y, on la trouvera égale à une fonction homogène d'une dimension de a & de x. Donc réciproquement, si P désigne une fonction homogène d'une dimension de a & de x, l'équation $y = P$ contiendra une infinité de courbes semblables, qu'on fera naître en donnant successivement au paramètre a des valeurs différentes. Par la même raison, une équation de cette nature, qui appartient aux courbes semblables, donnera pour l'abscisse x une fonction d'une dimension de a & de y; & le paramètre a lui-même sera égal à une fonction d'une dimension de x & de y.

440. Or, étant donnée une courbe quelconque AMB, on pourra par une pratique facile en décrire une infinité d'autres qui lui soient semblables. Car, en prenant un rapport quelconque déterminé, par exemple, celui de $1 : n$ pour celui des côtés homologues de la courbe donnée & de celle qu'il s'agit de décrire, si la courbe donnée AMB est rapportée à l'axe AB par le moyen des coordonnées perpendiculaires AP & PM, il n'y aura qu'à prendre sur un axe semblable ab une abscisse ap, telle que AP soit : ap :: $1 : n$, & élever du point p une appliquée perpendiculaire pm, de manière qu'on ait pareillement PM : pm :: $1 : n$; le point m appartiendra à la courbe semblable amb, & les points M & m seront homologues. On pourra encore décrire la courbe en partant d'un point quelconque fixe O. Car, après avoir pris dans la courbe, qu'il s'agit de décrire, un point fixe semblablement placé, il n'y aura qu'à faire l'angle aom toujours égal à l'angle AOM, & couper om de manière que OM soit : om :: $1 : n$; le point m ainsi déterminé appartiendra pareillement à la courbe semblable amb. On pourra donc de cette manière décrire une courbe semblable pour chaque rapport $1 : n$ pris à volonté. On se sert ordinairement pour cela d'instrumens, au moyen desquels il est facile de tracer des figures d'une grandeur quelconque, & qui soient semblables à une figure donnée.

441. Ainſi, lorſque la nature de la courbe propoſée AM ſera donnée par une équation quelconque entre les coordonnées $AP = x$ & $PM = y$, il ſera facile d'avoir l'équation qui convient à la courbe ſemblable am. En effet, ſoit l'abſciſſe homologue $ap = X$, & l'appliquée $pm = Y$; on aura par conſtruction $x : X :: 1 : n$ & $y : Y :: 1 : n$; d'où l'on tire $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Ces valeurs, ſubſtituées dans l'équation donnée en x & en y, donneront une équation entre X & Y, qui ſera celle des courbes ſemblables. Si donc on n'admet dans cette nouvelle équation pour eſtimer les dimenſions que les ſeules coordonnées X & Y avec la lettre n, le nombre en ſera par-tout nul; ou, ſi, pour faire diſparoître les fractions, on multiplie l'équation par une puiſſance quelconque de n, on en trouvera une autre dans laquelle ces trois quantités X, Y & n, formeront dans tous les termes un même nombre de dimenſions. Or nous avons vu ci-deſſus que dans toute équation qui appartenoit à des courbes ſemblables, les deux coordonnées avec la conſtante, d'où dépend leur ſimilitude, formoient par-tout le même nombre de dimenſions; on a donc un caractère particulier qui conſtitue les équations des courbes ſemblables.

442. Dans les courbes ſemblables les abſciſſes & les appliquées homologues croiſſent ou diminuent dans le même rapport; mais, ſi les abſciſſes ſuivent un rapport quelconque, & les appliquées un autre, les courbes ne ſeront plus ſemblables. Cependant, à cauſe de l'eſpèce d'analogie qu'on remarque dans les courbes, qu'on obtient de cette manière, on dira qu'elles ont entre elles de l'*affinité*. Ainſi l'affinité comprend ſous elle la ſimilitude, comme eſpèce; car les courbes qui ont de l'affinité deviennent ſemblables, lorſque les rapports différens, que les abſciſſes & les appliquées ont entre elles en particulier, deviennent égaux. Ainſi une courbe quelconque AMB étant donnée, on en trouvera autant qu'on voudra amb, qui auront de l'affinité avec la première en procédant de la manière ſuivante. On prendra l'abſciſſe ap, de ſorte qu'on ait $AP : ap :: 1 : m$; enſuite on élevera l'appliquée pm, de façon que

Pl. IX. Fig. 88. & 89.

PM soit : pm :: 1 : n; & par ce moyen, en changeant l'un ou l'autre de ces rapports 1 : m & 1 : n, ou les deux à la fois ; on aura une infinité de lignes courbes qui seront caractérisées par leur affinité avec la première AMB.

443. Supposons la nature de la courbe donnée AMB exprimée par une équation quelconque entre les coordonnées perpendiculaires $AP = x$ & $PM = y$; & dans la courbe amb, déterminée de la manière que nous venons de dire, soient l'abscisse $ap = X$ & l'appliquée $pm = Y$; à cause de $x : X :: 1 : m$ & de $y : Y :: 1 : n$, on aura $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Donc, si on substitue ces valeurs dans l'équation donnée entre x & y, on aura l'équation générale entre X & Y, qui convient aux courbes dont il s'agit. Pour connoître plus intimement la nature de cette équation, supposons que celle de la courbe donnée AMB soit telle, qu'on ait pour l'appliquée y une fonction quelconque de x que nous ferons $= P$, ou que $y = P$. Si donc on substitue dans P, au lieu de x, $\frac{X}{m}$, P deviendra une fonction de X & de m de dimension nulle ; & par conséquent on aura l'équation générale des courbes qui ont de l'affinité, en égalant $\frac{Y}{n}$ à une fonction de X & de m de dimension nulle; ou, ce qui revient au même, on égalera une fonction de dimension nulle de Y & de n à une fonction de dimension nulle de X & de m.

444. Or la différence entre les courbes semblables & celles qui ont de l'affinité consiste principalement en ce que les courbes qui sont semblables à l'égard d'un axe ou d'un point fixe, le doivent être de même par rapport à tous les autres axes ou à tous les points homologues; au lieu que les secondes ne jouissent de leur propriété qu'à l'égard des axes auxquels on les rapporte ; & qu'on ne peut pas prendre à volonté d'autres axes ou d'autres points homologues, auxquels on puisse rapporter leur affinité. Au reste, il faut observer que les deux espèces de courbes que nous venons de considérer, sont les unes & les autres du même ordre, & qu'elles appartiennent conséquemment au même genre de lignes. Pour

donner une idée plus nette de ce que nous venons de dire de la ſimilitude & de l'affinité, nous l'éclaircirons par quelques exemples tirés des courbes les plus connues.

445. Soit donc la courbe donnée un cercle rapporté au diamètre, dont la nature eſt repréſentée par l'équation $y^2 = 2cx - x^2$. Faiſons $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$, l'équation réſultante entre X & Y comprendra toutes les courbes ſemblables; on aura donc $\frac{YY}{nn} = \frac{2cX}{n} - \frac{XX}{nn}$ ou $YY = 2ncX - XX$; d'où il ſuit que toutes les courbes ſemblables au cercle ſont elles-mêmes des cercles, dont les diamètres $2nc$ diffèrent entre eux, comme on voudra. Mais, pour trouver les courbes qui ont de l'affinité avec le cercle, il faudra faire $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$, & on aura $\frac{YY}{nn} = \frac{2cX}{m} - \frac{XX}{mm}$ ou $m^2 Y^2 = 2mn^2 cX - nnXX$; équation générale à l'Ellypſe rapportée à l'un des axes principaux. On voit par là que toutes les Ellypſes ſont des lignes courbes qui ont de l'affinité avec le cercle; & qu'il en eſt de même de toutes les Ellypſes comparées les unes aux autres. On conçoit, par la même raiſon, que toutes les hyperboles jouiſſent de la même propriété; & les ellypſes, auſſi bien que les hyperboles, dans leſquelles les deux axes principaux ont entre eux le même rapport, ſeront des courbes reſpectivement ſemblables.

446. Quant à la parabole exprimée par l'équation $y^2 = cx$, il eſt clair que toutes les courbes qui lui ſont ſemblables ſont auſſi des paraboles; & que par conſéquent toutes les paraboles ſont ſemblables entre elles. Mais, pour avoir les courbes qui ont de l'affinité avec la parabole, nous ferons $y = \frac{Y}{n}$ & $x = \frac{X}{m}$; ce qui donnera l'équation $Y^2 = \frac{n^2 c}{m} X$, laquelle, repréſentant auſſi des paraboles, fait voir manifeſtement que les courbes qui ont de l'affinité avec la parabole, lui ſont en même temps ſemblables, en ſorte que dans ce cas la ſimilitude a une ſignification auſſi étendue que l'affinité. La même choſe a lieu

pour toutes les courbes dont l'équation eſt exprimée par deux termes ſeulement ; telles ſont les expreſſions $y^3 = ccx$; $y^3 = cx^2$; $y^2x = c^3$, &c. Ainſi les courbes qui ont de l'affinité ſoit avec les paraboles, ſoit avec les hyperboles, leur ſont en même temps ſemblables; ce qui n'a pas lieu pour les courbes d'un autre genre, comme nous l'avons déjà remarqué à l'égard du Cercle & de l'Ellypſe.

447. De même que dans une équation donnée entre x & y, dans laquelle il entre autant de quantités conſtantes a, b, c, &c., qu'on voudra, ſi on donne à chaque conſtante une valeur quelconque, il en réſulte une courbe unique déterminée; de même, ſi on fait varier une des conſtantes, a, par exemple, & qu'on lui donne ſucceſſivement différentes valeurs, chacune de ces valeurs particulières donnera naiſſance à une courbe; & on en aura par ce moyen une infinité qui ſeront ſemblables entre elles, pourvu qu'il n'y ait pas dans l'équation d'autres lignes conſtantes que a; & dans le cas contraire, elles ſeront diſſemblables. Mais ſi, outre a, on fait varier auſſi une autre conſtante b, la variation de cette dernière donnera pour chaque valeur de a une infinité de courbes; & en faiſant varier à la fois les deux conſtantes a & b, on aura une infinité de fois un nombre infini de lignes courbes différentes; ſi l'on fait varier de plus une troiſième conſtante c, il en réſultera un nombre de courbes encore infiniment plus grand; & plus le nombre des conſtantes qu'on fait varier ſera grand, plus la puiſſance de l'infini qui exprimera le nombre de courbes qui en réſultent, ſera conſidérable.

448. Examinons avec un peu plus d'attention cette infinité de courbes qui proviennent d'une équation, lorſqu'on fait varier ſeulement une des lignes conſtantes. Une telle équation, lorſqu'on conſerve le même axe & la même origine des abſciſſes, non-ſeulement exprime cette infinité de lignes courbes dont on vient de parler ; mais indique de plus leur ſituation ; de ſorte qu'elles rempliſſent l'eſpace donné qu'on voudra, ſur lequel il eſt impoſſible d'aſſigner un point par où ne paſſe pas une de ces lignes. Ces courbes, ſuivant la nature de l'équation, ſeront donc diſſemblables ou ſemblables,

comme on en peut juger par ce qui précède; il peut même arriver qu'elles ſoient en même temps ſemblables & égales, & qu'elles ne diffèrent entre elles que par leur poſition. Ainſi cette équation $y = a + \sqrt{(2cx - xx)}$, en faiſant varier a, exprimera une infinité de cercles égaux dont le rayon $= c$, & dont les centres ſont ſitués ſur une droite perpendiculaire à l'axe.

Pl. X. Fig. 90. 449. Réciproquement, ſi une ſeule & même courbe eſt tracée ſur un même plan dans une infinité de ſituations différentes aſſujetties à une certaine loi, on pourra trouver une équation qui, en faiſant varier une ſeule conſtante, repréſentera ce nombre infini de courbes égales entre elles. Soit la courbe qui doit être dans un nombre infini de ſituations différentes, un cercle dont le rayon $= c$, dont le ſommet placé ſucceſſivement en A, a, trace une courbe donnée AaL, que j'appelle *Directrice*, & dont le diamètre ab reſte conſtamment parallèle à l'axe AB. Pour trouver l'équation qui convient à tous ces cercles, on prendra un point quelconque a de la directrice, d'où on abaiſſera ſur l'axe principal la perpendiculaire aK. On ſuppoſera $AK = a$; &, à cauſe que la directrice eſt donnée, on aura Ka en a; ſoit donc $Ka = \mathrm{A}$, A ſera une fonction déterminée de a. Alors on mènera de a la parallèle ab à l'axe principal, laquelle ſera le diamètre du cercle dont le ſommet eſt placé ſur le point a de la directrice. D'un point quelconque m de ce cercle ſoit abaiſſée l'appliquée $mP = y$, qui répond à l'abſciſſe $AP = x$, on aura donc $ap = x - a$, & $pm = y - \mathrm{A}$; mais, ſi on ſuppoſe $ap = t$ & $pm = u$, la nature du cercle donne $uu = 2ct - tt$; &, à cauſe que $t = x - a$ & $u = y - \mathrm{A}$, on aura $(y - \mathrm{A})^2 = 2c(x - a) - (x - a)^2$ pour l'équation générale, qui renferme tous les cercles placés, comme nous venons de le dire, ſur la directrice AaL; & on en déduira tous ces cercles, en faiſant varier la ligne a, d'où dépend en même temps la valeur de A.

450. Semblablement, ſi, au lieu d'un cercle, on fait gliſſer une autre courbe quelconque amb ſur la directrice AaL, de manière que ſon ſommet ou l'origine des abſciſſes ſoit toujours ſur cette dernière ligne, & que l'axe ab demeure conſtamment

tamment parallèle à lui-même, on aura la même courbe décrite une infinité de fois, & il ſera poſſible de trouver une équation qui comprenne à la fois toutes ces lignes courbes. Suppoſons la nature de la courbe, qu'on fait mouvoir, exprimée par une équation entre les coordonnées $ap = t$ & $pm = u$; & prenons pour l'axe principal, auquel ſe rapportent toutes les courbes conſidérées en général, la droite AB parallèle aux axes ab, laquelle eſt en même temps l'axe de la directrice AaL. Suppoſant, comme auparavant, $AK = a$ & $Ka = \mathrm{A}$, A étant une fonction quelconque de a; ſoient l'abſciſſe $AP = x$ & l'appliquée $Pm = y$, on aura $t = x - a$ & $u = y - \mathrm{A}$. Si donc on ſubſtitue ces valeurs, au lieu de t & de u, dans l'équation donnée entre t & u, on obtiendra l'équation générale qui renferme à la fois toutes les courbes amb. Car quelque valeur qu'on donne à a, on aura une des courbes ſans nombre amb qui ſont décrites par ce mouvement. Ainſi, ſi la courbe amb eſt une parabole exprimée par l'équation $uu = ct$, l'équation $(y - \mathrm{A})^2 = c(x - a)$ comprendra ce nombre infini de paraboles égales, dont les ſommets ſont placés ſur la directrice AaL, & dont les axes ſont parallèles à la droite AB.

451. Nous avons ſuppoſé que le ſommet A de la courbe gliſſoit ſur la directrice donnée, de manière que l'axe reſtât toujours parallèle à lui-même; mais on peut ſuppoſer encore que, pendant ce mouvement du ſommet ſur la courbe donnée, la poſition de l'axe de la courbe ab varie auſſi d'une manière quelconque; on aura alors une équation beaucoup plus générale pour la même courbe décrite une infinité de fois ſur un plan donné ſuivant une loi quelconque. Pour rendre cela plus clair, imaginons que le ſommet A de la courbe ſe meuve ſur la circonférence Aa de manière que l'axe de la courbe ab ſoit toujours dirigé vers le centre O du cercle. Le mouvement de rotation de la courbe AMB avec l'axe BAO autour du point O donnera donc à la même courbe AMB une infinité de ſituations différentes, qu'il s'agit de comprendre dans une ſeule équation, qui contiendra une conſtante quelconque qu'on ſuppoſe variable. Pl. X. Fig. 91.

452. Soit le rayon invariable $AO = aO = c$, & ſoit l'angle $AOa = \alpha$, lequel eſt ſuppoſé variable. D'un point quelconque m de la courbe amb, priſe dans une ſituation quelconque, ſoit abaiſſée ſur la droite OAB, conſidérée comme axe principal, l'appliquée mP; & ſoit $OP = x$ & $Pm = y$. Qu'on abaiſſe enſuite du point m ſur le propre axe ab de la courbe amb la perpendiculaire mp; en faiſant $ap = t$ & $pm = u$, on aura une équation invariable entre t & u, qui exprimera la nature de la courbe amb. Du point P ſoit menée Ps parallèle à Ob, juſqu'à ce qu'elle ſoit rencontrée en s par le prolongement de l'appliquée mp, on aura $ps = x\, \mathit{ſin.}\, \alpha$, $Op - Ps = x . \mathit{coſ.}\, \alpha$; mais alors, à cauſe de l'angle $Pms = AOa = \alpha$, on aura $Ps = y\, \mathit{ſin.}\, \alpha$ & $ms = y . \mathit{coſ.}\, \alpha$. D'où l'on conclura $Op = c + t = x . \mathit{coſ.}\, \alpha + y\, \mathit{ſin.}\, \alpha$ & $mp = u = y . \mathit{coſ.}\, \alpha - x\, \mathit{ſin.}\, \alpha$. Il faudra donc ſubſtituer dans l'équation donnée entre t & u, $t = x . \mathit{coſ.}\, \alpha + y\, \mathit{ſin.}\, \alpha - c$ & $u = y . \mathit{coſ.}\, \alpha - x\, \mathit{ſin.}\, \alpha$; & on aura l'équation générale entre les coordonnées x & y, qui, en ſuppoſant α variable, renfermera toutes les courbes amb.

Pl. X. Fig. 92. 453. Suppoſons à préſent que, tandis que le ſommet de la courbe AMB ſe meut ſuivant la directrice quelconque AaL, la poſition de l'axe ab change continuellement, de ſorte que l'angle AOa dépende d'une manière quelconque du point a. Par exemple, le ſommet étant en a, ſoit $AK = a$, $Ka = \mathrm{A}$, & l'angle $AOa = \alpha$; la directrice étant donnée, A deviendra auſſi une fonction quelconque connue de a; ſuppoſons encore que le ſinus ou le coſinus de l'angle α ſoit pareillement une fonction quelconque de a. Cela poſé, on aura $KO = \frac{\mathrm{A}}{\mathit{tang.}\, \alpha}$ & $Oa = \frac{\mathrm{A}}{\mathit{ſin.}\, \alpha}$. D'un point quelconque m de la courbe amb ſoit d'abord abaiſſée ſur l'axe principal AO la perpendiculaire mP, & enſuite ſur le propre axe de la courbe la perpendiculaire mp; ſoient $AP = x$, $Pm = y$, & $ap = t$, $pm = u$; on aura une équation invariable entre les coordonnées t & u, au moyen de laquelle il s'agit d'obtenir une équation variable entre x & y, qui contienne toutes les courbes amb.

454. Menons à cet effet du point P ſur mp prolongé la perpendiculaire Ps, qui ſera parallèle à l'axe de la courbe abO; à cauſe de l'angle $Pms = AOa = \alpha$, on aura $Ps = y\,\text{ſin.}\,\alpha$ & $ms = y\,\text{coſ.}\,\alpha$. Enſuite, à cauſe de $OP = a + \frac{\text{A}}{\text{tang.}\,\alpha} - x$, on aura $ps = a.\text{ſin.}\,\alpha + \text{A}.\text{coſ.}\,\alpha - x\,\text{ſin.}\,\alpha$, & $Op - Ps = a\,\text{coſ.}\,\alpha + \frac{\text{A}.\text{coſ.}\,\alpha}{\text{tang.}\,\alpha} - x.\text{coſ.}\,\alpha$. On aura donc $Op = a\,\text{coſ.}\,\alpha + \frac{\text{A}.\text{coſ.}\,\alpha}{\text{tang.}\,\alpha} - x.\text{coſ.}\,\alpha + y.\text{ſin.}\,\alpha = \frac{\text{A}}{\text{ſin.}\,\alpha} - t$; & par conſéquent $t = \text{A}.\text{ſin.}\,\alpha - a\,\text{coſ.}\,\alpha + x.\text{coſ.}\,\alpha - y\,\text{ſin.}\,\alpha$, & $u = -a\,\text{ſin.}\,\alpha - \text{A}.\text{coſ.}\,\alpha + x\,\text{ſin.}\,\alpha + y.\text{coſ.}\,\alpha$. Ainſi, en ſubſtituant dans l'équation donnée entre t & u,

$$t = (x - a).\text{coſ.}\,\alpha - (y - \text{A}).\text{ſin.}\,\alpha$$

&

$$u = (x - a)\,\text{ſin.}\,\alpha + (y - \text{A}).\text{coſ.}\,\alpha,$$

on aura l'équation demandée entre x & y. Concluons que, quelle que ſoit la loi ſuivant laquelle la même courbe amb eſt décrite une infinité de fois ſur un plan, on trouvera de cette manière l'équation générale qui contient à la fois toutes ces courbes.

455. On renferme donc de cette manière dans une équation toutes les mêmes courbes, quel qu'en ſoit le nombre, qui ne diffèrent entre elles qu'à raiſon de leur poſition, pourvu que l'équation donnée entre t & u ſoit invariable, & qu'elle ne renferme point de conſtante a qu'on faſſe varier. Mais s'il y a dans l'équation donnée entre t & u une ou pluſieurs conſtantes qui ſoient ſuppoſées également dépendantes de a, on obtiendra alors une infinité de courbes diverſes ſemblables ou diſſemblables entre elles, qui ſeront pareillement contenues dans une même équation; toutes les courbes ſeront ſemblables, ſi l'équation entre t & u eſt telle qu'il en réſulte pour u une fonction quelconque homogène d'une dimenſion de t & de f, f étant une quantité quelconque dépendante de a; &, ſi le contraire a lieu, les courbes ſeront diſſemblables.

Pl. X. Fig. 93. 456. Pour éclaircir cette matière par un exemple, ſuppoſons une infinité de cercles AB, aB, amb, aſſujettis à paſſer par un point fixe B, & qui aient tous leurs centres ſur une même droite AE; tels ſont les cercles qui repréſentent ordinairement les méridiens ſur les mappemondes. Soit abaiſſée du point B ſur la droite AC la perpendiculaire BC que je ſuppoſe $= c$, cet intervalle eſt invariable; & parmi le nombre infini de cercles décrits, conſidérons-en un amB; abaiſſons une appliquée mP, faiſons $CP = x$ & $Pm = y$; & ſuppoſons $aE = BE = a$, le rayon de ce cercle, qui, quoique conſtant par rapport au même cercle, eſt cependant variable à l'égard de tous; nous aurons $CE = \sqrt{(aa - cc)}$ & $PE = x + \sqrt{(aa - cc}$. Puis donc que $PE^2 + Pm^2 = aa$, on aura $y^2 + x^2 + 2x\sqrt{(aa - cc)} + aa - cc = aa$, ou $yy = cc - 2x\sqrt{(aa - cc)} - xx$; mais, ſi au lieu d'une conſtante, on introduit dans l'équation une variable pour repréſenter CE, & qu'on faſſe $CE = a$, on obtiendra cette équation un peu plus ſimple $y^2 = c^2 - 2ax - x^2$, qui, à cauſe de la variation de a, repréſentera tous les cercles qui paſſent par B, & qui ont leurs centres ſur la droite AE. On rapportera d'une manière ſemblable à une même équation toutes les courbes, quel qu'en ſoit le nombre & la nature, lorſqu'elles ſont aſſujetties à une certaine loi dans leur ſituation, pourvu qu'on ait ſoin d'obſerver exactement la différence qui exiſte entre les conſtantes variables & invariables.

CHAPITRE XIX.

De l'Intersection des Courbes.

457. Nous avons eu occaſion de remarquer plus d'une fois, dans les chapitres précédens, comment les lignes courbes ſont coupées par les lignes droites; nous y avons fait voir que les lignes du ſecond ordre ne pouvoient être coupées par des droites en plus de deux points; que les lignes du troiſième ordre n'étoient pas ſuſceptibles de plus de trois interſections, & que celles du quatrième en admettoient tout au plus quatre. Ayant donc l'intention de faire connoître dans ce chapitre le nombre d'interſections que forment entre elles deux courbes quelconques, nous commencerons ce traité par les lignes droites, & nous chercherons les points où une droite quelconque peut rencontrer une courbe; car par ce moyen nous préparerons la voie pour trouver les interſections réciproques des lignes courbes; ce qui eſt ſouvent d'un très-grand uſage dans la conſtruction des équations des degrés ſupérieurs, comme nous aurons occaſion de le voir plus au long dans le chapitre ſuivant.

458. Propoſons-nous donc une courbe quelconque AMm, dont la nature ſoit donnée par une équation entre les coordonnées perpendiculaires $AP = x$, $PM = y$. Imaginons enſuite une droite quelconque BMm, dont il s'agit de déterminer le nombre & le lieu des interſections avec la courbe AMm. Dans cette vue, on cherchera de même pour la ligne droite une équation entre les coordonnées perpendiculaires x & y, rapportée au même axe AP & à la même origine A des abſciſſes. L'équation à la ligne droite ſera de cette forme $\alpha x + \beta y = \gamma$; laquelle apprend qu'en faiſant $x = 0$, on aura $y = AD = \frac{\gamma}{\beta}$, & qu'en faiſant $y = 0$, on aura $x = -AB$ Pl. X. Fig. 94.

$=\frac{\gamma}{\alpha}$; d'où l'on pourra conclure le point de concours B de cette droite avec l'axe, & la valeur de l'angle en B dont la tangente $=\frac{AD}{AB}=\frac{-\alpha}{\beta}$. Par ce moyen la courbe & la droite se trouvent exprimées par des équations données entre les coordonnées communes x & y.

459. Si nous prenons dans les deux équations des abscisses x constamment égales, les appliquées y, si elles sont différentes, feront connoître combien les points de la courbe & de la droite qui répondent à la même abscisse sont distans l'un de l'autre. Par conséquent, si la valeur de y, qu'on tire de chaque équation, se trouve égale, c'est une preuve que la courbe & la droite auront un point commun, & qu'il y aura en cet endroit un point d'intersection. Ainsi, pour trouver les intersections, il faudra supposer dans l'une & l'autre équation que les abscisses x & les appliquées y sont en même temps égales; on aura par là deux équations qui renfermeront deux quantités inconnues x & y, & dont la résolution donnera ou les abscisses x auxquelles répondent les intersections, ou les appliquées y. Par exemple, si on chasse de ces deux équations l'inconnue y, on trouvera une équation qui ne contiendra plus que l'inconnue x, dont les valeurs représenteront les abscisses AP, Ap; d'où il faudra mener les appliquées PM, pm, qui passeront par les points d'intersection M & m.

460. Puisque l'équation pour la droite BMm est $\alpha x+\beta y=\gamma$, on en tirera la valeur de $y=\frac{\gamma-\alpha x}{\beta}$, qui, substituée dans l'équation à la courbe à la place de y, en donnera une autre qui ne renfermera plus que x, & dont les racines réelles exprimeront toutes les abscisses auxquelles répondent les intersections; & par conséquent le nombre des intersections se conclura de celui des racines réelles de x que fournit l'équation trouvée. Mais, parce que dans la valeur de $y=\frac{\gamma-\alpha x}{\beta}$, l'inconnue x n'a qu'une dimension, l'équation qui résultera de la substitution ne donnera pas à x plus de dimensions que les deux quantités x & y n'en donnoient conjointement dans l'équation à la courbe,

Il s'ensuit que x aura autant de dimensions, ou moins, si la substitution fait disparoître les plus hautes puissances de x.

461. Quand on aura trouvé de cette manière les abscisses AP, Ap, qui répondent aux intersections, il sera facile de déterminer les points M & m. Car, puisque les appliquées élevées aux points P & p passent par les intersections, il n'y aura qu'à marquer les points où elles rencontrent la droite BMm. On pourroit aussi marquer les points où ces appliquées rencontrent la courbe AMm; mais comme il arrive souvent que l'appliquée coupe la courbe en plus d'un point, il resteroit de l'incertitude sur celui qui marqueroit l'intersection ; on obvie à cet inconvénient, en prenant les intersections sur la droite BMm, parce qu'aucune appliquée ne peut la couper en plus d'un point. S'il arrivoit que deux valeurs de x devinssent égales, cela apprendroit que les deux points d'intersection M & m se confondroient en un seul ; c'est le cas où la droite BM touchera la courbe, ou la rencontrera en un point double.

462. Si, après avoir éliminé y, l'équation résultante, qui doit donner x, n'avoit aucune racine réelle, on en concluroit que la droite BMm ne coupe ou ne touche la courbe nulle part. Mais, s'il y a des racines réelles, elles feront connoître, quel qu'en soit le nombre, autant d'intersections, parce qu'il répond toujours à chaque abscisse réelle une appliquée réelle de la droite BMm: &, comme celle de la courbe lui est égale, il est impossible qu'il n'y ait pas d'intersection. Il faut bien remarquer ici que, lorsqu'il s'agit de courbes qui s'entrecoupent, toutes les racines ne donnent pas toujours autant d'intersections; on en sentira bientôt la raison, lorsque nous considérerons deux courbes, & que nous chercherons leurs intersections.

463. Soient donc décrites deux courbes quelconques MEm, MFm, qui se coupent réciproquement; supposons, pour déterminer leurs points d'intersection, la nature de chacune exprimée par une équation entre les coordonnées perpendiculaires x & y rapportées à un axe commun AB, & à la même origine des abscisses. Si on prend dans les deux courbes Pl. X. Fig. 95.

des abſciſſes x égales, par-tout où il y aura interſection, les appliquées y le ſeront auſſi. Par conſéquent, ſi, au moyen des équations propoſées pour les deux courbes, on en forme une nouvelle qui ne renferme plus que l'inconnue x, toutes les interſections M, m, m, quel qu'en ſoit le nombre, ſeront indiquées par les racines réelles de cette équation; c'eſt-à-dire, que les abſciſſes AP, Ap, Ap, &c. qui répondent aux interſections M, m, m, &c. ſeront les valeurs de x qui conviennent pour cette équation.

464. Mais, après avoir trouvé ces abſciſſes AP, Ap, &c. qui conviennent aux interſections, il ne ſera pas auſſi facile de déterminer ces points. Car, ſi pluſieurs appliquées répondent pour chaque courbe à la même abſciſſe AP, ce qui arrive, lorſque dans l'une & l'autre de ces lignes y eſt une fonction multiforme de x, il faudra choiſir parmi cette double pluralité d'appliquées celles qui ſont égales entre elles. Ce choix ſera d'autant plus embarraſſant, que l'appliquée y aura plus de valeurs différentes dans chaque courbe; on remédiera cependant facilement à cet inconvénient, ſi dans l'élimination de l'appliquée y, au moyen des deux équations propoſées, on a recours à l'équation qui donne y en x; car celle-ci donnera pour chaque valeur de x la grandeur de l'appliquée depuis le point P juſqu'au point d'interſection; & il ne ſera pas beſoin pour cela d'examiner la nature de l'une ou l'autre des deux courbes, ou même des deux à la fois.

465. Soit l'une des courbes une parabole dont la nature eſt exprimée par l'équation $yy - 2xy + xx - 2ax = 0$; & l'autre un cercle repréſenté par l'équation $y^2 + x^2 - c^2 = 0$. Pour éliminer y, on ſouſtraira d'abord la première équation de la ſeconde, & on aura pour reſte $2xy + 2ax - cc = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{cc - 2ax}{2x}$; d'où il ſuit que, quelque valeur qu'on ait pour x, on trouvera toujours pour y des valeurs correſpondantes réelles. Subſtituons donc cette valeur, que nous venons de trouver pour y, dans la ſeconde équation, nous aurons :

$$c^4 - 4accx + 4(aa - cc)xx + 4x^4 = 0,$$

dont

dont chaque racine réelle fournira une vraie interſection. Suppoſons $c = 2a$, & partant :

$$4a^4 - 4a^3x - 3aaxx + x^4 = 0,$$

équation, dont une racine $x = 2a$. Après l'avoir extraite, l'équation reſtante ſera :

$$x^3 + 2axx + aax - 2a^3 = 0;$$

laquelle donne encore une racine réelle. Or on trouvera l'appliquée qui convient à ces deux racines, au moyen de l'équation $y = \frac{2aa - ax}{x}$; par exemple, à la première valeur de $x = 2a$ répondra $y = 0$; ce qui apprend que l'interſection a lieu ſur l'axe même.

466. On voit par-là que, toutes les fois que deux équations entre x & y ſont telles que dans l'élimination il en réſulte pour y une fonction rationnelle de x, chaque racine réelle de x que donnera la dernière équation, après qu'il n'y aura plus de y, donnera une vraie interſection; mais, ſi en éliminant, on ne trouve point de fonction rationnelle de x pour la valeur de y, il peut arriver que toutes les racines réelles de la dernière équation ne donnent pas toujours de vraies interſections; car la valeur de x peut être telle, qu'il n'y réponde aucune appliquée réelle ni dans l'une ni dans l'autre courbe, cependant on auroit tort d'en conclure que, dans ce cas, le calcul induit en erreur; car, quoiqu'une telle abſciſſe donne dans les deux courbes une valeur imaginaire pour l'appliquée correſpondante, comme l'égalité & l'inégalité ont lieu pour les quantités imaginaires comme pour les quantités réelles, rien n'empêche de regarder ces appliquées imaginaires comme égales entre elles, & de concevoir alors au moins une ſorte d'interſection, quoique non réelle.

467. Pour rendre cela plus clair, décrivons ſur le même axe BAE une parabole EM, dont le paramètre $= 2a$, & hors de cette courbe un cercle AmB dont le rayon $= c$, laiſſant entre les deux courbes un intervalle $AE = b$, de ma- Pl. X. Fig. 96.

nière que nous ſoyions bien aſſurés qu'il n'y a aucun point d'interſection. Prenons le point A pour l'origine des abſciſſes que nous regardons comme poſitives en allant vers E, & au contraire négatives, en rétrogradant vers B; nous aurons pour la parabole cette équation $yy = 2ax - 2ab$; & pour le cercle celle-ci $yy = -2cx - xx$. Si à préſent nous éliminons y, comme ſi nous voulions avoir un point d'interſection, nous aurons tout de ſuite $xx + 2(a+c)x - 2ab = 0$; ce qui donne pour x deux valeurs réelles, ſavoir :

$$x = -a - c \pm \sqrt{((a+c)^2 + 2ab)},$$

l'une poſitive, l'autre négative, quoiqu'il n'y ait cependant aucune interſection; c'eſt qu'alors on a pour ces deux abſciſſes, tant dans la Parabole que dans le Cercle, des appliquées imaginaires, qui, quoique telles, ne laiſſent pas pourtant d'être égales l'une à l'autre; en ſubſtituant cette valeur de x, on trouvera :

$$y = \sqrt{(-2a^2 - 2ac - 2ab \pm 2a\sqrt{(a^2 + 2ac + c^2 + 2ab)})},$$

expreſſion imaginaire.

468. Cet exemple eſt propre à faire voir qu'il exiſte auſſi des interſections de courbes imaginaires, qui, quoique nulles, ſont indiquées par le calcul auſſi bien que les réelles. C'eſt pour cette raiſon qu'on auroit tort de conclure du nombre des racines réelles de x, que donne la dernière équation, celui des interſections; car il peut arriver qu'il y ait plus de racines réelles que d'interſections, ou même qu'il n'y ait aucune interſection, quoiqu'on obtienne pour x deux racines réelles, ou même davantage. Néanmoins chaque interſection réelle ſuppoſe toujours une racine réelle de x dans la dernière équation; & par conſéquent, il y aura toujours au moins autant de racines réelles de x, que d'interſections, quoiqu'il y ait quelquefois plus de racines réelles. Au reſte, il ſera facile de voir ſi une interſection réelle répond à une valeur donnée de x, il faudra chercher la valeur correſpondante de y; & ſi elle eſt

réelle, l'interfection le fera auffi; mais fi elle eft imaginaire, l'interfection fera auffi imaginaire ou nulle.

469. Cette exception ou cette différence entre le nombre des racines réelles de x & celui des interfections n'a donc lieu, que lorfque dans les deux équations l'appliquée y a partout un nombre pair de dimenfions ; & que par conféquent l'axe principal eft en même temps diamètre de l'une & de l'autre courbe ; ou lorfque les équations font telles qu'en éliminant yy, y forte en même temps du calcul ; & qu'ainfi y ne puiffe être exprimé par une fonction rationnelle de x. Par exemple, fi une équation eft $yy - xy = aa$, & l'autre $y^4 - 2xy^3 + x^2y = bbxx$; on conclura de la première $(yy-xy)^2 = a^4$, ou $y^4 - 2xy^3 = a^4 - xxyy$; cette valeur, fubftituée dans la feconde, donnera $a^4 - x^2y^2 + x^2y = b^2x^2$, ou $yy - xy = \frac{a^4 - bbxx}{xx} = aa$; d'où l'on tire $xx = \frac{a^4}{aa+bb}$; & par conféquent $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Il femble donc qu'il y a ici une double interfection; mais, pour s'affurer fi l'une & l'autre eft réelle, il faut recourir à la valeur de y que donne l'équation $yy - xy = aa$. On aura donc $yy = \frac{\pm aay}{\sqrt{(aa+bb)}} + a^2$. Comme toutes les racines de cette équation font réelles, il s'enfuit qu'il y aura quatre points d'interfection ; & qu'à chaque abfciffe $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa+bb)}}$ répondent deux interfections réelles.

470. Mais toutes les fois que l'axe n'eft pas en même temps un diamètre des deux courbes, ou qu'en éliminant les puiffances fupérieures de y, y lui-même ne fort pas du calcul; comme alors on arrive pour exprimer la valeur de y à une fonction rationnelle de x, dans ces cas, chaque racine réelle de la dernière équation indiquera autant de véritables interfections; de forte que dans ces circonftances il n'y a aucune précaution à prendre. Cela arrive, lorfqu'une des courbes devient une droite, comme nous l'avons vu ci-deffus, ou lorfque fon appliquée eft exprimée par une fonction uniforme de x; car alors il n'y aura point d'appliquée imaginaire qui réponde à aucune abfciffe; & c'eft pour cela que toutes les

racines de x donneront, chacune en particulier, de véritables interſections. Or, quoique y ait pluſieurs dimenſions dans chaque équation, on arrive ordinairement, en éliminant y, à une équation qui donne pour la valeur de y une fonction rationnelle, & par conſéquent uniforme de x.

471. Les cas où quelques-unes des interſections indiquées par le calcul ſont imaginaires, ont lieu quand aucune des courbes n'a d'appliquée réelle correſpondante à l'abſciſſe qu'on a trouvée; nous en avons vu un exemple ci-deſſus dans le Cercle & la Parabole; mais il peut ſe préſenter des cas où une courbe donne pour toutes les abſciſſes des appliquées réelles, & que cependant il ne réponde pas d'interſections à toutes les racines réelles de x. Prenons pour exemple la ligne du troiſième ordre exprimée par l'équation:

$$y^3 - 3ay^2 + 2a^2y - 6ax^2 = 0;$$

laquelle donne pour toutes les abſciſſes des appliquées réelles, & même trois, ſi x eſt plus petit que $\frac{a}{3}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. Si on combine avec cette courbe une parabole exprimée par l'équation $yy - 2ax = 0$; cette dernière n'a point d'appliquée réelle qui réponde aux x négatifs; par conſéquent il n'y a point d'interſections pour les abſciſſes x négatives.

472. Eliminons y; comme la dernière équation donne $yy = 2ax$, la première ſe changera en celle-ci: $2axy - 6a^2x + 2a^2y - 6ax^2 = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{6a^2x + 6ax^2}{2a^2 + 2ax} = 3x$. Mais comme cette équation eſt diviſible par $y - 3x$, en effectuant la diviſion, on trouve une équation ſans y, ſavoir $2aa + 2ax = 0$; d'où $x = -a$. Il devroit donc y avoir une interſection correſpondante à l'abſciſſe $x = -a$, à laquelle il ne répond dans la Parabole aucune appliquée réelle; mais, ſi on fait $x = -a$ dans la courbe du troiſième ordre, l'équation devient $y^3 - 3ayy + 2aay - 6a^3 = 0$; d'où réſulte une appliquée réelle $y = 3a$; les deux autres valeurs de y compriſes dans l'équation $yy + 2aa = 0$ ſont imaginaires; & ces appliquées imaginaires qu'on trouve pour ce point, de-

viennent égales aux appliquées imaginaires de la parabole prises au même point, & on aura ainsi deux intersections imaginaires; mais le facteur de l'équation supérieure $y - 3x = 0$ donnera en outre deux intersections réelles; car, en substituant, l'équation à la parabole devient $9xx - 2ax = 0$. La première intersection se trouve donc à l'origine même des abscisses, où l'on a à la fois $x = 0$ & $y = 0$; & la seconde répond à l'abscisse $x = \frac{2a}{9}$, où $y = 3x = \frac{2a}{3}$.

473. On est donc arrivé dans ce cas à des intersections imaginaires, quoique dans l'élimination de y on ait trouvé une équation $2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0$, dans laquelle y n'a plus qu'une dimension; d'où il paroîtroit s'ensuivre que y peut être exprimé par une fonction rationnelle de x, ce que nous avons annoncé comme un symptôme auquel on reconnoissoit qu'il n'y avoit aucunes racines imaginaires; &, en effet, si cette équation n'avoit pas eu de diviseurs, on n'auroit pas trouvé d'intersections imaginaires; mais, comme on a obtenu ici par la division une équation qui ne renferme plus l'appliquée y, on est dans le même cas que si y n'eût pu être exprimé par une fonction rationnelle de x. Ainsi toutes les fois qu'une telle équation est résoluble en facteurs, il faut traiter chacun à part; d'où il arrive qu'un facteur admet des intersections imaginaires, tandis que l'autre les rejette entièrement.

474. Cela bien entendu, arrêtons-nous un peu plus longtemps sur la manière de déterminer les intersections de deux courbes proposées. Comme cette recherche dépend de l'élimination d'une des coordonnées y, il suffira d'avoir égard au nombre de dimensions de cette dernière quantité dans les deux équations. Car l'élimination s'effectuera toujours de la même manière, de quelque façon que l'autre coordonnée x affecte les deux équations. Soient donc P, Q, R, S, T, &c. & p, q, r, s, t, &c. des fonctions rationnelles de x; & supposons d'abord que les deux courbes, dont nous cherchons les intersections, soient exprimées par ces équations :

I.

$$P + Qy = 0.$$

II.

$$p + qy = 0.$$

Multiplions la première équation par p & la ſeconde par P; en retranchant l'une de l'autre, nous aurons pour réſultat cette autre équation délivrée entièrement de y:

$$pQ - Pq = 0.$$

Toutes les racines réelles x de cette équation, dans laquelle l'inconnue x reſte ſeule avec des conſtantes, indiqueront ſur l'axe les points auxquels répondent les interſections. Quelle que ſoit la valeur qu'on trouve pour x, il en réſultera toujours pour y une valeur réelle qu'on déduira de l'une ou l'autre équation, ſavoir $y = \frac{-P}{Q} = \frac{-p}{q}$; ce qui indique une interſection; d'où il ſuit que, ſi l'appliquée y de chaque courbe eſt exprimée par une fonction rationnelle ou uniforme de x, on n'aura plus à craindre d'avoir des interſections imaginaires.

475. Suppoſons à préſent l'appliquée y d'une des courbes exprimée par une fonction uniforme de x, comme auparavant; mais celle de la ſeconde repréſentée par une fonction biforme, de ſorte qu'on ait:

I.

$$P + Qy = 0.$$

II.

$$p + qy + ryy = 0.$$

Multiplions la première équation par p, la ſeconde par P;

& retranchons l'une de l'autre, après la division faite par y, on aura :

III.

$$pQ - Pq - Pry = o,$$

ou

$$(Pq - pQ) + Pry = o.$$

Multiplions ensuite la première par Pr & la troisième par Q; après la soustraction faite, nous aurons une équation qui ne contiendra plus de y :

$$PPr - PQq + pQQ = o.$$

Chacune des racines de cette équation donnera donc les abscisses correspondantes aux intersections ; lesquelles seront toutes réelles, puisque les appliquées $y = \frac{-P}{Q} = \frac{pQ - Pq}{Pr}$ qui répondent aux abscisses, sont elles-mêmes réelles.

476. Soit, comme auparavant, l'appliquée d'une des courbes égale à une fonction uniforme de x; & supposons que celle de l'autre soit exprimée par une équation cubique, ou qu'elle soit une fonction triforme de x, de sorte que les deux équations proposées soient de cette forme :

I.

$$P + Qy = o.$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = o.$$

Multiplions la première par p & la seconde par P; retranchons l'une de l'autre & divisons par y, nous aurons :

III.

$$(Pq - pQ) + Pry + Psyy = o.$$

Si on ſubſtitue dans cette équation à y ſa valeur tirée de la première $y = \frac{-P}{Q}$, & qu'on faſſe diſparoître les fractions, on arrivera à cette équation :

$$PQQq - pQ^3 - P^2Qr + P^3s = 0,$$

ou

$$Q^3p - PQ^2q + P^2Qr - P^3s = 0,$$

qu'on auroit pu trouver tout de ſuite, en mettant dans la ſeconde équation, au lieu de y, ſa valeur tirée de la première équation $\frac{-P}{Q}$. Toutes les racines réelles de cette équation déſigneront donc autant de véritables interſections, puiſque pour chaque valeur de x on a par la première équation des appliquées réelles $y = \frac{-P}{Q}$.

477. De même, ſi l'appliquée y d'une courbe eſt exprimée par une équation de quatre dimenſions, ou d'un plus grand nombre, tandis que l'appliquée de l'autre courbe demeure une fonction uniforme ou rationnelle de x, il eſt facile d'éliminer y. En effet, ſoient propoſées les deux équations :

I.

$$P + Qy = 0,$$

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0.$$

La valeur de $y = \frac{-P}{Q}$ tirée de la première, étant ſubſtituée dans la ſeconde, donnera l'équation ſuivante, qui ne renfermera plus que des x & des quantités connues :

$$Q^4p - PQ^3q + P^2Q^2r - P^3Qs + P^4t = 0.$$

Les valeurs réelles de x de cette dernière équation fourniront donc

donc autant de vraies interſections, puiſque pour chaque abſciſſe x on peut par la première équation aſſigner une appliquée réelle y, ſavoir $y = \frac{-P}{Q}$.

478. Nous ſuppoſerons à préſent que l'appliquée y de chaque courbe ſoit exprimée par des équations pures du ſecond degré, de ſorte que nous ayions, comme il ſuit :

I.

$$P + Ryy = 0.$$

II.

$$p + ryy = 0.$$

En éliminant yy, on trouve ſur-le-champ cette équation :

$$Pr - Rp = 0,$$

dont les racines réelles n'indiquent de véritables interſections, qu'autant que les valeurs qu'on aura pour x donneront pour $\frac{-P}{R}$ ou $\frac{-p}{r}$ une quantité poſitive; car alors, à cauſe de $y^2 = \frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$, l'appliquée y aura deux valeurs réelles, l'une poſitive, l'autre négative; & par conſéquent à chaque valeur de l'abſciſſe x tirée de l'équation $Pr - Rp = 0$, répondront deux points d'interſection également éloignés de part & d'autre de l'axe; ce qui ne peut manquer d'être, puiſque l'axe eſt diamètre des deux courbes. Mais, ſi quelque valeur de x tirée de l'équation $Pr - Rp = 0$ donne une valeur négative aux expreſſions $\frac{-P}{R} = \frac{-}{r}$, on en conclura qu'à cauſe de y imaginaire les interſections ſeront auſſi imaginaires.

479. Suppoſons à préſent que le ſecond terme, qui contient y, ſe trouve dans les deux équations du ſecond degré; & ſoient propoſées en conſéquence les équations ſuivantes :

I.

$$P + Qy + Ryy = 0.$$

II.

$$p + qy + ryy = 0.$$

Pour chasser y de ces équations, on multipliera la première par p & l'autre par P ; &, après avoir fait la soustraction & la division par y, on aura :

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y = 0.$$

Si on multiplie ensuite la première équation par r & la seconde par R, & si on soustrait l'une de l'autre, on aura :

IV.

$$(Pr - Rp) + (Qr - Rq)y = 0.$$

Conséquemment, puisqu'on tire de ces deux équations

$$y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp} = \frac{Rp - Pr}{Qr - Rq}$$

on aura

$$(Qp - Pq)(Qr - Rq) + (Pr - Rp)^2 = 0,$$

ou

$$P^2r^2 - 2PRpr + R^2p^2 + Q^2pr - PQqr - QRpq + PRq^2 = 0.$$

Les racines réelles de cette équation désigneront autant de véritables intersections, pourvu qu'à chaque valeur réelle de x réponde une valeur réelle de y dans l'équation III ou IV.

Il peut arriver cependant que les interſections ſoient imaginaires; ce cas a lieu, lorſque les équations III & IV ont des facteurs qui par la diviſion font diſparoître y de l'équation; car il faudra ſubſtituer cette équation à la dernière, & chercher, pour les valeurs de x qu'on en déduit, les valeurs correſpondantes que donnent pour y les premières équations. Si ces dernières ſont imaginaires, cela apprendra que les interſections ſont imaginaires.

480. Si l'appliquée y pour une courbe eſt une fonction biforme, & pour l'autre une fonction triforme de x; ou, ſi les équations propoſées ſont :

I.

$$P + Qy + Ryy = 0;$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0;$$

en multipliant la première par p, la ſeconde par P, & retranchant l'une de l'autre, on trouvera pour équation reſtante:

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + Psyy = 0,$$

qui jointe à la première préſente le cas que nous avons traité dans l'article précédent; de ſorte que ce qui étoit p, q, r, eſt ici $Pq - Qp$, $Pr - Rp$ & Ps, ainſi on aura :

$$y = \frac{PQq - QQp - PPr + PRp}{PPs - PRq + QRp}$$

&

$$y = \frac{PRq - QRp - PPs}{PQs - PRr + RRp};$$

d'où l'on tire

$$0 = (PRq - QRp - P^2s)^2 + (PQs - PRr + RRp)(PQq - Q^2p - P^2r + PRp)$$

équation dont le développement donne

$$\left.\begin{array}{c} +3P^2QRps \\ -2P^3Rqs+P^2R^2qq-PQR^2pq \\ P^4s^2-P^3Qrs+P^2Q^2qs-PQ^3ps+Q^2R^2p^2 \\ +P^3Rrr-P^2QRqr+PQ^2Rpr-Q^2R^2p^2 \\ -2P^2R^2pr+PR^3pp \end{array}\right\} =o;$$

& qui, à cauſe que le dernier terme s'évanouit, eſt diviſible par P. On aura ainſi pour réſultat :

$$\left.\begin{array}{l} +P^3s^2-2P^2Rqs-P^2Qrs+3PQRps+PQ^2qs-Q^3ps+R^3p^2 \\ +P^2Rr^2-PQRqr-2PR^2pr+Q^2Rpr+PR^2q^2-QR^2pq \end{array}\right\} =o.$$

Les racines réelles de cette équation feront connoître les interſections, pourvu qu'il en réſulte pour y des valeurs correſpondantes réelles.

481. Suppoſons maintenant que chaque appliquée ſoit exprimée par une équation cubique; & prenons, en vertu de cette hypothèſe, les deux équations ſuivantes :

I.

$$P+Qy+Ryy+Sy^3=o.$$

II.

$$p+qy+ryy+sy^3=o.$$

En multipliant la première par p & la dernière par P, & faiſant la ſouſtraction comme auparavant, nous aurons pour reſte :

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)yy = 0.$$

Multiplions enſuite la première par s & la ſeconde par S; nous aurons, après la ſouſtraction,

IV.

$$(Sp - Ps) + (Sq - Qs)y + (Sr - Rs)yy = 0.$$

Ces équations III & IV comparées avec les deux que nous avons traitées art. 479, nous fourniront les réſultats ſuivans:

$$\begin{array}{l|l} P = Pq - Qp & p = Sp - Ps \\ Q = Pr - Rp & q = Sq - Qs \\ R = Ps - Sp & r = Sr - Rs \end{array}$$

& en faiſant ces ſubſtitutions dans l'équation finale, nous aurons :

$$\begin{aligned} &+(Pq - Qp)^2(Sr - Rs)^2 - 2(Pq - Qp)(Ps - Sp) \\ &\quad (Sp - Ps)(Sr - Rs) + (Ps - Sp)^2(Sp - Ps)^2 \\ &\quad + (Pr - Rp)^2(Sp - Ps)(Sr - Rs) - (Pq - Qp) \\ &\quad (Pr - Rp)(Sq - Qs)(Sr - Rs) - (Pr - Rp) \\ &\quad (Ps - Sp)(Sp - Ps)(Sq - Qs) + (Pq - Qp) \\ &\quad (Ps - Sp)(Sq - Qs)^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette équation renferme ſept termes, qui ſont tous diviſibles par $Sp - Ps$, excepté le premier & le cinquième. Ces derniers ajoutés enſemble auront deux facteurs, l'un $(Pq - Qp)(Sr - Rs)$, & l'autre $(Pq - Qp)(Sr - Rs) - (Pr - Rp)(Sq - Qs)$; celui-ci étant développé devient $= PQrs$

$+ RSpq - PRqs - QSpr$ ou $= (Sp - Ps)(Rq - Qr)$; & par conséquent les termes I & V prennent cette forme $(Pq - Qp)(Sr - Rs)(Sp - Ps)(Rq - Qr)$, laquelle est aussi divisible par $Sp - Ps$. L'équation résultante sera donc :

$$\begin{aligned} o = &(Pq - Qp)(Sr - Rs)(Rq - Qr) + 2(Pq - Qp) \\ &(Sp - Ps)(Sr - Rs) + (Sp - Ps)^3 + (Pr - Rp)^2 \\ &(Sr - Rs) + (Pr - Rp)(Sp - Ps)(Sq - Qs) - \\ &(Pq - Qp)(Sq - Qs)^2; \end{aligned}$$

qui étant développée deviendra

$$\begin{aligned} &+ S^3 p^3 - 3PS^2p^2s + P^2Sr^3 + 2PR^2prs - P^2Rr^2s \\ &+ P^2Qrss + PRSqqr - P^3s^3 + 3P^2Sps^2 - R^3P^2s \\ &- 2PRSpr^2 + R^2Sp^2r - RS^2p^2q - QQRprs - PR^2qqs \\ &- PQSqrr + PQRqrs + 3PSSpqr - 3PPSqrs \\ &+ PQSprs + QQSprr + QRRpqs - QRSpqr \\ &- 3PQRps^2 + 3QRSp^2s - PRSpqs + 2P^2Rqs^2 \\ &+ 2PQSqqs - PSSq^3 - PQ^2qss - 2QSSppr \\ &- 2QQSpqs + Q^2pss + QS^2pqq = o. \end{aligned}$$

482. Pour mieux faire concevoir la méthode d'éliminer y de deux équations de degrés plus élevés, supposons qu'elles soient toutes deux du quatrième degré.

I.

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + Ty^4 = o.$$

II.

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = o.$$

Si nous multiplions la première équation par p & la feconde par P, nous aurons après la fouftraction :

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)y^2 + (Pt - Tp)y^3 = 0.$$

Si nous multiplions enfuite l'équation I par t & la feconde II par T, nous aurons, après avoir fait la fouftraction :

IV.

$$(Pt - Tp) + (Qt - Tq)y + (Rt - Tr)y^2 + (St - Ts)y^3 = 0.$$

Faifons, pour abréger,

$Pq - Qp = A$	$Pt - Tp = a$	$Sq - Qs = \alpha$
$Pr - Rp = B$	$Qt - Tq = b$	$Rq - Qr = \beta$
$Ps - Sp = C$	$Rt - Tr = c$	
$Pt - Tp = D$	$St - Ts = d$	

Il faut remarquer ici que non-feulement $a = D$, mais encore que

$$Ad - Cb = (Pt - Tp)(Sp - Qs) = D\alpha$$

$$Ac - Bb = (Pt - Tp)(Rq - Qr) = D\beta.$$

En faifant ces fubftitutions, les équations III & IV deviendront :

III.

$$A + By + Cyy + Dy^3 = 0.$$

IV.

$$a + by + cyy + dy^3 = 0.$$

Multiplions à préseut ces équations respectivement par d & D, & retranchons l'une de l'autre; nous aurons:

V.

$$(Ad - Da) + (Bd - Db)y + (Cd - Dc)y^2 = 0.$$

Multiplions encore ces mêmes équations par a & par A, & nous trouverons, après la soustraction:

VI.

$$(Ab - Ba) + (Ac - Ca)y + (Ad - Da)y^2 = 0.$$

Faisons de nouveau, pour abréger,

$$\begin{array}{l|l|l} Ab - Ba = E & Ad - Da = e & \\ Ac - Ca = F & Bd - Db = f & Cb - Bc = \zeta \\ Ad - Da = G & Cd - Dc = g & \end{array}$$

On aura $G = e$ & $Eg - Ff = G\zeta$; de sorte que $Eg - Ff$ est divisible par G. Nous aurons donc les équations suivantes:

V.

$$E + Fy + Gyy = 0.$$

VI.

$$e + fy + gyy = 0;$$

d'où nous tirerons celle-ci, en faisant une opération semblable aux précédentes:

VII.

$$(Ef - Fe) + (Eg - Ge)y = 0.$$

VIII.

VIII.

$$(Eg - Ge) + (Fg - Gf)y = 0.$$

Enfin faisons encore, pour abréger,

$Ef - Fe = H$	$Eg - Ge = h$
$Eg - Ge = I$	$Fg - Gf = i;$

de forte que $I = h$, nous aurons :

VII.

$$H + Iy = 0.$$

VIII.

$$h + iy = 0;$$

d'où nous déduirons cette dernière équation, qui ne contient plus de y:

$$Hi - Ih = 0.$$

Si l'on reftitue dans celle-ci fucceffivement les valeurs précédentes, on obtiendra une équation qui ne renfermera que les feules fonctions P, Q, R, &c. p, q, r, &c. des premières équations. Mais l'équation entre E, F, G, e, f, g, fera divifible par $G = e$; & fi on va jufqu'aux lettres A, B, C, D, a, b, c, l'équation réfultante pourra être divifée par $D^2 = a^2$; de forte que chaque terme de l'équation finale doit renfermer feulement huit lettres, quatre majufcules & quatre minufcules. En procédant de cette manière, on pourra toujours en général, quel que foit le nombre de dimenfions de y dans les deux équations, éliminer l'inconnue y, & parvenir à une équation qui ne contiendra plus que l'inconnue x.

483. Quoique cette méthode d'éliminer une inconnue des

deux équations ſoit d'un uſage très-étendu, nous allons cependant en ajouter une autre, qui ne ſuppoſe pas autant de ſubſtitutions répétées. Soient donc propoſées les deux équations ſuivantes d'un degré indéterminé :

I.

$$Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \&c. = 0.$$

II.

$$py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} - sy^{n-3} + \&c. = 0,$$

deſquelles il faut obtenir une équation qui ne renferme plus de y. Pour y parvenir, multiplions la dernière équation par cette quantité :

$$Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + Cy^{k-n-3} + \&c.;$$

laquelle contient un nombre $k-n$ de lettres arbitraires A, B, C, &c. Multiplions la première équation par cette quantité :

$$py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + cy^{k-m-3} + \&c.;$$

qui renferme un nombre $k-m$ de lettres arbitraires a, b, c, &c. On égalera enſuite les deux produits entre eux, & on ſuppoſera que tous les termes qui contiennent des puiſſances de y, ſe détruiſent mutuellement. Les derniers termes, qui ne renfermeront point de y, donneront l'équation qu'on cherche. Les plus hautes puiſſances ſe détruiſent d'elles-mêmes; car le premier terme de chaque produit ſera Ppy^k. Il reſte donc encore $k-1$ termes qui doivent ſe détruire; on aura pour cela autant de lettres arbitraires à déterminer. Or le nombre des lettres arbitraires qu'on a introduites eſt $2k-m-n$, lequel doit être égal à $k-1$; donc $k=m+n-1$.

484. On multipliera donc pour cette raiſon la première équation par cette quantité indéterminée :

$$p^{n-1} + a y^{n-2} + b y^{n-3} + c y^{n-4} + \&c.;$$

& la ſeconde par celle-ci :

$$P y^{m-1} + A y^{m-2} + B y^{m-3} + C y^{m-4} + \&c.;$$

&, en égalant entre eux les termes dans leſquels ſe trouvent des puiſſances ſemblables de y, on aura les égalités ſuivantes :

$$P p = P p$$

$$P a + Q p = p A + q P$$

$$P b + Q a + R p = p B + q A + r P$$

$$P c + Q b + R a + S p = p C + q B + r A + s P,$$

&c.

Ces équations, en y comprenant la première $P p = P p$, ſeront au nombre de $m + n$; & ſi on détermine par leur moyen les lettres arbitraires A, B, C, &c. a, b, c, &c., on arrivera à une dernière équation qui ne contiendra plus que les lettres données P, Q, R, &c., p, q, r, &c.; & qui par conſéquent ſatisfera à la queſtion.

485. Au reſte, on facilitera cette détermination des lettres arbitraires, en égalant les membres égaux de chaque équation à de nouvelles quantités indéterminées α, β, γ, &c.; comme on peut le voir par l'exemple ſuivant.

Soient propoſées ces deux équations :

I.

$$P y^2 + Q y + R = 0.$$

I I.

$$p y^3 + q y^2 + r y + s = 0.$$

En multipliant la première par $py^2 + ay + b$, & l'autre par $Py + A$, on obtiendra ces égalités :

$$Pp = Pp$$

$$Pa + Qp = pA + qP = \alpha$$

$$Pb + Qa + Rp = qA + rP = \beta$$

$$Qb + Ra = rA + sP$$

$$Rb = sA$$

Négligeant la première équation qui eſt identique, on tire de la ſeconde :

$$a = \frac{\alpha - Qp}{P}$$

$$A = \frac{\alpha - qP}{p}.$$

On obtiendra de la troiſième

$$b = \frac{\beta}{P} - \frac{Qa}{P} - \frac{Rp}{P} = \frac{\beta}{P} - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P}$$

&

$$\beta = \frac{\alpha q}{p} - \frac{qqP}{p} + rP.$$

Cette valeur de β étant ſubſtituée, on aura :

$$b = \frac{\alpha q}{Pp} - \frac{qq}{p} + r - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P},$$

ou

$$b = \frac{\alpha(Pq - Qp)}{P^2 p} + \frac{(Q^2 p - P^2 q^2)}{P^2 p} + \frac{(Pr - Rp)}{P};$$

Cette valeur, ſubſtituée dans la quatrième équation, donnera :

$$\frac{\alpha Q(Pq-Qp)}{P^2p}-\frac{Q(Pq-Qp)(Qp+Pq)}{P^2p}+\frac{Q(Pr-Rp)}{P}+\frac{\alpha R}{P}$$

$$-\frac{RQp}{P}=\frac{\alpha r}{p}-\frac{Prq}{p}+Ps;$$

ou, en multipliant par P^2p,

$$\alpha Q(Pq-Qp)+\alpha P(Rp-Pr)-Q(Pq-Qp)$$
$$(Pq+Qp)+PQp(Pr-2Rp)+P^3qr-P^3ps=0.$$

Donc on aura :

$$\alpha=\frac{P^2Qq^2-Q^3pp-P^2Qpr+2PQRp^2-P^3qr+P^3ps}{PQq-Q^2p+PRp-P^2r}.$$

Mais la dernière équation donne :

$$\frac{\alpha R(Pq-Qp)}{P^2p}-\frac{R(P^2q^2-Q^2p^2)}{P^2p}+\frac{R(Pr-Rp)}{P}=\frac{\alpha S}{p}-\frac{Pqs}{p};$$

d'où l'on tire :

$$\alpha=\frac{P^2Rq^2-Q^2RP^2-P^2Rpr+PR^2p^2-P^3qs}{PRq-QRp-P^2s}.$$

Ces deux valeurs de α donneront l'équation demandée, qu'on ramènera enfin à la même forme, que nous avons trouvée ci-dessus, art. 480, pour le même cas.

CHAPITRE XX.

De la Construction des Equations.

486. Ce que nous avons exposé dans le dernier chapitre touchant l'intersection des courbes, s'applique d'ordinaire principalement aux constructions des équations des degrés supérieurs. Car si, deux courbes étant proposées, on trouve l'équation dont les racines indiquent en quels points elles s'entrecoupent; réciproquement les intersections de deux courbes peuvent servir à faire connoître les racines des équations. Cette méthode est très-utile, lorsqu'il est question de représenter par des lignes les racines d'une équation quelconque; car, après avoir décrit les deux courbes destinées à cet usage, il sera facile de marquer les intersections; & abaissant de ces points des appliquées sur l'axe, les abscisses donneront les vraies racines de l'équation. Au reste, si l'inconvénient, dont nous avons parlé plus haut, a lieu, toutes les abscisses ainsi trouvées donneront bien des racines; mais il pourra arriver que l'équation proposée en renferme plus qu'on n'en trouvera par cette construction.

487. Lors donc qu'on a proposé une équation algébrique qui renferme l'inconnue x, & dont on veut assigner les racines, il reste à chercher deux lignes courbes ou deux équations entre les variables x & y, telles qu'en éliminant l'appliquée, il en résulte l'équation proposée. Cela fait, on décrit ces deux courbes sur un axe commun, en plaçant au même point l'origine des abscisses; & on marque les points où elles se coupent l'une l'autre. On abaissera ensuite de ces points d'intersection, des appliquées perpendiculaires à l'axe, qui indiqueront sur cette ligne les abscisses qui sont égales aux racines de l'équation proposée. Ainsi, on assignera de cette manière les vraies valeurs des racines demandées, à moins

qu'il n'arrive par hasard que l'équation n'en contienne plus qu'on ne trouvera d'intersections.

488. Avant que de donner la manière de trouver ces deux courbes qui doivent servir à la construction de l'équation dont il s'agit, prenons l'inverse, & examinons les équations dont la résolution dépend de deux courbes données. Supposons d'abord que les deux lignes dont il est question, soient deux droites EM, FM, qui s'entrecoupent au point M. Prenons pour axe la droite EF, & pour origine des abscisses le point A, d'où l'on élevera la perpendiculaire ABC qui rencontrera la première ligne en B & la seconde en C. Soit $AE=a$, $AF=b$, $AB=c$, $AC=d$; & faisons l'abscisse $AP=x$, l'appliquée $PM=y$; nous aurons pour la première droite EM, $a:c::a+x:y$, ou $ay=c(a+x)$; & pour l'autre, $b:d::b-x:y$, ou $by=d(b-x)$. Si on chasse y de ces équations, on aura $bc(a+x)=ad(b-x)$ ou $x=\frac{abd-abc}{bc+ad}$ $=\frac{ab(d-c)}{bc+ad}$. On pourra donc construire par l'intersection de deux lignes droites l'équation simple $x=\frac{ab(d-c)}{bc+ad}$, à la forme de laquelle on peut ramener toutes les équations simples. Pl. X. Fig. 97.

489. La ligne la plus aisée à décrire après les lignes droites est le cercle; voyons donc quelles sont les équations qui peuvent se construire par l'intersection de la ligne droite & du cercle. Soit tirée la droite EM, AP étant l'axe & A l'origine des abscisses; soient $AE=a$, $AB=b$, & les coordonnées $AP=x$, $PM=y$; on aura $a:b:a+x:y$; & par conséquent, $ay=b(a+x)$, équation à la ligne droite; soit ensuite le rayon du cercle $CM=c$, & ayant abaissé du centre C sur l'axe la perpendiculaire CD; soient $AD=f$, $CD=g$; on aura $DP=x-f$ & $PM-CD=y-g$. Comme on a en outre, par la propriété du cercle, $CM^2=DP^2+(PM-CD)^2$, l'équation au cercle sera $cc=xx-2fx+ff+yy-2gy+gg=(x-f)^2+(y-g)^2$. Mais l'équation à la ligne droite donne $y=\frac{ab+bx}{a}$; donc Pl. X. Fig. 98.

$y - g = \frac{a(b-g)+bx}{a} = b - g + \frac{bx}{a}$; & si on substitue cette valeur de y dans l'autre équation, on trouvera :

$$c^2 = x^2 - 2fx + f^2 + (b-g)^2 + \frac{2b(b-g)x}{a} + \frac{bbxx}{aa}$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} +aa \\ +bb \end{array}\right\} xx \left.\begin{array}{l} +2ab(b-g) \\ -2aaf \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} +aa(b-g)^2 \\ +aaff \\ -aacc \end{array}\right\} = 0,$$

dont on aura les racines par les intersections de la droite & du cercle; de sorte qu'en abaissant des points d'intersection M & m sur l'axe les perpendiculaires MP, mp, les valeurs de x seront AP & Ap.

490. Comme cette équation renferme toutes celles du second degré; il s'ensuit qu'on pourra construire de cette manière toute équation de ce degré. En effet, soit proposée l'équation suivante :

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0.$$

On la ramènera d'abord à la forme de la première, de façon que les premiers termes soient les mêmes, en multipliant par $\frac{aa+bb}{\mathrm{A}}$,

$$(aa+bb)xx + \frac{\mathrm{B}(aa+bb)x}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{C}(aa+bb)}{\mathrm{A}} = 0.$$

L'égalité des autres termes donnera :

$$2\mathrm{A}ab(b-g) - 2\mathrm{A}aaf = \mathrm{B}(aa+bb);$$

d'où l'on tirera

$$af = b(b-g) - \frac{\mathrm{B}(aa+bb)}{2\mathrm{A}a};$$

&,

& , parce que

$$aa\,(b-g)^2 + aaff - a^2c^2 = \frac{C(aa+bb)}{A},$$

on aura

$$(a^2+b^2)(b-g)^2 - \frac{Bb\,(b-g)(a^2+b^2)}{Aa} + \frac{B^2(a^2+b^2)^2}{4A^2a^2} - a^2c^2 = \frac{C(a^2+b^2)}{A};$$

& par conséquent

$$(b-g)^2 = \frac{Bb(b-g)}{Aa} - \frac{B(aa+bb)}{4A^2a^2} + \frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A};$$

donc

$$b-g = \frac{Bb}{2aA} \pm \sqrt{\left(\frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right)}.$$

Reste donc à déterminer les trois quantités a, b & c, qu'il faudra prendre telles que $\frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4AA}$ devienne une quantité positive ; car autrement $b-g = AB - CD$, & par suite CD deviendroit une quantité imaginaire.

491. Rien n'empêche donc de supposer $b = 0$; ce qui donnera $g = \sqrt{\left(c^2 \frac{-BB+4AC}{4A^2}\right)}$ & $f = \frac{-B}{2A}$; mais, comme l'équation proposée $Axx + Bx + C = 0$ n'a point de racines réelles, à moins que BB ne soit plus grand que $4AC$; $\frac{BB-4AC}{4AA}$ sera dans ce cas une quantité positive ; si on la suppose égale à cc, de sorte que $c = \frac{\sqrt{(BB-4AC)}}{2A}$, g deviendra aussi $=0$, & a sortira tout-à-fait du calcul. La droite EM tombera donc sur l'axe même AP, & le centre du cercle C devra être en D, AD étant $= \frac{-B}{2A}$. Si de ce centre, avec un rayon $c = \frac{\sqrt{(BB-4AC)}}{2A}$, on décrit un cercle, les intersections de celui-ci avec l'axe même feront connoître les racines de l'équation proposée. Mais, pour n'avoir pas à cons-

truire une formule irrationnelle; ſuppoſons $g = c - \frac{k}{2A}$, de manière que $cc - \frac{2ck}{2A} + \frac{kk}{4AA} = cc \quad \frac{-BB + 4AC}{4A^2}$, nous aurons $c = \frac{kk + BB - 4AC}{4kA}$ & $g = \frac{BB - 4AC - kk}{4kA}$. Nous reſtons donc les maîtres de donner à k la valeur que nous voudrons; après l'avoir déterminée, comme la droite CM tombe ſur l'axe, on décrira le cercle de la manière ſuivante. On prendra $AD = \frac{-B}{2A}$, & la perpendiculaire $CD = \frac{B^2 - 4AC - k^2}{4Ak}$; enſuite du point C comme centre, avec un rayon $= \frac{B^2 - 4AC + k^2}{4Ak}$, on décrira un cercle dont les interſections avec l'axe feront connoître les racines de l'équation propoſée. Si donc on ſuppoſe $k = - B$, ayant pris $AD = \frac{-B}{2A}$, on fera $CD = \frac{C}{B}$, & le rayon du cercle à décrire du point C comme centre, ſera $= \frac{-BB + 2AC}{2AB} = \frac{-B}{2A} + \frac{C}{B}$; d'où il ſuit que le rayon du cercle ſera $= AD + CD$; ce qui paroît donner une conſtruction très-commode pour la pratique.

492. Conſidérons à préſent les interſections de deux cercles. Soit pour le premier $AD = a$, $CD = b$ & ſon rayon $CM = c$, on aura, en faiſant $AP = x$ & $PM = y$, $DP = a - x$, $CD - PM = b - y$, & par la nature du cercle:

Pl. XI. Fig. 99.

$$xx - 2ax + aa + yy - 2by + bb = cc.$$

De même pour l'autre cercle, ſoit $Ad = f$, $dc = g$, & ſon rayon $cM = h$; on aura:

$$xx - 2fx + ff + yy + 2gy + gg = hh.$$

Ces équations ſouſtraites l'une de l'autre donneront pour reſte:

$$2(f-a)x + aa - ff - 2(b+g)y + bb - gg = cc - hh;$$

donc

$$y = \frac{aa + bb - ff - gg - cc + hh - 2(a-f)x}{2(b+g)};$$

d'où

$$b - y = \frac{b^2 + 2bg - a^2 + f^2 + g^2 + c^2 - h^2 + 2(a-f)x}{2(b+g)}$$

&

$$a - x = \frac{2a(b+g) - 2(b+g)x}{2(b+g)}.$$

Et, puifque $(a-x)^2 + (b-y)^2 = cc$, on aura, en faifant la fubftitution :

$$\left.\begin{array}{l} +4(a-f)^2 \\ +4(b+g)^2 \end{array}\right\} xx \quad \begin{array}{l} -4(a+f)(b+g)^2 \\ -4(a-f)(a^2-f^2)x \\ +4(a-f)(c^2-h^2) \end{array} \quad \begin{array}{l} +(b+g)^4 \\ +2(a^2-c^2)(b+g)^2 \\ +2(f^2-h^2)(b+g)^2 \\ +(a^2-c^2-f^2+h^2)^2 \end{array} = 0.$$

On pourra donc, par le moyen de cette équation, conftruire d'une infinité de manières l'équation $Axx + Bx + C = 0$; mais on conçoit qu'une équation d'un degré plus élevé ne peut fe conftruire par l'interfection de deux cercles, parce que deux cercles ne peuvent fe couper en plus de deux points. Ainfi, puifque la même équation peut être conftruite par l'interfection de la droite & du cercle, on préfère avec raifon cette dernière conftruction à celle qui fuppofe deux cercles, à moins qu'il ne fe préfente par hafard quelques cas particuliers qui donnent naturellement une détermination facile des lignes a, b, f, g, c & h.

493. Suppofons maintenant le cercle coupé par une parabole. Ayant abaiffé du centre C du cercle la perpendiculaire CD fur l'axe AP; foit $AD = a$, $CD = b$, & le rayon du cercle $CM = c$, on aura entre les coordonnées perpendiculaires $AP = x$, $PM = y$, l'équation au cercle $(x-a)^2 + (y-b)^2 = cc$. Suppofons l'axe FB de la parabole perpendiculaire à la ligne AP, & foit $AE = f$, $EF = g$, & Pl. XI. Fig. 100.

le paramètre de la parabole $= 2h$; on aura, par la nature de la parabole, $EP^2 = 2h(EF+PM)$, ou analytiquement $(x-f)^2 = 2h(g+y)$; d'où $y = \frac{(x-f)^2}{2h} - g$ & $y-b = \frac{(x-f)^2}{2h} - (b+g)$. Cette valeur, ſubſtituée dans la première équation, fera diſparoître y, & on aura :

$$\frac{(x-f)^4}{4hh} - \frac{(b+g)(x-f)^2}{h} + (b+g)^2 + (x-a)^2 = cc$$

ou

$$\begin{array}{lllll}
 & & & & +f^4 \\
 & & +6ff & -4f^3 & -4ffh(b+g) \\
x^4 & -4fx^3 & -4h(b+g)x^2 & +4fh(b+g)x & +4h^2(b+g)^2 = 0; \\
 & & +4hh & -8ahh & +4aahh \\
 & & & & -4cchh
\end{array}$$

Les racines de cette équation feront les abſciſſes AP, Ap, Ap, Ap, déterminées par les appliquées qui paſſent par les points d'interſection M, m, m, m.

494. Il y a dans cette équation ſix conſtantes a, b, c, f, g & h, qu'on peut réduire à cinq, en faiſant $b+g=k$, parce qu'on peut regarder la ſomme de ces deux dernières comme une ſeule quantité. Ainſi, en faiſant $CD+EF=b+g=k$, on aura l'équation qui ſuit :

$$\begin{array}{lllll}
 & & & & +f^4 \\
 & & +6ff & -4f^3 & -4ffhk \\
x^4 & -4fx^3 & -4hkx^2 & +4fhkx & +4hhkk = 0. \\
 & & +4hh & -8ahh & +4aahh \\
 & & & & -4cchh
\end{array}$$

Or il eſt poſſible de ramener à cette forme toute équation du quatrième degré. En effet, soit proposée cette équation :

$$x^4 - Ax^3 + Bxx - Cx + D = 0;$$

on aura, en faisant la comparaison :

$$4f = A \text{ ou } f = \tfrac{1}{4}A,\ 6f^2 - 4hk + 4h^2 = B \text{ ou } \tfrac{3}{8}A^2 - 4hk + 4h^2 = B;$$

d'où l'on tire

$$k = \frac{3AA}{32h} + h - \frac{B}{4h},$$

$$4f^3 - 4fhk + 8ahh = C$$

ou

$$\tfrac{1}{16}A^3 - \tfrac{3}{32}A^3 - Ahh + \tfrac{1}{4}AB + 8ahh = C;$$

donc

$$a = \frac{A^3}{256hh} + \frac{A}{8} - \frac{AB}{32hh} + \frac{C}{8hh}.$$

Enfin on a

$$(ff - 2hk)^2 + 4aahh - 4cchh = D;$$

mais

$$ff - 2hk = \frac{B}{2} - 2hh - \frac{AA}{16}$$

&

$$2ah = \frac{A^3}{128h} + \frac{Ah}{4} - \frac{AB}{16h} + \frac{C}{4h};$$

en substituant ces valeurs, on aura donc une équation qui contiendra c & h qu'il faudra déterminer d'une manière convenable, pour que l'une & l'autre de ces quantités obtiennent une valeur réelle.

495. Mais comme il est facile de faire évanouir le second

terme dans une équation du quatrième degré; ſuppoſons qu'on l'ait effectivement fait diſparoître, & qu'on ait à conſtruire cette équation:

$$x^4 \ * \ + Bxx - Cx + D = 0.$$

On aura donc d'abord $f = 0$, enſuite $k = h - \frac{B}{4h}$; en troiſième lieu $a = \frac{C}{8h^3}$; &, à cauſe de $2hk - ff = 2hh - \frac{B}{2}$ & de $2ah = \frac{C}{4h}$, en quatrième lieu, $4h^4 - 2Bh^2 + \frac{1}{4}BB + \frac{CC}{16hh} - 4c^2h^2 = D$; d'où l'on conclut $64c^2h^4 = C^2 + 4B^2hk - 32Bh^4 + 64h^6 - 16Dhh$; & par conſéquent $8chh = \sqrt{(4h^2(B-4h^2)^2 + C^2 - 16Dh^2)}$. Mais, comme il faut ſurtout avoir l'attention que c & h obtiennent des valeurs réelles, ſuppoſons $c = h \frac{-B+q}{4h}$; ce qui donnera:

$$CC - 16Dhh + 8Bhhq - 32h^4q - 4hhqq = 0.$$

Ainſi, pour ſatisfaire à la queſtion, il faut diſtinguer deux cas; le premier où D eſt une quantité négative, le ſecond où D eſt une quantité poſitive. Soit donc:

I.

D une quantité poſitive $= +E^2$, de ſorte qu'on ait à conſtruire cette équation:

$$x^4 \ * \ + Bx^2 - Cx + E^2 = 0;$$

ſoit à cet effet $q = 0$, d'où $c = \frac{4hh - B}{4h}$, & on aura $hh = \frac{CC}{16EE}$ & $h = \frac{C}{4E}$; d'où l'on tire $c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$; & enſuite $k = c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$, $a = \frac{2EE}{C}$ & $f = 0$.

I I.

Mais ſi D eſt une quantité négative; ſi, par exemple, $D = -EE$, on aura, pour conſtruire l'équation

$$x^4 \ast + Bx^2 - Cx - EE = 0,$$

celle-ci : $64cch^4 = CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEh^2$; qui donne toujours pour c une valeur réelle, quelle que ſoit celle de h; car on aura $c = \sqrt{\frac{(C^2 + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEhh)}{8hh}}$; & on peut prendre pour h la quantité qu'on voudra; on aura donc ſoin de la prendre telle dans chaque cas, qu'elle rende la conſtruction de c la plus facile. Cela fait, on aura, comme auparavant, $AE = f = 0$, $CD + EF = k = \frac{4hh - B}{4h}$, & $AD = a = \frac{C}{8hh}$. Si $E = 0$, on aura à conſtruire l'équation du troiſième degré :

$$x^3 \ast + Bx - C = 0.$$

C'eſt ſur cette conſtruction qu'eſt fondée la règle aſſez connue de BACKER.

496. Si l'on prend deux lignes quelconques du ſecond ordre, ou deux ſections coniques, dont les équations ſoient rapportées à un axe commun & à la même origine des abſciſſes, ſavoir :

$$ayy + byx + cxx + dy + ex + f = 0$$

&

$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0.$$

On éliminera y par la méthode donnée plus haut, en comparant ces équations avec celles que nous avons traitées art. 479, ſavoir :

$$P + Qy + Ryy = 0$$
$$\&$$
$$p + qy + ryy = 0.$$

Les quantités P & p feront des fonctions de x du fecond ordre, Q & q des fonctions du premier ordre, & R & r des conftantes; d'où il fuit que l'équation finale fera du quatrième degré. On ne peut donc conftruire par les interfections de deux fections coniques quelconques des équations d'un degré fupérieur au quatrième; or nous avons vu qu'elles pouvoient auffi être conftruites par le moyen du cercle & de la parabole. On peut conclure la même chofe de la confidération des lignes du fecond ordre, qui, comme on fait, peuvent être coupées en deux points par une droite; ainfi deux lignes droites pourront former quatre interfections; mais deux lignes droites prifes enfemble conftituent une efpéce de lignes du fecond ordre; d'où il fuit que deux lignes du fecond ordre fe peuvent couper réciproquement en quatre points.

497. Si on veut avoir les interfections de deux lignes, l'une du fecond, l'autre du troifième ordre, qui foient exprimées par ces équations:

$$P + Qy + Ryy = 0$$
$$\&$$
$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

J'obferve que P fera une fonction de x de deux dimenfions, Q une fonction d'une feule dimenfion & R une conftante; que p fera une fonction de trois dimenfions, q de deux, r d'une feule & s une conftante. Si on fait attention à cette remarque, on verra facilement que l'équation trouvée (art. 480) après l'élimination de y, doit être du fixième ordre; c'eft pourquoi on ne pourra conftruire par les interfections d'une ligne du troifième ordre avec une fection conique d'équations plus élevées que celles du fixième degré; c'eft ce qu'on peut encore

encore reconnoître à la nature des lignes de ces deux ordres; car, comme les lignes du troisième ordre sont coupées par une droite en trois points, il est évident qu'elles seront coupées en six points par deux droites, qui prises ensemble forment une espèce de lignes du second ordre.

498. En appliquant aux ordres plus élevés & ce que nous avons exposé auparavant sur l'élimination, & le raisonnement que nous venons de fonder sur l'intersection des lignes droites, on verra qn'on peut construire les équations du neuvième degré par les intersections de deux lignes du troisième ordre, & celles qui ne passent pas le seizième degré par les intersections de deux lignes du quatrième ordre; & en général par le moyen de deux courbes, dont l'une est de l'ordre m & l'autre de l'ordre n, on pourra construire toutes les équations qui ne surpassent pas la puissance mn. Ainsi, pour construire une équation du centième degré, on aura besoin ou de deux lignes du dixième ordre, ou de deux lignes dont l'une soit du cinquième & l'autre du vingtième ordre; ainsi de suite, en décomposant le nombre 100 en deux facteurs. Mais si le plus haut exposant de l'équation à construire est exprimé par un nombre premier ou par un autre qui n'admette pas une décomposition en facteurs assez commode, on substituera, à la place de celui-ci, un autre nombre plus grand qui ait des facteurs convenables; car les deux courbes qui peuvent servir à la construction des équations d'un degré plus élevé, sont également propres à celles des équations d'un ordre inférieur; ainsi on pourra pour une équation du trente-neuvième degré employer deux courbes, l'une du sixième ordre & l'autre du septième, parce qu'avec ces deux courbes on peut construire une équation du quarante-neuvième degré; & que cette construction doit être regardée comme plus simple que si on employoit une courbe du troisième ordre, & une autre du treizième.

499. On voit par-là qu'on peut assigner les racines réelles d'une équation quelconque de plusieurs manières, & même d'une infinité de manières, par les intersections de deux courbes. Mais de cette infinité de manières il faudra choisir celle qui supposera les lignes courbes les plus simples & les

plus faciles à décrire ; il faudra sur-tout faire en sorte d'obtenir par le moyen des intersections toutes les racines réelles ; ce qui ne peut manquer d'avoir lieu, lorsqu'on choisira des courbes qui ne sont pas susceptibles d'intersections imaginaires. Or nous avons vu auparavant que ces sortes d'intersections n'avoient point lieu, lorsque dans l'équation pour l'une des courbes l'appliquée y étoit égale à une fonction uniforme de x. Car cette dernière courbe n'ayant aucunes appliquées imaginaires, il est impossible que dans ce cas on trouve des intersections imaginaires, quel que soit le nombre d'appliquées imaginaires que peut renfermer l'autre courbe. Nous prendrons donc toujours pour nos constructions une équation de cette forme $P + Qy = 0$, P & Q désignant des fonctions de x.

500. Etant donc proposée une équation quelconque, on choisira une courbe convenable représentée par l'équation $P + Qy = 0$; & comme l'équation à l'autre courbe doit être telle, qu'en y mettant, au lieu de y, sa valeur $\frac{-P}{Q}$, on ait pour résultat l'équation proposée; on pourra réciproquement au moyen de la proposée, former celle qui convient à l'autre courbe, en introduisant $\frac{-P}{Q}$, au lieu de y. Par exemple, si on proposoit cette équation $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, on prendroit pour l'une des courbes la parabole exprimée par l'équation $ay = xx + bx$; comme $xx = ay - bx$, on substituera cette valeur dans la proposée, autant qu'on le jugera à propos ; ce qui donnera :

$$\begin{aligned} x^4 &= aayy - 2abxy + bbxx \\ Ax^3 &= \qquad\quad + Aaxy - Abxx; \end{aligned}$$

& par conséquent on obtiendra une équation du second degré de cette forme :

$$a^2y^2 + a(A - 2b)xy + (B - Ab + b^2)x^2 + Cx + D = 0,$$

dont les intersections avec la courbe $ay = x^2 + bx$ indiqueront les racines de l'équation proposée.

501. Comme on peut faire varier ces deux courbes d'une infinité de manières, en donnant des valeurs arbitraires aux constantes a & b; on peut de même introduire dans la solution une variété beaucoup plus considérable ; en effet, puisqu'on a par la première équation $x^2 - ay + bx = 0$, on aura aussi $acxx - aacy + abcx = 0$; & si on ajoute celle-ci à la dernière, il en résultera une équation beaucoup plus générale pour la ligne du second ordre, dont les intersections avec la première feront connoître également les racines de l'équation proposée. Ainsi les deux courbes qui serviront à la construction, seront :

I.

$$ay = xx + bx$$

II.

$$a^2y^2 + a(A - 2b)xy + (B - Ab + b^2 + ac)x^2 - a^2cy + (C + abc)x + D = 0.$$

Cette dernière équation peut exprimer telle section conique qu'on voudra; il faudra faire attention à cette quantité $AA - 4B - 4ac$; si elle est positive, la courbe sera une Hyperbole; si elle est $= 0$, elle sera une Parabole; & si elle est négative, la courbe sera une Ellypse. Mais, si $b = \frac{1}{2}A$ & $a^2 = B - \frac{1}{4}A^2 + ac$, ou $c = a + \frac{A^2}{4a} - \frac{B}{a}$, la courbe deviendra un Cercle; car alors on aura :

$$a^2y^2 + a^2x^2 - \left(a^3 + \frac{AAa}{4} - Ba\right)y + \left(C + \frac{Aa^2}{2} + \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2}\right)x + D = 0;$$

ou

$$\left(y - \frac{a}{2} - \frac{A^2}{8a} + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(x + \frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa}\right)^2$$
$$= \left(\frac{a}{2} + \frac{A^2}{8a} + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(\frac{C}{2a^2} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16a^2} - \frac{AB}{4a^2}\right)^2 - \frac{D}{a^2};$$

équation dont le second membre est le quarré du rayon du Cercle.

502. Ainſi les ſeules ſections coniques fourniſſent une infinité de courbes, qui, combinées avec la parabole $ay = x^2 + bx$, feront connoître par leurs interſections les racines de l'équation propoſée. Quelle que ſoit celle de ces courbes qu'on choiſira, la parabole ſera toujours coupée aux mêmes points; & par conſéquent les endroits où toutes ces courbes s'entre-couperont, ſeront toujours les mêmes. On pourra donc parmi ce nombre infini de courbes en prendre deux à volonté (excepté la parabole priſe d'abord), qui, ſuppoſées décrites ſur un axe commun, indiqueront toujours par leurs interſections les racines de l'équation propoſée. Il ſuit de là qu'on pourra conſtruire l'équation de cette manière ou par le Cercle & la Parabole, comme nous l'avons déjà vu ci-devant; ou par deux Paraboles; ou par la Parabole combinée ſoit avec l'Ellypſe, ſoit avec l'Hyperbole; ou par deux Ellypſes; ou par deux Hyperboles; ou par l'Ellypſe avec l'Hyperbole. On multipliera encore bien davantage la variété des conſtructions, en employant à cet effet des courbes d'ordres plus élevés.

503. On pourra conſtruire pareillement les équations des degrés ſupérieurs, en prenant pour l'une des courbes une ligne du genre parabolique exprimée par l'équation $y = P$. Si, par exemple, on ſe propoſoit de conſtruire cette équation :

$$x^{12} - f^{10}x^2 + f^9gx - g^{12} = 0;$$

on prendroit l'équation à la parabole du quatrième ordre $x^4 = a^3y$; & comme on a $x^{12} = a^9y^3$, en faiſant cette ſubſtitution, on trouvera une équation qui appartient à une ligne du troiſième ordre:

$$a^9y^3 - f^{10}x^2 + f^9gx - g^{12} = 0;$$

qui, combinée avec un multiple quelconque de la première équation $x^4 - a^3y = 0$, produira une infinité de lignes courbes du quatrième ordre, qui pourront ſervir, en les prenant à volonté deux à deux, à la conſtruction de l'équation.

504. S'il arrivoit que la méthode précédente ne donnât pas

une conſtruction commode pour l'équation qu'on ſe propoſe de conſtruire; alors on multiplieroit l'équation par x, ou x^2, ou x^3, ou par une puiſſance plus élevée de x; ce qui ajouteroit quelques racines égales à zéro à celles qu'elle renfermoit déjà; leſquelles ſeroient indiquées par les interſections faites à l'origine des abſciſſes, & qu'il ſeroit par conſéquent facile de diſtinguer des autres racines véritables de l'équation propoſée. Ainſi, quoique l'équation devienne d'un degré ſupérieur, elle ne laiſſera pas néanmoins d'être ſouvent plus commode à conſtruire. Par exemple, ſi on propoſoit l'équation cubique :

$$x^3 + Axx + Bx + C = 0;$$

ſi on ſuppoſe $xx = ay$, l'une des courbes qui doivent ſervir à la conſtruction ſera une parabole, & l'autre toujours une hyperbole; car on aura, en mettant ay au lieu de xx, cette équation :

$$axy + Aay + Bx + C = 0;$$

ou, en ajoutant la première équation $cx^2 - acy = 0$, celle-ci plus générale :

$$axy + cxx + a(A - c)y + Bx + C = 0,$$

qui pourtant ſera toujours à l'Hyperbole. S'il paroît plus commode d'employer le Cercle ou l'Ellypſe, ou la Parabole, il faudra multiplier par x l'équation propoſée; ce qui donnera l'équation :

$$x^4 + Ax^3 + Bxx + Cx = 0,$$

qui comparée avec celle du quatrième degré, qui a été conſtruite ci-deſſus, donnera $D = 0$; & cette équation pourra toujours être conſtruite par le moyen du Cercle & de la Parabole.

505. Puiſque toute équation d'un degré quelconque peut être conſtruite par les interſections de deux courbes algébriques, & cela d'une infinité de manières, il ſera toujours per-

mis de ſubſtituer une ligne quelconque à l'une des courbes ; de là eſt née cette queſtion : Comment une équation propoſée peut être conſtruite par le moyen d'une courbe donnée. Mais il faut d'abord remarquer ici que la courbe donnée doit être du genre de celles qui donnent pour l'appliquée une fonction uniforme de x, pour que les interſections imaginaires ne dérangent pas la conſtruction. En effet, il ne ſuffiroit pas que la courbe, ou une portion propoſée de la courbe, eût des abſciſſes égales à une racine de l'équation ; condition qu'on a coutume d'ajouter, lorſqu'on demande ſeulement une racine de l'équation donnée ; il pourroit arriver que cet arc de courbe n'admît aucune interſection, quoique l'abſciſſe qui répond à un de ſes points fût une véritable racine, parce qu'il ſeroit poſſible que cette racine fût indiquée ou par une interſection imaginaire, ou par l'interſection d'une autre branche qui répondroit à la même abſciſſe. C'eſt pourquoi je ne m'arrête pas plus long-temps ſur cette queſtion plus curieuſe qu'utile, ayant fait connoître aſſez en détail les vrais fondemens de toutes les conſtructions de ce genre.

CHAPITRE XXI.

Des Lignes Courbes tranſcendantes.

506. Il a été queſtion juſqu'ici des courbes algébriques, dont la nature eſt telle que les appliquées correſpondantes aux abſciſſes qu'on a priſes ſur un axe quelconque ſont des fonctions algébriques de ces dernières lignes ; ou, ce qui revient au même, dans leſquelles la relation entre les abſciſſes & les appliquées peut être exprimée par une équation algébrique. Il ſuit de là naturellement que, ſi la valeur de l'appliquée ne peut pas être exprimée par une fonction algébrique de l'abſciſſe, la ligne courbe ne peut être miſe au nombre de celles qu'on appelle algébriques. On appelle ordinai-

rement ces ſortes de lignes, qui ne ſont pas algébriques, courbes *tranſcendantes*. La ligne tranſcendante peut donc être définie une courbe dans laquelle la relation entre les abſciſſes & les appliquées ne peut être exprimée par une équation algébrique. Ainſi, toutes les fois que l'appliquée y eſt égale à une fonction tranſcendante de l'abſciſſe x, la ligne courbe doit être rapportée au genre des tranſcendantes.

507. Nous nous ſommes occupés dans la ſection précédente principalement de deux eſpèces de quantités tranſcendantes. L'une comprenoit les logarithmes, & l'autre les arcs de cercle, ou les angles. Si donc l'appliquée y eſt égale ou au logarithme de l'abſciſſe x, ou à un arc de cercle dont le ſinus, ou le coſinus, ou la tangente, eſt exprimée par l'abſciſſe x, de ſorte que $y = l.x$, ou $y = A.\mathit{ſin.}\ x$, ou $y = A.\mathit{coſ.}\ x$, ou $y = A.\mathit{tang.}\ x$; ou s'il n'entre que de telles valeurs dans l'équation donnée entre x & y, la courbe dans tous ces cas ſera tranſcendante. Au reſte, ce ne ſont là que des eſpèces particulières de courbes tranſcendantes; car, outre celles-là, il y a une infinité d'autres expreſſions tranſcendantes, que l'analyſe des infinis fera connoître plus en détail; d'où il faut conclure que le nombre des courbes tranſcendantes eſt bien plus conſidérable que celui des courbes algébriques.

508. Toute fonction qui n'eſt pas algébrique, eſt tranſcendante, & rend par conſéquent tranſcendante la courbe dans l'expreſſion de laquelle elle entre. Or une équation algébrique, ou eſt rationnelle & n'a d'autres expoſans que des nombres entiers, ou bien eſt irrationnelle & renferme des expoſans fractionnaires; mais ce dernier cas peut toujours être ramené au premier. Ainſi toute courbe dont l'équation qui exprime la relation entre les coordonnées x & y, n'eſt ni rationnelle, ni ne peut être rendue telle, eſt toujours tranſcendante. Si l'équation contient des puiſſances dont les expoſans ne ſoient ni entiers, ni fractionnaires, il n'exiſte aucun moyen de la rendre rationnelle; & c'eſt pourquoi les courbes qui ſont exprimées par de telles équations, ſeront tranſcendantes. De là naît la première eſpèce & comme la plus ſimple des courbes tranſ-

cendantes ; ce ſont celles dont l'équation renferme des expoſans irrationnels. Comme il n'entre dans leur expreſſion ni logarithmes, ni arcs de cercles, & qu'elles proviennent de la ſeule conſidération des nombres irrationnels, elles paroiſſent en quelque ſorte plutôt appartenir à la géométrie ordinaire; & c'eſt pour cette raiſon que LEIBNITZ les a appelées *interſcendantes*, comme ſi elles tenoient un certain milieu entre les courbes algébriques & les courbes tranſcendantes.

509. On aura donc une courbe tranſcendante dans celle qui eſt exprimée par l'équation $y = x^{\sqrt{2}}$. En effet on a beau élever cette expreſſion à telle puiſſance qu'on voudra, on ne parviendra jamais à la rendre rationnelle. Il n'y a aucun moyen géométrique de conſtruire une équation de cette nature; car on ne peut exprimer géométriquement d'autres puiſſances que celles dont les expoſans ſont des nombres rationnels; & c'eſt en cela que ces ſortes de courbes diffèrent ſurtout des courbes algébriques. Car, ſi nous nous contentons de prendre ſeulement une valeur approchée de $\sqrt{2}$, en mettant en ſa place quelques-unes des fractions $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, qui expriment à-peu-près la valeur de $\sqrt{2}$, nous aurons bien à la vérité des courbes algébriques qui approcheront de ſe confondre avec celle qu'on demande; mais qui ſeront ou du troiſième, ou du ſeptième, ou du dix-ſeptième, ou du quarante-unième, &c. ordre. Ainſi, puiſque $\sqrt{2}$ ne peut être exprimé d'une manière rationnelle que par une fraction dont le numérateur & le dénominateur ſont des nombres infiniment grands, cette courbe eſt cenſée d'un ordre infini, & ne peut pour cette raiſon être rangée parmi les courbes algébriques. Ajoutez à cela que $\sqrt{2}$ renfermant deux valeurs, l'une poſitive, l'autre négative, il en réſulte toujours pour y une double valeur, & par conſéquent une double courbe.

510. Si nous voulions enſuite conſtruire exactement cette courbe, nous ne pourrions le faire ſans le ſecours des logarithmes. En effet, ſoit $y = x^{\sqrt{2}}$, on aura, en prenant les logarithmes, $ly = \sqrt{2}.lx$. Le logarithme de chaque abſciſſe multiplié par $\sqrt{2}$ ſera donc égal au logarithme de l'appliquée; d'où il ſuit qu'on pourra, au moyen d'une table de logarithmes

rithmes, aſſigner la valeur de l'appliquée qui répond à une abſciſſe quelconque x. Par exemple, ſi $x = 0$, y ſera auſſi $= 0$; ſi $x = 1$, y ſera de même $= 1$; ce qu'il eſt très-facile de conclure de l'équation primitive; mais, ſi $x = 2$, on aura $l.y = \sqrt{2}.l2 = \sqrt{2}\ .\ 0{,}3010300$; &, à cauſe de $\sqrt{2} = 1{,}41421356$, $l\ .\ y = 0{,}4257274$, & à-peu-près, $y = 2{,}665186$; & ſi on fait $x = 10$, on aura $l\ .\ y = 1{,}4142356$; & par conſéquent $y = 25{,}955870$. On pourra donc de cette manière calculer les appliquées correſpondantes à chaque abſciſſe, & conſtruire même la courbe, pourvu qu'on attribue à l'abſciſſe x des valeurs poſitives. Mais, ſi l'abſciſſe x obtient des valeurs négatives, il ſera alors difficile de dire ſi celles de y ſeront réelles ou imaginaires, car ſoit $x = -1$, que ſignifiera $(-1)^{\sqrt{2}}$? C'eſt ce qu'on ne peut ſavoir, parce que les valeurs approchées qu'on peut trouver pour $\sqrt{2}$ ne ſont ici d'aucun ſecours.

511. Il y aura encore moins à douter que les équations dans leſquelles il ſe trouve des expoſans imaginaires, ne doivent être rapportées au genre des tranſcendantes. Mais il peut arriver qu'une expreſſion qui contient des expoſans imaginaires acquière une valeur réelle & déterminée; il s'en eſt déjà préſenté auparavant pluſieurs exemples; il ſuffira donc d'en offrir un ſeul ici. Soit :

$$2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}}.$$

Quoique chaque terme $x^{+\sqrt{-1}}$ & $x^{-\sqrt{-1}}$ ſoit ſéparément une quantité imaginaire; cependant leur ſomme donne une valeur réelle. Car ſoit $lx = v$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, on aura $x = e^v$; &, en ſubſtituant cette valeur de x, $2y = e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$. Mais nous avons vu dans la première ſection, art. 138, que

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} = cof.\ A\ .\ v;$$

d'où $y = cof.\ A.v = cof.\ A.l.x$. Ainſi une valeur quelconque de x étant donnée en nombre, on cherchera ſon logarithme hyperbolique; on prendra dans le cercle, dont le rayon $= 1$, un arc égal à ce logarithme; & ſon coſinus exprimera la valeur de l'appliquée y. Par exemple, ſi on ſuppoſe $x = 2$, ou $2y = 2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$, on aura $y = cof.\ A\ .\ l\ 2 = cof.\ A\ .0{,}69314718 05599$. Or cet arc égal à $l\,2$, à cauſe que l'arc $= 3{,}1415926535$ &c. eſt de 180°, ſe trouve être par la règle de Trois, de $39^\circ\ 42'\ 51''\ 52'''\ 9^{\text{iv}}$. Son coſinus eſt $0{,}7692389013 5408$, & donne en nombre la valeur de l'appliquée y correſpondante à l'abſciſſe $x = 2$. Puiſque ces ſortes d'expreſſions ſont compoſées de logarithmes & d'arcs de cercles, c'eſt donc avec raiſon qu'on les rapporte à l'eſpèce des tranſcendantes.

512. Parmi les courbes tranſcendantes, celles qui occupent le premier rang ſont donc repréſentées par des équations qui renferment, outre des quantités algébriques, des logarithmes; & la plus ſimple eſt contenue dans cette équation $l\,\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$ ou $x = b\,.\,l\,\frac{y}{a}$; il eſt indifférent quelle eſpèce de logarithmes on emploie, puiſque par la multiplication de la conſtante b on peut ramener au même les différens ſyſtêmes de logarithmes. Suppoſons donc que la lettre l déſigne les logarithmes hyperboliques, la courbe repréſentée par l'équation $x = b\,l\,\frac{y}{a}$ eſt vulgairement connue ſous le nom de LOGARITHMIQUE. Soit e le nombre dont le logarithme $= 1$, ou $e = 2{,}718281828459045235 36028$, on aura $e^{\frac{x}{b}} = \frac{y}{a}$, ou $y = a\,e^{\frac{x}{b}}$, équation très-propre à faire connoître la nature de la courbe dont il s'agit. En effet, ſi on ſubſtitue ſucceſſivement à x des valeurs en progreſſion arithmétique, les appliquées y auront des valeurs en progreſſion géométrique. Mais, pour rendre la conſtruction plus facile, nous ferons $e = m^n$ & $b = n\,c$; ce qui nous donnera l'équation $y = a\,m^{\frac{x}{c}}$, où m peut ſignifier un nombre quelconque poſitif plus grand que l'unité. Si donc on fait:

$$x = 0,\ c,\ 2c,\ 3c,\ 4c,\ 5c,\ 6c,\ \&c.;$$

on aura

$$y = a,\ am,\ am^2,\ am^3,\ am^4,\ am^5,\ am^6,\ \&c.;$$

& en donnant à x des valeurs négatives, ſi on ſuppoſe

$$x = -c,\ -2c,\ -3c,\ -4c,\ -5c,\ \&c.;$$

on aura

$$y = \frac{a}{m},\ \frac{a}{m^2},\ \frac{a}{m^3},\ \frac{a}{m^4},\ \frac{a}{m^5},\ \&c.$$

513. On voit par-là que les appliquées y ont par-tout des valeurs poſitives, & qu'elles croiſſent à l'infini, les abſciſſes poſitives croiſſant elles-mêmes à l'infini, mais qu'elles décroiſſent à l'infini de l'autre côté de l'axe, de ſorte que l'axe eſt une aſymptote Ap de la courbe. Si on a pris le point A pour l'origine des abſciſſes, l'appliquée correſpondante $AB = a$; & ſi on prend l'abſciſſe $AP = x$, on aura l'appliquée $PM = y = am^{\frac{x}{c}} = ae^{\frac{x}{b}}$; & par conſéquent $l.\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$. D'où il ſuit que l'abſciſſe AP diviſée par la conſtante b exprime le logarithme du rapport $\frac{PM}{AB}$. Si on place à tout autre point a de l'axe l'origine des abſciſſes, l'équation reſte ſemblable. Car ſoit $Aa = f$ & $aP = t$; à cauſe de $x = t - f$, on aura $y = ae^{\frac{(t-f)}{b}} = \frac{ae^{\frac{t}{b}}}{e^{\frac{f}{b}}}$. Faiſons la conſtante $\frac{a}{e^{\frac{f}{b}}} = g$, nous aurons $y = ge^{\frac{t}{b}}$. De-là il ſuit qu'à cauſe de $ab = g$, on aura $\frac{aP}{b} = l.\frac{PM}{ab}$; & que par conſéquent ayant mené deux appliquées quelconques PM & pm, diſ- Pl. XI. Fig. 101.

tantes l'une de l'autre de l'intervalle Pp, on aura $\frac{Pp}{b} = l.\frac{PM}{pm}$; & dans ce cas la conſtante b, d'où dépend cette relation, pourra être conſidérée comme une eſpèce de paramètre de la logarithmique.

514. Il ſera facile de déterminer en un point quelconque M la tangente de cette courbe. Car, puiſqu'en ſuppoſant $AP = x$, on a $PM = ae^{\frac{x}{b}}$, en menant une autre appliquée quelconque QN diſtante de la première d'un intervalle $PQ = u$, on aura par la même raiſon $QN = ae^{\frac{(x+u)}{b}} = ae^{\frac{x}{b}}.e^{\frac{u}{b}}$; & ſi on mène ML parallèlement à l'axe, LN ſera $= (QN - PM) = ae^{\frac{x}{b}}(e^{\frac{u}{b}} - 1)$. Si on tire par les points M & N la droite NMT juſqu'à ce qu'elle rencontre l'axe au point T, on aura $LN : ML :: PM : PT$; & par conſéquent $PT = \frac{u}{e^{\frac{u}{b}} - 1}$. Mais, comme nous l'avons fait voir dans la première ſection, on a par une ſérie infinie $e^{\frac{u}{b}} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{2b^2} + \frac{u^3}{6b^3} +$ &c; & par conſéquent $PT = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{u}{2b^2} + \frac{uu}{6b^3}} +$ &c. Suppoſons à préſent que l'intervalle $PQ = u$ vienne à diſparoître, les points M & N ſe confondant, alors la droite NMT deviendra une tangente de la courbe; & la ſoustangente $PT = b$, ou à une conſtante. Telle eſt la propriété la plus remarquable de la logarithmique. Le paramètre b de cette courbe eſt donc égal à la ſoustangente, qui a par-tout une grandeur conſtante.

515. Il ſe préſente ici une queſtion à éclaircir, c'eſt de ſavoir ſi la logarithmique entière ſe trouve décrite de cette manière; & ſi la courbe, outre cette branche MBm, qui s'étend de part & d'autre à l'infini, n'a pas encore d'autres parties. Car nous avons vu auparavant qu'il y avoit toujours deux branches qui convergeoient vers la même aſymptote. Auſſi quelques auteurs ont-ils avancé que la logarithmique étoit compoſée de deux parties ſemblables ſituées de chaque côté de l'axe, de manière que l'aſymptote étoit en même temps

un diamètre. Mais l'équation $y = a\,c^{\frac{x}{b}}$ ne fait nullement connoître cette propriété ; car toutes les fois que $\frac{x}{b}$ eſt un nombre entier, ou une fraction dont le dénominateur eſt un nombre impair, y a une ſeule valeur réelle & en même temps poſitive ; mais ſi la fraction $\frac{x}{b}$ a un dénominateur pair, alors l'appliquée y aura deux valeurs, l'une poſitive, l'autre négative ; ce qui donnera un point de la courbe ſitué de l'autre côté de l'aſymptote. Il s'enſuit que la logarithmique aura au-deſſous de l'aſymptote une infinité de points ſéparés les uns des autres, qui ne conſtituent plus une courbe continue, quoique par leur rapprochement infiniment grand ils en offrent l'apparence ; ce qui eſt un paradoxe, qui n'a point lieu dans les courbes algébriques ; mais il s'en préſente un autre ici, qui eſt beaucoup plus ſurprenant. Les logarithmes des nombres négatifs ſont imaginaires ; (ce qui eſt évident par ſoi-même ; & qui eſt d'ailleurs une ſuite de ce que le rapport de $log. - 1$ à $\sqrt{-1}$ eſt un rapport fini) on aura donc pour $l. - n$ une quantité imaginaire, que je ſuppoſe $= i$; mais le logarithme d'un quarré eſt double de celui de ſa racine ; donc $l\,(-n)^2 = l.n^2 = 2\,i$; d'ailleurs $log.n^2$ eſt auſſi une quantité réelle $= 2\,.\,l.n$. Il s'enſuivroit donc & que la quantité réelle $l.n$ & que l'imaginaire i ſeroit la moitié de la même quantité réelle $l.n^2$. Il faudroit donc en conclure que tout nombre auroit deux ſortes de moitiés, l'une réelle, l'autre imaginaire ; qu'il auroit de même trois tiers, quatre quarts différens, & ainſi de ſuite ; de manière cependant qu'une ſeule de ces parties ſeroit réelle. On ne voit pas trop clairement comment il eſt poſſible de concilier cette aſſertion avec l'idée qu'on a coutume de ſe former des quantités.

516. En accordant donc ce que nous venons d'avancer, la moitié du nombre a ſera également $\frac{a}{2} + l. - 1$ & $\frac{a}{2}$; car le double de la première quantité eſt $a + 2\,.\,l - 1 = a + l.(-1)^2 = a + l.1 = a$. Remarquons ici que $+ l. - 1 = - l. - 1$, quoique $l. - 1$ ne ſoit pas $= 0$; en effet, puiſque $-1 = \frac{+1}{-1}$,

on aura $l.-1 = l.+1 - l.-1 = -l.-1$. Semblablement, puiſqu'on a pour $\sqrt[3]{1}$, non-ſeulement 1, mais encore $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, on aura $3\,l.\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = l.1 = 0$; & par conſéquent les trois ſortes de tiers de la même quantité a feront $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{3} + l.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $\frac{a}{3} + l.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; car le triple de chacune de ces expreſſions produit la même quantité a. Pour éclaircir ces propoſitions, qui ne paroiſſent nullement admiſſibles, & lever toute eſpèce de doute, il faut établir un autre paradoxe; ſavoir, que tout nombre a une infinité de logarithmes, parmi leſquels il n'y en a qu'un qui ſoit réel. Ainſi, quoique le logarithme de l'unité $= 0$, elle en a cependant une infinité d'autres qui ſont imaginaires, ſavoir $2\,l - 1$, $3\,l.\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, $4\,l.-1$ & $4\,l. \pm \sqrt{-1}$, & d'autres ſans nombre que fait connoître l'extraction des racines. Cette opinion eſt beaucoup plus vraiſemblable que la précédente; car, en ſuppoſant $x = l.a$, on aura $a = e^x$; & par conſéquent $a = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} +$ &c.; & comme cette équation a un nombre infini de dimenſions, il n'eſt pas étonnant que x ait de même un nombre infini de racines. Mais, quoiqu'on puiſſe expliquer ainſi le dernier paradoxe, au moins le premier qui conſiſte à admettre l'exiſtence d'une infinité de points ſéparés les uns des autres, & ſitués de part & d'autre de l'axe de la logarithmique, conſerve toute ſa force.

517. On peut rendre plus évidente l'exiſtence de cette infinité de points ſéparés, par le moyen de l'équation $y = (-1)^x$; car tant que x eſt un nombre entier pair ou un nombre fractionnaire dont le numérateur eſt pair, y ſera $= 1$; mais, ſi x eſt un nombre entier impair, ou une fraction dont le numérateur & le dénominateur ſoient à la fois impairs, y ſera $= -1$; dans tous les autres cas où la valeur de x eſt ou une fraction qui a un dénominateur pair, ou bien un nombre irrationnel, celle de y ſera imaginaire. L'équation $y = (-1)^x$ fournira donc des points ſans nombre ſéparés les uns des autres, placés de chaque côté de l'axe à une diſtance $= 1$. Il eſt im-

poſſible d'en trouver ſeulement deux qui ſoient contigus; cependant en prenant de ſuite deux à deux les points qui ſont ſitués du même côté de l'axe, ils ſeront ſi voiſins l'un de l'autre, que l'eſpace qui les ſépare eſt plus petit qu'aucune quantité aſſignable; car on conçoit qu'entre deux valeurs de l'abſciſſe ſi voiſines qu'on voudra, on peut inférer non pas une fraction, mais une infinité d'autres dont les dénominateurs ſeront impairs, & qui donneront chacune naiſſance à des points appartenans à l'équation propoſée. Cette ſuite de points préſentera donc l'apparence de deux lignes droites parallèles à l'axe, & qui en ſont éloignées de part & d'autre d'un intervalle $=1$; car il eſt impoſſible d'imaginer ſur ces lignes aucun eſpace où l'on ne puiſſe aſſigner, je ne dis pas un ſeul point, mais des points ſans nombre, par le moyen de l'équation $y=(-1)^x$ qui les contient tous. Cette même anomalie ſe retrouve dans l'équation $y=(-a)^x$, & dans les autres ſemblables, où une quantité négative eſt élevée à une puiſſance indéterminée. Il étoit donc néceſſaire d'expoſer ici ces eſpèces de paradoxes, qui ne peuvent avoir lieu que dans les courbes tranſcendantes.

518. C'eſt donc à ce genre de courbes dépendantes des logarithmes qu'appartiennent toutes les équations dans leſquelles ſe rencontrent non-ſeulement des logarithmes, mais encore des expoſans variables; parce qu'en paſſant des logarithmes aux nombres on arrive à celles-ci. C'eſt pourquoi on a coutume d'appeler ces courbes *exponentielles*. Telle ſera donc la courbe renfermée dans l'équation $y=x^x$, ou dans celle-ci $ly=xlx$. En faiſant $x=0$, on aura $y=1$; ſi $x=1$, y ſera $=1$; ſi $x=2$, y ſera $=4$; ſi $x=3$, y ſera $=27$, &c. On conclura de là que BDM exprimera la figure de cette courbe rapportée à l'axe AP, de manière qu'en prenant $AC=1$, on ait auſſi $AB=CD=1$. Les appliquées qui tombent entre A & B ſeront plus petites que l'unité; car, ſi on fait $x=\frac{1}{2}$, on aura $y=\frac{1}{\sqrt{2}}=0,7071068$; & la plus petite de toutes ſe trouvera en prenant l'abſciſſe $x=\frac{1}{e}=0,36787944$, Pl. XI. Fig. 102.

& alors l'appliquée y sera $= 0{,}6922005$, comme on l'enseignera dans la suite *. Cherchons à présent quelle sera la forme de cette courbe au-delà du point B; il faudra pour cela faire x négatif, ce qui donnera $y = \frac{1}{(-x)^x}$; d'où il résulte que cette partie sera composée d'une suite de points séparés les uns des autres, & qui s'approcheront de plus en plus de l'axe comme asymptote. Or ces points tomberont d'un côté ou d'autre de l'axe, suivant que x sera un nombre pair ou impair. Bien plus, il y aura une infinité de ces points qui tomberont au-dessous de AP, si on prend pour x une fraction dont le dénominateur soit pair. Si, par exemple, on fait $x = \frac{1}{2}$, on aura en même temps $y = + \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. La courbe continue MDB se termine donc brusquement en B contre la nature des lignes

* Voici, en attendant, un moyen de s'en assurer. Je suppose en général $y = X$; (X étant une fonction quelconque de x, & dont il s'agit de trouver la plus petite valeur, ou la plus grande; car la méthode est la même pour les deux cas). J'observe que, si j'augmente x d'une quantité quelconque u, qu'on peut d'ailleurs supposer si petite qu'on voudra, X devient $X + X'u + X''u^2 + X'''u^3 +$ &c.; X', X'', X''', étant aussi des fonctions de x; & que, si je diminue x de la même quantité u, X devient $X - X'u + X''u^2 - X'''u^3 +$ &c. Or, pour que X soit un minimum ou un maximum, il faut qu'il soit plus petit ou plus grand que $X + X'u + X''u^2 + X'''u^3 +$ &c., & que $X - X'u + X''u^2 - X'''u^3 +$ &c.; mais cela ne peut avoir lieu, à moins que X' ne soit $= 0$. En effet, X' ne peut être ni positif ni négatif; car si $+X'$ est positif, $-X'$ est négatif; & au contraire, si $+X'$ est négatif, $-X'$ est positif. Or dans ces deux cas la valeur de $y = X$ tombe entre deux autres aussi voisines qu'on voudra, l'une plus grande, l'autre plus petite que X; donc il n'y aura ni minimum ni maximum. Donc X' ne peut être ni positif ni négatif; donc il est égal à zéro. Pour savoir à présent si la supposition de $X' = 0$ donne un maximum ou un minimum, on aura recours au terme multiplié par le quarré u^2 de la différence. S'il est positif, on aura un minimum; & s'il est négatif, on aura un maximum. On suppose ici que ce terme n'a pas disparu; car autrement il faudroit recourir aux deux termes suivans, & faire par rapport à ceux-ci les mêmes raisonnemens que par rapport aux deux premiers. Cela posé, considérons l'équation $y = x^x$ ou $l.y = x.lx$; en mettant $x + u$ à la place de x, la fonction $x\,lx$ deviendra $(x+u)\,(\,l\,(x+u)\,) = \left(x+u\right)\left(l\,x + l.\left(1 + \frac{u}{x}\right)\right) = (x+u)\left(l\,x + \frac{u}{x} - \frac{u^2}{2x^2} + \text{\&c.}\right) = x\,lx + u\,lx + u + \frac{u^2}{x} - \frac{u^2}{2x} -$ &c. Donc, en vertu de la règle que nous venons de donner, il faudra faire $u\,(\,l\,x + 1\,) = 0$, ou $l.\,x + 1 = 0$. Donc $l\,x = -1 = -1\,l.\,e = l.\,e^{-1}$. Donc $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Et si on fait attention au signe du terme multiplié par u^2, on verra qu'il est positif. Donc l'ordonnée qui répond à l'abscisse $x = \frac{1}{e}$ est réellement un minimum.

algébriques;

algébriques; mais au lieu d'avoir un cours continu, elle aura une ſuite de points ſéparés; ce qui paroît établir aſſez bien l'exiſtence réelle de ces ſortes de points, qu'on peut en quelque ſorte regarder comme conjugués; car, ſi on ne veut convenir de leur exiſtence, il faudra admettre que la courbe entière s'arrête ſubitement au point B; ce qui ſeroit contraire à la loi de continuité, & par conſéquent abſurde.

519. Parmi une infinité d'autres courbes de ce genre, qu'on peut conſtruire par logarithmes, il y en a dont la conſtruction ne paroît pas auſſi facile, & qui peut être effectuée cependant par le moyen d'une ſubſtitution convenable. Telle eſt la courbe compriſe dans l'équation $x^y = y^x$; on voit bien ſur-le-champ que l'appliquée y eſt conſtamment égale à l'abſciſſe x, de ſorte que la ligne droite inclinée à l'axe ſous un angle demi-droit ſatisfait à l'équation. Il eſt cependant viſible que l'équation propoſée a une ſignification plus étendue que celle à la ligne droite $y = x$; & que par conſéquent celle-ci ne peut exprimer tout ce que contient l'autre $x^y = y^x$; car on peut ſatisfaire auſſi à cette dernière, ſans que x ſoit $= y$. Par exemple, ſi $x = 2$, y peut être $= 4$. L'équation propoſée renfermera donc, outre la droite EAF, d'autres parties. Pl. XI. Fig. 103. Pour les trouver, & repréſenter par conſéquent en entier la ligne compriſe dans l'équation, nous ferons $y = tx$, de ſorte que $x^{tx} = t^x x^x$. En extrayant la racine x, nous aurons $x^t = tx$ & $x^{t-1} = t$; conſéquemment $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ & $y = t^{\frac{t}{t-1}}$, ou bien, en faiſant $t - 1 = \frac{1}{u}$, $x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$ & $y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$. Ainſi la courbe aura, outre la droite EAF, la branche RS qui convergera vers les droites AG & AH comme aſymptotes, & dont AF ſera un diamètre. La courbe, au ſurplus, coupera la droite AF au point C, où $AB = BC = e$, e déſignant le nombre dont le logarithme eſt l'unité. L'équation fournit en outre une infinité de points ſéparés, qui avec la droite EF & la courbe RCS épuiſent tout ce qu'elle renferme dans ſon expreſſion. Il y a donc une infinité de nombres x & y, qui pris deux à deux peuvent ſatisfaire à l'équation $x^y = y^x$; tels ſont les nombres ſuivans, en s'en tenant à ceux qui ſont rationnels:

$$x = 2 \qquad\qquad y = 4$$

$$x = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} \qquad\qquad y = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

$$x = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} \qquad\qquad y = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81}$$

$$x = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256} \qquad\qquad y = \frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024}$$

&c. &c.

Chacun de ces nombres élevés à une puiſſance marquée par ſon correſpondant produit la même quantité. Ainſi on aura :

$$2^4 = 4^2 = 16$$

$$\left(\tfrac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}} = \left(\tfrac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}}$$

$$\left(\tfrac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} = \left(\tfrac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}} = \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{256}{27}}$$

&c.

520. Quoiqu'il y ait dans ces courbes & dans les autres ſemblables une infinité de points qui peuvent être déterminés algébriquement; elles ne peuvent cependant être miſes au nombre des courbes algébriques, parce qu'elles renferment une infinité d'autres points qu'il eſt impoſſible d'aſſigner d'une manière ſemblable. Paſſons donc à un autre genre de courbes tranſcendantes, qui exige des arcs de cercle. Pour ne pas multiplier les caractères qui entrent dans le calcul, je repréſenterai toujours ici par l'unité le rayon du cercle, dont l'arc fera partie de la conſtruction. Il eſt facile de faire voir que les courbes qui appartiennent à ce genre ne ſont pas algébriques, quoique l'impoſſibilité de la quadrature du cercle n'ait pas encore été démontrée. En effet, conſidérons ſeulement la plus ſimple équation de ce genre, ſavoir $\frac{y}{a} = A . \mathit{ſin.} \frac{x}{c}$, qui ſuppoſe que l'appliquée y ſoit proportionnelle à l'arc de cercle, dont le ſinus eſt $\frac{x}{c}$. Comme il y a une infinité d'arcs qui

conviennent au même ſinus $\frac{x}{c}$, l'appliquée y ſera une fonction infinitiforme; & par conſéquent cette ligne, ainſi que les autres droites, coupera la courbe en une infinité de points; propriété qui la diſtingue bien clairement des courbes algébriques. Soit s le plus petit arc qui convient au ſinus $\frac{x}{c}$, & déſignons par π la demi-circonférence du cercle, les valeurs de $\frac{y}{a}$ ſeront les ſuivantes:

$$s;\quad \pi-s;\quad 2\pi+s;\quad 3\pi-s;\quad 4\pi+s;\quad 5\pi-s;\quad \&c.$$
$$-\pi-s;\ -2\pi+s;\ -3\pi-s;\ -4\pi+s;\ -5\pi-s;\quad \&c.$$

Ayant donc pris la droite CAB pour axe & A pour l'origine des abſciſſes, on aura d'abord, en faiſant $x=0$, les appliquées $AA^1=\pi a$, $AA^2=2\pi a$, $AA^3=3\pi a$, &c.; & de l'autre côté $AA^{-1}=\pi a$, $AA^{-2}=2\pi a$, $AA^{-3}=3\pi a$, &c.; & la courbe paſſera par tous ces points. Mais, ſi on prend l'abſciſſe $AP=x$, l'appliquée coupera la courbe en une infinité de points M, & on aura $PM^1=as$, $PM^2=a(\pi-s)$, $PM^3=a(2\pi+s)$, &c. La courbe entière ſera donc compoſée d'une infinité de portions ſemblables AE^1A^1, $A^1F^1A^2$, $A^2E^2A^3$, AF^2A^4, &c.; de manière que toutes les droites parallèles à l'axe BC, qui paſſent par les points E & F, ſont des diamètres de la courbe. On aura auſſi $AC=AB=c$, & les intervalles E^1E^2, E^2E^3, E^1E^{-1}, $E^{-1}E^{-2}$, de même que F^1F^2, F^1F^{-1}, $F^{-1}F^{-2}$, ſeront égaux chacun à $2a\pi$. Cette courbe a été nommée par LEIBNITZ *la Ligne des Sinus*, parce qu'il eſt facile de trouver par ſon moyen le ſinus d'un arc quelconque. En effet, puiſque $\frac{y}{a}=\text{A}.\mathit{ſin}.\frac{x}{c}$, on aura réciproquement $\frac{x}{c}=\mathit{ſin}.\ \text{A}.\frac{y}{a}$. Si on ſuppoſe $\frac{y}{a}=\frac{1}{2}\pi-\frac{z}{a}$, l'équation deviendra $\frac{x}{c}=\mathit{coſ}.\ \text{A}.\frac{z}{a}$; ce qui donne en même temps *la Ligne des Coſinus*. Pl. XI. Fig. 104.

521. On peut pareillement déduire de cette conſidération

la Ligne des Tangentes, dont l'équation sera $y = A . tang. x$, en supposant pour abréger $a = 1$ & $c = 1$; donc réciproquement $x = tang. A . y = \frac{sin. y}{cos. y}$; d'où il sera facile de conclure la figure de la courbe par le moyen des tangentes. On verra qu'elle a une infinité d'asymptotes parallèles entre elles. On pourra pareillement décrire *la Ligne des Sécantes* en se servant de l'équation $y = A . sec. x$ ou $x = sec. A . y = \frac{1}{cos. y}$. Elle aura aussi une infinité de branches qui s'étendront à l'infini. On connoît particulièrement dans ce genre de courbes la CYCLOIDE ou *Trochoïde,* qui est décrite par un point de la circonférence d'un cercle qui s'avance en roulant sur une ligne droite, & dont l'équation entre les coordonnées perpendiculaires est $y = \sqrt{(1 - x^2)} + A . cos. x$. Cette courbe, tant à cause de la facilité avec laquelle elle peut être décrite qu'à cause d'un grand nombre de belles propriétés qu'elle renferme, mérite sur-tout notre attention ; mais, comme la plupart de ces propriétés ne peuvent être développées sans le secours du calcul infinitésimal, nous nous contenterons d'examiner, en passant, seulement les principales, qui découlent immédiatement de la manière dont elle est décrite.

Pl. XI. Fig. 105. 522. Imaginons donc un cercle ACB qui roule sur la droite EA ; &, pour rendre notre recherche plus générale, ne supposons pas que ce soit un point B de la circonférence, mais un point quelconque D, pris sur le diamètre prolongé, qui décrive la courbe Dd. Soit le rayon de ce cercle $CA = CB = a$, la distance $CD = b$; & supposons que ce soit dans cette position que le point D est le plus élevé. Lorsque le cercle sera arrivé par son mouvement dans la situation $aQbR$; si on fait l'espace parcouru $AQ = z$, on aura l'arc $aQ = z$, lequel étant divisé par le rayon a donnera l'angle $acQ = \frac{z}{a}$; le point qui décrit la courbe sera en d, de sorte que $cd = b$, l'angle $dcQ = \pi - \frac{z}{a}$; & le point d appartiendra à la courbe cherchée. Abaissons d'abord du point d sur la droite AQ la perpendiculaire dp, & ensuite sur la droite QR la perpendiculaire dn; nous aurons $dn = b.\sin.\frac{z}{a}$, & $cn = -b.\cos.\frac{z}{a}$; donc $Qn = dp = a + b.\cos.\frac{z}{a}$. Soit prolongée dn jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite AD en P, & soient les coordonnées $DP = x$, $Pd = y$; on aura $x = b + cn$, ou $x = b - b\cos.\frac{z}{a}$ & $y = AQ + dn = z + b.\sin.\frac{z}{a}$. Puis donc qu'on a $b\cos.\frac{z}{a} = b - x$, $b.\sin.\frac{z}{a}$ sera $= \sqrt{(2bx - x^2)}$ & $z = a\,\mathrm{A}.\cos.\left(1 - \frac{x}{b}\right) = a\,\mathrm{A}.\sin.\frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$. Ces valeurs substituées donneront $y = \sqrt{(2bx - x^2)} + a\,\mathrm{A}.\sin.\frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$; ou, si on compte les abscisses sur l'axe AD depuis le centre, & qu'on fasse $b - x = t$, on aura $\sqrt{(2bx - xx)} = \sqrt{(bb - tt)}$, & cette équation entre t & y:

$$y = \sqrt{(bb - tt)} + a.\mathrm{A}.\cos.\frac{t}{b};$$

équation qui donne la cycloïde *ordinaire*, si b est $= a$; mais, si b est plus grand que a, ou plus petit que a, la courbe s'appelle une cycloïde *accourcie* ou *alongée*. Au reste y sera toujours une fonction infinitiforme de x ou de t; ou bien toute droite parallèle à la base AQ coupera la courbe en une infinité de points, à moins que sa distance x ou t ne soit telle que $\sqrt{(2bx - xx)}$ ou $\sqrt{(bb - tt)}$ ne devienne une quantité imaginaire.

523. On doit rapporter aux courbes les plus connues de ce genre *les Epicycloïdes* & les *Hypocycloïdes*, qui résultent du mouvement d'un cercle ACB roulant sur la circonférence d'un autre cercle OAQ, tandis qu'un point fixe D, pris au-dehors ou au-dedans du cercle mobile, décrit la courbe Dd. Soit le rayon OA du cercle immobile $= c$, celui du cercle mobile $CA = CB = a$, & la distance CD du point qui décrit la courbe $= b$, & prenons la droite OD pour l'axe de la courbe cherchée Dd. Supposons que le cercle mobile ait passé de la situation initiale, où les points O, C, D, étoient en ligne droite, à la situation QcR, après avoir décrit $AQ = z$, de manière que l'angle $AOQ = \frac{z}{c}$; on aura donc Pl. XI. Fig. 106.

l'arc $Qa = AQ = z$; & par conséquent l'angle $acQ = \frac{z}{a} = Rcd$; & si on prend la droite $cd = CD = b$, le point d appartiendra à la courbe Dd. De ce point abaissons sur l'axe la perpendiculaire dP, & menons aussi cm perpendiculaire, & cn parallèle à l'axe OD. A cause de l'angle $Rcn = AOQ = \frac{z}{c}$, on aura donc l'angle $dcn = \frac{z}{c} + \frac{z}{a} = \frac{(a+c)z}{ac}$. D'où l'on conclut $dn = b.\text{fin}.\frac{(a+c)z}{ac}$ & $cn = b.\text{cof}.\frac{(a+c)z}{ac}$. Ensuite, à cause de $OC = Oc = a + c$, cm sera $= (a+c)\ \text{fin}.\frac{z}{c}$ & $Om = (a+c)\text{cof}.\frac{z}{c}$. Ayant donc fait les coordonnées $OP = x$ & $Pd = y$, on aura $x = (a+c)\ \text{cof}.\frac{z}{c} + b\ .\ \text{cof}.\frac{(a+c)z}{ac}$ & $y = (a+c)\ \text{fin}.\frac{z}{c} + b.\text{fin}.\frac{(a+c)z}{ac}$. On voit par là que, si $\frac{a+c}{a}$ est un nombre rationnel, à cause que les angles $\frac{z}{c}$ & $\frac{(a+c)z}{ac}$ sont commensurables, on peut éliminer l'inconnue z, & trouver par conséquent une équation algébrique entre x & y. Dans les autres cas, la courbe ainsi décrite sera transcendante.

Au reste, il est à remarquer ici que, si a est négatif, la courbe devient une hypocycloïde, le cercle mobile tombant dans l'intérieur du cercle fixe. On fait ordinairement b égal au rayon a, & on a par cette raison des épicycloïdes & des hypocycloïdes proprement dites. Les courbes que nous venons de trouver, ont donc plus de généralité ; &, comme les équations n'en étoient pas plus difficiles, nous avons jugé à propos d'ajouter cette condition. Si on fait une somme des quarrés xx & yy, on aura l'équation $xx + yy = (a+c)^2 + b^2 + 2b(a+c).\text{cof}.\frac{z}{a}$, par le moyen de laquelle l'élimination de z se fera d'autant plus facilement, toutes les fois que les quantités a & c seront commensurables.

524. Outre les cas où les rayons a & c des deux cercles sont commensurables entre eux, & où les courbes deviennent algé-

briques, on doit remarquer celui où $b = -a - c$; ou bien, où le point D de la courbe tombe sur le centre O du cercle immobile. Soit donc $b = -a - c$, on aura $x^2 + y^2 = 2(a+c)^2 \left(1 - cos.\frac{z}{a}\right) = 4(a+c)^2\left(cos.\frac{z}{2a}\right)^2$; d'où $cos.\frac{z}{2a} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{2(a+c)}$. Ensuite, comme $x = (a+c)\left(cos.\frac{z}{c} - cos.\frac{(a+c)z}{ac}\right)$ & $y = (a+c)\left(fin.\frac{z}{c} - fin.\frac{(a+c)z}{ac}\right)$, on aura $\frac{x}{y} = -tang.\frac{(2a+\ )z}{2ac}$, $fin.\frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ & $cof.\frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{-y}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Par conséquent, puisque $\sqrt{(xx+yy)} = 2(a+c)\,cof.\frac{z}{2a}$, x deviendra $= 2(a+c)\,cof.\frac{z}{2a}\,fin.\frac{(2a+c)z}{2ac}$, & $y = -2(a+c)\,cof.\frac{z}{2a}.\,cof.\frac{(2a+c)z}{2ac}$. Soit, par exemple, $c = 2a$, on aura $x = 6a.cof.\frac{z}{2a}\,fin.\frac{z}{a}$, $y = -6a\,cof.\frac{z}{2a}.cof.\frac{z}{a}$ & $\sqrt{(x^2+y^2)} = 6a.cof.\frac{z}{2a}$. Faisons $cof.\frac{z}{2a} = q$, nous aurons $fin.\frac{z}{2a} = \sqrt{(1-q^2)}$ & $fin.\frac{z}{a} = 2q\sqrt{(1-q^2)}$ & $cof.\frac{z}{a} = 2qq - 1$; d'où l'on tire $q = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{6a}$ & $y = -6aq(2qq-1) = (1-2qq)\sqrt{(xx+yy)} = \left(1\ \frac{-xx-yy}{18aa}\right)\sqrt{(xx+yy)}$; ou $18aay = (18aa - xx - yy)\sqrt{(xx+yy)}$. Soit $18aa = ff$, & élevons tout au quarré, nous aurons cette équation du sixième degré $(xx+yy)^3 - 2ff(xx+yy)^2 + f^4xx = 0$. Mais, comme notre but ici est d'examiner les courbes tranfcendantes, & non les courbes algébriques, laissons celles que nous venons de trouver, & passons à d'autres dont la construction exige à la fois les logarithmes & les arcs de cercle.

525. Nous avons déjà trouvé ci-dessus une courbe de cette nature, laquelle résultoit de l'équation $2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}}$, que nous avons transformée en celle-ci $y = cof.\ A.l\,x$; mais cette dernière peut encore se changer en cette autre $A.cof.\,y = l.x$ & $x = e^{A.cof.y}$. En prenant donc AP pour axe, & sur Pl. XII. Fig. 107.

cette ligne le point A pour l'origine des abſciſſes, il eſt d'abord évident que la courbe n'a au-delà du point A, du côté des abſciſſes négatives, aucune portion continue; mais l'axe AP ſera coupé par la courbe en une infinité de points, dont les diſtances au point A formeront une progreſſion géométrique. Ainſi on aura $AD = e^{\frac{\pi}{2}}$; $AD^1 = e^{\frac{3\pi}{2}}$; $AD^2 = e^{\frac{5\pi}{2}}$; $AD^3 = e^{\frac{7\pi}{2}}$, &c.; mais il y aura auſſi une infinité d'interſections qui s'approcheront de plus en plus du point A, ſavoir $AD^{-1} = e^{\frac{-\pi}{2}}$, $AD^{-2} = e^{\frac{-3\pi}{2}}$, $AD^{-3} = e^{\frac{-5\pi}{2}}$, &c. Enſuite cette courbe s'étend de part & d'autre de l'axe à des diſtances $AB = AC = 1$, & y touche les droites parallèles à l'axe en une infinité de points E & F, dont les diſtances à B & à C forment pareillement une progreſſion géométrique. La courbe s'approchera donc de la droite BC; &, après avoir fait une infinité de ſinuoſités, finira par ſe confondre entièrement avec elle. Une propriété ſingulière de cette courbe conſiſte donc en ce que ce n'eſt pas une ligne droite infinie, mais une ligne finie BC, qui en eſt l'aſymptote; ce qui lui donne ſur-tout un caractère particulier qui la diſtingue des courbes algébriques.

Pl. XII. Fig. 108. 526. On doit auſſi rapporter aux courbes tranſcendantes, dont la conſtruction exige des angles ſeuls ou accompagnés de logarithmes, la claſſe innombrable des SPIRALES. Ces ſortes de courbes regardent un certain point fixe, comme centre, autour duquel elles ſe développent en faiſant le plus ſouvent une infinité de tours. Leur nature s'exprime commodément par une équation entre la diſtance CM d'un point quelconque M de la courbe au centre C, & l'angle ACM, que cette droite CM fait avec une droite CA donnée de poſition. Soit donc l'angle $ACM = s$, ou ſoit s un arc de cercle dont le rayon eſt $= 1$, lequel ſert de meſure à l'angle ACM, & ſoit la droite $CM = z$. Si on donne à préſent une équation quelconque entre les variables s & z, il en réſultera une ſpirale. Car, comme l'angle ACM, repréſenté par s, peut en outre l'être d'une infinité d'autres manières différentes, les angles

angles $2\pi+s$, $4\pi+s$, $6\pi+s$ &c., auſſi bien que les angles $-2\pi+s$, $-4\pi+s$, &c. donnant la même poſition pour la droite CM, il s'enſuit qu'en faiſant ces ſubſtitutions pour s dans l'équation, la diſtance CM aura une infinité de valeurs différentes ; & par conſéquent la droite CM prolongée coupera la courbe en une infinité de points, à moins qu'il ne réſulte de ces valeurs une quantité imaginaire z. Commençons donc par le cas le plus ſimple, qui eſt celui où $z=as$; on aura pour une même poſition de la droite CM ces valeurs de z, $a(2\pi+s)$, $a(4\pi+s)$, $a(6\pi+s)$, &c.; & $-a(2\pi-s)$, $-a(4\pi-s)$, $-a(6\pi-s)$, &c. De plus, ſi au lieu de s on écrit $\pi+s$, la poſition de la droite CM n'en ſera pas changée ; ſeulement la valeur de z devra être priſe négativement. Ainſi il faudra ajouter aux valeurs de z, que nous venons d'aſſigner, ces autres $-a(\pi+s)$, $-a(3\pi+s)$, $-a(5\pi+s)$ &c.; & de plus, $a(\pi-s)$, $a(3\pi-s)$, $a(5\pi-s)$, &c. La forme de la courbe ſera donc telle qu'elle eſt repréſentée dans la figure citée à la marge; ainſi elle touche la droite AC au point C, & ſe diviſe enſuite en deux branches infinies, qui font chacune une infinité de circuits autour du centre C, & qui ſe coupent réciproquement ſur la droite BC perpendiculaire à AC; de manière que la droite BCB' ſera un diamètre. Cette courbe, à cauſe de ſon inventeur, eſt ordinairement connue ſous le nom de *Spirale d'Archimède*, & ſi on la ſuppoſe une fois exactement décrite, elle ſervira à partager un angle quelconque en autant de parties qu'on voudra, comme le fait voir naturellement ſon équation $z=as$. Pl. XII. Fig. 109.

527. On voit que l'équation $z=as$ qui déſigneroit une ligne droite, ſi z & s étoient des coordonnées perpendiculaires, a donné la ſpirale d'Archimède; de même, ſi on employoit d'autres équations algébriques entre z & s, on obtiendroit une infinité d'autres ſpirales, pourvu toutefois que l'équation fût telle que les valeurs de z correſpondantes à celles de s fuſſent réelles. Ainſi cette équation $z=\frac{a}{s}$, qui eſt ſemblable à celle de l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes,

donne la ſpirale que le célèbre *Jean* BERNOULLI a appelée hyperbolique. Après avoir fait une infinité de tours, à partir du centre C, elle s'approche enfin à une diſtance infinie de la droite AA comme aſymptote. Si l'on propoſe l'équation $z = a\sqrt{s}$, il n'y aura point de diſtance réelle z qui réponde aux s priſes négativement; mais il y aura pour chaque valeur poſitive de s deux valeurs correſpondantes de z, l'une poſitive, l'autre négative. La courbe fera cependant une infinité de circuits autour du point C; mais, ſi l'équation entre z & s eſt de cette forme $z = a\sqrt{(nn - ss)}$, la variable z n'aura aucune valeur réelle, à moins que s ne ſoit renfermée entre ces limites $+n$ & $-n$; & dans ce cas la courbe ſera finie. Par exemple, ſi les droites EF, EF, qui paſſent par le centre ſont inclinées des deux côtés de l'axe, & forment avec lui un angle $= n$, elles ſeront des tangentes de la courbe qui ſe croiſe au point C, & qui préſentera la forme d'une Lemniſcate $ACBCA$. On peut obtenir d'une manière ſemblable les formes d'une infinité d'autres lignes tranſcendantes; mais il ſeroit trop long de les détailler ici.

Pl. XII. Fig. 110.

528. On pourroit rendre ce traité beaucoup plus long, en prenant entre z & s non pas ſeulement des équations algébriques, mais encore des équations tranſcendantes. Entre autres courbes de ce genre, on doit remarquer celle qui eſt exprimée par l'équation $s = n.l.\frac{z}{a}$, dans laquelle les angles s ſont proportionnels aux logarithmes des diſtances z. On a appelé pour cette raiſon cette courbe la *Spirale Logarithmique*; pluſieurs propriétés remarquables la diſtinguent; la principale, c'eſt que toutes les droites menées du centre C coupent la courbe ſous des angles égaux. Pour déduire cette propriété de ſon équation, ſoit l'angle $ACM = s$ & la droite $CM = z$, on aura $s = n.l.\frac{z}{a}$ & $z = ae^{\frac{s}{n}}$. Si on prend un angle plus grand $ACN = s + v$, la droite CN ſera $= ae^{\frac{s}{n}}e^{\frac{v}{n}}$; & par conſéquent, ayant décrit du centre C l'arc $ML = zv$, LN deviendra $= ae^{\frac{s}{n}}\left(e^{\frac{v}{n}} - 1\right) = ae^{\frac{s}{n}}\left(\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \&c.\right)$. On aura

Pl. XII. Fig. 111.

donc $\frac{ML}{LN} = \frac{v}{\frac{v}{n} + \frac{2v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \&c.} = \frac{n}{1 + \frac{v}{2n} + \frac{v^2}{6n^2} + \&c.}$

Mais la différence $MCN = v$ des angles venant à s'évanouir, $\frac{ML}{LN}$ deviendra la tangente de l'angle que le rayon CM fait avec la courbe ; donc, en faisant $v = 0$, la tangente de l'angle ACM sera $= n$; & par conséquent l'angle a une grandeur constante. Si $n = 1$, cet angle sera demi-droit; & dans ce cas la spirale logarithmique se nomme demi-droite.

CHAPITRE XXII.

Solution de quelques Problêmes relatifs au Cercle.

529. NOUS avons vu auparavant que, le rayon d'un cercle étant $= 1$, la demi-circonférence π, ou l'arc de 180 degrés étoit $= 3{,}14159265358979323846264338$, dont le logarithme décimal ou vulgaire est :

$$0{,}49714987269413385435126828\,8;$$

&, en multipliant celui-ci par 2, 30258, &c., on aura le logarithme hyperbolique du même nombre, ou

$$1{,}14472988584940017414342\,37.$$

Puisqu'on connoît la longueur d'un arc de 180 degrés, on pourra donc assigner celle d'un arc quelconque donné en degrés. En effet, soit proposé un arc de n degrés, dont on demande la longueur $= z$, on fera $180 : n :: \pi : z$; donc $z = \frac{\pi n}{180}$. On trouvera ensuite le logarithme de z, en retranchant du logarithme de n celui-ci :

$$1{,}75812263240917221545252641\,3.$$

Mais, si l'arc proposé est donné en minutes n', il faudra alors soustraire du logarithme de n celui-ci :

3 Qq ij

3,5362738827928158479612932II;

&, ſi l'arc propoſé eſt exprimé en ſecondes, ou qu'il ſoit $= n''$, on trouvera le logarithme de ſa longueur, en retranchant du logarithme de n celui-ci :

5,3144251331764594804700600009;

ou, en ajoutant au logarithme du nombre n:

4,6855748668235405195299399990,

& diminuant de 10 la caractériſtique de la ſomme.

530. Réciproquement, on pourra convertir le rayon & ſes autres parties quelconques, telles que les ſinus, tangentes & ſécantes, en arcs, & exprimer ceux-ci ſelon la manière accoutumée en degrés, minutes & ſecondes. Soit z une de ces lignes exprimée en unités entières & décimales du rayon, prenons ſon logarithme avec 10 unités de plus à la caractériſtique, ainſi qu'on a coutume de repréſenter dans les Tables les logarithmes des ſinus, des tangentes & des ſécantes; cela fait, il faudra ſouſtraire de ce logarithme :

4,6855748668235405195299399990;

ou y ajouter 5,3144251331764594804700600009; on aura dans ces deux cas le logarithme dont le nombre correſpondant donnera l'arc exprimé en ſecondes; mais dans le ſecond cas, la caractériſtique doit être diminuée d'une dixaine. Si on veut ſavoir quel eſt l'arc de cercle égal au rayon, on pourra le trouver plus facilement, ſans employer les logarithmes, par la règle de Trois; car on a $\pi : 180° :: 1 :$ l'arc dont il s'agit. On trouve pour cet arc exprimé en dégrés :

$57°,29577951308232087679 8;$

pour le même arc exprimé en minutes :

$3437',74677078493925260788;$

& enfin, ſi on veut l'avoir en ſecondes, il eſt $=$ à

$206264'',806247096355156472 8.$

Cet arc exprimé à la manière ordinaire contiendra :

$$57^\circ \quad 17' \quad 44'' \quad 48''' \quad 22'''' \quad 29''''' \quad 21'''''',$$

ſon ſinus exprimé en ſéries telles que nous les avons développées dans la première ſection :

$$= 0{,}84147098480514$$

&

ſon coſinus $= 0{,}54030230584341$;

& le premier de ces nombres diviſé par le ſecond donnera la tangente de $57^\circ\ 17'\ 44''\ 48'''\ 22''''\ 29'''''\ 21''''''$ &c.

531. Au moyen de ces principes préliminaires, qui peuvent nous ſervir pour comparer les arcs circulaires avec leurs ſinus & leurs tangentes, nous pourrons réſoudre un grand nombre de queſtions relatives à la nature du Cercle. D'abord il eſt clair que tout arc eſt plus grand que ſon ſinus, à moins qu'il ne ſoit évanouiſſant; mais dans ce dernier cas ſon coſinus $= 1$; donc le coſinus eſt alors plus grand que l'arc : au contraire le coſinus d'un angle droit $= 0$; & par conſéquent eſt plus petit que l'arc auquel il appartient. Il ſuit de-là qu'il y a entre 0° & 90° un arc égal à ſon coſinus, & que nous nous propoſons de trouver dans le problême ſuivant :

PROBLÊME I.

Trouver l'arc de cercle qui ſoit égal à ſon coſinus.

SOLUTION.

Soit s l'arc cherché, on aura $s = \text{coſ.}\ s$. On ne voit guère de moyen plus commode pour obtenir la valeur de s que d'employer la règle appelée de *fauſſe poſition*. Mais pour cela il faut déjà en connoître une valeur aſſez approchée, qu'on peut au reſte obtenir par une ſimple conjecture; car ſans cela il faudra ſubſtituer trois valeurs ou plus à s, & ramener pareillement le coſinus à la même unité. Suppoſons $s = 30^\circ$, & ramenons cet arc à être exprimé en parties du rayon suivant la méthode donnée plus haut:

$$l.30 = 1{,}4771213$$

Retranchez $\quad 1{,}7581226$

$$l.\ arc\ 30^\circ = 9{,}7189987;$$

mais

$$l.\ cos.\ 30^\circ = 9{,}9375306.$$

Donc le cosinus de 30° est beaucoup plus grand que son arc ; & par conséquent l'arc cherché surpasse 30°. Supposons donc :

$$s = 40^\circ$$

on aura

$$l.40 = 1{,}6020600$$

Retranchez $\quad 1{,}7581226$

$$l.\ arc\ 40^\circ = 9{,}8439374;$$

mais

$$l.\ cos.\ 40^\circ = 9{,}8842540.$$

On voit par là que l'arc cherché est un peu plus grand que 40°; faisons donc en conséquence $s = 45^\circ$, nous aurons :

$$l.45 = 1{,}6532125$$

Retranchez $\quad 1{,}7581226$

$$l.\ arc\ 45^\circ = 9{,}8950899;$$

or

$$l.\ cos.\ 45^\circ = 9{,}8494850;$$

l'angle demandé eſt donc compris entre 40° & 45°. Nous pourrons trouver à préſent une valeur aſſez approchée; car, en ſuppoſant $s = 40°$,

$$\begin{array}{lrl} & \text{l'erreur} = & + \ 403166; \\ \text{mais en faiſant } s & = & 45° \\ & \text{l'erreur} = & - \ 456049 \\ \hline \text{\& la différence} & = & \ \ 859215; \end{array}$$

il faudra donc dire 859215 : 403166 :: la différence des hypothèſes, qui eſt 5° : à l'excès de l'arc cherché ſur 40°; d'où il ſuit que l'arc cherché eſt plus grand que 42°; car les limites ſont trop éloignées pour qu'on ſoit en droit d'en conclure une valeur plus exacte. Prenons donc ces autres limites plus rapprochées:

$$\begin{array}{lr|r} & s = 42° & s = 43° \\ & l.s = 1{,}6232493 & 1{,}6334685 \\ \text{Retranchez} & 1{,}7581226 & 1{,}7581226 \\ \hline & l.s = 9{,}8651267 & 9{,}8753459 \\ & \text{mais} & \text{mais} \\ & l.\ cof.\ s = 9{,}8710735 & 9{,}8641275 \\ \hline & +\ \ 59468 & -\ \ 112184 \\ & 112184 & \\ \hline & 171652 & \end{array}$$

$$171652 : 59468 :: 1° : 20'\ 47''.$$

Nous voilà donc arrivés à des limites très-rapprochées 42° 20′ & 42° 21′, entre leſquelles tombe la véritable valeur de s. Réduiſons ces angles en minutes :

	$s = 2140'$	$s = 2541'$
$ls =$	3,4048337	3,4050047
Retranchez	3,5362739	3,5362739
$ls =$	9,8685598	9,8687308
$l.cos.\, s =$	9,8687851	9,8686700
	+ 2253	− 608
	608	
	2861 : 2253 :: 1' : 47'' 14'''.	

De-là nous concluons que l'arc que nous cherchons, & qui eſt égal à ſon coſinus, ſera $= 42° \; 20' \; 47'' \; 14'''$; & ſon coſinus, ou la longueur même de l'arc, ſera $= 0{,}73908 47$. *C. Q. F. T.*

532. Le ſecteur de cercle ACB eſt diviſé par la corde AB en deux parties, ſavoir le ſegment AEB & le triangle ACB, dont le premier eſt moindre que le ſecond, lorſque Pl. XII. Fig. 112. l'angle ACB eſt petit; & plus grand au contraire, lorſque l'angle ACB devient très-obtus. Il y aura donc un cas où le ſecteur ACB ſera partagé par la corde en deux portions égales; c'eſt ce qu'il s'agit de trouver.

PROBLÊME II.

Trouver le ſecteur de cercle ACB *qui eſt partagé par la corde* AB *en deux parties égales, de manière que le triangle* ACB *ſoit égal au ſegment* ACB.

SOLUTION.

Le rayon AC étant $= 1$, ſoit l'arc demandé $AEB = 2s$; & conſéquemment ſa moitié $AE = BE = s$. Si on mène le rayon CE, on aura $AF = ſin.\, s$ & $CF = coſ.\, s$. Il ſuit de-là que le triangle $ACB = ſin.\, s . coſ.\, s = \frac{1}{2}\, ſin.\, 2s$; & que le ſecteur $ACB = s$; comme celui-ci doit être égal au double du triangle, on aura $s = ſin.\, 2s$. On doit donc chercher un arc qui ſoit égal au ſinus du double. D'abord l'angle ACB doit être

être plus grand qu'un angle droit ; & par conséquent s doit être plus grande que 45° degrés. Nous ferons donc les hypothèses suivantes :

	$s = 50°$	$s = 55°$	$s = 54°$
$ls =$	1,6989700	1,7403627	1,7323938
Retranchez	1,7581226	1,7581226	1,7581226
	9,9408474	9,9822401	9,9742712
$l\,fin.\,2s =$	9,9933515	9,9729858	9,9782063
	+ 525041	− 92543	+ 39351
	92543		
	617584		

$617584 : 525041 :: 5° : 4°\ 15'$

On aura donc à-peu-près $s = 54°\ 15'$; ajoutons aux hypothèses précédentes celle-ci, $s = 54°$, & nous conclurons des erreurs $s = 54°\ 17'\ 54''$, valeur qui ne diffère pas d'une minute entière de la véritable. Faisons donc les hypothèses suivantes, qui diffèrent entre elles seulement d'une minute :

	$s = 54°\ 17'$	$s = 54°\ 18'$	$s = 54°\ 19'$
	ou	ou	ou
	$s = 3257'$	$s = 3258'$	$s = 3259'$
	&	&	&
	$2s = 108°\ 34'$	$2s = 108°\ 36'$	$2s = 108°\ 38'$
$fuppl. =$	$71°\ 26'$	$fuppl. = 71°\ 24'$	$fuppl. = 71°\ 22'$
$ls =$	3,5128178	3,5129511	3,5130844
Retranchez	3,5362739	3,5362739	3,5362739
$ls =$	9,9765439	9,9766772	9,9768105
$l.\,fin.\,2s =$	9,9767872	9,9767022	9,9766171
	+ 2433	+ 250	− 1934
		1934	
		2184	

on fera donc $2184 : 250 :: 1' : 6''\ 52'''$.

On conclura de-là $s = 54° \; 18' \; 6'' \; 52'''$. Si nous voulions déterminer plus exactement cet angle, nous ſerions obligés d'employer des tables plus étendues. Nous ferions alors les hypothèſes ſuivantes, qui diffèrent de $10''$:

$s =$	$54° \; 18' \; 0''$	$s =$	$54° \; 18' \; 10''$
	ou		ou
$s =$	$195480''$	$s =$	$195490''$
$2s =$	$108° \; 36' \; 0''$	$2s =$	$108° \; 36' \; 20''$
ſuppl. $=$	$71° \; 24' \; 0''$	*ſuppl.* $=$	$71° \; 23' \; 40''$
$l.s =$	5,29110023304		5,29112245466
Retranchez	5,31442151332		5,31442151332
	9,97667719 72		9,9766994134
l.ſin. $2s =$	9,9767022291		9,9766880552
	$+$ 250319		$-$ 113582

250319
113582

$363901 : 250319 :: 10'' : 6'' \; 52''' \; 43'''' \; 33'''''$

On aura donc $s = 54° \; 18' \; 6'' \; 52''' \; 43'''' \; 33'''''$; par conſéquent
l'angle $ACB = 108° \; 36' \; 13'' \; 45''' \; 27'''' \; 6'''''$
ſon ſupplément $= 71° \; 23' \; 46'' \; 14''' \; 32'''' \; 54'''''$
Le logarithme du ſinus de cet angle, ou

l.ſin. $2s = 9{,}9766924791$

&

le ſinus même $= 0{,}9477470.$

On aura enſuite

ſin. $s = AF = BF = 0{,}8121029$

& le double ou

la corde $AB = 1{,}6242058.$

Et de plus on aura

coſinus $CF = 0{,}5335143.$

Ainſi on pourra conſtruire par approximation le ſecteur demandé. C. Q. F. T.

533. On peut déterminer d'une manière ſemblable le ſinus qui diviſe un quart de cercle en deux parties égales.

PROBLÈME III.

Mener dans un quart de cercle ACB *un ſinus* DE, *qui en diviſe l'aire en deux parties égales.* Pl. XII. Fig. 115.

SOLUTION.

Soit l'arc $AE = s$, BE ſera $= \frac{\pi}{2} - s$, à cauſe de $AEB = \frac{\pi}{2}$, & l'aire du quart de cercle $= \frac{1}{4}\pi$. Celle du ſecteur $ACE = \frac{1}{2}s$; ſi on en retranche le triangle $CDE = \frac{1}{2}\,\mathit{ſin.}\ s . \mathit{coſ.}\ s$, l'eſpace reſtant $ADE = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\,\mathit{ſin.}\ s . \mathit{coſ.}\ s$, dont le double doit valoir le quart de cercle. Ainſi on aura $\frac{1}{4}\pi = s - \frac{1}{2}\,\mathit{ſin.}\ 2s$. Donc $s - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\,\mathit{ſin.}\ 2s$. Soit l'arc $s - \frac{1}{4}\pi = s - 45^\circ = u$, on aura $2s = 90^\circ + 2u$; il faut donc que $u = \frac{1}{2}\mathit{coſ.}\ 2u$ & $2u = \mathit{coſ.}\ 2u$. Puiſqu'on doit avoir un arc qui ſoit égal à ſon coſinus, & que nous l'avons trouvé par le premier problême, nous aurons $2u = 42^\circ\ 20'\ 47''\ 14'''$, & $u = 21^\circ\ 10'\ 23''\ 37'''$. On aura donc l'arc $AE = s = 66^\circ\ 10'\ 23''\ 37'''$ & l'arc $BE = 23^\circ\ 49'\ 36''\ 23'''$. Il s'enſuit que la partie CD du rayon $= 0{,}4039718$, $AD = 0{,}5960281$ & le ſinus $DE = 0{,}9147711$. Le même moyen qui partage le quart de cercle en deux également, diviſera donc le cercle entier en huit parties égales. C. Q. F. T.

534. De même que toute droite menée par le centre d'un cercle le partage en deux également, on pourra auſſi mener d'un point quelconque de la circonférence des droites qui le diviſent en trois parties égales, ou même en un plus grand nombre. Cherchons à le diviſer en quatre.

PROBLÊME IV.

Pl. XII. Fig. 24. *Etant donné le demi-cercle* AEDB, *tirer du point* A *une corde* AD *qui divise en deux parties égales sa surface.*

SOLUTION.

Soit l'arc cherché $AD = s$; ayant mené le rayon CD, on aura l'aire du secteur $ACD = \frac{1}{2}s$; si on en retranche le triangle $ACD = \frac{1}{2}AC.DE = \frac{1}{2}\,fin.\ s$, il restera le segment $AD = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\,fin.\ s$, qui doit être égal au demi-cercle ADB, mais l'aire du demi-cercle $= \frac{1}{2}\pi$; donc $s - fin.\ s = \frac{1}{2}\pi = 90°$, & par conséquent $s - 90° = fin.\ s$. Faisons $s - 90° = u$, nous aurons $fin.\ s = cof.\ u$ & partant $u = cof.\ u$. On aura donc d'abord par le premier problême $u = 42° 20' 47'' 14'''$, & ensuite $s =$ à l'angle $ACD = 132° 20' 47'' 14'''$, & l'angle $BCD = 47° 39' 12'' 46'''$. La corde AD sera $= 1,8295422$. C. Q. F. T.

535. On peut donc séparer ainsi dans un cercle un segment, dont la surface soit le quart du cercle entier; or on sait que le segment égal à la moitié du cercle est le demi-cercle lui-même, & que sa corde est le diamètre. On peut trouver d'une manière semblable un segment qui soit le tiers du cercle entier. Ce sera l'objet du problême suivant.

PROBLÊME V.

Pl. XII. Fig. 115. *D'un point* A *de la circonférence tirer deux cordes* AB, AC, *qui divisent l'aire du cercle en trois parties égales.*

SOLUTION.

Soient le rayon du cercle $= 1$, la demi-circonférence $= \pi$, & l'arc AB ou $AC = s$; on aura l'aire du segment AEB ou $AFC = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\,fin.\ s$, mais celle du cercle $= \pi$; donc, à cause que l'aire du segment AEB doit être le tiers de celle du cercle, on aura $\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\textit{ſin.}\ s = \frac{\pi}{3} = 60°$, ou $s - \textit{ſin.}\ s = 120$; & par conſéquent $s - 120° = \textit{ſin.}\ s$. Soit $s - 120° = u$, on aura $u = \textit{ſin.}\ (u + 120) = \textit{ſin.}\ (60 - u)$. On doit donc chercher un arc u qui ſoit égal au ſinus de l'angle de $60° - u$; u ſera donc moindre que 60°. Pour trouver cet arc, nous ferons les ſuppoſitions ſuivantes :

	$u = 20°$	$u = 30°$	$u = 40°$
	$60 - u = 40°$	$60 - u = 30°$	$60 - u = 20°$
	$l.u = 1{,}3010300$	$1{,}4771213$	$1{,}6020600$
Retranchez	$1{,}7581226$	$1{,}7581226$	$1{,}7581226$
	$l\,u = 9{,}5429074$	$9{,}7189987$	$9{,}8439374$
	$l.\textit{ſin.}\,(60 - u) = 9{,}8080675$	$9{,}6989700$	$9{,}5340517$
	$+\ 2651601$	$-\ 200287$	$-\ 3098857$

On voit donc par-là que l'angle u doit être un peu plus petit que 30°; & par un calcul que j'ai ſupprimé, il doit être plus grand que 29°. Ainſi ſoit $u = 29°$:

$$60 - u = 31°$$
$$l.u = 1{,}4623980$$
Retranchez $1{,}7581226$
$$l\,u = 9{,}7042754$$
$$l.\textit{ſin.}\,(60 - u) = 9{,}7118393$$
$$+\ 75639$$
$$-\ 200287$$
$$275926 : 75639 :: 1° : 16'\ 26''$$

L'angle u ſeroit donc $= 29°\ 16'\ 26''$. Pour en avoir une valeur plus exacte, faisons ces deux autres hypothèses qui ne diffèrent que d'une minute :

	$u = 29^\circ\, 16'$	$u = 29^\circ\, 17'$
	ou	ou
	$u = 1756'$	$= 1757''$
	$60 - u = 30^\circ\, 44'$	$60 - u = 30^\circ\, 43'$
	$l.u = 3{,}2445245$	$3{,}2447718$
Retranchez	$3{,}5362739$	$3{,}5362739$
	$l\,u = 9{,}7082506$	$9{,}7084979$
	$l.\mathit{sin}.(60 - u) = 9{,}7084575$	$9{,}7082450$
	$+ \quad 2069$	$- \quad 2529$

$$2529$$

$$4598 : 2069 :: 1' : 27''\, 0'''.$$

On aura donc la vraie valeur de $u = 29^\circ\, 16'\, 27''\, 0'''$;

$$\text{l'arc } s = AEB = 149^\circ\, 16'\, 27''\, 0''' = AFC;$$

d'où résultent

$$\text{l'arc } BC = 61^\circ\, 27'\, 6''\, 0''$$

&

$$\text{la corde } AB = AC = 19285340. \text{ C. Q. F. T.}$$

536. Après avoir résolu ces problêmes, où il s'agit de trouver un arc quelconque égal à son sinus ou à son cosinus, nous ajouterons le suivant, dont l'objet à la vérité est le même, mais qui pourtant présente plus de difficulté.

PROBLÈME VI.

Couper dans le demi-cercle AEB *l'arc* AE, *de manière qu'en abaiſſant ſon ſinus* ED, *l'arc* AE *ſoit égal à la ſomme des droites* AD + DE. Pl. XII. Fig. 116.

SOLUTION.

Comme on voit tout de ſuite que cet arc doit être plus grand qu'un quart de cercle, cherchons ſon ſupplément BE, & faiſons l'arc $BE = s$, de ſorte que l'arc $AE = 180^\circ - s$. A cauſe de $AC = 1$, de $CD = \cos. s$, de $DE = \sin. s$, on aura $180^\circ - s = 1 + \cos. s + \sin. s$. Mais $\sin. s = 2 . \sin. \frac{1}{2} s . \cos. \frac{1}{2} s$ & $1 + \cos. s = 2 \cos. \frac{1}{2} s \cos. \frac{1}{2} s$; d'où $180^\circ - s = 2 \cos. \frac{1}{2} s \left(\sin. \frac{1}{2} s + \cos. \frac{1}{2} s \right)$. Or $\cos. \left(45^\circ - \frac{1}{2} s \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} . \cos. \frac{1}{2} s + \frac{1}{\sqrt{2}} . \sin. \frac{1}{2} s$; donc $\sin. \frac{1}{2} s + \cos. \frac{1}{2} s = \sqrt{2} . \cos. \left(45^\circ - \frac{1}{2} s \right)$; & par conſéquent $180^\circ - s = 2\sqrt{2} \cos. \frac{1}{2} s . \cos. \left(45^\circ - \frac{1}{2} s \right)$. Cette réduction étant faite, prenons les hypothèſes ſuivantes :

$\frac{1}{2} s =$	20°	$\frac{1}{2} s = 21^\circ$
$45^\circ - \frac{1}{2} s =$	25°	$45^\circ - \frac{1}{2} s = 24^\circ$
$180 - s =$	140°	$180 - s = 138^\circ$
$l(180 - s) =$	2,1461280	2,1398791
Retranchez	1,7581226	1,7581226
$l(180 - s) =$	0,3880054	0,3817565
$l. \cos. \frac{1}{2} s =$	9,9729858	9,9701517
$l. \cos. (45^\circ - \frac{1}{2}) s =$	9,9572757	9,9607302
$l\, 2 \sqrt{2} =$	0,4515450	0,4515450
	0,3818065	0,3824269
Erreur	+ 61989	− 6704
	6704	

$68693 : 61989 :: 1^\circ : 54'$

Ainſi la valeur de $\frac{1}{2} s$ eſt compriſe entre les limites $20^\circ\, 54'$ & $20^\circ\, 55'$. Faiſons en conſéquence les ſuppoſitions ſuivantes :

$\frac{1}{2}s =$	$20^\circ\ 54'$	$\frac{1}{2}s = 20^\circ\ 55'$
$45^\circ - \frac{1}{2}s =$	$24^\circ\ 6'$	$45^\circ - \frac{1}{2}s = 24^\circ\ 5'$
$s =$	$41^\circ\ 48'$	$s = 41^\circ\ 50'$
$180^\circ - s =$	$138^\circ\ 12'$	$180 - s = 138^\circ\ 10'$
ou		ou
$180^\circ - s =$	$8292'$	$180 - s = 8290'$
$l(180^\circ - s) =$	3,9186593	3,9185545
Retranchez	3,5362739	3,5362739
	0,3823854	0,3822806
$l.cos.\frac{1}{2}s =$	9,9704419	9,9703937
$l(45^\circ - \frac{1}{2}s) =$	9,9603919	9,9604484
$l\,2\sqrt{2} =$	0,4515450	0,4515450
	0,3823788	0,3823871
	+ 66	— 1065
	1065	

$$1131 : 66 :: 1' : 3''\ 30'''.$$

On aura donc $\frac{1}{2}s = 20^\circ\ 54'\ 3''\ 30'''$

&

$$s = 41^\circ\ 48'\ 7''\ 0''' = BE;$$

& par conféquent l'arc cherché

$$AE = 138^\circ\ 11'\ 53''\ 0'''.$$

Mais on aura les lignes

$DE = 0,\ 6665578$ & $AD = 1,7454535$. C. Q F. T.

§ 37. Comparons maintenant les arcs avec leurs tangentes; &,

&, comme les premiers sont plus petits que les secondes dans le premier quart de cercle, cherchons un arc qui soit la moitié de sa tangente. On l'aura par le problême suivant.

PROBLÊME VII.

Trouver un secteur A C D, *qui soit la moitié du triangle* A C E *formé par le rayon* A C, *la tangente* A E *& la sécante* C E. Pl. XII. Fig. 117.

Solution.

L'arc AD étant $= s$, le secteur ACD sera $= \frac{1}{2} s$, & le triangle $ACE = \frac{1}{2}$ *tang.* s; d'où il suit que $\frac{1}{2}$ *tang.* $s = s$ ou $2s =$ *tang.* s. Faisons donc les hypothêses qu'on voit ici :

	$s = 60°$	$s = 70°$	$s = 66°$	$s = 67°$
$l. 2s =$	2,0791812	2,1461280	2,1205739	2,1271048
	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
$l. 2s =$	0,3210586	0,3880054	0,3624513	0,3689822
$l. tang. s =$	0,2385606	0,4389341	0,3514169	0,3721481
	+ 824980	— 509287	+ 110344	— 31659

De-là on conclut ces limites plus approchées de s, $66° 46'$ & $66° 47'$; en conséquence faisons :

	$s = 66° 46'$	$s = 66° 47'$
	ou	ou
$s =$	$4006'$	$4007'$
$2s =$	$8012'$	$8014'$
$l. 2s =$	3,9037409	3,9038493
	3,5362739	3,5362739
$l. 2s =$	0,3674670	0,3675754
$l. tang. s =$	0,3672499	0,3675985
Erreur	+ 2171	— 231
	231	

$2402 : 2171 :: 1' : 54'' 14'''$.

Donc

l'arc $s = AD = 66° 46' 54'' 14'''$;

&

la tangente $AE = 2{,}3311220$. C. Q. F. T.

538. Proposons-nous la question suivante.

PROBLÈME VIII.

Etant donné un quart de cercle ACB, *trouver l'arc* AE *égal à sa corde* AE *prolongée jusqu'au point* F.

SOLUTION.

Pl. XIII. Fig. 118. Soit l'arc $AE = s$, sa corde AE sera $= 2 . \sin. \frac{1}{2} s$, le sinus verse $AD = 1 - \cos. s = 2 . \sin. \frac{1}{2} s . \sin \frac{1}{2} s$. Les triangles semblables ADE, ACF donneront $2 \sin. \frac{1}{2} s . \sin. \frac{1}{2} s : 2 \sin. \frac{1}{2} s :: 1 : s$. On aura par conséquent $s \sin. \frac{1}{2} s = 1$. Soient donc les suppositions suivantes:

	$s = 70°$	$s = 80°$	$s = 84°$	$s = 85°$
$l s =$	1,8450980	1,9030900	1,9242793	1,9294189
Retranchez	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
	0,0869754	0,1449674	0,1661567	0,1712963
$l. \sin. \frac{1}{2} s =$	9,7585913	9,8080675	9,8255109	9,8296833
	9,8455667	9,9530349	9,9916676	0,0009796
Erreur	+ 0,1544332	+ 0,0469650	+ 83223	— 9796

D'où l'on conclut que s tombe entre les limites 84° 53′ & 84° 54′. Soit donc

	$s = 84° 53'$	$s = 84° 54'$
	ou	ou
	$s = 5093'$	$s = 5094'$
	$\frac{1}{2} s = 42° 26\frac{1}{2}'$	$\frac{1}{2} s = 42° 27'$
	$l s = 3,7069737$	3,7070589
Retranchez	3,5362739	3,5362739
	0,1706998	0,1707850
$l. \sin. \frac{1}{2} s =$	9,8292003	9,8292694
	0,9999001	0,0000544
Erreur	+ 998	— 544

d'où il suit que

l'arc $s = AE = 84° 53' 38'' 51'''$

&

l'arc $BE = 50° 6' 21'' 9'''$. C. Q. F. T.

539. Quoique tous les arcs du premier quart de cercle ſoient plus petits que leurs tangentes, il y en a cependant dans les quarts ſuivans qui leur ſont égaux, & qu'il s'agit de trouver dans le problême qui ſuit par une méthode tirée des ſéries.

PROBLÊME IX.

Trouver tous les arcs qui ſont égaux à leurs tangentes.

SOLUTION.

Le premier arc qui ait cette propriété eſt infiniment petit. Il n'y en a point dans le ſecond quart, parce que les tangentes y ſont négatives; mais il y en aura un dans le troiſième, qui ſera un peu plus petit que 270°. Il s'en trouvera ainſi de ſuite dans les cinquième, ſeptième, &c. Soit le quart de la circonférence $= q$, & ſuppoſons les arcs en queſtion renfermés dans cette formule $(2n+1)q - s$, de manière que $(2n+1)q - s = cot.\ s = \frac{1}{tang.\ s}$. Soit $tang.\ s = x$, on aura $s = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 +$ &c.; & par conſéquent $(2n+1)q = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 +$ &c. Or, comme l'arc s eſt d'autant plus petit que n eſt un nombre plus grand, il eſt clair que x ſera une quantité très-petite, & qu'on aura à-peu-près $x = \frac{1}{(2n+1)q}$, ou $\frac{1}{x} = (2n+1)q$; on approche davantage en faiſant $\frac{1}{x} = (2n+1)q - s = (2n+1)q - \frac{1}{(2n+1)q} - \frac{2}{3(2n+1)^3q^3} - \frac{13}{15(2n+1)^5q^5} - \frac{146}{105(2n+1)^7q^7} - \frac{2343}{945(2n+1)^9q^9} -$ &c.; &, comme $q = \frac{1}{2}\pi = 1,5707963267948$, on aura l'arc cherché $= (2n+1)\,1,57079632679 - \frac{1}{2n+1}\,0,63661977 - \frac{0,17200817}{(2n+1)^3} - \frac{0,09062596}{(2n+1)^5} - \frac{0,05892834}{(2n+1)^7} - \frac{0,04258543}{(2n+1)^9} -$ &c.; ou, ſi on ramène les termes qui ſont exprimés en parties du rayon à la meſure ordinaire des arcs, on aura l'arc cherché, conſidéré en général, $= (2n+1)90°$

$- \frac{131313''}{2n+1} - \frac{35479''}{(2n+1)^3} - \frac{18692''}{(2n+1)^5} - \frac{12155''}{(2n+1)^7} - \frac{8784''}{(2n+1)^9}$. Voici donc par ordre les arcs qui ſatisfont à la queſtion.

I.	1. 90° —	90°			
I I.	3. 90° —	12°	32′	48″	
I I I.	5. 90° —	7	22	32	
I V.	7. 90° —	5	14	22	
V.	9. 90° —	4	3	59	
V I.	11. 90° —	3	19	24	
V I I.	13. 90° —	2	48	37	
V I I I.	15. 90° —	2	26	5	
I X.	17. 90° —	2	8	51	
X.	19. 90° —	1	55	16.	

540. Je ne propoſe pas un plus grand nombre de queſtions de ce genre, parce qu'on voit clairement, par les exemples qui précèdent, la méthode de les réſoudre. Au reſte, ces problêmes ont été imaginés principalement pour faire connoître plus intimement la nature du cercle, dont la quadrature a échappé juſqu'à préſent à toutes les méthodes connues. Car, s'il étoit arrivé que dans la ſolution d'un problême on eût trouvé ou qu'un arc commenſurable avec toute la circonférence, ou que ſon ſinus ou ſa tangente euſſent pu être conſtruits par le moyen du rayon, on auroit obtenu une certaine eſpèce de quadrature. Par exemple, ſi dans la réſolution du problême V I le ſinus DE, qui ſe trouve $= 0{,}6665578$, ſe fût trouvé
Pl. XII. Fig. 116. $= 0{,}6666666 = \frac{2}{3}$, on eût découvert une belle propriété du cercle; car on auroit pu conſtruire un arc AE égal à la ligne droite $AD + DE = 1 + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{5}{9}}$. Au reſte, il n'exiſte encore aucune preuve que cette quadrature du cercle ſoit impoſſible; &, ſi elle eſt poſſible, aucune voie ne paroît plus propre à la faire trouver, que celle que nous venons d'ouvrir dans ce chapitre.

FIN DU LIVRE SECOND.

TRAITÉ ABRÉGÉ DES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

Des Surfaces des Corps en général.

1. Ce que nous avons exposé dans la section précédente sur les lignes courbes & sur la manière de les représenter par des équations, a, sans contredit, un usage très-étendu, & s'applique en général à toutes les courbes dont tous les points sont situés dans un même plan. Mais, si la ligne entière n'est pas dans un même plan, alors les préceptes que nous avons donnés ci-dessus sont insuffisans pour en développer les propriétés. Les lignes de cette espèce présentent une double courbure; aussi sont-elles nommées courbes à double courbure; & c'est sous ce même nom que CLAIRAULT nous en a laissé un excellent Traité digne de sa sagacité. Au reste, comme ce sujet a beaucoup de rapport avec la nature des surfaces, dont je dois m'occuper dans cette section, je ne le traiterai point à part, & je me contenterai d'en joindre l'explication avec la théorie des surfaces, que je vais détailler.

2. De même que les lignes sont ou droites ou courbes, les surfaces sont aussi ou planes ou non planes. J'appelle non planes, celles qui sont ou convexes, ou concaves, ou qui participent de ces deux propriétés. Ainsi la surface extérieure d'une sphère, d'un cylindre & d'un cône, à l'exception des bases, est convexe, & la surface intérieure d'une coupe est concave. On sait qu'une ligne est droite, lorsque tous ses

points pris trois à trois sont dans une même direction ; semblablement, une surface est plane, lorsque tous ses points pris quatre à quatre sont situés dans un même plan ; d'où il suit qu'une surface non plane, c'est-à-dire, ou convexe ou concave, est celle dont tous les points pris quatre à quatre ne sont pas situés dans un même plan.

3. On concevra donc très-facilement ce qu'est une surface non plane, si on sait combien elle diffère par-tout d'une surface plane ; c'est-à-dire, que de la même manière que nous avons déterminé la nature des lignes courbes par la distance de chacun de ses points à une ligne droite prise pour axe, il conviendra de même de déterminer la nature des surfaces par la distance de chacun de ses points à une surface plane prise à volonté. Etant donc proposée une surface quelconque, dont il s'agit de faire connoître la nature, il faudra choisir arbitrairement une surface plane sur laquelle on concevra abaissées des perpendiculaires de chacun des points de la surface proposée. Cela fait, si l'on peut déterminer, par le moyen d'une équation, la longueur de chacune de ces perpendiculaires, cette équation même sera censée exprimer la nature de cette surface. Car on pourra réciproquement, au moyen de cette équation, assigner tous les points de la surface; & par conséquent celle-ci se trouvera par-là déterminée.

4. Supposons que le plan de la planche représente cette surface plane, à laquelle nous rapporterons tous les points de la surface que nous considérons. Soit M un point quelconque de cette surface situé hors du plan de la planche, & d'où on aura abaissé la perpendiculaire MQ, qui rencontre le plan en Q. Ensuite, pour exprimer par le calcul la situation de ce point Q, on prendra sur le plan de la planche une droite quelconque AB pour axe, à laquelle on mènera du point Q la perpendiculaire QP. Enfin on prendra sur l'axe AB un point quelconque A pour l'origine des abscisses; cela fait, la situation du point M sera connue, si on connoît les longueurs de ces trois lignes AP, PQ & QM. Ainsi on déterminera, à l'aide de trois coordonnées perpendiculaires entre elles, la situation de chaque point M de la surface, de la même ma-

Pl. XIII. Fig. 119.

nière qu'on a coutume de repréſenter tous les points des lignes courbes ſituées dans un même plan, par le moyen de deux coordonnées perpendiculaires entre elles.

5. Puiſque nous avons trois coordonnées AP, PQ & QM, nous ferons $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; & nous connoîtrons la nature de la ſurface propoſée, ſi, après avoir pris à volonté deux de ces lignes x & y, nous ſavons ce que doit être la troiſième z; car nous pourrons déterminer de cette manière tous les points M de la ſurface. La nature d'une ſurface eſt donc donnée par une équation qui exprime la valeur de z par le moyen des deux autres quantités x & y & de conſtantes. Ainſi, pour chaque ſurface propoſée, la variable z ſera égale à une fonction quelconque des deux variables x & y; & réciproquement, ſi z eſt égal à une fonction quelconque de x & de y, cette équation repréſentera une ſurface quelconque dont elle fera connoître en même temps la nature; car en ſubſtituant pour x & pour y toutes les valeurs tant poſitives que négatives dont ils ſont ſuſceptibles, on aura tous les points Q du plan qu'on aura choiſi; & enſuite la valeur de z en x & en y fera connoître pour chaque point la longueur de la perpendiculaire $QM = z$ depuis le plan juſqu'à la ſurface. Si la valeur de z eſt poſitive, le point M de la ſurface ſera ſitué au-deſſus du plan APQ; mais ſi elle eſt négative, il tombera au-deſſous, & le point M de la ſurface ſera ſur le plan même, ſi cette valeur devient nulle; ſi elle étoit imaginaire, ce ſeroit une preuve qu'aucun point M de la ſurface ne répondroit au point Q; & s'il arrive que z obtienne pluſieurs valeurs réelles, alors la droite perpendiculaire au plan, qui paſſe par le point Q, rencontrera la ſurface en pluſieurs points M.

6. Quant à la diſtinction des différentes ſurfaces, celle qui ſe préſente naturellement eſt la diſtinction en continues ou régulières, & en diſcontinues ou irrégulières. La ſurface continue ſera celle dont tous les points ſont déterminés par une même équation entre z, x & y, ou pour chaque point de laquelle z eſt une même fonction de x & de y. La ſurface irrégulière eſt celle dont différentes parties ſont repréſentées par diverſes fonctions; comme ſi, par exemple, on propoſoit une

ſurface qui fût ſphérique dans un endroit, & qui dans un autre fût conique, ou cylindrique, ou plane. Nous excluons ici abſolument les ſurfaces irrégulières; & nous ne conſidérons que les régulières, dont la nature eſt exprimée conſtamment par la même équation. Car, après avoir traité celles-ci, il ſera facile de porter un jugement ſur celles qui ſont irrégulières, puiſque ces dernières ſont compoſées de parties de différentes ſurfaces régulières.

7. La première diviſion des ſurfaces régulières eſt en algébriques & en tranſcendantes. Or on appelle ſurface algébrique, celle dont la nature eſt exprimée par une équation algébrique entre les coordonnées x, y & z; ou pour laquelle z eſt égal à une fonction algébrique de x & de y. Au contraire, ſi z n'eſt pas une fonction algébrique de x & de y, ou s'il entre dans l'équation entre x, y & z, des quantités tranſcendantes, comme des quantités qui dépendent des logarithmes & des arcs de cercle; alors la ſurface dont la nature eſt exprimée par une telle équation, ſera tranſcendante. Telles ſeront les ſurfaces exprimées par les équations $z = x.l.y$; $z = y^x$; $z = y.\mathit{ſin}.x$. Au reſte, on conçoit facilement qu'il faut traiter les ſurfaces algébriques avant de paſſer aux tranſcendantes.

8. Enſuite, pour connoître la nature de la ſurface, il faudra ſur-tout faire attention à la qualité de la fonction z, de x & de y, eu égard au nombre de valeurs qu'elle renferme. Ici ſe préſentent donc d'abord les ſurfaces pour leſquelles z eſt égal à une fonction uniforme de x & de y. Soit P une telle fonction ou une fonction rationnelle de x & de y; ſi on a l'équation $z = P$, il y aura un point unique de la ſurface qui répondra à chaque point du plan Q; ou, ce qui revient au même, toute droite perpendiculaire au plan APQ rencontrera la ſurface en un ſeul point. Dans ce cas, aucune valeur de la droite QM ne pourra devenir imaginaire; mais toutes ces droites indiqueront des points réels de la ſurface. Cependant cette diverſité de fonctions n'établit pas une variété eſſentielle entre les ſurfaces; car elle dépend de la poſition du plan APQ, qui, comme celle de l'axe, eſt arbitraire; de ſorte que, ſi la même ſurface eſt rapportée à un autre plan,

la

la fonction z qui étoit uniforme peut devenir multiforme.

9. Soient P & Q des fonctions uniformes quelconques de x & de y, & l'équation $zz - Pz + Q = 0$; les perpendiculaires élevées à chaque point Q du plan couperont la surface en deux points, ou ne la rencontreront nulle part; car z aura deux valeurs qui seront toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires. Semblablement, si P, Q & R désignant des fonctions uniformes de x & de y, on a $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$; alors z sera une fonction triforme, & chaque droite QM coupera la surface, ou en trois points, si toutes les racines de l'équation sont réelles, ou seulement en un seul, s'il arrive que deux racines soient imaginaires. On fera un raisonnement semblable, si z est déterminé par une équation dans laquelle il ait un plus grand nombre de dimensions. On connoîtra facilement de quel degré est la fonction multiforme z, si on rend rationnelle l'équation donnée entre x, y & z.

10. Du reste, il en est des trois coordonnées x, y & z dans une équation quelconque qui exprime une surface, comme des deux coordonnées qui entrent dans les équations aux lignes courbes; l'une quelconque peut être changée en l'autre, & réciproquement. Car d'abord, si on prend pour axe, dans le plan APQ, une autre droite Ap perpendiculaire à AP, on aura alors $Ap = y$ & $pQ = x$; & ainsi les deux variables x & y auront été changées l'une en l'autre. On aura une idée de toutes les autres permutations en achevant le parallélipipède rectangle $ApQM\xi\pi qPA$. On aura trois plans fixes perpendiculaires entre eux à considérer, savoir $APQp$, $APq\pi$ & $Ap\xi\pi$. La même équation entre x, y & z, fait voir comment se rapporte à chacun d'eux la surface proposée, à laquelle appartient le point M. Il est aisé de voir qu'il y a dans chaque plan deux axes qui ont l'un & l'autre leur origine au point A; ce qui donne six relations différentes entre les trois coordonnées.

Les coordonnées seront :

$$\text{ou} \begin{cases} AP = x \\ PQ = y \\ QM = z \end{cases}$$

Pour le plan $APQp$

$$\text{ou} \begin{cases} Ap = y \\ pQ = x \\ QM = z \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} AP = x \\ Pq = z \\ qM = y \end{cases}$$

Pour le plan $APq\pi$

$$\text{ou} \begin{cases} A\pi = z \\ \pi q = x \\ qM = y \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} Ap = y \\ p\xi = z \\ \xi M = x \end{cases}$$

Pour le plan $Ap\xi\pi$

$$\text{ou} \begin{cases} A\pi = z \\ \pi\xi = y \\ \xi M = x \end{cases}$$

Si on mène du point fixe A au point M de la surface la droite AM, elle sera $= \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$.

11. La même équation entre les coordonnées x, y & z, est donc propre à faire connoître la nature de la surface à l'égard des trois plans qui sont perpendiculaires entre eux, & qui se coupent réciproquement au point A. En effet, de

même que la variable z représente la distance de chaque point de la surface au plan APQ; de même la variable y représente la distance du même point M au plan APq, & la variable x celle au plan $Ap\xi$. Mais, si nous connoissons les distances du point M à chacun de ces trois plans, il est bien clair que nous aurons sa véritable situation. On doit donc distinguer particulièrement ces trois plans, auxquels se rapporte chaque surface exprimée par une équation donnée entre les trois variables x, y & z. Si l'un d'eux, par exemple, APQ est horizontal, les deux autres seront verticaux; l'un sera appliqué sur l'horizontal suivant la droite AP, & l'autre suivant la droite Ap.

12. Ayant donc fixé la position de ces trois plans perpendiculaires entre eux, auxquels on rapporte la surface proposée, on mènera de chacun de ses points M aux plans APQ, APq & $A\pi\xi$, les perpendiculaires MQ, Mq & $M\xi$, lesquelles seront $MQ = z$, $Mq = y$ & $M\xi = x$. Si ensuite on achève le parallélipipède, on aura trois droites égales à celles-ci, lesquelles partent du point fixe A; savoir $AP = x$, $Ap = y$ & $A\pi = z$, & dont la connoissance détermine la position du point M. Au reste, il est évident que si ces variables x, y & z, lorsqu'elles tombent du côté indiqué par la figure, sont regardées comme positives, leurs valeurs seront censées négatives, lorsqu'elles seront dirigées en sens contraires.

13. Si dans l'équation entre les trois variables x, y & z, celle qui est perpendiculaire au plan APQ, c'est-à-dire z, a par-tout des dimensions paires, elle aura alors deux valeurs égales, l'une positive, l'autre négative. Les portions de la surface situées de chaque côté du plan APQ seront donc semblables & égales; & par conséquent le corps qui est terminé par cette surface, sera divisé en deux parties semblables & égales par la section faite suivant le plan APQ. Ainsi, comme nous avons appelé diamètre dans les figures planes toute ligne droite qui partageoit la figure en deux parties semblables & égales, nous appellerons de même plan *diamétral* dans les solides, celui qui divise un corps en deux parties sem-

blables. Donc, si toutes les dimensions de la variable z sont paires, le plan APQ sera un plan diamétral.

14. On conçoit de même que si dans l'équation à la surface la variable y, qui est perpendiculaire au plan APq, a par-tout des dimensions paires, le plan APq sera aussi diamétral; & si la variable x ne renferme aussi que des dimensions paires, alors le plan $Ap\xi$ sera diamétral. On peut donc juger tout de suite par l'équation donnée entre les trois variables x, y & z, si l'un des trois plans APQ, APq, $Ap\xi$, est diamétral ou non. Or il peut arriver que deux, ou même tous les trois, le soient à la fois. Par exemple, on a pour la sphère, dont le centre est en A, à cause du rayon $AM = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)} = a$, l'équation $x^2+y^2+z^2 = aa$; d'où il suit que chacun de ces trois plans partagera la sphère en deux parties semblables & égales.

Pl. XIII. Fig. 120. 15. Pour connoître la figure de la surface que renferme l'équation proposée, il faut sur-tout faire attention aux trois plans perpendiculaires entre eux, qui sont représentés dans la figure par $QQ^1Q^2Q^3$, $TT^1T^2T^3$ & $VV^1V^2V^3$, & qui s'entrecoupent mutuellement au point A. Ces trois plans, si on les conçoit prolongés à l'infini dans tous les sens, diviseront l'espace entier en huit régions, qui sont représentées dans la figure par les lettres AX, AX^1, AX^2, AX^3, AX^4, AX^5, AX^6 & AX^7. Si les variables x, y & z, sont supposées avoir des valeurs positives dans la première région AX, il y en aura une, ou deux, ou même trois, qui seront négatives dans les autres régions. C'est ce qu'on verra clairement, ayant sous les yeux le tableau suivant :

Région AX	*Région* AX^1	*Région* AX^2	*Région* AX^3
$AP = +x$	$AP^1 = -x$	$AP = +x$	$AP^1 = -x$
$AR = +y$	$AR = +y$	$AR = +y$	$AR = +y$
$AS = +z$	$AS = +z$	$AS^1 = -z$	$AS^1 = -z$

Région AX^4	Région AX^5	Région AX^6	Région AX^7
$AP = + x$	$AP^1 = - x$	$AP = + x$	$AP^1 = - x$
$AR^1 = - y$	$AR^1 = - y$	$AR^1 = - y$	$AR^1 = - y$
$AS = + z$	$AS = + z$	$AS^1 = - z$	$AS^1 = - z$

16. Il nous ſera plus commode de diſtinguer par des nombres ces huit régions, afin que nous puiſſions indiquer plus facilement celle dont nous voudrons parler. Comme ces huit régions ſont contiguës au point A, qu'elles ſont formées par l'interſection de trois plans perpendiculaires entre eux, & que d'ailleurs ces plans ſont déterminés par les trois droites Pp, Qq, Rr, qui ſe coupent perpendiculairement au point A; ces régions pourront être déſignées par ces trois lettres P, Q, R, majuſcules ou minuſcules. Ainſi la région principale ou la première ſera l'eſpace PQR que renferme le parallélipipède formé avec les trois droites AP, AQ, AR, prolongées à l'infini, & la région Pqr ſera l'eſpace que renferme le parallélipipède formé par les trois droites AP, Aq, Ar, prolongées à l'infini. Ayant donc fait les trois variables $AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$, on aura $Ap = - x$, $Aq = - y$ & $Ar = - z$. Nous diſtinguerons en conſéquence par des nombres les huit régions dont il s'agit, de la manière ſuivante : Pl. XIII. Fig. 121.

	première I.	ſeconde II.
	PQR	PQr
entre les coordonnées	$\begin{cases} AP = + x \\ AQ = + y \\ AR = + z \end{cases}$	$\left. \begin{matrix} AP = + x \\ AQ = + y \\ Ar = - z \end{matrix} \right\}$
	troiſième III.	quatrième IV.
	PqR	pQR
entre les coordonnées	$\begin{cases} AP = + x \\ Aq = - y \\ AR = + z \end{cases}$	$\left. \begin{matrix} Ap = - x \\ AQ = + y \\ AR = + z \end{matrix} \right\}$

	cinquième V.	sixième VI.
	Pqr	pQr
entre les coordonnées	$\left\{\begin{array}{l} AP = +x \\ Aq = -y \\ Ar = -z \end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l} Ap = -x \\ AQ = +y \\ Ar = -z \end{array}\right\}$

	septième VII.	huitième VII.
	pqR	pqr
entre les coordonnées	$\left\{\begin{array}{l} Ap = -x \\ Aq = -y \\ AR = +z \end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l} Ap = -x \\ Aq = -y \\ Ar = -z \end{array}\right\}$

17. Ces régions diffèrent plus ou moins entre elles. Il y en a deux qui ont deux coordonnées communes, & une qui ne l'eſt pas; elles ſe touchent par conſéquent par un plan; nous les appellerons *conjointes*. Enſuite, ſi les régions ont deux coordonnées différentes, & une ſeule commune, elles ſe toucheront ſeulement par une ligne droite; nous les nommerons *disjointes*. En troiſième lieu, ſi toutes les coordonnées ont des ſignes différens, les régions ne ſe toucheront qu'en un ſeul point A; & nous appellerons celles-ci *oppoſées*. La table ſuivante fera connoître quelles ſont les régions qui, à l'égard de l'une d'elles, ſont conjointes, ou disjointes, ou oppoſées.

Région.	*Conjointes.*			*Disjointes.*			*Opposées.*
PQR I	*PQr* II	*PqR* III	*pQR* IV	*Pqr* V	*pQr* VI	*pqR* VII	*pqr* VIII
PQr II	*PQR* I	*Pqr* V	*pQr* VI	*PqR* III	*pQR* IV	*pqr* VIII	*pqR* VII
PqR III	*Pqr* V	*PQR* I	*pqR* VII	*PQr* II	*pqR* VIII	*pQR* IV	*pQr* VI
pQR IV	*pQr* VI	*pqR* VII	*PQR* I	*pqr* VIII	*PQr* II	*PqR* III	*Pqr* V
Pqr V	*PqR* III	*PQr* II	*pqr* VIII	*PQR* I	*pqR* VII	*pQr* VI	*pQR* IV
pQr VI	*pQR* IV	*pqr* VIII	*PQr* II	*pqR* VII	*PQR* I	*Pqr* V	*PqR* III
pqR VII	*pqr* VIII	*pQR* IV	*PqR* III	*pQr* VI	*Pqr* V	*PQR* I	*PQr* II
pqr VIII	*pqR* VII	*pQr* VI	*Pqr* V	*pQR* IV	*PqR* III	*PQr* II	*PQR* I.

Il paroît donc qu'à l'égard d'une région quelconque il y en a trois autres qui ſont conjointes, autant qui ſont disjointes, & une ſeule qui lui eſt oppoſée. La table précédente fait voir ſur-le-champ ce qu'une région eſt à l'égard d'une autre à laquelle on veut la comparer. Au reſte, l'ordre obſervé dans les nombres qui indiquent les régions, eſt digne d'attention. Pour le faire mieux appercevoir, j'ai renfermé les mêmes nombres dans l'eſpèce de quarré qu'on voit ici.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	5	6	3	4	8	7
3	5	1	7	2	8	4	6
4	6	7	1	8	2	3	5
5	3	2	8	1	7	6	4
6	4	8	2	7	1	5	3
7	8	4	3	6	5	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

On verra avec une légère attention la nature & les propriétés de cette table; & ce qui suit ne laissera rien à desirer sur l'usage qu'on en peut faire.

19. Nous avons déjà remarqué que, si dans l'équation la variable z avoit par-tout des dimensions paires, la surface étoit composée de deux parties semblables & égales. En effet la partie située dans la première région sera égale à la partie située dans la seconde; la même égalité aura semblablement lieu pour la troisième & cinquième région, pour la quatrième & la sixième, & enfin pour la septième & la huitième; comme on en peut juger par les deux séries qui commencent par 1 & par 2. Si la variable y a par-tout dans l'équation des dimensions paires, la première région sera égale à la troisième, la seconde à

à la cinquième, la quatrième à la ſeptième, & la ſixième à la huitième; mais, ſi x a dans tous les termes de l'équation des dimenſions paires, la première région ſera la même que la quatrième; la ſeconde la même que la ſixième; la troiſième que la ſeptième, & la cinquième que la huitième. Ainſi,

Si dans l'équation on a par-tout des dimenſions paires pour la variable,

z	y	z
les régions égales feront	les régions égales feront	les régions égales feront
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7	3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6	4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5

20. Pour que les parties de la ſurface qui ſont ſituées dans les régions disjointes, la première & la cinquième, ſoient égales entre elles, il faut que l'équation reſte la même, quoique les deux variables y & z ſoient priſes négativement. Cela aura donc lieu, ſi les deux variables y & z priſes enſemble forment dans chaque terme de l'équation ou des dimenſions paires, ou des dimenſions impaires. Mais ſi la première région eſt la même que la cinquième, la ſeconde ſera auſſi égale à la troiſième, la quatrième à la huitième, & la ſixième à la ſeptième. Pareillement, ſi dans l'équation de la ſurface les deux variables x & z forment par-tout un nombre ſoit pair, ſoit impair de dimenſions, la première région ſera égale à la ſixième, la ſeconde à la quatrième, la troiſième à la huitième, & la cinquième à la ſeptième. Ainſi,

Si dans l'équation de la ſurface chaque terme ne donne que des dimenſions paires, ou que des dimenſions impaires pour les variables

y & z	x & z	x & y
les régions égales feront	les régions égales feront	les régions égales feront
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4	6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3	7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2

Mais si les trois variables x, y *&* z, *prises ensemble, forment partout ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires, alors les régions opposées seront égales :*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

21. Si deux ou trois de ces conditions ont lieu en même temps dans l'équation, alors quatre régions, ou les huit à la fois, renfermeront des parties de la surface semblables & égales entre elles. Ainsi,

Si x *&* y *pris séparément ont par-tout des dimensions paires, alors les régions suivantes prises quatre à quatre seront les mêmes :*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2.

Si x *&* z *pris séparément ont par-tout des dimensions paires, alors les régions suivantes prises quatre à quatre seront égales :*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3.

Si les variables y *&* z *considérées séparément ont dans tous les termes des dimensions paires, alors ce seront les régions suivantes qui prises quatre à quatre seront égales entre elles :*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4.

22. Si une des variables a par-tout des dimensions paires, & que les deux autres prises ensemble forment par-tout ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires, il y aura encore quatre régions qui seront égales, ainsi qu'on va le voir.

Si z *a par-tout des dimensions paires, & que* x *&* y *forment par-tout, ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires, les régions suivantes prises quatre à quatre seront égales :*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Si y *a par-tout des dimensions paires, & que dans chaque terme* x *&* z *pris ensemble forment des dimensions paires ou impaires, les régions suivantes prises quatre à quatre seront égales :*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Si x *a par-tout des dimensions paires, & que* y *&* z *considérés ensemble forment dans tous les termes, ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires, les régions suivantes seront égales entre elles, étant prises quatre à quatre :*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Dans ces trois cas toutes les trois variables x, y & z, prises ensemble formeront donc par-tout ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires.

23. Il reste encore à considérer les cas suivans, où quatre régions sont égales à la fois.

Si x *&* y } *forment par-tout des dimensions paires ou des dimensions impaires,*
& y *&* z } *alors les régions suivantes seront égales quatre à quatre :*

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2
6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3.

On obtiendra donc les mêmes résultats, si de plus les deux autres variables x & z forment dans tous les termes, ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires; de sorte que cette condition est déjà renfermée dans la proposée. Les portions de la surface situées dans les quatre régions disjointes seront donc égales entre elles, si dans l'équation la combinaison des variables prises deux à deux & considérées ensemble forme par-tout, ou des dimensions paires, ou des dimensions impaires; mais, comme il y a trois combinaisons différentes, il faut remarquer que, si deux jouissent de la propriété demandée, la troisième en jouira pareillement.

24. Si aux conditions qui rendent semblables & égales entre elles quatre régions à la fois, on en ajoute une nouvelle qui ne soit pas renfermée dans les premières, & d'où résulte l'égalité de deux régions; alors toutes les régions deviendront égales, & la surface sera composée de huit parties égales & semblables entre elles. L'équation de ces sortes de surfaces renfermera donc toutes les propriétés mentionnées ci-dessus; ainsi chaque variable x, y, z, prise séparément, aura par-tout des dimensions paires; d'où il suit que deux quelconques considérées ensemble, ou même les trois prises à la fois, formeront dans tous les termes des dimensions paires.

25. Au reste, si lorsqu'une équation est proposée entre trois variables, on veut savoir si elle renferme une ou deux, ou

même trois des propriétés expofées ci-deffus, il n'y aura aucune difficulté pour ce qui concerne les dimenfions paires de chaque variable. Il ne fera pas plus difficile de s'affurer fi toutes les variables prifes enfemble forment dans tous les termes, ou des dimenfions paires ou des dimenfions impaires. Mais prifes feulement deux à deux doivent-elles jouir de cette propriété? c'eft ce qu'il fera plus difficile d'examiner. Il faudra faire dans l'équation ou $x=nz$, ou $y=nz$, ou $x=ny$, & voir fi dans l'un ou l'autre cas il en réfulte une équation dans laquelle z dans les deux premiers cas, ou y dans le dernier, reçoive par-tout des dimenfions paires; fi cela a lieu, il s'enfuit néceffairement que deux variables prifes enfemble forment par-tout ou des dimenfions paires ou des dimenfions impaires; & par conféquent la furface aura au moins deux parties femblables & égales entre elles.

CHAPITRE II.

Des Sections des Surfaces faites par des Plans quelconques.

26. De même que les interfections des lignes font des points, les interfections des furfaces font des lignes ou droites ou courbes. L'interfection de deux plans eft une ligne droite, comme on le fait par les élémens, mais celle d'une fphère faite par un plan, eft un cercle. Or il importe beaucoup, pour connoître une furface, de favoir quelle efpèce de lignes réfulte de l'interfection d'une furface par des plans donnés; car on connoîtra à la fois de cette manière une infinité de points de la furface, tandis que par la méthode précédente les valeurs particulières de la variable z ne donnoient qu'autant de points de la fuperficie.

27. Comme nous rapportons les furfaces à trois plans perpendiculaires entre eux, il eft naturel de chercher avant tout Pl. XIII. Fig. 121.

les interſections de la ſurface & de ces plans. Si donc on prend le premier plan APQ déterminé par les variables $AP = x$, $AQ = y$, (à cauſe que la troiſième variable z déſigne la diſtance de chaque point de la ſurface à ce plan) il eſt clair que, ſi on fait $z = 0$, on trouvera tous les points de la ſurface qui ſeront ſitués ſur le plan même APQ; & que par conſéquent l'équation réſultante entre x & y repréſentera la ligne que forme l'interſection de la ſurface avec le plan APQ. Semblablement, ſi on fait $y = 0$, l'équation entre x & z exprimera l'interſection de la ſurface faite par le plan APR; & en ſuppoſant $x = 0$, l'équation entre y & z donnera l'interſection de la ſurface & du plan AQR.

28. Nous avons déjà dit auparavant que la ſurface d'une ſphère qui a ſon centre au point A, & dont le rayon $= a$ étoit exprimée par cette équation $xx + yy + zz = aa$; je me ſervirai de cet exemple pour éclaircir ce qu'on vient de lire ſur les interſections. Soit donc $z = 0$, & l'équation $x^2 + y^2 = a^2$ exprimera l'interſection de la ſphère par le plan APQ; il eſt évident qu'elle ſera un cercle dont le centre eſt en A, & dont le rayon $= a$. Semblablement, en faiſant $y = 0$, l'interſection de la ſphère faite par le plan APR ſera un cercle repréſenté par l'équation $xx + zz = aa$. De même, ſi on ſuppoſe $x = 0$, l'équation $yy + zz = aa$ donnera un pareil cercle pour l'interſection du plan AQR. Tout cela, à la vérité, eſt ſuffiſamment connu, puiſque toutes les ſections d'une ſphère faites par des plans qui paſſent par ſon centre ſont de grands cercles, c'eſt-à-dire des cercles qui ont un rayon commun avec la ſphère.

29. Il ne ſera pas plus difficile de déterminer les ſections de la ſurface faites par d'autres plans parallèles à l'un des plans principaux. Concevons un plan parallèle au plan APQ, & qui en ſoit éloigné d'un intervalle $= h$, tous les points de la ſurface dont la diſtance au même plan APQ, laquelle eſt indiquée par la variable z, eſt $= h$, ſeront donc ſitués en même temps ſur ce plan parallèle, & formeront par conſéquent l'interſection. On aura donc l'équation qui convient à cette interſection, ſi on fait dans l'équation de la ſurface

$z = h$; car on aura alors entre les deux coordonnées perpendiculaires x & y, l'équation qui exprime la nature de la ſection. On déterminera de la même manière les ſections qui ſe font par des plans parallèles ou à APR ou à AQR; ainſi il ſeroit inutile de répéter pour les autres ce qui aura été dit pour l'un.

30. Si donc on fait dans l'équation de la ſurface entre les trois coordonnées x, y & z, l'une des variables, par exemple, z égale à une conſtante $= h$, on aura la ſection de la ſurface faite par un plan parallèle à APQ, & qui en eſt éloigné d'une quantité h; ainſi, en donnant ſucceſſivement à cette lettre h toutes les valeurs poſſibles tant poſitives que négatives, on obtiendra toutes les ſections de la ſurface qui ſont faites par des plans parallèles au plan APQ; & comme la ſurface entière peut être diviſée en une infinité de parties par tous ces plans parallèles, & qu'on connoît de cette manière toutes les ſections, on connoîtra auſſi par ce moyen la ſurface totale. En effet, toutes ces ſections ſeront repréſentées par une ſeule équation entre les coordonnées x & y & la conſtante indéterminée h; d'où il ſuit que toutes ces lignes compriſes ſous une ſeule équation ſeront toutes ſemblables, ou auront au moins de l'affinité entre elles.

31. Toutes les ſections de la ſurface parallèles au plan APQ ſeront donc égales entre elles, & ſeront coupées de la même manière par les plans APR, AQR, ſi l'équation entre x & y eſt telle qu'elle demeure la même, quelque valeur qu'on donne à h; or cela ne peut avoir lieu, à moins que la variable z, à la place de laquelle on a mis h, n'entre nullement dans l'équation de la ſurface. Par conſéquent, ſi la troiſième variable z ne fait point partie de l'équation de la ſurface, toutes les ſections parallèles au plan APQ ſeront égales entre elles; & leur nature ſera exprimée par l'équation même de la ſurface, qui renfermera ſeulement les deux variables x & y. De même, ſi la variable x ou la variable y manque entièrement dans l'équation de la ſurface, toutes les ſections parallèles au plan AQR ou au plan APR ſeront parallèles entre elles.

32. Non-ſeulement il eſt facile de ſe faire une idée de ces ſortes de ſurfaces, mais on peut même les conſtruire & les former ſur une matière donnée. Car ſuppoſons que la variable z manque dans l'équation, de ſorte que l'équation ſubſiſte ſeulement entre les coordonnées $AP = x$ & $AQ = PM = y$;
Pl. XIII. Fig. 122. on tracera, au moyen de l'équation, la ligne courbe BMD ſur le plan APQ; enſuite on concevra une ligne droite indéfinie qui, reſtant conſtamment perpendiculaire à ce plan, ſe meuve ſuivant cette courbe BMD; cette droite tracera par ſon mouvement ou formera la ſurface indiquée par cette équation; d'où il ſuit évidemment que, ſi la ligne BMD eſt un cercle, la ſurface qu'on obtiendra ſera celle d'un cylindre droit; & ſi la ligne BMD eſt une Ellypſe, on aura la ſurface d'un cylindre ſcalène. Si la ligne BMD n'eſt pas continue, mais ſi elle eſt compoſée de pluſieurs droites qui forment une figure rectiligne, la ſurface réſultante ſera alors priſmatique.

33. Comme ce genre de ſurfaces embraſſe les cylindres & tous les priſmes, il conviendra de l'appeler généralement *cylindrique* ou *priſmatique*; & les eſpèces particulières compriſes ſous ce genre ſeront déterminées par la figure plane BMD, qui les aura formées ſuivant la méthode qui vient d'être expliquée. Cette figure BMD ſe nommera la *Baſe*. Toutes les fois donc qu'une des trois variables x, y, z, manquera dans l'équation, alors la ſurface qu'elle exprime ſera cylindrique ou priſmatique. Mais, ſi les deux variables y & z manquent à la fois, comme alors x eſt $=$ à une conſtante, la ligne BMD ſe changera en une ligne droite perpendiculaire à l'axe AD; & par conſéquent la ſurface deviendra une ſurface plane perpendiculaire au plan APQ.

34. Après ce genre de ſurfaces, le plus remarquable eſt celui qui réſulte d'une équation homogène entre les trois variables x, y & z, ou dans laquelle les trois variables forment par-tout le même nombre de dimenſions; telle eſt l'équation $zz = mxz + xx + yy$. On voit par-là que toutes les ſections faites par des plans parallèles à un des trois plans principaux ſeront des figures ſemblables entre elles; car ſi on donne à z une valeur

valeur conſtante h, il eſt clair que l'équation $h^2 = mhx + x^2 + y^2$, ſi on met ſucceſſivement pour h les valeurs qu'on voudra, renferme une infinité de figures ſemblables entre elles, dont les paramètres ſeront égaux ou proportionnels à h même. Ainſi, puiſque ces ſections ne ſont pas ſeulement ſemblables, mais qu'elles croiſſent encore en raiſon des diſtances au plan APQ, les lignes qui partent du point A, & qui paſſent par les points homologues de chaque ſection, ſeront droites.

35. Etant donc propoſée une équation homogène entre les trois variables x, y & z, donnons à z une valeur déterminée $AR = h$, & ſoit $TSsMm$ la figure tracée ſur un plan parallèle à APQ & mené par le point R, laquelle ſera exprimée par une équation entre x & y, de manière que $RV = x$ & $VM = y$. Cette ſection $TSsMm$ une fois décrite, concevons une droite indéfinie qui ſe meuve autour de ſon périmètre, & qui ſoit aſſujettie à paſſer conſtamment par le point A; cette droite décrira par ſon mouvement la ſurface compriſe dans l'équation propoſée. Il eſt évident que, ſi la figure $TSsMm$ eſt un cercle dont le centre ſoit en R, il en réſulte un cône droit; & ſi R n'en eſt pas le centre, un cône ſcalène. Mais, ſi la figure eſt rectiligne, il en naîtra des pyramides de toute eſpèce. C'eſt pourquoi nous appellerons *coniques* ou *pyramidales* les ſurfaces qui ſont renfermées dans ce genre d'équations. Pl. XIII. Fig. 123.

36. Il ſuit de-là manifeſtement que, ſi l'équation entre les trois variables x, y & z, eſt homogène, & que par conſéquent la ſurface ſoit conique ou pyramidale, non-ſeulement on aura pour toutes les ſections parallèles à un plan principal APQ des figures ſemblables, dont les paramètres ſoient proportionnels aux diſtances de ces ſections au ſommet A; mais on conçoit, par la même raiſon, que toutes les ſections qui ſeront parallèles au plan APR ou au plan AQR, jouiront de la même propriété, & formeront conſéquemment des figures ſemblables, dont les côtés homologues ſeront proportionnels à leur diſtance au point A. On fera voir plus bas que toutes les autres ſections de ces corps qui ſont parallèles entre elles, ou qui ſont parallèles à un plan quelconque mené par

le ſommet A, ſeront auſſi ſemblables entre elles, & que leurs paramètres ſeront proportionnels à leur diſtance au point A.

37. Le genre de ſurfaces auquel je vais paſſer, eſt beaucoup plus étendu. Soit Z une fonction quelconque de z, & ſoit donnée une équation homogène entre les trois variables x, y & Z. Soit $Z = H$, lorſque $z = h$; comme on a dans ce cas une équation homogène entre x, y & H, toutes les ſections parallèles au plan APQ ſeront des figures ſemblables entre elles, & dont les paramètres ne ſeront plus proportionnels aux diſtances h, mais à leurs fonctions H. D'où il ſuit que les lignes menées par les points homologues de ces ſections ne ſeront point des lignes droites, mais des courbes dépendantes de la nature de la fonction Z. Mais alors il ne s'enſuit pas de-là que les ſections faites parallèlement à un autre plan quelconque, ſeront ſemblables entre elles.

38. Ce dernier genre comprend les deux précédens; car, ſi on ſuppoſe $Z = z$, ou $Z = \alpha z$, à cauſe de l'équation homogène entre x, y & z, on aura des ſurfaces coniques. La même choſe a lieu, ſi $Z = \alpha + \beta z$, avec cette différence ſeulement que le ſommet du cône ne tombe plus ſur le point même A; par exemple, ſi $Z = \frac{b - z}{b}$, le ſommet du cône ſera éloigné du point A de la quantité b; ſi on ſuppoſe enſuite $b = \infty$, la figure conique deviendra cylindrique, & Z ſera $= 1$. Ainſi dans l'équation des ſurfaces cylindriques les variables x & y formeront par-tout avec la conſtante 1, le même nombre de dimenſions. Or, quelle que ſoit la forme de l'équation propoſée entre x & y, ſi la troiſième variable z n'y entre point, on peut toujours la rendre homogène avec l'unité, d'où il ſuit, comme nous l'avons déjà fait voir, que toute équation dans laquelle une des variables ne ſe trouve pas, exprime une ſurface cylindrique.

39. Parmi ces corps dans leſquels toutes les ſections parallèles à un plan principal APQ ſont des figures ſemblables, on doit diſtinguer particulièrement ceux dont les ſections ſont des cercles, qui ont leur centre ſur la même droite AR perpendiculaire au plan APQ. Ces eſpèces de ſolides ſe font au

tour, & ſe nomment conſéquemment corps *tournés*. Ainſi l'équation générale qui leur appartient ſera $Z^2 = x^2 + y^2$. En effet, quelque valeur qu'on donne à z, de ſorte que $Z = H$, on aura pour la ſection parallèle au plan APQ l'équation $HH = xx + yy$, qui convient au cercle dont le rayon $= H$, & qui a ſon centre ſur la droite AR. Si $ZZ = zz$, on aura un cône droit; ſi $ZZ = aa$, on aura un cylindre; & ſi $ZZ = a^2 - z^2$, on aura la ſphère. Ce ſont là les principales eſpèces de corps formés au tour.

40. Conſidérons les corps dont toutes les ſections PTV perpendiculaires à l'axe AP ſont des triangles, qui ont leurs ſommets T ſur une ligne droite DT parallèle à l'axe AP. Soit AVB la baſe de ce corps, ou ſa ſection faite ſur le plan APQ, laquelle ſoit une courbe quelconque. Soit la diſtance de la droite DT à l'axe AB, c'eſt-à-dire, $AD = c$; ayant fait, comme auparavant, les trois variables $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, PV ſera une fonction quelconque de x. Soit cette fonction $PV = P$, on aura, à cauſe des triangles ſemblables, VQM, VPT, $P : c :: P - y : z$, ou $z = c - \frac{cy}{P}$. On trouve donc pour ces ſortes de corps $\frac{c-z}{y}$ égal à une fonction quelconque de x. Ces corps diffèrent donc des coniques en ce qu'ils ſe terminent par une arrête droite DT, tandis que les cônes ſe terminent en pointe. Si la baſe AVB eſt ſuppoſée un cercle, le corps qui en réſulte a été traité fort au long par WALLIS, & a été appelé par lui *coin-conoïde*. Pl. XIII. Fig. 124.

41. Suppoſons, comme tout à l'heure, que toutes les ſections PTV perpendiculaires à l'axe AB ſoient des triangles rectangles en P, qui par leurs ſommets T forment une courbe quelconque AT, & que la baſe ſoit la figure AVB. Ayant fait les trois variables $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; la droite PV ſur la courbe AVB ſera une fonction quelconque de x que je ſuppoſe $= P$; alors PT ſera auſſi une fonction de x que je ſuppoſe $= Q$; cela poſé, on aura : Pl. XIII. Fig. 125.

$$P : Q :: P - y : z;$$

& par conséquent $z = Q - \frac{Qy}{P}$ ou $Pz + Qy = PQ$, ou bien $\frac{z}{Q} + \frac{y}{P} = 1$ ou $=$ à une constante. Par conséquent, si les deux variables y & z n'ont nulle part dans l'équation plus d'une dimension, le corps appartiendra alors au genre que nous venons de décrire.

Pl. XIII. Fig. 126. 42. Comme nous avons déjà examiné les corps dont toutes les sections, parallèles à un plan principal, sont semblables entre elles, considérons à présent ceux dans lesquels toutes ces sections sont des figures qui ont seulement de l'affinité entre elles, ou dont les appliquées, lorsqu'on prend des abscisses homologues, sont proportionnelles entre elles. Soient les trois sections d'un tel corps ABC, ACD & ABD, parmi lesquelles toutes les sections parallèles à ACD doivent être des figures qui ont de l'affinité. Supposons donc la base $AC = a$, & la hauteur $AD = b$; & ayant pris les coordonnées $Aq = p$ & $qm = q$, soit q une fonction quelconque de p. Concevons maintenant une section quelconque parallèle PTV, en faisant l'intervalle $AP = x$, on aura la base $PV =$ à une fonction de x, que je suppose $=$ P, & la hauteur $PT =$ à une fonction de x, que je suppose $=$ Q. Qu'on fasse à présent $PQ = y$ & $QM = z$, on aura par la loi de l'affinité $a : p :: P : y$ & $b : q :: Q : z$, ou $y = \frac{Pp}{a}$ & $z = \frac{Qq}{b}$.

43. Donc, si toutes les trois sections principales du corps, ABC, ACD & ABD, sont données, on pourra déterminer la nature du corps dont toutes les sections parallèles à ACD auront en même temps de l'affinité entre elles. Car d'abord P & Q sont des fonctions de x, ensuite q est une fonction de p, d'où il suit qu'avec les deux variables x & p on déterminera les deux autres y & z; mais, si nous desirons une équation entre les trois coordonnées x, y & z; comme q est une fonction de p, ou parce qu'on a une équation entre p & q, il faudra substituer dans cette équation $p = \frac{ay}{P}$ & $q = \frac{bz}{Q}$; & on aura par ce moyen, à cause que P & Q sont des fonctions de x, une équation entre les trois coordonnées x, y & z, qui

exprimera la nature des corps qui appartiennent à ce genre. Au reſte, il eſt évident qu'en ſuppoſant $x=0$, P doit devenir $= a$ & $Q = b$.

44. Si dans l'équation de la ſurface les deux variables y & z forment par-tout le même nombre de dimenſions, alors toutes les ſections perpendiculaires à l'axe AP feront des figures rectilignes; car ſi on prend pour x une valeur conſtante quelconque, il en réſultera entre y & z une équation homogène qui indique une ou pluſieurs lignes droites. Puis donc que le nombre de dimenſions formé par les deux variables y & z eſt par-tout le même, il ſera ou pair ou impair, & par cette raiſon, comme on l'a fait voir art. 20, ces eſpèces de corps auront deux parties égales l'une à l'autre; c'eſt-à-dire que les portions ſituées dans la première & la cinquième région feront ſemblables entre elles; il en ſera de même de la région ſeconde & troiſième, & des autres, comme l'indique la table donnée à l'endroit cité.

45. Nous avons déjà examiné pluſieurs eſpèces de corps qui donnent une infinité de ſections rectilignes; telle eſt celle que nous venons de traiter, & les cylindriques & les coniques. Dans toutes ces eſpèces, les ſections faites par l'axe AP ſont rectilignes; mais ce genre eſt plus étendu. Car ſoit $AKMP$ une ſection du corps faite par l'axe AP ſous un angle $MPV = \varphi$; en faiſant $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on aura $\frac{z}{y}$ pour la tangente de l'angle φ, & la droite PM ſera $= \frac{z}{\textit{ſin.}\ \varphi}$. Pl. XIV. Fig. 127.

Si maintenant la ligne KM eſt droite, on devra avoir $\frac{z}{\textit{ſin.}\ \varphi} = \alpha x + \beta$; expreſſion dans laquelle α & β ſeront des conſtantes dépendantes de l'angle φ; & par conſéquent elles ſeront des fonctions de y & de z de dimenſion nulle. Soient R & S ces fonctions, on aura $x = Rz + S$, ou $x = Ry + S$; ou bien, T déſignant une fonction d'une dimenſion, & S une fonction de dimenſion nulle de y & de z, tous les corps, dont il eſt queſtion ici, ſeront compris dans cette équation générale $x = T + S$.

46. Or, quelle que ſoit la ſurface propoſée, dont la nature

eſt exprimée par une équation entre les trois variables x, y & z, il ſera facile d'en déterminer une ſection quelconque faite ſuivant l'axe AP. Car ſoit l'angle VPM, qui marque l'inclinaiſon de la ſection $AKMP$ ſur le plan $ACVP = \varphi$, & ſoit la droite $PM = v$, laquelle ſera l'appliquée de la ſection cherchée; après cela, on aura $QM = z = v \,.\, \mathit{ſin.}\, \varphi$ & $PQ = y = v \,.\, \mathit{coſ.}\, \varphi$. Donc, ſi dans l'équation de la ſurface on ſubſtitue pour les variables y & z les valeurs $v \,.\, \mathit{coſ.}\, \varphi$ & $v \,.\, \mathit{ſin.}\, \varphi$, on obtiendra l'équation entre les deux variables x & v, qui exprimera la nature de la ſection $AKMP$. On
Pl. XIII. Fig. 121. trouvera d'une manière ſemblable toutes les ſections qui ſe font ſuivant l'un ou l'autre des deux autres axes principaux AQ ou AR. Car ces trois axes AP, AQ & AR, d'où dépendent les trois variables x, y & z, peuvent être changés l'un en l'autre, & réciproquement; de ſorte que ce que l'on dit de l'un d'eux s'applique toujours aux deux autres.

47. Ayant donc pris, pour fixer nos idées, le plan APQ auquel nous rapporterons toutes les ſections de la ſurface; toute ſection faite par un plan, ou ſera parallèle à celui-là, ou lui ſera inclinée. Dans le dernier cas, le plan de la ſection étant prolongé coupera quelque part le plan APQ, & leur interſection ſera une ligne droite. Dans le premier cas où le plan de la ſection eſt parallèle au plan APQ, il ſuffira, pour connoître la nature de la ſection, d'attribuer à la quantité z une valeur conſtante; mais dans le ſecond cas, où le plan de ſection eſt incliné au plan APQ, nous ne pouvons encore déterminer la nature de la ſection, que lorſque la droite AP ou la droite AQ eſt l'interſection du plan coupant avec le plan APQ. Reſte donc, pour trouver toutes les ſections, à conſidérer les autres interſections de ces deux plans, quelles qu'elles ſoient.

Pl. XIV. Fig. 128. 48. Soit la droite ES parallèle à l'axe AP, l'interſection du plan coupant avec le plan APQ; l'angle d'inclinaiſon QSM ſous lequel le plan coupant ESM eſt incliné au plan APQ, $= \varphi$, & la diſtance $AE = f$. Puiſque $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on aura $ES = x$ & $QS = y + f$. Si on rapporte la ſection à la droite ES conſidérée comme axe, on aura l'abſciſſe $ES = x$; on ſuppoſera enſuite l'appliquée SM

$=v$, ce qui donnera, à cause de l'angle $QSM=\varphi$, $QM=z=v\,sin.\,\varphi$, & $SQ=y+f=v\,.\,cos.\,\varphi$; & par suite $y=v\,.\,cos.\,\varphi-f$. C'est pourquoi, si dans l'équation de la surface entre x, y & z, on substitue $y=v.cos.\,\varphi-f$ & $z=v.sin.\,\varphi$, on aura l'équation entre les coordonnées x & v pour la section cherchée ESM. Si l'intersection ES étoit perpendiculaire à l'axe AP, comme elle seroit alors parallèle à l'autre axe principal placé dans le plan APQ, on trouveroit la section de la même manière; on n'auroit qu'à changer l'une en l'autre les variables x & y.

49. Supposons à présent que l'intersection ES ait une position quelconque sur le plan APQ, qu'elle soit rencontrée en E par la droite AE perpendiculaire à l'axe AP; on mènera ETX parallèle à l'axe AP, on fera $AE=f$ & l'angle $TES=\theta$. Ayant pris ensuite les trois variables $AP=x$, $PQ=y$ & $QM=z$, on abaissera de Q sur ES la perpendiculaire QS, & on tirera MS; l'angle QSM sera l'inclinaison du plan coupant sur le plan APQ; je le supposerai $=\varphi$. Soient ensuite les coordonnées de la section cherchée $ES=t$ & $SM=v$. On mènera de S sur EX & sur QP prolongée, les perpendiculaires ST & SV; & on aura $QM=z=v\,sin.\,\varphi$, $QS=v.cos.\,\varphi$, $SV=v.cos.\,\varphi.sin.\,\theta$ & $QV=v.cos.\,\varphi.cos.\,\theta$. On aura ensuite $ST=VX=t.sin.\,\theta$ & $ET=t.cos.\,\theta$; d'où l'on tire enfin $AP=x=t\,cos.\,\theta+v.cos.\,\varphi.sin.\,\theta$ & $PQ=y=v.cos.\varphi.cos.\,\theta-t\,sin.\,\theta-f$; valeurs qui substituées à x, y & z, donneront l'équation de la section demandée. Pl. XIV. Fig. 129.

50. Etant donc donnée une équation pour un solide quelconque, il sera facile d'en déduire l'équation qui convient à une section plane quelconque; & d'abord il est évident que, si l'équation du solide entre les trois coordonnées x, y, & z est algebrique, toutes les sections de ce corps seront aussi des courbes algébriques. Ensuite, comme on trouve l'équation de la section entre ses coordonnées t & v, en mettant dans celle du solide $z=v.sin.\,\varphi$, $x=t\,cos.\,\theta+v.cos.\,\varphi\,sin.\,\theta$ & $y=v.cos.\,\varphi\,cos.\,\theta-t\,sin.\,\theta-f$, il est évident que dans l'équation pour une section quelconque les coordonnées t & v ne

peuvent obtenir plus de dimenſions, que les trois coordonnées x, y & z n'en ont elles-mêmes dans l'équation du ſolide. Il peut arriver cependant quelquefois que l'équation de la ſection ſoit d'un ordre inférieur, parce que les termes de degré ſupérieur peuvent diſparoître après la ſubſtitution.

51. Si donc les trois variables x, y & z, ne forment dans l'équation de la ſurface qu'une ſeule dimenſion, de manière qu'elle ſoit de cette forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$, alors toutes les ſections de cette ſurface ſeront des lignes droites. Mais dans ce cas la ſurface ſera plane, comme il ſera facile de le voir en y faiſant un peu attention, & comme on le fera voir plus clairement ci-après; or on ſait par les élémens que l'interſection de deux plans doit être une ligne droite. Semblablement, on voit par-là qu'en général les ſections de tous les ſolides, dont la nature eſt donnée par cette équation générale :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \zeta yz + ax + by + cz + ee = 0,$$

ſi elles ne ſont pas des lignes droites, doivent être des lignes du ſecond ordre; & qu'il n'exiſte aucune ſection poſſible, dont la nature ne puiſſe être exprimée par une équation du ſecond degré.

CHAPITRE III.

Des Sections du Cylindre, du Cône & de la Sphère.

52. COMME on a coutume de conſidérer ces corps dans la Stéréométrie, il convient d'en chercher les ſections, avant que de paſſer à d'autres ſolides moins connus. D'abord il ſe préſente dans les élémens deux eſpèces de cylindres, ſavoir les *droits* & les *ſcalènes*. On appelle cylindre *droit* celui dont toutes les ſections perpendiculaires à l'axe ſont des cercles égaux entre eux, & qui ont leurs centres placés dans une même ligne droite.

droite. Le cylindre *ſcalène* donne des ſections circulaires, qui ne ſont plus perpendiculaires à l'axe, mais qui lui ſont inclinées ſous un angle quelconque ; on exprimera plus commodément cette propriété, en diſant que le cylindre oblique ou ſcalène eſt celui dont les ſections perpendiculaires à l'axe ſont des ellypſes égales, dont les centres ſont ſitués ſur une même ligne droite, qui ſe nomme l'axe du cylindre.

53. Soit donc un cylindre droit ou oblique, dont l'axe CD ſoit perpendiculaire au plan de la planche ; & ſoit la baſe $AEBF$, ou la ſection formée par le plan de la planche, un cercle ou une ellypſe. Je ſuppoſerai que cette baſe ſoit une ellypſe quelconque qui ait ſon centre en C, & pour axes conjugués AB & EF; car ce que nous dirons du cylindre ſcalène, s'appliquera très-facilement au droit. Faiſons donc l'un des demi-axes $AC = BC = a$, & l'autre $CE = CF = c$; en ſuppoſant enſuite les trois coordonnées $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, nous aurons par la nature de l'ellypſe $aacc = aayy + ccxx$. Cette même équation exprimera la nature du cylindre, puiſque la troiſième variable z, à cauſe que toutes les ſections parallèles au plan CPQ ſont égales entre elles, n'entre point dans l'équation. Pl. XIV. Fig. 130.

54. Toutes les ſections du cylindre parallèles à la baſe, lui feront donc ſemblables & égales ; c'eſt-à-dire qu'elles feront des cercles dans le cylindre droit, & des ellypſes dans le cylindre ſcalène. Mais alors les ſections qui ſe font ſuivant des plans perpendiculaires à APQ, feront deux lignes droites parallèles entre elles, qui, lorſque le cylindre ſera touché par le plan, ſe réduiront à une ſeule ; & qui par conſéquent deviennent imaginaires, lorſque le plan ne rencontre nulle part le cylindre; c'eſt ce qui ſe déduit naturellement de l'équation; car ſi, pour déſigner l'interſection du plan coupant & de la baſe, on égale à une conſtante ou x, ou y, ou $x \pm \alpha y$, l'équation aura alors deux racines ſimples. Ainſi nous avons déjà déterminé toutes les ſections qui ſe font par des plans parallèles à l'un des trois plans principaux.

55. Pour chercher la nature des autres ſections, nous ſuppoſerons que l'interſection du plan coupant avec la baſe faſſe

une ligne droite GT, qui d'abord ſoit parallèle à l'un des axes conjugués EF, ou perpendiculaire à l'autre AB prolongé juſqu'en G. Cela poſé, ſoit la diſtance $CG = f$ & l'inclinaiſon du plan coupant GTM ſur la baſe meſurée par un angle $= \varphi$. Suppoſons que le plan coupant GTM rencontre l'axe du cylindre en D; après avoir mené la droite DG, nous aurons $DGC = \varphi$; & par conſéquent $DG = \frac{f}{cof.\, \varphi}$ & $CD = \frac{f.\, fin.\, \varphi}{cof\, \varphi}$. D'un point quelconque M de la ſection cherchée on mènera MT parallèle à DG; à cauſe de $TQ = f - x$ & de l'angle $QTM = \varphi$, on aura $TM = \frac{f-x}{cof.\, \varphi}$ & $QM = \frac{(f-x)\, fin.\, \varphi}{cof.\, \varphi} = z$. Si on mène MS parallèle à TG; & conſéquemment perpendiculaire ſur DG, on aura $MS = TG = PQ = y$, & $DS = \frac{x}{cof.\, \varphi}$.

56. Prenons maintenant les droites DS & SM pour les coordonnées de la ſection cherchée; & ſoit $DS = t$ & $SM = u$. On aura donc $y = u$, $x = t.\, cof.\, \varphi$; &, à cauſe de $z = \frac{(f-x)\, fin.\, \varphi}{cof.\, \varphi}$, $z = f.\, tang.\, \varphi - t.\, fin.\, \varphi$. Subſtituons ces valeurs dans l'équation du cylindre $aacc = aayy + ccxx$, & nous aurons pour la ſection dont il s'agit, $aacc = aauu + cctt\,(cof.\, \varphi)^2$; équation qui apprend que la ſection eſt une Ellypſe, qui a ſon centre au point D, dont l'un des axes principaux tombe ſur la droite DG, & l'autre eſt perpendiculaire à celui-ci. Or le demi-axe qui tombe ſur la droite DG, ſera, (en faiſant $u = 0$) $= \frac{a}{cof.\, \varphi}$. Ou, ſi on mène la droite BH parallèle à GD, on aura $BH = \frac{a}{cof.\, \varphi}$ pour l'un des demi-axes de la ſection cherchée, & l'autre demi-axe conjugué ſera $= c = CE$.

57. La ſection du cylindre qu'on obtiendra de cette manière ſera donc une ellypſe, dont les demi-axes conjugués ſeront $\frac{a}{cof.\, \varphi}$ & c. Donc, ſi ſur la baſe $AEBF$ on a $AC = a$ pour le demi grand axe; à cauſe de $\frac{a}{cof.\, \varphi}$ plus grand que a,

les sections seront des ellypses plus alongées que la base. Mais, si c est plus grand que a, ou si l'intersection GT est parallèle au plus grand axe de la base, il peut arriver que dans la section les deux axes deviennent égaux entre eux; & que par conséquent la section soit un cercle. Cela aura lieu, si $\frac{a}{cos.\,\phi} = c$ ou $cos.\,\phi = \frac{a}{c}$. Puis donc que dans le triangle BCH rectangle en C l'angle $CBH = \phi$, on aura $cos.\,\phi = \frac{BC}{BH} = \frac{a}{BH}$. Donc, si on prend $BH = CE$, les sections seront des cercles; & comme cela se peut faire de deux manières, en plaçant soit au-dessus soit au-dessous la droite $BH = CE$; il existera une double suite de sections circulaires qui seront situées obliquement à l'égard de l'axe CD; c'est ce qui a fait donner à ces sortes de cylindres le nom de cylindres scalènes.

58. Soit à présent la droite GT inclinée d'une manière quelconque, l'intersection du plan coupant avec la base, & sur laquelle on ait abaissé du centre C de la base la perpendiculaire $GC = f$; soit en outre l'angle $BCG = \theta$, & l'angle d'inclinaison $CGD = \phi$, auquel sera égal l'angle QTM, après qu'on aura mené QT perpendiculaire à GT. On aura donc $DG = \frac{f}{cos.\,\phi}$ & $CD = \frac{f.\,sin.\,\phi}{cos.\,\phi}$. Soit M un point de la section cherchée, d'où on ait abaissé sur la base la perpendiculaire MQ; ensuite soit mené QP perpendiculairement à l'axe, de manière qu'en faisant $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on ait $a^2c^2 = a^2y^2 + c^2x^2$. Puis on mènera à l'intersection GT les perpendiculaires PV, QT; ce qui donnera $GV = x\,.\,sin.\,\theta$, $PV = f - x\,cos.\,\theta$; &, à cause de l'angle $QPW = \theta$, QW deviendra $= y\,sin.\,\theta$, $PW = VT = y.cos.\,\theta$ & $QT = f - x\,cos.\,\theta + y.sin.\,\theta$. Enfin, ayant mené MT, on aura, à cause de l'angle $MTQ = \phi$, $TM = \frac{z}{sin.\,\phi}$ & $QT = \frac{z\,.\,cos.\,\phi}{sin.\,\phi}$. Pl. XV. Fig. 131.

59. Achevons le parallélogramme rectangle $GSMT$, & faisons $DS = t$, $SM = GT = u$; nous aurons $u = GV + VT = x\,sin.\,\theta + y\,cos.\,\theta$; mais, à cause de $QT = f$

$-x\ cos.\ \theta + y\ sin.\ \theta$, $QT - CG$ sera $= y\ sin.\ \theta - x\ cos.\ \theta$; d'où l'on conclut $DS = TM - DG = \frac{y\ sin.\ \theta - x\ cos.\ \theta}{cos.\ \varphi} = t$. Puis donc que $x\ sin.\ \theta + y\ .\ cos.\ \theta = u$ & $y\ sin.\ \theta - x\ cos.\ \theta = t\ .\ cos.\ \varphi$, on aura $y = u\ cos.\ \theta + t\ sin.\ \theta\ cos.\ \varphi$ & $x = u\ sin.\ \theta - t\ cos.\ \theta\ .\ cos.\ \varphi$. Ces valeurs substituées dans l'équation $aacc = aayy + ccxx$, à la place de x & de y, donneront :

$$a^2c^2 = \begin{cases} a^2u^2(cos.\ \theta)^2 + 2a^2ut\,sin.\,\theta\ cos.\,\theta\ cos.\,\varphi + a^2t^2(sin.\ \theta)^2(cos.\ \varphi)^2 \\ c^2u^2\ (sin.\ \theta)^2 - 2c^2ut\,sin.\,\theta\ .\ cos.\,\theta\ cos.\,\varphi + c^2t^2(cos.\,\theta)^2(cos.\ \varphi)^2; \end{cases}$$

équation qui appartient à une ellypse dont le centre est en D; mais dont les coordonnées DS & SM ne sont pas perpendiculaires aux axes principaux, à moins qu'on n'ait $a = c$, ou un cylindre droit.

Pl. XVI. Fig. 132. 60. Pour connoître plus à fond cette section, soit $aMebf$ la courbe, dont l'équation a été trouvée entre les coordonnées $DS = t$ & $MS = u$; & soit, pour abréger, cette équation $a^2c^2 = \alpha u^2 + 2\beta tu + \gamma tt$, de manière qu'on ait pour le cas présent :

$$\alpha = aa(cos.\ \theta)^2 + cc\ (sin.\ \theta)^2$$

&

$$\beta = (aa - cc)\ sin.\ \theta\ .\ cos.\ \theta\ .\ cos.\ \varphi$$

&

$$\gamma = aa\ (sin.\ \theta)^2(cos.\ \varphi)^2 + cc\ (cos.\ \theta)^2(cos.\ \varphi)^2.$$

Soient les axes principaux de cette section ab & ef; & ayant mené à l'un des deux l'appliquée Mp, faisons $Dp = p$ & $Mp = q$; supposons de plus l'angle $aDH = \zeta$, nous aurons $u = p\ .\ sin.\ \zeta + q\ .\ cos.\ \zeta$ & $t = p\ .\ cos.\ \zeta - q\ sin.\ \zeta$; ces valeurs étant substituées, on trouvera :

$$a^2c^2 = \begin{array}{l} +\alpha(\sin.\zeta)^2 \\ +2\beta\sin.\zeta.\cos.\zeta \\ +\gamma(\cos.\zeta)^2 \end{array} p^2 : \begin{array}{l} +2\alpha\sin.\zeta.\cos.\zeta \\ +2\beta.(\cos.\zeta)^2 \\ -2\beta.(\sin.\zeta)^2 \\ -2\gamma.\sin.\zeta.\cos.\zeta \end{array} pq \begin{array}{l} +\alpha(\cos.\zeta)^2 \\ -2\beta\sin.\zeta.\cos.\zeta \\ +\gamma(\sin.\zeta)^2 \end{array} q^2$$

61. Comme cette équation est rapportée ici à un diamètre orthogonal, le coéfficient de $p\,q$ doit être $=0$; &, à cause que $2\sin.\zeta.\cos.\zeta=\sin.\,2\zeta$ & $(\cos.\zeta)^2-(\sin.\zeta)^2=\cos.\,2\zeta$, on aura $(\alpha-\gamma).\sin.\,2\zeta+2\beta\cos.\,2\zeta=0$, & par conséquent $\tan g.\,2\zeta=\frac{2\beta}{\gamma-\alpha}$; ce qui fait connoître l'angle aDH, & en même temps la position des diamètres principaux. Quant à leurs grandeurs, on les aura de cette manière :

$$aD=\frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\sin.\zeta)^2+2\beta.\sin.\zeta.\cos.\zeta+\gamma(\cos.\zeta)^2)}}$$

&

$$eD=\frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\cos.\zeta)^2-2\beta\sin.\zeta.\cos.\zeta+\gamma(\sin.\zeta)^2)}}.$$

62. A cause que $2\beta=\frac{2(\gamma-\alpha)\sin.\zeta.\cos.\zeta}{(\cos\ )^2-(\sin.\zeta)^2}$, on aura, en substituant cette valeur dans les expressions qu'on vient de trouver :

$$aD=\frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2-\sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\gamma\cos.\zeta^2-\alpha\sin.\zeta^2)}}=\frac{ac\sqrt{2.\cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha+\gamma)\cos.2\zeta-\alpha+\gamma)}}$$

&

$$eD=\frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2-\sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\alpha\cos.\zeta^2-\gamma\sin.\zeta^2)}}=\frac{ac\sqrt{2.\cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha+\gamma)\cos.2\zeta+\alpha-\gamma)}}.$$

Donc le produit de ces demi-axes sera :

$$aD.eD=\frac{2aacc\cos.2\zeta}{\sqrt{(2\alpha\gamma.(1+(\cos.2\zeta)^2)-(\alpha\alpha+\gamma\gamma)(\sin.2\ )^2)}};$$

& puisque

$$(\gamma - \alpha)\, \text{sin.}\, 2\zeta = 2\beta . \text{cos.}\, 2\zeta,$$

on aura :

$$(\alpha\alpha + \gamma\gamma)(\text{sin.}\, 2\zeta)^2 = 4\beta\beta(\text{cos.}\, 2\zeta)^2 + 2\alpha\gamma(\text{sin.}\, 2\zeta)^2;$$

& par conséquent

$$aD . eD = \frac{2aacc\,\text{cos.}\, 2\zeta}{\sqrt{(4\alpha\gamma(\text{cos.}\, 2\zeta)^2 - 4\beta^2(\text{cos.}\, 2\zeta)^2)}} = \frac{aa\,cc}{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta^2)}} = \frac{ac}{\text{cos.}\, \varphi}.$$

63. De même, puisque les quarrés

$$aD^2 = \frac{2aacc\,\text{cos.}\, 2\zeta}{(\alpha + \gamma)\,\text{cos.}\, 2\zeta - \alpha + \gamma}$$

&

$$eD^2 = \frac{2aacc\,\text{cos.}\, 2\zeta}{(\alpha + \gamma)\,\text{cos.}\, 2\zeta + \alpha - \gamma},$$

on aura :

$$aD^2 + eD^2 = \frac{4aacc(\alpha + \gamma)(\text{cos.}\, 2\zeta)^2}{4\alpha\gamma(\text{cos.}\, 2\zeta)^2 - 4\beta\beta(\text{cos.}\, 2\zeta)^2} = \frac{(\alpha + \gamma)aacc}{\alpha\gamma - \beta\beta}.$$

De-là l'on tire :

$$aD + eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha + \gamma + 2\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)}}$$

&

$$aD - eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha + \gamma - 2\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)}}.$$

Les demi-axes aD & eD seront donc les racines de cette équation :

$$(\alpha\gamma - \beta\beta)x^4 - (\alpha + \gamma)aacc\,xx + a^4c^4 = 0;$$

& on a

$$\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)} = ac\,\text{cos.}\, \varphi.$$

64. Puiſque $a D \,.\, e D = \frac{a c}{cof.\, \phi}$, & que ϕ eſt l'angle que le plan coupant fait avec le plan de la baſe, nous en déduirons le beau théorême ſuivant :

THÉORÊME.

Si tel cylindre qu'on voudra eſt coupé par un plan quelconque, le rectangle des axes de la ſection ſera au rectangle des axes de la baſe du cylindre, comme la ſécante de l'angle que forme le plan de ſection avec le plan de la baſe, eſt au ſinus total.

Ainſi, puiſque tous les parallélogrammes conſtruits autour des diamètres conjugués ſont égaux aux rectangles formés ſur les axes, ces parallélogrammes formés ſur la baſe & ſur une ſection quelconque du cylindre conſerveront auſſi entre eux le même rapport.

65. Il ſera plus commode de déterminer de la manière ſuivante les ſections obliques du cylindre. Si ſa baſe eſt une ellypſe $A E B F$, dont les demi-axes $A C = B C = a$, $E C = C F = c$, & dont la droite CD perpendiculaire au centre C Pl. XIV. Fig. 133.
de la baſe ſoit l'axe du cylindre ; qu'on coupe ce cylindre par un plan dont l'interſection avec le plan de la baſe ſoit la droite TH inclinée d'une manière quelconque à l'égard de l'axe $A B$ prolongé, & qu'on abaiſſe du point C ſur cette droite la perpendiculaire CH, de ſorte que l'angle $G C H = \theta$; que le plan coupant paſſe par le point D de l'axe du cylindre ; l'angle $C H D$, en menant DH, ſera l'inclinaiſon du plan coupant ſur le plan de la baſe; je le ferai $= \phi$. En ſuppoſant donc $C G = f$, on aura $G H = f.\, fin.\, \theta$; $C H = f.\, cof.\, \theta$; $DH = \frac{f.\, cof.\, \theta}{cof.\, \phi}$ & $C D = \frac{f\, cof.\, \theta \,.\, fin.\, \phi}{cof.\, \phi}$. Il ſuit de-là qu'à cauſe du triangle $D C G$ rectangle en C, on aura $D G = f. \frac{\sqrt{(1 - fin.\, \theta^2\, fin.\, \phi^2)}}{cof.\, \phi}$; le ſinus de l'angle $D G H = \frac{cof.\, \theta}{\sqrt{(1 - fin.\, \theta^2 fin.\, \phi^2)}}$; ſon coſinus $= \frac{fin.\, \theta \,.\, cof.\, \phi}{\sqrt{(1 - fin.\, \theta^2 fin.\, \phi^2)}}$ & ſa tangente $= \frac{cof.\, \theta}{fin.\, \theta \,.\, cof.\, \phi}$.

66. A préſent, d'un point quelconque M de la ſection cherchée ſoit abaiſſée ſur la baſe la perpendiculaire MQ; & ayant mené l'appliquée QP, ſoit $CP = x$, $PQ = y$, on aura $a^2c^2 = a^2y^2 + c^2x^2$. Soit menée QT parallèle à CG, & ſur celle-là la perpendiculaire GR tirée du point G, on aura $GR = y$ & $QR = f - x$. Puiſque l'angle $TGR = GCH = \theta$, GT ſera $= \frac{y}{cof.\,\theta}$ & $TR = \frac{y\,.\,fin.\,\theta}{cof.\,\theta}$. D'où l'on conclura $QT = f - x + \frac{y\,.\,fin.\,\theta}{cof.\,\theta}$; & par conſéquent, à cauſe de la ſimilitude des triangles CDG & QMT, on aura $CG : DG :: QT : TM$ & $CG : CG - QT :: DG : DS$, MS étant menée parallèlement à GT. On aura donc $DS = \frac{(x\,cof.\,\theta - y\,fin.\,\theta)\sqrt{(1 - fin.\,\theta^2\,fin.\,\phi^2)}}{cof.\,\theta\,fin.\,\phi}$. Ayant donc fait $DS = t$, $MS = u$, on aura $x\,cof.\,\theta - y\,fin.\,\theta = \frac{t\,.\,cof.\,\theta\,cof.\,\phi}{\sqrt{(1 - fin.\,\theta^2\,fin.\,\phi^2)}}$; $y = u\,.\,cof.\,\theta$; ce qui donnera une équation entre t & u, qui ſera encore aſſez compliquée.

67. Mais ſi, au lieu des axes principaux de la baſe, on mène le diamètre EF parallèle à l'interſection TH, & ſur celui-ci ſon diamètre conjugué AB, qui prolongé rencontre TH en G; que les hypothèſes que nous avons faites auparavant reſtent les mêmes, ſavoir $CG = f$, $GCH = \theta$, $CHD = \phi$; que $CA = CB$ ſoit $= m$; $CE = CF = n$; qu'on ait mené QP parallèle au diamètre EF, & qu'on ait fait $CP = x$, $PQ = y$, de ſorte que $m^2n^2 = m^2y^2 + n^2x^2$; on aura $GT = MS = y$ & $DS = \frac{DG\,.\,x}{CG} = \frac{x\sqrt{(1 - fin.\,\theta^2\,fin.\,\phi^2)}}{cof.\,\phi}$. C'eſt pourquoi, en ſuppoſant $DS = t$ & $MS = u$, x deviendra $= \frac{t\,cof.\,\phi}{\sqrt{(1 - fin.\,\theta^2\,fin.\,\phi^2)}}$ & $y = u$, & on aura $\frac{CG}{DG}$ pour le coſinus de l'angle CGD, d'où il ſuit qu'en faiſant l'angle $CGD = \eta$, on aura $x = t\,.\,cof.\,\eta$; & par conſéquent pour la ſection cherchée $mmnn = mmuu + nntt\,cof.\,\eta\eta$, l'équation étant rapportée aux diamètres conjugués, & le centre étant en D; le demi-diamètre ſitué dans la direction DS ſera $= \frac{m}{cof.\,\eta}$ & l'autre

l'autre $= n$. La tangente de l'angle GSM, que ces diamètres font entre eux, ſera $= \frac{coſ.\,\theta}{ſin.\,\theta\,.\,coſ.\,\varphi}$ & le coſinus $= \frac{ſin.\,\theta\,.\,coſ.\,\varphi}{\sqrt{(1 - ſin.\,\theta^2\,ſin.\,\varphi^2)}}$ $= ſin.\,\theta.\,coſ.\,\eta$. On connoît très-facilement de cette manière la nature de la ſection.

68. Après avoir conſidéré les ſections du cylindre, nous allons paſſer à celles du cône droit ou oblique. J'obſerve que le cône oblique ne diffère du droit qu'en ce que les ſections perpendiculaires à l'axe du cône ſont dans l'obliqûe des ellypſes, qui ont leurs centres ſur l'axe, tandis que dans le cône droit, ces ſections ſont des cercles. Soit donc $OaebfO$ un cône quelconque qui a ſon ſommet en O, & pour axe Oc, que je ſuppoſe perpendiculaire au plan de la planche; de ſorte que celle-ci repréſente le plan mené par le ſommet O du cône & perpendiculairement à ſon axe Oc. Soient menées par le point O ſur le plan de la planche les droites AB, EF, parallèles aux axes ab & ef de chaque ſection perpendiculaire à l'axe. Si donc d'un point quelconque M de la ſection $aebf$ on abaiſſe ſur le plan de la planche la perpendiculaire MQ, & du point Q ſur AB la perpendiculaire PQ; en ſuppoſant $OP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, on aura auſſi l'abſciſſe cp de la ſection $= x$, l'appliquée $pM = y$; & par conſéquent, puiſque les axes ab, ef, ont un rapport conſtant à $Oc = QM = z$; en faiſant $ac = bc = mz$ & $ec = fc = nz$, on aura $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$. Telle eſt l'équation qui exprime la nature de la ſurface conique entre les trois variables x, y, & z. Pl. XIV. Fig. 134.

69. Puiſque toutes les ſections perpendiculaires à l'axe Oc ſont des ellypſes, comme l'apprend l'équation $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$, (en ſuppoſant à z une valeur conſtante); on connoîtra facilement d'une manière ſemblable les ſections qui ſeront perpendiculaires ou à la droite AB, ou à la droite EF; car, ſi ce cône eſt coupé par un plan perpendiculaire à AB, & qui paſſe par le point P, en faiſant $OP = a$, on aura pour cette ſection l'équation $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2a^2$ entre les coordonnées $Pp = z$ & $pM = y$; laquelle appartient, comme il eſt aiſé de le voir, à une hyperbole qui a ſon centre en P,

dont le demi-axe tranſverſe ſera $= \frac{a}{m}$, & le demi-axe conjugué $= \frac{na}{m}$. Pareillement, ſi on ſuppoſe y conſtant, on verra que la ſection perpendiculaire à la droite EF eſt une hyperbole, dont le centre eſt ſur la droite EF.

Pl. XV. Fig. 135. 70. Si le plan qui coupe le cône eſt toujours perpendiculaire au plan $AEBF$, mais s'il ne l'eſt plus à aucune des lignes AB, EF, il ſera auſſi aiſé de déterminer la ſection du cône. Car ſuppoſons que ce plan coupe la baſe $AEBF$ ſuivant la droite BE, & faiſons $OB = a$, $OE = b$; abaiſſons enſuite d'un point quelconque M de la ſection la perpendiculaire MQ, & du point Q menons l'appliquée QP, de ſorte que $OP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; & qu'on ait par la nature du cône $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$. On aura donc $a : b :: a - x : y$ ou $y = b - \frac{bx}{a}$. Suppoſons les coordonnées de la ſection $BQ = t$ & $QM = z$, nous aurons $b : \sqrt{(a^2+b^2)} :: y : t$; & par conſéquent $y = \frac{bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ & $a - x = \frac{at}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Soit $\sqrt{(a^2+b^2)} = c$, on aura $y = \frac{bt}{c}$, $x = a - \frac{at}{c}$, & pour l'équation entre t & z:

$$m^2n^2c^2z^2 = m^2b^2tt + n^2a^2c^2 - 2n^2a^2ct + n^2a^2t^2.$$

Soit $t - \frac{n^2a^2c}{m^2b^2 + n^2a^2} = GQ = u$, BG étant $= \frac{n^2a^2c}{m^2b^2 + n^2a^2}$; on aura $m^2n^2c^2z^2 = (m^2b^2 + n^2a^2)\,u^2 + \frac{m^2n^2a^2b^2c^2}{m^2b^2 + n^2a^2}$.

71. Cette ſection du cône ſera donc une hyperbole qui aura ſon centre au point G, dont le demi-axe tranſverſe ſera $Ga = \frac{ab}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$ & le demi-axe conjugué $= \frac{mnabc}{m^2b^2 + n^2a^2}$. Les aſymptotes de cette hyperbole qui couperont l'axe Ga au centre G, feront avec cet axe Ga un angle dont la tangente eſt $= \frac{mnc}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$. Pour que cette ſection devienne une hyperbole équilatère, il faut donc que $m^2n^2a^2 + m^2n^2b^2 = m^2b^2 + n^2a^2$, ou que $\frac{b}{a} = tang.\ OBE = \frac{n\sqrt{(mm-1)}}{m\sqrt{(1-nn)}}$. A moins

donc que $\frac{m^2 - 1}{1 - n^2}$ ne soit plus grand que zéro, il est impossible d'obtenir de cette manière une hyperbole équilatère. Mais dans le cône droit où $m = n$, la tangente de l'angle que forment les asymptotes avec l'axe de la section sera $= m$, & l'angle $=$ à l'angle $a\,O\,c$. Pl. XIV. Fig 134.

72. Prenons à présent une section oblique, de manière cependant que son intersection $B\,T$ avec le plan $A\,E\,B\,F$ soit perpendiculaire à la droite AB. Faisons $O\,B = f$, & l'angle d'inclinaison du plan coupant sur le plan de la base, ou l'angle $O\,B\,C = \varphi$, de manière que le premier de ces plans rencontre l'axe $O\,C$ du cône au point C; on aura $B\,C = \frac{f}{cos.\,\varphi}$ & $O\,C = \frac{f.\,sin.\,\varphi}{cos.\,\varphi}$. D'un point quelconque M de la section demandée soit menée sur $B\,T$ la perpendiculaire $M\,T$; soit ensuite abaissée sur la base la perpendiculaire $M\,Q$, & du point Q sur $O\,B$ la perpendiculaire $Q\,P$; de manière qu'ayant fait $O\,P = x$, $P\,Q = y$ & $Q\,M = z$, on ait $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$. Supposons pour la section les coordonnées $B\,T = t$, $T\,M = u$, nous aurons, à cause de l'angle $Q\,T\,M = \varphi$; $Q\,M = z = u.\,sin.\,\varphi$, $T\,Q = u\,cos.\,\varphi = f - x$; d'où l'on tire $y = t$, $z = u\,sin.\,\varphi$ & $x = f - u\,cos.\,\varphi$; & par conséquent: Pl. XV. Fig. 136.

$$m^2 n^2 u^2.\,sin.\,\varphi^2 = m^2 t^2 + n^2 (f - u.\,cos.\,\varphi)^2.$$

73. Soit $B\,C = \frac{f}{cos}| = g$, ce qui donne $f = g\,.\,cos.\,\varphi$; x sera $= (g - u).\,cos.\,\varphi$, & on aura pour la section:

$$m^2 n^2 u^2 sin.\varphi^2 = m^2 t^2 + n^2 g^2.\,cos.\varphi^2 - 2\,n^2 g u\,cos.\,\varphi^2 + n^2 u^2 cos.\varphi^2.$$

Supposons $u - \frac{g\,cos.\,\varphi^2}{cos.\,\varphi^2 - m^2\,sin.\,\varphi^2} = S\,G = s$; après avoir mené $M\,S$ parallèlement à $B\,T$ & pris $B\,G = \frac{g\,cos.\,\varphi^2}{cos.\,\varphi^2 - m^2\,sin.\,\varphi^2} = \frac{f\,cos.\,\varphi}{cos.\varphi^2 - m^2\,sin.\,\varphi^2} = \frac{f\,cos.\,\varphi}{1 - (1 + m^2)\,sin.\,\varphi^2}$; de sorte que les coordonnées soient $G\,S = s$ & $S\,M = t$, & nous aurons cette équa-

tion $m^2t^2+n^2\,(cos.\,\varphi^2-m^2\,sin.\,\varphi^2)\,s^2-\frac{m^2n^2f^2\,sin.\,\varphi^2}{cos.\,\varphi^2-m^2\,sin.\,\varphi^2}=0$. La courbe sera donc une section conique qui aura son centre en G. Elle sera donc une parabole, si le centre G s'éloigne à l'infini ; ce qui arrive lorsque $tang.\,\varphi=\frac{1}{m}$, ou que la droite
Pl. XIV. Fig. 134. $B\,C$ est parallèle au côté $O\,a$ du cône. Or dans ce dernier cas on aura $m^2t^2+n^2f^2-2n^2fu\,cos.\,\varphi=0$. Le sommet de la
Pl. XV. Fig. 156. parabole sera en G, $B\,G$ étant supposé $=\frac{f}{2\,cos.\,\varphi}$; & son paramètre sera $=\frac{2\,n^2f.\,cos.\,\varphi}{mm}$.

74. Si la section est une parabole, lorsque $cos.\,\varphi^2-m^2\,sin.\,\varphi^2=0$, il est évident qu'elle sera une ellypse, lorsque $cos.\,\varphi^2$ sera plus grand que $m^2\,sin.\,\varphi^2$, ou que $tang.\,\varphi$ sera plus petite que $\frac{1}{m}$; auquel cas la droite $B\,C$ rencontrera en dessus le côté opposé $O\,a$ du cône. Puisque $B\,G=\frac{g}{1-m^2\,tang.\,\varphi^2}$; $B\,G$ sera plus grand que $B\,C$, G étant le centre de la section cherchée. Le demi-axe de cette section, qui sera dirigé suivant $B\,C$, sera donc $=\frac{m\,f\,sin.\,\varphi}{cos.\,\varphi^2-m^2\,sin.\,\varphi^2}$; l'autre demi-axe conjugué $=\frac{n\,f\,sin.\,\varphi}{\sqrt{(cos.\,\varphi^2-m^2\,sin.\,\varphi^2)}}$ & le paramètre $=\frac{n^2}{m}f.\,sin.\,\varphi$. D'où il suit que la section sera un cercle, si on a $m=n\sqrt{(cos.\,\varphi^2-m^2\,sin.\,\varphi^2)}$ ou $m^2=n^2-n^2\,(1+m^2)\,sin.\,\varphi^2$; & par conséquent $sin.\,\varphi=\frac{\sqrt{(n^2-m^2)}}{n\sqrt{(1+m^2)}}=sin.\,O\,B\,C$ & $cos.\,\varphi=\frac{m\sqrt{(1+n^2)}}{n\sqrt{(1+m^2)}}$. A moins donc que n ne soit plus grande que m, aucune de ces sections ne pourra être un cercle.

75. Si $m^2\,sin.\,\varphi^2$ est plus grand que $cos.\,\varphi^2$, ou que $tang.\,\varphi$ soit plus grande que $\frac{1}{m}$, de manière que la droite $B\,C$ s'éloigne en dessus du côté opposé $O\,a$ du cône, la section sera une hyperbole, dont le demi-axe transverse sera $=\frac{m\,f\,sin.\,\varphi}{-cos.\,\varphi^2+m^2\,sin.\,\varphi^2}$, son conjugué $=\frac{n\,f\,sin.\,\varphi}{\sqrt{(m^2\,sin.\,\varphi^2-cos.\,\varphi^2)}}$, & le paramètre $=\frac{n^2}{m}f.\,sin.\,\varphi$; & la tangente de l'angle, sous lequel les asymptotes cou-

pent l'axe au centre G, sera $= \frac{n}{m} \sqrt{(m\,m\,fin.\,\varphi^2 - cof.\,\varphi^2)}$. C'est pourquoi l'hyperbole sera équilatère, si $m\,m\,n\,n\,fin.\,\varphi^2 - n^2\,cof.\,\varphi^2 = m^2 = (m^2 + 1)n^2\,fin.\,\varphi^2 - n^2 = m^2$, ou $fin.\,\varphi = \frac{\sqrt{(m^2+n^2)}}{n\sqrt{(1+m^2)}}$ & $cof.\,\varphi = \frac{m\sqrt{(n^2-1)}}{n\sqrt{(1+m^2)}}$. Il est donc nécessaire pour cela que n soit plus grande que l'unité; autrement on ne peut obtenir une hyperbole équilatère par une telle section.

76. Si le cône est droit, ou si $m = n$, alors toutes les sections peuvent être rapportées à celles que nous venons de détailler, parce que la position de la droite AB est tout-à-fait arbitraire. Mais il reste pour le cône scalène à chercher les sections faites par un plan incliné d'une manière quelconque sur la droite AB. Soit donc BR l'intersection du plan coupant avec le plan de la base $AEBF$. Soit $OB = f$, l'angle $OBR = \theta$, & l'angle d'inclinaison du plan coupant sur la base $= \varphi$; on aura, en abaissant du point O sur BR la perpendiculaire OR, $OR = f.\,fin.\,\theta$ & $BR = f\,cof.\,\theta$. Ensuite, ayant mené dans le plan coupant la droite RC, on aura, à cause de l'angle $ORC = \varphi$, $RC = \frac{f.\,fin.\,\theta}{cof.\,\varphi}$ & $OC = \frac{f\,fin.\,\theta\,fin.\,\varphi}{cof.\,\varphi}$. Si l'on projette à présent la section perpendiculaire à l'axe OC du cône sur le plan de la base, ses axes principaux seront dirigés suivant les droites AB & EF; & l'un sera comme m & l'autre comme n. Pl. XV. Fig. 137.

77. Si l'on tire dans la projection le diamètre ef parallèle à BR, on aura l'angle $BOe = \theta$; soit aOb la position du diamètre conjugué; en faisant le demi-diamètre $Oa = \mu$, $Oe = \nu$, on trouvera:

$$\mu = \frac{\sqrt{(m^4\,fin.\,\theta^2 + n^4\,cof.\,\theta^2)}}{\sqrt{(m^2.\,fin\,\theta^2 + n^2.\,cof.\,\theta^2)}}$$

&

$$\nu = \frac{m\,n}{\sqrt{(m^2\,fin.\,\theta^2 + n\,n.\,cof.\,\theta^2)}};$$

puis

$$tang.\ BOb = \frac{n\,n:cof.\,\theta}{m\,m.\,fin.\,\theta}.$$

Par conséquent le sinus de cet angle sera $= \frac{nn \, cos. \, \theta}{\sqrt{(m^4 \, sin. \, \theta^2 + n^4 \, cos. \, \theta^2)}}$

& le cosinus $= \frac{mm \, . \, sin. \, \theta}{\sqrt{(m^4 \, sin. \, \theta^2 + n^4 \, cos. \, \theta^2)}}$.

A présent l'angle $ObR = \theta + BOb$; donc:

$$sin. \, ObR = \frac{mm \, sin. \, \theta^2 + nn \, cos. \, \theta^2}{\sqrt{(m^4 \, sin. \, \theta^2 + n^4 \, cos. \, \theta^2)}}$$

&

$$cos. \, ObR = \frac{(mm - nn) \, . \, sin. \, \theta \, cos. \, \theta}{\sqrt{(m^4 \, sin. \, \theta^2 + n^4 \, cos. \, \theta^2)}}.$$

De plus

$$\mu\nu = \frac{mn \sqrt{(m^4 \, sin. \, \theta^2 + n^4 \, cos. \, \theta^2)}}{mm \, . \, sin. \, \theta^2 + nn \, . \, cos. \, \theta^2}.$$

78. Puisque $OR = f \, . \, sin. \, \theta$, on aura:

$$Ob = \frac{OR}{sin. \, ObR} = \frac{f \, sin. \, \theta \sqrt{(m^4 \, sin. \, \theta^2 + n^4 \, cos. \, \theta^2)}}{mm \, sin. \, \theta^2 + nn \, . \, cos. \, \theta^2}$$

&

$$Rb = \frac{(mm - nn) \, f \, sin. \, \theta^2 \, . \, cos. \, \theta}{mm \, sin. \, \theta^2 + nn \, cos. \, \theta^2}.$$

Il suit de-là que le triangle RbC étant rectangle en R, la tangente de l'angle CbR sera $= \frac{mm \, sin. \, \theta^2 + nn \, cos. \, \theta^2}{(mm - nn) \, sin. \, \theta \, cos. \, \theta \, cos. \, \phi}$; ainsi l'angle CbR sera connu. Maintenant menons d'un point quelconque M de la section sur la droite RT la parallèle MT à Cb, & du point M sur Cb la parallèle MS à RT; faisons $bT = MS = t$, $bS = TM = u$, que nous considérerons comme les coordonnées obliquangles de la section cherchée, la tangente de l'angle bSM étant $= \frac{mm \, sin. \, \theta^2 + nn \, cos. \, \theta^2}{(mm - nn) \, sin. \, \theta \, cos. \, \theta \, . \, cos. \, \phi}$. Il est clair que ces coordonnées deviennent perpendiculaires entre elles dans le cône droit, parce que $m = n$.

79. D'un point M de la section soit abaissée sur le plan $AEBF$ la perpendiculaire MQ; si on mène TQ, elle sera parallèle au diamètre ab. Soit menée ensuite du point Q l'or-

donnée QP parallèle à l'autre diamètre ef. En faiſant $OP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on aura, par la nature du cône :

$$\mu^2 \nu^2 z^2 = \mu^2 y^2 + \nu^2 x^2.$$

En effet, ſi on conçoit par le point M une ſection du cône parallèle à la baſe, ſes demi-diamètres parallèles aux droites ab & ef ſeront μz & νz. Mais comme on a trouvé les côtés OC & Ob du triangle rectangle COb, on aura l'hypothénuſe $Cb = \frac{f.\, \text{ſin.}\, \theta \sqrt{(m^4\, \text{ſin.}\, \theta^2 + n^4\, \text{coſ.}\, \theta^2 - (m^2 - n^2)^2\, \text{ſin.}\, \theta^2\, \text{coſ.}\, \theta^2\, \text{ſin.}\, \varphi^2)}}{(mm\, \text{ſin.}\, \theta^2 + nn\, .\, \text{coſ.}\, \theta^2)\, \text{coſ.}\, \varphi}$;
&, à cauſe des triangles ſemblables TMQ, bCO, on aura :

$$TM(u) : TQ(Ob - x) : QM(z) :: bC : Ob : OC.$$

Donc $x = Ob - \frac{Ob\, .\, u}{Cb}$, $z = \frac{OC\, .\, u}{Cb}$ & $y = t$; par conſéquent

$$\mu^2 \nu^2\, OC^2\, .\, u^2 = \mu^2\, .\, Cb^2\, .\, t^2 + \nu^2\, .\, Ob^2 (Cb - u)^2.$$

80. Cette équation étant développée reviendra à celle-ci :

$$0 = \mu^2\, .\, Cb^2\, .\, t^2 + \nu^2 (Ob^2 - \mu^2\, .\, OC^2) u^2 - 2\nu^2\, .\, Ob^2\, .\, Cb\, .\, u + \nu^2\, .\, Ob^2\, .\, Cb^2.$$

Si on fait $u - \frac{Ob^2\, .\, Cb}{Ob^2 - \mu\mu\, .\, OC^2} = s$, ou qu'ayant pris $bG = \frac{Ob^2\, .\, Cb}{Ob^2 - \mu\mu\, .\, OC^2} = \frac{Cb}{1 - (mm\, \text{ſin.}\, \theta^2 + n^2\, \text{coſ.}\, \theta^2)\, \text{tang.}\, \varphi^2}$, on appelle $GS = s$; G ſera le centre de la ſection conique, qui a pour équation entre les coordonnées t & s :

$$u^2\, .\, Cb^2\, .\, t^2 + \nu^2 (Ob^2 - \mu^2\, OC^2) s^2 = \frac{\mu\mu\nu\nu\, Ob^2\, .\, OC^2\, .\, Cb^2}{Ob^2 - \mu\mu\, .\, OC^2},$$

dont le demi-diamètre tranſverſe ſera $= \frac{\mu\, .\, Ob\, .\, OC\, .\, Cb}{Ob^2 - \mu\mu\, OC^2}$, le demi-diamètre conjugué $= \frac{\nu\, .\, Ob\, .\, OC}{\sqrt{(Ob^2 - \mu\mu\, .\, OC^2)}}$ & le paramètre $= \frac{\nu\nu\, .\, Ob\, .\, OC}{\mu\, .\, Cb}$. Au reſte, il eſt viſible que, ſi $\text{tang.}\, \varphi$ eſt moindre que $\frac{1}{\sqrt{(mm\, \text{ſin.}\, \theta^2 + nn\, \text{coſ.}\, \theta^2)}}$ ou moindre que $\frac{\nu}{mn}$, la courbe ſera une ellypse ; si *tang.* $\phi = \frac{v}{m\,n}$, une parabole; & si *tang.* ϕ est plus grande que $\frac{v}{m\,n}$, une hyperbole.

81. Le troisième corps, dont nous nous sommes proposé ici de chercher les sections faites par un plan, est la sphère, dont on sait par la géométrie élémentaire que toutes les sections planes sont des cercles. Cependant, pour éclaircir la méthode qui apprend à déterminer, au moyen d'une équation donnée pour un solide, ses différentes sections, je traiterai ici analytiquement ce même sujet, pour lequel on emploie
Pl. XV. Fig. 138. ordinairement la synthèse. Soit en conséquence C le centre de la sphère par lequel on conçoit passer le plan de la planche, de façon que la section faite par ce plan soit un grand cercle, dont le rayon $CA = CB$ est supposé $= a$. Ce rayon sera en même temps celui de la sphère. Soit ensuite la droite DT l'intersection du plan coupant avec ce plan de la planche, sur laquelle on mènera du point C la perpendiculaire CD, que je ferai $= f$; & soit de plus l'angle d'inclinaison $= \phi$.

82. Supposons que M soit un point quelconque de la section cherchée; que de ce point on ait abaissé sur le plan de la planche la perpendiculaire MQ, & ensuite sur la droite CD prise pour axe la perpendiculaire QP. Si on fait les coordonnées $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, on aura, par la nature de la sphère, $x^2 + y^2 + z^2 = a\,a$. Soit abaissée pareillement du point M sur la droite DT la perpendiculaire MT, & soit tirée QT, à cause des deux droites QT & MT perpendiculaires à DT, l'angle MTQ mesurera l'inclinaison du plan coupant sur le plan de la base; je le fais $= \phi$. Par conséquent, si on regarde DT & MT comme les coordonnées de la section cherchée, & qu'on fasse $DT = t$, $TM = u$, MQ deviendra $= u\, \mathit{sin.}\, \phi$ & $TQ = u\, \mathit{cos.}\, \phi$. On aura donc $CP = x = f - u\, \mathit{cos.}\, \phi$; $PQ = y = t$ & $QM = z = u\, \mathit{sin.}\, \phi$. Ces valeurs étant substituées donneront pour l'équation de la section de la sphère que l'on cherche :

$$ff - 2fu \,.\, \mathit{cos.}\, \phi + uu + tt = a\,a.$$

83.

83. Il eſt clair que cette équation appartient au cercle; car, ſi on fait $u - f\,cof.\,\varphi = s$, elle deviendra :

$$ff\,fin.\,\varphi^2 + ss + tt = aa;$$

d'où il ſuit que le rayon de la ſection ſera $= \sqrt{(a^2 - f^2\,fin.\,\varphi^2)}$. C'eſt pourquoi ſi du point D on mène la parallèle Dc à l'appliquée TM, & que ſur la première on mène du centre C la perpendiculaire Cc, à cauſe de $CD = f$ & de l'angle $CDc = \varphi$, on aura $Dc = f\,.\,cof.\,\varphi$ & $Cc = f.fin.\,\varphi$. Il ſuit de-là que les coordonnées s & t étant rapportées au centre, le point c ſera le centre de la ſection, & $\sqrt{(CB^2 - Cc^2)}$ le rayon de ce cercle, comme cela eſt manifeſte par les élémens. On pourra chercher d'une manière ſemblable les ſections quelconques faites par des plans dans les autres ſolides, pourvu que leur nature ſoit exprimée par une équation entre trois variables.

84. Pour rendre l'opération plus ſenſible, ſoit propoſé un ſolide quelconque dont la nature ſoit exprimée par une équation entre les trois coordonnées $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; dont les deux premières ſoient ſituées dans le plan de la planche, & la dernière z lui ſoit perpendiculaire. Imaginons ce ſolide coupé par un plan quelconque, dont l'interſection avec le plan de la planche ſoit la droite DT & l'inclinaiſon déſignée par un angle $= \varphi$. Soit la droite $AD = f$, l'angle $ADE = \theta$; on aura, en abaiſſant du point A ſur DE la perpendiculaire AE, $AE = f.fin.\,\theta$, & $DE = f.cof.\,\theta$. Enſuite, ſi d'un point M de la ſection demandée on mène ſur DT la perpendiculaire MT, & qu'on tire QT; l'angle MTQ ſera égal à l'angle d'inclinaiſon donné φ. Par conſéquent, ſi on prend DT & TM pour les coordonnées de la ſection dont il s'agit, & qu'on faſſe $DT = t$, $TM = u$, on aura $QM = u\,fin.\,\varphi$ & $TQ = u\,cof.\,\varphi$. Pl. XVI. Fig. 139.

85. Si du point T on abaiſſe ſur l'axe AD la perpendiculaire TV, à cauſe de l'angle $TDV = \theta$, on aura $TV = t.fin.\,\theta$, & $DV = t.cof.\,\theta$. Enſuite, parce que l'angle $TQP = \theta$, on aura $PV = u\,fin.\,\theta.cof.\,\varphi$, & $PQ - TV = u.cof.\,\theta.cof.\,\varphi$.

Ainſi on pourra avoir de la manière ſuivante les coordonnées x, y & z en t & en u:

$$AP = x = f + t \, cof.\, \theta - u \, fin.\, \theta \,.\, cof.\, \varphi$$
$$PQ = y = t \, fin.\, \theta + u \, cof.\, \theta \,.\, cof.\, \varphi$$
$$\& \quad QM = z = u \, fin.\, \varphi.$$

C'eſt pourquoi, ſi on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation donnée pour le ſolide entre x, y & z, on obtiendra une équation entre t & u, ou entre les coordonnées de la ſection cherchée, dont on connoîtra par cette raiſon la nature. Au reſte, cette méthode s'accorde à-peu-près avec celle que nous avons employée plus haut, art. 50.

CHAPITRE IV.

Du Changement des Coordonnées.

86. On ſait que les équations des lignes courbes ſituées dans un même plan peuvent prendre une infinité de formes différentes, en changeant ſoit l'origine des abſciſſes, ſoit la poſition de l'axe, ou l'une & l'autre à la fois; la même choſe a lieu ici, & même une variété beaucoup plus conſidérable s'offre dans le cas préſent. En effet, deux coordonnées ſituées dans un même plan peuvent être variées d'une infinité de manières. Enſuite ce même plan, qui renferme les deux coordonnées, peut être changé, & par-là la première variété peut ſe multiplier à l'infini; c'eſt-à-dire que, lorſqu'une équation eſt donnée entre trois coordonnées perpendiculaires entre elles, on peut toujours en trouver une autre entre trois autres coordonnées quelconques pareillement perpendiculaires entre elles, dont la poſition à l'égard des premières peut être variée infiniment plus que s'il n'y avoit que deux coordonnées, comme il arrive dans les équations des lignes courbes.

87. Faisons varier d'abord seulement l'origine x des abscisses sur l'axe, de sorte que les deux autres coordonnées y & z restent les mêmes; la nouvelle abscisse différera de x d'une quantité constante. Soit donc cette nouvelle abscisse $= t$, on aura $x = t \pm a$; valeur qui, substituée dans l'équation de la surface, donnera une équation entre les trois coordonnées t, y & z, qui, quoique différente de la première, appartiendra pourtant à la même surface. Les autres coordonnées y & z pourront de même être augmentées ou diminuées de quantités constantes; &, si on suppose $x = t \pm a$, $y = u \pm b$ & $z = v \pm c$, on aura pour la même surface une équation entre les trois variables t, u & v; ces nouvelles coordonnées seront visiblement parallèles aux premières. Cependant l'équation de la surface, quoiqu'elle devienne plus générale, ne varie pas beaucoup de cette manière.

88. Comme les trois coordonnées perpendiculaires, dont l'équation exprime la nature de la surface, sont rapportées à trois plans perpendiculaires entre eux; supposons qu'un de ces plans, celui sur lequel se trouvent les deux coordonnées x & y, reste fixe, & qu'on y prenne pour axe une autre ligne quelconque CT, autre que AP. Comme les premières coordonnées pour l'axe AP étoient $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, la coordonnée $QM = z$ restera la même pour le nouvel axe CT; mais les deux autres deviendront $CT = t$, $TQ = u$, QT ayant été mené perpendiculairement au nouvel axe CT. Ainsi, pour trouver l'équation entre ces nouvelles coordonnées t, u & z, on mènera CR parallèle au premier axe AP; ensuite du point C on mènera sur cet axe la perpendiculaire CB; on fera $AB = a$, $BC = b$, & l'angle $RCT = \zeta$. Enfin on mènera la perpendiculaire TR sur CR, & du point T sur QP prolongé la perpendiculaire TS. Pl. XV. Fig. 140.

89. Cela posé, on aura dans le triangle TCR, $TR = t\, sin.\, \zeta$, $CR = t . cos.\, \zeta$; & dans le triangle QTS, dont l'angle en Q, est aussi $= \zeta$, on aura $TS = u\, sin.\, \zeta$ & $QS = u\, cos.\, \zeta$. On tirera de-là $AP = x = CR + TS - AB = t . cos.\, \zeta + u . sin.\, \zeta - a$ & $QP = QS - TR - BC = y = u\, cos.\, \zeta - t\, sin.\, \zeta - b$. Si donc on substitue ces valeurs, au lieu de x & de y, dans l'équation

propofée pour la furface, il en réfultera une équation entre les trois nouvelles coordonnées t, u & z, qui exprimera auffi la nature de la même furface. Cette nouvelle équation fera donc beaucoup plus étendue, puifqu'elle renfermera trois nouvelles conftantes arbitraires a, b & l'angle ζ, qui ne fe trouvoient pas dans la première équation. Ce fera là l'équation générale, quand le plan qui renferme les deux coordonnées x & y refte invariable.

Pl. XV. Fig. 141. 90. Faifons auffi varier à préfent le plan fur lequel nous avons pris les deux premières coordonnées x & y; & fuppofons d'abord que l'interfection du nouveau plan avec le premier APQ tombe fur la droite AP, qui fera auffi regardée comme l'axe par rapport aux nouvelles coordonnées. Soit donc APT ce nouveau plan, dont l'inclinaifon à l'égard du premier APQ fera l'angle QTP, que je repréfente par η. On abaiffera de M fur PT la perpendiculaire MT, qui fera en même temps perpendiculaire fur le nouveau plan, & qui tiendra lieu de troifième coordonnée. Nous ferons donc les trois nouvelles coordonnées $AP = x$, $PT = u$ & $TM = v$; &, après avoir mené TR perpendiculaire à PQ & TS à QM, nous aurons $TR = u \cdot \mathit{fin.}\, \eta$, $PR = u \cdot \mathit{cof.}\, \eta$, $TS = v\, \mathit{fin.}\, \eta$ & $MS = v \cdot \mathit{cof.}\, \eta$; d'où nous conclurons $PQ = y = u\, \mathit{cof.}\, \eta - v\, \mathit{fin.}\, \eta$ & $QM = z = v \cdot \mathit{cof.}\, \eta + u \cdot \mathit{fin}\, \eta$; valeurs qui, fubftituées à y & à z dans l'équation propofée, en donneront une autre entre les trois nouvelles coordonnées x, u & v, laquelle exprimera la nature de la même furface.

Pl. XV. Fig. 140. 91. Suppofons à préfent que l'interfection du nouveau plan coupant avec le plan APQ tombe fur une ligne quelconque CT, & foit η l'inclinaifon de ces plans; prenons en outre cette droite CT pour axe dans ce plan. Cherchons d'abord l'équation entre les coordonnées dans le plan APQ rapportées à l'axe CT, laquelle, d'après ce qui précède, fe trouvera ainfi: on fera $AB = a$, $BC = b$, l'angle $TCR = \zeta$, & les coordonnées $CT = p$, $TQ = q$ & $QM = r$; ce qui donnera $x = p \cdot \mathit{cof.}\, \zeta + q\, \mathit{fin.}\, \zeta - a$, $y = q\, \mathit{cof.}\, \zeta - p\, \mathit{fin.}\, \zeta - b$ & $z = r$. Maintenant, fuivant ce qu'on a vu dans l'art. précédent, fi on prend les nouvelles coordonnées t, u & v, p deviendra

$= t$, $q = u \cdot \cos n - v \sin n$ & $r = v \cdot \cos n + u \sin n$. Ces ſubſtitutions faites, les coordonnées principales x, y & z, ſe détermineront par les nouvelles de la manière ſuivante, de ſorte que

$$x = t \cos \zeta + u \sin \zeta \cos n - v \sin \zeta \sin n - a$$
$$y = - t \sin \zeta + u \cdot \cos \zeta \cdot \cos n - v \cdot \cos \zeta \cdot \sin n - b$$
&
$$z = u \sin n + v \cdot \cos n.$$

92. Prenons à préſent ſur ce nouveau plan, où ſont ſituées les coordonnées t & u, une autre ligne quelconque pour axe; nous aurons par ce moyen l'équation la plus générale poſſible pour la ſurface propoſée. Soient à cet effet AP, PQ, QM, les coordonnées t, u & v, que nous venons de trouver, de ſorte que AP repréſente l'interſection du plan dont il a été queſtion, avec le plan ſur lequel on conçoit placées les principales coordonnées x & y; & ſoit la droite CT le nouvel axe auquel ſe rapportent les nouvelles coordonnées les plus générales que nous cherchons. Nous les ſuppoſerons $CT = p$, $TQ = q$ & $QM = r$. Il y a en outre les lignes conſtantes AB & BC, & l'angle TCR que je ferai $= \theta$. Cela poſé, on aura, ſuivant l'art. 89, Pl. XV. Fig. 140.

$$t = p \cdot \cos \theta + q \sin \theta - AB$$
$$u = - p \sin \theta + q \cdot \cos \theta - BC$$
&
$$v = r.$$

Si on ſubſtitue ces valeurs dans les expreſſions de l'art. précédent, on trouvera :

$$x = p(\cos \zeta \cos \theta - \sin \zeta \cos n \sin \theta) + q(\cos \zeta \sin \theta + \sin \zeta \cdot \cos n \cos \theta) - r \cdot \sin \zeta \sin n + f$$
$$y = - p(\sin \zeta \cos \theta + \cos \zeta \cdot \cos n \cdot \sin \theta) - q(\sin \zeta \cdot \sin \theta - \cos \zeta \cdot \cos n \cos \theta) - r \cos \zeta \cdot \sin n + g$$
&
$$z = - p \sin n \cdot \sin \theta + q \cdot \sin n \cos \theta + r \cdot \cos n + h;$$

équations dans lesquelles f, g & h, sont des lignes constantes, qui dérivent de la composition de celles qui ont été introduites dans le calcul.

93. Il paroît donc que l'équation la plus générale d'une surface quelconque renferme six constantes arbitraires; & cette équation exprimera toujours la nature de la même surface, de quelque manière qu'on les détermine. Or, quelque simple & quelque succinte que soit l'équation de la surface entre les coordonnées x, y & z, si on en forme l'équation la plus générale entre p, q & r; celle-ci, à cause du grand nombre de constantes arbitraires, deviendra nécessairement très-compliquée, sur-tout si les dimensions de x, y & z, sont élevées. A peine y aura-t-il donc un cas où il faudra recourir à l'équation la plus générale; car, quoiqu'on en pût concevoir l'avantage de rendre l'équation très-simple, en déterminant les constantes d'une manière convenable; cependant cette opération, à cause de la longueur du calcul, deviendroit le plus souvent très-pénible. Ce n'est pas pourtant que cette méthode de former les équations les plus générales ne nous serve dans la suite pour en déduire & démontrer de très-belles propriétés.

94. Quoique l'équation la plus générale soit le plus souvent très-compliquée; cependant, si nous faisons attention aux dimensions que forment les coordonnées prises ensemble, leur nombre sera toujours égal au nombre des dimensions formé par les premières coordonnées x, y & z. Ainsi, comme l'équation de la sphère $xx + yy + zz = aa$ est de deux dimensions, l'équation la plus générale entre p, q & r, ne contiendra pas plus de deux dimensions. Ainsi le nombre de dimensions que forment les coordonnées dans l'équation d'une surface quelconque nous fournit un caractère essentiel qui distingue la nature de cette surface; puisque, de quelque manière qu'on fasse varier la position des coordonnées, il en résulte toujours le même nombre de dimensions. Nous ferons ici, par rapport aux surfaces, la même remarque que nous avons faite auparavant à l'égard des lignes courbes, & d'après laquelle nous les avons divisées en ordres. Il sera à propos de diviser d'une manière

ſemblable les ſurfaces ſuivant les dimenſions des coordonnées; la ſurface du premier ordre ſera pour nous celle dont l'équation n'a qu'une dimenſion; nous rapporterons au ſecond ordre celle dans l'équation de laquelle les coordonnées s'élèvent à deux dimenſions; on eſtimera ainſi de ſuite, par le nombre de dimenſions, le degré des ordres ultérieurs.

95. Si nous rapprochons à préſent ce que nous venons de dire de ce que nous avons expoſé plus haut ſur la recherche des ſections planes d'une ſurface quelconque, nous remarquerons facilement que l'ordre des ſections s'accorde toujours avec celui auquel appartient la ſurface. En effet, ſuppoſons que l'équation propoſée pour une ſurface quelconque entre les coordonnées x, y & z, ſoit de l'ordre n, & que les coordonnées perpendiculaires d'une de ſes ſections ſoient t & u. Nous avons vu ci-deſſus, art. 85, qu'on trouveroit l'équation entre t & u, en ſubſtituant dans l'équation de la ſurface les valeurs ſuivantes :

$$x = f + t \cdot cos. \theta - u\, sin. \theta \cdot cos. \varphi$$

$$y = t \cdot sin. \theta + u \cdot cos. \theta \cdot cos. \varphi$$

&

$$z = u \cdot sin. \varphi.$$

Il eſt donc évident que l'équation de la ſection ne peut pas avoir plus de dimenſions que n'en avoit l'équation primitive entre x, y & z; mais qu'il y en aura toujours le même nombre dans l'une & dans l'autre.

96. Une ſurface du premier ordre ne peut donner pour les ſections faites par un plan que des lignes du premier ordre, ou des droites. Enſuite il ne réſulte de la ſection d'une ſurface du ſecond ordre d'autres lignes que celles du ſecond ordre, ou des ſections coniques; car une ſurface conique eſt auſſi du ſecond ordre, puiſque ſon équation eſt :

$$zz = \alpha xx + \beta yy.$$

Semblablement, la ſurface du troiſième ordre donnera pour ſections planes des lignes du troiſième ordre, ainſi de ſuite.

Il peut arriver cependant quelquefois que l'équation de la ſection contienne des diviſeurs; dans ce cas la ſection ſera composée de deux ou pluſieurs lignes des ordres inférieurs. C'eſt ainſi que la ſection du cône faite par le ſommet ſera composée de deux lignes droites, qui jointes enſemble forment cependant l'apparence d'une ligne du ſecond ordre, comme nous l'avons remarqué ci-deſſus.

97. La claſſification des ſurfaces étant ainſi établie, arrêtons-nous un peu de préférence ſur celles qui appartiennent au premier ordre. L'équation qui exprime leur nature ſera donc $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$; & comme toutes leurs ſections faites par un plan ſont des lignes droites, il eſt évident qu'il eſt impoſſible que ces ſurfaces ne ſoient pas planes; car, ſi elles avoient quelque convexité ou quelque concavité, il en réſulteroit néceſſairement une ſection curviligne. Car, quoiqu'il y ait dans les autres ordres des ſurfaces dont certaines ſections ſont des lignes droites (comme nous l'avons vu dans le cylindre, le cône & dans d'autres); cependant les ſections curvilignes n'en ſont pas exclues. Nous obſervons ici la même analogie que dans les lignes; car de même qu'une ligne qui ne peut être coupée par une droite en plus d'un point, ne peut manquer d'être droite, nous concluons de même qu'une ſurface qui coupée par un plan donne toujours une ligne droite, eſt néceſſairement plane elle-même.

98. C'eſt ce qu'on peut démontrer très-clairement au moyen de l'équation la plus générale. En effet, ſi, comme nous l'avons enſeigné art. 92, on forme de l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$, l'équation la plus générale entre les coordonnées p, q & r; comme on introduit ſix nouvelles conſtantes arbitraires, rien n'empêche de les déterminer de manière que les coefficiens des deux coordonnées p & q diſparoiſſent, & qu'il reſte une équation de cette forme $r = f$, pour exprimer la nature de la même ſurface. Or cette équation $r = f$ fait voir que la ſurface propoſée eſt parallèle au plan dans lequel ſe trouvent les deux coordonnées p & q, & par conſéquent plane. Il peut même ſe faire que r devienne $= 0$; & alors

alors il eſt évident que le plan même où l'on prend p & q, eſt la ſurface cherchée.

99. A préſent donc qu'il eſt conſtant que la ſurface exprimée par l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ eſt plane, il s'agit de déterminer ſa poſition à l'égard du plan ſur lequel on a pris les coordonnées x & y. Soit en conſéquence M un point quelconque de cette ſurface, & faiſons les trois coordonnées $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$. D'abord, en ſuppoſant $z = 0$, on aura l'équation $\alpha x + \beta y = a$, qui exprimera l'interſection de la ſurface demandée avec le plan APQ. Il eſt évident qu'elle ſera une ligne droite BCR, dont la poſition à l'égard de l'axe AP ſera telle, que la perpendiculaire AB à cet axe dans le plan $APQ = \frac{a}{\beta}$, & que $AC = \frac{a}{\alpha}$; d'où il s'enſuit que la tangente de l'angle ACB ſera $= \frac{\alpha}{\beta}$; & partant ſon ſinus $= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$, & ſon coſinus $= \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$. Prolongeons enſuite QP juſqu'à la rencontre de la droite BC en R; à cauſe de $CP = x - \frac{a}{\alpha}$, nous aurons $CR = \frac{x\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}{\beta} - \frac{a\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}{\alpha\beta}$, & $PR = \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{a}{\beta}$. Pl. XV. Fig. 142.

100. Soit abaiſſée du point Q ſur BC la perpendiculaire QS, & ſoit tirée MS; il eſt clair que l'angle MSQ meſure l'inclinaiſon de la ſurface propoſée ſur le plan APQ. Puis donc qu'on a $PR = \frac{\alpha x - a}{\beta}$, on aura $QR = \frac{\alpha x + \beta y - a}{\beta} = \frac{-\gamma z}{\beta}$; & à cauſe de l'angle $RQS = ACB$, $QS = \frac{-\gamma z}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$; d'où il ſuit que la tangente de l'angle $QSM = \frac{-\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta}}{\gamma}$; & par conſéquent ſon coſinus $= \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}}$. L'inclinaiſon de la ſurface cherchée ſur le plan des x & des y eſt donc meſurée par un angle dont la tangente eſt $= \frac{-\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}{\gamma}$; pareillement la même ſurface ſera inclinée ſur le plan des coordonnées x & z ſous un angle dont la tangente eſt

$= \frac{-\sqrt{(\alpha\alpha + \gamma\gamma)}}{\beta}$, & ſur le plan des coordonnées y & z ſous un angle dont la tangente eſt $= \frac{-\sqrt{(\beta\beta + \gamma\gamma)}}{\alpha}$.

CHAPITRE V.

Des Surfaces du ſecond Ordre.

101. MAIS, après avoir fixé les ordres des ſurfaces ſur le nombre des dimenſions que forment dans l'équation les plus hautes puiſſances des trois coordonnées x, y, z, priſes enſemble, on pourra donc, ſi on propoſe pour une ſurface une équation algébrique, aſſigner ſur-le-champ l'ordre auquel cette ſurface doit être rapportée; &, comme les ſurfaces du premier ordre, comme nous l'avons fait voir, ſont toutes planes, nous nous occuperons dans ce chapitre de l'examen de celles du ſecond ordre. On remarquera d'abord dans celle-ci une plus grande diverſité que dans les lignes du ſecond degré, ce qu'on verra facilement avec un peu d'attention. Je ferai donc en ſorte de développer avec clarté ces différens genres. Quant aux ordres ſupérieurs, le nombre des genres ſe multiplie tellement, que je dois abſolument me diſpenſer de les détailler.

102. Comme la nature des ſurfaces du ſecond ordre eſt exprimée par une équation dans laquelle les variables x, y & z, s'élèvent à deux dimenſions; le cylindre & le cône tant droit qu'oblique, & la ſphère, dont nous avons décrit les propriétés, ſont renfermés dans le ſecond ordre. Mais toutes les ſurfaces qui appartiennent à cet ordre, ſont compriſes dans cette équation générale :

$$\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0;$$

car, de quelque manière qu'on prenne les trois coordonnées, l'équation ſera toujours de cette forme. Les différens genres de ſurfaces qui appartiennent à l'ordre actuel, dépendront du rapport différent que les coefficiens auront réciproquement entre eux; & qui, quoiqu'une même ſurface ſoit exprimée par une infinité d'équations, donneront cependant une multitude infinie de différentes ſurfaces.

103. Nous avons pris la principale diviſion des lignes courbes planes dans la propriété qu'elles avoient ou de s'étendre à l'infini, ou d'être renfermées dans un eſpace fini; nous diviſerons d'une manière ſemblable toutes les ſurfaces d'un ordre quelconque en deux claſſes, dont la première contiendra celles qui s'étendent à l'infini, & nous rapporterons à la ſeconde celles qui ſont renfermées dans un eſpace fini. Ainſi le cylindre & le cône ſeront de la première claſſe, & la ſphère appartiendra à la ſeconde. Il ne ſe trouvera à la vérité dans cette dernière aucune ſurface d'un ordre impair. En effet, comme chaque ſurface d'un ordre impair donne des ſections planes du même ordre, & que les courbes d'un ordre impair s'étendent toutes à l'infini, il eſt néceſſaire que les ſurfaces de ces ordres s'étendent auſſi à l'infini.

104. Or, toutes les fois qu'une ſurface eſt infinie, il faut qu'au moins une des trois variables x, y & z, ſoit auſſi infinie. Ainſi, puiſqu'il eſt indifférent laquelle dans ce cas doit être regardée comme infinie, ſuppoſons que ce ſoit z, pourvu, bien entendu, que la ſurface ſoit infinie. Pour connoître la nature de cette portion qui s'étend à l'infini, nous ferons donc $z = \infty$. Il faut à préſent faire ſur-tout attention au premier terme αzz, examiner s'il manque, ou s'il ne manque pas. Suppoſons donc d'abord que ce terme ſoit dans l'équation; ceux-ci ηz & $\varkappa$ diſparoîtront devant lui, & on aura pour la partie infinie dont il s'agit, cette équation :

$$\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \epsilon xy + \zeta x^2 + \theta y + \iota x = 0;$$

dans laquelle tous les termes qui ne ſont pas infinis, ou qui du moins ſont infiniment plus petits que αzz, diſparoiſſent.

105. Suppoſons qu'il ne manque aucun des termes où les

variables ont deux dimenſions; car, quelle que ſoit la ſurface, tous les termes de plus haute dimenſion ſe trouveront toujours dans ſon équation la plus générale ; & par conſéquent l'hypothèſe que nous faiſons ici ne peut nuire à l'univerſalité de la ſolution. Mais quand les termes yz & xz, ſe trouvent dans l'équation, les termes θy & ιx s'évanouiſſent devant eux, l'équation ſera donc réduite à :

$$\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta xx = 0;$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{-\beta y - \gamma x \pm \sqrt{((\beta^2 - 4\alpha\delta)y^2 + (2\beta\gamma - 4\alpha\varepsilon)xy + (\gamma^2 - 4\alpha\zeta)x^2)}}{\alpha}.$$

Telle eſt donc l'équation qui exprime la nature de la portion qui s'étend à l'infini.

106. Si la ſurface a quelque partie qui s'étende à l'infini, elle ſe confondra donc avec la portion infinie de la ſurface exprimée par cette équation :

$$\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 = 0;$$

de façon que cette ſurface eſt en quelque ſorte l'aſymptote de celle exprimée par l'équation générale. Mais, comme dans cette équation les trois variables ont par-tout deux dimenſions, elle appartiendra à une ſurface conique qui aura ſon ſommet à l'origine des coordonnées, où toutes s'évanouiſſent en même temps. On peut donc toujours aſſigner une ſurface conique pour l'aſymptote de la ſurface propoſée, ſi celle-ci doit s'étendre à l'infini; ou dont la portion infinie ſe confondra entièrement avec la propoſée, ou en ſera ſeulement éloignée d'un intervalle fini. Ainſi, de la même manière que nous avons diſtingué les branches infinies des courbes par les lignes droites qui étoient leurs aſymptotes, nous aurons auſſi à diſtinguer les parties infinies des ſurfaces par des ſurfaces coniques, qui ſeront de même leurs aſymptotes.

107. Toutes les fois donc qu'une ſurface conique aſymptote ſera réelle, la ſurface propoſée elle-même s'étendra à

l'infini, & cela de manière que les parties infinies de l'une & de l'autre ſe confondent; ainſi on pourra conclure la nature de la ſurface donnée de celle de la ſurface aſymptote. Mais, ſi la ſurface aſymptote devient imaginaire, la ſurface même propoſée n'aura point de partie infinie, & elle ſera renfermée en entier dans un eſpace fini. Ainſi, pour chercher les ſurfaces du ſecond ordre qui ſont renfermées dans un eſpace fini, il ne faut que voir dans quel cas l'équation de la ſurface aſymptote devient imaginaire; ce qui arrive, lorſque toute cette ſurface ſe réduit à un point unique. Car, ſi elle avoit quelque étendue, ou un point placé hors du ſommet, elle devroit néceſſairement s'étendre à l'infini, puiſque nous avons fait voir plus haut que toute droite qui paſſe par le ſommet & par un point de la ſurface, eſt ſituée ſur la ſurface même.

108. Ainſi, lorſque la ſurface conique aſymptote exprimée par cette équation

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2=0$$

ſe réduit à un point unique, toutes les ſections faites par le ſommet doivent pareillement ſe réduire à un ſeul point; & d'abord, en faiſant $z=0$, l'équation $\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2=0$ doit être impoſſible, à moins que x ne ſoit $=0$ & $y=0$; ce qui a lieu, lorſque $4\delta\zeta$ eſt plus grand que $\varepsilon\varepsilon$. La même choſe doit arriver, en faiſant ou $x=0$ ou $y=0$; on aura donc $4\alpha\delta$ plus grand que β^2 & $4\alpha\zeta$ plus grand que γ^2. Par conſéquent, ſi dans l'équation donnée pour la ſurface du ſecond ordre:

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2+\eta z+\theta y+\iota x+\varkappa=0,$$

$4\delta\zeta$ n'eſt pas plus grand que $\varepsilon\varepsilon$; $4\alpha\delta$ plus grand que $\beta\beta$; $4\alpha\zeta$ plus grand que $\gamma\gamma$, la ſurface aura certainement des parties qui s'étendent à l'infini.

109. Mais ces trois conditions ne ſuffiſent pas pour que la ſurface ſoit renfermée dans un eſpace fini, il faut encore que la valeur de z tirée de l'équation aſymptotique devienne imaginaire; ce qui a lieu toutes les fois que cette expreſſion:

$$(\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + 2(\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx$$

obtient une valeur négative, pourvu qu'on prenne pour les deux variables x & y des valeurs quelconques, excepté o. Comme $\beta\beta - 4\alpha\delta$ & $\gamma\gamma - 4\alpha\zeta$ sont des quantités négatives, cela arrivera si $(\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon)^2$ est moindre que $(\beta^2 - 4\alpha\delta)(\gamma^2 - 4\alpha\zeta)$; c'est-à-dire, si $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ est moindre que $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$; pourvu toutefois que α ait une valeur positive; car nous avons divisé cette équation par α. Mais, si α a une valeur positive, à cause des conditions énoncées plus haut, $4\alpha\zeta$ plus grand que γ^2, $4\alpha\delta$ plus grand que β^2, & $4\delta\zeta$ plus grand que $\varepsilon\varepsilon$, les coefficiens δ & ζ seront positifs.

110. Une surface du second ordre sera donc renfermée dans un espace fini, si son équation est telle que les quatre conditions suivantes aient lieu; savoir si :

$4\alpha\zeta$ est plus grand que $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ plus grand que $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ plus grand que $\varepsilon\varepsilon$ & $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ moindre que $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$.

Ainsi, nous établissons pour premier genre des surfaces du second ordre, celui auquel appartiennent toutes les espèces qui n'ont point de parties infinies, mais qui sont renfermées dans un espace fini. C'est donc à ce genre qu'appartient la sphère, dont l'équation est:

$$zz + yy + xx = aa;$$

car, puisqu'on a $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\zeta = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$; toutes les quatre conditions sont remplies. Plus généralement, cette équation

$$\alpha zz + \delta yy + \zeta xx = aa$$

appartiendra à ce genre, tant que α, δ, ζ, seront des quantités positives; elle exprimera toujours une surface fermée, à moins qu'un ou deux coefficiens ne manquent.

111. Connoissant les quatre conditions nécessaires pour qu'une surface soit renfermée dans un espace fini, si on pro-

pofe une équation quelconque déterminée du fecond ordre, on pourra juger fur-le-champ fi la furface qu'elle exprime a des parties qui s'étendent à l'infini, ou n'en a pas. Car, fi une feule de ces quatre conditions manque, la furface s'étend certainement à l'infini. Mais dans ce cas il y a quelque fubdivifion à faire, pour diftinguer la variété qui fe remarque dans ces parties. Suppofons donc que la première fubdivifion foit pour le cas, où

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 \text{ eft plus grand que } \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta;$$

alors la furface s'étendra à l'infini, & aura pour afymptote une furface conique, comme nous l'avons déjà fait voir ci-deffus. Ce cas eft directement oppofé au précédent, où toute la furface eft renfermée dans un efpace fini.

112. Mais il y a des cas intermédiaires où, quoique la furface s'éloigne à l'infini, elle tient cependant un certain milieu entre les deux précédentes, à-peu-près comme la Parabole tient un certain milieu entre l'Ellypfe & l'Hyperbole. Le cas arrive fi

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta;$$

on aura par conféquent

$$\alpha z = -\beta y - \gamma x + y\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\delta)} + x\sqrt{(\gamma^2 - 4\alpha\zeta)}.$$

L'équation afymptotique

$$\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 = 0$$

aura donc deux facteurs fimples, qui feront ou réels, ou imaginaires, ou égaux entre eux. Ces trois conditions fourniffent donc trois genres de furfaces infinies; ainfi nous avons trouvé cinq genres de furfaces du fecond ordre, que nous allons maintenant examiner avec plus de foin.

113. Comme, en changeant la pofition des trois axes auxquels les coordonnées font parallèles, on peut ramener l'équation générale à une forme plus fimple, faifons ufage de cette réduction, de manière cependant qu'en ramenant l'équation

générale des ſurfaces du ſecond ordre à la forme la plus ſimple, cette dernière embraſſe toutes les eſpèces auſſi bien que la générale. Ainſi l'équation générale des ſurfaces du ſecond ordre étant :

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2+\eta z+\theta y+\iota x+\varkappa=0,$$

cherchons l'équation entre les trois autres coordonnées p, q & r, que nous ſuppoſerons ſe couper réciproquement au même point que les trois premières. Pour cela, conformément à l'art. 92, il faudra faire :

$$x= p(cos.k.cos.m-sin.k.sin.m.cos.n)+q(cos.k.sin.m+sin.k.cos.m.cos.n)-r.sin.k.sin.n$$

$$y=-p(sin.k\ cos.m+cos.k\ sin.m.cos.n)-q(sin.k\ sin.m-cos.k\ cos.m.cos.n)-r.cos.k.sin.n$$

&

$$z=-p.sin.m.sin.n+q.cos.m.sin.n+r.cos.n.$$

D'où réſulte cette équation :

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+Dpq+Epr+Fqr+Gp+Hq+Ir+K=0.$$

114. On pourra à préſent déterminer ces angles arbitraires k, m & n, de manière que les trois coefficiens D, E & F diſparoiſſent. Car, quoique le calcul devienne trop long pour effectuer la détermination actuelle de ces angles; ſi pourtant quelqu'un pouvoit douter que cette élimination donnât toujours une valeur réelle pour ces angles, il devra accorder au moins que les deux coefficiens D & E peuvent être rendus égaux à zéro. Or, cela fait, la poſition du troiſième axe, auquel les ordonnées r ſont parallèles dans le plan perpendiculaire aux ordonnées p, peut être facilement changé, de manière que le coefficient F s'évanouiſſe auſſi. Car il n'y aura qu'à faire $q=t.sin.\,i+u.cos.\,i$ & $r=t\,cos.\,i-u\,sin.\,i$; &, au lieu du terme qr, on aura le terme tu, dont le coefficient pourra être rendu égal à zéro, à l'aide de l'angle i. Par ce moyen l'équation générale des ſurfaces du ſecond ordre prendra donc cette forme :

Ap^2

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+Gp+Hq+Ir+K=0.$$

115. A présent, on peut en outre augmenter ou diminuer les coordonnées $p, q, r,$ de quantités données, pour que les coefficiens G, H & I disparoissent ; ce qui se fera en changeant seulement le point où toutes les coordonnées prennent leur origine ; & de cette manière toutes les surfaces du second ordre seront comprises dans cette équation :

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+K=0;$$

par où l'on voit que chacun des trois plans principaux menés par l'origine des coordonnées divise la surface en deux parties semblables & égales. Ainsi, toute surface du second ordre n'a pas seulement un plan diamétral, mais bien trois, qui se coupent réciproquement au même point à angles droits. Ce point sera par cette raison le centre de la surface, quoiqu'il y ait quelques cas où ce centre soit à une distance infinie. Il en est ici comme des sections coniques, qui sont dites avoir toutes un centre, quoique dans la Parabole ce centre soit à une distance infinie du sommet.

116. Ayant ainsi ramené l'équation, qui renferme toutes les surfaces du second ordre, à la forme la plus simple, le premier genre de ces surfaces sera contenu dans cette équation :

$$App+Bqq+Crr=aa,$$

si tous les trois coefficiens A, B, C, ont des valeurs positives. Les surfaces qui appartiennent à ce genre, non-seulement seront renfermées tout entières dans un espace fini ; mais elles auront aussi un centre, où les trois plans diamétraux se coupent réciproquement à angles droits. Soit C le centre de cette figure, & CA, CB, CD, les trois axes principaux perpendiculaires entre eux, auxquels les coordonnées $p, q, r,$ sont parallèles ; les trois plans diamétraux seront $ABab$, ADa & BDb, par lesquels ce corps sera partagé en deux portions semblables & égales. Pl. XV. Fig. 143.

117. Soit $r=0$, & l'équation $Ap^2+Bq^2=a^2$ exprimera la nature de la ſection principale $ABab$; laquelle ſera par conſéquent une ellypſe qui aura ſon centre en C, dont les demi-axes ſeront $CA=Ca=\frac{a}{\sqrt{A}}$ & $CB=Cb=\frac{a}{\sqrt{B}}$. Si on fait $q=0$, l'équation $Ap^2+Cr^2=a^2$ repréſentera la ſection principale ADa, qui ſera pareillement une ellypſe ayant ſon centre en C, dont les demi-axes ſeront $CA=Ca=\frac{a}{\sqrt{A}}$ & $CD=\frac{a}{\sqrt{C}}$. Or ces trois ſections principales étant connues, ou ſeulement leurs demi-axes $CA=\frac{a}{\sqrt{A}}$, $CB=\frac{a}{\sqrt{B}}$ & $CD=\frac{a}{\sqrt{C}}$, la nature de ce corps ſera auſſi connue & déterminée. Il conviendra donc d'appeler ce premier genre des ſurfaces du ſecond ordre *Ellyptoïde*, parce que ſes trois ſections principales ſont des ellypſes.

118. Ce genre embraſſe trois eſpèces qui méritent d'être diſtinguées des autres. La première, lorſque les trois axes principaux CA, CB & CD ſont égaux entre eux; dans ce cas les trois ſections principales ſe changeront en cercles, & le corps même en une ſphère, dont l'équation, comme nous l'avons vu ci-deſſus, ſera:

$$pp+qq+rr=aa.$$

La ſeconde eſpèce comprend les cas où deux axes principaux ſeulement ſont égaux entre eux. Soit, par exemple, $CD=CB$, ou $C=B$, la ſection BDb deviendra un cercle; mais l'équation $Ap^2+B(q^2+r^2)=aa$ fait voir que toutes les ſections parallèles à celles-ci ſeront pareillement des cercles; d'où il ſuit que ce corps ſera un ſphéroïde ou oblong, ſi AC eſt plus grand que BC, ou applati, ſi AC eſt plus petit que BC. Enfin la troiſième eſpèce renferme tous les corps dans leſquels les coefficiens A, B & C, ſont inégaux; & qui par conſéquent conſerveront le nom général d'*Ellyptoïde*.

119. Les autres genres de ſurfaces du ſecond ordre ſeront contenus dans cette équation:

$$App + Bqq + Crr = aa;$$

d'abord, ſi aucun des coefficiens A, B, C, ne manque. Mais s'il y en a un ou deux qui aient des valeurs négatives; ſuppoſons-en un ſeulement négatif, & conſidérons cette équation :

$$App + Bqq - Crr = aa,$$

dans laquelle A, B & C doivent pour le moment déſigner des nombres poſitifs. Quant à ce qui regarde le centre de ce corps & les plans diamétraux, tout ſe paſſe comme auparavant. On voit donc que la première ſection principale $ABab$ de ce corps eſt une ellypſe, dont le demi-axe $AC = \frac{a}{\sqrt{A}}$, & l'autre $BC = \frac{a}{\sqrt{B}}$. Les deux autres ſections principales Aq, BS, ſeront des hyperboles, qui auront leur centre en C, & leur demi-axe conjugué $= \frac{a}{\sqrt{C}}$. Pl. XV. Fig. 144.

120. Cette ſurface repréſentera donc une eſpèce d'entonnoir, qui ira en s'élargiſſant en deſſus & en deſſous ſuivant une forme hyperbolique. Cette ſurface aura pour aſymptote un cône exprimé par l'équation $App + Bqq - Crr = 0$, lequel aura ſon ſommet au centre C, & dont les côtés ſont les aſymptotes des hyperboles. Ce cône aſymptote ſera ſitué dans l'intérieur de la ſurface, & il ſera droit ſi $A = B$, & ſcalène, ſi A n'eſt pas égal à B; ſon axe ſera la droite CD perpendiculaire au plan ABa. Au reſte, toutes les ſections perpendiculaires à l'axe CD ſeront des ellypſes ſemblables à l'ellypſe $ABab$; & les ſections perpendiculaires au plan $ABab$ ſeront toutes des hyperboles; d'où il conviendra de nommer *ellyptico-hyperboliques* ces ſurfaces circonſcrites à un cône, qui devient leur aſymptote. Ces ſurfaces conſtitueront pour nous le ſecond genre.

121. On pourra donc encore diſtinguer trois eſpèces dans ce genre; la première, ſi $a = 0$, auquel cas l'ellypſe $ABab$ devient un point, & les hyperboles des lignes droites, & la

ſurface même ſera entièrement confondue avec ſon aſymptote; d'où il ſuit que cette première eſpèce embraſſera tous les cônes tant droits qu'obliques; ce qui pourroit fournir une nouvelle ſubdiviſion. L'autre eſpèce aura lieu, ſi A devient $=$ B. Dans ce cas, l'ellypſe $ABab$ ſe change en cercle, & la ſurface même deviendra ronde ou tournée. On obtiendra une telle ſurface, en faiſant tourner une hyperbole quelconque autour de l'axe conjugué. La troiſième eſpèce ne différera pas du genre même.

122. Prenons pour troiſième genre celui où deux coefficiens des termes pp, qq & rr, deviennent négatifs, & dont conſéquemment l'équation ſera :

$$App - Bqq - Crr = aa.$$

Pl. XVI. Fig. 145. Si on fait $r = 0$, la première ſection principale ſera une hyperbole $EAFeaf$, qui a ſon centre en C, dont le demi-axe tranſverſe $= \frac{a}{\sqrt{A}}$ & le demi-axe conjugué $= \frac{a}{\sqrt{B}}$. L'autre ſection principale, qu'on obtiendra en faiſant $q = 0$, ſera pareillement une hyperbole AQ, aq, qui aura le même demi-axe tranſverſe, mais dont le demi-axe conjugué ſera $= \frac{a}{\sqrt{C}}$; la troiſième ſection principale devient imaginaire. Enfin cette ſurface ſera tout entière dans la ſurface conique qui lui ſert d'aſymptote ; d'où il ſuit qu'on peut appeler *hyperbolico-hyperbolique* ce genre inſcrit au cône aſymptote. Si B devient $=$ C, la ſurface ſera ronde, & elle réſultera de la rotation d'une hyperbole autour de ſon axe tranſverſe. Ce cas pourroit conſtituer une eſpèce particulière; mais, ſi on ſuppoſe $a = 0$, on trouvera la ſurface conique que nous avons déjà conſidérée comme une eſpèce du genre précédent.

123. Pour connoître les genres ſuivans, nous ſuppoſerons qu'un des coefficiens A, B, C, devient nul. Soit donc $C = 0$, & l'équation générale trouvée art. 114 ſera :

$$App + Bqq + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

En augmentant ou diminuant les coordonnées p & q, on pourra faire disparoître les termes Gp & Hq, mais non Ir; le terme Ir restera donc dans l'équation, mais par son moyen on pourra faire disparoître le dernier terme K; ce qui nous donnera une équation de cette forme :

$$App + Bqq = ar;$$

D'où nous aurons deux cas à examiner. Le premier, lorsque les deux coefficiens A & B sont positifs; le second, lorsqu'un des deux est négatif. Dans l'un & l'autre cas, le centre de la surface sera situé sur l'axe *CD*, mais à une distance infinie.

124. Soient d'abord les coefficiens A & B tous deux positifs; c'est le cas qui nous fournira le quatrième genre compris dans cette équation :

$$App + Bqq = ar.$$

La première section principale qui résulte de la supposition de $r = 0$, se réduira donc à un point; mais les deux autres qu'on obtiendra, savoir la seconde, en faisant $q = 0$, & la troisième, en faisant $p = 0$, seront des paraboles *MAm* & *NAn*. Comme toutes les sections de cette surface qui sont perpendiculaires à l'axe *AD* sont des ellypses, & les sections faites par cet axe des paraboles, nous appellerons les corps de ce genre *ellyptico-paraboliques*. Deux espèces sont à remarquer, l'une, si A = B; dans ce cas, le corps est rond, & se nomme *conoïde-parabolique*; l'autre a lieu, lorsque $a = 0$, & que $Ap^2 + Bq^2$ devient $= bb$; elle comprend les cylindres ou droits, si A = B, ou scalènes, si A & B sont inégaux. Pl. XVI. Fig 146.

125. Le cinquième genre est compris dans l'équation :

$$App - Bqq = ar.$$

La première section principale, si on fait $r = 0$, donnera deux lignes droites *Ee*, *Ff*, qui se croisent l'une l'autre au point *A*. Mais toutes les sections parallèles à celle-ci seront des hyperboles, dont les centres sont situés sur l'axe *AD*, & qui sont placées entre les asymptotes droites *Ee* & *Ff*. Les Pl. XVI Fig 147.

deux plans qui ſont perpendiculaires au plan ABC, & qui ſont dirigés ſuivant les lignes Ee & Ff, ſe confondront à une diſtance infinie avec la ſurface propoſée; qui par conſéquent aura pour aſymptote ces deux plans qui ſe coupent mutuellement. Les autres ſections principales faites ſur les plans ACD & ABd ſeront des paraboles; ce qui nous fera nommer *parabolico-hyperboliques* les ſurfaces de ce genre, qui ont deux plans pour aſymptotes. L'une de ces eſpèces, (ſi, en faiſant $a = 0$, on a $\mathrm{A}pp - \mathrm{B}qq = bb$) ſera un cylindre hyperbolique, dont toutes les ſections perpendiculaires à l'axe AD ſeront des hyperboles égales entre elles; ſi, de plus, $b = 0$, on retrouvera les deux plans aſymptotiques.

126. Enfin le ſixième genre de ſurfaces du ſecond ordre ſera renfermé dans cette équation :

$$\mathrm{A}pp = aq,$$

qui donne un cylindre parabolique, dont toutes les ſections perpendiculaires à l'axe AD ſeront des paraboles ſemblables & égales. Leurs ſommets tomberont ſur la droite AD, & leurs axes ſeront parallèles entre eux. Toutes les ſurfaces du ſecond ordre pourront donc être réduites à ces ſix genres; de ſorte qu'il eſt impoſſible d'en trouver aucune qui ne ſoit pas compriſe dans l'un de ces genres. Au reſte, ſi dans le dernier genre on fait $a = 0$, & qu'on ait $\mathrm{A}pp = bb$, cette équation exprimera deux plans parallèles entre eux, qui donnent une certaine eſpèce de ce genre. On remarque ici la même analogie que dans les lignes du ſecond ordre, où nous avons vu que deux lignes qui ſe croiſoient donnoient une eſpèce d'hyperbole, & que deux lignes parallèles repréſentoient une eſpèce de parabole.

127. Quoique nous ayions déduit ces ſix genres de l'équation la plus ſimple, à laquelle il ſoit poſſible de réduire les ſurfaces du ſecond ordre; cependant il ſera facile maintenant, lorſqu'on propoſera une équation quelconque du ſecond degré, d'aſſigner le genre auquel la ſurface appartient. En effet, ſi on propoſe cette équation :

$$\alpha z^2 + \beta y z + \gamma x z + \delta y^2 + \varepsilon x y + \zeta x^2 + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

on devra prononcer, d'après l'indication des premiers termes, où les variables forment deux dimenſions; c'eſt-à-dire qu'il faudra examiner ces termes :

$$\alpha z z + \beta y z + \gamma x z + \delta y y + \varepsilon x y + \zeta x x;$$

s'il ſe trouve que

$4\alpha\zeta$ ſoit plus grand que $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ plus grand que $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ plus grand que $\varepsilon\varepsilon$, & $\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta$ plus petit que $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$,

la ſurface ſera fermée, & appartiendra au premier genre que nous avons appelé *Ellyptoïde*.

128. Si une ou pluſieurs de ces conditions manquent, & que cependant on n'ait pas $\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$, la ſurface appartiendra ou au ſecond ou au troiſième genre; & on aura un corps hyperbolique qui aura pour aſymptote un cône, auquel il ſera circonſcrit dans le ſecond genre, ou inſcrit dans le troiſième; mais ſi on a $\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$; ce qui eſt le cas où l'expreſſion

$$\alpha z z + \beta y z + \gamma x z + \delta y y + \varepsilon x y + \zeta x x,$$

eſt réſoluble en deux facteurs ſimples, ſoit imaginaires, ſoit réels; dans le premier cas, la ſurface appartiendra au quatrième genre, & dans le ſecond, elle appartiendra au cinquième. Enfin, ſi cette expreſſion renferme deux facteurs égaux, ou, ſi elle eſt un quarré, on aura le ſixième genre. Ainſi, on pourra aiſément décider tout de ſuite à quel genre appartient une équation quelconque propoſée; il y aura ſeulement un peu plus de difficulté à l'égard du ſecond & du troiſième genre, dont on pourroit par cette raiſon ne faire qu'un.

129. On pourra ſemblablement traiter & diviſer en genres les ſurfaces du troiſième ordre & celles des ordres ſuivans. Il faudra avoir égard ſeulement aux termes de l'équation générale qui offrent le plus de dimenſions; & conſéquemment on

aura à examiner pour les ſurfaces du troiſième ordre les termes dans leſquels les ordonnées forment trois dimenſions ; c'eſt-à-dire, ceux-ci :

$$\alpha z^3 + \beta y z^2 + \gamma y^2 z + \delta x^2 z + \varepsilon x z^2 + \zeta x y z + \&c.$$

Il faut donc voir ſi ces termes pris enſemble, ou ſi le membre le plus élevé de l'équation peut être décompoſé en facteurs ſimples, ou non; s'il ne peut pas être décompoſé, la ſurface aura pour aſymptote un cône du troiſième ordre. Mais comme c'eſt en égalant à zéro le membre qui renferme le plus de dimenſions, qu'on exprime la nature de ce cône, il y aura pluſieurs ſortes de cônes du troiſième genre, dont la diverſité ſervira à établir pluſieurs genres de ſurfaces; car, quoique tous les cônes du ſecond ordre ſe rapportent à un ſeul genre, il n'en eſt pas de même du troiſième ordre, qui préſente une bien plus grande variété.

130. Après avoir fait l'expoſé de ces genres, nous avons à conſidérer le cas où le premier membre peut être réſolu en facteurs ſimples, ſoit réels, ſoit imaginaires. Suppoſons d'abord qu'il ait un facteur ſimple réel ; on en conclura que la ſurface aura une aſymptote plane. L'autre facteur égal à zéro donnera une équation poſſible, ou non; ſi l'équation eſt impoſſible, à moins que toutes les coordonnées ne s'évanouiſſent, il n'y aura qu'une aſymptote plane ; mais, ſi elle eſt poſſible, la ſurface aura deux aſymptotes, l'une plane, & l'autre ſera un cône du ſecond ordre. S'il a trois facteurs ſimples, l'un ſera toujours réel, & les deux autres ſeront ou imaginaires, ou réels ; d'où réſulteront deux nouveaux genres. Enfin, ſi les trois facteurs ſimples ſont réels, ſuivant que deux ou tous ſeront égaux entre eux, on pourra encore établir deux genres différens. Mais dans cet ordre il n'y a point de ſurface qui ne s'étende à l'infini.

CHAPITRE

CHAPITRE VI.

De l'Interſection de deux Surfaces.

131. On a déjà expoſé ci-deſſus la manière de trouver quelle eſt la nature de la ſection faite par un plan qui coupe une ſurface quelconque. Car la courbe qu'elle forme étant tout entière dans le même plan où la ſection eſt faite, nous avons pris auſſi dans ce plan deux coordonnées, dont la relation exprime, ſuivant l'uſage, la nature de ces courbes; & nous en avons par-là ramené la connoiſſance aux règles ordinaires. Mais, ſi la ſurface coupante n'eſt pas plane, comme alors la ſection ne ſera pas dans un ſeul plan, deux coordonnées ne ſuffiront plus pour en exprimer la nature; & il faudra recourir à un autre moyen pour renfermer ces dernières ſections dans des équations qui puiſſent indiquer la véritable poſition de chacun de ſes points.

132. Or on peut déterminer la ſituation des points qui ne ſont pas dans un même plan, à l'aide de trois plans perpendiculaires entre eux, en aſſignant la diſtance de chaque point à chacun de ces plans. Ainſi trois variables ſeront néceſſaires pour exprimer la nature d'une courbe qui n'eſt pas ſituée dans un même plan, en ſorte que, ſi on en prend une à volonté, il en doit réſulter pour les deux autres des valeurs déterminées. Pour remplir ce but, une ſeule équation entre les trois coordonnées eſt donc inſuffiſante, parce qu'elle exprimeroit la nature d'une ſurface entière; c'eſt pourquoi on aura beſoin de deux équations, par le moyen deſquelles, ſi on attribue à une variable une valeur donnée, les valeurs des deux autres ſe trouvent en même temps déterminées.

133. La nature d'une courbe, lorſqu'il n'eſt pas conſtant qu'elle ſoit ſituée dans un même plan, eſt donc très-bien exprimée par deux équations entre trois variables, telles que x,

y, z, qui repréſenteront autant de coordonnées perpendiculaires entre elles. On pourra donc toujours avec ces deux équations déterminer deux variables par le moyen de la troiſième; c'eſt ainſi, par exemple, que les variables y & z deviendront égales reſpectivement à une certaine fonction de x. On pourra auſſi éliminer à volonté une des variables; on formera par ce moyen trois équations qui renfermeront ſeulement deux variables, l'une entre x & y, une autre entre x & z & une troiſième entre y & z. Or chacune de ces trois équations dérive naturellement de deux autres; de ſorte que, ſi on a des équations entre x & y & entre x & z, on en pourra déduire la troiſième par l'élimination de x.

Pl. XVI. Fig. 148. 134. Soit donc propoſée une ligne courbe non ſituée dans un même plan, & dont M ſoit un point quelconque; on prendra à volonté trois axes perpendiculaires entre eux AB, AC & AD, qui déterminent trois plans auſſi perpendiculaires entre eux, BAC, BAD & CAD. Du point M de la courbe on abaiſſera ſur le plan BAC la perpendiculaire MQ, & du point Q on mènera à l'axe AB la perpendiculaire QP; on aura AP, PQ & QM pour les trois coordonnées, qui détermineront la nature de la courbe, pourvu qu'on ait entre elles deux équations. Faiſons donc $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; & avec les deux équations données entre x, y & z, formons-en une troiſième qui, par l'élimination de z, ne renferme plus que les deux variables x & y; elle déterminera la poſition du point Q ſur le plan BAC; & chaque point Q, qui répondra ainſi à chaque point M, formera une ligne courbe EQF, dont la nature ſera exprimée par l'équation trouvée entre x & y.

135. Lorſque deux équations ſont propoſées entre trois coordonnées, il eſt donc facile de connoître de cette manière la nature de la courbe EQF, qu'on forme en abaiſſant de chaque point M de la courbe cherchée des perpendiculaires MQ ſur le plan BAC. Cette courbe EQF ſe nomme *la projection* de la courbe GMH ſur le plan BAC. Or, comme on trouve la projection faite ſur le plan BAC, en éliminant la variable z, pareillement on obtiendra celle de la même courbe ſur le

plan $B\ A\ D$ ou ſur le plan $C\ A\ D$, en éliminant ou la variable y, ou la variable x. Une ſeule projection $E\ Q\ F$ ne ſuffit pas pour connoître la courbe $G\ M\ H$; mais ſi on connoît pour chaque point Q les perpendiculaires $Q\ M = z$, il ſera facile de conſtruire, au moyen de la projection $E\ Q\ F$, la courbe même $G\ M\ H$. Il faut donc pour cela qu'outre l'équation entre x & y, qui exprime la nature de la projection, on en ait une autre entre z & x, ou entre z & y, ou même entre les trois z, x, y, qui faſſe connoître pour chaque point Q la longueur de la perpendiculaire $Q\ M = z$.

136. Puiſque l'équation entre z & x exprime la projection de la courbe GMH ſur le plan $B\ A\ D$, celle entre z & y, la projection faite ſur le plan $C\ A\ D$; & que l'équation entre les trois variables z, y & x, repréſente la ſurface ſur laquelle ſe trouve la courbe GMH; il eſt d'abord évident qu'avec deux projections de la même courbe $G\ M\ H$ faites ſur deux plans, on connoît la courbe même $G\ M\ H$; mais, de plus, il eſt viſible que ſi la ſurface, ſur laquelle la courbe $G\ M\ H$ eſt ſituée, eſt donnée auſſi bien que ſa projection ſur un plan, cette courbe ſera pareillement connue. Il n'y aura qu'à élever de chaque point de la projection des perpendiculaires $Q\ M$, dont l'interſection avec la ſurface déterminera la courbe cherchée GMH.

137. Après l'expoſition préliminaire de ces principes, qui ont rapport à la nature des courbes qui ne ſont pas ſituées dans un même plan, on pourra ſans peine déterminer l'interſection de deux ſurfaces quelconques. Car ainſi que l'interſection de deux plans eſt une ligne droite, ainſi l'interſection de deux ſurfaces quelconques ſera une ligne, ou droite, ou courbe; & cette dernière ſera tout entière dans un même plan, ou n'y ſera pas. Or, quel que ſoit celui de ces cas qui ait lieu, tous ſes points appartiendront à chaque ſurface, & ſeront par conſéquent renfermés dans l'équation de l'une & de l'autre. Donc, ſi les deux ſurfaces ſont exprimées par des équations entre trois coordonnées, qui ſoient rapportées aux trois mêmes plans principaux perpendiculaires entre eux, ou aux trois mêmes axes $A\ B$, $A\ C$ & $A\ D$, également perpendiculaires entre eux,

ces deux équations prises ensemble exprimeront alors la nature de l'intersection.

138. Etant donc proposées deux surfaces qui s'entrecoupent, on doit exprimer la nature de chacune par une équation entre trois coordonnées rapportées aux mêmes axes principaux, on aura ainsi deux équations entre les trois coordonnées x, y & z; & si l'on élimine l'une d'elles, l'équation résultante entre les deux autres donnera la projection de l'intersection faite sur le plan de ces deux coordonnées. On pourra donc trouver aussi de cette manière l'intersection d'une surface quelconque par un plan; car, comme l'équation générale d'un plan est $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$, si dans celle de la surface on substitue à z sa valeur tirée de la première équation, savoir $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, on aura l'équation qui convient à la projection de l'intersection faite sur le plan des coordonnées x & y. Et en même temps l'équation $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ fera connoître pour chaque point Q de la projection la grandeur de la perpendiculaire QM prolongée jusqu'à l'intersection même.

139. S'il arrive que l'équation de la projection soit impossible, comme si on arrivoit à ce résultat $xx + yy + aa = 0$, ce seroit une marque que les deux surfaces ne s'entrecoupent nulle part; mais, si l'équation de la projection donne un point unique, ou si la projection se réduit à un seul point, l'intersection elle-même sera aussi un point; & les deux surfaces se toucheront par conséquent en un point, qu'on pourra trouver par le moyen de l'équation. Mais il existe en outre un contact linéaire, qui a lieu quand deux surfaces se touchent en une infinité de points, & la ligne de contact sera ou droite ou courbe. Elle sera droite, par exemple, si un plan touche un cylindre ou un cône; mais une sphère qui touche intérieurement un cône droit le touche par la circonférence du cercle. Ces sortes de contacts se connoîtront par l'équation même, si on en trouve une pour la projection, qui contienne deux racines réelles; parce que ce contact n'est rien autre chose que le concours de deux intersections.

140. Pour rendre tout cela plus clair, ſuppoſons une ſphère coupée par un plan quelconque, & prenons-en l'équation rapportée au centre $zz + yy + xx = aa$; celle du plan, quelle que ſoit ſa poſition, ſera de cette forme :

$$\alpha z + \beta y + \gamma x = f;$$

d'où, tirant $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, réſultera l'équation ſuivante entre x & y pour la projection :

$$0 = f^2 - \alpha^2 a^2 - 2\beta f y - 2\gamma f x + (\alpha^2 + \beta^2) y^2 + 2\beta\gamma xy + (\alpha^2 + \gamma^2) x^2.$$

Il eſt clair qu'elle eſt une ellypſe, ſi l'équation eſt réelle; mais, ſi elle eſt imaginaire, la ſphère ne ſera touchée nulle part par le plan; &, ſi l'ellypſe ſe réduit à un point, le plan & la ſphère ſe toucheront réciproquement. Pour démêler ces cas, cherchons la valeur de y:

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha\sqrt{(a^2(\alpha^2 + \beta^2) - f^2 + 2\gamma f x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) xx)}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Si la valeur de f eſt telle que la quantité radicale ne puiſſe jamais devenir réelle, il n'y aura ni contact, ni interſection.

141. Suppoſons $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$, on aura :

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha x\sqrt{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \mp \alpha\gamma a\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2};$$

équation à laquelle on ne peut ſatisfaire avec des valeurs réelles, à moins qu'on n'ait :

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \text{ \& } y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}.$$

Par conſéquent, ſi $f = a(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2})$, le plan que repréſente l'équation $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ touchera la ſphère, & on trouvera le point de contact, en prenant :

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}},\ y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \text{ \& } z = \frac{\alpha a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}};$$

valeurs, dont on peut juſtifier la vérité par les élémens de géométrie, qui traitent du contact de la sphère par un plan.

142. On déduit donc de ce qui précède une règle générale, pour reconnoître si une surface quelconque est touchée par un plan, ou par une autre surface. Car, après avoir éliminé des deux équations une des variables, il faudra voir si l'équation qui en résulte peut être décomposée en facteurs simples, ou non. Si elle renferme deux facteurs simples imaginaires, il y aura un point de contact qu'on trouvera, en faisant l'un & l'autre facteur $= 0$; & si elle contient deux facteurs simples réels, & tous deux égaux entre eux, les surfaces se toucheront l'une l'autre suivant une ligne droite. Mais, si cette équation a deux facteurs non simples, mais égaux, ou si elle est divisible par un quarré, alors sa racine étant supposée égale à zéro fera connoître la projection de cette ligne qui résulte du contact. On voit aussi par-là que, si cette équation renfermoit quatre facteurs imaginaires, les surfaces se toucheroient réciproquement en deux points.

143. Pour donner de ce que nous venons de dire une plus ample explication, cherchons le contact du cône & d'une sphère, dont le centre soit placé sur l'axe du cône. L'équation de la sphère est $zz + yy + xx = aa$, & celle du cône $(f - z)^2 = mxx + nyy$, pourvu, bien entendu, que le sommet du cône soit éloigné du centre de la sphère de l'intervalle f. Eliminons ici la variable y, & nous aurons:

$$(f - z)^2 = naa - nzz + (m - n)xx$$

pour la projection de l'intersection sur le plan des coordonnées x & z. Soit d'abord le cône droit, ou $m = n$, nous aurons:

$$z = \frac{f \pm \sqrt{(n(1+n)aa - nff)}}{1+n}.$$

C'est pourquoi, si $f = a\sqrt{(1+n)}$, on aura doublement $z = \frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$; & par conséquent le contact sera linéaire, c'est-à-dire qu'il se fera par un cercle, dont la projection sur le plan qui passe par l'axe, est une ligne droite perpendiculaire au même axe.

144. Quant au cône ſcalène, où m & n ſont des nombres inégaux, l'équation trouvée paroît toujours donner une interſection, quoique le plus ſouvent il n'en exiſte aucune; car, ſi m ſurpaſſe n, il en réſultera toujours une équation réelle pour la projection de l'interſection; mais il faut remarquer qu'une projection réelle n'annonce pas toujours une interſection réelle ; car, pour que l'interſection ſoit réelle, il ne ſuffit pas que la projection le ſoit, il faut encore que les perpendiculaires menées de la projection juſqu'à l'interſection aient auſſi des valeurs réelles; ainſi, quoique toute courbe réelle fourniſſe des projections réelles quelconques, on ne peut pas conclure réciproquement de la réalité de la projection celle de la courbe que l'on cherche. C'eſt une précaution à laquelle il faut toujours avoir bien égard, pour ne pas abuſer de la réalité des équations que nous avons trouvées pour les projections.

145. Nous éviterons cet inconvénient, en cherchant la projection faite ſur le plan des ordonnées x & y; car, comme il n'exiſte ſur ce plan aucun point auquel il n'en correſponde un ſur la ſurface conique, ſi la projection faite ſur ce plan eſt réelle, l'interſection le ſera pareillement. Ainſi, puiſque $z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$, l'autre équation donnera :

$$f - \sqrt{(aa - xx - yy)} = \sqrt{(mxx + nyy)}$$

ou

$$a^2 + f^2 - (1+m)x^2 - (1+n)y^2 = 2f\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)};$$

& enſuite

$$\left.\begin{array}{l}(a^2-f^2)^2 \left.\begin{array}{l}-2(a^2-f^2)\\-2(a^2+f^2)m\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l}-2(a^2-f^2)\\-2(a^2+f^2)n\end{array}\right\} y^2 + (1+m)^2x^4\\ + 2(1+m)(1+n)x^2y^2 + (1+n)^2y^4;\end{array}\right\} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{aa - ff + n(aa+ff) - (1+m)(1+n)xx}{(1+n)^2} \pm\\ \dfrac{2f}{(1+n)^2}\sqrt{(n(1+n)a^2 - nf^2 + (m-n)(1+n)x^2)}\end{array}\right\} = y^2$$

&

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{aa-ff+m(aa+ff)-(1+m)(1+n)yy}{(1+m)^2}\pm\\ \dfrac{2f}{(1+m)^2}\sqrt{(m(1+m)a^2-mf^2+(n-m)(1+m)y^2)}\end{array}\right\}=x^2$$

146. Pour que l'équation trouvée ait des facteurs, il faut donc ou que $ff=(1+n)aa$ ou $ff=(1+m)aa$. Dans le premier cas, on a :

$$yy=\frac{naa-(1+m)xx}{1+n}\pm\frac{2fx\sqrt{(m-n)}}{(1+n)\sqrt{(1+n)}};$$

d'où il suit que, si m est plus petite que n, il est nécessaire que $x=0$, & que $y=\pm a\sqrt{\frac{n}{1+n}}$, & $z=\frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$. Il y a donc deux points de contact également distans de part & d'autre de l'axe du cône; mais si m est plus grande que n, on doit prendre l'autre équation :

$$xx=\frac{maa-(1+n)yy}{1+m}\pm\frac{2fy\sqrt{(n-m)}}{(1+m)\sqrt{(1+m)}},$$

qui ne peut être réelle, à moins que y ne soit $=0$; alors $x=\pm a\sqrt{\frac{m}{1+m}}$ & $z=\frac{a}{\sqrt{(1+m)}}$. Il y aura dans ce cas deux autres points d'attouchement; car le contact aura lieu dans la partie du cône où il est le plus applati. On pourra juger d'une manière semblable de l'existence des points de contact dans les autres circonstances.

Pl.XVI.Fig.149. Il y a une manière beaucoup plus facile de déterminer les plans tangens des surfaces, qu'on peut déduire de la méthode que nous avons donnée plus haut pour trouver les tangentes des lignes courbes. Supposons que la nature de la surface, dont nous cherchons les plans tangens soit exprimée par une équation entre les trois coordonnées $AP=x$, $PQ=y$ & $QM=z$, & qu'il s'agisse de trouver la position du plan qui touche la surface au point M. Nous observons d'abord que, si la surface est coupée par un plan quelconque qui passe par le le point M, la tangente en ce point de la section qui en résulte, sera située dans le plan tangent. C'est pourquoi, si nous trouvons au point M les tangentes de deux de ces sections, le plan formé par ces deux droites devra toucher la surface même au point M.

148. Concevons d'abord que la surface soit coupée par un plan perpendiculaire au plan APQ, suivant la droite QS parallèle à l'axe AP; qu'ensuite on ait fait de même par le point M une section pareillement perpendiculaire au plan APQ, mais suivant la droite QP perpendiculaire à l'axe AP; ou bien, imaginons la première section perpendiculaire à l'axe AB, & la seconde perpendiculaire à l'axe AP. Supposons que la courbe EM soit la première section dont on doit chercher la tangente MS qui rencontre la droite QS au point S, ce qui donne QS pour la soutangente; que l'autre section soit la ligne courbe FM, dont la tangente est la droite MT, & la soutangente QT. Ces lignes étant trouvées, le plan SMT touchera la surface au point M. La droite ST qui joint les points S & T sera l'intersection du plan tangent avec le plan APQ; & si on mène du point Q sur ST la perpendiculaire QR, on aura QR est à QM comme le sinus total est à la tangente de l'angle MRQ, qui marque l'inclinaison du plan tangent sur le plan APQ.

149. Supposons que par la méthode des tangentes, que nous avons donnée auparavant, on ait trouvé les soutangentes $QS = s$ & $QT = t$; on aura $PT = t - y$ & $PX = s - \frac{sy}{t}$; d'où l'on conclut $AX = x + \frac{sy}{t} - s$. On connoît donc par-là le point X, où la droite ST traverse l'axe AP; &, parce que l'angle $AXS = TSQ$, la tangente de cet angle sera $= \frac{t}{s}$; ce qui fait connoître la position de l'intersection du plan touchant avec le plan APQ. Ensuite, à cause de $ST = \sqrt{(ss + tt)}$, on aura $QR = \frac{st}{\sqrt{(ss+tt)}}$; &, si on divise QM par cette ligne, on trouvera la tangente de l'angle d'in-

clinaiſon $MRQ = \frac{z\sqrt{(ss+tt)}}{st}$. Si, après cela, on mène la perpendiculaire MN ſur MR, elle ſera perpendiculaire en même temps, & au plan tangent, & à la ſurface au point M. Sa poſition ſe conclut donc de la valeur de $QN = \frac{zz\sqrt{(ss+tt)}}{st}$. Si on abaiſſe du point N ſur l'axe AP la perpendiculaire NV, à cauſe que l'angle $QNV = QST$, on aura $PV = \frac{zz}{s} = QW$ & $NW = \frac{zz}{t}$. Par conſéquent, ſi on fixe de cette manière la poſition du point N ſur le plan APQ, la droite NM ſera perpendiculaire à la ſurface.

150. On a enſeigné ci-deſſus comment on peut, par le moyen des projections, trouver l'interſection de deux ſurfaces. Cherchons à préſent de quel ordre doit être la projection par rapport à celui des ſurfaces. D'abord deux ſurfaces du premier ordre, ou planes, donnent pour leur interſection & pour la projection de celle-ci une ligne du premier ordre; nous avons vu enſuite que cette projection n'alloit pas au-deſſus du ſecond ordre, lorſqu'une ſurface étoit du premier ordre, & l'autre du ſecond. De même il eſt clair que, ſi une ſurface eſt du troiſième ordre, & l'autre du premier, la projection ne paſſera pas le troiſième degré, & ainſi de ſuite. Mais, ſi les deux ſurfaces qui ſe coupent ſont du ſecond ordre, la projection de l'interſection ſera ou du quatrième ordre, ou d'un ordre inférieur; & en général, ſi l'une des ſurfaces eſt de l'ordre m & l'autre de l'ordre n, la projection ne ſe rapportera jamais à un ordre plus élevé que celui qui eſt indiqué par le nombre mn.

151. Quand ni l'une ni l'autre des ſurfaces, qui ſe coupent, n'eſt plane, le plus ſouvent leur commune ſection eſt une ligne courbe qui n'eſt pas ſituée dans un même plan. Cependant, il peut ſe faire que la ſection ſoit en entier dans le même plan; cela arrivera, ſi les deux équations des ſurfaces priſes enſemble renferment une équation de cette forme $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$. Pour ſavoir quand cette circonſtance aura lieu, ſuppoſons qu'avec les deux équations propoſées les deux variables z & y ſoient déterminées au moyen de la troiſième x; que z de-

vienne $=$ P & $y = $ Q, P & Q étant des fonctions de x. Il faudra voir s'il y a un nombre tel que toutes les puissances de x disparoissent dans $P + nQ$, excepté la plus basse x & les termes constans. Si cela arrive, & qu'on ait $P + nQ = mx + k$, la section sera dans un même plan, & ce plan sera représenté par l'équation $z + ny = mx + k$.

152. Soient proposées, par exemple, les deux surfaces suivantes du second ordre, dont la première est celle du cône droit $zz = xx + yy$, & dont la seconde est la surface ellyptico-hyperbolique du second genre $zz = xx + 2yy - 2ax - aa$. Comme on en conclut $xx + 2yy - 2ax - aa = xx + yy$, on aura $y = \sqrt{(2ax + aa)}$ & $z = x + a$. Cette dernière équation fait tout de suite voir que la section entière est située dans un même plan, dont la position sera déterminée par l'équation $z = x + a$. On pourra donc résoudre de cette manière un grand nombre de questions qui tiennent à la nature des surfaces. Quant à celles dont la solution échappe à la méthode que nous venons d'expliquer ici, elles supposent la connoissance de l'analyse des infinis, à l'étude de laquelle ce qu'on a exposé dans les deux livres qui précèdent, doit préparer la voie & servir d'introduction.

FIN DU LIVRE SECOND.

NOTES ET ÉCLAIRCISSEMENS,

Sur quelques endroits du second Livre de l'Introduction à l'Analyse infinitésimale.

CHAPITRE IX.

Art. 226. On pourroit craindre peut-être que l'équation

$$y(\alpha y-\beta x)(\gamma y-\delta x)+\varepsilon xy+\zeta yy+\eta x+\theta y+\iota=0,$$

dans laquelle le terme x^2 manque, ne fût pas aussi étendue que l'équation la plus générale du même degré. Pour ôter toute inquiétude à cet égard, il suffira de faire voir comment l'équation la plus générale peut être ramenée à la forme dont il s'agit. Soit l'équation la plus générale du troisième degré entre deux variables, z & x;

$$z^3+axz^2+bx^2z+cx^3+dz^2+exz+fx^2+gz+hx+i=0;$$

le premier membre $z^3+axz^2+bx^2z+cx^3$ étant d'un degré impair, renfermera au moins un facteur simple réel. Soit $z-a'x$ ce facteur, le premier membre pourra donc être représenté par $(z-a'x)(z^2+b'xz+c'x^2)$, $z^2+b'xz+c'x^2$ étant le produit des deux autres facteurs. Je fais $z-a'x=t$; en substituant, l'équation proposée se changera en une autre, qui contiendra t^3, t^2x, tx^2, t^2, tx, x^2, t, x, & i. (J'omets ici les coefficiens des différens termes, dont la considération est à présent inutile pour mon objet.) Pour faire disparoître le terme, qui renferme x^2, je fais $t+s=y$, s étant supposée le coefficient de x^2, & en mettant à la place de t sa valeur $y-s$, on arrivera à une équation, qui ne contiendra plus de xx, & dans laquelle y sera un facteur commun à tous les termes du premier membre. L'équation la plus générale du troisième degré, dans le cas dont il s'agit ici, pourra donc être ramenée à la forme $y(\alpha y-\beta x)(\gamma y-\delta x)+\varepsilon xy+\zeta y^2+\eta x+\theta y+\iota=0$.

Il ne ſera pas plus difficile de transformer les équations générales, qui repréſentent les différentes eſpèces de courbes d'un ordre quelconque. Si l'on veut, par exemple, transformer & ſimplifier l'équation

$$\alpha u^3 + \beta t^2 + \gamma t u + \delta u^2 + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0,$$

qui appartient au quatrième cas des lignes du troiſième ordre, on fera diſparoître d'abord le terme u^2, en faiſant $u + \frac{\delta}{3\alpha} = y$, on aura une équation, qui contiendra les termes ſuivans y^3, y, yt, t^2, t avec une conſtante. Au moyen des termes t^2 & t, on fera diſparoître le ſecond par la méthode ordinaire, en égalant t à x — la moitié du coefficient de t. En ſubſtituant à t ſa valeur en x, il ne reſtera plus que les termes y^3, xx, xy, y & d, comme on le trouve *pag.* 120, *art.* 237, pour la quatorzième eſpèce.

CHAPITRE X.

ART. 255, 256 & 257. Pour que les commençans ſoient à portée de vérifier ſans peine quelles ſont les eſpèces de lignes du troiſième ordre, qui ont des diamètres ou qui n'en ont pas, j'ai cru qu'il leur ſeroit avantageux d'avoir ſous les yeux l'eſpèce de tableau qui ſuit :

Equation générale pour toutes les espèces.

$$\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3+\varepsilon y^2+\zeta yx+\eta x^2+\theta y+\iota x+\varkappa=0.$$

Equations de condition pour que les courbes aient un diamètre.

$$1.\quad \alpha n^3-\beta mn^2+\gamma m^2n-\delta m^3=0.$$

$$2.\quad \iota=\frac{\theta n}{m}+\frac{\varepsilon n^2-\zeta mn+\eta m^2}{m(\beta n^2-2\gamma mn+3\delta m^2)^2}\Big((\varepsilon\gamma-\beta\zeta)n^3+(\gamma\zeta+2\beta\eta-3\varepsilon\delta)mn^2 \\ -3\gamma\eta m^2n+3\delta\eta m^3\Big)$$

Les équations correspondantes pour chaque espèce en particulier, seront :

I^re. Espèce. $l^2y^3-2ky^2x+yx^2 \quad +ay^2 \quad +cy+bx+d=0.$

$$1.\quad l^2n^3+2kmn^2+m^2n=0;\ \text{ou}\ n\,(l^2n^2+2kmn+m^2)=0.$$

$$2.\quad b=\frac{cn}{m}+\frac{n}{m}\cdot\frac{a^2n^4}{(-2kn^2-2mn)^2},\ \text{ou}\ b=\frac{n}{m}\left(c+\frac{a^2n^2}{4(kn+m)^2}\right).$$

La supposition de $n=0$ satisfait à la première équation ; & non à la seconde. En faisant $l^2n^2+2kmn+m^2=0$, on en conclut $\frac{m}{n}=-k\pm\sqrt{k^2-l^2}$; équation impossible, puisque dans la première espèce $k^2<l^2$.

II. Espèce. $l^2y^3-2ky^2x+yx^2 \quad +ay^2 \quad +cy \quad +d=0.$

$$1.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ n\,(l^2n^2+2kmn+m^2)=0.$$

$$2.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0=\frac{n}{m}\left(c+\frac{a^2n^2}{4(kn+m)^2}\right).$$

La supposition de $n=0$ satisfait aux deux équations, & c'est la seule qu'on puisse faire ; mais à cause de $y=nu$, ou (Fig. XLV) $OP=n.OQ$, on a dans ce cas $OQP=0$. Donc les ordonnées u sont parallèles aux abscisses x.

Equation générale pour toutes les espèces.

$$\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3+\varepsilon y^2+\zeta yx+\eta x^2+\theta y+\iota x+\kappa=0.$$

III. Espèce. $kly^3-(k+l)y^2x+yx^2+ay^2 \qquad +cy+bx+d=0.$

1. $kln^3+(k+l)mn^2+m^2n=0$, ou $n(kln^2+(k+l)mn+m^2)=0$.

2. $b=\frac{cn}{m}+\frac{n}{m}\cdot\frac{a^2n^4}{(-n\,n(k+l)-2mn)^2}$, ou $b=\frac{n}{m}\left(c+\frac{a^2n^2}{(n(k+l)+2m)^2}\right)$.

La supposition de $n=0$ satisfait à la première équation, & non à la seconde. En égalant à zéro le facteur double, on trouvera $\frac{m}{n}=-l$ & $=-k$; &, en substituant, $b=-\frac{1}{l}\left(c+\frac{a^2}{(k-l)^2}\right)$ & $b=-\frac{1}{k}\left(c+\frac{a^2}{(k-l)^2}\right)$, ou bien $bl+c+\frac{a^2}{(k-l)^2}=0$, & $bk+c+\frac{a^2}{(k-l)^2}=0$; équations qui ne peuvent avoir lieu pour la troisième espèce.

IV. Espèce. $kly^3-(k+l)y^2x+yx^2+ay^2 \qquad +cy \qquad +d=0.$

1. .... $n(kln^2+(k+l)mn+m^2)=0$.

2. .... $0=\frac{n}{m}\left(c+\frac{a^2n^2}{(n(k+l)+2m)^2}\right)$.

La supposition de $n=0$ satisfait aux deux équations, & alors les ordonnées u sont parallèles aux abscisses x. Quant à l'autre facteur, il conduiroit à l'équation $c+\frac{a^2}{(k-l)^2}=0$, qui est impossible pour cette espèce.

V. Espèce. $kly^3-(k+l)y^2x+yx^2+ay^2 \qquad \frac{-a^2y}{(k-l)^2} \qquad +d=0.$

1. .... $n(kln^2+(k+l)mn+m^2)=0$.

2. .... $0=\frac{n}{m}\left(\frac{-a^2}{(k-l)^2}+\frac{a^2n^2}{(n(k+l)+2m)^2}\right)$.

En faisant $n=0$, ou $=\frac{-m}{k}$ ou $\frac{-m}{l}$, on satisfait toujours aux deux équations de condition, puisque k n'est pas $= l$. D'ailleurs il est visible qu'à cause de $n = 0$, les ordonnées sont parallèles à l'asymptote sur laquelle les x sont comptés; & comme la forme à laquelle l'équation générale a été ramenée pour cette espèce, ne convient pas plus à l'une des asymptotes qu'à chacune des deux autres, il s'ensuit que les ordonnées coupées également par les diamètres sont parallèles à chacune des asymptotes.

Equation générale pour toutes les espèces.

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \varepsilon y^2 + \zeta y x + \eta x^2 + \theta y + \iota x + \varkappa = 0.$$

VI. Espèce. $-ky^3 + y^2 x \qquad + a x^2 + cy + bx + d = 0.$

1. .... $n^2(nk+m) = 0.$

2. .... $b = \frac{n}{m} c + \frac{2a^2n^2}{n^2}.$

La supposition de $n = 0$ ne peut satisfaire, car a ne peut être $= 0$; ni celle de $\frac{n}{m} = -\frac{1}{k}$, puisqu'il en résulteroit $2k^3a^2 - k\,b - c = 0$, équation impossible pour cette espèce.

VII. Espèce. $-ky^3 + y^2 x \qquad + ax^2 + k(2k^2a^2 - b)y + bx + d = 0.$

1. .... $n^2(nk+m) = 0.$

2. .... $b = \frac{nk}{m}(2k^2a^2 - b) + \frac{2a^2m^2}{n^2}.$

Ici $n = 0$ ne satisfait pas plus que dans la sixième espèce, & pour la même raison; mais $\frac{n}{m} = -\frac{1}{k}$ satisfait, puisqu'il en résulte $b = b$.

VIII.

Équation générale pour toutes les espèces.

$$\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3+\varepsilon y^2+\zeta yx+\eta x^2+\theta y+\iota x+\varkappa=0.$$

VIII. Espèce. $-ky^3+y^2x \qquad +cy+b^2x+d=0.$

1. $-kn^3-mn^2=0$, ou $n^2(nk+m)=0$.

2. .... $b^2=\frac{cn}{m}+\frac{2.0^2m^2}{n^2}$.

La supposition de $n=0$ peut satisfaire, parce que la seconde équation de condition devient $b^2=0+\frac{0}{0}$; équation possible, à cause de la quantité indéterminée $\frac{0}{0}$. Mais la supposition de $nk+m=0$ ne satisfait pas, parce qu'elle donneroit $c=-kb^2$, équation impossible pour cette espèce.

IX. Espèce. $-ky^3+y^2x \qquad -kb^2y+b^2x+d=0.$

1. .... $n^2(nk+m)=0$.

2. .... $b^2=-kb^2\frac{n}{m}+2.0^2\frac{m^2}{n^2}$.

La supposition de $n=0$ satisfait aux deux équations par la même raison que pour la huitième espèce; mais, de plus, $nk+m=0$ satisfait aussi, puisqu'on en conclut $b^2=b^2$.

X. Espèce. $-ky^3+y^2x \qquad +cy-b^2x+d=0.$

L'équation qui convient à cette espèce étant la même que celle qui appartient à la huitième, à l'exception du signe de b^2, qui est ici négatif, les résultats seront les mêmes pour la détermination des diamètres.

XI. Espèce. $-ky^3+y^2x \qquad +kb^2y-b^2x+d=0.$

Ce que je viens de dire de la dixième espèce par rapport à la huitième, s'applique à la onzième relativement à la neuvième.

Équation générale pour toutes les espèces.

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \varepsilon y^2 + \zeta y x + \eta x + \theta y + \iota x + \varkappa = 0.$$

XII. Espèce. $-ky^3 + y^2 x \qquad + cy \quad + d = 0.$

1. . . . . $n^2(nk + m) = 0.$

2. . . . . $0 = c.\frac{n}{m} + \frac{2.0^2 m^2}{n^2}.$

La supposition de $n = 0$ satisfait, parce que $\frac{0}{0}$ étant indéterminé peut être $= 0$; mais celle de $\frac{m}{n} = -k$ ne peut satisfaire, puisque c n'est pas $= 0$.

XIII. Espèce. $-ky^3 + y^2 x \qquad + d = 0.$

1. . . . . $n^2(nk + m) = 0.$

2. . . . . $0 = 0.\frac{n}{m} + \frac{2.0^2 m^2}{n^2}.$

On peut faire ici $n = 0$, & $\frac{n}{m} = -k$. L'une & l'autre hypothèse satisfont.

XIV. Espèce. $y^3 \qquad + bxy \quad + ax^2 + cy \quad + d = 0.$

Cette espèce ne peut avoir de diamètre que dans le cas de $n = 0$, comme il sera facile de s'en convaincre en transformant directement l'équation qui lui appartient, pour la rendre susceptible d'un diamètre. La transformée, dans la supposition de $n = 0$, deviendra $am^2u^2 - 2amtu + d = 0$; ce qui donne deux valeurs pour u.

XV. & XVI. Espèces. Quant aux équations qui représentent les courbes de la quinzième & de la seizième espèce, elles se changent, par la supposition de $n = 0$, en équations linéaires. Donc elles ne peuvent avoir de diamètre.

CHAPITRE XIII.

ART. 300. Pour connoître la nature & le nombre des points multiples qu'une courbe d'un degré donné peut avoir, on s'aidera des principes ſuivans : 1°. *Une courbe de l'ordre* n *eſt déterminée, lorſqu'elle eſt aſſujétie à paſſer par un nombre* $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ *points.* 2°. *Une courbe de l'ordre* n *ne peut rencontrer une courbe de l'ordre* m *en plus de* m n *points.* La démonſtration de cette propoſition ſe trouvera ci-après page 421.

Il ſuit de là qu'une courbe du ſecond ordre, par exemple, pouvant toujours paſſer par cinq points donnés, & ne pouvant rencontrer une courbe de l'ordre m en plus de $2m$ points, il eſt impoſſible qu'une courbe de l'ordre m ait cinq points, dont les degrés de multiplicité faſſent enſemble plus de $2m$ points. Ainſi une courbe du quatrième ordre ne peut avoir quatre points doubles ; car la ligne du ſecond ordre, qui paſſeroit par ces quatre points doubles, & par un cinquième point ſimple de la courbe du quatrième ordre, la rencontreroit neuf fois ; ce qui eſt impoſſible, puiſqu'elle ne peut la rencontrer que 2×4 ou 8 fois.

Par la même raiſon, une courbe du cinquième ordre ne pourroit, avec un point triple, avoir plus de trois points doubles. On raiſonnera d'une manière ſemblable pour les courbes d'ordres ſupérieurs.

De ce qu'on peut toujours faire paſſer une ligne du troiſième ordre par neuf points, & qu'une courbe de cet ordre ne peut rencontrer une courbe de l'ordre m en plus de $3m$ points, concluons qu'une courbe de l'ordre m ne peut avoir neuf points dont les degrés de multiplicité faſſent enſemble un nombre plus grand que $3m$. Ainſi une courbe du cinquième ordre ne pourroit avoir plus de ſix points doubles; une courbe du ſixième ordre, qui ne peut avoir plus d'un point quadruple, ne pourroit avoir avec ce point quadruple plus de ſix points doubles, ni avec deux points triples plus de cinq points doubles, ni même avec un point triple plus de ſept points doubles. Des concluſions analogues auront lieu pour une ligne du quatrième ordre, qu'on peut faire paſſer par quatorze points, & qui ne peut rencontrer une courbe de l'ordre m qu'en $4\,m$ points; & pour une ligne du cinquième ordre, qui, pouvant paſſer par vingt points, ne pourroit rencontrer une courbe de l'ordre m en plus de $5\,m$ points, &c.

Il n'entre point dans mon plan de donner ſur cet objet plus de détails. Ceux qui en voudront davantage pourront conſulter l'*Introduction à l'Analyſe des lignes courbes, par Cramer;* ouvrage intéreſſant par ſa grande clarté & par les exemples qui s'y trouvent multipliés. Je conſeille même à ceux qui voudront approfondir la théorie des courbes, d'en joindre la lecture à celle de l'ouvrage dont je donne ici la traduction.

CHAPITRE XIV.

Ce chapitre m'a paru avoir beſoin de quelques éclairciſſemens. Pour procéder avec ordre, je les ferai précéder de la définition des arcs oſculateurs. Deux arcs très-petits ſont dits oſculateurs l'un à l'égard de l'autre, lorſque, dans toute leur étendue, le rapport de la différence des appliquées correſpondantes à chaque abſciſſe commune aux deux arcs, eſt à l'égard des appliquées mêmes, plus petit qu'aucune quantité donnée; &, dans ce cas, les deux arcs ſont cenſés avoir la même courbure. Mais pour que l'oſculation ait véritablement lieu, il ne ſuffit pas que les appliquées qui répondent à l'extrémité de la très-petite abſciſſe qu'on conſidère aient la propriété que je viens d'énoncer, il faut de plus que cette propriété s'étende à toutes les autres appliquées compriſes entre l'origine & l'extrémité de l'abſciſſe en queſtion. Cette définition adoptée, il eſt aiſé de voir que la parabole ordinaire ou *Apollonienne*, dont le paramètre ſeroit $= 2\,a$, eſt la courbe oſculatrice d'un cercle qui auroit a pour rayon, ou réciproquement. Car ſoit x la plus grande abſciſſe commune aux deux petits arcs, & y, z les appliquées correſpondantes du cercle & de la parabole; on aura, par la propriété du cercle, $y^2 = 2\,a\,x - x^2$, & par celle de la parabole, $z^2 = 2\,a\,x$. Donc $z^2 = y^2 + x^2$, & $z = y + \frac{x^2}{2y}$ (en négligeant les termes suivans, qui sont nuls par rapport à ceux-ci). Donc $z - y = \frac{x^2}{2y}$; mais l'appliquée y & par conséquent l'arc étant infiniment petits, $x = \frac{1}{\infty^2}$, & $z - y = \frac{x^2}{2y} = \frac{1}{\infty^3}$. Donc la différence des appliquées est à ces appliquées mêmes dans un moindre rapport qu'aucune quantité assignable; & comme la même démonstration s'applique à tous les points intermédiaires de l'abscisse x, il s'ensuit que les deux petits arcs circulaires & paraboliques sont, suivant la définition que je viens de donner, respectivement osculateurs l'un à l'égard de l'autre.

Soit à présent une parabole d'un genre supérieur, qui ait pour équation $a^{n-m}x^m = y^n$; je dis que si $\frac{n}{m} > 2$, cette parabole ne peut avoir à son sommet pour courbe osculatrice la parabole ordinaire, quand même on supposeroit à celle-ci un paramètre infini. En effet, l'équation précédente donne $a^{\frac{n-m}{n}} x^{\frac{m}{n}} = y$; &, en quarrant, $a^{\frac{2n-2m}{n}} x^{\frac{2m}{n}} = y^2$, ou, $\frac{a^{\frac{2n-2m}{n}}}{x^{\frac{n-2.m}{n}}} \cdot x = y^2$. Il faudroit donc, pour que l'appliquée z de la parabole ordinaire correspondante à la même abscisse x fût $= y$, que le paramètre de celle-ci $= \frac{a^{\frac{2n-2m}{n}}}{x^{\frac{n-2m}{n}}} = \infty$, à cause de $n > 2\,m$. Mais, quoique pour ce point les appliquées des deux paraboles se confondissent, & que par conséquent leur différence fût nulle par rapport à elles-mêmes, on auroit tort cependant d'en conclure que la même propriété a lieu pour toutes les autres appliquées qui répondent aux abſciſſes plus petites. Car ſoit $x' < x$ une autre abſciſſe commune aux deux courbes, & y', z' les appliquées qui y répondent, on aura, par la propriété de la première parabole, $a^{\frac{n-m}{n}} x'^{\frac{m}{n}} = y'$; &, par la propriété de la parabole conique, $\frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{x^{\frac{n-2m}{2n}}} . x'^{\frac{1}{2}} = z'$.

Donc $y' : z' :: x'^{\frac{m}{n}} : \frac{x'^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{n-2m}{2n}}} :: x^{\frac{n-2m}{2n}} : x'^{\frac{n-2m}{2n}}$; mais $x : x'$ peut être dans un rapport d'inégalité ſi grand qu'on voudra. Donc auſſi $y' : z'$ peut être dans un tel rapport. Donc la différence de z' à y' ne peut être regardée comme nulle à l'égard de z' & de y'. Donc les deux arcs ne feront pas oſculateurs l'un de l'autre, & ne peuvent par conſéquent être conſidérés comme ayant la même courbure.

Si on ſuppoſe à préſent $\frac{n}{m} < 2$, mais > 1, la parabole repréſentée par l'équation $a^{n-m} x^m = y^n$ ne pourra non plus avoir à ſon ſommet la parabole ordinaire pour courbe oſculatrice, quand même on ſuppoſeroit à celle-ci un paramètre $= 0$; car on trouvera, comme ci-deſſus, $\frac{x^{\frac{2m-n}{n}}}{a^{\frac{2m-2n}{n}}} . x = y^2$. Ainſi pour que l'appliquée z de la parabole ordinaire ſe confondît avec y, il faudroit que celle-ci eût un paramètre $= \frac{x^{\frac{2m-n}{n}}}{a^{\frac{2m-2n}{n}}} = 0$, à cauſe de $n < 2m$. Mais, pour une autre abſciſſe x', on aura, en déſignant par y' & par z' les appliquées correſpondantes $a^{\frac{n-m}{n}} x'^{\frac{m}{n}} = y'$ & $\frac{x^{\frac{2m-n}{2n}}}{a^{\frac{m-n}{n}}} x'^{\frac{1}{2}} = z'$. Donc,

$$y' : z' :: a^{\frac{n-m}{n}} x'^{\frac{m}{n}} : \frac{x^{\frac{2m-n}{2n}}}{a^{\frac{m-n}{n}}} . x'^{\frac{1}{2}} :: x'^{\frac{2m-n}{2n}} : x^{\frac{2m-n}{2n}}.$$

Mais ce dernier rapport peut être tel qu'on voudra. Donc auſſi y' peut être à z' dans un rapport quelconque. Donc, dans ce dernier cas, ſuppoſât-on à la parabole vulgaire un paramètre = o, les deux arcs ne ſeroient pas oſculateurs l'un de l'autre.

Il ſuit de ce qui précède, qu'aucune parabole, ſi ce n'eſt la parabole conique, ne peut avoir à ſon ſommet le cercle pour courbe oſculatrice, quand même on lui ſuppoſeroit un diamètre infiniment grand ou infiniment petit. La courbure de ces ſortes de courbes à leur ſommet n'eſt donc nullement comparable à celle du cercle. Il y a plus; c'eſt que les courbures de ces différentes courbes à leur ſommet ſont d'un genre tout-à-fait différent. Par exemple, prenons les deux équations

$$a^{n-m} x^m = y^n, \quad b^{k-l} x^l = y^k,$$

dans leſquelles je ſuppoſe $\frac{m}{n} < \frac{l}{k}$. Les paraboles qu'elles repréſentent ne peuvent être oſculatrices l'une à l'égard de l'autre, quand même on ſuppoſeroit le paramètre a de la première infiniment petit, ou le paramètre b de la ſeconde infiniment grand. Soit y une appliquée commune aux deux courbes, & x l'abſciſſe, on aura $a^{n-m} x^m = y^n$, & $b^{k-l} x^l = y^k$.

Donc $a^{\frac{n-m}{n}} x^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{k-l}{k}} x^{\frac{l}{k}}$, ou $\frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{k-l}{k}}} = x^{\frac{l}{k} - \frac{m}{n}}$; équation dans laquelle, ſi on ſuppoſe x infiniment petit, a doit être infiniment petit ou b infiniment grand, à cauſe de $\frac{l}{k} > \frac{m}{n}$. Mais il n'y aura pas même dans cette hypothèſe une véritable oſculation; car ſi on ſuppoſe deux appliquées y' & z' correſpondantes à la même abſciſſe x', on aura les deux équations

$$a^{n-m}x'^m = y'^n, \quad \& \quad b^{k-l}x'^l = z'^k.$$

Donc

$$y' : z' :: a^{\frac{n-m}{n}} x'^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{k-l}{k}} x'^{\frac{l}{k}}, \text{ ou } :: \frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{k-l}{k}}} : x'^{\frac{l}{k}-\frac{m}{n}};$$

$$\text{mais } \frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{k-l}{k}}} = x^{\frac{l}{k}-\frac{m}{n}}; \text{ donc } y' : z' :: x^{\frac{l}{k}-\frac{m}{n}} : x'^{\frac{l}{k}-\frac{m}{n}};$$

rapport qui peut être tel qu'on voudra. Donc $y' - z'$, ou la différence des appliquées, ne peut pas être regardée comme nulle à l'égard des appliquées mêmes; donc les arcs ne ſont pas oſculateurs à l'égard l'un de l'autre, & ne peuvent être conſidérés par conſéquent comme ayant la même courbure.

Puiſque le ſommet des différentes eſpèces de paraboles offre dans ſa courbure une ſi grande différence, il eſt commode & naturel d'eſtimer la courbure des différentes eſpèces de courbes par celle des paraboles. C'eſt à quoi on eſt parvenu en transformant l'équation de chaque courbe, en rapportant à un nouvel axe les coordonnées, comme on l'a vu

Pl. VII. art. 105, Fig. 55. L'équation réſultante eſt, comme on ſait,

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2, \&c.$$

& on a vu comment, en rapportant cette dernière équation à un axe pris ſur la normale, on parvenoit à trouver, ſuivant la variété des conditions de l'équation, l'eſpèce de parabole oſculatrice qui convenoit à la courbe; mais il ne faut pas croire que ces paraboles de différente eſpèce que l'on trouve

par

par la méthode indiquée dans ce chapitre, prouvent l'existence réelle de la courbe exprimée par l'équation primitive, & en fassent connoître les branches; il faut seulement conclure de ces résultats, que, si la courbe existe, elle a pour courbe osculatrice la parabole trouvée. Car il peut arriver que la courbe & sa branche soient imaginaires en ce point; c'est le cas d'un point conjugué. On peut rendre cela sensible par un exemple simple. Supposons qu'on soit arrivé à cette équation

$$r^2 - \frac{2rs^2}{a} + \frac{s^4}{a^2} + \frac{s^6}{a^4} = 0.$$

En suivant la méthode enseignée, on négligeroit le terme $\frac{s^6}{a^4}$ qui disparoît devant les autres; & il resteroit l'équation

$$r^2 - \frac{2rs^2}{a} + \frac{s^4}{a^2} = 0,$$

qui renfermant deux racines réelles égales, savoir, $r - \frac{s^2}{a} = 0$, sembleroit annoncer dans la courbe deux branches qui seroient embrassées par deux paraboles ordinaires qui se confondroient ici. Mais si on en concluoit l'existence réelle d'un point double, on se tromperoit grossièrement, puisqu'il n'y a réellement dans ce cas qu'un double point conjugué; ainsi que le fait voir la résolution de l'équation

$$r^2 - \frac{2rs^2}{a} + \frac{s^4}{a^2} + \frac{s^6}{a^4} = 0,$$

qui donne $r = \frac{s^2}{a} \pm \frac{s^3}{a^2}\sqrt{-1}$, quantité toujours imaginaire, excepté dans le cas de r & $s = 0$. La cause du jugement précipité qu'on auroit pu porter en cette occasion, & qui auroit induit en erreur, vient de ce qu'on n'auroit pas eu égard au dernier terme, qui, quoiqu'infiniment petit par rapport aux autres, ne peut cependant ici être négligé, puisqu'il rend la courbe imaginaire en ce point. L'exemple suivant n'est pas moins propre à montrer combien on doit mettre d'attention & de discernement dans l'examen d'une expression algébrique. Soit proposée l'équation

$$r^2 - \frac{2rs^2}{a} + \frac{s^4}{a^2} + \frac{s^5}{a^3} = 0.$$

En négligeant, comme à l'ordinaire, le dernier terme, on trouveroit pour courbes osculatrices deux paraboles Apolloniennes, qui se réduiroient à une seule. On sait qu'il y a, dans ces courbes, deux branches qui répondent à une même abscisse; l'une située d'un côté, & l'autre située du côté opposé. Il sembleroit donc au premier apperçu, que la courbe proposée auroit quatre branches, ou au moins deux, situées de cette manière. On auroit tort cependant de le croire; car si on résoud l'équation, on trouvera $r = \frac{s^2}{a} \pm \frac{s^2\sqrt{-s}}{a\sqrt{a}}$; ce qui nous apprend que, du côté des appliquées positives, la courbe n'a point de branches, & qu'au contraire elle en a deux du côté des abscisses négatives, qui forment une figure telle qu'on la voit représentée Fig. 67, comme il est facile de s'en assurer en construisant l'équation $r = \frac{s^2}{a} \pm \frac{s^2\sqrt{s}}{a\sqrt{a}}$. Cet exemple suffit pour démontrer invinciblement l'existence des points de rebroussement à bec, ou de la seconde espèce, que l'Hospital avoit déjà reconnue, que de Gua avoit contestée depuis, & que d'Alembert a démontrée le premier. Il paroît qu'à l'époque où Euler a composé cet ouvrage, la question n'étoit pas encore suffisamment éclaircie; mais il publia peu de temps après un mémoire qui se trouve parmi ceux *de l'Académie de Berlin*, année 1749, où il prouve d'une manière incontestable que l'existence de ces sortes de points ne pouvoit plus être révoquée en doute.

Au reste, après avoir observé que chaque parabole d'un genre supérieur avoit à son sommet une courbure qui lui étoit propre, & qui ne pouvoit être comparée à celle de la parabole conique, il est naturel de chercher quelle est la nature de la courbure de ces mêmes paraboles dans tout autre point. Je donne, pour abréger, à l'équation générale des paraboles la forme ſuivante $a^{n-1}p = q^n$, n étant > 1; ſi on prend les coordonnées $p + t$, & $q + u$, l'équation deviendra

$$a^{n-1}(p+t) = (q+u)^n,$$

ou, en développant le binome,

$$a^{n-1}p + a^{n-1}t = q^n + nq^{n-1}u + n.\frac{n-1}{2}.q^{n-2}u^2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.q^{n-3}u^3 + \&c.$$

Si on retranche cette dernière équation de la première, il reſtera

$$a^{n-1}t = nq^{n-1}u + n.\frac{n-1}{2}.q^{n-2}u^2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}q^{n-3}u^3 + \&c.$$

ou

$$a^{n-1}t - nq^{n-1}u - n.\frac{n-1}{2}.q^{n-2}u^2 - n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}q^{n-3}u^3 - \&c. = 0.$$

Comme u^3 & les puiſſances ſupérieures de u diſparoiſſent devant u^2, lorſque t & u ſont ſuppoſés infiniment petits, l'équation ſubſiſtera entre les termes

$$a^{n-1}t - nq^{n-1}u - n.\frac{n-1}{2}q^{n-2}u^2 = 0.$$

Mais comme l'équation de la parabole donne

$$q^{n-1} = \frac{a^{n-1}p}{q}, \ \& \ q^{n-2} = \frac{a^{n-1}p}{q^2},$$

la dernière deviendra

$$t - \frac{npu}{q} - n.\frac{n-1}{2}.\frac{pu^2}{q^2} = 0, \text{ ou } qt - npu - n.\frac{n-1}{2}.\frac{pu^2}{q} = 0.$$

Pour tranſporter l'équation aux abſciſſes priſes ſur la perpendiculaire à la tangente, il faudra faire (art. 306),

$$t = \frac{-qr - np.s}{\sqrt{(q^2 + n^2p^2)}}, \ \& \ u = \frac{-qs + npr}{\sqrt{(q^2 + n^2p^2)}},$$

(r étant infiniment plus petite que s); ce qui donnera,

$$-r\sqrt{(q^2+n^2p^2)}-n.\frac{n-1}{2}\frac{p}{q}.\frac{q^2s^2}{q^2+n^2p^2}=0,$$

ou

$$s^2=\frac{-r(q^2+n^2p^2)\sqrt{(q^2+n^2p^2)}}{n.\frac{n-1}{2}.pq};$$

équation à la parabole ordinaire; d'où il s'enfuit que la courbure des paraboles fupérieures dans tous fes points, excepté au fommet, eft de même nature que celle de la parabole ordinaire, & qu'elle eft par conféquent comparable à celle du cercle. Si on prend un point infiniment voifin du fommet, de forte que p foit prefque nul à l'égard de q, l'équation deviendra $s^2=\frac{-2q^2r}{n.(n-1)p}$. Si p eft du même ordre que q^2, comme dans la parabole conique, le paramètre de la parabole ofculatrice fera fini; fi p eft infiniment petit à l'égard de q^2, ce qui a lieu toutes les fois que $n>2$, le paramètre de la parabole ofculatrice deviendra infini. Mais fi p eft infini par rapport à q^2, ce qui arrive lorfque $n<2$, le paramètre de la parabole deviendra infiniment petit.

CHAPITRE XX.

On a vu, dans ce chapitre, qu'avec deux équations du fecond ordre, on pouvoit conftruire des équations du quatrième degré; qu'on pouvoit conftruire les équations du neuvième degré par les interfections de deux lignes du troifième ordre, & celles qui ne paffent pas le feizième degré, par les interfections de deux lignes du quatrième: en un mot, que, par le moyen de deux courbes, dont l'une eft de l'ordre m, & l'autre de l'ordre n, on pouvoit conftruire toutes les équations qui ne furpaffent pas la puiffance mn. Cela eft fondé fur ce que deux courbes, dont l'une eft de l'ordre m, & l'autre de l'ordre n, peuvent fe couper en mn points, & jamais en plus de points; ou, ce qui revient au même, ſur ce que deux équations complètes, l'une du degré m, & l'autre du degré n, qui renferment deux inconnues x & y, étant données, ſi on élimine une de ces inconnues, l'équation finale, qui ne contiendra plus que l'autre inconnue, ſera du degré mn. La démonſtration générale de cette propoſition ſe trouve dans pluſieurs ouvrages, & je ne la donne ici que pour éviter au lecteur qui ne la connoîtroit pas, la peine de la chercher ailleurs.

Soient deux équations complètes en x & en y, l'une du degré m, & l'autre du degré n; ſi on ſuppoſe la première réſolue par rapport à x, elle fournira un nombre m de racines a, b, c, d, &c. qui ſeront chacune des fonctions de y; ſi on ſubſtitue ſucceſſivement ces valeurs de x dans la ſeconde équation, on aura un nombre m d'équations en y. Mais, comme l'équation finale doit évidemment renfermer toutes les racines que les m équations en y, qui réſultent des ſubſtitutions ſucceſſives de a, b, c, d, &c. pour x, peuvent fournir, elle doit donc avoir pour facteurs ces m équations. Elle aura donc pour un de ſes termes $a^n . b^n . c^n . d^n$. &c. Or il eſt viſible que la plus haute puiſſance de y ſe trouve dans ce terme; mais comme dans la première équation, le produit $a . b . c . d$. &c. exprime la quantité indépendante de x, il eſt clair que ce produit ne contient point de termes, dans leſquels y ſoit élevé à une puiſſance ſupérieure à m. Donc $a^n . b^n . c^n$. &c. ou $(a . b . c . d . \&c.)^n$, ne donnera point pour y une puiſſance ſupérieure à $m\,n$. Donc l'équation finale en y ne s'élèvera pas à un plus haut degré que celui qui eſt déſigné par mn.

CHAPITRE DERNIER DES SURFACES.

Il reſteroit à déterminer les rayons de courbure des ſurfaces courbes; mais après ce qui a été dit dans ce Traité, ſur la nature de ces ſurfaces, & dans le chapitre XIV ſur la courbure des lignes courbes, cette queſtion ne peut plus préſenter de difficulté réelle. Au reſte, voici ſur cela des éclairciſſemens tirés du Journal des ſéances de l'Ecole normale. Soient x, y & z les coordonnées d'un point quelconque: ſi, dans l'équation de la ſurface, on met $x + x'$, à la place de x, $y + y'$ à la place de y, & $z + z'$ à la place de z, & qu'on retranche l'équation qui en réſulte de l'équation primitive, tous les termes indépendans de x', y' & z' diſparoîtront, & l'on aura une équation de cette forme :

$$z' = p\,x' + q\,y' + r\,x'^2 + s\,x'y' + t\,y'^2 + \&c\,;$$

p, q, r, s, t, &c. étant des fonctions connues des coordonnées x, y, & z, qui appartiennent au point que l'on conſidère. Mais l'équation générale d'un plan quelconque eſt

$$z = A + B\,x + C\,y.$$

Si on change dans cette équation z en $z + z'$, x en $x + x'$, & y en $y + y'$, on trouvera pour z' cette autre expreſſion :

$$z' = Bx' + Cy'.$$

Comparant cette valeur de z' avec la première, on aura :

$$B = p\,;\ C = q.$$

Ainſi on aura les valeurs de A, B & C, & par conſéquent la poſition d'un plan tangent à un point quelconque de la ſurface, au moyen des coordonnées de ce point. Rapportons à ce plan les coordonnées de la ſurface, que nous ſuppoſerons toujours perpendiculaires entre elles, & fixons au point de contact l'origine des nouvelles coordonnées, en nommant x'', y'' les coordonnées dans le plan tangent, & z'' la coordonnée qui lui eſt perpendiculaire, & réduiſant en ſérie la valeur de z'' d'une manière analogue à ce qui a été pratiqué pour les lignes courbes, on arrivera à une valeur de z'', qui ſera de cette forme :

$$z'' = a\,x''^2 + b\,y''^2 + \&c\,;$$

car, par la nature du plan tangent, les termes multipliés par les premières puissances de x'' & de y'' doivent disparoître; & d'ailleurs on peut choisir la position de l'axe des x'', de manière que le terme $x''y''$ disparoisse; il est visible que a, b, &c. sont des fonctions connues des coordonnées x, y & z du point de contact. Si on imagine par ce point un plan perpendiculaire à la surface, la section qu'il formera aura pour coordonnées z'' & $\sqrt{x''^2 + y''^2}$; & si l'on désigne par R le rayon osculateur de cette section, on aura par la nature du cercle:

$$z'' = \frac{x''^2 + y''^2}{2R} + \&c.$$

Soit α l'angle que fait le plan coupant avec l'axe des x'', on aura $y'' = x''$ tang. α; & les valeurs de z'' relatives à la section & au cercle osculateur, deviendront :

$$z'' = \frac{a.(\text{cos}.\,\alpha)^2 + b\,(\text{sin}.\,\alpha)^2}{(\text{cos}.\,\alpha)^2}.\,x''^2 + \&c. \;\;\&\;\; z'' = \frac{x''^2}{2R.\,(\text{cos}.\,\alpha)^2};$$

d'où l'on tire, en égalant, les deux valeurs de z'',

$$2R = \frac{1}{a.(\text{cos}.\,\alpha)^2 + b\,(\text{sin}.\,\alpha)^2}.$$

Si on suppose successivement $\alpha = 0$, $\alpha = 90°$, on trouvera les rayons de courbure des sections faites par le plan qui passe par l'axe des x'', & par celui des y''; & si on les nomme r & r', on en conclura, pour le rayon de courbure R de toute autre section perpendiculaire à la surface :

$$R = \frac{r\,r'}{r'.\,(\text{cos}.\,\alpha)^2 + r.\,(\text{sin}.\,\alpha)^2}.$$

On voit par là qu'il suffit d'avoir les rayons de courbure des sections perpendiculaires à la surface, qui passent par l'axe des x'' & par l'axe des y'', pour connoître le rayon de courbure de toute autre section formée par un plan perpendiculaire, qui feroit avec l'axe des x'' un angle quelconque α. On voit, de plus, que le rayon de courbure sera un *maximum* ou un *minimum*, ſuivant que le plan coupant paſſera par l'axe des y'' ou par celui des x'', déterminés comme on vient de le dire ; parce qu'alors le dénominateur $r'(\text{coſ}.\ \alpha)^2 + r(\text{ſin}.\ \alpha)^2$, ou $r + (r' - r)\ \text{coſ}.\ \alpha^2$, ſera le plus petit ou le plus grand poſſible. Au reſte, on comprendra facilement que, comme dans les lignes courbes il y a certaines irrégularités par rapport aux points doubles & multiples en général, il y en aura auſſi de ſemblables dans les ſurfaces courbes. Mais mon objet n'eſt point ici d'entrer dans tous ces détails, pour leſquels le calcul différentiel eſt, ſinon abſolument néceſſaire, au moins très-commode. Ceux qui ſeront curieux de connoître ce qui a été fait juſqu'ici ſur les ſurfaces courbes & ſur les courbes à double courbure, pourront conſulter le Traité du Calcul différentiel & du Calcul intégral de Lacroix, ouvrage le plus complet dans ſon genre.

FIN DES NOTES ET ÉCLAIRCISSEMENS.

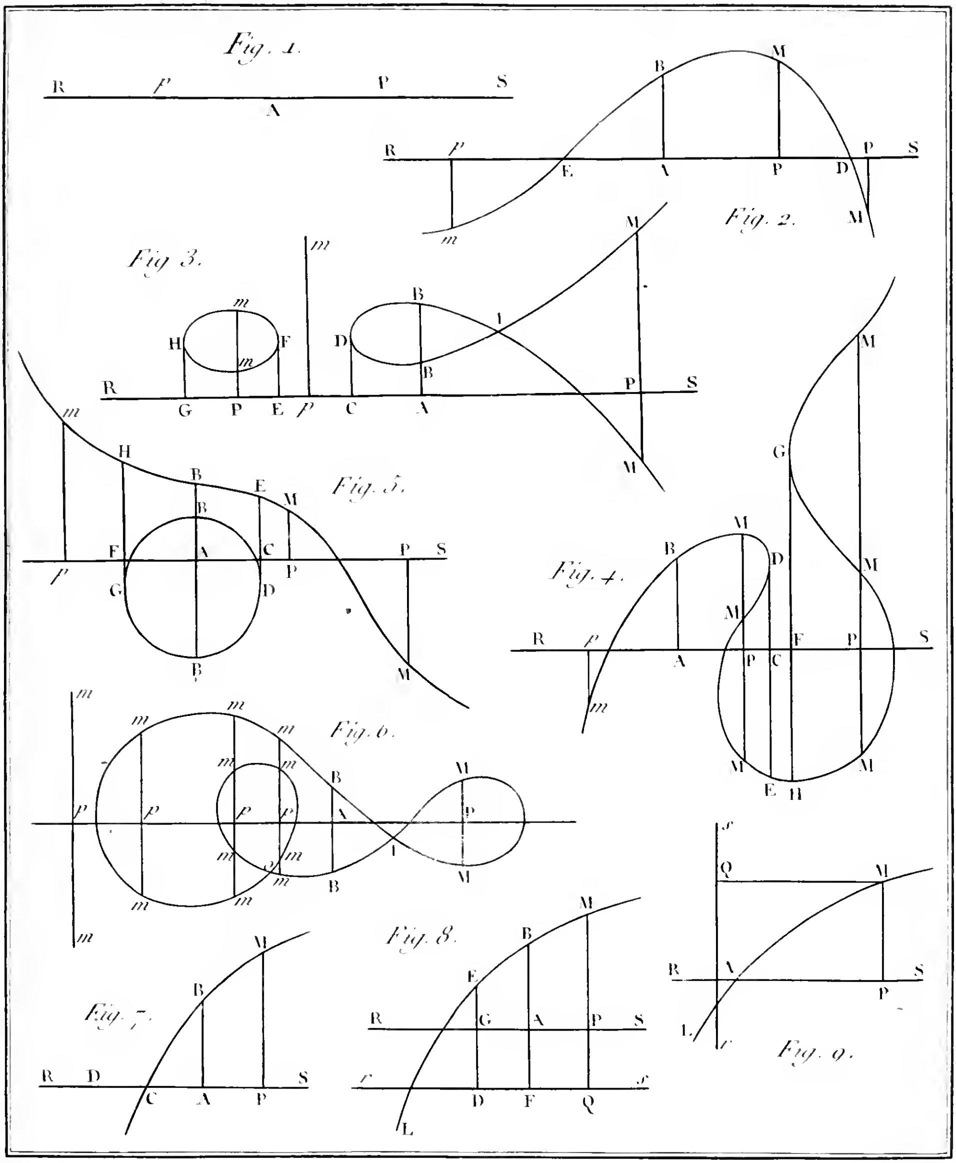


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

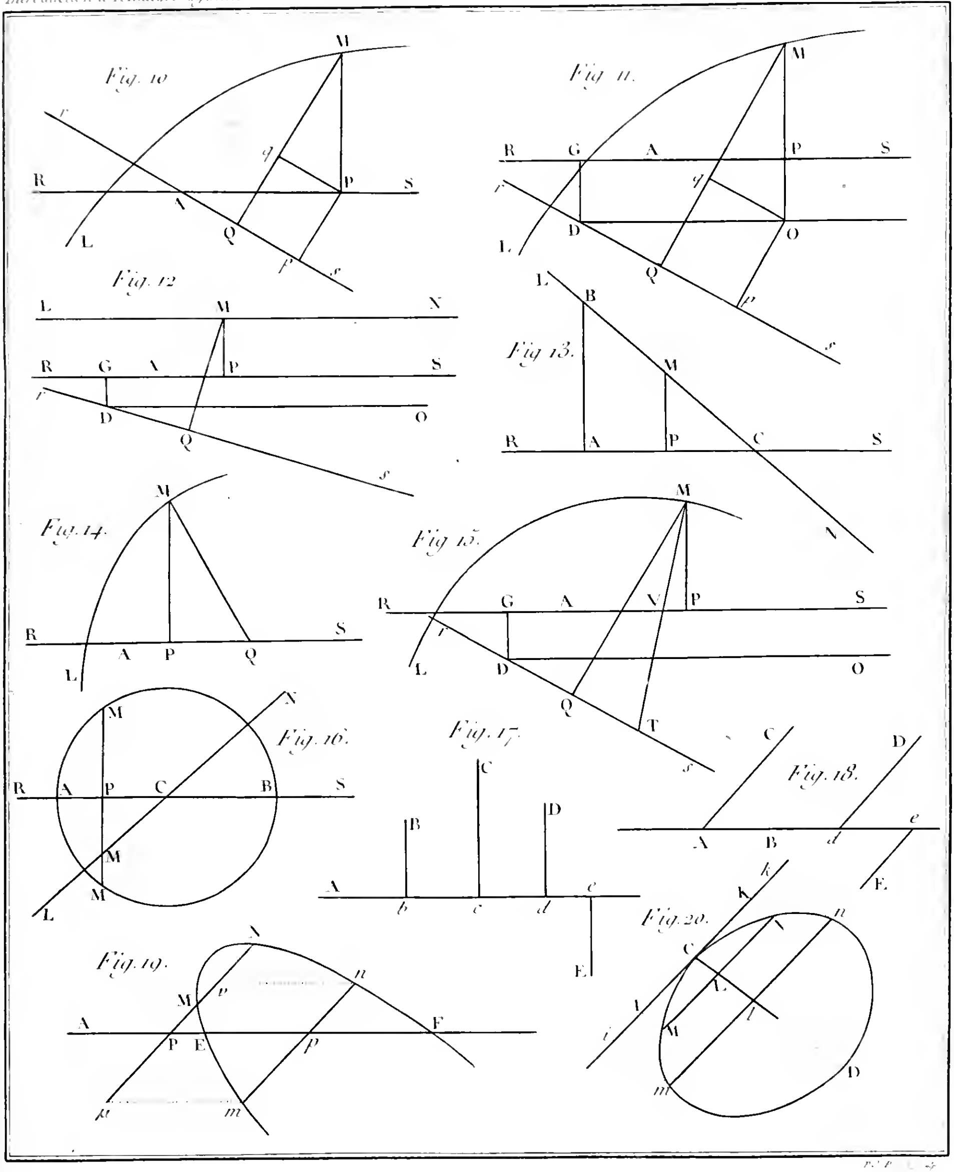


Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 12
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.

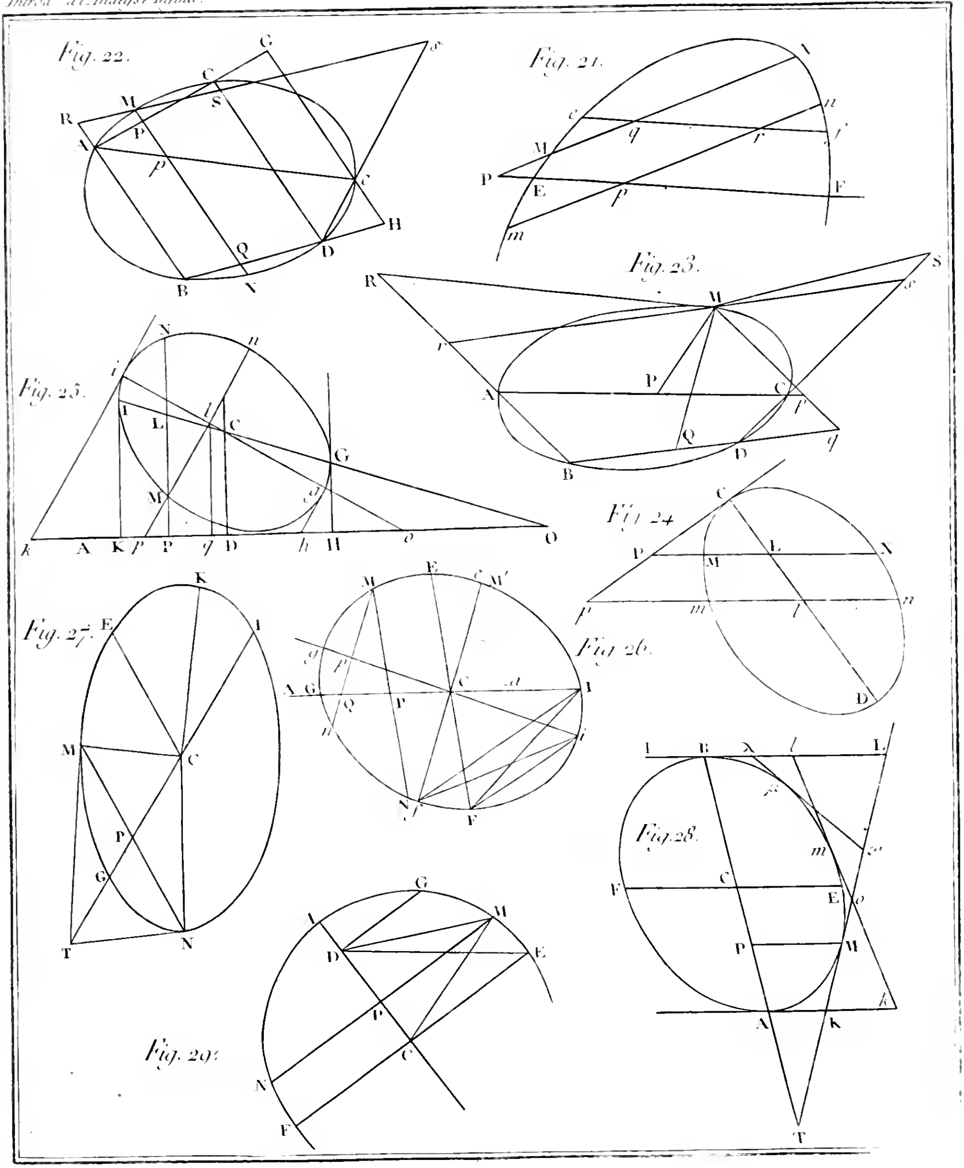


Fig. 22.
Fig. 21.
Fig. 23.
Fig. 25.
Fig. 24
Fig. 27.
Fig. 26.
Fig. 28.
Fig. 29.

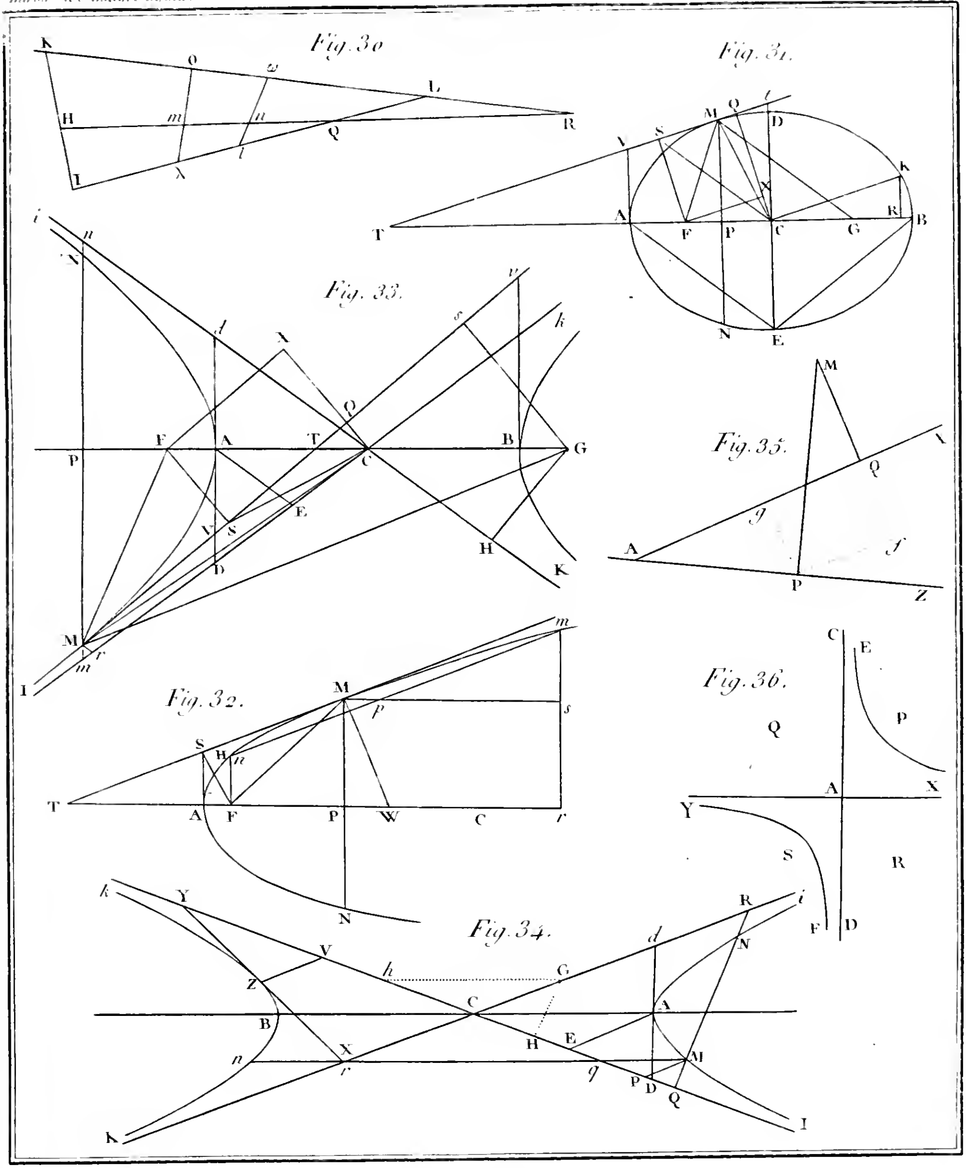


Fig. 30
Fig. 31.
Fig. 33.
Fig. 35.
Fig. 32.
Fig. 36.
Fig. 34.

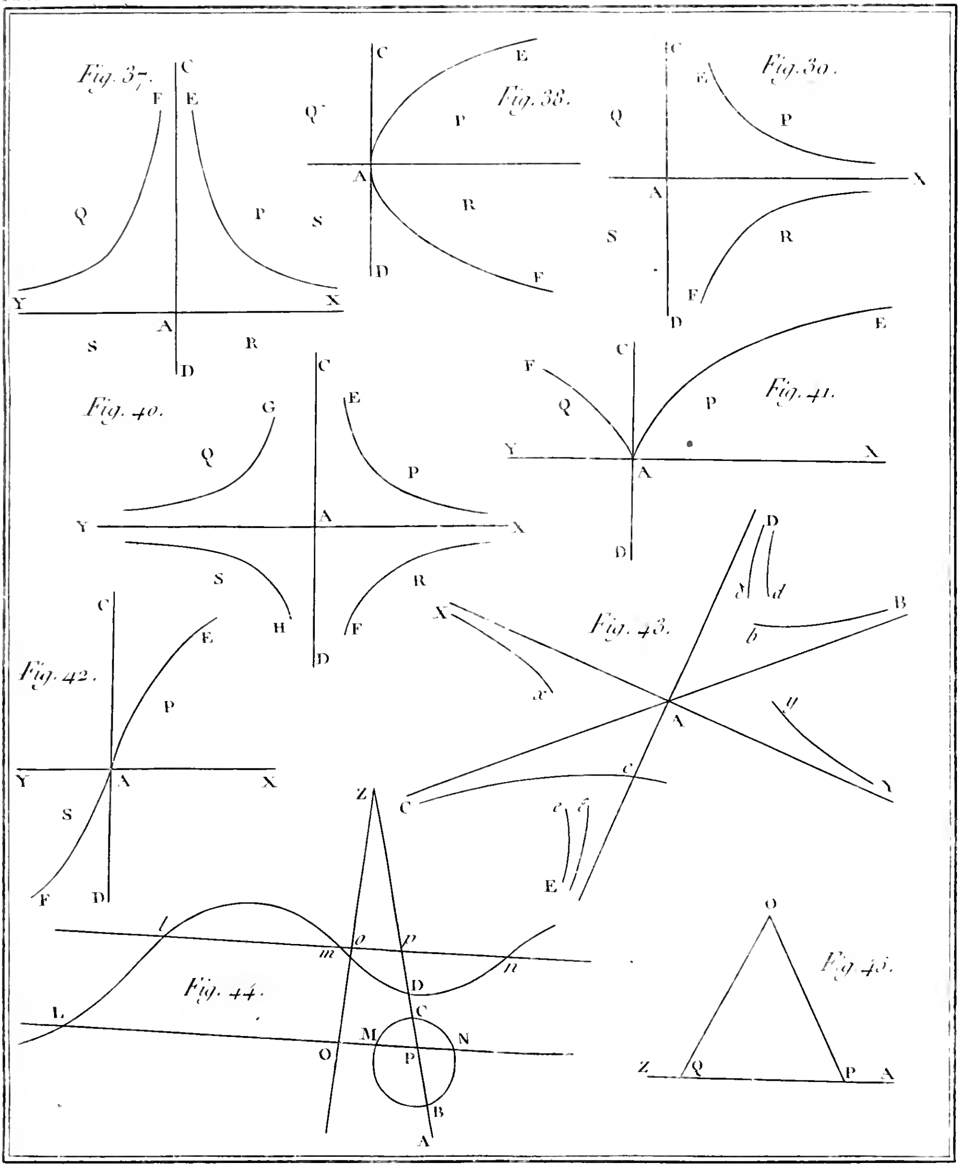


Fig. 37.
C F E Q P Y X A S R D
Fig. 38.
C E Q P A R S D F
Fig. 39.
C E Q P A X S R F D
Fig. 40.
C G E Q P Y A X S R H F D
Fig. 41.
C F E Q P Y X A D
Fig. 42.
C E P Y A X S F D
Fig. 43.
D δ d B X b x A y Y c C e ε E
Fig. 44.
Z l o p m n D L C M N O P B A
Fig. 45.
O Z Q P A

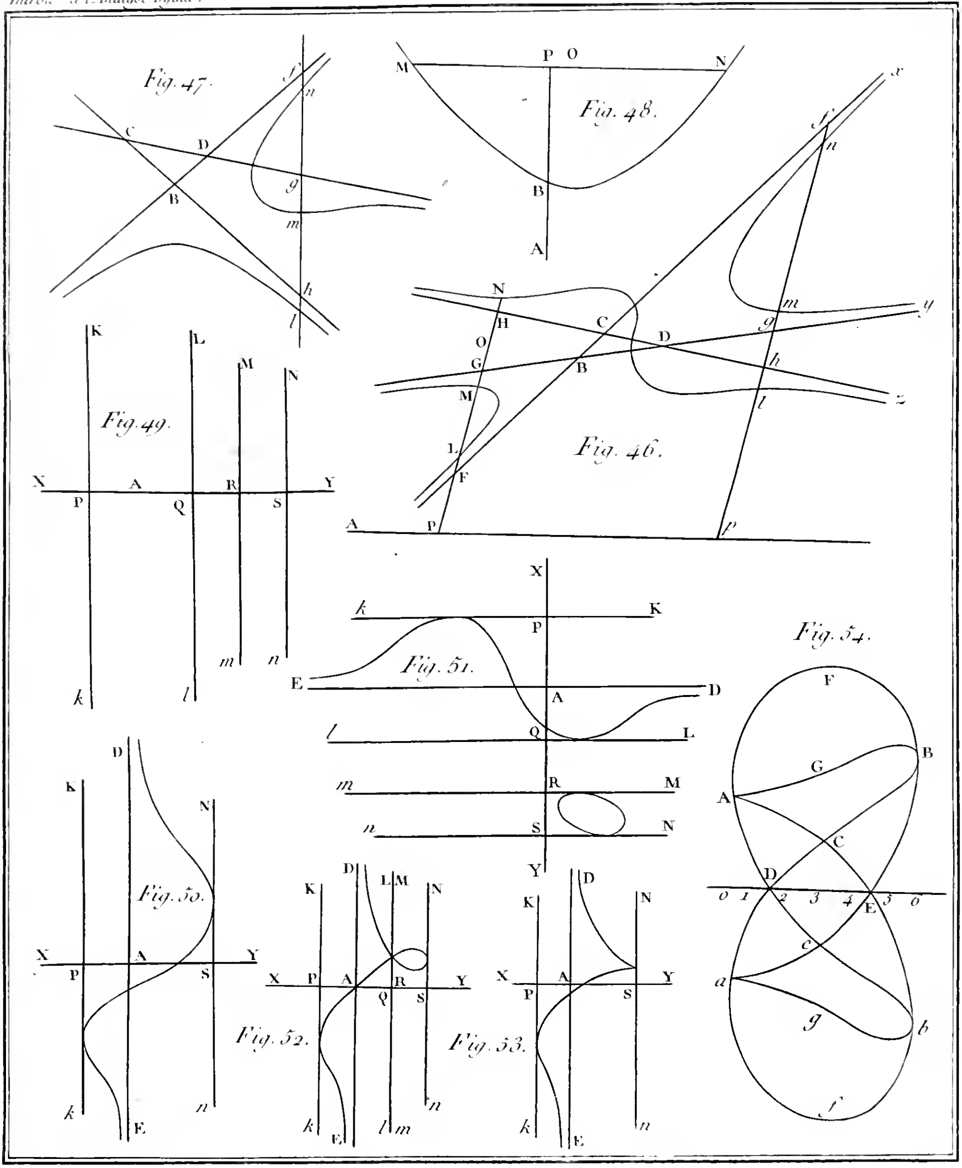


Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 46.
Fig. 49.
Fig. 51.
Fig. 54.
Fig. 50.
Fig. 52.
Fig. 53.

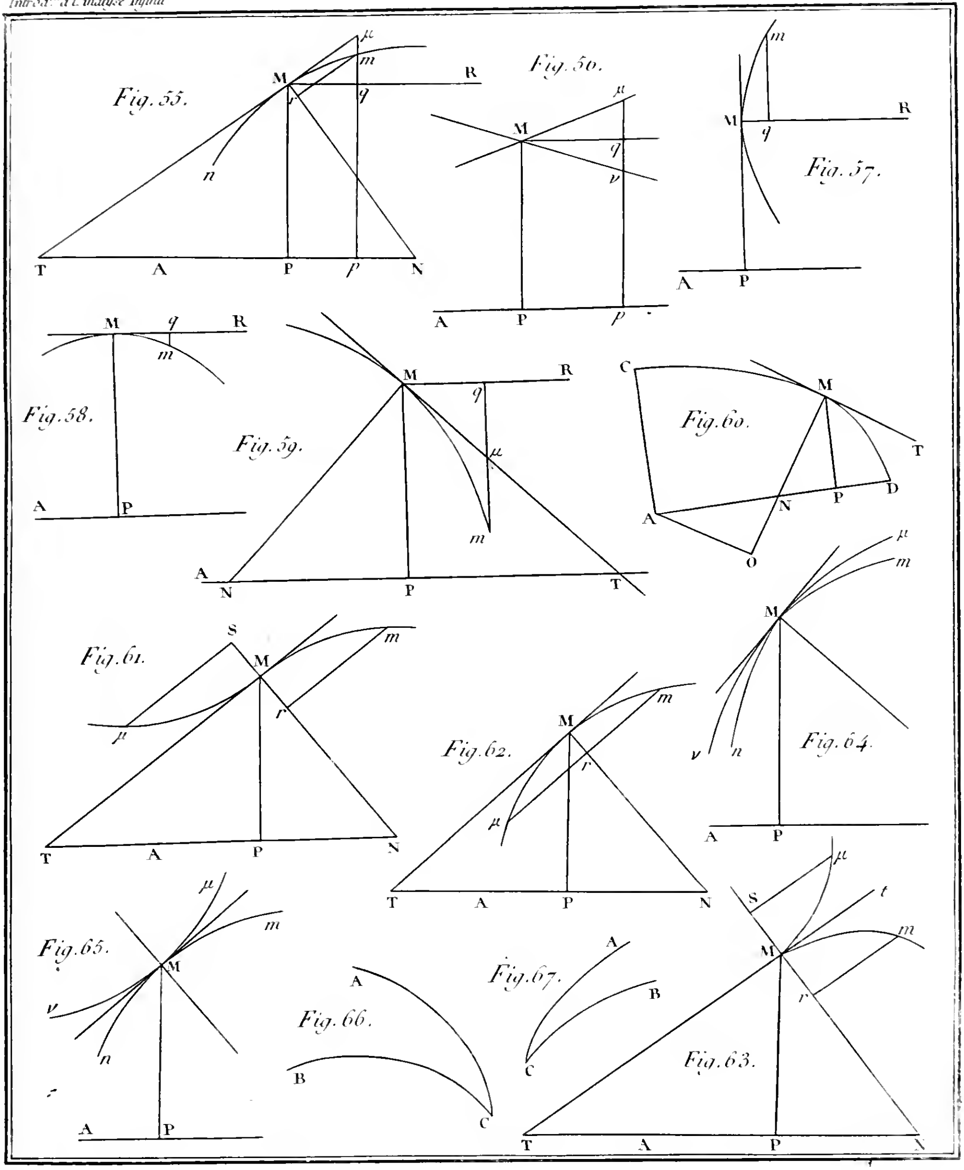


Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.

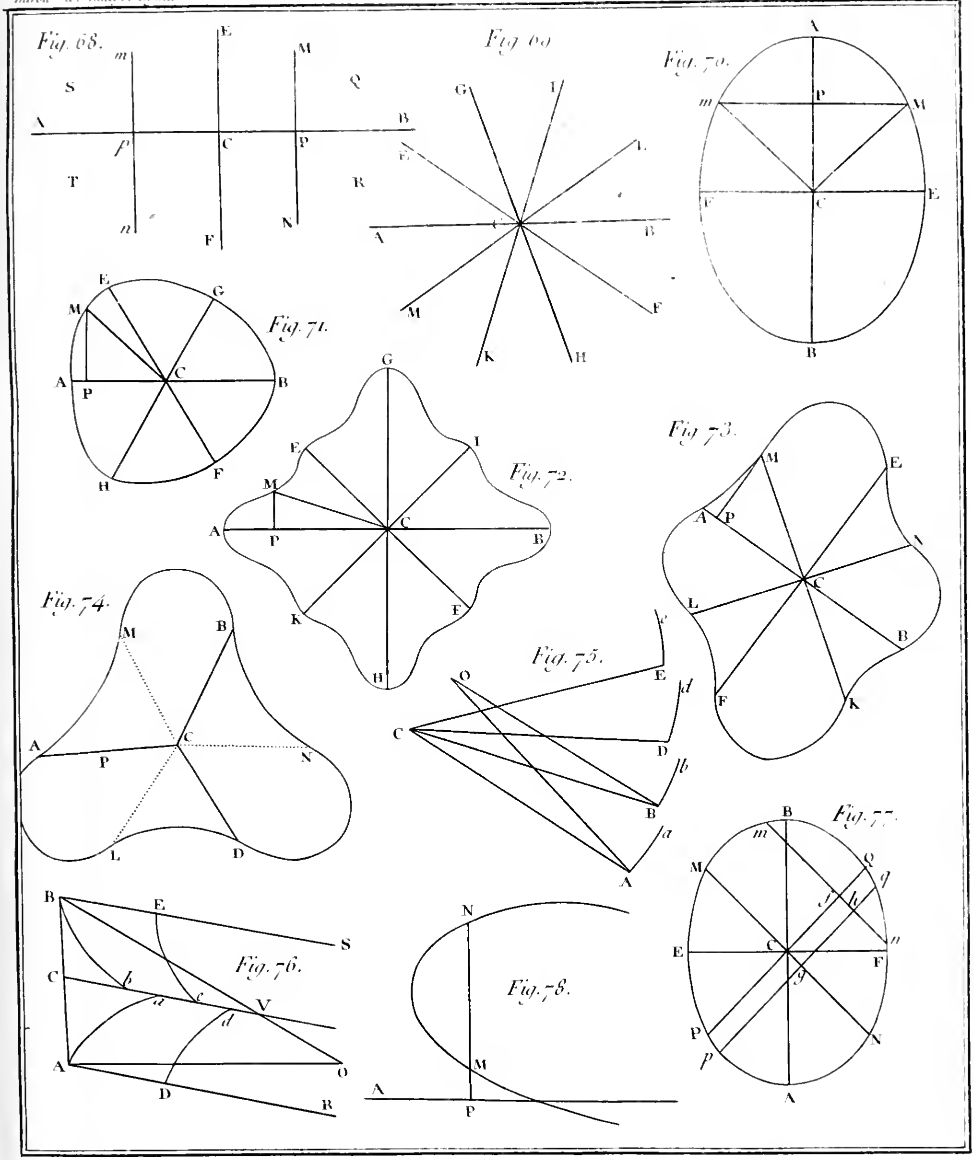


Fig. 68.
Fig. 69
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.

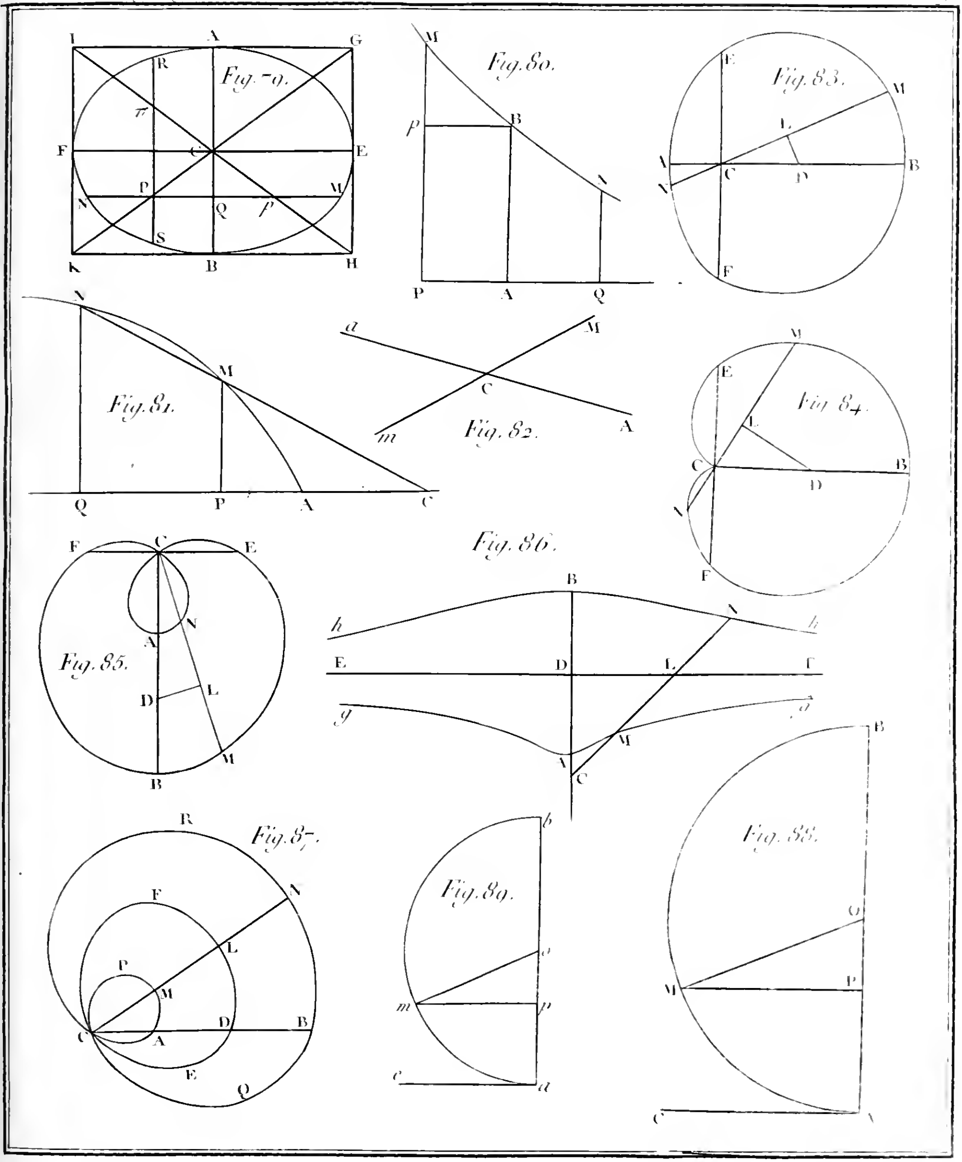


Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 83.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 89.
Fig. 88.

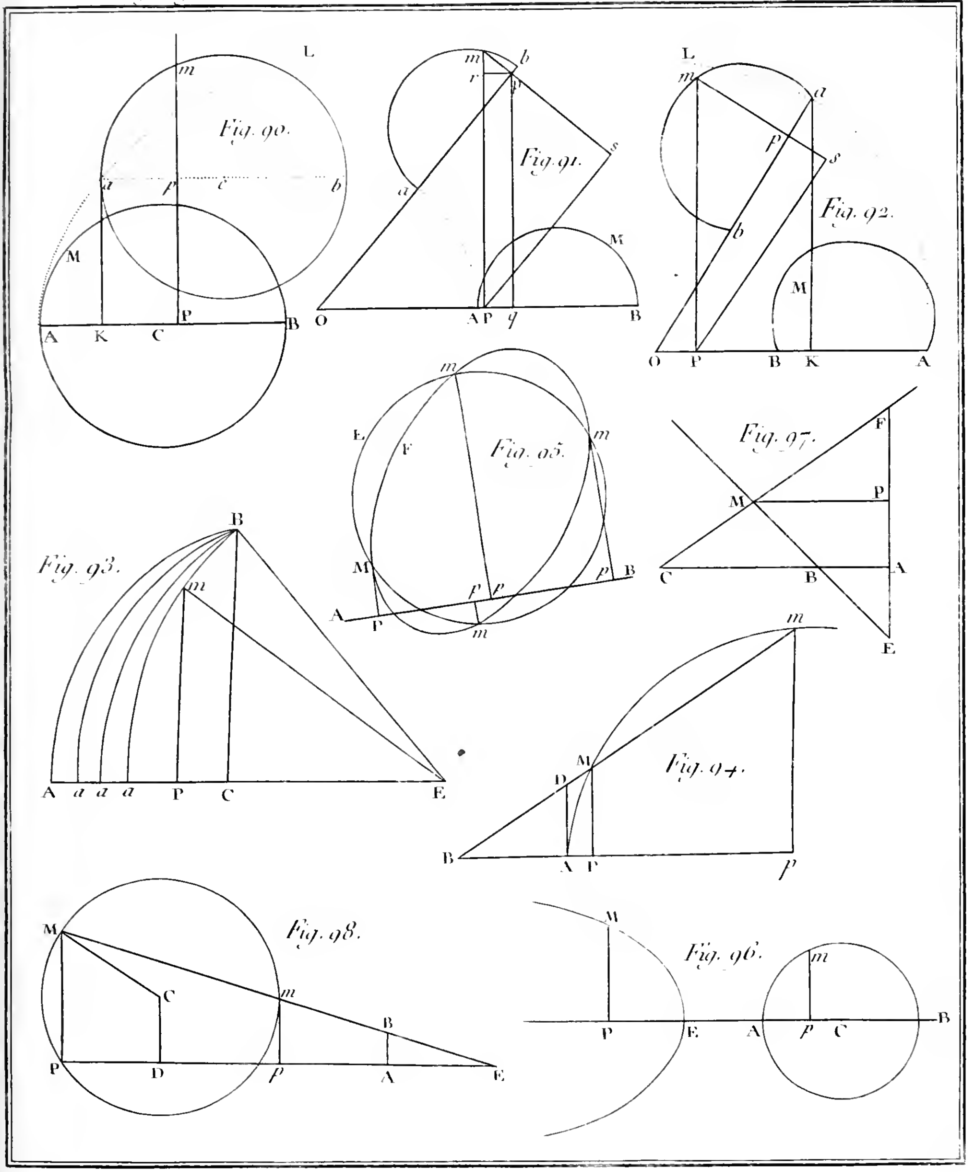


Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 95.
Fig. 97.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 98.
Fig. 96.

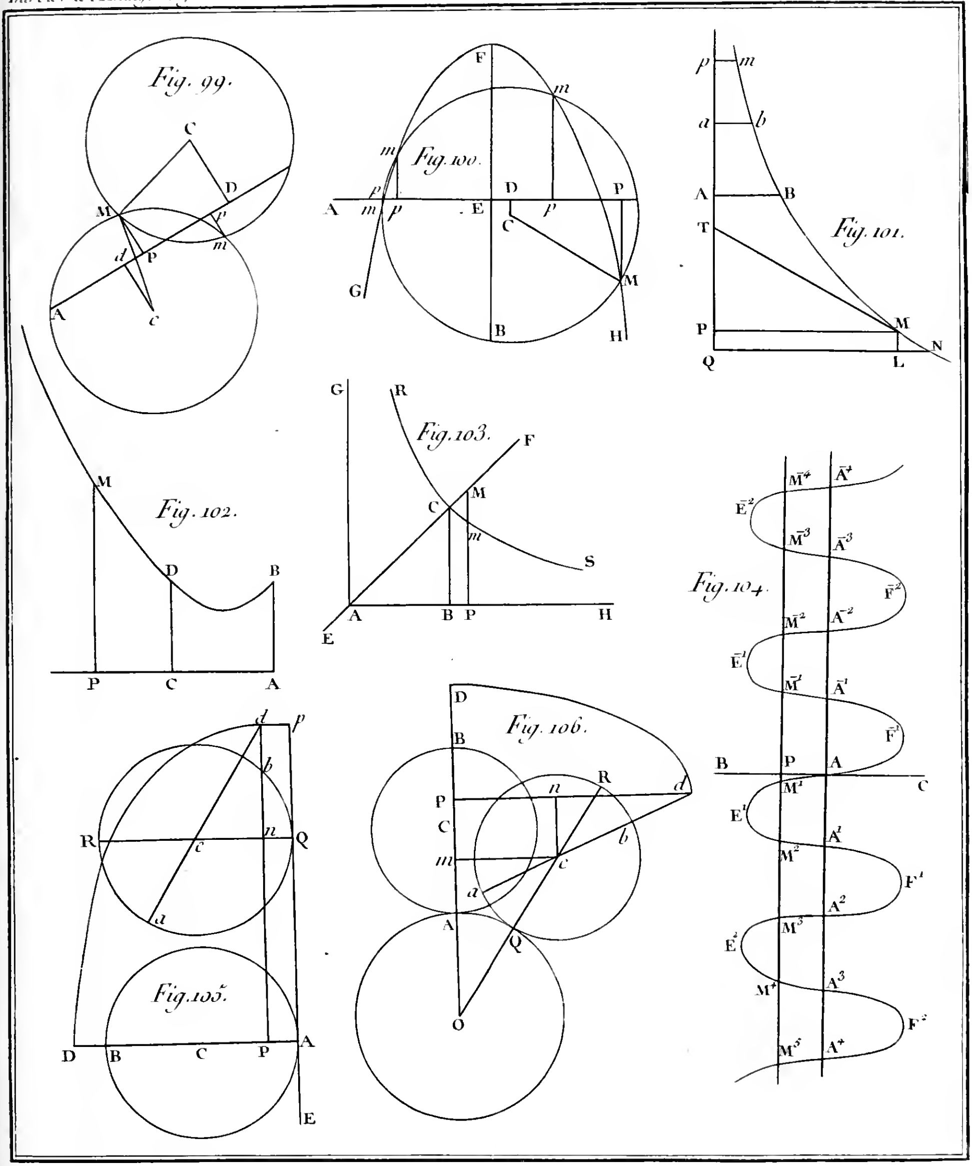


Fig. 99. Fig. 100. Fig. 101. Fig. 102. Fig. 103. Fig. 104. Fig. 105. Fig. 106.

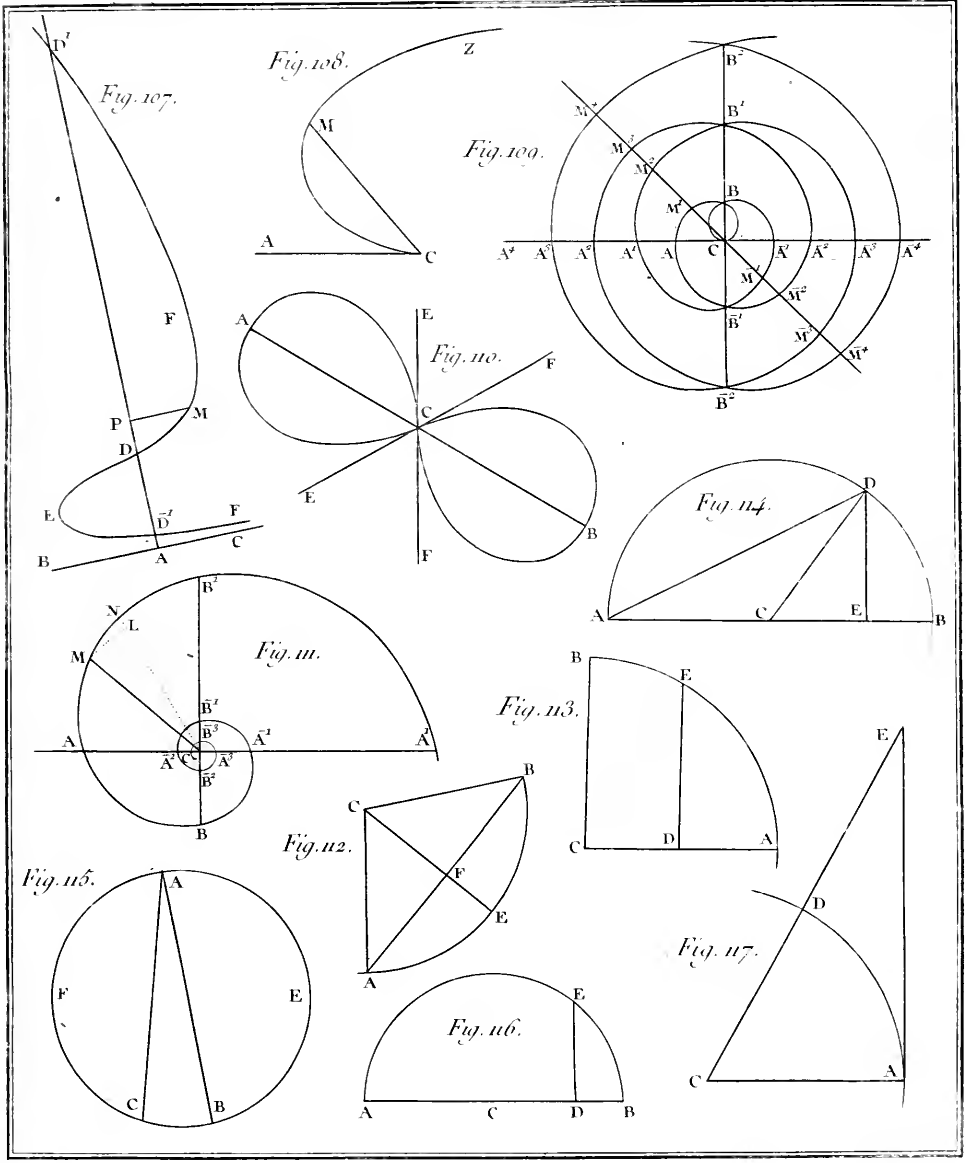


Fig. 107.
D¹ F P M D E D⁻¹ F B A C
Fig. 108.
Z M A C
Fig. 109.
B² B¹ B M⁴ M³ M² M¹ A⁴ A³ A² A¹ A C A¹ A² A³ A⁴ M¹ M² M³ M⁴ B¹ B²
Fig. 110.
A E F C E B F
Fig. 111.
B² N L M B¹ B³ A A² C A³ A¹ A² B² B
Fig. 112.
C B F E A
Fig. 113.
B E C D A
Fig. 114.
D A C E B
Fig. 115.
A F E C B
Fig. 116.
E A C D B
Fig. 117.
E D C A

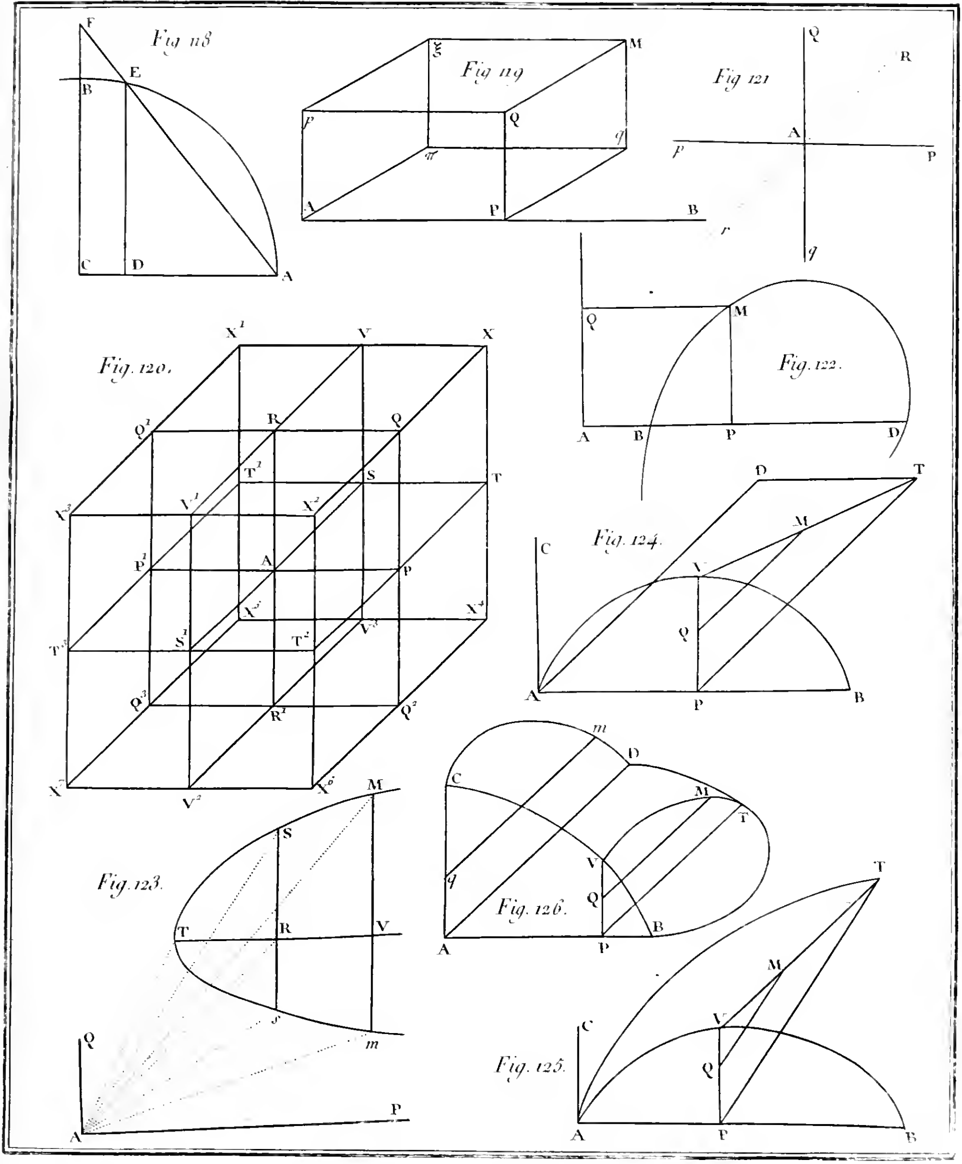


Fig 118
F E B C D A
Fig 119
ξ M p Q q π A P B r
Fig 121
Q R A p P q
Fig. 120.
X¹ V X Q¹ R Q T¹ S T X³ V¹ X² P¹ A P X⁵ X⁴ T³ S¹ T² V³ Q³ R² Q² X⁷ V² X⁶
Fig. 122.
Q M A B P D
Fig. 124.
D T M C V Q A P B
Fig. 123.
M S T R V s m Q P A
Fig. 126.
m D C M T V q Q A P B
Fig. 125.
T M V C Q A P B

Fig. 127.

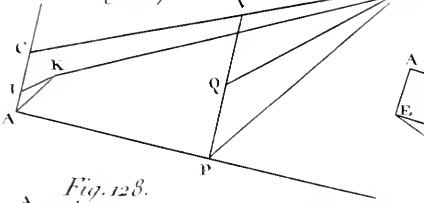


Fig. 129.

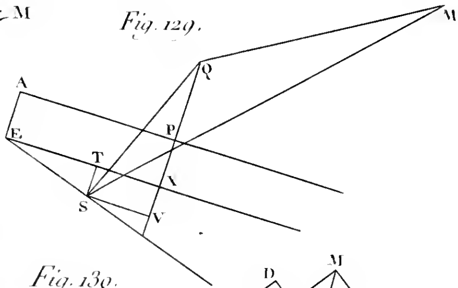


Fig. 128.

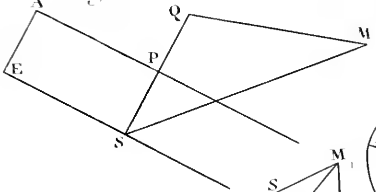


Fig. 130.

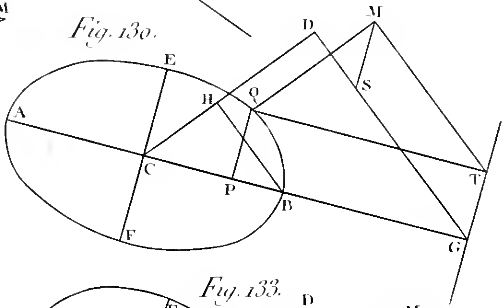


Fig. 131.

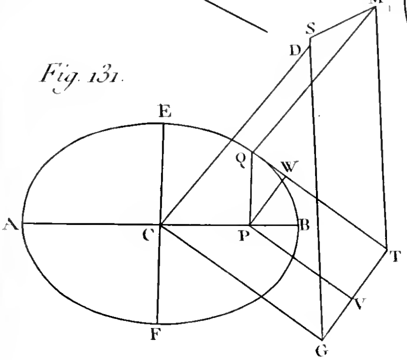


Fig. 133.

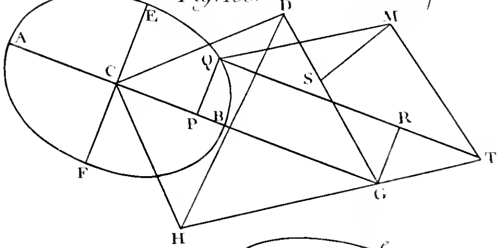


Fig. 132.

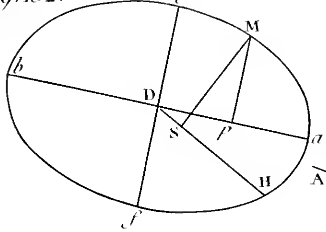
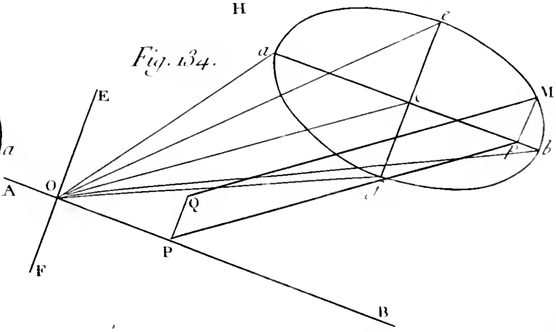


Fig. 134.



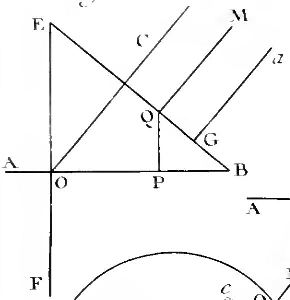


Fig. 135.

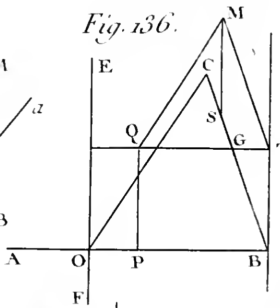


Fig. 136.

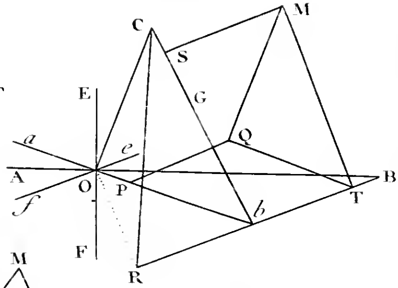


Fig. 137.

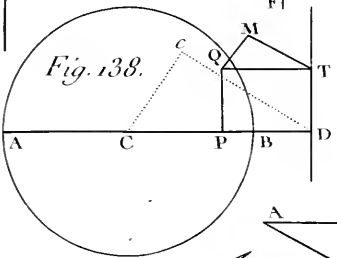


Fig. 138.

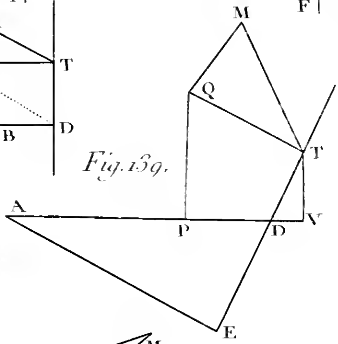


Fig. 139.

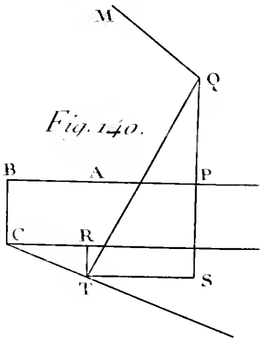


Fig. 140.

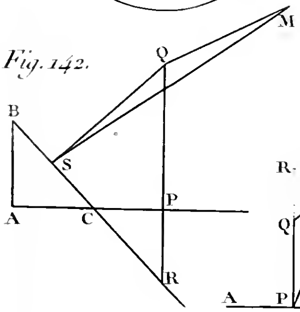


Fig. 142.

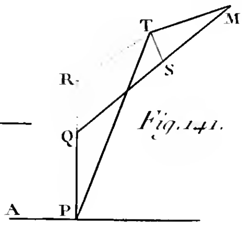


Fig. 141.

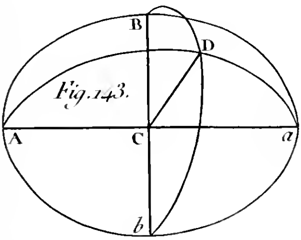


Fig. 143.

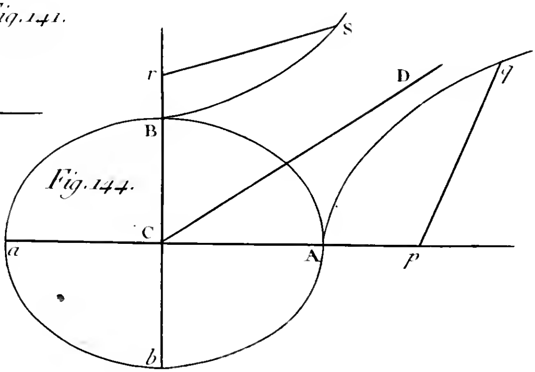


Fig. 144.

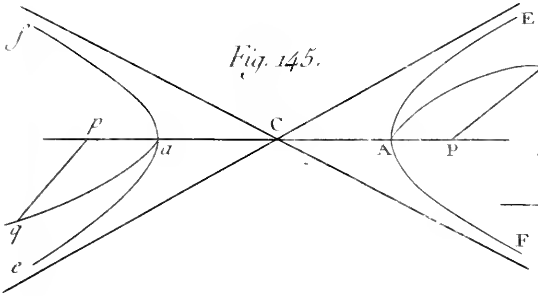


Fig. 145.

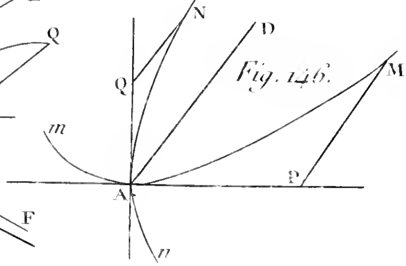


Fig. 146.

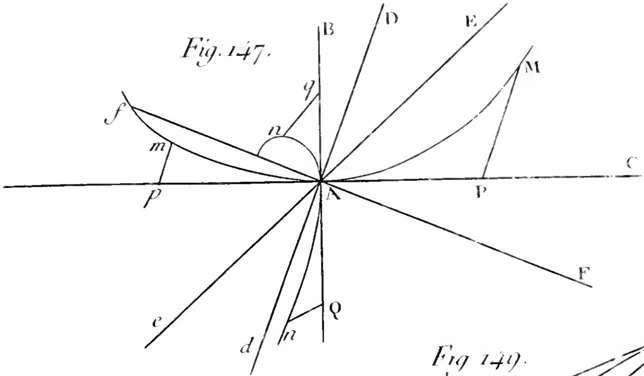


Fig. 147.

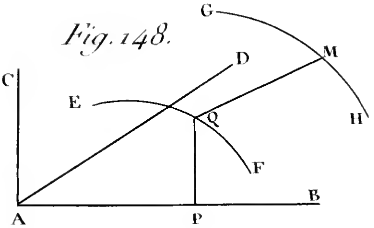


Fig. 148.

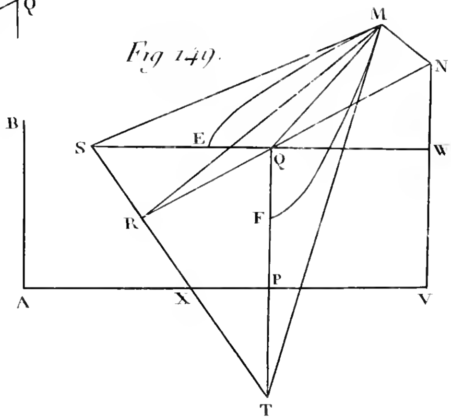


Fig. 149.